Зміст

1 Кратні інтеграли

1.1 Кратні інтеграли по брусу

Definition 1.1.1 Прямокутним паралелепіпедом в $\mathbb{R}^m$ або m**-вимірних брусом** називають множину

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$$

Діаметром бруса Q називають число

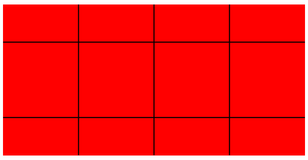
$$d(Q) = \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in Q} \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

У нашому випадку $d(Q) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_m - a_m)^2}$ - грубо кажучи, діагональ бруса.
Об'ємом або **мірою** бруса Q називається додатне число

$$m(Q) = \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$$

Випадок $\mathbb{R}^2$ - прямокутник $Q = [0, 4] \times [0, 2]$ з діаметром $d(Q) = 2\sqrt{5}$ та мірою $m(Q) = 4 \cdot 2 = 8$.

Далі нехай $Q = \prod_{k=1}^{m} [a_k, b_k]$ - брус. Ми розглянемо розбиття $\lambda_k = \{x_k^0, x_k^1, \dots, x_k^{n_k}\}$ відрізка $[a_k, b_k]$ для кожного $k = \overline{1, m}$. Нехай $\Delta x_k^v = x_k^{v+1} - x_k^v$, де $v = \overline{0, n_k - 1}$.
Після такого розбиття ми отримаємо набір брусів $Q(v_1, \dots, v_m) = \prod_{k=1}^{m} [x_k^{v_k}, x_k^{v_k + 1}]$, об'єм якого $m(Q(v_1, \dots, v_m)) = \prod_{k=1}^{m} \Delta x_k^{v_k}$.



Випадок $\mathbb{R}^2$ - відрізок $[0, 4]$ має розбиття $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ та відрізок $[0, 2]$ має розбиття $\{0, 0.5, 1.5, 2\}$.
Після розбиття ми отримали набір прямокутників.

Definition 1.1.2 Цей набір брусів $\lambda = \{Q(v_1, \dots, v_m)\}$ називається **розбиттям бруса** Q.
Діаметром розбиття λ називається число

$$|\lambda| = \max_{\substack{0 \leqslant v_k \leqslant n_k - 1 \\ 1 \leqslant k \leqslant m}} d(Q(v_1, \dots, v_m))$$

Грубо кажучи, шукаємо найбільшу діагональ бруса.

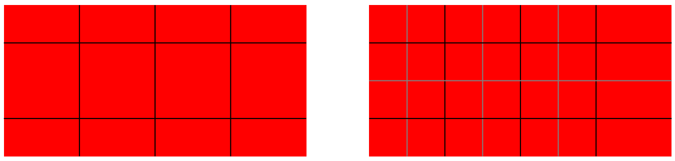
Remark 1.1.3 $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant v_k \leqslant n_k - 1 \\ 1 \leqslant k \leqslant m}} m(Q(v_1, \dots, v_m)) = m(Q)$.

Дійсно, зауважимо спочатку, що $\displaystyle\sum_{v=0}^{n_k - 1} \Delta x_k^v = b_k - a_k$. А далі маємо:

$$\sum_{\substack{0\leqslant v_k\leqslant n_k-1\\1\leqslant k\leqslant m}} m(Q(v_1,\dots,v_m)) = \sum_{\substack{0\leqslant v_k\leqslant n_k-1\\1\leqslant k\leqslant m}} \Delta x_1^{v_1}\dots\Delta x_m^{v_m} =$$
$$= \Delta x_1^0 \sum_{\substack{0\leqslant v_k\leqslant n_k-1\\2\leqslant k\leqslant m}} \Delta x_2^{v_2}\dots\Delta x_m^{v_m} + \dots + \Delta x_1^{n_1-1} \sum_{\substack{0\leqslant v_k\leqslant n_k-1\\2\leqslant k\leqslant m}} \Delta x_2^{v_2}\dots\Delta x_m^{v_m} =$$
$$= \sum_{\substack{0\leqslant v_k\leqslant n_k-1\\2\leqslant k\leqslant m}} \Delta x_2^{v_2}\dots\Delta x_m^{v_m}(\Delta x_1^0 + \dots + \Delta x_1^{n_1-1}) = (b_1-a_1) \sum_{\substack{0\leqslant v_k\leqslant n_k-1\\2\leqslant k\leqslant m}} \Delta x_2^{v_2}\dots\Delta x_m^{v_m} =$$
$$= \dots = (b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_m-a_m) = m(Q).$$

Як отримати підрозбиття розбиття

Маємо Q - деякий брус та розбиття λ. Його ми отримали в результаті розбиття кожного відрізку. Щоб отримати підрозбиття λ' розбиття λ, ми запишемо підрозбиття λ'_k розбиття кожного відрізка λ_k (ми це робили додаванням точок).



З'ясуємо, що буде відбуватись з кожним брусом $Q_1(v_1,\dots,v_m) = [x_k^{v_1}, x_k^{v_1+1}] \times \dots \times [x_k^{v_m}, x_k^{v_m+1}]$.
I. Жодний відрізок, що бере участь в $Q(v_1,\dots,v_m)$, не підрозбивається. Тоді нічого з ним не буде.
II. Знайдеться відрізок, що бере участь в $Q(v_1,\dots,v_m)$, який підрозбивається. Не втрачаючи загальності, скажімо $[x_k^{v_1}, x_k^{v_1+1}] = [x_k^{v_1}, y_0] \cup [y_0, y_1] \cup \dots \cup [y_p, x_k^{v_1+1}]$. У цьому випадку $y_0, y_1, \dots, y_p$ будуть точками, що були додані під час підзробиття відрізка. Тоді
$Q(v_1,\dots,v_m) = [x_k^{v_1}, x_k^{v_1+1}] \times \dots \times [x_k^{v_m}, x_k^{v_m+1}] =$
$= ([x_k^{v_1}, y_0] \cup [y_0, y_1] \cup \dots \cup [y_p, x_k^{v_1+1}]) \times [x_k^{v_2}, x_k^{v_2+1}] \times \dots \times [x_k^{v_m}, x_k^{v_m+1}] =$
$= ([x_k^{v_1}, y_0] \times [x_k^{v_2}, x_k^{v_2+1}] \times \dots \times [x_k^{v_m}, x_k^{v_m+1}]) \cup \dots \cup ([y_p, x_k^{v_k+1}] \times [x_k^{v_2}, x_k^{v_2+1}] \times \dots \times [x_k^{v_m}, x_k^{v_m+1}]) =$
$= Q_1 \cup \dots \cup Q_p$.
Ми тіпа розкриваємо дужки з точки зору теорії множин.
Таким чином, отримали, що брус розіб'ється на підбруси.
Причому згідно зі зауваженням вище, $\sum m(Q_i) = m(Q(v_1,\dots,v_m))$.
Саме за таким процесом, розбиваючи λ, отримаємо підрозбиття λ'.

Надалі вводиться позначення $\omega(\lambda) = \{(v_1,\dots,v_m) | 0 \leqslant v_k \leqslant n_k - 1, 1 \leqslant k \leqslant m\}$

Definition 1.1.4 Задано Q - брус та функцію $f : Q \to \mathbb{R}$ - обмежена на Q та λ - розбиття бруса.
Нижньою сумою Дарбу для розбиття λ та функції f називається сума

$$L(f,\lambda) = \sum_{(v_1,\dots,v_m)\in\omega(\lambda)} \inf_{\vec{x}\in Q(v_1,\dots,v_m)} f(\vec{x}) \cdot m(Q(v_1,\dots,v_m))$$

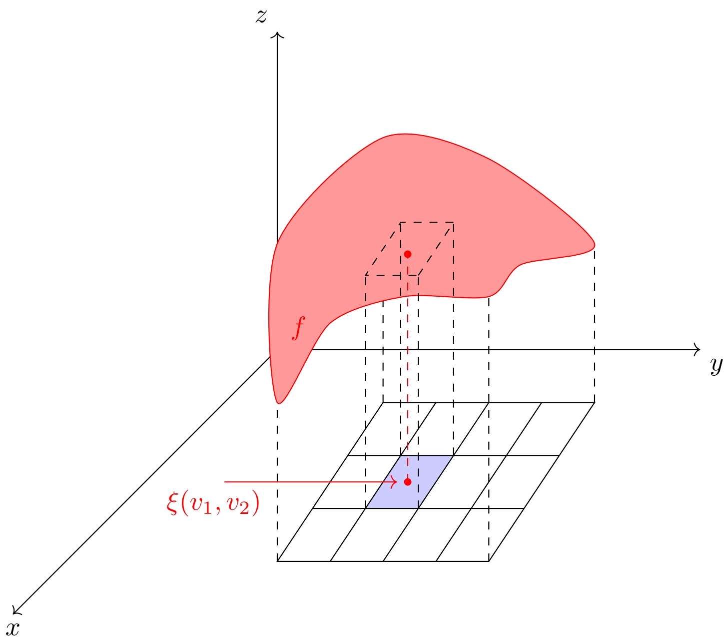
Верхньою сумою Дарбу для розбиття λ та функції f називається сума

$$U(f,\lambda) = \sum_{(v_1,\dots,v_m)\in\omega(\lambda)} \sup_{\vec{x}\in Q(v_1,\dots,v_m)} f(\vec{x}) \cdot m(Q(v_1,\dots,v_m))$$

Definition 1.1.5 Набір точок $\{\vec{\xi}(v_1,\dots,v_m) | (v_1,\dots,v_m) \in \omega(\lambda)\} = \{\vec{\xi}(v_1,\dots,v_m)\}$ назвемо **набором, що відповідає розбиттю λ**.
Тут $\vec{\xi}(v_1,\dots,v_m) \in Q(v_1,\dots,v_m)$.

Definition 1.1.6 Задано Q - брус та функцію $f : Q \to \mathbb{R}$ та λ - розбиття бруса.
Інтегральною сумою для розбиття λ з наборами $\{\vec{\xi}(v_1,\dots,v_m)\}$ функції f називається сума

$$\sigma(f,\lambda,\{\vec{\xi}(v_1,\dots,v_m)\}) = \sum_{(v_1,\dots,v_m)\in\omega(\lambda)} f(\vec{\xi}(v_1,\dots,v_m)) \cdot m(Q(v_1,\dots,v_m))$$



Definition 1.1.7 Функція f називається **інтегрованою за Ріманом**, якщо

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) : \forall (\lambda, \vec{\xi}(v_1, \dots, v_m)) : |\lambda| < \delta \implies |\sigma(f, \lambda, \vec{\xi}(v_1, \dots, v_m)) - I| < \varepsilon$$

Число I називають **m-кратним інтегралом Рімана**.
Позначення: $\int\limits_Q f(\vec{x})\, d\vec{x}$ або $\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, \dots, x_m)\, dx_1 \dots dx_m$

Example 1.1.8 Довести, що $f(\vec{x}) = 1$ - інтегрована на брусі Q та $\int\limits_Q 1\, dx = m(Q)$.

Дійсно, $\sigma(f, \lambda, \{\vec{\xi}(v_1, \dots, v_m)\}) = \sum\limits_{(v_1, \dots, v_m) \in \omega(\lambda)} m(Q(v_1, \dots, v_m)) = m(Q)$.
Отже, $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall (\lambda, \{\vec{\xi}(v_1, \dots, v_m\}) : |\lambda| < \delta \implies |\sigma(f, \lambda, \{\vec{\xi}(v_1, \dots, v_m)\} - m(Q)| = 0 < \varepsilon$.
Отже, $\int\limits_Q 1\, dx = m(Q)$.

Theorem 1.1.9 Задано функцію $f : Q \to \mathbb{R}$ - інтегрована по брусу Q. Тоді f - обмежена на Q.
Довдененння аналогічне, як в матані $\mathbb{R}$.

Всі властивості, які відомі про суму Дарбу, зберігаються тут. Я просто нагадаю.

Remark 1.1.10 $L(f, \lambda) \leqslant \sigma(f, \tau, \{\vec{\xi}(v_1, \dots, x_m)\}) \leqslant U(f, \lambda)$.

Lemma 1.1.11 Задано функцію $f : Q \to \mathbb{R}$ - обмежена на брусі та будь-яке розбиття λ. Тоді маємо:
$L(f, \lambda) = \inf\limits_{\{\vec{\xi}(v_1, \dots, x_m)\}} \sigma(f, \tau, \{\vec{\xi}(v_1, \dots, x_m)\})$ $\quad U(f, \lambda) = \sup\limits_{\{\vec{\xi}(v_1, \dots, x_m)\}} \sigma(f, \tau, \{\vec{\xi}(v_1, \dots, x_m)\})$

Lemma 1.1.12 Задано функцію $f : Q \to \mathbb{R}$ - обмежена на брусі та розбиття λ. Також задамо підрозбиття λ'. Тоді $U(f, \lambda) \geqslant U(f, \lambda')$, а також $L(f, \lambda) \leqslant L(f, \lambda')$.

Lemma 1.1.13 Задано функцію $f : Q \to \mathbb{R}$ - обмежена на брусі. Візьмемо будь-які два розбиття λ', λ''.
Тоді $L(f, \lambda') \leqslant U(f, \lambda'')$.

Definition 1.1.14 **Верхнім/нижнім інтегралом Дарбу** будемо називати такі вирази:

$$I^*(f) = \inf_\lambda U(f, \lambda) \qquad I_*(f) = \sup_\lambda L(f, \lambda)$$

Remark 1.1.15 Справедлива така нерівність: $I_*(f) \leqslant I^*(f)$.

Theorem 1.1.16 Перший критерій інтегрованості
Задано функцію $f : Q \to \mathbb{R}$, де Q - брус.
f - інтегрована на $Q \iff f-$ обмежена на Q та $I_*(f) = I^*(f)$.

Theorem 1.1.17 Другий критерій інтегрованості
Задано функцію $f : Q \to \mathbb{R}$, де Q - брус.
f - інтегрована на $Q \iff f-$ обмежена на Q та $\forall \varepsilon > 0 : \exists \lambda : U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon$.

Theorem 1.1.18 Задано функцію $f \in C(Q)$, де Q - брус. Тоді f - інтегрована на Q.
Доведення аналогічне, як в матані $\mathbb{R}$.

Theorem 1.1.19 Задано $f : Q \to \mathbb{R}$, де Q - брус. Припустимо, що $Q = Q_1 \cup Q_2$, де Q_1, Q_2 - бруси, що не мають спільних внутрішніх точок.
f - інтегрована на $Q \iff f$ - інтегрована на Q_1 та Q_2.
Поки скіп.

1.2 Зведення кратних інтегралів до послідовних однократних

Ми хочемо обчислити $\displaystyle\int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x}$ через однократні інтеграли Рімана.
Маємо брус $Q \subset \mathbb{R}^m$. Розглянемо такі бруси:
$Q_k = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i \leqslant m i \neq k} [a_i, b_i]$, де $Q_k \subset \mathbb{R}^{m-1}$. Даний брус - це проєкція брусу Q на гіперплощину $x_k = 0$.
Припустимо, що $f \in C(Q)$. Тоді $\forall \leqslant 1 \leqslant k \leqslant m : \forall c \in [a_k, b_k] : f \in C(Q \cap \{\vec{x} | x_k = c\}$.
Тому для кожного $x \in [a_k, b_k]$ визначається $(m-1)$-кратний інтеграл по Q_k:
$g_k(x) = \displaystyle\int_{Q_k} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)\,dx_1 \dots dx_{k-1}\,dx_{k+1} \dots dx_m$.

Lemma 1.2.1 $g_k \in C([a_k, b_k])$.

Proof.
$f \in C(Q)$, де Q - компакт $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \vec{x}, \vec{y} : \|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta \implies |f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \dfrac{\varepsilon}{m(Q)}$.
Оберемо $x', x'' \in [a_k, b_k]$ так, щоб $|x' - x''| < \delta$. Тоді для векторів
$\vec{x'} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x', x_{k+1}, \dots, x_m)$
$\vec{x''} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x'', x_{k+1}, \dots, x_m)$,
де $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, q_m) \in Q_k$, ми маємо:
$\left\|\vec{x'} - \vec{x''}\right\| = |x' - x''| < \delta$, а тому $|f(\vec{x'}) - f(\vec{x''})| < \dfrac{\varepsilon}{m(Q_k)}$.
$|g_k(x') - g_k(x'')| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{m(Q_k)} \displaystyle\int_{Q_k} dx_1 \dots dx_{k-1}\,dx_{k+1} \dots dx_m = \varepsilon$.
Таким чином, $g_k \in C_{unif}([a_k, b_k]) \implies g_k \in C([a_k, b_k])$. ■

Theorem 1.2.2 $\displaystyle\int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{a_k}^{b_k} \left(\int_{Q_k} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)\,dx_1 \dots dx_{k-1}\,dx_{k+1} \dots dx_m \right) dx_k$

Proof.
$f \in \mathcal{R}(Q)$, тому що ми вимагали функцію $f \in C(Q)$. Тому,
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \lambda : U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon$.
Розбиття λ природним чином розбиває брус Q_k. Маємо:
$\displaystyle\int_{a_k}^{b_k} g_k(x)\,dx = \sum_{v_k=0}^{n_k-1} \int_{x_k(v_k)}^{x_k(v_k+1)} g_k(x)\,dx \leqslant \sum_{v_k=0}^{n_k-1} \sup_{x \in [x_k(v_k), x_k(v_k+1)]} g_k(x) \cdot \Delta x_k(v_k) \leqslant$

$$\leqslant \sum_{v_k=0}^{n_k-1} \sup_{x \in [x_k(v_k), x_k(v_k+1)]} \left(\sum_{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_m} \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) \\ \in \prod_{i \neq k} [x_i(v_i), x_i(v_i+1)]}} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_m) \prod_{i \neq k} \Delta x_i(v_i) \right) \Delta x_k(v_k)$$

$$\overset{?}{\leqslant} \sum_{v_k=0}^{n_k-1} \sum_{v_1, \dots, v_{k+1}, \dots, v_m} \sup_{x \in [x_k(v_k), x_k(v_k+1)]} \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) \\ \in \prod_{i \neq k} [x_i(v_i), x_i(v_i+1)]}} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_m) \prod_{i \neq k} \Delta x_i(v_i) \Delta x_k(v_k) \overset{??}{\leqslant}$$

$\overset{??}{\leqslant} \sum\limits_{v_1,\ldots,v_m} \sup\limits_{\vec{x}\in Q(v_1,\ldots,v_m)} f(\vec{x}) m(Q(v_1,\ldots,v_m)) = U(f,\lambda).$

Пояснення до кількох нерівностей.

$\overset{?}{\leqslant}$. Поясню на функції двох змінних. У нас тут записано

$\sup\limits_{y\in[y(v_2),y(v_2+1)]} \left(\sup\limits_{x\in[x(0),x(1)]} f(x,y) + \cdots + \sup\limits_{x\in[x(n_1-1),x(n_1)]} f(x,y) \right).$

Кожний $\sup\limits_{x\in[x(v_1),x(v_1+1)]} f(x,y)$ стане функцією від однієї змінної (у цьому випадку від y), всі вони будуть визначені на одному відрізку $[y(v_2), y(v_2+1)]$. А ми вже знаємо, що $\sup\limits_D (f+g) \leqslant \sup\limits_D f + \sup\limits_D g$.

Отже,

$\sup\limits_{y\in[y(v_2),y(v_2+1)]} \left(\sup\limits_{x\in[x(0),x(1)]} f(x,y) + \cdots + \sup\limits_{x\in[x(n_1-1),x(n_1)]} f(x,y) \right) \leqslant$

$\leqslant \sup\limits_{y\in[y(v_2),y(v_2+1)]} \sup\limits_{x\in[x(0),x(1)]} f(x,y) + \cdots + \sup\limits_{y\in[y(v_2),y(v_2+1)]} \sup\limits_{x\in[x(n_1-1),x(n_1)]} f(x,y).$

$\overset{??}{\leqslant}$. Поясню на функції двох змінних. Хочемо $\sup\limits_{y\in[y(v_k),y(v_k+1)]} \sup\limits_{x\in[x(v_l),x(v_l+1)]} f(x,y) \leqslant \sup\limits_{\substack{x\in[x(v_l),x(v_l+1)] \\ y\in[y(v_k),y(v_k+1)]}} f(x,y).$

Позначимо $\sup\limits_{(x,y)} f(x,y) = M$. Тоді $\forall (x,y) : f(x,y) \leqslant M$. Зокрема $\forall x : f(x,y) \leqslant M$

$\Longrightarrow \sup\limits_x f(x,y) \leqslant M$, ця нерівність виконана $\forall y$. Тому звідси $\sup\limits_y \sup\limits_x f(x,y) \leqslant M$.

Аналогічним чином ми доводимо, що $\displaystyle\int_{a_k}^{b_k} g_k(x)\,dx \geqslant L(f,\lambda)$.

Оскільки $L(f,\lambda) \leqslant \displaystyle\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \leqslant U(f,\lambda)$, то звідси

$$\left| \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} - \int_{a_k}^{b_k} g_k(x)\,dx \right| \leqslant U(f,\lambda) - L(f,\lambda) < \varepsilon.$$

Оскільки це виконано $\forall \varepsilon > 0$, то довели рівність. ■

Corollary 1.2.3 $\displaystyle\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{a_m}^{b_m} \ldots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_m.$

Remark 1.2.4 Можна зауважити, що порядок інтегрування може бути довільним, не обов'язково в такому порядку.

Corollary 1.2.5 $\displaystyle\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int\limits_{Q_k} \left(\int_{a_k}^{b_k} f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_m)\,dx_k \right) dx_1 \ldots dx_{k-1}\,dx_{k+1} \ldots dx_m.$

Випливає з попереднього наслідка.

Corollary 1.2.6 $\displaystyle\int\limits_Q \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x})\,d\vec{x} = \int\limits_{Q_k} f(x_1,\ldots,x_{k-1},b_k,x_{k+1},\ldots,x_m)\,dx_1 \ldots dx_{k-1}\,dx_{k+1} \ldots dx_m -$

$\displaystyle - \int\limits_{Q_k} f(x_1,\ldots,x_{k-1},a_k,x_{k+1},\ldots,x_m)\,dx_1 \ldots dx_{k-1}\,dx_{k+1} \ldots dx_m.$

Це за умовою, що $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in C(Q)$.

Випливає з попереднього наслідка та формули Ньютона-Лейбніца.

2 Інтегрування по множинах

Для власного спрощення розглядаю простір $\mathbb{R}^2$. Всі інші міркування можна скопіювати для $\mathbb{R}^m$. Допоміжна теорема на майбутнє.

Theorem 2.0.1 Теорема Вейєрштрасса про наближення неперервної функції
Задано $f \in C([a,b])$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists P_\varepsilon$ - многочлен: $\forall x \in [a,b] : |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$.

Proof.
Розглянемо випадок, коли функція $f \in C([0,1])$. Введемо такий многочлен:
$B_n(f,x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) p_{nk}(x)$, де $p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.
Тут $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$. Її ще називають **многочленом Бернштейна**.
(щось схожий на сумування ймовірностей за схемою Бернуллі).
Тут вважаємо, що $0^0 = 1$, бо можна довизначити усунені точки.
За теоремою Кантора, для числа $\dfrac{\varepsilon}{2}$
$\exists \delta : \forall x_1, x_2 \in [0,1] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Зауважимо, що $\sum\limits_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = 1$. Тоді

$$|f(x) - B_n(f,x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)p_{nk}(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right||p_{nk}(x)|$$
$$= \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|p_{nk}(x) + \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\delta}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|p_{nk}(x)\boxed{<}$$

У першій сумі $\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ за Кантором.
У другій сумі $\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| \leqslant 2C$, оскільки f - обмежена.

$$\boxed{<}\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta} p_{nk}(x) + 2C\sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\delta} p_{nk}(x) \overset{?}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) + 2C\frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 p_{nk}(x) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2C}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C}{2n\delta^2}$$

Пояснення $\overset{?}{\leqslant}$. Маємо $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| \geqslant \delta \implies \left(x - \dfrac{k}{n}\right)^2 \geqslant \delta^2 \implies \dfrac{1}{\delta^2}\left(x - \dfrac{k}{n}\right)^2 \geqslant 1$. А отже, звідси

$$\sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\delta} p_{nk}(x)\cdot 1 \leqslant \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\delta} p_{nk}(x)\frac{1}{\delta^2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\left(x - \frac{k}{n}\right)^2.$$

Оскільки $\dfrac{C}{2n\delta^2} \to 0$, то $\exists N : \dfrac{C}{2n\delta^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Таким чином, $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \exists P_\varepsilon(x) = B_n(f,x) : \forall x \in [0,1] :$
$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$.

У випадку $f \in C([a,b])$ ми розглянемо функцію $g(t) = f(a + t(b-a)) \in C([0,1])$. ■

Theorem 2.0.2 Теорема Вейєрштрасса про наближення неперервної функції в $\mathbb{R}^n$
Задано функцію $f \in C(A)$, де A - компакт. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists P_\varepsilon$ - многочлен: $\forall \vec{x} \in A : |f(\vec{x}) - P_\varepsilon(\vec{x})| < \varepsilon$.

Proof.
У принципі, ідея та сама, що було зверху, просто трошки треба модифікувати.
Розглянемо випадок, коли функція $f \in C([0,1]^m)$, введемо такий многочлен:
$B_n(f, x_1, \dots, x_m) = \sum\limits_{i_1=0}^{s_1} \dots \sum\limits_{i_m=0}^{s_m} f\left(\dfrac{i_1}{s_1}, \dots, \dfrac{i_m}{s_m}\right) p_{s_1 i_1}(x_1) \dots p_{s_m i_m}(x_m)$.

Тут $n \in \mathbb{N}$, а також $p_{s_j i_j}(x_j) = C_{s_j}^{i_j} x_j^{i_j}(1-x_j)^{s_j - i_j}$. Тут аналогічно $\sum\limits_{i_j=0}^{s_j} p_{s_j i_j}(x_j) = 1$. Всюди $j = \overline{1,m}$.

Тоді також $\sum\limits_{i_1=0}^{s_1} \dots \sum\limits_{i_m=0}^{s_m} p_{s_1 i_1}(x_1) \dots p_{s_m i_m}(x_m) = \sum\limits_{i_1=0}^{s_1} p_{s_1 i_1}(x_1) \dots \sum\limits_{i_m=0}^{s_m} p_{s_m i_m}(x_m) = 1$.

Аналогічно функцію f можна довизначити всюди там, де 0^0 відбувається. Власне,
$|f(x) - B_n(f, x_1, \dots, x_m)|$ оцінюється буквально так само, як це було. Будуть хіба що пару нюансів: ми ділимо суму на:
I. $(i_1, \dots, i_m)$, щоб $\left\| (x_1, \dots, x_m) - \left(\frac{i_1}{s_1}, \dots, \frac{i_m}{s_m} \right) \right\| < \delta$
II. $(i_1, \dots, i_m)$, щоб $\left\| (x_1, \dots, x_m) - \left(\frac{i_1}{s_1}, \dots, \frac{i_m}{s_m} \right) \right\| \geqslant \delta$
Із другого випливає, що $\left(x_1 - \frac{i_1}{s_1} \right)^2 + \dots + \left(x_m - \frac{i_m}{s_m} \right)^2 \geqslant \delta^2$, а звідси
$1 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \left(x_1 - \frac{i_1}{s_1} \right)^2 + \dots + \frac{1}{\delta^2} \left(x_m - \frac{i_m}{s_m} \right)^2$. Ну а там вже аналогічно доведеться все, що треба. Але це тільки частинний випадок.
Тепер нехай $f \in C(A)$, де A - компакт. Звідси обмеженість множини, а тому $\exists R > 0 : A \subset U_R(\vec{0})$.
Навколо цього окола можемо описати куб $S_R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : |x_1| \leqslant R, \dots |x_m| \leqslant R\} \supset U_R(\vec{0})$.
Ми продовжимо функцію f до S_R так, щоб $f \in C(S_R)$. Це можна зробити, завдяки теоремі Тітце.
Зауважимо, що $S_R = [-x_1, x_1] \times \dots \times [-x_m, x_m]$. А ось тепер розглянемо функцію $g(t_1, \dots, t_m) = f(-x_1 + 2t_1 x_1, \dots, -x_m + 2t_m x_m)$, причому тепер $t_1, \dots, t_m \in [0, 1]$. Для цієї функції вже многочлен існує, за попереднім пунктом. ■

2.1 Розбиття простору $\mathbb{R}^2$

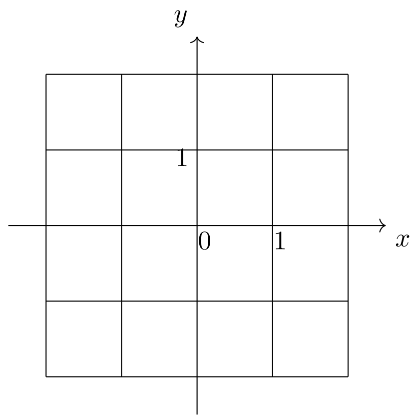
Definition 2.1.1 Розбиття нульового порядку простора $\mathbb{R}^2$ визначається ось так:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} Q^{(0)}(n_1, n_2),$$

де

$$Q^{(0)} = \{(x, y) : x \in [n_1, n_1 + 1], \quad y \in [n_2, n_2 + 1]\}$$

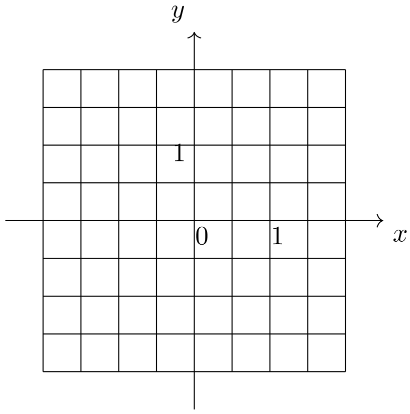
Тобто ми $\mathbb{R}^2$ розбиваємо на квадрати зі сторонами 1 таким чином, щоб вершини були цілими числами.



Definition 2.1.2 Розбиття першого порядку простора $\mathbb{R}^2$ визначається ось так само, але тепер об'єднання з $Q^{(1)}(n_1, n_2)$, де

$$Q^{(1)} = \left\{ (x, y) : x \in \left[\frac{n_1}{2}, \frac{n_1 + 1}{2} \right], \quad y \in \left[\frac{n_2}{2}, \frac{n_2 + 1}{2} \right] \right\}$$

Тобто ми $\mathbb{R}^2$ розбиваємо на квадрати зі сторонами $\frac{1}{2}$ так, щоб вершини були кратними до $\frac{1}{2}$.



Можна $Q^{(1)}(n_1, n_2)$ отримати від $Q^{(0)}(k_1, k_2)$ шляхом ділення відрізків навпіл. Таким чином, утвориться $2^2 = 4$ брусів $Q^{(1)}$. Степінь 2 - розмірність простору.

Definition 2.1.3 Розбиття n-го порядку простора $\mathbb{R}^2$ визначається ось так само, але тепер об'єднання з $Q^{(n)}(n_1, n_2)$, де

$$Q^{(n)} = \left\{(x, y) : x \in \left[\frac{n_1}{2^n}, \frac{n_1+1}{2^n}\right], \quad y \in \left[\frac{n_2}{2^n}, \frac{n_2+1}{2^n}\right]\right\}$$

Важливі зауваження:

1. Діаметр $Q^{(n)}$ дорівнює $\sqrt{2} \cdot 2^{-n}$
2. Об'єм $Q^{(n)}$ дорівнює $\left(\frac{1}{2^n}\right)^2$
3. $Q^{(n)}(n_1, n_2)$ та $Q^{(n)}(k_1, k_2)$, які різні між собою, не мають спільних внутрішніх точок
4. Задамо деяку обмежену множину $F \subset \mathbb{R}^2$. Тоді для будь-якого порядку розбиття $\mathbb{R}^2$ набір утворених брусів, що мають хоча б одну спільну точку з F, скінченний.

Надалі будуть такі позначення:
$\pi^{(n)} = \{Q^{(n)}(n_1, n_2), n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$
$Q^0 \in \pi^{(n)}$ - множина всіх внутрішніх точок

2.2 Вимірні множини. Міра Жордана

Уже відомо, що для бруса $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ міра визначається як $m(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

Нехай $G \subset \mathbb{R}^2$, яка допускає розклад в бруси $Q_i \in \pi^{(n)}$, тобто $G = \bigcup_{i=1}^{s} Q_i$. Тоді природно визначити **міру множини** G ось так:

$$m(G) = \sum_{i=1}^{s} m(Q_i)$$

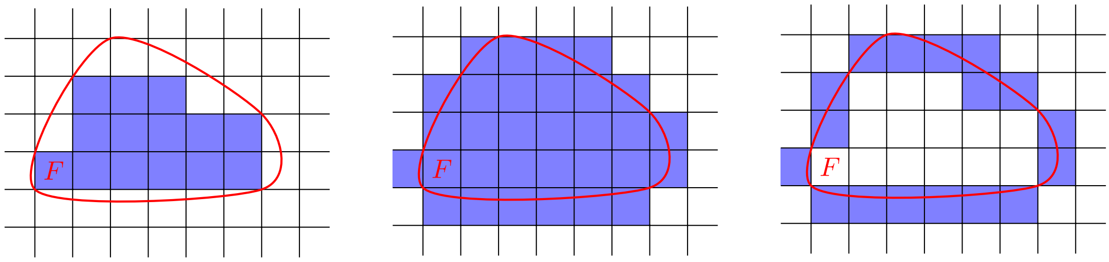
Remark 2.2.1 Розклад G не є єдиним, але міра так чи інакше зберігає значення. Це завдяки зауваженню після **Def. 2.1.2.**

Нехай тепер $F \subset \mathbb{R}^2$ - деяка обмежена множина. Визначимо ось такі множини для кожного $n \geqslant 0$:

$$F_{(n)} = \bigcup_{\substack{Q \in \pi^{(n)} \\ Q \subset F}} Q$$

$$F^{(n)} = \bigcup_{\substack{Q \in \pi^{(n)} \\ Q \cap F \neq \varnothing}} Q$$

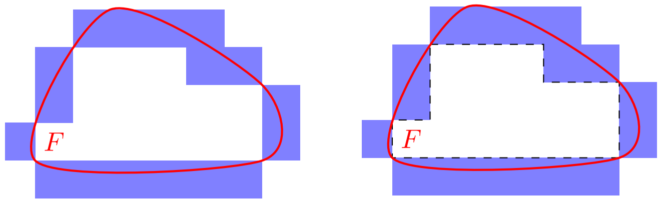
$$\Delta F_{(n)} = \bigcup_{\substack{Q \not\subset F_{(n)} \\ Q \subset F^{(n)}}} Q$$



$F_{(n)}$ $\qquad$ $F^{(n)}$ $\qquad$ $\Delta F_{(n)}$

Тут червона область заповнена всередині, не просто множиина лінія.

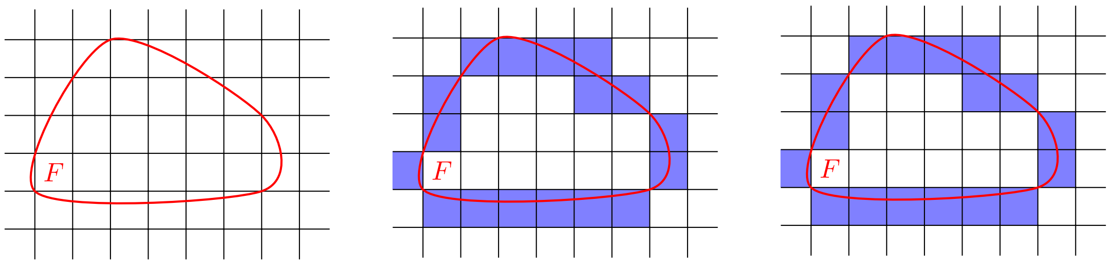
Remark 2.2.2 У цьому випадку $\Delta F_{(n)} \neq F^{(n)} \backslash F_{(n)}$, тому що можна загубити граничні точки (фактично кажучи, границі множини).



$\Delta F_{(n)}$ $\qquad$ $F^{(n)} \backslash F_{(n)}$

Штрихом позначені загублені граничні точки.

Remark 2.2.3 Якщо не існує бруса $Q \in \pi^{(n)}$, для якого $Q \subset F$, вважаємо, що $F_{(n)} = \varnothing$.



$F_{(n)} = \varnothing$ $\qquad$ $F^{(n)}$ $\qquad$ $\Delta F_{(n)}$

Тут червона область уже НЕ заповненав всередині, тобто F - це просто лінія.

Згідно з цими визначеннями, має місце співвідношення:
$F_{(n)} \subset F \subset F^{(n)}$ $\qquad$ $F \backslash F_{(n)} \subset F^{(n)} \backslash F_{(n)} \subset \Delta F_{(n)}$.
Міра множин $F_{(n)}, F^{(n)}, \Delta F^{(n)}$ визначається мірою вище. Якщо порожня множина, то $m(\varnothing) = 0$.
$m(F_{(n)}) \leqslant m(F^{(n)})$, тому що $F^{(n)}$ містить всі бруси з $F_{(n)}$ та інші не з $F_{(n)}$.
$m(\Delta F_{(n)}) = m(F^{(n)}) - m(F_{(n)})$. Тут спочатку показується, що $F^{(n)} = F_{(n)} \cup \Delta F_{(n)}$. А далі маємо:
$m(F^{(n)}) = \sum\limits_{Q \cap F \neq \varnothing} m(Q) = \sum\limits_{Q \subset F} m(Q) + \sum\limits_{\substack{Q \not\subset F \\ Q \cap F \neq \varnothing}} m(Q) = m(F_{(n)}) + \sum\limits_{\substack{Q \not\subset F_{(n)} \\ Q \subset F^{(n)}}} m(Q) = m(F_{(n)}) + m(\Delta F_{(n)})$.

Тепер розглянемо розбиття порядків n та $n+1$ простору $\mathbb{R}^2$. Із властивості отримання брусів, випливає, що
$F_{(n)} \subset F_{(n+1)}$ та $F^{(n+1)} \subset F^{(n)}$.

Тоді для мір цих множин отримаємо:
$0 \leqslant m(F_{(n)}) \leqslant m(F_{n+1}) \leqslant m(F^{(n+1)}) \leqslant m(F^{(n)})$
Оскільки за властивістю 4 п. 2.1. $m(F_{(0)})$ та $m(F^{(0)})$ - скінченні, то тоді ми отримаємо, що послідовність $\{m(F_{(n)}), n \geqslant 0\}$ - монотонно неспадна та обмежена, водночас послідовність $\{m(F^{(n)}), n \geqslant 0\}$ - монотонно незростаюча та обмежена. Отримуємо нові означення:

Definition 2.2.4 Задано $F \subset \mathbb{R}^2$ - обмежена множина.
Внутрішньою мірою множини F називають число

$$m_*(F) = \lim_{n\to\infty} m(F_{(n)}) = \sup_{n\geqslant 0} m(F_{(n)})$$

Зовнішньою мірою множини F називають число

$$m^*(F) = \lim_{n\to\infty} m(F^{(n)}) = \inf_{n\geqslant 0} m(F_{(n)})$$

Із нерівності міри трошки вище, отримаємо, що $0 \leqslant m_*(F) \leqslant m^*(F)$, для довільної обмеженої множини F.

Definition 2.2.5 Обмежена множина $F \subset \mathbb{R}^2$ називається **вимірною за Жорданом**, якщо

$$m_*(F) = m^*(F) = m(F)$$

Число $m(F)$ називається **мірою Жордана**.

Клас підмножин $\mathbb{R}^m$, що вимірні за Жорданом, позначимо через $\mathcal{K}_m$.

Remark 2.2.6 Клас $\mathcal{K}_2$ не є порожнім.
Наприклад, беремо множину $F = [0,1] \times [0,1]$. Множина $F_{(n)} = F$ за властивостями розбиття $\mathbb{R}^2$.
Водночас $F^{(n)} = \left[0 - \frac{1}{2^n}, 1 + \frac{1}{2^n}\right] \times \left[0 - \frac{1}{2^n}, 1 + \frac{1}{2^n}\right]$.
$m_*(F) = 1$ $\qquad$ $m^*(F) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n} - 0 + \frac{1}{2^n}\right)^2 = 1$
Отже, множина $F \in \mathcal{K}_2$.

Example 2.2.7 Довести, що якщо $F \in \mathcal{K}$ та не містить внутрішніх точок, то $m(F) = 0$.
Маємо, що $m_*(F) = m^*(F)$. Покажемо, що $m_*(F) = 0$, а для цього ми покажемо, що $F_{(n)} = \varnothing, \forall n \geqslant 1$.
!Припустимо, що $F_{(n)} \neq \varnothing$, тоді існує принаймні один брус $Q \subset F$. Оскільки брус Q містить внутрішні точки, тому ці ж внутрішні точки лежать в F. Суперечність!
Отже, $F_{(n)} = \varnothing \implies m_*(F) = 0 \implies m(F) = 0$.

Theorem 2.2.8 Задано $F \subset \mathbb{R}^2$ - обмежена.
$F \in \mathcal{K}_2 \iff m(\Delta F_{(n)}) \to 0, n \to \infty$
Переформулювання означення вимірної множини.

Example 2.2.9 Довести, що $\{x\} \in \mathcal{K}_1$ та $m(\{x\}) = 0$.
Маємо $F_{(n)} = \varnothing, \forall n \geqslant 1$. Тоді $m_*(F) = 0$.
Нехай $x \in [k, k+1]$. Маємо $F^{(0)} = [k, k+1]$, далі $F^{(1)}$ або перша половина, або друга половина $F^{(0)}$ в залежності від розташування x. $F^{(2)}$ або перша половина, або друга половина $F^{(1)}$ в залежності від розташування $x\ldots$
Отримаємо, що $m(F^{(n)}) = \frac{1}{2^n} \implies m^*(F) = 0$.
Отже, $\{x\} \in \mathcal{K}_1$ та $m(\{x\}) = 0$.

Example 2.2.10 Довести, що $[a,b] \in \mathcal{K}_1$ та $m([a,b]) = b - a$.
Спочатку зауважимо, що $\Delta[a,b]_{(n)}$ складається або з одного, або з двох відрізків довжинами $\frac{1}{2^n}$.
В обох випадках ми отримаємо $m(\Delta[a,b]_{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, $[a,b] \in \mathcal{K}_2$.
Розглянемо тепер $[a,b]_{(n)}$. Зрозуміло, що $m([a,b]_{(n)}) \leqslant b-a$, оскільки $[a,b]_{(n)}$ складається з відрізків, що всередині $[a,b]$, а міра $m([a,b]_{(n)}) = r - l$, де r, l - відповідно правий та лівий кінці, що лежать всередині $[a,b]$.

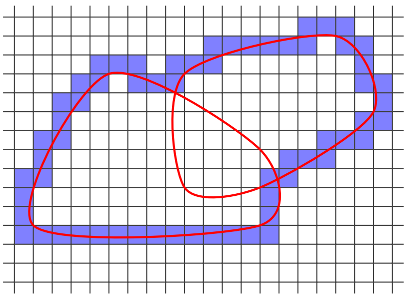
Також зауважимо, що $m([a,b]_{(n)}) \geqslant b - a - 2 \cdot \dfrac{1}{2^n}$, оскільки $r \geqslant b - \dfrac{1}{2^n}$ та $l \geqslant a - \dfrac{1}{2^n}$.
Загалом маємо $b - a - 2 \cdot \dfrac{1}{2^n} \leqslant m([a,b]_{(n)}) \leqslant b - a$.
Якщо $n \to \infty$, то отримаємо $m_*([a,b]) = b - a = m^*([a,b])$.
Остаточно, $m([a,b]) = b - a$.

Example 2.2.11 Показати, що $\mathbb{Q} \cap [0,1] \notin \mathcal{K}_1$.
Справді, $(\mathbb{Q} \cap [0,1])_{(n)} = \varnothing$, оскільки не існує відрізка лише з раціональними числами за топологією $\mathbb{R}$, тоді $m_*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$.
Далі $(\mathbb{Q} \cap [0,1])^{(n)} = [0,1] \cup \left[0 - \dfrac{1}{2^n}, 0\right] \cup \left[1, 1 + \dfrac{1}{2^n}\right]$. У нас присутній відрізок $[0,1]$, оскільки будь-який відрізок з об'єднання матиме принаймні одне раціональне число за конструкцією розбиття $\mathbb{R}$. Тоді $m^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1$.
Отже, $m_*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \neq m^*(\mathbb{Q} \cap [0,1])$, а тому множина $\mathbb{Q} \cap [0,1] \notin \mathcal{K}_1$.
Тобто $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ - один з прикладів невимірних множин за Жорданом.

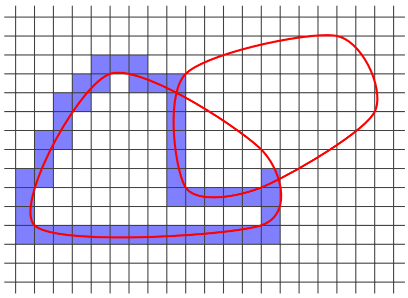
2.3 Властивості вимірних множин та міри Жордана

Theorem 2.3.1 Задано $A, B \in \mathcal{K}$. Тоді $A \cup B, A \backslash B, A \cap B \in \mathcal{K}$.
Таким чином, множина клас множин $\mathcal{K}$ - кільце (термінологія з теорії міри).

Proof.
Нехай $A, B \in \mathcal{K}$. Зауважимо, що $\forall n \geqslant 0$ виконується відношення:
$\Delta(A \cup B)_{(n)} \subset \Delta A_{(n)} \cup \Delta B_{(n)}$
$\Delta(A \backslash B)_{(n)} \subset \Delta A_{(n)} \cup \Delta B_{(n)}$.



$\Delta(A \cup B)_{(n)}$



$\Delta(A \backslash B)_{(n)}$

Пояснимо строго кожне окремо.
I. Оберемо якийсь брус Q, який бере участь в $\Delta(A \cup B)_{(n)}$, ну тобто $Q \subset \Delta(A \cup B)_{(n)}$.
Це означає, що існують два елементи: $\vec{x} \in (Q \cap A) \cup (Q \cap B)$ та $\vec{y} \in Q \backslash (A \cup B)$. Просто подивись на якийсь блактиний квадрат із фігури $\Delta(A \cup B)_{(n)}$ та все буде ясно.
Із того, що $\vec{y} \in Q \backslash (A \cup B)$, випливає $\vec{y} \in Q \backslash A$ та $y \in Q \backslash B$.
Якщо $\vec{x} \in A$, то звідси $\vec{x} \in Q \cup A$. Маючи $\vec{y} \in Q \backslash A$, отримаємо $Q \not\subset A_{(n)}$, а також $Q \cap A \neq \varnothing$. Таким чином, цей брус Q бере участь в $\Delta A_{(n)}$, тобто $Q \subset \Delta A_{(n)}$.
Аналогічно при $\vec{x} \in B$ маємо $\vec{y} \in Q \backslash B$, а тому $Q \subset \Delta B_{(n)}$.
Отже, будь-який брус Q, що бере участь в $\Delta(A \cup B)_{(n)}$, автоматично бере участь окремо в $\Delta A_{(n)}$ або в $\Delta B_{(n)}$. Також не забуваймо, що є бруси, що лежать в $\Delta A_{(n)}$ або $\Delta B_{(n)}$, але не в $\Delta(A \cup B)_{(n)}$.
Звідси маємо, що $\Delta(A \cup B)_{(n)} \subset \Delta A_{(n)} \subset \Delta A_{(n)} \cup \Delta B_{(n)}$ або $\Delta(A \cup B)_{(n)} \subset \Delta B_{(n)} \subset \Delta B_{(n)} \cup \Delta A_{(n)}$.

II. Оберемо якийсь брус Q, який бере участь в $\Delta(A \backslash B)_{(n)}$, ну тобто $Q \subset \Delta(A \backslash B)_{(n)}$.
Це означає, що існують два елементи: $\vec{x} \in Q \cap (A \backslash B)$ та $\vec{y} \in Q \cap \overline{(A \backslash B)}$.
Якщо $\vec{y} \notin A$, то тоді $\vec{y} \in Q \backslash A$. Водночас із $\vec{x} \in Q \cap (A \backslash B)$ випливає $\vec{x} \in Q \cap A$. Маючи це все, отримаємо $Q \not\subset A_{(n)}$, а також $Q \cap A \neq \varnothing$. Таким чином, цей брус Q бере участь в $\Delta A_{(n)}$, тобто $Q \subset \Delta A_{(n)}$.
Якщо $\vec{y} \in A$, то також $\vec{y} \in B$, водночас із $\vec{x} \in Q \cap (A \backslash B)$ випливає $\vec{x} \in Q \backslash B$. Аналогічно звідси випливає, що $Q \subset \Delta B_{(n)}$.

Отже, будь-який брус Q, що бере участь в $\Delta(A\backslash B)_{(n)}$, автоматично бере участь окремо в $\Delta A_{(n)}$ або в $\Delta B_{(n)}$. Також не забуваймо, що є бруси, що лежать в $\Delta A_{(n)}$ або $\Delta B_{(n)}$, але не в $\Delta(A\backslash B)_{(n)}$.
Звідси маємо, що $\Delta(A\backslash B)_{(n)} \subset \Delta A_{(n)} \subset \Delta A_{(n)} \cup \Delta B_{(n)}$ або $\Delta(A\backslash B)_{(n)} \subset \Delta B_{(n)} \subset \Delta B_{(n)} \cup \Delta A_{(n)}$.

Все, ми обґрунтували співвідношення. Таким чином,
$0 \leqslant m(\Delta(A \cup B)_{(n)}) \leqslant m(\Delta A_{(n)}) + m(\Delta B_{(n)})$
$0 \leqslant m(\Delta(A\backslash B)_{(n)}) \leqslant m(\Delta A_{(n)}) + m(\Delta B_{(n)})$
І хоча ми не доводили монотонність, але це можна спокійно довести для множин, що допускаються в розклад прямокутників.
За умовою, $m(\Delta A_{(n)}) \to 0, m(\Delta B_{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді із нерівностей випливає, що $m(\Delta(A \cup B)_{(n)}) \to 0, m(\Delta(A\backslash B)_{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$. За попередньою теоремою, $A \cup B, A\backslash B \in \mathcal{K}$.
$A \cap B \in \mathcal{K}$, оскільки $A \cap B = A\backslash(A\backslash B)$. ■

Theorem 2.3.2 Для міри Жордана виконуються такі властивості:

1. $\forall A, B \in \mathcal{K} : m(A \cup B) \leqslant m(A) + m(B)$;
2. $\forall A, B \in \mathcal{K}, A^\circ \cap B^\circ = \varnothing : m(A \cup B) = m(A) + m(B)$;
3. $\forall A, B \in \mathcal{K} : A \subset B : m(A) \leqslant m(B)$

Proof.
1.Зауважимо, що $(A \cup B)_{(n)} \subset A_{(n)} \cup \Delta A_{(n)} \cup B_{(n)} \cup \Delta B_{(n)}$. Дійсно,
беремо якийсь брус Q із $(A \cup B)_{(n)}$, тоді звідси $Q \subset A \cup B$. Тут є кілька варіантів:

$$\left[\begin{gathered} Q \subset A \\ Q \subset B \\ Q \not\subset A, Q \cap A \neq \varnothing, Q \not\subset B, Q \cap B \neq \varnothing \end{gathered}\right. \implies \left[\begin{gathered} Q \text{ із } A_{(n)} \\ Q \text{ із } B_{(n)} \\ Q \text{ із } \Delta A_{(n)} \text{ та із } \Delta B_{(n)} \end{gathered}\right.$$

$\implies Q$ із $A_{(n)} \cup B_{(n)} \cup \Delta A_{(n)} \cup \Delta B_{(n)}$. Таким чином, отримаємо бажане.
Тоді $m((A \cup B)_{(n)}) \leqslant m(A_{(n)}) + m(\Delta A_{(n)}) + m(B_{(n)}) + m(\Delta B_{(n)})$.
Тут саме множини, що допускаються в розклад прямокутників. Монотонність для них виконана.
Отже, $m(A \cup B) = \lim\limits_{n\to\infty} m((A \cup B)_{(n)}) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} m(A_{(n)}) + 0 + \lim\limits_{n\to\infty} m(B_{(n)}) + 0 = m(A) + m(B)$.

2. Для цього нам достатньо довести нерівність $m(A \cup B) \geqslant m(A) + m(B)$.
Маємо $A_{(n)} \cup B_{(n)} \subset (A \cup B)_{(n)}$, причому $A_{(n)}, B_{(n)}$ не мають спільних брусів $Q \in \pi^{(n)}$.
!Припустимо, що це не так. Маємо Q - брус для $A_{(n)}$ та $B_{(n)}$. Цей брус Q ясно, що має внутрішні точки, тоді звідси $A_{(n)}, B_{(n)}$ мають ці внутрішні точки. Раз $A_{(n)}, B_{(n)}$ мають внутрішні точки, то тоді A, B мають ці внутрішні точки, тобто $A^\circ \cap B^\circ \neq \varnothing$, що суперечить!
Отже, $m(A_{(n)} \cup B_{(n)}) = m(A_{(n)}) + m(B_{(n)}) \leqslant m((A \cup B)_{(n)})$.
Адитивність для множин, що допускаються в розклад прямокутників, виконана.
Таким чином, $m(A \cup B) = \lim\limits_{n\to\infty} m((A \cup B)_{(n)}) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} m(A_{(n)}) + \lim\limits_{n\to\infty} m(B_{(n)}) = m(A) + m(B)$.
Із властивості 1 випливає, що $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

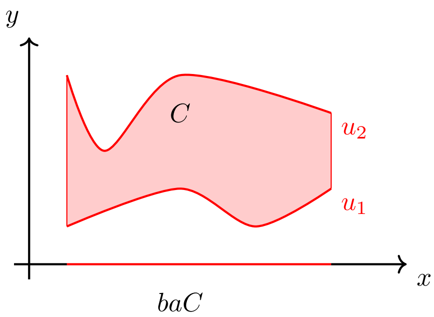
3. Тут зауважимо, що $B = A \cup (B\backslash A)$, причому $A \cap (B\backslash A) = \varnothing$, а тому за властивостю 2,
$m(B) = m(A) + m(B\backslash A) \geqslant m(A)$. ■

2.4 Циліндричні множини

Definition 2.4.1 Розглянемо множину $A \subset \mathbb{R}^{2-1}$ та дві функції $u_1, u_2 : A \to \mathbb{R}$, таким чином, щоб $u_1(x) \leqslant u_2(x)$.
Циліндричною в напрямку осі Oy множиною називається така підмножина в $\mathbb{R}^2$:

$$C = \{(x, y) : x \in A, y \in [u_1(x), u_2(x)]\}$$

У цьому випадку A називається **основою** циліндричної множини C. Позначення: baC (від base C).



Example 2.4.2 Трикутник - приклад циліндричної множини.

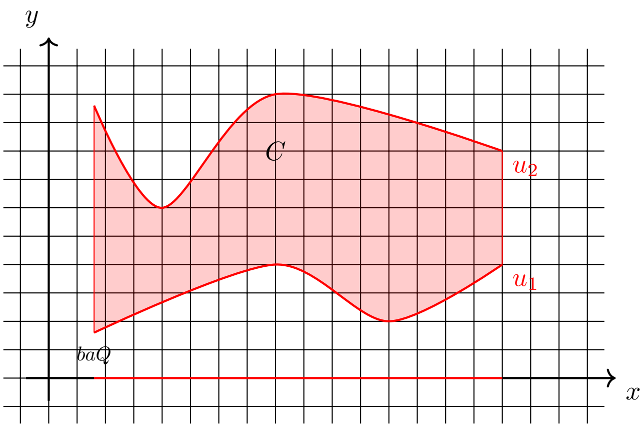
Remark 2.4.3 Брус $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ також є циліндричною множиною з основною $baQ = [a_1, b_1]$, тут визначаються функції $u_1(x) = a_2$ та $u_2(x) = b_2$.
У загальному випадку $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$ маємо $baQ = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{m-1}, b_{m-1}]$ та функції $u_1(x_1, \dots, x_{m-1}) = a_m, u_2(x_1, \dots, x_{m-1}) = b_m$.

Theorem 2.4.4 Задано C - циліндрична множина за означенням вище. Припустимо, що
1) baC - компактна, вимірна на $\mathbb{R}$;
2) $u_1, u_2 \in C(baC)$.
Тоді C - компактна, вимірна на $\mathbb{R}^2$.

Proof.
Множина C буде обмеженою. Дійсно, за умовою, $\exists R > 0 : \forall x \in baC : |x| \leqslant R$. Також $(x, y) \in C$ означає, що $u_1 \leqslant y \leqslant u_2$, але оскільки baC - компакт, то ці функції обмежені, тож $R_1 \leqslant y \leqslant R_2 \implies |y| \leqslant R^*$, де $R^* = \max\{R_1, R_2\}$. Отже,
$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \sqrt{R^2 + (R^*)^2}$ - обмежили деяких числом.

Множина C буде замкненою. Дійсно, нехай $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ - гранична точка C. Тоді існує послідовність $\{(x^{(n)}, y^{(n)}), n \geqslant 1\} \subset C$, причому $(x_0, y_0) \neq (x^{(n)}, y^{(n)})$, яка збігається до точки (x_0, y_0). Оскільки $x^{(n)} \in baC$ та $x^{(n)} \to x$, то звідси x - гранична точка baC, а в силу замкнености маємо $x \in baC$.
Більш того, $u_1(x^{(n)}) \leqslant y^{(n)} \leqslant u_2(x^{(n)}) \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} u_1(x) \leqslant y \leqslant u_2(x)$, тобто звідси $(x, y) \in C$.

Залишилось показати, що C - вимірна за Жорданом. Нам необхідно для цього оцінити $m(\Delta C_{(n)})$.
Маємо розбиття $\mathbb{R}^2$ порядку n. Ми поки розбиваємо $\mathbb{R}^2$, ми тим часом також розбиваємо $\mathbb{R}$.
Зауважимо, що
$$\Delta C_{(n)} = \bigcup_{\substack{Q \not\subset C_{(n)} \\ Q \subset C^{(n)}}} Q = \bigcup_{\substack{Q \subset \Delta C_{(n)} \\ baQ \subset \Delta(baC)_{(n)}}} Q \cup \bigcup_{\substack{Q \subset \Delta C_{(n)} \\ baQ \subset (baC)_{(n)}}} Q.$$
Відповідно
$$m(\Delta C_{(n)}) = \sum_{\substack{Q \subset \Delta C_{(n)} \\ baQ \subset \Delta(baC)_{(n)}}} m(Q) + \sum_{\substack{Q \subset \Delta C_{(n)} \\ baQ \subset (baC)_{(n)}}} m(Q).$$
Зрозуміло, що всюди бруси $Q \in \pi_2^{(n)}$. Просто лінь вже це писати.
За умовою задачі, оскільки $u_1, u_2 \in C(baC)$, де baC - це компакт, то ці функції обмежені, тобто $\exists L > 0 : \forall x \in baC : -L \leqslant u_1(x) \leqslant u_2(x) \leqslant L$.
Також $u_1, u_2 \in U_{unif}(baC)$ за теоремою Кантора, тобто звідси
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x_1, x_2 \in baC : |x_1 - x_2| < \delta \implies |u_i(x_1) - u_i(x_2)| < \varepsilon, i = 1, 2$.
Оберемо такий порядок n, щоб діагональ бруса, тобто $\dfrac{\sqrt{m}}{2^n} < \min\{\varepsilon, \delta\}$, де в нашому випадку $m = 2$, бо ми зараз в $\mathbb{R}^2$.
Тепер найскладніше - це подивитись ще детальніше на бруси з $\Delta C_{(n)}$.



baC

Спочатку розглянемо брус $baQ \subset \Delta(baC)_{(n)}$. Нас цікавить оцінити зараз першу суму мір брусів (а ця сума мір - це крайні стовпчики на малюнку). Оберемо найбільший стовпчик серед всіх, що там є. Позначу висоту за h_1.
$h_1 \leqslant 2L + 2 \cdot \dfrac{1}{2^n}$, де $\dfrac{1}{2^n}$ - сторона бруса. Тут $2L + 2\dfrac{1}{2^n}$ - це найбільша висота, яка може тут бути в принципі між функціями u_1 та u_2 з урахуванням 2-х квадратиків поза межами.
Відповідно міра такої штуки, тобто $\displaystyle\sum_{\substack{Q\subset \Delta C_{(n)} \\ baQ \subset \Delta(baC)_{(n)}}} m(Q) = \sum_{\substack{Q\subset \Delta C_{(n)} \\ baQ \subset \Delta(baC)_{(n)}}} m(baQ)\cdot h_1 \leqslant \left(2L + 2\frac{1}{2^n}\right) m(\Delta(baC)_{(n)})$.

Тепер розглянемо брус $baQ \subset (baC)_{(n)}$. Нас цікавить оцінити зараз другу суму мір брусів. У нас будуть на основі baQ два стопчика. Висоту двох стовпчиків позначу за h_2.
Сторона бруса точно менша за діагональ, а тому які б точки x_1, x_2 з цього стовпчика я не взяв, буде $|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Ми оберемо ті точки, де буде найбільший модуль різниці.
Відповідно, $h_2 \leqslant 2 \cdot \dfrac{1}{2^n} + \max |f(x_1) - f(x_2)| < 2 \cdot \dfrac{1}{2^n} + \varepsilon$.
Відповідно міра такої штуки, тобто $\displaystyle\sum_{\substack{Q\subset \Delta C_{(n)} \\ baQ \subset \Delta(baC)_{(n)}}} m(Q) = \sum_{\substack{Q\subset \Delta C_{(n)} \\ baQ \subset \Delta(baC)_{(n)}}} m(baQ)\cdot h_2 \leqslant \left(2\varepsilon + 2\frac{1}{2^n}\right) m(baC_{(n)})$.
Отже, $m(\Delta C_{(n)}) \left(2L + 2\dfrac{1}{2^n}\right) m(\Delta(baC)_{(n)}) + \left(2\varepsilon + 2\dfrac{1}{2^n}\right) m(baC_{(n)})$.
Відомо, що baC вимірна за Жорданом, а тому $m(\Delta(baC)_{(n)}) < \varepsilon$, починаючи з деякого номера.
Отже, $m(\Delta C_{(n)}) < \left(2L + 2\dfrac{1}{2^n}\right)\varepsilon + \left(2\varepsilon + 2\dfrac{1}{2^n}\right) m(baC) < (2L+1)\varepsilon + 2\varepsilon m(baC) = (2L+1+2m(baC))\varepsilon$.
Тобто звідси C - вимірна за Жорданом. ■

2.5 Кратні інтеграли по вимірних множнах

Definition 2.5.1 Маємо $A \subset \mathbb{R}^2$ - вимірна, функція f - обмежена та неперервна на A. Для розбиття $\pi^{(n)}$ простору $\mathbb{R}^2$ визначимо множину $A_{(n)} = \displaystyle\bigcup_{\substack{Q\in\pi^{(n)} \\ Q\subset A}} Q$.

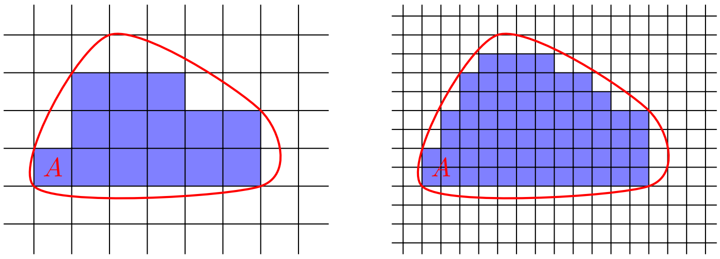
Інтеграл на множині $A_{(n)}$ визначається таким чином:

$$\int\limits_{A_{(n)}} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{\substack{Q\in\pi^{(n)} \\ Q\subset A_{(n)}}} \int\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy$$

Якщо $A_{(n)} = \varnothing$, то вважаємо, що $\displaystyle\int\limits_{A_{(n)}} f(x,y)\,dx\,dy = 0$.

Lemma 2.5.2 Послідовніть $\left\{ \int\limits_{A_{(n)}} f(x,y)\,dx\,dy, n \geqslant 1 \right\}$ - фундаментальна.

Proof.
На початку припущу, що $k > n$.
$\left| \int\limits_{A_{(n)}} f(x,y)\,dx\,dy - \int\limits_{A_{(k)}} f(x,y)\,dx\,dy \right| = \left| \sum\limits_{Q \subset A_{(k)} \setminus A^0_{(n)}} \int\limits_Q f(x,y)\,dx\,dy \right| \leqslant \sum\limits_{Q \subset A_{(k)} \setminus A^0_{(n)}} \int\limits_Q |f(x,y)|\,dx\,dy \overset{f-\text{обм}}{\leqslant}$
$L \sum\limits_{Q \subset A_{(k)} \setminus A^0_{(n)}} \int\limits_Q dx\,dy = L \sum\limits_{Q \subset A_{(k)} \setminus A^0_{(n)}} m(Q) = L \left(\sum\limits_{Q \subset A_{(k)}} m(Q) - \sum\limits_{Q \subset A_{(n)}} m(Q) \right) = L(m(A_{(k)}) - m(A_{(n)})) <$
$L\varepsilon$
Послідовність $\{m(A_{(n)}), n \geqslant 1\}$ - збіжна, а тому фундаментальна.



$A_{(n)}$ $A_{(k)}$

■

Definition 2.5.3 Маємо $A \subset \mathbb{R}^2$ - вимірна, функція f - обмежена та неперервна на A.
Інтеграл на множині A визачається таким чином:

$$\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_{(n)}} f(x,y)\,dx\,dy$$

Якщо $m(A) = 0$, то тоді $A_{(n)} = \varnothing$, а тому вважаємо, що $\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = 0$.

Theorem 2.5.4 Маємо $A \subset \mathbb{R}^2$ - вимірна, функція $f(x,y) = c$. Тоді
$\int\limits_A c\,dx\,dy = cm(A)$.

Proof.
$\int\limits_{A_{(n)}} c\,dx\,dy = \sum\limits_{Q \subset A_{(n)}} \int\limits_Q c\,dx\,dy = \sum\limits_{Q \subset A_{(n)}} cm(Q) = cm(A_{(n)})$.
А далі просто $n \to \infty$. ■

Theorem 2.5.5 Маємо $A \subset \mathbb{R}^2$ - вимірна, функції f_1, f_2 - обмежені та неперервні на A.
Тоді $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:
$\int\limits_A c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)\,dx\,dy = c_1 \int\limits_A f_1(x,y)\,dx\,dy + c_2 \int\limits_A f_2(x,y)\,dx\,dy$.
Аналогічні міркування застосувати.

Theorem 2.5.6 Маємо $A, B \subset \mathbb{R}^2$ - вимірні, причому $A^0 \cap B^0 = \varnothing$, функція f - обмежена та неперервна на $A \cup B$. Тоді
$\int\limits_{A \cup B} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy + \int\limits_B f(x,y)\,dx\,dy$.

Proof.
Було вже зауваження, що оскільки $A^0 \cap B^0 = \varnothing$, то звідси $A_{(n)}, B_{(n)}$ не можуть мати спільних брусів. Завдяки цьому, отримаємо:
$\displaystyle\int\limits_{A_{(n)}} f(x,y)\,dx\,dy + \int\limits_{B_{(n)}} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{A_{(n)}\cup B_{(n)}} f(x,y)\,dy\,dy.$
Позначимо $C_n = (A \cup B)_{(n)} \backslash (A_{(n)} \cup B_{(n)})^0$. Зауважимо, що $C_n \subset \Delta A_{(n)} \cup \Delta B_{(n)}$. Тоді
$\displaystyle\left|\int\limits_{(A\cup B)_{(n)}} f(x,y)\,dx\,dy - \int\limits_{A_{(n)}\cup B_{(n)}} f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \left|\int\limits_{C_n} f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant Lm(C_n) \leqslant L(m(\Delta A_{(n)})+m(\Delta B_{(n)})).$
Тут маємо $L = \sup\limits_{(x,y)\in A\cup B} f(x,y)$. А далі просто $n \to \infty$. ∎

Theorem 2.5.7 Маємо $A \subset \mathbb{R}^2$ - вимірна, функція f - обмежена та неперервна на A. Тоді
$\displaystyle\left|\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \int\limits_A |f(x,y)|\,dx\,dy.$

Theorem 2.5.8 Маємо $A \subset \mathbb{R}^2$ - вимірна, функція $f \geqslant 0$ - обмежена та неперервна на A. Тоді
$\displaystyle\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy \geqslant 0.$

2.6 Обчислення інтеграла за циліндричними множинами

Нехай A - циліндрична множина так, що baA - компакт та $u_1, u_2 \in C(baA)$. Нехай $f \in C(A)$. Визначимо таку функцію:

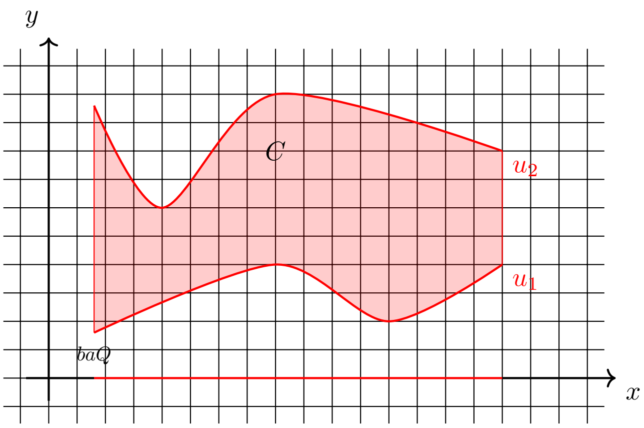
$$g(x) = \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Lemma 2.6.1 $g \in C(baA)$.

Proof.
I. f - многочлен, тоді лема - наслідок теореми про неперервність складеної функції.
II. f - загальна функція. Нехай $\varepsilon > 0$, тоді за теоремою Вейєрштраса, існує многочлен P_ε, для якого $\max\limits_{(x,y)\in A} |f(x,y) - P_\varepsilon(x,y)| < \varepsilon$.
Позначимо $h_\varepsilon(x) = \displaystyle\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} P_\varepsilon(x,y)\,dy$, де точки $x \in baA$. Тоді $h_\varepsilon \in C(baA)$ за пунктом I. Ба більше, $|g(x) - h_\varepsilon(x)| < \varepsilon(L_2 - L_1)$, де $L_1 = \min\limits_{x\in baA} u_1(x), L_2 = \max\limits_{x\in baA} u_2(x)$.
Нехай $x_0 \in baA$ фіксована та $\delta > 0$ обрано так, що $|x - x_0| < \delta, \forall x \in baA \implies |h_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(x_0)| < \varepsilon$. Тоді
$|g(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon(L_2 - L_1) + \varepsilon$.
Таким чином, $g \in C(baA)$. ∎

Theorem 2.6.2 Задано A - циліндричну множину так, що baA - компакт та $u_1, u_2 \in C(baA)$. Нехай $f \in C(A)$, тоді
$\displaystyle\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{baA} \left(\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$

Proof.
Визначимо множини $A_{(n)}$ та $(baA)_{(n)}$. Уже відомо, що A - вимірна, а тому
$\displaystyle\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_{(n)}} f(x,y)\,dx\,dy.$
Розглянемо випадок, коли проєкція $A_{(n)}$ на підпростір $y = 0$ збігається з $(baA)_{(n)}$.



baC

$A_{(n)}$ складена із стовпчиків, що є циліндричними множини, основи яких є бруси $Q \subset (baA)_{(n)}$.
На кожному $(baA)_{(n)}$ ми визначимо функції $\overline{u_1}(x) = \min\limits_{(x,y)\in A_{(n)}} y$ та $\overline{u_2}(x) = \max\limits_{(x,y)\in A_{(n)}} y$, де $x \in (baA)_{(n)}$.
Функції $\overline{u_1}, \overline{u_2}$ постійні на кожному $Q^0, Q \subset baA$. Тоді маємо за адитивністю та (???)

$$\int\limits_{A_{(n)}} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{(baA)_{(n)}} \left(\int_{\overline{u_1}(x)}^{\overline{u_2}(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Оскільки u_1, u_2 неперервні на компакті, то тоді
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x_1, x_2 \in baA : |x_1 - x_2| < \delta \implies |u_i(x_1) - u_i(x_2)| < \varepsilon, i = 1, 2$.
Оберемо такий номер n, щоб $\dfrac{\sqrt{2}}{2^n} < \delta$, тобто діагональ бруса менша за це число. Тоді $\forall x \in (baA)_{(n)}$:

$$0 \leqslant \overline{u_1}(x) - u_1(x) < \varepsilon + 2 \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$0 \leqslant u_2(x) - \overline{u_2}(x) < \varepsilon + 2 \cdot \frac{1}{2^n}.$$

$$\left| \int\limits_{A_{(n)}} f(x,y)\,dx\,dy - \int\limits_{(baA)_{(n)}} g(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_{(baA)_{(n)}} \left(\int_{\overline{u_1}(x)}^{\overline{u_2}(x)} f(x,y)\,dy \right) dx - \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x,y)\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2L\left(\varepsilon + 2\frac{1}{2^n}\right) m((baA)_{(n)}) \leqslant 2L\left(\varepsilon + 2\frac{1}{2^n}\right) m(baA).$$

Далі ми $n \to \infty$ - отримаємо бажане. ■

Corollary 2.6.3 Якщо A - циліндрична множина, задовольняюча умові теореми, тоді $m(A) = \int\limits_A dx\,dy = \int\limits_{baA} (u_2(x) - u_1(x)\,dx$.

2.7 Відображення спеціального вигляду

Definition 2.7.1 Задано $A \subset \mathbb{R}^m$ - відкрита підмножина, число $1 \leqslant k \leqslant m$ та функція $u \in C^1(A)$.
Встановимо відображення $\vec{g} : A \to \mathbb{R}^m$ за формулою:

$$\vec{g}(\vec{x}) = (x_1, \ldots, x_{k-1}, u(\vec{x}), x_{k+1}, \ldots, x_m)$$
$$\vec{x} \in A$$

Таке відображення називається **відображенням спеціального вигляду**.

Remark 2.7.2 Надалі вважаємо, що для даного відображення виконуються дві умови:

$$L = \sup_{\vec{x}\in A} |u'_k(\vec{x})| < +\infty$$
$$\forall \vec{x} \in A : u'_k(\vec{x}) > 0 \text{ або } u'_k(\vec{x}) < 0$$

Lemma 2.7.3 Задано відображення $\vec{h} : A \to \mathbb{R}^m$ з такими умовами:
1) $\vec{h}$ - ін'єкція;

2) $\vec{h} \in C(A)$.
Тоді $\forall G \subset A, F \subset A$ таких, що $G^0 \cap F^0 = \varnothing$ виконується рівність $(\vec{h}(G))^0 \cap (\vec{h}(F))^0 = \varnothing$.

Proof.
!Припустимо, що $(\vec{h}(G))^0 \cap (\vec{h}(F))^0 \neq \varnothing$. Значить, на цій множині є деякий елемент $\vec{y} \in (\vec{h}(G))^0 \cap (\vec{h}(F))^0$. Оскільки перетин відкритих множин дає відкриту, то тоді $\exists \varepsilon > 0 : B(\vec{y}, \varepsilon) \subset (\vec{h}(G)) \cap (\vec{h}(F))$.
Нехай $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x}), \vec{x} \in A$, в силу неперервності маємо $\exists \delta > 0 : \vec{h}(B(\vec{x}, \delta)) \subset B(\vec{y}, \varepsilon)$.
Оскільки $B(\vec{y}, \varepsilon) \subset \vec{h}(G)$ та $B(\vec{y}, \varepsilon) \subset \vec{h}(F)$, то звідси
$\vec{h}(B(\vec{x}, \delta)) \subset \vec{h}(G)$ та $\vec{h}(B(\vec{x}, \delta)) \subset \vec{h}(F)$.
Таким чином, згідно з умовою ін'єктивності, $B(\vec{x}, \delta) \subset G, B(\vec{x}, \delta) \subset F$. Суперечність! ■

Theorem 2.7.4 Задано $\vec{g} : A \to \mathbb{R}^m$ - відображення спеціального вигляду з умовами зауваження.
Нехай $B \subset A$, B - вимірна та компактна.
Тоді $\vec{g}(B)$ - вимірна та компактна.

Proof.
I. Розглянемо випадок, коли B - брус. Тобто $B = Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$.
$baQ = \{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) | a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i \neq k\}$.
Зауважимо, що $\vec{g}(Q)$ буде вимірною. При виконанні умови $u'_k > 0$ на A образ $\vec{g}(Q)$ є така циліндрична множина:
$\vec{g}(Q) =$
$= \{(y_1, \dots, y_m) | (y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m) \in baQ, u(y_1, \dots, y_{k-1}, a_k, y_{k+1}, \dots, y_m) \leqslant y_k \leqslant u(y_1, \dots, y_{k-1}, b_k, y_{k+1}, \dots, y$
Нам $u'_k > 0$ дає право на монотонність на $[a_k, b_k]$. Тому там нерівності з'явились.
baQ - компакт та $u_1 = u(y_1, \dots, y_{k-1}, a_k, y_{k+1}, \dots, y_m), u_2 = u(y_1, \dots, y_{k-1}, b_k, y_{k+1}, \dots, y_m) \in C(baQ)$.
Тож циліндрична множина $\vec{g}(Q)$ - компакт та вимірна. Ба більше,
$$m(\vec{g}(Q)) = \int\limits_{baQ} |u(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - u(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_m)| \, dx_1 \dots dx_{k-1} \, dx_{k+1} \dots dx_m.$$
За **Crl. 1.2.6.** та теореми про середнє, отримаємо:
$$m(\vec{g}(Q)) = \int\limits_Q |u'_k(\vec{x})| \, d\vec{x} = |u'_k(\vec{x}(Q))| m(Q), \text{ для деякої точки } \vec{x}(Q) \in Q.$$

II. Для розбиття $\pi^{(n)}$ визначимо множини $B_{(n)}, B^{(n)}, \Delta B_{(n)}$. Розглянемо їхні образи $\vec{g}(B_{(n)}), \vec{g}(B^{(n)}), \vec{g}(\Delta B_{(n)})$.
Оскільки A відкрита, то $B^{(n)} \subset A, \forall n > N_0$.
При виконанні умов теореми відображення $\vec{g}$ буде неперервною ін'єкцією з A. Тож
$B_{(n)} \subset B \subset B^{(n)} \implies \vec{g}(B_{(n)}) \subset \vec{g}(B) \subset \vec{g}(B^{(n)})$.
Більш того, $\vec{g}(B_{(n)}) = \bigcup\limits_{\substack{Q \in \pi^{(n)} \\ Q \subset B_{(n)}}} \vec{g}(Q)$.
Зауважимо, що $\vec{g}(B_{(n)})$ - вимірна, тому що кожний $\vec{g}(Q)$ вимірний за I. Тоді
$$m(\vec{g}(B_{(n)})) = \sum_{\substack{Q \in \pi^{(n)} \\ Q \subset B_{(n)}}} m(\vec{g}(Q)).$$
Все робиться аналогічним чином для $\vec{g}(B^{(n)})$ та $\vec{g}(\Delta B_{(n)})$, міри обчислюються аналогічно.
Доведемо тепер, що $m(\vec{g}(\Delta B_{(n)})) \to 0, n \to \infty$.
Для будь-якого $Q \subset A$ маємо $m(\vec{g}(Q)) = |u'_k(\vec{x}(Q))| m(Q) \leqslant L m(Q)$.
$$m(\vec{g}(\Delta B_{(n)}) \leqslant \sum_{\substack{Q \subset \pi^{(n)} \\ Q \subset \Delta B_{(n)}}} m(\vec{g}(Q)) \leqslant L m(\Delta B_{(n)}).$$
При $n \to \infty$ в цій нерівності отримаємо $m(\vec{g}(\Delta B_{(n)})) \to 0$, в силу вимірності B.

III. Доведемо вимірність $\vec{g}(B)$. Оскільки $\vec{g}(B_{(n)}), \vec{g}(B^{(n)})$ вимірні, то тоді $\exists N_1 : \forall N \geqslant N_1 :$
$(\vec{g}(B_{(n)}))_{(N)} \subset \vec{g}(B_{(n)}) \subset \vec{g}(B) \subset \vec{g}(B^{(n)}) \subset (\vec{g}(B^{(n)}))^{(N)}$
$m(\vec{g}(B_{(n)})) - m((\vec{g}(B_{(n)}))_{(N)}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$
$m((\vec{g}(B^{(n)}))^{(N)}) - m(\vec{g}(B^{(n)})) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Звідси випливає, що
$m(\Delta \vec{g}(B)_{(N)}) \leqslant m((\vec{g}(B^{(n)}))^{(N)}) - m((\vec{g}(B_{(n)}))_{(N)}) =$

$= m((\vec{g}(B^{(n)}))^{(N)}) - m(\vec{g}(B^{(n)})) + m(\vec{g}(B^{(n)})) - m(\vec{g}(B_{(n)})) + m(\vec{g}(B_{(n)}) - m((\vec{g}(B_{(n)}))_{(N)}) <$
$< \varepsilon + m(\vec{g}(\Delta B_{(n)}))$.
Якщо n таке, що $m(\vec{g}(\Delta B_{(n)})) < \varepsilon$, то звідси $m(\Delta\vec{g}(B)_{(N)}) < 2\varepsilon$ для $N \geqslant N_1$.
Тобто звідси $m(\Delta\vec{g}(B)_{(N)}) \to 0, N \to \infty$, тобто $\vec{g}(B)$ - вимірна.
Оскільки $m(\vec{g}(B_{(n)}) \leqslant m(\vec{g}(B)) \leqslant m(\vec{g}(B^{(n)}))$, то
$m(\vec{g}(B)) - m(\vec{g}(B_{(n)})) < m(\vec{g}(\Delta B_{(n)}))$.
Тобто $m(\vec{g}(B)) = \lim\limits_{n\to\infty} m(\vec{g}(B_{(n)}))$.
Ба більше, $\vec{g}(B)$ - компактна множина як неперервний образ компакта. ■

Theorem 2.7.5 Формула заміни змінних
Задано $\vec{g} : A \to \mathbb{R}^m$ - відображення спеціального вигляду з обмеженнями зі зауваження. Відомо, що $B \subset A$ - компактна, вимірна та $f \in C(\vec{g}(B)))$. Тоді

$$\int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\, d\vec{y} = \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))|u_k'(\vec{x})|\, d\vec{x}$$

Proof.
Обидва інтеграли визначені, тому що $\vec{g}(B)$ - компактна, вимірна, а також $f(\vec{g})|u_k'| \in C(B)$.
Маємо розбиття $\pi_m^{(n)}$ та розглянемо множину $B_{(n)}$ і для коного бруса $Q \in B_{(n)}$ виберемо якусь довільну точку $\vec{x}(Q) \in Q$. Маємо нерівність:

$$\left| \int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\, d\vec{y} - \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))|u_k'(\vec{x})|\, d\vec{x} \right| \leqslant I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)} + I_n^{(4)}, \text{ де}$$

$$I_n^{(1)} = \left| \int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\, d\vec{y} - \int\limits_{\vec{g}(B_{(n)})} f(\vec{y})\, d\vec{y} \right|$$

$$I_n^{(2)} = \left| \int\limits_{\vec{g}(B_{(n)})} f(\vec{y})\, d\vec{y} - \sum_{Q\subset B_{(n)}} f(\vec{g}(\vec{x}(Q)))|u_k'(\vec{x}(Q))|m(Q) \right|$$

$$I_n^{(3)} = \left| \sum_{Q\subset B_{(n)}} f(\vec{g}(\vec{x}(Q)))|u_k'(\vec{x}(Q))|m(Q) - \int\limits_{B_{(n)}} f(\vec{g}(\vec{x}))|u_k'(\vec{x})|\, d\vec{x} \right|$$

$$I_n^{(4)} = \left| \int\limits_{B_{(n)}} f(\vec{g}(\vec{x}))|u_k'(\vec{x})|\, d\vec{x} - \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))|u_k'(\vec{x})|\, d\vec{x} \right|.$$

Хочемо показати, що права частина прямує до нуля при $n \to \infty$.
Позначимо $\tilde{L} = \max\{\max\limits_{\vec{g}(B)} |f|, \max\limits_{B} |f(\vec{g})u_k'|\}$.
В силу властивості модуля інтеграла, константи $\tilde{L}$ та формули $m(\vec{g}(B)) = \lim\limits_{n\to\infty} m(\vec{g}(B_{(n)}))$ маємо:
$I_n^{(1)} \leqslant \tilde{L}(m(\vec{g}(B)) - m(\vec{g}(B_{(n)}))) \to 0$.
$I_{(n)}^{(4)} \leqslant \tilde{L}(m(B) - m(B_{(n)})) \to 0$.
Далі оберемо для кожного Q точку $\vec{x}(Q)$ таким чином, щоб виконувалась рівність $m(\vec{g}(Q)) = |u_k'(\vec{x}(Q))|m(Q)$. Отримаємо

$$I_n^{(2)} \leqslant \sum_{Q\subset B} \left| \int\limits_{\vec{g}(Q)} f(\vec{y}) - f(\vec{g}(\vec{x}(Q)))\, d\vec{y} \right|.$$

Зважаючи на рівномірну неперервність функції f на $\vec{g}(B)$ та u_k' на B можна показати, що $I_n^{(2)} \to 0$.
Для $I_n^{(3)}$ застосувати теорему про середнє, отримаємо:

$$I_n^{(3)} \leqslant \left| \sum_{Q\subset B_{(n)}} (f(\vec{g}(\vec{x}(Q)))|u_k'(\vec{x})(Q))| - f(\vec{g}(\vec{\theta}(Q))|u_k'(\vec{\theta}(Q))|)m(Q) \right|.$$

Тут $\vec{\theta}(Q) \in Q$, а далі використати рівномірну неперервність функції $f(\vec{g})|u_k'|$ на B. ■

Lemma 2.7.6 Задано A - відкрита множина в $\mathbb{R}^m$ та $\vec{g} : A \to \mathbb{R}^m$, причому $\vec{g} \in C^1(A)$.
Нехай $\forall \vec{x} \in A : \det \vec{g}'(\vec{x}) \neq 0$.

Тоді $\forall \vec{x}_0 \in A : \exists B(\vec{x}_0, r) : \forall \vec{x} \in B(\vec{x}_0, r) :$
$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{g}_{(m)}(\vec{g}_{(m-1)}(\dots \vec{g}_{(1)}(\vec{x}) \dots))$, де $\vec{g}_{(1)}, \dots, \vec{g}_{(m)}$ - відображення спеціального вигляду.
Тобто $\vec{g}$ розкладається на композицію відображень спеціального вигляду.

3 Криволінійні інтеграли

Перш за все, хочеться сказати, що топік про криві - це окрема казка. Про неї треба багато чого розповідати в диф. геометрії. Ми обмежимось **неперервними кривими**.
Тут будуть розглядатись **прості криві** Γ, тобто коли її параметризація $\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ ін'єктивна. Якщо крива буде замкненою, то розглядаємо тільки прості. Тільки в кінцевих точках буде збігатись. Також ми уникатимемо криві, які самоперетинаються.

3.1 Криволінійний інтеграл I роду

Definition 3.1.1 Задано криву Γ та параметризацію $\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - диференційована.
Крива називається **неособливою** (або **регулярною**), якщо $\forall t \in [a, b] : \vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

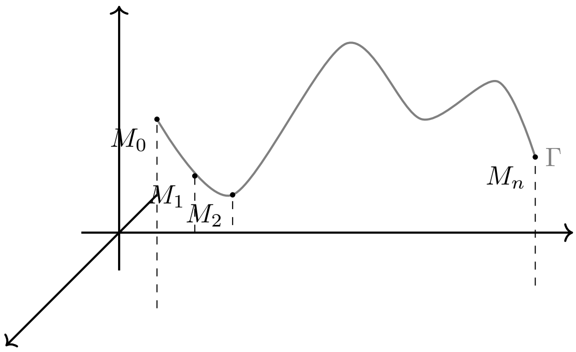
Крива називається **гладкою**, якщо $\vec{\gamma} \in C^1([a, b])$.

Remark 3.1.2 Нам потрібні неособливі криві, щоб можна було побудувати всюди дотичну до кривої. Це, скоріше, вже для криволінійних інтегралів II роду.

Remark 3.1.3 І взагалі, означення гладкої кривої автори дають по-різному. Хтось каже, що крива гладка, якщо $\vec{\gamma} \in C^1$ та $\vec{\gamma}' \not\equiv \vec{0}$.

Theorem 3.1.4 Задано Γ - гладка криву. Тоді Γ - спрямляюча крива, а також
$L(\Gamma) = \displaystyle\int_a^b \left\| \vec{\gamma}'(t) \right\| \, dt$.
У нашому випадку $\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$.
Уже було доведено раніше.

Definition 3.1.5 Задано криву Γ - спрямлаюча та параметризацію $\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$.
Встановимо **розбиття кривої** таким чином: ми відрізок $[a, b]$ раніше розбивали як відрізок $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, а кожному t_i відповідає точка на кривій $(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) = M_i$. І ось цей набір точок $\tau_\Gamma = \{M_0, M_1, \dots, M_n\}$ як раз утворює розбиття.



Definition 3.1.6 **Діаметром розбиття кривої** визначимо як

$$|\tau|_\Gamma = \max_{i=\overline{1,n}} |M_{i-1}M_i|$$

де $|M_{i-1}M_i|$ - довжина крививої між точками M_{i-1} та M_i.

Definition 3.1.7 Залишилось визначити **відмічені точки** на кривій таким чином: беремо кожну підкриву $M_{i-1}M_i$ та обираємо точку на цій кривій $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$.

Нарешті, визначимо ось таку суму:

$$\sigma(f, \tau, N) = \sum_{i=1}^{n} f(N_i)|M_{i-1}M_i|$$

Definition 3.1.8 Задано криву Γ - спрямлаюча та параметризацію $\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Маємо τ_Γ - розбиття кривої та N - відмічені точки.
Число J називається **криволінійним інтегралом I роду** від функції $f : \Gamma \to \mathbb{R}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (\tau_\Gamma, N) : |\tau|_\Gamma < \delta \implies |\sigma(f, \tau_\Gamma, N) - J| < \varepsilon$$

Позначення: $J = \displaystyle\int_\Gamma f(x, y, z)\, dl$.

Remark 3.1.9 Якщо $f \equiv 1$ всюди на Γ, то тоді отримаємо $\displaystyle\int_\Gamma dl = L(\Gamma)$.

Theorem 3.1.10 Необхідна умова існування криволінійного інтеграла I роду
Задано криву Γ - спрямляюча та параметризацію $\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Нехай функція $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ має криволініний інтеграл I роду.
Тоді f - обмежена на Γ.
Ідея доведення аналогічна в випадку визначенного інтеграла Рімана.

Theorem 3.1.11 Задано параметризацію $\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Нехай крива $\Gamma = \vec{\gamma}([a, b])$ - гладка. Також задано функцію $f \in C(\Gamma)$. Тоді існує криволінійний інтеграл I роду, причому
$\displaystyle\int_\Gamma f(x, y, z)\, dl = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \left\|\vec{\gamma}'(t)\right\|\, dt.$

Proof.
Функція $f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| \in C([a, b])$, а тому $f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| \in \mathcal{R}([a, b])$. Значить, правий інтеграл існує,
$I = \displaystyle\int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \left\|\vec{\gamma}'(t)\right\|\, dt$, а також
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta^* : \forall (\tau_{[a,b]}, \xi) : |\tau|_{[a,b]} < \delta^* \implies |\sigma(f(\vec{\gamma}) \|\vec{\gamma}'\|, \tau_{[a,b]}, \xi) - I| < \varepsilon$.
Залишилось довести рівність, що вище.
Маємо розбиття $\tau_\Gamma = \{M_0, M_1, \dots, M_n\}$. Кожному з точок відповідає деякий параметр $t_i \in [a, b]$, тобто буде розбиття відрізка $\tau_{[a,b]} = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$.
Відмічаємо точки N. Кожній відміченій точці N_i відповідає параметр $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, тобто будуть відмічені точки ξ нашого розбиття відрізка.
Також зауважимо, що в силу того, що Γ - гладка, то тоді гладкими будуть також криві $M_{i-1}M_i$, а їхня довжина
$|M_{i-1}M_i| = \displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$
$\sigma(f, \tau_\Gamma, N) = \displaystyle\sum_{i=1}^n f(N_i)|M_{i-1}M_i| = \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt \overset{\text{Th. про середнє}}{=}$
$\displaystyle\sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))\sqrt{(x'(\eta_i))^2 + (y'(\eta_i))^2 + (z'(\eta_i))^2}\Delta t_i$.
Також ми маємо, що
$\sigma(f(\vec{\gamma}) \|\vec{\gamma}'\|, \tau_{[a,b]}, \zeta) = \displaystyle\sum_{i=1}^n f(x(\zeta), y(\zeta), z(\zeta))\sqrt{(x'(\zeta))^2 + (y'(\zeta))^2 + (z'(\zeta))^2}\Delta t_i$.
Залишилось оцінити ці суми:
$|\sigma(f, \tau_\Gamma, N) - \sigma(\vec{\gamma}) \|\vec{\gamma}'\|, \tau_{[a,b]}, \zeta)| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^n \Delta t_i |f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))\varphi(\eta_i) - f(x(\zeta_i), y(\zeta_i), z(\zeta_i))\varphi(\zeta_i)| \leqslant$
$\leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^n \Delta t_i \left(|f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))||\varphi(\eta_i) - \varphi(\zeta_i)| + |\varphi(\zeta_i)||f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) - f(x(\zeta_i), y(\zeta_i), z(\zeta_i))|\right) =$
$= \displaystyle\sum_{i=1}^n \Delta t_i (|F(\xi_i)||\varphi(\eta_i) - \varphi(\zeta_i)| + |\varphi(\zeta_i)||F(\xi_i) - F(\zeta_i)|) <$
Функція $F, \varphi \in C([a, b])$, де $F = f(x, y, z)$, $\varphi = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$. Тоді рівномірно неперервні та
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta^{**} : \forall t_1, t_2 \in [a, b] : |t_1 - t_2| < \delta^{**} \implies \begin{cases} |F(t_1) - F(t_2)| < \varepsilon \\ |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon \end{cases}$.
Ми оберемо $\delta = \min\{\delta^*, \delta^{**}\}$. Оскільки $\xi_i, \eta_i, \zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, то звідси $|\eta_i - \xi_i| \leqslant |t_i - t_{i-1}| \leqslant |\tau| < \delta$ та $|\zeta_i - \xi_i| \leqslant |t_i - t_{i-1}| \leqslant |\tau| < \delta$.
Також наші функції F, φ будуть обмеженими в силу неперервності на відрізку.

$< \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i (|F(\xi_i)|\varepsilon + |\varphi(\zeta_i)|\varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(C_1 + C_2)\Delta t_i = (C_1 + C_2)(b-a)\varepsilon.$
Також зауважимо, що при $M = \max\limits_{t \in [a,b]} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ маємо таку оцінку:
$0 \leqslant |M_{i-1}M_i| \leqslant M \displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt = M\Delta t_i < M\delta$. Отже,
$\forall \varepsilon > 0 : \exists m\delta : \forall (\tau, N) : |\tau|_\Gamma < M\delta \implies |\sigma(f,\tau,N) - I| \leqslant |\sigma(f,\tau,N) - \sigma(f,\tau,\xi)| + |\sigma(f,\tau,\xi) - I| < 2\varepsilon.$
Остаточно $\displaystyle\int_\Gamma f(x,y,z)\,dl = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$ ■

Remark 3.1.12 Інші автори додають умову: щоб крива була неособливою.

Example 3.1.13 Обчислити $\displaystyle\int_\Gamma x\,dl$, де крива Γ задається таким чином:
$\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)^T$, де $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Маємо функцію $f(x,y) = x$, тоді звідси $f(\vec{\gamma}(t)) = R\cos t$.
$\vec{\gamma}'(t) = R(-\sin t, \cos t)^T$. Отже, за теоремою,
$\displaystyle\int_\Gamma x\,dl = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R\cos t \cdot \sqrt{R^2(-\sin t)^2 + R^2(\cos t)^2}\,dt = \dots = 2R^2.$

Example 3.1.14 Обчислити $\displaystyle\int_\Gamma dl$, де крива Γ задається таким чином:
$\gamma(t) = (t^3, t^2)^T$, де $t \in [-1, 2]$.
Фактично кажучи, необхідно обчислити довжину цієї кривої. Зокрема
$\displaystyle\int_\Gamma dl = L(\Gamma) = \int_{-1}^{2} \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2}\,dt = \dots = \frac{1}{27}(13\sqrt{13} + 80\sqrt{10} - 16).$
Тут інтеграл від диференціального бінома, але спочатку треба розбити на два інтеграли: $[-1,0], [0,2]$, щоб позбутися від модуля.

3.2 Властивості криволінійних інтегралів I роду

Proposition 3.2.1 Задані функції $f, g : \Gamma \to \mathbb{R}$, для яких існують криволінійні інтеграли по кривій Γ. Тоді $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g$ також має криволінійний інтеграл по кривій Γ, причому
$\displaystyle\int_\Gamma \alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)\,dl = \alpha \int_\Gamma f(x,y,z)\,dl + \beta \int_\Gamma g(x,y,z)\,dl.$
Доведення зрозуміле. А для неперервних функцій f, g навіть очевидно.

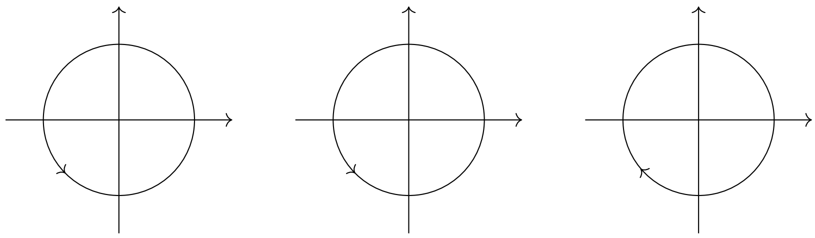
Proposition 3.2.2 Задано функцію $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ та нехай $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причому так, що ці дві криві не мають спільних внутрішніх точок.
Існує криволінійний інтеграл f по $\Gamma \iff$ існують криволінійні інтеграли f по Γ_1 та Γ_2, причому
$\displaystyle\int_\Gamma f(x,y,z)\,dl = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\,dl + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\,dl.$
Коли функція f неперервна, то все ясно. Але в загальному випадку геть не очевидно.

Proposition 3.2.3 $\displaystyle\left|\int_\Gamma f(x,y,z)\,dl\right| \leqslant \int_\Gamma |f(x,y,z)|\,dl.$
Коли функція f неперервна, то все ясно. Але в загальному випадку геть не очевидно.

Proposition 3.2.4 Задано функцію $f : \Gamma \to \mathbb{R}$, причому $f \in C(\Gamma)$. Тоді $\exists M = (\xi, \eta, \zeta) \in \Gamma :$
$\displaystyle\int_\Gamma f(x,y,z)\,dl = L(\Gamma) \cdot f(\xi,\eta,\zeta).$
Випливає з теореми про середнє в визначеному інтегралі.

Definition 3.2.5 Задані функції $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$ та $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$. Маємо $\Gamma_1 = \Gamma_2$ (рівність множин) - тобто дві параметризації однієї й той самої кривої.
Нехай існує $\phi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ - монотонна та $\varphi \in C^1$, для якого $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$.
Вважаємо, що Γ_1, Γ_2 **мають однакову орієнтацію**, якщо $\phi'(t) > 0, \forall t \in [a_1, b_1]$. Будемо позначати $\Gamma_1 = \Gamma_2$.
Вважаємо, що Γ_1, Γ_2 **мають протилежну орієнтацію**, якщо $\phi'(t) < 0, \forall t \in [a_1, b_1]$. Будемо позначати $\Gamma_1 = -\Gamma_2$.

Example 3.2.6 Зокрема одиничне коло має такі параметризації:
$\vec{\gamma_1}(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0, 2\pi]$
$\vec{\gamma_2}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)^T$, $t \in [0, \pi]$.
$\vec{\gamma_3}(t) = (\cos(-t), \sin(-t))^T$, $t \in [0, 2\pi]$.
У даному випадку функція $\phi_{1,2}(t) = \dfrac{t}{2}$. Ясно, що $\phi'_{1,2}(t) = \dfrac{1}{2} > 0$. Отже, криві $\Gamma_1 = \Gamma_2$.
У даному випадку функція $\phi_{1,3}(t) = -t$. Ясно, що $\phi'_{1,3}(t) = -1 < 0$. Отже, криві $\Gamma_1 = -\Gamma_3$.



Γ_1 Γ_2 Γ_3

Theorem 3.2.7 Маємо $\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}$ на відповідно $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ - дві параметризації однієї й той самої кривої. Тоді
$\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\,dl = \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\,dl$.
Тобто криволінійний інтеграл I роду не залежить від параметризації та орієнтації.

Дійсно, неважливо, $\Gamma_1 = \Gamma_2$ чи $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, ми отримаємо одну й ту саму криву Γ. У всіх випадках будуть одне й те саме розбиття τ_Γ, обрані точки N. Тож від цього криволінійний інтеграл I роду не має залежність.

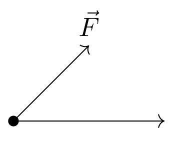
Corollary 3.2.8 Маємо криві Γ_1, Γ_2 під умовами теореми вище. Тоді $L(\Gamma_1) = L(\Gamma_2)$.

3.3 Криволінійні інтеграли II роду

Щоб зрозуміти цю фігню, треба з'ясувати фізичний зміст.
Уже відомо, що є така величина як **механічна робота**, яка задається як:

$$A = (\vec{F}, \vec{l}),$$

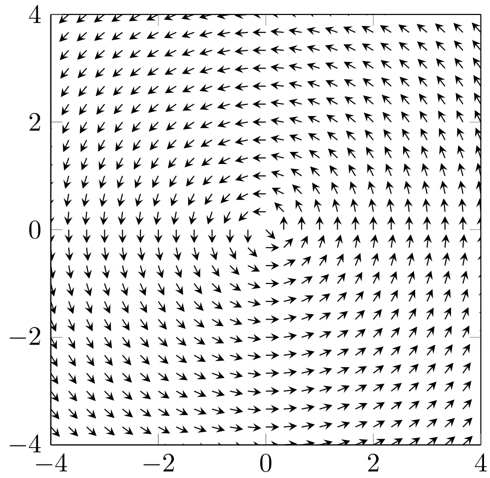
де $\vec{F}$ - це сила, з яким діють на фізичне тіло, а $\vec{l}$ - вектор переміщення.



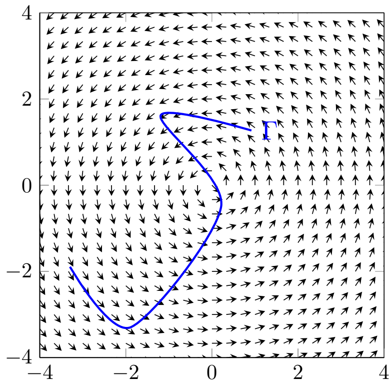
Мінус даної формули: вона застосовна лише для прямолінійного руху. Ось тут виникає цей підрозділ.

Definition 3.3.1 Задано $A \subset \mathbb{R}^3$. Функцію $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^3$ будемо називати **векторним полем** на A.

Example 3.3.2 Зокрема нижче зображено векторне поле $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^T$.
Векторне поле - це шось на кшталт *сили*, які діють на фізичне тіло в даному положені.



А тепер нехай задана деяка крива Γ - гладка, неособлива та $\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - її параметризація. У нас зараз буде така картина:



Як це було минулого разу, ми розіб'ємо відрізок, буде τ_Γ. А потім утворимо відмічені точки N. Там далі на кожній підкриві буде щось схоже на прямолінійний рух.
На відміченій точці N_i проміжка $M_{i-1}M_i$ діє якась сила $\vec{F}(N_i)$ (для спрощення ми обмежимось лише неперервним векторним полем). А тому роботу можна обчислити за формулою $(\vec{F}(N_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i})$.
Тоді визначається нова інтегральна сума, але тут це буде сума всіх робіт:

$$\sigma(\vec{F}, \tau, N) = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}(N_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \right)$$

Definition 3.3.3 Число J називається **криволінійним інтегралом II роду** від векторного поля $\vec{F}$ вздовж кривої Γ, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (\tau_\Gamma, N) : |\tau|_\Gamma < \delta \implies |\sigma(\vec{F}, \tau_\Gamma, N) - J| < \varepsilon$$

Позначення: $J = \displaystyle\int_\Gamma (\vec{F}, d\vec{r})$.

Remark 3.3.4 Зокрема якщо векторне поле $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T$, то тоді використовується інше позначення:
$\displaystyle\int_\Gamma P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz.$
Ніби ми розкрили стандартни йскалярний добуток.

Remark 3.3.5 У разі якщо крива Γ буде замкнутою, то прийнято позначти це таким чином: $\displaystyle\oint_\Gamma (\vec{F}, \, d\vec{r})$.

Theorem 3.3.6 Задано Γ - гладка, неособлива крива та $\vec{\gamma} = (x, y, z)^T : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - параметризація. Нехай векторне поле $\vec{F} = (P, Q, R)^T : \Gamma \to \mathbb{R}^3$ - неперервне на Γ. Тоді існує криволінійний інтеграл II роду, причому

$$\int_\Gamma P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz = \int_a^b P(\vec{\gamma}(t))x'(t) + Q(\vec{\gamma}(t))y'(t) + R(\vec{\gamma}(t))z'(t)\, dt.$$

Proof.
Спочатку розгляну випадок $\vec{F} = (P, 0, 0)^T$, тут 0 - нульова функція. Тоді скалярний добуток $(\vec{F}(N_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i}) = P(N_i)(x(t_i) - x(t_{i-1}))$. Розглянемо тепер таку різницю:

$$|\sigma(\vec{F}, \tau_\Gamma, N) - \sigma(P(x, y, z)x', \tau_{[a,b]}, \xi)| = \left|\sum_{i=1}^n P(x(\tilde{t}_i), y(\tilde{t}_i), z(\tilde{t}_i))(x(t_i) - x(t_{i-1})) - P(x(\tilde{t}_i), y(\tilde{t}_i), z(\tilde{t}_i))x'(\tilde{t}_i)\Delta t_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n P(x'(\tilde{\tilde{t}}_i)\Delta t_i - x'(\tilde{t}_i)\Delta t_i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |P||x'(\tilde{\tilde{t}}_i - x'(\tilde{t}_i)|\Delta t_i < C\varepsilon(b - a).$$

Аналогічно доводиться для $\vec{F} = (0, Q, 0)^T$ та $\vec{F} = (0, 0, R)^T$.
А далі це можна поєднати для випадку $\vec{F} = (P, Q, R)^T$. У результаті,

$$\int_\Gamma P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\, dt.$$

■

Corollary 3.3.7 $\displaystyle\int_\Gamma (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_\Gamma (\vec{F}, \vec{l})\, dl.$

У цьому випадку $\vec{l} = \left(\dfrac{x'(t)}{\left\|\vec{\gamma}'(t)\right\|}, \dfrac{y'(t)}{\left\|\vec{\gamma}'(t)\right\|}, \dfrac{z'(t)}{\left\|\vec{\gamma}'(t)\right\|}\right)^T \overset{\text{коротко}}{=} \dfrac{\vec{\gamma}'(t)}{\left\|\vec{\gamma}'(t)\right\|}.$

Example 3.3.8 Обчислити $\displaystyle\int_\Gamma (x, y)\, dx + (x - y)\, dy$, де крива Γ задається як $\vec{\gamma}(t) = (t, t^2)^T, t \in [0, 1]$.
Зауважимо, що ми маємо векторне поле $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))^T = (x + y, x - y)^T$.
Маємо криву $(x(t), y(t))^T = (t, t^2)^T$, а тому звідси $(x'(t), y'(t))^T = (1, 2t)^T$. Отже,

$$\int_\Gamma (x, y)\, dx + (x - y)\, dy = \int_0^1 (t + t^2) \cdot 1 + (t - t^2) \cdot 2t\, dt = \int_0^1 t + 3t^2 - 2t^3\, dt = \dots = 1.$$

Theorem 3.3.9 Маємо $\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}$ на відповідно $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ - дві параметризації однієї й той самої кривої. Тоді

$\displaystyle\int_{\Gamma_1} (\vec{F}\, d\vec{l}) = \int_{\Gamma_2} (\vec{F}\, d\vec{l})$, якщо $\Gamma_1 = \Gamma_2$;

$\displaystyle\int_{\Gamma_1} (\vec{F}\, d\vec{l}) = -\int_{\Gamma_2} (\vec{F}\, d\vec{l})$, якщо $\Gamma_1 = -\Gamma_2$.

Тобто криволінійний інтеграл II роду не залежить від параметризації, але має значення напрямок.

У першому дійсно, бо буде одна й та сама крива Γ.
У другому теж Γ, але цього разу ми йдемо в зворотному напрямку, а тому в нас будуть вектори $\overrightarrow{M_iM_{i-1}} = -\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$, тоді всюди скалярний добуток стане від'ємним.

Example 3.3.10 Обчислити $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{(x + y)\, dx - (x - y)\, dy}{x^2 + y^2}$, де крива Γ описується колом $x^2 + y^2 = 4$, що пробігає проти годинникової стрілки.
У параметричних системах маємо $x = 2\cos t$ та $y = \sin t$, у цьому випадку $t \in [0, 2\pi]$. Саме такі параметри в силу обходу проти годинникової стрілки.

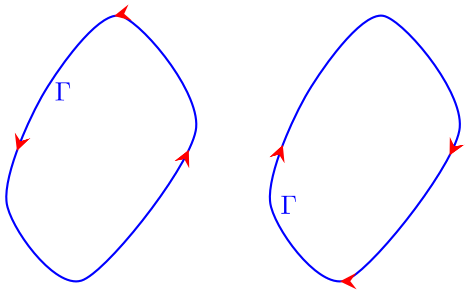
$$\oint_\Gamma \frac{(x + y)\, dx - (x - y)\, dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{2\cos t + 2\sin t}{4}(-2\sin t) - \frac{2\cos t - 2\sin t}{4}(2\cos t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin t\cos t - \sin^2 t - \cos^2 t + \sin t\cos t\, dt = -2\pi.$$

3.4 Формула Гріна

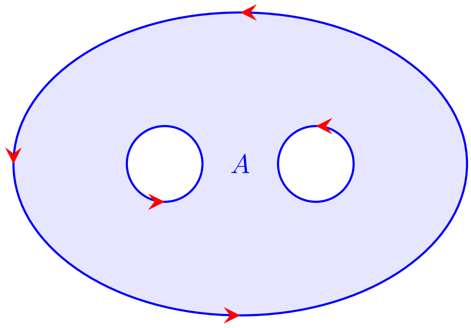
Definition 3.4.1 Задано криву Γ - замкнена.
Вона має **додатну орієнтацію**, якщо під час обходу кривої внутрішня частина множини (яка

охоплюється кривою) залишається ліворуч.
У протилежному випадку має **від'ємну орієнтацію**.



Ліворуч - додатна орієнтація. Праворуч - від'ємна орієнтація.

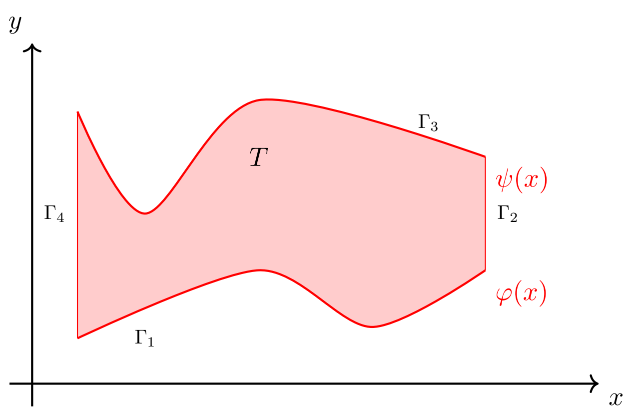
Definition 3.4.2 Задано $A \subset \mathbb{R}^2$ - замкнена область та ∂A - границя.
Вона має **додатну орієнтацію**, якщо кожна її частина має додатну орієнтацію.
Вона має **від'ємну орієнтацію**, якщо кожна її частина має від'ємну орієнтацію.



Межа ∂A не має орієнтації.

Lemma 3.4.3 Задано множину T - криволінійна трапеція (обмежується функціями по x). Нехай $\vec{F} = (P, Q)^T$ визначено на T та неперервно-диференційоване. Тоді, припустивши, що ∂T має додатну орієнтацію, маємо
$\oint\limits_{\partial T} P\,dx = -\iint\limits_{T} \left(-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy.$

Proof.



Маємо:
$-\iint\limits_{T} \dfrac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} \dfrac{\partial P}{\partial y}\,dy = -\int_a^b P(x,y)\Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\,dx = -\int_a^b P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\,dx =$

$$= -\int_a^b P(x,\psi(x))\,dx + \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx = \int_{\Gamma_3} P\,dx + \int_{\Gamma_1} P\,dx.$$

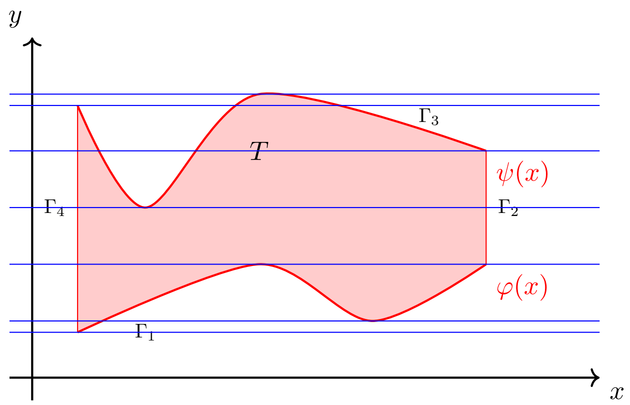
Оскільки x є сталою для кривих Γ_2, Γ_4, то звідси $\displaystyle\int_{\Gamma_2} P\,dx = 0, \int_{\Gamma_4} P\,dx = 0$. Отже,

$$\iint\limits_T \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\Gamma_1} P\,dx + \int_{\Gamma_2} P\,dx + \int_{\Gamma_3} P\,dx + \int_{\Gamma_4} P\,dx = \oint\limits_{\partial T} P\,dx + 0\,dy. \qquad \blacksquare$$

Lemma 3.4.4 Задано множину T - криволінійна трапеція (обмежується функціями по x). Нехай $\vec{F} = (P,Q)^T$ визначено на T та неперервно-диференційоване. Тоді, припустивши, що ∂T має додатну орієнтацію, маємо

$$\oint\limits_{\partial T} Q\,dy = \iint\limits_T \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

Proof.
Ми зараз працюємо з цією самою криволінійною трапецією, що вище. Якщо її повернути так, що OY буде як OX, то це на криволінійну трапецію не буде схожим.
Але ми розіб'ємо цю область на криволінійні трапеції так.

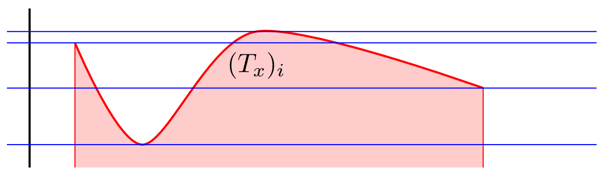


Маємо $T = \displaystyle\bigcup_{i=1}^n (T_x)_i$, де $(T_x)_i$ - криволінійна трапеція, що обмежується функціями по y.
Якщо окремо розглянути $(T_x)_i$, то ми абсолютно аналогічними міркуваннями доведемо (як в попередній лемі), що $\displaystyle\oint\limits_{\partial(T_x)_i} Q\,dy = \iint\limits_{(T_x)_i} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$.
Оскільки $(T_x)_i$ не мають спільних внутрішніх точок, то тоді звідси

$$\sum_{i=1}^n \iint\limits_{(T_x)_i} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \iint\limits_T \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

А з іншого боку, $\displaystyle\sum_{i=1}^n \iint\limits_{(T_x)_i} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^n \oint\limits_{\partial(T_x)_i} Q\,dy$.

Тут варто зауважити, що $\partial(T_x)_i = (\partial T \cap \partial(T_x)_i) \cup \displaystyle\bigcup_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n (\partial(T_x)_i \cap \partial(T_x)_k)$.



Для трапеції $(T_x)_i$ червоні межі - це наше $\partial T \cap \partial(T_x)_i$. А ось решта блакитні межі - це $\partial(T_x)_i \cap \partial(T_x)_k$.

Таким чином, ми отримаємо, що

$$\sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{\partial(T_x)_i} Q\,dy = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\partial T \cap \partial (T_x)_i} Q\,dy + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \int_{\partial(T_x)_i \cap \partial(T_x)_k} Q\,dy \right)$$

Тепер окремо розглянемо $\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \int_{\partial(T_x)_i \cap \partial(T_x)_k} Q\,dy$. У цій сумі беруть участь одночасно $\int_{\partial(T_x)_{i_0} \cap \partial(T_x)_{k_0}} Q\,dy$ та $\int_{\partial(T_x)_{k_0} \cap \partial(T_x)_{i_0}} Q\,dy$ при $i_0 \neq k_0$, а також $1 \leqslant i_0, k_0 \leqslant n$. У цих двох кривих під інтегралами орієнтації протилежні один одному, якщо придивитись на малюнок, а тому звідси

$\int_{\partial(T_x)_{i_0} \cap \partial(T_x)_{k_0}} Q\,dy + \int_{\partial(T_x)_{k_0} \cap \partial(T_x)_{i_0}} Q\,dy = 0.$

Звідси випливає, що $\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \int_{\partial(T_x)_i \cap \partial(T_x)_k} Q\,dy = 0$, а тому продовжимо рівність:

$$\sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{\partial(T_x)_i} Q\,dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial T \cap \partial(T_x)_i} Q\,dy = \oint\limits_{\partial T} Q\,dy.$$

Дійсно, $\bigcup_{i=1}^{n} (\partial T \cap \partial(T_x)_i) = \partial T$, як об'єднання всіх червоних меж.

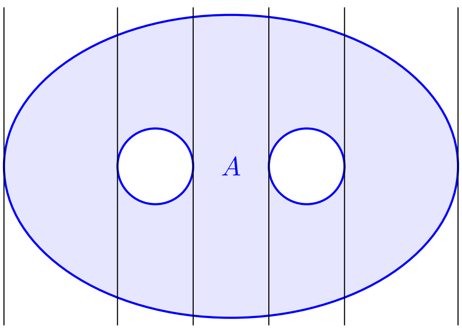
Разом отримали, що $\oint\limits_{\partial T} Q\,dy = \iint\limits_{T} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$ ■

Corollary 3.4.5 $\oint\limits_{\partial T} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{T} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$

Theorem 3.4.6 Теорема Гріна
Задано множину $A \subset \mathbb{R}^2$ - замкнена область. Нехай $\vec{F} = (P, Q)^T$ визначено на A та неперервно-диференційоване. Тоді, припустивши, що ∂A має додатну орієнтацію, маємо

$$\oint\limits_{\partial A} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Proof.
Область A розіб'ємо таким чином: $A = \bigcup_{i=1}^{m} T_i$, де T_i - криволінійна трапеція, обмежена функціями по x.



Для таких областей ми вже можемо застосувати щойно отриманий наслідок.
Аналогічно T_i не мають спільних внутрішніх точок, а тому

$$\iint\limits_{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{T_i} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial T_i} P\,dx + Q\,dy = \oint\limits_{\partial T} P\,dx + Q\,dy.$$

Остання рівність доводиться аналогічно як в другій лемі. ■

Example 3.4.7 Обчислити $\oint\limits_{\Gamma} y^2\,dx + 3xy\,dy$, де крива Γ описує верхню половину кола $x^2 + y^2 = 1$, що пробігає проти годинникової стрілки.

Маємо $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (y^2, 3xy)$ - ясно, що це неперервно-диференційована та визначена на D - область половини кола.
$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3y \qquad \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y.$
$\displaystyle\oint\limits_{\Gamma} y^2\,dx + 3xy\,dy = \iint\limits_{D} 3y - 2y\,dx\,dy = \iint\limits_{D} y\,dx\,dy =$
Полярна заміна: $x = \rho\cos\varphi$ та $y = \rho\sin\varphi$.
Тоді $\varphi \in [0,\pi]$ та $\rho \in [0,1]$, а також маємо якобіан $J = \rho$.
$\displaystyle= \int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{1}{3}\sin\varphi\,d\varphi = -\frac{1}{3}\cos\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}.$

3.5 Незалежність криволінійного інтегралу II роду від шляху інтегрування

Lemma 3.5.1 Лема Пуанкаре в $\mathbb{R}^2$
Задано множину $A \subset \mathbb{R}^2$ - замкнена однозв'язна область. Нехай $\vec{F} = (P,Q)^T$ визначено на A та неперервно-диференційоване. Тоді нижчезгадані твердження еквівалентні:
1. $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \forall (x,y) \in A$;
2. $\displaystyle\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ для будь-якої замкненої кривої $\Gamma \subset D$.
3. $\displaystyle\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy$ для будь-яких двох кривих $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset D$ зі спільним початком та кінцем;
4. Існує $U(x,y)$ - двічі неперервно-дифереційована функція, для якого $\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y), \forall (x,y) \in D$. Інакше кажучи, $dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.

Proof.
$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Дано: $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \forall (x,y) \in A$.
Розглянемо замкнену криву $\Gamma \subset D$, яка додатно орієнтована. Маємо D_Γ - область, яку крива Γ обмежує. Тоді
$\displaystyle\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D_\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_\gamma} 0\,dx\,dy = 0.$
Якщо крива Γ від'ємно орієнтована, то тоді беремо криву Γ', яка множинно збігається з Γ, але напрямлена в протилежний бік. Тоді
$\displaystyle\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\Gamma'} P\,dx + Q\,dy = 0.$

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Дано: $\displaystyle\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ для будь-якої замкненої кривої $\Gamma \subset D$.
Беремо довільні криві Γ_1, Γ_2 зі спільним початком та кінцем.
У однієї з кривих (наприклад, у Γ_1) розглянемо протилежно орієнтовану криву Γ_1'. Зауважимо, що, об'єднавши Γ_1', Γ_2, отримаємо замкнену криву. Тоді
$\displaystyle\oint\limits_{\Gamma_1' \cup \Gamma_2} P\,dx + Q\,dy = 0 \implies \int_{\Gamma_1'} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy = 0.$
Але оскільки $\displaystyle\int_{\Gamma_1'} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy$, то звідси маємо
$\displaystyle\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy.$

$\boxed{3) \Rightarrow 4)}$ Дано: $\displaystyle\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy$ для будь-яких двох кривих $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset D$ зі спільним початком та кінцем.
Оберемо точку $(x_0, y_0) \in D$, а далі побудуємо функцію U таким чином:
$\displaystyle U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(t,s)\,dt + Q(t,s)\,ds.$

Даний інтеграл визначений коректно, тому що, за умовою, інтеграл від шляху не залежить. Лише від початку та кінця.

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_*, y_*) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x_* + \Delta x, y_*) - U(x_*, y_*)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x_*+\Delta x, y_*)} P(t,s)\,dt + Q(t,s)\,ds - \int_{(x_0,y_0)}^{(x_*,y_*)} P(t,s)\,dt + Q(t,s)\,ds \right) \boxed{=}.$$

Зауважимо, що за умовою задачі, можна розписати

$$\int_{(x_0,y_0}^{(x_*+\Delta x, y_*)} P(t,s)\,dt + Q(t,s)\,ds = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_*,y_*)} P(t,s)\,dt + Q(t,s)\,ds + \int_{(x_*,y_*)}^{(x_*+\Delta x,y_*)} P(t,s)\,dt + Q(t,s)\,ds.$$

$$\boxed{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{(x_0,y_0)}^{(x_*,y_*)} P(t,s)\,dy + Q(t,s)\,ds \boxed{=}$$

Параметризуємо та запишемо як $s = y_*, ds = 0$ та $t \in [x_*, x_* + \Delta x]$

$$\boxed{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_*}^{x_*+\Delta x} P(t, y_*)\,dt = P(x_*, y_*).$$

Остання рівність виконана, бо функція $\tilde{P}(u) = \displaystyle\int_{x_*}^{u} P(t, y_*)\,dt$ буде диференційованою в силу неперервності функції P. Тобто $\tilde{P}'(x_*) = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_*}^{x_*+\Delta x} P(t, y_*)\,dt = P(x_*)$.

Отже, $\dfrac{\partial U}{\partial x}(x_*, y_*) = P(x_*, y_*)$. Аналогічно доводиться $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x_*, y_*) = Q(x_*, y_*)$. Отже, $dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.

$\boxed{4) \Rightarrow 1)}$ Дано: існує $U(x,y)$ - двічі неперервно-диферецційована функція, для якого $\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y), \forall (x,y) \in D$. Тоді ясно, що

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \qquad \blacksquare$$

Example 3.5.2 Обчилити $\displaystyle\int_{(-1,3)}^{(2,-2)} (2xy + y^3)\,dx + (x^2 + 3xy^2)\,dy$. Тут крива має початок $(-1,3)$ та $(2,-2)$. У цьому випадку нема значення, яка крива, адже

$$\vec{F} = (P,Q) = (2xy + y^3, x^2 + 3xy^2) \implies \frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Проінтегруємо таким чином:

Γ_1 : пряма через $(-1,3)$ та $(2,3)$

Γ_2 : пряма через $(2,3)$ та $(2,-2)$.

$$\int_{\Gamma_1} (2xy + y^3)\,dx + (x^2 + 3xy^2)\,dy = \int_{-1}^{2} (2 \cdot 3x + 3^3)\,dx = \int_{-1}^{2} (6x + 27)\,dx = (3x^2 + 27x)\Big|_{-1}^{2} = 90.$$

$$\int_{\Gamma_2} (2xy + y^3)\,dx + (x^2 + 3xy^2)\,dy = \int_{3}^{-2} (4 + 6y^2)\,dy = (4y + 2y^3)\Big|_{3}^{-2} = -24 - 66 = -90.$$

Таким чином, $\displaystyle\int_{(-1,3)}^{(2,-2)} (2xy + y^3)\,dx + (x^2 + 3xy^2)\,dy = 0.$

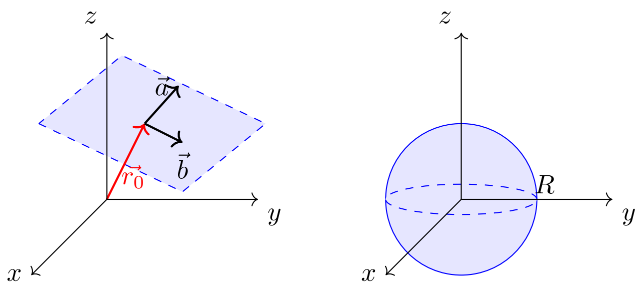
4 Поверхневі інтеграли

Знову ж таки, тема про поверхні не така проста, треба вивчати окремо курс диференціальної геометрії, щоб познати все. Тут всі означення не будуть узагальнені для довільних речей.

4.1 Поверхні

Definition 4.1.1 Задано $D \subset \mathbb{R}^2$ - замкнена область (для нас цього достатньо).
Поверхнею будемо називати $\Sigma = \vec{r}(D)$, де відображення $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ та $\vec{r} \in C(D)$, що називається **параметризацією**.

Example 4.1.2 Розглянемо кілька прикладів:
1. Площина. $\vec{r}(s,t) = \vec{r_0} + \vec{a}s + \vec{b}t$. (див. аналітичну геометрію)
2. Сфера. $\vec{r}(\varphi,\psi) = R(\cos\varphi\sin\varphi, \sin\varphi\sin\psi, \cos\psi)^T$, тут визначимо $D = [0,2\pi) \times [0,\pi], R > 0$.



Definition 4.1.3 Задано $V \subset \mathbb{R}^3$ та функцію $F \in C(V)$. Нехай $C \in \mathbb{R}$.
Поверхнею рівня функції F в V називають таке число:

$$\Sigma_{F,C} = \{(x,y,z)^T \in V : F(x,y,z) = C\}$$

Example 4.1.4 Зокрема розглянемо $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Оберемо $R^2 \in \mathbb{R}$.
Тоді Σ_{F,R^2} - поверхня рівня функції F в $\mathbb{R}^3$ - що є сферою, насправді.

Definition 4.1.5 Задано D - замкнена область.
Поверхня $\Sigma = \vec{r}(D)$ називається **гладкою**, якщо $\vec{r} \in C^1(D^\circ)$.

Example 4.1.6 Всі поверхні: площина, сфера - вони гладкі в кожній внутрішній точці.

Definition 4.1.7 Задано D - замкнена область та точку $M_0 = \vec{r}(u_0,v_0)$, де $(u_0,v_0) \in D$ - внутрішня точка.
Точка M_0 називається **неособливою**, якщо

$$\{\vec{r}'_u(u_0,v_0), \vec{r}'_v(u_0,v_0)\} - \text{ лінійно незалежні}$$

Інакше точка M_0 називається **особливою**.

Example 4.1.8 Маємо сферу $\vec{r}(\varphi,\psi) = R\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\psi\end{pmatrix}$, де $(\varphi,\psi) \in [0,2\pi) \times [0,\pi]$.

$\vec{r}'_\varphi(\varphi,\psi) = R\begin{pmatrix}-\sin\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\psi \\ 0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $r'_\psi(\varphi,\psi) = R\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ -\sin\psi\end{pmatrix}$.

Оскільки $\det\begin{pmatrix}-\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi \\ \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi\end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2}\sin 2\psi$, то звідси $\{\vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_\psi\}$ будуть л.н.з. для всіх точок (φ,ψ) при $\psi \notin \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

При $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ маємо вектори $\vec{r}'_\varphi\left(\varphi, \dfrac{\pi}{2}\right) = R\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{r}'_\psi\left(\varphi, \dfrac{\pi}{2}\right) = R\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ -1\end{pmatrix}$. Вони є л.н.з. для кожного $\varphi \in (0,2\pi)$.
Висновок: $(\varphi,\psi) \in (0,2\pi) \times (0,\pi)$ - неособливі точки.

Remark 4.1.9 Може таке статися, що точка $M \in \Sigma$ є особливою для однієї параметризації, але неособливою для іншої параметризації однієї й той самої поверхні.

Proposition 4.1.10 Задано $D \subset \mathbb{R}^2$ - відкрита область та функція $f \in C^1(D)$. Тоді графік $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$ функції f буде гладкою поверхнею. А кожна точка буде особливою, якщо параметризація Γ_f задається як $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))^T$.

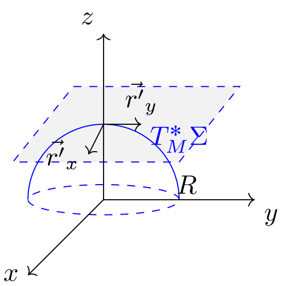
Proof.
Дійсно, $\vec{r}'_x(x,y) = (1, 0, f'_x(x,y))^T$ та $\vec{r}'_y(x,y) = (0, 1, f'_y(x,y))^T$. Ці вектори - л.н.з. для $(x,y) \in D$.
$\vec{r}'_x, \vec{r}'_y$ неперервні в силу того, що f'_x, f'_y неперервні. ■

Proposition 4.1.11 Задано $V \subset \mathbb{R}^3$ - відкрита множина, функція $F \in C^1(V)$ та $C \in \mathbb{R}$. Припустимо, що $\Sigma_{F,C} \neq \varnothing$ та $M = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma_{F,C}$. Нехай $\mathrm{grad} F(M) \neq \vec{0}$.
Тоді існує відкрита множина $D \subset \mathbb{R}^2$ та параметризація $\vec{r}$, що визначена в околі $U(x_0, y_0)$, для якого точка M буде неособливою.

Proof.
Маємо $M(x_0, y_0, z_0)$ та умову $\mathrm{grad} F(M) \neq \vec{0}$. Не втрачаючи загальності, скажімо $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.
Тоді за теоремою про неявну функцію, існує окіл $U(x_0, y_0)$ та $f : U \to \mathbb{R}, f \in C^1(U)$, для якого $F(x, y, f(x,y)) = C$, причому $z_0 = f(x_0, y_0)$.
Отже, $\Gamma_f = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in U\} \subset \Sigma_{F,C}$ та $M \in \Gamma_f$. Для параметризації $\vec{r} : U \to \Sigma_{F,C}$, що задається як $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))^T$ точка M буде неособливою за попереднім твердженням. ■

Definition 4.1.12 Задано D - замкнена область, Σ - гладка поверхня з параметризацією $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$.
Візьмемо (u_0, v_0) - внутрішню точку D та неособливу точку $M = \vec{r}(u_0, v_0)$.
Дотичним простором до поверхні Σ в точці M будемо називати площину, що проходить через т. M, паралельний векторам $\vec{r}'_u(u_0, v_0), \vec{r}'_v(u_0, v_0)$. Цю площину ми розглядаємо як векторний простір з нулем в т. M.
Позначення: $T^*_M \Sigma$.

Example 4.1.13 Маємо Σ - півсфера з параметризацією $\vec{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})^T$, точки (x,y) лежать на одиничному колі $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Маємо точку $M(0,0,1)$, яка неособлива.
$\vec{r}'_x(x,y) = \left(1, 0, -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)^T \qquad \vec{r}'_y(x,y) = \left(0, 1, -\dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)^T.$
$\vec{r}'_x(0,0) = (1,0,0)^T \qquad \vec{r}'_y(0,0) = (0,1,0)^T$.
Отже, дотичним простором $T^*_M\Sigma$ в точці $M(0,0,1)$ буде площина $z = 1$.



Definition 4.1.14 Вектор $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ називається **нормальним** до гладкої поверхні Σ в неособливій точці $M \in \Sigma$, якщо

$$\vec{n} \perp T^*_m \Sigma$$

Proposition 4.1.15 Задано $V \subset \mathbb{R}^3$ - відкрита множина, функція $F \in C^1(V)$ та $C \in \mathbb{R}$. Припустимо, що $\Sigma_{F,C} \neq \varnothing$ та $M \in \Sigma_{F,C}$.
Нехай $\mathrm{grad} F(M) \neq \vec{0}$. тоді $\mathrm{grad} F(M)$ буде нормальним вектором до $\Sigma_{F,C}$ в т. M для довільної неперервно-диференційованої параметризації $\vec{r}$.

Proof.
Маємо $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ параметризація $\Sigma_{F,C}$ та $M = \vec{r}(u_0, v_0)$. Тоді $\forall (u,v) \in D$:

$F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = C$.
Обчислюємо частинну похідну по u в т. (u_0, v_0). Це вже неважко робиться. Отримаємо $0 = \dfrac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) = (\mathrm{grad} F(x_0, y_0, z_0), \vec{r}'_u(u_0, v_0)) \implies \mathrm{grad} F(x_0, y_0, z_0) \perp \vec{r}'_u(u_0, v_0)$.
Аналогічно доводиться $F(x_0, y_0, z_0) \perp \vec{r}'_v(u_0, v_0)$. Тобто звідси $\mathrm{grad} F(M) \perp T^*_M \Sigma_{F,C}$. ■

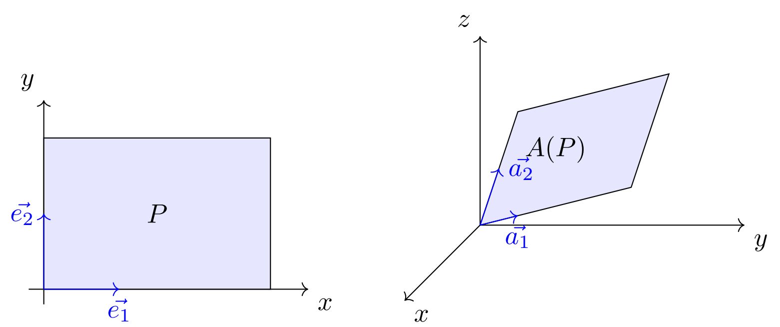
Corollary 4.1.16 Задано (u_0, v_0) - внутрішня точка області $D \subset \mathbb{R}^2$, функція $f \in C^1(U(u_0, v_0))$ та $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
Тоді $\vec{n} = (-f'_x, -f'_y, 1)^T(M_0)$ буде нормальним вектором до поверхні Γ_f в т. M_0.
Вказівка: Γ_f представити як поверхню рівня $\Sigma_{F,0}$, що задається функцією $F(x,y,z) = z - f(x,y)$.

4.2 Площа поверхні

Definition 4.2.1 Задано $D \subset \mathbb{R}^2$ - поки це буде прямокутник (брус) та Σ - деяка гладка поверхня з параметризацією $\vec{r}$.
Ми вже навчились розбивати D - отримували $\lambda = \{Q(v_1, v_2)\}$. Потім ми обирали точки $\vec{\xi}$ на кожній розбитій частині. Позначимо $M_k = \vec{r}(\xi_k, \eta_k)$.
Для кожної (ξ_{v_1}, η_{v_2}) ми розглянемо вираз $\vec{r}'(\xi_{v_1}, \eta_{v_2}) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_y \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}(\xi_k, \eta_k)$. Позначимо $P(v_1, v_2) = \vec{r}'(\xi_{v_1}, \eta_{v_2}) Q(v_1, v_2)$.
Число $S(\Sigma)$ називається **площею поверхні** Σ, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (\lambda, \vec{\xi}) : |\lambda| < \delta \implies \left| S(\Sigma) - \sum_{k=1}^{m} S(P(v_1, v_2)) \right| < \varepsilon$$

Lemma 4.2.2 Задано $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ - лінійний оператор з матрицею $\mathbb{A} = (\vec{a_1}, \vec{a_2})$ відносно стандартних базисів в $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.
Нехай $P \subset \mathbb{R}^2$ - прямокутник зі сторонами, паралельні вісям. Тоді $A(P)$ буде паралелограмом в $\mathbb{R}^3$ (або відрізком при $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}$), причому
$S(A(P)) = \sqrt{\|\vec{a_1}\|^2 \|\vec{a_2}\|^2 - (\vec{a_1}, \vec{a_2})^2} S(P)$.



Proof.
Лінійний оператор паралельні прямі переводить в паралельні пярмі. Отже, $A(P)$ точно має бути паралелограмом при неколіарних векторів $\vec{a_1}, \vec{a_2}$.
Маємо вектори $\vec{p_1}, \vec{p_2}$, що утворює прямокутник P, тоді
$\vec{p_1} = \|\vec{p_1}\| \vec{e_1}$ та $\vec{p_2} = \|\vec{p_2}\| \vec{e_2}$.
Відповідно в силу лінійності оператора, отримаємо
$A(\vec{p_1}) = \|\vec{p_1}\| \vec{a_1}$ та $A(\vec{p_2}) = \|\vec{p_2}\| \vec{a_2}$.
Отже, $S(A(P)) = \|A(\vec{p_1})\| \|A(\vec{p_2})\| \sin\alpha = \|\vec{a_1}\| \|\vec{a_2}\| \|\vec{p_1}\| \|\vec{p_2}\| \sin\alpha = \|\vec{a_1}\| \|\vec{a_2}\| \sin\alpha \cdot S(P)$.
Тобто $S(A(P)) = [\vec{a_1}, \vec{a_2}] S(P)$, ну або можна розписати ще детальніше. У силу того, що $\alpha \in (0, \pi)$, маємо
$\|\vec{a_1}\| \|\vec{a_2}\| \sin\alpha = \sqrt{\|\vec{a_1}\|^2 \|\vec{a_2}\|^2 \sin^2\alpha} = \sqrt{\|\vec{a_1}\|^2 \|\vec{a_2}\|^2 (1 - \cos^2\alpha)} = \sqrt{\|\vec{a_1}\|^2 \|\vec{a_2}\|^2 - (\vec{a_1}, \vec{a_2})^2}$. ■

Theorem 4.2.3 Задано Σ - гладка поверхня з параметризацією $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$, де D - замкнена область. Тоді Σ має площу, причому

$S(\Sigma) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}(u,v)\, du\, dv.$

$E(u,v) = \left\| \vec{r'}_u \right\|^2 (u,v), G(u,v) = \left\| \vec{r'}_v \right\|^2 (u,v), F(u,v) = (\vec{r'}_u, \vec{r'}_v)(u,v).$

Proof.
Спочатку розглянемо випадок прямокутника D. Маємо розбиття λ та $\vec{\xi}$ - відмічені точки. Маємо $S(P_2(v_1,v_2)) = S(\vec{r'}(\xi_{v_1}, \eta_{v_2})Q(v_1,v_2)) = \sqrt{EG-F^2}(\xi_{v_1}, \eta_{v_2})S(Q(v_1,v_2))$. А тому звідси випливає, що $\sum\limits_{k=1}^m S(P(v_1,v_2)) = \sum\limits_{k=1}^m \sqrt{EG-F^2}(\xi_{v_1}, \eta_{v_2})S(Q(v_1,v_2)) = \sigma(\sqrt{EG-F^2}, \lambda, (\xi,\eta))$.
А це інтегральна сума Рімана по такої дивної функції. Оскільки ця дивна функція неперервна в силу гладкості, то звідси існує інтеграл, тобто
$\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}(u,v)\, du\, dv = S(\Sigma).$

Якщо D - довільна замкнена область, то спочатку ми маємо визначити площу поверхні для $D_{(n)}$. $S_{D_{(n)}}(\Sigma) = \sum\limits_{Q \subset D_{(n)}} S_Q(\Sigma)$, де Q - всі прямокутники, що всередині $D_{(n)}$. Зокрема аналогічно можна довести, що $\{S_{D_{(n)}}(\Sigma), n \geqslant 1\}$ буде фундаментальною послідовністю. Тому має сенс визначити $S_D(\Sigma) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{D_{(n)}}$.
Звідси отримаємо, що $S(\Sigma) = \iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}(u,v)\, du\, dv$ працює для будь-якої замкненої області. ■

Proposition 4.2.4 Задано $D \subset \mathbb{R}^2$ - замкнена область та функція $g \in C^1(D)$. Тоді площа графіка функції Γ_g
$S(\Gamma_g) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}(x,y)\, dx\, dy.$
Вказівка: розглянути параметризацію $\vec{r}(x,y) = (x, y, g(x,y))^T$.

Definition 4.2.5 Поверхню Σ будемо називати **кусково гладкою**, якщо $\Sigma = \bigcup\limits_{k=1}^m \Sigma_k$, де кожна Σ_k - гладка поверхня.

Площу кусково гладкої поверхні Σ визначимо так: $S(\Sigma) = \sum\limits_{k=1}^m S(\Sigma_k)$.

4.3 Поверхневі інтеграли I роду

Принцип такий самий, що був у криволінійного інтегралу I роду.
Нехай задано поверхню Σ, що має площу, на замкненій області D. Ми спочатку розбиваємо прямокутник D - внаслідок цього утвориться **розбиття поверхні** $\lambda_\Sigma = \{\Sigma(v_1,v_2)\}$. Аналогічно визначаємо **діаметр розбиття поверхні** $|\lambda|_\Sigma = \max d(\Sigma(v_1,v_2))$ - максимальний діаметр. А далі просто **відмічаємо точки** на кожному розбитті поверхні $N(v_1,v_2)$.
Тепер нехай задано функцію f на поверхні Σ. Визначимо ось таку суму:

$$\sigma(f, \lambda, N) = \sum_{v_1,v_2} f(N(v_1,v_2))S(\Sigma(v_1,v_2))$$

Definition 4.3.1 Задано поверхню Σ, що має площу та параметризацію $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$ на прямокутнику. Маємо τ_Σ - розбиття поверхні та N - відмічені точки.
Число J називається **поверхневим інтегралом I роду** від функції $f: \Sigma \to \mathbb{R}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (\lambda_\Sigma, N) : |\lambda|_\Sigma < \delta \implies |\sigma(f, \lambda_\Sigma, N) - J| < \varepsilon$$

Позначення: $J = \iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\, dS$.

Узагальнюювати для довільних поверхонь Σ, що має площу, я не буду. Тому далі буде мова лише про гладкі поверхні Σ.

Theorem 4.3.2 Задано параметризацію $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$, де D - замкнена область. Нехай поверхня $\Sigma = \vec{r}(D)$ - гладка. Також задано функцію $f \in C(\Sigma)$. Тоді існує поверхневий інтеграл I роду, причому

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D} f(\vec{r}(u,v))\sqrt{EG-F^2}(u,v)\,du\,dv.$$

$$E(u,v) = \left\|\vec{r'}_u\right\|^2(u,v), G(u,v) = \left\|\vec{r'}_v\right\|^2(u,v), F(u,v) = (\vec{r'}_u, \vec{r'}_v)(u,v).$$

Proof.

Насправді кажучи, доведення є абсолютно аналогічним, як це було при криволінійному інтегралі I роду. Єдине але: якщо мається, що $|\lambda_D| < \delta$, то треба з'ясувати, чи буде $|\lambda_\Sigma| < \tilde{\delta}$.

Заздалегідь нам буде відомо, що $|\lambda_D| < \delta$.

Розглянемо якийсь прямокутник $Q(v_1, v_2) = \left[x_1^{v_1}, x_1^{v_1+1}\right] \times \left[x_2^{v_2}, x_2^{v_2+1}\right]$, його діаметр становить діагональ прямокутника $d(Q(v_1,v_2))$. Рівняння діагоналі:

$$\frac{u - x_1^{v_1}}{\Delta x_1^{v_1}} = \frac{v - x_2^{v_2}}{\Delta x_2^{v_2}} \implies v = \frac{\Delta x_2^{v_2}}{\Delta x_1^{v_1}}(u - x_1^{v_1}) + x_2^{v_2} = v(u).$$

У цьому випадку пробігається $u \in [x_1^{v_1}, x_1^{v_1+1}]$. Таким чином, $\vec{r}(u, v(u)) = \vec{\gamma}(u)$ - отримаємо криву для деякої поверхні $\Sigma(v_1, v_2)$. Уже відомо, що

$$L(\Gamma(\vec{\gamma})) = \int_{x_1^{v_1}}^{x_1^{v_1+1}} \left\|\vec{\gamma}'\right\|\,dt \leqslant M\Delta x_1^{v_1} \leqslant M\sqrt{(\Delta x_1^{v_1})^2 + (\Delta x_2^{v_1})^2} = Md(Q(v_1,v_2)) \leqslant M|\lambda|_D < M\delta.$$

Ця нерівність виконується для кожної кривої поверхні $\Sigma(v_1, v_2)$, зокрема оберемо ту поверхню, де діаметр буде $|\lambda|_\Sigma$, тоді отримаємо $|\lambda|_\Sigma < M\delta$. ■

Corollary 4.3.3 Маємо $\Sigma = \Gamma_g$, тобто графік функції $g \in C^1(D^\circ)$. Відомо, що $f \in C(\Sigma)$, тоді

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D} f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Remark 4.3.4 Якщо $f \equiv 1$ всюди на Σ, то тоді отримаємо $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} dS = S(\Sigma)$.

Що тепер робити, якщо D - якась довільна замкнена область. Здається, що можна аналогічно визначити:

$$\iint\limits_{\Sigma_{(n)}} f\,dS = \sum_{Q \subset D_{(n)}} \iint\limits_{\Sigma(Q)} f\,dS.$$

Аналогічним чином можна довести, що послідовність таких інтегралів буде фундаментальною. А тому має сенс визначити ось таку границю:

$$\iint\limits_{\Sigma} f\,dS = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Sigma_{(n)}} f\,dS.$$

Example 4.3.5 Обчислити $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dS$, де поверхня Σ задається таким чином:

$\vec{r}(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)^T$, де параметризація визначеня на $D = [0, 2\pi] \times [0, h]$.

Маємо $\vec{r}'_u = (-R\sin u, R\cos u, 0)^T$ та $\vec{r}'_v = (0,0,1)^T$, звідси отримаємо:

$E(u,v) = \|\vec{r}'_u\|^2 = R^2 \qquad G(u,v) = \|\vec{r}'_v\|^2 = 1 \qquad F(u,v) = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_v) = 0$. Отже,

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dS = \iint\limits_{D} \frac{1}{R^2\cos^2 u + R^2\sin^2 u + v^2}\sqrt{R^2 \cdot 1 - 0^2}\,du\,dv = \iint\limits_{D} \frac{R}{R^2+v^2}\,du\,dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} du \int_0^h \frac{R}{R^2+v^2}\,dv = 2\pi \operatorname{arctg}\frac{h}{R}.$$

4.4 Властивості поверхневих інтегралів I роду

Proposition 4.4.1 Задані функції $f, g : \Sigma \to \mathbb{R}$, для яких існують поверхневі інтеграли по поверхні Σ. Тоді $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g$ також має поверхневий інтеграл по поверхні Σ, причому

$$\iint\limits_{\Sigma} \alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)\, dS = \alpha \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, dS + \beta \iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)\, dS.$$

Доведення зрозуміле. А для неперервних функцій f, g навіть очевидно.

Proposition 4.4.2 Задано функцію $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ та нехай $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, причому так, що ці дві криві не мають спільних внутрішніх точок.
Існує поверхневий інтеграл f по $\Sigma \iff$ існують поверхневі інтеграли f по Σ_1 та Σ_2, причому

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, dS = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\, dS + \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\, dS.$$

Коли функція f неперервна, то все ясно. Але в загальному випадку геть не очевидно.

Proposition 4.4.3 $\left| \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, dS \right| \leqslant \int_{\Sigma} |f(x,y,z)|\, dS.$

Коли функція f неперервна, то все ясно. Але в загальному випадку геть не очевидно.

Proposition 4.4.4 Задано функцію $f : \Sigma \to \mathbb{R}$, причому $f \in C(\Sigma)$. Тоді $\exists M = (\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma$:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, dS = S(\Gamma) \cdot f(\xi, \eta, \zeta).$$

Випливає з теореми про середнє в подвійному інтегралі.

4.5 Поверхневі інтеграли II роду

Definition 4.5.1 Задано Σ - гладка поверхня, всі точки неособливі.
Вона наизвається **орієнтовною**, якщо існує ось таке поле $\vec{n} : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ - поле одиничних нормальних векторів до Σ, причому $\vec{n} \in C(\Sigma)$.

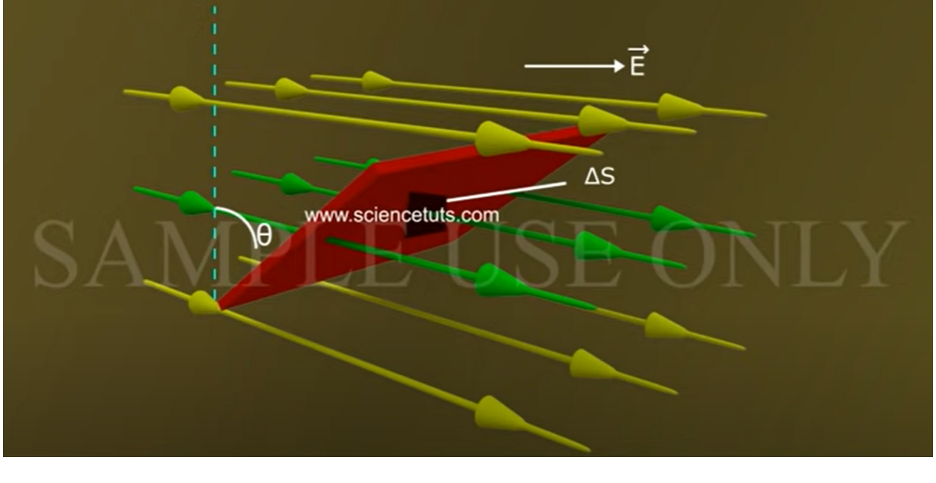
Example 4.5.2 Зокрема ось така півсфера буде орієнтовною поверхнею. Як воно виглядає, дивись відео, там нижче посилння.
Всі нормалі в орієнтовних поверхнях напрямлені в дві сторони. Тобто вже є певна орієнтація, як в кривих, де дотичних було теж дві.

Example 4.5.3 Але ось стрічка Мьобіуса не буде орієнтовною поверхнею. Закрепив посилання на відео (клік сюди).
Це пояснює інтуїтивно, що означає неперервне поле нормальних векторів. Це коли ми рухаємо якусь нормаль по поверхні та можемо повернутись назад в цю ж позицію.

Щоб знову зрозуміти цю фігню, треба з'ясувати фізичний зміст.
Є така штука як електричний потік, який задається як:

$$\Pi = (\vec{E}, \vec{S}),$$

де $\vec{E}$ - напруженість поля, а $\vec{S}$ нормальний вектор до поверхні. Потік описує те, скільки стрілок проходить через поверхню S.



Мінус даної формули: вона застосовна лише для прямокутної площини. Ось тут виникає цей підрозділ.
А тепер нехай задана деяка поверхня Σ - гладка, всюди неособлива та $\vec{r}$ - її параметризація в області D.
Як це було минулого разу, ми розіб'ємо поверхню, буде λ_Σ. А потім утворимо відмічені точки N. Там далі на кожній підповерхні буде прямокутна поверхня.
На відміченій точці N_i поверхні проведемо дотичну $T^*_{N_i}\Sigma(v_1, v_2)$. Там є напруженість $\vec{E}(N_i)$ (для спрощення ми обмежимось лише неперервним векторним полем). А тому потік можна обчислити за формулою $(\vec{E}(N_i), \overrightarrow{T^*_{N_i}\Sigma(v_1, v_2)})$.
Тоді визначається нова інтегральна сума, але тут це буде сума всіх робіт:

$$\sigma(\vec{F}, \lambda, N) = \sum_{v_1, v_2} \left(\vec{E}(N_i), \overrightarrow{T^*_{N_i}\Sigma(v_1, v_2)}\right)$$

У цьому випадку $\overrightarrow{T^*_{N_i}\Sigma(v_1, v_2)}$ - вектор площі даної дотичної.
Надалі я знову позначатиму векторне поле за $\vec{F}$, тому що так простіше.

Definition 4.5.4 Число J називається **поверхневим інтегралом II роду** від векторного поля $\vec{F}$ вздовж поверхні Σ, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (\lambda_\Sigma, N) : |\lambda|_\Sigma < \delta \implies |\sigma(\vec{F}, \lambda_\Sigma, N) - J| < \varepsilon$$

Позначення: $J = \iint\limits_\Sigma (\vec{F}, d\vec{S})$.

Remark 4.5.5 Зокрема якщо векторне поле $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T$, то тоді використовується інше позначення:
$\int\limits_\Sigma P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dx\, dz + R(x, y, z)\, dx\, dy$.
Інтуїція даного позначення згодом.

Remark 4.5.6 У разі якщо поверхня Σ буде замкнутою, то прийнято позначти це таким чином: $\oiint\limits_\Sigma (\vec{F},\, d\vec{S})$.

Theorem 4.5.7 Задано Σ - гладка поверхня, всі точки неособливі та $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ - параметризація в замкненій області. Нехай векторне поле $\vec{F} = (P, Q, R)^T : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ - неперервне на Σ. Тоді існує поверхневий інтеграл II роду, причому
$\iint\limits_\Sigma (\vec{F}, d\vec{S}) = \iint\limits_D \left(\vec{F}(\vec{r}(u, v)), [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]\right)\, du\, dv$.
Поки без доведення. Я щось заплутався.

Corollary 4.5.8 $\iint\limits_\Sigma (\vec{F}, d\vec{S}) = \iint\limits_\Sigma (\vec{F}, \vec{n})\, dS$.

Theorem 4.5.9 Маємо $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ на відповідно D_1, D_2 - дві параметризації однієї й той самої поверхні. Тоді
$\iint\limits_{\Sigma_1} (\vec{F}\, d\vec{S}) = \iint\limits_{\Sigma_2} (\vec{F}\, d\vec{S})$, якщо ці поверхні однієї орієнтації;
$\iint\limits_{\Sigma_1} (\vec{F}\, d\vec{S}) = -\iint\limits_{\Sigma_2} (\vec{F}\, d\vec{S})$, якщо ці поверхні різної орієнтації.
Тобто поверхневи інтеграл II роду не залежить від параметризації, але має значення орієнтація поверхні.

Якщо стисло, то у нас вектори нормалі або напрямлені зовні, або всередині.

4.6 Формула Остроградського-Гауса

Definition 4.6.1 Задано $V \subset \mathbb{R}^3$ - область та векторне поле $\vec{F} : V \to \mathbb{R}^3$, де $\vec{F} = (P, Q, R)^T$ - неперервно-диференційовано на V.
Дивергенцією векторного поля $\vec{F}$ назвемо відображення $\text{div}\vec{F} : V \to \mathbb{R}$, що задається як

$$\text{div}\vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$$

Lemma 4.6.2 Задано множину C - криволінійний циліндр (обмежується функціями $z(x, y)$). Нехай $\vec{F} = (P, Q, R)^T$ визначено на C та неперервно-диферецiйоване. Тоді, припустивши, що ∂C має зовнішню орієнтацію, маємо
$\displaystyle\oiint\limits_{\partial C} R\,dx\,dy = \iiint\limits_{C} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$

Proof.
Маємо $C = \{(x, y) \in pr_{XOY}C : z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\}$. Тоді:
$\displaystyle\iiint\limits_{C} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{pr_{XOY}C} dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \iint\limits_{pr_{XOY}C} R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))\,dx\,dy =$
$\displaystyle= \iint\limits_{pr_{XOY}C} R(x, y, z_2(x, y))\,dx\,dy - \iint\limits_{pr_{XOY}C} R(x, y, z_1(x, y))\,dx\,dy.$
Тепер розглянемо ліву частину рівності. Маємо:
$\displaystyle\oiint\limits_{\partial C} R\,dx\,dy = \iint\limits_{\partial C_1} R\,dx\,dy + \iint\limits_{\partial C_2} R\,dx\,dy + \iint\limits_{\partial C_{side}} R\,dx\,dy.$
Тут ∂C_{side} - це бічна сторона. Бічна сторона паралельна OZ, а тому $\vec{n} \perp OZ$, власне звідси $\vec{n} = (n_1, n_2, 0)$. Таким чином,
$\displaystyle\iint\limits_{\partial C_{side}} R\,dx\,dy = \iint\limits_{\partial C} ((0, 0, R)^T, \vec{n})\,dx\,dy = 0.$
Тут ∂C_1 - це нижня основа. Проєктуємо його на XOY. Оскільки C орієнтовна зовні, то туди кут між OZ та $\vec{n}$ буде від'ємним, а тому
$\displaystyle\iint\limits_{\partial C_1} R\,dx\,dy = -\iint\limits_{pr_{XOY}C} R(x, y, z_1(x, y))\,dx\,dy.$
Тут ∂C_2 - це верхня основа, а всі решта міркування аналогічні, отже,
$\displaystyle\iint\limits_{\partial C_2} R\,dx\,dy = \iint\limits_{pr_{XOY}C} R(x, y, z_2(x, y))\,dx\,dy.$
Отже, остаточно отримали рівність $\displaystyle\oiint\limits_{\partial C} R\,dx\,dy = \iiint\limits_{C} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$ ∎

Lemma 4.6.3 Задано множину V - замкнена область. Нехай $\vec{F} = (P, Q, R)^T$ визначено на V та неперервно-диференційоване. Тоді, припустивши, що ∂V має зовнішню орієнтацію, маємо
$\displaystyle\oiint\limits_{\partial V} R\,dx\,dy = \iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$

Proof.
Ми розіб'ємо область на криволінійні циліндри, бічні сторони якись паралельні OZ, таким чином: $\displaystyle V = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, причому вони не мають спільних внутрішніх точок. Тоді звідси
$\displaystyle\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{n} \iiint\limits_{C_i} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$
А з іншого боку, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \iiint\limits_{C_i} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{n} \oiint\limits_{\partial C_i} R\,dx\,dy.$

Тут варто зауважити, що $\displaystyle\partial C_i = (\partial V \cap \partial C_i) \cup \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\partial C_i \cap \partial C_k)$. Аналогічно, як в Гріна, але уявити

дуже важко.
Абсолютно аналогічно, як в Гріна, ми розпишемо
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \oiint_{\partial C_i} R\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \left(\iint_{\partial V \cap \partial C_i} R\,dx\,dy + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \iint_{\partial C_i \cap \partial C_k} R\,dx\,dy \right).$

Тепер окремо розглянемо $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \iint_{\partial C_i \cap \partial C_k} R\,dx\,dy$. У цій сумі беруть участь одночасно $\displaystyle\iint_{C_{i_0} \cap C_{k_0}} R\,dx\,dy$

та $\displaystyle\iint_{\partial C_{k_0} \cap \partial C_{i_0}} R\,dx\,dy$ при $i_0 \neq k_0$, а також $1 \leqslant i_0, k_0 \leqslant n$. У цих двох поверхнось під інтегралами орієнтації протилежні один одному, якщо придивитись на 3D малюнок (що дуже важко намалювати), а тому звідси
$\displaystyle\iint_{\partial C_{i_0} \cap \partial C_{k_0}} R\,dx\,dy + \iint_{\partial C_{k_0} \cap \partial C_{i_0}} R\,dx\,dy = 0.$

Звідси випливає, що $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \iint_{\partial C_i \cap \partial C_k} R\,dx\,dy = 0$, а тому продовжимо рівність:

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \oiint_{\partial C_i} R\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\partial V \cap \partial C_i} R\,dx\,dy = \oiint_{\partial V} R\,dx\,dy.$

Дійсно, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} (\partial V \cap \partial C_i) = \partial V$, як об'єднання всіх меж.

Разом отримали, що $\displaystyle\oiint_{\partial V} R\,dx\,dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$ ■

Абсолютно аналогічно можна довести ці дві леми для випадку:
$\displaystyle\oiint_{\partial V} Q\,dx\,dz = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$
$\displaystyle\oiint_{\partial V} P\,dy\,dz = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$
Тільки в першому треба проєкцію на OXZ, а другому треба проєкцію на YOZ. І криволінійні циліндри будуть по функціям відповідно $x_1(y,z), x_2(y,z)$ та $y_1(x,z), y_2(x,z)$. Разом отримаємо результат:

Theorem 4.6.4 Теорема Гауса-Остроградського
Задано $V \subset \mathbb{R}^3$ - замкнена область та ∂V - границя, що орієнтовна зовні. Відомо, що $\vec{F} = (P,Q,R)^T$ визначено на V та неперервно-диференційовано. Тоді
$\displaystyle\iint_{\partial V} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz.$

4.7 Формула Стокса

Definition 4.7.1 Задано $V \subset \mathbb{R}^3$ - область та векторне поле $\vec{F} : V \to \mathbb{R}^3$, де $\vec{F} = (P,Q,R)^T$ - неперервно-диференційовано на V.
Ротором (вихром) векторного поля $\vec{F}$ назвемо відображення $\operatorname{rot}\vec{F} : V \to \mathbb{R}^3$, що задається як

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} (x,y,z)$$

Definition 4.7.2 Поверхню Σ та криву $\partial\Sigma$ назвемо **узгоджено напрямленими**, якщо обхід $\partial\sigma$ відбувається проти годинникової стрілки під час спостереження з кінця вектора $\vec{n}$.

Theorem 4.7.3 Теорема Стокса
Задано $U \subset \mathbb{R}^3$ - відкрита множина та $\sigma \subset U$ - гладка поверхня так, що $\sigma = \Gamma_f = \Gamma_g = \Gamma_h$ для функцій f,g,h на D_{yz}, D_{zx}, D_{xy}.

Нехай $\partial\sigma$ - границя поверхні σ та $\vec{F} = (P, Q, T)^T$ визначено на U та неперервно-диференційовано. Тоді, припустивши, що $\partial\sigma$ узгоджено орієнтована з σ, маємо
$\oint\limits_{\partial\sigma}(\vec{F}, d\vec{l}) = \iint\limits_{\sigma}(\mathrm{rot}\vec{F}, \vec{n})\, d\sigma$.

Proof.
Спочатку доведемо частинний випадок - і це буде $\int_{\partial\sigma} P\, dx = \iint\limits_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial z}\, dx\, dz - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$.

Дуже хочеться застосувати формулу Гріна, але поки що крива задається не на площині, а в просторі, треба виправити цю ситуацію. ■

4.8 Незалежність криволінійного інтегралу II роду від шляху інтегрування в $\mathbb{R}^3$

Lemma 4.8.1 Лема Пуанкаре в $\mathbb{R}^3$
Задано множину $V \subset \mathbb{R}^3$ - замкнена однозв'язна область. Нехай $\vec{F} = (P, Q)^T$ визначено на V та неперервно-диференційоване. Тоді нижчезгадані твердження еквівалентні:
1. $\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z); \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z); \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z), \forall (x, y, z) \in V$.
Або, що еквівалентно, $\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{0}$;
2. $\oint\limits_{\Gamma} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$ для будь-якої замкненої кривої $\Gamma \subset V$.
3. $\int_{\Gamma_1} P\, dx + Q\, dy = \int_{\Gamma_2} P\, dx + Q\, dy$ для будь-яких двох кривих $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset V$ зі спільним початком та кінцем;
4. Існує $U(x, y, z)$ - двічі неперервно-дифереційована функція, для якого $\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = P(x, y, z)$, $\frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) = Q(x, y, z)$, $\frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = R(x, y, z), \forall (x, y, z) \in V$. Інакше кажучи, $dU(x, y) = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$.
Доведення повторюється, тому нема сенсу розписувати.