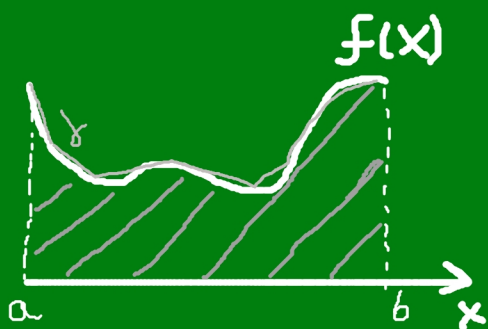
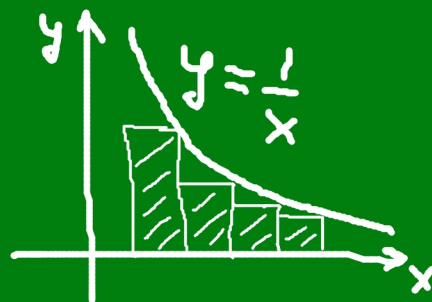


# Real analysis II



$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = +\infty$$

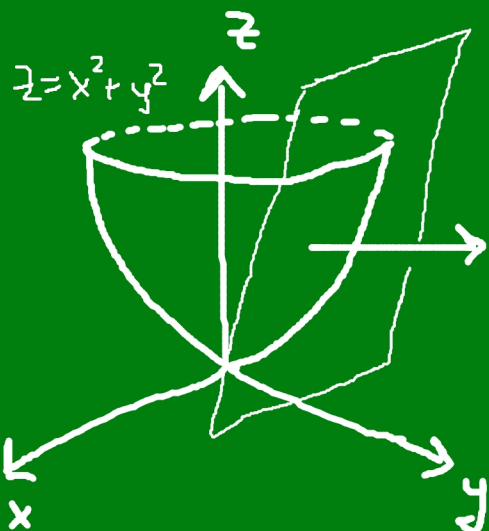
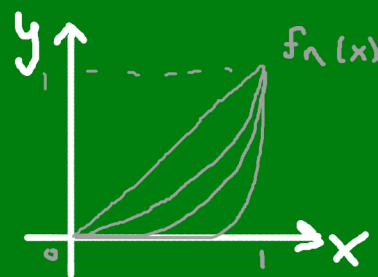


$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots = -\ln 2$$

$$-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots = -\frac{3}{2} \ln 2$$

$$\{f_n(x) = x^n, n \geq 1\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$$



$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

# Зміст

<b>1</b>	<b>Невизначений інтеграл</b>	<b>3</b>
1.1	Первісна, основні означення невизначеного інтегралу . . . . .	3
1.2	Заміна змінної . . . . .	4
1.3	Інтегрування частинами . . . . .	5
1.4	Інтегрування дробово-раціональних функцій . . . . .	5
1.5	Інтегрування тригонометричних функцій . . . . .	7
1.6	Інтегрування ірраціональних виразів . . . . .	8
1.7	Диференціальний біном . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Визначений інтеграл</b>	<b>10</b>
2.1	Підхід Рімана . . . . .	10
2.2	Суми Дарбу . . . . .	11
2.3	Існування інтеграла . . . . .	13
2.4	Класи інтегрованих функцій . . . . .	14
2.5	Властивості інтегралів . . . . .	16
2.6	Інтеграл як функція верхньої границі . . . . .	19
2.7	Обчислення визначених інтегралів . . . . .	20
2.7.1	Заміна змінної . . . . .	20
2.7.2	Інтегрування частинами . . . . .	20
2.8	Застосування визначеного інтеграла . . . . .	21
2.8.1	Площа криволінійної трапеції . . . . .	21
2.8.2	Площа криволінійного сектора . . . . .	22
2.8.3	Крива, яка спрямовується . . . . .	23
2.8.4	Об'єм тіла обертання . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Невласні інтеграли</b>	<b>26</b>
3.1	Основні означення . . . . .	26
3.2	Дослідження на збіжність/розбіжність . . . . .	27
3.2.1	Дослідження для додатних функцій . . . . .	28
3.2.2	Дослідження для знакодовільних функцій . . . . .	29
3.3	Невласний інтеграл в сенсі головного значення . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Ряди</b>	<b>33</b>
4.1	Первинний аналіз збіжності та арифметика рядів . . . . .	33
4.2	Знакододатні ряди . . . . .	35
4.3	Знакозмінні ряди . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Функціональні ряди</b>	<b>42</b>
5.1	Функціональні послідовності . . . . .	42
5.2	Функціональні ряди . . . . .	44
5.3	Степеневі ряди . . . . .	48
5.4	Зв'язок з Тейлором та єдиність степеневого ряду . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Вступ до <math>\mathbb{R}^m</math></b>	<b>53</b>
6.1	Топологія та принцип аналізу в $\mathbb{R}^m$ . . . . .	53
6.2	Границя послідовності . . . . .	54
6.3	Функція від декількох змінних. Границя функції . . . . .	56
6.4	Неперервність функції . . . . .	58
6.5	Границя та неперервність векторнозначної функції . . . . .	60
6.6	Крива в $\mathbb{R}^m$ . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Диференційованість</b>	<b>61</b>
7.1	Для функції із багатьма змінними . . . . .	61
7.2	Для векторнозначних функцій . . . . .	64
7.3	Похідна за напрямком. Градієнт . . . . .	65
7.4	Неявно задані функції . . . . .	66
7.5	Обернені функції . . . . .	68

7.6	Геометричне та алгебраїчне застосування . . . . .	68
7.6.1	Дотична площина, нормальна пряма поверхні . . . . .	68
7.6.2	Дотична пряма, нормальна площина кривої . . . . .	69
7.6.3	Приблизне обчислення . . . . .	70
7.7	Диференціювання та похідні старших порядків . . . . .	70
7.8	Формула Тейлора . . . . .	73
7.9	Локальні екстремуми . . . . .	74
7.10	Умовні локальні екстремуми . . . . .	76
<b>8</b>	<b>Інтеграли з параметром</b>	<b>79</b>
8.1	Основні означення та властивості . . . . .	79
8.2	Невласні інтеграли з параметром . . . . .	81
8.3	Інтеграл Діріхле . . . . .	84
8.4	Інтеграл Ейлера-Пуассона . . . . .	84
8.5	Гамма-функція . . . . .	84
8.6	Бета-функція . . . . .	85

# 1 Невизначений інтеграл

## 1.1 Первісна, основні означення невизначеного інтегралу

**Definition 1.1.1** Первісною для функції  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  називають функцію  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої

$$F'(x) = f(x)$$

**Example 1.1.2** Зокрема  $F(x) = x^2$  - первісна функції  $f(x) = 2x$ , тому що  $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$ . Проте це не єдина така первісна.

**Proposition 1.1.3** Якщо  $F(x), \Phi(x)$  - первісні для  $f(x)$ , то  $\Phi(x) = F(x) + C$ .  
Впливає з наслідків теореми Лагранжа.

**Definition 1.1.4** Множину всіх первісних для функції  $f(x)$  називають **невизначеним інтегралом** функції  $f(x)$ .

Позначення:  $\int f(x) dx = \{F(x) : F'(x) = f(x)\}$ .

**Example 1.1.5**  $\int 2x dx = \{x^2 + C | C \in \mathbb{R}\}$

**Remark 1.1.6** Але надалі можна вважати, що  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , у разі якщо  $F$  - первісна.  
Тобто  $\int 2x dx = x^2 + C$ .

**Remark 1.1.7** Взагалі-то кажучи, символ  $\int f(x) dx$  можна також використовувати, щоб позначити як первісну функції  $f$ , якщо не можна записати  $F$  як функцію.

Зокрема  $\int e^{-x^2} dx$  - первісна функції  $e^{-x^2}$ , проте записати як функцію від змінної не можна.

**Proposition 1.1.8** Властивості

1)  $\int f'(x) dx = f(x) + C$ ;

2)  $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$ ;

Далі задамо функції  $f, g$ , які мають відповідно первісні  $F, G$ . Тоді:

3)  $\alpha F$  - первісна для функції  $\alpha f$  та  $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$ ;

4)  $F + G$  - первісна для функції  $f + g$  та  $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ .

**Proof.**

1), 2) випливають з означення.

3) Якщо  $F$  - первісна функції  $f$ , то тоді  $\alpha F$  - первісна функції  $\alpha f(x)$ , тому що  $(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$ .

Отже,  $\int \alpha f(x) dx = \alpha F(x) + C = \alpha (F(x) + C^*) = \alpha \int f(x) dx$ .

4) Якщо  $F, G$  - первісні відповідно функції  $f, g$ , то  $F + G$  - первісна функції  $f + g$ , тому що  $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ .

Отже,  $\int f(x) + g(x) dx = F(x) + G(x) + C = F(x) + C^* + G(x) + C^{**} = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ . ■

**Remark 1.1.9** Підінтегральний вираз  $f(x) dx$  варто розглядати як диференціал функції  $F(x)$ , тобто  $\int f(x) dx = F(x) + C \iff d(F(x) + C) = f(x) dx$

## Таблиця первісних

$f(x)$	$F(x)$
1	$x$
$x^\alpha$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln  x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$

**Example 1.1.10** Обчислимо  $\int (x+2)^2 + \operatorname{tg}^2 x \, dx$ .

Робити будемо це, використовуючи таблицю первісних та властивості інтегралів.

$$\begin{aligned} \int (x+2)^2 + \operatorname{tg}^2 x \, dx &= \int x^2 + 4x + 4 + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \, dx = \int x^2 \, dx + 4 \int x \, dx + 3 \int 1 \, dx + \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

## 1.2 Заміна змінної

**Theorem 1.2.1** Задано функцію  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , має первісну  $F$ ; функцію  $g : J \rightarrow I$  - диференційована. Тоді  $(f \circ g)g'$  має первісу  $F \circ g$ , причому

$$\int (f \circ g)(x)g'(x) \, dx = \int f(t) \, dt.$$

**Proof.**

Дійсно,  $F \circ g$  - первісна для  $(f \circ g)g'$ , оскільки  $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ .

Отже,  $\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(g(x)) \, dg(x) = \int f(t) \, dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$ . ■

**Example 1.2.2** Обчислити  $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$

$$\int \frac{1}{x \ln x} \, dx \stackrel{\square}{=} \quad \text{Проведемо заміну: } \ln x = t. \text{ Тоді } \frac{1}{x} \, dx = dt$$

$$\stackrel{\square}{=} \int \frac{1}{t} \, dt = \ln |t| + C = \ln |\ln x| + C$$

### 1.3 Інтегрування частинами

**Theorem 1.3.1** Задані функції  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$  - обидва диференційовані. Відомо, що  $u'v$  має первісну. Тоді  $uv'$  також має первісну, причому

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

**Proof.**

Функція  $u'(x)v(x)$  має первісну  $H_1(x)$ .

Тоді  $u(x)v'(x)$  має первісну  $H_2(x) = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$ , тому що

$$H_2'(x) = \left( u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx \right)' = (u(x)v(x))' - v(x)u'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - v(x)u'(x) = u(x)v'(x).$$

Отже,  $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$ . ■

**Remark 1.3.2** Більш зручно записати таку формулу:  $\int u dv = uv - \int v du$ .

**Example 1.3.3** Обчислити  $\int x^2 e^x dx$ .

$$\int x^2 e^x dx \equiv$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$$

$$\equiv x^2 e^x - \int 2x e^x dx \equiv$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 dx$$

$$e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$$

$$\equiv x^2 e^x - (2x e^x - \int 2e^x dx) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

### 1.4 Інтегрування дробово-раціональних функцій

Розглянемо  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , де  $P(x), Q(x)$  - многочлени з дійсний коефіцієнтами. Є два випадки:

I.  $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$

Тоді можемо поділити їх з остачею:  $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ .

$$\text{А тому } \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

,де  $S(x)$  - деякий многочлен, який можна проінтегрувати таблицею, а також  $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$ . Зараз буде пункт, як такий випадок інтегрувати.

II.  $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$

За наслідком основної теореми алгебри, розкладемо  $Q(x)$  таким чином:

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}.$$

Причому дискримінант квадратних трьохчленів - від'ємний. Тоді за теоремоюдесь із курсу ліналу,

ми можемо  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  записати як суму простих дробів:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - a_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{m1}}{x - a_m} + \dots + \frac{A_{mk_m}}{(x - a_m)^{k_m}} +$$

$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + p_s x + q_s} + \dots + \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}}.$$

Коротше, залишається розглянути 4 вигляди інтегралу:

$$1) \int \frac{1}{x - a} dx = \ln |x - a| + C$$

$$2) \int \frac{1}{(x - a)^k} dx = \int (x - a)^{-k} dx = \frac{(x - a)^{-k+1}}{-k + 1} + C = \frac{1}{(1 - k)(x - a)^{k-1}} + C$$

$$3) \int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx \equiv$$

Знаменник розпишу як  $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}$ .

Зробимо заміну:  $x + \frac{p}{2} = t \Rightarrow dx = dt$

Також  $Bx + C = Bt - B\frac{p}{2} + C$ .

Перепозначення:  $\frac{4q - p^2}{4} = a^2 > 0 \quad C - B\frac{p}{2} = M$ .

$$\equiv \int \frac{Bt + M}{t^2 + a^2} dt = B \int \frac{t}{t^2 + a^2} dt + M \int \frac{1}{t^2 + a^2} dt \equiv$$

$$\int \frac{t}{t^2 + a^2} dt = \frac{dt^2}{2(t^2 + a^2)} = \frac{1}{2} \ln |t^2 + a^2|$$

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} dt = \frac{1}{a} \int \frac{d\frac{t}{a}}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$$

$$\equiv \frac{B}{2} \ln |t^2 + a^2| + \frac{M}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

Ну а далі робимо зворотню заміну - інтеграл розв'язаний.

$$4) \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^l} dx \equiv$$

Тут робимо ті самі заміни, що в 3)

$$\equiv \int \frac{Bt + M}{(t^2 + a^2)^l} dt = B \int \frac{t}{(t^2 + a^2)^l} dt + M \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^l} dt$$

Ну і тут я ланцюг рівностей зупиню, якщо перший інтеграл - ще ок, то другий - це дупа

$$\int \frac{t}{(t^2 + a^2)^l} dt = \int \frac{dt^2}{2(t^2 + a^2)^l} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-l)s^{l-1}}$$

$$\int \frac{1}{(t^2 + a^2)^l} dt \equiv \quad u = \frac{1}{(t^2 + a^2)^l} \quad dv = dt$$

$$\equiv \frac{t}{(t^2 + a^2)^l} + 2l \int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^{l+1}} dt + \frac{t}{(t^2 + a^2)^l} + 2l \left( \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^l} - a^2 \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{l+1}} \right)$$

$$\text{Позначимо за } I_l = \int \frac{t}{(t^2 + a^2)^l} dt$$

Тоді маємо таке рівняння:

$$I_l = \frac{t}{(t^2 + a^2)^l} + 2l \cdot I_l - 2la^2 \cdot I_{l+1}$$

Залишилось виразити  $I_{l+1}$  та розв'язати рівняння рекурсивно, причому  $I_1$  ми вже рахували.

Все! Інтеграл  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  - розв'язаний.

**Example 1.4.1** Обчислити  $\int \frac{x^4}{1 + x^3} dx$

Оскільки  $\deg(x^4) > \deg(1 + x^3)$ , то ми поділимо многочлени. Отримаємо:

$$\int \frac{x^4}{1 + x^3} dx = \int x - \frac{x}{x^3 + 1} dx = x^2 - \int \frac{x}{x^3 + 1} dx.$$

Обчислимо другий інтеграл. Перед цим розкладемо дріб на суму простих дробів методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{x}{x^3 + 1} = \frac{x}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} \equiv$$

$$A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 1 \\ A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{3}, B = \frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}$$

$$\equiv -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3} \frac{x+1}{x^2 - x + 1}$$

Таким чином, треба порахувати такий інтеграл:

$$\int \frac{x}{x^3+1} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx \equiv$$

І розглянемо другий інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{4x+4}{(2x-1)^2+3} dx = \int \frac{4x-2}{(2x-1)^2+3} dx + \int \frac{6}{(2x-1)^2+3} dx = \\ &= \ln((2x-1)^2+3) + 6 \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \ln(4x^2-4x+4) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ \equiv & -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln(4x^2-4x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Разом отримаємо:

$$\int \frac{x^4}{1+x^3} dx = x^2 + \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \ln(4x^2-4x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

**Example 1.4.2** Обчислити  $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

Можна скористатися отриманою рекурентною формулою, а можна зробити ті самі кроки.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^1} dx &= \operatorname{arctg} x \\ \int \frac{1}{(x^2+1)^1} dx &\stackrel{u=\operatorname{arctg} x, dv=dx}{=} \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\ \Rightarrow \operatorname{arctg} x &= \frac{x}{x^2+1} + 2 \operatorname{arctg} x - 2 \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\ \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C \end{aligned}$$

## 1.5 Інтегрування тригонометричних функцій

I. Розглянемо  $\int \sin^k x \cos^m x dx$ , де  $k, m \in \mathbb{Z}$ . Маємо такі заміни:

1)  $k$  - непарне, тобто  $k = 2l + 1$ , тоді заміна:  $\cos x = t$ . Тому

$$(-\sin x) dx = dt \text{ і } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$$

$$\int \sin^k x \cos^m x dx = \int \sin^{2l+1} x t^m \frac{dt}{-\sin x} = - \int t^m (1-t^2)^l dt$$

2)  $m$  - непарне, тобто  $m = 2l + 1$ , тоді заміна:  $\sin x = t$ . Тому

$$\cos x dx = dt \text{ і } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$$

$$\int \sin^k x \cos^m x dx = \int t^k \cos^{2l+1} x \frac{dt}{\cos x} = \int t^k (1-t^2)^l dt$$

3)  $k, m$  - парні, тобто  $k = 2l, m = 2n$ , тоді знижуємо степені:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\int \sin^k x \cos^m x dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^l \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^n dx$$

Всі отримані інтеграли є випадком інтегрування дробово-раціональних виразів.

**Example 1.5.1** Обчислити  $\int \cos^3 x dx$

Заміна:  $t = \sin x$ , випадок 2), тоді  $dt = \cos x dx$

$$\int \cos^3 x dx = \int (1-t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

II. Розглянемо  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , де  $R$  - дробово-раціональний вираз від  $\sin x, \cos x$ . Маємо таку заміну:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$



$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

Отримуємо випадок інтегрування дробово-раціональних виразів.

**Example 1.5.2** Обчислити  $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

Заміна:  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , випадок II. Тоді беремо решта замінін звідси, з нашого пункту.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5-3\cos x} &= \int \frac{1}{5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2 dt}{5+5t^2-3+3t^2} = \int \frac{dt}{4t^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2t + C = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

## 1.6 Інтегрування ірраціональних виразів

I. Розглянемо  $\int R\left(\sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[k_n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ , де  $R$  - дробово-раціональний вираз, причому  $ad - cb \neq 0$ .

Нехай  $m = \operatorname{LCM}(k_1, \dots, k_n)$ . Спрацює заміна:  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$

Виразимо  $x$  з цього рівняння:

$$ax+b = t^m cx + t^m d \Rightarrow x = \frac{t^m d - b}{a - ct^m}$$

$$\text{Тоді } dx = \frac{dmt^{m-1}(a - ct^m) + (t^m d - b)cm t^{m-1}}{(a - ct^m)^2} dt = \frac{mt^{m-1}(ad - bc)}{(a - ct^m)^2} dt$$

$$\int R\left(\sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[k_n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R(t^{m_1}, \dots, t^{m_n}) \frac{mt^{m-1}(ad - bc)}{(a - ct^m)^2} dt,$$

$$\text{де } m_1 = \frac{m}{k_1}, \dots, m_n = \frac{m}{k_n} \in \mathbb{Z}$$

Отримаємо інтеграл дробово-раціонального виразу.

**Example 1.6.1** Обчислити  $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$

Заміна:  $t^2 = x+1$ . Тоді  $x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{t+2}{t^4 - t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t+2}{t^3 - 1} dt \quad \boxed{=}$$

обчислення цього інтегралу проводиться як в п. 4, тому я пропускаю цей момент

$$\boxed{=} -\ln(t^2 + t + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + 2 \ln|t-1| + C =$$

$$= -\ln(x+2+\sqrt{x+1}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + 2 \ln|\sqrt{x+1}-1| + C$$

II. Розглянемо такі інтеграли:

$$1) \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \quad \boxed{=}$$

Заміна:  $x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t dt$

$$\boxed{=} \int R(a \sin t, a \cos t) \cdot a \cos t dt$$

$$2) \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx \quad \boxed{=}$$

Заміна:  $x = a \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$

$$\boxed{=} \int R\left(a \operatorname{tg} t, \frac{a}{\cos t}\right) \cdot \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

$$3) \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx \quad \boxed{=}$$

Заміна:  $x = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 t} \sin t dt$

$$\boxed{=} \int R\left(\frac{a}{\cos t}, a \operatorname{tg} t\right) \cdot \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt$$

Усі отримані інтеграли  $\Pi$  є інтегралами тригонометричних функцій.

**Example 1.6.2** Обчислити  $\int \sqrt{4-x^2} dx$

Заміна:  $x = 2 \sin t$ , випадок 1). Тоді  $dx = 2 \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4-x^2} dx &= \int 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = \int 2(1 + \cos 2t) dt = 2t + \sin 2t + C = 2t + 2 \sin t \cos t + C = \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} + 2 \frac{x}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x \sqrt{4-x^2}}{2} + C \end{aligned}$$

## 1.7 Диференціальний біном

Розглянемо  $\int x^m(ax^n + b)^p dx$ , де  $m, n, p \in \mathbb{Q}$ . Маємо три випадки:

1)  $p \in \mathbb{Z}$ , тоді маємо:

$$m = \frac{p_1}{q_1}; n = \frac{p_2}{q_2}.$$

Нехай  $q = \text{LCM}(q_1, q_2)$ . Тоді заміна:  $x = t^q$ .

2)  $p \notin \mathbb{Z}$ , але  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ , тоді маємо:

$$p = \frac{j}{l}.$$

Тоді заміна:  $ax^n + b = t^l$ .

3)  $p \notin \mathbb{Z}$ ,  $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$ , але  $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ , тоді маємо:

$$p = \frac{j}{l}.$$

Тоді заміна:  $a + bx^{-n} = t^l$ .

Заміни в 1), 2), 3) називають **підстановками Чебишова**, що призводять до інтегралу дробово-раціональних виразів.

Якщо жодна з пунктів не спрацьовує, то інтеграл не може бути обчисленим через елементарні функції (залишаю поки це як факт).

**Example 1.7.1** Обчислити  $\int \sqrt[3]{x-x^3} dx = \int x^{\frac{1}{3}}(1-x^2)^{\frac{1}{3}} dx$

$$\text{Тут у нас } m = \frac{1}{3}, n = 2, p = \frac{1}{3}$$

Спрацьовує 3), тому що  $p + \frac{m+1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1+\frac{1}{3}}{2} = 1 \in \mathbb{Z}$

Заміна:  $-1 + x^{-2} = t^3$

$$-2x^{-3} dx = 3t^2 dt$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{x-x^3} dx &= \int x^{\frac{1}{3}}(1-x^2)^{\frac{1}{3}} dx = \int (x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} dx = \int t \cdot x \cdot \frac{3t^2 x^3 dt}{-2} = \int \frac{3t^3 dt}{-2(t^3+1)^2} = \\ &= \frac{3}{-2} \left( \int \frac{dt}{t^3+1} - \int \frac{dt}{(t^3+1)^2} \right) \boxed{=} \end{aligned}$$

обчислення цього інтегралу проводиться як в п. 4, тому я пропускаю цей момент

$$\boxed{=} -\frac{\ln|t+1|}{2} + \frac{\ln(t^2-t+1)}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\ln|t+1|}{3} - \frac{\ln(t^2-t+1)}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{t}{2t^3+2} + C =$$

$$= -\frac{1}{6} \ln|t+1| + \frac{1}{12} \ln(t^2-t+1) - \frac{\sqrt{3}}{6} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{t}{2t^3+2} + C$$

І підставляємо  $t = \sqrt[3]{x^{-2}+1}$ .

## 2 Визначений інтеграл

### 2.1 Підхід Рімана

**Definition 2.1.1** Розбиттям множини  $[a, b]$  називають множину точок  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ , для яких

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

**Definition 2.1.2** Позначимо за  $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ . Тоді числом

$$|\tau| = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$$

називають діаметром (або дрібністю) розбиття  $\tau$ .

**Definition 2.1.3** Задані розбиття  $\tau, \tau'$  відрізка  $[a, b]$ . Якщо  $\tau \subset \tau'$ , то  $\tau'$  називають підрозбиттям розбиття  $\tau$ .

**Proposition 2.1.4** Задано  $\tau'$  - підрозбиття для  $\tau$ . Тоді  $|\tau'| \leq |\tau|$ .

**Proof.**

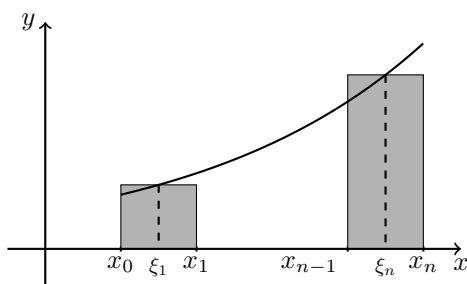
Дійсно, із розбиття ми можемо отримати підрозбиття шляхом додавання точок. Тоді деякі інтервали будуть ділитись на підінтервали через додавання точки. Відповідно діаметр зменшується. ■

**Definition 2.1.5** Задано  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  - розбиття відрізка  $[a, b]$ . Елементи множини  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  називають відміченими точками. Тут  $\xi_1 \in [x_0, x_1], \xi_2 \in [x_1, x_2], \dots, \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$

**Definition 2.1.6** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , розбиття  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  та відмічені точки  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ .

Інтегральною сумою Рімана функції  $f$  для нашого розбиття  $\tau$  та відмічених точок називають число:

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$



**Definition 2.1.7** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Функція  $f$  називається інтегрованою за Ріманом на  $[a, b]$ , якщо існує таке число  $I \in \mathbb{R}$ , для якого виконана умова:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall(\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies |\sigma(\tau, \xi, f) - I| < \varepsilon$$

Число  $I$  називають інтегралом Рімана.

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Позначення:  $I = \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sigma(f, \tau, \xi)$  (нелегально, тому що не знаю, що таке границя за базою).

Множина інтегрованих функцій за Ріманом:  $\mathcal{R}([a, b])$ .

**Remark 2.1.8** Для кожного розбиття  $\tau$ , ми можемо самі обирати точки  $\xi$ , просто головне, щоб  $|\tau| < \delta$ .

**Example 2.1.9** Доведемо, що функція  $f(x) = 1 \in \mathcal{R}([a, b])$ , а також  $\int_a^b 1 dx = b - a$ .

Для початку зафіксуємо розбиття  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  та відмітимо точки  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ . Це аби знайти інтегральну суму:

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

$$\sigma(1, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a.$$

І ця інтегральна сума має це значенням при довільному розбитті. Якщо встановити  $I = b - a$ , то тоді:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall(\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies |\sigma(\tau, \xi, f) - I| = |b - a - (b - a)| = 0 < \varepsilon.$$

Отже,  $f(x) = 1 \in \mathcal{R}([a, b])$ , а інтеграл  $\int_a^b 1 dx = b - a$ .

**Theorem 2.1.10** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Число  $I$  - інтеграл Рімана  $\iff \forall(\tau_n, \xi_n) : |\tau_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \sigma(f, \tau_n, \xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$ .

Зрозуміло. Фактично, це можна вважати як означення 'за Гейне', але не зовсім. Проте схожі.

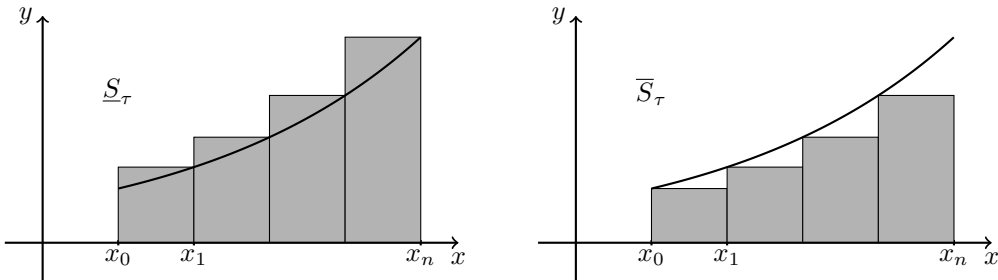
## 2.2 Суми Дарбу

**Definition 2.2.1** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - обмежена. Визначмо такі значення для розбиття  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ :

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad k = 1, \dots, n$$

Верхньою та нижньою сумою Дарбу називають такі суми:

$$U(f, \tau) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad L(f, \tau) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$



**Remark 2.2.2** Із означення випливає, що  $L(f, \tau) \leq U(f, \tau)$ , оскільки  $m_k \leq M_k$ .

**Lemma 2.2.3** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - обмежена та будь-яке розбиття  $\tau$ . Тоді маємо:

$$L(f, \tau) = \inf_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi) \quad U(f, \tau) = \sup_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi)$$

**Proof.**

Зафіксуємо розбиття  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , тоді  $f$  - обмежена на  $[x_{k-1}, x_k], \forall k$ .

А тепер візьмемо деякий набір точок  $\xi$ , тоді зрозуміло, що  $f(\xi_k) \leq M_k, \forall k \implies f(\xi_k) \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k$

Просумуємо всі рівняння, які тут в нас є - тоді отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \implies \sigma(f, \tau, \xi) \leq U(f, \tau)$$

А далі зафіксуємо  $\varepsilon > 0$ . Оскільки  $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ , то тоді  $\exists x_\varepsilon : f(x_\varepsilon) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$ .

І ось ці точки  $x_\varepsilon = \xi'_k$  - це буде мій набір точок, який існує. Тоді маємо

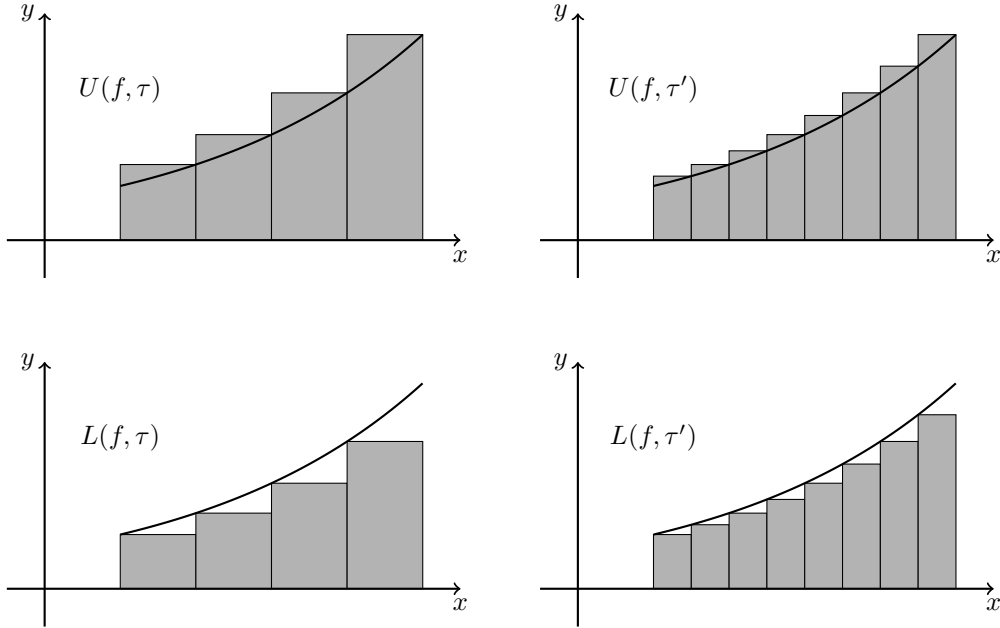
$$f(\xi'_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \implies f(\xi'_k)\Delta x_k > M_k\Delta x_k - \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k$$

Аналогічно просумуємо всі рівняння - отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi'_k)\Delta x_k > \sum_{k=1}^n M_k\Delta x_k - \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k \implies S_{\tau, \xi'}(f) > U(f, \tau) - \varepsilon$$

Остаточно, ми отримали  $U(f, \tau) = \sup_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi)$ . Випадок  $L(f, \tau) = \inf_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi)$  аналогічний. ■

**Lemma 2.2.4** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - обмежена та розбиття  $\tau$ . Також задамо підрозбиття  $\tau'$ . Тоді  $U(f, \tau) \geq U(f, \tau')$ , а також  $L(f, \tau) \leq L(f, \tau')$ .



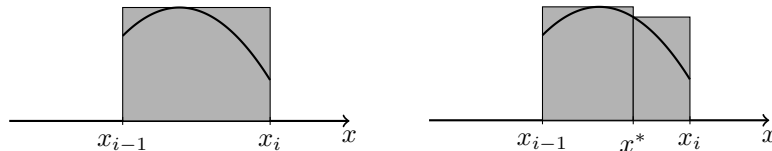
**Proof.**

Достатньо розглянути підрозбиття  $\tau' = \tau \cup \{x^*\}$ , припустимо  $x^* \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тому що якщо в мене буде більше точок, то будемо поступово їх додавати.

$$U(f, \tau) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = M_i \Delta x_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n M_k \Delta x_k \geq$$

Зауважимо, що  $M_i \Delta x_i = M_i(x_i - x_{i-1}) = M_i(x_i - x^* + x^* - x_{i-1}) = M_i(x_i - x^*) + M_i(x^* - x_{i-1}) \geq \tilde{M}(x_i - x^*) + \tilde{M}(x^* - x_{i-1})$

де  $\tilde{M} = \sup_{x \in [x^*, x_i]} f(x)$   $\tilde{M} = \sup_{x \in [x_{i-1}, x^*]} f(x)$



$$\geq \sum_{k=1, k \neq i}^n M_k \Delta x_k + \tilde{M}(x_i - x^*) + \tilde{M}(x^* - x_{i-1}) = U(f, \tau \cup \{x^*\}) = U(f, \tau').$$

Випадок  $L(f, \tau) \leq L(f, \tau')$  аналогічний. ■

**Lemma 2.2.5** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - обмежена. Візьмемо будь-які два розбиття  $\tau', \tau''$ . Тоді  $L(f, \tau') \leq U(f, \tau'')$ .

**Proof.**

Зафіксуємо  $\tau = \tau' \cup \tau''$  - це є підрозбиттям одночасно розбиття  $\tau'$  та розбиття  $\tau''$ . Тоді за попередньою

лемою,

$$L(f, \tau') \leq L(f, \tau) \leq U(f, \tau) \leq U(f, \tau'').$$

■

**Definition 2.2.6** Верхнім/нижнім інтегралом Дарбу будемо називати такі вирази:

$$I^*(f) = \inf_{\tau} U(f, \tau) \quad I_*(f) = \sup_{\tau} L(f, \tau)$$

**Remark 2.2.7** Справедлива така нерівність:  $I_*(f) \leq I^*(f)$ .

Впливає з щойно доведеної лемми.

## 2.3 Існування інтеграла

**Theorem 2.3.1** Необхідна умова інтегрованості

Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $f$  - обмежена на  $[a, b]$ .

**Proof.**

Оскільки  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , то звідси  $\exists I \in \mathbb{R}$ , для якого виконано:

$$\text{для } \varepsilon = 1 : \exists \delta : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies \forall \xi : |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < 1 \implies |\sigma(f, \tau, \xi)| < |I| + 1.$$

Припустимо, що  $f$  - не обмежена зверху, тоді  $\exists k_0 = \overline{1, n} : f$  - необмежена на  $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ . Тобто  $\forall M > 0 : \exists x \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}] : f(x) > M$ . Якщо встановити  $M = j$ , то знайдеться послідовність  $\{x_j, j \geq 1\} = \{\xi_{k_0}^{(j)}, j \geq 1\}$ , для якої  $f(\xi_{k_0}^{(j)}) \rightarrow +\infty$ .

Розглянемо послідовність відмічених точок  $\{\xi_j, j \geq 1\}$ , де  $\xi_j = \{\xi_1, \dots, \xi_{k_0-1}, \xi_{k_0}^{(j)}, \xi_{k_0+1}, \dots, \xi_n\}$ . А далі розглянемо послідовність інтегральних сум  $\{S_j, j \geq 1\}$ . Тоді

$$\sigma_j = \sigma(f, \tau, \xi_j) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{k_0-1})\Delta x_{k_0-1} + f(\xi_{k_0}^{(j)})\Delta x_{k_0} + f(\xi_{k_0+1})\Delta x_{k_0+1} + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n \rightarrow +\infty.$$

Проте ми ж мали, що  $\forall \xi_j : |\sigma(f, \tau, \xi_j)| \leq 1 + |I|$ . Суперечність! ■

**Remark 2.3.2** Взагалі-то кажучи, в іноземних підручниках під час введення означення інтегралу Рімана одразу вважають  $f$  - обмеженою на  $[a, b]$ .

**Theorem 2.3.3** Перший критерій інтегрованості

Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff f \text{ - обмежена на } [a, b] \text{ та } I_*(f) = I^*(f) = I.$$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді автоматично  $f$  - обмежена та

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Оскільки  $\forall \xi : \sigma(f, \tau, \xi) < I + \varepsilon$ , то зокрема  $\sup_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi) = U(f, \tau) \leq I + \varepsilon$ .

Оскільки  $\forall \xi : \sigma(f, \tau, \xi) > I - \varepsilon$ , то зокрема  $\inf_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi) = L(f, \tau) \geq I - \varepsilon$ .

Додатково

$$I^*(f) = \inf_{\tau} U(f, \tau) \leq U(f, \tau) \leq I + \varepsilon$$

$$I_*(f) = \sup_{\tau} L(f, \tau) \geq L(f, \tau) \geq I - \varepsilon.$$

Остаточно  $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq I + \varepsilon - I + \varepsilon = 2\varepsilon$ , виконано  $\forall \varepsilon > 0 \implies I^*(f) = I_*(f) = I$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $f$  - обмежена на  $[a, b]$  та  $I^*(f) = I_*(f)$ .

Нехай  $\varepsilon > 0$ . Тоді існує  $\delta$ , щоб  $\forall \tau : |\tau| < \delta \implies \forall \xi : L(f, \tau) \leq \sigma(f, \tau, \xi) \leq U(f, \tau)$ .

А оскільки  $L(f, \tau) > I - \varepsilon$  та  $U(f, \tau) < I + \varepsilon$  за критеріями супремума, інфімуму, то звідси

$$I - \varepsilon < \sigma(f, \tau, \xi) < I + \varepsilon.$$

Отже,  $|\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$ . Таким чином,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . ■

**Corollary 2.3.4** Якщо функція  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  та  $I = \int_a^b f(x) dx$  - його відповідний інтеграл, то справедлива нерівність:

$$L(f, \tau) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, \tau).$$

**Theorem 2.3.5** Другий критерій інтегрованості

Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff f \text{ - обмежена на } [a, b] \text{ та } \forall \varepsilon > 0 : \exists \tau : U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon.$$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $f$  - обмежена та  $I_*(f) = I^*(f)$ . За критеріями  $\sup, \inf$ , маємо:  
 $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau : L(f, \tau) > I - \varepsilon \quad U(f, \tau) < I + \varepsilon$ .  
 Отже,  $U(f, \tau) - L(f, \tau) < 2\varepsilon$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau : U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$ .

Тоді  $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$ . Отже,  $I^*(f) = I_*(f) \implies f \in \mathcal{R}([a, b])$ . ■

## 2.4 Класи інтегрованих функцій

**Theorem 2.4.1** Задано функцію  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$

**Proof.**

Нехай  $\varepsilon > 0$  задано.

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \exists \tau_1 : U(f, \tau_1) - L(f, \tau_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$g \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \exists \tau_2 : U(g, \tau_2) - L(g, \tau_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Тоді } \exists \tau = \tau_1 \cup \tau_2 : \begin{aligned} U(f, \tau) - L(f, \tau) &\leq U(f, \tau_1) - L(f, \tau_1) < \frac{\varepsilon}{2} \\ U(g, \tau) - L(g, \tau) &\leq U(g, \tau_2) - L(g, \tau_2) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\implies U(f + g, \tau) - L(f + g, \tau) \leq U(f, \tau) + U(g, \tau) - L(f, \tau) - L(g, \tau) < \varepsilon.$$

Таким чином, ми отримали, що  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . ■

**Theorem 2.4.2** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

*Доведення є аналогічним.*

*Вказівка:*  $\sup \alpha f(x) = \alpha \sup f(x)$ ,  $\alpha > 0$   $\quad \sup \alpha f(x) = \alpha \inf f(x)$ ,  $\alpha \leq 0$ .

**Theorem 2.4.3** Функція  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff \forall c \in (a, b) : f \in \mathcal{R}([a, c])$  та  $f \in \mathcal{R}([c, b])$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , тобто  $\forall \varepsilon : \exists \tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} : U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$ .

Зафіксуємо точку  $c \in (a, b)$ , у нас виникне два випадки:

I.  $c = x_k, k = \overline{1, n-1}$ .

Тоді маємо розбиття  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ , де  $\tau_1 = \{x_0, \dots, c\}$ ,  $\tau_2 = \{c, \dots, x_n\}$ . Таким чином,

$$U(f, \tau) - L(f, \tau) = U(f, \tau_1) + U(f, \tau_2) - L(f, \tau_1) - L(f, \tau_2) - U(f, \tau_2) + L(f, \tau_2) = U(f, \tau) - L(f, \tau) - (U(f, \tau_2) - L(f, \tau_2)) \leq U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon.$$

$U(f, \tau_2) - L(f, \tau_2) < \varepsilon$  аналогічними міркуваннями.

Отже,  $f \in \mathcal{R}([a, c])$  та  $f \in \mathcal{R}([c, b])$ .

II.  $c \neq x_k, k = \overline{1, n-1}$ .

Отримаємо підрозбиття  $\tau' = \tau \cup \{c\}$ . А для підрозбиття  $U(f, \tau') - L(f, \tau') \leq U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$ .

А ось тут ми повертаємось до пункту I.

$\Leftarrow$  Зрозуміло. ■

**Theorem 2.4.4** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - монотонна. Тоді  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**Proof.**

Розглянемо випадок, коли  $f$  - нестрого зростає на  $[a, b]$ .

Нехай  $\varepsilon > 0$ . Тоді розглянемо таке розбиття  $\tau$ , щоб  $|\tau| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ . Тоді маємо:

$$\begin{aligned} U(f, \tau) - L(f, \tau) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k \leq |\tau| \sum_{k=1}^n (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \\ &= |\tau| (f(x_n) - f(x_0)) = |\tau| (f(b) - f(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . ■

**Theorem 2.4.5** Задано функцію  $f \in C([a, b])$ . Тоді  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**Proof.**

$$f \in C([a, b]) \implies f \in C_{unif}([a, b]) \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Оберемо таке розбиття  $\tau$ , щоб  $|\tau| < \delta$ .

$$\text{Також } f \in C([a, b]) \implies f \in C([x_{k-1}, x_k]) \implies \exists f(x'_k) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \exists f(x''_k) = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

$$\text{Позначмо } m_k = f(x'_k), M_k = f(x''_k). \text{ Оскільки } |\tau| < \delta, \text{ то звідси } |x'_k - x''_k| \leq |x_{k-1} - x_k| \leq |\tau| < \delta \implies M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

$$\text{Отже, } U(f, \tau) - L(f, \tau) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon. \text{ А тому й } f \in \mathcal{R}([a, b]). \quad \blacksquare$$

**Theorem 2.4.6** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - обмежена та неперервна всюду, окрім в точках  $c_1, c_2, \dots, c_m$ . Тоді  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**Proof.**

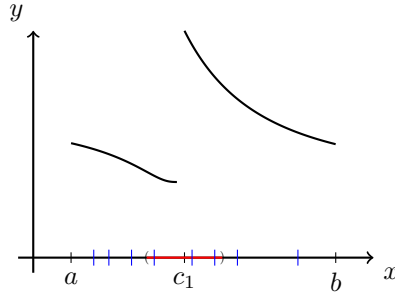
Поки що обмежимося випадком, що  $f \in C([a, b] \setminus \{c_1\})$ . Функція  $f$  - обмежена, тоді  $\exists C > 0 : \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq C$ .

Нехай  $\varepsilon > 0$ . Покладемо  $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{16C} > 0$ . Розглянемо множину  $D = [a, b] \setminus (c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1)$ , яка або порожня, або має скінченну кількість відрізків (вважаємо другий випадок).

Оскільки  $f \in C([a, b] \setminus \{c_1\})$ , то  $f \in C(D)$ , тоді за Кантором,

$$\exists \delta_2 : \forall x', x'' : |x' - x''| < \delta_2 \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Встановимо  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , а далі візьмемо таке розбиття  $\tau$ , щоб  $|\tau| < \delta$ .



$$U(f, \tau) - L(f, \tau) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k: [x_{k-1}, x_k] \cap D = \emptyset} (M_k - m_k) \Delta x_k + \sum_{k: [x_{k-1}, x_k] \cap D \neq \emptyset} (M_k - m_k) \Delta x_k \quad \boxed{<}$$

Перша сума - там, де відрізок не потрапив в окіл т.  $c_1$ . В силу другої теореми Вейерштрасса та теореми Кантора,  $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Залишається  $\sum_{k: [x_{k-1}, x_k] \cap D \neq \emptyset} \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$ .

Друга сума - там, де відрізок потрапив в окіл т.  $c_1$ . В силу обмеженості функції  $f$  маємо, що  $M_k - m_k \leq 2C$ . Також зауважимо, що  $\sum_{k: [x_{k-1}, x_k] \cap D = \emptyset} \Delta x_k \leq 2\delta_1 + 2\delta \leq 4\delta_1$ .

$$\boxed{<} \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) + 2C \cdot 4\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2} + 8C \frac{\varepsilon}{16C} = \varepsilon.$$

Таким чином,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Ось далі крок МІ: ми припускаємо, що коли  $f \in C([a, b] \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_n\})$ , то тоді  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Доведемо, що коли уже  $f \in C([a, b] \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}\})$ , то тоді  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Не втрачаючи загальності, розглянемо деяку точку  $x^* \in (c_n, c_{n+1})$ , а далі будемо дивитись на функцію  $f$  на  $[a, x^*]$  та  $[x^*, b]$ .

На першому відрізку рівно  $n$  точок розриву. За припущенням МІ,  $f \in \mathcal{R}([a, x^*])$ .

На другому відрізку рівно 1 точка розриву. Уже довели для неї, що  $f \in \mathcal{R}([x^*, b])$ .

А тоді за адитивністю, маємо  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . МІ доведено.  $\blacksquare$

**Example 2.4.7** Зокрема такі функції будуть інтегрованими в будь-якого відрізка:  $f(x) = \text{sign } x$ ,  $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ .



**Theorem 2.4.8** Задано функцію  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $f \cdot g \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**Proof.**

Оскільки  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ , то по-перше, вони обмежені, тобто

$$\exists C_1, C_2 : \forall x : |f(x)| \leq C_1, |g(x)| \leq C_2.$$

По друге,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau_1, \tau_2 :$

$$U(f, \tau_1) - L(f, \tau_1) < \frac{\varepsilon}{2C_1} \quad U(g, \tau_1) - L(g, \tau_1) < \frac{\varepsilon}{2C_2}.$$

Нам буде необхідна ось така оцінка:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq C_1 \sup |g(x) - g(y)| + C_2 \sup |f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

Це виконано  $\forall x, y \in [a, b]$ . Тоді підберемо такі точки  $x, y$ , щоб ліворуч був отриманий  $\sup$ :

$$\sup |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq C_1 \sup |g(x) - g(y)| + C_2 \sup |f(x) - f(y)|.$$

Перепишемо цю рівність інакше:

$$\sup f(x)g(x) - \inf f(x)g(x) \leq C_1(\sup g(x) - \inf g(x)) + C_2(\sup f(x) - \inf f(x)).$$

А далі встановимо  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ , тоді маємо:

$$\begin{aligned} U(f \cdot g, \tau) - L(f \cdot g, \tau) &= \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)g(x) \cdot \Delta x - \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)g(x) \cdot \Delta x = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)g(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)g(x) \right) \Delta x_k \leq C_1(U(f, \tau) - L(f, \tau)) + C_2(U(g, \tau) - L(g, \tau)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином,  $f \cdot g \in \mathcal{R}([a, b])$ . ■

**Theorem 2.4.9** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ .

*Вказівка:*  $|f(x)| = f(x) \cdot \text{sign } x$ .

## 2.5 Властивості інтегралів

**Theorem 2.5.1 Лінійність I**

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

**Proof.**

Це є продовженням доведення **Th. 1.4.1**.

$$\text{Оскільки } f + g \in \mathcal{R}, \text{ то звідси маємо } I^*(f + g) = I_*(f + g) = \int_a^b f(x) + g(x) dx.$$

$$L(f, \tau) + L(g, \tau) \leq L(f + g, \tau) \leq \int_a^b f(x) + g(x) dx \leq U(f + g, \tau) \leq U(f, \tau) + U(g, \tau) < L(f, \tau) + L(g, \tau) + \varepsilon.$$

$$L(f, \tau) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, \tau)$$

Але ми також знаємо такі нерівності:

$$L(g, \tau) \leq \int_a^b g(x) dx \leq U(g, \tau)$$

$$L(f, \tau) + L(g, \tau) \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq U(f, \tau) + U(g, \tau) < L(f, \tau) + L(g, \tau) + \varepsilon.$$

$$-\varepsilon < \int_a^b f(x) + g(x) dx - \left( \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \right) < \varepsilon, \text{ виконано } \forall \varepsilon > 0.$$

$$\text{Отже, } \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Theorem 2.5.2 Лінійність II**

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

*Зрозуміло.*

**Theorem 2.5.3 Адитивність**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Proof.**

Це є продовженням доведення **Th. 1.4.3.**

$$L(f, \tau) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, \tau) < L(f, \tau) + \varepsilon$$

$$L(f, \tau_1) \leq \int_a^c f(x) dx \leq U(f, \tau_1) < L(f, \tau_1) + \varepsilon$$

$$L(f, \tau_2) \leq \int_a^c f(x) dx \leq U(f, \tau_2) < L(f, \tau_2) + \varepsilon$$

$$\implies \left| \int_a^b f(x) dx - \left( \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right) \right| < 2\varepsilon, \text{ виконано } \forall \varepsilon > 0.$$

$$\text{Отже, } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Theorem 2.5.4** Якщо  $\forall x \in [a, b] : f(x) \geq 0$ , то тоді  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**Proof.**

$$\text{Оскільки } f \in \mathcal{R}([a, b]), \text{ то тоді } I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{Тоді } \int_a^b f(x) dx = I^*(f) \geq U(f, \tau) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \geq 0. \quad \blacksquare$$

**Corollary 2.5.5** Якщо  $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x)$ , то тоді  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

*Вказівка:* розглянути функцію  $h(x) = g(x) - f(x)$ .

$$\text{Corollary 2.5.6} \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

*Вказівка:*  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ .

**Theorem 2.5.7 I теорема про середнє**

Задані функції  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ , причому  $g$  має однаковий знак на  $[a, b]$ . Позначу  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ ,

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

$$\text{Тоді } \exists c \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x) dx = c \int_a^b g(x) dx.$$

**Proof.**

Розглянемо випадок  $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ . Справедлива нерівність:

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \implies m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Якщо  $\int_a^b g(x) dx = 0$ , то звідси  $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ , а число  $c \in [m, M]$  обираємо довільне.

Якщо  $\int_a^b g(x) dx > 0$ , то поділимо нерівність на цю штуку:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M. \text{ Тоді позначимо } c = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}. \text{ Звідси } \int_a^b f(x)g(x) dx = c \int_a^b g(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Corollary 2.5.8** Якщо додатково вимагати функцію  $f \in C([a, b])$ , то тоді

$$\exists \xi \in (a, b) : \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

**Proof.**

$f \in C([a, b])$ , то за Больцано-Коші,  $\exists \xi \in [a, b] : c = f(\xi)$ . Ну а далі попередня теорема. \blacksquare

**Theorem 2.5.9 II теорема про середнє**

Задані функції  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  та  $g$  - монотонна.

Тоді  $\exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx + g(b) \int_c^b f(x) dx$ .

Перед початков доведемо декілька лем:

**Lemma 2.5.10 Тотожність Абеля**

Встановимо  $A_k = \sum_{p=1}^k a_p$  та  $A_0 = 0$ . Тоді виконується рівність:

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = (A_n b_n - A_{m-1} b_m) - \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

**Proof.**

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k b_k &= \sum_{k=m}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=m}^n a_k B_k - \sum_{k=m}^n a_k B_{k-1} = \sum_{k=m}^n a_k B_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1} B_k = \\ &= (A_n b_n - A_{m-1} b_m) - \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k). \end{aligned}$$

**Remark 2.5.11** Тотожність Абеля дуже схожа на формулу інтегрування частинами, де в якості  $u \rightarrow b_k \implies u' \rightarrow (b_{k+1} - b_k)$ , а також  $v' \rightarrow a_k \implies v \rightarrow A_k$ .

**Lemma 2.5.12** Задані функції  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  та  $g$  - не зростає, невід'ємна.

Тоді  $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx$ .

**Proof.**

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x) dx = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(x_{k-1})) dx.$$

Розберемося з другою сумою:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(x_{k-1})) dx \right| &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)| |g(x) - g(x_{k-1})| dx \leq C \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(x) - g(x_{k-1})| dx \leq \\ &C \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sup_{x, y \in [x_{k-1}, x_k]} |g(x) - g(y)| dx = C \sum_{k=1}^n \sup_{x, y \in [x_{k-1}, x_k]} |g(x) - g(y)| \Delta x_k \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Позначимо  $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ . Враховуючи умову теореми,  $F \in C([a, b]) \implies$  вона приймає найбільше, найменше значення. Тоді

$$\sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) (F(x_k) - F(x_{k-1})) \quad [\equiv]$$

А далі застосуємо тотожність Абеля, якщо  $a_k = F(x_k) - F(x_{k-1})$ ,  $b_k = g(x_{k-1})$ .

$$[\equiv] F(x_n)g(x_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

Тоді  $mg(a) \leq \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \leq Mg(a)$ , де  $m = \min_{t \in [a, b]} F(t)$ ,  $M = \max_{t \in [a, b]} F(t)$ . Отже,

$$mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq Mg(a). \text{ Поділимо тепер на } g(a), \text{ маємо}$$

$$m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \implies \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx = F(\xi), \text{ де } \xi \in [a, b] \text{ із теореми Больцано-Копі.}$$

**Lemma 2.5.13** Задані функції  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  та  $g$  - не спадає, невід'ємна.

Тоді  $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x) dx = g(b) \int_\xi^b f(x) dx$ .

Або аналогічне доведення, або зведення до попередньої лєми.

Використовуючи ці леми, ми доводимо нашу теорему.

*Вказівка: розглянути функцію  $G(x) = g(b) - g(x)$ , якщо  $g$  - не зростаюча. Для неспадної аналогічно.*

## 2.6 Інтеграл як функція верхньої границі

Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Будемо розглядати ось таку функцію  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

**Remark 2.6.1** Додатково існує певна домовленість з інтегралами, щоб було жити простіше:

$$\begin{aligned} \int_a^a f(t) dt &= 0 \\ \int_b^a f(t) dt &= - \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

**Theorem 2.6.2** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $g \in C([a, b])$ .

**Proof.**

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \left| \int_a^{x_1} f(t) dt - \int_a^{x_2} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \right| \leq$$

Оскільки  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , то звідси  $f$  - обмежена на  $[a, b]$ , тобто  $\exists M \geq 0 : \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$ .

$$\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} M dt \right| = M|x_2 - x_1| < M\delta = M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Отже, нехай  $\varepsilon > 0$ . Тоді існує  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ , для якого  $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$ .

Отже,  $g \in C_{unif}([a, b]) \implies g \in C([a, b])$ . ■

**Theorem 2.6.3** Задано функцію  $f \in C([a, b])$ . Тоді  $g \in C'([a, b])$ , причому  $g'(x) = f(x)$ .

**Proof.**

Будемо доводити, що  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f(x)$ .

$$\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left( \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

$$f(x) = \frac{f(x)}{\Delta x} \Delta x = \frac{f(x)}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} dt = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(x) dt.$$

Тоді маємо таку оцінку:

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} - f(x) \right| &= \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_x^{x+\Delta x} f(x) dt \right| = \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) - f(x) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)| dt \right| < \end{aligned}$$

Оскільки  $f \in C([a, b])$ , то звідси  $f \in C_{unif}([a, b])$ , а тому

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . Фіксуємо таке  $\delta$ , щоб  $|\Delta x| < \delta$ .

Тоді  $\forall t \in [x, x + \Delta x]$  або  $[x + \Delta x, x] : |t - x| < |\Delta x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon$ .

$$< \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} \varepsilon dt \right| = \frac{|x + \Delta x - x|}{|\Delta x|} \varepsilon = \varepsilon.$$

Остаточно  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \Delta x : |\Delta x| < \delta \implies \left| \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} - f(x) \right| < \varepsilon$ . Отже,  $g'(x) = f(x)$ . ■

**Corollary 2.6.4** Функція  $g(x) = F(x)$ . Тобто функція  $g(x) = \int_a^x f(t) dt$  є первісною функції  $f(x)$ , якщо  $f \in C([a, b])$ .

**Theorem 2.6.5 Формула Ньютона-Лейбніца**

Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , яка має первісну  $\Phi$ .

$$\text{Тоді } \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

**Proof.**

Якщо  $f \in C([a, b])$ , то це є прямим наслідком. Дійсно, за умовою,  $f$  має первісну  $\Phi$ . Але водночас за наслідком,  $f$  має первісну  $F$ , причому  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Тоді  $\Phi(x) = F(x) + C$

$$\begin{cases} \Phi(a) = C \\ \Phi(b) = \int_a^b f(t) dt + C \end{cases} \implies \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

У загальному вигляді доведення відрізняється.

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Встановимо будь-яке розбиття  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , щоб  $|\tau| < \delta$ . Зауважимо, що

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (\Phi(x_1) - \Phi(x_0)) + (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) + \dots + (\Phi(x_n) - \Phi(x_{n-1})).$$

Оскільки  $\Phi$  - первісна, тобто вона диференційована, тоді неперервна як наслідок. Можемо застосувати до кожної дужки теорему Лагранжа:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(\xi_1)\Delta x_1 + \Phi'(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + \Phi'(\xi_n)\Delta x_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Причому  $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ .

Отже,  $\Phi(b) - \Phi(a) = \sigma(f, \tau, \xi)$ . Таким чином,  $|\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon \implies I = \Phi(b) - \Phi(a)$ . ■

**Example 2.6.6** Функція  $x^2 \in \mathcal{R}([0, 1])$  в силу монотонності та має первісну  $\frac{x^3}{3}$ .

$$\text{Тоді } \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

**Example 2.6.7** Приклад функції, для якої формула Ньютона-Лейбніца не працює. Запишу для

$$\text{початку первісну } F(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$$F'(0) = 0, \text{ інакше } F'(x) = f(x) = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cos \frac{1}{x}.$$

Але, на жаль, функція  $f$  - необмежена в т.  $x_0 = 0$ , а тому  $f \notin \mathcal{R}([a, b])$ , якщо  $0 \in [a, b]$ . Тим не менш, вона має первісну. Проте формула Ньютона-Лейбніца не працює.

**Example 2.6.8** Існують навіть функції  $f(x) = \text{sign } x$ , які є інтегрованими на  $[-1, 1]$ , проте не мають

$$\text{первісної. Проте } \int_{-1}^1 \text{sign } x dx = \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^1 1 dx = -x \Big|_{-1}^0 + x \Big|_0^1 = 0.$$

## 2.7 Обчислення визначених інтегралів

### 2.7.1 Заміна змінної

**Theorem 2.7.1** Задано функцію  $f \in C((A, B))$ . Також задана функція  $\varphi \in C'([\alpha, \beta])$ , причому

$$\varphi([\alpha, \beta]) \subset (A, B). \text{ Тоді } \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

**Proof.**

Оскільки  $f \in C((A, B))$ , то також  $f \in C([\varphi(\alpha), \varphi(\beta)])$ , тоді вона має первісну  $G$ . За формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha)).$$

За умовою, маємо  $f \circ \varphi \cdot \varphi' \in C([\alpha, \beta])$ . А також зауважимо, що  $G$  - первісна для функції  $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ , тому що  $G'(\varphi(x)) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ . За формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha)).$$

$$\text{Отже, } \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx. \quad \blacksquare$$

### 2.7.2 Інтегрування частинами

**Theorem 2.7.2** Задано функцію  $u, v, u', v' \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx$ .

**Proof.**

Розглянемо функцію  $h(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Вона має первісну  $H(x) = u(x)v(x)$ . Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца, маємо:

$$\int_a^b h(x) dx = H(b) - H(a) = u(b)v(b) - u(a)v(a) = u(x)v(x) \Big|_a^b$$

$$\text{З іншого боку, } \int_a^b h(x) dx = \int_a^b u(x)v'(x) dx + \int_a^b v(x)u'(x) dx = \int_a^b u(x)v'(x) dx + \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

$$\text{Отже, } \int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx. \quad \blacksquare$$

## 2.8 Застосування визначеного інтеграла

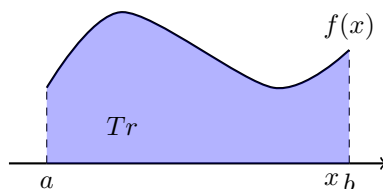
### 2.8.1 Площа криволінійної трапеції

Що таке взагалі **площа**, я буду вважати відомою штукою. Також відомо для мене буде площа прямокутника, що суттєво важливо.

**Definition 2.8.1** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  так, щоб  $f(x) \geq 0$  та обмежена.

**Криволінійною трапецією** називають таку множину:

$$Tr(f, [a, b]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$$

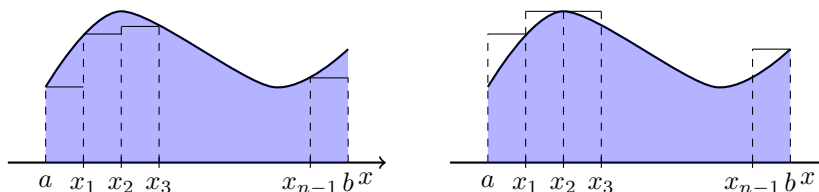


Задамо тепер деяке розбиття  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Через ці точки проведемо вертикальну пряму.

$$\text{Тоді наша криволінійна трапеція } Tr(f, [a, b]) = \sum_{k=1}^n Tr(f, [x_{k-1}, x_k]).$$

На кожному відрізку  $[x_{k-1}, x_k]$  ми:

- впишемо прямокутник  $P'_k$ , висота якої дорівнює  $\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ ;
- опишемо прямокутник  $P''_k$ , висота якої дорівнює  $\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ .



$$\text{Сума площ вписаних прямокутників дорівнює } \sum_{k=1}^n \Delta x_k \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = S(P').$$

$$\text{Сума площ описаних прямокутників дорівнює } \sum_{k=1}^n \Delta x_k \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = S(P'').$$

**Definition 2.8.2** Задано криволінійну трапецію  $Tr(f, [a, b])$ .

**Внутрішньою площею** криволінійної трапеції  $Tr(f, [a, b])$  називають число:

$$S_*(Tr) = \sup_{\tau} S(P')$$

**Зовнішньою площею** криволінійної трапеції  $Tr(f, [a, b])$  називають число:

$$S^*(Tr) = \sup_{\tau} S(P'')$$

**Definition 2.8.3** Криволінійна трапеція називається **квадрованою**, якщо

$$S_*(Tr) = S^*(Tr) = S$$

Число  $S$  називається **площею** криволінійної трапеції.

**Theorem 2.8.4** Задано функцію  $f \in C([a, b])$  та  $f(x) \geq 0$ . Задамо криволінійну трапецію  $Tr(f, [a, b])$ .

Тоді вона є квадрованою та  $S(Tr) = \int_a^b f(x) dx$ .

**Proof.**

Оскільки  $f \in C([a, b])$ , то  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Звідси  $S_*(Tr) = I_*(f) = I^*(f) = S^*(Tr)$ . Тобто  $Tr$  - квадрована.

Автоматично звідси  $S(Tr) = \int_a^b f(x) dx$ . ■

**Theorem 2.8.5** Задані функції  $f, g \in C([a, b])$ , причому  $f(x) \geq g(x)$ . Задамо фігуру

$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [f(x), g(x)]\}$ . Тоді вона є квадрованою та  $S(G) = \int_a^b f(x) - g(x) dx$ .

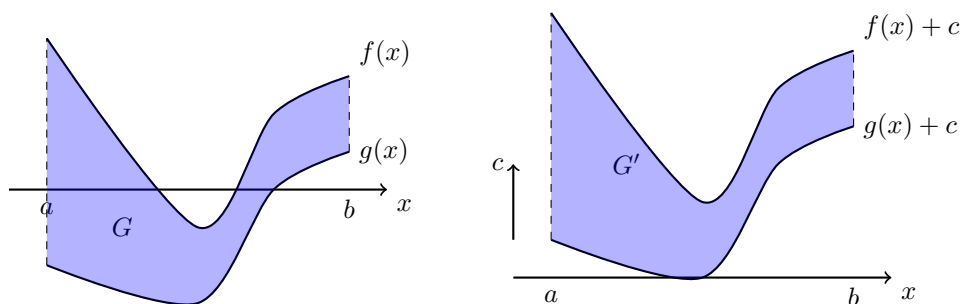
**Proof.**

Оскільки  $g \in C([a, b])$ , то вона приймає найменше значення.

Якщо від'ємне, то перемістимо фігуру  $G$  на число  $c = |\inf_{x \in [a, b]} g(x)|$  догори. Отримаємо фігуру

$G' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [f(x) + c, g(x) + c]\}$ .

Якщо додатне, то тоді  $G' = G$  (тут все зрозуміло).



Зауважимо, що  $S(G') = S(Tr(f + c, [a, b])) - S(Tr(g + c, [a, b]))$

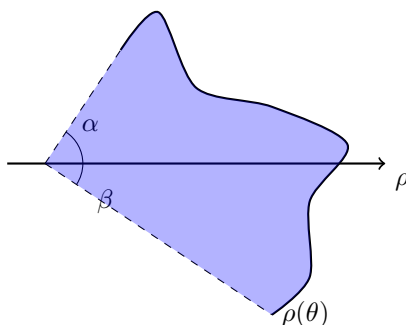
Отже,  $S(G') = \int_a^b f(x) + c dx - \int_a^b g(x) + c dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx$ . ■

## 2.8.2 Площа криволінійного сектора

**Definition 2.8.6** Задано функцію  $\rho : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Криволінійним сектором** називають таку множину:

$$Sec(\rho, [\alpha, \beta]) = \{(\theta, \rho) : \theta \in [\alpha, \beta] : \rho \in [0, \rho(\theta)]\}$$



Задамо тепер деяке розбиття  $\tau = \{\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \beta\}$ . Через ці кути проведемо  $\rho(\theta_k)$ . Тоді наш криволінійний сектор  $Sec(\rho, [\alpha, \beta]) = \sum_{k=1}^n Sec(\rho, [\theta_{k-1}, \theta_k])$ .

На кожному відрізку  $[\theta_{k-1}, \theta_k]$  ми:

- впишемо сектор  $Q'_k$ , радіус якої дорівнює  $\inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta)$ ;

- опишемо сектор  $Q''_k$ , радіус якої дорівнює  $\sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta)$ .

Тут має бути рисунок, але не шарю, як це зробити.

Сума площ вписаних секторів дорівнює  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \Delta \theta_k \left( \inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta) \right)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \Delta \theta_k \inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \frac{1}{2} \rho^2(\theta) = L\left(\frac{1}{2} \rho^2, \tau\right)$ .

Сума площ описаних секторів дорівнює  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \Delta \theta_k \left( \sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta) \right)^2 = \sum_{k=1}^n \Delta \theta_k \sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \frac{1}{2} \rho^2(\theta) = U\left(\frac{1}{2} \rho^2, \tau\right)$ .

**Theorem 2.8.7** Задано функцію  $\rho \in C([\alpha, \beta])$ . Задамо криволінійний сектор  $Sec(\rho, [\alpha, \beta])$ . Тоді він є квадрованим та  $S(Sec) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$ .

**Proof.**

Оскільки  $\rho \in C([\alpha, \beta])$ , то  $\rho \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ , а тому  $\frac{1}{2} \rho^2 \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ . Звідси  $S_*(Sec) = I_*\left(\frac{1}{2} \rho^2\right) = I^*\left(\frac{1}{2} \rho^2\right) = S^*(Sec)$ . Тобто  $Sec$  - квадрована.

Автоматично звідси  $S(Sec) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$ . ■

### 2.8.3 Крива, яка спрямовується

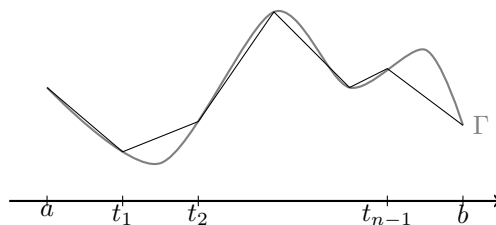
**Definition 2.8.8** Задано функції  $x, y \in C([a, b])$ .

**Неперервною кривою** в площині називають таку множину:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]\}$$

Нехай  $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  - деяке розбиття відрізка  $[a, b]$ . Встановимо  $\Gamma_{\tau}$  - ломана, що отримана в результаті сполучення кожної пари сусідніх точок  $(x(t_{k-1}), y(t_{k-1})) - (x(t_k), y(t_k))$ .

Довжина ломаної  $L(\Gamma_{\tau}) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$ .



**Definition 2.8.9** Криву називають **такою, що спрямовується**, якщо існує таке число  $L \in \mathbb{R}$ , для якого виконана умова:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies |L(\Gamma_{\tau}) - L| < \varepsilon$$

Число  $L$  називають **довжиною** кривої  $\Gamma$ .

Позначення:  $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} L(\Gamma_{\tau}) = L$  (нелегальне).



**Theorem 2.8.10** Задано функції  $x, y \in C'([a, b])$ . Тоді крива  $\Gamma$  буде такою, що спрямовується, а  $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ .

**Proof.**

Задамо розбиття  $\tau$ , маємо довжину ломаної  $L(\Gamma_\tau) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$ .

За умовою теореми, можемо застосувати теорему Лагранжа, тоді

$$\exists \xi_k \in (t_{k-1}, t_k) : x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = x'(\xi_k)\Delta t_k.$$

$$\exists \eta_k \in (t_{k-1}, t_k) : y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}) = y'(\eta_k)\Delta t_k.$$

$$\text{Тоді } L(\Gamma_\tau) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \Delta t_k.$$

Розпишемо цю формулу інакшим чином:

$$\begin{aligned} L(\Gamma_\tau) &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \Delta t_k + \sum_{k=1}^n (\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2}) \Delta t_k = \\ &= \sigma \left( \sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \tau, \xi \right) + r_\tau. \text{ Тоді:} \end{aligned}$$

$$|L(\Gamma_\tau) - \sigma \left( \sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \tau, \xi \right)| = |r_\tau| \leq \sum_{k=1}^n |y'(\eta_k) - y'(\xi_k)| \Delta t_k < \varepsilon \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \varepsilon(b-a).$$

Значить, крива  $\Gamma$  є такою, що спрямовується, а також довжина  $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ . ■

**Theorem 2.8.11** Задано функцію  $f \in C'([a, b])$ . Задамо криву  $\Gamma = \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)\}$ . Тоді вона буде спрямованою, а  $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

**Proof.**

Функцію  $f$  можна параметризувати:  $x = x(t), y = y(t)$ .

Нехай в  $x(t_1) = a, x(t_2) = b$ .

$$L(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} x'(t) dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad \blacksquare$$

**Theorem 2.8.12** Задано функцію  $\rho \in C'([\alpha, \beta])$ . Задамо криву  $\Gamma = \{(\theta, r) : \theta \in [\alpha, \beta], r = \rho(\theta)\}$ .

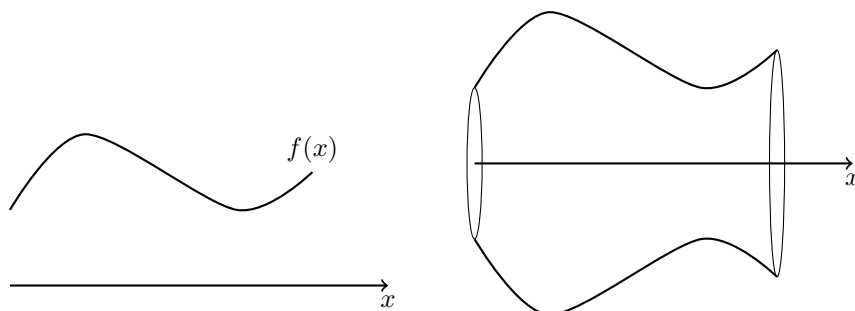
Тоді вона буде спрямованою, а  $L(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$ .

Вказівка:  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ .

## 2.8.4 Об'єм тіла обертання

Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  так, щоб  $f(x) \geq 0$  та обмежена. Розглянемо криволінійну трапецію  $Tr(f, [a, b])$ .

Ми отримаємо тіло  $G$ , що було отримано в результаті обертання трапеції  $Tr$  відносно осі  $OX$ .



Ми також вписували/описували прямокутники. Якщо їх обернути навколо  $OX$ , то кожна з них стане циліндром радіуса відповідно  $\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ ,  $\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ .

Сума об'ємів вписаних циліндрів дорівнює  $\sum_{k=1}^n \pi \left( \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right)^2 \Delta x_k = V(G').$

Сума об'ємів описаних циліндрів дорівнює  $\sum_{k=1}^n \pi \left( \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right)^2 \Delta x_k = V(G'').$

**Definition 2.8.13** Внутрішнім об'ємом тіла  $G$  називають число:

$$V_*(G) = \sup_{\tau} V(G')$$

Зовнішнім об'ємом тіла  $G$  називають число:

$$V^*(G) = \inf_{\tau} V(G'')$$

**Definition 2.8.14** Тіло  $G$  називають **кубованою**, якщо

$$V_*(G) = V^*(G) = V$$

Число  $V$  називають **об'ємом** тіла  $G$ .

**Theorem 2.8.15** Задано функцію  $f \in C([a, b])$  така, що  $f(x) \geq 0$ . Тоді  $G$  є кубованою та

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

*Вказівка:*  $(\sup f(x))^2 = \sup f^2(x)$ .

## 3 Невласні інтеграли

### 3.1 Основні означення

Розглянемо три випадки:

I. Задано таку функцію  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\forall A \in [a, +\infty) : f \in \mathcal{R}([a, A])$ .

**Definition 3.1.1** Невласним інтегралом I роду називають такий вираз:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

**Remark 3.1.2** Аналогічно визначається для  $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

II. Задано таку функцію  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\forall A \in [a, b) : f \in \mathcal{R}([a, A])$ , причому функція необмежена навколо точки  $b$ .

**Definition 3.1.3** Невласним інтегралом II роду називають такий вираз:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A f(x) dx$$

Дане означення можна переписати інакше, якщо  $A = b - \varepsilon$ , причому тепер  $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ .

**Remark 3.1.4** Аналогічно визначається для  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 3.1.5** Якщо границя існує, то невластний інтеграл називається **збіжним**. Інакше - **розбіжним**.

Надалі я буду позначати  $\omega = \begin{cases} b \\ +\infty \end{cases}$ . Також  $A \rightarrow \omega$  позначає  $A \rightarrow +\infty$  або  $A \rightarrow b - 0$ .

**Example 3.1.6**  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} \equiv$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln A = +\infty \text{ при } \alpha = 1$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (A^{1-\alpha} - 1) = +\infty \text{ при } \alpha < 1$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha-1} \text{ при } \alpha > 1$$

Таким чином,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  - збіжний при  $\alpha > 1$  та розбіжний при  $\alpha \leq 1$ .

**Example 3.1.7**  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} \equiv$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = -\infty \text{ при } \alpha = 1$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha} \text{ при } \alpha < 1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1}{1-\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right) = +\infty \text{ при } \alpha > 1.$$

Таким чином,  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$  - збіжний при  $\alpha < 1$  та розбіжний при  $\alpha \geq 1$ .

**Lemma 3.1.8** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді невластний інтеграл дорівнює визначеному інтегралу.

**Proof.**

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow b-0} (F(A) - f(a)) \stackrel{(*)}{=} F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

(\*) Оскільки  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , то тоді первісна  $F \in C([a, b])$ , а тому рівність справедлива. ■

**Theorem 3.1.9 Лінійність**

Задані функції  $f, g \in \mathcal{R}([a, A]), \forall A \in [a, \omega)$  таким чином, що  $\int_a^\omega f(x) dx, \int_a^\omega g(x) dx$  - збіжні. Тоді

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \int_a^\omega \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx - \text{збіжний та}$$

$$\int_a^\omega \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx = \alpha_1 \int_a^\omega f(x) dx + \alpha_2 \int_a^\omega g(x) dx.$$

**Proof.**

$$\begin{aligned} \int_a^\omega \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx &= \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \left( \alpha_1 \int_a^A f(x) dx + \alpha_2 \int_a^A g(x) dx \right) = \\ &= \alpha_1 \int_a^\omega f(x) dx + \alpha_2 \int_a^\omega g(x) dx. \end{aligned}$$

■

**Example 3.1.10** Обчислити  $\int_0^{+\infty} 2e^{-x} + \frac{1}{1+x^2} dx$ .

Маємо  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$ , тобто цей інтеграл - збіжний.

Маємо  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ , тобто цей інтеграл - збіжний.

Тоді  $\int_0^{+\infty} 2e^{-x} + \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 + \frac{\pi}{2}$  - також збіжний.

**Theorem 3.1.11 Адитивність**

Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, A]), \forall A \in [a, \omega)$ .

$$\int_a^\omega f(x) dx - \text{збіжний} \iff \forall c > a : \int_c^\omega f(x) dx - \text{збіжний, причому}$$

$$\int_a^\omega f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\omega f(x) dx.$$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний.

Розглянемо  $\int_a^A f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^A f(x) dx \implies \int_c^A f(x) dx = \int_a^A f(x) dx - \int_a^c f(x) dx$ . Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \omega} \int_c^A f(x) dx &= \lim_{A \rightarrow \omega} \left( \int_a^A f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right) \\ \int_c^\omega f(x) dx &= \int_a^\omega f(x) dx - \int_a^c f(x) dx, \text{ тобто наш інтеграл - збіжний, причому} \\ \int_a^\omega f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^\omega f(x) dx. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  Аналогічні міркування.

■

Заміна змінної та інтеграл частинами в невластних інтегралах теж працюють.

**Example 3.1.12** Обчислимо декілька інтегралів:

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx \quad \square$$

Інтегруємо частинами:  $u = \ln x, dv = dx$ .

$$\square \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( x \ln x \Big|_{0+\varepsilon}^1 - x \Big|_{0+\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{-\frac{1}{\varepsilon}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon - 1) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1 = -1.$$

Інтеграл - збіжний.

**3.2 Дослідження на збіжність/розбіжність****Theorem 3.2.1 Критерій Коші**

Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, A]), \forall A \in [a, \omega)$ .

$$\int_a^\omega f(x) dx - \text{збіжний} \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \left[ \begin{array}{l} \delta, \text{якщо } \omega = b \\ \Delta, \text{якщо } \omega = +\infty \end{array} : \forall \left[ \begin{array}{l} A_1, A_2 \in (b - \delta, b), \text{якщо } \omega = b \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty), \text{якщо } \omega = +\infty \end{array} \right. \right. \implies \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

**Proof.**

Позначимо  $\int_a^t f(x) dx = F(t)$ .

$$\int_a^\omega f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} F(A) - \text{збіжний} \stackrel{\text{критерій Коші для ліміта}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : \exists \left[ \begin{array}{l} \delta, \text{якщо } \omega = b \\ \Delta, \text{якщо } \omega = +\infty \end{array} : \forall \left[ \begin{array}{l} A_1, A_2 \in (b - \delta, b), \text{якщо } \omega = b \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty), \text{якщо } \omega = +\infty \end{array} \right. \implies |F(A_1) - F(A_2)| = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

### 3.2.1 Дослідження для додатних функцій

Тобто в цьому підпідрозділі розглядаються функції  $f(x), g(x) \geq 0$  на всьому області визначення.

#### Theorem 3.2.2 Ознака порівняння в нерівностях

Задані функції  $f, g \in \mathcal{R}([a, A]) : \forall A \in [a, \omega)$  - додатні. Відомо, що  $\forall x \in [a, \omega) : f(x) \leq g(x)$ . Тоді

- 1) Якщо  $\int_a^\omega g(x) dx$  - збіжний, то  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний;
- 2) Якщо  $\int_a^\omega f(x) dx$  - розбіжний, то  $\int_a^\omega g(x) dx$  - розбіжний.

**Proof.**

Маємо функції  $F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad G(t) = \int_a^t g(x) dx$ .

Зафіксуємо такі  $t_1, t_2$ , що  $a < t_1 < t_2 < \omega$ . Тоді

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x) dx = \int_a^{t_1} f(x) dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \geq \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx = F(t_2) - F(t_1).$$

Таким чином,  $F$  - неспадна функція. Аналогічно  $G$  - неспадна функція.

- 1) Нехай відомо, що  $\int_a^\omega g(x) dx$  - збіжний, отже,

$$\int_a^\omega g(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} G(A) \stackrel{G - \text{неспадна}}{=} \sup_{t \in [a, \omega)} G(t).$$

Оскільки  $\forall x \in [a, \omega) : f(x) \leq g(x)$ , то тоді  $F(t) \leq G(t)$ . А отже,  $F(t) \leq \sup_{t \in [a, \omega)} G(t)$ .

Через те, що  $F(t)$  - обмежена та неспадна, то  $\exists \lim_{A \rightarrow \omega} F(A) = \int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний.

- 2) А тепер нехай відомо, що  $\int_a^\omega f(x) dx$  - розбіжний.

Якщо припустити, що інтеграл  $\int_a^\omega g(x) dx$  - збіжний, то за п. 1), інтеграл  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний, що суперечить!

Таким чином,  $\int_a^\omega g(x) dx$  - розбіжний. ■

**Example 3.2.3** Дослідити на збіжність  $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$

Маємо  $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}$ . Відомо, що  $\cos^2 x \leq 1$ . Встановимо функцію  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

Тоді  $\forall x \in (0, 1] : f(x) \leq g(x)$ .

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  - збіжний (еталон). Отже, за ознакою порівняння, п. 1),  $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$  - збіжний.

#### Theorem 3.2.4 Ознака порівняння в границях

Задані функції  $f, g \in \mathcal{R}([a, A]) : \forall A \in [a, \omega)$  - строго додатні. Відомо, що  $\exists \lim_{x \rightarrow \omega-0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ . Тоді

- 1) Якщо  $L \neq 0, \neq \infty$ , то обидва  $\int_a^\omega f(x) dx, \int_a^\omega g(x) dx$  - збіжні або розбіжні;  
 2) Якщо  $L = 0$ , то зі збіжності  $\int_a^\omega g(x) dx$  випливає збіжність  $\int_a^\omega f(x) dx$ .

**Proof.**

1) Розглянемо  $L \neq 0$ , але оскільки  $f, g > 0$ , то  $L > 0$ .

$$\exists \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = L \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists c \in [a, \omega) : \forall x \geq c : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon.$$

$$\text{Розглянемо } \varepsilon = \frac{L}{2}, \text{ тоді } \frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2} \Rightarrow \frac{L}{2} g(x) < f(x) < \frac{3L}{2} g(x).$$

Якщо  $\int_c^\omega g(x) dx$  - збіжний, то  $\int_c^\omega \frac{3L}{2} g(x) dx$  - збіжний, то  $\int_c^\omega f(x) dx$  - збіжний. Отже,  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний.

Якщо  $\int_c^\omega f(x) dx$  - збіжний, то  $\int_c^\omega \frac{L}{2} g(x) dx$  - збіжний, то  $\int_c^\omega g(x) dx$  - збіжний. Отже,  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний.

Це все за арифметичними властивостями збіжності, попередньою ознакою порівняння, п.1). та теоремою про збіжність в адитивності.

Тож  $\int_a^\omega f(x) dx, \int_a^\omega g(x) dx$  - одночасно збіжні.

Аналогічно можна довести однакову розбіжність, якщо починати нерівність зліва.

$$2) \text{ Розглянемо } L = 0, \text{ то } \exists \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists c \in [a, \omega) : \forall x \geq c : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon.$$

Розглянемо  $\varepsilon = 1$ , то тоді  $f(x) < g(x), \forall x \geq c$ , а це вже посилання на попередню теорему. ■

**Example 3.2.5** Дослідити на збіжність  $\int_0^1 \frac{\arctg x}{x^{\frac{1}{5}}} dx$

Маємо функцію  $f(x) = \frac{\arctg x}{x^{\frac{1}{5}}}$ . Візьмемо функцію  $g(x) = \frac{1}{x^{-\frac{4}{5}}}$ . Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arctg x}{x^{\frac{1}{5}}}}{\frac{1}{x^{-\frac{4}{5}}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1.$$

А тепер оскільки  $\int_0^1 \frac{1}{x^{-\frac{4}{5}}} dx$  - розбіжний (еталон), то за ознакою порівняння в лімітах, п. 1),  $\int_0^1 \frac{\arctg x}{x^{\frac{1}{5}}} dx$  - розбіжний.

### 3.2.2 Дослідження для знакодовільних функцій

**Definition 3.2.6** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a; A]), \forall A \in [a, \omega)$ .

$\int_a^\omega f(x) dx$  називається **абсолютно збіжним**, якщо  $\int_a^\omega |f(x)| dx$  - збіжний.

$\int_a^\omega f(x) dx$  називається **умовно збіжним**, якщо  $\int_a^\omega |f(x)| dx$  - розбіжний, але при цьому  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний.

**Proposition 3.2.7** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a; A]), \forall A \in [a, \omega)$ .

Відомо, що  $\int_a^\omega |f(x)| dx$  - збіжний. Тоді  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний.

**Proof.**

$$\int_a^\omega |f(x)| dx \text{ - збіжний. За критерієм Коші, } \forall \varepsilon > 0 : \exists \left[ \begin{array}{l} \delta, \text{ якщо } \omega = b \\ \Delta, \text{ якщо } \omega = +\infty \end{array} : \forall \left[ \begin{array}{l} A_1, A_2 \in (b - \delta, b), \text{ якщо } \omega = b \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty), \text{ якщо } \omega = +\infty \end{array} \right] \Rightarrow \right.$$

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$$

Тоді за критерієм Коші,  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний. ■

**Theorem 3.2.8 Ознака Діріхле**

Задані функції  $f, g \in \mathcal{R}([a, A])$ ,  $\forall A \in [a, \omega)$ . Відомо, що:

- 1)  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  - обмежена на  $[a, \omega)$ ;
- 2)  $g(x)$  - монотонна та н.м. при  $x \rightarrow \omega$ .

Тоді  $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$  - збіжний.

**Remark 3.2.9** Взагалі-то кажучи, можна не вимагати, щоб  $g \in \mathcal{R}([a, A])$ , тому що вона монотонна.

**Proof.**

Будемо доводити за критерієм Коші про збіжність. Нехай  $\varepsilon > 0$ .

Оскільки  $F(x)$  - обмежена, то звідси  $\exists C > 0 : \forall x \in [a, \omega) : |F(x)| \leq C$ .

Також  $g$  - н.м. при  $x \rightarrow \omega$ , то звідси  $\exists \left[ \begin{array}{l} \delta \\ \Delta \end{array} : \forall x \in [a, \omega) : \left[ \begin{array}{l} x \in (b - \delta, b) \\ x \in (\Delta, +\infty) \end{array} \right] \implies |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4C} \right.$

Тоді в критерії Коші  $\exists \left[ \begin{array}{l} \delta \\ \Delta \end{array} : \forall A_1, A_2 \in [a, \omega) : \left[ \begin{array}{l} A_1, A_2 \in (b - \delta, b) \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty) \end{array} \right] \right.$

$$\implies \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x) dx \right| \equiv$$

Оскільки  $g$  - монотонна на  $[A_1, A_2]$  та  $f \in \mathcal{R}([A_1, A_2])$ , то тоді застосуємо другу теорему про середнє

$$\exists \xi \in (A_1, A_2) : \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x) dx = g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx.$$

$$\equiv \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx \right| + \left| g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx \right| \leq$$

Оскільки  $\left| \int_a^{A_1} f(x) dx \right| \leq C$  та  $\left| \int_a^{\xi} f(x) dx \right| \leq C$ , то звідси

$$\left| \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx \right| = \left| \int_a^{\xi} f(x) dx - \int_a^{A_1} f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^{\xi} f(x) dx \right| + \left| \int_a^{A_1} f(x) dx \right| \leq 2C.$$

Аналогічними міркуваннями  $\left| \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx \right| \leq 2C$ .

$$\leq 2Cg(A_1) + 2Cg(A_2) < 2C \frac{\varepsilon}{4C} + 2C \frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon.$$

Отже, за критерієм Коші,  $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$  - збіжний. ■

**Theorem 3.2.10 Ознака Абеля**

Задані функції  $f, g \in \mathcal{R}([a, A])$ ,  $\forall A \in [a, \omega)$ . Відомо, що:

- 1)  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний;
- 2)  $g(x)$  - монотонна та обмежена на  $[a, \omega)$ .

Тоді  $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$  - збіжний.

**Remark 3.2.11** Різниця між Діріхле полягає в тому, що вимоги до 1) ми посилюємо, а вимоги до 2) ми послаблюємо.

Ця теорема, насправді, є прямим наслідком, проте відокремити її можна як теорему.

**Proof.**

$\int_a^\omega f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \omega} \int_a^x f(t) dt$ , тоді вона обмежена. П. 1) уже маємо.

$g$  - монотонна та обмежена, тому  $\exists \lim_{x \rightarrow \omega} g(x) = L$ . Далі розглянемо функцію  $h(x) = g(x) - L$ , яка також монотонна, але вже н.м. при  $x \rightarrow \omega$ . П. 2) уже маємо для  $h(x)$ .

Тоді  $\int_a^\omega f(x)h(x) dx$  - збіжний. Отже,

$$\int_a^\omega f(x)g(x) dx = \lim_{x \rightarrow \omega} \int_a^x f(t)g(t) dt = \lim_{x \rightarrow \omega} \int_a^x f(t)h(t) + Lf(t) dt = \int_a^\omega f(x)h(x) dx + L \int_a^\omega f(x) dx -$$

збіжний. ■

### Example 3.2.12 Інтеграл Діріхле

Дослідимо на збіжність  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

Маємо  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

До речі,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , тож  $x = 0$  - усувна точка, тобто вона не є особливою точкою. Тому  $\forall A \in$

$[0, +\infty) : \frac{\sin x}{x} \in \mathcal{R}([0, A])$ .

Перевіримо умови Діріхле.

$\left| \int_0^A f(x) dx \right| = \left| \int_0^A \sin x dx \right| = | -\cos A + \cos 0 | \leq 2$ , виконано  $\forall A \geq 0$  - встановимо  $M = 2$ . Тоді обмежена.

$g(x) = \frac{1}{x}$  - монотонна,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

Таким чином, за ознакою Діріхле,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  - збіжний.

Дослідимо тепер на абсолютну збіжність.

Припустимо, що це, дійсно, абсолютно збіжний інтеграл, тобто  $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$  - збіжний.

Зауважимо, що  $|\sin x| \geq \sin^2 x$ .

Тоді за ознакою порівняння в нерівностях,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$  - збіжний.

Тому збіжними будуть два інтеграли:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx &= \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos^2 x}{x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1 + \cos 2x}{2x} dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} dx \end{aligned}$$

Звідси  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$  та  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} dx$  - збіжні. Проте за еталоном,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$  НЕ є збіжним.

Суперечність!

Висновок:  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  - умовно збіжний.

## 3.3 Невласний інтеграл в сенсі головного значення

I. Розглянемо такий інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

У неї з обох сторін проблеми. В стандартному невластному інтегралі це можна записати так:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^t f(x) dx + \int_t^{+\infty} f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^t f(x) dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_t^A f(x) dx = \\ &= \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A f(x) dx \end{aligned}$$

Зазвичай незручно. Тому розглядають такий же інтеграл, але в сенсі головного значення:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x) dx$$

II. Розглянемо такий інтеграл

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ особлива т. } c \in (a, b)$$



У неї з обох сторін проблеми. В стандартному невласному інтегралі це можна записати так:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^-} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+ \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0^-}} \left( \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx \right)\end{aligned}$$

Ну якось теж незручно. Тому розглядають люди такий же інтеграл, але в сенсі головного значення:

$$v.p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

**Remark 3.3.1** Якщо один із двох інтегралів збігається, то тоді й *v.p.* інтеграл теж буде збігатись. В зворотньому - невірно.

### Example 3.3.2 Контрприклад

Маємо  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  - розбіжний (там виникне еталон)

Але *v.p.*  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln \varepsilon) = 0$  - збіжний.

Маємо  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$  - розбіжний.

Але *v.p.*  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \right) = 0$  - збіжний.

## 4 Ряди

**Definition 4.0.1** **Рядами** називають формальну нескінченну суму нескінченної послідовності чисел  $\{a_n, n \geq 1\}$ :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**Частковою сумою** даного ряду називають суму перших  $k$  членів:

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

В такому випадку в нас виникає послідовність часткових сум  $\{S_k, k \geq 1\}$ .

Якщо така послідовність часткових сум є збіжною, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називають **збіжним** та **сумма** цього ряду дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$$

Інакше - **розбіжним**.

**Example 4.0.2** Знайдемо суму:  $1 + q + q^2 + \dots$

Розглянемо часткову суму  $S_k = 1 + q + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$  - сума геом. прогресії.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1 - q}, & |q| < 1 \\ \infty, & |q| > 1 \end{cases}$$

При  $q = 1$  маємо:  $1 + 1 + 1 + \dots$ , тобто  $S_k = k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty$ .

Підсумуємо:

- сума є збіжною при  $|q| < 1$  та  $1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1 - q}$ ;

- сума є розбіжною при  $|q| \geq 1$ .

### 4.1 Первинний аналіз збіжності та арифметика рядів

**Proposition 4.1.1** **Необхідна ознака збіжності ряду**

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний. Тоді  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Proof.**

Зафіксуємо часткові суми:  $S_{k+1} = \sum_{n=1}^{k+1} a_n$   $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$ .

Оскільки ряд є збіжним, то  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$ . Тоді  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{k+1} - S_k) = S - S = 0$ .

■

**Remark 4.1.2** Якщо виникне, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , або її взагалі не існує, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - розбіжний.

**Remark 4.1.3** Це лише - необхідна ознака, в жодному випадку не достатня. Якщо границя буде нулевою, то це не означає, що ряд збігається, потрібні інші дослідження.

**Example 4.1.4** Розглянемо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$

Оскільки  $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ , то за **Rm. 3.1.3.**, маємо, що ряд - розбіжний.

**Theorem 4.1.5 Критерій Коші**

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon$ .

**Proof.**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний  $\iff \exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$  - збіжна границя  $\xLeftrightarrow{\text{критерій Коші}}$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : |S_{k+p} - S_k| = \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

**Example 4.1.6 Важливий**

Розглянемо  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  - гармонічний ряд. Доведемо, що даний ряд - розбіжний, використовуючи критерій Коші, тобто

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall K : \exists k_1, k_2 \geq K : \left| \sum_{n=k_1}^{k_2} \frac{1}{n} \right| \geq \varepsilon$$

Дійсно, якщо  $\varepsilon = 0.5$ ,  $k_1 = K$ ,  $k_2 = 2K$ , то отримаємо:

$$\left| \sum_{n=K}^{2K} \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \dots + \frac{1}{2K} > K \frac{1}{2K} = 0.5.$$

Отже, цей ряд - розбіжний.

**Proposition 4.1.7** Задані  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$   $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - збіжні. Тоді збіжними будуть й наступні ряди:

- 1)  $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ;
- 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Proof.**

Доведемо друге. Перший пункт аналогічно. Зафіксуємо часткові суми:

$$2) S_k(a) = \sum_{n=1}^k a_n, S_k(b) = \sum_{n=1}^k b_n.$$

$$\text{Тоді } S_k(a) + S_k(b) = \sum_{n=1}^k (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^k a_n + \sum_{n=1}^k b_n.$$

$$\text{Оскільки } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ - збіжні, то } \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(a) = S(a), \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(b) = S(b).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k(a) + S_k(b)) = S(a) + S(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad \blacksquare$$

**Definition 4.1.8** Хвостом ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називають ряд  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ , де  $m \in \mathbb{N}$ .

Тобто ми відкидаємо перші  $m - 1$  доданків та сумуємо, починаючи з  $m$ .

**Proposition 4.1.9**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний  $\iff \sum_{n=m}^{\infty} a_n$  - збіжний.

**Proof.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - збіжний } \xLeftrightarrow{\text{критерій Коші}} \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \iff$$

$$\iff \exists K' = \max\{K, m\} : \forall k \geq K' : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \iff \sum_{n=m}^{\infty} a_n \text{ - збіжний.} \quad \blacksquare$$

## 4.2 Знакододатні ряди

Тобто розглядаємо зараз лише ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , такі, що  $\forall n \geq 1 : a_n \geq 0$ .

**Proposition 4.2.1**  $\{S_k, k \geq 1\}$  - монотонно неспадна послідовність.

**Proof.**

$$\forall k \geq 1 : S_{k-1} - S_k = a_{k+1} \geq 0 \Rightarrow S_k \leq S_{k+1}. \quad \blacksquare$$

**Proposition 4.2.2** Якщо  $\{S_k, k \geq 1\}$  - обмежена, то тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний.

**Proof.**

Щойно дізнались що послідовність часткових сум монотонна. До того ж, вона є обмеженою за умовою. Отже,  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$ , тобто  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний. ■

**Theorem 4.2.3 Ознака порівняння в нерівностях**

Задані  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$   $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  таким чином, що  $\forall n \geq 1 : \exists N : a_n \leq b_n$ . Тоді:

- 1) якщо  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - збіжний, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний теж.
- 2) якщо  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - розбіжний, то  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - розбіжний теж.

**Proof.**

Оскільки  $a_n \leq b_n$ , то тоді  $\sum_{n=1}^k a_n \leq \sum_{n=1}^k b_n$ .

- 1) Нехай  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - збіжний ряд, тоді  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k b_n = S$ .

Отже, в нашій нерівності, якщо  $k \rightarrow \infty$ , то маємо  $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$ . Отже, існує границя, а

тому  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний.

- 2) Це є оберненим твердженням до 1). ■

**Example 4.2.4 Важливий**

Розглянемо далі  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  - ряд Діріхле. Дослідимо на збіжність.

Нехай  $\alpha < 1$ , тоді  $\forall n \geq 1 : \frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$

За ознакою порівняння та минулим прикладом, отримаємо, що  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  - розбіжний.

Нехай  $\alpha > 1$ , тоді  $\forall n > 1 : \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{2^\alpha}$ . За ознакою порівняння та геом. прогресії, отримаємо, що

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  - збіжний.

Підсумуємо:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} - \begin{cases} \text{розбіжний, } \alpha \leq 1 \\ \text{збіжний, } \alpha > 1 \end{cases}$ .

**Theorem 4.2.5 Ознака порівняння в границях**

Задані  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$   $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , тут члени строго додатні. Відомо, що  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ . Тоді:

1) Якщо  $l \neq 0$  та  $l \neq \infty$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збіжні або розбіжні одночасно;

2) Якщо  $l = 0$ , то із збіжності  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  випливає збіжність  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Remark 4.2.6** До речі,  $l \geq 0$ , оскільки всі члени - додатні.

**Proof.**

1)  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon$ .

Оберемо  $\varepsilon = \frac{l}{2}$ , тоді  $\frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2} \Rightarrow \frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3l}{2} b_n, \forall n \geq N$ .

Припустимо, що  $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$  - збіжний, тоді збіжним буде  $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{3l}{2} b_n$ , а отже, за попередньою теоремою,

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  - збіжний. Отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний.

Якщо  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  - збіжний, тоді збіжним буде  $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{l}{2} b_n$ , а отже  $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$  - збіжний. Тому  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - збіжний.

Аналогічними міркуваннями доводиться розбіжність.

2)  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l = 0$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon$

Оберемо  $\varepsilon = 1$ , тоді  $\forall n \geq N : a_n < b_n$ . Тоді виконується попередня теорема, один з двох пунктів ■

**Theorem 4.2.7** Ознака Даламбера

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - строго додатній. Нехай  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . Тоді:

1) Якщо  $q < 1$ , то ряд - збіжний;

2) Якщо  $q > 1$ , то ряд - розбіжний;

3) Якщо  $q = 1$ , то відповіді нема.

**Proof.**

1)  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$ .

Встановимо  $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ , тоді  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = \frac{1+q}{2} \Rightarrow \forall n \geq N : a_{n+1} < \frac{1+q}{2} a_n$ .

$\Rightarrow a_{N+1} < \frac{1+q}{2} a_N$

$\Rightarrow a_{N+2} < \frac{1+q}{2} a_{N+1} < \left( \frac{1+q}{2} \right)^2 a_N$

$\vdots$

$\Rightarrow \forall k \geq 1 : a_{N+k} < \left( \frac{1+q}{2} \right)^k a_N$

Розглянемо ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1+q}{2} \right)^k a_N = a_N \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1+q}{2} \right)^k$

Вираз під сумою буде менше за 1, цей ряд - геом. прогресія, збіжний.

Тоді  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$  - збіжний, отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний.

2) Якщо встановити  $\varepsilon = \frac{q-1}{2}$ , то отримаємо, що  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon = \frac{q+1}{2} \Rightarrow \forall n \geq N : a_{n+1} > \frac{q+1}{2} a_n$ .

Аналогічними міркуваннями, отримаємо  $\forall k \geq 1 : a_{N+k} > \left( \frac{q+1}{2} \right)^k a_N$ .

Розглянемо ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{q+1}{2} \right)^k a_N = a_N \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{q+1}{2} \right)^k$

А тут геом. прогресія при виразі, що більше одиниці - розбіжний.

Тоді  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$  - розбіжний, отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - розбіжний.

3) А тепер в чому проблема при  $q = 1$ . Розглянемо обидва ряди:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Використаємо

для обох ознаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot n = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 = 1.$$

Результат - однаковий, проте один ряд - розбіжний, а інший - збіжний. Тож  $q = 1$  не дає відповіді, шукаємо інші методи. ■

**Example 4.2.8** Дослідити на збіжність  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$ .

$$a_n = \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{3}{4} < 1.$$

Отже, наш ряд - збіжний за Даламбером.

### Theorem 4.2.9 Радикальна ознака Коші

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - додатній. Нехай  $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ . Тоді:

- 1) Якщо  $q < 1$ , то ряд - збіжний;
- 2) Якщо  $q > 1$ , то ряд - розбіжний;
- 3) Якщо  $q = 1$ , то відповіді нема.

**Proof.**

1)  $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \implies a_n < (q + \varepsilon)^n$ .

Оберемо  $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ . Тоді маємо:  $a_n < \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ .

Розглянемо ряд  $\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$  - геом. прогресія, вираз в сумі менше за одиниці - збіжний.

Отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$  - збіжний, а тому  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний.

2)  $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$ , тобто  $\exists \{ \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}}, p \geq 1 \} : \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}} = q$  - така підпоследовність, що містить цю границю  $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists P : \forall p \geq P : \left| \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}} - q \right| < \varepsilon$ .

Оберемо  $\varepsilon = \frac{q-1}{2}$ , тоді  $a_{n(p)} > \left(\frac{q+1}{2}\right)^{n(p)}$ . Тоді  $\lim_{p \rightarrow \infty} a_{n(p)} \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^{n(p)} = \infty$ .

Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . Це означає, що необхідна умова збіжності не виконується - розбіжний.

3) Щоб з'ясувати випадок  $q = 1$ , розгляньте такі самі ряди як при доведенні ознаки Даламбера. ■

**Example 4.2.10** Дослідити на збіжність  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ .

$$a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} \quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Отже, наш ряд - збіжний за Коші.

**Remark 4.2.11** Тепер питання, чому саме верхня границя

Якщо, насправді, порахувати просто границю, то автоматично існує й верхня границя

Але виникають такі ряди, де стандартно границю не порахуєш. Тому треба розбивати на підпоследовності та шукати верхню границю, що й дасть відповідь на збіжність

### Theorem 4.2.12 Інтегральна ознака Коші

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - додатній, такий, що:

$$1) \exists f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : \forall n \geq 1 : a_n = f(x);$$

$$2) f(x) \text{ спадає на } [1, +\infty).$$

Тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  та  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  збіжні або розбіжні одночасно.

#### Proof.

Оскільки  $f(x)$  спадає, то  $\forall k \geq 1 : \forall x \in [k, k+1] :$

$$a_k \geq f(x) \geq a_{k+1}.$$

$$a_k = \int_k^{k+1} a_k dx \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq \int_k^{k+1} a_{k+1} dx = a_{k+1}.$$

Просумуємо ці нерівності від  $k = 1$  до  $k = M$ , отримаємо:

$$\sum_{k=1}^M a_k \geq \int_1^M f(x) dx \geq \sum_{k=1}^M a_{k+1}.$$

Якщо  $M \rightarrow \infty$ , то за теоремою про поліцаїв отримаємо:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^M a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ та } \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx = \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Із збіжності ряду випливає збіжність інтегралу і навпаки. ■

**Example 4.2.13** Дослідити на збіжність  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$

Маємо функцію  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ . Зрозуміло, що  $f$  спадає на  $[2, +\infty)$ , бо  $x, \ln x$  там зростають.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty - \text{розбіжний}.$$

Отже, наш ряд - розбіжний за Коші інтегральним.

## 4.3 Знакозмінні ряди

**Definition 4.3.1** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

**Definition 4.3.2** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називається **умовно збіжним**, якщо  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний, але  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  - не збіжний.

**Proposition 4.3.3**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - абсолютно збіжний  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  - збіжний.

#### Proof.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - абсолютно збіжний } \iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ - збіжний } \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 :$$

$$\left| \sum_{n=k}^{k+p} |a_n| \right| < \varepsilon \iff \left| \sum_{n=k}^{k+p} a_n \right| \leq \left| \sum_{n=k}^{k+p} |a_n| \right| < \varepsilon \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - збіжний.}$$

### Theorem 4.3.4 Ознака Лейбніца

Задано ряд вигляду  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  - знакозмінний ряд. Відомо, що:

$$1) \forall n \geq 1 : a_n \geq 0;$$

$$2) \{a_n, n \geq 1\} \text{ - монотонно спадає;}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Тоді заданий ряд - збіжний.

**Proof.**

Розглянемо послідовність часткових сум  $\{S_{2k}, k \geq 1\}$ . Отримаємо наступне:

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \geq 0.$$

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} \leq a_1.$$

Тобто  $0 \leq S_{2k} \leq a_1$  - обмежена послідовність.

Також  $S_{2(k+1)} = S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \geq S_{2k}$  - монотонна. Таким чином,  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S$ .

Розглянемо ще одну послідовність часткових сум  $\{S_{2k+1}, k \geq 1\}$ . Зрозуміло, що  $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$   
 $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} + \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = S + 0 = S$ .

Остаточно, маємо, що послідовність  $\{S_m, m \geq 1\}$  - збіжна, тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  - збіжний. ■

**Corollary 4.3.5**  $\forall k \geq 1 : |S - S_k| \leq a_{k+1}$ .

**Proof.**

Розглянемо хвіст ряду  $S - S_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ . А також розглянемо  $\tilde{S}_m = \sum_{n=k+1}^m (-1)^{n+1} a_n$ . Тоді

$$\tilde{S}_m = S_m - S_k = (-1)^{k+1} (a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+4} - a_{k+5}) - \dots - \left[ \begin{array}{c} (a_{m-1} - a_m), k \\ a_m, k \end{array} \right] 2$$

$$\Rightarrow |\tilde{S}_m| = \left| a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+4} - a_{k+5}) - \dots - \left[ \begin{array}{c} (a_{m-1} - a_m), k \\ a_m, k \end{array} \right] 2 \right| =$$

$$= a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+4} - a_{k+5}) - \dots - \left[ \begin{array}{c} (a_{m-1} - a_m), k \\ a_m, k \end{array} \right] 2 \leq a_{k+1}$$

$$\Rightarrow |S - S_k| = \lim_{m \rightarrow \infty} |\tilde{S}_m| \leq a_{k+1}. \quad \blacksquare$$

**Example 4.3.6** Обчислити суму  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$  з точністю до  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

Зрозуміло, що  $a_n = \frac{1}{n!} \geq 0$ , монотонно спадає та н.м. Отже, виконуються ознаки Лейбніца, а тому й отриманий наслідок.

$$|S - S_k| \leq a_{k+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{(k+1)!} < \frac{1}{10^5} \Rightarrow (k+1)! > 100000.$$

Достатньо взяти нам  $k = 8$ . Тому ми отримаємо:

$$S \approx S_8 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} = \frac{-3641}{5760}.$$

**Theorem 4.3.7 Ознаки Діріхле та Абеля**

Задано ряд вигляду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ . Нехай виконано один з двох блоків умов:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^k a_n - \text{обмежена.} \\ \{b_n, n \geq 1\} - \text{монотонна та н.м.} \\ \text{ознака Діріхле} \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збіжний.} \\ \{b_n, n \geq 1\} - \text{монотонна та обмежена.} \\ \text{ознака Абеля} \end{array} \right.$$

Тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  - збіжний.

**Proof.**

Спочатку почнемо з ознаки Діріхле. Припустимо  $b_n$  спадає. Застосуємо критерій Коші для доведення.

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n b_n \right| = \left| A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1} - \sum_{n=k+1}^{k+p-1} A_n (b_{n+1} - b_n) \right| = \left| A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1} + \sum_{n=k+1}^{k+p-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \right| \leq$$



$$|A_{k+p}b_{k+p} - A_k b_{k+1}| + \sum_{n=k+1}^{k+p-1} |A_n| |b_{n+1} - b_n| \leq$$

За умовою,  $A_k = \sum_{n=1}^k a_n$  - обмежена, тобто  $\exists C > 0 : \forall k \geq 1 : |A_k| \leq C$ .

Також  $b_n$  - н.м., тоді  $\forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : |b_k| < \varepsilon$ .

Тоді  $|A_{k+p}b_{k+p} - A_k b_{k+1}| \leq |A_{k+p}| |b_{k+p}| + |A_k| |b_{k+1}| < 2C\varepsilon$ .

Також  $\sum_{n=k+1}^{k+p-1} |A_n| |b_{n+1} - b_n| \leq C \sum_{n=k+1}^{k+p-1} (b_n - b_{n+1}) = C(b_{k+1} - b_{k+p}) \leq Cb_{k+1} < C\varepsilon$

$\leq 3C\varepsilon$ . Виконано  $\forall \varepsilon > 0$  та  $\forall k \geq K : \forall p \geq 1$ . Отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  - збіжний.

Далі доводимо ознаку Абеля. Оскільки  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний, то тоді обмежений. Оскільки  $\{b_n\}$  монотонна та обмежена, то  $b_n \rightarrow B$ . Якщо розглянути  $c_n = b_n - B$ , то маємо  $\{c_n, n \geq 1\}$  - монотонна та н.м. Отже, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$  - збіжний за Діріхле. А далі ясно, що  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  - збіжний. ■

**Example 4.3.8** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ .

Будемо для цього використовувати ознаку Діріхле, встановимо  $a_n = \sin n, b_n = \frac{1}{n}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \sin n &= \sum_{n=1}^k \frac{\sin(1 \cdot n) \sin \frac{1}{2}}{\sin \frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \sum_{n=1}^k \left( \cos \left( n - \frac{1}{2} \right) - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \left( \cos \frac{1}{2} - \cos \frac{3}{2} + \cos \frac{3}{2} - \cos \frac{5}{2} + \dots + \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \left( \cos \frac{1}{2} - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{\sin \frac{k+1}{2} \sin \frac{k}{2}}{\sin \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Таким чином,  $\left| \sum_{n=1}^k \sin n \right| = \left| \frac{\sin \frac{k+1}{2} \sin \frac{k}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^k \sin n$  - обмежена.

Зрозуміло, що  $\frac{1}{n}$  монотонна та н.м.

Отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$  - збіжний.

**Example 4.3.9** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} e^{-n}$ .

Будемо для цього використовувати ознаку Абеля, встановимо  $a_n = \frac{\sin n}{n}, b_n = e^{-n}$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$  - збіжний за попереднім прикладом.

$e^{-n}$  - монотонна, оскільки  $e^{-n-1} - e^{-n} = e^{-n}(e^{-1} - 1) < 0$ .

$e^{-n}$  - обмежена, оскільки  $0 < e^{-n} < e$ .

Отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} e^{-n}$  - збіжний.

**Theorem 4.3.10** Теорема Рімана

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - умовно збіжний.

Тоді для довільного  $M \in \mathbb{R}$  буде існувати перестановка членів ряду, після якої новий ряд із переставленими членами буде збіжним до числа  $M$ .

*Поки без доведення*

**Theorem 4.3.11 Теорема Діріхле**

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - абсолютно збіжний. Тоді будь-яка перестановка членів ряду не змінить суму.

*Поки без доведення*

## 5 Функціональні ряди

### 5.1 Функціональні послідовності

**Definition 5.1.1** Функціональною послідовністю назвемо послідовність  $\{f_n(x), n \geq 1\}$ , всі функції задані на одній множині  $A$ .

**Definition 5.1.2** Функція  $f(x)$ , що задана теж на множині  $A$ , називається **точковою границею** функціональної послідовності  $\{f_n(x), n \geq 1\}$ , якщо

$$\forall x \in A : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

**Example 5.1.3** Розглянемо послідовність  $\left\{f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, n \geq 1\right\}$  на  $[0, 5]$ .

$$\text{Тоді } f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} = \frac{x}{\frac{1}{n} + 1 + \frac{x}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = f(x).$$

**Remark 5.1.4** Поточкова збіжність дала змогу створити нову функцію  $f(x)$ , збираючи всі точки  $x \in A$ . Додатково зазначу, що в кожній точці  $x \in A$  виникає числова послідовність, яка має єдину границю при збіжності - тому наша функція  $f(x)$  є єдиною такою.

**Definition 5.1.5** Функція  $f(x)$  називається **рівномірною границею** функціональної послідовності  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  на множині  $A$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Позначення:  $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty$ .

**Corollary 5.1.6**  $f(x)$  - рівномірна границя послідовності  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  на  $A \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

Дійсно,  $\forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

**Proposition 5.1.7** Задано  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  - послідовність на  $A$ . Відомо, що  $f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$  на множині  $A$ . Тоді  $\forall x \in A : f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$ .

**Proof.**

За умовою,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \implies f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$ . ■

**Corollary 5.1.8** Рівномірно збіжна послідовність має єдину рівномірну границю.

**Remark 5.1.9** Таким чином, єдиний кандидат на рівномірну збіжність послідовність  $\{f_n, n \geq 1\}$  - це сама функція  $f$ , що була отримана в результаті поточної збіжності.

**Example 5.1.10** Розглянемо послідовність  $\left\{f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, n \geq 1\right\}$  на  $[0, 5]$ .

$$\text{Маємо } f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} = \frac{x}{\frac{1}{n} + 1 + \frac{x}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = f(x).$$

$$\text{Також } \sup_{x \in [0,5]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,5]} \frac{x+x^2}{1+n+x} \stackrel{=}{=}$$

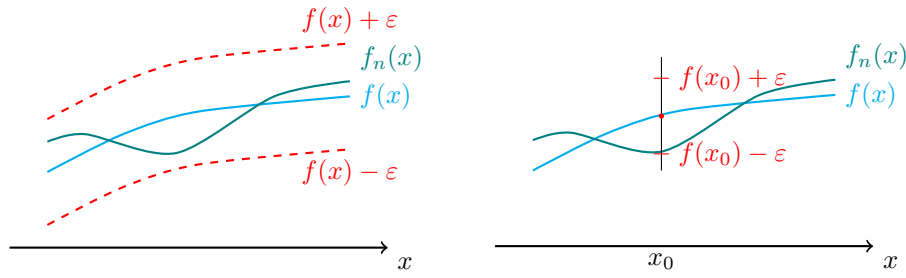
Розглянемо функцію  $h(x) = \frac{x+x^2}{1+n+x}$  на  $[0, 5]$ . Знайдемо похідну:

$$h'(x) = \frac{(1+2x)(1+n+x) - x - x^2}{(1+n+x)^2} = \frac{1+n+2x+2nx+x^2}{(1+n+x)^2} > 0.$$

Отже,  $h$  - строго монотонно зростає. Тому найбільше значення досягається при  $x = 5$ .

$$\stackrel{=}{=} \frac{5+25}{1+n+5} = \frac{30}{6+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Таким чином,  $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty$ .



Ліворуч - рівномірна збіжність. Праворуч - поточкова збіжність.

Тепер найголовніше питання, а для чого власне нам потрібна рівномірна збіжність, чому не достатньо поточної збіжності. Одну з відповідей на це питання дає такий приклад.

**Example 5.1.11** Розглянемо послідовність  $\{f_n(x) = x^n, n \geq 1\}$  на множині  $[0, 1]$ . Тоді маємо:

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} = f(x).$$

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 1, & x \in [0, 1) \end{cases}.$$

В загальному випадку,  $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \not\rightarrow 0$ , а тому можемо сказати, що  $f_n(x) \not\rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$ .

Найголовніше з цього прикладу, що  $f_n \in C([0, 1])$ , проте  $f \notin C([0, 1])$ , а хотілось би. Саме тому нам потрібні рівномірні збіжності.

**Definition 5.1.12** Нормою функції  $f(x)$  на множині  $A$  назовемо таке число:

$$\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

**Proposition 5.1.13** Властивості

Задані функції  $f, g$  на множині  $A$ . Тоді справедливо наступне:

- 1)  $\|f\| \geq 0$ ;
- 2)  $\|f\| = 0 \iff f(x) = 0, \forall x \in A$ ;
- 3)  $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ;
- 4)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ;
- 5)  $|\|f\| - \|g\|| \leq \|f - g\|$ .

**Proof.**

1), 3) зрозуміло.

2)  $\|f\| = 0 \Rightarrow \sup_{x \in A} |f(x)| = 0 \Rightarrow 0 \leq |f(x)| \leq 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$ .

В зворотньому напрямку все зрозуміло.

4)  $\|f + g\| = \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in A} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup_{x \in A} |f(x)| + \sup_{x \in A} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$ .

5) Вказівка:  $\|f\| \leq \|f - g\| + \|g\|$  та  $\|g\| \leq \|g - f\| + \|f\|$ . ■

**Remark 5.1.14**  $f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty \iff \|f_n - f\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Тепер буде нам набагато простіше розписувати, що таке рівномірна збіжність.

**Theorem 5.1.15** Задано  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  - послідовність на множині  $A$  та  $f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$ . Відомо, що  $\forall n \geq 1 : f_n(x) \in C(A)$ . Тоді  $f(x) \in C(A)$ , а також  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**Proof.**

Зафіксуємо т.  $x_0 \in A$ . За умовою,  $\|f_n - f\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

$\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \implies |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

$f_N(x) \in C(A) \implies \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

$\implies |f(x) - f(x_0)| = |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ .

$\Rightarrow f(x)$  - неперервна в т.  $x_0$ , яка є довільною. Отже,  $f(x) \in C(A)$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

**Theorem 5.1.16** Задано  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  - послідовність на множині  $[a, b]$  та  $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty$ .

Відомо, що  $\forall n \geq 1 : f_n(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ , а також  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .

**Proof.**

$$\text{Маємо } f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

$$\text{Зокрема } \forall x \in [a, b] : |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \Rightarrow f_N(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Тоді  $\forall k = 1, \dots, n$  виконуються нерівності:

$$m_k(f) \geq f_N(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \geq m_k(f_N) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

$$M_k(f) \leq f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq M_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

$$\text{Оскільки } f_N \in \mathcal{R}([a, b]), \text{ то } \exists \tau : U(f_N, \tau) - L(f_N, \tau) = \sum_{k=1}^n (M_k(f_N) - m_k(f_N)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall k = 1, \dots, n : M_k(f_N) - m_k(f_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\begin{aligned} U(f, \tau) - L(f, \tau) &= \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f)) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \left( M_k(f_N) - m_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) \Delta x_k = \\ &= \sum_{k=1}^n (M_k(f_N) - m_k(f_N)) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \varepsilon \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a, b]). \end{aligned}$$

Для доведення рівності зробимо таку оцінку та прямування:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b f_n(x) - f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \|f - f_n\| dx = \\ &= \|f - f_n\| (b-a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Theorem 5.1.17 Критерій Коші**

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty \text{ на } A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

**Proof.**

$$\Rightarrow \text{Дано: } f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty \text{ на } A$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \|f_n - f\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \\ &\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\|f_m - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \|f_n - f_m\| &= \|f_n - f + f - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\Leftarrow \text{Дано: } \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Якщо зафіксувати точку  $x_0 \in A$ , то отримаємо фундаментальну послідовність  $\{f_n(x_0), n \geq 1\} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ .

Якщо  $m \rightarrow \infty$ , то маємо, що  $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Оскільки це може бути  $\forall x_0 \in A$ , то тоді  $\|f_n - f\| < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

## 5.2 Функціональні ряди

**Definition 5.2.1** Функціональним рядом називають суму членів функціональної послідовності  $\{a_n(x), n \geq 1\}$ :

$$a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

**Частковою сумою** даного ряду називають суму перших  $k$  функцій:

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_k(x)$$

В такому випадку в нас виникає функціональна послідовність часткових сум  $\{S_k(x), k \geq 1\}$ . Якщо така послідовність збігається в т.  $x_0$ , то ряд є **збіжним** в т.  $x_0$  та **сума** цього ряду дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x_0) = S(x_0)$$

Інакше - **розбіжним**.

Якщо ряд збігається  $\forall x \in B$ , то  $B$  називають **областю збіжності**

Якщо ряд абсолютно збігається  $\forall x \in B$ , то  $B$  називають **областю абсолютної збіжності**

Якщо ряд умовно збігається  $\forall x \in B$ , то  $B$  називають **областю умовної збіжності**

**Example 5.2.2** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ .

Для початку перевіримо на абсолютну збіжність, для цього ми досліджуємо  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right|$ . Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}(1+x^{2n})|}{|(1+x^{2n+2})x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n+2}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n+2}} + 1} \right| = \frac{1}{|x|} \text{ при } |x| > 1. \\ &= |x| \text{ при } |x| < 1. \\ &= 1 \text{ при } |x| = 1. \end{aligned}$$

Отже, при  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  в перших двох випадках, тобто при  $|x| \neq 1$ . Це означає збіжність.

При  $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$  треба додатково дослідити.

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+1} = +\infty \Rightarrow \text{розбіжний.}$$

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+1} - \text{розбіжний, оскільки } \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2}.$$

Таким чином, область абсолютної збіжності  $B_{abs} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ; область умовної збіжності  $B_{cond} = \emptyset$ .

**Definition 5.2.3** Якщо послідовність часткових сум  $\{S_k(x), k \geq 1\}$  збігається рівномірно на множині  $A$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  називають **рівномірно збіжним** на  $A$ .

**Theorem 5.2.4 Критерій Коші**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \text{рівномірно збіжний на множині } A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left\| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right\| < \varepsilon.$$

Впливає з критерію Коші рівновірної збіжності функціональних послідовностей.

**Corollary 5.2.5 Необхідна умова рівномірної збіжності**

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  - рівномірно збіжний на  $A$ . Тоді  $a_k(x) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  на  $A$ .

Вказівка: критерій Коші при  $p = 1$ .

**Theorem 5.2.6 Мажорантна ознака Вейєрштраса**

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  - ряд на множині  $A$ . Відомо, що:

$$1) \exists \{c_n, n \geq 1\} : \forall n \geq 1 : \forall x \in A : |a_n(x)| \leq c_n;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \text{збіжний. Його ще називають мажорантним рядом.}$$

Тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  збігається рівномірно на множині  $A$ .

**Proof.**

За критерієм Коші,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  - збіжний  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} c_n \right| < \varepsilon$ . Тоді

$$\left\| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right\| = \sup_{x \in A} \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right| \leq \left| \sup_{x \in A} \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} \sup_{x \in A} |a_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} c_n < \varepsilon.$$

Тому за критерієм Коші,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  - рівномірно збіжний на множині  $A$ . ■

**Example 5.2.7** Розглянемо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ .

Оскільки  $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ , причому це виконано завжди, а мажорантний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  - збіжний, то за

ознакою Вейєрштраса,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  - збіжний рівномірно на  $\mathbb{R}$ .

**Theorem 5.2.8** Ознаки Діріхле та Абеля

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  - ряд на множині  $A$ .

Нехай виконано один з двох блоків умов:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^k a_n(x) \text{ - рівномірно обмежена на } A \\ \{b_n(x), n \geq 1\} \text{ - монотонна та } b_n(x) \rightarrow 0 \text{ на } A \\ \text{ознаки Діріхле} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ - збіжний рівномірно на } A \\ \{b_n(x), n \geq 1\} \text{ - монотонна та рівномірно обмежена на } A \\ \text{ознаки Абеля} \end{array} \right|$$

Тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  - збіжний рівномірно на множині  $A$ .

*Доводиться так само, як було в числових рядах.*

**Example 5.2.9** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ , якщо  $0 < \alpha \leq 1$ .

Аналогічними міркуваннями як в **Ех. ???** ми можемо отримати таку формулу:

$$\sum_{n=1}^k \sin nx = \frac{\sin \left( \frac{k+1}{2} x \right)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} \text{ за умовою, що } \sin \frac{x}{2} \neq 0 \implies x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Тоді  $\left| \sum_{n=1}^k \sin nx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{C}$ , за умовою, що розглядається область  $[a, b] \subset (2\pi m, 2\pi(m+1))$ .

Ну й також  $\frac{1}{n^\alpha}$  - монотонна та рівномірно н.м. (тому що від  $x$  не залежить) на  $[a, b]$ .

Таким чином,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$  збігається рівномірно в будь-якому відрізку  $[a, b] \subset (2\pi m, 2\pi(m+1))$ .

*TODO. Дописати*

**Theorem 5.2.10** Задано  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  - рівномірно збіжний на  $A$ .

Відомо, що  $\forall n \geq 1 : a_n(x) \in C(A)$ . Тоді  $S(x) \in C(A)$ .

**Proof.**

З умови теореми випливає, що  $\forall k \geq 1 : S_k(x) = \sum_{n=1}^k a_n(x) \in C(A)$  як сума неперервних функцій

Оскільки ряд - рівномірно збіжний, то тоді  $\{S_k(x), k \geq 1\}$  - рівномірно збіжна. Тоді за **Th. 10.?**,  $S(x) \in C(A)$ . ■

**Example 5.2.11** Довести, що  $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

Спочатку треба довести рівномірну збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$  в деякому лівому околі т.  $x = 1$ .

Застосуємо ознаку Абеля при  $a_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ,  $b_n(x) = x^n$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  - збіжна за ознакою Лейбніца, а оскільки вона не залежить від  $x$ , то тому ще й рівномірно в околі т.  $x = 1$ .

$x^n$  - зрозуміло, монотонна та монотонно обмежена, оскільки  $|x^n| \leq 1$ .

Таким чином,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$  - рівномірно обмежена в лівому околі т.  $x = 1$ .

А далі  $\frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \in C$ , а отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \in C$ , в тому числі в т.  $x = 1$ .

Таким чином,  $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

**Theorem 5.2.12** Задано  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  - рівномірно збіжний на  $[a, b]$ .

Відомо, що  $\forall n \geq 1 : a_n(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $S(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ , а також

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b a_n(x) dx \right).$$

**Proof.**

З умови теореми випливає, що  $\forall k \geq 1 : S_k(x) = \sum_{n=1}^k a_n(x) \in \mathcal{R}([a, b])$  як сума інтегрованих функцій.

Оскільки ряд - рівномірно збіжний, то тоді  $\{S_k(x), k \geq 1\}$  - рівномірно збіжна. Тоді за **Th. 10.1.?**,  $S(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Доведемо тепер тотожність:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx &= \int_a^b \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n(x) \right) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \left( \sum_{n=1}^k a_n(x) \right) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left( \int_a^b a_n(x) dx \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b a_n(x) dx \right). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Example 5.2.13** Довести, що  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$  для всіх  $x \in (-1, 1]$ .

Розглянемо ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ . Аналогічними міркуваннями (як в попередньому прикладі)

ми можемо довести, що ряд збіжний рівномірно на  $(-1, 1]$ . Покладемо деяке число  $x > 0$ . Оскільки  $(-1)^n t^n \in \mathcal{R}([0, x])$ , то звідси  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \in \mathcal{R}([0, x])$ . Таким чином,

$$\text{з одного боку, } \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n;$$

$$\text{із іншого боку, } \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x).$$

Остаточно отримали, що  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$  для всіх  $x \in (-1, 1]$ .

**Theorem 5.2.14** Задано  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ . Відомо, що:

- 1)  $\forall n \geq 1 : a_n(x)$  - неперервно-диференційовані на  $[a, b]$ ;
- 2)  $\exists x_0 \in [a, b] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$  - збіжний;



3)  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$  - рівномірно збіжний на  $[a, b]$ .

Тоді  $S(x)$  - збіжний рівномірно,  $S(x)$  - диференційована на  $[a, b]$ , а також  $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ .

**Proof.**

Розглянемо ряд  $\tilde{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ . Оскільки  $a'_n \in C([a, b])$ , то автоматично  $a'_n \in \mathcal{R}([a, b])$ , а тому

$\tilde{S}(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді за попередньою теоремою, можемо отримати, що

$\forall x \in [a, b] : \int_{x_0}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^x a'_n(t) dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(x_0))$  - збіжний рівномірно ряд.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(x_0) + a_n(x_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(x_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$  - рівномірно збіжний.

Доведемо тотожність:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(x_0))\right)' + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x). \quad \blacksquare$$

**Example 5.2.15**

### 5.3 Степеневі ряди

**Definition 5.3.1** Степеневим рядом називаємо ми такий функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

де  $\{a_n, n \geq 1\}$  - числова послідовність.

**Theorem 5.3.2** Теорема Коші-Адамара

Задано  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  - степеневий ряд. Нехай  $\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$  - радіус збіжності. Тоді ряд:

при  $|x - x_0| < R$  - збіжний абсолютно;

при  $|x - x_0| > R$  - розбіжний;

при  $|x - x_0| = R$  - відповіді нема.

**Proof.**

Скористаємось радикальною ознакою Коші для нашого ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)|^n} = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q.$$

Тоді:

При  $q < 1$ , тобто  $|x - x_0| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$  - збіжний абсолютно;

При  $q > 1$ , тобто  $|x - x_0| > \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$  - розбіжний;

При  $q = 1$  - нема відповіді. ■

**Corollary 5.3.3** Наслідок із ознаки Даламбера

Задано  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  - степеневий ряд. Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$  - радіус збіжності. Тоді ряд:

при  $|x - x_0| < R$  - збіжний абсолютно;

при  $|x - x_0| > R$  - розбіжний;

при  $|x - x_0| = R$  - відповіді нема.

**Proof.**

Скористаємось ознакою Даламбера для нашого ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q.$$

Тоді:

При  $q < 1$ , тобто  $|x-x_0| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$  - збіжний абсолютно;

При  $q > 1$ , тобто  $|x-x_0| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$  - розбіжний;

При  $q = 1$  - нема відповіді. ■

**Example 5.3.4** Знайдемо область збіжності ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{2^n(n+1)}$ .

Маємо  $a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$ , тоді  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)}{n+1} = 2$ .

Отже, при  $|x-7| < 2 \implies x \in (5, 9)$  ряд збіжний абсолютно. Також при  $|x-7| > 2 \implies x \in (-\infty, 5) \cup (9, +\infty)$  ряд розбіжний.

А ось в  $x = 5, x = 9$  треба додатково обстежити.

При  $x = 9$  маємо  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  - розбіжний.

При  $x = 5$  маємо  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$  - збіжний за Лейбніцем, але умовно.

Отже, область збіжності  $B = [5, 9)$ .

### Theorem 5.3.5 Теорема Абеля

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  - рівномірно збіжний на будь-якому відрізку із області збіжності.

#### Proof.

Зафіксуємо довільний відрізок  $[a, b]$ . Будемо розглядати декілька випадків.

1.  $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ .

Зафіксуємо число  $M = \max\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\}$ . Звідси  $\forall x \in [a, b] : |x - x_0| < M < R$ , а тому  $|a_n(x-x_0)^n| < |a_n|M^n$ .

Розглянемо мажорантний ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n M^n$ . Застосуємо ознаку Коші:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|M^n} = M \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < R \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ . Отже, цей ряд - збіжний. Тоді за ознакою Вейерштраса, степеневий ряд - збіжний рівномірно на  $[a, b]$ .

2.  $[a, b] \subset [x_0, x_0 + R]$ .

Розпишемо ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left( \frac{x-x_0}{R} \right)^n$ .

Розглянемо випадок, коли ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  - збіжний. Збіжність степеневому ряду проведемо за ознакою Абеля:

$$g_n(x) = \left( \frac{x-x_0}{R} \right)^n$$

Домовились, що  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  - збіжний, причому рівномірно, оскільки не залежить від  $x$ .

Послідовність  $\left\{ g_n(x) = \left( \frac{x-x_0}{R} \right)^n, n \geq 1 \right\}$  - рівномірно обмежена, оскільки

$$\forall x \in [a, b] \subset [x_0, x_0 + R] : |x-x_0| \leq R \Rightarrow \forall n \geq 1 : \left| \frac{x-x_0}{R} \right|^n \leq 1.$$

А також послідовність є монотонною, тому що  $\frac{x-x_0}{R} < 1$ .

Отже, за Абелем, ряд - рівномірно збіжний на  $[a, b]$ .

Аналогічно, коли  $[a, b] \subset [x_0 - R, x_0]$  за умовою, що  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$  - збіжний.

3.  $[a, b] \subset [x_0 - R, x_0 + R]$ .

Тоді відрізок  $[a, b]$  розбивається на  $[a, x_*] \cup [x_*, b]$ . На цих відрізках ряд збіжний рівномірно за п. 2.

■

**Example 5.3.6** Зокрема ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{2^n(n+1)}$  збіжний рівномірно в будь-якому відрізку, в тому числі в тому, що містить початок т.  $x = 5$ .

**Theorem 5.3.7** Позначимо степеневий ряд  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ . Тоді  $S \in C$  в області збіжності.

**Proof.**

Візьмемо якусь точку  $x_* \in (x_0 - R, x_0 + R)$ .

Зафіксуємо деякий відрізок  $[a, b] \ni x_*$ . Якщо  $x_* \neq x_0 - R, x_* \neq x_0 + R$ , то беремо інтервал  $(a, b) \ni x_*$ .

На відрізку  $[a, b]$  ряд - збіжний рівномірно за теоремою Абеля, члени ряду - неперервні функції.

Отже, за **Th. 10.2.?**,  $S(x) \in C([a, b]) \implies S(x) \in C(\{x_*\})$ .

Оскільки т.  $x_*$  була довільною, то одразу  $S(x) \in C((x_0 - R, x_0 + R))$ .

■

**Theorem 5.3.8** Позначимо степеневий ряд  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ . Тоді  $S \in \mathcal{R}$  в області збіжності.

$\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$ , причому радіус збіжності нового степеневого ряду також  $R$ .

**Proof.**

На відрізку  $[x_0, x_*]$  або  $[x_*, x_0]$  степеневий ряд збігається рівномірно за Абелем. Тому за **Th.**,  $S \in \mathcal{R}([x_0, x_*])$  або  $[x_*, x_0]$ .

Тотожність випливає з цього ж **Th.** Тепер перевіримо, що радіус збіжності дійсно такий самий. За Коші-Адамара,

$$R_{new} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{n+1} \right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|} = 1 \cdot R = R.$$

■

**Theorem 5.3.9** Позначимо степеневий ряд  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ . Тоді він диференційований в області збіжності.

$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$ , причому радіус збіжності нового степеневого ряду також  $R$ .

**Proof.**

Розглянемо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$ . Радіус збіжності збігається, оскільки

$$R_{new} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Візьмемо якусь точку  $x_*$  з області збіжності. Нехай відрізок  $[a, b] \ni x_*$ . На відрізку  $[a, b]$  ряд - збіжний рівномірно за теоремою Абеля. Використаємо далі **Th. 10.?**:

- 1)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  - збіжний принаймні в одній точці;
- 2) Всі члени ряду - диференційовані функції;
- 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^*(x-x_0)^n$  - рівномірно збіжний на  $[a, b]$ .

Отже,  $S(x)$  - диференційований на  $[a, b]$ , зокрема і в т.  $x_*$ . Оскільки т.  $x_*$  була довільною, то одразу  $S(x)$  - диференційований в  $(x_0 - R, x_0 + R)$ .

Тому дійсно,  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-x_0)^{n-1}$ .

■

## 5.4 Зв'язок з Тейлором та єдиність степеневого ряду

### Theorem 5.4.1 Теорема Тейлора

Задано функцію  $f$  та точку  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Відомо, що

- 1)  $f \in C^{(\infty)}((x_0 - R, x_0 + R))$ ;
- 2)  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \geq 1 : \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : |f^{(n)}(x)| \leq M^n$ .

Тоді  $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  функція розкладається в ряд Тейлора  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ .

Якщо  $\begin{cases} R < \infty \\ R = \infty \end{cases}$  то ряд рівномірно збігається на  $\begin{cases} (x_0 - R, x_0 + R) \\ [x_0 - R_0, x_0 + R_0] \end{cases}$ , причому  $\forall R_0 \in \mathbb{R}$ .

#### Proof.

Розкладемо функцію в ряд Тейлора за остачею Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}.$$

Тоді маємо, що

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| = \left| \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1} \right| \leq \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} r^{k+1}.$$

Розглянемо тепер ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} r^{k+1}$ . За ознакою Даламбера,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Mr}{k+2} = 0 < 1$ .

Цей ряд є збіжним. Отже, за необхідною ознакою збіжності,  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} r^{k+1} = 0$ .

Звідси випливає, що

$$\sup_{x \in (x_0 - R, x_0 + R)} \left| f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} r^{k+1} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

$$\text{Отримали } \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f, k \rightarrow \infty$$

Таким чином,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$  - збіжний рівномірно на  $(x_0 - R, x_0 + R)$ . ■

### Theorem 5.4.2 Степеневий ряд задається єдиним чином.

**Remark 5.4.3** Математично кажучи, якщо  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$  мають одне значення на  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , то  $\forall n \geq 0 : a_n = b_n$ .

#### Proof.

$$S(x_0) = a_0 = b_0.$$

$$S'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot n (x - x_0)^{n-1}.$$

$$\Rightarrow S'(x_0) = a_1 = b_1.$$

$\vdots$

Таким чином,  $\forall n \geq 0 : a_n = b_n$ . ■

**Corollary 5.4.4** Ряд Тейлора для суми степеневого ряду співпадають з самим степеневим рядом на області збіжності.

**Example 5.4.5** Маємо функцію  $\cos x$ . Розглянемо деяку точку  $x_0 = 0$ , встановимо  $R = +\infty$ .

$$\exists M = 1 : \forall n \geq 1 : \forall x \in \mathbb{R} : |f^{(n)}(x)| = \left| \cos \left( x + \frac{\pi n}{2} \right) \right| \leq 1.$$

Таким чином, ми можемо розкласти  $\cos x$  в ряд Тейлора - отримаємо такий вигляд:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, x \in \mathbb{R}.$$

### Основні розклади

$$1. e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!};$$

$$2. \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

$$3. \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k};$$

$$4. \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1;$$

$$5. \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1];$$

$$6. (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k, \quad |x| < 1.$$

**Example 5.4.6** Розкласти функцію  $f(x) = \ln(1+2x-8x^2)$  в ряд Тейлора.

Зауважимо, що  $\ln(1+2x-8x^2) = \ln(1-2x)(1+4x) = \ln(1-2x) + \ln(1+4x)$ .

$$\ln(1-2x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-2x)^k = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k \text{ за умовою } |2x| < 1.$$

$$\ln(1+4x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (4x)^k = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k} x^k \text{ за умовою } |4x| < 1.$$

$$\text{Остаточно } f(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2^k + (-4)^k}{k} \right) x^k \text{ за умовою } |x| < \frac{1}{4}.$$

## 6 Вступ до $\mathbb{R}^m$

Простір  $\mathbb{R}^m$  зберігає в собі **арифметичні вектори**  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ , причому  $\forall j = \overline{1, m} : x_j \in \mathbb{R}$ .

Візьмемо довільні вектори

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ . Ми можемо створити операції **додавання** та **множення на скаляр** таким чином:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix} \quad \alpha \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Із таким означенням операцій легко доводиться, що  $\mathbb{R}^m$  утворює лінійний простір.

Надалі ми ще будемо використовувати **скалярний добуток**, що визначається таким чином:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m$$

### 6.1 Топологія та принцип аналізу в $\mathbb{R}^m$

**Definition 6.1.1** Нормою на множині  $\mathbb{R}^m$  будемо називати тут таку величину:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$$

Фактично кажучи, норма - це узагальнення довжини від початку. В нашому випадку початок грає роль  $\vec{0}$ .

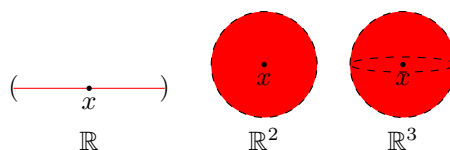
А ось відстань між двома векторами описується таким чином:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}$$

Решта означень будуть абсолютно аналогічними, просто тепер буде випадок з векторами.

**Definition 6.1.2**  $\varepsilon$ -околом точки  $\vec{x}$  будемо називати таку множину:

$$U_\varepsilon(\vec{x}) = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon\}$$



Її ще також називають **відкритим шаром** з радіусом  $\varepsilon$  в центрі т.  $\vec{x}$  та позначається як  $B(\vec{x}, \varepsilon)$ .

**Definition 6.1.3** Задамо множину  $A \subset \mathbb{R}^m$  та елемент  $\vec{a} \in A$ .

Точку  $\vec{a}$  називають **внутрішньою**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{a}) \subset A$$

А множина  $A$  називається **відкритою**, якщо кожна її точка - внутрішня.

**Definition 6.1.4** Задамо множину  $A \subset \mathbb{R}^m$  та елемент  $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ .

Точку  $\vec{a}$  називають **граничною** множини  $A$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{a} : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon$$

А множина  $A$  називається **замкненою**, якщо вона містить всі граничні точки.

**Definition 6.1.5** Задано множину  $A \subset \mathbb{R}^m$  та т.  $\vec{x} \in A$ .

Точка  $\vec{x}$  називається **ізолюваною**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A = \{\vec{x}\}$$

Також решта тверджень будуть схожі на ті твердження, що були при топології  $\mathbb{R}$ . Тому доводити я повторно не буду, просто залишу як нагадування.

**Proposition 6.1.6** Якщо  $\{A_\lambda\}$  - сім'я злічених відкритих підмножин, то  $\bigcup_\lambda A_\lambda$  - відкрита.

**Proposition 6.1.7**  $\vec{a}$  - гранична точка  $A \subset \mathbb{R}^m \iff \forall \varepsilon > 0 : A \cap U_\varepsilon(\vec{a})$  - нескінченна множина.

**Proposition 6.1.8**  $A$  - відкрита множина  $\iff A^c$  - замкнена множина.

**Proposition 6.1.9** Якщо  $\{A_\lambda\}$  - сім'я злічених замкнених підмножин, то  $\bigcap_\lambda A_\lambda$  - замкнена.

**Proposition 6.1.10** Точка  $\vec{x} \in A$  - ізолювана  $\iff \vec{x}$  - не гранична для  $A$ .

**Proposition 6.1.11**  $\mathbb{R}^m, \emptyset$  - одночасно відкриті та замкнені множини.

**Proposition 6.1.12** Відкритий шар  $B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$  є дійсно відкритим. Замкнений шар  $B[\vec{a}, r] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}$  є дійсно замкненим.

**Proof.**

Нехай  $\vec{x} \in B(\vec{a}, r) \implies \|\vec{x} - \vec{a}\| < r$ . Встановимо  $\varepsilon = r - \|\vec{x} - \vec{a}\|$ .

Тоді  $\vec{y} \in U_\varepsilon(\vec{x}) \implies \|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon \implies \|\vec{y} - \vec{a}\| = \|\vec{y} - \vec{x} + \vec{x} - \vec{a}\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon + \|\vec{x} - \vec{a}\| = \varepsilon \implies \vec{y} \in B(\vec{a}, r)$ .

Отже,  $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset B(\vec{a}, r)$ , так для кожної т.  $\vec{x} \in B(\vec{a}, r)$ . А тому множина  $B(\vec{a}, r)$  - відкрита.

$B[\vec{a}, r] = \mathbb{R}^m \setminus B(\vec{a}, r) = \mathbb{R}^m \cap B^c(\vec{a}, r)$  - обидві множини є замкненими. Тому їхній перетин - замкнена. ■

## 6.2 Границя послідовності

**Definition 6.2.1** Вектор  $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$  називається **границею послідовності** векторів  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| < \varepsilon$$

Позначення:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$ .

**Theorem 6.2.2** Для послідовності  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a} \iff$

$\iff$  для всіх координат послідовності  $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$  існують  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)} = a_j, j = \overline{1, m}$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| < \varepsilon$ .

У нас границя визначається вектором  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ . Тоді  $\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2}$

$\implies \forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)} - a_j| = \sqrt{(a_j^{(n)} - a_j)^2} < \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2} < \varepsilon$ .

Отже,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)} = a_j$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\forall j = \overline{1, m} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)} = a_j$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |a_j^{(n)} - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ .

$\implies \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$ .

Отже,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$ . ■

**Definition 6.2.3** Послідовність  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| < \varepsilon$$

**Theorem 6.2.4 Критерій Коші**

$\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  - збіжна  $\iff \{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  - фундаментальна.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  - збіжна, тобто  $\forall j = \overline{1, m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$  - збіжні.

Тоді всі вони - фундаментальні за критерієм Коші матана  $\mathbb{R}$ , тобто

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_j : \forall n, k \geq N_j : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

$$\implies \exists N = \max\{N_1, \dots, N_m\} : \forall n, k \geq N :$$

$$\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1^{(k)})^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m^{(k)})^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$$

Отже, наша послідовність - фундаментальна.

$\Leftarrow$  Дано:  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  - фундаментальна, тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| < \varepsilon$ .

Тоді  $\forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \varepsilon$  (зрозуміло), тобто  $\forall j = \overline{1, m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$  - фундаментальні.

Отже, вони всі - збіжні, а тому  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  - збіжна. ■

**Definition 6.2.5** Послідовність  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  називається **обмеженою**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$$

**Definition 6.2.6 Підпослідовність** послідовності  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  називається послідовність  $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$ , де  $\{n_l, l \geq 1\}$  - строго зростаюча послідовність в  $\mathbb{N}$ .

**Theorem 6.2.7 Теорема Больцано-Вейєрштраса**

Будь-яка обмежена послідовність векторів має збіжну підпослідовність векторів.

**Proof.**

Маємо обмежену послідовність  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ , тобто  $\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$

Тоді кожна координата є обмеженою, оскільки  $\forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)}| \leq \sqrt{|a_1^{(n)}|^2 + \dots + |a_m^{(n)}|^2} \leq C$ .

Тобто всі послідовності  $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$  - обмежені.

Розглянемо  $\{a_1^{(n)}, n \geq 1\}$  - обмежена. Тоді існує збіжна підпослідовність  $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$ .

Розглянемо підпослідовність  $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$ . Вона також є обмеженою, тому всі координатні послідовності - обмежені.

Розглянемо  $\{a_2^{(n_l)}, l \geq 1\}$  - обмежена. Тоді існує збіжна підпослідовність  $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ .

Оскільки підпослідовність  $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$  - збіжна, то збіжною буде й підпослідовність

$\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ .

Розглянемо підпослідовність  $\{\vec{a}^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$  - за аналогічними міркуваннями, теж обмежена.

Розглянемо підпослідовність  $\{a_3^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$  - обмежена. Тоді існує збіжна підпослідовність

$\{a_3^{(n_{l_{k_p})}}, p \geq 1\}$ .

Оскільки підпослідовності  $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ ,  $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$  - збіжні, то збіжними будуть підпослідовності

$\{a_1^{(n_{l_{k_p})}}, p \geq 1\}$ ,  $\{a_2^{(n_{l_{k_p})}}, p \geq 1\}$ .

⋮

Після  $m$  кроків отримаємо підпослідовність  $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$ , у якій всі координатні послідовності є збіжними. Тоді  $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$  - збіжна. ■

**Theorem 6.2.8** Задано множину  $A \subset \mathbb{R}^m$ .

$\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$  гранична точка для  $A \iff \exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\vec{x}^0$  - гранична точка для  $A$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$  - нескінченна.

Зафіксуємо  $\varepsilon = \frac{1}{n} \implies \forall \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \frac{1}{n}$ . Тоді  $\forall j = \overline{1, m} : |x_j^{(n)} - x_j^0| < \frac{1}{n}$ .



За теоремою про 2 поліцаїв, отримаємо:  $\forall j = \overline{1, m} : x_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_j^0$ .

Із покоординатної збіжності випливає, що  $\vec{x}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{x}^0$  для послідовності  $\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\}$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$ . Тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq N : \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$  - тобто нескінченна  $\Rightarrow \vec{x}^0$  - гранична точка. ■

**Proposition 6.2.9** Задані дві послідовності  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}, \{\vec{b}^{(n)}, n \geq 1\}$ , такі, що

$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}, \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}^{(n)} = \vec{b}$ . Тоді:

- 1)  $\forall c \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} c\vec{a}^{(n)} = c \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)}$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}^{(n)} + \vec{b}^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}^{(n)}$ ;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}^{(n)} \right)$ .

**Proof.**

1), 2) випливає з властивостей границь в  $\mathbb{R}$ , якщо розглянути покоординатну збіжність.

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^{(n)}b_1^{(n)} + \dots + a_m^{(n)}b_m^{(n)}) = a_1b_1 + \dots + a_mb_m = (\vec{a}, \vec{b}) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}^{(n)} \right)$ . ■

**Example 6.2.10** Розглянемо  $\vec{x}^{(n)} = \left( \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \frac{n-1}{n} \quad \frac{2n^2-1}{n^2} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^T$  - послідовність

векторів в  $\mathbb{R}^4$ . Обчислимо її границю.

Ми можемо обчислити покоординатно, згідно з теоріями:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{n^2} = 2.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_4^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Таким чином,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \frac{n-1}{n} \quad \frac{2n^2-1}{n^2} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^T = (0 \quad 1 \quad 2 \quad e)^T$ .

### 6.3 Функція від декількох змінних. Границя функції

Ми будемо розглядати функції вигляду  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $A \subset \mathbb{R}^m$ . Тобто ця функція має  $m$  аргументів, а повертає деяке дійсне число.

**Example 6.3.1** Розглянемо такі приклади:

1. Маємо функцію  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , що задана як  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ;

2. Маємо функцію  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , що задана як  $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m) = x_1x_2^2 \dots x_m^m$ .

**Definition 6.3.2** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$  - гранична точка для  $A$ .

Число  $a$  називається **границею функції**  $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$  в т.  $\vec{x}^0$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - a| < \varepsilon - \text{def. Коші}$$

$$\forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}^{(n)}) = a - \text{def. Гейне}$$

Позначення:  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) = a$ .

**Theorem 6.3.3** Означення Коші  $\Leftrightarrow$  Означення Гейне.

Доведення аналогічне як в матані  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 6.3.4 Арифметичні властивості**

Задані функції  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$  - гранична точка для  $A$ . Відомо, що

$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) = a, \exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} g(\vec{x}) = b$ . Тоді:

- 1)  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} cf(\vec{x}) = ca, \forall c \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = a + b$ ;
- 3)  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x})g(\vec{x}) = ab$ ;
- 4)  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{a}{b}$  при  $b \neq 0$ .

Всі вони випливають із арифметичних послідовностей та означення Гейне.

**Theorem 6.3.5 Критерій Коші**

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$  - гранична точка для  $A$ .

$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A : \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \varepsilon$ .

Доведення аналогічне як в матані  $\mathbb{R}$ .

**Example 6.3.6** Обчислити  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \left( \frac{y}{x} + \cos(xy) \right)$ . Можна позначати це інакше:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow \pi}} \left( \frac{y}{x} + \cos(xy) \right)$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \left( \frac{y}{x} + \cos(xy) \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \frac{y}{x} + \lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \cos(xy) = \frac{\pi}{1} + \cos \pi = \pi - 1.$$

**Theorem 6.3.7 Границя в полярних координатах**

Задано функцію  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Припустимо, що  $f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = F_1(\rho)F_2(\varphi)$ , причому  $\lim_{\rho \rightarrow 0} F_1(\rho) = 0$

та  $F_2(\varphi)$  - обмежена. Тоді  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ .

**Proof.**

Маємо  $\lim_{\rho \rightarrow 0} F_1(\rho) = 0 \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \rho : |\rho| < \delta \implies |F_1(\rho)| < \varepsilon$ .

Також  $F_2$  - обмежена, тобто  $\exists M > 0 : \forall \varphi : |F_2(\varphi)| < M$ .

Нехай  $\varepsilon > 0$ . Тоді існує таке  $\delta > 0$ , що  $\forall (x,y)$ , якщо  $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2} = |\rho| < \delta$ , то звідси  $|f(x,y)| = |f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)| = |F_1(\rho)| |F_2(\varphi)| < M\varepsilon$ .

Таким чином, дійсно,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ . ■

**Example 6.3.8** Обчислити  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ .

Маємо  $x = \rho \cos \varphi$  та  $y = \rho \sin \varphi$ . Тоді функція  $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\rho^2} = \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$ .

Ми змогли розбити на функції  $F_1(\rho) = \rho^2 \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$  та  $F_2(\varphi) = \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$  - обмежена, бо  $|F_2(\varphi)| \leq 1$ .

Таким чином,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = 0$ .

**Remark 6.3.9** Якщо так станеться, що для двох різних кутів  $\theta$  при  $\rho \rightarrow 0$  ми отримаємо два різних ліміта, то тоді  $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ .

**Definition 6.3.10** Число  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$  називається **ітераційною границею**, якщо  $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = g(y)$ .

Аналогічно визначається  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$ .

Останнє дається для загального знання, таке ми точно використовувати не будемо. Тут надто багато плутанини з ними.

**Example 6.3.11** Маємо функцію  $f(x,y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$ .

Якщо шукати  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ , то вона не існує, тому що при фіксованому  $x$  ми маємо порахувати

границю від  $\sin \frac{1}{y}$ , якого не існує. Також не існує  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$  за аналогічними міркуваннями.

Проте! Подвійна границя  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0$ . Дійсно,

$$\left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq \left| x \sin \frac{1}{y} \right| + \left| y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon.$$

Остання оцінка отримана в силу  $\|(x, y)\| < \delta$ , кладемо  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  - границя доведена.

**Example 6.3.12** Маємо функцію  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Проте! Подвійної границі  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$  не існує. Дійсно, якщо  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ , то тоді

$$f(x, y) = \frac{\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

## 6.4 Неперервність функції

**Definition 6.4.1** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - гранична точка.

Функція  $f$  називається **неперервною в т.  $\vec{x}^0$** , якщо  $\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0)$ . В будь-якій ізольованій точці  $\vec{x}^0$  функція  $f$  також неперервна, тому я сразу даю таке означення через ліміт.

Функція  $f$  називається **неперервною на множині  $A$** , якщо в  $\forall \vec{x} \in A : f$  - неперервна.

**Proposition 6.4.2** Задані функції  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - гранична точка. Відомо, що  $f, g$  - неперервні в т.  $\vec{x}^0$ . Тоді:

- 1)  $cf$  - неперервна в т.  $\vec{x}^0, \forall c \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $f + g$  - неперервна в т.  $\vec{x}^0$ ;
- 3)  $fg$  - неперервна в т.  $\vec{x}^0$ ;
- 4)  $\frac{f}{g}$  - неперервна в т.  $\vec{x}^0$ , якщо  $g(\vec{x}^0) \neq 0$ .

*Впливають з властивостей границь функцій та неперервності.*

### Theorem 6.4.3 Теорема Вейєрштраса 1, 2

Задано множину  $A$  - замкнена, обмежена та функція  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  - неперервна на  $A$ . Тоді:

1.  $f$  - обмежена на  $A$ ;
2.  $\exists \begin{cases} \vec{x}^* \in A : f(\vec{x}^*) = \max_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \\ \vec{x}_* \in A : f(\vec{x}_*) = \min_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \end{cases}$ .

*Доведення аналогічне як в матані  $\mathbb{R}$ .*

**Theorem 6.4.4** Наступні функції є неперервними на своїй множині  $A$ :

- 1)  $f(\vec{x}) = \text{const}$  - константа,  $A = \mathbb{R}^m$ ;
- 2)  $f(\vec{x}) = x_j, j = \overline{1, m}$  - координата,  $A = \mathbb{R}^m$ ;
- 3)  $P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n_1 \\ 0 \leq k_2 \leq n_2 \\ \dots \\ 0 \leq k_m \leq n_m}} a_{k_1 k_2 \dots k_m} \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$  - многочлен від  $m$  змінних,  $A = \mathbb{R}^m$ ;
- 4)  $R(x_1, \dots, x_m) = \frac{P(x_1, \dots, x_m)}{Q(x_1, \dots, x_m)}$  - раціональна функція від  $m$  змінних,  $A = \mathbb{R}^m \setminus \{\vec{x} : Q(\vec{x}) = 0\}$ .

**Proof.**

1) Все зрозуміло.

2)  $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)| = |x_j - x_j^0| < \varepsilon$ , тому встановлюється  $\delta = \varepsilon$ .

3) Безпосередньо випливає з **Prp. ?4.2.** як сума та добуток функцій 1), 2).

4) Безпосередньо випливає з **Prp ?4.2.** як частка двох функцій 3). ■

**Definition 6.4.5** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Функція  $f$  називається **рівномірно неперервною** на множині  $A$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A : \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \varepsilon$$

**Theorem 6.4.6** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  - рівномірно неперервна на  $A$  - обмежена, замкнена. Тоді вона є неперервною на  $A$ .  
*Доведення аналогічне як в  $\mathbb{R}$ .*

**Theorem 6.4.7 Теорема Кантора**

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $A$  - замкнена, обмежена.

Відомо, що  $f$  - неперервна на  $A$ . Тоді вона є рівномірно неперервною на  $A$ .

*Доведення аналогічне як в матані  $\mathbb{R}$ .*

## 6.5 Границя та неперервність векторнозначної функції

Ми будемо розглядати вектор-функції вигляду  $\vec{a} : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ , де  $A \subset \mathbb{R}$ . Тобто маємо таку ситуацію:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_k(t) \end{pmatrix}.$$

**Definition 6.5.1** Задано функцію  $\vec{a} : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $t_0 \in \mathbb{R}$  - гранична точка для  $A$ .

Вектор  $\vec{u}$  називається **границею вектор-функції  $\vec{a}(t)$  в т.  $t_0$** , якщо

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t \in A : t \neq t_0 : |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\vec{a}(t) - \vec{u}\| < \varepsilon - \text{def. Коші} \\ \forall \{t_n, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : t_n \neq t_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}(t_n) = \vec{u} - \text{def. Гейне} \end{aligned}$$

Позначення:  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) = \vec{u}$ .

**Theorem 6.5.2** Означення Коші  $\iff$  Означення Гейне

*Все абсолютно аналогічно.*

**Remark 6.5.3** Оскільки прямування йде за дійсною множиною, то ми можемо визначити **границю зліва та справа**. Тут все зрозуміло, як виглядатиме означення.

**Proposition 6.5.4** Задано функцію  $\vec{a} : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $t_0 \in \mathbb{R}$  - гранична точка для  $A$ .

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) = \vec{u} \iff \forall j = \overline{1, k} : \exists \lim_{t \rightarrow t_0} a_j(t) = u_j.$$

*Впливає із означення Гейне та покоординатної збіжності.*

**Proposition 6.5.5 Арифметичні властивості**

Задані функції  $\vec{a}, \vec{b} : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $t_0 \in \mathbb{R}$  - гранична точка для  $A$ . Відомо, що

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) = \vec{u}, \exists \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{b}(t) = \vec{v}. \text{ Тоді:}$$

- 1)  $\lim_{t \rightarrow t_0} c\vec{a}(t) = c\vec{u}, \forall c \in \mathbb{R};$
- 2)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{a}(t) + \vec{b}(t)) = \vec{u} + \vec{v};$
- 3)  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{u}, \vec{v}).$

*Всі вони випливають із векторних послідовностей та означення Гейне.*

**Example 6.5.6** Знайти границю  $\lim_{t \rightarrow 0+0} \begin{pmatrix} \frac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T$ .

За одним твердженням, ми можемо покоординатно шукати границі:

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\sin 2t}{t} = 2 \quad \lim_{t \rightarrow 0+0} t^t = 1.$$

$$\text{Отже, } \lim_{t \rightarrow 0+0} \begin{pmatrix} \frac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T = (2 \quad 1)^T.$$

**Definition 6.5.7** Задано функцію  $\vec{a} : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $t_0 \in A$  - гранична точка.

Вектор-функція  $\vec{a}$  називається **неперервною в т.  $t_0$** , якщо  $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}(t_0)$ . В будь-якій ізольованій

точці  $t_0$  вектор-функція  $\vec{a}$  також неперервна, тому я сразу даю таке означення через ліміт.

Вектор-функція  $\vec{a}$  називається **неперервною на множині  $A$** , якщо  $\forall t \in A : \vec{a}$  - неперервна.

## 6.6 Крива в $\mathbb{R}^m$

**Definition 6.6.1 Кривою в  $\mathbb{R}^m$**  називають множину значень вектор-функції:  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , причому  $\vec{r}$  - неперервна на  $[a, b]$ :

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$$

**Definition 6.6.2** Крива  $\Gamma$  називається **простою**, якщо

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \implies t_1 = t_2 \text{ або } \{t_1, t_2\} = \{a, b\}$$

Крива  $\Gamma$  називається **замкнутою**, якщо  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ .

Просту та замкнену криву називають **жордановою**.

## 7 Диференційованість

### 7.1 Для функції із багатьма змінними

**Definition 7.1.1** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Функція  $f$  називається **диференційованою в т.  $\vec{x}^0$** , якщо

$$\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R} : f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m + o(\|\Delta\vec{x}\|)_{\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}}$$

Тобто диференційованість означає, що поверхня навколо т.  $\vec{x}$  дуже схожа на площину, що проходить через т.  $\vec{x}$ .

**Proposition 7.1.2** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Функція  $f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ . Тоді вона неперервна в т.  $\vec{x}^0$ .

**Proof.**

$f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , тобто  $f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m + o(\|\Delta\vec{x}\|)_{\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}}$ .

Або можна це записати інакше:

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1(x_1 - x_1^0) + \dots + L_m(x_m - x_m^0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|) \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)) \stackrel{\square}{=} 0$$

Всі дужки прямують по координатно до нуля,  $o$ -маленьке також, в силу н.м.

$\stackrel{\square}{=} 0 \implies f$  - неперервна в т.  $\vec{x}^0$ . ■

**Definition 7.1.3** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

**Частковою похідною функції  $f$  за змінною  $x_j$  в т.  $\vec{x}^0$**  називають величину:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j}$$

Якщо уважно придивитись на означення, то, насправді, ми просто підставили  $x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0$  та отримали функцію  $g(x_j) = f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0)$  - функція від одного аргументу  $x_j$  - та обчислили похідну цієї функції в т.  $x_j^0$ . Отже,

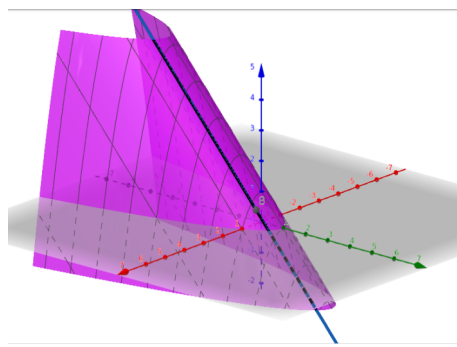
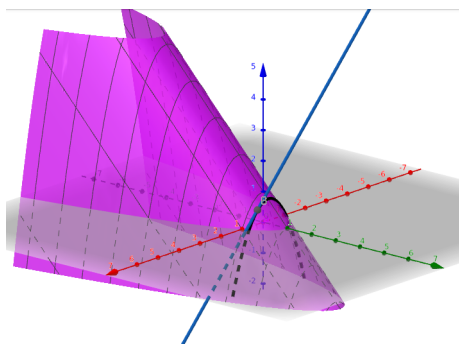
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = g'(x_j^0)$$

**Example 7.1.4** Маємо функцію  $f(x, y) = 1 - x^2 - y$ . Знайдемо всі її часткові похідні.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

Сенс  $\frac{\partial f}{\partial x}$  - знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь  $OX$ .

Аналогічно  $\frac{\partial f}{\partial y}$  - знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь  $OY$ .



Таких дотичних прямих існують безліч, але про це згодом.

**Proposition 7.1.5 Необхідна умова диференційованості**

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Тоді вона має часткові похідні в т.  $\vec{x}^0$ , причому  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = L_j$ .

**Proof.**

$f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , тоді  $\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R}$  :

$$f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1 \Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + o(\|\Delta \vec{x}\|), \Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}.$$

У частковому випадку, встановити можна  $\Delta \vec{x} = (0 \dots \Delta x_j \dots 0)^T$ .

$$\text{Тоді } \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j} \stackrel{f - \text{диф.}}{=} \frac{\Delta x_j}{\Delta x_j}.$$

$$= \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{L_1 \cdot 0 + \dots + L_j \Delta x_j + \dots + L_m \cdot 0 + o(|\Delta x_j|)}{\Delta x_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{L_j \Delta x_j + o(\Delta x_j)}{\Delta x_j} = L_j. \quad \blacksquare$$

**Remark 7.1.6** У зворотньому напрямку це не завжди вірно.

**Example 7.1.7** Маємо функцію  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ . Розглянемо цю функцію в околі т.  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0.$$

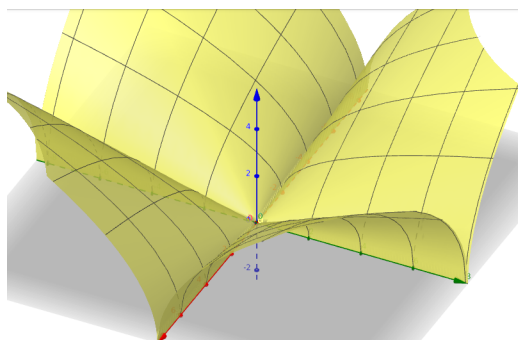
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Тобто в т.  $(x_0, y_0)$  функція має часткові похідні. Проте виявляється, що в  $(x_0, y_0)$  вона - не диференційована.

Дійсно,

$$f(\Delta x, \Delta y) = 0\Delta x + 0\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \text{ тобто}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \stackrel{\text{полярна заміна}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{|\cos \varphi \sin \varphi|} - \text{ не існує, тому рівність вище не вірна.}$$



Можливо виникне питання, а чи існують інші числа  $(L_1, L_2) \neq (0, 0)$ . Ні. Це впливає з необхідної умови диференційованості.

Виникає тоді інше питання, а коли ми можемо гарантувати диференційованість через існування похідних.

**Theorem 7.1.8 Достатня умова диференційованості**

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Відомо, що в деякому околі т.  $\vec{x}^0$  існують всі часткові похідні в околі т.  $\vec{x}^0$ , які неперервні в т.  $\vec{x}^0$ . Тоді  $f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ .

**Proof.**

Ми будемо доводити, коли  $m = 2$ . Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа

Отже, дано  $f(x, y)$  та в околі т.  $(x_0, y_0)$  існують часткові похідні  $\frac{\partial f}{\partial x}$  та  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , які неперервні в  $(x_0, y_0)$ .

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \stackrel{(\equiv)}{=}$$

Позначу  $h(t) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + t)$ ,  $t \in [0, \Delta y]$ . Тоді  $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = h(\Delta y) - h(0)$ .

$h$  - диференційована на  $[0, \Delta y]$ , оскільки існує  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , яка неперервна. А тому  $h \in C([0, \Delta y])$ . Тоді за

Лагранжом:

$$h(\Delta y) - h(0) = h'(c_1)\Delta y, c_1 \in (0, y)$$

$$h'(t) = f'_t(x_0 + \Delta x, y_0 + t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + t)$$

$$\implies h(\Delta y) - h(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y.$$

Аналогічно  $g(s) = f(x_0 + s, y_0)$ ,  $s \in [0, \Delta x]$ . Тоді  $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = g(\Delta x) - g(0) \stackrel{\text{Лагранжа}}{=} g'(c_2)\Delta x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x$ ,  $c_2 \in (0, \Delta x)$ .

Повертаємось до нашої рівності.

$$\boxed{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x$$

Лишилось довести, що

$$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) = o(\|(\Delta x, \Delta y)\|).$$

Маємо:

$$\begin{aligned} & (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) = \\ & = \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x \right) - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) = \\ & = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \Delta x + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \Delta y \end{aligned}$$

Якщо  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ , то звідси  $c_1 \rightarrow 0, c_2 \rightarrow 0$  та за умовою того, що часткові похідні є неперервними, маємо:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \stackrel{\text{позн}}{=} \alpha \rightarrow 0 \\ & \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \stackrel{\text{позн}}{=} \beta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Далі:

$$\left| \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \left| \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right| \rightarrow 0 \implies \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0.$$

Остаточно отримуємо:

$$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) = o(\|(\Delta x, \Delta y)\|).$$

■

**Definition 7.1.9** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

**Похідною функції  $f$  в т.  $\vec{x}^0$**  називається ковектор

$$f'(\vec{x}^0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) (\vec{x}^0)$$

Використовуючи нове означення, умова диференційованості переписється тоді абсолютно звичним чином:

$$f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|), \Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}.$$

**Proposition 7.1.10** Задані функції  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Відомо, що  $f, g$  - диференційовані в т.  $\vec{x}^0$ . Тоді:

- 1)  $\alpha f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , похідна  $(\alpha f)'(\vec{x}^0) = \alpha f'(\vec{x}^0)$ ;
- 2)  $f + g$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , похідна  $(f + g)'(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)$ ;
- 3)  $fg$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , похідна  $(fg)'(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) + f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)$ .

**Proof.**

1) *Зрозуміло.*

$$\begin{aligned} & 2) (f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) + g(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x})) - (f(\vec{x}^0) + g(\vec{x}^0)) = (f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}^0)) + (g(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - g(\vec{x}^0)) = \\ & = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|) + g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|) = (f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|), \Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}. \end{aligned}$$

$$3) f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x})g(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) =$$



$$= (f(\vec{x}^0) + f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)) \cdot (g(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) \quad \square$$

Після розкриття дужок ми залишимо лише доданки  $(f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x}$  та  $(g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x}$ .

Ось чому:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|) &= o(\|\Delta\vec{x}\|) & g(\vec{x}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|) &= o(\|\Delta\vec{x}\|) \\ (f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}) \cdot (g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}) &= o(\|\Delta\vec{x}\|), \text{ тому що, розписавши, побачимо, що } \Delta x_i \Delta x_j = o(\|\Delta\vec{x}\|) \\ &(\text{зрозуміло}) \\ (f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x})o(\|\Delta\vec{x}\|) &= o(\|\Delta\vec{x}\|) & (g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x})o(\|\Delta\vec{x}\|) &= o(\|\Delta\vec{x}\|), \text{ тому що, розписавши,} \\ &\text{побачимо } \Delta x_j o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|) \\ (o(\|\Delta\vec{x}\|))^2 &= o(\|\Delta\vec{x}\|) \end{aligned}$$

Повертаємось до рівності:

$$\square (f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} + (g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|). \quad \blacksquare$$

**Definition 7.1.11** Задано функцію  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

**Диференціалом функції  $f(x)$  в т.  $\vec{x}^0$**  називається такий вираз:

$$df(\vec{x}^0, \Delta\vec{x}) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}$$

Як й раніше, аргумент  $\Delta\vec{x}$  опускають, а також позначають  $\Delta\vec{x} = \vec{dx}$ , тобто  $\Delta x_1 = dx_1, \dots, \Delta x_m = dx_m$ . Тоді маємо інший вигляд:

$$df(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \vec{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{x}^0) dx_m$$

**Example 7.1.12** Маємо функцію  $f(x, y) = 1 - x^2 - y$ . Ми вже знайшли  $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ , вони є неперервними в будь-якій точці.

Отже,  $f$  - диференційована будь-де. Знадемо тепер диференціал функції. Це дуже просто:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (-2x) dx - dy \stackrel{\text{або}}{=} (-2x \quad -1) \vec{dr}.$$

## 7.2 Для векторнозначних функцій

**Definition 7.2.1** Задано функцію  $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Вектор-функція  $\vec{f}$  називається **диференційованою в т.  $\vec{x}^0$** , якщо

$$\exists M \in Mat(m \times k) : \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) \quad \Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$$

Зараз дізнаємось, що це за матриця  $M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix}$  під час доведення твердження.

**Proposition 7.2.2** Задано функцію  $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

$\vec{f}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0 \iff f_1, \dots, f_k$  - диференційовані в т.  $\vec{x}^0$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\vec{f}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , тобто  $\exists M \in Mat(m \times k) : \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$ .  $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(\|\Delta\vec{x}\|) \\ \vdots \\ o(\|\Delta\vec{x}\|) \end{pmatrix}$$

Із цієї рівності випливає, що  $\forall j = \overline{1, k}$ :

$$f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f_j(\vec{x}^0) = M_{j1}\Delta x_1 + \dots + M_{jm}\Delta x_m + o(\|\Delta\vec{x}\|). \quad \Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$$

Це означає, що  $f_j$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ . Тоді звідси випливає, що:

$$M_{j1} = \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\vec{x}^0), \dots, M_{jm} = \frac{\partial f_j}{\partial x_m}(\vec{x}^0).$$

В результаті отримаємо ось такий вигляд матриці:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_k \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = J(x) = \vec{f}'(\vec{x}^0) - \text{матриця Якобі}$$

Матриця Якобі описує **похідну** вектор-функції  $\vec{f}$  в т.  $\vec{x}^0$ . А якщо матриця буде квадратною, то ми можемо обчислити  $\det \vec{f}'(\vec{x}^0)$  - **якобіан**.

$\Leftarrow$  Дано:  $f_1, \dots, f_k$  - диференційовані в т.  $\vec{x}^0$ . Хочемо довести, що

$\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) - M\Delta\vec{x} = o(\|\Delta\vec{x}\|)$ ,  $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$ , але це є правда, тому що:

$\forall j = \overline{1, k} : f_j - \text{диференційована} \implies f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f_j(\vec{x}^0) - f'_j(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} = o(\|\Delta\vec{x}\|)$ ,  $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$  - виконана покоординатна рівність. ■

**Proposition 7.2.3** Задано функцію  $\vec{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Відомо, що вектор-функція  $\vec{f}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ . Тоді вона неперервна в т.  $\vec{x}^0$ .

**Proof.**

Дійсно,  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (M(\vec{x} - \vec{x}^0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|)) = 0$ , оскільки виконується покоординатна границя. ■

**Proposition 7.2.4** Задані функції  $\vec{f}, \vec{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Відомо, що  $\vec{f}, \vec{g}$  - диференційовані в т.  $\vec{x}^0$ .

Тоді  $\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , похідна  $(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})'(\vec{x}^0) = \alpha\vec{f}'(\vec{x}^0) + \beta\vec{g}'(\vec{x}^0)$ .

Впливає з арифметики матриці. Ну тут зрозуміло.

**Example 7.2.5 Важливий**

Маємо вектор-функцію  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}$ . Знайдемо її похідну та якобіан.

$$\vec{f}'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \det \vec{f}'(\vec{x}^0) = \cos \varphi \rho \cos \varphi + \sin \varphi \rho \sin \varphi = \rho.$$

Ще знадобиться, коли будемо шукати подвійні інтеграли.

**Proposition 7.2.6** Задані функції  $\vec{f} : A \rightarrow B$  та  $\vec{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ , де  $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$ .

Відомо, що  $\vec{f}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$  та  $\vec{g}$  - диференційована в т.  $\vec{y}^0$ .

Тоді  $\vec{g} \circ \vec{f}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , похідна  $(\vec{g} \circ \vec{f})'(\vec{x}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)$ .

**Proof.**

$$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0)) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0) + \vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0)) = \\ = \vec{g}(\vec{y}^0 + \Delta\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\Delta\vec{y} + o(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{g}'(\vec{y}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|) + o(\|\Delta\vec{y}\|) \quad \square$$

Лишилось довести, що  $\vec{g}'(\vec{y}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|) + o(\|\Delta\vec{y}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$ , якщо  $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$ , але тут зрозуміло.

$$\square \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|). \quad \blacksquare$$

**Corollary 7.2.7** Задано функцію  $\vec{f} : A \rightarrow B$  та  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$ .

Відомо, що  $\vec{f}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$  та  $g$  - диференційована в т.  $\vec{y}^0$ .

Тоді  $\frac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(\vec{y}^0)\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(\vec{y}^0)\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_n}(\vec{y}^0)\frac{\partial f_n}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$ , виконано  $\forall j = \overline{1, m}$ .

**Example 7.2.8** Маємо функцію  $f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$ . Знайдемо часткові похідні за  $x, y$ .

Позначимо  $u(x, y) = xy, v(x, y) = \frac{x}{y}$ . Тоді маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{-x}{y^2}$$

## 7.3 Похідна за напрямком. Градієнт

**Definition 7.3.1** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. А також задано вектор  $\vec{l}$ , такий, що  $\|\vec{l}\| = 1$ . Її ще називають **напрямком**.

**Похідною функції  $f$  за напрямком  $\vec{l}$  в т.  $\vec{x}^0$**  називають величину

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t}$$

Як вже було зазначено, дотичних прямих буває дуже багато, тому ми й задаємо напрямком.

**Remark 7.3.2** Якщо всі координати вектора  $\vec{l}$  будуть нулевими, окрім  $l_j = 1$ , то  $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$ .

**Theorem 7.3.3** Задано функцію  $f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Тоді  $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \vec{l} = \frac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} l_m$ .

**Proof.**

$f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , тобто  $f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} t l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} t l_m + o(\|t\vec{l}\|)$ .

Тому  $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} t l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} t l_m + o(\|t\vec{l}\|)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} l_m$ .

■

**Example 7.3.4** Маємо функцію  $f(x, y) = 1 - x^2 - y$ . Знайти похідну за напрямком  $\vec{l} = (0.6, 0.8)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = -0.6 \cdot 2x - 0.8 \cdot 1 = -1.2x - 0.8.$$

**Definition 7.3.5** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Градiєнтом функції  $f$  в т.  $\vec{x}^0$  називають такий вектор

$$\text{grad } f(\vec{x}^0) \stackrel{\text{або}}{=} \nabla f(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}(\vec{x}^0)$$

Похідну функції  $f$  за напрямком  $\vec{l}$  в т.  $\vec{x}^0$  можна записати інакше:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = (\text{grad } f(\vec{x}^0), \vec{l}).$$

**Proposition 7.3.6**  $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0)$  приймає:

- max значення  $\iff \vec{l} \uparrow \uparrow \text{grad } f(\vec{x}^0)$ ;
- min значення,  $\iff \vec{l} \uparrow \downarrow \text{grad } f(\vec{x}^0)$ .

**Proof.**

Дійсно,  $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = (\text{grad } f(\vec{x}^0), \vec{l}) = \|\text{grad } f(\vec{x}^0)\| \|\vec{l}\| \cos \alpha = \|\text{grad } f(\vec{x}^0)\| \cos \alpha$ :

- max  $\iff \alpha = 0$ ;
- min  $\iff \alpha = \pi$ .

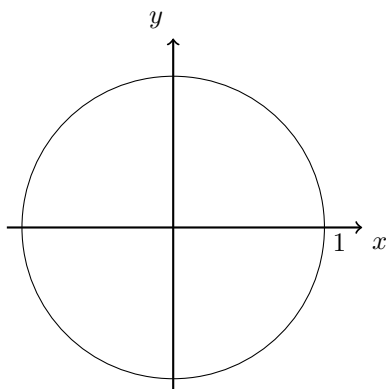
■

## 7.4 неявно задані функції

**Remark 7.4.1** Приклад для розуміння

Задано рівняння кола на площині  $\mathbb{R}^2$  - один з прикладів неявної функції:

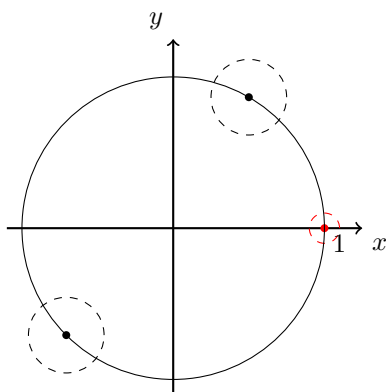
$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$



Зрозуміло, що це - не графік функції однієї змінної. Просто тому що кожному значенню  $x$  тут ставиться у відповідність два значення  $y$ .

Проте якщо розглядати деякий малий окіл т.  $(x_0, y_0)$ , то ми отримаємо деякий шматок малюнку, що й буде графіком функції. Зокрема в нашому випадку або  $y = \sqrt{1-x^2}$ , або  $y = -\sqrt{1-x^2}$ .

Проте існують певні точки, де цього зробити не можна - точки  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ . Як би ми не зменшували окіл цієї точки, там завжди кожного іксу два ігрика були б. Я цю точку позначил червоним кольором.



Саме тому з'явилась мотивація створити теорему, де через рівняння  $F(x, y) = 0$  ми можемо отримати  $y = f(x)$  в деякому околі т.  $(x_0, y_0)$  під деякими важливими умовами.

Важливо розуміти, що функція існує, проте явну формулу отримати не завжди вийде. Зокрема маємо неявну функцію  $y^5 + y^3 + y + x = 0$ . Щоб знати  $y = f(x)$ , треба розв'язати рівняння п'ятої степені, проте корені цього многочлена не можна виразити через формулу. І тим не менш, під деякими умовами, ми можемо знати функцію  $y = f(x)$ , просто без формули.

**Theorem 7.4.2** Задано неявну функцію  $F$  - неперервно-диференційована в околі т.  $(x_0, y_0)$ . Відомо, що виконуються такі умови:

- 1)  $F(x_0, y_0) = 0$ ;
- 2)  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тоді існує єдина функція  $f$  - неперервно-диференційована в меншому околі т.  $x_0$ , причому  $F(x, y) =$

$$0 \iff y = f(x), \text{ а також } f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\big|_{(x, f(x))}}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\big|_{(x, f(x))}}.$$

Додатково, якщо  $F \in C^{(m)}$ , то  $f \in C^{(m)}$ .

**Example 7.4.3** Зокрема для  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  маємо, що вона - неперервна,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \text{ - диференційована.}$$

$$\text{Причому } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \iff y \neq 0.$$

Тому за попередньою теоремою, дійсно, існує функція  $y = f(x)$ , але найголовніше:  $f'(x) = -\frac{x}{y}$ .

**Theorem 7.4.4** Задано неявну вектор-функцію  $\vec{F}$  - неперервно-диференційована в околі т.  $(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \in \mathbb{R}^{m+k}$ . Відомо, що виконуються такі умови:

- 1)  $\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = \vec{0}$ ;
- 2)  $\det \vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \neq 0$ . Інакше кажучи, існує оборотна матриця.

Тоді існує єдина вектор-функція  $\vec{f}$  - неперервно-диференційована в меншому околі т.  $\vec{x}^0$ , причому

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}), \text{ а також } \vec{f}'(\vec{x}) = -(\vec{F}'_y(\vec{x}, \vec{y}))^{-1} \cdot \vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y})\big|_{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))}.$$

Без доведення.

**Example 7.4.5** Задано вектор-функцію  $\vec{F}$  таким чином: 
$$\begin{cases} x^2 + y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 = F_1(x, y_1, y_2) = 0 \\ x + y_1 + y_2 - 2 = F_2(x, y_1, y_2) = 0 \end{cases}.$$

Маємо  $\det \vec{F}'_y(x, y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2y_1 + y_2 \neq 0 \iff y_2 \neq -2y_1$ , а

тому й  $x \neq 2 + y_2$ .

Тоді враховуючи обмеження, існує вектор-функція  $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$ , але тепер знайдемо похідну. Маємо:

$$\vec{F}'_y = \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies (\vec{F}'_y)^{-1} = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'_x = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}' = -(\vec{F}'_y)^{-1} \vec{F}'_x = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 2x + y_2 \\ -2x + 2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x + y_2}{2y_1 + y_2} \\ \frac{2y_1 + y_2}{-2x + 2y_1} \end{pmatrix}.$$

## 7.5 Обернені функції

**Theorem 7.5.1** Задано вектор-функцію  $\vec{g} : U(\vec{y}^0) \rightarrow U(\vec{x}^0)$ , де  $\vec{x}^0 = \vec{g}(\vec{y}^0)$ . Відомо, що виконуються такі умови:

- 1)  $\vec{g}$  - неперервно диференційована;
- 2)  $\det \vec{g}'(\vec{y}^0) \neq 0$ .

Тоді існує вектор-функція  $\vec{f} : U(\vec{x}^0) \rightarrow U(\vec{y}^0)$ , причому:

- 1)  $\vec{f}$  - неперервно диференційована;
- 2)  $\vec{f}'(\vec{x}) = \vec{g}'(\vec{f}(\vec{x}))^{-1}$ .

*Вказівка: розглянути функцію  $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} - \vec{g}(\vec{y}) = \vec{0}$  та застосувати теорему про неявну вектор-функцію.*

## 7.6 Геометричне та алгебраїчне застосування

### 7.6.1 Дотична площина, нормальна пряма поверхні

Задамо функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A \subset \mathbb{R}^2$  - внутрішня точка. Встановимо таку поверхню:

$$\Pi = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$$

Площина в  $\mathbb{R}^3$ , що проходить через т.  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $z_0 = f(x_0, y_0)$ , задається таким рівнянням:

$$z = z_0 + K_1(x - x_0) + K_2(y - y_0) \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

**Definition 7.6.1** **Дотичною площиною** до поверхні  $\Pi$  в т.  $(x_0, y_0)$  називається площина в  $\mathbb{R}^3$ , що проходить через т.  $(x_0, y_0, z_0)$ , для якої виконана рівність

$$z - f(x, y) = o(\|(x - x_0, y - y_0)\|), (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

**Theorem 7.6.2** Поверхня  $\Pi$  має дотичну площину в т.  $(x_0, y_0) \iff f$  - диференційована в т.  $(x_0, y_0)$ . Причому  $K_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $K_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

*Доведення аналогічне, як в матані  $\mathbb{R}$ .*

Тоді дотична площина задається таким рівнянням:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

**Definition 7.6.3** **Нормальною прямою** до поверхні  $\Pi$  в т.  $(x_0, y_0)$  називається пряма в просторі, що проходить через т.  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $z_0 = f(x_0, y_0)$  та перпендикулярна до дотичної площини.

Вектор нормалі дотичної площини  $\vec{N} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$ . Це буде напрямним вектором для нормалі прямої. Тоді нормальна пряма задається таким рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

**Example 7.6.4** Задамо функцію  $f(x) = x^2 + y^2$ . Знайдемо дотичну площину та нормальну пряму в т.  $(1, -1)$ .

$$f(1, -1) = 2.$$

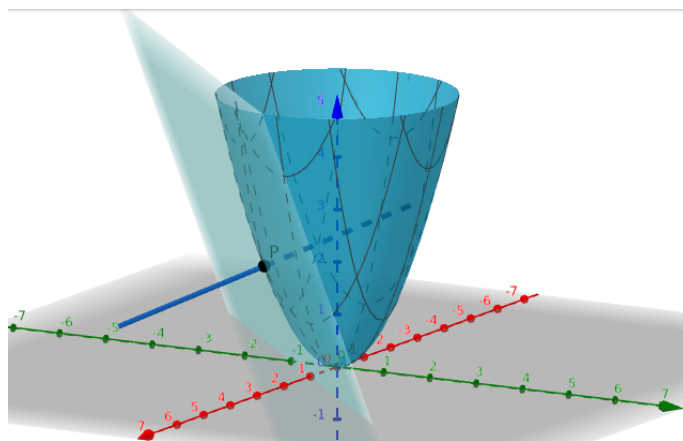
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 2x \Big|_{(1, -1)} = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 2y \Big|_{(1, -1)} = -2.$$

Всі часткові похідні в околі т.  $(1, -1)$  неперервні, а тому диференційовані. Отже, можемо отримати дотичну:

$$z - 2 = 2(x - 1) - 2(y + 1) \implies 2x - 2y - z = 2;$$

та нормаль:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 2}{-1}.$$



## 7.6.2 Дотична пряма, нормальна площина кривої

**Definition 7.6.5** Крива в просторі  $\mathbb{R}^3$  задається таким рівнянням

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in (a, b)$$

Прямою в просторі  $\mathbb{R}^3$  задається таким рівнянням

$$\begin{cases} x = sl_1 + x_0, l_1 \in \mathbb{R} \\ y = sl_2 + y_0, l_2 \in \mathbb{R} \\ z = sl_3 + z_0, l_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Definition 7.6.6** Дотичною прямою до кривої  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  називається пряма в просторі, що проходить через т.  $(x_0, y_0, z_0)$ , для якої виконана рівність

$$\begin{cases} x(t) - (x_0 + l_1(t - t_0)) = o(t - t_0) \\ y(t) - (y_0 + l_2(t - t_0)) = o(t - t_0) \\ z(t) - (z_0 + l_3(t - t_0)) = o(t - t_0) \end{cases}$$

**Theorem 7.6.7** Пряма  $\begin{cases} x = sl_1 + x_0 \\ y = sl_2 + y_0 \\ z = sl_3 + z_0 \end{cases}$  - дотична до кривої  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \iff$  крива - диференційована

в т.  $t_0$ , а також  $l_1 = x'(t_0), l_2 = y'(t_0), l_3 = z'(t_0)$ .

Вправа: довести

Тоді дотична пряма задається рівнянням:

$$\begin{cases} x = sx'(t_0) + x_0 \\ y = sy'(t_0) + y_0 \\ z = sz'(t_0) + z_0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

Напрямний вектор прямої  $\vec{l} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ . Тоді це буде нормальним вектором для нормальної площини. Нормальна площина задається таким рівнянням:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

**Example 7.6.8** Маємо криву  $\begin{cases} x = 2 \sin t \\ y = 2 \cos t \\ z = -\sin 2t \end{cases}$ , де параметр  $t \in [0, 2\pi]$ . Знайдемо дотичну пряму та

нормальну площину в  $t_0 = \frac{5\pi}{6}$ . Тобто в т.  $\left(-1, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

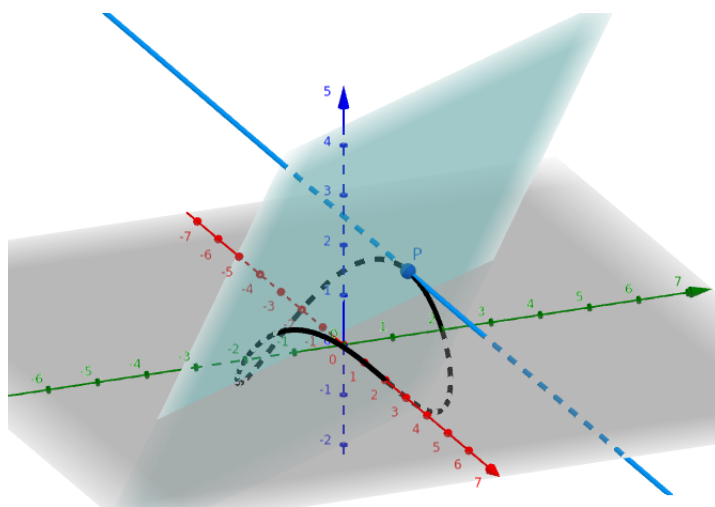
$$\begin{cases} x'(t_0) = 2 \cos t \Big|_{t=t_0} = \sqrt{3} \\ y'(t_0) = -2 \sin t \Big|_{t=t_0} = 1 \\ z'(t_0) = -2 \cos 2t \Big|_{t=t_0} = -1 \end{cases}.$$

Таким чином, маємо дотичну пряму:

$$\frac{x+1}{\sqrt{3}} = \frac{y-\sqrt{3}}{1} = \frac{z-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1};$$

та нормальну площину:

$$\sqrt{3}(x+1) + (y-\sqrt{3}) - \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$



### 7.6.3 Приблизне обчислення

$$z - f(\vec{x}) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|)$$

Якщо  $\vec{x}_0$  близький до  $\vec{x}$ , тобто  $\|\vec{x} - \vec{x}^0\| \ll 1$ , то тоді

$$f(\vec{x}) - z \approx 0$$

$$\Rightarrow f(\vec{x}) \approx z^0 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)(x_n - x_n^0)$$

## 7.7 Диференціювання та похідні старших порядків

**Definition 7.7.1** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Також  $f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ .

**Частковими похідними другого роду** від функції  $f$  в т.  $\vec{x}^0$  називається вираз:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}^0) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}^0)$$

**Example 7.7.2** Знайдемо всі часткові похідні другого порядку функції  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2 \implies \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y \implies \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16xy \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2 \end{cases}.$$

Можемо зауважити, що  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . Проте в загальному випадку це не так.

**Example 7.7.3** Розглянемо функцію  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Зосередимось лише на

знаходженні  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} -x \frac{y^4 - x^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\Delta x} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\Delta y} = -1$$

Таким чином,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

**Theorem 7.7.4** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Відомо, що  $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}), \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x})$  в околі т.  $\vec{x}^0$  та є неперервними в т.  $\vec{x}^0$ .

Тоді  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ .

**Proof.**

Ми будемо доводити, коли  $m = 2$ . Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа

Отже, дано  $f(x, y)$  та в околі т.  $(x_0, y_0)$  існують часткові похідні другого порядку  $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  які неперервні в  $(x_0, y_0)$ .

Розглянемо вираз  $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$ .

Покладемо функцію  $k(s) = f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0), s \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ . Тоді  $\Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0)$ .

$$k'(s) = (f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0))'_s = \frac{\partial f}{\partial s}(s, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial s}(s, y_0).$$

Оскільки нам відомі другі часткові похідні, то зрозуміло, що в нас існує  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ , причому в тому самому околі т.  $(x_0, y_0)$ . Тобто звідси  $k$  - диференційована на  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ , тоді за теоремою

Лагранжа,  $\exists \xi_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x) : \Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0) = k'(\xi_1)\Delta x = \left( \frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0) \right) \Delta x$ .

Покладемо функцію  $m(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t), t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$ . Тоді  $\Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x$ .

$$m'(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t) \right)'_t = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, t).$$

Похідна дійсно існує за умовою теореми, тобто  $m$  - диференційована на  $[y_0, y_0 + \Delta y]$ , тоді за теоремою

Лагранжа,  $\exists \eta_1 \in (y_0, y_0 + \Delta y) : \Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x = m'(\eta_1)\Delta y\Delta x = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1)\Delta y\Delta x$ .

Повернімось до виразу  $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$ , ми розглянемо її з іншої сторони.

Покладемо функцію  $p(t) = f(x_0 + \Delta x, t) - f(x_0, t), t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$ . Тоді  $\Delta = p(y_0 + \Delta y) - p(y_0)$ .



А далі я буду просто продовжувати рівність, міркування аналогічні, що пов'язані зі застосуванням теореми Лагранжа двічі:

$$\Delta = p(y_0 + \Delta y) - p(y_0) = p'(\eta_2)\Delta y = (f(x_0 + \Delta x, t) - f(x_0, t))'_t(\eta_2)\Delta y = \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x_0 + \Delta x, \eta_2) - \frac{\partial f}{\partial t}(x_0, \eta_2) \right) \Delta y \equiv$$

$$q(s) = \frac{\partial f}{\partial t}(s, \eta_2)$$

$$\equiv (q(x_0 + \Delta x) - q(x_0))\Delta y = q'(\xi_2)\Delta x\Delta y = \left( \frac{\partial f}{\partial t}(s, \eta_2) \right)'_s(\xi_2)\Delta x\Delta y = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(\xi_2, \eta_2)\Delta x\Delta y.$$

Зауважу, що  $\eta_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ ,  $\xi_2 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ .

$$\text{Отримали таку рівність: } \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1)\Delta y\Delta x = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(\xi_2, \eta_2)\Delta x\Delta y \implies \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(\xi_2, \eta_2).$$

Нарешті, за умовою задачі, другі часткові похідні є неперервними в т.  $(x_0, y_0)$ , тому далі одночасно прямуємо  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0 \implies \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ . Оскільки  $\xi_1, \xi_2 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ ,  $\eta_1, \eta_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ , то звідси  $\xi_1, \xi_2 \rightarrow x_0$  та  $\eta_1, \eta_2 \rightarrow y_0$ .

Остаточно отримаємо  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$  (літери  $s, t$  я замінив на  $x, y$ , результат не зміниться). ■

**Definition 7.7.5** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Функція  $f$  називається **двічі диференційованою в т.  $\vec{x}^0$** , якщо всі часткові похідні існують в околі т.  $\vec{x}^0$  та диференційовані в т.  $\vec{x}^0$ .

**Example 7.7.6** Маємо функцію  $z = x^2 + 2y^2 - 5xy$ . З'ясуємо, чи буде ця функція двічі диференційованою.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 5y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 5x$$

Усі отримані часткові похідні існують в будь-якому околі деякої точки.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -5$$

Отримані часткові похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за **Th.4.1.8.**,

$$\text{функція } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ - диференційована. } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -5 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$$

Отримані часткові похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за **Th.4.1.8.**,

$$\text{функція } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ - диференційована.}$$

Отже, за означенням,  $z$  - двічі диференційована функція.

**Proposition 7.7.7** Функція  $f$  двічі диференційована в т.  $\vec{x}^0 \iff \text{grad } f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ .

**Proof.**

Дійсно,  $f$  - двічі диференційована в т.  $\vec{x}^0 \iff \forall j = \overline{1, m} : \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0 \iff$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} \text{ - як вектор-функція - диференційована в т. } \vec{x}^0. \quad \blacksquare$$

Розпишемо диференційованість вектор-функції  $\text{grad } f$  в т.  $\vec{x}^0$  за означенням:

$$\text{grad } f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - \text{grad } f(\vec{x}^0) = M \Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|), \Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}.$$

$$\begin{aligned} \text{Звідси ми маємо, що } M &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = H(\vec{x}^0) = f''(\vec{x}^0) \text{ - матриця Гесе} \end{aligned}$$

Матриця Гесе описує **другу похідну** функції  $f$  в т.  $\vec{x}^0$  та одночасно **похідну** вектор-функції  $\text{grad } f$  в т.  $\vec{x}^0$ . Якщо матриця буде квадратною, то ми можемо обчислити  $\det f''(\vec{x}^0)$  - **гесіан**.

**Definition 7.7.8** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Також  $f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ .

**Другим диференціалом** функції  $f$  називають вираз:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = d(df(\vec{x}^0))$$

З'ясуємо, як цей вираз можна по-інакшому записати. Маємо:

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1\right) + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) = \\ &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_m\right) dx_1 + \dots + \\ &\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_m\right) dx_m = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} dx_m dx_1\right) + \dots + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} dx_1 dx_m + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} dx_m^2\right) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j. \end{aligned}$$

Отже, маємо іншу формулу для другого диференціалу в т.  $\vec{x}^0$ :

$$d^2 f(\vec{x}^0) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0) dx_i dx_j$$

Або це можна записати в "лінійно-алгебраїчному" вигляді:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 f(\vec{x}^0)$$

**Example 7.7.9** Знайдемо другий диференціал функції  $z = x^3 + 2y^2 - 5xy$ .

Ми вже шукали другі часткові похідні  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$   $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -5$   $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$ . Таким чином,  
 $d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = 6x dx^2 - 10 dx dy + 4 dy^2$ .

**Definition 7.7.10** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Також  $f$  -  $m$  разів диференційована в т.  $\vec{x}^0$ .

**Частковим похідним**  $m+1$ -го порядку в т.  $\vec{x}^0$  називають похідну:

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_{m+1}}} \left( \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}} \right) (\vec{x}^0) = \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_{m+1}} \partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}} (\vec{x}^0)$$

$$j_1 + j_2 + \dots + j_m + j_{m+1} = m + 1$$

**Remark 7.7.11** Що таке **похідна**  $m$ -го порядку, визначати не буду, бо ще рано.

## 7.8 Формула Тейлора

Зробимо певні позначення:

$$[\vec{x}^0, \vec{x}] = \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in [0, 1]\}$$

$$(\vec{x}^0, \vec{x}) = \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in (0, 1)\}$$

**Theorem 7.8.1** Теорема Тейлора (у формі Лагранжа)

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Відомо, що  $f$  - диференційована  $n+1$  разів в околі т.  $\vec{x}^0$ . Тоді  $\exists \vec{\xi} \in (\vec{x}^0, \vec{x})$  або  $(\vec{x}, \vec{x}^0)$ , для якого

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{f'(\vec{x}^0)}{1!} (\vec{x} - \vec{x}^0) + \frac{f''(\vec{x}^0)}{2!} (\vec{x} - \vec{x}^0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\vec{x}^0)}{n!} (\vec{x} - \vec{x}^0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\vec{\xi})}{(n+1)!} (\vec{x} - \vec{x}^0)^{n+1}$$

Під виразами  $f^{(k)}(\vec{x} - \vec{x}^0)^k$  я розумію як диференціал  $d^k f(\vec{x}^0)$ , що має свою формулу:

$$d^k f(\vec{x}^0) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(\vec{x}^0) \cdot dx_{j_1} \dots dx_{j_k}$$

Замість  $dx_{j_1} \dots dx_{j_k}$  можна писати  $(x_{j_1} - x_{j_1}^0) \dots (x_{j_k} - x_{j_k}^0)$ .

**Proof.**

Розглянемо функцію  $p(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$ , тут  $|t| \leq 1$  - функція від однієї змінної.

Знайдемо похідні від цієї функції:

$$\begin{aligned} p'(t) &= f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))'_t = (f(x_1 + t(x_1 - x_1^0), \dots, x_m + t(x_m - x_m^0)))'_t = (f(u_1, \dots, u_m))'_t = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u_1} (x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} (x_m - x_m^0) = \left( \frac{\partial f}{\partial u_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial u_m} \right) \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_m - x_m^0 \end{pmatrix} = \\ &= f'(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))(\vec{x} - \vec{x}^0) \\ p''(t) &= [f'(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0)]'_t \stackrel{\text{аналогічно}}{=} f''(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 \\ &\vdots \\ p^{(k)}(t) &= f^{(k)}(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))^k. \end{aligned}$$

Коротше, наша функція  $n+1$  разів диференційована на  $[0, 1]$ . Тому ми можемо розкласти формулу Тейлора як функцію з однією змінною.  $\exists \xi \in (0, 1)$ :

$$p(t) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}(1-0) + \frac{p''(0)}{2!}(1-0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + \frac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}.$$

А далі підставляємо все, що маємо:

$$\begin{aligned} p(0) &= f(\vec{x}^0) \\ p'(0) &= f'(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0) \\ p''(0) &= f''(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$p^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0))(\vec{x} - \vec{x}^0)^{n+1}$$

$$\text{Отже, } f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{f'(\vec{x}^0)}{1!}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \frac{f''(\vec{x}^0)}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\vec{x}^0)}{n!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\vec{\xi})}{(n+1)!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^{n+1},$$

де  $\vec{\xi} = \vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0) \in (\vec{x}^0, \vec{x})$ . ■

Можна обережно довести, що  $\frac{f^{(n+1)}(\vec{\xi})}{(n+1)!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^{n+1} = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0$ . Тоді матимемо формулу Тейлора в формі Пеано:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{f'(\vec{x}^0)}{1!}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \frac{f''(\vec{x}^0)}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\vec{x}^0)}{n!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^n + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0.$$

**Example 7.8.2** Розкласти функцію  $f(x, y) = e^{x+y}$  відносно т.  $(x_0, y_0) = (1, -1)$ .

Заздалегідь зауважимо, що  $\frac{\partial^s f}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2}}(1, -1) = e^{x+y}|_{(1, -1)} = 1$ , де  $s_1 + s_2 = s$ .

$$\begin{aligned} f(1, -1) &= 1 \\ f'(1, -1)(\vec{x} - \vec{x}^0) &= (x - 1) + (y + 1) \\ f''(1, -1)(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 &= (x - 1)^2 + 2(x - 1)(y + 1) + (y + 1)^2 \\ f'''(1, -1)(\vec{x} - \vec{x}^0)^3 &= (x - 1)^3 + 3(x - 1)^2(y + 1) + 3(x - 1)(y + 1)^2 + (y + 1)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Таким чином, ми можемо це записати ось так:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + \left[ \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(y+1)}{1!} \right] + \left[ \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)(y+1)}{2!} + \frac{(y+1)^2}{2!} \right] + \dots + \\ &+ \left[ \frac{(x-1)^n}{n!} + \frac{C_2^n (x-1)^{n-1}(y+1)}{n!} + \dots + \frac{(y+1)^n}{n!} \right] + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^k \frac{C_k^p}{k!} (x-1)^{k-p} (y+1)^p + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}\right), (x, y) \rightarrow (1, -1). \end{aligned}$$

**Remark 7.8.3** Можна формулу Тейлора записати в якості ряду Тейлора за певними умовами, але я цього робити не буду.

## 7.9 Локальні екстремуми

**Definition 7.9.1** Задано функцію  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Точка  $\vec{x}^0$  називається точкою:

- **локального максимуму**, якщо  $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \geq f(\vec{x})$ ;

- **локального мінімуму**, якщо  $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \leq f(\vec{x})$ .  
для строгих екстремумів нерівність строга та існують околиці  $U_\varepsilon(\vec{x}^0) \setminus \{\vec{x}^0\}$ .

### Theorem 7.9.2 Необхідна умова локального екстремуму

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  така, що має всі часткові похідні в т.  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня.

Відомо, що  $\vec{x}^0$  - локальний екстремум. Тоді  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = 0, \forall j = \overline{1, m}$ .

#### Proof.

Розглянемо функцію  $h(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$  - функція від однієї змінної, така, що  $x_1^0$  - локальний екстремум. Для інших змінних аналогічно. Більш того,  $h'(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$ .

Таким чином, за необхідною умовою локального екстремуму матані 1 семестру,

$$h'(x_1) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = 0. \quad \blacksquare$$

**Definition 7.9.3** Точка  $\vec{x}^0$  називається **критичною** для функції  $f$ , якщо всі часткові похідні в заданній точці нулеві.

*Надалі вважається, що ви ознайомлені з означенням додатньо/від'ємно визначеними матрицями та з критерієм Сільвестра.*

**Lemma 7.9.4** Задано симетричну матрицю  $B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} b_{11}(\vec{x}) & \dots & b_{1m}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m}(\vec{x}) & \dots & b_{mm}(\vec{x}) \end{pmatrix}$  - неперервна на множині

$A$  та т.  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Відомо, що  $B(\vec{x}^0)$  - строго додатньо/від'ємно визначена.

Тоді в деякому околі т.  $\vec{x}^0$  матриця  $B(\vec{x})$  - строго додатня/від'ємно визначена.

#### Proof.

Будемо доводити для випадку строго додатньої визначеності.

За умовою,  $B(\vec{x}) \in C(A)$ , тобто всі функції в матриці неперервні. Обчислюючи кутові мінори  $\Delta_k, k = \overline{1, n}$ , отримаємо, що  $\Delta_k \in C(A)$  за властивостями неперервності.

За критерієм Сільвестра, маємо  $\forall k = \overline{1, m} : \Delta_k(\vec{x}^0) > 0$ . Оскільки  $\vec{x}^0$  - внутрішня та  $\Delta_k \in C(A)$ , то  $\exists U_{\delta_k}(\vec{x}^0)$ , де  $\forall \vec{x} \in U_{\delta_k}(\vec{x}^0) : \Delta_k(\vec{x}) > 0$ .

Оберемо  $\varepsilon = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ , тоді  $\forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall k = \overline{1, n} : \Delta_k(\vec{x}) > 0$ .

Тоді за критерієм Сильвестра,  $B(\vec{x})$  - строго додатньо визначена в околі  $U_\varepsilon(\vec{x}^0)$ . ■

**Corollary 7.9.5** Якщо матриця  $B(\vec{x}^0)$  - знако невизначена, то в деякому околі т.  $\vec{x}^0$  матриця  $B(\vec{x})$  - знако не визначена.

#### Proof.

Припустимо, що в будь-якому околі  $U_\delta(\vec{x}^0)$  знайдеться  $\vec{x}_\delta$ , для якої  $B(\vec{x}_\delta)$  - строго додатно визначена.

Покладемо  $\delta = \frac{1}{n}$ , тоді  $\exists \vec{x}^{(n)} : \|\vec{x}^0 - \vec{x}^{(n)}\| < \frac{1}{n}$ , але  $B(\vec{x}^{(n)})$  - строго додатно визначена.

Якщо  $\vec{x}^{(n)} \rightarrow \vec{x}^0$ , то за неперервністю,  $B(\vec{x}^{(n)}) \rightarrow B(\vec{x}^0)$ , звідси оскільки  $(B(\vec{x}^{(n)})\vec{t}, \vec{t}) > 0, \forall \vec{t}$ , то тоді  $(B(\vec{x}^0)\vec{t}, \vec{t}) \geq 0, \forall \vec{t}$ . Тобто матриця  $B(\vec{x}^0)$  - невід'ємно визначена. Суперечність!

Якщо припускати строго від'ємну визначеність, то міркування аналогічні. ■

### Theorem 7.9.6 Достатня умова локального екстремуму

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , таку, що  $f$  - двічі неперервно-диференційована в околі т.  $\vec{x}^0 \in A$  - критична точка.

1) Нехай  $f''(\vec{x}^0)$  - строго додатньо визначена. Тоді  $\vec{x}^0$  - строгий локальний мінімум;

2) Нехай  $f''(\vec{x}^0)$  - строго від'ємно визначена. Тоді  $\vec{x}^0$  - строгий локальний максимум;

3) Нехай  $f''(\vec{x}^0)$  - знако-невизначена. Тоді  $\vec{x}^0$  - не локальний екстремум.

#### Proof.

1)  $f''(\vec{x}^0)$  - строго додатньо визначена. Тоді за лемою,  $\exists U_\delta(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\delta(\vec{x}^0) : f''(\vec{x})$  - строго додатньо визначена. Ми т.  $\vec{x}$  зафіксуємо.

За умовою,  $\vec{x}^0$  - критична точка  $\implies f'(\vec{x}^0) = \vec{0}$ . Запишемо функцію у вигляді формули Тейлора до другої похідної:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{f'(\vec{x}^0)}{1!}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \frac{f''(\vec{\xi})}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2, \text{ де } \vec{\xi} \in (\vec{x}^0, \vec{x}) \text{ або } (\vec{x}, \vec{x}^0).$$

$\implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2} \left( f''(\vec{\xi})(\vec{x} - \vec{x}^0), (\vec{x} - \vec{x}^0) \right)$ . Зокрема  $f''(\vec{\xi})$  - також додатньо визначена, а тому за означенням,  $\left( f''(\vec{\xi})(\vec{x} - \vec{x}^0), (\vec{x} - \vec{x}^0) \right) > 0$ . Звідси  $f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > 0$   
 $\implies \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}) > f(\vec{x}^0) \implies \vec{x}^0$  - локальний мінімум.

2) Аналогічно до 1).

3) Дороговцев пише ось що:

зауважимо, що якщо  $f''(\vec{x}^0)$  знако невизначена, то для будь-якого окілу  $U_\delta(\vec{0})$  будуть існувати вектори  $\vec{a}, \vec{b}$ , щоб  $f''(\vec{x}^0)\vec{a}^2 > 0$  та  $f''(\vec{x}^0)\vec{b}^2 < 0$ . (це єдине, що я не розумію). ■

## 7.10 Умовні локальні екстремуми

**Definition 7.10.1** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $A$  - відкрита множина. Задано систему функцій  $\phi_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $j = \overline{1, s}$ ,  $s < m$ . Покладемо множину  $M = \{\vec{x} \in A : \phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1, s}\}$ .

Тоді рівняння  $\phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1, s}$  називають **рівняннями зв'язку**.

Точка  $\vec{x}^0 \in M$  називається **умовним локальним**:

- **максимумом**, якщо  $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \geq f(\vec{x})$

- **мінімумом**, якщо  $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \leq f(\vec{x})$

Для строгих екстремумів нерівність строга та існують околи  $U_\varepsilon(\vec{x}^0) \setminus \{\vec{x}^0\}$ .

**Example 7.10.2** Маємо функцію  $z = x^2 + y^2$  та рівняння зв'язку  $\phi_1(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ . Вона має умовні екстремуми в т.  $(3, 4), (-3, -4)$  на множині  $M$ . Як їх шукати, дізнаємось потім.

Одразу формулювати теорему буде складно, тому ми будемо спочатку будувати наші роздуми, як зрозуміти, що  $\vec{x}^0$  - умовний локальний екстремум

Маємо множину  $M = \{\vec{x} : \phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1, s}\}$  та  $\vec{x}^0$  - локальний екстремум

Розглянемо диференційовану криву  $\gamma = \{\vec{x}(t), t \in (-\delta, \delta)\} \subset M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^0)$ , причому нехай  $\vec{x}(0) = \vec{x}^0$

Функцію  $f(\vec{x})$  зв'язимо на криву  $\gamma$  - отримаємо функцію  $h(t) = f(\vec{x}(t))$ , де має локальний екстремум в т.  $t_0 = 0$ . Тоді за необхідною умовою,  $h'(0) = 0$

З іншого боку,  $h'(0) = f'(\vec{x}(0)) \cdot \vec{x}'(0) \equiv$

Тут  $f'(\vec{x}(0)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}(0)) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}(0)) \right)$

А також  $\vec{x}'(0) = (x'_1(0) \quad \dots \quad x'_n(0))$

Множимо два вектори скалярно

$\equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)x'_1(0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)x'_n(0) = (\text{grad} f(\vec{x}^0), \vec{x}'(0))$

$\implies (\text{grad} f(\vec{x}^0), \vec{x}'(0)) = 0 \implies \text{grad} f(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0)$

Маємо зв'язок:  $h'(0) = 0 \iff \text{grad} f(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0)$

З'ясуємо, які властивості має  $\vec{x}'(0)$ , якщо  $\gamma = \{\vec{x}(t), t \in (-\delta, \delta)\} \subset M$

Отже,  $\vec{x}(t) \subset M \iff \phi_j(\vec{x}(t)) = 0 \overset{(*)}{\iff} \phi'_j(\vec{x}(0)) \cdot \vec{x}'(0) = 0 \iff \text{grad} \phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0)$

Маємо зв'язок 2:  $\forall j = \overline{1, s} : \text{grad} \phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0) \iff \vec{x}(t) \subset M$

(\*) Чому в зворотній бік працює:  $\phi'_j(\vec{x}(0)) \cdot \vec{x}'(0) = 0$ . Тоді  $\vec{x}'(0)$  перпендикулярна всім дотичним площинам до поверхонь  $\phi_j(\vec{x}(t)) = 0$ , тож  $\vec{x}'(0)$  - дотичний вектор кривої  $\gamma \Rightarrow \gamma \subset M$

Підсумуємо:

$\forall j = \overline{1, s} : \text{grad} \phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0) \iff \vec{x}(t) \subset M \iff$

$\iff h(t) = f(\vec{x}(t))$  має екстремум в т.  $\vec{x}^0 \iff h'(0) = 0 \iff$

$\iff \text{grad} f(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0)$

Крива  $\gamma$  - довільно обрана, тоді  $\vec{x}'(0)$  - довільний, що під умовами зв'язку

Тоді наша еквівалентність каже про те, що

$\text{grad} f(\vec{x}^0) \in \text{span}\{\text{grad} \phi_j(\vec{x}^0) : j = \overline{1, s}\}$  - ця лінійна оболонка в силу рангу є лінійно незалежною.

Тому кожний елемент, який туди потрапляє, розкладається лінійною комбінацією елементів, власне

$$\exists \lambda_j, j = \overline{1, s} : \text{grad} \vec{f}(\vec{x}^0) = \lambda_1 \text{grad} \phi_1(\vec{x}^0) + \dots + \lambda_s \text{grad} \phi_s(\vec{x}^0)$$

Отримали теорему

**Theorem 7.10.3 Необхідна умова умовного локального екстремуму**

Задана множина  $M = \{\vec{x} : \phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1, s}\}$  та функція  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  така, що  $f \in C'(A)$

Відомо, що  $\vec{x}^0$  - точка умовного локального екстремуму. Тоді

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_s : \text{grad} \vec{f}(\vec{x}^0) - (\lambda_1 \text{grad} \phi_1(\vec{x}^0) + \dots + \lambda_s \text{grad} \phi_s(\vec{x}^0)) = 0$$

Довели

До речі, останню умову можна переписати таким чином

$$\text{Ми створимо лагранжіан } L(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^s \lambda_j \phi_j(\vec{x})$$

Тоді в т.  $\vec{x}^0$  - екстремум, отже,  $L'_{\vec{x}}(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = 0$

**Theorem 7.10.4 Достатня умова умовного локального екстремуму**

Задана множина  $M = \{\vec{x} : \phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1, s}\}$  та функція  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  така, що  $f \in C''(A)$

Відомо, що

1)  $\vec{x}^0$  - критична точка для лагранжіана

2)  $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ , для яких  $\text{grad} \phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{h}$ , визначається квадратична форма

$$L''_{\vec{x}, \vec{x}}(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) \vec{h}^2 = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 L(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{\partial x_j \partial x_k} h_j h_k. \text{ Якщо права частина виразу}$$

- більше нуля, то  $\vec{x}^0$  - точка строго умовного локального мінімуму

- менше нуля, то  $\vec{x}^0$  - точка строго умовного локального мінімуму

- для знако-невизначених квадратичних форм  $\vec{x}^0$  - не умовний екстремум

**Proof.**

Якщо брати т.  $\vec{x} \in M$ , то тоді лагранжіан  $L(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f(\vec{x})$

Для неї застосуємо формулу Тейлора

$$L(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = L(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) + \frac{L'_{\vec{x}}(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{1!} (\vec{x} - \vec{x}^0) + \\ + \frac{L''_{\vec{x}, \vec{x}}(\vec{x}^0 - \theta(\vec{x} - \vec{x}^0), \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{2!} (\vec{x} - \vec{x}^0)^2$$

Тоді отримаємо, що

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{L''_{\vec{x}, \vec{x}}(\vec{x}^0 - \theta(\vec{x} - \vec{x}^0), \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{2!} (\vec{x} - \vec{x}^0)^2$$

Тепер все залежить від правої частини рівності

Ми розглянемо диференційовану криву

$$\gamma = \{\vec{x}(t), t \in (-\delta, \delta)\} \subset M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^0), \text{ причому } \vec{x}(0) = \vec{x}^0$$

$$\text{Тоді } \vec{x}(t) - \vec{x}^0 = \vec{x}'(0)t + \vec{o}(t)$$

$$\text{Для нашої кривої також відомо факт } \text{grad} \phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0) \\ = \vec{h}$$

Підставимо це все в нашу формулу

$$f(\vec{x}(t)) - f(\vec{x}^0) = \frac{L''_{\vec{x}, \vec{x}}(\vec{x}^0 - \theta(\vec{x}(t) - \vec{x}^0), \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{2!} \vec{h}^2 t^2 + \vec{o}(t^2)$$

Оскільки  $L''_{\vec{x}, \vec{x}}(\vec{x}^0, \dots)$  - знаковизначена, то тоді за лемою,  $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap M : L''_{\vec{x}, \vec{x}}(\vec{x}, \dots)$  - так само знако визначений

Якщо визначимо квадратичну форму із п. 2), то звідси й буде випливати, що  $f(\vec{x}^0) < f(\vec{x})$  - тобто умовний локальний мінімум

Аналогічно для інших випадків

■

**Example 7.10.5** Задана функція  $u = f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ . Знайдемо точки локального екстремуму за умовою, що

$$\phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Спочатку розглянемо лагранжіан  $L(x, y, z, \lambda_1) = f(x, y, z) - \lambda_1 \phi_1(x, y, z)$

Знайдемо всі критичні точки, тобто  $L'(x, y, z, \lambda_1) = 0$

Або інакше кажучи

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) - \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) - \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) - \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z}(x, y, z) = 0 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \lambda_1 \cdot 2x = 0 \\ -2 - \lambda_1 \cdot 2y = 0 \\ 2 - \lambda_1 \cdot 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Або } \lambda_1 = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = \frac{2}{3}$$

$$\text{Або } \lambda_1 = -\frac{3}{2}, x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{2}{3}$$

Всі можливі критичні точки

Тепер будемо квадратичну форму лагранжіана

$$L(x, y, z, \lambda_1) = x - 2y + 2z - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

Маємо

$$L''(x_0, y_0, z_0, \lambda_1) \vec{h}^2 = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} h_2^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} h_3^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} h_2 h_3 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} h_1 h_3 = -2\lambda_1 h_1^2 - 2\lambda_1 h_2^2 - 2\lambda_1 h_3^2$$

$$\text{Обираємо такі } \vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \text{ щоб } (\text{grad} \phi_1(x_0, y_0, z_0), \vec{h}) = 0$$

$$\text{В нашому випадку } \text{grad} \phi_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \text{ тоді}$$

$$2x \cdot h_1 + 2y \cdot h_2 + 2z \cdot h_3 = 0$$

Розглянемо кожну точку

$$1) \lambda_1 = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} (h_1 - 2h_2 + 2h_3) = 0 \Rightarrow h_1 = 2h_2 - 2h_3$$

Оцінюємо знак квадратичної форми:

$$L''(x, y, z, \lambda_1) \vec{h}^2 = -6(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) < 0$$

Отже, 1) - локальний максимум та  $u = 3$

$$2) \lambda_1 = -\frac{3}{2}, x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3} (h_1 - 2h_2 + 2h_3) = 0 \Rightarrow h_1 = 2h_2 - 2h_3$$

Оцінюємо знак квадратичної форми:

$$L''(x, y, z, \lambda_1) \vec{h}^2 = 6(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) > 0$$

Отже, 2) - локальний мінімум та  $u = -3$

## 8 Інтеграли з параметром

### 8.1 Основні означення та властивості

**Definition 8.1.1** Задано функцію  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , таку, що  $\forall y \in [c, d] : f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**Інтегралом з параметром** називають таку функцію  $J : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

#### Proposition 8.1.2 Неперервність

Задано функцію  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , таку що  $f \in C([a, b] \times [c, d])$ . Тоді  $J \in C([c, d])$ .

**Proof.**

Зауважимо, що  $f \in C([a, b] \times [c, d])$ . то звідси  $\forall y \in [c, d] : f \in C([a, b]) \implies f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тобто

функція  $J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  коректно визначена.

$$\begin{aligned} f(x, y) \in C([a, b] \times [c, d]) &\implies f(x, y) \in C_{unif}([a, b] \times [c, d]) \implies \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [a, b] \times [c, d] : \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } |J(y_1) - J(y_2)| = \left| \int_a^b f(x, y_1) dx - \int_a^b f(x, y_2) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y_1) - f(x, y_2)| dx < \varepsilon$$

Якщо я оберу  $(x, y_1), (x, y_2)$  так, що  $\|(x, y_1) - (x, y_2)\| = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2| < \delta$ , то тоді  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$

$$\boxed{<} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon.$$

Збираючи пазл, отримаємо  $J \in C_{unif}([c, d]) \implies J \in C([c, d])$ . ■

#### Proposition 8.1.3 Диференційованість

Задано функцію  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , таку, що  $f \in C([a, b] \times [c, d])$ . Відомо, що  $\exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C([a, b] \times [c, d])$ .

Тоді  $J$  - диференційована на  $[c, d]$ , при цьому  $J'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ .

**Proof.**

Диференційованість означає існування похідної, тобто необхідно довести її існування.

$$\frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y} \int_a^b f(x, y + \Delta y) - f(x, y) dx \boxed{=}$$

Згадаємо Ньютона-Лейбніца та властивості інтеграла та розпишемо підінтегральний вираз таким чином:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \int_y^{y+\Delta y} f'_y(x, t) dt = \int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt$$

$$\boxed{=} \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left( \int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \right) dx$$

Тепер зафіксуємо т.  $y_0$  та розпишемо праву частину рівності, що ми доводимо:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx = \int_a^b \frac{1}{\Delta y} \left( \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dt \right) dx = \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left( \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dt \right) dx$$

Ну а тепер час доводити існування похідної:

$$\begin{aligned} \left| \frac{J(y_0 + \Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| &= \left| \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left( \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \right) dx - \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left( \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dt \right) dx \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left( \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dt \right) dx \right| \boxed{<} \end{aligned}$$

За умовою твердження,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C([a, b] \times [c, d]) \implies \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C_{unif}([a, b] \times [c, d]) \implies$$



$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x, t), (x, y_0) \in [a, b] \times [c, d] : \|(x, t) - (x, y_0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\boxed{<} \int_a^b \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{1}{\Delta y} \frac{\varepsilon}{b-a} dt dx = \varepsilon$$

Знову збираємо пазл - отримуємо, що:  $\forall y_0 \in [c, d]$  :

$$\exists \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{J(y_0 + \Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx = J'(y_0). \text{ Отже, } J - \text{ диференційована на } [c, d]. \quad \blacksquare$$

### Proposition 8.1.4 Інтегрованість

Задано функцію  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , таку, що  $f \in C([a, b] \times [c, d])$ .

$$\text{Тоді } J \in \mathcal{R}([c, d]), \text{ а також } \underbrace{\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy}_{=J(y)} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

**Proof.**

Розглянемо дві функції:  $h(t) = \int_c^t \int_a^b f(x, y) dx dy$   $g(t) = \int_a^b \int_c^t f(x, y) dy dx$ . В нашому випадку  $t \in [c, d]$ . Якщо  $t = c$ , то маємо, що  $h(c) = g(c) = 0$ .

Необхідно знайти, чому дорівнює  $h'(t), g'(t)$ . Зробимо позначення:  $h(t) = \int_c^t J(y) dy$   $g(t) = \int_a^b F(x, t) dx$ .

Маємо два інтеграли з параметром  $t$ . Другий інтеграл задовільняють умові з **Prp 3.1.?**, тоді можемо знайти похідну.

Перший - це інтеграл від верхньої межі, тому автоматично  $h'(t) = J(t)$ .

Другий рахується за попереднім твердженням, всі умови виконані для цього.

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx = \int_a^b f(x, t) dx = J(t).$$

Таким чином,  $\forall t \in [c, d] : h'(t) = g'(t) \implies h(t) = g(t) + C$ .

Але оскільки  $h(c) = g(c) = 0$ , то одразу  $C = 0 \implies h(t) = g(t)$ .

$$\text{Ну а тоді } h(d) = g(d) \implies \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \quad \blacksquare$$

**Example 8.1.5** Обчислити  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx$ .

Маємо  $I(\alpha) = \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx$ . Розглянемо функцію  $f(x, \alpha) = x^2 \cos \alpha x$  на  $[0, 2] \times [-1, 1]$  (можна й менше взяти другу сторону, головне щоб навколо т. 0). Ця функція є неперервною, тоді  $I(\alpha)$  неперервна, зокрема в т.  $\alpha = 0$ .

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha) = I(0) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

**Example 8.1.6** Знайти похідну функції  $I(\alpha) = \int_1^2 e^{\alpha x^2} \frac{dx}{x}$ .

Позначу  $f(x, \alpha) = \frac{e^{\alpha x^2}}{x}$ . Знайдемо часткову похідну за другим аргументом:  $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{x^2 e^{\alpha x^2}}{x} = x e^{\alpha x^2}$ .

Зауважимо, що  $f$  та  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$  неперервні на прямокутнику  $[1, 2] \times [-1, 1]$ , тому ми можемо диференціювати

функцію  $I$ , а також  $I'(\alpha) = \int_1^2 x e^{\alpha x^2} dx$ .

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2} \int_1^2 e^{\alpha x^2} dx^2 = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x^2} \Big|_1^2 = \frac{e^{4\alpha} - e^{\alpha}}{2\alpha}.$$

**Example 8.1.7** Обчислити  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ , якщо  $a, b > 0$ .

Зауважимо, що  $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$ . Тоді взагалі маємо обчислити  $\int_0^1 \int_a^b x^y dy dx$ .

Оскільки функція  $f(x, y) = x^y$  є неперервною на прямокутнику  $[0, 1] \times [a, b]$ , то звідси ми можемо поміняти місцями порядок інтегрування, тобто

$$\int_0^1 \int_a^b x^y dy dx = \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln(y+1) \Big|_a^b = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

**Remark 8.1.8** Для диференціювання існує більш загальна формула, якщо досліджувати функцію

$J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$ . Вимагаємо  $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C([a, b] \times [c, d])$ ,  $\varphi, \psi \in C([c, d])$ . Тоді маємо:

$$J'(y) = f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Для її доведення можна скористатися формулою Ньютона-Лейбніца.

## 8.2 Невласні інтеграли з параметром

**Definition 8.2.1** Задано функцію  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $A, B \subset \mathbb{R}$ , та  $y_0 \in \mathbb{R}$  - гранична точка для  $B$ . Функція  $f$  **поточково збігається** до функції  $\varphi$  при  $y \rightarrow y_0$ , якщо

$$\forall x \in A : \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

Функція  $f$  **збігається рівномірно** до функції  $\varphi$  при  $y \rightarrow y_0$  на множині  $A$ , якщо

$$\sup_{x \in A} |f(x, y) - \varphi(x)| \rightarrow 0, y \rightarrow y_0$$

Позначення:  $f(x, y) \xrightarrow{\rightarrow} \varphi(x), y \rightarrow y_0$ .

Новий вигляд збіжності можна привести до збіжності функціональних послідовностей таким твердженням.

**Proposition 8.2.2**  $f(x, y) \xrightarrow{\rightarrow} \varphi(x), y \rightarrow y_0$  на множині  $A \iff \forall \{y_n, n \geq 1\} \subset B : \forall n \geq 1 : y_n \neq y_0 : f(x, y_n) \xrightarrow{\rightarrow} \varphi(x), n \rightarrow \infty$  на множині  $A$ .

Впливає з означення рівномірної збіжності.

### Theorem 8.2.3 Критерій Коші

$f(x, y) \xrightarrow{\rightarrow} \varphi(x), y \rightarrow y_0$  на  $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall y_1, y_2 \in B, y_1, y_2 \neq y_0 : \left\{ \begin{array}{l} |y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta \end{array} \right\} \implies \sup_{x \in A} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Вказівка: означення рівномірної границі та нерівність трикутника.

$\Leftarrow$  Дано:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall y_1, y_2 \in B, y_1, y_2 \neq y_0 : \left\{ \begin{array}{l} |y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta \end{array} \right\} \implies \sup_{x \in A} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$

Візьмемо деяку послідовність  $\{y_n, n \geq 1\}$ , де  $y_n \neq y_0, y_n \rightarrow y_0$ . Тоді

$\exists N : \forall n, m \geq N : |y_n - y_0| < \delta, |y_m - y_0| < \delta$ . За умовою, звідси  $\sup_{x \in A} |f(x, y_n) - f(x, y_m)| < \varepsilon$ . За

критерієм Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності,  $f(x, y_n)$  є рівномірно збіжною на  $A$ . Отже,  $f(x, y)$  - рівномірно збіжний на  $A$  за **Prp. 5.2.2**. ■

**Definition 8.2.4** Задано функцію  $f : [a, \omega) \times A$ , таку, що  $\forall y \in A : \forall c \in [a, \omega) : f \in \mathcal{R}([a, c])$ . Також маємо збіжний невластний інтеграл із параметром  $J(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx, \forall y \in A$ .

Невластний інтеграл **збігається рівномірно** на множині  $A$ , якщо

$$\sup_{y \in A} \left| \int_a^\omega f(x, y) dx - \int_a^c f(x, y) dx \right| \xrightarrow{c \rightarrow \omega} 0$$

**Remark 8.2.5** Воно якось схоже за рівномірну збіжність функції, але трошки не так. Тут розглядається взагалі-то рівномірна збіжність функції  $g(x, y)$  до функції  $g(y)$  ТА при цьому аргумент  $x \rightarrow x_0$ . Проте поки додаткові знання додавати не буду.

### Theorem 8.2.6 Критерій Коші

$\int_a^\omega f(x, y) dx$  - збіжний рівномірно на  $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists C : \forall c_1, c_2 \in [C, \omega) : \sup_{y \in A} \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$

Впливає з критерію Коші рівномірної збіжності функцій.

**Theorem 8.2.7 Ознака Вейєрштрасса**

Задані функції  $f : [a, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що

1)  $\forall x \in [a, \omega) : \forall y \in A : |f(x, y)| \leq g(x)$ ;

2)  $\int_a^\omega g(x) dx$  - збіжний.

Тоді  $\int_a^\omega f(x, y) dx$  - збіжний рівномірно на  $A$ .

**Proof.**

$$\sup_{y \in A} \left| \int_c^\omega f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_c^\omega g(x) dx \right| \xrightarrow{c \rightarrow \omega} 0. \quad \blacksquare$$

**Example 8.2.8** Довести, що  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  рівномірно збіжний на множині  $[1 + \gamma, +\infty)$ , якщо  $\gamma > 0$ .

Маємо функцію  $f(x, \alpha) = \frac{1}{x^\alpha}$ . Також відома оцінка  $x^\alpha > x^{1+\gamma} \implies \frac{1}{x^\alpha} < \frac{1}{x^{1+\gamma}}$ , виконано  $\forall x \geq 1$ .

Також  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\gamma}}$  - збіжний невластний інтеграл (еталон). Тому за ознакою Вейєрштрасса,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  рівномірно збіжний на множині  $[1 + \gamma, +\infty)$ .

**Theorem 8.2.9 Ознака Абеля-Діріхле**

Задані функції  $f : [a, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [a, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що виконана одна з двох пар умов

a1)  $\int_a^\omega f(x, y) dx$  - збіжний рівномірно на  $A$

a2)  $\forall y \in A : g$  - монотонна від  $x \in [a, \omega)$

a3)  $\exists D > 0 : \sup_{y \in A} \sup_{c \in [a, \omega)} |g(x, y)| \leq D$

d1)  $\exists D > 0 : \sup_{y \in A} \sup_{c \in [a, \omega)} \left| \int_a^c f(x, y) dx \right| \leq D$

d2)  $\forall y \in A : g$  - монотонна від  $x \in [a, \omega)$

d3)  $\sup_{y \in A} |g(x, y)| \xrightarrow{x \rightarrow \omega} 0$

Тоді  $\int_a^\omega f(x, y)g(x, y) dx$  - рівномірно збіжний на  $A$

*Поки без доведення*

**Proposition 8.2.10 Неперервність**

Задано функцію  $f : [a, \omega) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , таку, що  $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$ . Також  $J$  - рівномірно збіжний.

Тоді  $J \in C([c, d])$ .

**Proof.**

За означенням рівномірної збіжності, маємо, що  $\sup_{y \in [c, d]} \left| \int_c^\omega f(x, y) dx \right| \rightarrow 0, c \rightarrow \omega$

Тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists c > a : \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_c^\omega f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

Оцінимо  $J$

$$\begin{aligned} |J(y_1) - J(y_2)| &= \left| \int_a^\omega f(x, y_1) dx - \int_a^\omega f(x, y_2) dx \right| = \\ &= \left| \int_a^c f(x, y_1) dx - \int_a^c f(x, y_2) dx + \int_c^\omega f(x, y_1) dx - \int_c^\omega f(x, y_2) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^c f(x, y_1) - f(x, y_2) dx \right| + \left| \int_c^\omega f(x, y_1) dx \right| + \left| \int_c^\omega f(x, y_2) dx \right| \leq \end{aligned}$$

Перший модуль:  $f \in C_{unif}([a, \omega) \times [c, d])$

$$\implies \exists \delta : \forall y_1, y_2 : |y_1 - y_2| < \delta \implies |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{c - a}$$

Другий модуль:  $\sup_{y \in [c, d]} \left| \int_c^\omega f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\implies \forall y \in [c, d] : \left| \int_c^\omega f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\boxed{<} \int_a^c \frac{\varepsilon}{c-a} dx + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Збираємо пазл та маємо, що  $J \in C_{unif}([c, d]) \Rightarrow J \in C([c, d])$  ■

### Proposition 8.2.11 Інтегрованість

Задана функція  $f : [a, \omega) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , така, що  $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$

Також  $J$  - рівномірно збіжний. Тоді  $J \in D([c, d])$  та

$$\int_c^d \int_a^\omega f(x, y) dx dy = \int_a^\omega \int_c^d f(x, y) dy dx = J(y)$$

**Proof.**

$$\text{Розглянемо } \int_c^d J(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy + \int_c^d \int_b^\omega f(x, y) dx dy$$

Перший доданок - це визначений інтеграл, тому там виконується **Prp 3.1.4.**, тобто

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Другий доданок - цікавіше

$$\left| \int_c^d \int_b^\omega f(x, y) dx dy \right| \leq \int_c^d \left| \int_b^\omega f(x, y) dx \right| dy \leq \int_c^d \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_b^\omega f(x, y) dx \right| dy = \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_b^\omega f(x, y) dx \right| (d - b) \rightarrow 0, b \rightarrow \omega$$

Якщо  $b \rightarrow \omega$ , то тоді отримаємо

$$\int_c^d J(y) dy = \int_a^\omega \int_c^d f(x, y) dx dy + 0 = \int_a^\omega \int_c^d f(x, y) dx dy$$
 ■

### Proposition 8.2.12 Диференційованість

Задана функція  $f : [a, \omega) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , така, що:

- 1)  $\frac{\partial f}{\partial y} \in C([a, \omega) \times [c, d])$
- 2)  $\exists y_0 \in [c, d] : J(y_0)$  - збіжний
- 3)  $\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  - рівномірно збіжний Тоді  $J$  - збіжний, диференційована в  $[c, d]$ , при цьому  $J'(y) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$

**Proof.**

Розглянемо функцію  $I(y) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  - неперервна за умовною рівномірною. Часткові похідні є неперервними також за умовою. Тоді за **Prp. 3.2.6.**,  $I \in D([y, y_0])$

$$\int_{y_0}^y I(t) dt = \int_a^\omega \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt dx = \int_a^\omega f(x, y) - f(x, y_0) dx = J(y) - J(y_0)$$

$$\Rightarrow J(y) = \int_{y_0}^y I(t) dt + J(y_0) - \text{обидва збіжні. Тому сума - збіжна}$$

Отже,  $J$  - збіжний  $\forall y \in [c, d]$

$$\Rightarrow J'(y) = I(y) - 0 = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$
 ■

### Proposition 8.2.13 Невласне інтегрування невластного інтеграла

Задана функція  $f : [a, +\infty) \times [c, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  така, що  $f \in C([a, +\infty) \times [c, +\infty))$ , а також виконані умови:

- 1)  $\forall b > a : \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  - збіжний рівномірно в  $[a, b]$
- 2)  $\forall d > c : \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  - збіжний рівномірно в  $[c, d]$
- 3)  $\int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy, \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$  - збігаються  $\forall x \geq a, \forall y \geq c$
- 4)  $\int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy dx$  або  $\int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx dy$  - збіжний

Тоді обидва інтеграли - збіжні та

$$\int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy dx = \int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx dy$$

Поки без доведення

### 8.3 Інтеграл Діріхле

Інтегралом Діріхле називають таку рівність, яку зараз доведу (про збіжність вже говорили)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Розглянемо функцію  $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$

Зауважимо, що якщо зробити заміну  $ax = t$ , то отримаємо, що

$$F(a) = F(1). \text{ А також } F(-a) = -F(a), F(0) = 0$$

Із цих умов випливає, що  $F(a)$  - розривна, тож  $F(a)$  - не збіжна рівномірно на  $\mathbb{R}$

Розглянемо функцію  $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-bx} dx, b \geq 0$

Підінтегральна функція - неперервна, має неперервну часткову похідну  $\frac{\partial f}{\partial a} = \cos ax \cdot e^{-bx}$ , а також

$$\int_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-bx} dx - \text{рівномірно збіжний (додати приклад)}$$

Остаточно отримаємо

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-bx} dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} J(a) = \frac{\pi}{2}$$

### 8.4 Інтеграл Ейлера-Пуассона

Інтегралом Діріхле називають таку рівність, яку зараз доведу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Позначимо  $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Зробимо заміну  $x = at$ . Тоді

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2} a dt$$

$$J^2 = J \int_0^{+\infty} e^{-a^2} da = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2} a dt \right) e^{-a^2} da = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} a e^{-a^2 t^2 - a^2} dt da$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2(t^2+1)} a da dt =$$

Заміна:  $s = -a^2(t^2 + 1)$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2 + 1)} \int_{-\infty}^0 e^s ds dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2 + 1)} dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

### 8.5 Гамма-функція

**Definition 8.5.1** Гамма-функцією називають таку функцію

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$$

**Lemma 8.5.2**  $\alpha > 0$  - область збіжності гамма-функції

**Proof.**

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка -  $x = 0$

Порівняємо з інтегралом  $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx$  - збіжний для  $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1$$

Отже, обидва збіжні, тому перший доданок - збіжний

Розглянемо другий інтеграл. Особлива точка -  $x = \infty$

Порівняємо з інтегралом  $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$  - збіжний для  $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \begin{cases} 0 \text{ за правилом Лопітала, } \alpha \geq 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1-\alpha} e^{\frac{x}{2}}} = 0, \alpha < 1 \end{cases}$$

Отже, обидва збіжні, тому другий доданок - збіжний

Остаточно,  $\Gamma(\alpha)$  - збіжний

**Lemma 8.5.3**  $\Gamma \in C^\infty((0, +\infty))$

**Proof.**

Поки без доведення

**Theorem 8.5.4**  $\forall \alpha > 0 : \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$

Вказівка: ліву частину інтегруємо частинами,  $u = x^\alpha, dv = e^{-x} dx$

Що, якщо  $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

Отже,

**Corollary 8.5.5**  $\Gamma(n+1) = n!$

А далі перевіримо, чому дорівнює гамма-функція в т.  $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \stackrel{\text{Заміна: } t=\sqrt{x}}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Далі скористаємось тотожністю  $\Gamma(\alpha+1) = \Gamma(\alpha)$ , щоб знайти  $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)$ . Отримаємо:

$$\text{Corollary 8.5.6 } \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$$

**Theorem 8.5.7 Функціональне рівняння Ейлера**

$$\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{\cos \pi \alpha}$$

Без доведення. Тут треба знати щось про функціональне рівняння

## 8.6 Бета-функція

**Definition 8.6.1** Бета-функцією називають таку функцію

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \alpha, \beta > 0$$

**Lemma 8.6.2**  $\alpha, \beta > 0$  - область збіжності бети-функції

**Proof.**

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка -  $x = 0$

Порівняємо з інтегралом  $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} dx$  - збіжний для  $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}} = 1$$

Отже, обидва збіжні, тому перший доданок - збіжний

Розглянемо другий інтеграл. Проводимо заміну  $1-x=t$ , тоді маємо

$$-\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt - \text{це той самий перший доданок. І він вже буде збіжним, якщо } \beta > 0$$

Остаточно,  $B(\alpha, \beta)$  - збіжний ■

**Proposition 8.6.3**  $B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy$

*Вказівка:* зробити заміну  $x = \frac{y}{1+y}$

**Theorem 8.6.4** **Зв'язок між  $\Gamma$  та  $B$**

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

**Proof.**

Розглянемо  $\Gamma(\alpha+\beta)$  та проведемо заміну  $x = y(t+1)$ ,  $dx = (t+1) dy$

$$\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1} e^{-x} dx = (t+1)^{\alpha+\beta} \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-y(t+1)} dy$$

Отримаємо

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-y(t+1)} dy$$

Помножимо обидві частини на  $t^{\alpha-1}$  та проінтегруємо від 0 до  $+\infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} \Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} t^{\alpha-1} e^{-y} e^{-yt} dy dt$$

$$\Gamma(\alpha+\beta) \cdot B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} y^{\beta-1} e^{-y} \int_0^{+\infty} y^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-yt} dt dy$$

Внутрішній інтеграл при заміні  $yt = x$  стане рівним  $\Gamma(\alpha)$ . Його виносимо з-під зовнішнього інтегралу, а сам інтеграл вже є  $\Gamma(\beta)$ . Тоді

$$\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \quad \blacksquare$$