Зміст

1 Алгебра висловлень

1.1 Основа

Definition 1.1.1 Висловленням називають речення, в якому можна визначити правдивість (true) або неправдивість (false) в даному контексті
Позначення: $A, B, \dots$ - їх ще називають **пропозиційними літерами**

Якщо A - true, то позначимо це $|A| = 1$
Якщо A - false, то позначимо це $|A| = 0$

Example 1.1.2 Ось пару прикладів висловлень
$A =$ число 4 ділиться на 2. $|A| = 1$
$B =$ число 4 - просте число. $|B| = 0$

Речення - число 4 дуже красиве - вже не є висловленням, тому що складно визначити правдивість або неправдивість

Основні операції

Definition 1.1.3 Задані висловлення A, B
Диз'юнкцією називають висловлення $A \vee B$, що є true лише тоді, коли висловлення A або B - true
Кон'юнкцією називають висловлення $A \wedge B$, що є true лише тоді, коли висловлення A та B - true
Запеченням називають висловлення $\neg A$, що є true лише тоді, коли висловлення A - false

Example 1.1.4 Із попереднього прикладу ми маємо, що
$A \vee B =$ число 4 ділиться на 2 або число 4 - просте число $\quad |A \vee B| = 1$
$A \wedge B =$ число 4 ділиться на 2 та число 4 - просте число $\quad |A \wedge B| = 0$
$\neg A =$ число 4 не просте число $\quad |\neg A| = 1$

Додаткові операції

Definition 1.1.5 Задані висловлення A, B
Імплікацією називають висловлення $A \to B$, що є true лише тоді, коли з правдивості A випливає правдивість B
Через основні операції: $A \to B = \neg A \vee B$

Еквіваленцією називають висловлення $A \leftrightarrow B$, що є true лише тоді, коли A, B одночасно true або false
Через основні операції: $A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$

Сумою за модулем 2 називають висловлення $A \oplus B$, що є true лише тоді, коли лише один з висловлень A або B - true
Через основні операції: $A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B)$

Example 1.1.6 Задамо висловлення
$A =$ звук працює, $|A| = 1$ $\quad B =$ я чую, $|B| = 1$
$A \to B =$ якщо звук працює, то я чую $\quad |A \to B| = 1$
$A \leftrightarrow B =$ звук працює лише тоді, коли я чую $\quad |A \leftrightarrow B| = 1$
$A \oplus B =$ або лише звук працює, або лише я чую $\quad |A \oplus B| = 0$

Definition 1.1.7 Формулою алгебри висловлень будемо називати одним з двох пунктів
- пропозиційну літеру
- якщо $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ формули, то $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\neg\mathcal{A}$ формули

1.2 Інтерпретація формул алгебри висловлень

Definition 1.2.1 Інтерпретацією формули алгебри висловлень називають зіставлення кожній пропозиційній літері значення 1 (true) або 0 (false)
Множину всіх інтерпретацій заданої формули зводиться в **таблицю правдивості**

Example 1.2.2 Нехай задана формула $\mathcal{A} = A_1 \vee \neg A_2$. Внизу буде записана таблиця правдивості

A_1	A_2	$\mathcal{A}$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Кожний рядок таблиці правдивості - це одна інтерпретація

Example 1.2.3 Задані висловлення A, B. Розпишемо таблиці правдивості для визначених операції вище

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Remark 1.2.4 Зупинимось тут ще раз на імплікації. Нехай будуть такі висловлення
$A =$ босс сказав "працюй"($|A| = 1$) або "роби, що хочеш"($|A| = 0$)
$B =$ працівник йде працювати ($|B| = 1$) або ледарить ($|B| = 0$)
А тепер подивимось на $A \to B$ зверху вниз
Якщо босс сказав "працюй то працівник йде працювати - true
Якщо босс сказав "працюй то працівник ледарить - false
Якщо босс сказав "роби, що хочеш то працівник йде працювати - true
Якщо босс сказав "роби, що хочеш то працівник ледарить - true
Останні два описують істину, тому що босс сказав те, що після цього можна робити що завгодно і він не оскаржить це
А тепер подивимось на $\neg A \vee B$
Або босс сказав "роби, що хочеш або працівник йде працювати
Саме тому виявляється, що $A \to B = \neg A \vee B$

Звідки взялись інші формули, має бути зрозуміло

Remark 1.2.5 Інколи для $A \to B$ кажуть так:
B - необхідна умова для A $\quad$ A - достатня умова для B
Щоб працівник пішов працювати, необхідно, щоб босс сказав йти працювти
Якщо босс скаже йти працювати, цього буде достатньо, щоб працівник пішов

Definition 1.2.6 Формули $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ називають **логічно еквівалентними**, якщо на кожній інтерпретації вони набувають однакових значенья
Позначення: $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ або $\mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \mathcal{A}_2$

Example 1.2.7 $A \vee B = B \vee A \qquad A \wedge B = B \wedge A$

Definition 1.2.8 Формулу $\mathcal{A}$ називають **тавтологією**, коли вона набуває значення 1 на всіх інтерпретаціях
Позначення: $\mathcal{A} = 1$
Формулу $\mathcal{A}$ називають **суперечністю**, коли вона набуває значення 0 на всіх інтерпретаціях
Позначення: $\mathcal{A} = 0$
Формулу $\mathcal{A}$ називають **таку, що виконується**, коли вона набуває значення 1 хоча б на одній інтерпретації

Example 1.2.9 $A \vee \neg A = 1 \qquad A \wedge \neg A = 0$
Перша - тавтологія, бо всюди формула приймає true
Друга - суперечність, бо всюди формула приймає false

1.3 Основні тотожності

Задані формули алгебри висловлень A, B, C. Справедливі такі закони
1. Комутативність
$A \vee B = B \vee A$ $\quad$ $A \wedge B = B \wedge A$
2. Дистрибутивність
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $\quad$ $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
3. Нейтральність
$A \vee 0 = A$ $\quad$ $A \wedge 1 = A$
4. Доповненість
$A \vee \neg A = 1$ $\quad$ $A \wedge \neg A = 0$
Всі вони доводяться за побудовою таблиць правдивостей. Решта виводяться та доводяться безпосередньо через ці тотожності

5. Універсальні межі
$A \vee 1 = 1$ $\quad$ $A \wedge 0 = 0$
6. Абсорбція
$A \vee (A \wedge B) = A$ $\quad$ $A \wedge (A \vee B) = A$
7. Ідемпотентність
$A \vee A = A$ $\quad$ $A \wedge A = A$
8. Асоціативність
$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ $\quad$ $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
9. Інвольвютивність
$\neg(\neg A) = A$
10. Правило де Моргана
$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ $\quad$ $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

Proof.
Ми будемо доводити лише лівий стовпчик правил. Права аналогічна
5. $A \vee 1 = (A \vee 1) \vee 0 = (A \vee 1) \vee (A \wedge \neg A) = A \vee (1 \wedge \neg A) = A \vee \neg A = 1$

6. $A \vee (A \wedge B) = (A \wedge 1) \vee (A \wedge B) = A \wedge (1 \vee B) = A \wedge 1 = A$

7. $A \vee A = (A \vee A) \wedge 1 = (A \vee A) \wedge (A \vee \neg A) = A \vee (A \wedge \neg A) = A \vee 0 = A$

Решта три доводяться за допомогою такої леми

Lemma 1.3.1 Задано D - формула алгебри висловлювань. Відомо, що
$X \wedge D = Y \wedge D$ $\quad$ $X \wedge \neg D = Y \wedge \neg D$
Тоді $X = Y$

Proof.
З одного боку,
$(X \wedge D) \vee (X \wedge \neg D) = X \wedge (D \vee \neg D) = X$

З іншого боку,
$(X \wedge D) \vee (X \wedge \neg D) = (Y \wedge D) \vee (Y \wedge \neg D) = Y \wedge (D \vee \neg D) = Y$
Отже, $X = Y$ ■

Продемонструю використання цієї леми лише на інвольвютивності (TODO)
■

1.4 Дуальність, узагальнене правило де Моргана

Definition 1.4.1 Формула $\mathcal{A}^*$ називається **дуальною до $\mathcal{A}$**, коли вона є формулою $\mathcal{A}$, в якої
- $\vee$ замінюються на $\wedge$ або/та навпаки
- 0 замінюються на 1 або/та навпаки

Example 1.4.2 $(A \vee \neg B \vee 0)^* = A \wedge \neg B \wedge 1$

Зрозуміло, що $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$

Proposition 1.4.3 Задано $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Тоді $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*$
Proof.
Коли $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, то ліва частина перетворюється в праву частину шляхом використанням основних тотожностей. Всі десять (TODO) ■

Definition 1.4.4 Формула $\mathcal{A}^{(-)}$ називається **сильно дуальною до $\mathcal{A}$**, коли вона є формулою $\mathcal{A}^*$, в якої всі літери замінюються на їхні заперечення

Proposition 1.4.5 Задані формули $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Тоді
$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})^{(-)} = \mathcal{A}^{(-)} \vee \mathcal{B}^{(-)} \qquad (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})^{(-)} = \mathcal{A}^{(-)} \wedge \mathcal{B}^{(-)} \qquad (\neg\mathcal{A})^{(-)} = \neg\mathcal{A}^{(-)}$
випливає з означення сильної дуальності

Theorem 1.4.6 Узагальнене правило де Моргана
$\mathcal{A}^{(-)} = \neg\mathcal{A}$
Proof MI.
Доведемо за кількістю логічних операцій у $\mathcal{A}$
1. База індукції: 0 логічних операцій. Тоді маємо $\mathcal{A} = A$
Зрозуміло, що $\mathcal{A}^{(-)} = A^{(-)} = \neg A = \neg\mathcal{A}$
2. Припущення індукції: нехай для формули $\mathcal{A}$, що має не більше ніж n логічних операцій, правило виконане
3. Крок індукції: доведемо для $n+1$
Додана операція може бути або $\vee$, або $\wedge$, або $\neg$. Розглянемо всі випадки
a) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$
Кожна з формул правої частини точно має менше ніж n операції. Тому за припущенням, $\mathcal{A}_1^{(-)} = \neg\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2^{(-)} = \neg\mathcal{A}_2$, тоді

$\neg\mathcal{A}^{(-)} = (\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)^{(-)} = \mathcal{A}_1^{(-)} \wedge \mathcal{A}_2^{(-)} = \neg\mathcal{A}_1 \wedge \neg\mathcal{A}_2 = \neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) = \neg\mathcal{A}$
б) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2$ - аналогічно
в) $\mathcal{A} = \neg\mathcal{A}_1$ - аналогічно
Таким чином, МІ доведено $\blacksquare$

Example 1.4.7 Тепер ми можемо одразу можемо сказати, чому дорівнює ця формула
$\neg(A \vee (B \wedge \neg C)) = \neg A \wedge (\neg B \vee C)$
Ми просто робимо формулу сильно дуальною - і все

1.5 Логічний наслідок, логічна еквівалентність

Definition 1.5.1 Задано формули $A_1, \dots, A_n$ та B
Формула B **логічно випливає з** формул $A_1, \dots, A_n$, якщо B на всіх інтерпретаціях true, на яких водночас true будуть $A_1, \dots, A_n$
Позначення: $A_1, \dots, A_n \models B$
Тут формули $A_1, \dots, A_n$ - **гіпотези**, а формула B - **логічний наслідок**

Proposition 1.5.2 $A_1, \dots, A_n \models B \iff (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \to B = 1$
випливає з означення

Remark 1.5.3 При $n = 1$ маємо інше позначення: $A \Rightarrow B$
При $n = 0$ маємо, що $\models B$, тоді B - тавтологія

Також вводиться таке поняття **логічна еквівалентність** формули A, B. Це лише тоді, коли $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$
Позначення: $A \Leftrightarrow B$

Proposition 1.5.4 $A \Leftrightarrow B \iff A \leftrightarrow B = 1$

Example 1.5.5 Доведемо, що $A, A \to B \models B$
I спосіб: безпосереднє доведення
Маємо, що $|A| = 1, |A \to B| = 1$ на деякій інтерпретації. Тоді звідси $|B| = 1$. Отже, $|B| = 1$

II спосіб: від супротивного
Припустімо, що $|B| = 0$ на деякій інтерпретації
Тоді $|A \to B| = 1$, якщо $|A| = 0$, що суперечить умові, що $|A| = 1$

1.6 Трошки про предикати та квантори

Remark 1.6.1 Зрозумійте спочатку на пальцях, що таке множини та відношення, а потім повертайтесь сюди

Є два речення:
$A =$ Денис, що закінчив школу 25, є студентом КПІ
$B =$ Поліна закінчила школу 25 на відмінно
Із мого власного досвіду, $|A| = 1, |B| = 1$

А тепер розглянемо такі речення:
- Всі учні, що закінчили школу 25, є студентами КПІ
- Є учні, які закінчили школу 25 на відмінно

А тут вже складніше. Стандартною алгеброю висловлень через задані операції не можна визначити, чи буде це true або false. В такому разі треба давати нові означення

Definition 1.6.2 Задані множини $D_1, \dots, D_n$ - предметні області
Предикатом P^n називають таке відображення

$$P^n : D_1 \times \cdots \times D_n \to \{0, 1\}$$

Example 1.6.3 Задамо таку предметну область $D_1 =$ "мої однокласники"та предикат
$P^1(x) =$ учень x, що закінчив школу 25, є студентом КПІ
$P^1($Денис$) =$ учень Денис, що закінчив школу 25, є студентом КПІ
$|P^1($Денис$)| = 1$
$P^1($Поліна$) =$ учениця Поліна, що закінчила школу 25, є студенткою КПІ
$P^1($Поліна$)| = 0$

Remark 1.6.4 *Якщо $n = 0$, то предикат перетворюється вже в стандратне висловлення*

Definition 1.6.5 Задано P - предикат
Вираз $\forall x \in D : P(x)$ буде правдивим лише тоді, коли **для всіх** x із предметної області $P(x)$ буде правдивим
Вираз $\exists x \in D : P(x)$ буде правдивим лише тоді, коли **хоча б для одного** x із предметної області $P(x)$ буде правдивим
$\forall$ - **квантор загальності**, $\exists$ - **квантор існування**

Example 1.6.6 Задамо таку предметну область $D =$ "мої однокласники"та предикати
$P(x) =$ учень x, що закінчив школу 25, є студентом КПІ
$\forall x \in D : P(x) =$ всі учні, що закінчили школу 25, є студентами КПІ
$|\forall x \in D : P(x)| = 0$. Тому що у мене, насправді, не всі стали студентами КПІ - наприклад, Іванна

$Q(x) =$ учень x закінчив школу 25 на відмінно
$\exists x \in D : Q(x) =$ є такий учень x, що закінчив школу 25 на відмінно
$|\exists x \in D : Q(x)| = 1$. Тому що у мене такі були - це Оля, Саша, Поліна

Із цього прикладу випливає, що
$\neg(\forall x \in D : P(x)) = \exists x \in D : \neg P(x)$
$\neg(\exists x \in D : P(x)) = \forall x \in D : \neg P(x)$

2 Теорія множин

2.1 Основа

Definition 2.1.1 **Множиною** називатимемо довільний набір об'єктів, що попарно розрізняються
Позначення: $A, B, \ldots$

$x \in A$ - елемент x належить множині A
$x \notin A$ - елемент x не належить множині A
$\emptyset$ - **порожня множина**, тобто множина без елементів

Definition 2.1.2 Множини A, B називаються **рівними**, якщо вони містять одні й ті самі елементи

$$A = B \iff (x \in A) \leftrightarrow (x \in B)$$

Definition 2.1.3 Множина B називається **підмножиною множини** A, якщо кожний елемент, що належить B, належить й A

$$B \subset A \iff (x \in B) \to (x \in A)$$

Example 2.1.4 Задані множини $B = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Маємо, що кожний елемент із множини B також належить A, тому $B \subset A$

Remark 2.1.5 Означення рівності множин A, B можна переписати інакше, якщо використати формулу еквіваленції:
$A = B \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

Способи задання множин
1. Безпосереднє перелічення елементів: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. Через характерну властивість: $B = \{x \in \mathbb{N} : x \vdots 3, x < 18\} \overset{\text{або}}{=} \{3, 6, 9, 12, 15\}$
3. Формулою з операціями над множинами (див. нижче): $C = A \cap B = \{3\}$

2.2 Основні операці

Definition 2.2.1 Задамо множини A, B
Об'єднанням множин A, B називають таку множину

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Перерізом множин A, B називають таку множину

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Різницею множин A, B називають таку множину

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Симетричною різницею множин A, B називають таку множину

$$A \Delta B = \{x : (x \in A) \oplus (x \in B)\}$$

Доповненням множини A відносно універсальної множини U називають таку множину

$$\bar{A} = \{x \in U : (x \notin A)\}$$

Definition 2.2.2 Множини A, B **не перерізаються**, якщо $A \cap B = \emptyset$

Example 2.2.3 Задані множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{3, 4, 5, 7\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A \cap B = \{3, 4, 5\}$
$A \setminus B = \{1, 2, 6\}$
$A \Delta B = \{1, 2, 6, 7\}$

Example 2.2.4 Задана множина $A = [0, 1]$. В залежності від універсальної множини знайдемо $\bar{A}$
При $U = \mathbb{R}$ маємо $\bar{A} = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
При $U = [0, 2]$ маємо $\bar{A} = (1, 2]$

Remark 2.2.5 Можна визначити об'єднання та перетин для нескінченної кількості множин

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in I : x \in A_\alpha\} \qquad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in I : x \in A_\alpha\}$$

Тут множина I - множина індексів

Remark 2.2.6 Зауважимо, що справедливі деякі тотожності
$\bar{A} = U \setminus A$
$A \setminus B = A \cap \bar{B}$
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Remark 2.2.7 Аналогічно з означенням формули алгебри висловлень визначається **формула алгебри множин**

2.3 Основні тотожності

Задані формули алгебри множин A, B, C. Справедливі такі закони
1. Комутативність
$A \cup B = B \cup A$ $\quad$ $A \cap B = B \cap A$
2. Дистрибутивність
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. Нейтральність
$A \cup \emptyset = A$ $\quad$ $A \cap U = A$
4. Доповненість
$A \cup \bar{A} = U$ $\quad$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$
Перші чотири можна довести, використовуючи означення операцій над множинами, де використовуються тотожності з логіки. Решта виводяться та доводяться безпосередньо через ці тотожності

5. Універсальні межі
$A \cup U = U$ $\quad$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
6. Абсорбція
$A \cup (A \cap B) = A$ $\quad$ $A \cap (A \cup B) = A$
7. Ідемпотентність
$A \cup A = A$ $\quad$ $A \cap A = A$
8. Асоціативність
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\quad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Інвольвютивність
$\bar{\bar{A}} = A$
10. Правило де Моргана
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\quad$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Remark 2.3.1 Аналогічно з алгеброю висловлень визначається принцип дуальності для алгебри множин. А також аналогічно можна записати узагальнене правило де Моргана

2.4 Як доводити закони алгебри множин

2.4.1 Модельне доведення

Суть доведення полягає в використанні означення рівності множин та/або підмножини

Example 2.4.1 Довести, що $A \cup (A \cap B) = A$
$x \in (A \cup (A \cap B)) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in (A \cap B)) \Leftrightarrow (x \in A) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B)) \Leftrightarrow (x \in A)$
Тобто $x \in (A \cup (A \cap B)) \Leftrightarrow x \in A$. Таким чином, $A \cup (A \cap B) = A$

Example 2.4.2 Довести, що $A \subset B \iff A \cup B = B$
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $A \subset B$, тобто $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$
Зафіксуємо $(x \in A \cup B) \Rightarrow (x \in A) \vee (x \in B) \Rightarrow (x \in B)$
Таким чином, $A \cup B \subset B$
Зафіксуємо $(x \in B) \Rightarrow (x \in A \cup B)$
Таким чином, $B \subset A \cup B$
Тоді $A \cup B = B$

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $A \cup B = B$
Зафіксуємо $(x \in A) \Rightarrow (x \in A \cup B) \Rightarrow (x \in B)$
Таким чином, $A \subset B$

2.4.2 Аксіоматичне доведення

Суть доведення полягає в використанні основних чотирьох тотожностей (або, можливо, й решта)

Example 2.4.3 Довести, що $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$
$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap U = A$

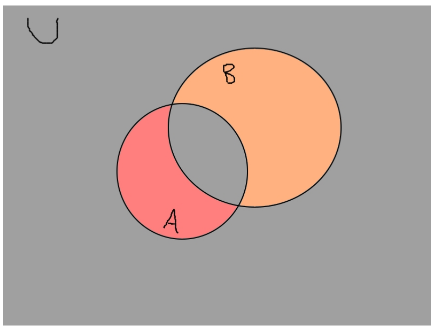
Example 2.4.4 Довести, що $A \cup B = B \iff A \cap B = A$
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $A \cup B = B$
Тоді $(A \cup B) \cap A = B \cap A$, а отже, $A = A \cap B$

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $A \cap B = A$
Тоді $(A \cap B) \cup B = A \cup B$, а отже, $B = A \cup B$

2.4.3 Діаграма Венна

Суть (нестрогого) доведення полягає в ілюструванні результатів виконання операцій в алгебрі множин
Малюють прямокутник, що є універсальною множиною U, а решта множини виглядають як круги

Example 2.4.5 Розглянемо $A \Delta B$ на діаграмі Венна



Із цього малюнку ми можемо вгадати тотожність:
$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
Повторюю для себе: це - не доведення, а просто репрезентація

2.5 Скінченні множини. Потужність

Тут ми розглядаємо скінченні множини, тобто ті, що мають скінченну кількість елементім

Definition 2.5.1 Потужністю скінченної множини A називають кількіть елементу множини A
Позначення: $|A| \overset{\text{або}}{=} n(A) \overset{\text{або}}{=} \text{card}A$

Example 2.5.2 Скінченна множина $A = \{1, 2, 9\}$ має потужність
$n(A) = 3$

Theorem 2.5.3 Задані A, B - скінченні множини, які не перетинаються
Тоді $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
Випливає з означення

Corollary 2.5.4 Задані $A_1, \dots, A_n$ - скінченні множини, які попарно не перетинаються
Тоді $n(A_1 \cup \dots \cup A_n) = n(A_1) + \dots + n(A_n)$
Доводиться методом MI

Theorem 2.5.5 Задані A, B - скінченні множини
Тоді $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
Proof.
Щоб довести формулу, нам треба використати формулу з **Crl. 2.5.4.**
Розглянемо три множини:
$D_1 = A \setminus B \qquad D_2 = A \cap B \qquad D_3 = B \setminus A$
Ці три множини попарно не перетинаються між собою. Тоді
$n(D_1 \cup D_2 \cup D_3) = n(D_1) + n(D_2) + n(D_3) =$
$= n(D_1)+n(D_2)+n(D_2)+n(D_3)-n(D_2) = n(D_1\cup D_2)+n(D_2\cup D_3)-n(D_2)$
$D_1 \cup D_2 \cup D_3 = A \cup B$
$D_1 \cup D_2 = A$
$D_2 \cup D_3 = B$
Таким чином, отримаємо:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ■

З'ясуємо тепер, а чому буде дорівнювати така формула при трьох множинах A, B, C
$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) = n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C) =$

$= n(A) + [n(B) + n(C) - n(B \cap C)] - n((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - [n(A \cap B) + n(A \cup C) - n((A \cap B) \cap (A \cap C))] =$
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
Тобто маємо, що спочатку ми беремо окремі множини, потім дві множини з усіма перетинами, а потім три множини з усіма перетинами. Причому знак змінюється: +,-,+

Можемо дану формулу узагальнити таким чином

Corollary 2.5.6 Задані $A_1, \dots, A_n$ - скінченні множини
Тоді $n(A_1 \cup \dots \cup A_n) =$
$= \sum_{1 \le i \le n} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} n(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap \dots \cap A_n)$
Це можна довести за MI, але буде досить боляче

2.6 Декартів добуток

Definition 2.6.1 Декартовим добутком множин A, B називають таку множину

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Якщо працюємо з однією множиною, можемо писати так: $A \times A = A^2$

Example 2.6.2 Задано $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$. Запишемо декартовий добуток
$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$
$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$

Remark 2.6.3 Із цього прикладу маємо, що $A \times B \neq B \times A$

Remark 2.6.4 Обидва множини можуть будуть різної природи, а тому для кожної треба вводити універсальну множину
$A \subset U_1 \qquad B \subset U_2$
Універсальна множина для декартового добутку: $U = U_1 \times U_2$

Theorem 2.6.5 Задані A, B - скінченні множини. Тоді
$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$
Proof.
Задамо $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \qquad B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$
Розмістимо всі елементи множини $A \times B$ у вигляді такої таблиці

	b_1	b_2	$\ldots$	b_m
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	$\ldots$	(a_1, b_m)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	$\ldots$	(a_2, b_m)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	(a_n, b_1)	(a_n, b_2)	$\ldots$	(a_n, b_m)

Зрозуміло, що така таблиця містить $n \cdot m = n(A) \cdot n(B)$ елементів
Тоді й маємо $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ ■

Remark 2.6.6 Можна визначити декартовий добуток для довільної скінченної кількості множин

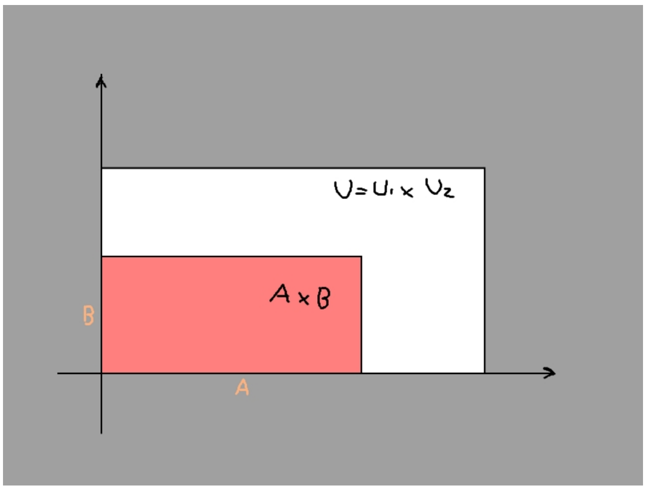
$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Допустимо писати таким чином: $A \times \underset{n \text{ разів}}{\ldots} \times A = A^n$
А також для скінченних множин $A_1, \ldots, A_n$ справедлива рівність
$n(A_1 \times \cdots \times A_n) = n(A_1) \cdots n(A_n)$
Доводиться завдяки МІ

Під час доведення деяких тотожностей з декартовим добутком зручно використовувати модельний метод

Example 2.6.7 Довести, що $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
$(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in (B \cup C)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((y \in B) \vee (y \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (y \in C))$
$\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times B) \vee ((x, y) \in A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

Також можемо використати аналог діаграми Венна, якщо є два множини. Перші компоненти множини - на осі OX; другі компоненти множини - на осі OY



2.7 Розв'язок деяких рівнянь

Розглянемо загальне рівняння вигляду

$$\mathcal{A}_1(X) = \mathcal{A}_2(X)$$

Тут $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ якісь формули алгебри множин, що містять скінченну кількість пропозиційних літер
X - невідома множина, яку шукаємо
$\mathcal{A}_1(X) = \mathcal{A}_2(X)$
$\mathcal{A}_1(X) \Delta \mathcal{A}_2(X) = \emptyset$
Ліву частину рівності зобразимо в такому вигляді
$(\mathcal{B}_1 \cap X) \cup (\mathcal{B}_2 \cap \bar{X}) \cup \mathcal{B}_3 = \emptyset$
Тут $\mathcal{B}_i, i = 1, 2, 3$ - якісь формули без невідомої X
Дане рівняння еквівалентне наступному
$\begin{cases} \mathcal{B}_1 \cap X = \emptyset \\ \mathcal{B}_1 \cap \bar{X} = \emptyset \\ \mathcal{B}_3 = \emptyset \end{cases} \iff \begin{cases} X \subset \bar{\mathcal{B}}_1 \\ \mathcal{B}_2 \subset X \\ \mathcal{B}_3 = \emptyset \end{cases} \iff \begin{cases} \mathcal{B}_2 \subset X \subset \bar{\mathcal{B}}_1 \\ \mathcal{B}_3 = \emptyset \end{cases}$
Відповідь: $\mathcal{B}_2 \subset X \subset \bar{\mathcal{B}}_1$ за умовою $\mathcal{B}_3 = \emptyset$. Інакше нема розв'язків

Example 2.7.1 Розв'язати рівняння $C \cup X = A \setminus B$
$C \cup X = A \setminus B$
$(C \cup X) \Delta (A \setminus B) = \emptyset$
$(C \cup X) \Delta (A \cap \bar{B}) = \emptyset$
$((C \cup X) \cap \overline{(A \cap \bar{B})}) \cup ((A \cap \bar{B}) \cap \overline{(C \cup X)}) = \emptyset$
$((C \cup X) \cap (\bar{A} \cup B)) \cup ((A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{X}) = \emptyset$
$(C \cap \bar{A}) \cup (C \cap B) \cup (X \cap \bar{A}) \cup (X \cap B) \cup (\bar{X} \cap A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = \emptyset$
$\begin{cases} (C \cap \bar{A}) \cup (C \cap B) = \emptyset \\ (X \cap \bar{A}) \cup (X \cap B) = \emptyset \\ \bar{X} \cap A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \emptyset \end{cases} \iff \begin{cases} C \cap (\bar{A} \cup B) = \emptyset \\ (\bar{A} \cup B) \cap X = \emptyset \\ (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cap \bar{X} = \emptyset \end{cases}$
$\iff \begin{cases} C \subset A \cap \bar{B} \\ X \subset A \cap \bar{B} \\ A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \subset X \end{cases} \iff \begin{cases} A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \subset X \subset A \cap \bar{B} \\ C \subset A \cap \bar{B} \end{cases}$
$\iff \begin{cases} A \setminus (B \cup C) \subset X \subset A \setminus B \\ C \subset A \setminus B \end{cases}$
Відповідь: $A \setminus (B \cup C) \subset X \subset A \setminus B$ за умовою $C \subset A \setminus B$. Інакше нема розв'язків

Буває випадки, коли треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1(X) = \mathcal{A}_2(X) \\ \mathcal{C}_1(X) = \mathcal{C}_2(X) \end{cases}$$

Ми просто розв'язуємо кожне рівняння окремо до останнього вигляду - а тому отримаємо такий вигляд

$$\begin{cases} \mathcal{B}_2 \subset X \subset \bar{\mathcal{B}}_1 \\ \mathcal{B}_3 = \emptyset \\ \mathcal{D}_2 \subset X \subset \bar{\mathcal{D}}_1 \\ \mathcal{D}_3 = \emptyset \end{cases}$$

Перші два рівняння - розв'язок першого рівняння системи
Останні два рівняння - розв'язок другого рівняння системи
Тоді спрощується це рівняння ось таким чином

$$\begin{cases} \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{D}_2 \subset X \subset \bar{\mathcal{B}}_1 \cap \bar{\mathcal{D}}_1 \\ \mathcal{B}_3 = \emptyset \\ \mathcal{D}_3 = \emptyset \end{cases}$$

Відповідь: $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{D}_2 \subset X \subset \bar{\mathcal{B}}_1 \cap \bar{\mathcal{D}}_1$ за умовами $\mathcal{B}_3 = \emptyset$, $\mathcal{D}_3 = \emptyset$. Інакше нема розв'язків
Останні дві умови можна суттєво спростити та переписати її в одну стрічку, якщо це буде можливо

3 Теорія відношень

3.1 Основа

Definition 3.1.1 Задано $A_1, \dots, A_n$ - деякі множини
Множина R називається **відношенням**, що задане на множинах $A_1, \dots, A_n$, якщо

$$R \subset A_1 \times \dots \times A_n$$

$R = \emptyset$ - **порожнє відношення**
$R = A_1 \times \dots \times A_n$ - **повне відношення**

Example 3.1.2 Задано $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{a, b, c, d\}$. Задамо відношення $R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, a), (4, b), (1, d)\}$

Домовленість із позначеннями
$R \subset A \times B \iff R : A \to B$
$(x, y) \in R \iff xRy$

Example 3.1.3 Із попереднього прикладу маємо відношення $R \subset A_1 \times A_2$, тобто $R : A_1 \to A_2$
Маємо $(1, a) \in R$, тобто $1Ra$

Definition 3.1.4 **Тотожнім відношенням** на множині A називають таке відношення

$$I_A = \{(x, x) : x \in A\}$$

Тобто маємо, що $xI_Ay \iff x = y$

Способи задання бінарних відношень
1. Як стандартну множину:
$R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, a), (4, b), (1, d)\}$
2. На координатній площині:
$R : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad R = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$
(INSERT PICTURE)
3. Стрілковими діаграмами:
$A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2\} \qquad R : A \to B \qquad R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1)\}$
(INSERT PICTURE)
4. Матрицею
$R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1)\}$
$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. На графах
$A = \{a, b, c\} \qquad R : A \to A \qquad R = \{(a, b), (b, c), (c, c)\}$
(INSERT PICTURE)

Перший спосіб не обов'язково для бінарних. П'ятий спосіб бінарне відношення задається лише на одній множині

3.2 Основні операції

Definition 3.2.1 Задано відношення $R, S \subset A_1 \times \cdots \times A_n$
Об'єднанням відношень R, S називають об'єднання множин $R \cup S$
Перетином відношень R, S називають об'єднання множин $R \cap S$
Доповненням відношення R називають доповненням множин $\bar{R}$ відносно універсальної множини $U = A_1 \times \cdots \times A_n$

Definition 3.2.2 Задано відношення $R : A \to B$, $S : B \to C$
Інверсним відношенням називають відношення $R^{-1} : B \to A$, для якого

$$bR^{-1}a \iff aRb$$

Композицією відношень називають відношення $R \circ S : A \to C$, для якого

$$a(R \circ S)c \iff \exists b : aRb \land bSc$$

Remark 3.2.3 Задано відношення $R : A \to B$, $S : A \to B$, де A, B - скінченні множини
Тоді ми маємо матриці M_R, M_S
Щоб отримати $M_{R\cup S}$, треба поелементно провести диз'юнкцію, тобто
$(M_{R\cup S})_{ij} = (M_R)_{ij} \lor (M_S)_{ij}$
Щоб отримати $M_{R\cap S}$, треба поелементно провести кон'юнкцію, тобто
$(M_{R\cap S})_{ij} = (M_R)_{ij} \land (M_S)_{ij}$
Щоб отримати $M_{\bar{R}}$, треба від кожного елементу взяти заперечення, тобто
$(M_{\bar{R}})_{ij} = \neg(M_R)_{ij}$
Щоб отримати $M_{R^{-1}}$, треба транспонувати матрицю, тобто
$M_{R^{-1}} = M_R^T$
Щоб отримати $M_{R\circ S}$, якщо $S : B \to C$, треба перемножити обидві матриці, тобто
$M_{R\circ S} = M_R M_S$

Example 3.2.4 (INSERT EXAMPLE)

Theorem 3.2.5 $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

Proof.
$a(R \circ (S \circ T))d \iff \exists b : aRb \wedge b(S \circ T)d \iff \exists b : aRb \wedge (\exists c : bSc \wedge cTd)$
$\iff \exists b \exists c : aRb \wedge bSc \wedge sTd \iff \exists c : (\exists b : aRb \wedge bSc) \wedge sTd$
$\iff \exists c : a(R \circ S)c \wedge sTd \iff a((R \circ S) \circ T)d$ ■

3.3 Властивості бінарних відношень

Definition 3.3.1 Задано відношення $R : A \to A$
Відношення називається **рефлексивним**, якщо

$$\forall a \in A : aRa$$

Відношення називається **антирефлексивним**, якщо

$$\forall a \in A : \neg aRa$$

Відношення називається **симетричним**, якщо

$$a_1 R a_2 \iff a_2 R a_1$$

Відношення називається **антисиметричним**, якщо

$$a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_1 \implies a_1 = a_2$$

Відношення називається **транзитивним**, якщо

$$a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_3 \implies a_1 R a_3$$

Example 3.3.2 Дослідимо ось таке відношення $R : A \to A$, де $A = \{1, 2, 3, 4\}$ на властивості
$R = \{(1,1), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,4)\}$
- не рефлексивне, тому що $\exists 3 \in A : \neg 3R3$
- не антирефлексивне, тому що $\exists 1 \in A : 1R1$
- не симетричне, тому що $1R4 \not\Leftrightarrow 4R1$
- антисиметричне, тому що кожна симетрична пара чисел дає нам пару однакових чисел
- не транзитивне, тому що $2R1 \wedge 1R4 \not\Rightarrow 2R4$

Remark 3.3.3 Порожнє відношення $\emptyset$ є рефлексивним, антирефлексивнми, симетричнми, антисиметричним, транзитивним. Просто тому що нема жодної пари точок, які б порушили всі п'ять означень

Proposition 3.3.4 Задано відношення $R : A \to A$
R - рефлексивне $\iff R \supset I_A$
R - антирефлексивне $\iff R \cap I_A = \emptyset$
R - симетричне $\iff R = R^{-1}$
R - антисиметричне $\iff R \cap R^{-1} \subset I_A$
R - транзитивне $\iff R \circ R \subset R$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: R - рефлексивне
$\forall a \in A : aI_Aa \overset{\text{умова}}{\Rightarrow} aRa$. Отже, $I_A \subset R$
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $R \supset I_A$
$\forall a \in A : aI_Aa \overset{\text{умова}}{\Rightarrow} aRa$. Отже, R - рефлексивне

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: R - антирефлексивне, тобто $\forall a \in A : \neg aRa$
Водночас $I_A = \{(a, a), a \in A\}$. Отже, $R \cap I_A = \emptyset$
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $R \cap I_A = \emptyset$
$\forall a \in A : aI_Aa$, тоді за умовою, $\neg aRa$, інашке перетин двох множин був би не порожнім. Отже, R - антирефлексивне

R - симетричне $\iff (a_1Ra_2 \iff a_2Ra_1 \iff a_1R^{-1}a_2) \iff R = R^{-1}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: R - антисиметричне, тобто $a_1Ra_2 \wedge a_2Ra_1 \implies a_1 = a_2$
$x(R \cap R^{-1})y \Rightarrow xRy \wedge xR^{-1}y \Rightarrow xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
Тоді $x(R \cap R^{-1})x \Rightarrow xI_Ax$. Отже, $R \cap R^{-1} \subset I_A$
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $R \cap R^{-1} \subset I_A$
$xRy \wedge yRx \Rightarrow xRy \wedge xR^{-1}y \Rightarrow x(R \cap R^{-1})y \Rightarrow xI_Ay \Rightarrow x = y$. Отже, R - антисиметричне

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: R - транзитивне, тобто $a_1Ra_2 \wedge a_2Ra_3 \implies a_1Ra_3$
$x(R \circ R)z \Rightarrow \exists y : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$. Отже, $R \circ R \subset R$
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $R \circ R \subset R$
$a_1Ra_2 \wedge a_2Ra_3 \Rightarrow a_1(R \circ R)a_3 \Rightarrow a_1Ra_3$. Отже, R - транзитивне ■

3.4 Транзитивне замикання

Definition 3.4.1 Задано відношення $R, R^+ : A \to A$
Відношення R^+ називають **транзитивним замиканням** відношення R, якщо

$$R \subset R^+$$
$$R^+ - \text{найменше транзитивне відношення}$$

Example 3.4.2 Маємо відношення
$R = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,4)\}$
Транзитивним замиканням відношення R буде таке відношенння
$R^+ = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,4),(2,4),(3,4)\}$
$R \subset R^+$, а також R^+ - найменше транзитивне відношення. Інакше якщо добавити інші точки, то або ми нічого не згенеруємо, або отримаємо нові пари задля збереження транзитивності

Remark 3.4.3 Транзитивне замикання задається однозначно
Дійсно, маємо R_1^+, R_2^+. Тоді вони обидва найменші транзитивні, або математично записуючи
$\forall S$ - транзитивне : $S \supset R \Rightarrow S \supset R^+$
Для R_1^+ маємо, що $R_1^+ \supset R \Rightarrow R_1^+ \supset R_2^+$
Для R_1^+ маємо, що $R_2^+ \supset R \Rightarrow R_2^+ \supset R_1^+$
Отже, $R_1^+ = R_2^+$

Proposition 3.4.4 $R^+ = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R^n$
Поки без доведення

Theorem 3.4.5 Задано A - така множина, що $n(A) = N$. Тоді
$R^+ = \bigcup\limits_{n=1}^{N} R^n$
Поки без доведення

Example 3.4.6 Задано $A = \mathbb{N}$ та відношення $R = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$.
Знайдемо його транзитивне замикання
Використовуючи метод MI, можемо показати, що
$\forall k \geq 1 : R^k = \{(n, n+k) : n \in \mathbb{N}\}$
$\Rightarrow R^+ = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} R^k =$
$= \{(n, n+1), k = 1, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n, n+2), k = 2, n \in \mathbb{N}\} \cup \dots =$
$= \{(n, n+k) : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\} \overset{\text{або}}{=} \{(n, k) : n < k\}$

Example 3.4.7 Задано $A = \{a, b\}$ та відношення $R = \{(a, b), (b, a)\}$.
Знайдемо його транзитивне замикання
Оскільки $n(A) = 2$, то тоді $R^+ = R \cup R^2$
$R^2 = \{(a, a), (b, b)\}$
$\Rightarrow R^+ = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} = A^2$

3.5 Відношення еквівалентності

Definition 3.5.1 Задано відношення $R : A \to A$
Його називають **відношенням еквівалентності**, якщо R - рефлексивне, симетричне, транзитивне одночасно
Позначення: $xRy \iff x \sim y$

Example 3.5.2 Задано $A = \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$. Встановимо таке відношення R:
$x \sim y \iff (x - y) \bmod p = 0$
Це відношення - дійсно еквівалентне, оскільки:
- $(x - x) \bmod p = 0 \bmod p = 0$
- $(x - y) \bmod p = 0 \iff -(y - x) \bmod p = 0 \iff (y - x) \bmod p = 0$
- $(x - y) \bmod p = 0$ та $(y - z) \bmod p = 0$
Тоді $(x-z) \bmod p = (x-y+y-z) \bmod p = (x-y) \bmod +(y-z) \bmod = 0$
Отже, можемо ми мати такий ланцюг еквівалентності:
$1 \sim p + 1 \sim -2p + 1 \qquad 0 \sim 10p$
Проте $1 \not\sim 2$

Example 3.5.3 Задано $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ та відношення
$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3), (4, 5), (5, 4)\}$
Це відношення (перевірити самостійно) рефлексивне, симетричне, транзитивне - отже, еквівалентне
Тоді $1 \sim 2 \quad 3 \sim 4 \sim 5 \quad 6$
Проте $1 \not\sim 3 \quad 1 \not\sim 6 \quad 3 \not\sim 6$

До речі, представимо відношення у вигляді матриці
$$M_\sim = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Мажмо такі блокові матриці з одиниць, 2×2, 3×3 та 1×1

3.6 Відношення порядку

Definition 3.6.1 Задано відношення $R : A \to A$
Його називають **відношенням еквівалентності**, якщо R - рефлексивне, антисиметричне, транзитивне одночасно
Множина A тоді називається **частково впорядкованою**
Позначення: $x \preceq y \iff xRy$

Remark 3.6.2 Деякі зауваження стосовно передування:
$s \succeq y \iff y \preceq x$
$x \succ y \iff y \prec x \iff (y \preceq x) \wedge (x \neq y)$

Example 3.6.3 Задано $A = \mathbb{R}$. Відошення $xRy \iff x \leq y$ - відношення порядку, тому що
- $x \leq x$
- $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$
- $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$
Тоді $x \preceq y \iff x \leq y$

Definition 3.6.4 Якщо $(x \preceq y) \vee (y \preceq x)$, тоді x, y називають **порівняльними**
Якщо порівняльні $\forall x, y$, то тоді маємо **відношення лінійного порядку**

3.7 Розбиття множин, фактор-множини

Definition 3.7.1 Задано $U \neq \emptyset$ - деяка універсальна множина
Сукупність множин $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ назвемо **розбиттям** множини U, якщо

$$\forall \alpha \in I : A_\alpha \neq \emptyset$$
$$U = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$
$$\forall \alpha_1 \neq \alpha_2 : A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = \emptyset$$

Example 3.7.2 Нехай $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$U = \underset{A_1}{\{1, 2\}} \cup \underset{A_2}{\{3, 5\}} \cup \underset{A_3}{\{4\}}$
Множини A_1, A_2, A_3 не перетинаються попарно
Таким чином, маємо розбиття $\{\underset{A_1}{\{1, 2\}}, \underset{A_2}{\{3, 5\}}, \underset{A_3}{\{4\}}\}$

Example 3.7.3 Нехай $U = \mathbb{R}^2$. Задамо такі множини:
$A_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$, де $r \geq 0$
Множина $\{A_r, r \geq 0\}$ утворює розбиття множини $\mathbb{R}^2$
(INSERT PICTURE)

Definition 3.7.4 Задано відношення еківалентності R на множині A. Нехай $a \in A$
Класом еквіналетності, породженим елементом a, називають таку множину

$$[a] = \{x \in A : x \sim a\}$$

Remark 3.7.5 $[a] \neq \emptyset$, принаймні тому що $a \in A$

Example 3.7.6 Повернімось до $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ та відношення
$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (3, 5),$
$(5, 3), (4, 5), (5, 4)\}$
З'ясовано, що $1 \sim 2 \quad 3 \sim 4 \sim 5 \quad 6$
Маємо тоді такі класи еквівалентності
$[1] = [2] = \{1, 2\} \quad [3] = [4] = [5] = \{3, 4, 5\} \quad [6] = \{6\}$
Можемо вже зауважити, що або класи еквівалетності співпадають, або не перетинаються взагалі. Чи буде це завжди?

Theorem 3.7.7 Класи еквівалентності не перетинаються або співпадають

Proof.
Тобто доводимо, що $\forall a_1 \in a_2 \in A : ([a_1] \cap [a_2] = \emptyset) \vee ([a_1] = [a_2])$
Розглянемо деякий елемент $b \in [a_1] \cap [a_2] \neq \emptyset$
$b \in [a_1] \Rightarrow b \sim a_1$
$b \in [a_2] \Rightarrow b \sim a_2$
$(a_1 \sim b) \wedge (b \sim a_2) \Rightarrow (a_1 \sim a_2)$
Лишилось довести, що $[a_1] = [a_2]$
$x \in [a_1] \iff x \sim a_1 \iff x \sim a_2 \iff x \in [a_2]$ ■

Definition 3.7.8 Задано відношення екївалентності R на множині A
Фактор-множиною множини A називають таку множину

$$A/_{\sim} = \{[a] : a \in A\}$$

Example 3.7.9 Профакторизуємо множину $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ за попереднім відношенням еквівалетності
$1 \sim 2 \quad 3 \sim 4 \sim 5 \quad 6$
$A/_{\sim} = \{[1], [3], [6]\} = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}\}$

Example 3.7.10 Профакторизуємо множину $\mathbb{Z}$ за відношенням еквівалентності
$x \sim y \iff (x - y) \bmod p = 0$
При діленні на p маємо такі остачі: $0, 1, \ldots, p - 1$
Тому маємо такі класи еквівалентності:
$[0] = \{\ldots, -2p, -p, 0, p, 2p, \ldots\} = \{0 + jp, j \in \mathbb{Z}\}$
$[1] = \{\ldots, -2p + 1, -p + 1, 1, p + 1, 2p + 1, \ldots\} = \{1 + jp, j \in \mathbb{Z}\}$
$\ldots$
$[p - 1] = \{\ldots, -p - 1, -1, p - 1, 2p - 1, 3p - 1, \ldots\} = \{p - 1 + jp, j \in \mathbb{Z}\}$
Коротше кажучи, $\forall k : 0 \leq k \leq p - 1 : A_k = [k] = \{k + jp, j \in \mathbb{Z}\}$
Запишемо фактор-множину
$A/_{\bmod p} = \{A_k : 0 \leq k \leq p - 1\}$

3.8 Функція як окремий випадок відношення

Тут вивчається зв'язок між бінарними відношеннями та функціями з матану

Definition 3.8.1 Задано відношення $R : A \to B$
Областю визначення відношення R назвемо множину

$$\mathcal{D}_R = \{x \in A : \exists y \in B : xRy\}$$

Областю значень (або **образом**) відношення R назвемо множину

$$\mathrm{Im}_R = \{y \in B : \exists x \in A : xRy\}$$

Proposition 3.8.2 $\mathcal{D}_R = \mathrm{Im}_{R^{-1}}$
Вправа: довести

Definition 3.8.3 Задано відношення $R : A \to B$
Відношення R називається **сюр'єктивним**, якщо

$$\forall y \in B : \exists x \in A : xRy$$

Відношення R називається **ін'єктивним**, якщо

$$(x_1 R y) \wedge (x_2 R y) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Proposition 3.8.4 R - сюр'єктивне $\iff \mathrm{Im}_R = B$
Вправа: довести

Definition 3.8.5 Задано відношення $R : A \to B$
Відношення R називається **функціональним**, якщо

$$(xRy_1) \wedge (xRy_2) \Rightarrow y_1 = y_2$$

Саме звідси виникають функції як в класичному матані. Кожному x ставиться у відповідніть єдине y
Вважатимемо надалі, що функціональному відношенню $R_f : A \to B$ відповідає функція $f : A \to B$, така, що

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{R_f}$$
$$y = f(x) \iff xR_f y$$

Proposition 3.8.6 R - ін'єктивне $\iff R^{-1}$ - функціональне
Вправа: довести

Theorem 3.8.7 Задані відношення $R : A \to B$, $S : B \to C$
R, S - сюр'єктивні. Тоді $R \circ S$ - сюр'єктивне
R, S - ін'єктивні. Тоді $R \circ S$ - ін'єктивне
R, S - функціональні. Тоді $R \circ S$ - функціональне

Proof.
R, S - сюр'єктивні
Нехай $z \in C$. Тоді за сюр'єктивністю S, $\exists y \in B : ySz$
Тоді за сюр'єктивністю R, $\exists x \in A : xRy$
Тобто $\forall z \in C : \exists x \in A : x(R \circ S)z$. Отже, $R \circ S$ - сюр'єктивне

R, S - ін'єктивні
Нехай $x_1(R \circ S)z, x_2(R \circ S)z$. За означенням,
$\exists y_1, y_2 \in B : x_1Ry_1, x_2Ry_2, y_1Sz, y_2Sz$
За ін'єктивністю S, $y_1 = y_2 = y$. Отже, x_1Ry, x_2Ry
За ін'єктивністю R, $x_1 = x_2$. Отже, $R \circ S$ - ін'єктивне

R, S - функціональні
Вправа: довести ■

Definition 3.8.8 Функцію $f : A \to B$ називають **відображенням**, якщо

$$\forall x \in A : \mathcal{D}_f = A$$

Proposition 3.8.9 Задано R_f - функціональне відображення
f - відображення $\iff$ $(R_f)^{-1}$ - сюр'єктивне

Proposition 3.8.10 Задані функції $f : A \to B$, $g : B \to C$ - відображення
Тоді $g \circ f$ - відображення

Definition 3.8.11 Маємо відображення
Ін'єкцією називають відображення, що відповідає ін'єктивному функціональному відношенню
Сюр'єкцією називають відображення, що відповідає сюр'єктивному функціональному відношенню
Бієкцією називають відображення, що є ін'єкцією та сюр'єкцією одночасно