

$$(X, \mathcal{F}, \lambda)$$

$$\mathcal{P} \xrightarrow{\text{Karhunen-Loève theorem}} \mathcal{S}$$

$$A, B \in \mathcal{P}$$

$$A \cap B \in \mathcal{P}$$

$$A \cup B = \bigcup_i C_i, C_i \in \mathcal{P}$$

$$\int_a^b \varpi(x) dx$$

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c)$$

$$f = \frac{d\lambda}{d\lambda} \lambda$$

$$\lambda(A) = \int_A f d\lambda$$

Measure Theory

$$f \in \mathcal{R}([a, b])$$

$$\Downarrow$$

$$f \in L([a, b]), \lambda = \text{Lebesgue}$$

$$\int_{[a, b]} \varpi(x) d\lambda(x) = 0$$

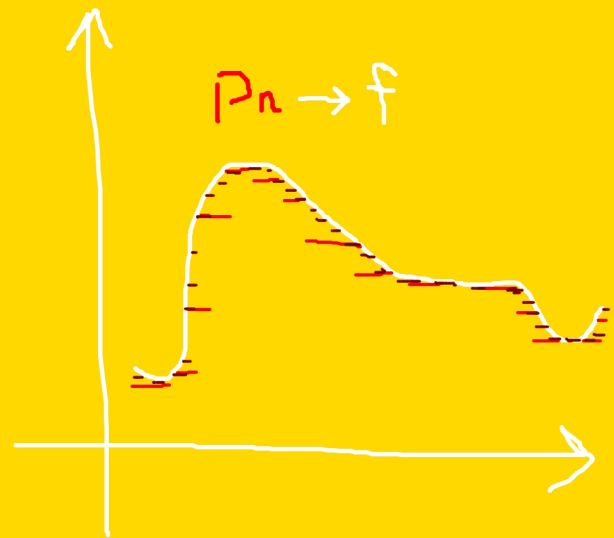
$$\int_A p d\lambda = \sum_i \alpha_i \lambda(A_i \cap A)$$

$$\int_A f d\lambda = \sup_{p \in \mathcal{K}(f) \cap A} \int p d\lambda$$

$$\int_A f d\lambda = \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda$$

$$L_p = \{f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid \int_X |f|^p d\lambda < +\infty\}$$

$$L_p / \sim \quad \|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{1/p}$$



# Зміст

<b>1</b>	<b>Класи множин</b>	<b>3</b>
1.1	Основні класи множин . . . . .	3
1.2	Породжені класи множин . . . . .	5
1.3	Борельові множини . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Міри</b>	<b>9</b>
2.1	Основні функції множин . . . . .	9
2.2	Означення міри . . . . .	9
2.3	Про міру Жордана . . . . .	11
2.4	Зовнішні міри . . . . .	13
2.5	Вимірність за Каратеодорі . . . . .	15
2.6	Продовження міри . . . . .	16
2.7	Міра Лебега . . . . .	18
2.8	Регулярність мір . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Вимірні функції</b>	<b>20</b>
3.1	Основні означення . . . . .	20
3.2	Дії з вимірними функціями . . . . .	21
3.3	Наближення вимірних функцій . . . . .	22
3.4	Еквівалентні функції . . . . .	24
3.5	Теорема Єгорова . . . . .	25
3.6	Збіжність за мірою . . . . .	25
3.7	Основні твердження, що пов'язують обидві збіжності. Фундаментальність за мірою . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Інтеграл Лебега</b>	<b>30</b>
4.1	Первинні означення . . . . .	30
4.2	Наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій . . . . .	32
4.3	Основні властивості та твердження . . . . .	33
4.4	Граничні теореми . . . . .	36
4.5	Порівняння інтеграла Рімана з інтегралом Лебега . . . . .	39
4.6	Інтеграл з параметром . . . . .	40
4.7	Заміна змінної . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Заряди</b>	<b>42</b>
5.1	Основні означення. Розклад Гана . . . . .	42
5.2	Теорема Радона-Нікодима . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Добуток просторів</b>	<b>48</b>
6.1	Множини та функції . . . . .	48
6.2	Добуток мір . . . . .	49
6.3	Теорема Тонеллі та Фубіні . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Простір <math>L_p</math></b>	<b>55</b>
7.1	Основні нерівності . . . . .	55
7.2	Конструкція простору $L_p$ . . . . .	56
7.3	Щільні підмножини $L_p$ . . . . .	57
7.4	Істотно обмежені функції . . . . .	59

# 1 Класи множин

## 1.1 Основні класи множин

**Definition 1.1.1** Задано  $X$  – деяка множина та  $\mathcal{K} \subset 2^X$  – клас підмножин. Непорожній клас  $\mathcal{K}$  називається **кільцем**, якщо

$$\begin{aligned} \forall A, B \in \mathcal{K} : A \cup B \in \mathcal{K} \\ \forall A, B \in \mathcal{K} : A \setminus B \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

### Proposition 1.1.2 Властивості кільця

Задано  $X$  та  $\mathcal{K}$  – кільце на цій множині. Тоді виконуються такі пункти:

- 1)  $\emptyset \in \mathcal{K}$ ;
- 2)  $\forall A, B \in \mathcal{K} : A \cap B \in \mathcal{K}$ ;
- 3)  $\forall A_k \in \mathcal{K}, k = \overline{1, n} : \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{K}, \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{K}$ .

**Proof.**

Покажемо виконання кожної властивості:

- 1) Оскільки  $\mathcal{K}$  – непорожня, то існує елемент  $A \in \mathcal{K}$ . Зокрема  $A \setminus A = \emptyset \in \mathcal{K}$ ;
- 2)  $\forall A, B \in \mathcal{K} : A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ . За умовою кільця,  $A \setminus B \in \mathcal{K}$  та  $A \in \mathcal{K}$ , а тому  $A \cap B \in \mathcal{K}$ .
- 3) Перше випливає з означення кільця, а друге випливає з властивості 2).

Всі властивості доведені. ■

**Definition 1.1.3** Задано  $X$  – деяка множина та  $\mathcal{A} \subset 2^X$  – клас підмножин. Непорожній клас  $\mathcal{A}$  називається **алгеброю**, якщо

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \text{кільце} \\ X \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

**Definition 1.1.4** Задано  $X$  – деяка множина та  $\mathcal{P}$  – клас підмножин. Непорожній клас  $\mathcal{P}$  назвемо **півкільцем**, якщо

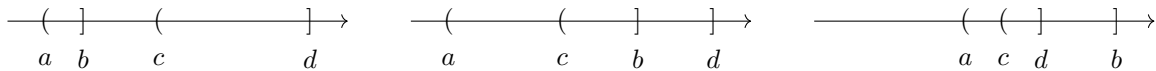
$$\begin{aligned} \forall A, B \in \mathcal{P} : A \cap B \in \mathcal{P} \\ \forall A, B \in \mathcal{P} : A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n C_i, C_i \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

**Remark 1.1.5**  $\emptyset \in \mathcal{P}$ , тому що в силу непорожності  $A \in \mathcal{P}$ , а тому за другою умовою, з одного боку,  $A \setminus A = \bigcup_{i=1}^n C_i$  при  $C_i \in \mathcal{P}$ ; а з іншого боку,  $A \setminus A = \emptyset$ . Тому рівність виконується лише при  $C_i = \emptyset \in \mathcal{P}$ .

**Example 1.1.6** Розглянемо  $\mathcal{P}_1 = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  – клас підмножин  $\mathbb{R}$ . Воно утворює півкільце.

Нехай  $(a, b] \in \mathcal{P}_1$  та  $(c, d] \in \mathcal{P}_1$ . Тоді звідси  $(a, b] \cap (c, d]$  кілька опцій:

- 1)  $(a, b] \cap (c, d] = \emptyset \in \mathcal{P}_1$ , якщо ці напівінтервали не перетинаються;
- 2)  $(a, b] \cap (c, d] = (c, b] \in \mathcal{P}_1$ , якщо (не втрачаючи загальності)  $a < c < b < d$ ;
- 3)  $(a, b] \cap (c, d] = (c, d] \in \mathcal{P}_1$ , якщо (не втрачаючи загальності)  $(c, d] \subset (a, b]$ .



Відповідно зліва направо: 1), 2), 3).

Далі розглянемо  $(a, b] \setminus (c, d]$ . Знову кілька опцій:

- 1)  $(a, b] \setminus (c, d] = (a, b]$ , якщо ці напівінтервали не перетинаються;
- 2)  $(a, b] \setminus (c, d] = (a, c]$ , якщо (не втрачаючи загальності)  $a < c < b < d$ ;
- 3)  $(a, b] \setminus (c, d] = (a, c] \sqcup (b, d]$ , якщо (не втрачаючи загальності)  $(c, d] \subset (a, b]$ .

Усі вони розклалися не неперетинне об'єднання елементів з  $\mathcal{P}_1$ .

Отже,  $\mathcal{P}_1$  – дійсно утворює півкільце.

**Theorem 1.1.7** Задані  $\mathcal{P}'$  та  $\mathcal{P}''$  – два півкільця на відповідних множинах  $X_1, X_2$ . Визначимо  $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}'' = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{P}', A_2 \in \mathcal{P}''\}$ . Тоді  $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$  буде півкільцем на множині  $X_1 \times X_2$ .

**Proof.**

Нехай  $A, B \in \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$ , тобто  $A = A_1 \times A_2$  та  $B = B_1 \times B_2$ , де  $A_1, B_1 \in \mathcal{P}'$  та  $A_2, B_2 \in \mathcal{P}''$ .

$$A \cap B = (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2).$$

Причому  $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{P}'$  та  $A_2 \cap B_2 \in \mathcal{P}''$  за визначеннями півкільця. А за визначенням  $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$ , звідси  $A \cap B \in \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$ .

$$A \setminus B = [(A_1 \setminus B_1) \times A_2] \sqcup [(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)] \quad (\text{вправа: довести рівність}).$$

Зауважимо, що  $A_1 \setminus B_1 = \bigcup_{i=1}^n C_i$  та  $A_2 \setminus B_2 = \bigcup_{k=1}^m D_k$ , причому  $C_i \in \mathcal{P}', D_k \in \mathcal{P}''$ . Значить, рівність можна дописати:

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n (C_i \times A_2) \sqcup \bigcup_{k=1}^m ((A_1 \cap B_1) \times D_k).$$

У нас записані елементи з  $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$ , а сама множина  $A \setminus B$  записалася як неперетинне об'єднання елементів з  $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$ .

Висновок:  $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$  задає півкільце на  $X_1 \times X_2$ . ■

**Remark 1.1.8** Зрозуміло, що твердження працює для скінченного числа півкільця.

**Example 1.1.9** Зокрема  $\mathcal{P}_1$  – півкільце на  $\mathbb{R}$ . Визначимо нову множину  $\mathcal{P}_d = \left\{ \prod_{i=1}^d (a_i, b_i] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$ .

Тоді  $\mathcal{P}_d$  буде півкільцем множини  $\mathbb{R}^d$ , просто тому що  $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_1$ .

**Remark 1.1.10** Будь-яке кільце  $\mathcal{K}$  – автоматично півкільце.

Адже перша умова виконана за властивістю 2) кільця. А також за означенням,  $A \setminus B = A \setminus B$ , де  $A \setminus B \in \mathcal{K}$  – тобто цей елемент розписали не неперетинне об'єднання з одного елемента з даного класу.

**Definition 1.1.11** Задано  $X$  – деяка множина та  $\sigma\mathcal{K} \subset 2^X$  – клас підмножин.

Непорожній клас  $\sigma\mathcal{K}$  називається  **$\sigma$ -кільцем**, якщо

$$\begin{aligned} \forall A_n \in \sigma\mathcal{K}, n \geq 1 : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &\in \sigma\mathcal{K} \\ \forall A, B \in \sigma\mathcal{K} : A \setminus B &\in \sigma\mathcal{K} \end{aligned}$$

**Proposition 1.1.12** Властивості  $\sigma$ -кільця

Задано  $X$  та  $\sigma\mathcal{K}$  –  $\sigma$ -кільце на цій множині. Тоді виконуються такі пункти:

- 1)  $\sigma\mathcal{K}$  – буде (просто) кільцем;
- 2)  $\forall A_n \in \sigma\mathcal{K}, n \geq 1 : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma\mathcal{K}$ .

**Proof.**

Покажемо виконання кожної властивості:

1) Візьмемо  $A, B \in \sigma\mathcal{K}$ , тоді звідси  $A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \cup \dots \in \sigma\mathcal{K}$ .

2)  $\forall A_n \in \sigma\mathcal{K}, n \geq 1 : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \in \sigma\mathcal{K}$ .

Всі властивості доведені. ■

**Definition 1.1.13** Задано  $X$  – деяка множина та  $\sigma\mathcal{A} \subset 2^X$  – клас підмножин.

Непорожній клас  $\sigma\mathcal{A}$  називається  **$\sigma$ -алгеброю**, якщо

$$\begin{aligned} \sigma\mathcal{A} &\text{ – } \sigma\text{-кільце} \\ X &\in \sigma\mathcal{A} \end{aligned}$$

**Definition 1.1.14** Задамо послідовність множин  $\{A_n, n \geq 1\}$ .

Вона буде називатися **зростаючою**, якщо  $A_{n+1} \supset A_n$ .

У такому випадку ми позначимо  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

Вона буде називатися **спадною**, якщо  $A_{n+1} \subset A_n$ .

У такому випадку ми позначимо  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

Обидві послідовності множин будемо називати **монотонними**.

**Definition 1.1.15** Задано  $X$  – деяка множина та  $\mathcal{M} \subset 2^X$  – клас підмножин.

Непорожній клас  $\mathcal{M}$  називається **монотонним**, якщо

$$\forall \{A_n \in \mathcal{M}, n \geq 1\} - \text{монотонна} : \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{M}$$

**Theorem 1.1.16** Задано  $\mathcal{H}$  – кільце та монотонний клас множин  $X$ . Тоді  $\mathcal{H}$  –  $\sigma$ -кільце.

**Proof.**

Нехай  $A_n \in \mathcal{H}, n \geq 1$ . Розглянемо послідовність множин  $\{B_n, n \geq 1\}$ , що задається таким чином:

$$B_1 = A_1, B_2 = A_1 \cup A_2, B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \dots$$

Зауважимо, що  $\{B_n \in \mathcal{H}\}$  зростає, а в силу монотонності, звідси  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P}$ .

Ну й якщо  $A, B \in \mathcal{H}$ , то за означенням кільця,  $A \setminus B \in \mathcal{H}$ .

Висновок:  $\mathcal{H}$  –  $\sigma$ -кільце. ■

## 1.2 Породжені класи множин

**Definition 1.2.1** Задано  $X$  – множина та  $\mathcal{H}$  – непорожня множина.

**Кільцем, породженим класом  $\mathcal{H}$** , називається така множина:

$$k(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{K}_\alpha - \text{кільце}}} \mathcal{K}_\alpha$$

$\sigma$ -кільцем, породженим класом  $\mathcal{H}$ , називається така множина:

$$\sigma k(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{(\sigma \mathcal{K})_\alpha \supset \mathcal{H} \\ (\sigma \mathcal{K})_\alpha - \sigma\text{-кільце}}} (\sigma \mathcal{K})_\alpha$$

**Алгеброю, породженим класом  $\mathcal{H}$** , називається така множина:

$$a(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{A}_\alpha - \text{алгебра}}} \mathcal{A}_\alpha$$

$\sigma$ -алгеброю, породженим класом  $\mathcal{H}$ , називається така множина:

$$\sigma a(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{(\sigma \mathcal{A})_\alpha \supset \mathcal{H} \\ (\sigma \mathcal{A})_\alpha - \sigma\text{-алгебра}}} (\sigma \mathcal{A})_\alpha$$

**Монотонним класом, породженим класом  $\mathcal{H}$** , називається така множина:

$$m(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{M}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{M}_\alpha - \text{монотонний клас}}} \mathcal{M}_\alpha$$

**Remark 1.2.2** Я зосереджуся лише на породжених кільцях. Нижче будуть зазначені властивості породжених кілець – аналогічно ті властивості переписуються для інших породжених класів.

**Remark 1.2.3** Зауважимо, що  $k(\mathcal{H}) \neq \emptyset$ . Оскільки  $\mathcal{K}_\alpha$  – кільця, то тоді  $\emptyset \in \mathcal{K}_\alpha$  при всіх  $\alpha$ , а тому  $\emptyset \in k(\mathcal{H})$ .

**Proposition 1.2.4 Властивості породженого кільця**

Задано  $X$  – множина та  $\mathcal{H}$  – непорожня множина. Тоді виконуються такі пункти:

- 1)  $k(\mathcal{H})$  – дійсно, кільце;
- 2)  $k(\mathcal{H}) \supset \mathcal{H}$ ;
- 3) Нехай  $\mathcal{K}$  – якесь кільце, де  $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ . Тоді звідси  $\mathcal{K} \supset k(\mathcal{H})$ .

**Proof.**

Доведемо виконання всіх пунктів:

1) Нехай  $A, B \in k(\mathcal{H})$ , тобто звідси  $A, B \in \mathcal{K}_\alpha$  при всіх  $\alpha$ . Оскільки  $\mathcal{K}_\alpha$  – кільце при всіх  $\alpha$ , то звідси  $A \cup B \in \mathcal{K}_\alpha$  при всіх  $\alpha$ . Тобто звідси  $A \cup B \in k(\mathcal{H})$ . Аналогічно доводимо, що  $A \setminus B \in k(\mathcal{H})$ .

2) це випливає з того, що всі  $\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H}$ , а далі перетнути треба по  $\alpha$ .

3) Маємо  $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$  – якесь кільце. Тоді  $\mathcal{K}$  бере участь у перетині всіх кілець в  $k(\mathcal{H})$ , просто за умовою такого кільця. Значить,  $k(\mathcal{H}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{K}_\alpha \text{ – кільце} \\ \mathcal{K}_\alpha \neq \mathcal{K}}} \mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ .

Всі властивості доведені. ■

**Corollary 1.2.5**  $k(\mathcal{H})$  – найменше кільце, що містить  $\mathcal{H}$  – непорожній клас підмножин  $X$ .

**Theorem 1.2.6** Задано  $\mathcal{P}$  – півкільце. Тоді  $k(\mathcal{P}) = \{A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k \mid A_n \in \mathcal{P}\}$ .

**Proof.**

Для спрощення позначимо клас множин  $\mathcal{L} = \{A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k \mid A_n \in \mathcal{P}\}$ . Хочемо довести, що  $k(\mathcal{P}) = \mathcal{L}$ .  $\mathcal{L} \subset k(\mathcal{P})$ .

Дійсно, якщо  $D \in \mathcal{D}$ , то звідси  $D = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$ , де всі  $A_n \in \mathcal{P}$ . Але  $\mathcal{P} \subset k(\mathcal{P})$ , звідси, за означенням кільця,  $D \in k(\mathcal{H})$ .

$\mathcal{L} \supset k(\mathcal{P})$ .

Зрозуміло цілком, що  $\mathcal{L} \supset \mathcal{P}$ . Нам треба довести, що  $\mathcal{L}$  буде кільцем – і тоді звідси, за властивістю 3) породжених кілець,  $\mathcal{L} \supset k(\mathcal{P})$ .

Нехай  $A, B \in \mathcal{L}$ , тобто звідси  $A = \bigsqcup_{i=1}^n C_i$ ,  $B = \bigsqcup_{k=1}^m D_k$  та всі  $C_i, D_k \in \mathcal{P}$ .

$A \sqcup B \in \mathcal{L}$  (це якщо  $A \cap B = \emptyset$ , а тому звідси кожний  $C_i \cap D_k = \emptyset$ ). Дійсно,  $A \sqcup B = C_1 \sqcup \dots \sqcup D_m$ , всі ці елементи з  $\mathcal{P}$ .

$A \cap B \in \mathcal{L}$ . Дійсно,  $A \cap B = \bigsqcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} (C_i \cap D_k)$ , причому кожний  $C_i \cap D_k \in \mathcal{P}$  за означенням півкільця.

$A \setminus B \in \mathcal{L}$  (перша вимога кільця). Спочатку зауважимо, що  $A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^n (C_i \setminus B)$ , а далі кожний

$C_i \setminus B = \bigcap_{k=1}^m (C_i \setminus D_k)$ . Але оскільки  $C_i, D_k \in \mathcal{P}$ , то тоді  $C_i \setminus D_k = \bigsqcup_{r=1}^{s_{ik}} G_r$  та кожний  $G_r \in \mathcal{P}$ . Звідси випливає  $C_i \setminus D_k \in \mathcal{L}$ , а тому далі  $C_i \setminus B \in \mathcal{L}$  як перетин, а після  $A \setminus B \in \mathcal{L}$  як диз'юнктивне об'єднання.

$A \cup B \in \mathcal{L}$  (друга вимога кільця). Дійсно, розпишемо  $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ .

Отже, нарешті довели, що  $\mathcal{L}$  утворює кільце, що завершує доведення. ■

**Example 1.2.7** Зокрема  $k(\mathcal{P}_1) = \left\{ \bigsqcup_{k=1}^n (a_k, b_k] \mid (a, k, b_k] \subset \mathbb{R} \right\}$ . Аналогічно визначається  $k(\mathcal{P}_d)$ .

**Theorem 1.2.8** Задано  $\mathcal{K}$  – кільце. Тоді  $m(\mathcal{K}) = \sigma k(\mathcal{K})$ .

**Proof.**

$m(\mathcal{K}) \subset \sigma k(\mathcal{K})$ .

Дійсно,  $\sigma k(\mathcal{K}) \supset \mathcal{K}$ , за властивістю породжених  $\sigma$ -кілець. Також  $\sigma k(\mathcal{K})$  буде монотонним класом, тому що під  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n, A_n \in \mathcal{K}$ , ми маємо на увазі зліченне об'єднання або перетин, що допустимо. Звідси випливає, що  $\sigma k(\mathcal{K}) \supset m(\mathcal{K})$ .

$$m(\mathcal{K}) \supset \sigma k(\mathcal{K}).$$

Маємо  $m(\mathcal{K}) \supset \mathcal{K}$ , за властивістю породжених монотонних класів. Нам треба довести, що  $m(\mathcal{K})$  буде  $\sigma$ -кільцем – і тоді звідси  $m(\mathcal{K}) \supset \sigma k(\mathcal{K})$ . А щоб довести, що  $m(\mathcal{K})$  буде  $\sigma$ -кільцем, достатньо за **Th. 1.1.16** довести, що  $m(\mathcal{K})$  – просто кільце.

Нехай  $A \in m(\mathcal{K})$ . Розглянемо клас множин  $\mathcal{L}(A) = \{B \subset X \mid A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in m(\mathcal{K})\}$ . Покажемо, що це – монотонний клас.

Нехай  $C_n \in \mathcal{L}(A)$ , причому  $C_n$  зростає. Позначимо  $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C$ . Тоді

$A \cup C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cup C_n)$ , причому  $(A \cup C_n) \in m(\mathcal{K})$  (за визначенням  $\mathcal{L}(A)$ ), а також  $(A \cup C_n)$  монотонно зростає до  $(A \cup C)$ , звідси  $A \cup C \in m(\mathcal{K})$ .

$A \setminus C = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus C_n)$ , причому  $A \setminus C_n \in m(\mathcal{K})$  (за визначенням  $\mathcal{L}(A)$ ), а також  $(A \setminus C_n)$  монотонно спадає до  $(A \setminus C)$ , звідси  $A \setminus C \in m(\mathcal{K})$ .

$C \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus A)$ , причому  $C_n \setminus A \in m(\mathcal{K})$  (за визначенням  $\mathcal{L}(A)$ ), а також  $(C_n \setminus A)$  монотонно зростає до  $(C \setminus A)$ , звідси  $C \setminus A \in m(\mathcal{K})$ .

Із цих трьох випливає, що  $C \in \mathcal{L}(A)$ . Цілком аналогічно доводиться, що якщо  $C_n \in \mathcal{L}(A)$  та  $C_n$  спадає, то  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{L}(A)$  (тут  $A \in \mathcal{K}$ !).

Нехай  $A \in \mathcal{K}$ . Оскільки  $\mathcal{K}$  – це кільце, то для кожної  $B \in \mathcal{K}$  отримаємо  $A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{K}$ , а звідси  $A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in m(\mathcal{K})$ . Із цього випливає, що  $B \in \mathcal{L}(A)$ . Тобто із цього випливає, що для фіксованого  $A \in \mathcal{K}$  маємо  $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(A)$ . Але оскільки  $\mathcal{L}(A)$  – монотонний, то  $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}(A)$ .

Отже, для фіксованого  $A \in \mathcal{K}$  і для будь-якої множини  $B \in m(\mathcal{K})$ , маємо  $B \in \mathcal{L}(A)$ , тобто  $A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in m(\mathcal{K})$ . Але конкретно цей запис означає, що  $A \in \mathcal{L}(B)$ . Тобто  $A \in \mathcal{K} \implies A \in \mathcal{L}(B)$ , а тому звідси  $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(B)$ . Аналогічно отримаємо  $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}(B)$  (тут  $A \in m(\mathcal{K})$ ! Важлива різниця!).

Тепер нехай  $A \in m(\mathcal{K})$ , тоді  $A \in \mathcal{L}(B)$ . Це означає, що  $A \cup B, A \setminus B \in m(\mathcal{K})$ . Дана штука виконується для будь-яких  $A, B \in m(\mathcal{K})$ , що й доводить означення кільця. ■

### 1.3 Борельові множини

**Definition 1.3.1** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір та  $\mathcal{G}$  – набір усіх відкритих підмножин  $X$ . **Борельовою  $\sigma$ -алгеброю** в  $X$  називається наступна  $\sigma$ -алгебра:

$$\mathcal{B}(X) \stackrel{\text{def.}}{=} \sigma a(\mathcal{G})$$

Тобто ми взяли клас відкритих підмножин в  $Y$  та породили  $\sigma$ -алгебру.

Всі множини з  $\mathcal{B}(X)$  називаються **борельовими**.

**Remark 1.3.2** Переважно будемо користуватися стандартною метрикою, де це можливо.

**Example 1.3.3** Розглянемо кілька прикладів борельових множин:

1) Якщо  $U$  – відкрита, то  $U$  – борельова.

Дійсно,  $U$  – відкрита, тобто  $U \in \mathcal{G}$ , але звідси  $U \in \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(X)$  за властивістю породжених  $\sigma$ -алгебр.

2) Якщо  $V$  – замкнена, то  $U$  – борельова.

Дійсно,  $V$  – замкнена, тому  $X \setminus V$  – відкрита. Розпишемо  $V = X \setminus (X \setminus V)$ . У нас множина  $X \setminus V$  уже борельова за 1). Також  $X$  – відкрита множина, а тому знову борельова. Значить,  $X, X \setminus V \in \sigma a(\mathcal{G}) \implies X \setminus (X \setminus V) = V \in \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(X)$  – борельова.

3. Одноточкова множина  $\{x\}$  – борельова.

Дійсно,  $\{x\}$  – замкнена множина, а тому за 2), уже борельова.

4. Скінченні, злічені множини – всі вони борельові.

Усі ці множини отримуються через одноточкові множини, а далі 3).

**Theorem 1.3.4** Для півкільця  $\mathcal{P}_d$  підмножин  $\mathbb{R}^d$  виконується  $\sigma k(\mathcal{P}_d) = \sigma a(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

**Proof.**

$$\sigma k(\mathcal{P}_d) = \sigma a(\mathcal{P}_d).$$

Дійсно,  $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \mathcal{P}_d$ , але  $\sigma$ -алгебра уже є  $\sigma$ -кільцем, тому звідси  $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \sigma k(\mathcal{P}_d)$ .

Далі  $\sigma k(\mathcal{P}) \supset \mathcal{P}_d$ , залишилося довести, що  $\sigma k(\mathcal{P})$  утворює  $\sigma$ -алгебру – і тоді  $\sigma k(\mathcal{P}_d) \supset \sigma a(\mathcal{P}_d)$ .

Для цього зауважимо, що  $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n]^d$ , де всі  $(-n, n]^d \in k(\mathcal{P}_d)$ , а тому звідси  $\mathbb{R}^d \in k(\mathcal{P}_d)$ .

$$\sigma a(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Спочатку покажемо, що  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \sigma a(\mathcal{P}_d)$ . Щоб це довести, необхідно довести, що  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \mathcal{P}_d$ . А далі, зважаючи на той факт, що  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  утворює  $\sigma$ -алгебру, доведемо, що  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \sigma a(\mathcal{P}_d)$ .

Нехай  $A \in \mathcal{P}_d$ , тобто  $A = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i]$ . Зауважимо, що  $(a_i, b_i] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a_i, b_i + \frac{1}{n}\right)$ . Далі

$$A = \prod_{i=1}^d \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a_i, b_i + \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^d \left(a_i, b_i + \frac{1}{n}\right).$$

Декартів добуток відкритих множин – відкрита, а кожна відкрита – уже борельова. А оскільки там  $\sigma$ -алгебра, то допускається злічений перетин, звідси  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Отже,  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \mathcal{P}_d$ .

Нарешті, покажемо, що  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma a(\mathcal{P}_d)$ . Щоб це довести, треба довести, що  $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \mathcal{G}$ , де  $\mathcal{G}$  – всі відкриті підмножини  $\mathbb{R}^d$ . Після цього ми отримуємо  $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

Отже, нехай  $U \in \mathcal{G}$ , тобто нехай  $U$  – відкрита множина. Залишимо її таким чином:

$$U = \bigcup_{\substack{\prod_{i=1}^d (p_i, q_i] \subset U \\ p_i, q_i \in \mathbb{Q}}} \prod_{i=1}^d (p_i, q_i].$$

Якщо  $\vec{x}$  лежить в цьому об'єднанні, то тоді автоматично  $\vec{x} \in U$ .

Якщо  $\vec{x} \in U$ , то вона внутрішня, тож існує куля  $B(\vec{x}, \varepsilon) \subset U$ . А там  $\forall \vec{y} : \|\vec{x} - \vec{y}\| < \varepsilon$ . Тобто звідси  $|x_i - y_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \implies y_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} < x_i < y_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}$ . Між кожним з цих нерівностей можна знайти

раціональні числа  $p_i, q_i \in \mathbb{Q}$ , тоді звідси  $p_i < x_i < q_i$ . Звідси  $\vec{x} \in \prod_{i=1}^d (p_i, q_i]$ . Але також важливо

зауважити, що  $\prod_{i=1}^d (p_i, q_i] \subset U$ . Отже,  $\vec{x}$  лежить в цьому об'єднанні.

Множина  $U$  записалась як зліченне об'єднання елементів з  $\mathcal{P}_d \subset \sigma a(\mathcal{P}_d)$ . Отже, звідси  $U \in \sigma a(\mathcal{P}_d)$ .  
Отже,  $\mathcal{G} \subset \sigma a(\mathcal{P}_d)$ . ■



## 2 Міри

### 2.1 Основні функції множин

**Definition 2.1.1** Задано  $X$  – деяка множина та  $\mathcal{H} \subset 2^X$  – клас підмножин.

**Функцією множин** називатимемо відображення  $f: \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ . Ми будемо вважати надалі, що  $-\infty$  неможливий.

**Definition 2.1.2** Задано функцію множин  $f$  на  $\mathcal{H}$ .

Функція множин  $f$  називається **невід’ємною**, якщо

$$\forall A \in \mathcal{H} : f(A) \geq 0$$

Функція множин  $f$  називається **адитивною**, якщо

$$\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{H}, \text{ причому } \bigcup_{n=1}^k A_n \in \mathcal{H} : f\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) = \sum_{n=1}^k f(A_n)$$

Функція множин  $f$  називається  **$\sigma$ -адитивною**, якщо

$$\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}, \text{ причому } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H} : f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n)$$

Функція множин  $f$  називається **напіваадитивною**, якщо

$$\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{H}, \text{ причому } \bigcup_{n=1}^k A_n \in \mathcal{H} : f\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) \leq \sum_{n=1}^k f(A_n)$$

Функція множин  $f$  називається  **$\sigma$ -напіваадитивною**, якщо

$$\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}, \text{ причому } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H} : f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n)$$

Функція множин  $f$  називається **скінченною**, якщо

$$\forall A \in \mathcal{H} : f(A) < +\infty$$

Функція множин  $f$  називається  **$\sigma$ -скінченною**, якщо

$$\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H} : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A, f(A_n) < +\infty$$

Функція множин  $f$  називається **монотонною**, якщо

$$\forall A, B \in \mathcal{H} : A \subset B \implies f(A) \leq f(B)$$

**Remark 2.1.3** Домовленність: ми не будемо далі розглядати функції множин  $f$ , для яких  $f \equiv +\infty$ . Це означає, що в кожній функції множин  $f$  буде існувати множина  $A \in \mathcal{H}$ , для якої  $f(A) < +\infty$ .

**Remark 2.1.4** Зрозуміло, що якщо функція множин скінченна, то вона автоматично  $\sigma$ -скінченна.

### 2.2 Означення міри

**Definition 2.2.1** Задано  $\mathcal{P}$  – півкільце.

**Мірою** ми називатимемо функцію множин  $\lambda: \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$ , де

$$\lambda - \text{невід’ємною та } \sigma\text{-адитивною.}$$

**Proposition 2.2.2** Властивості мір

Задано  $\lambda$  – міра на півкільці  $\mathcal{P}$ . Тоді виконуються такі пункти:

- 1)  $\lambda(\emptyset) = 0$ ;

- 2)  $\lambda$  – адитивна;
- 3)  $\lambda$  – монотонна;
- 4)  $\lambda$  –  $\sigma$ -напіваадитивна;
- 5)  $\forall A \in \mathcal{P}, \forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : \lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ .

**Proof.**

Доведемо виконання всіх пунктів:

1) Тут на допомогу приходить узгодження в підпункті вище. У нас існує  $A \in \mathcal{P}$ , для якої  $\lambda(A) < +\infty$ . Розпишемо  $A = A \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup \dots$ , причому  $\emptyset \in \mathcal{P}$ . Звідси, за  $\sigma$ -адитивністю,  $\lambda(A) = \lambda(A) + \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset) + \dots$ . Але оскільки  $\lambda(A) < +\infty$ , то ряд збіжний, а для рівності треба вимагати  $\lambda(\emptyset) = 0$ .

2) Нехай  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{P}$ , причому  $\bigcup_{n=1}^k A_n \in \mathcal{P}$ . Тоді за  $\sigma$ -адитивністю міри та за властивістю 1),

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lambda(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup \dots) = \lambda(A_1) + \dots + \lambda(A_n) + \lambda(\emptyset) + \dots = \sum_{n=1}^k \lambda(A_n).$$

3) Нехай  $A, B \in \mathcal{P}$  таким чином, що  $A \subset B$ . Тоді звідси  $B = (B \setminus A) \sqcup A$ . На півкільці  $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n C_i$

при  $C_i \in \mathcal{P}$ . Отже, звідси  $B = \bigcup_{i=1}^n C_i \sqcup A$ , а за властивістю 2) та невід'ємності міри, маємо

$$\lambda(B) = \sum_{i=1}^n \lambda(C_i) + \lambda(A) \geq \lambda(A).$$

4) Нехай  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}$ , причому  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P}$ . Ми розглянемо  $B_1 = A_1$ ,  $B_2 = A_2 \setminus A_1$ ,  $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$ ,  $\dots$  – перейшли до системи неперетинних множин. Зауважимо, що  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P}$

(але при цьому неправильно казати, що  $B_n \in \mathcal{P}$ , тому юзаємо  $\sigma$ -адитивність!). Всі  $A_n \in k(\mathcal{P})$ , а тому звідси всі  $B_n \in k(\mathcal{P})$ , але тоді звідси  $B_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} C_{in}$  при  $C_{in} \in \mathcal{P}$ . Також зауважимо, що  $A_n \setminus B_n \in k(\mathcal{P})$ ,

а тому звідси  $A_n \setminus B_n = \bigcup_{j=1}^{j_n} D_{jn}$  при  $D_{jn} \in \mathcal{P}$ .

Разом уже маємо  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} C_{in} \in \mathcal{P}$ , причому всі  $C_{in} \in \mathcal{P}$ , тому скористаємось  $\sigma$ -адитивністю:

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}).$$

Водночас  $A_n = A_n \setminus B_n \sqcup B_n = \bigcup_{j=1}^{j_n} D_{jn} \sqcup \bigcup_{i=1}^{i_n} C_{in} \in \mathcal{P}$ , причому всі  $C_{in}, D_{jn} \in \mathcal{P}$  – дійсно неперетинні всі між собою. Тому можна скористатися  $\sigma$ -адитивністю:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{j_n} \lambda(D_{jn}) + \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

5) Нехай  $A \in \mathcal{P}$ , а також задано покриття  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , де  $A_n \in \mathcal{P}$ . Зауважимо, що  $A = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$ , де  $A \in \mathcal{P}$ , а також  $A \cap A_n \in \mathcal{P}$  за означенням півкільця. Тоді за 4),

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

До речі, властивість 5) – це певне узагальнення властивості 4), тобто  $\sigma$ -напіваадитивності.

Всі властивості доведені. ■

**Remark 2.2.3** Якби  $\lambda$  була невід’ємною та просто адитивною, то властивості 1),3),4),5) також би виконувалися, тільки там скінченна кількість замість зліченної.

**Corollary 2.2.4** Якщо  $\lambda$  задана на кільці  $\mathcal{K}$ , то  $\forall A, B \in \mathcal{K} : A \subset B : \lambda(A \setminus B) = \lambda(A) - \lambda(B)$ .

*Вказівка:*  $A \sqcup (B \setminus A) = B$ , у цьому випадку  $B \setminus A \in \mathcal{K}$ , тому все легітимно.

**Theorem 2.2.5 Неперервність міри знизу**

Задано  $\lambda$  – міра уже на кільці  $\mathcal{K}$ . Нехай задана зростаюча послідовність  $\{A_n \in \mathcal{K}, n \geq 1\}$ , причому  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{K}$ . Тоді  $\lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$ .

**Proof.**

Розглянемо  $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus A_2, \dots$  – система неперетинних множин в силу зростання  $\{A_n\}$ . Зауважимо, що всі  $B_n \in \mathcal{K}$ , а також  $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$ . Тоді

$$\begin{aligned} \lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) &= \lambda\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^j \lambda(B_n) = \lim_{j \rightarrow \infty} (\lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1) + \lambda(A_3) - \lambda(A_2) + \dots + \lambda(A_j) - \lambda(A_{j-1})) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(A_j). \end{aligned}$$

Мабуть, окремо зауважу, що в сумі я скористався наслідком вище. ■

**Theorem 2.2.6 Неперервність міри зверху**

Задано  $\lambda$  – міра уже на кільці  $\mathcal{K}$ . Нехай спадна зростаюча послідовність  $\{A_n \in \mathcal{K}, n \geq 1\}$ , причому  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{K}$ , а також  $\lambda(A_1) < +\infty$ ! Тоді  $\lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$ .

**Proof.**

Позначимо  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  та розглянемо послідовність  $\{C_n \in \mathcal{K}, n \geq 1\}$  як  $C_n = A_1 \setminus A_n$ . Тепер послідовність зростає, при цьому  $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = A_1 \setminus A \in \mathcal{K}$ . Тоді за неперервністю міри знизу,

$$\lambda(A_1 \setminus A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_1 \setminus A_n).$$

Скориставшись зауваженням вище, а також фактом, що  $\lambda(A_1) < +\infty$ , маємо

$$\lambda(A_1) - \lambda(A) = \lambda(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) \implies \lambda(A) = \lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n). \quad \blacksquare$$

**Example 2.2.7** Наведу приклад, де умова  $\lambda(A_1) < +\infty$  є дуже важливою.

Розглянемо міру  $\lambda(A) = \text{card}(A \cap \mathbb{Z})$  на  $2^{\mathbb{R}}$ . Далі розглянемо спадну послідовність  $\{[n, +\infty), n \geq 1\}$ , причому в цьому випадку  $\lambda([1, +\infty)) = \text{card } \mathbb{N} = +\infty$ . Тоді

$$\begin{aligned} \lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} [n, +\infty)\right) &= \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty)\right) = \lambda(\emptyset) = 0. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([n, +\infty)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{card}(\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}) = +\infty. \end{aligned}$$

Отже,  $\lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} [n, +\infty)\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([n, +\infty))$  у даному випадку.

## 2.3 Про міру Жордана

Із курсу математичного аналізу відомо, що з себе представляє міра Жордана та клас вимірних множин  $\mathcal{K}_d$ . Даний контент можна подивитися в іншому пдф більш детально. Однак я зазначу, що міра Жордана  $m$  – ще не міра в сенсі означення, що було задано вище. Нам бракує лише  $\sigma$ -адитивності. Це питання розв’яжется згодом.

**Lemma 2.3.1** Нехай  $A \in \mathcal{K}_d$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0 : \exists F_\varepsilon, U_\varepsilon \in \mathcal{K}_d$  – відповідно замкнена та відкрита множи-

на:  $\begin{cases} m(A) - m(F_\varepsilon) < \varepsilon \\ m(U_\varepsilon) - m(A) < \varepsilon \end{cases}$ . Причому до всього цього  $F_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon$ .

Тобто вимірну за Жорданом множину можна наблизити замкненим всередині множиною та відкритою зовні множиною.

**Proof.**

I. Існування замкненої множини.

$A$  – вимірна за Жорданом, тоді  $m(A) = \sup_{n \geq 0} m(F_{(n)})$ , тоді існує  $N$ , для якого  $m(F_{(N)}) > m(A) - \varepsilon$ . Покладемо  $F_\varepsilon = F_{(N)} \subset A$ . Тоді звідси миттєво  $m(A) - m(F_\varepsilon) < \varepsilon$ . Ясно, що  $F_\varepsilon$  вимірна за Жорданом.

II. Існування відкритої множини.

Знову  $A$  вимірна за Жорданом, то  $m(A) = \inf_{n \geq 0} m(F^{(n)})$ , тоді існує  $\tilde{N}$ , для якого  $m(F^{(\tilde{N})}) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}$ .

У нас зараз  $F^{(\tilde{N})} \supset A$ , але поки що замкнена множина.

Згадаємо, що  $F^{(\tilde{N})}$  складається зі скінченного об'єднання брусів вигляду  $R = \prod_{i=1}^d \left[ \frac{k_i}{2^{\tilde{N}}}, \frac{k_i+1}{2^{\tilde{N}}} \right]$ .

Нехай  $\delta > 0$  та замінимо замкнені бруси  $R$  на відкриті бруси  $R(\delta) = \prod_{i=1}^d \left( \frac{k_i}{2^{\tilde{N}}} - \delta, \frac{k_i+1}{2^{\tilde{N}}} + \delta \right)$ .

Зрозуміло, що  $R(\delta) \supset R$ , а тому звідси  $F^{(\tilde{N})}(\delta) \supset F^{(\tilde{N})}$ , де ось  $F^{(\tilde{N})}(\delta)$  – об'єднання відкритих брусів. Оскільки  $m$  – монотонна міра, то  $m(F^{(\tilde{N})}) \leq m(F^{(\tilde{N})}(\delta))$ . Звідси маємо наступне:

$$\begin{aligned} m(F^{(\tilde{N})}) &\leq m(F^{(\tilde{N})}(\delta)) \stackrel{m - \text{напівадитивна}}{\leq} \sum m(R(\delta)) = \sum \prod_{i=1}^d \left( \frac{k_i+1}{2^{\tilde{N}}} + \delta - \left( \frac{k_i}{2^{\tilde{N}}} - \delta \right) \right) = \\ &= \sum \left( \frac{1}{2^{\tilde{N}}} + 2\delta \right)^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \sum \left( \frac{1}{2^{\tilde{N}}} \right)^d = \sum \prod_{i=1}^d \left[ \frac{k_i+1}{2^{\tilde{N}}} - \frac{k_i}{2^{\tilde{N}}} \right] = \sum m(R) = m(F^{(\tilde{N})}). \end{aligned}$$

Значить, звідси існує  $\delta_1 > 0$ , для якого  $m(F^{(\tilde{N})}(\delta_1)) - m(F^{(\tilde{N})}) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Нарешті, покладемо  $U_\varepsilon = F^{(\tilde{N})}(\delta_1) \supset F^{(\tilde{N})} \supset A$ . Ясно, що це відкрита множина (як об'єднання відкритих) та вимірна за Жорданом. Тоді звідси

$$m(U_\varepsilon) - m(A) = (m(U_\varepsilon) - m(F^{(\tilde{N})})) + (m(F^{(\tilde{N})}) - m(A)) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Theorem 2.3.2** Міра Жордана  $m$  – міра (в сенсі означення вище) на кільці  $\mathcal{K}_d$ .

**Proof.**

Уже відомо, що  $m$  – невід'ємна функція множин, тому залишається  $\sigma$ -адитивність.

Нехай  $A_n \in \mathcal{K}_d$  – неперетинні, причому  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{K}_d$ . Ми хочемо довести  $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ .

Зауважимо, що  $\bigcup_{n=1}^j A_n \subset A$ , тоді за монотонністю та скінченною адитивністю міри Жордана,

$$\sum_{n=1}^j m(A_n) \leq m(A). \text{ Якщо спрямуємо } j \rightarrow \infty, \text{ то отримаємо } m(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Далі застосуємо щойно доведену лему кілька разів. Нехай  $\varepsilon > 0$ . Для множини  $A$  оберемо замкнену вимірну за Жорданом множину  $F_\varepsilon \subset A$ , для якої  $m(A) - m(F_\varepsilon) < \varepsilon$ . Для кожної множини  $A_n$  оберемо відкриту вимірну за Жорданом множину  $U_{\frac{\varepsilon}{2^n}} \supset A_n$ , для якої  $m(U_{\frac{\varepsilon}{2^n}}) - m(A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ .

Зауважимо, що  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\frac{\varepsilon}{2^n}} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \supset F_\varepsilon$ , тобто для  $F_\varepsilon$  у нас є відкрите покриття  $\{U_{\frac{\varepsilon}{2^n}}, n \geq 1\}$ .

Оскільки  $F_\varepsilon$  замкнена та обмежена, то вона є компактом. Значить, за лемою Гейне-Бореля, ми можемо відокремити скінченне підпокриття  $\{U_1, \dots, U_k\}$ , тобто  $\bigcup_{i=1}^k U_i \supset F_\varepsilon$ . Таким чином,

$$m(F_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^k m(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \left( m(A) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A) + \varepsilon.$$

Отже,  $m(A) < \varepsilon + m(F_\varepsilon) < \sum_{i=1}^{\infty} m(A) + 2\varepsilon$ , а тому при  $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$  отримаємо  $m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_n)$ .  $\blacksquare$

**Corollary 2.3.3** Розглянемо півкільце  $\mathcal{P}_d = \left\{ \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$ , а на ній функцію множин

$\lambda_d \left( \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \right) = \prod_{k=1}^d (b_k - a_k)$ . Тоді  $\lambda_d$  задає міру на  $\mathcal{P}_d$ .

**Proof.**

Дійсно,  $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{K}_d$ , тому звідси  $\lambda_d(A) = m(A)$ . ■

## 2.4 Зовнішні міри

**Definition 2.4.1** Задано  $X$  – деяка множина та  $\lambda^*$  – функція множин на  $2^X$ .

Функція множин  $\lambda^*: [0, +\infty]$  називається **зовнішньою мірою**, якщо

$$\begin{aligned} \lambda^*(\emptyset) &= 0 \\ \forall A \subset X : \forall A_1, A_2, \dots \subset X : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : \lambda^*(A) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) \end{aligned}$$

Друга умова – це узагальнення  $\sigma$ -напівадитивності.

**Definition 2.4.2** Задано  $X$  – деяка множина та  $\lambda^*$  – функція множин на  $2^X$ .

Функція множин  $\lambda^*: [0, +\infty]$  називається **зовнішньою мірою**, якщо

$$\lambda^*(\emptyset) = 0$$

$\lambda^*$  – монотонна та  $\sigma$ -напівадитивна

**Proposition 2.4.3** Обидва означення еквівалентні.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано: перше означення.

Нехай  $A, B \subset X$  так, що  $A \subset B$ . Тоді з другої умови означення випливає, що  $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ , якщо розписати  $A \subset B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$ .

Нехай  $A_1, A_2, \dots \subset X$ , але тоді, формально кажучи,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Тоді за другою умовою озна-

чення,  $\lambda^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$ .

$\Leftarrow$  Дано: друге означення.

Нехай  $A_1, A_2, \dots \subset X$  та  $A \subset X$  так, щоб  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Насправді кажучи, бажана нерівність доводиться аналогічним чином, як це було при доведенні властивості 5) міри. Але (конкретно в цьому випадку) є доведення дещо простіше.

Оскільки  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , то із другої умови та третьої умови означення випливає миттєво, що

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Чому ми не могли так само простіше зробити в 5) властивості, залишаю як вправу. ■

**Remark 2.4.4** Поняття "зовнішня міра" не пов'язана з тим, що це – міра, із властивістю зовнішності. Це просто вже такий сталий термін.

**Example 2.4.5** Розглянемо  $\lambda^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & \text{інакше} \end{cases}$ . Вона – зовнішня міра (неважко довести).

Водночас вона не є мірою, тому що, обравши  $A, B \neq \emptyset$  – неперетинні, порушиться адитивність.

**Remark 2.4.6** Зрозуміло, що  $\lambda^*$  також просто напівадитивна (у загальному сенсі теж).

**Definition 2.4.7** Задано  $\lambda$  – міра на півкільці  $\mathcal{P}$ .

**Зовнішньою мірою, породженою мірою  $\lambda$** , називається функція множин  $\lambda^*$ , яка визначається таким правилом:

$$\lambda^*(A) = \begin{cases} \inf_{\substack{A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ A_n \in \mathcal{P}}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n), & \text{якщо існує хоча б одне злічення покриття множини } A \text{ елементами з } \mathcal{P} \\ +\infty, & \text{інакше} \end{cases}$$

**Proposition 2.4.8** Задано  $\lambda$  – міра на півкільці  $\mathcal{P}$ . Маємо  $\lambda^*$  – зовнішня міра, породжена мірою  $\lambda$ . Тоді  $\lambda^*$  – справді зовнішня міра (за означенням).

**Proof.**

Зауважимо, що  $\lambda^*$  визначена на  $2^X$ . Також зазначимо, що  $\lambda^*(A) \geq 0$ , просто тому що  $\lambda$  – міра, що є невід’ємною.

$$\lambda^*(\emptyset) = \emptyset.$$

Зауважимо, що  $\emptyset \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset$ . де  $\emptyset \in \mathcal{P}$ . Звідси випливає, що  $\lambda^*(\emptyset) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\emptyset) = 0 \implies \lambda^*(\emptyset) = 0$ .

Нехай тепер  $A \subset X$ , а також  $A_1, A_2, \dots \subset X$ , причому  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Треба  $\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$ .

Нехай існує  $A_N$ , для якого не знайдеться покриття елементами з  $\mathcal{P}$ . Тоді  $\lambda^*(A_N) = +\infty$ , а тому  $\lambda^*(A) \leq +\infty$  автоматично. Тому надалі припускається, що для всіх  $A_n$  є покриття.

Нехай  $\varepsilon > 0$ , тоді для  $A_n$  існує покриття  $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn}$ , для якого  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_{kn}) < \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ .

Зауважимо, що  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn}$ , тобто є таке покриття. Тоді звідси

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_{kn}) < \sum_{n=1}^{\infty} \left( \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \varepsilon.$$

Якщо далі  $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ , то отримаємо бажану оцінку:

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n). \quad \blacksquare$$

**Remark 2.4.9** В означенні породженої зовнішньої міри  $\lambda^*$  можна обмежитися наборами неперетинних множин із півкільця  $\mathcal{P}$ , об’єднання яких містить множину  $A$ . Тоді при цьому  $\lambda^*(A)$  не зміниться.

**Proof.**

Справді, хочемо знайти  $\lambda^*(A)$ . Нехай  $\left\{ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{P} \right\} = \mathcal{C}$  – множина всіх можливих покриття  $A$ , а також  $\left\{ A \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{P} \right\} = \mathcal{C}_{\sqcup}$  – множина всіх покриття  $A$  неперетинним чином.

Зауважимо, що  $\mathcal{C}_{\sqcup} \subset \mathcal{C}$ . Звідси випливає, що  $\inf_{\mathcal{C}_{\sqcup}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \geq \inf_{\mathcal{C}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \lambda^*(A)$ .

Із іншого боку, нехай  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , тоді зашлемо  $B_1 = A_1$ ,  $B_2 = A_2 \setminus A_1$ ,  $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$  – система неперетинних множин. Аналогічно (як це було під час доведення властивості 4) міри)

отримаємо  $B_n = \bigsqcup_{i=1}^{i_n} C_{in}$  при  $C_{in} \in \mathcal{P}$ . Отримали  $A \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{i=1}^{i_n} C_{in}$ . Звідси

$$\inf_{\mathcal{C}_{\sqcup}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) \stackrel{?}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \lambda^*(A).$$

Нерівність отрималася наступним чином: у нас  $A_n \supset B_n \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_{in}$ , а тому звідси випливає, що

$$A_n = B_n = \bigsqcup_{i=1}^{i_n} C_{in} \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{j_n} D_{jn} \text{ при } D_{jn} \in \mathcal{P}, \text{ але тоді}$$

$$\lambda(A_n) = \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) + \sum_{j=1}^{j_n} \lambda(D_{jn}) \geq \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}). \quad \blacksquare$$

## 2.5 Вимірність за Каратеодорі

**Definition 2.5.1** Задано  $\lambda^*$  – зовнішня міра.

Множина  $A \subset X$  називається **вимірною за Каратеодорі відносно  $\lambda^*$** , якщо

$$\forall E \subset X : \lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A})$$

Позначення:  $\mathcal{S}$  – клас усіх вимірних множин за Каратеодорі (відносно зовнішньої міри).

**Remark 2.5.2**  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ , тому що порожня множина  $\emptyset$  завжди вимірна за Каратеодорі, тобто  $\emptyset \in \mathcal{S}$ .

**Remark 2.5.3** Означення вимірних множин за Каратеодорі можна дещо послабити ось так:

$$\forall E \subset X : \lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A})$$

Дійсно, зауважимо, що  $(E \cap A) \cup (E \cap \tilde{A}) = E$ , тобто мається покриття для множини  $E$ , а тому за напівадитивністю зовнішньої міри,  
 $\lambda^*(E) \leq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A})$ .

### Theorem 2.5.4 Теорема Каратеодорі

Задано  $\lambda^*$  – зовнішня міра. Тоді  $\mathcal{S}$  утворює  $\sigma$ -алгебру, а також  $\lambda^*|_{\mathcal{S}}$  буде мірою.

**Proof.**

Доведення даної теореми будемо розбивати на три етапи.

I.  $\mathcal{S}$  буде алгеброю.

Нехай  $A, B \in \mathcal{S}$ , тобто  $A, B$  – вимірні за Каратеодорі, а тому  $\forall E \subset X$ :

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A}) \quad \lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap B) + \lambda^*(E \cap \tilde{B}).$$

Ми хочемо довести, що  $\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap (A \cup B)) + \lambda^*(E \cap \overline{A \cup B})$ , це й буде означати  $A \cup B \in \mathcal{S}$ .

$$\begin{aligned} \lambda^*(E) &= \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A}) \stackrel{B \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*(E \cap A) + [\lambda^*(E \cap \tilde{A} \cap B) + \lambda^*(E \cap \tilde{A} \cap \tilde{B})] = \\ &= [\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A} \cap B)] + \lambda^*(E \cap \tilde{A} \cap \tilde{B}). \end{aligned}$$

Хочеться показати, що ця дужка  $[\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A} \cap B)] = \lambda^*(E \cap (A \cup B))$ . Дійсно,  $\lambda^*(E \cap (A \cup B)) \stackrel{A \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*(E \cap (A \cup B) \cap A) + \lambda^*(E \cap (A \cup B) \cap \tilde{A}) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A} \cap B)$ .

Отже,  $\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap (A \cup B)) + \lambda^*(E \cap \overline{A \cup B})$  виконано для всіх  $E \subset X$ . Довели  $A \cup B \in \mathcal{S}$ .

Із означення вимірності за Каратеодорі випливає, що  $A \in \mathcal{S} \iff \tilde{A} \in \mathcal{S}$ . Оскільки  $\emptyset \in \mathcal{S}$ , то  $X \in \mathcal{S}$ .

Нарешті, якщо  $A, B \in \mathcal{S}$ , то звідси  $A \setminus B = A \cap \tilde{B} = \overline{A \cup \tilde{B}} \in \mathcal{S}$ .

II.  $\mathcal{S}$  буде  $\sigma$ -алгеброю.

Нехай  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$  – поки неперетинні множини. Хочемо довести, що  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$ , тобто  $\forall E \subset X$ :

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right).$$

Спочатку доведемо рівність  $\lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^k A_n\right) = \sum_{n=1}^k \lambda^*(E \cap A_n)$  за МІ по числу  $k \geq 1$ .

База індукції:  $k = 1$  – нема що доводити.

Припущення індукції: нехай задана нерівність виконується для  $k - 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Крок індукції: } \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^k A_n\right) &\stackrel{A_k \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^k A_n \cap A_k\right) + \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^k A_n \cap \tilde{A}_k\right) = \\ &= \lambda^*(E \cap A_k) + \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{k-1} A_n\right) \stackrel{\text{припущення МІ}}{=} \lambda^*(E \cap A_k) + \sum_{n=1}^{k-1} \lambda^*(A_n) = \sum_{n=1}^k \lambda^*(E \cap A_n). \end{aligned}$$

МІ доведено. Тепер повернімось до бажаного.

Нам, за кроком I, уже відомо, що  $\bigcup_{n=1}^k A_n \in \mathcal{S}$ , тому звідси маємо:

$$\lambda^*(E) = \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^k A_n\right) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{n=1}^k A_n}\right) \geq \sum_{n=1}^k \lambda^*(E \cap A_n) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) \quad (!).$$

Остання нерівність отрималась за монотонністю, бо  $E \cap \bigcup_{n=1}^k A_n \supset E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Нарешті, спрямуємо  $k \rightarrow \infty$  – отримаємо:

$$\lambda^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E \cap A_n) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) \geq \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right).$$

Остання нерівність випливає з  $\sigma$ -напіваадитивності зовнішньої міри.

Власне, отримали  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$ , це був лише випадок неперетинних множин.

Нехай  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$  – уже довільні. Розглянемо множини  $B_1 = A_1$ ,  $B_2 = A_2 \setminus A_1$ ,  $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$ ,  $\dots$  – система неперетинних множин. Причому всі  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{S}$ , а звідси  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{S}$ .

*III.  $\lambda^*|_{\mathcal{S}}$  утворює міру.*

Залишилося довести, що  $\lambda^*$  буде  $\sigma$ -адитивною на  $\mathcal{S}$ .

Нехай  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$  – неперетинні (уже автоматично  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$ ). Скористаємося нерівністю (!)

при  $k \rightarrow \infty$ , але замість  $E$  підставимо  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  – отримаємо наступне:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap A_n\right) + \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Водночас, за  $\sigma$ -напіваадитивністю зовнішньої міри,  $\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$ . А тому звідси

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n). \quad \blacksquare$$

**Definition 2.5.5** Задано  $\lambda$  – міра на  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{F}$ .

Міра  $\lambda$  називається **повною**, якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : \lambda(A) = 0 : \forall B \subset A : B \in \mathcal{F}$$

Із цього випливає, що  $\lambda(B) = 0$ .

Інколи ще говорять, що  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}$  **повна відносно міри  $\lambda$** .

**Example 2.5.6** Зокрема маємо  $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$ , а міра  $\lambda$  на ній визначається як  $\lambda(X) = \lambda(\emptyset) = 0$ . У цьому випадку міра  $\lambda$  не буде повною, бо якщо  $\{x\} \subset X$ , то не випливає  $\{x\} \notin \mathcal{F}$ .

**Corollary 2.5.7** Міра  $\lambda^*|_{\mathcal{S}} \stackrel{\text{позн.}}{=} \lambda$  із теореми Каратеодорі – повна.

**Proof.**

Нехай  $A \in \mathcal{S}$  так, щоб  $\lambda^*(A) = 0$  та оберемо множину  $B \subset A$ . Доведемо, що  $B \in \mathcal{S}$ .

Зауважимо, що  $B \subset A, E \subset X$ , звідси  $E \cap B \subset A$ , тому  $\lambda^*(E \cap B) \leq \lambda^*(A) = 0 \implies \lambda^*(E \cap B) = 0$ .  
 $\lambda^*(E \cap B) + \lambda^*(E \setminus B) = \lambda^*(E \setminus B) \leq \lambda^*(E)$ . ■

## 2.6 Продовження міри

**Theorem 2.6.1** Задано  $\lambda$  – міра на півкільці  $\mathcal{P}$  та  $\lambda^*$  – зовнішня міра, породжена мірою  $\lambda$ . Тоді  $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ , а також  $\lambda^*|_{\mathcal{P}} \equiv \lambda$ .

**Proof.**

$\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ .

Нехай  $A \in \mathcal{P}$ , нам треба довести, що  $A \in \mathcal{S}$ , інакше кажучи,  $\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \bar{A})$ .

Маємо  $E \subset X$ , якщо для нього не існує покриття, то  $\lambda^*(E) = +\infty$ , тоді автоматично нерівність виконана. Тому залишилося розглянути  $E \subset X$ , для яких є покриття.

Нехай  $\varepsilon > 0$ , тоді існує покриття  $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , де  $E_n \in \mathcal{P}$ , для яких  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) < \lambda^*(E) + \varepsilon$ . Тобто

звідси  $\lambda^*(E) > \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) - \varepsilon$ . Тепер розглянемо праву частину нерівності з Каратеодорі.

Зауважимо, що  $E \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap A)$ , а також  $E \cap \bar{A} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap \bar{A})$ , причому  $E_n \cap A \in \mathcal{P}$ , водночас



$E_n \cap \bar{A} = E \setminus A = \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{in}$ , тож  $E \cap \bar{A} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{in}$ , де  $B_{in} \in \mathcal{P}$ . За визначенням зовнішньої міри,

$$\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \bar{A}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(B_{in}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Окремо варто пояснити, чому  $\lambda(E_n \cap A) + \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(B_{in}) = \lambda(E_n)$ . У нас  $E_n \in \mathcal{P}$ , але водночас  $E_n =$

$(E_n \cap A) \sqcup (E_n \cap \bar{A}) = (E_n \cap A) \sqcup \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{in}$ , тут  $E_n \cap A, B_{in} \in \mathcal{P}$ , а тому можна застосовувати  $\sigma$ -адитивність міри.

Отже,  $\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \bar{A}) < \lambda^*(E) + \varepsilon$ , а далі  $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$  – отримали бажану нерівність.

$$\lambda^*|_{\mathcal{P}} \equiv \lambda.$$

Нехай  $A \in \mathcal{P}$ , нам треба  $\lambda^*(A) = \lambda(A)$ .

Зауважимо, що  $A \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$ , тому за зовнішньою мірою,  $\lambda^*(A) \leq \lambda(A) + \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset) + \dots \implies \lambda^*(A) \leq \lambda(A)$ .

Тепер беремо будь-яке покриття  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $A_n \in \mathcal{P}$ , які є. Зв властивістю 5) міри,

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) - \text{виконано для кожного покриття. Тому звідси } \lambda(A) \geq \lambda^*(A).$$

Із двох нерівностей випливає, що  $\lambda^*(A) = \lambda(A)$ , для всіх  $A \in \mathcal{P}$ . ■

### Схема продовження міри за Каратеодорі

- 1) Визначаємо міру  $\lambda$  на півкільці  $\mathcal{P}$  – клас підмножин  $X$ ;
- 2) На множині  $2^X$  визначаємо зовнішню міру  $\lambda^*$ , що породжена  $\lambda$ ;
- 3)  $\lambda^*|_{\mathcal{S}}$  буде мірою на  $\sigma$ -алгебрі (теорема Каратеодорі), причому  $\mathcal{S} \supset \mathcal{P}$ , а також  $\lambda^*|_{\mathcal{P}} \equiv \lambda$ . І ось ця міра  $\lambda^*|_{\mathcal{S}}$  – шукане продовження міри  $\lambda$  із  $\mathcal{P}$  на  $\mathcal{S}$ .

Деколи для зручності продовження також позначають за  $\lambda$ , але враховують визначення зовнішньої міри, якщо множина не з півкільця.

### Theorem 2.6.2 Єдиність продовження міри

Задано  $\lambda$  – міра на півкільці  $\mathcal{P}$ , нехай вона є  $\sigma$ -скінченною. Ми вже за схемою Каратеодорі можемо продовжити її до міри  $\lambda^*$ , яка визначена на  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{S}$ .

Нехай  $\tilde{\lambda}$  – інше продовження міри  $\lambda$  з  $\mathcal{P}$  на  $\mathcal{S}$ . Тоді  $\tilde{\lambda} \equiv \lambda^*$  на  $\mathcal{S}$ .

#### Proof.

Доведення розіб'ємо на дві частини.

I. Нехай  $\lambda$  – скінченна міра, при цьому  $X \in \mathcal{P}$ .

Нехай  $A \in \mathcal{S}$ , тоді точно існує хоча б одне покриття  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  при  $A_n \in \mathcal{P}$  (можна взяти  $A_1 = X$ , покриття вже є). Тоді звідси, за властивістю 5) міри,

$$\tilde{\lambda}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\lambda}(A_n) \stackrel{A_n \in \mathcal{P}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) - \text{виконано для кожного покриття множини } A. \text{ Тоді } \tilde{\lambda}(A) \leq \lambda^*(A).$$

Узявши  $X \setminus A \in \mathcal{S}$ , ми аналогічно отримаємо  $\tilde{\lambda}(X \setminus A) \leq \lambda^*(X \setminus A) \implies \tilde{\lambda}(A) \geq \lambda^*(A)$ . Але тут суттєво як раз таки, щоб  $\lambda(X) = \tilde{\lambda}(X) = \lambda^*(X) < +\infty$ .

Отже,  $\tilde{\lambda}(A) = \lambda^*(A)$  при кожному  $A \in \mathcal{S}$ .

II. Нехай  $\lambda$  –  $\sigma$ -скінченна міра.

За умовою, існують  $X_n \in \mathcal{P}$ , для яких  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ , а також кожний  $\lambda(X_n) < +\infty$ . Далі ми розглянемо  $Y_1 = X_1$ ,  $Y_2 = X_1 \setminus X_2$ ,  $Y_3 = X_3 \setminus (X_1 \cup X_2)$  – система неперетинних множин. Тоді

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = X, \text{ але також звідси кожний } Y_n \in k(\mathcal{P}), \text{ тому звідси } Y_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} Z_{in}, \text{ де } Z_{in} \in \mathcal{P}.$$

Отримали  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} Z_{in}$ , де  $Z_{in} \in \mathcal{P}$ . Причому зауважимо, що  $\lambda(Z_{in}) < +\infty$ , просто тому що  $Z_{in} \subset Y_n \subset X_n$  та  $\lambda(X_n) < +\infty$ . Тому ми прийшли до випадку I, що було описано вище. Тобто  $\tilde{\lambda}(A \cap Z_{in}) = \lambda^*(A \cap Z_{in})$  для всіх множин  $A \in \mathcal{S} \cap Z_{in}$ . Отже,  $\forall A \in \mathcal{S}$  :

$$\tilde{\lambda}(A) = \tilde{\lambda}(A \cap X) = \tilde{\lambda}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} (A \cap Z_{in})\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \tilde{\lambda}(A \cap Z_{in}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda^*(A \cap Z_{in}) \stackrel{\text{аналог}}{=} \lambda^*(A). \quad \blacksquare$$

**Remark 2.6.3** Умова  $\sigma$ -скінченності є надзвичайно важливою для єдиності. Приклад ще не знайшов.

### Theorem 2.6.4 Наближення міри її значеннями на кільці

Задано  $\lambda$  –  $\sigma$ -скінченна міра на півкільці  $\mathcal{P}$ . Продовжимо її до  $\sigma$ -алгебри  $\mathcal{S}$  (єдиним чином). Тоді  $\forall A \in \mathcal{S}, \lambda(A) < +\infty : \forall \varepsilon > 0 : \exists B \in k(\mathcal{P}) : \lambda(A \triangle B) < \varepsilon$ .

**Proof.**

Нехай  $A \in \mathcal{S}$  так, щоб  $\lambda(A) < +\infty$ , а також нехай  $\varepsilon > 0$ . Тоді в силу визначення зовнішньої міри  $\exists A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , щоб  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \lambda(A) + \varepsilon$ . Покриття існує, бо  $\lambda(A) < +\infty$ .

Ряд зліва (що є невід’ємним) також збіжний, просто тому що  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$ , тож за означення

існування ліміту,  $\exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda(A_n) \right| < \varepsilon$ .

Покладемо  $B = \bigcup_{n=1}^K A_n$ , причому зауважимо, що  $B \in k(\mathcal{P})$ . Залишилося оцінити міру.

$$\lambda(A \setminus B) = \lambda\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^K A_n\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^K A_n\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=K+1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=K+1}^{\infty} \lambda(A_n) < \varepsilon.$$

$$\lambda(B \setminus A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^K A_n \setminus A\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) - \lambda(A) < \varepsilon.$$

$$\lambda(B \triangle A) = \lambda(A \setminus B) + \lambda(B \setminus A) < 2\varepsilon. \quad \blacksquare$$

## 2.7 Міра Лебега

Беремо універсальну множину  $\mathbb{R}^d$ . На неї задаємо півкільце  $\mathcal{P}_d = \left\{ \prod_{i=1}^d (a_i, b_i] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$ , а зго-

дом на ній установимо міру  $\lambda$  таким чином:  $\lambda\left(\prod_{i=1}^d (a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ . За схемою Каратеодорі, продовжимо міру на  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{S}_d$ .

**Definition 2.7.1** Отримана міра на  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{S}_d$  називається **мірою Лебега**. Позначатимемо за  $\lambda_d$ . Всі множини з  $\mathcal{S}_d$  називаються **вимірними за Лебегом**.

**Remark 2.7.2** Із цього випливає, що  $\lambda_d$  – міра Лебега – повна.

**Proposition 2.7.3** Кожна борельова множина – вимірна за Лебегом.

**Proof.**

Тобто треба довести, що  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d$ .

Нам уже відомо, що  $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{S}_d$ , за теоремою про продовження міри до  $\sigma$ -алгебри. Але оскільки  $\mathcal{S}_d$  є  $\sigma$ -алгеброю, то тоді  $\sigma a(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d$ . ■

Розглянемо деякі значення міри Лебега на  $\mathbb{R}$ .

1. Оберемо одноточкову множину  $\{x\}$ , що є борельовою, тому звідси  $\lambda_1(\{x\}) = 0$ . Справді,

$$\lambda_1(\{x\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1\left(\left(x - \frac{1}{n}, x\right]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - x - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

2. Як наслідок, міра будь-якої скінченної або зліченної множини – нулева. Зокрема  $\lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$ .

3. Розглянемо  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ . Тоді їхні міри збігаються з мірою  $\lambda_1((a, b]) = b - a$ .

4. Також маємо  $\lambda_1(\mathbb{R}) = +\infty$ . Дійсно,  
$$\lambda_1(\mathbb{R}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1((-n, n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = +\infty.$$

#### **Theorem 2.7.4** Узагальнення вимірності

Задано  $A$  – вимірна за Жорданом. Тоді  $A$  – вимірна за Лебегом, при цьому  $m(A) = \lambda_d(A)$ .

*TODO: записати доведення*

## **2.8 Регулярність мір**

*TODO: додати*

**Чому міри визначаються переважно на спеціальних класах множин**

### 3 Вимірні функції

#### 3.1 Основні означення

**Definition 3.1.1** Вимірним простором називають пару  $(X, \mathcal{F})$ , де  $X$  – універсальна множина та  $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра. Всі множини з  $\sigma$ -алгебри будемо називати **вимірними**.

Вимірним простором з мірою називають трійку  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ , тут  $\lambda$  – міра на  $\mathcal{F}$ .

**Definition 3.1.2** Задано відображення  $f: X \rightarrow Y$ , а також два вимірних простори  $(X, \mathcal{F}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{F}_Y)$ . Відображення  $f$  називається  $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -**вимірною**, якщо

$$\forall B \in \mathcal{F}_Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$$

Якщо позначити  $f^{-1}(\mathcal{F}_Y) \stackrel{\text{def.}}{=} \{B \in \mathcal{F}_Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X\}$ , то означення перепишеться так:

$$f^{-1}(\mathcal{F}_Y) \subset \mathcal{F}_X$$

**Theorem 3.1.3** Задано відображення  $f: X \rightarrow Y$ , а також два вимірних простори  $(X, \mathcal{F}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{F}_Y)$ . Нехай  $\mathcal{H}$  – клас множин  $Y$ , що задовольняє таким умовам:

1.  $\forall B \in \mathcal{H} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$ ;

2.  $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{F}_Y$ .

Тоді відображення  $f$  буде  $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -вимірною.

Тобто теорема каже, що не обов'язково перевіряти на всій  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{F}_Y$ , щоб було означення вимірності. Достатньо взяти якісь множини та переконатися в них.

**Proof.**

Розглянемо множину  $\mathcal{L} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X\}$ . Зрозуміло, що  $\mathcal{L} \supset \mathcal{H}$  за умовою. Якщо доведемо, що  $\mathcal{L}$  утворює  $\sigma$ -алгебру, то тоді  $\mathcal{L} \supset \sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{F}_Y$ . І тоді звідси випливатиме, що  $\forall B \in \mathcal{F}_Y : B \in \mathcal{L} \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$ , що свідчить про виконання означення  $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -вимірності.

Отже, нехай  $B_n \in \mathcal{L}, n \geq 1$ . Із цього випливає, що  $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}_X$ , а звідси випливає, що  $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) =$

$$f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \mathcal{F}_X. \text{ А це означає, що } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{L}.$$

Якщо  $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$ , то тоді  $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}_X$ , а звідси  $f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \in \mathcal{F}_X$ , а тому це означає, що  $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{L}$ .

Нарешті,  $f^{-1}(Y) = X$ , тому звідси  $Y \in \mathcal{L}$ .

Отже, ми довели, що  $\mathcal{L}$  утворює  $\sigma$ -алгебру. ■

**Definition 3.1.4** Задано  $(X, \mathcal{F})$  – вимірний простір.

Функція  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  називається  $\mathcal{F}$ -**вимірною**, якщо

$$f \text{ буде } (\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\text{-вимірною}$$

Конкретно в цьому випадку  $(X, \mathcal{F}_X) = (X, \mathcal{F})$  та також  $(Y, \mathcal{F}_Y) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

**Corollary 3.1.5** Задано  $(X, \mathcal{F})$  – вимірний простір.

$$\text{Функція } f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ буде } \mathcal{F}\text{-вимірною} \iff \forall a \in \mathbb{R} : \begin{cases} f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{F} \\ f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{F} \\ f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F} \\ f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F} \end{cases}$$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f \in \mathcal{F}$ -вимірною, тоді автоматично, за означенням,  $(a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, a), (-\infty, a]$  вони вже борельові, а тому виконується права частина.

$$\Leftarrow \text{ Дано: } \forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{F}.$$

Розглянемо клас множин  $\mathcal{H} = \{[a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ , уже відомо, що  $\forall B \in \mathcal{H} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ . Залишалася інша умова:  $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Нехай  $(a, b] \in \mathcal{P}_1$ , звідси випливає, що  $(a, b] = (a, +\infty) \setminus (b, +\infty)$ , але водночас кожний  $(x, +\infty) =$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[ x + \frac{1}{n}, +\infty \right) \in \sigma a(\mathcal{H})$ , тож звідси  $(a, b] \in \sigma a(\mathcal{H})$ , тож  $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{P}_1$ , але тоді звідси  $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \sigma a(\mathcal{P}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Для інших пунктів десь аналогічно, а десь навіть простіше.

Отже, за теоремою вище, довели, що  $f$  буде  $\mathcal{F}$ -вимірною. ■

Надалі користуватимемося позначенням:  $f^{-1}((a, +\infty)) \stackrel{\text{def}}{=} \{f > a\}$ . Решта позначень аналогічні.

**Definition 3.1.6** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір.

Функція  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  називається **борельовою**, якщо

$$f \text{ буде } (\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(\mathbb{R}))\text{-вимірною}$$

**Definition 3.1.7** Функція  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $A \in \mathcal{S}_d$ , називається **вимірною за Лебегом**, якщо

$$f \text{ буде } (\mathcal{S}_d \cap A)\text{-вимірною}$$

Під класом  $\mathcal{S}_d \cap A$  мається на увазі всі множини з  $\sigma$ -алгебри  $\mathcal{S}_d$  перетнути з  $A$ .

Це такий особливий клас функцій, для яких визначені міри Лебега  $\lambda_d(f^{-1}(B))$  при  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , адже, за означенням,  $f^{-1}(B)$  має бути вимірною за Лебегом на множині  $A$ .

**Example 3.1.8** Будь-яка борельова функція  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  буде вимірною за Лебегом.

## 3.2 Дії з вимірними функціями

**Proposition 3.2.1** Задані  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  – два відображення та  $(X, \mathcal{F}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{F}_Y)$ ,  $(Z, \mathcal{F}_Z)$  – два вимірних простори. Відомо, що  $f \in (\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -вимірною та  $g \in (\mathcal{F}_Y, \mathcal{F}_Z)$ -вимірною. Тоді  $g \circ f$  буде  $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Z)$ -вимірною.

**Proof.**

Нехай  $B \in \mathcal{F}_Z$ . Зауважимо, що  $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ . За умовою твердження,  $g^{-1}(B) \in \mathcal{F}_Y$  в силу вимірності  $g$ , але тоді  $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{F}_X$  в силу вимірності  $f$ . ■

**Corollary 3.2.2** Задано  $(X, \mathcal{F}_X)$  – вимірний простір та функції  $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$  – всі  $\mathcal{F}_X$ -вимірні. Маємо функцію  $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  – борельова. Тоді  $h(x) = g(f_1(x), \dots, f_d(x))$  буде  $\mathcal{F}_X$ -вимірною.

**Proof.**

Розглянемо відображення  $\vec{f}: X \rightarrow \mathbb{R}^d$  та мається уже  $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , тоді наша функція  $h = g \circ \vec{f}$ . Залишилося довести, що  $\vec{f}$  буде  $(\mathcal{F}_X, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ -вимірною. Тоді вже за твердженням вище, ми отримаємо  $h$ , що буде  $\mathcal{F}_X$ -вимірною.

Нехай  $\mathcal{P}_d$  – наш клас множин, уже відомо, що  $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  (насправді, навіть рівні). Залишилося показати, що  $\forall B \in \mathcal{P}_d: \vec{f}^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$ .

Значить, нехай  $B \in \mathcal{P}_d$ , тобто  $B = \bigcap_{i=1}^d (a_i, b_i]$ , а тепер розглянемо його прообраз.

$\vec{f}^{-1}(B) = \{x \in X \mid \vec{f}(x) \in B\} = \{x \in X \mid f_1(x) \in (a_1, b_1], \dots, f_d(x) \in (a_d, b_d]\} = f_1^{-1}((a_1, b_1]) \cap \dots \cap f_d^{-1}((a_d, b_d])$ . Але оскільки кожна  $f_i \in \mathcal{F}_X$ -вимірною, то звідси всі ці прообрази  $f_i^{-1}((a_i, b_i]) \in \mathcal{F}_X$ . Але тоді звідси  $\vec{f}^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$ . ■

**Theorem 3.2.3** Задані  $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$  –  $\mathcal{F}$ -вимірними, тож нехай  $c \in \mathbb{R}$ . Тоді такі функції, як-от:  $f_1 + f_2$ ,  $cf_1$ ,  $f_1 \cdot f_2$ ,  $|f_1|$ ,  $\max\{f_1, f_2\}$ ,  $\min\{f_1, f_2\}$ ,  $\frac{f_1}{f_2} \mathbb{1}_{\{f_2 \neq 0\}}$  – всі вони будуть  $\mathcal{F}$ -вимірними також.

**Proof.**

Окрім останньої функції, всі вони випливають з наслідка вище. Покажу не першому прикладі. Маємо  $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\mathcal{F}$ -вимірні за умовою. Розглянемо відображення  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  таким чином:  $g(y_1, y_2) = y_1 + y_2$ . Зрозуміло, що це – неперервна, а тому буде борельовою. Таким чином,  $g(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) + f_2(x)$  буде  $\mathcal{F}$ -вимірною.

Зараз окремо розглянемо функцію  $f = \frac{f_1}{f_2} \mathbb{1}_{\{f_2 \neq 0\}}$ . Оберемо  $a \in \mathbb{R}$  та дослідимо  $\{f < a\}$ .

Запишемо її таким чином:  $\{f < a\} = \{f < a, f_2 < 0\} \cup \{f < a, f_2 = 0\} \cup \{f < a, f_2 > 0\}$ .

Зауважимо, що  $\{f < a, f_2 < 0\} = \{f_1 - af_2 > 0, f_2 < 0\}$ . Зокрема оскільки  $f_1, f_2$  –  $\mathcal{F}$ -вимірні, то тоді звідси  $f_1 - af_2$  також  $\mathcal{F}$ -вимірні, то звідси, за наслідком,  $\{f < a, f_2 < 0\} \in \mathcal{F}$ .

Так само доводиться  $\{f < a, f_2 > 0\} = \{f_1 - af_2 < 0, f_2 > 0\} \in \mathcal{F}$ .

Остання множина  $\{f < a, f_2 = 0\} = \{0 < a\} = \begin{cases} \emptyset \\ X \end{cases} \in \mathcal{F}$ . ■

**Corollary 3.2.4** За умовою, що  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ -вимірними,  $\{f_1 < f_2\}, \{f_1 > f_2\}, \{f_1 = f_2\} \in \mathcal{F}$ .

*Вказівка: розглянути  $f = f_2 - f_1$ .*

**Theorem 3.2.5** Задані функції  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1$  – всі  $\in \mathcal{F}$ -вимірними. Тоді

$\inf_{n \geq 1} f_n(x), \sup_{n \geq 1} f_n(x), \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  – всі вони будуть  $\mathcal{F}$ -вимірними. Додатково,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

буде  $\mathcal{F}$ -вимірною за умовою, що ліміт існує  $\forall x \in X$ .

**Proof.**

$$g^{(1)}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{n \geq 1} f_n(x).$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : \{g^{(1)} \geq a\} = \{x \in X \mid g^{(1)}(x) \geq a\} = \{x \in X \mid f_n(x) \geq a, n \geq 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq a\} \in \mathcal{F}.$$

$$g^{(2)}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{n \geq 1} f_n(x).$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : \{g^{(2)} \leq a\} = \{x \in X \mid g^{(2)}(x) \leq a\} = \{x \in X \mid f_n(x) \leq a, n \geq 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq a\} \in \mathcal{F}.$$

$$g^{(3)}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Насправді, зауважимо, що  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k(x)$ . Далі користуємося першими двома щойно доведеними.

$$g^{(4)}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Аналогічно варто зауважити, що  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k(x)$ .

$$g^{(5)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Якщо границя існує, то звідси  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . А далі користуємось щойно доведеним. ■

**Corollary 3.2.6** За умовою, що  $f_n \in \mathcal{F}$ -вимірними,  $\{x \in X \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\} \in \mathcal{F}$ .

### 3.3 Наближення вимірних функцій

**Definition 3.3.1** Функція  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  називається **простою**, якщо вона приймає скінченне число значень.

Нехай маємо  $p(x) = a_1, x \in A_1, \dots, p(x) = a_n, x \in A_n$ . Причому  $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ . Тоді ми можемо просту функцію переписати в іншому вигляді:

$$p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

Зрозуміло, що якщо довільна функція приймає вигляд формули вище, то вона – проста.

**Lemma 3.3.2** Задано  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  – проста функція, у нашому випадку  $p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ .

$p$  –  $\mathcal{F}$ -вимірна функція  $\iff \forall k = \overline{1, n} : A_k \in \mathcal{F}$ .

**Theorem 3.3.3** Задано функцію  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  –  $\in \mathcal{F}$ -вимірною, причому  $f \geq 0$ . Тоді існує послідовність простих функцій  $\{p_n: X \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1\}$  – причому зростаюча, всі невід’ємні та  $\mathcal{F}$ -вимірні – для якої  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$  при всіх  $x \in X$ .

**Proof.**

Ми задамо наступні прості функції ось таким чином:

$$p_1(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 1 \\ \frac{k}{2}, & f(x) \in \left(\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right], \text{ тут } k = \overline{0, 1}. \end{cases}$$

$$p_2(x) = \begin{cases} 2, & f(x) > 2 \\ \frac{k}{2^2}, & f(x) \in \left(\frac{k}{2^2}, \frac{k+1}{2^2}\right], \text{ тут } k = \overline{0, 7}. \end{cases}$$

$$\vdots$$

Тобто для  $p_1$  ділимо по  $OY$  відрізок  $[0, 1]$  на  $\frac{1}{2}$ ; для  $p_2$  ділимо по  $OY$  відрізок  $[0, 2]$  на  $\frac{1}{4} \dots$  З'ясуємо, чому це справді прості функції. Тому що можна це записати ось так:

$$p_1(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{\{f(x) > 1\}}(x) + \sum_{k=0}^{2^1} \frac{k}{2} \mathbb{1}_{\{f(x) \in (\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}]\}}(x).$$

$$p_2(x) = 2 \cdot \mathbb{1}_{\{f(x) > 2\}}(x) + \sum_{k=0}^{2^2} \frac{k}{2^2} \mathbb{1}_{\{f(x) \in (\frac{k}{2^2}, \frac{k+1}{2^2}]\}}(x).$$

$$\vdots$$

Тут скінченні значення та всі множини на індикаторах неперетинні.

Всі вони будуть невід'ємними – це цілком зрозуміло. Всі вони також будуть вимірними, тому що  $f \in \mathcal{F}$ -вимірною; а це означає, що  $\{f > 1\} \in \mathcal{F}$  та  $\left\{f \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right\} = \left\{f > \frac{k}{2^n}\right\} \cap \left\{f \leq \frac{k+1}{2^n}\right\} \in \mathcal{F}$ .

Найскладніше довести монотонне зростання. Покажу, що  $p_2 \leq p_3$ , для інших аналогічно.

Якщо  $x$  беремо такі, що  $f(x) > 2$ , тоді у функції  $p_3$  маємо  $p_3(x) = \frac{k}{2^3}$ , але  $k > 2 \cdot 2^3$ ; або  $p_3(x) = 3$  при  $f(x) > 3$ . Водночас маємо  $p_2(x) = 2$  у двох випадках. Тоді  $p_2 \leq p_3$ , зважаючи два випадки.

Якщо  $x$  беремо такі, що  $f(x) \leq 2$ , тоді розглядається один  $f(x) \in \left(\frac{k}{2^2}, \frac{k+1}{2^2}\right]$ . Запишемо так:

$$\left(\frac{k}{2^2}, \frac{k+1}{2^2}\right] = \left(\frac{2k}{2^3}, \frac{2k+1}{2^3}\right] \cup \left(\frac{2k+1}{2^3}, \frac{2k+2}{2^3}\right].$$

Із всього цього випливає, що  $p_2(x) = \frac{k}{2^2}$ , а також  $p_3(x) = \frac{2k}{2^3}$  або  $p_3(x) = \frac{2k+1}{2^3}$ . У двох випадках маємо  $p_2 \leq p_3$ .

Нарешті, доведемо, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$ . Заздалегідь зауважимо, що  $p_n \leq f$  за побудовою.

Нехай спочатку  $x \in X$  такий, що  $f(x) = +\infty$ . Тоді в цій точці  $\{p_n(x), n \geq 1\}$  не є обмеженою та в силу зростання  $p_n$  матимемо  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = +\infty = f(x)$ . Точніше кажучи,  $\{p_n(x) = n, n \geq 1\}$ .

Нехай тепер  $x \in X$  такий, що  $f(x) < +\infty$ . Тоді зауважимо, що має існувати номер  $n$ , для якого  $f(x) < n$ , а значить,  $f(x) \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ . Через нерівність це можна записати як  $\frac{k}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^n} \implies p_n(x) \leq f(x) \leq p_n(x) + \frac{1}{2^n}$ . Для нашого випадку  $f(x) - \frac{1}{2^n} \leq p_n(x) \leq f(x)$ . Спрямовуючи  $n \rightarrow \infty$ , отримаємо бажане. ■

Для довільної функції  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  надалі користуватимемося такими позначеннями:

$$f_+(x) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x) \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}}(x) \stackrel{\text{abo}}{=} \max\{f(x), 0\}.$$

$$f_-(x) \stackrel{\text{def.}}{=} -f(x) \mathbb{1}_{\{f < 0\}}(x) \stackrel{\text{abo}}{=} -\min\{f(x), 0\}.$$

Якщо функція  $f$  буде  $\mathcal{F}$ -вимірними, то всі ці функції  $f_+, f_-$  будуть також  $\mathcal{F}$ -вимірними. Також зауважимо, що  $f_+, f_-$  – обидва невід'ємні функції, а також

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x).$$

**Corollary 3.3.4** Задано функцію  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  –  $\mathcal{F}$ -вимірною. Тоді існує послідовність простих функцій  $\{p_n: X \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1\}$  – всі  $\mathcal{F}$ -вимірні – для якої  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$  при всіх  $x \in X$ . Причому  $|p_n| \leq |f|$ .

**Proof.**

Розпишемо функцію  $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ . Обидві функції є невід'ємними та  $\mathcal{F}$ -вимірними, тому за попередньою теоремою, існують відповідно  $\{p_n\}, \{q_n\}$  – невід'ємні,  $\mathcal{F}$ -вимірні та монотонно зростаючі послідовності простих функцій, для яких  $p_n \rightarrow f_+, q_n \rightarrow f_-$ .

Розглянемо послідовність  $\{p_n(x) - q_n(x), n \geq 1\}$ . Тоді  $p_n - q_n \rightarrow f_+ - f_- = f$ .  
Нарешті,  $|p_n - q_n| \leq |p_n| + |q_n| \leq f_+ + f_- = |f|$ . ■

### 3.4 Еквівалентні функції

**Definition 3.4.1** Задано  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою та функції  $f, g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . Вони називаються **еквівалентними відносно міри**  $\lambda$ , якщо

$$\exists N \subset X : \lambda(N) = 0 : \forall x \in X \setminus N : f(x) = g(x)$$

Позначення:  $f \sim g \pmod{\lambda}$  або  $f = g \pmod{\lambda}$ .

**Remark 3.4.2** У випадку, коли  $f, g \in \mathcal{F}$ -вимірними, то завжди існує множина  $N = \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ , для якої  $\lambda(N) = 0$ . (TODO: обміржувати)

**Example 3.4.3** Зокрема розглянемо функцію Діріхле  $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ . Відносно міри Лебега на  $\mathbb{R}$  отримаємо  $\mathfrak{D} \sim 0 \pmod{\lambda_1}$ . Треба просто покласти в цьому випадку  $N = \mathbb{Q}$ , для якої  $\lambda(N) = 0$ .

**Theorem 3.4.4** Задано  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір із мірою та функції  $f, g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . Відомо, що  $f \in \mathcal{F}$ -вимірною, також  $f \sim g \pmod{\lambda}$ , і головне  $\lambda$  – повна міра. Тоді  $g$  також  $\mathcal{F}$ -вимірна.

**Proof.**

По-перше, за умовою, існує  $N \subset X$ , для якої  $\lambda(N) = 0$  та  $f(x) = g(x)$  при  $x \in X \setminus N$ .

Нехай  $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ , тоді нам треба розглянути  $g^{-1}(B)$ .

$$g^{-1}(B) = \{x \in X \mid g(x) \in B\} = \{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) \neq f(x)\} \cup \{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) = f(x)\}.$$

Кожну з двох множин розглянемо окремо.

$\{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) \neq f(x)\} \subset \{x \in X \mid g(x) \neq f(x)\} \subset N$ . Оскільки  $\lambda(N) = 0$  та  $\lambda$  – повна міра, то звідси  $\{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) \neq f(x)\} \in \mathcal{F}$ .

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) = f(x)\} &= \{x \in X \mid f(x) \in B, g(x) = f(x)\} = \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in B\} \setminus \{x \in X \mid f(x) \in B, f(x) \neq g(x)\} = f^{-1}(B) \setminus \{x \in X \mid f(x) \in B, f(x) \neq g(x)\}. \end{aligned}$$

Щодо останньої множини, аналогічно через повноту міри  $\{x \in X \mid f(x) \in B, f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{F}$ .

Також в силу  $\mathcal{F}$ -вимірності  $f$ , маємо  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ .

Сумуючи це все, отримали  $g^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ . ■

**Definition 3.4.5** Задані  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою та функції  $f, f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  та  $n \geq 1$ . Функції  $f_n$  **збігається до  $f$  майже скрізь відносно міри**  $\lambda$ , якщо

$$\exists N \subset X : \lambda(N) = 0 : \forall x \in X \setminus N : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Позначення:  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ .

**Example 3.4.6** Маємо функції  $f_n(x) = \sin^n x$  при  $x \in \mathbb{R}$ . Відносно міри Лебега на  $\mathbb{R}$  маємо  $f_n \rightarrow 0 \pmod{\lambda_1}$ . Просто покладемо  $N = \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

**Theorem 3.4.7 Єдиність збіжності майже скрізь**

Задані  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою та відомо, що  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ ,  $f_n \rightarrow g \pmod{\lambda}$ . Тоді  $f \sim g \pmod{\lambda}$ .

**Proof.**

Маємо множини  $N_1, N_2$ , для яких  $\lambda(N_1) = \lambda(N_2) = 0$ , а також  $\forall x \in X \setminus N_1 : f_n \rightarrow f$  та  $\forall x \in X \setminus N_2 : f_n \rightarrow g$  при  $n \rightarrow \infty$ . Далі розглянемо множину  $N = N_1 \cup N_2$ . Тоді звідси випливає, що  $\lambda(N) = 0$ , а також  $f_n \rightarrow f, f_n \rightarrow g$  одночасно. У силу єдиності границі,  $f = g$  при  $x \in X \setminus N$ . Отже,  $f \sim g \pmod{\lambda}$ . ■

**Theorem 3.4.8** Задані  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою та відомо, що  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ , а також  $f \sim g \pmod{\lambda}$ . Тоді  $f_n \rightarrow g \pmod{\lambda}$ .

Приблизно такі самі кроки доведення, що в попередній теоремі.

**Theorem 3.4.9** Задані  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою та відомо, що  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ , всі  $f_n$  є  $\mathcal{F}$ -вимірними і головне  $\lambda$  – повна міра. Тоді  $f$  буде  $\mathcal{F}$ -вимірною.



**Proof.**

Маємо  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ , тобто  $\exists N \subset X : \lambda(N) = 0$  та  $f_n \rightarrow f$  для всіх  $x \in X \setminus N$ .

Розглянемо функції  $\tilde{f}_n(x) = f_n(x)\mathbb{1}_{X \setminus N}(x)$  та  $\tilde{f}(x) = f(x)\mathbb{1}_{X \setminus N}(x)$ . Зауважимо, що  $f_n \sim \tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f} \sim f$ .

Раз всі  $f_n \in \mathcal{F}$ -вимірними, то тоді кожний  $\tilde{f}_n \in \mathcal{F}$ -вимірним в силу повноти  $\lambda$ . Але тоді  $\tilde{f} \in$  також  $\mathcal{F}$ -вимірною як границя. Нарешті,  $f$  буде  $\mathcal{F}$ -вимірною в силу повноти  $\lambda$ . ■

### 3.5 Теорема Єгорова

**Theorem 3.5.1** Задано  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір із мірою, причому  $\lambda(X) < +\infty$ . Задані функції  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$  – всі вони  $\mathcal{F}$ -вимірні, причому  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_\varepsilon \in \mathcal{F} : \lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon, f_n \xrightarrow{\lambda} f$  на  $X \setminus A_\varepsilon$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Proof.**

Маємо  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ , тобто звідси  $\exists N : \lambda(N) = 0 : \forall x \in X \setminus N : f_n \rightarrow f$ . А це означає наступне:  $\forall x \in X \setminus N : \forall \varepsilon > 0 : \exists k \geq 1 : \forall n \geq k : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

Мовою множин це все можна записати таким чином:

$$X \setminus N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

$$N \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Зауважимо, що права множина буде вимірною на  $\mathcal{F}$  в силу того, що  $f_n, f \in \mathcal{F}$ -вимірними. Оскільки

$\lambda(N) = 0$ , то звідси  $\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$ . Але також варто зауважити, що по-

слідовність множин  $\left\{\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, k \geq 1\right\}$  буде спадати. Оскільки  $\lambda(X) < +\infty$ , тоді

$$\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Тобто звідси для чисел  $\frac{\delta}{2^j}$  маємо  $\exists k_j \geq 1 : \lambda\left(\bigcup_{n=k_j}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j}\right\}\right) < \frac{\delta}{2^j}$  для всіх  $j \geq 1$ .

Нарешті, покладемо множину  $A_\delta = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=k_j}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j}\right\}$ . Оцінімо його міру.

$$\lambda(A_\delta) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda\left(\bigcup_{n=k_j}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j}\right\}\right) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^j} = \delta.$$

Далі  $X \setminus A_\delta = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=k_j}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j}\right\}$ . Це означає наступне:

$$\forall j \geq 1 : \exists k_j : \forall n \geq k_j : \forall x \in X \setminus A_\delta : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j}.$$

Це означає, що  $\forall n \geq k_j : \sup_{x \in X \setminus A_\delta} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ . І це в точності означає, що  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$  на  $X \setminus A_\varepsilon$  при  $n \rightarrow \infty$ . ■

### 3.6 Збіжність за мірою

**Definition 3.6.1** Задані  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою та функції  $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  та  $n \geq 1$  – всі вони  $\mathcal{F}$ -вимірні.

Функція  $f_n$  збігається до  $f$  за мірою  $\lambda$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

Позначення:  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ .

**Theorem 3.6.2 Єдиність збіжності за мірою**

Задано  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір та відомо, що  $f_n \xrightarrow{\lambda} f, f_n \xrightarrow{\lambda} g$ . Тоді  $f \sim g \pmod{\lambda}$ .

**Proof.**

За умовою, маємо  $\forall \varepsilon > 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Зауважимо, що  $\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in X : |g(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ .

Звідси при  $n \rightarrow \infty$  отримаємо наступне:

$$\lambda\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \leq \lambda\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \lambda\left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \rightarrow 0.$$

Отже,  $\forall \varepsilon > 0 : \lambda\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = 0$ .

Зокрема при  $\varepsilon = \frac{1}{k}$  маємо  $\lambda\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\} = 0$ , це дозволить сказати наступне:

$$\lambda\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\} = 0.$$

Значить, знайшли множину  $N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ , для якої  $\forall x \in X \setminus N : f(x) = g(x)$ , при цьому  $\lambda(N) = 0$ . За означенням,  $f \sim g \pmod{\lambda}$ . ■

**Theorem 3.6.3** Задані  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою та відомо, що  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ , а також  $f \sim g \pmod{\lambda}$ . Тоді  $f_n \xrightarrow{\lambda} g$ .

*Вправа: довести.*

**Remark 3.6.4** У нас вже є два види збіжності: майже скрізь відносно міри та за мірою. Але

$$f_n \rightarrow f \pmod{\lambda} \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\lambda} f.$$

$$f_n \xrightarrow{\lambda} f \not\Rightarrow f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}.$$

Нижче будуть відповідні приклади, які покажуть, що прямого зв'язку, взагалі-то кажучи, нема.

**Example 3.6.5** Розглянемо  $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x)$ , а також нехай  $\lambda_1$  – міра Лебега на  $\mathbb{R}$ .

$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x) \rightarrow 0 = f \pmod{\lambda_1}$  (насправді, тут збіжність всюди, не просто майже скрізь)

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x) \not\xrightarrow{\lambda_1} 0 = f, \text{ оскільки } \lambda_1\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geq 1\} = \lambda_1\{x \in [n, n+1]\} = 1 \not\rightarrow 0.$$

**Example 3.6.6** Розглянемо знову  $\lambda_1$  – міра Лебега на  $\mathbb{R}$ , але вже такі функції:

$$f_1(x) = \mathbb{1}_{[0, 1]}(x)$$

$$f_2(x) = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \quad f_3(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}(x)$$

$$f_4(x) = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{4}]}(x) \quad f_5(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]}(x) \quad f_6(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}(x) \quad f_7(x) = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4}, 1]}(x)$$

⋮

У нас на кожному рівні відрізок  $[0, 1]$  ділиться на  $\frac{1}{2^n}$  частин.

$f_n(x) \xrightarrow{\lambda_1} 0$ , тому що  $\forall 0 < \varepsilon \leq 1$  маємо таку послідовність:

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_1(x)| \geq \varepsilon\} = 1$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_2(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_3(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_4(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_5(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_6(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_7(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Тобто мається  $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ , яка повільно, але прямує до нуля. Тож  $\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$ .

При  $\varepsilon > 1$  зрозуміло, що  $\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} = 0 \rightarrow 0$ .

$f_n(x) \not\rightarrow 0 \pmod{\lambda_1}$ . Ми доведемо, що взагалі  $f_n(x) \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Нехай  $x \in [0, 1]$ , тоді можна відокремити підпослідовність функцій в т.  $x$ , щоб була стаціонарна

послідовність  $\{1, 1, \dots\}$ , яка не є збіжною до нуля. Просто тому що  $x \in [0, 1] \implies x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  або  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \implies x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$  або  $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  або  $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$  або  $x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \implies \dots$

### 3.7 Основні твердження, що пов'язують обидві збіжності. Фундаментальність за мірою

#### Theorem 3.7.1 Теорема Лебега про зв'язок між збіжностями

Задано  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір із мірою, причому  $\lambda(X) < +\infty$ . Задані функції  $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$  – всі вони  $\mathcal{F}$ -вимірні, причому  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ . Тоді  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ .

#### Proof.

Маємо  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ , тобто звідси  $\exists N: \lambda(N) = 0: \forall x \in X \setminus N: f_n \rightarrow f$ . А це означає наступне:  $\forall x \in X \setminus N: \forall \varepsilon > 0: \exists k \geq 1: \forall n \geq k: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

Мовою множин це все можна записати таким чином:

$$X \setminus N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

$$N \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Зауважимо, що права множина буде вимірною на  $\mathcal{F}$  в силу того, що  $f_n, f \in \mathcal{F}$ -вимірними. Оскільки  $\lambda(N) = 0$ , то звідси  $\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$ . Але також варто зауважити, що по-

слідовність множин  $\left\{\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, k \geq 1\right\}$  буде спадати. Оскільки  $\lambda(X) < +\infty$ , тоді

$$\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0. (*)$$

$$\text{Це означає, що } \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda\{x: |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Це в точності  $f_k \xrightarrow{\lambda} f$ . ■

**Remark 3.7.2** Якщо подивитися уважно, тут початок доведення повністю збігається з початком доведення теорема Єгорова до моменту (\*). Тому тут треба лише акцентувати увагу на останні міркування.

**Definition 3.7.3** Задані  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою та функції  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  та  $n \geq 1$  – всі вони  $\mathcal{F}$ -вимірні.

Послідовність  $f_n$  називається **фундаментальною за мірою  $\lambda$** , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N: \lambda\{x \in X: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} < \delta$$

Можна по-іншому це записати:

$$\forall \varepsilon > 0: \lambda\{x \in X: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty$$

**Proposition 3.7.4** Задані  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою та послідовність  $f_n$ , що збіжна за мірою  $\lambda$ . Тоді  $f_n$  – фундаментальна за мірою  $\lambda$ .

#### Proof.

Маємо  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ , тобто  $\forall \delta > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq N:$

$$\lambda\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \delta \quad \lambda\{x \in X: |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \delta.$$

Аналогічним чином можна зауважити наступне:

$$\{x \in X: |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in X: |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Звідси легко випливає, що  $\lambda\{x \in X: |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} < \delta$ . ■

**Theorem 3.7.5** Задані  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою та послідовність  $f_n$ , що фундаментальна за мірою  $\lambda$ . Тоді існує  $\mathcal{F}$ -вимірна функція  $f$  та підпослідовність  $f_{n_k}$ , для яких

$$f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}, k \rightarrow \infty$$

$$f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f, k \rightarrow \infty.$$

**Proof.**

I. Спочатку знайдемо підпослідовність  $\{f_{n_k}\}$ , яка нам буде необхідною.

Маємо  $f_n$  – фундаментальна, тобто  $\forall \delta > 0 : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \lambda\{x : |f_n - f_m| \geq \varepsilon\} < \delta$ .

Зокрема оберемо  $\varepsilon = \delta = \frac{1}{2^k}$ , тоді звідси  $\exists N_k : \lambda\left\{x : |f_{N_k} - f_{N_{k+1}}| \geq \frac{1}{2^k}\right\} < \frac{1}{2^k}$ , ми будемо брати  $N_k$  так, щоб вона строго зростала. Фундаментальну послідовність  $\{f_{N_k}, k \geq 1\}$  з умовою  $\exists N_k : \lambda\left\{x : |f_{N_k} - f_{N_{k+1}}| \geq \frac{1}{2^k}\right\} < \frac{1}{2^k}$  ми знайшли.

II. Далі знайдемо функцію, яка буде необхідною.

Розглянемо множину  $M = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k}\right\}$ . Зауважимо, що  $\lambda(M) = 0$ , оскільки

$$\lambda(M) \leq \lambda\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \lambda\left\{x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k}\right\} < \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j-1}} \rightarrow 0.$$

Далі візьмемо доповнення до множини  $N$  – отримаємо наступне:

$$X \setminus M = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} \left\{x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| < \frac{1}{2^k}\right\}.$$

Зараз доведемо, що для кожної  $x \in X \setminus N$  послідовність  $\{f_{N_k}(x), k \geq 1\}$  буде фундаментальною.

Оберемо  $k, l \geq j$ , тоді звідси маємо:

$$|f_{N_k}(x) - f_{N_l}(x)| \leq |f_{N_k}(x) - f_{N_{k+1}}(x)| + |f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_{k+2}}(x)| + \dots + |f_{N_{l-1}}(x) - f_{N_l}(x)| <$$

$$< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{l-1}} \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots = \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty.$$

Значить,  $\{f_{N_k}(x), k \geq 1\}$  буде збіжною при кожному  $x \in X \setminus M$ . Далі просто зафіксуємо функцію

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{N_k}(x), & x \in X \setminus M \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{N_k}(x) \cdot \mathbb{1}_{X \setminus M}(x)).$$

Це – та сама шукана  $\mathcal{F}$ -вимірна функція, як добуток першої вимірної (як границя) та другої вимірної.

III. Для цієї функції доведемо всі збіжності.

Зрозуміло, що  $f_{N_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$ , за побудовою  $f$  та  $\lambda(M) = 0$ .

Зафіксуємо  $\varepsilon, \delta > 0$ . Оберемо такі  $j \geq 1$ , щоб  $\frac{1}{2^{j-1}} < \min\{\varepsilon, \delta\}$ . Розглянемо тепер ось таку множину

$$\tilde{M} = \bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k}\right\}. \text{ Оскільки } M \subset \tilde{M}, \text{ то звідси } X \setminus M \supset X \setminus \tilde{M}, \text{ а тому зокрема}$$

$$\forall x \in X \setminus \tilde{M} : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_{N_k}(x) = f(x).$$

Зауважимо, що виконується наступне:

$$|f_{N_k}(x) - f(x)| = \lim_{l \rightarrow \infty} |f_{N_k}(x) - f_{N_l}(x)| \stackrel{\text{див. II}}{\leq} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon.$$

Значить,  $\forall x \in X \setminus \tilde{M} : |f_{N_k}(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Мовою множин це означає, що

$$X \setminus \tilde{M} \subset \{x : |f_{N_k}(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

$$\tilde{M} \supset \{x : |f_{N_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

$$\text{Але тоді } \lambda\{x : |f_{N_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \lambda(\tilde{M}) = \lambda\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) \stackrel{\text{див. II}}{<} \frac{1}{2^{j-1}} < \delta.$$

$$\text{Висновок: } f_{N_k} \xrightarrow{\lambda} f. \quad \blacksquare$$

### Corollary 3.7.6 Теорема Піка

Задані  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою та послідовність  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ . Тоді існує підпослідовність  $f_{n_k}$ , для якої  $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$ .

**Proof.**

Збіжна за мірою означає фундаментальність за мірою. За теоремою вище, існує підпослідовність  $f_{n_k}$ , для якої  $f_{n_k} \rightarrow g \pmod{\lambda}$ .

Зрозуміло, що  $f_n \xrightarrow{\lambda} f \implies f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$ . Також за теоремою вище,  $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} g$ . А за єдиністю,  $f \sim g \pmod{\lambda}$ , але це тоді означає, що  $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$ . ■

**Corollary 3.7.7** Послідовність  $f_n$  фундаментальна за мірою  $\lambda \iff f_n$  збіжна за мірою  $\lambda$ .

**Proof.**

⊆ Уже було.

⊇ Дано:  $f_n$  – фундаментальна за мірою  $\lambda$ . Тоді за теоремою вище, існує підпослідовність  $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$ . Нехай  $\varepsilon > 0$ , тоді за аналогічними міркуваннями (ми вже цю оцінку не раз показували):  

$$\lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \lambda\left\{x \in X : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \lambda\left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$
Якщо  $n \rightarrow \infty$ , то автоматично  $n_k \rightarrow \infty$ , а в цьому випадку  $\lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .  
Отже,  $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ . ■

**Theorem 3.7.8** Теорема Лузіна

Задано  $A = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k]$  та  $\lambda$  – міра Лебега. Маємо функцію  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  – вимірну за Лебегом. Тоді  
 $\forall \varepsilon > 0 : \exists g: A \rightarrow \mathbb{R}, g \in C(A) : \lambda\{x \in A : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$ .  
*Без доведення.*

## 4 Інтеграл Лебега

Надалі всюди я буду мати  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір із мірою, якщо ніде додатково це не буде вказано.

### 4.1 Первинні означення

**Definition 4.1.1** Задано  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  – проста, невід’ємна та  $\mathcal{F}$ -вимірна функція, тобто  $p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$  при  $\bigcup_{k=1}^n A_k = X$ . Також нехай задано  $A \in \mathcal{F}$ .

**Інтегралом Лебега від простої, невід’ємної функції  $p$  на множині  $A$**  називають число:

$$\int_A p d\lambda = \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap A)$$

Якщо міра буде нескінченність, то ми кладемо  $a \cdot +\infty = +\infty$  при  $a \neq 0$ , а також  $0 \cdot +\infty = 0$ .

Бувають ще позначають як  $\int_A p(x) d\lambda(x)$  або навіть  $\int_A p(x) \lambda(dx)$ .

**Remark 4.1.2** Нам треба переконатися, що інтеграл Лебега не залежить від представлення простої функції. Тому що, наприклад, я можу записати  $p(x) = 2\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + 4\mathbb{1}_{(1,2]}(x)$ , але можу записати як  $p(x) = 2\mathbb{1}_{[0,0.5)} + 2\mathbb{1}_{[0.5,1)} + 4\mathbb{1}_{(1,2]}(x)$  – одна й та сама проста функція, але представлення різне.

**Proof.**

Розглянемо два представлення простої, невід’ємної  $\mathcal{F}$ -вимірної функції:

$$p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x) \quad p(x) = \sum_{i=1}^j b_i \mathbb{1}_{B_i}(x) \quad \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{i=1}^j B_i = X.$$

Для множини  $A$  зауважимо, що виконується рівність:

$$A = \bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A) \quad A = \bigcup_{i=1}^j (B_i \cap A).$$

Далі для кожного представлення розпишемо інтеграл Лебега:

$$\begin{aligned} \int_A p d\lambda &= \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap A) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A) \\ \int_A p d\lambda &= \sum_{i=1}^j b_i \lambda(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^j \sum_{k=1}^n b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A) \end{aligned}$$

Якщо  $A_k \cap B_i = \emptyset$ , то тоді в цьому випадку  $\lambda(A_k \cap B_i \cap A) = 0$ . Тому надалі розглядаються випадки  $A_k \cap B_i \neq \emptyset$ . У цьому випадку беремо  $x \in A_k \cap B_i$ , звідси маємо  $p(x) = a_k = b_i$ . Помножимо обидві частини на  $\lambda(A_k \cap B_i \cap A)$  – отримаємо  $a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A) = b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A)$ , а далі просумуємо по  $k, i$  – отримаємо рівність двох інтегралів. ■

**Proposition 4.1.3** Властивості інтеграла Лебега від простої невід’ємної функції

Справедливі такі пункти:

- 1) Нехай  $p_1, p_2$  – прості невід’ємні  $\mathcal{F}$ -вимірні функції,  $p_1 \leq p_2$ . Також  $A \in \mathcal{F}$ . Тоді  $\int_A p_1 d\lambda \leq \int_A p_2 d\lambda$ ;
- 2) Нехай  $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset$ . Також  $p$  – проста невід’ємна  $\mathcal{F}$ -вимірна функція. Тоді  $\int_{A \cup B} p d\lambda = \int_A p d\lambda + \int_B p d\lambda$ ;
- 3) Нехай  $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B$ . Також  $p$  – проста невід’ємна  $\mathcal{F}$ -вимірна функція. Тоді  $\int_A p d\lambda \leq \int_B p d\lambda$ ;

**Proof.**

Доведемо виконання кожної властивості:

- 1) Маємо прості функції  $p_1(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ ,  $p_2(x) = \sum_{i=1}^j b_i \mathbb{1}_{B_i}(x)$ , причому  $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{i=1}^j B_i = X$ .

Аналогічними міркуваннями, що в зауваженні вище, розпишемо інтеграли Лебега:

$$\int_A p_1 d\lambda = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A);$$

$$\int_A p_2 d\lambda = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A).$$

Аналогічно розглянемо лише випадки  $A_k \cap B_i \neq \emptyset$ . Беремо  $x \in A_k \cap B_i$ , звідси  $p_1(x) = a_k \leq b_i = p_2(x)$ , просто тому що  $p_1 \leq p_2$ . Далі множимо на міру  $\lambda(A_k \cap B_i \cap A)$  та сумуємо по  $k, i$  – отримали бажану нерівність.

2) Випливає з того, що  $\lambda$  – адитивна функція множин.

3) Зауважимо, що якщо  $A \subset B$ , то звідси  $B = A \sqcup (B \setminus A)$ . За властивістю 2), маємо

$$\int_B p d\lambda = \int_A p d\lambda + \int_{B \setminus A} p d\lambda \geq \int_A p d\lambda.$$

■

**Definition 4.1.4** Задано  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – невід’ємна та  $\mathcal{F}$  функція. Також нехай задано  $A \in \mathcal{F}$ . Інтегралом Лебега від невід’ємної функції  $f$  на множині  $A$  називають число

$$\int_A f d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p d\lambda$$

Множина  $K(p) = \{p: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ – прості невід’ємні та } \mathcal{F}\text{-вимірні} : p \leq f\}$ .

**Remark 4.1.5**  $K(f) \neq \emptyset$ , тому що принаймні нульова функція  $0 \in K(f)$ .

**Remark 4.1.6** Перше означення узгоджується з другим означенням, якщо в другому означенні взяти  $p$  – невід’ємну  $\mathcal{F}$ -вимірну функцію, але вже просту.

**Proof.**

За другим означенням інтеграла Лебега, маємо наступне:

$$\int_A p d\lambda = \sup_{q \in K(p)} \int_A q d\lambda \geq \int_A p d\lambda \text{ (нерівність за означенням супремума, причому } p \in K(p)).$$

Тепер оберемо  $q \in K(p)$ , тут  $q$  – проста невід’ємна  $\mathcal{F}$ -вимірна функція з умовою  $q \leq p$ . Тоді за властивістю 1) просто інтеграла Лебега,  $\int_A q d\lambda \leq \int_A p d\lambda$ . Але оскільки це виконано для всіх

$$q \in K(p), \text{ то зокрема для } \sup_{q \in K(p)} \int_A q d\lambda = \int_A p d\lambda \leq \int_A p d\lambda.$$

$$\text{Разом отримали рівність } \int_A p d\lambda = \int_A p d\lambda.$$

■

**Definition 4.1.7** Задано  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  –  $\mathcal{F}$ -вимірна функція. Також нехай задано  $A \in \mathcal{F}$ . Інтегралом Лебега від функції  $f$  на множині  $A$  називають число

$$\int_A f d\lambda = \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda,$$

якщо хоча б один з інтегралів скінченний.

У цьому випадку  $f = f_+ - f_-$ , причому  $f_+, f_-$  – невід’ємні функції.

Функція  $f$  називається **інтегрованою за Лебегом на множині  $A$** , якщо кожний обидва інтеграли в правій частині – скінченні.

Позначення:  $f \in L(A, \lambda)$ .

**Remark 4.1.8** Друге означення узгоджується з третім означенням, якщо в третьому означенні взяти  $f$  –  $\mathcal{F}$ -вимірну функцію, але вже невід’ємну.

**Proof.**

Дійсно, коли  $f$  – невід’ємна, то звідси  $f_+ = f$ , а також  $f_- = 0$ . Тож звідси

$$\int_A f d\lambda = \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda = \int_A f d\lambda. \quad (3) \quad (2)$$

**Example 4.1.9** Розглянемо  $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ . Тоді  $f_+, f_-$  – прості невід’ємні функції,

де  $f_+ = f_- = 1$ , а за означенням,  $\int_{\mathbb{R}} f_+ d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} f_- d\lambda_1 = +\infty$ , де  $\lambda_1$  – міра Лебега. Ці дві функції не є інтегровними. При цьому  $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1$  не визначений.

## 4.2 Наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій

**Theorem 4.2.1** Задано  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – невід’ємна  $\mathcal{F}$ -вимірна функція. За теоремою, існує послідовність  $\{p_n, n \geq 1\}$  так, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$ , причому  $p_n$  – прості невід’ємні та  $\mathcal{F}$ -вимірні та  $p_n \leq f$ .

$$\text{Тоді } \int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda.$$

Для доведення даної теореми сформулюємо одну лему:

**Lemma 4.2.2** Задані  $p, p_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  – прості невід’ємні та  $\mathcal{F}$ -вимірні функції, причому

- 1)  $p_n \leq p_{n+1}$
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \geq p$ .

$$\text{Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda \geq \int_A p d\lambda.$$

**Proof.**

Маємо функцію  $p(x) = \sum_{i=1}^j a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$ , де  $A_i \in \mathcal{F}$ , причому  $\bigcup_{i=1}^j A_i = X$ .

Нехай  $\varepsilon > 0$  та розглянемо множини  $B_n = \{x \in A : p_n \geq (1 - \varepsilon)p\}$ . Зауважимо, що:

$B_n$  зростає за умовою 1);

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$  за умовою 2).

Тож звідси випливатиме наступне:

$$\int_A p_n d\lambda \geq \int_{B_n} p_n d\lambda \geq \int_{B_n} (1 - \varepsilon)p d\lambda = \sum_{i=1}^j (1 - \varepsilon)a_i \lambda(A_i \cap B_n).$$

За неперервністю міри знизу,  $\lambda(A_i \cap B_n) \rightarrow \lambda(A_i \cap A)$  при  $n \rightarrow \infty$ , звідси

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda \geq (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^j a_i \lambda(A_i \cap A) = (1 - \varepsilon) \int_A p d\lambda.$$

Записана границя ліворуч існує, як границя неспадної послідовності. А далі,  $\varepsilon \rightarrow 0$  – отримали

$$\text{бажану нерівність } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda \geq \int_A p d\lambda. \quad \blacksquare$$

Тепер ми готові до доведення основної теореми.

**Proof.**

Границя праворуч існує як границя неспадної послідовності.

Оскільки  $p_n \leq f$ , то  $p_n \in K(f)$  і з другого означення інтеграла Лебега,

$$\int_A f d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p d\lambda \geq \int_A p_n d\lambda \implies \int_A f d\lambda \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda.$$

Із іншого боку, для кожної  $p \in K(f)$  маємо

$$p(x) \leq f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) \xrightarrow{\text{лема}} \int_A p d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda \implies \int_A f d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda. \quad \blacksquare$$



### 4.3 Основні властивості та твердження

**Theorem 4.3.1** Задано  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – невід’ємна та  $\mathcal{F}$ -вимірна функція. Тоді функція множин  $\mu(A) = \int_A f d\lambda$  задає міру на  $\mathcal{F}$ .

**Proof.**

Функція множин  $\mu$  уже невід’ємна, оскільки  $\mu(A) = \int_A f d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p d\lambda \geq 0$ .

Залишилося довести  $\sigma$ -адитивність інтеграла. Нехай  $A_n \in \mathcal{F}$ , всі неперетинні. Уже автоматично  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{F}$ . Ми розглянемо кілька випадків:

I. Випадок функції  $\mathbb{1}_B$ , де множина  $B \in \mathcal{F}$ .

$$\mu(A) = \int_A \mathbb{1}_B d\lambda = \lambda(A \cap B) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \mathbb{1}_B d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

II. Випадок функції  $p$  – проста невід’ємна та  $\mathcal{F}$ -вимірна.

Тобто маємо  $p = \sum_{i=1}^j b_i \mathbb{1}_{B_i}$  при  $B_i \in \mathcal{F}$ ,  $\bigcup_{i=1}^j B_i = X$ . Із кроку I, вже відомо, що

$$\mu_i(A) = \int_A \mathbb{1}_{B_i} d\lambda \text{ задає міру. Зауважимо, що тоді звідси}$$

$$\mu(A) = \int_A p d\lambda = \sum_{i=1}^j b_i \lambda(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^j b_i \int_A \mathbb{1}_{B_i} d\lambda = b_i \mu_i(A).$$

Лінійна комбінація мір при невід’ємних коефіцієнтах залишається мірою (неважко показати).

III. Випадок функції  $f$  – невід’ємна та  $\mathcal{F}$ -вимірна.

Тоді існує послідовність простих невід’ємних та  $\mathcal{F}$ -вимірних функцій  $\{p_k\}$ , для яких  $p_k \rightarrow f$ . Звідси маємо  $\int_B f d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B p_k d\lambda$  для кожної  $B \in \mathcal{F}$ . Ми хочемо довести, що  $\int_A f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda$ .

Оберемо  $p_k \in K(f)$ , тоді звідси випливає

$$\int_A p_k d\lambda \geq \int_{\bigcup_{n=1}^q A_n} p_k d\lambda \stackrel{\text{крок II}}{=} \sum_{n=1}^q \int_{A_n} p_k d\lambda.$$

Спрямувавши  $k \rightarrow \infty$ , а згодом спрямувавши  $q \rightarrow \infty$ , отримаємо наступне:

$$\int_A f d\lambda \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda.$$

$$\text{Із іншого боку, для кожного } p \in K(f) \text{ маємо } \int_A p d\lambda \stackrel{\text{крок II}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} p d\lambda \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda.$$

Оскільки це виконується для всіх  $p \in K(f)$ , то звідси отримаємо:

$$\int_A f d\lambda \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda.$$

$$\text{Нарешті, довели } \mu(A) = \int_A f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad \blacksquare$$

#### Proposition 4.3.2 Властивості інтеграла Лебега

Всюди будуть розглядатися функції  $f, g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , що  $\mathcal{F}$ -вимірні, а також множини  $A, B \in \mathcal{F}$ . Виконуються наступні властивості:

- 1) Нехай  $N \in \mathcal{F}$  така, що  $\lambda(N) = 0$ . Тоді  $\int_A f d\lambda = 0$ .
- 2)  $\int_X f \cdot \mathbb{1}_A d\lambda = \int_A f d\lambda$  (за умовою, що бодай один з цих інтегралів існує)
- 3)  $\int_A c f d\lambda = c \int_A f d\lambda$  при  $c \in \mathbb{R}$  (за умовою, що  $\int_A f d\lambda$  існує)
- 4) Нехай  $f \leq g$ . Тоді  $\int_A f d\lambda \leq \int_A g d\lambda$  (за умовою, що обидва інтеграли існують)
- 5) Нехай  $f$  – невід’ємна та  $A \subset B$ . Тоді  $\int_A f d\lambda \leq \int_B f d\lambda$

- 6) Нехай  $A \subset B$  та при цьому існує  $\int_B f d\lambda$ . Тоді існуватиме й  $\int_A f d\lambda$ . Причому якщо  $f \in L(B, \lambda)$ , то й  $f \in L(A, \lambda)$ .
- 7) Припустимо  $\int_X f_- d\lambda < +\infty$ . Тоді  $\nu(A) = \int_A f d\lambda$  буде  $\sigma$ -адитивною на  $\mathcal{F}$  (спойлер: дана функція множин задає заряд).
- 8)  $f \in L(A, \lambda) \iff |f| \in L(A, \lambda)$ , причому справедлива нерівність  $\left| \int_A f d\lambda \right| \leq \int_A |f| d\lambda$ .
- 9) Нехай  $f \sim g \pmod{\lambda}$ . Тоді  $\int_A f d\lambda = \int_A g d\lambda$  (за умовою, що хоча б один з цих інтегралів існує)
- 10) Нехай  $f \in L(A, \lambda)$ . Тоді  $|f| < +\infty \pmod{\lambda}$  на множині  $A$
- 11) Нехай  $f$  – невід’ємна та  $\int_A f d\lambda = 0$ . Тоді  $f = 0 \pmod{\lambda}$  на множині  $A$ .
- 12) Нехай  $\int_A f d\lambda = 0$  для всіх  $A \in \mathcal{F}$ . Тоді  $f \equiv 0 \pmod{\lambda}$  на  $X$ .

**Proof.**

Покажемо виконання кожної властивості:

1) Розглянемо кілька випадків:

- I.  $p$  – проста невід’ємна та  $\mathcal{F}$ -вимірна, тоді  $\int_N p d\lambda = \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap N) = 0$ , тому що  $\lambda(A_k \cap N) = 0$ .
- II.  $f$  – невід’ємна та  $\mathcal{F}$ -вимірна, тоді  $\int_N f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_N p_n d\lambda \stackrel{\text{крок I}}{=} 0$ .
- III.  $f$  – довільна  $\mathcal{F}$ -вимірна, тоді  $\int_N f d\lambda = \int_N f_+ d\lambda - \int_N f_- d\lambda \stackrel{\text{крок II}}{=} 0$ .

2) Розглянемо кілька випадків:

- I.  $p$  – проста невід’ємна та  $\mathcal{F}$ -вимірна, тобто  $p(x) \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ . Звідси  $p(x) \mathbb{1}_A(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k \cap A}(x)$  – теж проста, а значить,  $\int_X p \cdot \mathbb{1}_A d\lambda = \sum_{k=1}^n a_k \lambda(X \cap (A \cap A_k)) = \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A \cap A_k) = \int_A p d\lambda$ .
- II.  $f$  – невід’ємна та  $\mathcal{F}$ -вимірна, тоді відомо, що  $p_n \rightarrow f$  за теоремою. Але при цьому  $p_n \mathbb{1}_A$  також монотонно зростає та  $p_n \mathbb{1}_A \rightarrow f$ . Значить,  $\int_X f \cdot \mathbb{1}_A d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_X p_r \mathbb{1}_A d\lambda \stackrel{\text{крок I}}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_A p_r d\lambda = \int_A f d\lambda$ .
- III.  $f$  – довільна  $\mathcal{F}$ -вимірна, тобто  $f = f_+ - f_-$ . Але тоді  $f \mathbb{1}_A = (f \mathbb{1}_A)_+ - (f \mathbb{1}_A)_- = f_+ \mathbb{1}_A - f_- \mathbb{1}_A$ . Значить,  $\int_X f \cdot \mathbb{1}_A d\lambda = \int_X (f \mathbb{1}_A)_+ d\lambda - \int_X (f \mathbb{1}_A)_- d\lambda \stackrel{\text{крок II}}{=} \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda = \int_A f d\lambda$ .

3) Спочатку розглянемо сценарій  $c \geq 0$ . Знову кілька випадків:

- I.  $p$  – проста невід’ємна та  $\mathcal{F}$ -вимірна, тобто  $p(x) \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ . Звідси  $cp(x) = \sum_{k=1}^n (ca_k) \mathbb{1}_{A_k}(x)$  – теж проста, а значить,  $\int_A cp d\lambda = \sum_{k=1}^n (ca_k) \lambda(A \cap A_k) = c \int_A p d\lambda$ .
- II.  $f$  – невід’ємна та  $\mathcal{F}$ -вимірна, тоді відомо, що  $p_n \rightarrow f$  за теоремою. Але при цьому  $cp_n$  також монотонно зростає та  $cp_n \rightarrow cf$ . Значить,  $\int_A cf d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A cp_n d\lambda \stackrel{\text{крок I}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} c \int_A p_n d\lambda = c \int_A f d\lambda$ .
- III.  $f$  – довільна  $\mathcal{F}$ -вимірна, тобто  $f = f_+ - f_-$ . Але тоді  $cf = (cf)_+ - (cf)_- = cf_+ - cf_-$ . Значить,  $\int_A cf d\lambda = \int_A (cf)_+ d\lambda - \int_A (cf)_- d\lambda \stackrel{\text{крок II}}{=} c \int_A f_+ d\lambda - c \int_A f_- d\lambda = c \int_A f d\lambda$ .

Також розглянемо  $c < 0$ . Позначимо число  $d = -c > 0$ , тоді вже виконується

$$\int_A df d\lambda = d \int_A f d\lambda = -c \int_A f d\lambda.$$

Із іншого боку,  $df = (-c)f = (-cf) = (-cf)_+ - (-cf)_- = cf_- - cf_+$ . Тож

$$\int_A df d\lambda = \int_A cf_- d\lambda - \int_A cf_+ d\lambda = - \int_A cf_+ d\lambda + \int_A cf_- d\lambda = - \int_A cf d\lambda.$$

Маючи два рівності, отримаємо звідси  $\int_A cf d\lambda = c \int_A f d\lambda$ .

4) Спочатку розглянемо випадки, коли  $f \leq g$  та  $f, g$  – невід’ємні. Зауважимо, що  $K(f) \subset K(g)$ , але

$$\text{тоді звідси } \int_A f d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p d\lambda \leq \sup_{p \in K(g)} \int_A p d\lambda = \int_A g d\lambda.$$

Тепер  $f, g$  – довільні, тобто  $f = f_+ - f_-$  та  $g = g_+ - g_-$ . Звідси

$$\int_A f d\lambda = \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda \leq \int_A g_+ d\lambda - \int_A g_- d\lambda = \int_A g d\lambda.$$

5) *Випливає з властивості інтеграла Лебега від простої функції.*

6) *Випливає з властивості 5) інтегралу Лебега.*

7) Із умови випливає, що  $\int_X f d\lambda$  існує. А за властивістю 6), всі  $\int_A f d\lambda$  існують при  $A \subset X$ . Властивість  $\sigma$ -адитивності довести неважко.

8) Спочатку варто зауважити, що  $\int_A |f| d\lambda = \int_A f_+ d\lambda + \int_A f_- d\lambda$ . Дійсно,

$$\int_A |f| d\lambda = \int_{A \cap \{f \geq 0\}} |f| d\lambda + \int_{A \cap \{f < 0\}} |f| d\lambda = \int_A |f| \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}} d\lambda + \int_A |f| \mathbb{1}_{\{f < 0\}} d\lambda = \int_A f_+ d\lambda + \int_A f_- d\lambda.$$

Із цієї рівності легко випливає  $f \in L(A, \lambda) \iff |f| \in L(A, \lambda)$ . Нарешті,

$$\left| \int_A f d\lambda \right| = \left| \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda \right| \leq \left| \int_A f_+ d\lambda \right| + \left| \int_A f_- d\lambda \right| = \int_A f_+ d\lambda + \int_A f_- d\lambda = \int_A |f| d\lambda.$$

9) Маємо  $N$  – множина, що  $\lambda(N) = 0$  та  $f(x) = g(x)$  для  $x \in A \setminus N$ . Тоді

$$\int_A f_+ d\lambda = \int_{A \setminus N} f_+ d\lambda + \int_N f_+ d\lambda = \int_{A \setminus N} f_+ d\lambda = \int_{A \setminus N} g_+ d\lambda = \int_{A \setminus N} g_+ d\lambda + \int_N g_+ d\lambda = \int_A g_+ d\lambda.$$

$$\text{Аналогічним чином } \int_A f_- d\lambda = \int_A g_- d\lambda.$$

10) Припустимо, що міра  $\lambda\{x \in A : |f(x)| = +\infty\} = \varepsilon > 0$ . Це ми взяли заперечення від умови  $|f| < +\infty \pmod{\lambda}$  на  $A$ . Тоді звідси при фіксованому  $n \geq 1$  маємо

$$\int_A |f| d\lambda \geq \int_{A \cap \{|f| \geq n\}} |f| d\lambda > \int_{A \cap \{|f| \geq n\}} n d\lambda = n\lambda(A \cap \{|f| \geq n\}) \geq n\varepsilon.$$

Якщо  $n \rightarrow \infty$ , то звідси отримаємо  $|f| \notin L(A, \lambda) \implies f \notin L(A, \lambda)$ . Суперечність!

11) Ми хочемо довести, що  $\lambda\{x \in A : f \neq 0\} = 0$ . Для цього

$$0 = \int_A f d\lambda \geq \int_{A \cap \{f \geq \frac{1}{n}\}} f d\lambda \geq \int_{A \cap \{f \geq \frac{1}{n}\}} \frac{1}{n} d\lambda = \frac{1}{n} \lambda\left(A \cap \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right).$$

$$\text{Тобто } \lambda\left(A \cap \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0.$$

Але зауважимо, що  $\{x \in A : f \neq 0\} = A \cap \{x : f \neq 0\} = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : f \geq \frac{1}{n}\right\}$ . Оскільки множина зростає, то за неперервністю міри знизу, доведемо  $\lambda\{x \in A : f \neq 0\} = 0$ .

12) Використаємо попередню властивість 11). Маємо наступне:

$$\int_X f_+ d\lambda = \int_X f \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}} d\lambda = \int_{\{f \geq 0\}} f d\lambda = 0 \implies f_+ = 0 \pmod{\lambda}.$$

$$\int_X f_- d\lambda = \int_X (-f) \mathbb{1}_{\{f < 0\}} d\lambda = \int_{\{f < 0\}} (-f) d\lambda = - \int_{\{f < 0\}} f d\lambda = 0 \implies f_- = 0 \pmod{\lambda}.$$

Разом неважко розписати, що  $f = f_+ - f_- = 0 \pmod{\lambda}$ .

Всі властивості доведені. ■

**Theorem 4.3.3** Задані функції  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  –  $\mathcal{F}$ -вимірні функції, а також  $A \in \mathcal{F}$ . Припустимо, що  $f, g \in L(A, \lambda)$ , то звідси  $f + g \in L(A, \lambda)$ , причому

$$\int_A (f + g) d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda.$$

**Remark 4.3.4** У доведенні буде зауваження, що для  $f, g$  – невід’ємних, рівність завжди виконана.

**Proof.**

Розглянемо кілька випадків:

I.  $p, q$  – обидва прості невід’ємні та  $\mathcal{F}$ -вимірні функції.

Тобто  $p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$  та  $q(x) = \sum_{i=1}^j b_i \mathbb{1}_{B_i}(x)$ . Тоді вже показувалося (TODO: десь вставити),

що  $p + q$  – проста, але також  $p(x) + q(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j (a_k + b_i) \mathbb{1}_{A_k \cap B_i}(x)$ . Звідси випливає наступне:

$$\begin{aligned} \int_A p + q d\lambda &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j (a_k + b_i) \lambda(A_k \cap B_i \cap A) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A) + \sum_{i=1}^j \sum_{k=1}^n b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap A) + \sum_{i=1}^j b_i \lambda(B_i \cap A) = \int_A p d\lambda + \int_A q d\lambda. \end{aligned}$$

II.  $f, g$  – обидва невід’ємні та  $\mathcal{F}$ -вимірні функції.

Тоді існують послідовності простих невід’ємних та  $\mathcal{F}$ -вимірних функцій  $\{p_n\}, \{q_n\}$ , для яких  $p_n \rightarrow f, q_n \rightarrow g$ . Тоді зрозуміло, що  $p_n + q_n \rightarrow f + g$  (така послідовність теж монотонно зростає).

$$\int_A f + g d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n + q_n d\lambda \stackrel{\text{крок I}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A q_n d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda.$$

III.  $f, g$  – довільні  $\mathcal{F}$ -вимірні функції.

Нехай для початку  $f, g \in L(A, \lambda)$ . Тож звідси отримаємо таку оціночку:

$$\int_A |f + g| d\lambda \leq \int_A |f| + |g| d\lambda \stackrel{\text{крок II}}{=} \int_A |f| d\lambda + \int_A |g| d\lambda < +\infty, \text{ за нашим нехай.}$$

Отже,  $|f + g| \in L(A, \lambda) \iff f + g \in L(A, \lambda)$ .

Залишилося довести рівність. Спочатку розглянемо випадок  $f \geq 0, g < 0$ . Розіб’ємо множину  $A$  на об’єднання таких множин:  $A = A_+ \sqcup A_-$ .

$$A_+ = \{x \in A \mid f(x) + g(x) \geq 0\} \quad A_- = \{x \in A \mid f(x) + g(x) < 0\}.$$

На множині  $A_+$  уже відомо, що  $\int_{A_+} f + g d\lambda = \int_{A_+} f d\lambda + \int_{A_+} g d\lambda$  (крок II).

На множині  $A_-$  зауважимо, що  $-g = -(f + g) + f$ , причому  $-(f + g), f$  – обидва невід’ємні. Тоді за кроком II,  $\int_{A_-} -g d\lambda = \int_{A_-} -(f + g) + f d\lambda = \int_{A_-} -(f + g) d\lambda + \int_{A_-} f d\lambda$ . За властивостями вище,

$$\text{отримаємо рівність } \int_{A_-} f + g d\lambda = \int_{A_-} f d\lambda + \int_{A_-} g d\lambda.$$

Два рівності ми додамо, а далі, користуючись адитивністю інтеграла, отримаємо:

$$\int_A f + g d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda \text{ для випадку } f \geq 0, g < 0.$$

Тепер розглянемо повністю загальний випадок функцій  $f, g$ . Розіб’ємо множину  $A$  на об’єднання таких множин:  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4$ .

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \geq 0, g(x) \geq 0\} \quad A_3 = \{x \in A \mid f(x) < 0, g(x) \geq 0\}.$$

$$A_2 = \{x \in A \mid f(x) \geq 0, g(x) < 0\} \quad A_4 = \{x \in A \mid f(x) < 0, g(x) < 0\}.$$

На множині  $A_1, A_2, A_3$  лінійність уже виконується. Для  $A_4$  треба зауважити, що  $-f, -g$  – невід’ємні, а там аналогічно процедурою можна отримати лінійність. Залишилось чотири рівності подавати та скористатися адитивністю інтеграла – отримаємо рівність:  $\int_A f + g d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda$ . ■

## 4.4 Граничні теореми

### Theorem 4.4.1 Інтегрування невід’ємної монотонної послідовності

Задано  $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – всі невід’ємні  $\mathcal{F}$ -вимірні, причому дана послідовність монотонно зростає. Тоді

$$\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

**Proof.**

Позначимо  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  – вона визначена на  $\bar{\mathbb{R}}$  в силу монотонного зростання  $\{f_n\}$ . Всі  $f_n$  невід’ємні за умовою, тож існують послідовності простих невід’ємних та  $\mathcal{F}$ -вимірних функцій  $\{p_{nq}\}$ , для яких  $p_{nq} \rightarrow f_n, q \rightarrow \infty$ .

Розглянемо послідовність  $\{\tilde{p}_j\}$ , що задається як  $\tilde{p}_j(x) = \max_{\substack{1 \leq n \leq j \\ 1 \leq q \leq j}} p_{nq}(x)$ . Всі ці функції: прості, бо

кожні необхідні нам  $p_{nq}$  приймають скінченне значення; невід'ємні – тут зрозуміло;  $\mathcal{F}$ -вимірні як максимум  $\mathcal{F}$ -вимірних. Ми хочемо довести, що  $\tilde{p}_j \rightarrow f$ ,  $j \rightarrow \infty$ .

По-перше,  $\tilde{p}_j \geq p_{nj}$ , як максимум. Спрямуємо спочатку  $j \rightarrow \infty$ , потім  $n \rightarrow \infty$  – буде  $\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{p}_j \geq f$ .

По-друге, для кожного  $n \leq j$  та кожного  $q \leq j$  маємо  $p_{nq} \leq f_n \leq f_j$ . Оскільки це для кожних  $n, q$  виконано, то тим паче  $\tilde{p}_j \leq f_j$ . При  $j \rightarrow \infty$  отримаємо  $\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{p}_j \leq f$ .

Отже, дійсно  $\tilde{p}_j \rightarrow f$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Більше того, справедлива така оцінка:

$$\tilde{p}_j \leq f_j \leq f \implies \int_A \tilde{p}_j d\lambda \leq \int_A f_j d\lambda \leq \int_A f d\lambda.$$

При  $j \rightarrow \infty$  буде  $\int_A \tilde{p}_j d\lambda \rightarrow \int_A f d\lambda$ . За теоремою про двох поліцаїв,  $\int_A f d\lambda = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\lambda$ . ■

#### Corollary 4.4.2 Інтегрування невід'ємного функціонального ряду

Задано  $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – всі невід'ємні  $\mathcal{F}$ -вимірні. Тоді  $\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\lambda$ .

Вказівка: скористатися теоремою вище, розглянувши послідовність  $g_k = \sum_{n=1}^k f_n$ .

#### Theorem 4.4.3 Теорема Бепо Леві (інтегрування довільної монотонної послідовності)

Задано  $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , причому  $f_n \in L(A, \lambda)$ , дана послідовність монотонно зростає. При цьому

$$\sup_{n \geq 1} \int_A f_n d\lambda < +\infty. \text{ Тоді } \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

##### Proof.

Позначимо  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  – вона визначена на  $\bar{\mathbb{R}}$  в силу монотонного зростання  $\{f_n\}$ .

Розглянемо функції  $g_n = f_1 - f_n$ . Зауважимо, що всі невід'ємні, а також це монотонна послідовність. Причому  $g = f_1 - f$ , де в нас  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ . Зокрема оскільки  $f_1, f_n \in L(A, \lambda)$ , то сюди включаються

умови, що  $f_1, f_n \in \mathcal{F}$ -вимірними. Тоді за попередньою теоремою,  $\int_A g d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\lambda$ .

$$\int_A f_1 - f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_1 - f_n d\lambda = \int_A f_1 d\lambda - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

Праворуч ми розписали, просто тому що  $f_n \in L(A, \lambda)$ . А ось ліворуч ми це так не можемо. Нам треба довести, що  $f_1 - f \in L(A, \lambda)$ ,  $f \in L(A, \lambda)$ . І тоді там вже можна розписати.

Маємо  $\int_A g_n d\lambda$  – послідовність таких інтегралів – зростає. Але оскільки  $\sup_{n \geq 1} \int_A f_n d\lambda < +\infty$ , то

звідси  $\sup_{n \geq 1} \int_A g_n d\lambda \leq \sup_{n \geq 1} \int_A f_n d\lambda - \int_A f_1 d\lambda < +\infty$ . Звідси  $\int_A g d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\lambda < +\infty$ . А це в

точності  $g = f - f_1 \in L(A, \lambda)$ . Після цього  $f \in L(A, \lambda)$ .

$$\int_A f_1 - \int_A f d\lambda = \int_A f_1 d\lambda - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda \implies \int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda. \quad \blacksquare$$

#### Theorem 4.4.4 Теорема Фату

Задано  $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – всі невід'ємні  $\mathcal{F}$ -вимірні. Тоді  $\int_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda$ .

##### Proof.

Маємо функцію  $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_k$ . Позначимо  $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ . Зауважимо, що  $g_n$  – невід'ємні та  $\mathcal{F}$ -вимірні (як інфімум вимірних), причому послідовність зростає. Значить, за теоремою про невід'ємну послідовність,

$$\int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \inf_{k \geq n} f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \inf_{k \geq n} f_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda. \quad \blacksquare$$

#### Theorem 4.4.5 Теорема Лебега

Задано  $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – всі  $\mathcal{F}$ -вимірні, причому  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ . Нехай існує функція  $g \in L(A, \lambda)$ , для

якої  $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$  – мажоруюча функція. Тоді  $f \in L(A, \lambda)$ , причому  $\int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda$ .

**Proof.**

Зауважимо, що оскільки  $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$  та  $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$ , то звідси  $|f| \leq g \pmod{\lambda}$ . Оскільки мажоранта  $g \in L(A, \lambda)$ , то звідси  $f \in L(A, \lambda)$ .

Із той самої нерівності  $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$  та умови  $g \in L(A, \lambda)$  випливає  $f_n \in L(A, \lambda)$ .

Оскільки  $|f| \leq g$ , то звідси  $-g \leq f \leq g$ , тобто  $g + f \geq 0$  та  $g - f \geq 0$  – і це все  $\pmod{\lambda}$ .

Застосуємо теорему Фату для цих двох функцій в двох нерівностях.

$$\int_A g + f \, d\lambda = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} (g + f_n) \, d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g + f_n \, d\lambda = \int_A g \, d\lambda + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\lambda.$$

$$g, f \in L(A, \lambda) \implies g + f \in L(A, \lambda), \text{ тому юзаємо лінійність. Звідси } \int_A f \, d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\lambda.$$

$$\int_A g - f \, d\lambda = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} (g - f_n) \, d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g - f_n \, d\lambda = \int_A g \, d\lambda - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\lambda.$$

$$\text{Знову можна застосувати зліва лінійність – отримаємо } \int_A f \, d\lambda \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\lambda.$$

$$\text{Ці нерівності дають зробити висновок, що } \int_A f \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\lambda. \quad \blacksquare$$

**Corollary 4.4.6 Теорема Лебега (другий варіант)**

Задано  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  – всі  $\mathcal{F}$ -вимірні, причому  $f_n \xrightarrow{\lambda} f \pmod{\lambda}$ . Нехай існує функція  $g \in L(A, \lambda)$ , для якої  $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$  – мажоруюча функція. Тоді  $f \in L(A, \lambda)$ , причому  $\int_A f \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\lambda$ .

Тобто ми замінили умову збіжності майже скрізь на збіжність за мірою.

**Proof.**

За теоремою Ріса, можна підібрати підпослідовність, щоб  $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$ . Якщо  $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$ , то тоді зрозуміло, що  $|f_{n_k}| \leq g \pmod{\lambda}$ , звідси отримаємо аналогічним чином  $f \in L(A, \lambda)$ . Незважаючи на заміни в умовах, все одно  $f_n \in L(A, \lambda)$ .

Нащо це додатково перевіряти. Для того, щоб можна було коректно записати доведення існування границі від супротивного.  $f, f_n \in L(A, \lambda)$ , а значить, вони можуть бути в інтегралі.

!Припустимо, що  $\int_A f_n \, d\lambda \not\rightarrow \int_A f \, d\lambda$  (зауваження вище дозволяє нам таке записати). Тобто звідси

$$\text{існує якийсь } \varepsilon^* > 0, \text{ де для кожного } k \text{ існує } n_k \geq k, \text{ щоб } \left| \int_A f_{n_k} \, d\lambda - \int_A f \, d\lambda \right| \geq \varepsilon^*.$$

Для підпослідовності  $f_{n_k}$  все одно  $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$ , але знову ж за теоремою Ріса,  $f_{n_{k_m}} \rightarrow f \pmod{\lambda}$  для деякої підпідпослідовності. Але за теоремою Лебега (для першого випадку),  $\int_A f_{n_{k_m}} \, d\lambda \rightarrow \int_A f \, d\lambda$  – суперечність!  $\blacksquare$

**Remark 4.4.7** Зараз буде кілька зауважень, демонстрація якого буде на наступного прикладі:

- 1) умова монотонності в **Th. 4.4.1** суттєва;
- 2) нерівність в теоремі Фату може бути строгою;
- 3) умова існування мажоранти в теоремі Лебега суттєва.

**Example 4.4.8** Маємо  $f_n = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$  та міру Лебега  $\lambda_1$ . Ми вже знаємо, що  $f_n \rightarrow 0 \pmod{\lambda_1}$ .

При цьому  $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda_1 = \lambda_1([n, n+1]) = 1$ , а також  $\int_{\mathbb{R}} 0 \, d\lambda_1 = 0$ .

Тобто звідси  $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\lambda_1 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda_1$ .

Всі невід'ємні та вимірні, але зрозуміло, що послідовність не монотонна.

Також  $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\lambda_1 = 0 < 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda_1$ .

Також задовольняє всім умовам Лебега, але лише мажоранта відсутня. Якби мажоранта  $g \in L(A, \lambda)$  існувала, при яких  $\mathbb{1}_{[n, n+1]} \leq g \pmod{\lambda_1}$ , то ми би отримали  $g \geq 1 \pmod{\lambda_1}$ . Але тоді звідси маємо

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda \geq \int_{\mathbb{R}} 1 \, d\lambda_1 = +\infty - \text{суперечить умові.}$$

## 4.5 Порівняння інтеграла Рімана з інтегралом Лебега

**Theorem 4.5.1** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $f \in L([a, b], \lambda_1)$ , де  $\lambda_1$  – міра Лебега, при цьому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\lambda_1.$$

**Proof.**

Оскільки  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , то вона обмежена деякою константою. Дана константа буде мажорантою  $g$ . Нехай  $\tau_n$  – розбиття відрізка  $[a, b]$  так, щоб відрізок поділився на підвідрізки довжин  $\frac{b-a}{2^n}$ . Зауважимо, що  $|\tau_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Розглянемо наступні функціональні послідовності:

$$\bar{f}_n(x) = f(a) \mathbb{1}_{\{a\}}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} M_k \mathbb{1}_{(x_{k-1}, x_k]}(x) \quad \underline{f}_n(x) = f(a) \mathbb{1}_{\{a\}}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} m_k \mathbb{1}_{(x_{k-1}, x_k]}(x).$$

$$\text{У цьому випадку маємо } M_k = \sup_{x \in (x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in (x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Зауважимо, що всі ці функції  $\bar{f}_n, \underline{f}_n$  вимірні за Лебегом в силу вимірності всіх індикаторів, бо  $\{a\}, (x_{k-1}, x_k]$  вимірні за Лебегом. Ще помітимо, що  $\bar{f}_n$  спадає та  $\underline{f}_n$  зростає, але обидва обмежені в силу нерівності  $\underline{f}_n \leq f \leq \bar{f}_n$ . Тоді існують  $\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n$  та  $\underline{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{f}_n$ . Значить, виконана нерівність  $\underline{f} \leq f \leq \bar{f}$ , причому  $\underline{f}, \bar{f}$  також вимірні за Лебегом. Значить, всі  $\bar{f}, \underline{f} \in L([a, b], \lambda_1)$  за теоремою Лебега, бо вони за модулем обмежені мажорантою.

$$\int_{[a, b]} \bar{f} d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} \bar{f}_n d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} M_k \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\int_{[a, b]} \underline{f} d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} \underline{f}_n d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} m_k \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

Отже,  $\int_{[a, b]} \bar{f} - \underline{f} d\lambda = 0 \implies \bar{f} = \underline{f} \pmod{\lambda_1}$ . Отримаємо тоді  $\underline{f} \leq f \leq \bar{f} \pmod{\lambda_1}$ . Оскільки  $\bar{f}$  вимірний за Лебегом, а міра Лебега – повна, то тоді  $f$  – вимірний за Лебегом. Вона також обмежена мажорантою, тож  $f \in L([a, b], \lambda_1)$ . Щодо інтегралу:

$$\int_{[a, b]} f d\lambda = \int_{[a, b]} \underline{f} d\lambda = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Theorem 4.5.2** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, A])$  для всіх  $A > a$ .

1) нехай  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  абсолютно збіжний. Тоді  $f \in L([a, +\infty), \lambda_1)$  та  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_{[a, +\infty)} f d\lambda_1$ ;

2) нехай  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  не абсолютно збіжний. Тоді  $f \notin L([a, +\infty), \lambda_1)$ .

Всюди  $\lambda_1$  – це міра Лебега.

**Proof.**

1) Розглянемо випадок  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  – абсолютно збіжний, тоді звідси  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ .

Оскільки  $f \in \mathcal{R}([a, A])$ , то звідси  $f \in L([a, A], \lambda_1)$ , при цьому  $\int_a^A f(x) dx = \int_{[a, A]} f d\lambda_1$ .

Зауважимо, що  $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[a, a+n]} \rightarrow f$  при  $n \rightarrow \infty$ , причому  $|f_n|$  монотонна послідовність. Отже,

$$\begin{aligned} \int_{[a, +\infty)} |f| d\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, +\infty)} |f| \mathbb{1}_{[a, a+n]} d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, a+n]} |f| d\lambda = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+n} |f(x)| dx = \int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \implies f \in L([a, +\infty), \lambda_1). \end{aligned}$$

Для коректності треба пересвідчитися, що  $f$  вимірний за Лебегом. Маємо  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , а тому звідси

$$f^{-1}(B) = \{x \in [a, +\infty) : f(x) \in B\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in [a, a+n] : f(x) \in B\} \in \mathcal{S}_1. \text{ Останні множини вимірні}$$

за Лебегом, бо  $f \in \mathcal{R}([a, a+n])$ .

$$\int_{[a, +\infty)} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, +\infty)} f \mathbb{1}_{[a, a+n]} d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, a+n]} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+n} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Даний ланцюг рівностей працює в силу теореми Лебега, де в якості мажоранти вступає  $|f|$ .

2) Розглянемо випадок  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  – не абсолютно збіжний, тоді  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx = +\infty$ . За міркуваннями вище, отримаємо  $\int_{[a,+\infty)} |f| d\lambda = +\infty$ , а це означає  $f \notin L([a, +\infty), \lambda_1)$ . ■

**Example 4.5.3** Обчислити  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^n x dx$ .

Стандартними інструментами математичного аналізу це можна зробити, але мега важко. Маємо функцію  $f(x) = e^{-x} \sin^n x$  – зрозуміло, що вона інтегровна. Також неважко переконатися, що  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  збіжна абсолютно. Тоді працює щойно отримана теорема, зокрема

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^n x dx = \int_{[0,+\infty)} e^{-x} \sin^n x d\lambda_1(x).$$

Зауважимо, що  $e^{-x} \sin^n x \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \pmod{\lambda_1}$ , а також вона обмежена мажорантою  $e^{-x} \in L([0, +\infty), \lambda_1)$ . Тоді за теоремою Лебега, отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^n x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,+\infty)} e^{-x} \sin^n x d\lambda_1(x) = \int_{[0,+\infty)} 0 d\lambda_1 = 0.$$

*TODO: додати інтеграл Рімана-Стілтієса.*

## 4.6 Інтеграл з параметром

**Definition 4.6.1** Задано  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою та функцію  $f: X \times T \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ .

**Інтегралом з параметром** назовемо наступну функцію:

$$I(t) = \int_X f(x, t) d\lambda(x)$$

Вона визначена в цих точках  $t \in T$ , де функція  $f$  стає  $\mathcal{F}$ -вимірною.

### Theorem 4.6.2 Про неперервність

Задано  $f: X \times T \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , причому  $T$  – метричний простір. Нехай для кожного  $x \in X$  відомо  $f(x, \cdot) \in C(T)$ , а також для кожного  $t \in T$  відомо, що  $f(\cdot, t) \in \mathcal{F}$ -вимірною. Нарешті, нехай існує мажоранта  $g \in L(X, \lambda)$  (не залежить від  $t$ ), для якої  $|f(x, t)| \leq g(x)$ .

Тоді  $I \in C(T)$ .

**Proof.**

Нехай  $\{t_n\} \subset T$  задається так, щоб  $t_n \rightarrow t_0, n \rightarrow \infty$ . Хочемо довести, що  $I(t_n) \rightarrow I(t_0)$ .

Оскільки  $f(\cdot, t_n)$  всі  $\mathcal{F}$ -вимірні, причому  $f(\cdot, t_n) \rightarrow f(\cdot, t_0)$  за неперервністю, а також  $|f(x, t_n)| \leq g(x)$ , то за теоремою Лебега, ми маємо, що  $I(t)$  визначена для  $t_0 \in T$ , тому що  $f(\cdot, t) \in L(X, \lambda)$ .

$$\text{Більш того, } I(t_0) = \int_X f(x, t_0) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x, t_n) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(t_n). \quad \blacksquare$$

### Theorem 4.6.3 Про диференціювання

Задано  $f: X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ , причому  $T$  – відкрита підмножина  $\mathbb{R}$ . Нехай для кожного  $t \in T$  відомо, що  $f(\cdot, t) \in L(X, \lambda)$ . Також  $\frac{\partial f}{\partial t}$  визначена на  $X \times T$ . Нарешті, нехай існує мажоранта  $g \in L(X, \lambda)$  (яка

не залежить від  $t$ ), для якої  $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$ .

Тоді  $I$  – диференційована на множині  $T$ , причому  $I'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\lambda(x)$ .

**Proof.**

Нехай  $\{t_n\} \subset T$  задається так, щоб  $t_n \rightarrow t_0, n \rightarrow \infty$ . Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(t_n) - I(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n - t_0} \left( \int_X f(x, t_n) d\lambda(x) - \int_X f(x, t_0) d\lambda(x) \right) \stackrel{f(\cdot, t) \in L(X, \lambda)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t - t_0} d\lambda(x) \quad \square$$

За теоремою Лагранжа,  $\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t - t_0} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_n^*) \right| \leq g(x)$  при проміжному  $t_n^* \in G$ . Можна застосувати теорему Лебега

$$\square \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t - t_0} d\lambda(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\lambda(x).$$

Таким чином,  $I$  диференційована в будь-якій точці  $t_0 \in G$  та  $I'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\lambda(x)$ . ■



## 4.7 Заміна змінної

Нехай задані  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  та  $(X', \mathcal{F}', \lambda')$  – два вимірних простори з мірами. Причому друга міра визначається таким чином:

$$\lambda'(A) = \lambda(T^{-1}A),$$

де  $T: X \rightarrow X'$  відображення  $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -вимірне.

**Lemma 4.7.1**  $\lambda'$  дійсно задає міру.

*Впливає з властивостей прообраза.*

**Theorem 4.7.2** Задано функцію  $f: X' \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  –  $\mathcal{F}'$ -вимірну. Тоді  $\int_X f(Tx) d\lambda(x) = \int_{X'} f(x') d\lambda'(x')$ . Якщо існує хоча б один з цих інтегралів, то існує інший та вони рівні.

**Proof.**

Перед цим треба зауважити, що  $f \circ T: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  буде  $\mathcal{F}$ -вимірною як композиція двох вимірних, тому інтеграл брати можна.

Ми розглянемо кілька випадків:

I. Випадок функції  $\mathbb{1}_A$ , де множина  $A \in \mathcal{F}'$ .

Зауважимо, що  $\mathbb{1}_A(Tx) = \begin{cases} 1, & Tx \in A \\ 0, & Tx \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in T^{-1}A \\ 0, & x \notin T^{-1}A \end{cases} = \mathbb{1}_{T^{-1}A}(x)$ . Значить, отримаємо

$$\int_X \mathbb{1}_A(Tx) d\lambda(x) = \int_X \mathbb{1}_{T^{-1}A}(x) d\lambda(x) = \lambda(T^{-1}A) = \lambda'(A) = \int_{X'} \mathbb{1}_A(x') d\lambda'(x').$$

II. Випадок функції  $p$  – проста невід'ємна та  $\mathcal{F}'$ -вимірна.

Тобто маємо  $p(x') = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x')$ .

$$\int_X p(Tx) d\lambda(x) \stackrel{\text{крок I}}{=} \sum_{k=1}^n a_k \lambda(T^{-1}A_k) = \sum_{k=1}^n a_k \lambda'(A_k) = \int_{X'} p(x') d\lambda'(x').$$

III. Випадок функції  $f$  – невід'ємна та  $\mathcal{F}'$ -вимірна.

Тоді є послідовність  $\{p_n\}$  – прості невід'ємні та  $\mathcal{F}'$ -вимірні, зростаюча, для якої  $p_n(x') \rightarrow f(x')$ . Раз збіжність виконується для кожних точок  $x' \in X'$ , то й для  $Tx \in X'$  виконано  $p_n(Tx) \rightarrow f(Tx)$  при всіх  $x \in X$ . У нас  $p_n(Tx)$  все одно буде простою невід'ємною та  $\mathcal{F}'$ -вимірною, а також зростаючою.

Таким чином,

$$\int_X f(Tx) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X p_n(Tx) d\lambda(x) \stackrel{\text{крок II}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X'} p_n(x') d\lambda'(x') = \int_{X'} f(x') d\lambda'(x').$$

IV. Випадок функції  $f$  – довільної  $\mathcal{F}'$ -вимірної.

Маємо  $f(x') = f_+(x') - f_-(x')$ . Тоді звідси  $f(Tx) = f_+(Tx) - f_-(Tx)$ , але тоді

$$\begin{aligned} \int_X f(Tx) d\lambda(x) &= \int_X f_+(Tx) d\lambda(x) - \int_X f_-(Tx) d\lambda(x) \stackrel{\text{крок III}}{=} \int_{X'} f_+(x') d\lambda'(x') - \int_{X'} f_-(x') d\lambda'(x') = \\ &= \int_{X'} f(x') d\lambda'(x'). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

## 5 Заряди

### 5.1 Основні означення. Розклад Гана

**Definition 5.1.1** Задано  $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра.

Зарядом ми називатимемо функцію множин  $\nu: \mathcal{F} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ , де

$$\nu - \sigma\text{-адитивна}$$

#### Proposition 5.1.2 Властивості зарядів

Задано  $\nu$  – заряд на  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{F}$ . Тоді виконуються такі пункти:

- 1)  $\nu(\emptyset) = 0$ ;
- 2)  $\nu$  – адитивна;
- 3) Нехай  $A, B \in \mathcal{F}$  так, щоб  $A \subset B$  та  $\nu(B) < +\infty$ . Тоді  $\nu(A) < +\infty$ .

**Proof.**

Доведемо виконання всіх пунктів:

1) За узгодженістю (див. розділ про міри) існує множина  $A \in \mathcal{F}$ , для якої  $\nu(A) < +\infty$ . Звідси, за  $\sigma$ -адитивністю,  $\nu(A) = \nu(A) + \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset) + \dots$ . Оскільки  $\nu(A) < +\infty$ , то ряд збіжний, а для рівності треба вимагати  $\nu(\emptyset) = 0$ .

2) Нехай  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$  – всі неперетинні. Тоді

$$\nu\left(\bigsqcup_{n=1}^k A_k\right) = \nu(A_1) + \dots + \nu(A_k) + \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset) + \dots = \sum_{n=1}^k \nu(A_k).$$

3) За умовою, звідси  $B = A \sqcup (B \setminus A)$ , але тоді  $\nu(B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) < +\infty$ . Отже, звідси випливає, що  $\nu(A) < +\infty$  (неважко від супротивного показати).

Всі властивості доведені. ■

**Definition 5.1.3** Задано  $\nu$  – заряд на  $\mathcal{F}$ .

Множина  $B \in \mathcal{F}$  називається **додатною** (відносно заряду  $\nu$ ), якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : A \subset B : \nu(A) \geq 0$$

Множина  $B \in \mathcal{F}$  називається **від'ємною** (відносно заряду  $\nu$ ), якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : A \subset B : \nu(A) \leq 0$$

**Remark 5.1.4**  $\emptyset$  є одночасно додатною та від'ємною множиною. Із цього випливає, що набір додатних множин та набір від'ємних множин – непорожні.

#### Theorem 5.1.5 Розклад Гана

Задано  $\nu$  – заряд на  $\mathcal{F}$ . Тоді існують множини  $X_+, X_- \in \mathcal{F}$  – відповідно додатна та від'ємна множини, для яких  $X_+ \sqcup X_- = X$ .

**Proof.**

I. Існування множини  $X_-$

Розглянемо значення  $\alpha = \inf_{A - \text{від'ємна}} \nu(A)$ . Із цього можна відокремити послідовність  $\{A_n, n \geq 1\}$ ,

для яких  $\nu(A_n) \rightarrow \alpha$ . Покладемо  $X_- = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  та доведемо, що вона – також від'ємна.

Перейдемо до неперетинних множин, задавши  $B_1 = A_1$ ,  $B_2 = A_2 \setminus A_1$ ,  $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$

Зауважимо, що  $X_- = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$ .

Нехай  $B \subset X_-$ , тобто звідси  $B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap B)$ . Тобто  $\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n \cap B)$ .

У нас  $B_n \subset A_n$ , ну а тому  $B_n \cap B \subset B_n \subset A_n$ . Оскільки  $A_n$  від'ємна, то тоді  $\nu(B \cap B_n) \leq 0$ . Власне, тоді загалом  $\nu(B) \leq 0$ .

*Цікаве зауваження: ми щойно довели, що зліченне об'єднання від'ємних множин – від'ємна.*

Ми окремао ще доведемо, що  $\nu(X_-) = \alpha$  – знадобиться для другої частини.

Оскільки  $X_-$  уже від’ємна множина, то  $\nu(X_-) \geq \alpha$ , за інфімумом.

$$\nu(X_-) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \nu(B_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_1 \cup \dots \cup A_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k) = \alpha.$$

Таким чином, ми довели  $\nu(X_-) = \alpha$ .

Окреме пояснення останньої нерівності, тобто  $\nu(A_1 \cup \dots \cup A_k) \leq \nu(A_k)$ .

Зауважимо, що  $A_1 \cup \dots \cup A_k$  – від’ємна, як скінченне об’єднання від’ємних, а тому для множини  $A_1 \cup \dots \cup A_k \setminus A_k \subset A_1 \cup \dots \cup A_k$  маємо  $\nu(A_1 \cup \dots \cup A_k \setminus A_k) \leq 0$ . Додавши  $\nu(A_k)$  з двох сторін, отримаємо  $\nu(A_1 \cup \dots \cup A_k) \leq \nu(A_k)$ .

## II. Існування множини $X_+$

Існує спокуса покласти множину  $X_+ = X \setminus X_-$ . Залишилося довести, що вона буде додатною.

Припустимо, що це не так, тобто існує множина  $C \in \mathcal{F}$  така, щоб  $C \subset X_+$ , але  $\nu(C) < 0$ .

Якби  $C$  була від’ємною, то розглянемо множину  $X'_- = C \sqcup X_-$  та зауважимо, що  $\nu(X'_-) = \nu(C) + \alpha < \alpha$ . Водночас множина  $\nu(X'_-) \geq \alpha$  в силу того, що  $C, X_-$  обидва від’ємні. Тобто неможливо.

Тому  $C$  не може бути від’ємною, а тому існує множина  $C_1 \in \mathcal{F}, C_1 \subset C$ , для якої  $\nu(C_1) > 0$ . Причому звідси ми можемо підібрати  $k_1 \in \mathbb{N}$  – найменше можливе, щоб  $\nu(C_1) > \frac{1}{k_1}$ .

Розглянемо тепер множину  $C \setminus C_1$ . Зауважимо, що  $\nu(C \setminus C_1) = \nu(C) - \nu(C_1) < 0$ . Якби вона була від’ємною, то аналогічними міркуваннями, що з  $C$ , ми б прийшли до суперечності.

Значить  $C \setminus C_1$  не може бути від’ємною, а тому існує множина  $C_2 \in \mathcal{F}, C_2 \subset C \setminus C_1$ , для якої  $\nu(C_2) > 0$ . Знову візьмемо найменше можливе  $k_2 \in \mathbb{N}$ , щоб  $\nu(C_2) > \frac{1}{k_2}$ .

Розглянемо тепер множину  $C \setminus (C_1 \cup C_2)$ . Зауважимо, що  $\nu(C \setminus (C_1 \cup C_2)) = \nu(C) - \nu(C_1) - \nu(C_2) < 0$ . Аналогічно дана множина не є від’ємною, а тому існує  $C_3 \in \mathcal{F}, C_3 \subset C \setminus (C_1 \cup C_2)$ , для якої  $\nu(C_3) > 0$ .

Знову візьмемо найменше можливе  $k_3 \in \mathbb{N}$ , щоб  $\nu(C_3) > \frac{1}{k_3}$ .

⋮

Цей процес будемо продовжувати нескінченне число разів. Маємо  $D = C \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ . Зауважимо,

що  $\nu(D) = \nu(C) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n) < 0$ . Множина  $D$  не може бути від’ємною, тому що, знову ж таки,

припустивши  $D$  – від’ємна та розглянувши множину  $X'_- = D \sqcup X_-$ , ми отримаємо  $\nu(X'_-) < \alpha$  з одного боку та  $\nu(X'_-) \geq \alpha$  з іншого. Це неможливо.

Значить,  $D$  не може бути від’ємною, тож існує  $D_1 \in \mathcal{F}, D_1 \subset D$ , для якого  $\nu(D_1) > 0$ . Обереться таке найменше  $l \in \mathbb{N}$ , для якого  $\nu(D_1) > \frac{1}{l}$ .

Але зауважимо щодо  $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset C$ . Оскільки  $\nu(C) < 0 < +\infty$ , то звідси  $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n) < +\infty$ , тобто ряд збіжний. Звідси  $\nu(C_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Оскільки  $\nu(C_n) > \frac{1}{k_n}$ , то тоді  $k_n \rightarrow \infty$ .

Так ось,  $\nu(D_1) > \frac{1}{l} > \frac{1}{k_N}$ , тому що при  $k_n \rightarrow \infty$  отримаємо, що знайдеться  $N$ , для якого  $k_n > l$ .

Отримана нерівність неможлива, тому що на кроці  $N$  ми взяли множину  $C_N \subset C \setminus \bigcup_{m=1}^{N-1} C_m$ , для

якої  $\nu(C_N) > \frac{1}{k_N}$ , при цьому  $k_N$  – найменше можливе. Але замість  $C_N$  нам треба було брати

$D_1 \subset D = C \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m \subset C \setminus \bigcup_{m=1}^{N-1} C_m$  – і було би  $\nu(D_1) > \frac{1}{l}$ . Це теж неможливо.

Тобто ми з’ясували, що  $D$  є ані від’ємною, ані невід’ємною. Суперечність! ■

**Remark 5.1.6** Зауважимо, що розклад Гана, взагалі-то кажучи, не єдиний.

**Example 5.1.7** Зокрема маємо  $\nu(A) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_A(x_k)$  на  $2^X$ . Тут  $x_k \in X$  та  $a_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Оскільки це заряд, то звідси є розклад Гана, але тут може бути кілька розкладів:

$X = X_-^1 \sqcup X_+^1$ , де  $X_+^1 = \{x_k \in X \mid a_k > 0\}$  та  $X_-^1 = X \setminus X_+^1$ .  
 $X = X_-^2 \sqcup X_+^2$ , де  $X_+^2 = X \setminus X_-^2$  та  $X_-^2 = \{x_k \in X \mid a_k < 0\}$ .

### Theorem 5.1.8 Розклад Жордана

Задано  $\nu$  – заряд на  $\mathcal{F}$ . Ми вже знаємо, що  $X = X_+ \sqcup X_-$ .

Тоді  $\nu = \nu_+ - \nu_-$ , причому  $\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+)$  та  $\nu_-(A) = -\nu(A \cap X_-)$ . У цьому випадку  $\nu_+$  – міра та  $\nu_-$  – скінченна міра, обидва визначені на  $\mathcal{F}$ .

Якщо  $\nu$  –  $(\sigma)$ -скінченна міра, то  $\nu_+$  також буде  $(\sigma)$ -скінченною.

#### Proof.

$\nu_+$  – міра, тому що для будь-якої множини  $A \in \mathcal{F}$  маємо  $A \cap X_+ \subset X_+$ , а за означенням додатної множини,  $\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+) \geq 0$ ; дана міра зрозуміло, що  $\sigma$ -адитивна, бо заряд  $\nu$  є таким.

$\nu_-$  – міра, доводиться аналогічно. Але вона скінченна, оскільки  $-\infty < \nu(A \cap X_-) \leq 0$  за тим, які значення приймає функція множин.

Тепер доведемо розклад заряду. Маємо наступне:

$$\nu(A) = \nu(A \cap X) = \nu((A \cap X_+) \sqcup (A \cap X_-)) = \nu(A \cap X_+) + \nu(A \cap X_-) = \nu_+(A) - \nu_-(A).$$

Із цієї рівності з того, що  $\nu$  буде  $(\sigma)$ -скінченною, легко випливає, що  $\nu_+$  також  $(\sigma)$ -скінченна. ■

### Theorem 5.1.9 Розклад Жордана буде єдиним, незважаючи на неєдиний розклад Гана.

#### Proof.

Маємо два розклади Гана  $X = X_+^1 \sqcup X_-^1$  та  $X = X_+^2 \sqcup X_-^2$ . Маємо два розклади Жордана:

$$\nu(A) = \nu_+^1(A) - \nu_-^1(A) \quad \nu(A) = \nu_+^2(A) - \nu_-^2(A).$$

Зараз доведемо, що  $\nu_+^1(A) = \nu_+^2(A)$ . Дійсно,

$$\begin{aligned} \nu_+^1(A) &= \nu(A \cap X_+^1) = \nu(A \cap X_+^1 \cap X) = \nu((A \cap X_+^1 \cap X_+^2) \sqcup (A \cap X_+^1 \cap X_-^2)) = \\ &= \nu(A \cap X_+^1 \cap X_+^2) + \nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2) = \nu(A \cap X_+^1 \cap X_+^2). \end{aligned}$$

У цьому випадку  $\nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2) = 0$ . Із одного боку,  $A \cap X_+^1 \cap X_-^2 \subset X_+^1$ , а тому за означенням додатної множини,  $\nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2) \geq 0$ . Із іншого боку,  $A \cap X_+^1 \cap X_-^2 \subset X_-^2$ , а тому за означенням від'ємної множини,  $\nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2) \leq 0$ .

$\nu_-^2(A) = \nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2)$  – доводиться аналогічним чином.

Звідси випливає  $\nu_+^1(A) = \nu_+^2(A)$ . Як наслідок,  $\nu_-^1(A) = \nu_-^2(A)$  в силу розкладу Жордана. ■

### Definition 5.1.10 Задано $\nu$ – заряд на $\mathcal{F}$ .

**Повною варіацією заряду  $\nu$**  називається міра:

$$|\nu| = \nu_+ + \nu_-$$

Те, що вона міра, випливає з розкладу Жордана. Також у силу єдиності, означення коректне.

**Example 5.1.11** Маємо функцію  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої визначено  $\int_X f d\lambda$ , причому  $\int_X f_- d\lambda < +\infty$ .

Ми вже знаємо, що функція множин  $\nu(A) = \int_A f d\lambda$  буде  $\sigma$ -адитивною. Також

$$\nu(A) \geq -\int_A f_- d\lambda \geq -\int_X f_- d\lambda > -\infty.$$

Отже, наша функція множин  $\nu$  – заряд. Маємо розбиття  $X = \{x : f(x) \geq 0\} \sqcup \{x : f(x) < 0\}$  – розклад Гана. Розглянемо тепер розклад Жордана:

$$\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+) = \int_{A \cap X_+} f d\lambda = \int_A f \mathbb{1}_{f \geq 0} d\lambda = \int_A f_+ d\lambda.$$

$$\nu_-(A) = -\nu(A \cap X_-) = -\int_{A \cap X_-} f d\lambda = \int_A (-f) \mathbb{1}_{f < 0} d\lambda = \int_A f_- d\lambda.$$

$\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A)$  – тут в точності записано третє означення інтеграла Лебега.

$$|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = \int_A f_+ d\lambda + \int_A f_- d\lambda = \int_A |f| d\lambda.$$

## 5.2 Теорема Радона-Нікодіма

Маємо всюди  $(X, \mathcal{F})$  – вимірний простір. Всі міри та заряди будуть задані тут.

**Definition 5.2.1** Заряд  $\nu$  називається **абсолютно неперервним відносно міри  $\lambda$** , якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : \lambda(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

Позначення:  $\nu \ll \lambda$ .

**Example 5.2.2** Для міри  $\lambda$  та заряду  $\nu(A) = \int_A f d\lambda$  виконується  $\nu \ll \lambda$ .

**Proposition 5.2.3 Еквівалентні означення абсолютної неперервності**

Задано  $\nu$  – заряд із розкладом  $\nu = \nu_+ - \nu_-$ , а також  $\lambda$  – міра. Тоді

$$\nu \ll \lambda \iff \begin{cases} \nu_+ \ll \lambda \\ \nu_- \ll \lambda \end{cases} \iff |\nu| \ll \lambda.$$

**Proof.**

Дано:  $\nu \ll \lambda$ . Хочемо довести, що  $\begin{cases} \nu_+ \ll \lambda \\ \nu_- \ll \lambda \end{cases}$ .

Нехай  $A \in \mathcal{F}$  так, що  $\lambda(A) = 0$ . Розглянемо  $\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+)$ . Оскільки  $A \cap X_+ \subset A$ , то звідси  $\lambda(A \cap X_+) = 0$ , а за умовою дано,  $\nu(A \cap X_+) = 0 = \nu_+(A)$ . А це доводить те, що  $\nu_+ \ll \lambda$ . Аналогічно доводиться  $\nu_- \ll \lambda$ .

Дано:  $\begin{cases} \nu_+ \ll \lambda \\ \nu_- \ll \lambda \end{cases}$ . Хочемо довести, що  $|\nu| \ll \lambda$ .

Нехай  $A \in \mathcal{F}$  так, що  $\lambda(A) = 0$ . За дано,  $\nu_+(A) = \nu_-(A) = 0$ , тож  $|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = 0$ . Отже,  $|\nu| \ll \lambda$ .

Дано:  $|\nu| \ll \lambda$ . Хочемо довести, що  $\nu \ll \lambda$ .

Нехай  $A \in \mathcal{F}$  так, що  $\lambda(A) = 0$ . Маємо тоді  $|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = 0$ , але оскільки  $\nu_+, \nu_-$  обидва міри, то звідси єдина можливість для рівності – це  $\nu_+(A) = \nu_-(A) = 0$ . Значить,  $\nu(A) = 0$ , а тому  $\nu \ll \lambda$ . ■

**Theorem 5.2.4 Теорема Радона-Нікодимі**

Задано  $\nu, \lambda$  – заряд та міра, обидва  $\sigma$ -скінченні, причому  $\nu \ll \lambda$ . Тоді існує  $\mathcal{F}$ -вимірна функція  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $\nu(A) = \int_A f d\lambda$ . Дана функція буде єдина з точністю до еквівалентності (mod  $\lambda$ ).

**Proof.**

I. *Випадок, коли  $\nu, \lambda$  – обидва міри, які є скінченними.*

I. i. *Існування.*

Розглянемо множину  $G = \left\{ g: X \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ – невід’ємні, } \mathcal{F}\text{-вимірні} : \forall A \in \mathcal{F} : \int_A g d\lambda \leq \nu(A) \right\}$ . Дана

множина непорожня, бо  $0 \in G$ . Також доведемо, що  $g_1, g_2 \in G \xrightarrow{(*)} \max\{g_1, g_2\} \in G$ .

$$\int_A \max\{g_1, g_2\} d\lambda = \int_{A \cap \{g_1 > g_2\}} g_1 d\lambda + \int_{A \cap \{g_1 \leq g_2\}} g_2 d\lambda \leq \nu(A \cap \{g_1 > g_2\}) + \nu(A \cap \{g_1 \leq g_2\}) = \nu(A).$$

Оберемо  $\alpha = \sup_{g \in G} \int_X g d\lambda$ . Тобто ми просто беремо найбільше з всіх можливих інтегралів (очевидно, що треба брати інтеграл по  $X$ ). Зауважимо, що  $\alpha < +\infty$  в силу скінченності  $\nu$ . Відокремимо послідовність  $\{g_n, n \geq 1\}$  так, щоб  $\int_X g_n d\lambda \rightarrow \alpha$ .

Розглянемо послідовність  $\{f_n, n \geq 1\}$ , що визначена як  $f_n = \max\{g_1, \dots, g_n\}$ . Всі вони  $\mathcal{F}$ -вимірні та невід’ємні – це зрозуміло. Також дана послідовність зростає монотонно, а тому існує  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  –

це наша шукана функція. Причому  $\int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda$ .

Всі  $f_n \in G$  за (\*), тобто  $\int_A f_n d\lambda \leq \nu(A)$ . При  $n \rightarrow \infty$  отримаємо  $\int_A f d\lambda \leq \nu(A)$ , тобто  $f \in G$ .

Автоматично це означає, що  $\int_X f d\lambda \leq \alpha$ , як супремум. Із іншого боку,  $f \geq f_n \geq g_n \implies \int_X f d\lambda \geq$

$$\int_X f_n d\lambda \geq \int_X g_n d\lambda. \text{ Узявши } n \rightarrow \infty, \text{ отримаємо } \int_X f d\lambda \geq \alpha.$$

Таким чином, отримали  $\nu(A) - \int_A f d\lambda \geq 0$ , а також  $\int_X f d\lambda = \alpha$  (це буде пізніше заюзано).

Позначимо  $\varphi(A) = \nu(A) - \int_A f d\lambda$  – це буде мірою, через невід’ємність (вище) та через зрозумілим чином  $\sigma$ -адитивність. Нам треба переконатися, що  $\varphi(A) = 0$  для всіх  $A \in \mathcal{F}$ .

Припустимо, що існує множина  $A^*$ , для якої  $\varphi(A^*) > 0$ . Із цього випливатиме  $\lambda(A^*) > 0$  в силу умови  $\nu \ll \lambda$ . Тоді існує таке  $\beta > 0$ , щоб  $\varphi(A^*) - \beta\lambda(A^*) > 0$ . (від супротивного можна довести). Розглянемо тепер  $\varphi - \beta\lambda$  — це буде заряд на  $\sigma$ -алгебрі  $\mathcal{F} \cap A^*$ . Тоді ми можемо розкласти за Га-ном  $A^* = A_+^* \sqcup A_-^*$ . Оскільки  $(\varphi - \beta\lambda)(A^*) > 0$ , то звідси  $(\varphi - \beta\lambda)(A_+^*) > 0$ . А звідси отримаємо  $\lambda(A_+^*) > 0$ .

У силу додатності множини  $A_+^*$ , маємо для кожного  $C \subset A_+^*$  нерівність  $(\varphi - \beta\lambda)(C) \geq 0$ , а звідси випливає нерівність  $\beta\lambda(C) + \int_C f d\lambda \leq \nu(C)$ .

Нарешті, розглянемо функцію  $h = f + \beta\mathbb{1}_{A_+^*}$ . Спочатку покажемо, що  $h \in G$ .

$$\begin{aligned} \int_A h d\lambda &= \int_{(A \cap A_+^*) \sqcup (A \setminus A_+^*)} h d\lambda = \int_{A \cap A_+^*} f + \beta\mathbb{1}_{A_+^*} d\lambda + \int_{A \setminus A_+^*} f d\lambda \leq \\ &\leq \int_{A \cap A_+^*} f d\lambda + \beta\lambda(A \cap A_+^*) + \nu(A \setminus A_+^*) \leq \nu(A \cap A_+^*) + \nu(A \setminus A_+^*) = \nu(A). \end{aligned}$$

Отже,  $\int_X h d\lambda \leq \alpha$  за супремумом. Із іншого боку, зауважимо наступне:

$$\int_X h d\lambda = \int_X f + \beta\mathbb{1}_{A_+^*} d\lambda = \int_X f d\lambda + \beta\lambda(A_+^*) = \alpha + \beta\lambda(A_+^*) > \alpha. \text{ Суперечність!}$$

Припущення про те, що  $\exists A^* \in \mathcal{F} : \varphi(A^*) = 0$  невірне. Отже,  $\nu(A) = \int_A f d\lambda$  для всіх  $A \in \mathcal{F}$ .

До речі,  $\int_X f d\lambda \leq \nu(X) < +\infty$ , тобто звідси  $|f| < +\infty \pmod{\lambda}$ . Ми замінимо еквівалентним чином на функцію  $f$ , де  $|f| < +\infty$  повністю всюди. Тоді вона повертає лише  $\mathbb{R}$ .

I. i. Єдиність.

Припустимо, що існують дві функції  $f, \tilde{f}$ , для яких  $\nu(A) = \int_A f d\lambda$  та  $\nu(A) = \int_A \tilde{f} d\lambda$ . Звідси випливає, що  $\int_X f - \tilde{f} d\lambda = 0$ , а тому  $f - \tilde{f} = 0 \pmod{\lambda} \implies f = \tilde{f} \pmod{\lambda}$ . Отже, функція має бути єдиною з точністю до еквівалентності.

II. Випадок, коли  $\nu, \lambda$  — обидва міри, які є  $\sigma$ -скінченними.

$$\text{Маємо } X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \nu(X_i) < +\infty \quad X = \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j, \lambda(Y_j) < +\infty.$$

На множинах  $X_i \cap Y_j$  обидва міри  $\nu, \lambda$  будуть скінченними. Набір всіх цих множин  $X_i \cap Y_j$  — зліченна, тож запишемо його як упорядковану послідовність  $\{Z_n, n \geq 1\}$ .

Перейдемо до неперетинних множин,  $V_1 = Z_1, V_2 = Z_2 \setminus Z_1, V_3 = Z_3 \setminus (Z_1 \cup Z_2), \dots$ . Тоді звідси ясно, що  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ . На  $V_n \cap \mathcal{F}$  зауважимо, що  $\lambda, \nu$  скінченні, причому все одно  $\nu \ll \lambda$ . Значить,

можна застосувати крок I., тобто для кожного  $n \geq 1$  знайдеться функція  $f_n: V_n \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $\nu(B) = \int_B f_n d\lambda$  для всіх  $B \subset V_n, B \in \mathcal{F}$ .

Візьмемо функцію  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , яка на кожній  $V_n$  дорівнює відповідній  $f_n$ . Значить,

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap V_n} f_n d\lambda \stackrel{f_n=f \text{ на } V_n}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap V_n} f d\lambda = \int_A f d\lambda \text{ для кожної } A \in \mathcal{F}.$$

Всі функції  $f_n$  єдині з точністю до еквівалентності, тоді звідси  $f$  також єдина з точністю до еквівалентності.

III. Випадок, коли  $\nu$  — заряд  $\sigma$ -скінченний та  $\lambda$  — міра  $\sigma$ -скінченна.

Маємо  $X = X_+ \sqcup X_-$  — розклад Гана заряду  $\nu$ , беремо розклад Жордана  $\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A)$ .

Оскільки  $\nu \ll \lambda$ , то звідси  $\nu_+, \nu_- \ll \lambda$ . Обидві міри  $\nu_+, \nu_-$  є  $\sigma$ -скінченними, а тому можна застосувати крок II, тобто існують функції  $f_+: X_+ \rightarrow \mathbb{R}$  та  $f_-: X_- \rightarrow \mathbb{R}$ , для яких

$$\nu_+(B) = \int_B f_+ d\lambda \text{ на } X_+ \cap \mathcal{F}, \quad \nu_-(C) = \int_C f_- d\lambda \text{ на } X_- \cap \mathcal{F}.$$

Покладемо  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  так, щоб  $f = f_+$  на  $X_+$  та  $f = -f_-$  на  $X_-$ . Значить, для всіх  $A \in \mathcal{F}$

$$\nu(A) = \nu(A \cap X_+) + \nu(A \cap X_-) = \int_{A \cap X_+} f_+ d\lambda - \int_{A \cap X_-} f_- d\lambda = \int_{A \cap X_+} f d\lambda + \int_{A \cap X_-} f d\lambda = \int_A f d\lambda.$$

Зрозуміло, що  $f$  єдина з точністю до еквівалентності, бо  $f_+, f_-$  у себе єдині. ■

**Remark 5.2.5** Функція  $f$  із теореми Радона-Нікодими називається **щільністю** або **похідною за-ряду  $\nu$  за мірою  $\lambda$** .

Позначення:  $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$ .

*TODO: доповнити якісь там ще теми*

## 6 Добуток просторів

### 6.1 Множини та функції

Задані  $(X_1, \mathcal{F}_1)$ ,  $(X_2, \mathcal{F}_2)$  – два вимірних простори. Позначимо  $X = X_1 \times X_2$ .

**Definition 6.1.1** Вимірним прямокутником на  $X$  назовемо такий клас множин:

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

**Remark 6.1.2** Хоча  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \sigma$ -алгебрами, але  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  утворює лише півкільце за **Th. 1.1.7**.

**Definition 6.1.3** Добутком  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  називають клас множин

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$$

**Theorem 6.1.4**  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

**Proof.**

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Оберемо  $\prod_{i=1}^{m+n} (a_i, b_i] \in \mathcal{P}_{m+n}$ , тоді звідси зауважимо  $\prod_{i=1}^{m+n} (a_i, b_i] = \prod_{i=1}^m (a_i, b_i] \times \prod_{i=m+1}^{m+n} (a_i, b_i]$ .

Отже, ми довели, що  $\mathcal{P}_{m+n} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

Оскільки найправіше утворює  $\sigma$ -алгебру, то звідси  $\sigma(\mathcal{P}_{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Зафіксуємо  $\prod_{i=1}^m (a_i, b_i] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ . Розглянемо клас  $\mathcal{H}_1 = \left\{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \mid \prod_{i=1}^m (a_i, b_i] \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \right\}$ .

Цілком неважко буде довести, що  $\mathcal{H}_1$  утворює  $\sigma$ -алгебру. Також зауважимо, що  $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{P}_n$ . Таким чином, отримаємо  $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

Зафіксуємо  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Розглянемо клас  $\mathcal{H}_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \mid A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})\}$ . Аналогічно неважко довести, що  $\mathcal{H}_2$  утворює  $\sigma$ -алгебру, а також  $\mathcal{H}_2 \supset \mathcal{P}_m$  (це ще впливає з  $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ). Таким чином, отримаємо  $\mathcal{H}_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ .

Отже,  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  маємо  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$ . Це можна переписати ось так:

$$\forall A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}).$$

Це означає  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$ . Але оскільки  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$  утворює  $\sigma$ -алгебру, то звідси  $\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$ . ■

**Definition 6.1.5** Нехай задано множину  $E \subset X$  та  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ .

$x_1$ -перерізом множини  $E$  називається множина

$$E_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E\}$$

$x_2$ -перерізом множини  $E$  називається множина

$$E_{x_2} = \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in E\}$$

**Example 6.1.6** Нехай  $E$  – вимірний прямокутник, тобто  $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ , тобто  $E = E_1 \times E_2$ , при цьому

$$E_1 \in \mathcal{F}_1, E_2 \in \mathcal{F}_2. \text{ Тоді ми отримаємо } E_{x_1} = \begin{cases} E_2, & x_1 \in E_1 \\ \emptyset, & x_1 \notin E_1 \end{cases} \text{ та аналогічно } E_{x_2} = \begin{cases} E_1, & x_2 \in E_2 \\ \emptyset, & x_2 \notin E_2 \end{cases}.$$

Дійсно,  $E_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2\}$ . Якщо  $x_1 \in E_1$ , то тоді тут  $E_{x_1} = E_2$ . Якщо  $x_1 \notin E_1$ , то тоді який б  $x_2 \in E_2$  не взяли, уже  $(x_1, x_2) \notin E_1 \times E_2$ , а тому  $E_{x_1} = \emptyset$ .

Зазначимо, що в цьому випадку  $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$  та  $E_{x_2} \in \mathcal{F}_1$  завжди.

**Lemma 6.1.7** Нехай  $E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ . Тоді для кожного  $x_1 \in X_1$  та  $x_2 \in X_2$  маємо  $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ ,  $E_{x_2} \in \mathcal{F}_1$ .

**Proof.**

Ми доведемо, що для кожного  $x_1 \in X_1$  матимемо  $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ , бо друге аналогічно.

Розглянемо клас  $\mathcal{H} = \{E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \mid \forall x_1 \in X_1 : E_{x_1} \in \mathcal{F}_2\}$ .

Ми вже знаємо (за попереднім прикладом), що  $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ . Зауважимо, що  $\mathcal{H}$  утворює  $\sigma$ -алгебру,



це окремо ми скоро обговоримо. Після цього ми отримаємо  $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ , що доводить нашу лему. Нехай  $E^{(n)} \in \mathcal{H}$ , тобто  $E_{x_1}^{(n)} \in \mathcal{F}_2$  при всіх  $n \geq 1$ . Зауважимо, що виконується така рівність:  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{x_1}^{(n)} = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \right)_{x_1}$ . Прокоментую рівність окремо.

Нехай  $x_2 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{x_1}^{(n)}$ , тобто звідси  $x_2 \in E_{x_1}^{(N)}$  при деякому  $N \geq 1$ , а тому  $(x_1, x_2) \in E^{(N)}$ . Значить,  $(x_1, x_2) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$ , а це означає, що  $x_2 \in \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \right)_{x_1}$ . Із того, що  $x_2 \in \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \right)_{x_1}$  аналогічним чином випливає  $x_2 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{x_1}^{(n)}$ .

Отже, із цих рівностей випливає, що  $\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \right)_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ , а тому звідси отримаємо  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \in \mathcal{H}$ .

Нехай  $E^{(1)}, E^{(2)} \in \mathcal{H}$ , тобто  $E_{x_1}^{(1)}, E_{x_1}^{(2)} \in \mathcal{F}_2$ . Зауважимо, що виконується така рівність:  $E_{x_1}^{(1)} \setminus E_{x_1}^{(2)} = (E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1}$ . Прокоментую рівність окремо.

Нехай  $x_2 \in E_{x_1}^{(1)} \setminus E_{x_1}^{(2)}$ , тобто  $x_2 \in E_{x_1}^{(1)}$  та  $x_2 \notin E_{x_1}^{(2)}$ . Звідси  $(x_1, x_2) \in E^{(1)}$  та  $(x_1, x_2) \notin E^{(2)}$ , а далі  $(x_1, x_2) \in E^{(1)} \setminus E^{(2)}$ . Отримали  $x_2 \in (E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1}$ . Із того, що  $x_2 \in (E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1}$ , аналогічним чином випливає  $x_2 \in E_{x_1}^{(1)} \setminus E_{x_1}^{(2)}$ .

Отже, із цих рівностей випливає, що  $(E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ , а тому звідси отримаємо  $E^{(1)} \setminus E^{(2)} \in \mathcal{H}$ . Нарешті,  $X \in \mathcal{H}$ , тому що  $X_{x_1} = X_2 \in \mathcal{F}_2$ . ■

Далі розглянемо функції  $f: X = X_1 \times X_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . Позначимо через  $f_{x_1}(x_2)$  функцію  $f(x_1, x_2)$ , де аргумент  $x_1$  вважається фіксованим. Аналогічно позначимо  $f_{x_2}(x_1)$ .

**Lemma 6.1.8** Нехай функція  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ -вимірною. Тоді для кожного  $x_1 \in X_1$  маємо, що  $f_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ -вимірною; для кожного  $x_2 \in X_2$  маємо, що  $f_{x_2} \in \mathcal{F}_1$ -вимірною.

**Proof.**

Ми доведемо, що для кожного  $x_1 \in X_1$  маємо  $\mathcal{F}_2$ -вимірність  $f_{x_1}$ , бо друге аналогічно.

Нехай  $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ , розглянемо прообраз даного відображення:

$$f_{x_1}^{-1}(B) = \{x_2 \in X_2 \mid f_{x_1}(x_2) \in B\} = \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in f^{-1}(B)\} = (f^{-1}(B))_{x_1}.$$

Оскільки  $f \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -вимірною, то звідси для множини  $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$  матимемо  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ . Але за щойно доведеною лемою, для кожного  $x_1 \in X_1$  отримаємо  $(f^{-1}(B))_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ . ■

## 6.2 Добуток мір

Задані  $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ ,  $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$  – два вимірних простори з мірами. Позначимо  $X = X_1 \times X_2$ .

Попередньо визначимо функцію множин на півкільці  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ :

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$$

**Lemma 6.2.1**  $\mu$  задає міру на  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ .

**Proof.**

$\mu$  вже буде невід'ємною, просто тому що  $\mu_1, \mu_2$  – міри, а там  $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$ . Значить, і  $\mu = \mu_1\mu_2 \geq 0$ .

Нехай  $E^{(n)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  – неперетинні множини, причому  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ . Отже, ми взагалі

маємо  $E^{(n)} = E_1^{(n)} \times E_2^{(n)}$ , причому  $E_1^{(n)} \in \mathcal{F}_1$ ,  $E_2^{(n)} \in \mathcal{F}_2$ , а також  $E = E_1 \times E_2$ . Зауважимо, що справедливе наступне:

$$\mathbb{1}_{E_1 \times E_2}(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{E_1}(x_1)\mathbb{1}_{E_2}(x_2).$$

Дійсно, нехай  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ , тоді звідси  $\mathbb{1}_{E_1 \times E_2}(x_1, x_2) = 1$ . Із іншого боку,  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \implies x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ , а тому  $\mathbb{1}_{E_1}(x_1)\mathbb{1}_{E_2}(x_2) = 1$ .

Тепер нехай  $(x_1, x_2) \notin E_1 \times E_2$ , тоді звідси  $\mathbb{1}_{E_1 \times E_2}(x_1, x_2) = 0$ . Із іншого боку,  $(x_1, x_2) \notin E_1 \times E_2$  означає три опції: або  $x_1 \in E_1, x_2 \notin E_2$ , або  $x_1 \notin E_1, x_2 \in E_2$ , або  $x_1 \notin E_1, x_2 \notin E_2$ . У всіх трьох випадках маємо  $\mathbb{1}_{E_1}(x_1)\mathbb{1}_{E_2}(x_2) = 0$ .

Також зауважимо, що для неперетинних множин  $E_n$  маємо  $\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n}(x)$ .

Разом отримаємо таку рівність:

$$\mathbb{1}_{E_1} \mathbb{1}_{E_2} = \mathbb{1}_E = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E^{(n)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_1^{(n)}} \mathbb{1}_{E_2^{(n)}}.$$

Проінтегруємо рівності по  $X_1$  відносно  $\mu_1$ . Це можливо робити в силу вимірності функцій:

$$\int_{X_1} \mathbb{1}_{E_1} \mathbb{1}_{E_2} d\mu_1 = \int_{X_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_1^{(n)}} \mathbb{1}_{E_2^{(n)}} d\mu_1.$$

Знаючи, що для невід'ємних функцій ряд та інтеграл можна поміняти місцями, отримаємо:

$$\mathbb{1}_{E_2} \mu_1(E_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_2^{(n)}} \mu_1(E_1^{(n)}).$$

Проінтегруємо рівності по  $X_2$  відносно  $\mu_2$  (аналогічним чином це можливо). Такими самими міркуваннями отримаємо рівність:

$$\mu_2(E_2) \mu_1(E_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E_1^{(n)}) \mu_2(E_2^{(n)}).$$

Але за визначенням функції множини на  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ , маємо  $\mu(E) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E^{(n)})$ .

Отже, довели невід'ємність та  $\sigma$ -адитивність, тож  $\mu$  – дійсно міра на  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ . ■

Отже, маємо  $\mu$  – легітимна міра на півкільці  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ . Далі продовжимо її за схемою Каратеодорі – отримаємо міру на  $\sigma$ -алгебрі, яку я позначу за  $\mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$ .

Нам відомо, що множина вимірних за Каратеодорі містить півкільце, тобто  $\mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2 \supset \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ . Але оскільки ми маємо  $\sigma$ -алгебру, то тоді звідси  $\mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2 \supset \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ .

**Definition 6.2.2 Добутком мір**  $\mu_1, \mu_2$  називатимемо продовження міри  $\mu$ , яка визначена на  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  як  $\mu(E) = \mu(E_1) \mu(E_2)$ , за схемою Каратеодорі.

Позначення:  $\mu_1 \times \mu_2$ .

**Theorem 6.2.3** Для мір Лебега виконується рівність  $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$ .

**Proof.**

*TODO: розібрати.* ■

**Lemma 6.2.4** Задано  $\mu_1, \mu_2$  – обидва  $\sigma$ -скінченні та повні міри відповідно на  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ . Нехай  $E \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$ . Тоді:

- 1)  $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$ ;
- 2)  $f(x_1) = \mu_2(E_{x_1})$  буде  $\mathcal{F}_1$ -вимірною;
- 3)  $\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \mu(E)$

**Proof.**

1. Випадок, коли  $\mu_1, \mu_2$  обидва скінченні міри.

Розглянемо клас  $\mathcal{H}$  – набір всіх множин  $E \in \mathcal{F}$ , для яких виконуються пункти 1), 2), 3). Ми хочемо довести, що  $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}$ . Для цього розіб'ємо на кілька етапів.

I.  $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ .

Нехай  $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ , тоді, згадавши **Ех. 6.1.6**, маємо  $E_{x_1} = \begin{cases} E_2, & x_1 \in E_1 \\ \emptyset, & x_1 \notin E_1 \end{cases}$ , але в будь-якому випадку  $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$  – пункт 1 є.

$\mu_2(E_{x_1}) = \begin{cases} \mu_2(E_2), & x_1 \in E_1 \\ 0, & x_1 \notin E_1 \end{cases} = \mu_2(E_2) \cdot \mathbb{1}_{E_1}(x_1)$ . Така функція від  $x_1$  буде  $\mathcal{F}_1$ -вимірною, оскільки

$E_1 \in \mathcal{F}_1$ , а тому індикатор вимірний – пункт 2 є.

$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \mu_2(E_2) \int_{X_1} \mathbb{1}_{E_1}(x_1) d\mu_1(x_1) = \mu_2(E_2) \mu_1(E_1) = \mu(E)$  – пункт 3 є.

Разом ми отримали, що множина  $E \in \mathcal{H}$ .

II.  $\mathcal{H} \supset k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ .

Нехай  $E \in k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ . Оскільки  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  – це півкільце, то згадаємо **Th. 1.2.6**, тоді  $E = \bigsqcup_{k=1}^n E^{(k)}$ ,

причому  $E^{(k)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ . Ми вже доводили, що  $E_{x_1} = \left( \bigcup_{k=1}^n E^{(k)} \right)_{x_1} = \bigcup_{k=1}^n E_{x_1}^{(k)}$ . За кроком I, всі

$E_{x_1}^{(k)} \in \mathcal{F}_2$ , а тому звідси  $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$  – пункт 1 є.

$\mu_2(E_{x_1}) = \sum_{k=1}^n \mu_2(E_{x_1}^{(k)})$ , але в силу крока I, всі  $\mu_2(E_{x_1}^{(k)}) \in \mathcal{F}_1$ -вимірними, тому  $\mu_2(E_{x_1})$  також  $\mathcal{F}_1$ -вимірна як сума – пункт 2 є.

$$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \sum_{k=1}^n \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}^{(k)}) d\mu_1(x_1) \stackrel{\text{крок I}}{=} \sum_{k=1}^n \mu(E^{(k)}) = \mu(E) \text{ – пункт 3 є.}$$

Разом ми отримали, що множина  $E \in \mathcal{H}$ .

III.  $\mathcal{H}$  – монотонний клас.

Нехай  $E^{(n)} \in \mathcal{H}$ , причому вони зростають та  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$ . Хочемо  $E \in \mathcal{H}$ .

Маємо  $E_{x_1} = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \right)_{x_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{x_1}^{(n)} \in \mathcal{F}_2$ , просто тому що  $E_{x_1}^{(n)} \in \mathcal{F}_2$  – пункт 1 є.

$\mu_2(E_{x_1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2(E_{x_1}^{(n)})$  за неперервністю міри знизу. Оскільки  $\mu_2(E_{x_1}^{(n)}) \in \mathcal{F}_1$ -вимірною, то  $\mu_2(E_{x_1})$  також  $\mathcal{F}_1$ -вимірна як границя – пункт 2 є.

$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}^{(n)}) d\mu_1(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E^{(n)}) = \mu(E)$ . Перша рівність виконана, оскільки  $\mu_2(E_{x_1}^{(n)})$  формує невід’ємну монотонну послідовність (бо в нас  $E_{x_1}^{(n)}$  зростає як множина), а далі **Th. 4.4.1**. Остання рівність виконана в силу неперервності міри знизу – пункт 3 є.

Власне, довели  $E \in \mathcal{H}$ .

Аналогічно якщо  $E^{(n)} \in \mathcal{H}$ , причому вони тепер спадають та  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$ , то звідси  $E \in \mathcal{H}$ . Єдине там використовується неперервність міри зверху, але міри в нас скінченні, тому все нормально.

IV.  $\mathcal{H} \supset \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ .

Дійсно, оскільки  $\mathcal{H} \supset k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$  за кроком II, а також  $\mathcal{H}$  – монотонний клас за кроком III, то звідси  $\mathcal{H} \supset mk(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ . За **Th. 1.2.8**, маємо  $\mathcal{H} \supset \sigma k(k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)) = \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ . Думаю, останню рівність пояснювати не варто, тут зрозуміло.

V.  $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$  (останній крок).

Спочатку доведемо, що для кожного  $E \in \mathcal{F}$  ми можемо підібрати таку множину  $A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ , для якої  $E \subset A$ , а також  $\mu(A \setminus E) = 0$ .

Власне, нехай  $E \in \mathcal{F}$ , тоді тут  $\mu(E) = \inf_{\substack{E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \\ E^{(n)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E^{(n)})$ . Для кожного  $k \geq 1$  ми можемо

підібрати  $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(nk)}$ , для яких  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E^{(nk)}) < \mu(E) + \frac{1}{k}$ .

Оберемо множину  $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(nk)}$ , причому в цьому випадку дійсно  $A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ . Також зрозуміло, що  $E \subset A$ , якщо перетнути всі вкладення вище по  $k$ . Нарешті,

$$\mu(A \setminus E) = \mu(A) - \mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E^{(nk)}) - \mu(E) < \frac{1}{k}.$$

При  $k \rightarrow \infty$  отримаємо бажану рівність  $\mu(A \setminus E) = 0$ .

Нехай тепер  $E \in \mathcal{F}$ , але поки обмежимося  $\mu(E) = 0$ . Ми вже знаємо, що є множина  $A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ , для якої  $A \supset E$  (ясно, що й  $A_{x_1} \supset E_{x_1}$ ) та  $\mu(A \setminus E) = 0$ . Але в наших кондиціях  $\mu(A) = 0$ .

У нас є бонус в тому, що  $A \in \mathcal{H}$  за кроком IV, а тому виконуються пункти 1),2),3) з леми. Зокрема

$$0 = \mu(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1). \text{ Звідси випливає, що } \mu_2(A_{x_1}) = 0 \text{ (mod } \mu_1). \text{ Тоді, маючи } A_{x_1} \in \mathcal{F}_2,$$

умову  $E_{x_1} \subset A_{x_1}$  та умову, що  $\mu_1$  повна міра, отримаємо  $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \text{ (mod } \mu_1)$  – пункт 1 є.

Більше того, за тим же вкладенням,  $\mu(E_{x_1}) = 0 \text{ (mod } \mu_1)$ . Зрозуміло, що  $0 \in \mathcal{F}_1$ -вимірною, а в силу

повноти  $\mu_1$ , отримаємо, що  $\mu(E_{x_1})$  також  $\mathcal{F}_1$ -вимірний – пункт 2 є.

$$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = 0 = \mu(E) - \text{пункт 3 є.}$$

Нарешті, нехай  $E \in \mathcal{F}$  (без додаткових обмежень). Ми вже знаємо, що є множина  $A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ , для якої  $A \supset E$  та  $\mu(A \setminus E) = 0$ . Ми зведемо до попереднього кейсу.

Зауважимо, що  $E = A \setminus (A \setminus E)$ . Але тоді зрозуміло, що  $E_{x_1} = A_{x_1} \setminus (A \setminus E)_{x_1}$ . Ми уже маємо  $A_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ , але також  $(A \setminus E)_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$ , просто тому що  $\mu(A \setminus E) = 0$ . Разом отримаємо  $E \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$  – пункт 1 є.

$\mu_2(E_{x_1}) = \mu_2(A_{x_1}) - \mu_2((A \setminus E)_{x_1})$ . Праворуч  $\mathcal{F}_1$ -вимірний, тоді ліворуч буде теж  $\mathcal{F}_1$ -вимірність в силу того, що  $\mu_1$  – повна міра – пункт 2 є.

$$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1) - \int_{X_1} \mu_2((A \setminus E)_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \mu(A) - \mu(A \setminus E) = \mu(E) - \text{пункт 3 є.}$$

Тим самим ми (нарешті) завершили крок IV та довели лему для першого випадку.

2. Випадок, коли  $\mu_1, \mu_2$  обидва  $\sigma$ -скінченні міри.

Значить, за умовою, є множини  $X_1^{(n)} \in \mathcal{F}_1$ , для яких  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_1^{(n)} = X_1$  та  $\mu_1(X_1^{(n)}) < +\infty$ ; є множини

$X_2^{(n)} \in \mathcal{F}_2$ , для яких  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_2^{(n)} = X_2$  та  $\mu_2(X_2^{(n)}) < +\infty$ .

Перейдемо до множин  $Y_1^{(n)} = \bigcup_{k=1}^n X_1^{(k)}$  та  $Y_2^{(n)} = \bigcup_{k=1}^n X_2^{(k)}$ . Слід зазначити, що на  $Y_1^{(n)} \cap \mathcal{F}_1$  та

$Y_2^{(n)} \cap \mathcal{F}_2$  міри  $\mu_1, \mu_2$  є скінченними – ми звели до першого випадку, а для нього лема виконана.

Нехай  $E \in \mathcal{F}$ . Зауважимо, що  $Y^{(n)} \cap E$  зростає до  $E$ . На множині  $Y^{(n)} \cap E$  виконані вже 1), 2), 3).

$E_{x_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Y^{(n)} \cap E)_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$  – пункт 1 є.

$\mu_2(E_{x_1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right)$  за неперервністю міри знизу. Також  $\mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right)$  уже  $\mathcal{F}_1$ -вимірний, а тому звідси  $\mu_2(E_{x_1})$  також  $\mathcal{F}_1$ -вимірний як границя – пункт 2 є.

$\int_{Y_1^{(n)}} \mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) = \mu\left(Y^{(n)} \cap E\right)$  – це мені вже відомо. Але перепишемо так:

$$\int_{X_1} \mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right) \mathbb{1}_{Y_1^{(n)}}(x_1) d\mu_1(x_1) = \mu\left(Y^{(n)} \cap E\right).$$

$$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \mu(E).$$

Права частина – неперервність міри знизу. Ліва частина через **Th. 4.4.1**, бо в нас послідовність  $\mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right) \mathbb{1}_{Y_1^{(n)}}$  є всі  $\mathcal{F}_1$ -вимірними, а також зростає до  $\mu_2(E_{x_1})$  – крок 3 є. ■

### 6.3 Теорема Тонеллі та Фубіні

Задані  $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ ,  $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$  – два вимірних простори з мірами. Позначимо  $X = X_1 \times X_2$ .

#### Theorem 6.3.1 Теорема Тонеллі

Нехай  $\mu_1, \mu_2$  – міри, що повні та  $\sigma$ -скінченні. Задано функцію  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – невід’ємна та  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$ -вимірний. Відомо, що:

- 1)  $f_{x_1}$  буде  $\mathcal{F}_2$ -вимірною  $\pmod{\mu_2}$ ;
- 2)  $g(x_1) = \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2)$  буде  $\mathcal{F}_1$ -вимірною;
- 3)  $\int_X f d\mu = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2)$ .

**Remark 6.3.2** Функція  $g(x_1)$ , можливо, не є визначеною на множині міри нуль в силу того, що перша умова працює майже скрізь відносно  $\mu_1$ , але в силу повноти міри ми можемо взяти еквівалентну їй функцію, де визначено все, яка не впливає ніяк на вимірність.

**Proof.**

I. Випадок функції  $\mathbb{1}_B$ , де множина  $B \in \mathcal{F}$ .

Але оскільки  $B \in \mathcal{F}$ , то вже автоматично виконуються щойно доведена лема.

Зафіксуємо точку  $x_1 \in X_1$ , тоді звідси отримаємо переріз функції:

$$(\mathbb{1}_B)_{x_1}(x_2) = \mathbb{1}_B(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in B \\ 0, & (x_1, x_2) \notin B \end{cases} = \begin{cases} 1, & x_2 \in B_{x_1} \\ 0, & x_2 \notin B_{x_1} \end{cases} = \mathbb{1}_{B_{x_1}}(x_2).$$

Отримана функція  $\mathcal{F}_2$ -вимірною (mod  $\mu_1$ ), тому що  $B_{x_1} \in \mathcal{F}_2$  (mod  $\mu_1$ ) (п. 1 леми) – пункт 1 є.

$$\int_{X_2} (\mathbb{1}_B)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \int_{X_2} \mathbb{1}_{B_{x_1}}(x_2) d\mu_2(x_2) = \mu_2(B_{x_1})$$

Цей інтеграл буде  $\mathcal{F}_1$ -вимірною, бо  $\mu_2(B_{x_1})$  буде  $\mathcal{F}_1$ -вимірною (п. 2 леми) – пункт 2 є.

$$\int_X \mathbb{1}_B d\mu = \mu(B) \stackrel{\text{п. 3 леми}}{=} \int_{X_1} \mu_2(B_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \int_{X_2} (\mathbb{1}_B)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1) - \text{пункт 3 є.}$$

II. Випадок функції  $p$  – проста невід’ємна та  $\mathcal{F}$ -вимірною.

Тобто мається  $p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A^{(k)}}(x)$ , причому всі  $A^{(k)} \in \mathcal{F}$ . Зафіксуємо  $x_1 \in X_1$ , тоді

$$p_{x_1}(x_2) = p(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^n a_k (\mathbb{1}_{A^{(k)}})_{x_1}(x_2).$$

Ми вже знаємо, що кожний індикатор, за кроком I, буде  $\mathcal{F}_2$ -вимірною (mod  $\mu_1$ ), а тому звідси сама  $p_{x_1}$  також  $\mathcal{F}_2$ -вимірною (mod  $\mu_1$ ) – пункт 1 є.

$$\int_{X_2} p_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \sum_{k=1}^n a_k \int_{X_2} (\mathbb{1}_{A^{(k)}})_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2).$$

Даний інтеграл буде  $\mathcal{F}_1$ -вимірною як сума  $\mathcal{F}_1$ -вимірних з крока I – пункт 2 є.

$$\begin{aligned} \int_X p d\mu &= \sum_{k=1}^n a_k \mu(A^{(k)}) \stackrel{\text{крок I}}{=} \sum_{k=1}^n a_k \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} (\mathbb{1}_{A^{(k)}})_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \\ &= \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} \sum_{k=1}^n a_k (\mathbb{1}_{A^{(k)}})_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} p_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) - \text{пункт 3 є.} \end{aligned}$$

III. Випадок функції  $f$  – невід’ємна та  $\mathcal{F}$ -вимірною.

Маємо послідовність  $\{p_n\}$  – прості невід’ємні та  $\mathcal{F}$ -вимірні, де  $p_n \rightarrow f$ .

$f_{x_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n)_{x_1}$  при фіксованому  $x_1 \in X_1$ . За кроком II, всі  $(p_n)_{x_1}$  будуть  $\mathcal{F}_2$ -вимірною (mod  $\mu_1$ ), а тому й  $f$  буде  $\mathcal{F}_2$ -вимірною (mod  $\mu_1$ ) як ліміт – пункт 1 є.

$$\int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_2} (p_n)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) - \mathcal{F}_1\text{-вимірною як границя за кроком II} - \text{пункт 2 є.}$$

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X p_n d\mu \stackrel{\text{крок II}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} (p_n)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2).$$

Остання рівність виконана спочатку за **Th. 4.4.1**, а далі за **Th. 4.2.1** – пункт 3 є. ■

### Theorem 6.3.3 Теорема Фубіні

Нехай  $\mu_1, \mu_2$  – міри, що повні та  $\sigma$ -скінченні. Задано функцію  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , причому  $f \in L(X, \mu)$ .

Відомо, що:

- 1)  $f_{x_1} \in L(X_2, \mu_2)$  (mod  $\mu_1$ );
- 2)  $g(x_1) = \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) \in L(X_1, \mu_1)$ ;
- 3)  $\int_X f d\mu = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2)$ .

**Proof.**

I. Випадок функції  $f$  – невід’ємна.

Уже виконується для неї теорема Тонеллі, але ще нічого невідомо про інтегрованість, що в Фубіні.

$$\int_X f d\mu = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) \text{ за Тонеллі. Але оскільки } f \in L(X, \mu), \text{ то звідси маємо}$$

$$\int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) < +\infty \text{ (mod } \mu_1), \text{ а це в точності } f_{x_1}(x_2) \in L(X_2, \mu_2) \text{ (mod } \mu_1) - \text{пункт 1 є.}$$

Також  $g(x_1) \in L(X_1, \mu_1)$  за щойно отриманим – пункт 2 є.

Пункт 3 випливає з теореми Тонеллі, який ми вже розписували тут.

II. Випадок функції  $f$  – довільної.

Маємо  $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ , кожна з яких невід'ємна, а тому працює крок I.

При фіксованому  $x_1$  маємо  $f_{x_1}(x_2) = (f_+)_{x_1}(x_2) - (f_-)_{x_1}(x_2)$ .

Ця рівність автоматично доводить пункти 1), 2). Щодо 3),

$$\begin{aligned}
 \int_X f \, d\mu &= \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu \stackrel{\text{крок I}}{=} \\
 &= \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} (f_+)_{x_1}(x_2) \, d\mu_2(x_2) - \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} (f_-)_{x_1}(x_2) \, d\mu_2(x_2) = \\
 &= \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \left( \int_{X_2} (f_+)_{x_1}(x_2) \, d\mu_2(x_2) - \int_{X_2} (f_-)_{x_1}(x_2) \, d\mu_2(x_2) \right) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) \, d\mu_2(x_2).
 \end{aligned}$$

■

## 7 Простір $L_p$

### 7.1 Основні нерівності

#### Lemma 7.1.1 Нерівність Юнга

Задані числа  $p, q > 1$ , причому  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тоді для всіх  $a, b \geq 0$  виконується нерівність  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ .

**Proof.**

Якщо  $a = 0$  або  $b = 0$ , то нерівність цілком зрозуміла. Тому надалі  $a, b > 0$ .

Розглянемо функцію  $f(a) = ab - \frac{a^p}{p} - \frac{b^q}{q}$  та дослідимо її. Обчислимо похідну

$$f'(a) = b - a^{p-1}.$$

Зауважимо, що в точці  $a = b^{\frac{1}{p-1}}$  досягається найменше значення. Тож

$$\min_{a>0} f(a) = f\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = b^{\frac{1}{p-1}}b - \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} - \frac{b^q}{q} = b^q - \frac{b^q}{p} - \frac{b^q}{q} = b^q \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = 0.$$

Таким чином,  $\forall a > 0 : f(a) \geq 0$ , звідси випливає нерівність  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ . ■

#### Theorem 7.1.2 Нерівність Гьольдера

Задано  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір, функції  $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  –  $\mathcal{F}$ -вимірні та  $p, q > 1$  такі, що  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

$$\text{Тоді } \int_X |fg| d\lambda \leq \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Proof.**

Припустимо, що  $\left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = 0$ , тоді звідси  $|f| = 0$  (mod  $\lambda$ ). У такому разі нерівність спрацю-

вує. Аналогічно все буде при  $\left( \int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} = 0$ .

Припустимо, що  $\left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = +\infty$ . Тоді права частина нерівності буде точно  $+\infty$  (бо випадок, коли один із інтегралів нуль, був розглянутий). Отже, нерівність автоматом виконана. Аналогічно все буде при  $\left( \int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} = +\infty$ .

Тепер ми можемо зробити еквівалентні перетворення. Щоб довести Гьольдера, ми доведемо, що

$$\frac{\int_X |f||g| d\lambda}{\left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1 \quad (\text{по суті, ми праву частині нерівності поділили}).$$

Оскільки інте-

$$\text{грали – це дійсні числа, то ми їх внесемо всередину інтеграла чисельника як множними.}$$

Проте ця нерівність дійсно буде виконаною. Дійсно,

$$\frac{|f|}{\left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g|}{\left( \int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}} \stackrel{\text{нер-ть Юнга}}{\leq} \frac{\left( \frac{|f|}{\left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}} \right)^p}{p} + \frac{\left( \frac{|g|}{\left( \int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}} \right)^q}{q} = \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\int_X |f|^p d\lambda} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\int_X |g|^q d\lambda}$$

Тепер проінтегруємо обидві частини:

$$\int_X \frac{|f|}{\left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g|}{\left( \int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}} d\lambda \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \blacksquare$$

#### Theorem 7.1.3 Нерівність Мінковського

Задано  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір, функції  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  –  $\mathcal{F}$ -вимірні та  $p \geq 1$ . Тоді

$$\left( \int_X |f+g|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X |g|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Proof.**

Розглянемо випадок  $p = 1$ . Тоді нерівність випливає з нерівності трикутника  $|f + g| \leq |f| + |g|$ .

Тепер випадок  $p > 1$ , тоді оберемо  $q > 1$ , щоб була рівність  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Припустимо, що  $\left(\int_X |f + g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = 0$ . Тоді нерівність автоматично виконана.

Припустимо, що  $\left(\int_X |f + g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = +\infty$ . Скориставшись нерівністю Єнсена для функції  $x^p$ ,

$p > 1$ , отримаємо  $\left(\frac{|f + g|}{2}\right)^p \leq \left(\frac{|f| + |g|}{2}\right)^p \stackrel{\text{нер-ть Єнсена}}{\leq} \frac{|f|^p + |g|^p}{2}$ . Після інтегрування всіх частин нерівностей, отримаємо, що хоча б один доданок у правій нерівності має бути  $+\infty$ . Тож нерівність виконується.

Для всіх інших випадків буде інше доведення.

$$\begin{aligned} \int_X |f + g|^p d\lambda &= \int_X |f + g| |f + g|^{p-1} d\lambda \leq \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\lambda + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\lambda \stackrel{\text{нер-ть Гьольдера}}{\leq} \\ &\leq \left(\int_X |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_X |g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що  $(p-1)q = p$ , зважаючи на рівність  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Далі поділимо обидві частини

$$\begin{aligned} \text{нерівності на } \left(\int_X |f + g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} \text{ (саме через це я на початку розбивав на випадки). Отримаємо} \\ \left(\int_X |f + g|^p d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\int_X |f + g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Lemma 7.1.4 Нерівність Чебишова**

Задано  $(X, \mathbb{F}, \lambda)$  – вимірний простір та функція  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  –  $\mathcal{F}$ -вимірна. Тоді  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$\lambda(\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f| d\lambda.$$

**Proof.**

$$\int_X |f| d\lambda \geq \int_{\{|f| \geq \varepsilon\}} |f| d\lambda \geq \int_{\{|f| \geq \varepsilon\}} \varepsilon d\lambda = \varepsilon \lambda\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}. \quad \blacksquare$$

**7.2 Конструкція простору  $L_p$** 

Задано  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір та число  $1 \leq p < \infty$ . Розглянемо множину

$$\tilde{L}_p(X, \lambda) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f - \mathcal{F} \text{ - вимірна, } |f|^p \in L(X, \lambda)\}$$

Установимо на даній множині відношення еквівалентності:

$$f \sim g \iff f = g \pmod{\lambda}$$

Отримаємо нове означення:

**Definition 7.2.1** Простором  $L_p = L_p(X, \lambda)$  при  $1 \leq p < \infty$  називають множину класів еквівалентності, що отримана з  $\tilde{L}_p(X, \lambda)$  за допомогою встановленого відношення еквівалентності.

У класі еквівалентності лежать майже одні й ті самі функції. Такі функції завжди мають (якби мовити) дуже схожі властивості з точки зору теорії міри. Значить, ці функції можна вважати однаковими. Тому, поступаючись формальністю, ми будемо говорити, що  $L_p$  – це просто набір функцій.

**Proposition 7.2.2**  $(L_p, \|\cdot\|_p)$ , де число  $1 \leq p < +\infty$  – дійсний нормований простір, причому норма задається ось так:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$$

**Remark 7.2.3** Зазначимо, що  $L_p$  – векторний простір над  $\mathbb{R}$ . Дійсно, маємо  $f, g \in L_p$ , тоді звідси  $\|f\|_p, \|g\|_p < +\infty$ . Значить, за нерівністю Мінковського,  $\|f + g\|_p < +\infty$ , тож  $f + g \in L_p$ . Зрозуміло також, що  $\|\alpha f\|_p < +\infty, \alpha \in \mathbb{R}$ , тож  $\alpha f \in L_p$ .



**Proof.**

Нам треба просто перевірити властивості норми.

1)  $\|f\|_p \geq 0$  – зрозуміло, бо під інтегралом стоїть невід’ємна функція  $|f|^p$ . Далі зауважимо, що при  $\|f\|_p = 0$  маємо  $f = 0 \pmod{\lambda}$ , тож  $f = 0$  як елемент  $L_p$ .

$$2) \|\alpha f\|_p = \left( \int_X |\alpha f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|f\|_p.$$

3)  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$  – це просто нерівність Мінковського в більш компактному вигляді.

Отже, у нас дійсно встановлений нормований простір.

**Proposition 7.2.4** Установлений вище нормований простір  $(L_p, \|\cdot\|_p)$  – банахів.

**Proof.**

Інакше кажучи, нам треба довести повноту. Нехай  $\{f_n, n \geq 1\} \subset L_p$  – фундаментальна послідовність, тобто  $\|f_n - f_m\|_p \rightarrow 0$ . За нерівністю Чебишова, маємо таку оцінку:

$$\lambda(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)|^p \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f_m|^p d\lambda = \frac{1}{\varepsilon} \|f_n - f_m\|_p^p \rightarrow 0.$$

$$\lambda\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon^{\frac{1}{p}}\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \|f_n - f_m\|_p^p \rightarrow 0.$$

Отже,  $\{f_n\}$  – фундаментальна послідовність за мірою. Значить, за **Th. 3.7.5**, існує підпослідовність  $\{f_{n_k}\}$ , для якої  $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$ , де функція  $f \in \mathcal{F}$ -вимірною. Наша мета буде довести, що  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , тобто послідовність  $\{f_n\} \subset L_p$  буде збігатися за нормою до функції  $f$ , причому треба окремо показати, що  $f \in L_p$ .

Нехай  $\varepsilon > 0$ . Із фундаментальності  $\{f_{n_k}\}$  відносно норми,  $\exists k_0 : \forall k, l \geq k_0 : \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p < \varepsilon \iff$

$$\iff \int_X |f_{n_k} - f_{n_l}|^p d\lambda < \varepsilon^p. \text{ За лемою Фату, отримаємо наступне при } k \geq k_0:$$

$$\int_X |f_{n_k} - f| d\lambda = \int_X \lim_{l \rightarrow \infty} |f_{n_k} - f_{n_l}|^p d\lambda \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_k} - f_{n_l}|^p d\lambda \leq \varepsilon^p < +\infty.$$

Отже, звідси  $f_{n_k} - f \in L_p$ . Оскільки  $L_p$  – векторний простір, то звідси  $f \in L_p$ .

$$\text{Поки розписували нерівності, отримали } \int_X |f_{n_k} - f|^p d\lambda \leq \varepsilon^p \iff \|f_{n_k} - f\|_p \leq \varepsilon, \text{ причому } \forall k \geq k_0.$$

Отже,  $\|f_{n_k} - f\|_p \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ .

Оскільки  $\{f_n\}$  – фундаментальна та  $\{f_{n_k}\}$  – збіжна до  $f$ , то  $\{f_n\}$  – теж збіжна до  $f$ .

Ми довели, що  $(L_p, \|\cdot\|_p)$  – справді банахів.

**7.3 Щільні підмножини  $L_p$** 

**Theorem 7.3.1** Множина простих функцій – щільна підмножина простору  $L_p$ .

Тобто для всіх  $f \in L_p$  та  $\varepsilon > 0$  існує проста функція  $q \in L_p$ , для якої  $\|f - q\|_p < \varepsilon$ .

**Proof.**

I. Випадок  $f \geq 0$ .

Тоді існують прості невід’ємні та вимірні функції  $\{q_n\}$  так, що монотонним чином  $q_n \rightarrow f$ .

$$0 \leq f - q_n \leq f \implies |f - q_n|^p \leq |f|^p \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - q_n(x)|^p = 0.$$

За теоремою Лебега про мажоровану збіжність, взявши мажоранту  $|f|^p \in L(X, \lambda)$ , отримаємо, що

$$\int_X |f - q_n|^p d\lambda \rightarrow 0 \iff \|f - q_n\|_p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Серед цих  $q_n$  знайдеться функція  $q$ , для якої  $\|f - q\|_p < \varepsilon$ .

II. Випадок  $f$  – довільна.

Тоді  $f = f_+ - f_-$ , де кожна з функцій в доданку – невід’ємна. Значить, за кроком I, існують прості функції  $q_+, q_- \in L_p$ , для яких  $\|f_+ - q_+\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \|f_- - q_-\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Оберемо функцію  $q = q_+ - q_-$ , яка теж проста, причому  $q \in L_p$ . Тоді

$$\|f - q\|_p = \|(f_+ - q_+) - (f_- - q_-)\| \leq \|f_+ - q_+\|_p + \|f_- - q_-\|_p < \varepsilon.$$

**Theorem 7.3.2** Припустимо, що  $\lambda$  на  $\mathcal{F}$  була отримана за схемою за Каратеодорі з півкільця  $\mathcal{P}$ , причому  $\lambda$  –  $\sigma$ -скінченна на  $\mathcal{P}$ . Тоді для всіх  $f \in L_p$  та  $\varepsilon > 0$  існує проста функція  $q \in L_p$ , для якої  $\|f - q\|_p < \varepsilon$ .

От тільки для простої функції  $q(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$  уже буде  $A_k \in \mathcal{P}$  (у порівнянні з попереднім).

**Proof.**

I. Випадок  $f = \mathbb{1}_C, C \in \mathcal{F}$ .

$$\int_X |f|^p d\lambda < +\infty \iff \int_X \mathbb{1}_C^p d\lambda = \lambda(C) < +\infty.$$

За теоремою про наближення міри її значеннями на кільці, знайдеться  $B \in k(\mathcal{P})$ , для якої

$$\lambda(C \triangle B) < \varepsilon^p, \text{ де } B = \bigcup_{k=1}^n A_k, A_k \in \mathcal{P}.$$

Покладемо  $q(x) = \mathbb{1}_B(x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}(x)$ . Це – проста функція потрібного вигляду. Тоді

$$\|f - q\|_p = \left( \int_X |\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_X |\mathbb{1}_{C \triangle B}|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{\frac{1}{p}}(C \triangle B) < \varepsilon.$$

II. Випадок  $f \in L_p$  – проста (не обов'язково невід'ємна), тобто  $f = \sum_{i=1}^j c_i \mathbb{1}_{C_i}, C_i \in \mathcal{F}, c_i \neq 0$ .

$$\int_X |f|^p d\lambda = \sum_{i=1}^j |c_i|^p \lambda(C_i) < +\infty \xrightarrow{c_i \neq 0} \lambda(C_i) < +\infty \iff \mathbb{1}_{C_i} \in L_p.$$

Тоді за кроком I, візьмемо прості функції  $q_i$  потрібного вигляду, для яких  $\|\mathbb{1}_{C_i} - q_i\|_p < \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^j |c_i|}$ .

Покладемо  $q = \sum_{i=1}^j c_i q_i$  та зауважимо, що  $q$  має необхідний вигляд. Тоді

$$\|f - q\|_p \leq \sum_{i=1}^j |c_i| \|\mathbb{1}_{C_i} - q_i\|_p < \varepsilon.$$

III. Випадок  $f \in L_p$  – довільна.

За попередньою теоремою, знайдеться проста функція  $f_0 \in L_p$ , для якої  $\|f - f_0\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ . Далі, за кроком II, для простої функції  $f_0 \in L_p$  існує проста функція  $q$  потрібного вигляду, для якої  $\|f_0 - q\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ . Ну тоді ясно, що  $\|f - q\|_p < \varepsilon$ . ■

Нарешті, розглянемо тепер частинний випадок  $L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ , тобто в нас  $X = \mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{S}_d$ ,  $\lambda = \lambda_d$  – міра Лебега.

**Corollary 7.3.3** Простір  $L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$  – сепарабельний при всіх  $1 \leq p < +\infty$ .

**Proof.**

Розглянемо зліченне півкільце множин  $\tilde{\mathcal{P}}_d = \left\{ \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\}$ . Розглянемо  $M$  – набір функцій

вигляду  $\sum_{i=1}^j r_i \mathbb{1}_{C_i}, r_i \in \mathbb{Q}, C_i \in \tilde{\mathcal{P}}_d, j \geq 1$ . Можна зазначити, що  $M$  – зліченна множина. Ми доведемо, що  $M$  буде щільною в  $L_p$ .

Функціями з  $M$  можна як завгодно близько за нормою  $\|\cdot\|_p$  наближати функції вигляду  $\sum_{i=1}^j c_i \mathbb{1}_{C_i}, c_i \in \mathbb{R}, C_i \in \tilde{\mathcal{P}}_d$ , а дані функції, у свою чергу, наближають функції типу  $\sum_{i=1}^j c_i \mathbb{1}_{D_i}, c_i \in \mathbb{R}, D_i \in \mathcal{P}_d$ .

Із попередньої теореми, маємо, що набір функцій такого вигляду – щільна підмножина  $L_p$ . ■

## 7.4 Істотно обмежені функції

**Definition 7.4.1** Задано  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір та  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  –  $\mathcal{F}$ -вимірна.

Функція  $f$  називається **істотно обмеженою**, якщо

$$\exists c > 0 : |f(x)| \leq c \quad (\text{mod } \lambda)$$

Інакше кажучи,  $\lambda\{x \in X : |\lambda(x)| > c\} = 0$ .

**Definition 7.4.2** Істотною верхньою гранню називають найменше число, що обмежує істотно

$$\operatorname{ess\,sup}_X |f| = \inf\{c > 0 : \lambda\{x \in X : |f(x)| > c\} = 0\}$$

Дану штуку можна переписати в іншому вигляді:  $\operatorname{ess\,sup}_X |f| = \inf_{\lambda(N)=0} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)|$ .

Позначення:  $\tilde{L}_\infty(X, \lambda)$  – множина всіх істотно обмежених функцій. Тобто

$$\tilde{L}_\infty(X, \lambda) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f - \mathcal{F} - \text{вимірна}, \operatorname{ess\,sup}_X |f| < \infty\}$$

Аналогічним чином ми профакторизуємо даний простір на основі відношення еквівалентності, що було задано в просторі  $\tilde{L}_p$ . Отримаємо простір  $L_\infty = L_\infty(X, \lambda)$  – множина класів еквівалентностей.

**Proposition 7.4.3**  $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$  – дійсний нормований простір, причому норма задається ось так:  
 $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_X |f|$ .

**Proof.**

Нам треба просто перевірити властивості норми.

1)  $\|f\|_\infty \geq 0$  – зрозуміло, бо ми проходимося по додатним константам  $c$ , які істотно обмежують. Також  $\|f\|_\infty = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists c_\varepsilon > 0 : c_\varepsilon < \varepsilon$ . Зокрема зафіксуємо  $\varepsilon = \frac{1}{k}$ , тоді існують  $c_k < \frac{1}{k}$ , які обмежують істотно функцію  $f$ . Тобто  $\exists N_k : \lambda(N_k) = 0 : \forall x \in X \setminus N_k : |f(x)| \leq c_k < \frac{1}{k}$ . Оберемо множину  $N = \bigcup_{k \geq 1} N_k$ , яка також є множиною міри нуль, тоді  $\forall x \in X \setminus N : |f(x)| < \frac{1}{k}$ . При  $k \rightarrow \infty$  отримаємо  $f = 0 \pmod{\lambda}$ .

$$\begin{aligned} 2) \quad \|\alpha f\|_\infty &= \operatorname{ess\,sup}_X |\alpha f| = \inf\{c > 0 : \lambda\{x : |\alpha f(x)| > c\} = 0\} = \inf\left\{|\alpha| \frac{c}{|\alpha|} > 0 : \lambda\left\{x : |f(x)| > \frac{c}{|\alpha|}\right\}\right\} \\ &= |\alpha| \inf\left\{\frac{c}{|\alpha|} > 0 : \lambda\left\{x : |f(x)| > \frac{c}{|\alpha|}\right\}\right\} = |\alpha| \operatorname{ess\,sup}_X |f| = |\alpha| \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

3) Мабуть, доведу це надзвичайно детально.

Розглянемо множину  $A = \{c > 0 : \lambda\{x \in X : |f(x) + g(x)| > c\} = 0\}$  та дві множини  $B_1 = \{c > 0 : \lambda\{x \in X : |f(x)| > c\} = 0\}$  та  $B_2 = \{c > 0 : \lambda\{x \in X : |g(x)| > c\} = 0\}$ . Із математичного аналізу ми вже знаємо, що з себе представляє множина  $B_1 + B_2$ . Ми хочемо довести, що  $A \supset B_1 + B_2$  – і таким чином,  $\inf A \leq \inf(B_1 + B_2) = \inf B_1 + \inf B_2$  – а це наша бажана нерівність  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ . Нехай  $c \in B_1 + B_2$ , тобто  $c = c_1 + c_2$ , причому  $c_1 \in B_1, c_2 \in B_2$ . Тобто  $\lambda\{x \in X : |f(x)| > c_1\} = 0$ ,  $\lambda\{x \in X : |g(x)| > c_2\} = 0$ . Ми хочемо довести, що  $\lambda\{x \in X : |f(x) + g(x)| > c\} = 0$ .

Зауважимо, що справджується  $\{x \in X : |f + g| > c_1 + c_2\} \subset \{x \in X : |f| > c_1\} \cup \{x \in X : |g| > c_2\}$ , тому звідси випливає, що

$$\lambda\{x \in X : |f(x) + g(x)| > c_1 + c_2\} \leq \lambda\{x \in X : |f(x)| > c_1\} + \lambda\{x \in X : |g(x)| > c_2\} = 0.$$

Таким чином, ми довели, що  $c \in A$  – а це завершує доведення третьої властивості норми.

Отже, у нас дійсно встановлений нормований простір. ■

**Proposition 7.4.4** Установлений вище нормований простір  $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$  – банахів.

**Proof.**

Нехай  $\{f_n, n \geq 1\} \subset L_\infty$  – фундаментальна послідовність. Позначимо кілька множин:

$$A_n = \{x \in X : |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\};$$

$$A_{nm} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\};$$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}.$$

Зауважимо, що  $\lambda(A_n) = 0$  та  $\lambda(A_{nm}) = 0$  в силу істотно обмежених функцій  $f_n$ . Звідси  $\lambda(A) = 0$ .

Якщо  $x \in X \setminus \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}$ , то тоді  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|x_n - x_m\|_\infty \rightarrow 0$ , тобто тоді  $\{f_n(x), n \geq 1\}$

– фундаментальна як числова послідовність, тож  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Якщо  $x \in \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{mn}$ , то

покладемо  $f(x) = 0$ .

Хочемо довести, що знайдена  $f$  – границя для послідовності  $\{f_n, n \geq 1\} \subset L_{\infty}$ .

Спочатку доведемо, що  $f \in L_{\infty}$ . Оскільки  $\{f_n\}$  – фундаментальна, то вона обмежена, тож  $\exists c > 0$  :

$\forall n \geq 1 : \|f_n\|_{\infty} \leq c$ . Якщо  $x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , то тоді  $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty} \leq c$ . Таким чином, для кожного

$x \in X \setminus A$  маємо, що  $|f(x)| \leq c$ . Отже, ми довели, що  $f \in L_{\infty}(X, \lambda)$ .

Залишилося показати  $f_n \rightarrow f$ . За фундаментальністю  $\{f_n\}$ , маємо, що  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon$ . Значить,  $\forall x \in X \setminus A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ . Спрямуємо  $m \rightarrow \infty$  – отримаємо  $\forall x \in X \setminus A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Тож звідси отримаємо  $\|f_n - f\|_{\infty} < 2\varepsilon$ . Отже,  $f_n \rightarrow f$ . ■

**Proposition 7.4.5** Задано  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір, де  $\lambda$  – скінченна. Тоді  $\forall p \geq 1 : L_{\infty} \subset L_p$ . При цьому  $\forall f \in L_{\infty} : \|f\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$ .

**Proof.**

$L_{\infty} \subset L_p$ .

Нехай  $f \in L_{\infty}$ , тобто це істотно обмежена функція, тобто  $\exists c > 0 : \forall x \in X \setminus N : |f(x)| \leq c$  при  $\lambda(N) = 0$ . Отже, звідси  $\int_X |f|^p d\lambda = \int_{X \setminus N} |f|^p d\lambda \leq \int_{X \setminus N} c^p d\lambda = c^p \lambda(X \setminus N) < \infty$ . Значить,  $f \in L_p$ .

$\|f\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$ . ■

## Трошки про все те саме тільки в комплексному випадку

Нехай  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір з мірою (це дійсна міра). Ми тепер будемо розглядати функції  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ . Оскільки  $f(x)$  повертає комплексне число, то тоді  $f(x) = u(x) + iv(x)$ , де в цьому випадку  $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$ ,  $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$ , обидві функції  $u, v: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition.** Комплекснозначна функція  $f$  називається  $\mathcal{F}$ -вимірною, якщо

$$f - (\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))\text{-вимірна}$$

**Proposition.**  $f - \mathcal{F}$ -вимірна (в комплексному сенсі)  $\iff u, v - \mathcal{F}$ -вимірні (в дійсному сенсі).

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f - \mathcal{F}$ -вимірна. Зокрема для кожного  $a \in \mathbb{R}$  та для множини  $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < a\}$  (це відкрита множина, тому борельова) прообраз  $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ . Із іншого боку, розпишемо прообраз детальніше:

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) < a\} = \{x \in X : u(x) < a\} = u^{-1}((-\infty, a)).$$

Отже, ми довели:  $\forall a \in \mathbb{R} : u^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F}$ , тобто  $u - \mathcal{F}$ -вимірна.

Аналогічно доведемо, що  $v - \mathcal{F}$ -вимірна, тільки для кожного  $a \in \mathbb{R}$  треба розглянути множину  $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < a\}$  (теж відкрита, тож теж борельова).

$\Leftarrow$  Дано:  $u, v$  – обидва  $\mathcal{F}$ -вимірні. Тут треба скористатися таким фактом, що  $\mathbb{C}$  можна сприймати як  $\mathbb{R}^2$ , як схожі топологічні простори. Тоді нам треба довести, що  $f$  тіпа  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ -вимірна. Ми знаємо, що  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma\mathcal{A}(\mathcal{P}_2)$ , тому мені достатньо буде розглянути довільну множину  $A \in \mathcal{P}_2$ . Тобто  $A = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ . Значить,

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} = \{x \in X : u(x) \in (a_1, b_1], v(x) \in (a_2, b_2]\} = u^{-1}((a_1, b_1]) \cap v^{-1}((a_2, b_2]).$$

Звідси отримали  $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$  (до речі, ми вже таке робили, проте зайвий раз можна повторити). Отже,  $f -$  також  $\mathcal{F}$ -вимірна. ■

**Corollary.**  $f - \mathcal{F}$ -вимірна (в комплексному сенсі). Тоді  $|f| - \mathcal{F}$ -вимірна (в дійсному сенсі).

**Proof.**

Маємо  $f - \mathcal{F}$ -вимірна, тож звідси  $u, v - \mathcal{F}$ -вимірні. Звідси  $u^2 + v^2 - \mathcal{F}$ -вимірна та, оскільки  $g(x) = \sqrt{x}$  – борельова, то  $\sqrt{u^2 + v^2} = |f| - \mathcal{F}$ -вимірна. ■

**Definition.** Інтеграл Лебега для комплекснозначної функції визначатиметься таким чином:

$$\int_A f d\lambda = \int_A u dv + i \int_A v d\lambda,$$

де  $A \in \mathcal{F}$ . Все це працює за умовою, що два інтеграли праворуч існують.

Розглянемо буквально ту саму множину, що було раніше:

$$\tilde{L}_p(X, \lambda) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid f - \mathcal{F}\text{-вимірна}, |f|^p \in L(X, \lambda)\}$$

Цього разу  $|f|^p \in L(X, \lambda)$  – інтегрована за Лебегом як дійсна функція. На ній знову задамо відношення еквівалентності

$$f \sim g \iff f = g \pmod{\lambda}$$

Знову отримаємо простір  $L_p = L_p(X, \lambda)$  при  $1 \leq p < \infty$  – множина класів еквівалентності. Аналогічним чином, ми будемо вважати, що  $L_p$  – то є просто набір функцій.

**Remark.**  $f \in L_p^{\mathbb{C}} \iff |f| \in L_p^{\mathbb{R}}$ .

Ця еквівалентність працюватиме лише за умовою, що  $f$  буде  $\mathcal{F}$ -вимірною.

**Proposition.** Нехай  $(X, \mathcal{F}, \lambda)$  – вимірний простір та  $f = u + iv$ .

$$f \in L_p^{\mathbb{C}} \iff u, v \in L_p^{\mathbb{R}}.$$

**Proof.**

Перед доведенням зауважимо, що справедлива така нерівність:  $\max\{|u|, |v|\} \leq |f| \leq |u| + |v|$ .

$\Rightarrow$  Дано:  $f \in L_p^{\mathbb{C}}$ , тоді вона автоматично  $\mathcal{F}$ -вимірна, звідси  $u, v$  теж автоматично  $\mathcal{F}$ -вимірні. Ліва

нерівність каже нам про те, що

$$\int_X |u|^p d\lambda \leq \int_X |f|^p d\lambda < +\infty, \quad \int_X |v|^p d\lambda \leq \int_X |f|^p d\lambda < +\infty.$$

Значить, звідси  $u, v \in L_p^{\mathbb{R}}$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  Дано:  $u, v \in L_p^{\mathbb{R}}$ , тоді вони автоматично  $\mathcal{F}$ -вимірні, звідси  $f$  теж автоматично  $\mathcal{F}$ -вимірні. Згадаємо, що функція  $x^p, p \geq 1, x \geq 0$  – опукла. Тож за нерівністю Єнсена, а також за правою нерівністю вище, отримаємо:

$$|f|^p \leq (|u| + |v|)^p = 2^p \cdot \left( \frac{|u| + |v|}{2} \right)^p \stackrel{\text{нер-ть Єнсена}}{\leq} 2^p \cdot \frac{|u|^p + |v|^p}{2}.$$

Нарешті,  $\int_X |f|^p d\lambda \leq 2^{p-1} \left( \int_X |u|^p d\lambda + \int_X |v|^p d\lambda \right) < +\infty$ . Значить, звідси  $f \in L_p^{\mathbb{C}}$ . ■

**Proposition.** Покладемо  $\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$  – буквально те саме. Тоді це – теж норма для комплексного  $L_p$ .

**Remark.** Знову варто пересвідчитися, що  $L_p^{\mathbb{C}}$  – векторний простір над  $\mathbb{R}$  (да, саме над  $\mathbb{R}$ ). Проте це впливає безпосередньо з того факту, що  $L_p^{\mathbb{R}}$  – векторний простір над  $\mathbb{R}$  та з твердження вище.

**Proof.**

1), 2) цілком аналогічно доводиться.

$$3) \|f + g\|_p^{\mathbb{C}} = \|f + g\|_p^{\mathbb{R}} \stackrel{3) \text{ із } L_p^{\mathbb{R}}}{\leq} \|f\|_p^{\mathbb{R}} + \|g\|_p^{\mathbb{R}} = \|f\|_p^{\mathbb{C}} + \|g\|_p^{\mathbb{C}}. \quad \blacksquare$$

**Proposition.** Маємо послідовність  $\{f_n\} \subset L_p^{\mathbb{C}}$ , маємо розклад  $f_n = u_n + iv_n$  та  $f = u + iv$ .  $f_n \rightarrow f$  в  $L_p^{\mathbb{C}} \iff u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$  в  $L_p^{\mathbb{R}}$ . Тут все це відбувається при  $n \rightarrow \infty$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f_n \rightarrow f$ , тобто звідси  $\|f_n - f\|_p^{\mathbb{C}} \rightarrow 0$ .

$$\|u_n - u\|_p^{\mathbb{R}} = \|u_n - u\|_p^{\mathbb{R}} \leq \|f_n - f\|_p^{\mathbb{C}} \rightarrow 0.$$

$$\|v_n - v\|_p^{\mathbb{R}} = \|v_n - v\|_p^{\mathbb{R}} \leq \|f_n - f\|_p^{\mathbb{C}} \rightarrow 0.$$

Отже, дійсно  $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$  в просторі  $L_p^{\mathbb{R}}$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$ , тобто  $\|u_n - u\|_p^{\mathbb{R}} \rightarrow 0, \|v_n - v\|_p^{\mathbb{R}} \rightarrow 0$ .

$$\|f_n - f\|_p^{\mathbb{C}} = \|f_n - f\|_p^{\mathbb{R}} \leq \|u_n - u\|_p^{\mathbb{R}} + \|v_n - v\|_p^{\mathbb{R}} \leq \|u_n - u\|_p^{\mathbb{R}} + \|v_n - v\|_p^{\mathbb{R}} = \|u_n - u\|_p^{\mathbb{R}} + \|v_n - v\|_p^{\mathbb{R}} \rightarrow 0.$$

Отже,  $f_n \rightarrow f$  в просторі  $L_p^{\mathbb{C}}$ . ■

**Proposition.** Установлений вище комплексний нормований простір  $(L_p, \|\cdot\|_p)$  – банахів.

**Proof.**

Дійсно, нехай  $\{f_n\} \subset L_p^{\mathbb{C}}$  – фундаментальна, маємо  $f_n = u_n + iv_n$ . Аналогічно можна довести, що  $\|u_n - u_m\|_p \rightarrow 0$  та  $\|v_n - v_m\|_p \rightarrow 0$  при  $m, n \rightarrow \infty$ . Звідси випливає, що  $\{u_n\}, \{v_n\} \subset L_p^{\mathbb{R}}$  – фундаментальні. Проте оскільки  $L_p^{\mathbb{R}}$  – банахів, то звідси  $\{u_n\}, \{v_n\}$  – збіжні, внаслідок чого  $\{f_n\}$  буде також збіжним. ■

**Proposition.** Якщо  $L_p^{\mathbb{R}}$  – сепарабельний, то тоді  $L_p^{\mathbb{C}}$  – сепарабельний.

*TODO: дописати.*

## Список використаних джерел

1. В. М. Радченко, плейліст "Теорія міри та інтеграли. Лекції" [\\*клік\\*](#)
2. В. М. Радченко, конспект "Курс теорії міри та інтеграла" [\\*клік\\*](#)
3. А. Я. Дороговцев, книга "Элементы общей теории меры и интеграла" [\\*клік\\*](#)