

# Зміст

<b>1</b>	<b>Метричні простори та інше</b>	<b>2</b>
1.1	Означення метричних просторів . . . . .	2
1.2	Відкриті та замкнені множини. Збіжні послідовності . . . . .	3
1.3	Замикання множин . . . . .	6
1.4	Повнота . . . . .	7
1.5	Неперервні відображення . . . . .	11
1.6	Компактність . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Початок функціонального аналізу</b>	<b>16</b>
2.1	Обмежені та неперервні лінійні оператори . . . . .	16

# 1 Метричні простори та інше

## 1.1 Означення метричних просторів

**Definition 1.1.1** Задано  $X$  – множина та  $\rho: X \rightarrow X \rightarrow \mathbb{R}$  – функція.

Функція  $\rho$  називається **метрикою**, якщо вона задовольняє таким властивостям:

- 1)  $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
- 2)  $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$
- 3)  $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Метрика описує **відстань** між елементами  $x, y$ .

Пара  $(X, \rho)$  з метрикою називається **метричним простором**.

**Example 1.1.2** Розглянемо декілька прикладів:

- 1)  $X = \mathbb{R}, \quad \rho(x, y) = |x - y|;$
- 2)  $X = \mathbb{R}^n$ , можна задати дві метрики:  
 $\rho_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}, \quad \rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|;$
- 3)  $X = C([a, b]), \quad \rho(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|.$

**Example 1.1.3** Окремо розгляну даний приклад. Нехай  $X$  – будь-яка множина, ми визначимо так

звану **дискретну метрику**  $d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ . Тоді  $(X, d)$  задає **дискретний** метричний простір.

**Definition 1.1.4** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір.

Пару  $(Y, \tilde{\rho})$ , де  $Y \subset X$ , назовемо **метричним підпростором**  $(X, \rho)$ , якщо

$$\forall x, y \in Y : \tilde{\rho}(x, y) = \rho(x, y).$$

При цьому метрика  $\tilde{\rho}$ , кажуть, **індукована в  $Y$  метрикою  $\rho$** .

**Proposition 1.1.5** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір та  $(Y, \tilde{\rho})$  – підпростір. Для функції  $\tilde{\rho}$  всі три аксіоми зберігаються. Тобто  $(Y, \tilde{\rho})$  залишається метричним простором.

*Вправа: довести.*

**Example 1.1.6** Маємо  $X = F([a, b])$  – множину обмежених функцій та  $\rho(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$ .

Тоді в  $Y = C([a, b])$  маємо метрику  $\tilde{\rho}(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$ . Отже,  $C([a, b])$  – метричний підпростір простору  $F([a, b])$ .

**Definition 1.1.7** Задано  $L$  – лінійний простір над  $\mathbb{R}$  або  $\mathbb{C}$ .

Задамо функцію  $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ , що називається **нормою**, якщо виконуються умови:

- 1)  $\forall x \in L : \|x\| \geq 0$
- 2)  $\forall x \in L : \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ або } \mathbb{C} : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- 3)  $\forall x, y \in L : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Тоді пару  $(L, \|\cdot\|)$  назовемо **нормованим простором**.

**Corollary 1.1.8** Задано  $(L, \|\cdot\|)$  – нормований простір. Тоді  $\forall x, y \in L : \|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$ .

*Вказівка:  $\|x\| = \|x + y - y\|$  та  $\|y\| = \|y + x - x\|$ .*

**Proposition 1.1.9** Задано  $(L, \|\cdot\|)$  – нормований простір. Тоді  $L$  з метрикою  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  утворює метричний простір.

*Вправа: перевірити три аксіоми.*

**Corollary 1.1.10** У такому разі справедливі додаткові властивості для заданої метрики:

- 1)  $\forall x, y, z \in L : \rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$  (інваріантність по відношенню до зсуву);
- 2)  $\forall x, y \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ або } \mathbb{C} : \rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \rho(x, y)$  (однорідність).

**Example 1.1.11** Зокрема дані простори будуть нормованими:

- 1)  $\mathbb{R}, \quad \|x\| = |x|;$

- 2)  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  або навіть  $\|\vec{x}\| = |x_1| + \dots + |x_n|$ ;  
 3)  $\mathbb{C}([a, b])$ ,  $\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$ ;

4)  $L_p(X, \lambda)$ ,  $\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$ .

Тому всі вони будуть автоматично метричними просторами із метрикою, що вище задана.

**Example 1.1.12** Дискретний простір  $(X, d)$  – метричний, але не нормований.

**Example 1.1.13** Задано  $(E, (\cdot, \cdot))$  – евклідов простір. Ми можемо евклідов простір  $E$  перетворити в нормований простір  $(E, \|\cdot\|)$  функцією  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

Як наслідок, за твердженням вище,  $(E, \rho)$  – метричний простір з  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ .

**Example 1.1.14** Нехай  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$  – дійсна числова послідовність. Задамо простір  $l_1 = \left\{ \vec{a} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$ .

Задаються такі операції:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$$

Неважко переконатися, що  $l_1$  – лінійний простір над  $\mathbb{R}$ .

Важливе зауваження:  $\vec{a} + \vec{b}, \alpha \vec{a} \in l_1$ , тому що маємо  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  – збіжні, а тому збіжним буде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n. \text{ Тобто операції замкнені.}$$

Можна задати нормований простір функцією  $\|\vec{a}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ . А тому це – метричний простір з

$$\rho(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} - \vec{b}\|.$$

Узагальнення:  $l_p = \left\{ \vec{a} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$ , тут задається норма  $\|\vec{a}\| = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ .

**Example 1.1.15** Тут ще є така множина:  $l_{\infty} = \{ \vec{a} \mid \vec{a} \text{ – обмежені} \}$ . Задані такі самі операції, що вище. Задається норма  $\|\vec{a}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ . Отже,  $l_{\infty}$  – метричний простір.

## 1.2 Відкриті та замкнені множини. Збіжні послідовності

**Definition 1.2.1** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір та  $a \in X$ .

Відкритою кулею радіусом  $r$  з центром  $a$  називають таку множину:

$$B(a; r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\}$$

Її ще називають  $r$ -околом точки  $a$ .

Замкненою кулею радіусом  $r$  з центром  $a$  називають таку множину:

$$B[a; r] = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\}$$

**Example 1.2.2** Розглянемо декілька прикладів:

1)  $X = \mathbb{R}$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$ ,  $B(a; r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$ ;

2)  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ ,  $B(0; 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ .

**Definition 1.2.3** Задано  $A \subset X$  та  $a \in A$ .

Точка  $a$  називається **внутрішньою** для  $A$ , якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : B(a; \varepsilon) \subset A.$$

**Definition 1.2.4** Множина  $A$  називається **відкритою**, якщо кожна точка множини  $A$  – внутрішня.

**Example 1.2.5** Розглянемо такі приклади:

1) Маємо  $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$  та множину  $A = [0, 1)$ . Точка  $a = \frac{1}{2}$  – внутрішня, оскільки  $\exists \varepsilon = \frac{1}{4} : B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \subset A$ , тобто  $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \subset [0, 1)$ . Водночас точка  $a = 0$  – не внутрішня. Отже,  $A$  – не відкрита, бо знайшли не внутрішню точку.

2) Маємо  $X = [0, 1], \rho(x, y) = |x - y|$  та множину  $A = [0, 1)$ . У цьому випадку точка  $a = 0$  уже внутрішня (в попередньому прикладі ми могли  $\varepsilon$ -околом вийти за межі нуля ліворуч, а тут вже ні). Тут  $A$  тепер відкрита.

3) Маємо  $X = \{0, 1, 2\}$  – підпростір метричного простору  $(\mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|)$ . Задамо множину  $A = \{0, 1\}$ . Тут кожна точка – внутрішня. Отже,  $A$  – відкрита.

**Definition 1.2.6** Задано  $A \subset X$  та  $x_0 \in X$ .

Точка  $x_0$  називається **граничною** для  $A$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : (B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

Інакше ще множину  $B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\} = \dot{B}(x_0; \varepsilon)$  називають **проколом околом точки**  $x_0$ .

**Definition 1.2.7** Множина  $A$  називається **замкнутою**, якщо вона містить всі свої граничні точки.

**Example 1.2.8** Розглянемо такі приклади:

1) Маємо  $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$  та множину  $A = (0, 1)$ . Точки  $x_0 \in \left\{\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$  – граничні. Водночас точка  $x_0 = \frac{3}{2}$  – не гранична. Отже,  $A$  – не замкнена, бо  $x_0 = 1$  хоча й гранична для  $A$ , але  $x_0 \notin A$ .

2) Маємо  $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$ . Задамо множину  $A = \{0, 1\}$ . Тут жодна точка – не гранична. Тим не менш,  $A$  – замкнена. Бо нема жодної граничної точки в  $X$  для  $A$ , щоб порушити означення.

3)  $X, \emptyset$  – замкнені в будь-якому метричному просторі.

**Theorem 1.2.9** Задано  $(X, \rho)$ ,  $A \subset X$ .

Множина  $A$  – відкрита  $\iff$  множина  $A^c$  – замкнена

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $A$  – відкрита.

!Припустимо, що  $A^c$  – не замкнена, тобто  $\exists x_0 \in A : x_0$  – гранична для  $A^c$ , але  $x_0 \notin A^c$ . За умовою, оскільки  $x_0 \in A$ , то  $x_0$  – внутрішня, тобто  $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \subset A$ . Отже,  $B(x_0; \varepsilon) \cap A^c = \emptyset$  – суперечність!

$\Leftarrow$  Дано:  $A^c$  – замкнена. Тоді вона містить всі граничні точки. Тоді  $\forall x_0 \in A : x_0$  – не гранична для  $A^c$ , тобто  $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A^c = \emptyset \implies B(x_0; \varepsilon) \subset A$ . Отже,  $x_0$  – внутрішня для  $A$ , а тому  $A$  – відкрита. ■

**Theorem 1.2.10** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір. Тоді справедливо наступне:

1) Нехай  $U_\alpha \subset X$ ,  $\alpha \in I$  – сім'я відкритих множин. Тоді  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  – відкрита множина;

2) Нехай  $U_k \subset X$ ,  $k = \overline{1, n}$  – сім'я відкритих множин. Тоді  $\bigcap_{k=1}^n U_k$  – відкрита множина;

3)  $\emptyset, X$  – відкриті множини.

**Proof.**

Доведемо кожний пункт окремо:

1) Задано множину  $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ . Зафіксуємо  $a \in U$ . Тоді  $\exists \alpha_0 : a \in U_{\alpha_0} \implies a$  – внутрішня для  $U_{\alpha_0}$   
 $\implies \exists \varepsilon > 0 : B(a; \varepsilon) \subset U_{\alpha_0} \subset U$ . Отже,  $U$  – відкрита.

2) Задано множину  $U = \bigcap_{k=1}^n U_k$ . Зафіксуємо  $a \in U$ . Тоді  $\forall k = \overline{1, n} : a \in U_k \implies a$  – внутрішня для  $U_k \implies \exists \varepsilon_k > 0 : B(a; \varepsilon_k) \subset U_k$ . Задамо  $\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k \implies B(a; \varepsilon) \subset U$ . Отже,  $U$  – відкрита.

3)  $\emptyset$  – відкрита, бо нема внутрішніх точок, тому що там порожньо. Також  $X$  – відкрита, оскільки для  $a \in X$ , який б  $\varepsilon > 0$  не обрав,  $B(a; \varepsilon) \subset X$ .

Всі твердження доведені. ■

**Remark 1.2.11** Відповідь на питання, чому в другому лише скінченна кількість відкритих множин. Розглянемо  $X = \mathbb{R}$  із метрикою  $\rho(x, y) = |x - y|$ . Задана сім'я відкритих множин  $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ,

причому  $\forall n \geq 1$ . Тоді зауважимо, що  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$ , але така множина вже не є відкритою.

**Corollary 1.2.12** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір. Тоді справедливо наступне:

1) Нехай  $U_\alpha \subset X$ ,  $\alpha \in I$  – сім'я замкнених множин. Тоді  $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$  – замкнена множина;

2) Нехай  $U_k \subset X$ ,  $k = \overline{1, n}$  – сім'я замкнених множин. Тоді  $\bigcup_{k=1}^n U_k$  – замкнена множина;

3)  $\emptyset, X$  – замкнені множини.

*Вказівка: скористатися де Морганом та TODO: вставити референс.*

**Remark 1.2.13** Такі твердження не є правдивими:

$A$  – не відкрита, а тому  $A$  – замкнена (наприклад,  $[0, 1)$  в  $\mathbb{R}$ );

$A$  – відкрита, а тому  $A$  – не замкнена (наприклад,  $\emptyset$  в  $\mathbb{R}$ ).

**Proposition 1.2.14** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір,  $a \in X, r > 0$ . Тоді відкритий окіл  $B(a; r)$  – справді відкритий; замкнений окіл  $B[a; r]$  – справді замкнений.

**Proof.**

(про  $B(a; r)$ ). Задамо точку  $b \in B(a; r)$ . Нехай  $\varepsilon = r - \rho(a, b) > 0$ . Тоді якщо  $x \in B(b; \varepsilon)$ , то тоді  $\rho(x, a) \leq \rho(x, b) + \rho(b, a) < \varepsilon + \rho(b, a) = r$ . Отже,  $B(a; r)$  – відкрита.

(про  $B[a; r]$ ). Для цього достатньо довести, що  $B^c[a; r] = \{x | \rho(a, x) > r\}$  – відкрита. Якщо задати  $\varepsilon = \rho(a, b) - r$  для точки  $b \in B(a; r)$ , то аналогічними міркуваннями отримаємо, що  $B^c[a; r]$  – відкрита. Отже,  $B[a; r]$  – замкнена. ■

**Definition 1.2.15** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір, послідовність  $\{x_n, n \geq 1\} \subset X$  та  $x_0 \in X$ . Дана послідовність називається **збіжною** до  $x_0$ , якщо

$$\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Позначення:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

**Theorem 1.2.16** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір,  $A \subset X$  та  $x_0 \in X$ . Наступні твердження еквівалентні:

- 1)  $x_0$  – гранична точка для  $A$ ;
- 2)  $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A$  – нескінченна множина;
- 3)  $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : x_n \neq x_0 : x_n \rightarrow x_0$ .

**Proof.**

1)  $\Rightarrow$  2) Дано:  $x_0$  – гранична для  $A$ .

!Припустимо, що  $\exists \varepsilon^* > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A$  – скінченна множина, тобто маємо  $x_1, \dots, x_n \in B(x_0; \varepsilon^*)$ . Тоді  $\rho(x_0, x_1) < \varepsilon^*, \dots, \rho(x_0, x_n) < \varepsilon^*$ . Оберемо найменшу відстань та задамо  $\varepsilon_{new}^* = \min_{1 \leq i \leq n} \rho(x_0, x_i)$ .

Створимо  $B(x_0; \varepsilon_{new}^*) \subset B(x_0; \varepsilon)$ . У новому шару жодна точка  $x_1, \dots, x_n \in A$  більше сюди не потрапляє. Тоді  $B((x_0; \varepsilon_{new}^*) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$  – таке неможливо через те, що  $x_0$  – гранична точка. Суперечність!

2)  $\Rightarrow$  3) Дано:  $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A$  – нескінченна множина. Встановимо  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ . Тоді оскільки  $\forall n \geq 1 : B\left(x_0; \frac{1}{n}\right) \cap A$  – нескінченна, то  $\forall n \geq 1 : \exists x_n \in A : \rho(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$ . Якщо далі  $n \rightarrow \infty$ , тоді  $\rho(x_0, x_n) \rightarrow 0$ . Достатньо,  $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \neq x_0 : x_n \rightarrow x_0$ .

3)  $\Rightarrow$  1) Дано:  $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \neq x_0 : x_n \rightarrow x_0$ . Тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \rho(x_0, x_n) < \varepsilon$ . Або, інакше кажучи,  $\forall \varepsilon > 0 : x_N \in B(x_0; \varepsilon) \cap A$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0 : (B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ . ■

### 1.3 Замикання множин

**Definition 1.3.1** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір,  $A \subset X$  та  $A'$  – множина граничних точок  $A$ . Замиканням множини  $A$  називають таку множину

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Часто ще позначають замикання за  $\text{Cl}(A)$ .

**Example 1.3.2** Маємо  $X = \mathbb{R}$ ,  $\rho(x, y) = |x - y|$  та множину  $A = (0, 1)$ . Тоді множина  $A' = [0, 1]$ . Замикання  $\bar{A} = A \cup A' = [0, 1]$ .

**Remark 1.3.3** Розглянемо зараз сукупність замкнених множин  $A \subset A_\alpha \subset X$ . Перетин  $B = \bigcap_{\alpha} A_\alpha$  – також замкнена, водночас  $A_\alpha \supset B \supset A$ . Отже,  $B$  – найменша замкнена множина, що містить  $A$ .

**Proposition 1.3.4** Задано  $\bar{A}$  – замикання. Тоді спредливе наступне:

- 1)  $\bar{A}$  – найменша замкнена множина, що містить  $A$ ;
- 2)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$       $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ ;
- 3)  $A$  – замкнена  $\iff A = \bar{A}$ .

**Proof.**

Доведемо кожне твердження окремо.

1) !Припустимо, що  $\bar{A}$  не є найменшою замкнутою, що містить  $A$ , тобто  $\exists B \subset \bar{A} : B \supset A$  – замкнена. Зафіксуємо точку  $x_0 \in \bar{A}$  – гранична, тоді  $x_0 \in A' \cup A$ .

Якщо  $x_0 \in A'$ , то тоді  $x_0 \in B$ , тому що  $B$  містить всі граничні т.  $A$

Якщо  $x_0 \in A$ , то тоді  $x_0 \in B$ .

В обох випадках  $\bar{A} \subset B$ . Отже,  $\bar{A} = B$ . Суперечність!

$$2) \overline{A \cup B} = (A \cup B)' \cup (A \cup B) \quad \boxed{=}$$

$x_0 \in (A \cup B)' \iff x_0$  – гранична точка  $A \cup B \iff \forall \varepsilon > 0 :$

$$B(x_0; \varepsilon) \cap (A \cup B) = (B(x_0; \varepsilon) \cap A) \cup (B(x_0; \varepsilon) \cap B) \neq \emptyset \text{ (без т. } x_0) \iff$$

$$\begin{cases} x_0 \text{ – гранична для } A \\ x_0 \text{ – гранична для } B \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 \in A' \\ x_0 \in B' \end{cases} \iff x_0 \in A' \cup B'$$

Отже,  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ .

$$\boxed{=} A' \cup B' \cup A \cup B = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$$\overline{A \cap B} = (A \cap B)' \cup (A \cap B) \quad \boxed{\subset}$$

$x_0 \in (A \cap B)' \iff x_0$  – гранична точка  $A \cap B \iff \forall \varepsilon > 0 :$

$$B(x_0; \varepsilon) \cap (A \cap B) = (B(x_0; \varepsilon) \cap A) \cap (B(x_0; \varepsilon) \cap B) \neq \emptyset \text{ (без т. } x_0) \implies$$

$$\begin{cases} x_0 \text{ – гранична для } A \\ x_0 \text{ – гранична для } B \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 \in A' \\ x_0 \in B' \end{cases} \iff x_0 \in A' \cap B'$$

Отже,  $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$ .

$$\boxed{\subset} (A' \cap B') \cup (A \cap B) = (\text{TODO: обміркувати})$$

3) Доведення в обидва боки.

$\boxed{\Rightarrow}$  Дано:  $A$  – замкнена. Тоді  $A$  містить всі свої граничні точки. Так само  $A'$  містить граничні точки  $A$ . Тому  $A = \bar{A}$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  Дано:  $A = \bar{A}$ . Тобто  $A$  містить всі свої граничні точки. Отже,  $A$  – замкнена.

Всі твердження доведені. ■

**Definition 1.3.5** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір та  $A \subset X$ . Множина  $A$  називається **щільною** в  $X$ , якщо

$$\bar{A} = X$$

**Definition 1.3.6** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір.

Метричний простір називається **сепарабельним**, якщо

існує в даному просторі скінченна чи зліченна щільна підмножина.

**Example 1.3.7** Розглянемо такі приклади:

1)  $(\mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|)$  – сепарабельний, тому що  $\mathbb{Q}$  – зліченна та щільна підмножина в  $\mathbb{R}$ .

2) Маємо простір  $l_2 = \left\{ \vec{a} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$  – нормований простір. Розглянемо множину

$l_2 O = \{ \vec{a} \in l_2 \mid \text{скінченна кількість членів не нуль} \}$ . Розглянемо  $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots\} \in l_2$ . Доведемо, що вона – гранична для  $l_2 O$ .

Задамо послідовність  $\{\vec{a}_n, n \geq 1\} \subset l_2 O$ , де кожний елемент задається таким чином:

$$\vec{a}_n = \{a_1, \dots, a_n, 0, \dots\} \implies \rho(\vec{a}, \vec{a}_n) = \|\vec{a} - \vec{a}_n\| = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n^2 \rightarrow 0, \text{ оскільки ряд збіжний, а тому хвіст}$$

ряду прямує до нуля. Отже,  $\vec{a}_n \rightarrow \vec{a}$ , тож  $\vec{a}_n$  – гранична точка.

Тоді можна ствердити, що  $l_2 O$  – щільна в  $l_2$ , або інакше  $\overline{l_2 O} = l_2$ . А оскільки  $l_2 O \subset l_2$  та ще й нескінченна, то тоді  $l_2$  – сепарабельний.

3) Простір  $C([a, b])$  – сепарабельний.

*Доведу пізніше, коли дізнаюсь про теорему Вейерштраса про наближення неперервної на відрізку функції многочленами.*

4) А ось простір  $l_{\infty}$  – не сепарабельний.

*Доведу пізніше.*

5) Підпростір сепарабельного метричного простору – сепарабельний

*Доведу пізніше.*

## 1.4 Повнота

**Definition 1.4.1** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір.

Послідовність  $\{x_n, n \geq 1\}$  називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Remark 1.4.2** Це означення можна інакше переписати, більш коротким чином:

$$\rho(x_n, x_m) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$$

**Proposition 1.4.3** Будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною.

**Proof.**

Маємо  $\{x_n, n \geq 1\}$  – збіжна, тобто  $\rho(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . За нерівністю трикутника, маємо  $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m)$ . Якщо спрямувати одночасно  $m, n \rightarrow \infty$ , то тоді  $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ . Отже,  $\{x_n, n \geq 1\}$  – фундаментальна. ■

**Remark 1.4.4** Проте не кожна фундаментальна послідовність – збіжна.

**Example 1.4.5** Маємо  $X = (0, 1]$  – підпростір  $\mathbb{R}$ . Розглянемо послідовність  $\left\{ x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}$ , де  $x_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  – збіжна, проте  $0 \notin X$ . Тому така послідовність не має границі в  $X$ , але вона – фундаментальна за твердженням.

**Definition 1.4.6** Метричний простір  $(X, \rho)$  називається **повним**, якщо

будь-яка фундаментальна послідовність має границю.

**Example 1.4.7** Зокрема маємо наступне:

1)  $X = \mathbb{R}$  – повний за критерієм Коші із матану;

2)  $X = (0, 1]$  – не повний, бо принаймні  $\left\{ x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}$  – фундаментальна, проте не має границі.

**Proposition 1.4.8** Задано  $(X, \rho)$  – повний метричний простір та  $(Y, \rho)$  – підпростір.

$(Y, \rho)$  – повний  $\iff Y$  – замкнена в  $X$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $(Y, \rho)$  – повний.

Припустимо, що  $Y$  – не замкнена, тобто існує  $x_0 \in X \setminus Y$  – гранична точка для  $Y$ . Тоді існує послідовність  $\{y_n\} \subset Y$ , для якої  $y_n \rightarrow x_0$  та  $y_n \neq x_0$ . Зауважимо, що  $\{y_n\} \subset X$  збіжна саме в просторі  $X$ , тому саме в просторі  $X$  послідовність  $\{y_n\} \subset X$  – фундаментальна. Проте зрозуміло цілком, що  $\{y_n\} \subset Y$  буде фундаментальною в просторі  $Y$ , проте в силу повноти  $(Y, \rho)$ , матимемо збіжність саме в  $Y$ . Таким чином,  $x_0 \in Y$  – суперечність!

$\Leftarrow$  Дано:  $Y$  – замкнена в  $X$ . Візьмемо  $\{y_n\} \subset Y \subset X$  – фундаментальна. Тоді в силу повноти  $X$ , вона – збіжна в просторі  $X$ . Скажімо,  $y_n \rightarrow x_0$ . Якщо точка  $x_0 \in Y$ , то тоді послідовність  $\{y_n\}$  збіжна в  $Y$ . Інакше при  $x_0 \in X \setminus Y$  зауважимо, що  $y_n \neq x_0$ , тому  $x_0$  – гранична точка  $Y$ . У силу замкненості ми отримаємо  $x_0 \in Y$  – послідовність  $\{y_n\}$  знову збіжна в  $Y$ . ■

**Definition 1.4.9** Повний нормований простір називається **банаховим**. Повний евклідів простір (відносно метрики, що породжена скалярним добутком) називається **гільбертовим**.

**Proposition 1.4.10** Простір  $C([a, b])$  зі стандартною нормою  $\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$  – банахів.

**Proof.**

Задамо фундаментальну послідовність  $\{x_n, n \geq 1\}$  на множині  $C([a, b])$ . Тоді

$\forall t_0 \in [a, b] : |x_n(t_0) - x_m(t_0)| \leq \|x_n - x_m\| = \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x_m(t)|$ . Із цієї нерівності випливає, що

$\forall t_0 \in [a, b] : \{x_n(t_0), n \geq 1\}$  – фундаментальна.

За критерієм Коші (із матану), вона – збіжна, тобто  $x_n(t_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(t_0)$ . Щойно показали поточкову збіжність  $\{x_n, n \geq 1\}$  до функції  $y$ . Доведемо, що вона збігається рівномірно (тобто за нормою).

$\{x_n, n \geq 1\}$  – фундаментальна, тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n \geq N : \|x_n(t) - x_m(t)\| < \varepsilon$ . Або  $\forall t \in [a, b] : |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ . Зафіксуємо деякі  $t \in [a, b]$  та  $n \geq N$ . А потім спрямуємо  $m \rightarrow \infty$ . Тоді  $|x_n(t) - y(t)| < \varepsilon$ . Це виконується  $\forall t \in [a, b]$  та  $n \geq N$ , або це записується інакше:

$\forall n \geq N : \|x_n - y\| < \varepsilon$ . Отже,  $x_n \rightarrow y$ . ■

**Example 1.4.11** Задамо підпростір  $C([0, 1])$  із нормою із  $L_2([0, 1], \lambda_1)$ , де  $\lambda_1$  – міра Лебега. Доведемо, що в такому разі  $C([0, 1])$  уже не буде банаховим.

Розглянемо таку функціональну послідовність  $\{x_n, n \geq 1\} \subset C([0, 1])$ , що задається таким чином:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{nx}{2} - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Це набір функцій, де похила частина зі збільшенням  $n$  перетворюється в вертикальну лінію. За-

уважимо, що якщо взяти поточкову границю, то отримаємо  $x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ . При цьому

$$\|x_n - x\|_2^2 = \int_{[0, 1]} |x_n - x|^2 d\lambda_1 = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^2 dt = \dots = \frac{1}{6n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отже,  $\{x_n\}$  в просторі  $C([0, 1])$  із нормою  $L_2$  збігається до точки  $x \notin C([0, 1])$ , але при цьому буде граничною для  $C([0, 1])$ . Тобто  $C([0, 1])$  не буде замкненим, тож  $C([0, 1])$  – не повний, або не банахів.

**Proposition 1.4.12** Евклідів простір  $l_2$  – гільбертів.

**Proof.**

Задамо фундаментальну послідовність  $\{\vec{x}_n, n \geq 1\}$  на множині  $l_2$

Тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall k \geq 1 : |x_n^k - x_m^k| < \varepsilon$$

Тоді послідовність  $\{x_n^k, n \geq 1\}$  – фундаментальна – тому (за матаном) збіжна,  $x_n^k \rightarrow y^k$

Доведемо, що  $\vec{x}$  збігається до  $\vec{y}$  за нормою

$$\text{Маємо } \sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall K \geq 1 : \sum_{k=1}^K (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2$$



Спрямуємо  $m \rightarrow \infty$ , тоді  $\sum_{k=1}^K (x_n^k - y^k)^2 < \varepsilon^2$

Звідки випливає збіжність ряду  $\sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - y^k)^2$  та його оцінка

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - y^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \|\vec{x}_n - \vec{y}\| < \varepsilon$$

Отже,  $\vec{x}_n \rightarrow \vec{y}$  ■

**Lemma 1.4.13** Задано  $\{x_n, n \geq 1\}$  - фундаментальна та  $\{x_{n_k}, k \geq 1\}$  - збіжна. Тоді  $\{x_n, n \geq 1\}$  - збіжна

**Proof.**

Маємо  $a_{n_k} \rightarrow a, k \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \rho(a_{n_k}, a) < \varepsilon$$

Також відомо, що  $\forall n, m \geq N : \rho(a_n, a_m) < \varepsilon$

Треба ще  $n_k \geq N$ . Тоді для  $n \geq n_K$

$$\rho(a_n, a) \leq \rho(a_n, a_{n_K}) + \rho(a_{n_K}, a) < 2\varepsilon$$

Отже,  $a_n \rightarrow a_0$  ■

**Theorem 1.4.14 Критерій Кантора**

Умова Кантора: для кожної послдовності  $\{B[a_n; r_n], n \geq 1\}$  такої, що  $B[a_1; r_1] \supset B[a_2; r_2] \supset \dots$  та  $r_n \rightarrow 0$ , перетин  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B[a_n; r_n] \neq \emptyset$  (це послідовність куль, що стягується).

$(X, \rho)$  - повний  $\iff$  виконується умова Кантора.

Перед доведенням треба зробити кілька зауважень.

I. Точка, що належить перетину, буде в цьому випадку єдиною.

!Припустимо, що це не так, тобто  $\exists b^*, b^{**} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B[a_n; r_n]$ . Тоді  $\forall n \geq 1 : \begin{cases} \rho(a_n, b^*) \leq r_n \\ \rho(a_n, b^{**}) \leq r_n \end{cases}$ .

$$\implies \rho(b^*, b^{**}) \leq \rho(b^*, a_n) + \rho(a_n, b^{**}) \leq r_n + r_n = 2r_n.$$

Спрямуємо  $n \rightarrow \infty$ , тоді  $\rho(b^*, b^{**}) \leq 0 \implies \rho(b^*, b^{**}) = 0 \implies b^* = b^{**}$ . Суперечність!

II. Покажемо, що  $\{a_n, n \geq 1\}$  - послідовність центрів - фундаментальна.

За умовою,  $r_n \rightarrow 0 \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : r_n < \varepsilon$ . Достатньо взяти лише  $r_N < \varepsilon$ . Тоді  $\forall n, m \geq N : a_m, a_n \in B[a_N, r_N] \implies \rho(a_m, a_N) < r_N$  та  $\rho(a_n, a_N) < r_N$ .

$$\implies \rho(a_n, a_m) \leq \rho(a_n, a_N) + \rho(a_N, a_m) < 2r_N < 2\varepsilon. \text{ Отже, } \{a_n, n \geq 1\} - \text{фундаментальна.}$$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $(X, \rho)$  - повний. Задано послідовність куль  $\{B[a_n; r_n], n \geq 1\}$ , що стягується. Тоді послідовність  $\{a_n, n \geq 1\}$  - фундаментальна. Оскільки  $X$  - повний, то тоді  $\{a_n, n \geq 1\}$  - збіжна, тобто

$a_n \rightarrow a_0$ . Оскільки  $B[a_n; r_n]$  - замкнені, то маємо, що  $a_0 \in B_n$ . Звідси  $a_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ .

$\Leftarrow$  Дано: умова Кантора. Нехай  $\{a_n, n \geq 1\}$  - фундаментальна послідовність. Нам достатньо буде у неї взяти збіжну підпослідовність. Нехай маємо  $n_1 \in \mathbb{N}$ , щоб  $\forall n \geq n_1 : \rho(a_n, a_{n_1}) < \frac{1}{2}$ .

$$\text{Тоді } \exists n_2 > n_1 : \forall n \geq n_2 : \rho(a_n, a_{n_2}) < \frac{1}{4}$$

$\vdots$

Тоді маємо послідовність  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  із властивістю  $\forall n \geq n_k : \rho(a_n, a_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$ .

Маємо тоді кулі  $B\left[a_{n_k}; \frac{1}{2^{k-1}}\right]$ , що вкладені. Дійсно,  $x \in B\left[a_{n_{k+1}}; \frac{1}{2^k}\right] \implies$

$$\rho(a_{n_k}, x) \leq \rho(a_{n_k}, a_{n_{k+1}}) + \rho(a_{n_{k+1}}, x) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \implies x \in B\left[a_{n_k}; \frac{1}{2^{k-1}}\right]$$

Якщо  $a$  - спільна точка куль, то  $a_{n_k} \rightarrow a$ . ■

**Definition 1.4.15** Задано  $(X, \rho)$  та  $(Y, \tilde{\rho})$  – два різних метричних простори. Відображення  $f: X \rightarrow Y$  називається **ізометрією**, якщо

$$\forall x_1, x_2 \in X : \tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$$

Тобто суть ізометрії – це збереження відстаней.

**Remark 1.4.16** Кожна ізометрія  $f$  – уже автоматично ін'єктивна.

Дійсно, припустимо, що  $f(x_1) = f(x_2)$ . За визначенням ізометрії,  $\tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$ . Отримаємо  $\rho(x_1, x_2) = 0$ , тобто  $x_1 = x_2$ .

**Definition 1.4.17** Метричні простори  $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$  називаються **ізометричними**, якщо

$$\exists f: X \rightarrow Y \text{ – бієктивна ізометрія}$$

**Example 1.4.18** Розглянемо  $(\mathbb{R}, \tilde{\rho})$  та  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \rho$  – два метричних простори. У цьому випадку  $\rho$  – стандартна метрика та  $\tilde{\rho}(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$ . Ці два простори – ізометричні. Дійсно, між ними існує ізометрія  $\arctg: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , що є бієктивною.

**Proposition 1.4.19** Задані  $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$  – два ізоморфні метричні простори.  $(X, \rho)$  – повний  $\iff (Y, \tilde{\rho})$  – повний.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $(X, \rho)$  – повний. Нехай  $\{y_n, n \geq 1\}$  – фундаментальна послідовність. Оскільки  $X, Y$  ізометричні, то існує бієкція  $f: X \rightarrow Y$ , що є ізометрією. Тож звідси  $\exists! x_n \in X : f(x_n) = y_n$ . Розглянемо послідовність  $\{x_n, n \geq 1\}$  та зауважимо, що  $\rho(x_n, x_m) = \tilde{\rho}(y_n, y_m) \rightarrow 0$  в силу фундаментальності. Отже,  $\{x_n, n \geq 1\}$  – фундаментальна, тож збіжна за повнотою. Тобто  $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ . Позначимо  $f(x) = y$ . Звідси випливає, що  $\tilde{\rho}(y_n, y) = \rho(x_n, x) \rightarrow 0$ . Тобто  $\{y_n, n \geq 1\}$  – збіжна.

$\Leftarrow$  *зеркальне доведення.* ■

**Definition 1.4.20** Задано  $Y$  – повний метричний простір.

Він буде називатися **поповненням (completion)** метричного простору  $X$ , якщо

$$\begin{aligned} X &\text{ – ізометричний підпростір } Y; \\ X &\text{ – щільна в } Y. \end{aligned}$$

**Theorem 1.4.21** Для кожного метричного простору  $(X, \rho)$  існує поповнення. Причому це поповнення єдине з точністю до ізометрії.

**Proof.**

I. *Існування.*

Позначимо  $F$  за множина фундаментальних послідовностей  $\{x_n\}$  в  $X$ . Стаціонарні послідовності є фундаментальними, тож звідси  $X$  можна сприймати як підмножину  $F$ .

Розглянемо функцію  $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$ , яка визначена на  $F \times F$ . Для коректності треба довести існування даної границі. Ми доведемо, що  $\{\rho(x_n, y_n), n \geq 1\}$  – фундаментальна (це числова послідовність, тому цього буде достатньо).

Нам відомо, що  $\{x_n\}, \{y_n\}$  фундаментальні, тобто  $\exists N_1, N_2$ , для яких  $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon, \rho(y_n, y_m) < \varepsilon$  для всіх  $n, m \geq N_1, m, n \geq N_2$ . Тоді при  $N = \max\{N_1, N_2\}$  справедлива оцінка:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(x_m, y_m) \leq (\rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)) - \rho(x_m, y_m) < 2\varepsilon.$$

Отже, функція  $d$  визначена коректно. Вона майже метрика, оскільки (легко перевірити) виконуються всі властивості. На жаль,  $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0 \not\Rightarrow \{x_n\} = \{y_n\}$  (приклад буде нижче).

Створимо відношення еквівалентності  $\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff d(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0$ . Утвориться фактормножина  $F/\sim = \hat{F}$ . Елементи з  $\hat{F}$  позначатимемо за  $\{\overline{x_n}\}$ . Наша мета буде довести, що саме  $\hat{F}$  буде поповненням  $X$ .

На фактормножині покладемо  $\tilde{\rho}(\{\overline{x_n}\}, \{\overline{y_n}\}) = d(\{x_n\}, \{y_n\})$ . Варто пересвідчитися, що воно визначено коректно.

Нехай  $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$  та  $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ . Тобто  $d(\{x_n\}, \{x'_n\}) = 0$  та  $d(\{y_n\}, \{y'_n\}) = 0$ . Тоді  $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x'_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y'_n, y_n) = d(\{x'_n\}, \{y'_n\})$ .

Аналогічно отримуємо  $d(\{x'_n\}, \{y'_n\}) \leq d(\{x_n\}, \{y_n\})$ . Отже,  $d(\{x'_n\}, \{y'_n\}) = d(\{x_n\}, \{y_n\})$ , тобто  $\tilde{\rho}$

визначилося коректним чином.

Поставимо відображення  $f: X \rightarrow \hat{F}$  таким чином:  $f(x) = \overline{\{x\}}$ . Це буде ізометрією, тому що  $\tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \tilde{\rho}(\{x_1\}, \{x_2\}) = d(\{x_1\}, \{x_2\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$ . Відображення  $f$  зобов'язане бути сюр'єктивним, оскільки повертається клас еквівалентності. Тобто  $f$  – бієктивна ізометрія, а тому  $(X, \rho), (\hat{F}, \tilde{\rho})$  – ізометричні.

Покажемо, що  $(\hat{F}, \tilde{\rho})$  – повний метричний простір. (TODO: обміркувати).

## II. Єдиність.

Розглянемо два поповнення  $(Y_1, \tilde{\rho}_1), (Y_2, \tilde{\rho}_2)$  простору  $(X, \rho)$ . Тобто, за означенням, маємо  $Y_1 \supset X_1 \sim X \sim X_2 \subset Y_2$ , а також  $\overline{X_1} = Y_1, \overline{X_2} = Y_2$ . Під  $\sim$  мається на увазі ізометричність. Із цього  $X_1$  ізометричний до  $X_2$ , нехай  $g$  – відповідна ізометрія.

Побудуємо  $f: Y_1 \rightarrow Y_2$  за таким правилом: для кожного  $y \in Y_1$  беремо таку послідовність  $\{x_n\} \subset X_1$ , щоб  $x_n \rightarrow y$  – тоді  $f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$ . Треба пересвідчитися, що визначення коректне. Дійсно, нехай  $\{x_n\}, \{x'_n\}$  – такі дві послідовності, що  $x_n \rightarrow y, x'_n \rightarrow y$ . Тоді звідси випливає наступне:

$$\tilde{\rho}_2(g(x_n), g(x'_n)) \stackrel{\text{ізометричність}}{=} \tilde{\rho}_1(x_n, x'_n) \leq \tilde{\rho}_1(x_n, y) + \tilde{\rho}_2(y, x'_n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким чином,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x'_n)$ , а тому значення функцій коректно визначено. (TODO: подумати над тим, чи правильно я все це розписав). ■

**Example 1.4.22** Беремо стандартний метричний простір  $\mathbb{R}$ , послідовності  $\{x_n\} = \{0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$  та  $\{y_n\} = \{1, 1, 1, \dots\}$ . Зауважимо, що  $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0.00 \dots 01 = 0$ . При цьому зрозуміло, що  $\{x_n\} \neq \{y_n\}$ .

## 1.5 Неперервні відображення

**Definition 1.5.1** Задані  $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$  – два метричних простори.

Відображення  $f: X \rightarrow Y$  називається **неперервним у точці**  $x_0$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X : \rho(x, x_0) < \delta \implies \tilde{\rho}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

**Remark 1.5.2** Дане означення можна записати більш компактним чином. Маємо  $f: X \rightarrow Y$ .

$f$  – неперервне в точці  $x_0 \in X \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f(B(x_0; \delta)) \subset B(f(x_0); \varepsilon)$ .

**Proposition 1.5.3** Задані  $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$  – два метричних простори та  $f: X \rightarrow Y$ .

$f$  – неперервне в точці  $x_0 \in X \iff \forall \{x_n\} \subset X : x_n \rightarrow x_0 \text{ в } X \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0) \text{ в } Y$ .

*Вправа: довести.*

**Theorem 1.5.4** Задані  $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$  – два метричних простори та  $f: X \rightarrow Y$ .

$f$  – неперервне (на множині  $X$ )  $\iff \forall V$  – замкнена в  $Y : f^{-1}(V)$  – замкнена в  $X$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f$  – неперервне. Нехай  $V$  – замкнена в  $Y$ . Зафіксуємо  $x_n \in f^{-1}(V)$  таким чином, що  $x_n \rightarrow x_0$ . Але за неперервністю,  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ , та додатково  $f(x_n) \in V$ . Значить, за замкненістю  $V$ , точка  $f(x_0) \in V \implies x_0 \in f^{-1}(V)$ . Отже,  $f^{-1}(V)$  – замкнена.

$\Leftarrow$  Дано:  $\forall V$  – замкнена в  $Y : f^{-1}(V)$  – замкнена в  $X$ . Оберемо  $x_n \rightarrow x_0$ .

Припустимо, що  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ , тобто існує шар  $B(f(x_0); \varepsilon)$ , поза яким знаходиться підпослідовність  $\{f(x_{n_k})\}$ . Якщо  $V$  – замикання множини  $\{f(x_{n_k})\}$ , то звідси  $x_{n_k} \in f^{-1}(V)$ ;  $f(x_0) \notin V$ . Тоді звідси  $x_0 \notin f^{-1}(V)$ , проте  $x_{n_k} \rightarrow x_0$  та  $x_0$  є граничною точкою для  $f^{-1}(A)$ . Суперечність! ■

**Corollary 1.5.5**  $f$  – неперервне  $\iff \forall U$  – відкрита в  $Y : f^{-1}(U)$  – відкрита в  $X$ .

*Вказівка: застосувати попередню теорему та рівність  $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ .*

**Proposition 1.5.6** Задані  $X, Y, Z$  – метричні простори та  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ . Нехай  $f$  – неперервне в точці  $x_0 \in X$  та  $g$  – неперервне в точці  $f(x_0) \in Y$ . Тоді  $g \circ f$  – неперервне в точці  $x_0 \in X$ .

*Вправа: довести.*

**Proposition 1.5.7** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір та зафіксуємо  $x_0 \in X$ . Тоді функція  $f(x) = \rho(x, x_0)$ , де  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , – неперервна на  $X$ .

**Proof.**

Дійсно, нехай  $y_0 \in X$ . Припустимо, що  $\{y_n\}$  така, що  $y_n \rightarrow y_0$ . Хочемо  $f(y_n) \rightarrow f(y_0)$ . Справді,  $|f(y_n) - f(y_0)| = |\rho(y_n, x_0) - \rho(y_0, x_0)| \leq |\rho(y_n, y_0)| \rightarrow 0$ .

Для  $\mathbb{R}$  береться стандартна метрика, якщо нічого іншого не вказується зазвичай. ■

**Corollary 1.5.8** Задано  $(L, \|\cdot\|)$  – нормований простір. Тоді норма  $\|\cdot\|: L \rightarrow \mathbb{R}$  – неперервна. Вказівка: оскільки  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ , то звідси  $\|x\| = \rho(x, 0)$ .

**Corollary 1.5.9** Задано  $(E, (\cdot, \cdot))$  – евклідов простір. Тоді при фіксованому  $x_0 \in E$  маємо  $(x, x_0)$  – неперервне відображення.

**Proof.**

Нехай  $\{y_n\}$  задана так, що  $y_n \rightarrow y_0$ . Хочемо довести, що  $(y_n, x_0) \rightarrow (y_0, x_0)$ .

$|(y_n, x_0) - (y_0, x_0)| = |(y_n - y_0, x_0)| \leq \sqrt{\|y_n - y_0\|} \sqrt{\|x_0\|} \rightarrow 0$ , оскільки  $\|\cdot\|$  – неперервне. ■

**Definition 1.5.10** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір та  $f: X \rightarrow X$ .

Дане відображення називається **стиском**, якщо

$$\exists q \in (0, 1) : \forall x, y \in X : \rho(f(x), f(y)) \leq q \cdot \rho(x, y)$$

**Remark 1.5.11** Стискаючі відображення – неперервні.

Вказівка: обрати  $\delta = \frac{q}{\varepsilon}$  при всіх  $\varepsilon > 0$ .

**Theorem 1.5.12 Теорема Банаха**

Задано  $(X, \rho)$  – повний метричний простір та  $f: X \rightarrow X$  – стискаюче відображення. Тоді існує єдина точка нерухомою, тобто  $\exists! x \in X : f(x) = x$ .

**Proof.**

I. Існування.

Нехай  $x_0 \in X$  – довільна точка. Зробимо позначення:  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(x_1)$ , ...,  $x_n = f(x_{n-1})$ , ...

Покажемо, що послідовність  $\{x_n, n \geq 0\}$  – фундаментальна. Дійсно, для  $m \leq n$  маємо:

$$\rho(x_m, x_n) = \rho(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) \leq q \cdot \rho(x_{m-1}, x_{n-1}) \leq \dots \leq q^m \rho(x_0, x_{n-m}).$$

$$\begin{aligned} \rho(x_0, x_{n-m}) &\leq \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{n-m-1}, x_{n-m}) \leq \rho(x_0, x_1)(1 + q + \dots + q^{n-m-1}) \leq \\ &\leq \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-q}. \end{aligned}$$

$$\text{Разом отримаємо } \rho(x_m, x_n) \leq \frac{q^m}{1-q} \rho(x_0, x_1) \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty.$$

Оскільки  $(X, \rho)$  – повний, то  $\{x_n\}$  – збіжна, позначимо  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Зважаючи на неперервність

стиска, отримаємо  $f(a) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$ . Тобто  $a$  – це наша шукана нерухомою точка.

**II. Єдиність.**

Припустимо, що  $f$  має дві різні нерухомі точки  $a, b$ . Буде суперечність! Дійсно,

$$0 < \rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \leq q \cdot \rho(a, b) < \rho(a, b). \quad \blacksquare$$

**Remark 1.5.13** Насправді, в теоремі Банаха достатньо вимагати, щоб саме  $f^n \stackrel{\text{def.}}{=} f \circ \dots \circ f$  було

стиском, а не відображення  $f$ .

Дійсно, за теоремою Банаха,  $f^n$  матиме єдину нерухому точку  $a$ , тобто  $f^n(a) = a$ . Тоді точка  $f(a)$  буде теж нерухомою для  $f^n$ , оскільки  $f^n(f(a)) = f(f^n(a)) = f(a)$ . Але за єдиністю,  $f(a) = a$  – дві нерухомі мають збігатися. Єдиність нерухомої точки для  $f$  доводиться неважко.

**1.6 Компактність**

**Definition 1.6.1** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір та  $A \subset X$ .

Множина  $A$  називається **компактом**, якщо

$$\forall \{x_n, n \geq 1\} \subset A : \exists \{x_{n_k}, k \geq 1\} : x_{n_k} \rightarrow x_0, k \rightarrow \infty, \text{ причому } x_0 \in A$$

Якщо прибрати умову  $x_0 \in A$ , то тоді  $A$  називається **передкомпактом**.

**Proposition 1.6.2** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір та  $A \subset X$ .

$A$  – компакт  $\iff \forall B \subset A$ , де  $B$  – нескінченна множина, існує  $x_0 \in A$  – гранична точка  $B$ .

Якщо прибрати умову  $x_0 \in A$ , то вже мова буде йти про передкомпакт.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $A$  – компакт. Нехай  $B \subset A$  – нескінченна множина. Оберемо послідовність  $\{x_n, n \geq 1\} \subset B \subset A$ , де всі вони між собою різні. Тоді за умовою компактності, існує підпослідовність  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ , причому  $x_0 \in A$ . Зауважимо, що всі  $x_{n_k} \neq x_0$ , тож  $x_0$  – гранична точка  $A$ .

Якби існували  $k \in \mathbb{N}$ , для яких  $x_{n_k} = x_0$ , то тоді ми би сформували підпослідовність  $\{x_{n_{k_m}}\}$  без цих елементів, причому  $x_{n_{k_m}} \rightarrow x_0$ , а тепер  $x_{n_{k_m}} \neq x_0$ . Тож все одно  $x_0$  залишається граничною точкою  $A$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\forall B \subset A$ , де  $B$  – нескінченна множина, існує  $x_0 \in A$  – гранична точка  $B$ . Отже, нехай  $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$  – довільна послідовність. У нас є два варіанти:

I. Множина значень  $\{x_n\}$  – скінченна. Тоді можна відокремити стаціонарну підпослідовність.

II. Множина значень  $\{x_n\}$  – нескінченна, всі ці значення покладемо в множину  $B \subset A$ . Тоді за умовою, існує  $x_0 \in A$  – гранична точка  $B$ . Отже,  $B \cap B(x_0; \varepsilon)$  містить нескінченне число точок для всіх  $\varepsilon > 0$ . Зокрема:

$\varepsilon = 1 \implies B \cap B(x_0; 1)$  має нескінченну множину. Там існує елемент  $y_1 \in B \cap B(x_0; 1)$ , тобто це одне зі значень послідовності. Тобто  $y_1 = x_{n_1}$ .

$\varepsilon = \frac{1}{2} \implies B \cap B\left(x_0; \frac{1}{2}\right)$  має нескінченну множину. Там існує елемент  $y_2 \in B \cap B\left(x_0; \frac{1}{2}\right)$ , тобто це одне зі значень послідовності. Тобто  $y_2 = x_{n_2}$ . Причому можна обрати  $x_{n_2} > x_{n_1}$ . Якби так не було можливо, то  $B \cap B\left(x_0; \frac{1}{2}\right)$  була б скінченною множиною, що не наше випадок.

$\vdots$

Побудували підпослідовність  $\{x_{n_k}, k \geq 1\}$ , причому  $\rho(x_0, x_k) < \frac{1}{k}$ . Тож при  $k \rightarrow \infty$  матимемо  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in A$ . Отже,  $A$  – компакт.

*Випадок передкомпакту повторюється майже все слово в слово.* ■

**Proposition 1.6.3** Задано  $(X, \rho)$  – компактний метричний простір. Тоді  $(X, \rho)$  – повний.

**Proof.**

Дійсно, нехай  $\{x_n\} \subset X$  – фундаментальна. Оскільки  $X$  – компакт, то існує збіжна підпослідовність  $\{x_{n_k}\}$ , де  $x_{n_k} \rightarrow x, x \in X$ . Ми вже знаємо, що тоді й сама послідовність  $\{x_n\} \rightarrow x$  буде збіжною. Отже,  $(X, \rho)$  – повний метричний простір. ■

**Definition 1.6.4** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір та  $A \subset X$ .

Множина  $A$  називається **обмеженою**, якщо

$$\exists R > 0 : A \subset B(a; R)$$

**Definition 1.6.5** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір та  $A \subset X$ .

Множина  $A$  називається **цілком обмеженою**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists C_\varepsilon = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : A \subset \bigcup_{x \in C_\varepsilon} B(x; \varepsilon)$$

До речі,  $C_\varepsilon$ , для якої виконана  $A \subset \bigcup_{x \in C_\varepsilon} B(x; \varepsilon)$ , називається **скінченною  $\varepsilon$ -сіткою**.

Тобто  $A$  – цілком обмежена, коли вона має скінченну  $\varepsilon$ -сітку для всіх  $\varepsilon > 0$ .

**Proposition 1.6.6** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір та  $A$  – цілком обмежена множина. Тоді  $A$  – обмежена.

**Proof.**

Для множини  $A$  існує 1-сітка, тобто  $C_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ , для якої  $A \subset \bigcup_{x \in C_1} B(x; 1)$ .

Зафіксуємо  $y \in X$  та оберемо  $R = 1 + \max_{x \in C_1} \rho(x, y)$ . Тоді хочемо довести, що  $A \subset B(y; R)$ .

Нехай  $a \in A$ , тоді вже  $a \in B(x; 1)$  при деякому  $x \in C_1$ , а також  $\rho(a; x) < 1$ . Звідси  $\rho(a; y) \leq \rho(a; x) + \rho(x; y) < 1 + \max_{x \in C_1} \rho(x; y) = R$ .

Отже,  $A$  – обмежена. ■

**Remark 1.6.7** Не обов'язково вимагати, щоб  $A$  була цілком обмежена. Подивившись на це доведення, ми можемо лише вимагати, щоб  $A$  мала хоча б одну  $\varepsilon$ -сітку – тоді буде обмеженість  $A$ .

### Theorem 1.6.8 Критерій Фреше-Хаусдорфа

Нехай  $(X, \rho)$  – повний метричний простір та  $A \subset X$ .

$A$  – цілком обмежена  $\iff A$  – передкомпакт.

**Remark 1.6.9** Під час доведення  $\Leftarrow$  нам не потрібна буде умова повноти метричного простору.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $A$  – цілком обмежена. Нехай  $\{a_n, n \geq 1\} \subset A$  – довільна послідовність.

Оберемо 1-сітку  $C_1$ , де  $A \subset \bigcup_{x \in C_1} B(x; 1)$ . В одному з цих шарів нескінченне число членів послідовності, той шар позначу за  $B(y_1; 1)$ ; маємо підпослідовність  $\{a_{n_k}, k \geq 1\} \subset B(y_1; 1)$ .

Оберемо  $\frac{1}{2}$ -сітку  $C_{\frac{1}{2}}$ , де  $A \subset \bigcup_{x \in C_{\frac{1}{2}}} B\left(x; \frac{1}{2}\right)$ . В одному з цих шарів нескінченне число членів підпослідовності, той шар позначу за  $B\left(y_2; \frac{1}{2}\right)$ ; маємо підпідпослідовність  $\{a_{n_{k_m}}, k \geq 1\} \subset B\left(y_2; \frac{1}{2}\right)$ .

⋮

Отримали послідовність центрів  $\{y_n, n \geq 1\}$ , доведемо її фундаментальність.

$\rho(y_n, y_m) \leq \rho(y_n, a_*) + \rho(a_*, y_m) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \rightarrow 0$  при  $n, m \rightarrow \infty$ . У даному випадку ми підібрали елемент  $a_* \in B\left(\frac{1}{n}; y_n\right) \cap B\left(\frac{1}{m}; y_m\right)$ .

Тепер розглянемо підпослідовність  $\{a_{n_p}, p \geq 1\}$ , яка будується таким чином: беремо перший елемент з  $\{a_{n_k}\}$  (це наше  $a_{n_1}$ ), потім перший елемент з  $\{a_{n_{k_m}}\}$  (це наше  $a_{n_2}$ ), ... Доведемо, що  $\{a_{n_p}, p \geq 1\}$  – фундаментальна. Дійсно,

$\rho(a_{n_p}, a_{n_t}) \leq \rho(a_{n_p}, y_p) + \rho(y_p, y_t) + \rho(y_t, a_{n_t}) < \frac{1}{p} + \frac{1}{t} + \rho(y_p, y_t) \rightarrow 0, t, p \rightarrow \infty$

Оскільки  $(X, \rho)$  – повний, то звідси  $\{a_{n_p}, p \geq 1\}$  – збіжна підпослідовність. Довели, що  $A$  – передкомпакт.

$\Leftarrow$  Дано:  $A$  – передкомпакт.

Припустимо, що  $A$  – це є цілком обмеженою. Тобто для деякого  $\varepsilon > 0$  не існує  $\varepsilon$ -сітки. Нехай  $x_1 \in A$ . Тоді існує  $x_2 \in A$ , для якої  $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$  (інакше якби для кожної  $x_2 \in A$  була б  $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon$ , то ми би знайшли  $\varepsilon$ -сітку  $\{x_1\}$ , що суперечить умові).

Далі існує  $x_3 \in A$ , для якої  $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$  та  $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$  (аналогічно якби для кожної  $x_3 \in A$  ці дві нерівності не виконувалися би, то ми би знайшли один з трьох  $\varepsilon$ -сіток:  $\{x_1\}$  або  $\{x_2\}$  або  $\{x_1, x_2\}$ ).

⋮

Побудували послідовність  $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$ , для якої справедлива  $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$  при всіх  $n \neq m$ . За умовою передкомпактності, існує  $\{x_{n_k}, n \geq 1\}$ , для якої  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ . Водночас звідси ми отримаємо, що існують номери  $K_1, K_2$ , для яких  $\rho(x_{n_{K_1}}, x_{n_{K_2}}) \leq \rho(x_{n_{K_1}}, x_0) + \rho(x_0, x_{n_{K_2}}) < \varepsilon$ . Суперечність! Отже,  $A$  все ж таки має бути цілком обмеженою. ■

### Theorem 1.6.10 Задано $(X, \rho)$ – метричний простір та $A \subset X$ .

$A$  – компакт  $\iff$  для кожного відкритого покриття  $A$  можна виділити скінченне підпокриття.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $A$  – компакт.

Припустимо, що існує відкрите покриття  $\{U_\alpha\}$  множини  $A$ , від якої не можна відокремити скінченне підпокриття. Оскільки  $A$  – компакт, то  $A$  – цілком обмежена. Значить, існує 1-сітка  $C_1$  (причому можна підібрати так, щоб  $C_1 \subset A$ ), для якої  $A \subset \bigcup_{x \in C_1} B(x; 1)$ , або можна переписати як

$A \subset \bigcup_{x \in C_1} A \cap B(x; 1)$ . Серед множин  $A \cap B(x; 1)$  існує одна з них, яка не покривається скінченним

чином множинами  $\{U_\alpha\}$ . Дану множину позначу за  $A'$ .

Сама множина  $A'$  – також цілком обмежена, тож існує  $\frac{1}{2}$ -сітка  $C_{\frac{1}{2}}$  (знову підберемо так, щоб  $C_{\frac{1}{2}} \subset A'$ ), для якої виконано  $A' \subset \bigcup_{x \in C_{\frac{1}{2}}} A' \cap B\left(x; \frac{1}{2}\right)$ . Знову ж таки, серед  $A' \cap B\left(x; \frac{1}{2}\right)$  існує одна

з них, що не покривається скінченним чином множинами  $\{U_\alpha\}$ . Дану множину позначу за  $A''$ .

⋮

Продовжуючи процедуру, отримаємо набір куль  $B_n = B\left(x_n; \frac{1}{n}\right)$ , де центр  $x_n \in B_{n-1} \cap A$ . По-значимо  $\overline{B_n} \cap A = K_n$  та зауважимо, що  $K_n$  – це замкнена куля в метричному підпросторі  $A$ , де  $R = \frac{1}{2^n}$  та центр  $y_n \in K_{n-1}$ .

Подвоїмо радіуси кожної з цих куль. Тоді отримаємо послідовність вкладених куль, які стягуються. Оскільки  $A$  – компакт, то  $(A, \rho_A)$  – повний метричний простір, тож за теоремою Кантора, існує  $a \in A$  – спільна точка цих куль. Зважаючи на покриття множини  $A$ , отримаємо  $a \in U_{\alpha_0}$  при деякому  $\alpha_0$ . Оскільки  $U_{\alpha_0}$  – відкрита, то існує куля  $B(z, \delta) \subset U_{\alpha_0}$ . Ми можемо підібрати завжди такий  $N \in \mathbb{N}$ , щоб було виконано  $\frac{1}{N} < \frac{\delta}{2}$ , тоді звідси  $K_n \subset B(z, \delta) \subset U_{\alpha_0}$ . Таким чином,  $K_n$  була покрита лише однією множиною із  $\{U_\alpha\}$ , проте ми обирали такі кулі (на початку), які не допускали скінченне підпокриття. Суперечність!

⊞ Дано: кожне покриття  $A$  має скінченне підпокриття.

!Припустимо, що  $A$  – не компакт, тобто існує послідовність  $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$ , що не має часткових границь. Тоді кожний відкритий окіл  $U_a, a \in A$ , містить скінченну кількість членів послідовності  $\{x_n\}$  (якби існував окіл  $U_a$  із нескінченним числом членів послідовності, то  $a$  стала би граничною точкою, що неможливо). Набір  $\{U_a, a \in A\}$  – відкрите покриття множини  $A$ . За умовою, існує скінченне підпокриття  $\{U_{a_1}, \dots, U_{a_n}\}$  множини  $A$ , але тоді  $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$ , де праворуч – скінченна множина; ліворуч – нескінченна в силу нескінченності послідовності  $\{x_n\}$  – суперечність! ■

**Corollary 1.6.11** Задано  $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$  – два метричних простори та  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне відображення. Відомо, що  $X$  – компакт. Тоді  $f(X)$  – компакт.

**Proof.**

Маємо  $\{U_\alpha\}$  – відкрите покриття  $f(X)$ . Тоді  $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$  – відкрите покриття  $X$ , але за компактністю, можна виділити скінченне підпокриття  $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_m)\}$ , тоді звідси  $\{U_1, \dots, U_m\}$  буде скінченним підпокриттям  $f(X)$ . ■

**Corollary 1.6.12** Задано  $(X, \rho)$  – метричний простір та  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  – числова неперервна функція. Відомо, що  $X$  – компакт. Тоді  $f$  – обмежена та досягає найбільшого та найменшого значень.

**Theorem 1.6.13** Задано  $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$  – два метричних простори та  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне, причому  $X$  – компакт. Тоді  $f$  – рівномірно неперервне.

**Proof.**

!Припустимо, що  $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y \in X : \rho(x, y) < \delta$ , але  $\tilde{\rho}(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$ .

Оберемо  $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ , тоді утвориться послідовність  $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$ . Оскільки  $X$  – компакт, то відокремимо збіжні підпослідовності  $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$ . Але оскільки  $\rho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$ , то звідси випливає  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$ . Із іншого боку,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k})$ , оскільки виконана нерівність  $\tilde{\rho}(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon$ . Суперечність! ■

## 2 Початок функціонального аналізу

### 2.1 Обмежені та неперервні лінійні оператори

**Definition 2.1.1** Задано  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  – нормовані простори. Лінійний оператор  $A: X \rightarrow Y$  називають **обмеженим**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall x \in X : \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$$

Надалі ми ці норми розрізняти не будемо, бо буде з контексту зрозуміло.

**Remark 2.1.2** Зауважимо, що множина всіх констант, які обмежують оператор, тобто множина  $\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$ , буде непорожньою (можна взяти  $C = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} > 0$ ) та обмеженою знизу числом 0. Значить, існує  $\inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$ .

**Definition 2.1.3** Задано  $X, Y$  – нормовані простори.

**Нормою** лінійного оператора  $A$  називається величина

$$\|A\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$$

**Remark 2.1.4** Зауважимо, що для всіх  $x \in X$  виконується  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ .

Дійсно, для кожного  $\varepsilon > 0$  існує стала  $C_\varepsilon > 0$ , для якої  $C_\varepsilon < \|A\| + \varepsilon$ . Тож для всіх  $x \in X$  справедлива нерівність  $\|Ax\| \leq C_\varepsilon\|x\| < (\|A\| + \varepsilon)\|x\|$ . Тому ця нерівність виконуватиметься також при  $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ . Таким чином,  $\|A\| \in \{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$ , тобто інфімум досягається. Отже, норма  $\|A\|$  – це найменше число, що обмежує лінійний оператор  $A$ .

**Theorem 2.1.5** Задано  $X, Y$  – нормовані простори та  $A: X \rightarrow Y$  – обмежений оператор. Тоді

$$\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

**Proof.**

Спочатку доведемо, що  $\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ . Уже відомо, що  $\forall x \in X : \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ , тоді звідси

$\forall x \in X \setminus \{0\} : \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$ , таким чином  $\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$ . Залишилося довести, що строга нерівність не допускається.

Припустимо, що  $\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \|A\|$ , тобто існує  $\varepsilon > 0$ , для якого  $\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\| - \varepsilon$ . Тоді

звідси випливає, що  $\forall x \in X \setminus \{0\} : \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| - \varepsilon \implies \forall x \in X : \|Ax\| \leq (\|A\| - \varepsilon)\|x\|$ . Таким чином,  $\|A\| - \varepsilon$  – це константа, яка обмежує оператор, тоді за означенням норми,  $\|A\| - \varepsilon \geq \|A\|$  – суперечність!

Отже, ми довели рівність, тобто  $\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ . ■

**Theorem 2.1.6** Задано  $X, Y$  – нормовані простори та  $A: X \rightarrow Y$  – обмежений оператор. Тоді

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

**Proof.**

Ми доведемо ось такий ланцюг нерівностей:  $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ .

Оберемо такий  $x \neq 0$ , щоб  $\|x\| \leq 1$ . Тоді виконується нерівність  $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \|Ax\|$ . Таким чином,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Зрозуміло, що виконується нерівність  $\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ .

Залишилося довести, що  $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ . Дана нерівність є наслідком того, що для кожного

$x \neq 0$  число  $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\|$  належить множині  $\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$ . ■



**Example 2.1.7** Задано лінійний оператор  $A: l_2 \rightarrow l_2$  таким чином:  $A(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ . Довести, що  $A$  – обмежений оператор та знайду норму.

Згадаємо, що норма  $\|(x_1, x_2, \dots)\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots}$ . Оцінимо оператор:

$$\|A(x_1, x_2, \dots)\| = \|(x_2, x_3, \dots)\| = \sqrt{|x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} \leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} = 1 \cdot \|(x_1, x_2, \dots)\|.$$

Отже,  $A$  – обмежений оператор, бо знайшли константу  $C = 1$ , що обмежує.

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|(x_1, x_2, \dots)\|=1} \|A(x_1, x_2, \dots)\| = \sup_{\|(x_1, x_2, \dots)\|=1} \|(x_2, x_3, \dots)\| = \sup_{\|(x_1, x_2, \dots)\|=1} \sqrt{|x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} = \\ &= \sup_{\|(x_1, x_2, \dots)\|=1} \sqrt{1 - |x_1|^2} = 1. \end{aligned}$$

**Example 2.1.8** Задано лінійний оператор  $A: C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ , таким чином:  $(Ax)(t) = \int_0^t \tau x(\tau) d\tau$ .

Довести, що  $A$  – обмежений оператор та знайти норму.

Конкретно в цьому випадку розглядатиметься норма  $\|f\| = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ .

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t \tau x(\tau) d\tau \right| \leq \max_{t \in [0, 1]} \int_0^t |\tau| |x(\tau)| d\tau = \int_0^1 |\tau| |x(\tau)| d\tau \leq \int_0^1 |\tau| \max_{\tau \in [0, 1]} |x(\tau)| d\tau = \\ &= \int_0^1 \tau \|x\| d\tau = \|x\| \left[ \frac{\tau^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \|x\|. \end{aligned}$$

Отже,  $A$  – обмежений оператор. Залишилося знайти норму.

Оскільки  $\|Ax\| \leq \frac{1}{2} \|x\|$ , то звідси випливає  $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \frac{1}{2}$ . Із іншого боку, оберемо функцію

$$x(t) = 1, \text{ для якої } \|x\| = 1. \text{ Тоді отримаємо, що } \|Ax\| = \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t \tau d\tau \right| = \max_{t \in [0, 1]} \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, отримаємо  $\|A\| = \frac{1}{2}$ .

**Proposition 2.1.9** Задано  $X, Y$  – нормовані простори та  $\dim X < \infty$  та  $A: X \rightarrow Y$  – лінійний оператор. Тоді  $A$  – обмежений.

Внаслідок цього, всі оператори між скінченновимірними векторними просторами – обмежені.

**Proof.**

Дійсно, нехай  $\{e_1, \dots, e_n\}$  – базис  $X$ , нехай на неї стоїть норма  $\|x\|_2$ , тоді маємо наступне:

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \|A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\| = \|x_1 A e_1 + \dots + x_n A e_n\| \leq |x_1| \|A e_1\| + \dots + |x_n| \|A e_n\| \leq \\ &\leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \sqrt{\|A e_1\|^2 + \dots + \|A e_n\|^2} = C \|x\|_2. \end{aligned}$$

Якби була би інша норма  $\|\cdot\|$ , то вона еквівалентна  $\|\cdot\|_2$ , а тому обмеженість зберігається. ■

**Theorem 2.1.10** Задано  $X, Y$  – нормовані простори та  $A: X \rightarrow Y$  – лінійний оператор.

$A$  – обмежений  $\iff A$  – неперервний в точці 0.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $A$  – обмежений. Оберемо послідовність  $\{x_n\} \subset X$  так, щоб  $x_n \rightarrow 0$ . Звідси отримаємо  $\|Ax_n - A0\| = \|Ax_n\| \leq \|A\| \|x_n\| \rightarrow 0$ . Отже,  $Ax_n \rightarrow A0$  при  $n \rightarrow \infty$ , що підтверджує неперервність.

$\Leftarrow$  Дано:  $A$  – неперервний в точці 0.

Припустимо, що  $A$  – необмежений оператор. Тоді для кожного  $n \in \mathbb{N}$  існує точка  $x_n \in X$ , для якої

$$\|Ax_n\| > n \|x_n\| \text{ (ясно, що } x_n \neq 0 \text{)}. \text{ Таким чином, } \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \left\| A \left( \frac{x_n}{\|x_n\|} \right) \right\| > n. \text{ Для зручності позначу}$$

$$w_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \in X, \text{ тобто ми вже маємо } \|Aw_n\| > n. \text{ Оскільки відображення } A \text{ – неперервне в нулі, то}$$

для послідовності  $\left\{ \frac{1}{n} w_n, n \geq 1 \right\}$ , для якої  $\frac{1}{n} w_n \rightarrow 0$  виконується  $A \frac{w_n}{n} \rightarrow A0 = 0$  – суперечність в силу нерівності! Бо в нас  $\left\| A \frac{w_n}{n} \right\| > 1$ . ■

**Remark 2.1.11** Насправді,  $A$  – неперервний в точці 0  $\iff A$  – неперервний на  $X$ .

Сторона  $\Leftarrow$  зрозуміла. По стороні  $\Rightarrow$  маємо  $x_0 \in X$  та припустимо, що  $\{x_n\}$  – довільна послідовність, де  $x_n \rightarrow x_0$ . Тоді цілком зрозуміло, що  $x_n - x_0 \rightarrow 0$ , але за неперервністю в нулі, маємо  $A(x_n - x_0) = Ax_n - Ax_0 \rightarrow A0 = 0$ . Таким чином,  $Ax_n \rightarrow Ax_0$ .

**Theorem 2.1.12** Множина  $\mathcal{B}(X, Y)$  – множина всіх обмежених лінійних операторів – буде підпростором  $\mathcal{L}(X, Y)$ , а також буде нормованим простором із заданою нормою за означенням вище.

**Proof.**

Дійсно, нехай  $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$ , тобто вони обмежені. Хочемо довести, що  $A + B, \alpha A \in \mathcal{B}(X, Y)$ , тобто вони теж обмежені. Дійсно, справедливі наступні оцінки:

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|.$$

$$\|(\alpha A)x\| = |\alpha|\|Ax\| \leq |\alpha|\|A\|\|x\|.$$

Отже, дійсно  $A + B, \alpha A \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Тепер доведемо, що вищезгадана норма лінійного обмеженого оператора – дійсно норма.

$\|A\| \geq 0$  – зрозуміло. Також якщо  $\|A\| = 0$ , то звідси  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| = 0$ , тобто  $Ax = 0$ , причому для всіх  $x \in X$ ; або  $A = O$ . Навпаки, якщо  $A = O$ , тобто  $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \{0\} = 0$ .

Ми вже маємо оцінку  $\|\alpha Ax\| \leq |\alpha|\|A\|\|x\|$  при всіх  $x \in X$ , тому й при всіх  $x$  з умовою  $\|x\| = 1$ . Таким чином,  $\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| \leq |\alpha|\|A\|$ . Із цієї оцінки випливає, що  $\|A\| = \|\alpha^{-1}\alpha A\| \leq |\alpha^{-1}|\|\alpha A\| \implies$

$$\|\alpha A\| \geq |\alpha|\|A\|. \text{ Таким чином, } \|\alpha A\| = |\alpha|\|A\| \text{ (у тому числі при } \alpha = 0).$$

Ми вже маємо оцінку  $\|(A + B)x\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$  при всіх  $x \in X$ , тому й при всіх  $x$  з умовою  $\|x\| = 1$ . Таким чином,  $\|A + B\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A + B)x\| \leq \|A\| + \|B\|$  – третя властивість норми. ■

**Theorem 2.1.13** Простір  $\mathcal{B}(X, Y)$  буде повним, якщо  $Y$  – повний.

**Proof.**

Нехай  $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{B}(X, Y)$  – фундаментальна послідовність. Зауважимо, що  $\{A_n x, n \geq 1\} \subset Y$  – фундаментальна також при всіх  $x \in X$ . Із фундаментальності  $\{A_n\}$  маємо, що  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|A_n - A_m\| < \varepsilon$ , але тоді  $\forall x \in X : \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$ , звідси й випливає фундаментальність.

Тоді при кожному  $x \in X$  існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = z_x$ . Ми можемо визначити як раз новий оператор  $A : X \rightarrow Y$ , де  $x \mapsto z_x$  (границя єдина, тому визначення адекватне). Залишилися три етапи доведення.

I. *Лінійність.* Дійсно, нехай  $x, y \in X$  та  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , тоді маємо

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} A_n y = \alpha Ax + \beta Ay.$$

II. *Обмеженість.* Оскільки  $\{A_n\}$  – фундаментальна, то  $\{A_n\}$  – обмежена:  $\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|A_n\| \leq C$ . Тоді в силу неперервності норми матимемо  $\|Ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq C\|x\|$ .

III.  $A_n \rightarrow A$ . Згадаємо нерівність  $\|(A_n - A_m)x\| < \varepsilon\|x\|$  при всіх  $x \in X$ , при всіх  $\varepsilon > 0$  та  $n, m \geq N$ . Спрямуємо  $m \rightarrow \infty$ , тоді отримаємо  $\|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon\|x\|$ , тому й  $\|A_n - A\| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$ . ■

## Твердження, які потім вставляю в необхідне місце

### Proof.

Достатньо довести, що всі норми еквівалентні до  $\|\cdot\|_2$ .

Нехай  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d\}$  – стандартний базис  $\mathbb{R}^d$ , тоді звідси  $\vec{x} = \sum_{i=1}^d x_i \vec{e}_i$ .

$$\left\| \sum_{i=1}^d x_i \vec{e}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^d \|x_i \vec{e}_i\| = \sum_{i=1}^d |x_i| \|\vec{e}_i\| = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^d |x_i| \|\vec{e}_i\| \right)^2} \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^d \|e_i\|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^d |x_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d \|e_i\|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^d \|e_i\|^2} \|\vec{x}\|_2 = M \|\vec{x}\|_2.$$

Зауважимо, що  $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  та не залежить від  $\vec{x}$ . Отже,  $\|\vec{x}\| \leq M \|\vec{x}\|_2$ .

Розглянемо тепер  $S$  – одинична сфера на  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ . Відомо, що  $S$  – замкнена множина та обмежена. Тож за лемою Гейне-Бореля,  $S$  – компактна множина. Відомо, що відображення  $\|\cdot\|: S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  – неперервне відображення, тож вона досягає найменшого значення  $m$  для деякого  $\vec{y} \in S$ .

Припустимо  $m = 0$ , тоді звідси  $\|\vec{y}\| = 0 \implies \vec{y} = \vec{0} \implies \vec{y} \notin S$  – неможливо. Отже,  $m > 0$ .

Значить,  $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^d: \|\vec{y}\|_2 = 1: \|\vec{y}\| \geq m$ . Треба довести те саме для інших векторів.

Якщо  $\vec{x} = \vec{0}$ , то це виконано. Тому  $\vec{x} \neq \vec{0}$ . Покладемо вектор  $\vec{y} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2}$ , причому  $\|\vec{y}\|_2 = 1$ . Із цього випливає, що  $\|\vec{y}\| \geq m \implies m \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|$ .

Всі інші норми будуть еквівалентними в силу транзитивності. ■

**Definition 2.1.14** Задано  $X, Y$  – нормовані простори.

Вони називаються **ізоморфними**, якщо існує бієктивний лінійний оператор  $A: X \rightarrow Y$ , для якого

$$\forall x \in X: \|Ax\|_Y = \|x\|_X$$

Водночас такий оператор  $A$  називають **ізоморфізмом**.

Позначення:  $X \cong Y$