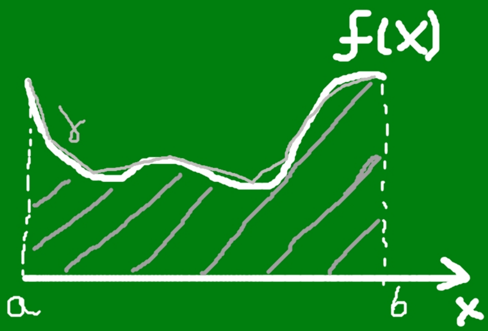
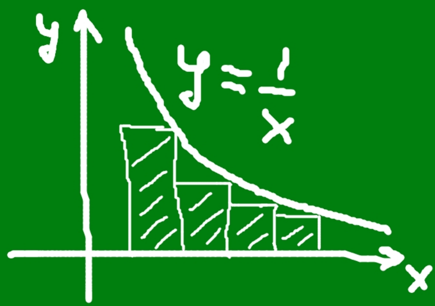
Real analysis II



$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

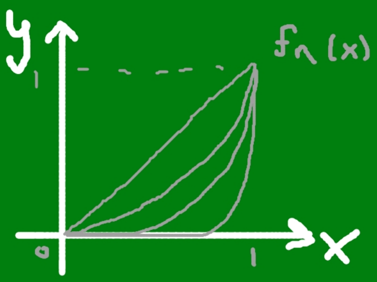


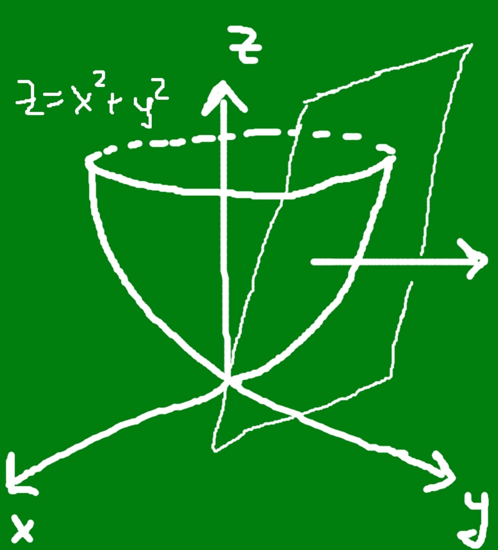
$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots = -\ln 2$$

$$-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots = -\frac{3}{2}\ln 2$$

$$\{ f_n(x) = x^n ,\ n \geq 1 \}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$$





$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$$

Зміст

1 Ряди

Definition 1.0.1 Рядами називають формальну нескінченну суму нескінченної послідовності чисел $\{a_n, n \geq 1\}$:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Частковою сумою даного ряда називають суму перших k членів:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

В такому випадку в нас виникає послідовність часткових сум $\{S_k, k \geq 1\}$.

Якщо така послідовність часткових сум є збіжною, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають **збіжним** та **сумма** цього ряду дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} = \lim_{k\to\infty} S_k = S$$

Інакше - **розбіжним**.

Example 1.0.2 Знайдемо суму: $1 + q + q^2 + \ldots$

Розглянемо часткову суму $S_k = 1 + q + \cdots + q^k = \dfrac{1-q^k}{1-q}$ - сума геом. прогресії.

$\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1-q^k}{1-q} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{1-q}, |q| < 1 \\ \infty, |q| > 1 \end{array}\right.$.

При $q = 1$ маємо: $1 + 1 + 1 + \ldots$,тобто $S_k = k \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} S_k = \infty$.

Підсумуємо:

- сума є збіжною при $|q| < 1$ та $1 + q + q^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-q}$;

- сума є розбіжнрю при $|q| \geq 1$.

1.1 Первинний аналіз збіжності та арифметика рядів

Proposition 1.1.1 Необхідна ознака збіжності ряду

Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Proof.

Зафіксуємо часткові суми: $S_{k+1} = \sum\limits_{n=1}^{k+1} a_n \quad S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$.

Оскільки ряд є збіжним, то $\lim\limits_{k\to\infty} S_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} (S_{k+1} - S_k) = S - S = 0$.

■

Remark 1.1.2 Якщо виникне, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, або її взагалі не існує, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - розбіжний.

Remark 1.1.3 Це лише - необхідна ознака, в жодному випадку не достатня. Якщо границя буде нулевою, то це не означає, що ряд збігається, потрібну інші дослідження.

Example 1.1.4 Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots$

Оскільки $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$, то за **Rm. 3.1.3.**, маємо, що ряд - розбіжний.

Theorem 1.1.5 Критерій Коші

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon.$

Proof.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний $\iff \exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k$ - збіжна границя $\overset{\text{критерій Коші}}{\iff}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : |S_{k+p} - S_k| = \left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon$ ■

Example 1.1.6 Важливий

Розглянемо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ - **гармонічний ряд**. Доведемо, що даний ряд - розбіжний, використовуючи критерій Коші, тобто

$\exists \varepsilon > 0 : \forall K : \exists k_1, k_2 \geq K : \left| \sum\limits_{n=k_1}^{k_2} \dfrac{1}{n} \right| \geq \varepsilon$

Дійсно, якщо $\varepsilon = 0.5$, $k_1 = K, k_2 = 2K$, то отримаємо:

$\left| \sum\limits_{n=K}^{2K} \dfrac{1}{n} \right| = \dfrac{1}{K} + \dfrac{1}{K+1} + \dots + \dfrac{1}{2K} > K\dfrac{1}{2K} = 0.5.$

Отже, цей ряд - розбіжний.

Proposition 1.1.7 Задані $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжні. Тоді збіжними будуть й наступні ряди:

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Proof.

Доведу друге. Перший пункт аналогічно. Зафіксуємо часткові суми:

2) $S_k(a) = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \quad , S_k(b) = \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$.

Тоді $S_k(a) + S_k(b) = \sum\limits_{n=1}^{k} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n + \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$.

Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжні, то $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(a) = S(a), \quad \lim\limits_{k\to\infty} S_k(b) = S(b)$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{k\to\infty} (S_k(a) + S_k(b)) = S(a) + S(b) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

■

Definition 1.1.8 Хвостом ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають ряд $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$, де $m \in \mathbb{N}$.

Тобто ми відкидуємо перші $m - 1$ доданків та сумуємо, починаючи з m.

Proposition 1.1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний $\iff \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ - збіжний.

Proof.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний $\overset{\text{критерій Коші}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \iff$

$\iff \exists K' = \max\{K, m\} : \forall k \geq K' : \forall p \geq 1 : \left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \iff \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ - збіжний. ■

1.2 Знакододатні ряди

Тобто розглядаємо зараз лише ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, такі, що $\forall n \geq 1 : a_n \geq 0$.

Proposition 1.2.1 $\{S_k, k \geq 1\}$ - монотонно неспадна послідовність.

Proof.
$\forall k \geq 1 : S_{k-1} - S_k = a_{k+1} \geq 0 \Rightarrow S_k \leq S_{k+1}$. ■

Proposition 1.2.2 Якщо $\{S_k, k \geq 1\}$ - обмежена, то тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.

Proof.
Щойно дізнались що послідовність часткових сум монотонна. До того ж, вона є обмеженою за умовою. Отже, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$, тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний. ■

Theorem 1.2.3 Ознака порівняння в нерівностях
Задані $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ таким чином, що $\forall n \geq 1 :\geq N : a_n \leq b_n$. Тоді:
1) якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжний, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний теж.
2) якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - розбіжний, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - розбіжний теж.

Proof.
Оскільки $a_n \leq b_n$, то тоді $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$.
1) Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжний ряд, тоді $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} b_n = S$.
Отже, в нашій нерівності, якщо $k \to \infty$, то маємо $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S$. Отже, існує границя, а тому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.
2) Це є оберненим твердженням до 1). ■

Example 1.2.4 Важливий
Розглянемо далі $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ - **ряд Діріхле**. Дослідимо на збіжність.
Нехай $\alpha < 1$, тоді $\forall n \geq 1 : \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n^\alpha}$
За ознакою порівняння та минулим прикладом, отримаємо, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ - розбіжний.
Нехай $\alpha > 1$, тоді $\forall n > 1 : \dfrac{1}{n^\alpha} \leq \dfrac{1}{2^\alpha}$. За ознакою порівняння та геом. прогресії, отримаємо, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ - збіжний.
Підсумуємо: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ - $\left[\begin{array}{l} \text{розбіжний}, \alpha \leq 1 \\ \text{збіжний}, \alpha > 1 \end{array}\right.$.

Theorem 1.2.5 Ознака порівняння в границях
Задані $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, тут члени строго додатні. Відомо, що $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$. Тоді:

1) Якщо $l \neq 0$ та $l \neq \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжні або розбіжні одночасно;

2) Якщо $l = 0$, то із збіжності $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Remark 1.2.6 До речі, $l \geq 0$, оскільки всі члени - додатні.

Proof.
1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l \neq 0$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \left|\dfrac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon$.
Оберемо $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$, тоді $\dfrac{l}{2} < \dfrac{a_n}{b_n} < \dfrac{3l}{2} \Rightarrow \dfrac{l}{2} b_n < a_n < \dfrac{3l}{2} b_n$, $\forall n \geq N$.
Припустимо, що $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$ - збіжний, тоді збіжним буде $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \dfrac{3l}{2} b_n$, а отже, за попередньою теоремою, $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ - збіжний. Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.
Якщо $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ - збіжний, тоді збіжним буде $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \dfrac{l}{2} b_n$, а отже $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$ - збіжний. Тому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжний.
Аналогічними міркуваннями доводиться розбіжність.

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l = 0$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$
Оберемо $\varepsilon = 1$, тоді $\forall n \geq N : a_n < b_n$. Тоді виконується попередня теорема, один з двох пунктів ■

Theorem 1.2.7 Ознака Даламбера
Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - строго додатній. Нехай $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тоді:
1) Якщо $q < 1$, то ряд - збіжний;
2) Якщо $q > 1$, то ряд - розбіжний;
3) Якщо $q = 1$, то відповіді нема.

Proof.
1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon$.
Встановимо $\varepsilon = \dfrac{1-q}{2}$, тоді $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = \dfrac{1+q}{2} \implies \forall n \geq N : a_{n+1} < \dfrac{1+q}{2} a_n$.
$\Rightarrow a_{N+1} < \dfrac{1+q}{2} a_N$
$\Rightarrow a_{N+2} < \dfrac{1+q}{2} a_{N+1} < \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^2 a_N$
$\vdots$
$\Rightarrow \forall k \geq 1 : a_{N+k} < \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^k a_N$
Розглянемо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^k a_N = a_N \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^k$
Вираз під сумою буде менше за 1, цей ряд - геом. прогресія, збіжний.
Тоді $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ - збіжний, отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.

2) Якщо встановити $\varepsilon = \dfrac{q-1}{2}$, то отримаємо, що $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon = \dfrac{q+1}{2} \implies \forall n \geq N : a_{n+1} > \dfrac{q+1}{2} a_n$.

Аналогічними міркуваннями, отримаємо $\forall k \geq 1 : a_{N+k} > \left(\dfrac{q+1}{2}\right)^k a_N$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{q+1}{2}\right)^k a_N = a_N \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{q+1}{2}\right)^k$

А тут геом. прогресія при виразі, що більше одиниці - розбіжний.
Тоді $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ - розбіжний, отже, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - розбіжний.

3) А тепер в чому проблема при $q = 1$. Розглянемо обидва ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Використаємо для обох ознаку Даламбера:
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot n = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 = 1.$
Результат - однаковий, проте один ряд - розбіжний, а інший - збіжний. Тож $q = 1$ не дає відповіді, шукаємо інші методи. ■

Example 1.2.8 Дослідити на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$.
$a_n = \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{3}{4} < 1.$
Отже, наш ряд - збіжний за Даламбером.

Theorem 1.2.9 Радикальна ознака Коші
Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - додатній. Нехай $\exists \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тоді:
1) Якщо $q < 1$, то ряд - збіжний;
2) Якщо $q > 1$, то ряд - розбіжний;
3) Якщо $q = 1$, то відповіді нема.

Proof.
1) $\exists \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \implies a_n < (q+\varepsilon)^n$.
Оберемо $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тоді маємо: $a_n < \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$.
Розглянемо ряд $\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ - геом. прогресія, вираз в сумі менше за одиниці - збіжний.
Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ - збіжний, а тому $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.

2) $\exists \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, тобто $\exists \{ \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}}, p \geq 1\} : \lim_{p\to\infty} \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}} = q$ - така підпослідовність, що містить цю границю $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists P : \forall p \geq P : \left| \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}} - q \right| < \varepsilon$.
Оберемо $\varepsilon = \frac{q-1}{2}$, тоді $a_{n(p)} > \left(\frac{q+1}{2}\right)^{n(p)}$. Тоді $\lim_{p\to\infty} a_{n(p)} \geq \lim_{p\to\infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^{n(p)} = \infty$.
Отже, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Це означає, що необхідна умова збіжності не виконується - розбіжний.

3) Щоб з'ясувати випадок $q = 1$, розгляньте такі самі ряди як при доведенні ознаки Даламбера. ■

Example 1.2.10 Дослідити на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.
$a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{3} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$
Отже, наш ряд - збіжний за Коші.

Remark 1.2.11 Тепер питання, чому саме верхня границя
Якщо, насправді, порахувати просто границю, то автоматично існує й верхня границя

Але виникають такі ряди, де стандартно границю не порахуєш. Тому треба розбивати на підпослідовності та шукати верхню границю, що й дасть відповідь на збіжність

Theorem 1.2.12 Інтегральна ознака Коші

Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - додатній, такий, що:
1) $\exists f : [1, +\infty) \to \mathbb{R} : \forall n \geq 1 : a_n = f(x)$;
2) $f(x)$ спадає на $[1. +\infty)$.
Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ збіжні або розбіжні одночасно.

Proof.
Оскільки $f(x)$ спадає, то $\forall k \geq 1 : \forall x \in [k, k+1]$:
$a_k \geq f(x) \geq a_{k+1}$.
$a_k = \displaystyle\int_k^{k+1} a_k\, dx \geq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \geq \int_k^{k+1} a_{k+1}\, dx = a_{k+1}$.
Просумуємо ці нерівності від $k = 1$ до $k = M$, отримаємо:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{M} a_k \geq \int_1^{M} f(x)\, dx \geq \sum_{k=1}^{M} a_{k+1}$.
Якщо $M \to \infty$, то за теоремою про поліцаїв отримаємо:
$\displaystyle\lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{M} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ та $\displaystyle\lim_{M\to\infty} \int_1^{M} f(x)\, dx = \int_1^{\infty} f(x)\, dx$.
Із збіжності ряду випливає збіжність інтегралу і навпаки. ■

Example 1.2.13 Дослідити на збіжність $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Маємо функцію $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$. Зрозуміло, що f спадає на $[2, +\infty)$, бо $x, \ln x$ там зростають.
$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$ - розбіжний.
Отже, наш ряд - розбіжний за Коші інтегральним.

1.3 Знакозмінні ряди

Definition 1.3.1 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Definition 1.3.2 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **умовно збіжним**, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний, але $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - не збіжний.

Proposition 1.3.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - абсолютно збіжний $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.

Proof.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - абсолютно збіжний $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - збіжний $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 :$
$\displaystyle\left| \sum_{n=k}^{k+p} |a_n| \right| < \varepsilon \iff \left| \sum_{n=k}^{k+p} a_n \right| \leq \left| \sum_{n=k}^{k+p} |a_n| \right| < \varepsilon \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний. ■

Theorem 1.3.4 Ознака Лейбніца

Задано ряд вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ - знакозмінний ряд. Відомо, що:
1) $\forall n \geq 1 : a_n \geq 0$;
2) $\{a_n, n \geq 1\}$ - монотонно спадає;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Тоді заданий ряд - збіжний.

Proof.
Розглянемо послідовність часткових сум $\{S_{2k}, k \geq 1\}$. Отримаємо наступне:
$S_{2k} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(a_{2k-1} - a_{2k})}_{\geq 0} \geq 0.$
$S_{2k} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(a_{2k-2} - a_{2k-1})}_{\geq 0} - a_{2k} \leq a_1.$
Тобто $0 \leq S_{2k} \leq a_1$ - обмежена послідовність.
Також $S_{2(k+1)} = S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \geq S_{2k}$ - монотонна. Таким чином, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = S$.
Розглянемо ще одну послідовність часткових сум $\{S_{2k+1}, k \geq 1\}$. Зрозуміло, що $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$ $\implies \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} + \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = S + 0 = S$.

Остаточно, маємо, що послідовність $\{S_m, m \geq 1\}$ - збіжна, тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ - збіжний. ■

Corollary 1.3.5 $\forall k \geq 1 : |S - S_k| \leq a_{k+1}$.

Proof.
Розглянемо хвіст ряду $S - S_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. А також розглянемо $\tilde{S_m} = \sum\limits_{n=k+1}^{m} (-1)^{n+1} a_n$. Тоді

$$\tilde{S_m} = S_m - S_k = (-1)^{k+1} (a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+1} - a_{k+5}) - \dots - - \left[\begin{gathered}(a_{m-1} - a_m), k \not\vdots 2 \\ a_m, k \vdots 2\end{gathered}\right.$$

$$\Rightarrow |\tilde{S_m}| = \left| a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+1} - a_{k+5}) - \dots - \left[\begin{gathered}(a_{m-1} - a_m), k \not\vdots 2 \\ a_m, k \vdots 2\end{gathered}\right. \right| =$$

$$= a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+1} - a_{k+5}) - \dots - \left[\begin{gathered}(a_{m-1} - a_m), k \not\vdots 2 \\ a_m, k \vdots 2\end{gathered}\right. \leq a_{k+1}$$

$\implies |S - S_k| = \lim\limits_{m\to\infty} |\tilde{S_m}| \leq a_{k+1}$. ■

Example 1.3.6 Обчислити суму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$ з точністю до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Зрозуміло, що $a_n = \dfrac{1}{n!} \geq 0$, монотонно спадає та н.м. Отже, виконуються ознаки Лейбніца, а тому й отриманий наслідок.
$|S - S_k| \leq a_{k+1} < \varepsilon \implies \dfrac{1}{(k+1)!} < \dfrac{1}{10^5} \implies (k+1)! > 100000.$
Достатньо взяти нам $k = 8$. Тому ми отримаємо:
$S \approx S_8 = -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} - \dfrac{1}{5040} + \dfrac{1}{40320} = \dfrac{-3641}{5760}.$

Theorem 1.3.7 Ознаки Діріхле та Абеля
Задано ряд вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Нехай виконано один з двох блок умов:

$\sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ - обмежена.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.
$\{b_n, n \geq 1\}$ - монотонна та н.м.	$\{b_n, n \geq 1\}$ - монотонна та обмежена.
ознака Діріхле	*ознака Абеля*

Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ - збіжний.

Proof.
Спочатку почнемо з ознаки Діріхле. Припустимо b_n спадає. Застосуємо критерій Коші для доведення.

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n b_n \right| = \left| A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1} - \sum_{n=k+1}^{k+p-1} A_n (b_{n+1} - b_n) \right| = \left| A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1} + \sum_{n=k+1}^{k+p-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \right| \leq$$

$|A_{k+p}b_{k+p} - A_k b_{k+1}| + \sum_{n=k+1}^{k+p-1} |A_n||b_{n+1} - b_n| \boxed{<}$

За умовою, $A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ - обмежена, тобто $\exists C > 0 : \forall k \geq 1 : |A_k| \leq C$.
Також b_n - н.м., тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : |b_k| < \varepsilon$.
Тоді $|A_{k+p}b_{k+p} - A_k b_{k+1}| \leq |A_{k+p}||b_{k+p}| + |A_k||b_{k+1}| < 2C\varepsilon$.
Також $\sum_{n=k+1}^{k+p-1} |A_n||b_{n+1} - b_n| \leq C \sum_{n=k+1}^{k+p-1} (b_n - b_{n+1}) = C(b_{k+1} - b_{k+p}) \leq Cb_{k+1} < C\varepsilon$

$\boxed{<} 3C\varepsilon$. Виконано $\forall \varepsilon > 0$ та $\forall k \geq K : \forall p \geq 1$. Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ - збіжний.

Далі доводимо ознаку Абеля. Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний, то тоді обмежений. Оскільки $\{b_n\}$ монотонна та обмежена, то $b_n \to B$. Якщо розглянути $c_n = b_n - B$, то маємо $\{c_n, n \geq 1\}$ - монотонна та н.м. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ - збіжний за Діріхле. А далі ясно, що $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ - збіжний. ■

Example 1.3.8 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Будемо для цього використовувати ознаку Діріхле, встановимо $a_n = \sin n, b_n = \frac{1}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{k} \sin n = \sum_{n=1}^{k} \frac{\sin(1 \cdot n) \sin \frac{1}{2}}{\sin \frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{k} \left(\cos\left(n - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \right) =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{3}{2} - \cos\frac{5}{2} + \dots + \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \right) = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{1}{2} - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \right) =$$
$$\frac{\sin\frac{k+1}{2} \sin\frac{k}{2}}{\sin\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, $\left| \sum_{n=1}^{k} \sin n \right| = \left| \frac{\sin\frac{k+1}{2} \sin\frac{k}{2}}{\sin\frac{1}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} \implies \sum_{n=1}^{k} \sin n$ - обмежена.

Зрозуміло, що $\frac{1}{n}$ монотонна та н.м.

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ - збіжний.

Example 1.3.9 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} e^{-n}$.

Будемо для цього використовувати ознаку Абеля, встановимо $a_n = \frac{\sin n}{n}, b_n = e^{-n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ - збіжний за попереднім прикладом.
e^{-n} - монотонна, оскільки $e^{-n-1} - e^{-n} = e^{-n}(e^{-1} - 1) < 0$.
e^{-n} - обмежена, оскільки $0 < e^{-n} < e$.

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} e^{-n}$ - збіжний.

Theorem 1.3.10 Теорема Рімана

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - умовно збіжний.

Тоді для довільного $M \in \mathbb{R}$ буде існувати перестановка членів ряду, після якої новий ряд із переставленими членами буде збіжним до числа M.
Поки без доведення

Theorem 1.3.11 Теорема Діріхле

Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - абсолютно збіжний. Тоді будь-яка перестановка членів ряду не змінить суму.
Поки без доведення

2 Функціональні ряди

2.1 Функціональні послідовності

Definition 2.1.1 **Функціональною послідовністю** назвемо послідовність $\{f_n(x), n \geq 1\}$, всі функції задані на одній множині A.

Definition 2.1.2 Функція $f(x)$, що задана теж на множині A, називається **точковою границею** функціональної послідовності $\{f_n(x), n \geq 1\}$, якщо

$$\forall x \in A : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Example 2.1.3 Розглянемо послідовність $\left\{ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}, n \geq 1 \right\}$ на $[0,5]$.
Тоді $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x} = \dfrac{x}{\dfrac{1}{n}+1+\dfrac{x}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x = f(x)$.

Remark 2.1.4 Поточкова збіжність дала змогу створити нову функцію $f(x)$, збираючи всі точки $x \in A$. Додатково зазначу, що в кожній точці $x \in A$ виникає числова послідовність, яка має єдину границю при збіжності - тому наша функція $f(x)$ є єдиною такою.

Definition 2.1.5 Функція $f(x)$ називається **рівномірною границею** функціональної послідовності $\{f_n(x), n \geq 1\}$ на множині A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Позначення: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$.

Corollary 2.1.6 $f(x)$ - рівномірна границя послідовності $\{f_n(x), n \geq 1\}$ на $A \iff$
$\iff \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0, n \to \infty$.
Дійсно, $\forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

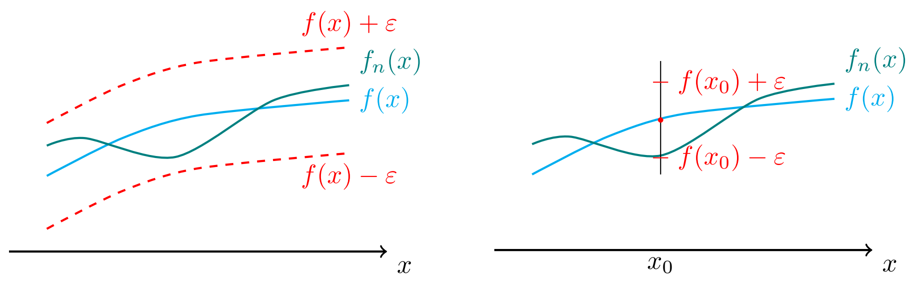
Proposition 2.1.7 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ - послідовність на A. Відомо, що $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$ на множині A. Тоді $\forall x \in A : f_n(x) \to f(x), n \to \infty$.

Proof.
За умовою, $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \implies f_n(x) \to f(x), n \to \infty$. ■

Corollary 2.1.8 Рівномірно збіжна послідовність має єдину рівномірну границю.

Remark 2.1.9 Таким чином, єдиний кандидат на рівномірну збіжність послідовність $\{f_n, n \geq 1\}$ - це сама функція f, що була отримана в результаті поточкової збіжності.

Example 2.1.10 Розглянемо послідовність $\left\{ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}, n \geq 1 \right\}$ на $[0,5]$.
Маємо $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x} = \dfrac{x}{\dfrac{1}{n}+1+\dfrac{x}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x = f(x)$.
Також $\sup\limits_{x\in[0,5]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,5]} \dfrac{x+x^2}{1+n+x} \boxed{=}$
Розглянемо функцію $h(x) = \dfrac{x+x^2}{1+n+x}$ на $[0,5]$. Знайдемо похідну:
$h'(x) = \dfrac{(1+2x)(1+n+x) - x - x^2}{(1+n+x)^2} = \dfrac{1+n+2x+2nx+x^2}{(1+n+x)^2} > 0$.
Отже, h - строго монотонно зростає. Тому найбільше значення досягається при $x = 5$.
$\boxed{=} \dfrac{5+25}{1+n+5} = \dfrac{30}{6+n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Таким чином, $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \to \infty$.



Ліворуч - рівномірна збіжність. Праворуч - поточкова збіжність.

Тепер найголовніше питання, а для чого власне нам потрібна рівномірна збіжність, чому не достатньо поточкової збіжності. Одну з відповідей на це питання дає такий приклад.

Example 2.1.11 Розглянемо послідовність $\{f_n(x) = x^n, n \geq 1\}$ на множині $[0,1]$. Тоді маємо:
$f_n(x) = x^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} = f(x).$
$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 1, & x \in [0,1) \end{cases}.$
В загальному випадку, $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \not\to 0$, а тому можемо сказати, що $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x), n \to \infty$.

Найголовніше з цього прикладу, що $f_n \in C([0,1])$, проте $f \notin C([0,1])$, а хотілось би. Саме тому нам потрібні рівномірні збіжності.

Definition 2.1.12 Нормою функції $f(x)$ на множині A назвемо таке число:

$$||f|| = \sup_{x\in A} |f(x)|$$

Proposition 2.1.13 Властивості
Задані функції f, g на множині A. Тоді справедливо наступне:
1) $||f|| \geq 0$;
2) $||f|| = 0 \iff f(x) = 0, \forall x \in A$;
3) $||\lambda f|| = |\lambda| \cdot ||f||, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
4) $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$;
5) $|||f|| - ||g||| \leq ||f - g||$.

Proof.
1), 3) зрозуміло.
2) $||f|| = 0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in A} |f(x)| = 0 \Rightarrow 0 \leq |f(x)| \leq 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.
В зворотньому напрямку все зрозуміло.
4) $||f + g|| = \sup\limits_{x\in A} |f(x) + g(x)| \leq \sup\limits_{x\in A}(|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup\limits_{x\in A} |f(x)| + \sup\limits_{x\in A} |g(x)| = ||f|| + ||g||$.
5) *Вказівка:* $||f|| \leq ||f - g||$ та $||g|| \leq ||g - f||$. ■

Remark 2.1.14 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \to \infty \iff ||f_n - f|| \to 0, n \to \infty$

Тепер буде нам набагато простіше розписувати, що таке рівномірна збіжність.

Theorem 2.1.15 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ - послідовність на множині A та $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$.
Відомо, що $\forall n \geq 1 : f_n(x) \in C(A)$. Тоді $f(x) \in C(A)$, а також $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Proof.
Зафіксуємо т. $x_0 \in A$. За умовою, $||f_n - f|| \to 0, n \to \infty$.
$\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3} \implies |f_N(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
$f_N(x) \in C(A) \implies \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
$\implies |f(x) - f(x_0)| = |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))| \leq$
$\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

$\Longrightarrow f(x)$ - неперервна в т. x_0, яка є довільною. Отже, $f(x) \in C(A)$.
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. ■

Theorem 2.1.16 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ - послідовність на множині $[a,b]$ та $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$. Відомо, що $\forall n \geq 1 : f_n(x) \in \mathcal{R}([a,b])$. Тоді $f(x) \in \mathcal{R}([a,b])$, а також $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Proof.
Маємо $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$.
Зокрема $\forall x \in [a,b] : |f_N(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} \implies f_N(x) - \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$.
Тоді $\forall k = 1, \ldots, n$ виконуються нерівності:
$m_k(f) \geq f_N(x) - \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} \geq m_k(f_N) - \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$.
$M_k(f) \leq f_N(x) + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq M_k(f_N) + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$.
Оскільки $f_N \in \mathcal{R}([a,b])$, то $\exists \tau : U(f_N,\tau) - L(f_N,\tau) = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k(f_N) - m_k(f_N) < \dfrac{\varepsilon}{2}$
$\implies \forall k = 1, \ldots, n : M_k(f_N) - m_k(f_N) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
$U(f,\tau) - L(f,\tau) = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k(f) - m_k(f))\Delta x_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n}\left(M_k(f_N) - m_k(f_N) + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)\Delta x_k =$
$= \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k(f_N) - m_k(f_N)\Delta x_k + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta x_k < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon \implies f \in \mathcal{R}([a,b])$.
Для доведення рівності зробимо таку оцінку та прямування:
$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b f_n(x) - f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b ||f - f_n||\,dx =$
$= ||f - f_n||(b-a) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

Theorem 2.1.17 Критерій Коші
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$ на $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n,m \geq N : ||f_n - f_m|| < \varepsilon$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$ на A
Тоді $||f_n - f|| \to 0, n \to \infty \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n,m \geq N : \begin{matrix} ||f_n - f|| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ ||f_m - f|| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$
$\implies ||f_n - f_m|| = ||f_n - f + f - f_m|| \leq ||f_n - f|| + ||f_m - f|| < \varepsilon$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n,m \geq N : ||f_n - f_m|| < \varepsilon \implies \forall x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.
Якщо зафіксувати точку $x_0 \in A$, то отримаємо фундаментальну послідовність $\{f_n(x_0), n \geq 1\} \implies$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.
Якщо $m \to \infty$, то маємо, що $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Оскільки це може бути $\forall x_0 \in A$, то тоді $||f_n - f|| < \varepsilon \implies f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$ на A. ■

2.2 Функціональні ряди

Definition 2.2.1 Функціональним рядом називають суму членів функціональної послідовності $\{a_n(x), n \geq 1\}$:

$$a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

Частковою сумою даного ряда називають суму перших k функцій:

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_k(x)$$

В такому випадку в нас виникає функціональна послідовність часткових сум $\{S_k(x), k \geq 1\}$.
Якщо така послідовність збігається в т. x_0, то ряд є **збіжним** в т. x_0 та **сума** цього ряду дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = \lim_{k\to\infty} S_k(x_0) = S(x_0)$$

Інакше - **розбіжним**.
Якщо ряд збігається $\forall x \in B$, то B називають **областю збіжності**

Якщо ряд абсолютно збігається $\forall x \in B$, то B називають **областю абсолютної збіжності**

Якщо ряд умовно збігається $\forall x \in B$, то B називають **областю умовної збіжності**

Example 2.2.2 Дослідити на збіжність ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Для початку перевіримо на абсолютну збіжність, для цього ми досліджуємо $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|$. Застосуємо ознаку Даламбера:
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}(1+x^{2n})|}{|(1+x^{2n+2})x^n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n+2}}\right| =$
$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{x^{2n+1}}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n+2}}+1}\right| = \frac{1}{|x|}$ при $|x|>1$.
$= |x|$ при $|x|<1$.
$= 1$ при $|x|=1$.
Отже, при $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ в перших двох випадках, тобто при $|x| \neq 1$. Це означає збіжність.
При $|x| = 1 \implies x = \pm 1$ треба додатково дослідити.
$x = 1 \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+1} = +\infty \implies$ розбіжний.
$x = -1 \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+1}$ - розбіжний, оскільки $\displaystyle\nexists \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2}$.
Таким чином, область абсолютної збіжності $B_{abs} = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$; область умовної збіжності $B_{cond} = \emptyset$.

Definition 2.2.3 Якщо послідовність часткових сум $\{S_k(x), k \geq 1\}$ збігається рівномірно на множині A, то ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ називають **рівномірно збіжним** на A.

Theorem 2.2.4 Критерій Коші
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - рівномірно збіжний на множині $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left\|\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x)\right\| < \varepsilon$.
Випливає з критерію Коші рівновірної збіжності функціональних послідовностей.

Corollary 2.2.5 Необхідна умова рівномірної збіжності
Задано $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - рівномірно збіжний на A. Тоді $a_k(x) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} 0, k \to \infty$ на A.
Вказівка: критерій Коші при $p = 1$.

Theorem 2.2.6 Мажорантна ознака Вейєрштрасса
Задано $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - ряд на множині A. Відомо, що:
1) $\exists\{c_n, n \geq 1\} : \forall n \geq 1 : \forall x \in A : |a_n(x)| \leq c_n$;
2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ - збіжний. Його ще називають **мажорантним рядом**.
Тоді $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збігається рівномірно на множині A.

Proof.
За критерієм Коші, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ - збіжний $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} c_n \right| < \varepsilon$. Тоді
$\left\| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right\| = \sup_{x \in A} \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right| \leq \left| \sup_{x \in A} \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right| \right| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} \sup_{x \in A} |a_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} c_n < \varepsilon.$
Тому за критерієм Коші, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - рівномірно збіжний на множині A. ■

Example 2.2.7 Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.
Оскільки $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, причому це виконано завжди, а мажорантний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - збіжний, то за ознакою Вейєрштрасса, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ - збіжний рівномірно на $\mathbb{R}$.

Theorem 2.2.8 Ознаки Діріхле та Абеля
Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ - ряд на множині A.
Нехай виконано один з двох блок умов:

$\sum_{n=1}^{k} a_n(x)$ - рівномірно обмежена на A	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - збіжний рівномірно на A
$\{b_n(x), n \geq 1\}$ - монотонна та $b_n(x) \overset{\to}{\to} 0$ на A	$\{b_n(x), n \geq 1\}$ - монотонна та рівномірно обмежена на A
ознаки Діріхле	*ознаки Абеля*

Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ - збіжний рівномірно на множині A.
Доводиться так само, як було в числових рядах.

Example 2.2.9 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, якщо $0 < \alpha \leq 1$.
Аналогічними міркуваннями як в **Ex. ???** ми можемо отримати таку формулу:
$$\sum_{n=1}^{k} \sin nx = \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2} x\right)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} \text{ за умовою, що } \sin \frac{x}{2} \neq 0 \implies x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$
Тоді $\left| \sum_{n=1}^{k} \sin nx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{C}$, за умовою, що розглядається область $[a, b] \subset (2\pi m, 2\pi(m+1))$.
Ну й також $\frac{1}{n^\alpha}$ - монотонна та рівномірно н.м. (тому що від x не залежить) на $[a, b]$.
Таким чином, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ збігається рівномірно в будь-якому відрізку $[a, b] \subset (2\pi m, 2\pi(m+1))$.
TODO. Дописати

Theorem 2.2.10 Задано $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - рівномірно збіжний на A.
Відомо, що $\forall n \geq 1 : a_n(x) \in C(A)$. Тоді $S(x) \in C(A)$.

Proof.
З умови теореми випливає, що $\forall k \geq 1 : S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} a_n(x) \in C(A)$ як сума неперервних функцій
Оскільки ряд - рівномірно збіжний, то тоді $\{S_k(x), k \geq 1\}$ - рівномірно збіжна. Тоді за **Th. 10.?**, $S(x) \in C(A)$. ■

Example 2.2.11 Довести, що $\lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Спочатку треба довести рівномірну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ в деякому лівому околі т. $x = 1$.
Застосуємо ознаку Абеля при $a_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, b_n(x) = x^n$.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ - збіжна за ознакою Лейбніца, а оскільки вона не залежить від x, то тому ще й рівномірно в околі т. $x = 1$.
x^n - зрозуміло, монотонна та монотонно обмежена, оскільки $|x^n| \le 1$.
Таким чином, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ - рівномірно обмежена в лівому околі т. $x = 1$.
А далі $\frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \in C$, а отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \in C$, в тому числі в т. $x = 1$.
Таким чином, $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Theorem 2.2.12 Задано $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - рівномірно збіжний на $[a, b]$.
Відомо, що $\forall n \ge 1 : a_n(x) \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді $S(x) \in \mathcal{R}([a, b])$, а також
$\int_a^b \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n(x)\, dx \right)$.

Proof.
З умови теореми випливає, що $\forall k \ge 1 : S_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ як сума інтегрованих функцій.
Оскільки ряд - рівномірно збіжний, то тоді $\{S_k(x), k \ge 1\}$ - рівномірно збіжна. Тоді за **Th. 10.1.?.**, $S(x) \in \mathcal{R}([a, b])$.
Доведемо тепер тотожність:
$\int_a^b \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \int_a^b \left(\lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n(x) \right) dx = \lim\limits_{k \to \infty} \int_a^b \left(\sum\limits_{n=1}^{k} a_n(x) \right) dx = \lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{k} \left(\int_a^b a_n(x)\, dx \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n(x)\, dx \right)$. ■

Example 2.2.13 Довести, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1 + x)$ для всіх $x \in (-1, 1]$.
Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1 + x}$. Аналогічними міркуваннями (як в попередньому прикладі) ми можемо довести, що ряд збіжний рівномірно на $(-1, 1]$. Покладемо деяке число $x > 0$. Оскільки $(-1)^n t^n \in \mathcal{R}([0, x])$, то звідси $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \in \mathcal{R}([0, x])$. Таким чином,
з одного боку, $\int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$;
із іншого боку, $\int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\, dt = \int_0^x \frac{1}{1 + t}\, dt = \ln(1 + x)$.
Остаточно отримали, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1 + x)$ для всіх $x \in (-1, 1]$.

Theorem 2.2.14 Задано $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$. Відомо, що:
1) $\forall n \ge 1 : a_n(x)$ - неперервно-диференційовані на $[a, b]$;
2) $\exists x_0 \in [a, b] : \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ - збіжний;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ - рівномірно збіжний на $[a,b]$.

Тоді $S(x)$ - збіжний рівномірно, $S(x)$ - диференційована на $[a,b]$, а також $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$.

Proof.
Розглянемо ряд $\tilde{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$. Оскільки $a_n' \in C([a,b])$, то автоматично $a_n' \in \mathcal{R}([a,b])$, а тому $\tilde{S}(x) \in \mathcal{R}([a,b])$. Тоді за попередньою теоремою, можемо отримати, що
$\forall x \in [a,b] : \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} a_n'(t)\, dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(x_0))$ - збіжний рівномірно ряд.
$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(x_0) + a_n(x_0)) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(x) - a_n(x_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ - рівномірно збіжний.
Доведемо тотожність:
$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(x) - a_n(x_0))\right)' + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$. ■

Example 2.2.15

2.3 Степеневі ряди

Definition 2.3.1 Степеневим рядом називаємо ми такий функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

де $\{a_n, n \geq 1\}$ - числова послідовність.

Theorem 2.3.2 Теорема Коші-Адамара
Задано $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ - степеневий ряд. Нехай $\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$ - **радіус збіжності**. Тоді ряд:
при $|x-x_0| < R$ - збіжний абсолютно;
при $|x-x_0| > R$ - розбіжний;
при $|x-x_0| = R$ - відповіді нема.

Proof.
Скористаємось радикальною ознакою Коші для нашого ряду:
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)|^n} = |x-x_0| \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = q$.
Тоді:
При $q < 1$, тобто $|x-x_0| < \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$ - збіжний абсолютно;
При $q > 1$, тобто $|x-x_0| > \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$ - розбіжний;
При $q = 1$ - нема відповіді. ■

Corollary 2.3.3 Наслідок із ознаки Даламбера
Задано $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ - степеневий ряд. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ - **радіус збіжності**. Тоді ряд:
при $|x-x_0| < R$ - збіжний абсолютно;
при $|x-x_0| > R$ - розбіжний;
при $|x-x_0| = R$ - відповіді нема.

Proof.
Скористаємось ознакою Даламбера для нашого ряду:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q.$
Тоді:
При $q<1$, тобто $|x-x_0| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ - збіжний абсолютно;
При $q>1$, тобто $|x-x_0| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ - розбіжний;
При $q=1$ - нема відповіді. ■

Example 2.3.4 Знайдемо область збіжності ряду $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{2^n(n+1)}$.
Маємо $a_n = \dfrac{1}{2^n(n+1)}$, тоді $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+2)}{n+1} = 2$.
Отже, при $|x-7|<2 \implies x\in(5,9)$ ряд збіжний абсолютно. Також при $|x-7|>2 \implies x\in(-\infty,5)\cup(9,+\infty)$ ряд розбіжний.
А ось в $x=5, x=9$ треба додатково обстежити.
При $x=9$ маємо $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ - розбіжний.
При $x=5$ маємо $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ - збіжний за Лейбніцем, але умовно.
Отже, область збіжності $B=[5,9)$.

Theorem 2.3.5 Теорема Абеля
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ - рівномірно збіжний на будь-якому відрізку із області збіжності.

Proof.
Зафіксуємо довільний відрізок $[a,b]$. Будемо розглядати декілька випадків.
1. $[a,b]\subset(x_0-R,x_0+R)$.
Зафіксуємо число $M=\max\{|x_0-a|,|x_0-b|\}$. Звідси $\forall x\in[a,b]:|x-x_0|<M<R$, а тому $|a_n(x-x_0)^n|<|a_n|M^n$.
Розглянемо мажорантний ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nM^n$. Застосуємо ознаку Коші:
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|M^n} = M\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < R\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Отже, цей ряд - збіжний. Тоді за ознакою Вейерштраса, степеневий ряд - збіжний рівномірно на $[a,b]$.

2. $[a,b]\subset[x_0,x_0+R]$.
Розпишемо ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$.
Розглянемо випадок, коли ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ - збіжний. Збіжність степеневого ряду проведемо за ознакою Абеля:
$g_n(x) = \left(\dfrac{x-x_0}{R}\right)^n$
Домовились, що $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ - збіжний, причому рівномірно, оскільки не залежить від x.
Послідовність $\left\{g_n(x) = \left(\dfrac{x-x_0}{R}\right)^n, n\geq 1\right\}$ - рівномірно обмежена, оскільки
$\forall x\in[a,b]\subset[x_0,x_0+R]:|x-x_0|\leq R \Rightarrow \forall n\geq 1: \left|\dfrac{x-x_0}{R}\right|^n \leq 1.$
А також послідовність є монотонною, тому що $\dfrac{x-x_0}{R}<1$.
Отже, за Абелем, ряд - рівномірно збіжний на $[a,b]$.

Аналогічно, коли $[a,b]\subset[x_0-R,x_0]$ за умовою, що $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n$ - збіжний.

3. $[a, b] \subset [x_0 - R, x_0 + R]$.
Тоді відрізок $[a, b]$ розбивається на $[a, x_*] \cup [x_*, b]$. На цих відрізках ряд збіжний рівномірно за п. 2.
$\blacksquare$

Example 2.3.6 Зокрема ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{2^n(n+1)}$ збіжний рівномірно в будь-якому відрізку, в тому числі в тому, що містить початок т. $x = 5$.

Theorem 2.3.7 Позначимо степеневий ряд $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Тоді $S \in C$ в області збіжності.

Proof.
Візьмемо якусь точку $x_* \in (x_0 - R, x_0 + R)$.
Зафіксуємо деякий відрізок $[a, b] \ni x_*$. Якщо $x_* \neq x_0 - R, x_* \neq x_0 + R$, то беремо інтервал $(a, b) \ni x_*$.
На відрізку $[a, b]$ ряд - збіжний рівномірно за теоремою Абеля, члени ряду - неперервні функції.
Отже, за **Th. 10.2.?.**, $S(x) \in C([a, b]) \implies S(x) \in C(\{x_*\})$.
Оскільки т. x_* була довільною, то одразу $S(x) \in C((x_0 - R, x_0 + R))$. $\blacksquare$

Theorem 2.3.8 Позначимо степеневий ряд $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Тоді $S \in \mathcal{R}$ в області збіжності.
$\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$, причому радіус збіжності нового степеневого ряду також R.

Proof.
На відрізку $[x_0, x_*]$ або $[x_*, x_0]$ степеневий ряд збігається рівномірно за Абелем. Тому за Th., $S \in \mathcal{R}([x_0, x_*]$ або $[x_*, x_0])$.
Тотожність випливає з цього ж Th. Тепер перевіримо, що радіус збіжності дійсно такий самий. За Коші-Адамара,

$$R_{new} = \frac{1}{\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n+1}{|a_n|}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n+1} \cdot \frac{1}{\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|} = 1 \cdot R = R. \quad \blacksquare$$

Theorem 2.3.9 Позначимо степеневий ряд $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Тоді він диференційований в області збіжності.
$\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$, причому радіус збіжності нового степеневого ряду також R.

Proof.
Розглянемо ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$. Радіус збіжності збігається, оскільки

$$R_{new} = \frac{1}{\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Візьмемо якусь точку x_* з області збіжності. Нехай відрізок $[a, b] \ni x_*$. На відрізку $[a, b]$ ряд - збіжний рівномірно за теоремою Абеля. Використаємо далі **Th. 10.?**:
1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ - збіжний принаймні в одній точці;
2) Всі члени ряду - диференційовані функції;
3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^*(x-x_0)^n$ - рівномірно збіжний на $[a, b]$.
Отже, $S(x)$ - диференційований на $[a, b]$, зокрема і в т. x_*. Оскільки т. x_* була довільною, то одразу $S(x)$ - диференційований в $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Тому дійсно, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(x-x_0)^{n-1}$. $\blacksquare$

2.4 Зв'язок з Тейлором та єдиність степеневого ряду

Theorem 2.4.1 Теорема Тейлора
Задано функцію f та точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Відомо, що
1) $f \in C^{(\infty)}((x_0 - R, x_0 + R))$;
2) $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \geq 1 : \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M^n$.

Тоді $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ функція розкладується в ряд Тейлора $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Якщо $\left[\begin{array}{l} R < \infty \\ R = \infty \end{array}\right.$ то ряд рівномірно збігається на $\left[\begin{array}{l} (x_0 - R, x_0 + R) \\ [x_0 - R_0, x_0 + R_0] \end{array}\right.$, причому $\forall R_0 \in \mathbb{R}$.

Proof.
Розкладемо функцію в ряд Тейлора за остачею Лагранжа:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}.$$
Тоді маємо, що
$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right| = \left|\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}\right| \leq \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} r^{k+1}.$$
Розглянемо тепер ряд $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} r^{k+1}$. За ознакою Даламбера, $\displaystyle\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{Mr}{k+2} = 0 < 1$.

Цей ряд є збіжним. Отже, за необхідною ознакою збіжності, $\displaystyle\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} r^{k+1} = 0$.

Звідси випливає, що
$$\sup_{x \in (x_0 - R, x_0 + R)} \left|f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right| \leq \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} r^{k+1} \to 0,\ k \to \infty.$$
Отримали $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \rightrightarrows f,\ k \to \infty$

Таким чином, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ - збіжний рівномірно на $(x_0 - R, x_0 + R)$. ■

Theorem 2.4.2 Степеневий ряд задається єдиним чином.

Remark 2.4.3 Математично кажучи, якщо $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ мають одне значення на $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то $\forall n \geq 0 : a_n = b_n$.

Proof.
$S(x_0) = a_0 = b_0$.
$$S'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot n(x - x_0)^{n-1}.$$
$\Rightarrow S'(x_0) = a_1 = b_1$.
$\vdots$
Таким чином, $\forall n \geq 0 : a_n = b_n$. ■

Corollary 2.4.4 Ряд Тейлора для суми степеневого ряду співпадають с самим степеневим рядом на області збіжності.

Example 2.4.5 Маємо функцію $\cos x$. Розглянемо деяку точку $x_0 = 0$, встановимо $R = +\infty$.
$\exists M = 1 : \forall n \geq 1 : \forall x \in \mathbb{R} : |f^{(n)}(x)| = \left|\cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)\right| \leq 1$.
Таким чином, ми можемо розкласти $\cos x$ в ряд Тейлора - отримаємо такий вигляд:
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, x \in \mathbb{R}.$$

Основні розклади

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$;

2. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$;

3. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$;

4. $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad |x| < 1$;

5. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \qquad x \in (-1, 1]$;

6. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k, \qquad |x| < 1.$

Example 2.4.6 Розкласти функцію $f(x) = \ln\bigl(1 + 2x - 8x^2\bigr)$ в ряд Тейлора.
Зауважимо, що $\ln\bigl(1 + 2x - 8x^2\bigr) = \ln(1-2x)(1+4x) = \ln(1-2x) + \ln(1+4x)$.
$\ln(1-2x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(-2x)^k = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k$ за умовою $|2x| < 1$.
$\ln(1+4x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(4x)^k = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k} x^k$ за умовою $|4x| < 1$.
Остаточно $f(x) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^k + (-4)^k}{k}\right) x^k$ за умовою $|x| < \frac{1}{4}$.

3 Вступ до $\mathbb{R}^m$

Простір $\mathbb{R}^m$ зберігає в собі **арифметичні вектори** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, причому $\forall j = \overline{1,m} : x_j \in \mathbb{R}$.

Візьмемо довільні вектори
$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$. Ми можемо створити операції **додавання** та **множення на скаляр** таким чином:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_m + y_n \end{pmatrix} \qquad \alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Із таким означенням операцій легко доводиться, що $\mathbb{R}^m$ утворює лінійний простір.
Надалі ми ще будемо використовувати **скалярний добуток**, що визначається таким чином:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_my_m$$

3.1 Топологія та принцип аналіза в $\mathbb{R}^m$

Definition 3.1.1 Нормою на множині $\mathbb{R}^m$ будемо називати тут таку величину:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$$

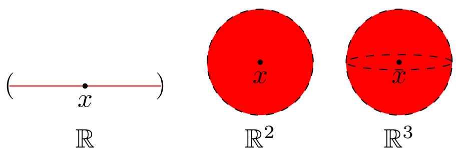
Фактично кажучи, норма - це узагальнення довжини від початку. В нашому випадку початок грає роль $\vec{0}$.
А ось відстань між двома векторами описується таким чином:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Решта означень будуть абсолютно аналогічними, просто тепер буде випадок з векторами.

Definition 3.1.2 ε**-околом** точки $\vec{x}$ будемо називати таку множину:

$$U_\varepsilon(\vec{x}) = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^m : ||\vec{x} - \vec{a}|| < \varepsilon\}$$



Її ще також називають **відкритим шаром** з радіусом ε в центрі т. $\vec{x}$ та позначається як $B(\vec{x}, \varepsilon)$.

Definition 3.1.3 Задамо множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та елемент $\vec{a} \in A$.
Точку $\vec{a}$ називають **внутрішньою**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{a}) \subset A$$

А множина A називається **відкритою**, якщо кожна її точка - внутрішня.

Definition 3.1.4 Задамо множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та елемент $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$.
Точку $\vec{a}$ називають **граничною** множини A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{a} : x \in U_\varepsilon(\vec{a})$$

А множина A називається **замкненою**, якщо вона містить всі граничні точки.

Definition 3.1.5 Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та т. $\vec{x} \in A$.
Точка $\vec{x}$ називається **ізольованою**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A = \{\vec{x}\}$$

Також решта тверджень будуть схожі на ті твердження, що були при топології $\mathbb{R}$. Тому доводити я повторно не буду, просто залишу як нагадування.

Proposition 3.1.6 Якщо $\{A_\lambda\}$ - сім'я зліченних відкритих підмножин, то $\bigcup\limits_\lambda A_\lambda$ - відкрита.

Proposition 3.1.7 $\vec{a}$ - гранична точка $A \subset \mathbb{R}^m \iff \forall \varepsilon > 0 : A \cap U_\varepsilon(\vec{a})$ - нескінченна множина.

Proposition 3.1.8 A - відкрита множина $\iff$ A^c - замкнена множина.

Proposition 3.1.9 Якщо $\{A_\lambda\}$ - сім'я зліченних замкнених підмножин, то $\bigcap\limits_\lambda A_\lambda$ - замкнена.

Proposition 3.1.10 Точка $\vec{x} \in A$ - ізольована $\iff$ $\vec{x}$ - не гранична для A.

Proposition 3.1.11 $\mathbb{R}^m, \emptyset$ - одночасно відкриті та замкнені множини.

Proposition 3.1.12 Відкритий шар $B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$ є дійсно відкритим.
Замкнений шар $B[\vec{a}, r] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}$ є дійсно замкненим.

Proof.
Нехай $\vec{x} \in B(\vec{a}, r) \implies \|\vec{x} - \vec{a}\| < r$. Встановимо $\varepsilon = r - \|\vec{x} - \vec{a}\|$.
Тоді $\vec{y} \in U_\varepsilon(\vec{x}) \implies \|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon \implies \|\vec{y} - \vec{a}\| = \|\vec{y} - \vec{x} + \vec{x} - \vec{a}\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon + \|\vec{x} - \vec{a}\| = \varepsilon \implies \vec{y} \in B(\vec{a}, r)$.
Отже, $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset B(\vec{a}, r)$, так для кожної т. $\vec{x} \in B(\vec{a}, r)$. А тому множина $B(\vec{a}, r)$ - відкрита.

$B[\vec{a}, r] = \mathbb{R}^m \setminus B(\vec{a}, r) = \mathbb{R}^m \cap B^c(\vec{a}, r)$ - обидві множини є замкненими. Тому їхній перетин - замкнена.
■

3.2 Границя послідовності

Definition 3.2.1 Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ називається **границею послідовності** векторів $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| < \varepsilon$$

Позначення: $\lim\limits_{n \to \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$.

Theorem 3.2.2 Для послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ існує $\lim\limits_{n \to \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a} \iff$
$\iff$ для всіх координат послідовності $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ існують $\lim\limits_{n \to \infty} a_j^{(n)} = a_j, j = \overline{1, m}$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : ||\vec{a}^{(n)} - \vec{a}|| < \varepsilon$.

У нас границя визначається вектором $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$. Тоді $\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_1^{(m)} - a_m)^2}$
$\implies \forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)} - a_j| = \sqrt{(a_j^{(n)} - a_j)^2} < \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_1^{(m)} - a_m)^2} < \varepsilon$.
Отже, $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_j^{(n)} = a_j$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall j = \overline{1, m} : \exists \lim\limits_{n \to \infty} a_j^{(n)} = a_j$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |a_j^{(n)} - a_j| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.
$\implies \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \dfrac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$.
Отже, $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$. ■

Definition 3.2.3 Послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : ||\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}|| < \varepsilon$$

Theorem 3.2.4 Критерій Коші
$\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - збіжна $\iff$ $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - фундаментальна.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - збіжна, тобто $\forall j = \overline{1,m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ - збіжні.
Тоді всі вони - фундаментальні за критерієм Коші матана $\mathbb{R}$, тобто
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_j : \forall n, k \geq N_j : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.
$\implies \exists N = \max\{N_1, \dots, N_m\} : \forall n, k \geq N :$
$\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1^{(k)})^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m^{(k)})^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \dfrac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$.
Отже, наша послідовність - фундаментальна.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - фундаментальна, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| < \varepsilon$.
Тоді $\forall j = \overline{1,m} : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \varepsilon$ (зрозуміло), тобто $\forall j = \overline{1,m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ - фундаментальні.
Отже, вони всі - збіжні, а тому $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - збіжна. ■

Definition 3.2.5 Послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається **обмеженою**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$$

Definition 3.2.6 Підпослідовність послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається послідовність $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$, де $\{n_l, l \geq 1\}$ - строго зростаюча послідовність в $\mathbb{N}$.

Theorem 3.2.7 Теорема Больцано-Вейєрштрасса
Будь-яка обмежена послідовність векторів має збіжну підпослідовність векторів.

Proof.
Маємо обмежену послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$, тобто $\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$
Тоді кожна координата є обмеженою, оскільки $\forall j = \overline{1,m} : |a_j^{(n)}| \leq \sqrt{\left|a_1^{(n)}\right|^2 + \dots + \left|a_m^{(n)}\right|^2} \leq C$.
Тобто всі послідовності $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ - обмежені.
Розглянемо $\{a_1^{(n)}, n \geq 1\}$ - обмежена. Тоді існує збіжна підпослідовність $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$.
Розглянемо підпослідовність $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$. Вона також є обмеженою, тому всі координатні послідовності - обмежені.
Розглянемо $\{a_2^{(n_l)}, l \geq 1\}$ - обмежена. Тоді існує збіжна підпідпослідовність $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$.
Оскільки підпослідовність $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$ - збіжна, то збіжною буде й підпідпослідовність $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$.
Розглянемо підпідпослідовність $\{\vec{a}^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ - за аналогічними міркуваннями, теж обмежена.
Розглянемо підпідпослідовність $\{a_3^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ - обмежена. Тоді існує збіжна підпідпідпослідовність $\{a_3^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$.
Оскільки підпідпослідовності $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$, $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ - збіжні, то збіжними будуть підпідпідпослідовності $\{a_1^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$, $\{a_2^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$.
$\vdots$
Після m кроків отримаємо підпослідовність $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$, у якій всі координатні послідовності є збіжними. Тоді $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$ - збіжна. ■

Theorem 3.2.8 Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$.
$\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ гранична точка для $A \iff \exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \lim\limits_{n \to \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\vec{x}^0$ - гранична точка для A, тобто $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ - нескінченна.
Зафіксуємо $\varepsilon = \dfrac{1}{n} \implies \forall \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \dfrac{1}{n}$. Тоді $\forall j = \overline{1,m} : |x_j^{(n)} - x_j^0| < \dfrac{1}{n}$.

За теоремою про 2 поліцаїв, отримаємо: $\forall j = \overline{1,m} : x_j^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_j^0$.
Із покоординатної збіжності випливає, що $\vec{x}^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}^0$ для послідовності $\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\exists \{\vec{x}^{(n)}, n\geq 1\} \subset A : \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$. Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \varepsilon$
$\implies \forall n \geq N : \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ - тобто нескінченна $\implies \vec{x}^0$ - гранична точка. ■

Proposition 3.2.9 Задані дві послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n\geq 1\}, \{\vec{b}^{(n)}, n \geq 1\}$, такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)} = \vec{b}$. Тоді:
1) $\forall c \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} c\vec{a}^{(n)} = c \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)} + \vec{b}^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} + \lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}, \lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)}\right)$.

Proof.
1),2) *випливає з властивостей границь в* $\mathbb{R}$*, якщо розглянути покоординатну збіжність.*

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_1^{(n)} b_1^{(n)} + \dots + a_m^{(n)} b_m^{(n)}) = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m = (\vec{a}, \vec{b}) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}, \lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)}\right)$.
■

Example 3.2.10 Розглянемо $\vec{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \dfrac{n-1}{n} & \dfrac{2n^2-1}{n^2} & \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}^T$ - послідовність векторів в $\mathbb{R}^4$. Обчислимо її границю.
Ми можемо обчислити покоординатно, згідно з теоріями:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_2^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_3^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-1}{n^2} = 2$.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_4^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.
Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \dfrac{n-1}{n} & \dfrac{2n^2-1}{n^2} & \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & e \end{pmatrix}^T$.

3.3 Функція від декількох змінних. Границя функції

Ми будемо розглядати функції вигляду $f : A \to \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^m$. Тобто ця функція має m аргументів, а повертає деяке дійсне число.

Example 3.3.1 Розглянемо такі приклади:
1.Маємо функцію $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\} \to \mathbb{R}$, що задана як $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;
2.Маємо функцію $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, що задана як $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m) = x_1 x_2^2 \dots x_m^m$.

Definition 3.3.2 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A.
Число a називається **границею функції** $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$ **в т.** $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - a| < \varepsilon \text{ - def. Коші}$$
$$\forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\vec{x}^{(n)}) = a \text{ - def. Гейне}$$

Позначення: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = a$.

Theorem 3.3.3 Означення Коші $\iff$ Означення Гейне.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Proposition 3.3.4 Арифметичні властивості
Задані функції $f, g : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A. Відомо, що $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = a, \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} g(\vec{x}) = b$. Тоді:
1) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} cf(\vec{x}) = ca, \forall c \in \mathbb{R}$;
2) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = a + b$;
3) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x})g(\vec{x}) = ab$;
4) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \dfrac{a}{b}$ при $b \neq 0$.
Всі вони випливають із арифметичних послідовностей та означення Гейне.

Theorem 3.3.5 Критерій Коші
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A.
$\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \vec{x_1}, \vec{x_2} \in A : ||\vec{x_1} - \vec{x_2}|| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2})| < \varepsilon$.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Example 3.3.6 Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)} \left(\dfrac{y}{x} + \cos(xy)\right)$. Можна позначати це інакше: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to\pi}} \left(\dfrac{y}{x} + \cos(xy)\right)$.
$\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)} \left(\dfrac{y}{x} + \cos(xy)\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)} \dfrac{y}{x} + \lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)} \cos(xy) = \dfrac{\pi}{1} + \cos\pi = \pi - 1.$

Theorem 3.3.7 Границя в полярних координатах
Задано функцію $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Припустимо, що $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = F_1(\rho)F_2(\varphi)$, причому $\lim\limits_{\rho\to 0} F_1(\rho) = 0$ та $F_2(\varphi)$ - обмежена. Тоді $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Proof.
Маємо $\lim\limits_{\rho\to 0} F_1(\rho) = 0 \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \rho : |\rho| < \delta \implies |F_1(\rho)| < \varepsilon$.
Також F_2 - обмежена, тобто $\exists M > 0 : \forall \varphi : |F_2(\varphi)| < M$.
Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді існує таке $\delta > 0$, що $\forall (x, y)$, якщо $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2} = |\rho| < \delta$, то звідси $|f(x, y)| = |f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)| = |F_1(\rho)||F_2(\varphi)| < M\varepsilon$.
Таким чином, дійсно, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. ■

Example 3.3.8 Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$.
Маємо $x = \rho\cos\varphi$ та $y = \rho\sin\varphi$. Тоді функція $\dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2} = \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$.
Ми змогли розбити на функції $F_1(\rho) = \rho^2 \xrightarrow{\rho\to 0} 0$ та $F_2(\varphi) = \cos^2\varphi\sin^2\varphi$ - обмежена, бо $|F_2(\varphi)| \leq 1$.
Таким чином, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 0$.

Remark 3.3.9 Якщо так станеться, що для двох різних кутів θ при $\rho \to 0$ ми отримаємо два різних ліміта, то тоді $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Definition 3.3.10 Число $L = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ називається **ітераційною границею**, якщо $\exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y) = g(y)$.
Аналогічно визначається $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$.

Останнє дається для загального знання, таке ми точно використовувати не будемо. Тут надто багато плутанини з ними.

Example 3.3.11 Маємо функцію $f(x, y) = x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}$.
Якщо шукати $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$, то вона не існує, тому що при фіксованому x ми маємо порахувати границю від $\sin\dfrac{1}{y}$, якого не існує. Також не існує $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$ за аналогічними міркуваннями.
Проте! Подвійна границя $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Дійсно,

$\left|x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right| \leq \left|x \sin \frac{1}{y}\right| + \left|y \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon.$
Остання оцінка отримана в силу $\|(x, y)\| < \delta$, кладемо $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ - границя доведена.

Example 3.3.12 Маємо функцію $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.
$\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \qquad \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{y \to 0} 0 = 0.$
Проте! Подвійної границі $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^+ y^2}$ не існує. Дійсно, якщо $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$, то тоді
$f(x, y) = \frac{\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi.$

3.4 Неперервність функції

Definition 3.4.1 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка.
Функція f називається **неперервною в т.** $\vec{x}^0$, якщо $\exists \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}^0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0)$. В будь-якій ізольованій точці $\vec{x}^0$ функція f також неперервна, тому я сразу даю таке означення через ліміт.
Функція f називається **неперервною на множині** A, якщо в $\forall \vec{x} \in A : f$ - неперервна.

Proposition 3.4.2 Задані функції $f, g : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка. Відомо, що f, g - неперервні в т. $\vec{x}^0$. Тоді:
1) cf - неперервна в т. $\vec{x}^0, \forall c \in \mathbb{R}$;
2) $f + g$ - неперервна в т. $\vec{x}^0$;
3) fg - неперервна в т. $\vec{x}^0$;
4) $\frac{f}{g}$ - неперервна в т. $\vec{x}^0$, якщо $g(\vec{x}^0) \neq 0$.
Випливають з властивостей границь функцій та неперервності.

Theorem 3.4.3 Теорема Вейєрштраса 1, 2
Задано множину A - замкнена, обмежена та функція $f : A \to \mathbb{R}$ - неперервна на A. Тоді:
1. f - обмежена на A;
2. $\exists \left[\begin{array}{l} \vec{x}^* \in A \\ \vec{x}_* \in A \end{array}\right. : \left[\begin{array}{l} f(\vec{x}^*) = \max\limits_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}_*) = \min\limits_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \end{array}\right. .$
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Theorem 3.4.4 Наступні функції є неперервними на своїй множині A:
1) $f(\vec{x}) = const$ - константа, $A = \mathbb{R}^m$;
2) $f(\vec{x}) = x_j, j = \overline{1, m}$ - координата, $A = \mathbb{R}^m$;
3) $P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum\limits_{\substack{0 \leq k_1 \leq n_1 \\ 0 \leq k_2 \leq n_2 \\ \dots \\ 0 \leq k_m \leq n_m}} a_{k_1 k_2 \dots k_m} \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$ - многочлен від m змінних, $A = \mathbb{R}^m$;
4) $R(x_1, \dots, x_m) = \frac{P(x_1, \dots, x_m)}{Q(x_1, \dots, x_m)}$ - раціональна функція від m змінних, $A = \mathbb{R}^m \setminus \{\vec{x} : Q(\vec{x}) = 0\}$.

Proof.
1) Все зрозуміло.

2) $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)| = |x_j - x_j^0| < \varepsilon$, тому встановлюється $\delta = \varepsilon$.

3) Безпосередньо випливає з **Prp. ?.4.2.** як сума та добуток функцій 1),2).

4) Безпосередньо випливає з **Prp ?.4.2.** як частка двох функцій 3). ■

Definition 3.4.5 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$.
Функція f називається **рівномірно неперервною** на множині A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x_1}, \vec{x_2} \in A : ||\vec{x_1} - \vec{x_2}|| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2})| < \varepsilon$$

Theorem 3.4.6 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ - рівномірно неперервна на A - обмежена, замкнена. Тоді вона є неперервною на A.
Доведення аналогічне як в $\mathbb{R}$.

Theorem 3.4.7 Теорема Кантора
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та A - замкнена, обмежена.
Відомо, що f - неперевна на A. Тоді вона є рівномірно неперервною на A.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

3.5 Границя та неперервність векторнозначної функції

Ми будемо розглядати вектор-функції вигляду $\vec{a} : A \to \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}$. Тобто маємо таку ситуацію: $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_k(t) \end{pmatrix}$.

Definition 3.5.1 Задано функцію $\vec{a} : A \to \mathbb{R}^k$ та $t_0 \in \mathbb{R}$ - гранична точка для A.
Вектор $\vec{u}$ називається **границею вектор-функції** $\vec{a}(t)$ **в т.** t_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t \in A : t \neq t_0 : |t - t_0| < \delta \Rightarrow ||\vec{a}(t) - \vec{u}|| < \varepsilon \text{ - def. Коші}$$
$$\forall \{t_n, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : t_n \neq t_0 : \lim_{n\to\infty} t_n = t_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \vec{a}(t_n) = \vec{u} \text{ - def. Гейне}$$

Позначення: $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{a}(t) = \vec{u}$.

Theorem 3.5.2 Означення Коші $\iff$ Означення Гейне
Все аболютно аналогічно.

Remark 3.5.3 Оскільки прямування йде за дійсною множиною, то ми можемо визначти **границю зліва та справа**. Тут все зрозуміло, як виглядатиме означення.

Proposition 3.5.4 Задано функцію $\vec{a} : A \to \mathbb{R}^k$ та $t_0 \in \mathbb{R}$ - гранична точка для A.
$\exists \lim\limits_{t\to t_0} \vec{a}(t) = \vec{u} \iff \forall j = \overline{1,k} : \exists \lim\limits_{t\to t_0} a_j(t) = u_j$.
Випливає із означення Гейне та покоординатної збіжності.

Proposition 3.5.5 Арифметичні властивості
Задані функції $\vec{a}, \vec{b} : A \to \mathbb{R}^k$ та $t_0 \in \mathbb{R}$ - гранична точка для A. Відомо, що $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \vec{a}(t) = \vec{u}, \exists \lim\limits_{t\to t_0} \vec{b}(t) = \vec{v}$. Тоді:
1) $\lim\limits_{t\to t_0} c\vec{a}(t) = c\vec{u}, \forall c \in \mathbb{R}$;
2) $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{a}(t) + \vec{b}(t)) = \vec{u} + \vec{v}$;
3) $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{u}, \vec{v})$.
Всі вони випливають із векторних послідовностей та означення Гейне.

Example 3.5.6 Знайти границю $\lim\limits_{t\to 0+0} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T$.
За одним твердженням, ми можемо покоординатно шукати границі:
$\lim\limits_{t\to 0+0} \dfrac{\sin 2t}{t} = 2 \qquad \lim\limits_{t\to 0+0} t^t = 1$.
Отже, $\lim\limits_{t\to 0+0} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Definition 3.5.7 Задано функцію $\vec{a} : A \to \mathbb{R}^k$ та $t_0 \in A$ - гранична точка.
Вектор-функція $\vec{a}$ називається **неперервною в т.** t_0, якщо $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}(t_0)$. В будь-якій ізольованій точці t_0 вектор-функція $\vec{a}$ також неперервна, тому я сразу даю таке означення через ліміт.
Вектор-функція $\vec{a}$ називається **неперервною на множині** A, якщо $\forall t \in A : \vec{a}$ - неперервна.

3.6 Крива в $\mathbb{R}^m$

Definition 3.6.1 Кривою в $\mathbb{R}^m$ називають множину значень вектор-функції: $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, причому $\vec{r}$ - неперервна на $[a,b]$:

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a,b]\}$$

Definition 3.6.2 Крива Γ називається **простою**, якщо

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \implies t_1 = t_2 \text{ або } \{t_1, t_2\} = \{a, b\}$$

Крива Γ називається **замкненою**, якщо $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
Просту та замкнену криву називають **жордановою**.

4 Диференційованість

4.1 Для функції із багатьма змінними

Definition 4.1.1 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Функція f називається **диференційованою в т.** $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R} : f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1 \Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{o}(||\Delta\vec{x}||)$$

Тобто диференційованість означає, що поверхня навколо т. $\vec{x}$ дуже схожа на площину, що проходить через т. $\vec{x}$.

Proposition 4.1.2 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Функція f - диференційована в т. $\vec{x}^0$. Тоді вона неперервна в т. $\vec{x}^0$.

Proof.
f - диференційована в т. $\vec{x}^0$, тобто $f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1 \Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{o}(||\Delta\vec{x}||)$.
Або можна це записати інакше:
$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1(x_1 - x_1^0) + \dots + L_m(x_m - x_m^0) + \underset{\vec{x}\to\vec{x}^0}{o}(||\vec{x} - \vec{x}^0||) \implies \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0}(f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0))\boxed{=}$
Всі дужки прямують покоординатно до нуля, o-маленьке також, в силу н.м.
$\boxed{=}0 \implies f$ - неперервна в т. $\vec{x}^0$. ■

Definition 4.1.3 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Частковою похідною функції f **за змінною** x_j **в т.** $\vec{x}^0$ називають величину:

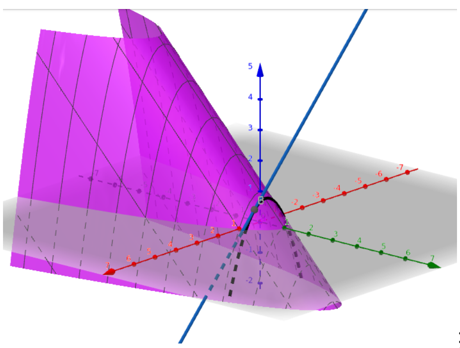
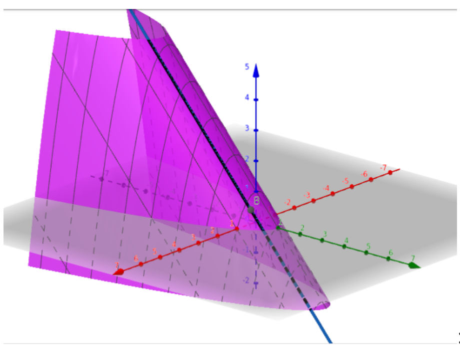
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j}$$

Якщо уважно придивитись на означення, то, насправді, ми просто підставили $x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0$ та отримали функцію $g(x_j) = f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0)$ - функція від одного агрументу x_j - та обчислили похідну цієї функції в т. x_j^0. Отже,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = g'(x_j^0)$$

Example 4.1.4 Маємо функцію $f(x, y) = 1 - x^2 - y$. Знайдемо всі її часткові похідні.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$

Сенс $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ - знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь OX.
Аналогічно $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ - знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь OY.


;

;

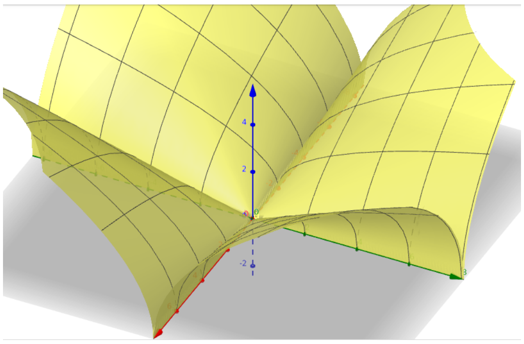
Таких дотичних прямих існують безліч, але про це згодом.

Proposition 4.1.5 Необхнідна умова диференційованості
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Тоді вона має часткові похідні в т. $\vec{x}^0$, причому $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = L_j$.

Proof.
f - диференційована в т. $\vec{x}^0$, тоді $\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R}$:
$f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m + o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$.
У частному випадку, встановити можна $\Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \Delta x_j & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$.
Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \dfrac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j} \overset{f\text{ - диф.}}{=}$
$= \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \dfrac{L_1 \cdot 0 + \dots + L_j\Delta x_j + \dots + L_m \cdot 0 + o(|\Delta x_j|)}{\Delta x_j} = \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \dfrac{L_j\Delta x_j + o(\Delta x_j)}{\Delta x_j} = L_j$. ■

Remark 4.1.6 У зворотньому напрямку це не завжди вірно.

Example 4.1.7 Маємо функцію $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Розглянемо цю функції в околі т. $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0$.
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\sqrt{|0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0$.
Тобто в т. (x_0, y_0) функція має часткові похідні. Проте виявляється, що в (x_0, y_0) вона - не диференційована.
Дійсно,
$f(\Delta x, \Delta y) = 0\Delta x + 0\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$, тобто
$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \overset{\text{полярна заміна}}{=} \lim\limits_{\rho \to 0} \sqrt{|\cos\varphi \sin\varphi|}$ - не існує, тому рівність вище не вірна.



Можливо виникне питання, а чи існують інші числа $(L_1, L_2) \neq (0, 0)$. Ні. Це випливає з необхідної умови диференційованості.

Виникає тоді інше питання, а коли ми можемо гарантувати диференційованість через існування похідних.

Theorem 4.1.8 Достатня умова диференційованості
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Відомо, що в деякому околі т. $\vec{x}^0$ існують всі часткові похідні в околі т. $\vec{x}^0$, які неперервні в т. $\vec{x}^0$.
Тоді f - диференційована в т. $\vec{x}^0$.

Proof.
Ми будемо доводити, коли $m = 2$. Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа

Отже, дано $f(x, y)$ та в околі т. (x_0, y_0) існують часткові похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, які неперервні в (x_0, y_0).
$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \boxed{=}$
Позначу $h(t) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + t), t \in [0, \Delta y]$. Тоді $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = h(\Delta y) - h(0)$.
h - диференційована на $[0, \Delta y]$, оскільки існує $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, яка неперервна. А тому $h \in C([0, \Delta y])$. Тоді за

Лагранжом:
$h(\Delta y) - h(0) = h'(c_1)\Delta y, c_1 \in (0, y)$
$h'(t) = f'_t(x_0 + \Delta x, y_0 + t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + t)$
$\implies h(\Delta y) - h(0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y.$

Аналогічно $g(s) = f(x_0 + s, y_0), s \in [0, \Delta x]$. Тоді $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = g(\Delta x) - g(0) \overset{\text{Лагранжа}}{=}$
$= g'(c_2)\Delta x = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x, c_2 \in (0, \Delta x).$
Повертаємось до нашої рівності.

$\boxed{=}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x$
Лишилось довести, що
$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\right) = \underset{\Delta x \to 0 \quad \Delta y \to 0}{o(||(\Delta x, \Delta y)||)}.$
Маємо:
$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\right) =$
$= \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x\right) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\right) =$
$= \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\Delta x + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\Delta y$
Якщо $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, то звідси $c_1 \to 0, c_2 \to 0$ та за умовою того, що часткові похідні є неперервними, маємо:
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \overset{\text{позн}}{=} \alpha \to 0$
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \overset{\text{позн}}{=} \beta \to 0$
Далі:
$\left|\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \overset{\text{К-Б}}{\leq} \left|\dfrac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right| \to 0 \implies \dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0, \Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$
Остаточно отримуємо:
$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\right) = \underset{\Delta x \to 0 \quad \Delta y \to 0}{o(||(\Delta x, \Delta y)||)}.$ ■

Definition 4.1.9 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Похідною функції f в т. $\vec{x}^0$ називається ковектор

$$f'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}(\vec{x}^0)$$

Використовуючи нове означення, умова диференційованості перепишеться тоді абсолютно звичним чином:
$f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}.$

Proposition 4.1.10 Задані функції $f, g : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Відомо, що f, g - диференційовані в т. $\vec{x}^0$. Тоді:
1) αf - диференційована в т. $\vec{x}^0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, похідна $(\alpha f)'(\vec{x}^0) = \alpha f'(\vec{x}^0)$;
2) $f + g$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$, похідна $(f + g)'(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)$;
3) fg - диференційована в т. $\vec{x}^0$, похідна $(fg)'(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) + f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)$.

Proof.
1) *Зрозуміло.*

2) $(f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) + g(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})) - (f(\vec{x}^0) + g(\vec{x}^0)) = (f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0)) + (g(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - g(\vec{x}^0)) =$
$= f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|) + g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|) = (f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}.$

3) $f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})g(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) =$

$= (f(\vec{x}^0) + f'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|))\cdot(g(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0)\boxed{=}$
Після розкриття дужок ми залишимо лише доданки $(f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0))\cdot\Delta\vec{x}$ та $(g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0))\cdot\Delta\vec{x}$.
Ось чому:
$f(\vec{x}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$ $\quad g(\vec{x}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$
$(f'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x})\cdot(g'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x}) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$, тому що, розписавши, побачимо, що $\Delta x_i\Delta x_j = o(\|\Delta\vec{x}\|)$ (зрозуміло)
$(f'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x})o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$ $\quad (g'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x})o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$ $\quad$, тому що, розписавши, побачимо $\Delta x_j o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$
$(o(\|\Delta\vec{x}\|))^2 = o(\|\Delta\vec{x}\|)$
Повертаємось до рівності:
$\boxed{=}(f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0))\cdot\Delta\vec{x} + (g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0))\cdot\Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)$. ■

Definition 4.1.11 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Диференціалом функції $f(x)$ **в т.** $\vec{x}^0$ називається такий вираз:

$$df(\vec{x}^0, \Delta\vec{x}) = f'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x}$$

Як й раніше, аргумент $\Delta\vec{x}$ опускають, а також позначають $\Delta\vec{x} = \vec{dx}$, тобто $\Delta x_1 = dx_1, \dots, \Delta x_m = dx_m$. Тоді маємо інший вигляд:

$$df(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0)\cdot\vec{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{x}^0)\,dx_m$$

Example 4.1.12 Маємо функцію $f(x,y) = 1 - x^2 - y$. Ми вже знайшли $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x, \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$, вони є неперервними в будь-якій точці.
Отже, f - диференційована будь-де. Знадемо тепер диференціал функції. Це дуже просто:
$df(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy = (-2x)\,dx - \,dy \overset{\text{або}}{=} \begin{pmatrix}-2x & -1\end{pmatrix}\vec{dr}$.

4.2 Для векторнозначних функцій

Definition 4.2.1 Задано функцію $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Вектор-функція $\vec{f}$ називається **диференційованою в т.** $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists M \in Mat(m\times k) : \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{\vec{o}(||\Delta\vec{x}||)}$$

Зараз дізнаємось, що це за матриця $M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km}\end{pmatrix}$ під час доведення твердження.

Proposition 4.2.2 Задано функцію $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
$\vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0 \iff f_1, \dots, f_k$ - диференційовані в т. $\vec{x}^0$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$, тобто $\exists M \in Mat(m\times k) : \vec{f}(\vec{x}^0+\Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{\vec{o}(||\Delta\vec{x}||)}$.

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0+\Delta\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0+\Delta\vec{x})\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(||\Delta\vec{x}||) \\ \vdots \\ \vec{o}(||\Delta\vec{x}||)\end{pmatrix}$$

Із цієї рівності випливає, що $\forall j = \overline{1,k}$:
$f_j(\vec{x}^0+\Delta\vec{x}) - f_j(\vec{x}^0) = M_{j1}\Delta x_1 + \dots + M_{jm}\Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to 0}{o(||\Delta\vec{x}||)}$.
Це означає, що f_j - диференційована в т. $\vec{x}^0$. Тоді звідси випливає, що:
$M_{j1} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}(\vec{x}^0), \dots, M_{jm} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_m}(\vec{x}^0)$.
В результаті отримаємо ось такий вигляд матриці:

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_m}\end{pmatrix}(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_k'\end{pmatrix}(\vec{x}^0) = J(x) = \vec{f}'(\vec{x}^0) \text{ - } \textbf{матриця Якобі}$$

Матриця Якобі описує **похідну** вектор-функції $\vec{f}$ в т. $\vec{x}^0$. А якщо матриця буде квадратною, то ми можемо обчислити $\det \vec{f}'(\vec{x}^0)$ - **якобіан**.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $f_1, \dots, f_k$ - диференційовані в т. $\vec{x}^0$. Хочемо довести, що
$\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}^0) - \vec{f}(\vec{x}^0) - M\Delta\vec{x} = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$, але це є правда, тому що:
$\forall j = \overline{1,k} : f_j$ - диференційована $\implies f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}^0) - f_j(\vec{x}^0) - f_j'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} = o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$ - виконана покоординатна рівність. ■

Proposition 4.2.3 Задано функцію $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Відомо, що вектор-функція $\vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$. Тоді вона неперервна в т. $\vec{x}^0$.

Proof.
Дійсно, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \left(M(\vec{x} - \vec{x}^0) + \vec{o}(||\vec{x} - \vec{x}^0||)\right) = 0$, оскільки виконується покоординатна границя. ■

Proposition 4.2.4 Задані функції $\vec{f}, \vec{g} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Відомо, що $\vec{f}, \vec{g}$ - диференційовані в т. $\vec{x}^0$.
Тоді $\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$, похідна $(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})'(\vec{x}^0) = \alpha\vec{f}'(\vec{x}^0) + \beta\vec{g}'(\vec{x}^0)$.
Випливає з арифметики матриці. Ну тут зрозуміло.

Example 4.2.5 Важливий
Маємо вектор-функцію $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}$. Знайдемо її похідну та якобіан.

$$\vec{f}'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \det \vec{f}'(\vec{x}^0) = \cos\varphi\rho\cos\varphi + \sin\varphi\rho\sin\varphi = \rho.$$

Ще знадобиться, коли будемо шукати подвійні інтеграли.

Proposition 4.2.6 Задані функції $\vec{f} : A \to B$ та $\vec{g} : B \to \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$.
Відомо, що $\vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$ та $\vec{g}$ - диференційована в т. $\vec{y}^0$.
Тоді $\vec{g} \circ \vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$, похідна $(\vec{g} \circ \vec{f})'(\vec{x}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)$.

Proof.
$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0)) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0) + \vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0)) =$
$= \vec{g}(\vec{y}^0 + \Delta\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\Delta\vec{y} + o(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\boxed{=}$
Лишилось довести, що $\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$, якщо $\Delta\vec{x} \to \vec{0}$, але тут зрозуміло.
$\boxed{=}\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$. ■

Corollary 4.2.7 Задано функцію $\vec{f} : A \to B$ та $g : B \to \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$.
Відомо, що $\vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$ та g - диференційована в т. $\vec{y}^0$.
Тоді $\dfrac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial g}{\partial y_1}(\vec{y}^0)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \dfrac{\partial g}{\partial y_2}(\vec{y}^0)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \dots + \dfrac{\partial g}{\partial y_n}(\vec{y}^0)\dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$, виконано $\forall j = \overline{1,m}$.

Example 4.2.8 Маємо функцію $f\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$. Знайдемо часткові похідні за x, y.
Позначимо $u(x,y) = xy$, $v(x,y) = \dfrac{x}{y}$. Тоді маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{-x}{y^2}$$

4.3 Похідна за напрямком. Градієнт

Definition 4.3.1 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. А також задано вектор $\vec{l}$, такий, що $\|\vec{l}\| = 1$. Її ще називають **напрямком**.
Похідною функції f за напрямком $\vec{l}$ в т. $\vec{x}^0$ називають величину

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t}$$

Як вже було зазначено, дотичних прямих буває дуже багато, тому ми й задаємо напрямок.

Remark 4.3.2 Якщо всі координати вектора $\vec{l}$ будуть нулевими, окрім $l_j = 1$, то $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$.

Theorem 4.3.3 Задано функцію f - диференційована в т. $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Тоді
$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \vec{l} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} l_m$.

Proof.
f - диференційована в т. $\vec{x}^0$, тобто $f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} tl_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} tl_m + o(\|t\vec{l}\|)$.

Тому $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1} tl_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} tl_m + o(\|t\vec{l}\|)}{t} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} l_m$.
■

Example 4.3.4 Маємо функцію $f(x, y) = 1 - x^2 - y$. Знайти похідну за напрямком $\vec{l} = (0.6, 0.8)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$.
$\implies \dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = -0.6 \cdot 2x - 0.8 \cdot 1 = -1.2x - 0.8$.

Definition 4.3.5 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Градієнтом функції f в т. $\vec{x}^0$ називають такий вектор

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}^0) \overset{\text{або}}{=} \nabla f(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} (\vec{x}^0)$$

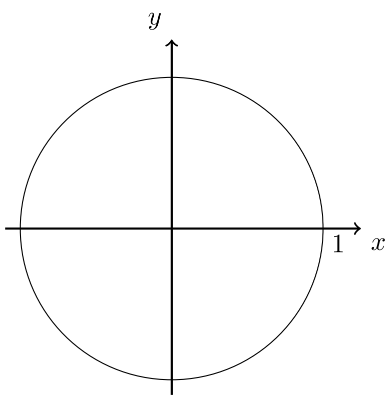
Похідну функції $\vec{f}$ за напрямком $\vec{l}$ в т. $\vec{x}^0$ можна записати інакше:
$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \left(\operatorname{grad} f(\vec{x}^0), \vec{l}\right)$.

Proposition 4.3.6 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0)$ приймає:
- max значення $\iff \vec{l} \uparrow\uparrow \operatorname{grad} \vec{f}(\vec{x}^0)$;
- min значення, $\iff \vec{l} \uparrow\downarrow \operatorname{grad} \vec{f}(\vec{x}^0)$.

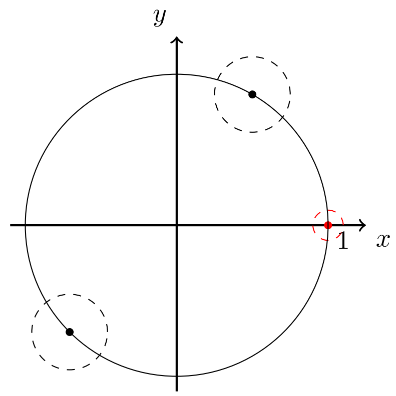
Proof.
Дійсно, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \left(\operatorname{grad} f(\vec{x}^0), \vec{l}\right) = \|\operatorname{grad} f(\vec{x}^0)\| \|\vec{l}\| \cos\alpha = \|\operatorname{grad} f(\vec{x}^0)\| \cos\alpha$:
- max $\iff \alpha = 0$;
- min $\iff \alpha = \pi$. ■

4.4 Неявно задані функції

Remark 4.4.1 Приклад для розуміння
Задано рівняння кола на площині $\mathbb{R}^2$ - один з прикладів неявної функції:
$x^2 + y^2 - 1 = 0$.



Зрозуміло, що це - не графік функції однієї змінної. Просто тому що кожному значенню x тут ставиться у відповідність два значення y.
Проте якщо розглядати деякий малий окіл т. (x_0, y_0), то ми отримаємо деякий шматок малюнку, що й буде графіком функції. Зокрема в нашому випадку або $y = \sqrt{1-x^2}$, або $y = -\sqrt{1-x^2}$.
Проте існують певні точки, де цього зробити не можна - точки $(1, 0), (-1, 0)$. Як би ми не зменшували окіл цієї точки, там завжди кожного іксу два ігрика були б. Я цю точку позначил червоним кольором.



Саме тому з'явилась мотивацію створити теорему, де через рівняння $F(x, y) = 0$ ми можемо отримати $y = f(x)$ в деякому околі т. (x_0, y_0) під деякими важливими умовами.

Важливо розуміти, що функція існує, проте явну формулу отримати не завжди вийде. Зокрема маємо неявну функцію $y^5 + y^3 + y + x = 0$. Щоб знати $y = f(x)$, треба розв'язати рівняння п'ятої степені, проте корені цього многочлена не можна виразити через формулу. І тим не менш, під деякими умовами, ми можемо знати функцію $y = f(x)$, просто без формули.

Theorem 4.4.2 Задано неявну функцію F - неперервно-диференційована в околі т. (x_0, y_0). Відомо, що виконуються такі умови:
1) $F(x_0, y_0) = 0$;
2) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
Тоді існує єдина функція f - неперервно-диференційована в меншому околі т. x_0, причому $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$, а також $f'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)\Big|_{(x, f(x))}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)\Big|_{(x, f(x))}}$.

Додатково, якщо $F \in C^{(m)}$, то $f \in C^{(m)}$.

Example 4.4.3 Зокрема для $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ маємо, що вона - неперервна,
$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$ - диференційована.
Причому $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \iff y \neq 0$.
Тому за попередньою теоремою, дійсно, існує функція $y = f(x)$, але найголовніше: $f'(x) = -\dfrac{x}{y}$.

Theorem 4.4.4 Задано неявну вектор-функцію $\vec{F}$ - неперервно-диференційована в околі т. $(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \in \mathbb{R}^{m+k}$. Відомо, що виконуються такі умови:
1) $\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = \vec{0}$;
2) $\det \vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \neq 0$. Інакше кажучи, існує оборотна матриця.
Тоді існує єдина вектор-функція $\vec{f}$ - неперервно-диференційована в меншому околі т. $\vec{x}^0$, причому $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, а також $\vec{f}'(\vec{x}) = -(F'_y(\vec{x}, \vec{y}))^{-1} \cdot F'_x(\vec{x}, \vec{y})\Big|_{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))}$.
Без доведення.

Example 4.4.5 Задано вектор-функцію $\vec{F}$ таким чином: $\begin{cases} x^2+y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2 = F_1(x,y_1,y_2)=0 \\ x+y_1+y_2-2 = F_2(x,y_1,y_2)=0 \end{cases}$.

Маємо $\det \vec{F}'_y(x,y_1,y_2) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2y_1+y_2 \neq 0 \iff y_2 \neq -2y_1$, а тому й $x \neq 2+y_2$.

Тоді враховуючи обмеження, існує вектор-функція $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$, але тепер знайдемо похідну. Маємо:

$\vec{F}'_y = \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies (\vec{F}'_y)^{-1} = \frac{1}{2y_1+y_2}\begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix}$

$\vec{F}'_x = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{f}' = -(\vec{F}'_y)^{-1}\vec{F}'_x = \frac{1}{2y_1+y_2}\begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2y_1+y_2}\begin{pmatrix} 2x+y_2 \\ -2x+2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x+y_2}{2y_1+y_2} \\ \frac{-2x+2y_1}{2y_1+y_2} \end{pmatrix}$.

4.5 Обернені функції

Theorem 4.5.1 Задано вектор-функцію $\vec{g} : U(\vec{y}^0) \to U(\vec{x}^0)$, де $\vec{x}^0 = \vec{g}(\vec{y}^0)$. Відомо, що виконуються такі умови:
1) $\vec{g}$ - неперервно диференційована;
2) $\det \vec{g}'(\vec{y}^0) \neq 0$.
Тоді існує вектор-функція $\vec{f} : U(\vec{x}^0) \to U(\vec{y}^0)$, причому:
1) $\vec{f}$ - неперервно диференційована;
2) $\vec{f}'(\vec{x}) = \vec{g}'(\vec{f}(\vec{x}))^{-1}$.
Вказівка: розглянути функцію $\vec{F}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x} - \vec{g}(\vec{y}) = \vec{0}$ та застосувати теорему про неявну вектор-функцію.

4.6 Геометричне та алгебраїчне застосування

4.6.1 Дотична площина, нормальна пряма поверхі

Задамо функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A \subset \mathbb{R}^2$ - внутрішня точка. Встановимо таку поверхню:

$$\Pi = \{(x,y,z) : z = f(x,y)\}$$

Площина в $\mathbb{R}^3$, що проходить через т. (x_0,y_0,z_0), $z_0 = f(x_0,y_0)$, задається таким рівнянням:

$$z = z_0 + K_1(x-x_0) + K_2(y-y_0) \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Definition 4.6.1 Дотичною площиною до поверхні Π в т. (x_0,y_0) називається площина в $\mathbb{R}^3$, що проходить через т. (x_0,y_0,z_0), для якої виконана рівність

$$z - f(x,y) = o(\|(x-x_0, y-y_0)\|), (x,y) \to (x_0,y_0)$$

Theorem 4.6.2 Поверхня Π має дотичну площину в т. $(x_0,y_0) \iff f$ - диференційована в т. (x_0,y_0). Причому $K_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), K_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.
Доведення аналогічне, як в матані $\mathbb{R}$.

Тоді дотична площина задається таким рівнянням:

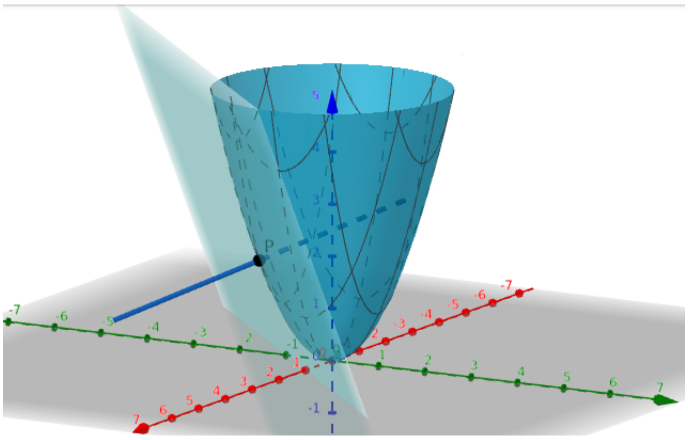
$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Definition 4.6.3 Нормальною прямою до поверхні Π в т. (x_0,y_0) називається пряма в просторі, що проходить через т. $(x_0,y_0,z_0), z_0 = f(x_0,y_0)$ та перпендикулярна до дотичної площини.

Вектор нормалі дотичної площини $\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$. Це буде напрямним вектором для нормалі прямої. Тоді нормальна пряма задається таким рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Example 4.6.4 Задамо функцію $f(x) = x^2 + y^2$. Знайдемо дотичну площину та нормальну пряму в т. $(1, -1)$.
$f(1, -1) = 2$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 2x\Big|_{(1,-1)} = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 2y\Big|_{(1,-1)} = -2.$
Всі часткові похідні в околі т. $(1, -1)$ неперервні, а тому диференційовані. Отже, можемо отримати дотичну:
$z - 2 = 2(x - 1) - 2(y + 1) \implies 2x - 2y - z = 2;$
та нормаль:
$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 2}{-1}.$



4.6.2 Дотична пряма, нормальна площина кривої

Definition 4.6.5 Крива в просторі $\mathbb{R}^3$ задається таким рівнянням

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in (a, b) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Прямою в просторі $\mathbb{R}^3$ задається таким рівнянням

$$\begin{cases} x = sl_1 + x_0, l_1 \in \mathbb{R} \\ y = sl_2 + y_0, l_2 \in \mathbb{R} \\ z = sl_3 + z_0, l_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Definition 4.6.6 Дотичною прямою до кривої $\vec{x} = \vec{x}(t)$ називається пряма в просторі, що проходить через т. (x_0, y_0, z_0), для якої виконана рівність

$$\begin{cases} x(t) - (x_0 + l_1(t - t_0)) = o(t - t_0) \\ y(t) - (y_0 + l_2(t - t_0)) = o(t - t_0) \\ z(t) - (z_0 + l_3(t - t_0)) = o(t - t_0) \end{cases}$$

Theorem 4.6.7 Пряма $\begin{cases} x = sl_1 + x_0 \\ y = sl_2 + y_0 \\ z = sl_3 + z_0 \end{cases}$ - дотична до кривої $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $\iff$ крива - диференційована в т. t_0, а також $l_1 = x'(t_0), l_2 = y'(t_0), l_3 = z'(t_0)$.
Вправа: довести

Тоді дотична пряма задається рівнянням:

$$\begin{cases} x = sx'(t_0) + x_0 \\ y = sy'(t_0) + y_0 \\ z = sz'(t_0) + z_0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

Напрямний вектор прямої $\vec{l} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. Тоді це буде нормальним вектором для нормальної площини. Нормальна площина задається таким рівнянням:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

Example 4.6.8 Маємо криву $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 2\cos t \\ z = -\sin 2t \end{cases}$, де параметр $t \in [0, 2\pi]$. Знайдемо дотичну пряму та нормальну площину в $t_0 = \dfrac{5\pi}{6}$. Тобто в т. $\left(-1, \sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

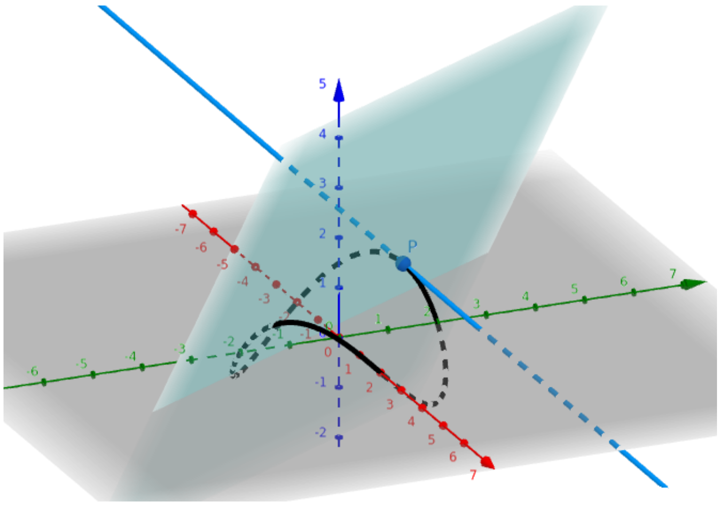
$$\begin{cases} x'(t_0) = 2\cos t\Big|_{t=t_0} = \sqrt{3} \\ y'(t_0) = -2\sin t\Big|_{t=t_0} = 1 \\ z'(t_0) = -2\cos 2t\Big|_{t=t_0} = -1 \end{cases}.$$

Таким чином, маємо дотичну пряму:

$\dfrac{x+1}{\sqrt{3}} = \dfrac{y - \sqrt{3}}{1} = \dfrac{z - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-1}$;

та нормальну площину:

$\sqrt{3}(x+1) + (y - \sqrt{3}) - \left(z - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$



4.6.3 Приблизне обчислення

$z - f(\vec{x}) = o(||\vec{x} - \vec{x}^0||)$

Якщо $\vec{x}_0$ близький до $\vec{x}$, тобто $||\vec{x} - \vec{x}^0|| << 1$, то тоді

$f(\vec{x}) - z \approx 0$

$\Rightarrow f(\vec{x}) \approx z^0 + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)(x_n - x_n^0)$

4.7 Диференціювання та похідні старших порядків

Definition 4.7.1 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Також f - диференційована в т. $\vec{x}^0$.

Частковими похідними другого роду від функції f в т. $\vec{x}^0$ називається вираз:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}^0)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}^0)$$

Example 4.7.2 Знайдемо всі часткові похідні другого порядку функції $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2 \implies \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y \implies \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16xy \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2 \end{cases}.$$

Можемо зауважити, що $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Проте в загальному випадку це не так.

Example 4.7.3 Розглянемо функцію $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Зосередимось лише на знаходженні $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\dfrac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} -x\dfrac{y^4 - x^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = -1$$

Таким чином, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Theorem 4.7.4 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Відомо, що $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x})$ в околі т. $\vec{x}^0$ та є неперервними в т. $\vec{x}^0$.
Тоді $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$.

Proof.
Ми будемо доводити, коли $m = 2$. Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа

Отже, дано $f(x,y)$ та в околі т. (x_0,y_0) існують часткові похідні другого порядку $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ які неперервні в (x_0, y_0).
Розглянемо вираз $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$.
Покладемо функцію $k(s) = f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0), s \in [x_0, x_0 + \Delta x]$. Тоді $\Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0)$.
$k'(s) = (f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0))'_s = \dfrac{\partial f}{\partial s}(s, y_0 + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial s}(s, y_0)$.
Оскільки нам відомі другі часткові похідні, то зрозуміло, що в нас існує $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$, причому в тому самому околі т. (x_0, y_0). Тобто звідси k - диференційована на $[x_0, x_0 + \Delta x]$, тоді за теоремою Лагранжа, $\exists \xi_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x) : \Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0) = k'(\xi_1)\Delta x = \left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0 + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0)\right)\Delta x$.
Покладемо функцію $m(t) = \dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t), t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$. Тоді $\Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x$.
$m'(t) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t)\right)'_t = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, t)$.
Похідна дійсно існує за умовою теореми, тобто m - диференційована на $[y_0, y_0 + \Delta y]$, тоді за теоремою Лагранжа, $\exists \eta_1 \in (y_0, y_0 + \Delta y) : \Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x = m'(\eta_1)\Delta y \Delta x = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1)\Delta y \Delta x$.

Повернімось до виразу $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$, ми розглянемо її з іншої сторони.
Покладемо функцію $p(t) = f(x_0 + \Delta x, t) - f(x_0, t), t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$. Тоді $\Delta = p(y_0 + \Delta y) - p(y_0)$.

А далі я буду просто продовжувати рівність, міркування аналогічні, що пов'язані зі застосуванням теореми Лагранжа двічі:

$\Delta = p(y_0+\Delta y)-p(y_0) = p'(\eta_2)\Delta y = (f(x_0+\Delta x,t)-f(x_0,t))'_t(\eta_2)\Delta y = \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0+\Delta x,\eta_2) - \dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0,\eta_2)\right)\Delta y \boxed{=}$

$q(s) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(s,\eta_2)$

$\boxed{=}(q(x_0+\Delta x) - q(x_0))\Delta y = q'(\xi_2)\Delta x \Delta y = \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}(s,\eta_2)\right)'_s(\xi_2)\Delta x\Delta y = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(\xi_2,\eta_2)\Delta x \Delta y.$

Зауважу, що $\eta_2 \in (y_0, y_0+\Delta y), \xi_2 \in (x_0, x_0+\Delta x)$.

Отримали таку рівність: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1,\eta_1)\Delta y \Delta x = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(\xi_2,\eta_2)\Delta x\Delta y \implies \dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(\xi_1,\eta_1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(\xi_2,\eta_2)$.

Нарешті, за умовою задачі, другі часткові похідні є неперервними в т. (x_0,y_0), тому далі одночасно прямуємо $x \to x_0, y \to y_0 \implies \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Оскільки $\xi_1,\xi_2 \in (x_0,x_0+\Delta x)$ $\eta_1,\eta_2 \in (y_0, y_0+\Delta y)$, то звідси $\xi_1,\xi_2 \to x_0$ та $\eta_1,\eta_2 \to y_0$.

Остаточно отримаємо $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$ (літери s,t я замінив на x,y, результат не зміниться). ■

Definition 4.7.5 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Функція f називається **двічі диференційованою в т.** $\vec{x}^0$, якщо всі часткові похідні існують в околі т. $\vec{x}^0$ та диференційовані в т. $\vec{x}^0$.

Example 4.7.6 Маємо функцію $z = x^2+2y^2-5xy$. З'ясуємо, чи буде ця функція двічі диференційованою.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x-5y \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y - 5x$

Усі отримані часткові похідні існують в будь-якому околі деякої точки.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -5$

Отримані часткові похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за **Th.4.1.8.**, функція $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ - диференційована. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -5 \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$

Отримані часткові похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за **Th.4.1.8.**, функція $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ - диференційована.

Отже, за означенням, z - двічі диференційована функція.

Proposition 4.7.7 Функція f двічі диференційована в т. $\vec{x}^0 \iff \mathrm{grad} f$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$.

Proof.
Дійсно, f - двічі диференційована в т. $\vec{x}^0 \iff \forall j = \overline{1,m} : \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0 \iff$

$\mathrm{grad} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}$ - як вектор-функція - диференційована в т. $\vec{x}^0$. ■

Розпишемо диференційованість вектор-функції $\mathrm{grad}\, f$ в т. $\vec{x}^0$ за означенням:
$\mathrm{grad}\, f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \mathrm{grad}\, f(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$.

Звідси ми маємо, що $M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_m}^2} \end{pmatrix}(\vec{x}^0) = H(\vec{x}^0) = f''(\vec{x}^0)$ - **матриця Гессе**

Матриця Гесе описує **другу похідну** функції f в т. $\vec{x}^0$ та одночасно **похідну** вектор-функції $\operatorname{grad} f$ в т. $\vec{x}^0$. Якщо матриця буде квадратною, то ми можемо обчислити $\det f''(\vec{x}^0)$ - **гесіан**.

Definition 4.7.8 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Також f - диференційована в т. $\vec{x}^0$.
Другим диференціалом функції f називають вираз:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = d(df(\vec{x}^0))$$

З'ясуємо, як цей вираз можна по-інакшому записати. Маємо:

$$d^2 f = d\,(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\,dx_m\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1\right) + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\,dx_m\right) =$$
$$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)dx_m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)dx_m\right)dx_1 + \dots +$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)dx_m\right)dx_m =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\,dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}\,dx_m\,dx_1\right) + \dots + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}\,dx_1\,dx_m + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_m}^2}\,dx_m^2\right) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,dx_i\,dx_j.$$

Отже, маємо іншу формулу для другого диференціалу в т. $\vec{x}^0$:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\,dx_i\,dx_j$$

Або це можна записати в "лінійно-алгебраїчному" вигляді:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\,dx_m\right)^2 f(\vec{x}^0)$$

Example 4.7.9 Знайдемо другий диференціал функції $z = x^3 + 2y^2 - 5xy$.
Ми вже шукали другі часткові похідні $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -5 \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$. Таким чином,
$d^2 z = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 = 6x\,dx^2 - 10\,dx\,dy + 4\,dy^2$.

Definition 4.7.10 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Також f - m разів диференційована в т. $\vec{x}^0$.
Частковим похідним $m+1$-го порядку в т. $\vec{x}^0$ називають похідну:

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_{m+1}}}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}}\right)(\vec{x}^0) = \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_{m+1}} \partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}}(\vec{x}^0)$$
$$j_1 + j_2 + \dots + j_m + j_{m+1} = m+1$$

Remark 4.7.11 Що таке **похідна** m-го порядку, визначати не буду, бо ще рано.

4.8 Формула Тейлора

Зробимо певні позначення:

$$[\vec{x}^0, \vec{x}] = \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in [0,1]\}$$
$$(\vec{x}^0, \vec{x}) = \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in (0,1)\}$$

Theorem 4.8.1 Теорема Тейлора (у формі Лагранжа)
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Відомо, що f - диференційована $n+1$ разів в околі т. $\vec{x}^0$. Тоді $\exists \vec{\xi} \in (\vec{x}^0, \vec{x})$ або $(\vec{x}, \vec{x}^0)$, для якого

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{f'(\vec{x}^0)}{1!}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \frac{f''(\vec{x}^0)}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\vec{x}^0)}{m!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\vec{\xi})}{(n+1)!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^{n+1}$$

Під виразами $f^{(k)}(\vec{x} - \vec{x}^0)^k$ я розумію як диференціал $d^k f(\vec{x}^0)$, що має свою формулу:

$$d^k f(\vec{x}^0) = \sum_{j_1, \dots, j_k = 1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(\vec{x}^0) \cdot dx_{j_1} \dots dx_{j_k}$$

Замість $dx_{j_1} \dots dx_{j_k}$ можна писати $(x_{j_1} - x_{j_1}^0) \dots (x_{j_k} - x_{j_k}^0)$.

Proof.
Розглянемо функцію $p(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$, тут $|t| \le 1$ - функція від однієї змінної.
Знайдемо похідні від цієї функції:
$p'(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))'_t = (f(x_1 + t(x_1 - x_1^0), \dots, x_m + t(x_m - x_m^0)))'_t = (f(u_1, \dots, u_m))'_t =$
$= \dfrac{\partial f}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial u_m}\dfrac{\partial u_m}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial u_1}(x_1 - x_1^0) + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial u_m}(x_m - x_m^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial u_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_m - x_m^0 \end{pmatrix} =$
$= f'(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))(\vec{x} - \vec{x}^0)$
$p''(t) = [f'(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0)]'_t \overset{\text{аналогічно}}{=} f''(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))(\vec{x} - \vec{x}^0)^2$
$\vdots$
$p^{(k)}(t) = f^{(k)}(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))^k$.
Коротше, наша функція $n+1$ разів диференційована на $[0,1]$. Тому ми можемо розкласти формулу Тейлора як функцію з однією змінною. $\exists \xi \in (0,1)$:
$p(t) = p(0) + \dfrac{p'(0)}{1!}(1-0) + \dfrac{p''(0)}{2!}(1-0)^2 + \dots + \dfrac{p^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + \dfrac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}$.
А далі підставляємо все, що маємо:
$p(0) = f(\vec{x}^0)$
$p'(0) = f'(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0)$
$p''(0) = f''(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0)^2$
$\vdots$
$p^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0)^{n+1}$
Отже, $f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{f'(\vec{x}^0)}{1!}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \dfrac{f''(\vec{x}^0)}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(\vec{x}^0)}{n!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^n + \dfrac{f^{(n+1)}(\vec{\xi})}{(n+1)!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^{n+1}$,
де $\vec{\xi} = \vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0) \in (\vec{x}^0, \vec{x})$. ■

Можна обережно довести, що $\dfrac{f^{(n+1)}(\vec{\xi})}{(n+1)!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^{n+1} = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n), \vec{x} \to \vec{x}^0$. Тоді матимемо формулу Тейлора в формі Пеано:
$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{f'(\vec{x}^0)}{1!}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \dfrac{f''(\vec{x}^0)}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(\vec{x}^0)}{n!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^n + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n), \vec{x} \to \vec{x}^0$.

Example 4.8.2 Розкласти функцію $f(x,y) = e^{x+y}$ відносно т. $(x_0, y_0) = (1, -1)$.
Заздалегідь зауважимо, що $\dfrac{\partial^s f}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2}}(1,-1) = e^{x+y}|_{(1,-1)} = 1$, де $s_1 + s_2 = s$.
$f(1,-1) = 1$
$f'(1,-1)(\vec{x} - \vec{x}^0) = (x-1) + (y+1)$
$f''(1,-1)(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 = (x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2$
$f'''(1,-1)(\vec{x} - \vec{x}^0)^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3$
$\vdots$
Таким чином, ми можемо це записати ось так:
$f(x,y) = 1 + \left[\dfrac{(x-1)}{1!} + \dfrac{(y+1)}{1!}\right] + \left[\dfrac{(x-1)^2}{2!} + \dfrac{2(x-1)(y+1)}{2!} + \dfrac{(y+1)^2}{2!}\right] + \dots +$
$+ \left[\dfrac{(x-1)^n}{n!} + \dfrac{C_2^n(x-1)^{n-1}(y+1)}{n!} + \dots + \dfrac{(y+1)^n}{n!}\right] + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}\right) =$
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} \frac{C_k^p}{k!}(x-1)^{k-p}(y+1)^p + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}\right), (x,y) \to (1,-1)$.

Remark 4.8.3 Можна формулу Тейлора записати в якості ряда Тейлора за певними умовами, але я цього робити не буду.

4.9 Локальні екстремуми

Definition 4.9.1 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Точка $\vec{x}^0$ називається точкою:
- локального максимуму, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \ge f(\vec{x})$;

- **локального мінімуму**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \leq f(\vec{x})$.
для строгих екстремумів нерівність строга та існують околи $U_\varepsilon(\vec{x}^0) \setminus \{\vec{x}^0\}$.

Theorem 4.9.2 Необхідна умова локального екстремуму
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ така, що має всі часткові похідні в т. $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня.
Відомо, що $\vec{x}^0$ - локальний екстремум. Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = 0, \forall j = \overline{1,m}$.

Proof.
Розглянемо функцію $h(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$ - функція від однієї змінної, така, що x_1^0 - локальний екстремум. Для інших змінних аналогічно. Більш того, $h'(x_1) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$.
Таким чином, за необхідною умовою локального екстремуму матана 1 семестру,
$h'(x_1) = 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = 0$. ■

Definition 4.9.3 Точка $\vec{x}^0$ називається **критичною** для функції f, якщо всі часткові похідні в заданній точці нулеві.

Надалі вважається, що ви ознайомлені з означенням додатньо/від'ємно визначеними матрицями та з критерієм Сільвестра.

Lemma 4.9.4 Задано симетричну матрицю $B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} b_{11}(\vec{x}) & \dots & b_{1m}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m}(\vec{x}) & \dots & b_{mm}(\vec{x}) \end{pmatrix}$ - неперервна на множині A та т. $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Відомо, що $B(\vec{x}^0)$ - строго додатньо/від'ємно визначена.
Тоді в деякому околі т. $\vec{x}^0$ матриця $B(\vec{x})$ - строго додатня/від'ємно визначена.

Proof.
Будемо доводити для випадку строго додатньої визначеності.
За умовою, $B(\vec{x}) \in C(A)$, тобто всі функції в матриці неперервні. Обчислюючи кутові мінори $\Delta_k, k = \overline{1,n}$, отримаємо, що $\Delta_k \in C(A)$ за властивостями неперервності.
За критерієм Сільвества, маємо $\forall k = \overline{1,m} : \Delta_k(\vec{x}^0) > 0$. Оскільки $\vec{x}^0$ - внутрішня та $\Delta_k \in C(A)$, то $\exists U_{\delta_k}(\vec{x}^0)$, де $\forall \vec{x} \in U_{\delta_k}(\vec{x}^0) : \Delta_k(\vec{x}) > 0$.
Оберемо $\varepsilon = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$, тоді $\forall \vec{x} \in U_\delta(\vec{x}^0) : \forall k = \overline{1,n} : \Delta_k(\vec{x}) > 0$.
Тоді за критерієм Сильвестра, $B(\vec{x})$ - строго додатньо визначена в околі $U_\delta(\vec{x}^0)$. ■

Corollary 4.9.5 Якщо матриця $B(\vec{x}^0)$ - знако невизначена, то в деякому околі т. $\vec{x}^0$ матриця $B(\vec{x})$ - знако не визначена.

Proof.
!Припустимо, що в будь-якому околі $U_\delta(\vec{x}^0)$ знайдеться $\vec{x}_\delta$, для якої $B(\vec{x}_\delta)$ - строго додатно визначена.
Покладемо $\delta = \dfrac{1}{n}$, тоді $\exists \vec{x}^{(n)} : \|\vec{x}^0 - \vec{x}^{(n)}\| < \dfrac{1}{n}$, але $B(\vec{x}^{(n)})$ - строго додатно визначена.
Якщо $\vec{x}^{(n)} \to \vec{x}^0$, то за неперервністю, $B(\vec{x}^{(n)}) \to B(\vec{x}^0)$, звідси оскільки $(B(\vec{x}^{(n)})\vec{t}, \vec{t}) > 0, \forall \vec{t}$, то тоді $(B(\vec{x}^0)\vec{t}, \vec{t}) \geq 0, \forall \vec{t}$. Тобто матриця $\vec{B}(\vec{x}^0)$ - невід'ємно визначена. Суперечність!
Якщо припускати строго від'ємну визначеність, то міркування аналогічні. ■

Theorem 4.9.6 Достатня умова локального екстремуму
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$, таку, що f - двічі неперервно-диференційована в околі т. $\vec{x}^0 \in A$ - критична точка.
1) Нехай $f''(\vec{x}^0)$ - строго додатньо визначена. Тоді $\vec{x}^0$ - строгий локальний мінімум;
2) Нехай $f''(\vec{x}^0)$ - строго від'ємно визначена. Тоді $\vec{x}^0$ - строгий локальний максимум;
3) Нехай $f''(\vec{x}^0)$ - знако-невизначена. Тоді $\vec{x}^0$ - не локальний екстремум.

Proof.
1) $f''(\vec{x}^0)$ - строго додатньо визначена. Тоді за лемою, $\exists U_\delta(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\delta(\vec{x}^0) : f''(\vec{x})$ - строго додатньо визначена. Ми т. $\vec{x}$ зафіксуємо.
За умовою, $\vec{x}^0$ - критична точка $\implies f'(\vec{x}^0) = \vec{0}$. Запишемо функцію у вигляді формули Тейлора до другої похідної:
$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{f'(\vec{x}^0)}{1!}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \dfrac{f''(\vec{\xi})}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2$, де $\vec{\xi} \in (\vec{x}^0, \vec{x})$ або $(\vec{x}, \vec{x}^0)$.

$\implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{1}{2}\Big(f''(\vec{\xi})(\vec{x}-\vec{x}^0), (\vec{x}-\vec{x}^0)\Big)$. Зокрема $f''(\vec{\xi})$ - також додатньо визначена, а тому за означенням, $\Big(f''(\vec{\xi})(\vec{x}-\vec{x}^0), (\vec{x}-\vec{x}^0)\Big) > 0$. Звідси $f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > 0$
$\implies \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}) > f(\vec{x}^0) \implies \vec{x}^0$ - локальний мінімум.

2) Аналогічно до 1).

3) Дороговцев пише ось що:
зауважимо, що якщо $f''(\vec{x}^0)$ знако невизначена, то для будь-якого окілу $U_\delta(\vec{0})$ будуть існувати вектори $\vec{a}, \vec{b}$, щоб $f''(\vec{x}^0)\vec{a}^2 > 0$ та $f''(\vec{x}^0)\vec{b} < 0$. (це єдине, шо я не розумію). ■

4.10 Умовні локальні екстремуми

Definition 4.10.1 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та A - відкрита множина. Задано систему функцій $\phi_j : A \to \mathbb{R}$, де $j = \overline{1,s}, s < m$. Покладемо множину $M = \{\vec{x} \in A : \phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1,s}\}$.
Тоді рівняння $\phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1,s}$ називають **рівняннями зв'язку**.
Точка $\vec{x}^0 \in M$ називається **умовним локальним**:
- **максимумом**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \geq f(\vec{x})$
- **мінімумом**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \leq f(\vec{x})$
Для строгих екстремумів нерівність строга та існують околи $U_\varepsilon(\vec{x}^0) \setminus \{\vec{x}^0\}$.

Example 4.10.2 Маємо функцію $z = x^2 + y^2$ та рівняння зв'язку $\phi_1(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$. Вона має умовні екстремуми в т. $(3,4), (-3,-4)$ на множині M. Як їх шукати, дізнаємось потім.

Одразу формулювати теорему буде складно, тому ми будемо спочатку будувати наші роздуми, як зрозуміти, що $\vec{x}^0$ - умовний локальний екстремум

Маємо множину $M = \{\vec{x} : \phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1,s}\}$ та $\vec{x}^0$ - локальний екстремум
Розглянемо диференційовану криву $\gamma = \{\vec{x}(t), t \in (-\delta,\delta)\} \subset M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^0)$, причому нехай $\vec{x}(0) = \vec{x}^0$
Функцію $f(\vec{x})$ звузимо на криву γ - отримаємо функцію $h(t) = f(\vec{x}(t))$, де має локальний екстремум в т. $t_0 = 0$. Тоді за необхідною умовою, $h'(0) = 0$
З іншого боку, $h'(0) = f'(\vec{x}(0)) \cdot \vec{x}'(0) \boxed{=}$
Тут $f'(\vec{x}(0)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}(0)) & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}(0)) \end{pmatrix}$
А також $\vec{x}'(0) = \begin{pmatrix} x_1'(0) & \dots & x_n'(0) \end{pmatrix}$
Множимо два вектори скалярно
$\boxed{=} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)x_1'(0) + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)x_n'(0) = (\text{grad} f(\vec{x}^0), \vec{x}'(0))$
$\implies (\text{grad} f(\vec{x}^0), \vec{x}'(0)) = 0 \implies \text{grad} f(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0)$
Маємо зв'язок: $h'(0) = 0 \iff \text{grad} f(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0)$

З'ясуємо, які властивості має $\vec{x}'(0)$, якщо $\gamma = \{\vec{x}(t), t \in (-\delta,\delta)\} \subset M$
Отже, $\vec{x}(t) \subset M \iff \phi_j(\vec{x}(t)) = 0 \overset{(*)}{\iff} \phi_j'(\vec{x}(0)) \cdot \vec{x}'(0) = 0 \iff \text{grad}\phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0)$
Маємо зв'язок 2: $\forall j = \overline{1,s} : \text{grad}\phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0) \iff \vec{x}(t) \subset M$
$(*)$ Чому в зворотній бік працює: $\phi_j'(\vec{x}(0)) \cdot \vec{x}'(0) = 0$. Тоді $\vec{x}'(0)$ перпендикулярна всім дотичним площинам до поверхонь $\phi_j(\vec{x}(t)) = 0$, тож $\vec{x}'(0)$ - дотичний вектор кривої $\gamma \Rightarrow \gamma \subset M$

Підсумуємо:
$\forall j = \overline{1,s} : \text{grad}\phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0) \iff \vec{x}(t) \subset M \iff$
$\iff h(t) = f(\vec{x}(t))$ має екстремум в т. $\vec{x}^0 \iff h'(0) = 0 \iff$
$\iff \text{grad} f(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0)$

Крива γ - довільно обрана, тоді $\vec{x}'(0)$ - довільний, що під умовами зв'язку
Тоді наша еквівалентність каже про те, що
$\text{grad} f(\vec{x}^0) \in span\{\text{grad}\phi_j(\vec{x}^0) : j = \overline{1,s}\}$ - ця лінійна оболонка в силу рангу є лінійно незалежною. Тому кожний елемент, який туди потрапляє, розкладається лінійною комбінацією елементів, власне

$\exists\lambda_j, j=\overline{1,s} : \mathrm{grad}\vec{f}(\vec{x}^0) = \lambda_1 \mathrm{grad}\phi_1(\vec{x}^0) + \dots + \lambda_s \mathrm{grad}\phi_s(\vec{x}^0)$

Отримали теорему

Theorem 4.10.3 Необхідна умова умовного локального екстремуму
Задана множина $M = \{\vec{x} : \phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1,s}\}$ та функція $f : A \to \mathbb{R}$ така, що $f \in C'(A)$
Відомо, що $\vec{x}^0$ - точка умовного локального екстремуму. Тоді
$\exists\lambda_1, \dots, \lambda_s : \mathrm{grad}\vec{f}(\vec{x}^0) - \big(\lambda_1 \mathrm{grad}\phi_1(\vec{x}^0) + \dots + \lambda_s \mathrm{grad}\phi_s(\vec{x}^0)\big) = 0$
Довели

До речі, останню умову можна переписати таким чином
Ми створимо лагранжіан $L(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f(\vec{x}) - \displaystyle\sum_{j=1}^{s} \lambda_j \phi_k(\vec{x})$
Тоді в т. $\vec{x}^0$ - екстремум, отже, $L'_{\vec{x}}(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = 0$

Theorem 4.10.4 Достатня умова умовного локального екстремуму
Задана множина $M = \{\vec{x} : \phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1,s}\}$ та функція $f : A \to \mathbb{R}$ така, що $f \in C''(A)$
Відомо, що
1) $\vec{x}^0$ - критична точка для лагранжіана
2) $\forall\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, для яких $\mathrm{grad}\phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{h}$, визначається квадратична форма
$L''_{\vec{x},\vec{x}}(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s)\vec{h}^2 = \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{\partial x_j \partial x_k} h_j h_k$. Якщо права частина виразу
- більше нуля, то $\vec{x}^0$ - точка строго умного локального мінімуму
- менше нуля, то $\vec{x}^0$ - точка строго умного локального мінімуму
- для знако-невизначених квадратичних форм $\vec{x}^0$ - не умовний екстремум

Proof.
Якщо брати т. $\vec{x} \in M$, то тоді лагранжіан $L(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f(\vec{x})$
Для неї застосуємо формулу Тейлора
$L(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = L(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) + \dfrac{L'_{\vec{x}}(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{1!}(\vec{x} - \vec{x}^0) +$
$+ \dfrac{L''_{\vec{x},\vec{x}}(\vec{x}^0 - \theta(\vec{x} - \vec{x}^0), \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2$
Тоді отримаємо, що
$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{L''_{\vec{x},\vec{x}}(\vec{x}^0 - \theta(\vec{x} - \vec{x}^0), \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2$
Тепер все залежить від правої частині рівності
Ми розглянемо диференційовану криву
$\gamma = \{\vec{x}(t), t \in (-\delta, \delta)\} \subset M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^0)$, причому $\vec{x}(0) = \vec{x}^0$
Тоді $\vec{x}(t) - \vec{x}^0 = \vec{x}'(0)t + \vec{o}(t)$
Для нашої кривої також відомо факт $\mathrm{grad}\phi_j(\vec{x}^0) \perp \underbrace{\vec{x}'(0)}_{=\vec{h}}$
Підставимо це все в нашу формулу
$f(\vec{x}(t)) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{L''_{\vec{x},\vec{x}}(\vec{x}^0 - \theta(\vec{x}(t) - \vec{x}^0), \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{2!}\vec{h}^2 t^2 + \vec{o}(t^2)$
Оскільки $L''_{\vec{x},\vec{x}}(\vec{x}^0, \dots)$ - знаковизначена, то тоді за лемою, $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap M : L''_{\vec{x},\vec{x}}(\vec{x}, \dots)$ - так само знако визначений
Якщо визначимо квадратичну форму із п. 2), то звідси й буде випливати, що $f(\vec{x}^0) < f(\vec{x})$ - тобто умовний локальний мінімум
Аналогічно для інших випадків ■

Example 4.10.5 Задана функція $u = f(x,y,z) = x - 2y + 2z$. Знайдемо точки локального екстремуму за умовою, що
$\phi_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

Спочатку розглянемо лагранжіан $L(x,y,z,\lambda_1) = f(x,y,z) - \lambda_1 \phi_1(x,y,z)$
Знайдемо всі критичні точки, тобто $L'(x,y,z,\lambda_1) = 0$
Або інакше кажучи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) - \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) - \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ \phi_1(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \lambda_1 \cdot 2x = 0 \\ -2 - \lambda_1 \cdot 2y = 0 \\ 2 - \lambda_1 \cdot 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Або $\lambda_1 = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = \frac{2}{3}$

Або $\lambda_1 = -\frac{3}{2}, x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{2}{3}$

Всі можливі критичні точки

Тепер будуємо квадратичну форму лагранжіана

$L(x,y,z,\lambda_1) = x - 2y + 2z - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

Маємо

$L''(x_0,y_0,z_0,\lambda_1)\vec{h}^2 = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}h_1^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}h_2^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}h_3^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}h_1 h_2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}h_2 h_3 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}h_1 h_3 = -2\lambda_1 h_1^2 - 2\lambda_1 h_2^2 - 2\lambda_1 h_3^2$

Обираємо такі $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$, щоб $(\text{grad}\phi_1(x_0,y_0,z_0), \vec{h}) = 0$

В нашому випадку $\text{grad}\phi_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$, тоді

$2x \cdot h_1 + 2y \cdot h_2 + 2z \cdot h_3 = 0$

Розглянемо кожну точку

1) $\lambda_1 = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}(h_1 - 2h_2 + 2h_3) = 0 \Rightarrow h_1 = 2h_2 - 2h_3$

Оцінюємо знак квадратичної форми:

$L''(x,y,z,\lambda_1)\vec{h}^2 = -6(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) < 0$

Отже, 1) - локальний максимум та $u = 3$

2) $\lambda_1 = -\frac{3}{2}, x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}(h_1 - 2h_2 + 2h_3) = 0 \Rightarrow h_1 = 2h_2 - 2h_3$

Оцінюємо знак квадратичної форми:

$L''(x,y,z,\lambda_1)\vec{h}^2 = 6(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) > 0$

Отже, 1) - локальний мінімум та $u = -3$

5 Інтеграли з параметром

5.1 Основні означення та властивості

Definition 5.1.1 Задано функцію $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, таку, що $\forall y \in [c, d] : f \in \mathcal{R}([a, b])$.
Інтегралом з параметром називають таку функцію $J : [c, d] \to \mathbb{R}$:

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

Proposition 5.1.2 Неперервність
Задано функцію $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, таку що $f \in C([a, b] \times [c, d])$. Тоді $J \in C([c, d])$.

Proof.
Зауважимо, що $f \in C([a, b] \times [c, d])$. то звідси $\forall y \in [c, d] : f \in C([a, b]) \implies f \in \mathcal{R}([a, b])$. Тобто функція $J(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y)\, dx$ коректно визначена.

$f(x, y) \in C([a, b] \times [c, d]) \implies f(x, y) \in C_{unif}([a, b] \times [c, d]) \implies$
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [a, b] \times [c, d] : \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$
Тоді $|J(y_1) - J(y_2)| = \left| \displaystyle\int_a^b f(x, y_1)\, dx - \int_a^b f(x, y_2)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \boxed{<}$
Якщо я оберу $(x, y_1), (x, y_2)$ так, що $\|(x, y_1) - (x, y_2)\| = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2| < \delta$, то тоді $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$
$\boxed{<} \displaystyle\int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon.$
Збираючи пазл, отримаємо $J \in C_{unif}([c, d]) \implies J \in C([c, d])$. ■

Proposition 5.1.3 Диференційованість
Задано функцію $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, таку, що $f \in C([a, b] \times [c, d])$. Відомо, що $\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a, b] \times [c, d])$.
Тоді J - диференційована на $[c, d]$, при цьому $J'(y) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$.

Proof.
Диференційованість означає існування похідної, тобто необхідно довести її існування.
$\dfrac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \dfrac{1}{\Delta y} \displaystyle\int_a^b f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\, dx \boxed{=}$
Згадаємо Ньютона-Лейбніца та властивості інтеграла та розпишемо підінтегральний вираз таким чином:
$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \displaystyle\int_y^{y+\Delta y} f'_y(x, t)\, dt = \int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)\, dt$
$\boxed{=} \dfrac{1}{\Delta y} \displaystyle\int_a^b \left(\int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)\, dt \right) dx$
Тепер зафіксуємо т. y_0 та розпишемо праву частину рівності, що ми доводимо:
$\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx = \int_a^b \frac{1}{\Delta y} \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dt \right) dx = \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dt \right) dx$
Ну а тепер час доводити існування похідної:
$\left| \dfrac{J(y_0 + \Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} - \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx \right| = \left| \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)\, dt \right) dx - \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dt \right) dx \right| =$
$= \left| \dfrac{1}{\Delta y} \displaystyle\int_a^b \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dt \right) dx \right| \boxed{<}$
За умовою твердження,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C([a, b] \times [c, d]) \implies \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C_{unif}([a, b] \times [c, d]) \implies$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,t),(x,y_0) \in [a,b]\times[c,d] : \|(x,t)-(x,y_0)\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\boxed{<} \int_a^b \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{1}{\Delta y}\frac{\varepsilon}{b-a}\,dt\,dx = \varepsilon$

Знову збираємо пазл - отримуємо, що: $\forall y_0 \in [c,d]$:

$\exists \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{J(y_0+\Delta y)-J(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx = J'(y_0)$. Отже, J - диференційована на $[c,d]$. ■

Proposition 5.1.4 Інтегрованість

Задано функцію $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$, таку, що $f \in C([a,b]\times[c,d])$.

Тоді $J \in \mathcal{R}([c,d])$, а також $\int_c^d \underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{=J(y)}\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$.

Proof.

Розглянемо дві функції: $h(t) = \int_c^t \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \quad g(t) = \int_a^b \int_c^t f(x,y)\,dy\,dx$. В нашому випадку $t \in [c,d]$. Якщо $t = c$, то маємо, що $h(c) = g(c) = 0$.

Необхідно знайти, чому дорівнює $h'(t), g'(t)$. Зробимо позначення: $h(t) = \int_c^t J(y)\,dy \quad g(t) = \int_a^b F(x,t)\,dx$.

Маємо два інтеграли з параметром t. Другий інтеграл задовільняють умові з **Prp 3.1.?**, тоді можемо знайти похідну.

Перший - це інтеграл від верхньої межі, тому автоматично $h'(t) = J(t)$.

Другий рахується за попереднім твердженням, всі умови виконані для цього.

$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dt = \int_a^b f(x,t)\,dx = J(t)$.

Таким чином, $\forall t \in [c,d] : h'(t) = g'(t) \implies h(t) = g(t) + C$.

Але оскільки $h(c) = g(c) = 0$, то одразу $C = 0 \Rightarrow h(t) = g(t)$.

Ну а тоді $h(d) = g(d) \implies \int_c^b \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$. ■

Example 5.1.5 Обчислити $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x\,dx$.

Маємо $I(\alpha) = \int_0^2 x^2 \cos \alpha x\,dx$. Розглянемо функцію $f(x,\alpha) = x^2 \cos \alpha x$ на $[0,2]\times[-1,1]$ (можна й менше взяти другу сторону, головне щоб навколо т. 0). Ця функція є неперервною, тоді $I(\alpha)$ неперервна, зокрема в т. $\alpha = 0$.

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x\,dx = \lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha) = I(0) = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3} = \frac{8}{3}$.

Example 5.1.6 Знайти похідну функції $I(\alpha) = \int_1^2 e^{\alpha x^2} \frac{dx}{x}$.

Позначу $f(x,\alpha) = \frac{e^{\alpha x^2}}{x}$. Знайдемо часткову похідну за другим аргументом: $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{x^2 e^{\alpha x^2}}{x} = x e^{\alpha x^2}$.

Зауважимо, що f та $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ неперервні на прямокутнику $[1,2]\times[-1,1]$, тому ми можемо диференціювати функцію I, а також $I'(\alpha) = \int_1^2 x e^{\alpha x^2}\,dx$.

$I'(\alpha) = \frac{1}{2}\int_1^2 e^{\alpha x^2}\,dx^2 = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x^2}\Big|_1^2 = \frac{e^{4\alpha} - e^{\alpha}}{2\alpha}$.

Example 5.1.7 Обчислити $\int_0^1 \frac{x^b - x^\alpha}{\ln x}\,dx$, якщо $a, b > 0$.

Зауважимо, що $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\,dy$. Тоді взагалі маємо обчислити $\int_0^1 \int_a^b x^y\,dy\,dx$.

Оскільки функція $f(x,y) = x^y$ є неперервною на прямокутнику $[0,1]\times[a,b]$, то звідси ми можемо поміняти місцями порядок інтегрування, тобто

$\int_0^1 \int_a^b x^y\,dy\,dx = \int_a^b \int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1\,dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = \ln(y+1)\Big|_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1}$.

Remark 5.1.8 Для диференціювання існує більш загальна формула, якщо досліджувати функцію $J(y) = \displaystyle\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$. Вимагаємо $f, \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a,b]\times[c,d])$, $\varphi, \psi \in C([c,d])$. Тоді маємо:
$J'(y) = f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y) + \displaystyle\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.
Для її доведення можна скористатися формулою Ньютона-Лейбніца.

5.2 Невласні інтеграли з параметром

Definition 5.2.1 Задано функцію $f : A \times B \to \mathbb{R}$, де $A, B \subset \mathbb{R}$, та $y_0 \in \mathbb{R}$ - гранична точка для B. Функція f **поточково збігається** до функції φ при $y \to y_0$, якщо

$$\forall x \in A : \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$$

Функція f **збігається рівномірно** до функції φ при $y \to y_0$ на множині A, якщо

$$\sup_{x\in A} |f(x,y) - \varphi(x)| \to 0, y \to y_0$$

Позначення: $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x), y \to y_0$.

Новий вигляд збіжності можна призвести до збіжності функціональних послідовностей таким твердженням.

Proposition 5.2.2 $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x), y \to y_0$ на множині $A \iff \forall \{y_n, n \geq 1\} \subset B : \forall n \geq 1 : y_n \neq y_0 :$ $f(x,y_n) \rightrightarrows \varphi(x), n \to \infty$ на множині A.
Випливає з означення рівномірної збіжності.

Theorem 5.2.3 Критерій Коші
$f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x), y \to y_0$ на $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall y_1, y_2 \in B, y_1, y_2 \neq y_0 : \begin{cases} |y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta \end{cases} \implies$ $\sup\limits_{x\in A} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *Вказівка: означення рівномірної границі та нерівність трикутника.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall y_1, y_2 \in B, y_1, y_2 \neq y_0 : \begin{cases} |y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta \end{cases} \implies \sup\limits_{x\in A} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon$.
Візьмемо деяку послідовність $\{y_n, n \geq 1\}$, де $y_n \neq y_0, y_n \to y_0$. Тоді
$\exists N : \forall n, m \geq N : |y_n - y_0| < \delta, |y_m - y_0| < \delta$. За умовою, звідси $\sup\limits_{x\in A} |f(x,y_n) - f(x,y_m)| < \varepsilon$. За критерієм Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності, $f(x,y_n)$ є рівномірно збіжною на A. Отже, $f(x,y)$ - рівномірно збіжний на A за **Prp. 5.2.2.** ∎

Definition 5.2.4 Задано функцію $f : [a,\omega) \times A$, таку, що $\forall y \in A : \forall c \in [a,\omega) : f \in \mathcal{R}([a,c])$. Також маємо збіжний невласний інтеграл із параметром $J(y) = \displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$, $\forall y \in A$.
Невласний інтеграл **збігається рівномірно** на множині A, якщо

$$\sup_{y\in A} \left| \int_a^\omega f(x,y)\,dx - \int_a^c f(x,y)\,dx \right| \overset{c\to\omega}{\to} 0$$

Remark 5.2.5 Воно якось схоже за рівномірну збіжність функції, але трошки не так. Тут розглядається взагалі-то рівномірна збіжність функції $g(x,y)$ до функції $g(y)$ ТА при цьому аргумент $x \to x_0$. Проте поки додаткові знання додавати не буду.

Theorem 5.2.6 Критерій Коші
$\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ - збіжний рівномірно на $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists C : \forall c_1, c_2 \in [C,\omega) : \sup_{y\in A} \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$.
Випливає з критерію Коші рівномірної збіжності функцій.

Theorem 5.2.7 Ознака Вейєрштрасса
Задані функції $f : [a,\omega) \times A \to \mathbb{R}$, $g : [a,\omega) \to \mathbb{R}$ такі, що
1) $\forall x \in [a,\omega) : \forall y \in A : |f(x,y)| \leq g(x)$;
2) $\displaystyle\int_a^\omega g(x)\,dx$ - збіжний.
Тоді $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ - збіжний рівномірно на A.

Proof.
$\displaystyle\sup_{y\in A}\left|\int_c^\omega f(x,y)\,dx\right| \leq \left|\int_c^\omega g(x)\,dx\right| \overset{c\to\omega}{\to} 0.$ ■

Example 5.2.8 Довести, що $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ рівномірно збіжний на множині $[1+\gamma,+\infty)$, якщо $\gamma > 0$.
Маємо функцію $f(x,\alpha) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Також відома оцінка $x^\alpha > x^{1+\gamma} \implies \dfrac{1}{x^\alpha} < \dfrac{1}{x^{1+\gamma}}$, виконано $\forall x \geq 1$.
Також $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\gamma}}$ - збіжний невласний інтеграл (еталон). Тому за ознакою Вейєрштрасса, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ рівномірно збіжний на множині $[1+\gamma,+\infty)$.

Theorem 5.2.9 Ознака Абеля-Діріхле
Задані функції $f : [a,\omega) \times A \to \mathbb{R}$, $g : [a,\omega) \times A \to \mathbb{R}$ такі, що виконана одна з двох пар умов
$a1)$ $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ - збіжний рівномірно на A
$a2)\forall y \in A : g$ - монотонна від $x \in [a,\omega)$
$a3)\exists D > 0 : \displaystyle\sup_{y\in A}\sup_{c\in[a,\omega)} |g(x,y)| \leq D$

$d1)\exists D > 0 : \displaystyle\sup_{y\in A}\sup_{c\in[a,\omega)} \left|\int_a^c f(x,y)\,dx\right| \leq D$
$d2)\forall y \in A : g$ - монотонна від $x \in [a,\omega)$
$d3)\displaystyle\sup_{y\in A} |g(x,y)| \overset{x\to\omega}{\to} 0$
Тоді $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,dx$ - рівномірно збіжний на A
Поки без доведення

Proposition 5.2.10 Неперервність
Задано функцію $f : [a,\omega) \times [c,d] \to \mathbb{R}$, таку, що $f \in C([a,\omega)\times[c,d])$. Також J - рівномірно збіжний. Тоді $J \in C([c,d])$.

Proof.
За означенням рівномірної збіжності, маємо, що $\displaystyle\sup_{y\in[c,d]}\left|\int_c^\omega f(x,y)\,dx\right| \to 0, c \to \omega$
Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists c > a : \displaystyle\sup_{y\in[c,d]}\left|\int_c^\omega f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$
Оцінимо J
$$|J(y_1) - J(y_2)| = \left|\int_a^\omega f(x,y_1)\,dx - \int_a^\omega f(x,y_2)\,dx\right| =$$
$$= \left|\int_a^c f(x,y_1)\,dx - \int_a^c f(x,y_2)\,dx + \int_c^\omega f(x,y_1)\,dx - \int_c^\omega f(x,y_2)\,dx\right| \leq$$
$$\leq \left|\int_a^c f(x,y_1) - f(x,y_2)\,dx\right| + \left|\int_c^\omega f(x,y_1)\,dx\right| + \left|\int_c^\omega f(x,y_2)\,dx\right| \boxed{<}$$
Перший модуль: $f \in C_{unif}([a,\omega)\times[c,d])$
$\Rightarrow \exists \delta : \forall y_1, y_2 : |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{c-a}$
Другий модуль: $\displaystyle\sup_{y\in[c,d]}\left|\int_c^\omega f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$
$\Rightarrow \forall y \in [c,d] : \displaystyle\left|\int_c^\omega f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\boxed{<} \displaystyle\int_a^c \frac{\varepsilon}{c-a}\,dx + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Збираємо пазл та маємо, що $J \in C_{unif}([c,d]) \Rightarrow J \in C([c,d])$ ■

Proposition 5.2.11 Інтегрованість

Задана функція $f : [a,\omega) \times [c,d] \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a,\omega) \times [c,d])$

Також J - рівномірно збіжний. Тоді $J \in D([c,d])$ та

$$\int_c^d \underbrace{\int_a^\omega f(x,y)\,dx}_{=J(y)}\,dy = \int_a^\omega \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Proof.

Розглянемо $\displaystyle\int_c^d J(y)\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy + \int_c^d \int_b^\omega f(x,y)\,dx\,dy$

Перший доданок - це визначений інтеграл, тому там виконується **Prp 3.1.4.**, тобто

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Другий доданок - цікавіше

$$\left|\int_c^d \int_b^\omega f(x,y)\,dx\,dy\right| \leq \int_c^d \left|\int_b^\omega f(x,y)\,dx\right| dy \leq \int_c^d \sup_{y\in[c,d]} \left|\int_b^\omega f(x,y)\,dx\right| dy = \sup_{y\in[c,d]} \left|\int_b^\omega f(x,y)\,dx\right| (d-c) \to 0, b \to \omega$$

Якщо $b \to \omega$, то тоді отримаємо

$$\int_c^d J(y)\,dy = \int_a^\omega \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy + 0 = \int_a^\omega \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$$ ■

Proposition 5.2.12 Диференційованість

Задана функція $f : [a,\omega) \times [c,d] \to \mathbb{R}$, така, що:

1) $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a,\omega) \times [c,d])$

2) $\exists y_0 \in [c,d] : J(y_0)$ - збіжний

3) $\displaystyle\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ - рівномірно збіжний Тоді J - збіжний, диференційована в $[c,d]$, при цьому $J'(y) = \displaystyle\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$

Proof.

Розглянемо функцію $I(y) = \displaystyle\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ - неперервна за умовною рівномірна. Часткові похідні є неперервними також за умовою. Тоді за **Prp. 3.2.6.**, $I \in D([y,y_0])$

$$\int_{y_0}^y I(t)\,dt = \int_a^\omega \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\,dx = \int_a^\omega f(x,y) - f(x,y_0)\,dx =$$
$$= J(y) - J(y_0)$$

$\Rightarrow J(y) = \displaystyle\int_{y_0}^y I(t)\,dt - J(y_0)$ - обидва збіжні. Тому сума - збіжна

Отже, J - збіжний $\forall y \in [c,d]$

$\Rightarrow J'(y) = I(y) - 0 = \displaystyle\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ ■

Proposition 5.2.13 Невласне інтегрування невласного інтеграла

Задана функція $f : [a,+\infty) \times [c,+\infty) \to \mathbb{R}$ така, що $f \in C([a,+\infty) \times [c,+\infty))$, а також виконані умови:

1)$\forall b > a : \displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ - збіжний рівномірно в $[a,b]$

2)$\forall d > c : \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ - збіжний рівномірно в $[c,d]$

3) $\displaystyle\int_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy, \int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx$ - збігаються $\forall x \geq a, \forall y \geq c$

4) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy\,dx$ або $\displaystyle\int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx\,dy$ - збіжний

Тоді обидва інтеграли - збіжні та

$\int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} |f(x,y)|\, dy\, dx = \int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} |f(x,y)|\, dx\, dy$
Поки без доведення

5.3 Інтеграл Діріхле

Інтегралом Діріхле називають таку рівність, яку зараз доведу (про збіжність вже говорили)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Розглянемо функцію $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx$
Зауважимо, що якщо зробити заміну $ax = t$, то отримаємо, що
$F(a) = F(1)$. А також $F(-a) = -F(a)$, $F(0) = 0$
Із цих умою випливає, що $F(a)$ - розривна, тож $F(a)$ - не збіжна рівномірно на $\mathbb{R}$
Розглянемо функцію $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-bx}\, dx$, $b \geq 0$
Підінтегральна функція - неперервна, має неперервну часткову похідну $\frac{\partial f}{\partial a} = \cos ax \cdot e^{-bx}$, а також $\int_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-bx}\, dx$ - рівномірно збіжний (додати приклад)
Остаточно отримаємо
$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \lim_{b \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-bx}\, dx = \lim_{b \to 0^+} J(a) = \frac{\pi}{2}$

5.4 Інтеграл Ейлера-Пуассона

Інтегралом Діріхле називають таку рівність, яку зараз доведу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Позначимо $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$
Зробимо заміну $x = at$. Тоді
$J = \int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2} a\, dt$
$J^2 = J \int_0^{+\infty} e^{-a^2}\, da = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2} a\, dt \right) e^{-a^2}\, da = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} a e^{-a^2t^2 - a^2}\, dt\, da$
$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2(t^2+1)} a\, da\, dt =$
Заміна: $s = -a^2(t^2+1)$
$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2+1)} \int_{-\infty}^0 e^s\, ds\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2+1)}\, dt = \frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

5.5 Гамма-функція

Definition 5.5.1 Гамма-функцією називають таку функцію

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \alpha > 0$$

Lemma 5.5.2 $\alpha > 0$ - область збіжності гамми-функції

Proof.
$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка - $x = 0$
Порівняємо з інтегралом $\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ - збіжний для $\alpha > 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1$
Отже, обидва збіжні, тому перший доданок - збіжний
Розглянемо другий інтеграл. Особлива точка - $x = \infty$
Порівняємо з інтегралом $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ - збіжний для $\alpha > 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ за правилом Лопіталя}, \alpha \geq 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^{1-\alpha}e^{\frac{x}{2}}} = 0, \alpha < 1 \end{array}\right.$
Отже, обидва збіжні, тому другий доданок - збіжний
Остаточно, $\Gamma(\alpha)$ - збіжний ■

Lemma 5.5.3 $\Gamma \in C^\infty((0, +\infty))$

Proof.
Поки без доведення ■

Theorem 5.5.4 $\forall \alpha > 0 : \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
Вказівка: ліву частину інтегруємо частинами, $u = x^\alpha, dv = e^{-x}\,dx$

Що, якщо $\alpha \in \mathbb{N}$
$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1\Gamma(1)$
$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$
Отже,

Corollary 5.5.5 $\Gamma(n + 1) = n!$

А далі перевіримо, чому дорівнює гамма-функція в т. $\alpha = \dfrac{1}{2}$
$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx \overset{\text{Заміна: } t=\sqrt{x}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$
Далі скористаємось тотожністю $\Gamma(\alpha + 1) = \Gamma(\alpha)$, щоб знайти $\Gamma\left(\dfrac{1}{2} + n\right)$. Отримаємо:

Corollary 5.5.6 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2} + n\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$

Theorem 5.5.7 Функціональне рівняння Ейлера
$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$
$\Gamma\left(\dfrac{1}{2} + \alpha\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2} - \alpha\right) = \dfrac{\pi}{\cos\pi\alpha}$
Без доведення. Тут треба знати щось про функціональне рівняння

5.6 Бета-функція

Definition 5.6.1 Бета-функцією називають таку функцію

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \alpha, \beta > 0$$

Lemma 5.6.2 $\alpha, \beta > 0$ - область збіжності бети-функції

Proof.
$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$
Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка - $x = 0$
Порівняємо з інтегралом $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}\,dx$ - збіжний для $\alpha > 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}} = 1$
Отже, обидва збіжні, тому перший доданок - збіжний
Розглянемо другий інтеграл. Проводимо заміну $1-x=t$, тоді маємо
$-\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\,dt$ - це той самий перший доданок. І він вже буде збіжним, якщо $\beta > 0$
Остаточно, $B(\alpha,\beta)$ - збіжний ■

Proposition 5.6.3 $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy$
Вказівка: зробити заміну $x = \dfrac{y}{1+y}$

Theorem 5.6.4 Зв'язок між Γ та B
$B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

Proof.
Розглянемо $\Gamma(\alpha+\beta)$ та проведемо заміну $x = y(t+1), dx = (t+1)\,dy$
$\Gamma(\alpha+\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}\,dx = (t+1)^{\alpha+\beta}\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}e^{-y(t+1)}\,dy$
Отримаємо
$\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}e^{-y(t+1)}\,dy$
Помножимо обидві частини на $t^{\alpha-1}$ та проінтегруємо від 0 до $+\infty$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}t^{\alpha-1}e^{-y}e^{-yt}\,dy\,dt$
$\Gamma(\alpha+\beta)\cdot B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} y^{\beta-1}e^{-y}\int_0^{+\infty} y^{\alpha}t^{\alpha-1}e^{-yt}\,dt\,dy$
Внутрішній інтеграл при заміні $yt = x$ стане рівним $\Gamma(\alpha)$. Його виносимо з-під зовнішнього інтегралу, а сам інтеграв вже є $\Gamma(\beta)$. Тоді
$\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ ■