Зміст

1 Диференціальні рівняння першого порядку

1.1 Основні означення

Definition 1.1.1 Задана область $D \subset \mathbb{R}^2$ – відкрита та однозв'язна; функція $f\colon D \to \mathbb{R}$.
Диференціальним рівнянням першого порядку називається таке рівняння:

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Definition 1.1.2 Розв'язком рівняння (1) називається функція $y = \varphi(x)$, що визначений та диференційований на відкритому інтервалі $I \subset \mathbb{R}$, графік якої міститься в області D та задовольняє рівнянню (1).

Definition 1.1.3 Графіком розв'язку $y = \varphi(x)$ називають **інтегральною кривою**.

Example 1.1.4 Задане диференціальне рівняння: $y' = \dfrac{y}{x}$. Розв'язком буде функція $\varphi(x) = Cx$, причому вона задається на:
$I = (0, +\infty)$, якщо $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$;
$I = (-\infty, 0)$, якщо $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$.

Геометричний зміст

Якщо $y = \varphi(x)$ – розв'язок рівняння (1), то $k = \dfrac{d\varphi(x)}{dx}$ – кутовий коефіцієнт до графіку функції $y = \varphi(x)$ в точці x.

Remark 1.1.5 Розв'язки рівняння (1) іноді зрузчно розглядати як $x = \psi(y)$. Тоді диференціальне рівняння (1) записують так:

$$x' = \frac{1}{f(x, y)}$$

Remark 1.1.6 У загальному випадку розв'язок рівняння (1) може розглядатись як неявна функція $F(x, y) = 0$. Тоді рівняння (1) записують так:

$$dy - f(x, y)dx = 0$$

Definition 1.1.7 Рівнянням Пфаффа називають ось таке диференціальне рівняння:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

Definition 1.1.8 Задана область $D \subset \mathbb{R}^2$ – відкрита та однозв'язна; точка $(x_0, y_0) \in D$.
Задачею Коші з початковою умовою (x_0, y_0) називається система рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Розв'якзом задачі Коші називають розв'язок $y = \varphi(x)$ першого рівняння, для якого $\varphi(x_0) = y_0$.

Example 1.1.9 Маємо задачі Коші $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$. Для неї існує єдиний розв'язок $y = \dfrac{x^2}{2}$ на $I = \mathbb{R}$.

1.2 Деякі типи рівнянь першого порядку

1.2.1 Рівняння з відокремлювальними змінними

Розглянемо ось таке диференціальне рівняння:

$$M_1(x)M_2(y)\,dx + N_1(x)N_2(y)\,dy = 0,$$

Ми припускаємо, що функції $M_1, N_1, f_1 \in C(I_1)$ та функції $M_2, N_2, f_2 \in C(I)$. Також будемо розглядати лише такі функції, де $M_2 \not\equiv 0, N_1 \not\equiv 0$.

Із урахуванням вимог, диференціальне рівняння перепишеться таким чином:
$\dfrac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx = -\dfrac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy.$
Далі проінтегруємо обидві частини рівності:
$\displaystyle\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx = -\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy.$
Нехай в обох частинах рівності ми знайшли первісні $F_1(x), F_2(y)$. Тоді розв'язок задається неявно таким чином:
$F_1(x) = -F_2(y) + C.$

При деяких $x_* \in I_1, y_* \in I_2$ таких, що $M_2(y_*) = 0, N_1(x_*) = 0$, ці точки будуть відкинуті. Тобто розв'язок задається на меншому інтервалі.

До речі, початкове диференціальне рівняння можна записати іншим чином:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y),$$

де $f_1(x) = \dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}, \quad f_2(y) = \dfrac{N_1(y)}{N_2(y)}.$

Example 1.2.1 Розв'язати диференціальне рівняння $\dfrac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y$.
Розглянемо окремо, коли $\cos^2 y = 0$. Тоді $y_* \equiv \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ – розв'язок.
Тепер випадок $\cos^2 y \not\equiv 0$. Тому ми поділимо на $\cos^2 y$ – отримаємо:
$\dfrac{dy}{\cos^2 y} = 2x\,dx$
Інтегруємо обидві частини – маємо:
$\operatorname{tg} y = x^2 + C$ на інтервалі $I = \mathbb{R} \setminus \{y_*\}$ – розв'язок. Можна записати розв'язок в іншому вигляді: $y = \operatorname{arctg}(x^2 + C) + \pi m, m \in \mathbb{Z}$.

1.2.2 Однорідне рівняння

Definition 1.2.2 Функція $f(x, y)$ називається **однорідною**, якщо

$$\forall t \neq 0 : f(tx, ty) = f(x, y)$$

Example 1.2.3 Зокрема функція $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ – однорідна, оскільки
$f(tx, ty) = \dfrac{t^2x^2 + t^2y^2}{t^2xy} = \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = f(x, y).$

Proposition 1.2.4 Функція $f(x, y)$ – однорідна $\iff \exists F : f(x, y) = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Proof.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\exists F : f(x, y) = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Тоді $f(tx, ty) = F\left(\dfrac{ty}{tx}\right) = F\left(\dfrac{y}{x}\right) = f(x, y)$.
Отже, $f(x, y)$ – однорідна.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $f(x, y)$ - однорідна. Тоді $f(x, y) = f\left(x \cdot 1, x \cdot \dfrac{y}{x}\right) = f\left(t \cdot 1, t \cdot \dfrac{y}{x}\right) \overset{f(tx,ty)=f(x,y)}{=} f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.
Тому оберемо функцію $F(z) = f(1, z)$, що й завершує доведення. ■

Тепер розглянемо класичне диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' = f(x, y)$$

Проте цього разу $f(x, y)$ – однорідна функція.
Скористаємось наступною заміною: $y = xz$, де $z = z(x)$.
Якщо знайти похідну, то отримаємо $y' = z + xz'$. Тоді наше початкове рівняння матиме вигляд:
$z + xz' = f(x, xz) \overset{f \text{ – однорідна}}{=} f(1, z) \overset{\text{позн.}}{=} g(z).$

$xz' = g(z) - z$.
$z' = \dfrac{1}{x}(g(z) - z)$.
Прийшли до рівняння з відокремлювальними змінними, якщо позначити $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ та $f_2(z) = (g(z) - z)$. Таке рівняння ми вже навчилися розв'язувати. Коли завершимо розв'язок, то робимо зворотну заміну: $z = \dfrac{y}{x}$.

Example 1.2.5 Розв'язати рівняння: $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.
Можна зауважити, що $\dfrac{tx+ty}{tx-ty} = \dfrac{x+y}{x-y}$. Тобто ця функція – однорідна. Тому робимо заміну:
$y = xz, z = z(x) \implies y' = z + xz'$.
Підставивши цю заміну в рівняння, отримаємо таке:
$z + xz' = \dfrac{1+z}{1-z} \implies xz' = \dfrac{z^2+1}{1-z} \implies \dfrac{dx}{x} = \dfrac{1-z}{z^2+1}\,dz$.
$\ln|x| + C = \operatorname{arctg} z - \dfrac{1}{2}\ln\bigl(z^2+1\bigr)| \cdot 2$.
$\ln x^2 + \ln\bigl(z^2+1\bigr)C' = 2\operatorname{arctg} z$.
Повернемо все як було, взявши зворотну заміну $z = \dfrac{y}{x}$. Тоді отримаємо розв'язок:
$2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}$.

1.2.3 Лінійне рівняння

Definition 1.2.6 Розглянемо ось таке диференціальне рівняння:

$$y' + a(x)y = b(x),$$

де $a, b \in C(I)$. Це називається **лінійним рівнянням**.
При $b(x) \equiv 0$ таке рівняння називають **однорідним**. В іншому випадку – **неоднорідним**.

Розв'язок однорідного диференціального рівняння

Ми розглянемо рівняння $y' + a(x)y = 0$. Насправді, це – рівняння з відокремленими змінними. Розв'яжемо її:
$\dfrac{dy}{y} = -a(x)\,dx$.
$\ln|y| = -\displaystyle\int a(x)\,dx + \ln C$ або $y \equiv 0$, при цьому стала $C > 0$.
Якщо проекспонеціювати рівняння, отримаємо наступне: $y = Ce^{-\int a(x)\,dx}$, причому цього разу $C \in \mathbb{R}$ в силу модуля та нульового розв'язку.

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

Для такого рівняння існують кілька способів. Розглянемо кожний окремо.
I. *Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих).*
Ми маємо рівняння $y' + a(x)y = b(x)$. Спочатку ми розв'яжемо те саме рівняння тільки в однорідному вигляді, тобто $y' + a(x)y = 0$. Ми вже знайшли його розв'язок, це в нас $y_{\text{hom}} = Ce^{-\int a(x)\,dx}$.
Метод варіації сталих полягає в наступному: розглянемо $y = C(x)e^{-\int a(x)\,dx}$. Тобто ми замість сталої C поставили функцію C, що буде неперервно-диференційована. Підставимо його в неоднорідне рівняння – отримаємо:
$C'(x)e^{-\int a(x)\,dx} - C(x)e^{-\int a(x)\,dx}a(x) + a(x)C(x)e^{-\int a(x)\,dx} = b(x)$.
$C'(x)e^{-\int a(x)\,dx} = b(x)$.
$C'(x) = b(x)e^{\int a(x)\,dx}$.
$C(x) = \displaystyle\int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx + D$, де $D \in \mathbb{R}$.
Знайшли функцію $C(x)$, яку можна підставити. Власне, $y = C(x)e^{-\int a(x)\,dx}$ задає розв'язок.

Example 1.2.7 Розв'язати рівняння: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ методом Лагранжа.
Тут буде демонструватись ті самі кроки. Спочатку знайдемо загальний однорідний розв'язок:

$y' + 2xy = 0 \implies \dfrac{dy}{y} = -2x\,dx \implies \ln|y| = -x^2 + C \implies y_{\text{hom}} = Ce^{-x^2}$.
Задамо новий розв'язок $y = C(x)e^{-x^2}$ та підставимо в початкове неоднорідне рівняння:
$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}$.
$C'(x) = x \implies C(x) = \dfrac{x^2}{2} + D$.
Остаточно отримаємо, що:
$y = e^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + D\right) = e^{-x^2}D + e^{-x^2}\dfrac{x^2}{2}$.

II. *Метод Бернуллі.*
Ми маємо рівняння $y' + a(x)y = b(x)$. Проведемо таку заміну:
$y = uv$, де $u = u(x), v = v(x)$. $y' = u'v + v'u$.
Підставивши ці дві заміни, отримаємо наступне:
$u'v + v'u + a(x)uv = b(x) \implies u'v + u(v' + a(x)v) = b(x)$.
Далі ми оберемо таку функцію v, щоб $v' + a(x)v = 0$. Це ніщо інше як однорідне рівняння. Її розв'язок вже знаємо: $v = e^{-\int a(x)\,dx}$. Нам буде достатньо взяти один з розв'язків. Підставимо це рівняння в наше неоднорідне рівняння:
$-e^{-\int a(x)\,dx} \cdot u' = b(x)$.
$u' = -b(x)e^{\int a(x)\,dx}$.
$u = -\int b(x)e^{\int a(x)\,dx} + C$.
Загалом отримали розв'язок $y = uv = e^{-\int a(x)\,dx}\left(C - \int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\right)$.
Виглядає, ніби розв'язок інший, проте все нормально. Розв'язки будуть двома способами одні й ті самі.

Example 1.2.8 Розв'язати рівняння: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ методом Бернуллі.
Проводимо заміну: $y = uv$, тут $u = u(x), v = v(x)$; тоді звідси $y' = u'v + uv'$.
$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2} \implies u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$.
Оберемо таку функцію v, щоб $v' + 2xv = 0$. Якщо розв'язати її, отримаємо $v = e^{-x^2}$. Тоді
$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2} \implies u' = x \implies u = \dfrac{x^2}{2} + C$.
Разом отримаємо наступне: $y = e^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right) = e^{-x^2}C + e^{-x^2}\dfrac{x^2}{2}$.

1.2.4 Рівняння Бернуллі

Definition 1.2.9 Розглядується ось таке диференціальне рівняння:

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\lambda},$$

де $a, b \in C(I)$, а також $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Це називається **рівнянням Бернуллі**.

Remark 1.2.10 При $\lambda = 0$ рівняння буде лінійним. При $\lambda = 1$ рівняння буде з відокремленими змінними. Ми їх вже вміємо розв'язувати, тому такі λ я викинув.

Зауважимо, що коли $\lambda > 0$, то $y \equiv 0$ буде також розв'язком.
Далі ділимо обидві частини на y^{λ} – отримаємо:
$y'y^{-\lambda} + a(x)y^{-\lambda+1} = b(x)$.
Проведемо ось таку заміну:
$z = y^{-\lambda+1}$, де $z = z(x)$. $z' = (-\lambda + 1)y^{-\lambda}y'$.
Підставивши ці заміни, отримаємо, насправді кажучи, лінійне рівняння, яке вміємо робити:
$\dfrac{z'}{1-\lambda} + a(x)z = b(x)$.
Після розв'язку даного рівняння проводимо всі можливі зворотні заміни.

Example 1.2.11 Розв'язати рівняння: $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$. Зауважимо, що це справді рівняння Бернуллі: тут $\lambda = 2$. Тоді $y \equiv 0$ – один з розв'язків. Далі поділимо на y^2:
$y'y^{-2} + \dfrac{y^{-1}}{x+1} + 1 = 0$.
Проводимо заміну: $z = y^{-1} \implies z' = -y^{-2}y'$. Підставимо її:

$-z' + \dfrac{z}{x+1} + 1 = 0.$
Отримали стандартне лінійне рівняння. Якщо розв'язати методами вище, отримаємо:
$z = \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{C}{x+1}.$
Зробивши зворотну заміну, отримаємо наступне:
$z = y^{-1} = \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{C}{x+1} = \dfrac{(x+1)^2 + 2C}{2(x+1)}.$
Остаточно: $y = \dfrac{2(x+1)}{(x+1)^2 + 2C}$ або$y \equiv 0$.

1.2.5 Рівняння, що можна звести до однорідного

Нехай задане ось таке диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$$

Оскільки ми "хочемо"звести це рівняння до однорідної, то нам необхідно перетворити цю дріб на наступний вигляд:

$$Y' = \frac{\alpha_1 X + \beta_1 Y}{\alpha_2 X + \beta_2 Y}$$

Можна компоненти дробу розглянути як два рівняння прямої $\begin{cases} \alpha_1 X + \beta_1 Y = 0 \\ \alpha_2 X + \beta_2 Y = 0 \end{cases}$ та зауважити, що в них існує єдиний розв'язок $(0,0)$.
В нашому конкретному випадку $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$. Система матиме єдиний розв'язок за умовою, що $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Скажімо (x_0, y_0) – наш розв'язок. Тепер для однорідного вигляду я хочу таку заміну на x та y закласти, щоб згодом вони перетнулись в точку $(0,0)$.
Тоді проводиться ось така заміна:
$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \implies \begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases} \implies \dfrac{dY}{dX} = Y'.$
Отримали рівняння, яку ми "захотіли". Якщо погратись з алгеброю, то буде саме такий вираз:
$Y' = \dfrac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}.$
А далі це однорідне рівняння, яке ми навчилися розв'язувати.

Example 1.2.12 Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$.
Одразу зауважу, що $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, тож наш спосіб спрацює. Знайдемо точку перетину цих прямих:
$\begin{cases} -x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$
Тепер проведемо заміну: $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \implies \begin{cases} dX = dx \\ dY = dy \end{cases}$.
$Y' = \dfrac{2Y - X}{2X - Y}.$
Отримали однорідне рівняння. Якщо розв'язати стандартним способом, отримаємо:
$CX^2 = \dfrac{\frac{Y}{X} - 1}{(\frac{Y}{X} + 1)^3} = \dfrac{YX^2 - X^3}{(Y+X)^3}.$
$C = \dfrac{Y - X}{(Y+X)^3}.$
Проведемо зворотну заміну та отримаємо остаточну відповідь:
$C = \dfrac{y - x - 3}{(y + x - 1)^3}.$

1.3 Задача Коші

Definition 1.3.1 Задана область $D \subset \mathbb{R}^2$ та функція $f\colon D \to \mathbb{R}$.
Така функція **задовольняє умові Ліпшиця відносно** y, якщо

$$\exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Proposition 1.3.2 Заданий прямокутник $\Pi = I_a \times I_b \subset \mathbb{R}^2$. Відомо, що функція $f(x, y)$ має частинну похідну f'_y, яка обмежена в D. Тоді f задовільняє умові Ліпшица в D відносно змінної y, причому $L = \sup\limits_{(x,y)\in D} |f'_y(x, y)|$.

Proof.
Зафіксуємо довільне x. За теоремою Лагранжа, $\exists \xi \in (y_1, y_2) : f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y(x, \xi) \cdot (y_1 - y_2)$.
Тоді $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|f'_y x, \xi\right||y_1 - y_2| \leq \sup\limits_{(x,y)\in D} |f'_y(x, y)||y_1 - y_2|$.
Покладемо $L = \sup\limits_{(x,y)\in D} |f'_y(x, y)|$ – отримали умову Ліпшиця відносно y. ■

Насправді, таке твердження уже було в математичному аналізі першого семестру, коли перелічували наслідки з теорем Ланґранжа. Тому тут не новина.

А тепер розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

де функція $f\colon \Pi = I_a \times I_b \to \mathbb{R}$. У нашому випадку $I_a = [x_0 - a, x_0 + a], I_b = [y_0 - b, y_0 + b]$.
Наша головна мета: дізнатись, чи буде розв'язок задачі Коші єдиним взагалі і за якими умовами

Lemma 1.3.3 Функція $y(x)$ – розв'язок задачі Коші $\iff$ $y(x)$ задовольняє інтегральному рівнянню $y(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $y(x)$ – розв'язок задачі Коші, тобто
$y'(t) = f(t, y(t)) \implies \displaystyle\int_{x_0}^{x} y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \implies y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $y(x)$ – розв'язок інтегрального рівняння. Продиференціюємо з обох сторін:
$y'(x) = 0 + f(x, y(x)) = f(x, y(x))$.
Більш того, $y(x_0) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))\, dt = y_0$. Отримали, що $y(x)$ – розв'язок нашої задачі Коші. ■

Ця лема знадобиться, оскільки розв'язок задачі Коші $y_*(x)$ ми будемо знаходити як границю рівномірно збіжної послідовності функцій $\{y_n(x), n \geq 1\}$ так, що:
$y_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt\ \forall n \in \mathbb{N}$;
$y_0(x) \equiv y_0$.

Theorem 1.3.4 Теорема Пікара
Задана функція $f\colon \Pi \to \mathbb{R}$ така, що $f \in C(\Pi)$ та задовольняє умові Ліпшиця відносно y. Тоді задача Коші містить єдиний розв'язок $y_*(x)$ на інтервалі $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$.

Proof.
I. *Існування.*
Доведення інсування розіб'ємо на чотири основні кроки. Доведемо їх.

1) *Всі y_n знаходяться в прямокутнику $I_h \times I_b \subset \Pi$.*
Тобто хочемо показати, що $\forall n \geq 1 : \forall x \in I_h : |y_n(x) - y_0| \leq b$. Доведення буде за МІ.
База індукції: $n = 1 \implies |y_1(x) - y_0(x)| = \left|y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt - y_0\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\, dt\right| \boxed{\leq}$

Оскільки $f \in C(\Pi)$, то вона взагалі є обмеженою, тому $\exists M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)|$.

$\boxed{\leq} M|x - x_0| \leq Mh \leq M\dfrac{b}{M} = b$.

Припущення індукції: умова виконується для фіксованого n.

Крок індукції: перевіримо твердження для $n+1$.

$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt\right| \leq \left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t))|\,dt\right| \boxed{\leq}$

За припущенням МІ, y_n вже лежить в заданому прямокутнику. Тому $f(x, y_n(x))$ також обмежена.

$\boxed{\leq} M|x - x_0| \leq Mh \leq M\dfrac{b}{M} = b$.

Отже, всі y_n лежать в прямокутнику $I_h \times I_b$. МІ доведено.

2) *Послідовність* $\{y_n(x), n \geq 1\}$ *рівномірно збігається.*

Зауважимо, що $y_n(x) = y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x))$.

Розглянемо ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (y_k(x) - y_{k-1}(x))$. Спробуємо довести збіжність критерієм Ваєрштраса, тобто ми оцінимо $|y_k(x) - y_{k-1}(x)|$ $\forall x \in I_h$ таким чином, щоб було число.

$|y_1(x) - y_0(x)| \overset{1)}{\leq} M|x - x_0| = M\dfrac{|x - x_0|}{1!}$.

$|y_2(x) - y_1(x)| = \left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))\,dt\right| \leq \left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))|\,dt\right| \leq$

$\overset{\text{умова Ліпшиця}}{\leq} \left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} L|y_1(t) - y_0|\,dt\right| \leq \left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} LM|t - x_0|\,dt\right| = ML\dfrac{|x - x_0|^2}{2!}$.

$\vdots$

Методами МІ отримаємо таку оцінку $\forall k \geq 1$ та $\forall x \in I_h$:

$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq ML^{k-1}\dfrac{|x - x_0|^k}{k!} \leq ML^{k-1}\dfrac{h^k}{k!}$.

Отримаємо мажорантний ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}$. Такий ряд буде збіжним. Дійсно,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{h^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{L}\frac{(Lh)^k}{k!} = \frac{M}{L}\left(e^{Lh} - 1\right)$ – збіжний.

Отже, підсумовуючи, отримаємо, що $y_n(x) \rightrightarrows y_*(x)$.

3) $y_*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ *також знаходиться в прямокутнику* $I_h \times I_b$.

Згідно з 1), можемо отримати ось таку оцінку:

$|y_*(x) - y_0| = |\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) - y_0| = |\lim\limits_{n\to\infty} (y_n(x) - y_0)| = \lim\limits_{n\to\infty} |y_n(x) - y_0| \leq \lim\limits_{n\to\infty} b = b$.

4) $y_*(x) \in C(\Pi)$ *та є розв'язком задачі Коші.*

Оскільки $y_0(x), f(x,y) \in C(\Pi)$, то $f(x, y_0(x)) \in C(\Pi)$. Тоді $y_1(x) \in C(\Pi)$, а методами МІ доведемо $y_n(x) \in C(\Pi)$. Нарешті, через рівномірну збіжність, $y_*(x) \in C(\Pi)$.

$y_*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt\right) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, \lim\limits_{n\to\infty} y_{n-1}(t))\,dt =$

$= y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_*(t))\,dt$.

Тоді за лемою, $y_*(x)$ – розв'язок задачі Коші.

II. *Єдиність.*

!Припустимо, що існують два розв'язки задачі Коші: $y_*(x), y_{**}(x)$. Розглянемо функцію $z(x) = y_{**}(x) - y_*(x)$ та оцінимо її:

$|z(x)| = \left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_{**}(t)) - f(t, y_*(t))\,dt\right| \leq \left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} |f(t, y_{**}(t)) - f(t, y_*(t))|\,dt\right| \leq \left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} L|y_{**}(t) - y_*(t)|\,dt\right| =$

$\left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} L|z(t)|\,dt\right| \leq LM'|x - x_0| \leq LM'h$.

(TODO: дописати пруф.) ■

2 Диференціальні рівняння n-го порядку

2.1 Основні означення

Definition 2.1.1 Задана область $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – відкрита та однозв'язна; функція $f\colon D \to \mathbb{R}$.
Диференціальним рівнянням n-го порядку називається таке рівняння:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{3}$$

Definition 2.1.2 Розв'язком рівняння (3) називається функція $y = \varphi(x)$, що визначений та диференційований n разів на відкритому інтервалі $I \subset \mathbb{R}$, всі похідні якого містяться в області D та задовольняє рівнянню (3).

Example 2.1.3 Задане диференціальне рівняння: $y'' = e^x$. Розв'язком буде наступа функція $\varphi(x) = e^x + C_0x + C_1$ на інтервалі $I = \mathbb{R}$.

Definition 2.1.4 Задана область $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – відкрита, однозв'язна; точка $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$.
Задачею Коші з початковою умовою $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ називається система рівнянь:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Розв'язком задачі Коші називають розв'язок $y = \varphi(x)$ першого рівняння, для якого $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, ..., $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Example 2.1.5 Маємо задачу Коші $\begin{cases} y'' = e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$. Уже отримали, що $y = e^x + C_0x + C_1$. Тоді якщо знайти всі похідні та підставити значення, то отримаємо:
$\begin{cases} e^0 + C_1 = 1 \\ e^0 + C_0 = 1 \end{cases} \implies C_0 = 0, C_1 = 0$. Отже, $y = e^x$ - розв'язок задачі Коші.

2.2 Деякі типи рівнянь, що допускають зниження порядку

2.2.1 Рівняння, в якої немає залежності від y в правій частині

Розглянемо диференціальне рівняння такого типу:

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Це рівняння, де праворуч немає залежності від y. Для нього проводиться така заміна:
$z(x) = y'(x) \implies y'' = z, \dots, y^{(n)} = z^{(n-1)}$.
Отримаємо таке рівняння:
$z^{(n-1)} = f(x, z, z', \dots, z^{(n-2)})$.
Ну а далі як пощастить з типажом рівняння. Загального рецепту нема в даному випадку.

Також можемо розглянути рівняння такого типу:

$$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$$

Це рівняння, де праворуч нема залежності від $y, y', \dots, y^{(k)}$. Для нього проводиться така заміна:
$z(x) = y^{(k)}(x)$.
Отримаємо таке рівняння:
$z^{(n-k)} = f(x, z, z', \dots, z^{(n-k-1)})$.
Аналогічно далі, як буде, як пощастить.

Example 2.2.1 Розв'язати рівняння $xy^{(4)} - y''' = 0$.
Проведемо заміну: $z = y''' \implies z' = y^{(4)}$. У результаті отримаємо:
$xz' - z = 0 \implies \dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x} \implies z = C_1 x$
$y''' = C_1 x \implies y'' = C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 \implies y' = C_1 \dfrac{x^3}{3!} + C_2 x + C_3 \implies y = C_1 \dfrac{x^4}{4!} + C_2 \dfrac{x^2}{2!} + C_3 x + C_4$.
Але C_1, C_2, C_3, C_4 – константи, тому можна записати іншим шляхом:
$y = C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

2.2.2 Рівняння, в якої немає залежності від x в правій частині

Розглянемо диференціальне рівняння такого типу:

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Це рівняння, де праворуч нема залежності від x. Для нього проводиться така заміна:
$y' = p(y)$.
Далі рахуємо другі, треті і т.д. похідні, але достатньо часто буде другої:
$y'' = p'(y)y' = p'(y)p(y)$.
В результаті чого ми отримаємо рівняння від функції $p(y)$ $(n-1)$-го порядку.

Example 2.2.2 Розв'язати рівняння: $y'' = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.
Проведемо заміну: $y' = p(y) \implies y'' = p'(y)y' = p'p$. Тоді отримаємо:
$p'p = \dfrac{1}{4\sqrt{y}} \implies \dfrac{dp}{dy}p = \dfrac{1}{4\sqrt{y}} \implies p\,dp = \dfrac{dy}{4\sqrt{y}} \implies \dfrac{p^2}{2} = \dfrac{\sqrt{y}}{2} + C_1 \implies$
$p = \pm\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$
$y' = \pm\sqrt{\sqrt{y} + C_1} \implies \dfrac{dy}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}} = \pm dx \implies \cdots \implies \dfrac{4}{3}\sqrt{(\sqrt{y} + C_1)^3} - 4C_1\sqrt{\sqrt{y} + C_1} = C_2 \pm x$

2.2.3 Рівняння, в якої лише залежність від похідної на два порядка ниже за похідну в ліві частині

Розглянемо диференціальне рівняння такого типу:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$$

Проведемо таку заміну:
$z(x) = y^{(n-2)}(x)$.
Тоді буде таке рівняння:
$z'' = f(z)$.
Домножимо обидві частини на $2z'$ і позначимо за $\displaystyle\int f(z)\,dz = F(z)$. Отримаємо:
$2z'z'' = 2z'f(z)$
$((z')^2)' = (2F(z))'$
$(z')^2 = 2F(z) + C_1 \implies z' = \pm\sqrt{F(z) + C_1}$.
Далі вже як піде.

Example 2.2.3 Розв'язати рівняння: $\varphi'' = -k\sin\varphi$, де $\varphi = \varphi(t)$
$2\varphi'\varphi'' = -2k\varphi'\sin\varphi$.
$((\varphi')^2)' = 2k(\cos\varphi)'$
$(\varphi')^2 = 2k\cos\varphi + C_1$
Нехай $C_1 = 0$ (для спрощення). Тоді:
$\varphi' = \pm\sqrt{2k\cos\varphi} \implies \dfrac{d\varphi}{\sqrt{2k\cos\varphi}} = \pm dt \implies t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\displaystyle\int \dfrac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}} + C_2$.

2.3 Задача Коші

Definition 2.3.1 Задана область $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ та функція $f\colon D \to \mathbb{R}$
Така функція **задовольняє умові Ліпшиця відносно** $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$, якщо

$\exists L > 0 : \left| f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}) \right| \leq L\left(|y_1 - y_2| + |y_1' - y_2'| + \cdots + \left| y_1^{n-1} - y_2^{(n-1)} \right| \right)$

Proposition 2.3.2 Заданий прямокутник $\Pi = I_a \times \Pi_b \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Відомо, що функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ має всі частинні неперервні похідні в Π. Тоді f задовольняє умові Ліпшиця, причому
$L = \max\{L_1, L_2, \dots, L_{n-1}\}, \qquad L_i = \sup\limits_{(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})} \left| f'_{y^{(i-1)}}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \right|.$

Proof.
Ми розглянемо функціяю $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ таку, що
$g(t) = f(x, (1-t)y_1 + ty_2, (1-t)y_1' + ty_2', \dots, (1-t)y_1^{(n-1)} + ty_2^{(n-1)})$
Зокрема отримаємо:
$g(0) = f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})$
$g(1) = f(x, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)})$
Частинні похідні неперервні, тому $g \in C^1([0,1])$. За теоремою Лагранжа,
$\exists \xi \in (0,1) : g(0) - g(1) = -g'(\xi)$, де в нашому випадку
$g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt} + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial u^{(n-1)}}\dfrac{du^{(n-1)}}{dt} \boxed{=}$
$u = (1-t)y_1 + ty_2, \dots, u^{(n-1)} = (1-t)y_1^{(n-1)} + ty_2^{(n-1)}$
$\boxed{=} \dfrac{\partial f}{\partial u}(y_2 - y_1) + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial u^{(n-1)}}(y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}).$
Залишилось зробити оцінку:
$|g(0) - g(1)| = |g'(\xi)| \le |L_1(y_2 - y_1) + \dots + L_{n-1}(y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)})| \le$
$\le |L_1(y_2 - y_1)| + \dots + |L_{n-1}(y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)})| \le L\left(|y_1 - y_2| + \dots + |y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}|\right).$ ■

Тепер розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

де функція $f \colon \Pi = I_a \times \Pi_b \to \mathbb{R}$. У нашому випадку $I_a = [x_0 - a, x_0 + a]$,
$\Pi_b = [y_0 - b, y_0 + b] \times [y_0' - b, y_0' + b] \times \cdots \times [y_0^{(n-1)} - b, y_0^{(n-1)} + b]$.

Theorem 2.3.3 Теорема Пікара
Задана функція $f \colon \Pi \to \mathbb{R}$ така, що $f \in C(\Pi)$ та задовольняє умові Ліпшиця відносно $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$.
Тоді задача Коші містить єдиний розв'язок $y_*(x)$ на інтервалі $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$.
Доведення проводиться аналогічним чином, як з рівнянням першого порядку.

3 Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку

Я вирішив дане диференціальне рівняння n-го порядку перемістити в окремий розділ, оскільки тут чимало речей, які треба обережно обговорити.

3.1 Основні означення

Definition 3.1.1 Розглянемо ось таке диференціальне рівняння:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$. Це називається **лінійним рівнянням**.
При $b(x) \equiv 0$ таке рівняння називають **однорідним**. В іншому випадку – **неоднорідним**.

Theorem 3.1.2 Задача Коші для лінійного диференціального рівняння містить єдиний розв'язок.

Proof.
Отже, є в нас задача Коші для лінійного диференціального рівняння:
$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$
Доведення теореми буде посилатись на теорему Пікара в диференціальних рівняннях n-го порядку. Тому перше рівняння системи перепишемо в іншому вигляді:
$y^{(n)} = b(x) - a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \cdots - a_1(x)y' - a_0(x)y$.
Знайдемо всі її частинні похідні:
$f'_y = -a_0(x), \quad f'_{y'} = -a_1(x), \quad \ldots, \quad f'_{y^{(n-1)}} = -a_{n-1}(x)$.
Всі вони є неперервними функціями на $\Pi = I_a \times \Pi_b$, тому що $a_0, \ldots, a_{n-1} \in C(I), I_a \subset I$, $\Pi_b \subset \mathbb{R}^n$ – довільний паралелепіпед навколо точки умов Коші. Отже, функція під умовою Ліпшиця. А значить, спрацьовує теорема Пікара. ■

Час підключити трошки лінійної алгебри. По-перше, нам уже відомо, що множина $C^k(I), k \geq 0$ – підпростір векторного простору функцій. По-друге, установимо оператор $L\colon C^n(I) \to C(I)$, що визначається таким чином:

$$(Ly)(x) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

Наважко буде пересвідчитися, що даний оператор буде лінійним. По суті, ми розв'язуємо тепер рівняння:

$$(Ly)(x) = b(x)$$

Corollary 3.1.3 Якщо $y_1, \ldots, y_n$ - розв'язки, то $y = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n$ - розв'язок також

Тепер перейдемо до розв'язку рівнянь

3.2 Однорідне рівняння

Спробуємо розв'язати однорідне диференціальне рівняння:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$.
Мовою лінійної алгебри, нам треба розв'язати рівняння

$$(Ly)(x) = 0$$

До речі кажучи, $\ker L$ як раз-таки буде задавати множину розв'язків.

Definition 3.2.1 Задана система функцій $\{f_1, \ldots, f_n\} \in C^{(n-1)}(I)$.
Визначником Вронського називають функцію $W\colon I \to \mathbb{R}$, що задана таким чином:

$$W[f_1, f_2, \ldots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Example 3.2.2 Нехай є система $\{1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}\}$. Тоді

$$W[1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}](x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{k-1} \\ 0 & 1! & 2x & \ldots & (k-1)x^{k-2} \\ 0 & 0 & 2! & \ldots & (k-1)(k-2)x^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (k-1)! \end{vmatrix} = 1! \cdot 2! \ldots (k-1)!.$$

Example 3.2.3 Дуже важливий приклад
Задана система $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$, у цьому випадку $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ – всі різні. Тоді маємо:

$$W[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}](x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \boxed{=}$$

Виносимо $e^{\lambda_1 x}$ з першої колони, $e^{\lambda_2 x}$ з другої колони...

$$\boxed{=} e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \ldots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x} D_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Останній множник – визначник Вандерморда. Із курсу лінійної алгебри, відомо, що це обчислюється як $D_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \displaystyle\prod_{1 \le j < i \le n} (\lambda_i - \lambda_j)$. Тому остаточно матимемо:

$$W[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}](x) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x} \prod_{1 \le j < i \le n} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Proposition 3.2.4 Якщо $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset C^{(n-1)}(I)$ – лінійно залежні над $\mathbb{R}$, то $W[f_1, \ldots f_n](x) \equiv 0$.

Proof.
Система – лінійно залежна, тобто при $c_1, \ldots, c_n$, що не всі нулі, $c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) \equiv 0$. Продиференціюємо рівняння $(n-1)$ разів. Тоді отримається система, що виконана $\forall x \in I$:

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots + c_n f_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}.$$

Знову з курсу лінійної алгебри, система має нетрививіальний розв'язок $\iff$ визначник коефіцієнтів нулевий. У нас $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – нетривіальні, тому матриця коефіцієнтів

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W[f_1, f_2, \cdots, f_n](x) \equiv 0.$$

■

Corollary 3.2.5 Якщо $\exists x_0 : W[f_1, \ldots, f_n](x_0) \neq 0$, то $\{f_1, \ldots, f_n\}$ – лінійно незалежна.
Тут записано просто обернене твердження.

Example 3.2.6 Зокрема зауважимо, що $\{1, x, \ldots, x^{k-1}\}$ – лінійно незалежні, а також $\{e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ – лінійно незалежні при різних λ_i. Просто тому що в обох випадках ми обчислили детермінант Вронського, що вийшов ненулевим.

Remark 3.2.7 Якщо $W[f_1, \ldots, f_n] \equiv 0$, то $\{f_1, \ldots, f_n\}$ може бути лінійно незалежною. Тобто зворотне твердження твердження не працює.

Example 3.2.8 Розгянемо систему $\{x^2, x|x|\} \subset C^1((-2,2))$. Обчислимо визначник Вронського:
$W[x^2, x|x|](x) = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 2x^2|x| - 2x^2|x| \equiv 0$.
При цьому система $\{x^2, x|x|\}$ – лінійно незалежна. Дійсно,
$\forall x \in (-2,2) : C_1x^2 + C_2x|x| = 0 \overset{x=1,x=-1}{\Longrightarrow} \begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \implies C_1 = C_2 = 0$.

Theorem 3.2.9 Задані $y_1, \dots, y_n$ – розв'язки нашого однорідного диференціального рівняння. $\{y_1, \dots, y_n\}$ – лінійно незалежна над $\mathbb{R} \iff W[y_1, \dots, y_n](x) \not\equiv 0$.

Proof.
$\boxed{\Leftarrow}$ **Crl. 3.2.5**.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{y_1, \dots, y_n\}$ – л.н.з.
!Припустимо, що $\exists x_0 \in I : W[y_1, \dots, y_n](x_0) = 0$. Тоді система рівнянь
$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + \dots + c_ny_n(x_0) = 0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) + \dots + c_ny_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$
має нетривіальні розв'язки. Нехай $c_1 = c_1^0, \dots, c_n = c_n^0$ – ті самі нетривіальні розв'язки.
Розглянемо функцію $y(x) = c_1^0y_1(x) + \dots + c_n^0y_n(x)$. Якщо продиференціювати $(n-1)$ раз та всюди підставити $x = x_0$, то можна отримати, що $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Таким чином отримана задача Коші:
$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$
Проте зауважимо, що $z(x) \equiv 0$ – також розв'язок задачі Коші. Тому в силу єдиності розв'язку задачі Коші, маємо $y(x) \equiv 0$. Отже, для $c_1 = c_1^0, \dots, c_n = c_n^0$ отримали $c_1^0y_1(x) + \dots + c_n^0y_n(x) = 0$. Це означає, що $\{y_1, \dots, y_n\}$ – л.з. Суперечність!
Висновок: $W[y_1, \dots, y_n](x) \not\equiv 0$. ■

Theorem 3.2.10 Позначу через $y_1, y_2, \dots, y_n$ розв'язки відповідних задач Коші:
$$y_1 : \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad y_2 : \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad \dots y_n : \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$
Тоді $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ утворюють лінійний базис в просторі розв'язків нашого рівняння, тобто базис в $\ker L$.

Proof.
I. *Система – л.н.з.*
$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{система – л.н.з. за } \textbf{Crl. 3.2.5}.$$

II. *Єдиність розкладу.*
Маємо розв'язок $y = y_1c_1 + \dots + y_nc_n$. Треба знайти $c_1, \dots, c_n$ і довести, що вони єдині. Диференціюємо $(n-1)$ разів і підставляємо $x = x_0$ кожного разу. Тоді
$c_1 = y(x_0), \dots, c_n = y^{(n-1)}(x_0)$.
Ці константи виражаються єдиним чином. Отже, $\exists! c_1, \dots, c_n : y = c_1y_1 + \dots + c_ny_n$. ■

Corollary 3.2.11 $\dim \ker L = n$.

По суті кажучи, ми довели, що $\{y_1, \dots, y_n\}$ утворює фундаментальну систему розв'язків. Звідси $y = c_1y_1 + \dots + c_ny_n$ – загальний розв'язок.

Lemma 3.2.12 Задані функції $a_{ij} \in C^1(I) i, j = \overline{1,n}$. Тоді

$$\left(\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}\right)' =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Щойно тут була взята похідна від даного визначника. Це буде просто сума визначників, де похідна береться в кожному рядку.

Proof.
Доведення проводимо за означенням. Ми знаємо з лінійної алгебри, що

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} a_{1\sigma(1)}(x) \cdot a_{2\sigma(2)}(x) \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}(x).$$

У цьому випадку S_n – група перестановок множини $\{1, 2, \dots, n\}$ та $l(\sigma)$ – парність перестановки. А тепер візьмемо похідну від правої частини:

$$\left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} a_{1\sigma(1)}(x) \cdot a_{2\sigma(2)}(x) \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}(x)\right)' =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} a'_{1\sigma(1)}(x) \cdot a_{2\sigma(2)}(x) \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}(x) + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} a_{1\sigma(1)}(x) \cdot a'_{2\sigma(2)}(x) \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}(x) + \dots +$$
$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} a_{1\sigma(1)}(x) \cdot a_{2\sigma(2)}(x) \cdot \dots \cdot a'_{n\sigma(n)}(x) \overset{\text{означення визначника}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Під час диференціювання ми скористалися властивістю $(fg)' = f'g + fg'$. ■

Theorem 3.2.13 Формула Остроградського-Якобі
Задана $\{y_1, \dots, y_n\}$ – фундаментальна система розв'язків рівняння та якась точка $x_0 \in I$. Тоді

$$W[y_1, \dots, y_n](x) = W[y_1, \dots, y_n](x_0) e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\, dt}.$$

Proof.
Знайдемо похідну від визначника Вронського за щойно доведеною формулою:

$$W'[y_1, \dots, y_n](x) =$$

$$= \begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) & \dots & y''_n(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) & \dots & y''_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \boxed{=}$$

Тут всі визначники, окрім останнього, онуляться через однакові рядки

$$\boxed{=}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \boxed{\boxed{=}}$$

Оскільки $y_1, \dots, y_n$ – розв'язки, то ми можемо виразити старші похідні з лінійного рівняння:
$y_i^{(n)} = -a_0(x)y_j - a_1(x)y_j' - \dots - a_{n-1}(x)y_j^{(n-1)}, \quad j = \overline{1,n}.$
Підставимо в наш останній визначник і зробимо такі кроки:
– помножимо перший рядок на a_0 і додамо до останнього рядка;
– помножимо другий рядок на a_1 і додамо до останнього рядка;

$\vdots$

Нарешті, винесемо $-a_{n-1}$. Отримаємо:

$$\boxed{\boxed{=}} - a_{n-1}(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = -a_{n-1}(x)W[y_1, \dots, y_n](x).$$

Отже, отримали таку рівність: $W'[y_1, \dots, y_n](x) = -a_{n-1}(x)W[y_1, \dots, y_n](x)$.
А це – диференціальне рівняння з відокремленими змінними, яку ми розв'яжемо:

$$\frac{dW[y_1, \dots, y_n](t)}{dt} = -a_{n-1}(t).$$

$$\frac{dW[y_1, \dots, y_n](t)}{W[y_1, \dots, y_n](t)} = -a_{n-1}(t)\,dt.$$

Інтегруємо на інтервалі $[x, x_0]$:

$$\ln\left|\frac{W[y_1, \dots, y_n](x)}{W[y_1, \dots, y_n](x_0)}\right| = -\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\,dt$$

$$W[y_1, \dots, y_n](x) = W[y_1, \dots, y_n](x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\,dt}$$

Взагалі, тут мав би бути знак $\pm$, але якщо підставити $x = x_0$, то залишиться лише $+$. ■

Метод розв'язку лінійних однорідних диференціальних рівнянь (найчастіше другого порядку) базується саме на теоремі Остроградського-Якобі. Спочатку ми вгадуємо перший частковий розв'язок, а далі за формулою шукаємо другий частковий, а згодом можна отримати загальний розв'язок.

Example 3.2.14 Розв'язати рівняння: $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$. Буду розглядувати на $\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

$$y'' + \frac{4x}{2x+1}y' - \frac{4}{2x+1}y = 0$$

Можна спробувати вгадати, що $y_1 = x$ – частковий розв'язок. Тоді за формулою Остроградського-Якобі,

$$\begin{vmatrix} x & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = W_0 e^{-\int_1^x \frac{4t}{2t+1}\,dt}.$$

$$-\int_1^x \frac{4t}{2t+1}\,dt = \dots = -2x + \ln(2x+1) + 2 - \ln 3.$$

$$\implies W_0 e^{-\int_1^x \frac{4t}{2t+1}\,dt} = W_0 e^{\ln(2x+1)}e^{-2x}e^{2-\ln 3} = W_1(2x+1)e^{-2x}$$

Таким чином за нашою формулою, $xy_2' - y_2 = W_1(2x+1)e^{-2x}$. А тут стандартне дифереціальне рівняння першого порядку. Поділимо на x^2 і зауважимо, що

$$\frac{y_2'x - y_2}{x^2} = W_1\frac{2^{-2x}2x + e^{-2x}}{x^2} \implies \left(\frac{y_2}{x}\right)' = -W_1\left(\frac{e^{-2x}}{x}\right)'.$$

$$\frac{y_2}{x} = -W_1\frac{e^{-2x}}{x}.$$

$$y_2 = -W_1 e^{-2x}.$$

Отже, остаточно загальний розв'язок: $y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$.

3.3 Неоднорідне рівняння

Спробуємо розв'язати неоднорідне диференціальне рівняння:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$.
Мовою лінійної алгебри, нам треба розв'язати рівняння

$$(Ly)(x) = b(x)$$

Theorem 3.3.1 Про структуру розв'язків
y – розв'язок неоднорідного рівняння $\iff$ $y = y_{\text{gen,hom}} + y_{\text{par,inhom}}$. У цьому випадку:
$y_{\text{gen,hom},}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння;
$y_{\text{par,inhom},}$ – частковий розв'язок неоднорідного рівняння.
Доводиться аналогічно, як це було в теоремі про структуру розв'язків системи.

Corollary 3.3.2 Якщо y_1 - розв'язок $Ly_1 = b_1(x)$, а y_2 - розв'язок $Ly_2 = b_2(x)$, то
$y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$ - розв'язок $Ly = \beta_1 b_1(x) + \beta_2 b_2(x)$

Для неоднорідних рівнянь існує поки єдиний загальних вихід, як розв'язати рівняння.

Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих)

Спочатку знайдемо $y_{\text{gen,hom}}$ з нашого лінійного однорідного диференціального рівняння, тобто
$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.
Якщо вважати, що $\{y_1, \ldots, y_n\}$ – фундаментальна система розв'язків, то $y_{\text{gen,hom}} = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$.

Наш розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати в такому вигляді: $y = c_1(x)y_1 + \cdots + c_n(x)y_n$.
Тут $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ – такі функції, що задовольняють таким умовам:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 \cdots + c_n'(x)y_n = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' \cdots + c_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \end{cases}$$

Використовуючи всі наші умови, ми підставимо наше y до неоднорідного рівняння. Але перед цим знайдемо похідні:
$y' = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + \cdots + c_n'(x)y_n(x) + c_n(x)y_n'(x) \overset{\text{умова}}{=} c_1(x)y_1'(x) + \cdots + c_n(x)y_n'(x)$;
$y'' = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'(x) + c_n(x)y_n''(x) \overset{\text{умова}}{=} c_1(x)y_1''(x) + \cdots + c_n(x)y_n''(x)$;
$\vdots$
$y^{(n-1)} = c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) \overset{\text{умова}}{=}$
$= c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$
Легко побачити, що завдяки системі зверху, ми можемо функції $c_1, \ldots, c_n$ сприйняти як константу, що виноситься з похідної
$y^n = c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + c_n(x)y_n^{(n)}(x)$.
Підставляємо все це в неоднорідне рівняння:
$\left(c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)}(x)\right) +$
$+ a_{n-1}(x)\left(c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x)\right) + \cdots +$
$+ a_1(x)\left(c_1(x)y_1'(x) + \cdots + c_n(x)y_n'(x)\right) +$
$+ a_0(x)\left(c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)\right) = b(x)$
Для зручності перегрупуємо всі ці доданки:
$c_1(x)\left(y_1^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)\right) +$
$+ c_2(x)\left(y_2^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x)\right) + \cdots +$
$+ c_n(x)\left(y_n^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_n^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_n'(x) + a_0(x)y_n(x)\right) +$
$+ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = b(x)$
Але оскільки $\{y_1, \ldots, y_n\}$ – фундаментальна система розв'язків, тобто $Ly_i = 0, \quad i = \overline{1,n}$, то в нас

вище залишається лише наступне:
$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = b(x)$.
Дане рівняння додамо до нашої системи. У результаті чого
$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 \cdots + c_n'(x)y_n = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' \cdots + c_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = b(x) \end{cases}$$
Розв'язуючи відносо $c_1'(x) \ldots, c_n'(x)$, отримаємо, що вона має єдиний розв'язок, оскільки детермінант матриці коефіцієнтів – а це детермінант Вронського – ненулевий, згідно з тим, що $\{y_1, \ldots, y_n\}$ – фундаментальна система. Залишилося c_i' проінтегрувати – отримаємо:
$c_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} c_1'(t)\,dt + \tilde{c_1}, \ldots, c_n(x) = \int_{x_0}^{x} c_n'(t)\,dt + \tilde{c_n}$
Нарешті, підставимо в наш початковий y:
$y = \left(\displaystyle\int_{x_0}^{x} c_1'(t)\,dt\right) y_1 + \cdots + \left(\int_{x_0}^{x} c_n'(t)\,dt\right) y_n + \tilde{c_1}y_1 + \cdots + \tilde{c_n}y_n = y_{\text{par,inhom}} + y_{\text{gen,hom}}$.
Отже, враховуючи всі наші умови, $y = c_1(x)y_1 + \cdots + c_n(x)y_n$ – розв'язок лінійного неоднорідного рівняння.

Example 3.3.3 Розв'язати рівняння $y'' + \dfrac{x}{1-x}y' - \dfrac{1}{1-x}y = x - 1$.
Тут фундаментальна система розв'язків $y_1 = e^x$, $y_2 = x$. Запишемо загальний розв'язок:
$y = c_1(x)e^x + c_2(x)x$.
У цьому випадку $c_1(x), c_2(x)$ – такі функції, що задовольняють умовам:
$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)x = 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x) = x - 1 \end{cases}.$$
Розв'язки системи: $c_1'(x) = xe^{-x}$, $c_2'(x) = -1$.
$\Longrightarrow\ c_1(x) = \cdots = -xe^{-x} - e^{-x} + \tilde{c_1}$
$\Longrightarrow\ c_2(x) = -x + \tilde{c_2}$
Отже, $y = e^x(-xe^{-x} - e^{-x} + \tilde{c_1}) + x(-x + \tilde{c_2}) = -x - 1 + \tilde{c_1}e^x - x^2 + x\tilde{c_2}$.
Остаточно, $y = \tilde{c_1}e^x + \tilde{c_2}x - (x^2 + 1)$.

3.4 Однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами

Спробуємо розв'язати однорідне диференціальне рівняння:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0,$$

але цього разу замість функцій будуть числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Деяка інформація про комплекснозначні функції в полі дійсних чисел
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:
$f(x) = u(x) + iv(x)$, де $u(x) = \operatorname{Re} f(x), v(x) = \operatorname{Im} f(x)$
Похідна від цієї функції визначається таким чином:
$f'(x) = u'(x) + iv'(x)$
Всі властивості похідних зберігаються для комплекснозначних функцій

Визначимо ще один лінійний оператор D – оператор диференціювання: $Df = f'$. Тобто наше рівняння матиме інший вигляд:
$Ly = D^ny + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1Dy + a_0Iy = 0$.
Розглянемо функцію $y = e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{C}$. Підставимо в наше рівняння – отримаємо:
$Le^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0\right) = e^{\lambda x}P(\lambda) = 0$.
$Le^{\lambda x} = e^{\lambda x}P(\lambda) = 0 \iff P(\lambda) = 0$.

Definition 3.4.1 **Характеристичним многочленом** будемо називати вираз

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Із наших міркувань отримали наступне:

Proposition 3.4.2 $e^{\lambda x}$ – корінь рівняння $\iff$ $\lambda \in \mathbb{C}$ – корінь характеристичного многочлена.

У нас може бути кілька випадків, як далі буде йти розв'язок такого рівняння.

3.4.1 Випадок різних і лише дійсних коренів

Theorem 3.4.3 Система $\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_n x}\}$ – фундаментальна системою розв'язків. У цьому випадку $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ – різні корені характеристичного многочлена.

Proof.
Ми вже якось показували, що така система є лінійно залежною. Оскільки $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ – різні корені характеристичного многочлена, то $e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_n x}$ – розв'язки нашого рівняння. Але тоді така система є фундаментальною. ■

Example 3.4.4 Розв'язати рівняння: $y'' - y = 0$.
Запишемо характеристичний поліном $P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$. Звідси $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ – різні та дійсні корені, тому звідси $\{e^x, e^{-x}\}$ утворює фундаментальну систему розв'язків. Отже, $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ – загальний розв'язок.

3.4.2 Випадок різних коренів, серед яких вже є комплексні

Theorem 3.4.5 Система $\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_l x}\} \cup \{e^{\alpha_1 x}\cos\omega_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\omega_1 x, \dots, e^{\alpha_k x}\cos\omega_k x, e^{\alpha_k x}\sin\omega_k x\}$ – фундаментальна система розв'язків. У цьому випадку $\mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{R}$ та $\lambda_1 = \alpha_1 + i\omega_1, \dots, \lambda_k = \alpha_k + i\omega_k \in \mathbb{C}$ – різні корені характеристичного многочлена.

Proof.
Зауважимо, що в характеристичному многочлені $P(\lambda)$ всі коефцієнти – дійсні. Тож звідси, якщо $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – корні характеристичного полінома, то $\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_k}$ – також є коренями. Отже, за умовою теореми та за твердженням вище, фундаментальний розв'язок рівняння задається системою $\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_l x}, e^{\lambda_1 x}, e^{\overline{\lambda_1} x}, \dots, e^{\lambda_k x}, e^{\overline{\lambda_k} x}\}$.
Замінимо цю систему функцій наступною системою:
$$\left\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_l x}, \frac{e^{\lambda_1 x} + e^{\overline{\lambda_1} x}}{2}, \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\overline{\lambda_1} x}}{2i}, \dots, \frac{e^{\lambda_k x} + e^{\overline{\lambda_k} x}}{2}, \frac{e^{\lambda_k x} - e^{\overline{\lambda_k} x}}{2i}\right\}.$$
Маємо права, оскільки від елементарних перетворень лінійна незалежність не дінеться нікуди. В силу лінійності оператора L, вони теж будуть розв'зяками. Більш того, за формулами Ойлера,
$$\frac{e^{\lambda_j x} + e^{\overline{\lambda_j} x}}{2} = e^{\alpha_j x}\cos\omega_j x.$$
$$\frac{e^{\lambda_j x} - e^{\overline{\lambda_j} x}}{2i} = e^{\alpha_j x}\sin\omega_j x.$$
Отже, отримаємо бажану систему:
$\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_l x}\} \cup \{e^{\alpha_1 x}\cos\omega_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\omega_1 x, \dots, e^{\alpha_k x}\cos\omega_k x, e^{\alpha_k x}\sin\omega_k x\}$. ■

Remark 3.4.6 Тут всього n функцій в системі: l дійсних і $2k$ копмлексних. Разом $l + 2k = n$.

Example 3.4.7 Розв'язати рівняння: $y'' + y = 0$.
Запишемо характеристичний поліном $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$. Звідси $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ – різні корені, серед яких є комплексні, том звідси $\{\cos x, \sin x\}$ утворює фундаментальну систему розв'язків. Отже, $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ – загальний розв'язок.

3.4.3 Випадок кратних коренів, серед яких (можливо) є комплексні

Theorem 3.4.8 Ось така величезна система буде фундаментальною системою розв'язків:
$$\bigcup_{j=1}^{l}\{e^{\mu_j x}, xe^{\mu_j x}, \dots, x^{s_j - 1}e^{\mu_j x}\} \cup \bigcup_{j=1}^{k}\{e^{\alpha_j x}\cos\omega_j x, e^{\alpha_j x}\sin\omega_j x, \dots, x^{r_j - 1}e^{\alpha_j x}\cos\omega_j x, x^{r_j - 1}e^{\alpha_j x}\sin\omega_j x\}.$$
У цьому випадку $\mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{R}$ з кратністю $s_1, \dots, s_l$ відповідно та $\lambda_1 = \alpha_1 + i\omega_1, \dots, \lambda_k = \alpha_k + i\omega_k \in \mathbb{C}$ з кратністю $r_1, \dots, r_k$ відповідно. Всі μ_i та $\alpha_j + i\omega_j$ – різні.

Доведення цієї теореми доволі масивне. Тому розіб'ємо це на три етапи.

Lemma 3.4.9 Якщо $\lambda_j \in \mathbb{C}$ – корінь кратності s_j характеристичного многочлена $P(\lambda) = 0$, то розв'язком нашого диференціального рівняння буде $y = x^p e^{\lambda_j x}, \forall p \in \mathbb{N} : 0 \leq p < s_j$.

Proof.
Зазначимо, що справедлива така рівність: $D_\lambda^p e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_j} = \left(\dfrac{d}{d\lambda}\right)^p e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_j} = x^p e^{\lambda_j x}$.
Отриманою функцією подіємо на оператор:
$L\left(D_\lambda^p e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_j}\right) = \left(D_x^n + a_{n-1}D_x^{n-1} + \dots + a_1 D_x + a_0 I_x\right)\left(D_\lambda^p e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_j}\right) = D_\lambda^a D_x^b = D_x^b D_\lambda^a$.
$= D_\lambda^p\left(P(\lambda)e^{\lambda x}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_j} \overset{\text{Th. Ляйбніца}}{=} \sum\limits_{q=0}^{p} C_p^q P^{(q)}(\lambda)(e^{\lambda x})^{(p-q)}\Big|_{\lambda=\lambda_j} = \sum\limits_{q=0}^{p} C_p^q P^{(q)}(\lambda_j)\lambda_j^{p-q}e^{\lambda_j x}$.
Оскільки λ_j – корінь кратності s_j, то з курсу ліналу, $P(\lambda_j) = \dots = P^{(s_j-1)}(\lambda_j) = 0$, але $P^{(s_j)}(\lambda_j) \neq 0$.
Тому при $0 \le p < s_j$ отримаємо, що: $\sum\limits_{q=0}^{p} C_p^q P^{(q)}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow L(x^p e^{\lambda_j x}) = 0$.
Отже, $x^p e^{\lambda_j x}$ - розв'язки. ■

Lemma 3.4.10 Система $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{s-1}e^{\lambda x}\}$ є лінійно незалежною над $\mathbb{C}$ (для довільних j в нашому випадку).

Proof.
!Припустимо, що ця система – лінійно залежна, тобто $\exists C_0, \dots, C_{s-1} \in \mathbb{C}$ нетривіальні:
$C_0 e^{\lambda x} + C_1 x e^{\lambda x} + \dots + C_{s-1}x^{s-1}e^{\lambda x} = 0$. Звідси випливає, що
$e^{\lambda x}(C_0 + C_1 x + \dots + C_{s-1}x^{s-1}) = 0$
Отримаємо, що права дужка має бути нулевою. Це означає, що система $\{1, x, \dots, x^{s-1}\}$ – лінійно залежна – суперечність! ■

Lemma 3.4.11 Якщо $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ – різні комплексні числа з кратністю $s_1, \dots, s_m$, тоді система $\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{s_1-1}e^{\lambda_1 x}\} \cup \dots \cup \{e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \dots, x^{s_m-1}e^{\lambda_m x}\}$ є лінійно незалежною над $\mathbb{C}$.

Proof.
!Знову припустимо, що система – лінійно залежна, тобто $\exists C_{pq} \in \mathbb{C}$ не всі нулі: $\sum\limits_{p=1}^{m}\sum\limits_{q=0}^{s_p-1} C_{pq}x^q e^{\lambda_p x} = 0$.

Перепозначу $\sum\limits_{q=0}^{s_p-1} C_{pq}x^q = f_p(x)$. Тоді
$f_1(x)e^{\lambda_1 x} + f_2(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + f_m(x)e^{\lambda_m x} = 0$.
Через те, що не всі C_{pq} нулеві, то принаймні одна з $f_p(x)$ є ненулевою. Вважатимемо, що $f_1(x) \not\equiv 0$.
Поділимо рівняння на $e^{\lambda_m x}$ – отримаємо:
$f_1(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x} + f_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_m)x} + \dots + f_m(x) = 0$.
Продиференціюємо таку кількість разів, щоб позбутись від $f_m(x)$. Тут кожний доданок матиме наступний вираз:
$\dfrac{d^l}{dx^l}\left(f_p(x)e^{(\lambda_p-\lambda_m)x}\right) = \sum\limits_{q=0}^{l} C_l^q f_p^{(q)}(x)(\lambda_p-\lambda_m)^{l-q}e^{(\lambda_p-\lambda_m)x} \overset{\text{позн.}}{=} \tilde{f_p}(x)e^{(\lambda_p-\lambda_m)x}$
Зокрема для $k = 1$
$\tilde{f_1}(x) = \underbrace{f_1(x)(\lambda_1-\lambda_m)^l}_{\neq 0} + \sum\limits_{q=1}^{l} C_l^q f_1^{(q)}(x)(\lambda_1-\lambda_m)^{l-q}e^{(\lambda_1-\lambda_m)x} \neq 0$.
Отримаємо, що $\tilde{f_1}(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x} + \tilde{f_2}(x)e^{(\lambda_2-\lambda_m)x} + \dots + \tilde{f}_{m-1}(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x} = 0$.
Вийшла така ж сама тотожнсть по формі, що й з самого початку.
Якщо продовжити за МІ, то прийдемо до тотожності:
$\vdots$
$\tilde{f_1}(x)e^{\lambda_1 x} = 0$. Але за умовою, $f_1(x) \neq 0$ – суперечність! ■

Усі ці три леми завершують доведення основної теореми.

Example 3.4.12 Розв'язати рівняння $y^{(8)} + 8y^{(6)} + 16y^{(4)} = 0$.
Запишемо характеристичний поліном $P(\lambda) = \lambda^8 + 8\lambda^6 + 16\lambda^4 = 0$. Звідси:
$\lambda_1 = 0$ – кратність 4, тому тут система: $\{1, x, x^2, x^3\}$
$\lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$ – кратності 2, тому тут система: $\{\cos 2x, \sin 2x, x\cos 2x, x\sin 2x\}$.
Отже, $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5\cos x + C_6 \sin x + C_7 x\cos x + C_8 x\sin x$ – загальний розв'язок.

3.5 Неоднорідне рівняння з постійними коефіцієнтами

Спробуємо розв'язати рівняння

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}, b \in C(I)$
В нашому випадку ми будемо розглядати $b(x) = e^{\sigma x}(\underbrace{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}_{=T_m(x)})$. Тут $\sigma \in \mathbb{R}$, а також $b_m \neq 0$. І нехай характеристичний поліном $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$

Для правої частини існує 3 унікальних випадків
I. Нерезонансний випадок

Theorem 3.5.1 Якщо $P(\sigma) \neq 0$, то існує частковий розв'язок рівняння такого вигляду:
$y_{p.inh.} = e^{\sigma x}(\underbrace{q_0 + q_1 x + \cdots + q_m x^m}_{=Q_m(x)})$

Proof.
За принципом суперпозиції, ми будемо мати, що:
$y_{p.inh} = y_0 + \cdots + y_m$, де
$Ly_j = y_j^{(n)} + a_{n-1}y_j^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_j' + a_0 y_j = b_j x^j e^{\sigma x}, j = \overline{0, m}$
Розглянемо дію оператора $D_\sigma = \dfrac{d}{dx} - \sigma I$ на вираз $x^j e^{\sigma x}$. Отримаємо:
$D_\sigma^j \left(x^j e^{\sigma x}\right) = j! e^{\sigma x}$ (можна самому переконатись)
$D_\sigma^{j+1} \left(x^j e^{\sigma x}\right) = 0$
Останній оператор ми застосуємо до обох частин рівняння:
$D_\sigma^{j+1}(Ly) = b_j D_\sigma^{j+1} \left(x^j e^{\sigma x}\right) = 0$ - однорідне лінійне рівняння []
Підставимо $y = e^{\lambda x}$
$D_\sigma^{j+1}(Le^{\lambda x}) = D_\sigma^{j+1}(P(\lambda)e^{\lambda x}) = P(\lambda)(\lambda - \sigma)^{j+1} e^{\lambda x} = 0$
Тоді характеристичний поліном для [] $P'(\lambda) = P(\lambda)(\lambda - \sigma)^{j+1} = 0$
Корені: $\sigma, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, кратність $r_1, \ldots, r_k$. За умовою, $P(\sigma) \neq 0$, а тому $\sigma \neq \lambda_l, l = \overline{1, k}$.
Фундаментальна система: до цього $+ \, \{e^{\sigma x}, xe^{\sigma x}, \ldots, x^j e^{\sigma x}\}$ ■

4 Диференціальні рівняння, що не потрапили

4.1 Рівняння $y' = f(ax + by + c)$

Маємо таке рівняння:

$$y' = f(ax + by + c)$$

Якщо $b = 0$, то тоді ми прийдемо до рівняння з відокремленими змінними
Робимо заміну

$$z(x) = ax + by + c$$

Тоді $z' = a + by'$
$\Rightarrow \dfrac{z' - a}{b} = f(z)$
$\Rightarrow z' = bf(z) + a$ - рівняння з відокремленими змінними...

Example 4.1.1 Розв'язати рівняння: $y' = (x + y + 1)^2$
Заміна: $z = x + y + 1 \Rightarrow z' = 1 + y'$
$z' - 1 = z^2 \Rightarrow z' = z^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{dz}{z^2 + 1} = dx \Rightarrow \operatorname{arctg} z = x + C$
Проводимо зворотню заміну:
$\operatorname{arctg}(x + y + 1) = x + C$

4.2 Квазіоднорідні рівняння

Маємо стандартне диф. рівняння

$$y' = f(x, y)$$

І нехай додатково для функції $f(x, y)$ виконується така властивість

$$\exists \sigma \in \mathbb{R} : \forall t \neq 0 : f(tx, t^\sigma y) = t^{\sigma - 1} f(x, y)$$

Якщо $\sigma = 1$, то ми повертаємось до однорідних рівнянь
Робимо заміну

$$y = z \cdot x^\sigma$$

Тоді $y' = z'x^\sigma + \sigma z x^{\sigma - 1}$
$\Rightarrow z'x^\sigma + \sigma z x^{\sigma - 1} = f(x, zx^\sigma)$
Оскільки маємо квазіоднорідне рівняння, то $f(x, zx^\sigma) = x^{\sigma - 1} f(1, z)$
$\Rightarrow z'x + \sigma z = f(1, z) \Rightarrow z' = \dfrac{f(1, z) - \sigma z}{x}$
Це вже рівняння з відокремленими змінними

Example 4.2.1 Розв'язати рівняння $y' = y^2 + \dfrac{1}{4x^2}$
Перевірка на квазіоднорідність:
$f(tx, t^\sigma y) = t^{2\sigma} y^2 + \dfrac{1}{4t^2x^2} \stackrel{?}{=} t^{\sigma - 1} \left(y^2 + \dfrac{1}{4x^2} \right)$
$\begin{cases} 2\sigma = \sigma - 1 \\ -2 = \sigma - 1 \end{cases}$
Отже, маємо, що $\sigma = -1$
Заміна: $y = zx^{-1} \Rightarrow y' = \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2}$
$\Rightarrow \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2} = \dfrac{z^2}{x^2} + \dfrac{1}{4x^2} \Rightarrow z'x - z = z^2 + \dfrac{1}{4} \Rightarrow z' = \dfrac{z^2 + z + \frac{1}{4}}{x}$
$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\left(z + \frac{1}{2} \right)^2}{x} \Rightarrow -\dfrac{1}{z + \frac{1}{2}} = \ln|x| + C$
Проводимо зворотню заміну:
$-\dfrac{2}{2xy + 1} = \ln|x| + C$

Remark 4.2.2 Квазіоднорідні рівняння можуть скоротити область визначення. Наприклад, якщо $\sigma = \frac{1}{2}$, то ми маємо розв'язки лише для $x > 0$
Тоді можна застосувати заміну $x = -p$, коли $x < 0$

4.3 Лінійне рівняння методом Ейлера

Розглядується рівняння наступного вигляду:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Домножимо обидві частини рівняння на $e^{\int a(x)\,dx}$, маємо:
$y'e^{\int a(x)\,dx} + a(x)ye^{\int a(x)\,dx} = b(x)e^{\int a(x)\,dx}$
$\left(ye^{\int a(x)\,dx}\right)' = b(x)e^{\int a(x)\,dx}$
$ye^{\int a(x)\,dx} = \displaystyle\int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx + C$
$y = e^{-\int a(x)\,dx}\left(\displaystyle\int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx + C\right)$

Example 4.3.1 Розв'язати рівняння: $y' - \dfrac{2y}{x} = 2x^3$
Тут $a(x) = -\dfrac{2}{x} \Rightarrow \displaystyle\int a(x)\,dx = -2\ln x = -\ln x^2$
А далі множимо обидві частини рівняння на $e^{\int a(x)\,dx} = e^{-\ln x^2} = \dfrac{1}{x^2}$
$\Rightarrow \dfrac{y'}{x^2} - \dfrac{2y}{x^3} = 2x \Rightarrow \left(\dfrac{y}{x^2}\right)' = 2x \Rightarrow \dfrac{y}{x^2} = x^2 + C$
$\Rightarrow y = x^4 + Cx^2$

4.4 Рівняння Рікатті

Розглянемо таке рівняння

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

де $P, Q, R \in C(I)$

Remark 4.4.1 При $P(x) \equiv 0$ маємо лінійне рівняння
При $R \equiv 0$ маємо рівняння Бернуллі, де $\lambda = 2$
При $P = Q = R = const$ маємо рівняння з відокремленими змінними

Проведемо заміну

$$y = z + y_{part}$$

де $z = z(x)$ - така функція, що зможе звести до рівняння Бернуллі, а y_{part} - якийсь частковий розв'язок
$\Rightarrow y' = z' + y'_{part} = z' + P(x)y_{part}^2 + Q(x)y_{part} + R(x)$
Підставимо це в наше рівняння:
$z' + P(x)y_{part}^2 + Q(x)y_{part} + R(x) = P(x)(z + y_{part})^2 + Q(x)(z + y_{part}) + R(x)$
Якщо трохи поскоротити, отримаємо таке рівняння:
$z' = P(x)z^2 + (2P(x)y_{part} + Q(x))z$
А це вже - рівняння Бернуллі з $\lambda = 2$...

Example 4.4.2 Розв'язати рівняння $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$
Або $y' = -y^2 + 2xy + (5 - x^2)$
Спробуємо вгадати розв'язок у вигляді $y_{part} = kx + b \Rightarrow y'_{part} = k$
$\Rightarrow k = -(kx + b)^2 + 2x(kx + b) + (5 - x^2)$
$\Rightarrow k = -k^2x^2 - 2kxb - b^2 + 2kx^2 + 2bx + 5 - x^2$
$\Rightarrow (k^2 - 2k)x^2 + (2kb - 2b)x + (k + b^2) = -x^2 + 5$

$\Rightarrow \begin{cases} k^2 - 2k = -1 \\ 2kb - 2b = 0 \\ k + b^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$
Візьмемо $y_{part} = x + 2$

Заміна: $y = z + x + 2 \Rightarrow y' = z' + 1$
$\Rightarrow z' + 1 = -(z + x + 2)^2 + 2x(z + x + 2) + 5 - x^2$
$\Rightarrow z' = -z^2 - 4z$
$\Rightarrow z' + 4z = -z^2$ - рівняння Бернуллі, $\lambda = 2$
...
$z = -\dfrac{4C'}{C' - e^{4x}}$
Зворотня заміна:
$y - x - 2 = -\dfrac{4C'}{C' - e^{4x}}$

4.5 Канонічний вигляд рівняння Рікатті

Маємо таке рівняння

$$y' = y^2 + \tilde{Q}(x)$$

Виявляється, що будь-яке рівняння Рікатті можна звести до канонічного вигляду
Для цього проведемо заміну:

$$y = \alpha(x)z(x)$$

де $\alpha(x)$ - така функція, щоб коефіцієнт при z^2 був рівний 1
$y' = \alpha' z + \alpha z'$
$\Rightarrow \alpha' z + \alpha z' = P(x)\alpha^2(x)z^2(x) + Q(x)\alpha(x)z(x) + R(x)$
Поділимо на α та виразимо z'
$z' = P\alpha z^2 + \left(Q - \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right) z + \dfrac{R}{\alpha}$
$P\alpha = 1$ згідно з заміною
Візьмемо $\alpha(x) = \dfrac{1}{P(x)}$. Тоді наша перша заміна вже матиме вигляд:
$y = \dfrac{z(x)}{P(x)}$
Проведемо другу заміну

$$z = u(x) + \beta(x)$$

де $\beta(x)$ - така функція, щоб коефіцієнт при u був рівний 0
$z' = u' + \beta'$
$\Rightarrow u' + \beta' = (u + \beta)^2 + \left(Q - \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)(u + \beta) + \dfrac{R}{\alpha}$
Виразимо u'
$u' = u^2 + u\left(2\beta + Q - \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right) + \beta^2 + \left(Q - \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)\beta + \dfrac{R}{\alpha} - \beta'$
$2\beta + Q - \dfrac{\alpha'}{\alpha} = 0$ згідно з заміною
$\beta^2 + \left(Q - \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)\beta + \dfrac{R}{\alpha} - \beta' = \tilde{Q}(x)$
І нарешті, візьмемо $\beta = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{\alpha'}{\alpha} - Q\right)$, де $\alpha = \dfrac{1}{P(x)}$
$\Rightarrow u' = u^2 + \tilde{Q}(x)$ - рівняння Рікатті в канонічному вигляді

Example 4.5.1 Звести до канонічного рівняння Рікатті $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{2y}{x} + \dfrac{3}{x^2}$
$P(x) = \dfrac{1}{x^2}, Q(x) = \dfrac{2}{x}, R(x) = \dfrac{3}{x^2}$

Заміна 1: $y = \dfrac{z(x)}{P(x)} = x^2 z \Rightarrow y' = x^2 z' + 2xz$
$\Rightarrow x^2 z' + 2xz = x^2 z^2 + 2xz + \dfrac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 z' = x^2 z^2 + \dfrac{3}{x^2}$
$\Rightarrow z' = z^2 + \dfrac{3}{x^4}$ - канонічне рівняння

4.6 Спеціальні рівняння Рікатті

Маємо таке рівняння

$$y' + Ay^2 = Bx^m$$

де $A, B, m \in \mathbb{R}$

Remark 4.6.1 При $m = 0$ маємо рівняння з відокремленними змінними
При $m = -2$ маємо квазіоднорідне рівняння, де $\sigma = -1$

Theorem 4.6.2 Спеціальне рівняння Рікатті є інтегрованим $\iff \dfrac{m}{2m+4} \in \mathbb{Z}$
Факт доволі складний

Розглянемо випадок, коли $\dfrac{m}{2m+4} \in \mathbb{Z}$
Зробимо заміну

$$y = \frac{z(x)}{x}$$

$\Rightarrow y' = \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2}$
$\Rightarrow \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2} + A\dfrac{z^2}{x^2} = Bx^m$
$\Rightarrow z'x - z + Az^2 = Bx^{m+2}$
Зробимо другу заміну

$$x^{m+2} = t$$

де t - невідома змінна
$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dz}{dt}(m+2)x^{m+1}$
$\Rightarrow x\dfrac{dz}{dx} = (m+2)\dfrac{dz}{dt}x^{m+2} = (m+2)t\dfrac{dz}{dt}$
$\Rightarrow (m+2)t\dfrac{dz}{dt} - z + Az^2 = Bt$
$t\dfrac{dz}{dt} - \dfrac{1}{m+2}z + \dfrac{A}{m+2}z^2 = \dfrac{Bt}{m+2}$
Отримали рівняння Рікатті вигляду
$t\dfrac{dz}{dt} + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t$
В залежності від ситуації виконаємо одну з двох замін

$$z(t) = \frac{t}{a + u(t)}, \alpha < -\frac{1}{2}$$

де $a = \dfrac{1+\alpha}{2}$
Або

$$z(t) = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{t}{u(t)}, \alpha > -\frac{1}{2}$$

Такі заміни робимо стільки разів, скільки потрібно, поки не отримуємо ще одне рівняння Рікатті
$u't - \dfrac{1}{2}u + Du^2 = Ht$
Зробимо останню заміну

$$u = v(t)\sqrt{t}$$

$\Rightarrow u' = v'\sqrt{t} + \dfrac{v\sqrt{t}}{2}$
$\Rightarrow u't\sqrt{t} + Dv^2t = Ht$
$v'\sqrt{t} = H - Dv^2$ - рівняння з відокремленими змінними

4.7 Диференціальні рівняння в симетричній формі

Маємо рівняння Пфаффа

$$M(x,y)\,dx = N(x,y)\,dy = 0$$

де $M, N\colon D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2, M, N \in C(D)$, а також
$|M(x,y)| + |N(x,y)| \not\equiv 0$

Definition 4.7.1 Крива $x = x(t), y = y(t)$, $t \in I$ є **розв'язком** заданого рівняння, якщо

$$\begin{aligned} x(t), y(t) \in C'(I) \\ \forall t \in I : ((x(t), y(t)) \in D \\ M(x(t)), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t) \equiv 0 \end{aligned}$$

Definition 4.7.2 Вираз $F(x,y,c) = 0$ задає **загальний розв'язок** заданого рівняння, якщо будь-який розв'язок кривої може бути представлений у такому вигляді

4.7.1 Рівняння в повних диференціалах

Definition 4.7.3 Рівняння Пфаффа називається **рівнянням в повних диференціалах**, якщо

$$\exists u(x,y) \in C'(D) : \frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

Тоді рівняння прийме такий вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = 0 \iff du = 0 \iff u(x,y) = c$$

Theorem 4.7.4 Критерій рівняння в повних диференціалах
$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ - в повних диференціалах $\iff \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ *Доведення див. в мат аналізі 3 семестр*

Example 4.7.5 Розв'язати рівняння $(x^2 + y)\,dx + (x + y^2)\,dy = 0$
Оскільки $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1$, то таке рівняння - в повних диференціалах
Отже, $\exists u(x,y) : \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$
$\Rightarrow u(x,y) = \displaystyle\int M(x,y)\,dx + \varphi(y) = \int (x^2 + y)\,dx + \varphi(y) =$
$= \dfrac{x^3}{3} + yx + \varphi(y)$
$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\displaystyle\int M(x,y)\,dx + \varphi(y)\right)$
$\Rightarrow x + y^2 = x + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \dfrac{y^3}{3}$
Остаточно $u(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + xy + \dfrac{y^3}{3} + C$

4.7.2 Інтегрувальний множник

Тепер розглянемо рівняння Пфаффа, але вже не в повних диференціалах
Проте завжди можна звести до повних диференціалах шляхом домноження на деяку неперервну функцію $\mu(x, y)$

Example 4.7.6 $y\,dx - x\,dy = 0$, не є рівняннях в повних диференціалах, тому що
$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1, \dfrac{\partial N}{\partial x} = -1$
Проте якщо рівняння домножити на $\mu(x, y) = \dfrac{1}{y^2}$, то тепер
$\dfrac{1}{y}\,dx - \dfrac{x}{y^2}\,dy = 0$
$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{1}{y^2}$

Definition 4.7.7 Функція $\mu(x, y)$ називається **інтегрувальним множником**, якщо при множенні на рівняння Пфаффа ми отримуємо рівняння в повних диференціалах

З'ясуємо, як це знайти:
$\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x} \iff \dfrac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\dfrac{\partial N}{\partial x}$
Рівняння справа й дасть відповідь на те, який множник нам треба

Часткові випадки:
1. $\mu = \mu(x)$
Тоді $\dfrac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\dfrac{\partial N}{\partial x} \iff \mu\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\dfrac{\partial N}{\partial x}$
$\iff \dfrac{\partial \mu}{\partial x}\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ Оскільки ліва функція лише залежить від x, то права частина рівняння водночас теж має лише залежати від x. Отже, $\mu(x)$ буде знайдено, інтегруючи це рівняння

2. $\mu = \mu(y)$
Аналогічним чином, не буду розписувати

Example 4.7.8 Розв'язати рівняння $(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0$
Маємо, що $\dfrac{\partial M}{\partial x} = 2y, \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$
Тоді $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y$
$\Rightarrow \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = 2 = \mu(x) \Rightarrow \exists \mu = \mu(x)$
$\Rightarrow \dfrac{\partial \mu}{\partial x}\dfrac{1}{\mu(x)} = 2 \Rightarrow \mu = e^{2x}$
Домножимо рівняння на інтегрувальний множник:
$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)\,dx + e^{2x}y\,dy = 0$
Тепер це - рівняння в повних диференціалах...

Рівняння Пфаффа також має множники $\mu = \mu(\omega(x, y))$ (наприклад, $\mu(x + y), \mu(xy), \mu(x^2 + y^2), \dots$), але то таке