Математичний аналіз
2 семестр

Зміст

1 Послідовності в $\mathbb{R}^m$

1.1 Загальні означення та границя послідовності

Definition 1.1.1 Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ називається **границею послідовності** $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : ||\vec{a}^{(n)} - \vec{a}|| < \varepsilon$$

Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$

Theorem 1.1.2 Для послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a} \iff$
$\iff$ для всіх координат послідовності $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ існують
$\lim\limits_{n\to\infty} a_j^{(n)} = a_j, j = 1, \dots, m$

Proof.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$, тобто

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : ||\vec{a}^{(n)} - \vec{a}|| < \varepsilon$

У нас границя визначається вектором $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$. Тоді

$||\vec{a}^{(n)} - \vec{a}|| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_1^{(m)} - a_m)^2}$

$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, m : |a_j^{(n)} - a_j| = \sqrt{(a_j^{(n)} - a_j)^2} <$

$< \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_1^{(m)} - a_m)^2} < \varepsilon$

Отже, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_j^{(n)} = a_j$

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall j = 1, \dots, m : \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_j^{(n)} = a_j$

Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |a_j^{(n)} - a_j| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$

$\Rightarrow ||\vec{a}^{(n)} - \vec{a}|| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \dfrac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$

Отже, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$ ■

Definition 1.1.3 Послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : ||\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}|| < \varepsilon$$

Theorem 1.1.4 Критерій Коші
$\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - збіжна $\iff$ $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - фундаментальна
Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - збіжна, тобто $\forall j = 1, \dots, m : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ - збіжні
Тоді всі вони - фундаментальні, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_j : \forall n, k \geq N_j :$ $|a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$
$\Rightarrow \exists N = \max\{N_1, \dots, N_m\} : \forall n, k \geq N :$
$||\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}|| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1^{(k)})^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m^{(k)})^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \dfrac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$
Отже, наша послідовність - фундаментальна

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - фундаментальна, тобто
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : ||\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}|| < \varepsilon$
Тоді $\forall j = 1, \dots, m : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \varepsilon$, тобто $\forall j = 1, \dots, m : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ - фундаментальні
Отже, вони всі - збіжні, а тому $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - збіжна $\blacksquare$

Definition 1.1.5 Послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається **обмеженою**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : ||\vec{a}^{(n)}|| \leq C$$

Definition 1.1.6 Підпослідовність послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається послідовність $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$
Де $\{n_l, l \geq 1\}$ - строго зростаюча послідовність в $\mathbb{N}$

Theorem 1.1.7 Теорема Вейерштрасса
Будь-яка обмежена послідовність векторів має збіжну підпослідовність векторів
Proof.
Маємо обмежену послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$, тобто
$\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : ||\vec{a}^{(n)}|| \leq C$
Тоді кожна координата є обмеженою, оскільки $\forall j = 1, \dots, m$
$|a_j^{(n)}| \leq \sqrt{\left|a_1^{(n)}\right|^2 + \dots + \left|a_m^{(n)}\right|^2} \leq C$
Тобто всі послідовності $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ - обмежені
Розглянемо $\{a_1^{(n)}, n \geq 1\}$ - обмежена. Тоді існує збіжна підпослідовність $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$
Розглянемо підпослідовність $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$
Вона також є обмеженою, тому всі координатні послідовності - обмежені

Розглянемо $\{a_2^{(n_l)}, l \geq 1\}$ - обмежена. Тоді існує збіжна підпідпослідовність $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$
Оскільки підпослідовність $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$ - збіжна, то збіжною буде й підпідпослідовність $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$
Розглянемо підпідпослідовність $\{\vec{a}^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ - за аналогічними міркуваннями, теж обмежена
Розглянемо підпідпослідовність $\{a_3^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ - обмежена. Тоді існує збіжна підпідпідпослідовність $\{a_3^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$
Оскільки підпідпослідовності $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$, $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ - збіжні, то збіжними будуть підпідпідпослідовності $\{a_1^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$, $\{a_2^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$
...
Після m кроків отримаємо підпослідовність $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$, у якій всі координатні послідовності є збіжними. Тоді $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$ - збіжна $\blacksquare$

Definition 1.1.8 Задано множина $A \subset \mathbb{R}^m$
Точка $\vec{x}^0$ називається **граничною точкою** множини A, якщо $\forall \varepsilon > 0 :$ $U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ - нескінченна множина

Theorem 1.1.9 Задана множина $A \subset \mathbb{R}^m$
$\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка $\iff \exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка, тобто $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ - нескінченна
Зафіксуємо $\varepsilon = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \forall \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A : ||\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0|| < \dfrac{1}{n}$
Тоді $\forall j = 1, \dots, m : |x_j^{(n)} - x_j^0| < \dfrac{1}{n}$
За теоремою про 2 поліцаїв, отримаємо: $\forall j = 1, \dots, m : x_j^{(n)} \overset{n\to\infty}{\to} x_j^0$
Із покоординатної збіжності випливає, що $\vec{x}^{(n)} \overset{n\to\infty}{\to} \vec{x}^0$ для послідовності $\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$
Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : ||\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0|| < \varepsilon$
$\Rightarrow \forall n \geq N : \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ - тобто нескінчення $\Rightarrow \vec{x}^0$ - гранична точка
$\blacksquare$

Proposition 1.1.10 Задані дві послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}, \{\vec{b}^{(n)}, n \geq 1\}$, такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)} = \vec{b}$. Тоді
1) $\forall c \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} c\vec{a}^{(n)} = c \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = c\vec{a}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\vec{a}^{(n)}+\vec{b}^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty}\vec{a}^{(n)} + \lim\limits_{n\to\infty}\vec{b}^{(n)} = \vec{a}+\vec{b}$
3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\vec{a}^{(n)}\cdot\vec{b}^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty}\vec{a}^{(n)} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\vec{b}^{(n)} = \vec{a}\cdot\vec{b}$
Proof.
1),2) *випливає з властивостей границь в $\mathbb{R}$, якщо розглянути покоординатну збіжність*

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\vec{a}^{(n)}\cdot\vec{b}^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_1^{(n)}b_1^{(n)}+\dots+a_m^{(n)}b_m^{(n)}) = a_1b_1+\dots+a_mb_m = \vec{a}\cdot\vec{b}$ ■

1.2 Границя функції

Definition 1.2.1 Задана множина $A\subset\mathbb{R}^m$ та $\vec{x}^0\in A$ - гранична точка
Маємо функцію $f: A\to\mathbb{R}$
Число a називається **границею функції** $f(\vec{x}) = f(x_1,\dots,x_m)$ **в т.** $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall\vec{x}\in A:\vec{x}\neq\vec{x}^0:||\vec{x}-\vec{x}^0||<\delta\Rightarrow|f(\vec{x})-a|<\varepsilon\text{- def. Коші}$$
$$\forall\{\vec{x}^{(n)},n\geq 1\}\subset A:\forall n\geq 1:\vec{x}^{(n)}\neq\vec{x}^0:\lim_{n\to\infty}\vec{x}^{(n)}=\vec{x}^0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(\vec{x}^{(n)})=a\text{- def. Гейне}$$

Позначення: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = a$

Theorem 1.2.2 Означення Коші $\iff$ Означення Гейне
Доведення аналогічне як в $\mathbb{R}$

Proposition 1.2.3 Арифметичні властивості
Задані функції $f,g: A\to\mathbb{R}$ та $\vec{x}^0\in A$ - гранична точка
$\exists\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = a, \exists\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} g(\vec{x}) = b$. Тоді
1) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} cf(\vec{x}) = ca, \forall c\in\mathbb{R}$
2) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0}(f(\vec{x})+g(\vec{x})) = a+b$
3) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x})g(\vec{x}) = ab$
4) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0}\dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \dfrac{a}{b}, b\neq 0$
Всі вони випливають із арифметичних послідовностей та означення Гейне

Theorem 1.2.4 Критерій Коші
Задана функція $f: A\to\mathbb{R}$ та $\vec{x}^0\in A$ - гранична точка
$\exists\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = a \iff$
$\iff \forall\varepsilon>0:\exists\delta:\forall\vec{x_1},\vec{x_2}\in A:||\vec{x_1}-\vec{x_2}||<\delta\Rightarrow|f(\vec{x_1})-f(\vec{x_2})|<\varepsilon$
Доведення аналогічне як в $\mathbb{R}$

1.3 Неперервність функції

Definition 1.3.1 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка
Функція f називається **неперервною в т.** $\vec{x}^0$, якщо $\exists \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}^0} f(\vec{x}) = \vec{x}^0$
Функція f називається **неперервною на множині** A, якщо в $\forall \vec{x} \in A$: f - неперервна

Proposition 1.3.2 Задані функції $f, g : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка
Відомо, що f, g - неперервні в т. $\vec{x}^0$. Тоді
1) cf - неперервна в т. $\vec{x}^0, \forall c \in \mathbb{R}$
2) $f + g$ - неперервна в т. $\vec{x}^0$
3) fg - неперервна в т. $\vec{x}^0$
4) $\dfrac{f}{g}$ - неперервна в т. $\vec{x}^0$, якщо $g(\vec{x}^0) \neq 0$
Випливають з властивостей границь функцій та неперервності

Theorem 1.3.3 Теорема Вейєрштраса 1, 2
Задана множина A - замкнена, обмежена та функція $f : A \to \mathbb{R}$ - неперервна на A. Тоді
1. f - обмежена на A
2. $\exists \left[\begin{aligned} &\vec{x}^* \in A \\ &\vec{x}_* \in A \end{aligned}\right. : \left[\begin{aligned} &f(\vec{x}^*) = \sup_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \\ &f(\vec{x}_*) = \inf_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \end{aligned}\right.$
Доведення аналогічне як в $\mathbb{R}$

Definition 1.3.4 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$
Функція f називається **рівномірно неперервною на множині** A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x_1}, \vec{x_2} \in A : ||\vec{x_1} - \vec{x_2}|| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2})| < \varepsilon$$

Theorem 1.3.5 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ - рівномірно неперервна на A. Тоді вона є неперервною на A
Доведення аналогічне як в $\mathbb{R}$

Theorem 1.3.6 Теорема Кантора
Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та A - замкнена, обмежена
Відомо, що f - неперевна на A. Тоді вона є рівномірно неперервною на A
Доведення аналогічне як в $\mathbb{R}$

1.4 Границя та неперервність векторнозначної функції

Definition 1.4.1 Задана множина $A \subset \mathbb{R}^m$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка
Маємо функцію $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^k$

Вектор $\vec{b}$ називається **границею функції** $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix}$ **в т.** $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : ||\vec{x} - \vec{x}^0|| < \delta \Rightarrow ||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}|| < \varepsilon \text{- def. Коші}$$

$$\forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \vec{f}(\vec{x}^{(n)}) = \vec{b} \text{- def. Гейне}$$

Позначення: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$

Definition 1.4.2 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка
Функція $\vec{f}$ називається **неперервною в т.** $\vec{x}^0$, якщо $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}^0)$

Theorem 1.4.3 Задані множини $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^k$
Задані функції $\vec{f} : A \to B$ - неперервна в т. $\vec{x}^0$, $\vec{g} : B \to \mathbb{R}$ - неперервна в т. $\vec{f}(\vec{x}^0)$
Тоді функція $h : A \to \mathbb{R} : h(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$ - неперервна в т. $\vec{x}_0$

2 Диференційованість

2.1 Для функції із багатьма змінними

Definition 2.1.1 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка
Функція f називається **диференційованою в т.** $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R} : f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to 0}{o}(||\vec{x}||)$$

Proposition 2.1.2 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка
Функція f - диференційована в т. $\vec{x}^0$. Тоді вона неперервна в т. $\vec{x}^0$

Proof.
f - диференційована в т. $\vec{x}^0$, тобто
$f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to 0}{o}(||\vec{x}||)$
Або можна це записати інакше:
$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1(x_1 - x_1^0) + \dots + L_m(x_m - x_m^0) + \underset{\vec{x}\to\vec{x}^0}{o}(||\vec{x} - \vec{x}^0||)$
$\Rightarrow \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0}(f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)) \boxed{=}$
Всі дужки прямують покоординатно до нуля, o-маленьке також, в силу н.м.
$\boxed{=} 0 \Rightarrow f$ - неперервна в т. $\vec{x}^0$ ■

Definition 2.1.3 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка
Частковою похідною функції f **в т.** x_j називають величину

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = L_j, j = 1, \dots, m$$

Definition 2.1.4 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка
Градієнтом функції f **в т.** $\vec{x}^0$ називається вектор

$$\boldsymbol{\nabla} f(\vec{x}^0) \overset{\text{або}}{=} \text{grad} f(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} = \overrightarrow{L}$$

Похідною функції f **в т.** $\vec{x}^0$ називається ковектор

$$f'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} L_1 & \dots & L_m \end{pmatrix} = \overleftarrow{L}$$

У випадку функції від трьох змін $f(x,y,z)$, градієнт можна розписати таким чином:
$\mathrm{grad} f(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

Перепишемо умову диференційованості:
$f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to 0}{o(||\vec{x}||)} \boxed{=}$
Якщо згадати, що $L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m = \left(\overrightarrow{L}\,\overrightarrow{\Delta x}\right) = \left(\mathrm{grad} f(\vec{x}^0), \overrightarrow{\Delta x}\right)$
Або побачити, що $L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m = \begin{pmatrix} L_1 & \dots & L_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{pmatrix} =$
$f'(\vec{x}^0)\overrightarrow{\Delta x}$
Тоді продовжимо рівність
$\boxed{=} \left(\mathrm{grad} f(\vec{x}^0), \overrightarrow{\Delta x}\right) + \underset{\Delta\vec{x}\to 0}{o(||\vec{x}||)} = f'(\vec{x}^0)\overrightarrow{\Delta x} + \underset{\Delta\vec{x}\to 0}{o(||\vec{x}||)}$

Definition 2.1.5 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка
Диференціалом функції $f(x)$ **в т.** $\vec{x}^0$ називається вираз

$$df(\vec{x}^0) = \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_1}\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_m}\,dx_m$$

За умовою, що $||\overrightarrow{\Delta x}|| \to 0$

Definition 2.1.6 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка
А також задано вектор $\vec{l}$, такий, що $||\vec{l}|| = 1$ - напрямок
Похідною функції f **за напрямком** $\vec{l}$ **в т.** $\vec{x}^0$ називають величину

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t}$$

Remark 2.1.7 Якщо всі координати вектора $\vec{l}$ будуть нулевими, окрім $l_j = 1$, то $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$

Proposition 2.1.8 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$, $\vec{l}$ - напрямок та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка
f - диференційована в т. $\vec{x}^0$. Тоді
$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0)\vec{l} = \left(\mathrm{grad} f(\vec{x}^0), \vec{l}\right)$

Proof.
f - диференційована в т. $\vec{x}^0$. Тоді
$f(\vec{x}^0+\Delta\vec{x})-f(\vec{x}^0)=L_1\Delta x_1+\dots+L_m\Delta x_m+\underset{\Delta\vec{x}\to 0}{o}(||\vec{x}||)$
Підставимо $\Delta\vec{x}=t\vec{l}$. Тоді
$f(\vec{x}^0+t\vec{l})-f(\vec{x}^0)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)tl_1+\dots+\dfrac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{x}^0)tl_m+\underset{\Delta\vec{l}\to 0}{o}(t||\vec{l}||)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\vec{x}^0+t\vec{l})-f(\vec{x}^0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)tl_j+o(t||\vec{l}||)}{t}=$
$=L_1l_1+\dots+L_ml_m=f'(\vec{x}^0)\vec{l}=\Big(\mathrm{grad} f(\vec{x}^0),\vec{l}\Big)$ ■

Theorem 2.1.9 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0)$ приймає за модулем:
- max, якщо $\vec{l}\parallel \mathrm{grad}\vec{f}(\vec{x}^0)$
- min, якщо $\vec{l}\perp \mathrm{grad}\vec{f}(\vec{x}^0)$

Proof.
Згадаємо нерівність Коші-Буняковського: $|(\vec{a},\vec{b})|\le ||\vec{a}||\cdot||\vec{b}||$
Із попереднього твердження, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0)=\Big(\mathrm{grad} f(\vec{x}^0),\vec{l}\Big)$. Тоді
$\left|\Big(\mathrm{grad} f(\vec{x}^0),\vec{l}\Big)\right|\le ||\mathrm{grad} f(\vec{x}^0)||\cdot||\vec{l}||$
Якщо $\vec{l}\parallel \mathrm{grad}\vec{f}(\vec{x}^0)$, то тоді $\exists\lambda\in\mathbb{R}:\mathrm{grad} f(\vec{x}^0)=\lambda\vec{l}$
$\Rightarrow \left|(\vec{l},\lambda\vec{l})\right|=\lambda||\vec{l}||^2\le\lambda||\vec{l}||^2$
Отже, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0)$ приймає max значення
Якщо $\vec{l}\perp \mathrm{grad}\vec{f}(\vec{x}^0)$, то тоді $\Big(\mathrm{grad} f(\vec{x}^0),\vec{l}\Big)=0$ - найменше значення за модулем
Отже, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0)$ приймає min значення ■

2.2 Для векторнозначних функцій

Definition 2.2.1 Задана функція $\vec{f}:A\to\mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0\in A$ - гранична точка
Функція $\vec{f}$ називається **диференційованою в т.** $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists M\in Mat(m\times k):\vec{f}(\vec{x}^0+\Delta\vec{x})-f(\vec{x}^0)=M\Delta\vec{x}+\underset{\Delta\vec{x}\to 0}{o}(||\vec{x}||)$$

Дізнаємось, що це за матриця $M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(||\Delta\vec{x}||) \\ \vdots \\ o(||\Delta\vec{x}||) \end{pmatrix}$$

Із цієї рівності випливає, що $\forall j = 1, \dots, k$:
$f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f_j(\vec{x}^0) = M_{j1}\Delta x_1 + \dots + M_{jm}\Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to 0}{o}(||\vec{x}||)$

Тоді звідси випливає, що:
$M_{j1} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}(\vec{x}^0), \dots, M_{jm} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_m}(\vec{x}^0)$

В результаті отримаємо ось такий вигляд матриці:

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = J(x) = \vec{f}'(\vec{x}^0)$$ - **матриця Якобі**

Proposition 2.2.2 Задана функція $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка

Функція $\vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$. Тоді вона неперервна в т. $\vec{x}^0$

Proof.

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \big(M(\vec{x} - \vec{x}^0) + o(||\vec{x} - \vec{x}^0||)\big) = 0$ ■

2.3 Властивості

Theorem 2.3.1 Достатня умова диференційованості

Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка

Відомо, що $\exists \varepsilon > 0 : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall j = 1, \dots, m : \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$ - неперервна в т. $\vec{x}^0$. Тоді функція f - диференційована в т. $\vec{x}^0$

Proof.

Ми будемо доводити, коли $m = 2$. Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа

Отже, дано $f(x, y)$ та в околі т. (x_0, y_0) існують часткові похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ та $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ - ще й неперервні

$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$

$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) \boxed{=}$
Позначу $h(t) = f(x_0+\Delta x, y_0+t), t \in [0, \Delta y]$
Тоді $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) = h(\Delta y) - h(0)$
$h \in C([0,\Delta y])$, а також диференційована на $(0, \Delta y)$. Тоді за Лагранжом
$h(\Delta y) - h(0) = h'(c_1)\Delta y, c_1 \in (0, y)$
$h'(t) = f'_t(x_0+\Delta x, y_0+t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+t)$
$\Rightarrow h(\Delta y) - h(0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1)\Delta y$

Аналогічно $g(s) = f(x_0+s, y_0), s \in [0, \Delta x]$
Тоді $f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) = g(\Delta x) - g(0) \overset{\text{Лагранжа}}{=} g'(c_2)\Delta x =$
$= \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0)\Delta x, c_2 \in (0, \Delta x)$
Повертаємось до нашої рівності

$\boxed{=} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1)\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0)\Delta x$
Лишилось довести, що
$(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right) = \underset{\Delta x \to 0 \quad \Delta y \to 0}{o(||(\Delta x, \Delta y)||)}$
Маємо:
$(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right) =$
$= \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1)\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0)\Delta x\right) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right)$
$= \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\Delta x + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\Delta y$
Якщо $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, то звідси $c_1 \to 0, c_2 \to 0$ та за умовою того, що часткові похідні є неперервними, маємо:
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) \overset{\text{позн}}{=} \alpha \to 0$
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \overset{\text{позн}}{=} \beta \to 0$
Далі:
$|\alpha\Delta x + \beta\Delta y| \overset{\text{К-Б}}{\leq} ||(\alpha,\beta)|| \cdot ||(\Delta x, \Delta y)|| = o(||(\Delta x, \Delta y)||)$ - можна перевірити за лімітом $\Rightarrow \alpha\Delta x + \beta\Delta y = o(||(\Delta x, \Delta y)||)$
Остаточно отримуємо:
$(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right) =$

$o(||(\Delta x, \Delta y)||)$ ■
$\Delta x \to 0 \quad \Delta y \to 0$

Proposition 2.3.2 Задані функції $f, g : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка
f, g - диференційовані в т. $\vec{x}^0$. Тоді:
1) αf - диференційована в т. $\vec{x}^0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, похідна $(\alpha f)' = \alpha f'$
2) $f + g$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$, похідна $(f+g)' = f' + g'$
3) fg - диференційована в т. $\vec{x}^0$, похідна $(fg)' = f'g + fg'$

Proof.
2) $f(\vec{x}) + g(\vec{x}) - [f(\vec{x}^0) + g(\vec{x}^0)] = [f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)] + [g(\vec{x}) - g(\vec{x}^0)] =$
$= f'(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0) + o(||\vec{x} - \vec{x}^0||) + g'(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0) + o(||\vec{x} - \vec{x}^0||) =$
$= (f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0))(\vec{x} - \vec{x}^0) + \underset{\vec{x} \to \vec{x}^0}{o(||\vec{x} - \vec{x}^0||)}$

3) $f(\vec{x})g(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) = f(\vec{x})g(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}) + f(\vec{x}^0)g(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) =$
$[f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)]g(\vec{x}) + [g(\vec{x}) - g(\vec{x}^0)]f(\vec{x}^0) =$
$= [f'(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0) + o(||\vec{x} - \vec{x}^0||)]g(\vec{x}) + [g'(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0) + o(||\vec{x} - \vec{x}^0||)]f(\vec{x}^0) =$
Коли $\vec{x} \to \vec{x}^0$), то звідси $g(\vec{x}) \to g(\vec{x}^0)$. Тоді функція g є обмеженою

1) *Зрозуміло* ■

Proposition 2.3.3 Задані функції $\vec{f} : A \to B$ та $g : B \to \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}^n$
$\vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$ та g - диференційована в т. $\vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{y}^0$
Тоді функція $h : A \to \mathbb{R}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$, а також
$h'(\vec{x}^0) = f'(\vec{y}^0)g'(\vec{x}^0)$
$\dfrac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial g}{\partial y_1}(\vec{y}^0)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \dots + \dfrac{\partial g}{\partial y_n}(\vec{y}^0)\dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(\vec{x}^0), j = 1, \dots, k$
Proof.
За означенням диференційованості, маємо
$h(\vec{x}) - h(\vec{x}^0) = f(\vec{g}(\vec{x})) - f(\vec{g}(\vec{x}^0)) =$
Тимчасово позначу $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$
$= f(\vec{y}) - f(\vec{y}^0) = f'(\vec{y}^0)(\vec{y} - \vec{y}^0) + o(||\vec{y} - \vec{y}^0||)\boxed{=}$
Маємо $\vec{y} - \vec{y}^0 = \vec{g}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{x}^0) = g'(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0) + o(||\vec{x} - \vec{x}^0||)$
Отже, $o(||\vec{y} - \vec{y}^0||) = o(||g'(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0)||) + o(||\vec{x} - \vec{x}^0||) \overset{g'(\vec{x}^0) = const}{=} o(||\vec{x} - \vec{x}^0||)$
$\boxed{=} f'(\vec{y}^0)g'(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0) + o(||\vec{x} - \vec{x}^0||)$
Тобто $h'(\vec{x}^0) = f'(\vec{y}^0)g'(\vec{x}^0)$

А тепер розпишемо це більш детально

$$h'(\vec{x}^0) = f(\vec{y}^0)g'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}(\vec{y}^0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial y_n}(\vec{y}^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{x}^0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k}(\vec{x}^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\vec{x}^0) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_k}(\vec{x}^0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}(\vec{y}^0)\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{x}^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n}(\vec{y}^0)\frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial y_1}(\vec{y}^0)\frac{\partial g_1}{\partial x_k}(\vec{x}^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n}(\vec{y}^0)\frac{\partial g_n}{\partial x_k}(\vec{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_k}(\vec{x}^0) \end{pmatrix}$$

Якщо порівняти кожну координату цієї рівності, то отримаємо бажане
■

2.4 Дотична площини, нормаль прямій

В підрозділі 2.4 та 2.6 ми задамо функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка, стосується для всіх означень та теорем
Також задамо таку поверхню

$$\Pi = \{\vec{x}, z) : z = f(\vec{x})\}$$

Площина в $\mathbb{R}^{n+1}$, що проходить через т. $(\vec{x}^0, z^0 = f(\vec{x}^0))$, задається таким рівнянням
$z = z^0 + K_1(x_1 - x_1^0) + \dots + K_n(x_n - x_n^0) \qquad K_1, \dots, K_n \in \mathbb{R}$

Definition 2.4.1 Дотичною площиною до поверхні Π в т. $\vec{x}^0$ називається площина в $\mathbb{R}^{n+1}$, що проходить через т. $(\vec{x}^0, z^0 = f(\vec{x}^0))$, для якої виконана рівність

$$z - f(\vec{x}) = o(||\vec{x} - \vec{x}^0||), \vec{x} \to \vec{x}^0$$

Theorem 2.4.2 Поверхня Π має дотичну площину в т. $\vec{x}^0 \iff f$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$, а також
$K_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0), j = \overline{1, n}$
Вправа: довести

Тоді дотична площини задається таким рівнянням:

$$z - f(\vec{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n - x_n^0)$$

Definition 2.4.3 Нормальною прямою до поверхні Π в т. $\vec{x}^0$ називається пряма в $\mathbb{R}^{n+1}$, що проходить через т. $(\vec{x}^0, z^0 = f(\vec{x}^0))$ та перпендикулярна до дотичної площини

Вектор нормалі дотичної площини $\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0), -1\right)$.
Тоді це буде напрямним вектором для нормалі прямої.
Тоді нормальна пряма задається таким рівнянням:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)} = \cdots = \frac{x_n - x_n^0}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)} = \frac{z - z^0}{-1}$$

Випадок $\mathbb{R}^3$

Маємо функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та граничну точку $(x_0, y_0) \in A$
$z = f(x, y)$
Дотична площини

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Нормаль прямої

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

2.5 Приблизне обчислення

$z - f(\vec{x}) = o(||\vec{x} - \vec{x}^0||)$
Якщо $\vec{x}_0$ близлький до $\vec{x}$, тобто $||\vec{x} - \vec{x}^0|| << 1$, то тоді
$f(\vec{x}) - z \approx 0$
$\Rightarrow f(\vec{x}) \approx z^0 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)(x_n - x_n^0)$

2.6 Дотична пряма, нормаль площини кривої

Definition 2.6.1 Кривою в просторі $\mathbb{R}^n$ задається таким рівнянням

$$\vec{x} = \vec{x}(t), t \in (a, b)$$

Прямою в просторі $\mathbb{R}^n$ задається таким рівнянням

$$\vec{x} = s\vec{l} + \vec{x}^0, s \in \mathbb{R}$$

Definition 2.6.2 Дотичною до кривої $\vec{x} = \vec{x}(t)$ називається пряма

$$\vec{x}(t) - \vec{x}^0 = (t - t_0)\vec{l} + o(t - t_0), t \to t_0$$

Theorem 2.6.3 Пряма $\vec{x} = s\vec{l} + \vec{x}^0$ - дотична до кривої $\vec{x} = \vec{x}(t) \iff \vec{x}(t)$ - диференційована в т. t_0, а також $\vec{l} = \vec{x}'(t_0)$
Вправа: довести

Тоді дотична пряма задається рівнянням:

$$\vec{x} = s \cdot \vec{x}'(t_0) + \vec{x}^0, s \in \mathbb{R}$$

Напрямний вектор прямої $\vec{l} = (x_1'(t_0), \dots, x_n'(t_0))$
Тоді це буде нормальним вектором для нормалі плоищини
Тоді нормальна площина задається таким рівнянням:

$$x_1'(t_0)(x_1 - x_1^0) + \dots + x_n'(t_0)(x_n - x_n^0) = 0$$

Випадок $\mathbb{R}^3$

Маємо криву $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in (a, b)$
Дотична прямої

$$\begin{cases} x = sx'(t_0) + x_0 \\ y = sy'(t_0) + y_0 \\ z = sz'(t_0) + z_0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

Нормаль площини

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

2.7 Неявно задані функції

Remark 2.7.1 Приклад для розуміння
Задано рівняння кола на площині $\mathbb{R}^2$
$x^2 + y^2 - 1 = 0$
Ми хочемо знайти дотичні в якійсь т. x_0. Тут виникає неявність, якщо виразити $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. А бувають приклади й набагато гірше, де y виразити явно зовсім неможна
$\sin(x, y) + 2x - y = 0$

Але намалювати її я можу, тому я хочу дотичну. Що робити

Саме тому розглядають рівняння $F(x, y) = 0$, де F - **неявна функція**

Theorem 2.7.2 Задана неявна функція $F : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$, де U - окіл т. (x_0, y_0). Відомо, що виконуються такі умови
1) $F(x_0, y_0) = 0$
2) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$
3) $F \in C^{(m)}(U(x_0, y_0))$
Тоді справедливо наступне:
I) $\exists \delta_1, \delta_2 > 0 : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2) \subset U(x_0, y_0)$
II) $\exists f : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \to (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$, така, що
$f \in C^{(m)}((x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1))$ та
$(x, y) \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2) \iff \begin{cases} x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \\ y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2) \end{cases}$
III) $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$
IV) $f'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)\Big|_{(x, f(x))}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)\Big|_{(x, f(x))}}$
Без доведення. Можна подивитись у Зоріча зі 20 сторінками

Remark 2.7.3 Ця теорема повторюється для функцій $F(\vec{x}, z)$ та навіть $F(\vec{x}, \vec{y})$

2.8 Диференціювання та похідні старших порядків

Definition 2.8.1 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка. Також f - диференційована в околі т. $\vec{x}^0$
Частковими похідними другого роду від функції f в т. $\vec{x}^0$ називається

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}^0)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}^0)$$

Definition 2.8.2 Функція f називається **двічі диференційованою в т.** $\vec{x}^0$, якщо $\mathrm{grad} f$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$, тобто

$$\mathrm{grad} f(\vec{x}) - \mathrm{grad} f(\vec{x}^0) = M(\vec{x} - \vec{x}^0) + o(||\vec{x} - \vec{x}^0||), \vec{x} \to \vec{x}^0$$

де M - матриця всіх часткових похідних $\mathrm{grad} f(\vec{x})$ - **матриця Гесе**

$$f''(\vec{x}) = M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x_n)^2} \end{pmatrix} (\vec{x})$$

Theorem 2.8.3 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка.
Також f - диференційована в околі т. $\vec{x}^0$
Відомо, що $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x})$, що є неперервними в околі т. $\vec{x}^0$
Тоді не залежить від порядку диференціювання

Proof.
Ми будемо доводити, коли $m = 2$. Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа

Отже, дано $f(x, y)$ та в околі т. (x_0, y_0) існують часткові похідні другого порядку $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ - ще й неперервні
Розглянемо функції:
$g(x_0, y_0) = f(x_0 + t\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$
$h(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + s\Delta y) - f(x_0, y_0)$
Для них маємо:
$g(x_0, y_0 + s\Delta y) - g(x_0, y_0) =$
$= [f(x_0 + t\Delta x, y_0 + s\Delta y) - f(x_0, y_0 + s\Delta y)] - [f(x_0 + t\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] =$
$= [f(x_0 + t\Delta x, y_0 + s\Delta y) - f(x_0 + t\Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + s\Delta y) - f(x_0, y_0)] =$
$= h(x_0 + t\Delta x, y_0) - h(x_0, y_0)$
Розглянемо ліву частину рівності
$g(x_0, y_0 + s\Delta y) - g(x_0, y_0) \boxed{=}$
Скористаємось теоремою Лагранжа, якщо $k(s) = g(x_0, y_0 + s\Delta y)$. Тоді
$k(s) - k(0) = k'(\tau) \cdot s, \tau \in (0, s)$
А далі беремо похідну
$k'(s) = (g(x_0, y_0 + s\Delta y))'_s = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0 + s\Delta y)\dfrac{d(s\Delta y)}{ds} = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0 + s\Delta y)\Delta y$
$\boxed{=} \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0 + \tau\Delta y)\Delta y \cdot s$, тут $\tau \in (0, s)$
Розпишемо частинну похідну окремо
$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0 + \tau\Delta y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(f(x_0 + t\Delta x, y_0 + \tau\Delta y) - f(x_0, y_0 + \tau\Delta y)\right) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t\Delta x, y_0 + \tau \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \tau\Delta y)\boxed{=}$$

І знову теорема Лагранжа, якщо $p(t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t\Delta x, y_0 + \tau\Delta y)$. Тоді

$p(t) - p(0) = p'(\theta)t, \theta \in (0, t)$

Знову беремо похідну

$$p'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t\Delta x, y_0 + \tau\Delta y)\right)'_t = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + t\Delta x, y_0 + \tau\Delta y)\Delta x$$

$\boxed{=} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \tau\Delta y)\Delta x \cdot t$, тут $\theta \in (0, t)$

Разом отримаємо:

$$g(x_0, y_0 + s\Delta y) - g(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0 + \tau\Delta y)\Delta y \cdot s =$$

$= \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \tau\Delta y)\Delta x\Delta y \cdot t \cdot s$, де $\theta \in (0, t), \tau \in (0, s)$

Все аналогічно робиться для правої частини рівності

$h(x_0 + t\Delta x, y_0) - h(x_0, y_0) = \dots =$

$= \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0 + \gamma\Delta x, y_0 + \zeta\Delta y)\Delta y\Delta x \cdot s \cdot t$, де $\gamma \in (0, t), \zeta \in (0, s)$

Отримуємо таку рівність

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\tau\Delta y)\Delta x\Delta y\cdot t\cdot s = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\gamma\Delta x, y_0+\zeta\Delta y)\Delta y\Delta x\cdot s\cdot t$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \tau\Delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0 + \gamma\Delta x, y_0 + \zeta\Delta y)$$

Зробимо спрямування: $t \to 0, s \to 0 \Rightarrow \theta \to 0, \tau \to 0, \gamma \to 0, \zeta \to 0$

Через неперервність ми отримаємо:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \tau\Delta y) \to \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0 + \gamma\Delta x, y_0 + \zeta\Delta y) \to \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0, y_0)$$

Остаточно отримали: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0, y_0)$ ■

Definition 2.8.4 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка. Також f - диференційована в околі т. $\vec{x}^0$

Другим диференціалом функції f називають насправді вираз $d^2 f(\vec{x}) = d(df(\vec{x}))$

Але ГБ давав це як формулу

$$d^2 f(\vec{x}) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_k} \, dx_j \, dx_k$$

Definition 2.8.5 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка. Також f - диференційована в околі т. $\vec{x}^0$

Частковим похідним $m+1$-го порядку називають похідні

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_{m+1}}} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}} \right) (\vec{x}) = \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_{m+1}} \partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}} (\vec{x})$$

Похідною m-го порядку функції f називають

$$f^{(m)}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \right)_{j_1, \dots, j_m = 1}^{n}$$

Як казав ГБ, ця річ - вже більш страший об'єкт на розглядання - називають це тензором

Якщо грубо казати про те, що таке тензор

$0D$-тензор - число

$1D$-тензор - вектор

$2D$-тензор - матриця

$3D$-тензор - кубічна матриця, напевно)

і т.д.

Remark 2.8.6 Якщо часткові похідні вищих порядків неперервні, то там також не залежить від порядку диференціювання

2.9 Формула Тейлора

Theorem 2.9.1 Теорема Тейлора

Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ така, що $f \in C^{(m)}(A)$ і т. $\vec{x}^0 \in A$. Відомо, що існує окіл $U_\varepsilon(\vec{x}^0) \subset A$

Тоді $\exists \theta \in (0,1) : f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{f'(\vec{x}^0)}{1!}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \dfrac{f''(\vec{x}^0)}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 + \dots$

$+ \dfrac{f^{(m-1)}(\vec{x}^0)}{(m-1)!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^{m-1} + \dfrac{f^{(m)}(\vec{x}^0 + \theta(\vec{x} - \vec{x})^0}{m!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^m$

Remark 2.9.2 Оскільки тензори ми ніколи не проходили і не будемо, то ГБ одразу дає формулу, що під $f^{(k)}(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0)^k$ можна розуміти

$$f^{(k)}(\vec{x}^0)(\vec{x} - \vec{x}^0)^k = \sum_{j_1, \dots, j_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} (\vec{x}^0) \cdot (x_{j_1} - x_{j_1}^0) \dots (x_{j_k} - x_{j_k}^0)$$

Щоб було простіше сприймати цю формулу, перейдемо в $\mathbb{R}^3$
Ми маємо функцію $f(x, y)$. Тоді замість $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ ми підставляємо або x, або y
Якщо б ми шукали третю похідну з дужкою, то було б сумання з такою комбінацією: $xxx, xxy, xyy, xyx, yxy, yxx, yyx, yyy$

Proof.
Розглянемо функцію $p(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$, тут $|t| \le 1$
Фактично ми розглядаємо функцію від однієї змінної, для якої можна застосувати формулу Тейлора ще з першого семестру
Знайдемо похідні від цієї функції
$p'(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))'_t = f'(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0)$
$p''(t) = [f'(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0)]'_t = f''(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))(\vec{x} - \vec{x}^0)^2$
$\vdots$ Індукцією можна довести, що
$p^{(k)}(t) = f^{(k)}(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))^k$
Тепер застосуємо цю формулу для $t_0 = 0$
$p(t) = p(0) + \dfrac{p'(0)}{1!}t + \dfrac{p''(0)}{2!}t^2 + \dots + \dfrac{p^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1} + \dfrac{p^{(m)}(\theta(t))}{m!}t^m$, де $\theta(t) \in (0, t)$
Ну й тоді
$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0 + 1 \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0)) = p(1) =$$
$$= p(0) + \frac{p'(0)}{1!} + \frac{p''(0)}{2!} + \dots + \frac{p^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{p^{(m)}(\theta)}{m!} =$$
$$= f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{f'(\vec{x}^0)}{1!}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \frac{f''(\vec{x}^0)}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(m-1)}(\vec{x}^0)}{(m-1)!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^{m-1} + \frac{f^{(m)}(\vec{x}^0 + \theta(\vec{x} - \vec{x})^0}{m!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^m$$
Причому $\theta \in (0, 1)$ $\blacksquare$

Можна обережно довести, що
$\dfrac{f^{(m)}(\vec{x}^0 + \theta(\vec{x} - \vec{x})^0}{m!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^m = o(||\vec{x} - \vec{x}^0||^{m-1}), \vec{x} \to \vec{x}^0$ - отримаємо

Corollary 2.9.3 Ті самі вимоги, що в теоремі Тейлора
$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{f'(\vec{x}^0)}{1!}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \frac{f''(\vec{x}^0)}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(m-1)}(\vec{x}^0)}{(m-1)!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^{m-1} + o(||\vec{x} - \vec{x}^0||^{m-1}), \vec{x} \to \vec{x}^0$$

(додати теорему про обернену функцію)

2.10 Екстремуми

Definition 2.10.1 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ Точка $\vec{x}^0$ називається точкою
- **локального максимуму**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \geq f(\vec{x})$
- **локального мінімуму**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \leq f(\vec{x})$

для строгих екстремумів нерівність строга та $\vec{x} \neq \vec{x}^0$

Theorem 2.10.2 Необхідна умова локального екстремуму
Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$ така, що має всі частинні похідні в т. $\vec{x}^0$
Відомо, що $\vec{x}^0$ - локальний екстремум. Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = 0, \forall j = \overline{1,n}$

Proof.
Розглянемо функцію $h(x) = f(t, x_2^0, \dots, x_n^0)$ - функція від однієї змінної, така, що $t_0 = x_1^0$ - локальний екстремум. Більш того, $h'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2^0, \dots, x_n^0)$
Тоді за необхідною умовою локального екстремуму мат аналіза 1 семестру, $h'(t_0) = 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0$
Для інших змінних аналогічно ■

Вам далі треба згадати щось про квадратичні форми матриць, які є строго/нестрого додатньо/від'ємно визначеними, а також критерій Сільвестра

Lemma 2.10.3 Задана матриця $B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} b_{11}(\vec{x}) & \dots & b_{1n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n}(\vec{x}) & \dots & b_{nn}(\vec{x}) \end{pmatrix} \in C(A)$
Відомо, що $B(\vec{x}^0)$ - строго додатньо/від'ємно визначена.
Тоді $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}) : B(\vec{x})$ - строго додатньо/від'ємно визначена

Proof.
За умовою, $B(\vec{x}) \in C(A)$, тобто всі функції в матриці неперервні. Обчислюючи кутові мінори $\Delta_k, k = \overline{1,n}$, отримаємо, що $\Delta_k \in C(A)$
Розглянемо випадок строго додатньої визначенності, тоді $\Delta_k(\vec{x}^0) > 0$
Оскільки $\vec{x}^0$ - внутрішня, то $\exists U_{\varepsilon_k}(\vec{x}^0)$, де $\forall \vec{x} \in U_{\varepsilon_k}(\vec{x}^0) : \Delta_k(\vec{x}) > 0$
Оберемо $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, тоді
$\forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall k = \overline{1,n} : \Delta_k(\vec{x}) > 0$
Тоді за критерієм Сильвестра, $B(\vec{x})$ - строго додатньо визначена ■

Theorem 2.10.4 Достатня умова локального екстремуму
Задана функція $f : A \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C^{(2)}(A)$, а також $\vec{x}^0$ - критична точка
1) $f''(\vec{x}^0)$ - строго додатньо визначена. Тоді $\vec{x}^0$ - строгий локальний мінімум
2) $f''(\vec{x}^0)$ - строго від'ємно визначена. Тоді $\vec{x}^0$ - строгий локальний максимум
3) $f''(\vec{x}^0)$ - знако-невизначена. Тоді $\vec{x}^0$ - не локальний екстремум

Proof.
За умовою, $\vec{x}^0$ - критична точка $\Rightarrow f'(\vec{x}^0) = \mathbf{0}$
Запишемо функцію у вигляді формули Тейлора
$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{f''(\vec{x}^0 + \theta(\vec{x} - \vec{x}^0))}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2$
$\Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{(f''(\vec{x}^0 + \theta(\vec{x} - \vec{x}^0))(\vec{x} - \vec{x}^0), (\vec{x} - \vec{x}^0))}{2}$
1) $f''(\vec{x}^0)$ - строго додатньо визначена. Тоді $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f''(\vec{x})$ - строго додатньо визначена.
Тоді за означенням, $(f''(\vec{x}^0 + \theta(\vec{x} - \vec{x}^0))(\vec{x} - \vec{x}^0), (\vec{x} - \vec{x}^0)) > 0$
Звідси $f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > 0 \implies \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}) > f(\vec{x}^0)$
$\Rightarrow \vec{x}^0$ - локальний мінімум

2) $f''(\vec{x}^0)$ - строго від'ємно визначена. Тоді $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f''(\vec{x})$ - строго від'ємно визначена.
Тоді за означенням, $(f''(\vec{x}^0 + \theta(\vec{x} - \vec{x}^0))(\vec{x} - \vec{x}^0), (\vec{x} - \vec{x}^0)) < 0$
Звідси $f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) < 0 \implies \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}) < f(\vec{x}^0)$
$\Rightarrow \vec{x}^0$ - локальний максимум

3) $f''(\vec{x}^0)$ - знако-невизначена. Тоді
$(f''(\vec{x}^0 + \theta(\vec{x}_1 - \vec{x}^0))(\vec{x}_1 - \vec{x}^0), (\vec{x}_1 - \vec{x}^0)) > 0$ та
$(f''(\vec{x}^0 + \theta(\vec{x}_2 - \vec{x}^0))(\vec{x}_2 - \vec{x}^0), (\vec{x}_2 - \vec{x}^0)) < 0$
в двух різних точках $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in U_\varepsilon(\vec{x}^0)$
Тоді за попередними пунктами, $f(\vec{x}^0) < f(\vec{x}_1)$ та $f(\vec{x}^0) > f(\vec{x}_2)$, що порушують означення локального екстремуму для т. $\vec{x}^0$ $\blacksquare$

2.11 Умовні локальні екстремуми

Definition 2.11.1 Задана система функцій $\phi_j : A \to \mathbb{R}$, такі, що $\forall j = \overline{1,s} : \phi_j \in C'(A)$. Відомо, що вони також задовільняють умові
$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = s \text{ - деякий максимально можливий ранг}$$
Тоді рівняння $\phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1,s}$ називаються **умовами зв'язку**

Definition 2.11.2 Задано множину $M = \{\vec{x} : \phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1,s}\}$
Точка $\vec{x}^0$ називається **умовним локальним**
- **максимумом**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \geq f(\vec{x})$
- **мінімумом**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \leq f(\vec{x})$
для строгих екстремумів нерівність строга

Одразу формулювати теорему буде складно, тому ми будемо спочатку будувати наші роздуми, як зрозуміти, що $\vec{x}^0$ - умовний локальний екстремум

Маємо множину $M = \{\vec{x} : \phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1,s}\}$ та $\vec{x}^0$ - локальний екстремум
Розглянемо диференційовану криву $\gamma = \{\vec{x}(t), t \in (-\delta, \delta)\} \subset M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^0)$, причому нехай $\vec{x}(0) = \vec{x}^0$
Функцію $f(\vec{x})$ звузимо на криву γ - отримаємо функцію $h(t) = f(\vec{x}(t))$, де має локальний екстремум в т. $t_0 = 0$. Тоді за необхідною умовою, $h'(0) = 0$
З іншого боку, $h'(0) = f'(\vec{x}(0)) \cdot \vec{x}'(0) \boxed{=}$
Тут $f'(\vec{x}(0)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}(0)) & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}(0)) \end{pmatrix}$
А також $\vec{x}'(0) = \begin{pmatrix} x_1'(0) & \dots & x_n'(0) \end{pmatrix}$
Множимо два вектори скалярно
$\boxed{=} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) x_1'(0) + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0) x_n'(0) = (\text{grad} f(\vec{x}^0), \vec{x}'(0))$
$\implies (\text{grad} f(\vec{x}^0), \vec{x}'(0)) = 0 \implies \text{grad} f(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0)$
Маємо зв'язок: $h'(0) = 0 \iff \text{grad} f(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0)$

З'ясуємо, які властивості має $\vec{x}'(0)$, якщо $\gamma = \{\vec{x}(t), t \in (-\delta, \delta)\} \subset M$
Отже, $\vec{x}(t) \subset M \iff \phi_j(\vec{x}(t)) = 0 \overset{(*)}{\iff} \phi_j'(\vec{x}(0)) \cdot \vec{x}'(0) = 0 \iff \text{grad}\phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0)$
Маємо зв'язок 2: $\forall j = \overline{1,s} : \text{grad}\phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0) \iff \vec{x}(t) \subset M$
$(*)$ Чому в зворотній бік працює: $\phi_j'(\vec{x}(0)) \cdot \vec{x}'(0) = 0$. Тоді $\vec{x}'(0)$ перпендикулярна всім дотичним площинам до поверхонь $\phi_j(\vec{x}(t)) = 0$, тож $\vec{x}'(0)$ - дотичний вектор кривої $\gamma \Rightarrow \gamma \subset M$

Підсумуємо:
$\forall j = \overline{1,s} : \text{grad}\phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0) \iff \vec{x}(t) \subset M \iff$
$\iff h(t) = f(\vec{x}(t))$ має екстремум в т. $\vec{x}^0 \iff h'(0) = 0 \iff$
$\iff \text{grad} f(\vec{x}^0) \perp \vec{x}'(0)$

Крива γ - довільно обрана, тоді $\vec{x}'(0)$ - довільний, що під умовами зв'язку
Тоді наша еквівалентність каже про те, що
$\text{grad} f(\vec{x}^0) \in span\{\text{grad}\phi_j(\vec{x}^0) : j = \overline{1,s}\}$ - ця лінійна оболонка в силу рангу є лінійно незалежною. Тому кожний елемент, який туди потрапляє, розкладається лінійною комбінацією елементів, власне
$\exists \lambda_j, j = \overline{1,s} : \text{grad}\vec{f}(\vec{x}^0) = \lambda_1 \text{grad}\phi_1(\vec{x}^0) + \dots + \lambda_s \text{grad}\phi_s(\vec{x}^0)$

Отримали теорему

Theorem 2.11.3 Необхідна умова умовного локального екстремуму
Задана множина $M = \{\vec{x} : \phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1,s}\}$ та функція $f : A \to \mathbb{R}$ така, що $f \in C'(A)$
Відомо, що $\vec{x}^0$ - точка умовного локального екстремуму. Тоді
$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_s : \mathrm{grad}\vec{f}(\vec{x}^0) - \big(\lambda_1 \mathrm{grad}\phi_1(\vec{x}^0) + \dots + \lambda_s \mathrm{grad}\phi_s(\vec{x}^0)\big) = 0$
Довели

До речі, останню умову можна переписати таким чином
Ми створимо лагранжіан $L(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f(\vec{x}) - \displaystyle\sum_{j=1}^{s} \lambda_j \phi_k(\vec{x})$
Тоді в т. $\vec{x}^0$ - екстремум, отже, $L'_{\vec{x}}(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = 0$

Theorem 2.11.4 Достатня умова умовного локального екстремуму
Задана множина $M = \{\vec{x} : \phi_j(\vec{x}) = 0, j = \overline{1,s}\}$ та функція $f : A \to \mathbb{R}$ така, що $f \in C''(A)$
Відомо, що
1) $\vec{x}^0$ - критична точка для лагранжіана
2) $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$, для яких $\mathrm{grad}\phi_j(\vec{x}^0) \perp \vec{h}$, визначається квадратична форма $L''_{\vec{x},\vec{x}}(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s)\vec{h}^2 = \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{\partial x_j \partial x_k} h_j h_k$. Якщо права частина виразу
- більше нуля, то $\vec{x}^0$ - точка строго умного локального мінімуму
- менше нуля, то $\vec{x}^0$ - точка строго умного локального мінімуму
- для знако-невизначених квадратичних форм $\vec{x}^0$ - не умовний екстремум

Proof.
Якщо брати т. $\vec{x} \in M$, то тоді лагранжіан $L(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f(\vec{x})$
Для неї застосуємо формулу Тейлора

$$L(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = L(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) + \frac{L'_{\vec{x}}(\vec{x}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{1!}(\vec{x} - \vec{x}^0) +$$
$$+ \frac{L''_{\vec{x},\vec{x}}(\vec{x}^0 - \theta(\vec{x} - \vec{x}^0), \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2$$

Тоді отримаємо, що

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{L''_{\vec{x},\vec{x}}(\vec{x}^0 - \theta(\vec{x} - \vec{x}^0), \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{2!}(\vec{x} - \vec{x}^0)^2$$

Тепер все залежить від правої частині рівності
Ми розглянемо диференційовану криву
$\gamma = \{\vec{x}(t), t \in (-\delta, \delta)\} \subset M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^0)$, причому $\vec{x}(0) = \vec{x}^0$
Тоді $\vec{x}(t) - \vec{x}^0 = \vec{x}'(0)t + \vec{o}(t)$

Для нашої кривої також відомо факт $\text{grad}\phi_j(\vec{x}^0) \perp \underbrace{\vec{x}'(0)}_{=\vec{h}}$

Підставимо це все в нашу формулу

$f(\vec{x}(t)) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{L''_{\vec{x},\vec{x}}(\vec{x}^0 - \theta(\vec{x}(t) - \vec{x}^0), \lambda_1, \dots, \lambda_s)}{2!}\vec{h}^2 t^2 + \vec{o}(t^2)$

Оскільки $L''_{\vec{x},\vec{x}}(\vec{x}^0, \dots)$ - знаковизначена, то тоді за лемою, $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap M : L''_{\vec{x},\vec{x}}(\vec{x}, \dots)$ - так само знако визначений

Якщо визначимо квадратичну форму із п. 2), то звідси й буде випливати, що $f(\vec{x}^0) < f(\vec{x})$ - тобто умовний локальний мінімум

Аналогічно для інших випадків ■

Example 2.11.5 Задана функція $u = f(x, y, z) = x - 2y + 2z$. Знайдемо точки локального екстремуму за умовою, що

$\phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

Спочатку розглянемо лагранжіан $L(x, y, z, \lambda_1) = f(x, y, z) - \lambda_1\phi_1(x, y, z)$

Знайдемо всі критичні точки, тобто $L'(x, y, z, \lambda_1) = 0$

Або інакше кажучи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) - \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) - \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) - \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial z}(x, y, z) = 0 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \lambda_1 \cdot 2x = 0 \\ -2 - \lambda_1 \cdot 2y = 0 \\ 2 - \lambda_1 \cdot 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Або $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}, x = \dfrac{1}{3}, y = -\dfrac{2}{3}, z = \dfrac{2}{3}$

Або $\lambda_1 = -\dfrac{3}{2}, x = -\dfrac{1}{3}, y = \dfrac{2}{3}, z = -\dfrac{2}{3}$

Всі можливі критичні точки

Тепер будуємо квадратичну форму лагранжіана

$L(x, y, z, \lambda_1) = x - 2y + 2z - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

Маємо

$L''(x_0, y_0, z_0, \lambda_1)\vec{h}^2 = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}h_1^2 + \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}h_2^2 + \dfrac{\partial^2 L}{\partial z^2}h_3^2 + 2\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}h_1h_2 + 2\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}h_2h_3 + 2\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}h_1h_3 = -2\lambda_1 h_1^2 - 2\lambda_1 h_2^2 - 2\lambda_1 h_3^2$

Обираємо такі $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$, щоб $(\text{grad}\phi_1(x_0, y_0, z_0), \vec{h}) = 0$

В нашому випадку $\text{grad}\phi_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$, тоді

$2x \cdot h_1 + 2y \cdot h_2 + 2z \cdot h_3 = 0$

Розглянемо кожну точку

1) $\lambda_1 = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}(h_1 - 2h_2 + 2h_3) = 0 \Rightarrow h_1 = 2h_2 - 2h_3$

Оцінюємо знак квадратичної форми:

$L''(x, y, z, \lambda_1)\vec{h}^2 = -6(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) < 0$

Отже, 1) - локальний максимум та $u = 3$

2) $\lambda_1 = -\frac{3}{2}, x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}(h_1 - 2h_2 + 2h_3) = 0 \Rightarrow h_1 = 2h_2 - 2h_3$

Оцінюємо знак квадратичної форми:

$L''(x, y, z, \lambda_1)\vec{h}^2 = 6(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) > 0$

Отже, 1) - локальний мінімум та $u = -3$

3 Інтеграли з параметром

3.1 Основні означення та властивості

Definition 3.1.1 Задана функція $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, така, що
$\forall y \in [c,d] : f \in D([a,b])$
Інтегралом з параметром називають таку функцію $J : [c,d] \to \mathbb{R}$

$$J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Proposition 3.1.2 Неперервність
Задана функція $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a,b] \times [c,d])$
Тоді $J \in C([c,d])$
Proof.
Зафіксуємо т. $y_0 \in [c,d]$ - маємо функцію $f(x,y_0)$, тобто функцію від одного аргументу
$f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in D([a,b])$
Таким чином, $J(y_0) = \displaystyle\int_a^b f(x,y_0)\,dx$ є визначеною. І так для кожного y_0

$f(x,y) \in C([a,b] \times [c,d]) \Rightarrow f(x,y) \in C_{unif}([a,b] \times [c,d]) \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in [a,b] \times [c,d] : ||(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$
Тоді
$|J(y_1)-J(y_2)| = \left|\displaystyle\int_a^b f(x,y_1)\,dx - \int_a^b f(x,y_2)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x,y_1)-f(x,y_2)| \boxed{<}$
Якщо я оберу $(x,y_1),(x,y_2)$ так, що $||(x,y_1)-(x,y_2)|| = \sqrt{(y_1-y_2)^2} = |y_1-y_2| < \delta$, то тоді $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$
$\boxed{<} \displaystyle\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$
Збираючи пазл, отримаємо $J \in C_{unif}([c,d]) \Rightarrow J \in C([c,d])$ ■

Proposition 3.1.3 Диференційованість
Задана функція $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, така, що:
1) $\forall y_0 \in [c,d] : f(x,y_0) \in C([a,b])$
2) $\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d] : \exists \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a,b] \times [c,d])$
Тоді J - диференційована в $[c,d]$, при цьому $J'(y) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$

Proof.
Диференційованість означає існування похідної, тобто необхідно довести її існування
$$\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y}=\frac{1}{\Delta y}\int_a^b f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\,dx\boxed{=}$$
Згадаємо Ньютона-Лейбніца та властивості інтеграла та розпишемо підінтегральний вираз таким чином
$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\int_y^{y+\Delta y} f'_y(x,t)\,dt=\int_y^{y+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt$$
$$\boxed{=}\frac{1}{\Delta y}\int_a^b\left(\int_y^{y+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right)dx$$
Тепер зафіксуємо т. y_0 та розпишемо праву частину рівності, що ми доводимо
$$\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx=\int_a^b\frac{1}{\Delta y}\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt\right)dx=\frac{1}{\Delta y}\int_a^b\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt\right)$$
Ну а тепер час доводити існування похідної
$$\left|\frac{J(y_0+\Delta y)-J(y_0)}{\Delta y}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{\Delta y}\int_a^b\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right)dx-\frac{1}{\Delta y}\int_a^b\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt\right)dx\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{\Delta y}\int_a^b\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt\right)dx\right|\boxed{<}$$
За умовою твердження,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\in C([a,b]\times[c,d])\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\in C_{unif}([a,b]\times[c,d])\Rightarrow$$
$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall(x,t),(x,y_0)\in[a,b]\times[c,d]:||(x,t)-(x,y_0)||<\delta\Rightarrow$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$
$$\boxed{<}\int_a^b\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{1}{\Delta y}\frac{\varepsilon}{b-a}\,dt\,dx=\varepsilon$$
Знову збираємо пазл - отримуємо, що
$$\forall y_0\in[c,d]:\exists\lim_{\Delta y\to0}\frac{J(y_0+\Delta y)-J(y_0)}{\Delta y}=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx=J'(y_0)$$
Отже, J - диференційована на $[c,d]$ ■

Proposition 3.1.4 Інтегрованість
Задана функція $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, така, що $f\in C([a,b]\times[c,d])$
Тоді $J\in D([c,d])$, а також $\displaystyle\int_c^b\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{=J(y)}\,dy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

Proof.

Розглянемо дві функції: $h(t) = \int_c^t \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \qquad g(t) = \int_a^b \int_c^t f(x,y)\,dy\,dx$
В нашому випадку $t \in [c,d]$
Якщо $t = c$, то маємо, що $h(c) = g(c) = 0$
Необхідно знайти, чому дорівнює $h'(t), g'(t)$
Зробимо деякі заміни
$h(t) = \int_c^t J(y)\,dy \qquad g(t) = \int_a^b F(x,t)\,dx$
Маємо два інтеграли з параметром t. Другий інтеграл задовільняють умові з **Prp 3.1.4**, тоді можемо знайти похідну
Перший - це інтеграл від верхньої межі, тому автоматично
$h'(t) = J(t)$
Другий рахується за попереднім твердженням
$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dt = \int_a^b f(x,t)\,dx = J(t)$
Таким чином, $\forall t \in [c,d] : h'(t) = g'(t) \Rightarrow h(t) = g(t) + C$
Але оскільки $h(c) = g(c) = 0$, то одразу $C = 0 \Rightarrow h(t) = g(t)$
Ну а тоді $h(d) = g(d) \Rightarrow \int_c^b \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ ■

3.2 Невласні інтеграли з параметром

Definition 3.2.1 Задана функція $f : [a,\omega) \times A$, така, що $\forall y \in A : \forall c \in [a,\omega) : f \in D([a,c])$
Також маємо збіжний невласний інтеграл із параметром $J(y) = \int_a^\omega f(x,y)\,dx$
Невласний інтеграл **збігається рівномірно** на множині A, якщо

$$\sup_{y\in A} \left| \int_a^\omega f(x,y)\,dx - \int_a^c f(x,y)\,dx \right| \overset{c\to\omega}{\to} 0$$

Theorem 3.2.2 Критерій Коші
$\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ - збіжний рівномірно на $A \iff$
$\forall \varepsilon > 0 : \exists C : \forall c_1, c_2 \in [C,\omega) : \sup_{y\in A} \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$
Випливає з критерію Коші рівномірної збіжності функцій

Theorem 3.2.3 Ознака Вейєрштрасса
Задані функції $f : [a,\omega) \times A \to \mathbb{R}$, $g : [a,\omega) \to \mathbb{R}$ такі, що
1) $\forall x \in [a,\omega) : \forall y \in A : |f(x,y)| \le g(x)$

2) $\displaystyle\int_a^\omega g(x)\,dx$ - збіжний

Тоді $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ - збіжний рівномірно на A

Proof.

$\displaystyle\sup_{y\in A}\left|\int_c^\omega f(x,y)\,dx\right| \le \left|\int_c^\omega g(x)\,dx\right| \overset{c\to\omega}{\to} 0$ ■

Theorem 3.2.4 Ознака Абеля-Діріхле

Задані функції $f : [a,\omega)\times A \to \mathbb{R}$, $g : [a,\omega)\times A \to \mathbb{R}$ такі, що виконана одна з двох пар умов

$a1)\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ - збіжний рівномірно на A

$a2)\forall y \in A : g$ - монотонна від $x \in [a,\omega)$

$a3)\exists D > 0 : \displaystyle\sup_{y\in A}\sup_{c\in[a,\omega)} |g(x,y)| \le D$

$d1)\exists D > 0 : \displaystyle\sup_{y\in A}\sup_{c\in[a,\omega)}\left|\int_a^c f(x,y)\,dx\right| \le D$

$d2)\forall y \in A : g$ - монотонна від $x \in [a,\omega)$

$d3)\displaystyle\sup_{y\in A}|g(x,y)| \overset{x\to\omega}{\to} 0$

Тоді $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,dx$ - рівномірно збіжний на A

Поки без доведення

Proposition 3.2.5 Неперервність

Задана функція $f : [a,\omega)\times[c,d] \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a,\omega)\times[c,d])$
Також J - рівномірно збіжний. Тоді $J \in C([c,d])$

Proof.

За означенням рівномірної збіжності, маємо, що $\displaystyle\sup_{y\in[c,d]}\left|\int_c^\omega f(x,y)\,dx\right| \to 0, c \to \omega$

Тобто $\forall\varepsilon > 0 : \exists c > a : \displaystyle\sup_{y\in[c,d]}\left|\int_c^\omega f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$

Оцінимо J

$$|J(y_1) - J(y_2)| = \left|\int_a^\omega f(x,y_1)\,dx - \int_a^\omega f(x,y_2)\,dx\right| =$$
$$= \left|\int_a^c f(x,y_1)\,dx - \int_a^c f(x,y_2)\,dx + \int_c^\omega f(x,y_1)\,dx - \int_c^\omega f(x,y_2)\,dx\right| \le$$
$$\le \left|\int_a^c f(x,y_1) - f(x,y_2)\,dx\right| + \left|\int_c^\omega f(x,y_1)\,dx\right| + \left|\int_c^\omega f(x,y_2)\,dx\right| \boxed{<}$$

Перший модуль: $f \in C_{unif}([a,\omega)\times[c,d])$

$\Rightarrow \exists \delta : \forall y_1, y_2 : |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{c-a}$

Другий модуль: $\sup\limits_{y \in [c,d]} \left| \int_c^\omega f(x, y)\, dx \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow \forall y \in [c, d] : \left| \int_c^\omega f(x, y)\, dx \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\boxed{<} \int_a^c \dfrac{\varepsilon}{c-a}\, dx + \dfrac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Збираємо пазл та маємо, що $J \in C_{unif}([c, d]) \Rightarrow J \in C([c, d])$ ■

Proposition 3.2.6 Інтегрованість

Задана функція $f : [a, \omega) \times [c, d] \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$

Також J - рівномірно збіжний. Тоді $J \in D([c, d])$ та

$$\int_c^d \underbrace{\int_a^\omega f(x, y)\, dx}_{=J(y)}\, dy = \int_a^\omega \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

Proof.

Розглянемо $\int_c^d J(y)\, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy + \int_c^d \int_b^\omega f(x, y)\, dx\, dy$

Перший доданок - це визначений інтеграл, тому там виконується **Prp 3.1.4.**, тобто

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

Другий доданок - цікавіше

$$\left| \int_c^d \int_b^\omega f(x, y)\, dx\, dy \right| \le \int_c^d \left| \int_b^\omega f(x, y)\, dx \right| dy \le \int_c^d \sup_{y \in [c,d]} \left| \int_b^\omega f(x, y)\, dx \right| dy =$$

$$\sup_{y \in [c,d]} \left| \int_b^\omega f(x, y)\, dx \right| (d - c) \to 0, b \to \omega$$

Якщо $b \to \omega$, то тоді отримаємо

$$\int_c^d J(y)\, dy = \int_a^\omega \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy + 0 = \int_a^\omega \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy \ ■$$

Proposition 3.2.7 Диференційованість

Задана функція $f : [a, \omega) \times [c, d] \to \mathbb{R}$, така, що:

1) $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a, \omega) \times [c, d])$

2) $\exists y_0 \in [c, d] : J(y_0)$ - збіжний

3) $\int_a^\omega \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$ - рівномірно збіжний Тоді J - збіжний, диференційована в $[c, d]$, при цьому $J'(y) = \int_a^\omega \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$

Proof.

Розглянемо функцію $I(y) = \int_a^\omega \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$ - неперервна за умовною

рівномірна. Часткові похідні є неперервними також за умовою. Тоді за **Prp. 3.2.6.**, $I \in D([y, y_0])$
$\int_{y_0}^{y} I(t)\,dt = \int_a^\omega \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\,dx = \int_a^\omega f(x,y) - f(x,y_0)\,dx =$
$= J(y) - J(y_0)$
$\Rightarrow J(y) = \int_{y_0}^{y} I(t)\,dt - J(y_0)$ - обидва збіжні. Тому сума - збіжна
Отже, J - збіжний $\forall y \in [c,d]$
$\Rightarrow J'(y) = I(y) - 0 = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ ■

Proposition 3.2.8 Невласне інтегрування невласного інтеграла
Задана функція $f : [a,+\infty) \times [c,+\infty) \to \mathbb{R}$ така, що $f \in C([a,+\infty) \times [c,+\infty))$, а також виконані умови:
1)$\forall b > a : \int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ - збіжний рівномірно в $[a,b]$
2)$\forall d > c : \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ - збіжний рівномірно в $[c,d]$
3) $\int_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy, \int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx$ - збігаються $\forall x \geq a, \forall y \geq c$
4) $\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy\,dx$ або $\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx\,dy$ - збіжний
Тоді обидва інтеграли - збіжні та
$\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy\,dx = \int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx\,dy$
Поки без доведення

3.3 Інтеграл Діріхле

Інтегралом Діріхле називають таку рівність, яку зараз доведу (про збіжність вже говорили)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Розглянемо функцію $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx$
Зауважимо, що якщо зробити заміну $ax = t$, то отримаємо, що
$F(a) = F(1)$. А також $F(-a) = -F(a)$, $F(0) = 0$
Із цих умою випливає, що $F(a)$ - розривна, тож $F(a)$ - не збіжна рівномірно на $\mathbb{R}$
Розглянемо функцію $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-bx}\,dx$, $b \geq 0$

Підінтегральна функція - неперервна, має неперервну часткову похідну $\dfrac{\partial f}{\partial a} = \cos ax \cdot e^{-bx}$, а також $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-bx}\,dx$ - рівномірно збіжний (додати приклад)
Остаточно отримаємо
$F(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \lim_{b\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-bx}\,dx = \lim_{b\to 0^+} J(a) = \frac{\pi}{2}$

3.4 Інтеграл Ейлера-Пуассона

Інтегралом Діріхле називають таку рівність, яку зараз доведу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Позначимо $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$
Зробимо заміну $x = at$. Тоді
$J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2} a\,dt$
$J^2 = J\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2}\,da = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2} a\,dt\right) e^{-a^2}\,da = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ae^{-a^2t^2-a^2}\,dt\,da$
$= \displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-a^2(t^2+1)} a\,da\,dt =$
Заміна: $s = -a^2(t^2+1)$
$= \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2+1)} \int_{-\infty}^{0} e^s\,ds\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2+1)}\,dt = \frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow J = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

3.5 Гамма-функція

Definition 3.5.1 Гамма-функцією називають таку функцію

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \alpha > 0$$

Lemma 3.5.2 $\alpha > 0$ - область збіжності гамми-функції
Proof.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int_0^{1} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$
Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка - $x = 0$

Порівняємо з інтегралом $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ - збіжний для $\alpha > 0$
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1$
Отже, обидва збіжні, тому перший доданок - збіжний
Розглянемо другий інтеграл. Особлива точка - $x = \infty$
Порівняємо з інтегралом $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ - збіжний для $\alpha > 0$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \left[\begin{array}{l}0 \text{ за правилом Лопіталя}, \alpha \geq 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1-\alpha}e^{\frac{x}{2}}} = 0, \alpha < 1\end{array}\right.$$
Отже, обидва збіжні, тому другий доданок - збіжний
Остаточно, $\Gamma(\alpha)$ - збіжний ■

Lemma 3.5.3 $\Gamma \in C^\infty((0,+\infty))$
Proof.
Поки без доведення ■

Theorem 3.5.4 $\forall \alpha > 0 : \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
Вказівка: ліву частину інтегруємо частинами, $u = x^\alpha, dv = e^{-x}\,dx$

Що, якщо $\alpha \in \mathbb{N}$
$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1\Gamma(1)$
$\displaystyle\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$
Отже,

Corollary 3.5.5 $\Gamma(n+1) = n!$

А далі перевіримо, чому дорівнює гамма-функція в т. $\alpha = \dfrac{1}{2}$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx \overset{\text{Заміна: } t=\sqrt{x}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$
Далі скористаємось тотожністю $\Gamma(\alpha+1) = \Gamma(\alpha)$, щоб знайти $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+n\right)$.
Отримаємо:

Corollary 3.5.6 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+n\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$

Theorem 3.5.7 Функціональне рівняння Ейлера
$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$
$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\alpha\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\alpha\right) = \dfrac{\pi}{\cos\pi\alpha}$
Без доведення. Тут треба знати щось про функціональне рівняння

3.6 Бета-функція

Definition 3.6.1 Бета-функцією називають таку функцію

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \alpha, \beta > 0$$

Lemma 3.6.2 $\alpha, \beta > 0$ - область збіжності бети-функції

Proof.

$\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка - $x = 0$

Порівняємо з інтегралом $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}\,dx$ - збіжний для $\alpha > 0$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}} = 1$

Отже, обидва збіжні, тому перший доданок - збіжний

Розглянемо другий інтеграл. Проводимо заміну $1 - x = t$, тоді маємо $\displaystyle-\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\,dt$ - це той самий перший доданок. І він вже буде збіжним, якщо $\beta > 0$

Остаточно, $B(\alpha, \beta)$ - збіжний ■

Proposition 3.6.3 $\displaystyle B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy$

Вказівка: зробити заміну $\displaystyle x = \frac{y}{1+y}$

Theorem 3.6.4 Зв'язок між Γ та B

$\displaystyle B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

Proof.

Розглянемо $\Gamma(\alpha + \beta)$ та проведемо заміну $x = y(t+1), dx = (t+1)\,dy$

$\displaystyle\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}\,dx = (t+1)^{\alpha+\beta}\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}e^{-y(t+1)}\,dy$

Отримаємо

$\displaystyle\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}e^{-y(t+1)}\,dy$

Помножимо обидві частини на $t^{\alpha-1}$ та проінтегруємо від 0 до $+\infty$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}t^{\alpha-1}e^{-y}e^{-yt}\,dy\,dt$

$\displaystyle\Gamma(\alpha+\beta)\cdot B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} y^{\beta-1}e^{-y}\int_0^{+\infty} y^{\alpha}t^{\alpha-1}e^{-yt}\,dt\,dy$

Внутрішній інтеграл при заміні $yt = x$ стане рівним $\Gamma(\alpha)$. Його виносимо з-під зовнішнього інтегралу, а сам інтеграв вже є $\Gamma(\beta)$. Тоді
$\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ ■