Зміст

1 Трохи топології

1.1 Метричні простори

Definition 1.1.1 Задано X - деяка множина та $\rho : X \to X \to \mathbb{R}$ - функція
Метричним простором називають пару (X, ρ), в якому задовільняються три умови

$$\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$$
$$\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

При цьому функція ρ називається **метрикою** та описує **відстань** між x, y

Example 1.1.2 Розглянемо декілька прикладів
1. $X = \mathbb{R}$, на якій задається метрика $\rho(x, y) = |x - y|$

2. $X = \mathbb{R}^n$, на якій можна задати дві метрики
$\rho_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$
$\rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$

3. $X = C([a, b])$, на якій задається метрика $\rho(f, g) = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$

Definition 1.1.3 Задано (X, ρ) - метричний простір
Пару $(Y, \tilde{\rho})$, де $Y \subset X$, назвемо **метричним підпростором** (X, ρ), якщо

$$\forall x, y \in Y : \tilde{\rho}(x, y) = \rho(x, y)$$

При цьому метрика $\tilde{\rho}$, кажуть, **індукована в Y метрикою ρ**

Proposition 1.1.4 Задано (X, ρ) - метричний простір та $(Y, \tilde{\rho})$ - підпростір
Для метрики $\tilde{\rho}$ всі три аксіоми зберігаються
Вправа: досвідчитись в цьому

Example 1.1.5 Маємо $X = F([a, b])$ - множину обмежених функцій та $\rho(f, g) = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$
Тоді $Y = C([a, b])$ маємо метрику
$\tilde{\rho}(f, g) = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$
Отже, $C([a, b])$ - метричний підпростір простору $F([a, b])$

Definition 1.1.6 Задано L - лінійний простір над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$
Задамо функцію $||\cdot|| : L \to \mathbb{R}$, що називається **нормою**, якщо виконуються умови:

$$\forall x \in L : ||x|| \geq 0$$
$$\forall x \in L : \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ або } \mathbb{C} : ||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$$
$$\forall x, y \in L : ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Тоді пару $(L, ||\cdot||)$ назвемо **нормованим простором**

Proposition 1.1.7 Задано $(L, ||\cdot||)$ - нормований простір
Тоді функція $\rho(x,y) = ||x-y||$ задає метрику
Вправа: перевірити три аксіоми

Example 1.1.8 Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ - евклідів простір
Ми можемо евклідів простір E перетворити в нормований простір $(E, ||\cdot||)$ функцією $||x|| = \sqrt{(x,x)}$
Тому (E, ρ) - метричний простір та $\rho(x,y) = ||x-y||$

Example 1.1.9 Більш важливий приклад. Нехай $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$ - дійсна числова послідовність. Задамо простір
$l_1 = \left\{ \vec{a} \mid \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$
Задаються такі операції:
$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$
$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$
Якщо перевірити 8 аксіом, то отримаємо, що l_1 - лінійний простір
Важливе зауваження: $\vec{a}+\vec{b}, \alpha\vec{a} \in l_1$, тому що маємо $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжні,

а тому збіжним буде $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n), \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$

Можна задати нормований простір функцією $||\vec{a}|| = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

А тому це - метричний простір з $\rho(\vec{a}, \vec{b}) = ||\vec{a} - \vec{b}||$

Узагальнення: $l_p = \left\{ \vec{a} \mid \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$

Тут задається норма $||\vec{a}|| = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

Example 1.1.10 Тут ще є така множина: $l_\infty = \{\vec{a}\ |\vec{a}-$обмежені$\}$. Задані такі самі операції
Задається норма $||\vec{a}|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$
Отже, l_∞ - метричний простір

1.2 Відкриті та замкнені множини. Збіжні послідовності

Definition 1.2.1 Задано (X, ρ) - метричний простір та $a \in X$
Відкритою кулею радіусом r з центром a називають множину

$$B(a; r) = \{x \in X | \rho(a, x) < r\}$$

Її ще називають r**-околом т.** a

Example 1.2.2 Декілька прикладів
1. Маємо $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x-y|$. Тут відкрита куля задається інтервалом $B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}|\ |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$

2. Маємо $X = \mathbb{R}^2$, $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}||$. Тут відкрита куля задається колом $B(0; 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|\ x^2 + y^2 < 1\}$

Definition 1.2.3 Задано $A \subset X$ та $a \in A$
Точка a називається **внутрішньою** на A, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : B(a; \varepsilon) \subset A$$

Definition 1.2.4 Множина A називається **відкритою**, якщо кожна точка множини A - внутрішня

Example 1.2.5 Розглянемо такі приклади
1. Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$ та множину $A = [0, 1)$
$a = \dfrac{1}{2}$ - внутрішня, бо $\exists \varepsilon = \dfrac{1}{4} : B\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right) \subset A$, тобто $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right) \subset [0, 1)$
$a = 0$ - не внутрішня
Тут A - не відркита, бо $a = 0$ - не внутрішня

2. Маємо $X = [0, 1], \rho(x, y) = |x - y|$ та множину $A = [0, 1)$
$a = 0$ - уже внутрішня. В попередньому прикладі ми могли ε-околом вийти за межі нуля ліворуч, а тут вже ні
Тут A - відкрита

3. Маємо $X = \{0, 1, 2\}$ - підпростір метричного простору $(\mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|)$
Задамо множину $A = \{0, 1\}$. Тут кожна точка - внутрішня
Тут A - відкрита

Definition 1.2.6 Задано $A \subset X$ та $x_0 \in X$
Точка x_0 називається **граничною** для A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : (B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

Definition 1.2.7 Множина A називається **замкненою**, якщо вона містить всі свої граничні точки

Example 1.2.8 Розглянемо такі приклади
1. Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$ та множину $A = (0, 1)$
$x_0 = \left\{\dfrac{1}{2}, 0, 1\right\}$ - граничні
$x_0 = \dfrac{3}{2}$ - не гранична
Тут A - не замкнена, бо $x_0 = 1 \notin A$ - гранична

2. Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$
Задамо множину $A = \{0, 1\}$. Тут жодна точка - гранична
Тут A - замкнена! Бо нема жодної граничної точки в X для A, щоб порушити означення

3. $X, \emptyset$ - замкнені

Theorem 1.2.9 Задано (X, ρ), $A \subset X$
Множина A - відкрита $\iff$ множина A^c - замкнена
Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A - відкрита
!Припустимо, що A^c - не замкнена, тобто $\exists x_0 \in A : x_0$ - гранична для A^c, але $x_0 \notin A^c$
За умовою, оскільки $x_0 \in A$, то x_0 - внутрішня, тобто $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \subset A$
Отже, $B(x_0; \varepsilon) \cap A^c = \emptyset$ - суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A^c - замкнена
Тоді вона містить всі граничні точки. Тоді $\forall x_0 \in A : x_0$ - не гранична для A^c, тобто $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A^c = \emptyset \Rightarrow B(x_0; \varepsilon) \subset A$
Отже, x_0 - внутрішня для A, а тому A - відкрита $\blacksquare$

Theorem 1.2.10 Задано (X, ρ) - метричний простір
1. Нехай $U_\alpha \subset X$, $\alpha \in I$ - сім'я відкритих множин
Тоді $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ - відкрита множина
2. Нехай $U_k \subset X, k = \overline{1, n}$ - сім'я відкритих множин

Тоді $\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ - відкрита множина
3. $\emptyset, X$ - відкриті множини
Proof.
1. Задано множину $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Зафіксуємо $a \in U$
Тоді $\exists \alpha_0 : a \in U_{\alpha_0} \Rightarrow a$ - внутрішня для U_{α_0}
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(a;\varepsilon) \subset U_{\alpha_0} \subset U$
Отже, U - відкрита

2. Задано множину $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. Зафіксуємо $a \in U$
Тоді $\forall k = \overline{1,n} : a \in U_k \Rightarrow a$ - внутрішня для U_k
$\Rightarrow \exists \varepsilon_k > 0 : B(a;\varepsilon_k) \subset U_k$
Задамо $\varepsilon = \min\limits_{1 \le k \le n} \varepsilon_k \Rightarrow B(a;\varepsilon) \subset U$
Отже, U - відкрита

3. $\emptyset$ - відкрита, бо нема внутрішніх точок, тому що там порожньо
X - відкрита, бо для $a \in X$, який б $\varepsilon > 0$ не обрав, $B(a;\varepsilon) \subset X$ ■
Вправа: записати самостійно таку ж теорему для сім'ї замкнених множин

Remark 1.2.11 Відповідь на питання, чому в другому лише скінченна кількість відкритих множин
Розглянемо $X = \mathbb{R}$ із метрикою $\rho(x,y) = |x-y|$
Задана сім'я відкритих множин $U_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$, причому $\forall n \ge 1$
$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$, але така множина вже не є відкритою

Remark 1.2.12 Такі твердження не є правдивими
A - не відкрита, а тому A - замкнена (наприклад, $[0,1)$ в $\mathbb{R}$)
A - відкрита, а тому A - не замкнена (наприклад, $\emptyset$ в $\mathbb{R}$)

Proposition 1.2.13 Задано (X,ρ) - метричний простір та $a \in X$
Множина $B(a;r) = \{x | \rho(a,x) < r\}$ - відкрита
Множина $B[a;r] = \{x | \rho(a,x) \le r\}$ - замкнена

Proof.
1. Задамо т. $b \in B(a;r)$. Нехай $\varepsilon = r - \rho(a,b) > 0$. Тоді якщо $x \in B(b;\varepsilon)$, то тоді $\rho(x,a) \le \rho(x,b) + \rho(b,a) < \varepsilon + \rho(b,a) = r$

Отже, $B(a;r)$ - відкрита

2. Доведемо, що $B^c[a;r] = \{x|\rho(a,x) > r\}$ - відкрита
Якщо задати $\varepsilon = \rho(a,b) - r$ для точки $b \in B(a;r)$, то аналогічними міркуваннями отримаємо, що $B^c[a;r]$ - відкрита
Отже, $B[a;r]$ - замкнена ■

Definition 1.2.14 Задана $\{x_n, n \geq 1\} \subset X$ та $x_0 \in X$
Ця послідовність називається **збіжною** до x_0, якщо

$$\rho(x_n, x_0) \to 0, n \to \infty$$

Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

Theorem 1.2.15 Задано (X,ρ), $A \subset X$ та $x_0 \in X$. Наступні твердження еквівалентні
1. x_0 - гранична точка для A
2. $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \cap A$ - нескінченна множина
3. $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : x_n \neq x_0 : x_n \to x_0$

Proof.
$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Дано: x_0 - гранична для A
!Припустимо, що $\exists \varepsilon^* > 0 : B(x_0;\varepsilon) \cap A$ - скінченна множина
Тобто маємо, що $x_1, \dots, x_n \in B(x_0;\varepsilon^*)$, тоді
$\rho(x_0,x_1) < \varepsilon^* \dots \rho(x_0,x_n)^* < \varepsilon$
Оберемо найменшу відстань та задамо це для $\varepsilon^*_{new} = \min\limits_{1\leq i\leq n} \rho(x_0,x_i)$
Створимо $B(x_0;\varepsilon^*_{new}) \subset B(x_0;\varepsilon)$
У новому шару жодна точка $x_1, \dots, x_n \in A$ більше сюди не потрапляє
Тоді $B((x_0;\varepsilon^*_{new}) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$ - таке неможливо через те, що x_0 - гранична точка
Суперечність!

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Дано: $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \cap A$ - нескінченна множина
Встановимо $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$. Тоді оскільки $\forall n \geq 1 : B\left(x_0; \dfrac{1}{n}\right) \cap A$ - нескінченна, то
$\forall n \geq 1 : \exists x_n \in A : \rho(x_0,x_n) < \dfrac{1}{n}$
Якщо далі $n \to \infty$, тоді $\rho(x_0,x_n) \to 0$
Остаточно, $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \neq x_0 : x_n \to x_0$

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Дано: $\exists\{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \neq x_0 : x_n \to x_0$
Тобто $\forall\varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \rho(x_0, x_n) < \varepsilon$
Або інакше кажучи, $\forall\varepsilon > 0 : x_N \in B(x_0; \varepsilon) \cap A$
Тоді $\forall\varepsilon > 0 : (B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ ■

1.3 Замикання множин

Definition 1.3.1 Задано (X, ρ), множина $A \subset X$ та A' - множина граничних точок A
Замиканням множини A називають таку множину

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Example 1.3.2 Маємо $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ та множину $A = (0, 1)$
Тоді множина $A' = [0, 1]$. А замикання $\bar{A} = A \cup A' = [0, 1]$

Remark 1.3.3 Розглянемо зараз сукупність замкнених множин $A \subset A_\alpha \subset X$
Перетин $B = \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ - також замкнена, водночас $A\alpha \supset B \supset A$
Отже, B - найменша замкнена множина, що містить A

Proposition 1.3.4 Задано $\bar{A}$ - замикання
1. $\bar{A}$ - найменша замкнена множина, що містить A
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\quad \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$
3. A - замкнена $\iff A = \bar{A}$

Proof.
1. !Припустимо, що $\bar{A}$ - не є найменшою замненою, що містить A, тобто $\exists B \subset \bar{A} : B \supset A$ - замкнена
Зафіксуємо т. $x_0 \in \bar{A}$ - гранична, тоді $x_0 \in A' \cup A$
Якщо $x_0 \in A'$, то тоді $x_0 \in B$, тому що B містить всі граничні т. A
Якщо $x_0 \in A$, то тоді $x_0 \in B$
В обох випадках $\bar{A} \subset B$. Отже, $\bar{A} = B$. Суперечність!

2. Перша тотожність
$\overline{A \cup B} = (A \cup B)' \cup (A \cup B) \boxed{=}$
$x_0 \in (A \cup B)' \iff x_0$ - гранична т. $A \cup B \iff \forall\varepsilon > 0 :$
$B(x_0; \varepsilon) \cap (A \cup B) = (B(x_0; \varepsilon) \cap A) \cup (B(x_0; \varepsilon) \cap B) \neq \emptyset$(без т. x_0) $\iff$
$\left[\begin{array}{l} x_0 - \text{гранична для } A \\ x_0 - \text{гранична для } B \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_0 \in A' \\ x_0 \in B' \end{array}\right. \iff x_0 \in A' \cup B'$
Отже, $(A \cup B)' = A' \cup B'$

$\boxed{=} A' \cup B' \cup A \cup B = \bar{A} \cup \bar{B}$

Друга тотожність

$\overline{A \cap B} = (A \cap B)' \cup (A \cap B) \boxed{\subset}$

$x_0 \in (A \cap B)' \iff x_0$ - гранична т. $A \cap B \iff \forall \varepsilon > 0$:

$B(x_0;\varepsilon) \cap (A \cap B) = (B(x_0;\varepsilon) \cap A) \cap (B(x_0;\varepsilon) \cap B) \neq \emptyset$(без т. x_0) $\implies$

$$\begin{cases} x_0 - \text{гранична для } A \\ x_0 - \text{гранична для } B \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 \in A' \\ x_0 \in B' \end{cases} \iff x_0 \in A' \cap B'$$

Отже, $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$

$\boxed{\subset} (A' \cap B') \cup (A \cap B) =$ (треба подумати)

3. $\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A - замкнена

Тоді A містить всі свої граничні точки. Так само A' містить граничні точки A. Тому $A = \bar{A}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $A = \bar{A}$

Тобто A містить всі свої граничні точки. Отже, A - замкнена ■

Definition 1.3.5 Задано (X, ρ)

Множина A називається **щільною** в X, якщо

$$\bar{A} = X$$

Definition 1.3.6 Задано (X, ρ)

Метричний простір називається **сепарабельним**, якщо в ньому існує скінченна чи зліченна щільна підмножина

Example 1.3.7 Розглянемо такі приклади:

1. $(\mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|)$ - сепарабельний, тому що

$\mathbb{Q}$ - зліченна та щільна підмножина в $\mathbb{R}$

2. Маємо простір $l_2 = \left\{ \vec{a} | \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$ - нормований простір

Розглянемо множину $l_2O = \{\vec{a} \in l_2 |$скінченна кількість членів не нуль$\}$

Розглянемо $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots\} \in l_2$. Доведемо, що вона - гранична для l_2O

Задамо послідовність $\{\vec{a}_n, n \geq 1\} \subset l_2O$, де кожний елемент задається таким чином

$\vec{a}_n = \{a_1, \dots, a_n, 0, \dots\}$

$\Rightarrow \rho(\vec{a}, \vec{a}_n) = ||\vec{a} - \vec{a}_n|| = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n^2 \to 0$, оскільки ряд збіжний, а тому хвіст ряду прямує до нуля

Отже, $\vec{a}_n \to \vec{a}$, тож $\vec{a}_n$ - гранична точка

Тоді можна ствердити, що l_2O - щільна в l_2, або інакше
$\overline{l_2O} = l_2$
А оскільки $l_2O \subset l_2$ та ще й нескінченна, то тоді l_2 - сепарабельний

3. Простір $C([a,b])$ - сепарабельний
Доведу пізніше, коли дізнаюсь про теорему Вейєрштрасса про наближення неперервної на відрізку функції многочленами

4. А вот простір l_∞ - не сепарабельний
Доведу пізніше

5. Підпростір сепарабельного метричного простору - сепарабельний
Доведу пізніше

1.4 Повнота

Definition 1.4.1 Задано (X, ρ) - метричний простір
Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Remark 1.4.2 Це означення можна інакше переписати

$$\rho(x_n, x_m) \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Proposition 1.4.3 Будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною

Proof.
Маємо $\{x_n, n \geq 1\}$ - збіжна, тобто $\rho(x_n, x) \overset{n\to\infty}{\to} 0$
За нерівністю трикутника, маємо
$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m)$
Якщо спрямувати одночасно $m.n \to \infty$, то тоді $\rho(x_n, x_m) \to 0$
Отже, $\{x_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна ■

Remark 1.4.4 Щоб не заплутатись
$X = (0, 1]$ - підпростір $\mathbb{R}$. Розглянемо послідовність $\left\{x_n = \dfrac{1}{n}, n \geq 1\right\}$
$x_n \to 0$ при $n \to \infty$ - збіжна, проте $0 \notin X$
Тому така послідовність не має границі в X, але вона - фундаментальна за твердженням

Definition 1.4.5 Метричний простір (X, ρ) називається **повним**, якщо будь-яка фундаментальна послідовність має границю

Example 1.4.6 Два приклади
1. $X = \mathbb{R}$ - повний за критерієм Коші із матану
2. $X = (0, 1]$ - не повний, бо принаймні $\left\{x_n = \dfrac{1}{n}, n \geq 1\right\}$ - фундаментальна, проте не має границі

Proposition 1.4.7 Задано (X, ρ) - повний та підпростір (Y, ρ)
Простір (Y, ρ) - повний $\iff$ Y - замкнена в X

Proof.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: (Y, ρ) - повний
Візьмемо фундаментальну послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ в Y, а тому вона є збіжною, тобто $y_n \to y_0 \in Y$
Отже, y_0 - гранична точка. А тому в силу повноти Y - замкнена в X

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: Y - замкнена в X
Візьмемо $\{y_n, n \geq 1\} \subset Y \subset X$ - фундаментальна. Тоді в силу повноти X, вона - збіжна (доробити)
■

Definition 1.4.8 Повний нормований простір називається **банаховим**.
Повний евклідів простір (відносно метрики, що породжена скалярним добутков) називається **гільбертовим**

Proposition 1.4.9 Нормований простір $C([a, b])$ - банахів

Proof.

Задамо фундаментальну послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ на множині $C([a, b])$
Тоді $\forall t_0 \in [a, b] : |x_n(t_0) - x_m(t_0)| \leq ||x_n - x_m|| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x_m(t)|$
Із цієї нерівності випливає, що $\forall t_0 \in [a.b] : \{x_n(t_0), n \geq 1\}$ - фундаментальна
За критерієм Коші (із матану), вона - збіжна, тобто $x_n(t_0) \overset{n\to\infty}{\to} y(t_0)$
Щойно показали поточкову збіжність $\{x_n, n \geq 1\}$ до функції y
Доведемо, що вона збігається рівномірно (тобто за нормою)
$\{x_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна, тобто
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n \geq N : ||x_n(t) - x_m(t)|| < \varepsilon$
Або $\forall t \in [a, b] : |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$
Зафіксуємо деякі $t \in [a, b]$ та $n \geq N$. А потім спрямуємо $m \to \infty$. Тоді $|x_n(t) - y(t)| < \varepsilon$
Це виконується $\forall t \in [a, b]$ та $n \geq N$, або це записується інакше
$\forall n \geq N : ||x_n - y|| < \varepsilon$
Отже, $x_n \to y$ ■

Proposition 1.4.10 Евклідів простір l_2 - гільбертів

Proof.

Задамо фундаментальну послідовність $\{\vec{x}_n, n \geq 1\}$ на множині l_2

Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : ||\vec{x}_n - \vec{x}_m|| < \varepsilon$

$$\Rightarrow ||\vec{x}_n - \vec{x}_m||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall k \geq 1 : |x_n^k - x_m^k| < \varepsilon$$

Тоді послідовність $\{x_n^k, n \geq 1\}$ - фундаментальна - тому (за матаном) збіжна, $x_n^k \to y^k$

Доведемо, що $\vec{x}$ збігається до $\vec{y}$ за нормою

Маємо $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall K \geq 1 : \sum_{k=1}^{K}(x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2$

Спрямуємо $m \to \infty$, тоді $\displaystyle\sum_{k=1}^{K}(x_n^k - y^k)^2 < \varepsilon^2$

Звідки випливає збіжність ряду $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(x_n^k - y^k)^2$ та його оцінка

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_n^k - y^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow ||\vec{x}_n - \vec{y}|| < \varepsilon$$

Отже, $\vec{x}_n \to \vec{y}$ ■

Lemma 1.4.11 Задано $\{x_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна та $\{x_{n_k}, k \geq 1\}$ - збіжна. Тоді $\{x_n, n \geq 1\}$ - збіжна

Proof.

Маємо $a_{n_k} \to a$, $k \to \infty$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \rho(a_{n_k}, a) < \varepsilon$

Також відомо, що $\forall n, m \geq N : \rho(a_n, a_m) < \varepsilon$

Треба ще $n_k \geq N$. Тоді для $n \geq n_K$

$\rho(a_n, a) \leq \rho(a_n, a_{n_K}) + \rho(a_{n_K}, a) < 2\varepsilon$

Отже, $a_n \to a_0$ ■

Theorem 1.4.12 Критерій Кантора

Задано умова Кантора: для кожної послдовності $\{B[a_n; r_n], n \geq 1\}$ такої, що $B[a_1; r_1] \supset B[a_2; r_2] \supset \ldots$ та $r_n \to 0$, існує непорожній перетин (тобто послідовність куль, що стягується)

(X, ρ) - повний $\iff$ виконується умова Кантора

Перед доведенням пропоную зробити безліч зауважень

I. Доведемо, що існує не більше однієї точки, що належить перетину

!Припустимо, що це не так, тобто $\exists b^*, b^{**} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B[a_n; r_n]$

Тоді $\forall n \geq 1 : \begin{cases} \rho(a_n, b^*) < r_n \\ \rho(a_n, b^{**}) < r_n \end{cases}$
$\Rightarrow \rho(b^*, b^{**}) \leq \rho(b^*, a_n) + \rho(a_n, b^{**}) < r_n + r_n = 2r_n$
Спрямуємо $n \to \infty$, тоді
$\rho(b^*, b^{**}) \leq 0 \Rightarrow \rho(b^*, b^{**}) = 0 \Rightarrow b^* = b^{**}$. Суперечність!

II. Покажемо, що $\{a_n, n \geq 1\}$ - послідовність центрів - фундаментальна
За умовою, $r_n \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : r_n < \varepsilon$
Достатньо взяти лише $r_N < \varepsilon$
Тоді $\forall n, m \geq N : a_m, a_n \in B[a_N, r_N] \Rightarrow \rho(a_m, a_N) < r_N$ та $\rho(a_n, a_N) < r_N$
$\Rightarrow \rho(a_n, a_m) \leq \rho(a_n, a_N) + \rho(a_N, a_m) < 2r_N < 2\varepsilon$
Отже, $\{a_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна
А тепер час доводити

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: (X, ρ) - повний
Задамо послідовність куль $\{B[a_n; r_n], n \geq 1\}$, що стягується. Тоді послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна
Оскільки X - повний, то тоді $\{a_n, n \geq 1\}$ - збіжна, тобто $a_n \to a_0$
Оскільки $B[a_n; r_n]$ - замкнені, то маємо, що $a_0 \in B_n$. Звідси $a_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: умова Кантора
Достатньо знайти для $\{a_n, n \geq 1\}$ - уже фундаментальна - збіжну підпослідовність
Нехай маємо $n_1 \in \mathbb{N}$, щоб $\forall n \geq n_1 : \rho(a_n, a_{n_1}) < \dfrac{1}{2}$
Тоді $\exists n_2 > n_1 : \forall n \geq n_2 : \rho(a_n, a_{n_2}) < \dfrac{1}{4}$
...
Тоді маємо послідовність $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ із властивістю
$\forall n \geq n_k : \rho(a_n, a_{n_k}) < \dfrac{1}{2^k}$
Маємо тоді кулі $B\left[a_{n_k}; \dfrac{1}{2^{k-1}}\right]$, що вкладені одна в одну
Дійсно, $x \in B\left[a_{n_{k+1}}; \dfrac{1}{2^k}\right] \Rightarrow$
$\rho(a_{n_k}, x) \leq \rho(a_{n_k}, a_{n_{k+1}}) + \rho(a_{n_{k+1}}, x) \leq \dfrac{1}{2^{k-1}} \Rightarrow x \in B\left[a_{n_k}; \dfrac{1}{2^{k-1}}\right]$
Якщо a - спільна точка куль, то $a_{n_k} \to a$ ■

Описує час чекання, вимірювання з ціною поділки:

$$\xi \sim U(a,b) \iff f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, \text{ інакше} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2}$$
$$\mathbb{D}\xi = \frac{(a-b)^2}{12}$$