$(X, \mathcal{F}, \lambda)$

$f = \frac{d\nu}{d\lambda}$

$\nu \ll \lambda$

$\nu(A) = \int_A f \, d\lambda$

$\mathcal{P} \xrightarrow{\text{καραθεοδωρή}} S$

$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c)$

$\mathcal{P} \Leftrightarrow$

$A, B \in \mathcal{P}$

$A \cap B \in \mathcal{P}$

$A \setminus B = \bigcup_i C_i, \ C_i \in \mathcal{P}$

$\nexists \int_a^b \mathcal{D}(x)\,dx$

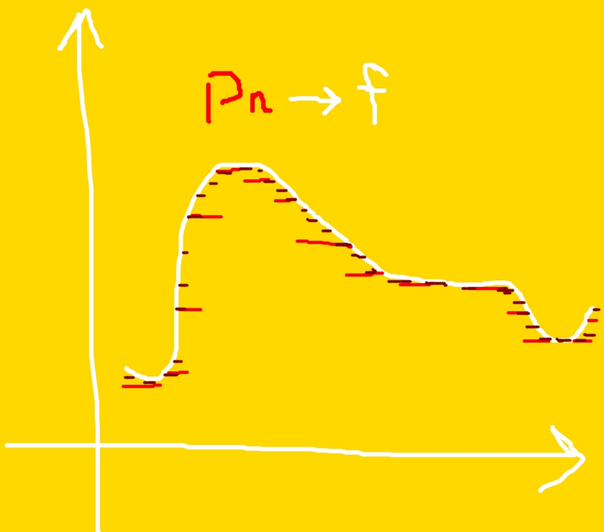
$f \in \mathcal{R}([a,b])$

$\Downarrow$

$f \in L([a,b]), \ \lambda = \text{Lebesgue}$

$\int_{[a,b]} \mathcal{D}(x)\, d\lambda(x) = 0$

Measure Theory



$$\int_A p \, d\lambda = \sum_i a_i \lambda(A_i \cap A)$$

$$\int_A \underset{\geq 0}{f} \, d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p \, d\lambda$$

$$\int_A f \, d\lambda = \int_A f_+ \, d\lambda - \int_A f_- \, d\lambda$$

$$L_p = \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \ \middle| \ \int_X |f|^p \, d\lambda < +\infty \right\}$$

$L_p / \sim$

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\lambda \right)^{1/p}$$

Зміст

1 Класи множин

1.1 Основні класи множин

Definition 1.1.1 Задано X – деяка множина та $\mathcal{K} \subset 2^X$ – клас підмножин.
Непорожній клас $\mathcal{K}$ називається **кільцем**, якщо

$$\forall A, B \in \mathcal{K} : A \cup B \in \mathcal{K}$$
$$\forall A, B \in \mathcal{K} : A \setminus B \in \mathcal{K}$$

Proposition 1.1.2 Властивості кільця
Задано X та $\mathcal{K}$ – кільце на цій множині. Тоді виконуються такі пункти:
1) $\emptyset \in \mathcal{K}$;
2) $\forall A, B \in \mathcal{K} : A \cap B \in \mathcal{K}$;
3) $\forall A_k \in \mathcal{K}, k = \overline{1, n} : \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}, \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості:

1) Оскільки $\mathcal{K}$ – непорожня, то існує елемент $A \in \mathcal{K}$. Зокрема $A \setminus A = \emptyset \in \mathcal{K}$;

2) $\forall A, B \in \mathcal{K} : A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. За умовою кільця, $A \setminus B \in \mathcal{K}$ та $A \in \mathcal{K}$, а тому $A \cap B \in \mathcal{K}$.

3) Перше випливає з означення кільця, а друге випливає з властивості 2).

Всі властивості доведені. $\blacksquare$

Definition 1.1.3 Задано X – деяка множина та $\mathcal{A} \subset 2^X$ – клас підмножин.
Непорожній клас $\mathcal{A}$ називається **алгеброю**, якщо

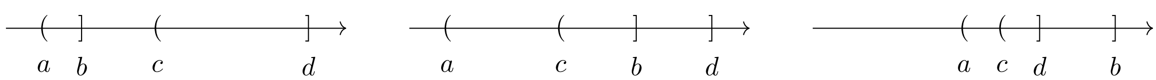
$$\mathcal{A} \text{ – кільце}$$
$$X \in \mathcal{A}$$

Definition 1.1.4 Задано X – деяка множина та $\mathcal{P}$ – клас підмножин.
Непорожній клас $\mathcal{P}$ назвемо **півкільцем**, якщо

$$\forall A, B \in \mathcal{P} : A \cap B \in \mathcal{P}$$
$$\forall A, B \in \mathcal{P} : A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i, \ C_i \in \mathcal{P}$$

Remark 1.1.5 $\emptyset \in \mathcal{P}$, тому що в силу непорожньості $A \in \mathcal{P}$, а тому за другою умовою, з одного боку, $A \setminus A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ при $C_i \in \mathcal{P}$; а з іншого боку, $A \setminus A = \emptyset$. Тому рівність виконується лише при $C_i = \emptyset \in \mathcal{P}$.

Example 1.1.6 Розглянемо $\mathcal{P}_1 = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ – клас підмножин $\mathbb{R}$. Воно утворює півкільце.
Нехай $(a, b] \in \mathcal{P}_1$ та $(c, d] \in \mathcal{P}_1$. Тоді звідси $(a, b] \cap (c, d]$ кілька опцій:
1) $(a, b] \cap (c, d] = \emptyset \in \mathcal{P}_1$, якщо ці напівінтервали не перетинаються;
2) $(a, b] \cap (c, d] = (c, b] \in \mathcal{P}_1$, якщо (не втрачаючи загальності) $a < c < b < d$;
3) $(a, b] \cap (c, d] = (c, d] \in \mathcal{P}_1$, якщо (не втрачаючи загальності) $(c, d] \subset (a, b]$.



Відповідно зліва направо: 1), 2), 3).

Далі розглянемо $(a, b] \setminus (c, d]$. Знову кілька опцій:
1) $(a, b] \setminus (c, d] = (a, b]$, якщо ці напівінтервали не перетинаються;
2) $(a, b] \setminus (c, d] = (a, c]$, якщо (не втрачаючи загальності) $a < c < b < d$;
3) $(a, b] \setminus (c, d] = (a, c] \sqcup (b, d]$, якщо (не втрачаючи загальності) $(c, d] \subset (a, b]$.
Усі вони розклалися не неперетинне об'єднання елементів з $\mathcal{P}_1$.
Отже, $\mathcal{P}_1$ – дійсно утворює півкільце.

Theorem 1.1.7 Задані $\mathcal{P}'$ та $\mathcal{P}''$ – два півкільця на відповідних множинах X_1, X_2. Визначимо $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}'' = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{P}', A_2 \in \mathcal{P}''\}$. Тоді $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$ буде півкільцем на множині $X_1 \times X_2$.

Proof.
Нехай $A, B \in \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$, тобто $A = A_1 \times A_2$ та $B = B_1 \times B_2$, де $A_1, B_1 \in \mathcal{P}'$ та $A_2, B_2 \in \mathcal{P}''$.
$A \cap B = (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$.
Причому $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{P}'$ та $A_2 \cap B_2 \in \mathcal{P}''$ за визначеннями півкілець. А за визначенням $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$, звідси $A \cap B \in \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$.
$A \setminus B = [(A_1 \setminus B_1) \times A_2] \sqcup [(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)]$ (вправа: довести рівність).
Зауважимо, що $A_1 \setminus B_1 = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ та $A_2 \setminus B_2 = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} D_k$, причому $C_i \in \mathcal{P}', D_k \in \mathcal{P}''$. Значить, рівність можна дописати:
$A \setminus B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} (C_i \times A_2) \sqcup \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} ((A_1 \cap B_1) \times D_k)$.
У нас записані елементи з $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$, а сама множина $A \setminus B$ записалася як неперетинне об'єднання елементів з $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$.
Висновок: $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$ задає півкільце на $X_1 \times X_2$. ■

Remark 1.1.8 Зрозуміло, що твердження працює для скінченного числа півкілець.

Example 1.1.9 Зокрема $\mathcal{P}_1$ – півкільце на $\mathbb{R}$. Визначимо нову множну $\mathcal{P}_d = \left\{ \prod\limits_{i=1}^{d} (a_i, b_i] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$.
Тоді $\mathcal{P}_d$ буде півкільцем множини $\mathbb{R}^d$, просто тому що $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_1$.

Remark 1.1.10 Будь-яке кільце $\mathcal{K}$ – автоматично півкільце.
Адже перша умова виконана за властивістю 2) кільця. А також за означенням, $A \setminus B = A \setminus B$, де $A \setminus B \in \mathcal{K}$ – тобто цей елемент розписали не неперетинне об'єднання з одного елемента з даного класу.

Definition 1.1.11 Задано X – деяка множина та $\sigma\mathcal{K} \subset 2^X$ – клас підмножин.
Непорожній клас $\sigma\mathcal{K}$ називається **σ-кільцем**, якщо

$$\forall A_n \in \sigma\mathcal{K}, n \geq 1 : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma\mathcal{K}$$
$$\forall A, B \in \sigma\mathcal{K} : A \setminus B \in \sigma\mathcal{K}$$

Proposition 1.1.12 Властивості σ-кільця
Задано X та $\sigma\mathcal{K}$ – σ-кільце на цій множині. Тоді виконуються такі пункти:
1) $\sigma\mathcal{K}$ – буде (просто) кільецм;
2) $\forall A_n \in \sigma\mathcal{K}, n \geq 1 : \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma\mathcal{K}$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості:

1) Візьмемо $A, B \in \sigma\mathcal{K}$, тоді звідси $A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \cup \cdots \in \sigma\mathcal{K}$.

2) $\forall A_n \in \sigma\mathcal{K}, n \geq 1 : \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \in \sigma\mathcal{K}$.

Всі властивості доведені. ■

Definition 1.1.13 Задано X – деяка множина та $\sigma\mathcal{A} \subset 2^X$ – клас підмножин.
Непорожній клас $\sigma\mathcal{A}$ називається **σ-алгеброю**, якщо

$$\sigma\mathcal{A} - \sigma\text{-кільце}$$
$$X \in \sigma\mathcal{A}$$

Definition 1.1.14 Задамо послідовність множин $\{A_n, n \geq 1\}$.
Вона буде називатися **зростаючою**, якщо $A_{n+1} \supset A_n$.
У такому випадку ми позначимо $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \overset{\text{def.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.
Вона буде називатися **спадною**, якщо $A_{n+1} \subset A_n$.
У такому випадку ми позначимо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \overset{\text{def.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.
Обидві послідовності множин будемо називати **монотонними**.

Definition 1.1.15 Задано X – деяка множина та $\mathcal{M} \subset 2^X$ – клас підмножин.
Непорожній клас m називається **монотонним**, якщо

$$\forall \{A_n \in \mathcal{M}, n \geq 1\} \text{ – монотонна} : \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

Theorem 1.1.16 Задано $\mathcal{H}$ – кільце та монотонний клас множин X. Тоді $\mathcal{H}$ – σ-кільце.

Proof.
Нехай $A_n \in \mathcal{H}, n \geq 1$. Розглянемо послідовність множин $\{B_n, n \geq 1\}$, що задається таким чином:
$B_1 = A_1$, $B_1 = A_1 \cup A_2$, $B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, ...
Зауважимо, що $\{B_n \overset{!}{\in} \mathcal{H}\}$ зростає, а в силу монотонності, звідси $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P}$.
Ну й якщо $A, B \in \mathcal{H}$, то за означенням кільце, $A \setminus B \in \mathcal{H}$.
Висновок: $\mathcal{H}$ – σ-кільце. ■

1.2 Породжені класи множин

Definition 1.2.1 Задано X – множина та $\mathcal{H}$ – непорожня множина.
Кільцем, породженим класом $\mathcal{H}$, називається така множина:

$$k(\mathcal{H}) \overset{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{K}_\alpha \text{ – кільце}}} \mathcal{K}_\alpha$$

σ**-кільцем, породженим класом** $\mathcal{H}$, називається така множина:

$$\sigma k(\mathcal{H}) \overset{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{(\sigma\mathcal{K})_\alpha \supset \mathcal{H} \\ (\sigma\mathcal{K})_\alpha \text{ – } \sigma\text{-кільце}}} (\sigma\mathcal{K})_\alpha$$

Алгеброю, породженим класом $\mathcal{H}$, називається така множина:

$$a(\mathcal{H}) \overset{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{A}_\alpha \text{ – алгебра}}} \mathcal{A}_\alpha$$

σ**-алгеброю, породженим класом** $\mathcal{H}$, називається така множина:

$$\sigma a(\mathcal{H}) \overset{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{(\sigma\mathcal{A})_\alpha \supset \mathcal{H} \\ (\sigma\mathcal{A})_\alpha \text{ – } \sigma\text{-алгебра}}} (\sigma\mathcal{A})_\alpha$$

Монотонним класом, породженим класом $\mathcal{H}$, називається така множина:

$$m(\mathcal{H}) \overset{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{M}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{M}_\alpha \text{ – монотонний клас}}} \mathcal{M}_\alpha$$

Remark 1.2.2 Я зосереджуся лише на породжених кільцях. Нижче будуть зазначені властивості породжених кілець – аналогічно ті властивості переписуються для інших породжених класів.

Remark 1.2.3 Зауважимо, що $k(\mathcal{H}) \neq \emptyset$. Оскільки $\mathcal{K}_\alpha$ – кільця, то тоді $\emptyset \in \mathcal{K}_\alpha$ при всіх α, а тому $\emptyset \in k(\mathcal{H})$.

Proposition 1.2.4 Властивості породженого кільця
Задано X – множина та $\mathcal{H}$ – непорожня множина. Тоді виконуються такі пункти:
1) $k(\mathcal{H})$ – дійсно, кільце;
2) $k(\mathcal{H}) \supset \mathcal{H}$;
3) Нехай $\mathcal{K}$ – якесь кільце, де $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$. Тоді звідси $\mathcal{K} \supset k(\mathcal{H})$.

Proof.
Доведемо виконання всіх пунктів:

1) Нехай $A, B \in k(\mathcal{H})$, тобто звідси $A, B \in \mathcal{K}_\alpha$ при всіх α. Оскільки $\mathcal{K}_\alpha$ – кільце при всіх α, то звідси $A \cup B \in \mathcal{K}_\alpha$ при всіх α. Тобто звідси $A \cup B \in k(\mathcal{H})$.
Аналогічно доводимо, що $A \setminus B \in k(\mathcal{H})$.

2) це випливає з того, що всі $\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H}$, а далі перетнути треба по α.

3) Маємо $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ – якесь кільце. Тоді $\mathcal{K}$ бере участь у перетинні всіх кілець в $k(\mathcal{H})$, просто за умовою такого кільця. Значить, $k(\mathcal{H}) = \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{K}_\alpha \text{ – кільце} \\ \mathcal{K}_\alpha \neq \mathcal{K}}} \mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$.

Всі властивості доведені. ■

Corollary 1.2.5 $k(\mathcal{H})$ – найменше кільце, що містить $\mathcal{H}$ – непорожній клас підмножин X.

Theorem 1.2.6 Задано $\mathcal{P}$ – півкільце. Тоді $k(\mathcal{P}) = \{A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k \mid A_n \in \mathcal{P}\}$.

Proof.
Для спрощення позначимо клас множин $\mathcal{L} = \{A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k \mid A_n \in \mathcal{P}\}$. Хочемо довести, що $k(\mathcal{P}) = \mathcal{L}$.
$\mathcal{L} \subset k(\mathcal{P})$.
Дійсно, якщо $D \in \mathcal{D}$, то звідси $D = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$, де всі $A_n \in \mathcal{P}$. Але $\mathcal{P} \subset k(\mathcal{P})$, звідси, за означенням кільця, $D \in k(\mathcal{H})$.
$\mathcal{L} \supset k(\mathcal{P})$.
Зрозуміло цілком, що $\mathcal{L} \supset \mathcal{P}$. Нам треба довести, що $\mathcal{L}$ буде кільцем – і тоді звідси, за властивістю 3) породжених кілець, $\mathcal{L} \supset k(\mathcal{P})$.
Нехай $A, B \in \mathcal{L}$, тобто звідси $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^n C_i$, $B = \bigsqcup\limits_{k=1}^m D_k$ та всі $C_i, D_k \in \mathcal{P}$.
$A \sqcup B \in \mathcal{L}$ (це якщо $A \cap B = \emptyset$, а тому звідси кожний $C_i \cap D_k = \emptyset$). Дійсно, $A \sqcup B = C_1 \sqcup \dots \sqcup D_m$, всі ці елементи з $\mathcal{P}$.
$A \cap B \in \mathcal{L}$. Дійсно, $A \cap B = \bigsqcup\limits_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le m}} (C_i \cap D_k)$, причому кожний $C_i \cap D_k \in \mathcal{P}$ за означенням півкільця.
$A \setminus B \in \mathcal{L}$ (перша вимога кільця). Спочатку зауважимо, що $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{i=1}^n (C_i \setminus B)$, а далі кожний $C_i \setminus B = \bigcap\limits_{k=1}^m (C_i \setminus D_k)$. Але оскільки $C_i, D_k \in \mathcal{P}$, то тоді $C_i \setminus D_k = \bigsqcup\limits_{r=1}^{s_{ik}} G_r$ та кожний $G_r \in \mathcal{P}$. Звідси випливає $C_i \setminus D_k \in \mathcal{L}$, а тому далі $C_i \setminus B \in \mathcal{L}$ як перетин, а після $A \setminus B \in \mathcal{L}$ як диз'юнктивне об'єднання.
$A \cup B \in \mathcal{L}$ (друга вимога кільця). Дійсно, розпишемо $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$.
Отже, нарешті довели, що $\mathcal{L}$ утворює кільце, що завершує доведення. ■

Example 1.2.7 Зокрема $k(\mathcal{P}_1) = \left\{ \bigsqcup\limits_{k=1}^n (a_k, b_k] \mid (a,k,b_k] \subset \mathbb{R} \right\}$. Аналогічно визначається $k(\mathcal{P}_d)$.

Theorem 1.2.8 Задано $\mathcal{K}$ – кільце. Тоді $m(\mathcal{K}) = \sigma k(\mathcal{K})$.

Proof.
$m(\mathcal{K}) \subset \sigma k(\mathcal{K})$.
Дійсно, $\sigma k(\mathcal{K}) \supset \mathcal{K}$, за властивістю породжених σ-кілець. Також $\sigma k(\mathcal{K})$ буде монотонним класом, тому що під $\lim\limits_{n \to \infty} A_n, A_n \in \mathcal{K}$, ми маємо на увазі зліченне об'єдання або перетин, що допустимо. Звідси випливає, що $\sigma k(\mathcal{K}) \supset m(\mathcal{K})$.

$m(\mathcal{K}) \supset \sigma k(\mathcal{K})$.
Маємо $m(\mathcal{K}) \supset \mathcal{K}$, за властивістю породжених монотонних класів. Нам треба довести, що $m(\mathcal{K})$ буде σ-кільцем – і тоді звідси $m(\mathcal{K}) \supset \sigma k(\mathcal{K})$. А щоб довести, що $m(\mathcal{K})$ буде σ-кільцем, достатньо за **Th. 1.1.16** довести, що $m(\mathcal{K})$ – просто кільце.
Нехай $A \in m(\mathcal{K})$. Розглянемо клас множин $\mathcal{L}(A) = \{B \subset X \mid A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in m(\mathcal{K})\}$. Покажемо, що це – монотонний клас.

Нехай $C_n \in \mathcal{L}(A)$, причому C_n зростає. Позначимо $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n = C$. Тоді

$A \cup C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A \cup C_n)$, причому $(A \cup C_n) \in m(\mathcal{K})$ (за визначенням $\mathcal{L}(A)$), а також $(A \cup C_n)$ монотонно зростає до $(A \cup C)$, звідси $A \cup C \in m(\mathcal{K})$.
$A \setminus C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A \setminus C_n)$, причому $A \setminus C_n \in m(\mathcal{K})$ (за визначенням $\mathcal{L}(A)$), а також $(A \setminus C_n)$ монотонно спадає до $(A \setminus C)$, звідси $A \setminus C \in m(\mathcal{K})$.
$C \setminus A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus A)$, причому $C_n \setminus A \in m(\mathcal{K})$ (за визначенням $\mathcal{L}(A)$), а також $(A \setminus C_n)$ монотонно зростає до $(C \setminus A)$, звідси $C \setminus A \in m(\mathcal{K})$.
Із цих трьох випливає, що $C \in \mathcal{L}(A)$. Цілком аналогічно доводиться, що якщо $C_n \in \mathcal{L}(A)$ та C_n спадає, то $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{L}(A)$ (тут $A \in \mathcal{K}$!).
Нехай $A \in \mathcal{K}$. Оскільки $\mathcal{K}$ – це кільце, то для кожної $B \in \mathcal{K}$ отримаємо $A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{K}$, а звідси $A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in m(\mathcal{K})$. Із цього випливає, що $B \in \mathcal{L}(A)$. Тобто із цього випливає, що для фіксованого $A \in \mathcal{K}$ маємо $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(A)$. Але оскільки $\mathcal{L}(A)$ – монотонний, то $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}(A)$.
Отже, для фіксованого $A \in \mathcal{K}$ і для будь-якої множини $B \in m(\mathcal{K})$, маємо $B \in \mathcal{L}(A)$, тобто $A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in m(\mathcal{K})$. Але конкретно цей запис означає, що $A \in \mathcal{L}(B)$. Тобто $A \in \mathcal{K} \implies A \in \mathcal{L}(B)$, а тому звідси $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(B)$. Аналогічно отримаємо $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}(B)$ (тут $A \in m(\mathcal{K})$! Важлива різниця!).
Тепер нехай $A \in m(\mathcal{K})$, тоді $A \in \mathcal{L}(B)$. Це означає, що $A \cup B, A \setminus B \in m(\mathcal{K})$. Дана штука виконується для будь-яких $A, B \in m(\mathcal{K})$, що й доводить означення кільця. ■

1.3 Борельові множини

Definition 1.3.1 Задано (X, ρ) – метричний простір та $\mathcal{G}$ – набір усіх відкритих підмножин X. **Борельовою σ-алгеброю** в X називається наступна σ-алгебра:

$$\mathcal{B}(X) \overset{\text{def.}}{=} \sigma a(\mathcal{G})$$

Тобто ми взяли клас відкритих підмножин в Y та породили σ-алгебру.
Всі множини з $\mathcal{B}(X)$ називаються **борельовими**.

Remark 1.3.2 Переважно будемо користуватися стандартною метрикою, де це можливо.

Example 1.3.3 Розглянемо кілька прикладів борельових множин:
1) Якщо U – відкрита, то U – борельова.
Дійсно, U – відкрита, тобто $U \in \mathcal{G}$, але звідси $U \in \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(X)$ за властивістю породжених σ-алгебр.

2) Якщо V – замкнена, то U – борельова.
Дійсно, V – замкнена, тому $X \setminus V$ – відкрита. Розпишемо $V = X \setminus (X \setminus V)$. У нас множина $X \setminus V$ уже борельова за 1). Також X – відкрита множина, а тому знову борельова. Значить, $X, X \setminus V \in \sigma a(\mathcal{G}) \implies X \setminus (X \setminus V) = V \in \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(X)$ – борельова.

3. Одноточкова множина $\{x\}$ – борельова.
Дійсно, $\{x\}$ – замкнена множина, а тому за 2), уже борельова.

4. Скінченні, зліченні множини – всі вони борельові.
Усі ці множини отримуються через одноточкові множин, а далі 3).

Theorem 1.3.4 Для півкільця $\mathcal{P}_d$ підмножин $\mathbb{R}^d$ виконується $\sigma k(\mathcal{P}_d) = \sigma a(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Proof.
$\sigma k(\mathcal{P}_d) = \sigma a(\mathcal{P}_d)$.
Дійсно, $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \mathcal{P}_d$, але σ-алгебра уже є σ-кільцем, тому звідси $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \sigma k(\mathcal{P}_d)$.
Далі $\sigma k(\mathcal{P}) \supset \mathcal{P}_d$, залишилося довести, що $\sigma k(\mathcal{P})$ утворює σ-алгебру – і тоді $\sigma k(\mathcal{P}_d) \supset \sigma a(\mathcal{P}_d)$.
Для цього зауважимо, що $\mathbb{R}^d = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n]^d$, де всі $(-n, n]^d \in k(\mathcal{P}_d)$, а тому звідси $\mathbb{R}^d \in k(\mathcal{P}_d)$.

$\sigma a(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
Спочатку покажемо, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \sigma a(\mathcal{P}_d)$. Щоб це довести, необхідно довести, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \mathcal{P}_d$. А далі, зважаючи на той факт, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ утворює σ-алгебру, доведемо, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \sigma a(\mathcal{P}_d)$.
Нехай $A \in \mathcal{P}_d$, тобто $A = \displaystyle\prod_{i=1}^{d} (a_i, b_i]$. Зауважимо, що $(a_i, b_i] = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a_i, b_i + \frac{1}{n}\right)$. Далі
$$A = \prod_{i=1}^{d} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a_i, b_i + \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{d} \left(a_i, b_i + \frac{1}{n}\right).$$
Декартів добуток відкритих множин – відкрита, а кожна відкрита – уже борельова. А оскільки там σ-алгебра, то допускається зліченний перетин, звідси $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Отже, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \mathcal{P}_d$.
Нарешті, покажемо, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma a(\mathcal{P}_d)$. Щоб це довести, треба довести, що $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \mathcal{G}$, де $\mathcal{G}$ – всі відкриті підмножини $\mathbb{R}^d$. Після цього ми отримуємо $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
Отже, нехай $U \in \mathcal{G}$, тобто нехай U – відкрита множина. Запишемо її таким чином:
$$U = \bigcup_{\substack{\prod_{i=1}^{d} (p_i, q_i] \subset U \\ p_i, q_i \in \mathbb{Q}}} \prod_{i=1}^{d} (p_i, q_i].$$
Якщо $\vec{x}$ лежить в цьому об'єднанні, то тоді автоматично $\vec{x} \in U$.
Якщо $\vec{x} \in U$, то вона внутрішня, тож існує куля $B(\vec{x}, \varepsilon) \subset U$. А там $\forall \vec{y} : \|\vec{x} - \vec{y}\| < \varepsilon$. Тобто звідси $|x_i - y_i| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \implies y_i - \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{d}} < x_i < y_i + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{d}}$. Між кожним з цих нерівностей можна знайти раціональні числа $p_i, q_i \in \mathbb{Q}$, тоді звідси $p_i < x_i < q_i$. Звідси $\vec{x} \in \displaystyle\prod_{i=1}^{d} (p_i, q_i]$. Але також важливо зауважити, що $\displaystyle\prod_{i=1}^{d} (p_i, q_i] \subset U$. Отже, $\vec{x}$ лежить в цьому об'єднанні.
Множина U записалась як зліченне об'єднання елементів з $\mathcal{P}_d \subset \sigma a(\mathcal{P}_d$. Отже, звідси $U \in \sigma a(\mathcal{P}_d)$.
Отже, $\mathcal{G} \subset \sigma a(\mathcal{P}_d)$. ■

2 Міри

2.1 Основні функції множин

Definition 2.1.1 Задано X – деяка множина та $\mathcal{H} \subset 2^X$ – клас підмножин.
Функцією множин називатимемо відображення $f\colon \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$. Ми будемо вважати надалі, що $-\infty$ неможливий.

Definition 2.1.2 Задано функцію множин f на $\mathcal{H}$.
Функція множин f називається **невід'ємною**, якщо

$$\forall A \in \mathcal{H} : f(A) \geq 0$$

Функція множин f називається **адитивною**, якщо

$$\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{H}, \text{причому } \bigsqcup_{n=1}^{k} A_n \in \mathcal{H} : f\left(\bigsqcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} f(A_n)$$

Функція множин f називається **σ-адитивною**, якщо

$$\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}, \text{причому } \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H} : f\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n)$$

Функція множин f називається **напівадитивною**, якщо

$$\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{H}, \text{причому } \bigcup_{n=1}^{k} A_n \in \mathcal{H} : f\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{k} f(A_n)$$

Функція множин f називається **σ-напівадитивною**, якщо

$$\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}, \text{причому } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H} : f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n)$$

Функція множин f називається **скінченною**, якщо

$$\forall A \in \mathcal{H} : f(A) < +\infty$$

Функція множин f називається **σ-скінченною**, якщо

$$\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H} : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A,\ f(A_n) < +\infty$$

Функція множин f називається **монотонною**, якщо

$$\forall A, B \in \mathcal{H} : A \subset B \implies f(A) \leq f(B)$$

Remark 2.1.3 Домовленність: ми не будемо далі розглядати функції множин f, для яких $f \equiv +\infty$. Це означає, що в кожній функції множин f буде існувати множина $A \in \mathcal{H}$, для якої $f(A) < +\infty$.

Remark 2.1.4 Зрозуміло, що якщо функція множин скінченна, то вона автоматично σ-скінченна.

2.2 Означення міри

Definition 2.2.1 Задано $\mathcal{P}$ – півкільце.
Мірою ми називатимемо функцію множин $\lambda\colon \mathcal{P} \to [0, +\infty]$, де

$$\lambda \text{ – невід'ємною та } \sigma\text{-адитивна.}$$

Proposition 2.2.2 Властивості мір
Задано λ – міра на півкільці $\mathcal{P}$. Тоді виконуються такі пункти:

1) $\lambda(\emptyset) = 0$;

2) λ – адитивна;
3) λ – монотонна;
4) λ – σ-напівадитивна;
5) $\forall A \in \mathcal{P}, \forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n : \lambda(A) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

Proof.
Доведемо виконання всіх пунктів:

1) Тут на допомогу приходить узгодження в підпункті вище. У нас існує $A \in \mathcal{P}$, для якої $\lambda(A) < +\infty$. Розпишемо $A = A \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup \dots$, причому $\emptyset \in \mathcal{P}$. Звідси, за σ-адитивністю, $\lambda(A) = \lambda(A) + \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset) + \dots$ Але оскільки $\lambda(A) < +\infty$, то ряд збіжний, а для рівності треба вимагати $\lambda(\emptyset) = 0$.

2) Нехай $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{P}$, причому $\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n \in \mathcal{P}$. Тоді за σ-адитивністю міри та за властивістю 1),

$$\lambda\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lambda(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup \dots) = \lambda(A_1) + \dots + \lambda(A_n) + \lambda(\emptyset) + \dots = \sum_{n=1}^{k} \lambda(A_n).$$

3) Нехай $A, B \in \mathcal{P}$ таким чином, що $A \subset B$. Тоді звідси $B = (B \setminus A) \sqcup A$. На півкільці $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ при $C_i \in \mathcal{P}$. Отже, звідси $B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_i \sqcup A$, а за властивістю 2) та невід'ємності міри, маємо

$$\lambda(B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(C_i) + \lambda(A) \geq \lambda(A).$$

4) Нехай $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}$, причому $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P}$. Ми розглянемо $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_1 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$ – перейшли до системи неперетинних множин. Зауважимо, що $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P}$ (але при цьому неправильно казати, що $B_n \in \mathcal{P}$, тому юзаємо σ-адитивність!). Всі $A_n \in k(\mathcal{P})$, а тому звідси всі $B_n \in k(\mathcal{P})$, але тоді звідси $B_n = \bigsqcup\limits_{i=1}^{i_n} C_{in}$ при $C_{in} \in \mathcal{P}$. Також зауважимо, що $A_n \setminus B_n \in k(\mathcal{P})$, а тому звідси $A_n \setminus B_n = \bigsqcup\limits_{j=1}^{j_n} D_{jn}$ при $D_{jn} \in \mathcal{P}$.

Разом уже маємо $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{i=1}^{i_n} C_{in} \in \mathcal{P}$, причому всі $C_{in} \in \mathcal{P}$, тому скористаємось σ-адитивністю:

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}).$$

Водночас $A_n = A_n \setminus B_n \sqcup B_n = \bigsqcup\limits_{j=1}^{j_n} D_{jn} \sqcup \bigsqcup\limits_{i=1}^{i_n} C_{in} \in \mathcal{P}$, причому всі $C_{in}, D_{jn} \in \mathcal{P}$ – дійсно неперетинні всі між собою. Тому можна скористатися σ-адитивністю:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{j_n} \lambda(D_{jn}) + \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

5) Нехай $A \in \mathcal{P}$, а також задано покриття $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, де $A_n \in \mathcal{P}$. Зауважимо, що $A = A \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$, де $A \in \mathcal{P}$, а також $A \cap A_n \in \mathcal{P}$ за означенням півкільця. Тоді за 4),

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

До речі, властивість 5) – це певне узагальнення властивості 4), тобто σ-напівадитивності.

Всі властивості доведені. ■

Remark 2.2.3 Якби λ була невід'ємною та просто адитивною, то властивості 1),3),4),5) також би виконувалися, тільки там скінченна кількість замість зліченної.

Corollary 2.2.4 Якщо λ задана на кільці $\mathcal{K}$, то $\forall A, B \in \mathcal{K} : A \subset B : \lambda(A \setminus B) - \lambda(A) - \lambda(B)$.
Вказівка: $A \sqcup (B \setminus A) = B$, *у цьому випадку* $B \setminus A \in \mathcal{K}$, *тому все легітимно.*

Theorem 2.2.5 Неперервність міри знизу
Задано λ – міра уже на кільці $\mathcal{K}$. Нехай задана зростаюча послідовність $\{A_n \in \mathcal{K}, n \geq 1\}$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{K}$. Тоді $\lambda\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(A_n)$.

Proof.
Розглянемо $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ B_3 = A_3 \setminus A_2, \dots$ – система неперетинних множин в силу зростання $\{A_n\}$. Зауважимо, що всі $B_n \in \mathcal{K}$, а також $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$. Тоді

$$\lambda\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lambda\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{j} \lambda(B_n) = \lim_{j\to\infty} (\lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1) + \lambda(A_3) - \lambda(A_2) + \dots + \lambda(A_j) - \lambda(A_{j-1})) = \lim_{j\to\infty} \lambda(A_j).$$

Мабуть, окремо зауважу, що в сумі я скористався наслідком вище. ■

Theorem 2.2.6 Неперервність міри зверху
Задано λ – міра уже на кільці $\mathcal{K}$. Нехай спадна зростаюча послідовність $\{A_n \in \mathcal{K}, n \geq 1\}$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{K}$, а також $\lambda(A_1) < +\infty$! Тоді $\lambda\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(A_n)$.

Proof.
Позначимо $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ та розглянемо послідовність $\{C_n \in \mathcal{K}, n \geq 1\}$ як $C_n = A_1 \setminus A_n$. Тепер послідовність зростає, при цьому $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n = A_1 \setminus A \in \mathcal{K}$. Тоді за неперервністю міри знизу,

$$\lambda(A_1 \setminus A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_1 \setminus A_n).$$

Скорситавшись зауваженням вище, а також фактом, що $\lambda(A_1) < +\infty$, маємо

$$\lambda(A_1) - \lambda(A) = \lambda(A_1) - \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) \implies \lambda(A) = \lambda\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n).$$ ■

Example 2.2.7 Наведу приклад, де умова $\lambda(A_1) < +\infty$ є дуже важливою.
Розглянемо міру $\lambda(A) = \mathrm{card}(A \cap \mathbb{Z})$ на $2^{\mathbb{R}}$. Далі розглянемо спадну послідовність $\{[n, +\infty), n \geq 1\}$, причому в цьому випадку $\lambda([1, +\infty)) = \mathrm{card}\,\mathbb{N} = +\infty$. Тоді

$$\lambda\left(\lim_{n\to\infty} [n, +\infty)\right) = \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty)\right) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda([n, +\infty)) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}) = +\infty.$$

Отже, $\lambda\left(\lim\limits_{n\to\infty} [n, +\infty)\right) \neq \lim\limits_{n\to\infty} \lambda([n, +\infty))$ у даному випадку.

2.3 Про міру Жордана

Із курсу математичного аналізу відомо, що з себе представляє міра Жордана та клас вимірних множин $\mathcal{K}_d$. Даний контент можна подивитися в іншому пдф більш детально. Однак я зазначу, що міра Жордана m – ще не міра в сенсі означення, що було задано вище. Нам бракує лише σ-адитивності. Це питання розв'яжеться згодом.

Lemma 2.3.1 Нехай $A \in \mathcal{K}_d$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists F_\varepsilon, U_\varepsilon \in \mathcal{K}_d$ – відповідно замкнена та відкрита множина: $\begin{cases} m(A) - m(F_\varepsilon) < \varepsilon \\ m(U_\varepsilon) - m(A) < \varepsilon \end{cases}$. Причому до всього цього $F_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon$.
Тобто вимірну за Жорданом множину можна наблизити замкненим всередині множиною та відкритою зовні множиною.

Proof.
I. *Існування замкненої множини.*
A – вимірна за Жорданом, тоді $m(A) = \sup\limits_{n\geq 0} m(F_{(n)})$, тоді існує N, для якого $m(F_{(N)}) > m(A) - \varepsilon$. Покладемо $F_\varepsilon = F_{(N)} \subset A$. Тоді звідси миттєво $m(A) - m(F_\varepsilon) < \varepsilon$. Ясно, що F_ε вимірна за Жорданом.

II. *Існування відкритої множини.*
Знову A вимірна за Жорданом, то $m(A) = \inf\limits_{n\geq 0} m(F^{(n)})$, тоді існує $\tilde{N}$, для якого $m(F^{(\tilde{N})}) < m(A)+\dfrac{\varepsilon}{2}$.
У нас зараз $F^{(\tilde{N})} \supset A$, але поки що замкнена множина.
Згадаємо, що $F^{(\tilde{N})}$ складається зі скінченного об'єднання брусів вигляду $R = \prod\limits_{i=1}^{d} \left[\dfrac{k_i}{2^{\tilde{N}}}, \dfrac{k_i+1}{2^{\tilde{N}}}\right]$.
Нехай $\delta > 0$ та замінимо замкнені бруси R на відкриті бруси $R(\delta) = \prod\limits_{i=1}^{d} \left(\dfrac{k_i}{2^{\tilde{N}}} - \delta, \dfrac{k_i+1}{2^{\tilde{N}}} + \delta\right)$.
Зрозуміло, що $R(\delta) \supset R$, а тому звідси $F^{(\tilde{N})}(\delta) \supset F^{(\tilde{N})}$, де ось $F^{(\tilde{N})}(\delta)$ – об'єднання відкритих брусів. Оскільки m – монотонна міра, то $m(F^{(\tilde{N})}) \leq m(F^{(\tilde{N})}(\delta))$. Звідси маємо наступне:
$$m(F^{(\tilde{N})}) \leq m(F^{(\tilde{N})}(\delta)) \overset{m \text{ – напівадитивна}}{\leq} \sum m(R(\delta)) = \sum \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{k_i+1}{2^{\tilde{N}}} + \delta - \left(\frac{k_i}{2^{\tilde{N}}} - \delta\right)\right) =$$
$$= \sum \left(\frac{1}{2^{\tilde{N}}} + 2\delta\right)^d \xrightarrow{\delta\to 0} \sum \left(\frac{1}{2^{\tilde{N}}}\right)^d = \sum \prod_{i=1}^{d} \left[\frac{k_i+1}{2^{\tilde{N}}} - \frac{k_i}{2^{\tilde{N}}}\right] = \sum m(R) = m(F^{(\tilde{N})}).$$
Значить, звідси існує $\delta_1 > 0$, для якого $m(F^{(\tilde{N})}(\delta_1)) - m(F^{(\tilde{N})}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Нарешті, покладемо $U_\varepsilon = F^{(\tilde{N})}(\delta_1) \supset F^{(\tilde{N})} \supset A$. Ясно, що це відкрита множина (як об'єднання відкритих) та вимірна за Жорданом. Тоді звідси
$m(U_\varepsilon) - m(A) = (m(U_\varepsilon) - m(F^{(\tilde{N})})) + (m(F^{(\tilde{N})}) - m(A)) < \varepsilon$. ■

Theorem 2.3.2 Міра Жордана m – міра (в сенсі означення вище) на кільці $\mathcal{K}_d$.

Proof.
Уже відомо, що m – невід'ємна функція множин, тому залишається σ-адитивність.
Нехай $A_n \in \mathcal{K}_d$ – неперетинні, причому $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{K}_d$. Ми хочемо довести $m(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.
Зауважимо, що $\bigsqcup\limits_{n=1}^{j} A_n \subset A$, тоді за монотонністю та скінченною адитивністю міри Жордана, $\sum\limits_{n=1}^{j} m(A_n) \leq m(A)$. Якщо спрямуємо $j \to \infty$, то отримаємо $m(A) \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.
Далі застосуємо щойно доведену лему кілька разів. Нехай $\varepsilon > 0$. Для множини A оберемо замкнену вимірну за Жорданом множину $F_\varepsilon \subset A$, для якої $m(A) - m(F_\varepsilon) < \varepsilon$. Для кожної множини A_n оберемо відкриту вимірну за Жорданом множину $U_{\frac{\varepsilon}{2^n}} \supset A_n$, для якої $m(U_{\frac{\varepsilon}{2^n}}) - m(A) < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$.
Зауважимо, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_{\frac{\varepsilon}{2^n}} \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A \supset F_\varepsilon$, тобто для F_ε у нас є відкрите покриття $\left\{U_{\frac{\varepsilon}{2^n}}, n \geq 1\right\}$.
Оскільки F_ε замкнена та обмежена, то вона є компактом. Значить, за лемою Гейне-Бореля, ми можемо відокремити скінченне підпокриття $\{U_1, \dots, U_k\}$, тобто $\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i \supset F_\varepsilon$. Таким чином,
$$m(F_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{k} m(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \left(m(A) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A) + \varepsilon.$$
Отже, $m(A) < \varepsilon + m(F_\varepsilon) < \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A) + 2\varepsilon$, а тому при $\varepsilon \to 0+0$ отримаємо $m(A) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_n)$. ■

Corollary 2.3.3 Розглянемо півкільце $\mathcal{P}_d = \left\{\prod\limits_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\right\}$, а на ній функцію множин

$\lambda_d\left(\prod_{k=1}^{d}(a_k,b_k]\right)=\prod_{k=1}^{d}(b_k-a_k)$. Тоді λ_d задає міру на $\mathcal{P}_d$.

Proof.
Дійсно, $\mathcal{P}_d\subset\mathcal{K}_d$, тому звідси $\lambda_d(A)=m(A)$. ■

2.4 Зовнішні міри

Definition 2.4.1 Задано X – деяка множина та λ^* – функція множин на 2^X.
Функція множин $\lambda^*\colon[0,+\infty]$ називається **зовнішньою мірою**, якщо

$$\lambda^*(\emptyset)=0$$

$$\forall A\subset X:\forall A_1,A_2,\dots\subset X: A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n:\lambda^*(A)\le\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)$$

Друга умова – це узагальнення σ-напівадитивності.

Definition 2.4.2 Задано X – деяка множина та λ^* – функція множин на 2^X.
Функція множин $\lambda^*\colon[0,+\infty]$ називається **зовнішньою мірою**, якщо

$$\lambda^*(\emptyset)=0$$

$$\lambda^* \text{ – монотонна та } \sigma\text{-напівадитивна}$$

Proposition 2.4.3 Обидва означення еквівалентні.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: перше означення.
Нехай $A,B\subset X$ так, що $A\subset B$. Тоді з другої умови означення випливає, що $\lambda^*(A)\le\lambda^*(B)$, якщо розписати $A\subset B\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\dots$.
Нехай $A_1,A_2,\dots\subset X$, але тоді, формально кажучи, $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. Тоді за другою умовою означення, $\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: друге означення.
Нехай $A_1,A_2,\dots\subset X$ та $A\subset X$ так, щоб $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. Насправді кажучи, бажана нерівність доводиться аналогічним чином, як це було при доведенні властивості 5) міри. Але (конкретно в цьому випадку) є доведення дещо простіше.
Оскільки $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, то із другої умови та третьої умови означення випливає миттєво, що $\lambda^*(A)\le\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)$.
Чому ми не могли так само простіше зробити в 5) властивості, залишаю як вправу. ■

Remark 2.4.4 Поняття "зовнішня міра"не пов'язана з тим, що це – міра, із властивістю зовнішності. Це просто вже такий сталий термін.

Example 2.4.5 Розглянемо $\lambda^*(A)=\begin{cases}0, & A=\emptyset\\ 1, & \text{інакше}\end{cases}$. Вона – зовнішня міра (неважко довести).
Водночас вона не є мірою, тому що, обравши $A,B\neq\emptyset$ – неперетинні, порушиться адитивність.

Remark 2.4.6 Зрозуміло, що λ^* також просто напівадитивна (у загальному сенсі теж).

Definition 2.4.7 Задано λ – міра на півкільці $\mathcal{P}$.
Зовнішньою мірою, породженою мірою λ, називається функція множин λ^*, яка визначається таким правилом:

$$\lambda^*(A)=\begin{cases}\inf\limits_{\substack{A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\\ A_n\in\mathcal{P}}}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n), & \text{якщо існує хоча б одне зліченне покриття множини } A \text{ елементами з } \mathcal{P}\\ +\infty, & \text{інакше}\end{cases}$$

Proposition 2.4.8 Задано λ – міра на півкільці $\mathcal{P}$. Маємо λ^* – зовнішня міра, породжена мірою λ. Тоді λ^* – справді зовнішня міра (за означенням).

Proof.
Зауважимо, що λ^* визначена на 2^X. Також зазначимо, що $\lambda^*(A) \geq 0$, просто тому що λ – міра, що є невід'ємною.

$\lambda^*(\emptyset) = \emptyset$.

Зауважимо, що $\emptyset \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset$. де $\emptyset \in \mathcal{P}$. Звідси випливає, що $\lambda^*(\emptyset) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\emptyset) = 0 \implies \lambda^*(\emptyset) = 0$.

Нехай тепер $A \subset X$, а також $A_1, A_2, \dots \subset X$, причому $A \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Треба $\lambda^*(A) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$.
Нехай існує A_N, для якого не знайдеться покриття елементами з $\mathcal{P}$. Тоді $\lambda^*(A_N) = +\infty$, а тому $\lambda^*(A) \leq +\infty$ автоматично. Тому надалі припускається, що для всіх A_n є покриття.
Нехай $\varepsilon > 0$, тоді для A_n існує покриття $A_n \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn}$, для якого $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_{kn}) < \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$.
Зауважимо, що $A \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn}$, тобто є таке покриття. Тоді звідси

$\lambda^*(A) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_{kn}) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \varepsilon$.
Якщо далі $\varepsilon \to 0+0$, то отримаємо бажану оцінку:
$\lambda^*(A) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$. ■

Remark 2.4.9 В означенні породженої зовнішньої міри λ^* можна обмежитися наборами неперетинних множин із півкільця $\mathcal{P}$, об'єднання яких містить множину A. Тоді при цьому $\lambda^*(A)$ не зміниться.

Proof.
Справді, хочемо знайти $\lambda^*(A)$. Нехай $\left\{A \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{P}\right\} = \mathcal{C}$ – множина всіх можливих покриття A, а також $\left\{A \subset \displaystyle\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{P}\right\} = \mathcal{C}_\sqcup$ – множина всіх покриття A неперетинним чином.
Зауважимо, що $\mathcal{C}_\sqcup \subset \mathcal{C}$. Звідси випливає, що $\displaystyle\inf_{\mathcal{C}_\sqcup} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \geq \inf_{\mathcal{C}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \lambda^*(A)$.
Із іншого боку, нехай $A \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, тоді запшемо $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$ – система неперетинних множин. Аналогічно (як це було під час доведення властивості 4) міри) отримаємо $B_n = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{i_n} C_{in}$ при $C_{in} \in \mathcal{P}$. Отримали $A \subset \displaystyle\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{i=1}^{i_n} C_{in}$. Звідси

$\displaystyle\inf_{\mathcal{C}_\sqcup} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) \overset{?}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \lambda^*(A)$.

Нерівність отрималася наступним чином: у нас $A_n \supset B_n \displaystyle\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_{in}$, а тому звідси випливає, що

$A_n = B_n = \sqcup(A_n \setminus B_n) = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{i_n} C_{in} \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{j_n} D_{jn}$ при $D_{jn} \in \mathcal{P}$, але тоді

$\lambda(A_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) + \sum_{j=1}^{j_n} \lambda(D_{jn}) \geq \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in})$. ■

2.5 Вимірність за Каратеодорі

Definition 2.5.1 Задано λ^* – зовнішня міра.
Множина $A \subset X$ називається **вимірною за Каратеодорі відносно** λ^*, якщо

$$\forall E \subset X : \lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A})$$

Позначення: $\mathcal{S}$ – клас усіх вимірних множин за Каратеодорі (відносно зовнішньої міри).

Remark 2.5.2 $\mathcal{S} \neq \emptyset$, тому що порожня множина $\emptyset$ завжди вимірна за Каратеодорі, тобто $\emptyset \in \mathcal{S}$.

Remark 2.5.3 Означення вимірних множин за Каратеодорі можна дещо послабити ось так:

$$\forall E \subset X : \lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A})$$

Дійсно, зауважимо, що $(E \cap A) \cup (E \cap \bar{A}) = E$, тобто мається покриття для множини E, а тому за напівадитивністю зовнішьої міри,
$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \bar{A})$.

Theorem 2.5.4 Теорема Каратеодорі
Задано λ^* – зовнішня міра. Тоді $\mathcal{S}$ утворює σ-алгебру, а також $\lambda^*|_{\mathcal{S}}$ буде мірою.

Proof.
Доведення даної теореми будемо розбивати на три етапи.
I. *$\mathcal{S}$ буде алгеброю.*
Нехай $A, B \in \mathcal{S}$, тобто A, B – вимірні за Каратеодорі, а тому $\forall E \subset X$:
$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \overline{A}) \qquad \lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap B) + \lambda^*(E \cap \overline{B})$.
Ми хочемо довести, що $\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap (A \cup B)) + \lambda^*(E \cap \overline{A \cup B})$, це й буде означати $A \cup B \in \mathcal{S}$.
$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \overline{A}) \overset{B \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*(E \cap A) + [\lambda^*(E \cap \overline{A} \cap B) + \lambda^*(E \cap \overline{A} \cap \overline{B})] =$
$= [\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \overline{A} \cap B)] + \lambda^*(E \cap \overline{A \cup B})$.
Хочеться показати, що ця дужка $[\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \overline{A} \cap B)] = \lambda^*(E \cap (A \cup B))$. Дійсно, $\lambda^*(E \cap (A \cup B)) \overset{A \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*(E \cap (A \cup B) \cap A) + \lambda^*(E \cap (A \cup B) \cap \overline{A}) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \overline{A} \cap B)$.
Отже, $\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap (A \cup B)) + \lambda^*(E \cap \overline{A \cup B})$ виконано для всіх $E \subset X$. Довели $A \cup B \in \mathcal{S}$.
Із означення вимірності за Каратеодорі випливає, що $A \in \mathcal{S} \iff \overline{A} \in \mathcal{S}$. Оскільки $\emptyset \in \mathcal{S}$, то $X \in \mathcal{S}$.
Нарешті, якщо $A, B \in \mathcal{S}$, то звідси $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup B} \in \mathcal{S}$.

II. *$\mathcal{S}$ буде σ-алгеброю.*

Нехай $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ – поки неперетинні множини. Хочемо довести, що $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, тобто $\forall E \subset X$:
$\lambda^*(E) \geq \lambda^*\left(E \cap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right)$.
Спочатку доведемо рівність $\lambda^*\left(E \cap \bigsqcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \lambda^*(E \cap A_n)$ за МІ по числу $k \geq 1$.
База індукції: $k = 1$ – нема шо доводити.
Припущення індукції: нехай задана нерівність виконується для $k - 1$.
Крок індукції: $\lambda^*\left(E \cap \bigsqcup_{n=1}^{k} A_n\right) \overset{A_k \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*\left(E \cap \bigsqcup_{n=1}^{k} A_n \cap A_k\right) + \lambda^*\left(E \cap \bigsqcup_{n=1}^{k} A_n \cap \overline{A_k}\right) =$
$= \lambda^*(E \cap A_k) + \lambda^*\left(E \cap \bigsqcup_{n=1}^{k-1} A_n\right) \overset{\text{припущення МІ}}{=} \lambda^*(E \cap A_k) + \sum_{n=1}^{k-1} \lambda^*(A_n) = \sum_{n=1}^{k} \lambda^*(E \cap A_n)$.
МІ доведено. Тепер повернімось до бажаного.
Нам, за кроком I, уже відомо, що $\bigsqcup_{n=1}^{k} A_n \in \mathcal{S}$, тому звідси маємо:
$$\lambda^*(E) = \lambda^*\left(E \cap \bigsqcup_{n=1}^{k} A_n\right) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigsqcup_{n=1}^{k} A_n}\right) \geq \sum_{n=1}^{k} \lambda^*(E \cap A_n) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) \qquad (!).$$
Остання нерівність отрималась за монотонністю, бо $E \cap \overline{\bigsqcup_{n=1}^{k} A_n} \supset E \cap \overline{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n}$. Нарешті, спрямуємо $k \to \infty$ – отримаємо:

$$\lambda^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E \cap A_n) + \lambda^* \left(E \cap \overline{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n} \right) \geq \lambda^* \left(E \cap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) + \lambda^* \left(E \cap \overline{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n} \right).$$

Остання нерівність випливає з σ-напівадитивності зовнішньої міри.

Власне, отримали $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, це був лише випадок неперетинних множин.

Нехай $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ – уже довільні. Розглянемо множини $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$ – система неперетинних множин. Причому всі $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{S}$, а звідси $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{S}$.

III. $\lambda^*|_{\mathcal{S}}$ утворює міру.

Залишилося довести, що λ^* буде σ-адитивною на $\mathcal{S}$.

Нехай $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ – неперетинні (уже автоматично $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$). Скористаємося нерівністю (!) при $k \to \infty$, але замість E підставимо $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ – отримаємо наступне:

$$\lambda^* \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap A_n \right) + \lambda^* \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \overline{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Водночас, за σ-напівадитивністю зовнішьої міри, $\lambda^* \left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$. А тому звідси

$$\lambda^* \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n). \qquad \blacksquare$$

Definition 2.5.5 Задано λ – міра на σ-алгебрі $\mathcal{F}$.

Міра λ називається **повною**, якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : \lambda(A) = 0 : \forall B \subset A : B \in \mathcal{F}$$

Із цього випливає, що $\lambda(B) = 0$.

Інколи ще говорять, що σ-алгебра $\mathcal{F}$ **повна відносно міри** λ.

Example 2.5.6 Зокрема маємо $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$, а міра λ на ній визначається як $\lambda(X) = \lambda(\emptyset) = 0$. У цьому випадку міра λ не буде повною, бо якщо $\{x\} \subset X$, то не випливає $\{x\} \notin \mathcal{F}$.

Corollary 2.5.7 Міра $\lambda^*|_{\mathcal{S}} \overset{\text{позн.}}{=} \lambda$ із теореми Каратеодорі – повна.

Proof.

Нехай $A \in \mathcal{S}$ так, щоб $\lambda^*(A) = 0$ та оберемо множину $B \subset A$. Доведемо, що $B \in \mathcal{S}$.

Зауважимо, що $B \subset A, E \subset X$, звідси $E \cap B \subset A$, тому $\lambda^*(E \cap B) \leq \lambda^*(A) = 0 \implies \lambda^*(E \cap B) = 0$.

$\lambda^*(E \cap B) + \lambda^*(E \setminus B) = \lambda^*(E \setminus B) \leq \lambda^*(E)$. $\blacksquare$

2.6 Продовження міри

Theorem 2.6.1 Задано λ – міра на півкільці $\mathcal{P}$ та λ^* – зовнішня міра, породжена мірою λ. Тоді $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$, а також $\lambda^*|_{\mathcal{P}} \equiv \lambda$.

Proof.

$\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$.

Нехай $A \in \mathcal{P}$, нам треба довести, що $A \in \mathcal{S}$, інакше кажучи, $\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \overline{A})$.

Маємо $E \subset X$, якщо для нього не існує покриття, то $\lambda * (E) = +\infty$, тоді автоматично нерівність виконана. Тому залишилося розглянути $E \subset X$, для яких є покриття.

Нехай $\varepsilon > 0$, тоді існує покриття $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, де $E_n \in \mathcal{P}$, для яких $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) < \lambda^*(E) + \varepsilon$. Тобто звідси $\lambda^*(E) > \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) - \varepsilon$. Тепер розглянемо праву частину нерівності з Каратеодорі.

Зауважимо, що $E \cap A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E_n \cap A)$, а також $E \cap \overline{A} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E_n \cap \overline{A})$, причому $E_n \cap A \in \mathcal{P}$, водночас

$E_n \cap \overline{A} = E \setminus A = \bigsqcup_{i=1}^{i_n} B_{in}$, тож $E \cap \overline{A} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{i=1}^{i_n} B_{in}$, де $B_{in} \in \mathcal{P}$. За визначенням зовнішьої міри,

$\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \overline{A}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(B_{in}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$.

Окремо варто пояснити, чому $\lambda(E_n \cap A) + \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(B_{in}) = \lambda(E_n)$. У нас $E_n \in \mathcal{P}$, але водночас $E_n = (E_n \cap A) \sqcup (E_n \cap \overline{A}) = (E_n \cap A) \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{i_n} B_{in}$, тут $E_n \cap A, B_{in} \in \mathcal{P}$, а тому можна застосовувати σ-адитивність міри.
Отже, $\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \overline{A}) < \lambda^*(E) + \varepsilon$, а далі $\varepsilon \to 0 + 0$ – отримали бажану нерівність.

$\lambda^*|_{\mathcal{P}} \equiv \lambda$.
Нехай $A \in \mathcal{P}$, нам треба $\lambda^*(A) = \lambda(A)$.
Зауважимо, що $A \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, тому за зовнішьою мірою, $\lambda^*(A) \leq \lambda(A) + \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset) + \dots \implies \lambda^*(A) \leq \lambda(A)$.
Тепер беремо будь-яке покриття $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{P}$, які є. Зв властивістю 5) міри,

$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ – виконано для кожного покриття. Тому звідси $\lambda(A) \geq \lambda^*(A)$.
Із двох нерівностей випливає, що $\lambda^*(A) = \lambda(A)$, для всіх $A \in \mathcal{P}$. ■

Схема продовження міри за Каратеодорі

1) Визначаємо міру λ на півкільці $\mathcal{P}$ – клас підмножин X;
2) На множині 2^X визначаємо зовнішю міру λ^*, що породжена λ;
3) $\lambda^*|_{\mathcal{S}}$ буде мірою на σ-алгебрі (теорема Каратеодорі), причому $\mathcal{S} \supset \mathcal{P}$, а також $\lambda^*|_{\mathcal{P}} \equiv \lambda$. І ось ця міра $\lambda^*|_{\mathcal{S}}$ – шукане продовження міри λ. із $\mathcal{P}$ на $\mathcal{S}$.

Деколи для зручності продовження також позначають за λ, але враховують визначення зовнішьої міри, якщо множина не з півкільця.

Theorem 2.6.2 Єдиність продовження міри
Задано λ – міра на півкільця $\mathcal{P}$, нехай вона є σ-скінченною. Ми вже за схемою Каратеодорі можемо продовжити її до міри λ^*, яка визначена на σ-алгебрі $\mathcal{S}$.
Нехай $\tilde{\lambda}$ – інше продовження міри λ з $\mathcal{P}$ на $\mathcal{S}$. Тоді $\tilde{\lambda} \equiv \lambda^*$ на $\mathcal{S}$.

Proof.
Доведення розіб'ємо на дві частини.
I. *Нехай λ – скінченна міра, при цьому $X \in \mathcal{P}$.*
Нехай $A \in \mathcal{S}$, тоді точно існує хоча б одне покриття $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ при $A_n \in \mathcal{P}$ (можна взяти $A_1 = X$, покриття вже є). Тоді звідси, за властивістю 5) міри,

$\tilde{\lambda}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\lambda}(A_n) \overset{A_n \in \mathcal{P}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ – виконано для кожного покриття множини A. Тоді $\tilde{\lambda}(A) \leq \lambda^*(A)$.
Узявши $X \setminus A \in \mathcal{S}$, ми аналогічно отримаємо $\tilde{\lambda}(X \setminus A) \leq \lambda^*(X \setminus A) \implies \tilde{\lambda}(A) \geq \lambda^*(A)$. Але тут суттєво як раз таки, щоб $\lambda(X) = \tilde{\lambda}(X) = \lambda^*(X) < +\infty$.
Отже, $\tilde{\lambda}(A) = \lambda^*(A)$ при кожному $A \in \mathcal{S}$.

II. *Нехай λ – σ-скінченна міра.*
За умовою, існують $X_n \in \mathcal{P}$, для яких $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$, а також кожний $\lambda(X_n) < +\infty$. Далі ми розглянемо $Y_1 = X_1,\ Y_2 = X_1 \setminus X_2,\ Y_3 = X_3 \setminus (X_1 \cup X_2)$ – система неперетинних множин. Тоді $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} Y_n = X$, але також звідси кожний $Y_n \in k(\mathcal{P})$, тому звідси $Y_n = \bigsqcup_{i=1}^{i_n} Z_{in}$, де $Z_{in} \in \mathcal{P}$.

Отримали $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{i=1}^{i_n} Z_{in}$, де $Z_{in} \in \mathcal{P}$. Причому зауважимо, що $\lambda(Z_{in}) < +\infty$, просто тому що $Z_{in} \subset Y_n \subset X_n$ та $\lambda(X_n) < +\infty$. Тому ми прийшли до випадку I, що було описано вище. Тобто $\tilde{\lambda}(A \cap Z_{in}) = \lambda^*(A \cap Z_{in})$ для всіх множин $A \in \mathcal{S} \cap Z_{in}$. Отже, $\forall A \in \mathcal{S}$:
$\tilde{\lambda}(A) = \tilde{\lambda}(A \cap X) = \tilde{\lambda}\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{i=1}^{i_n} (A \cap Z_{in})\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \tilde{\lambda}(A \cap Z_{in}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda * (A \cap Z_{in}) \overset{\text{аналог}}{=} \lambda^*(A)$. ■

Remark 2.6.3 Умова σ-скінченності є надзвичайно важливою для єдиності. Приклад ще не знайшов.

Theorem 2.6.4 Наближення міри її значеннями на кільці
Задано λ – σ-скінченна міра на півкільці $\mathcal{P}$. Продовжимо її до σ-алгебри $\mathcal{S}$ (єдиним чином). Тоді $\forall A \in \mathcal{S}, \lambda(A) < +\infty : \forall \varepsilon > 0 : \exists B \in k(\mathcal{P}) : \lambda(A \triangle B) < \varepsilon$.

Proof.
Нехай $A \in \mathcal{S}$ так, щоб $\lambda(A) < +\infty$, а також нехай $\varepsilon > 0$. Тоді в силу визначення зовнішньої міри $\exists A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \lambda(A) + \varepsilon$. Покриття існує, бо $\lambda(A) < +\infty$.

Ряд зліва (що є невід'ємним) також збіжний, просто тому що $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$, тож за означення існування ліміту, $\exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda(A_n) \right| < \varepsilon$.

Покладемо $B = \bigcup_{n=1}^{K} A_n$, причому зауважимо, що $B \in k(\mathcal{P})$. Залишилося оцінити міру.
$\lambda(A \setminus B) = \lambda\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{K} A_n\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{K} A_n\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=K+1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=K+1}^{\infty} \lambda(A_n) < \varepsilon$.
$\lambda(B \setminus A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{K} A_n \setminus A\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) - \lambda(A) < \varepsilon$.
$\lambda(B \triangle A) = \lambda(A \setminus B) + \lambda(B \setminus A) < 2\varepsilon$. ■

2.7 Міра Лебега

Беремо універсальну множину $\mathbb{R}^d$. На неї задаємо півкільце $\mathcal{P}_d = \left\{\prod_{i=1}^{d} (a_i, b_i] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\right\}$, а згодом на ній установимо міру λ таким чином: $\lambda\left(\prod_{i=1}^{d} (a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$. За схемою Каратеодорі, продовжимо міру на σ-алгебру $\mathcal{S}_d$.

Definition 2.7.1 Отримана міра на σ-алгебрі $\mathcal{S}_d$ називається **мірою Лебега**. Позначатимемо за λ_d. Всі множини з $\mathcal{S}_d$ називаються **вимірними за Лебегом**.

Remark 2.7.2 Із цього випливає, що λ_d – міра Лебега – повна.

Proposition 2.7.3 Кожна борельова множина – вимірна за Лебегом.

Proof.
Тобто треба довести, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d$.
Нам уже відомо, що $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{S}_d$, за теоремою про продовежння міри до σ-алгебри. Але оскільки $\mathcal{S}_d$ є σ-алгеброю, то тоді $\sigma a(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}^d$. ■

Розглянемо деякі значення міри Лебега на $\mathbb{R}$.
1. Оберемо одноточкову множину $\{x\}$, що є борельовою, тому звідси $\lambda_1(\{x\}) = 0$. Справді,
$\lambda_1(\{x\}) = \lim_{n \to \infty} \lambda_1\left(\left(x - \frac{1}{n}, x\right]\right) = \lim_{n \to \infty}\left(x - x - \frac{1}{n}\right) = 0$.

2. Як наслідок, міра будь-якої скінченної або зліченної множини – нулева. Зокрема $\lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$.

3. Розглянемо $[a,b],\ (a,b),\ [a,b)$. Тоді їхні міри збігаються з мірою $\lambda_1((a,b]) = b-a$.

4. Також маємо $\lambda_1(\mathbb{R}) = +\infty$. Дійсно,
$\lambda_1(\mathbb{R}) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1((-n,n]) = \lim\limits_{n\to\infty} 2n = +\infty$.

Theorem 2.7.4 Узагальнення вимірності
Задано A – вимірна за Жорданом. Тоді A – вимірна за Лебегом, при цьому $m(A) = \lambda_d(A)$.
TODO: записати доведення

2.8 Регулярність мір

TODO: додати

Чому міри визначаються переважно на спеціальних класах множин

3 Вимірні функції

3.1 Основні означення

Definition 3.1.1 Вимірним простором називають пару $(X, \mathcal{F})$, де X – універсальна множина та $\mathcal{F}$ – σ-алгебра. Всі множини з σ-алгебри будемо називати **вимірними**.
Вимірним простором з мірою називають трійку $(X, \mathcal{F}, \lambda)$, тут λ – міра на $\mathcal{F}$.

Definition 3.1.2 Задано відображення $f\colon X \to Y$, а також два вимірних простори $(X, \mathcal{F}_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y)$. Відображення f називається $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$**-вимірною**, якщо

$$\forall B \in \mathcal{F}_Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$$

Якщо позначити $f^{-1}(\mathcal{F}_Y) \overset{\text{def.}}{=} \left\{B \in \mathcal{F}_Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X\right\}$, то означення перепишеться так:

$$f^{-1}(\mathcal{F}_Y) \subset \mathcal{F}_X$$

Theorem 3.1.3 Задано відображення $f\colon X \to Y$, а також два вимірних простори $(X, \mathcal{F}_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y)$.
Нехай $\mathcal{H}$ – клас множин Y, що задовольняє таким умовам:
1. $\forall B \in \mathcal{H} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$;
2. $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{F}_Y$.
Тоді відображення f буде $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$-вимірною.

Тобто теорема каже, що не обов'язково перевіряти на всій σ-алгебрі $\mathcal{F}_Y$, щоб було означення вимірності. Достатньо взяти якісь множини та переконатися в них.

Proof.
Розглянемо множину $\mathcal{L} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X\}$. Зрозуміло, що $\mathcal{L} \supset \mathcal{H}$ за умовою. Якщо доведемо, що $\mathcal{L}$ утворює σ-алгебру, то тоді $\mathcal{L} \supset \sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{F}_Y$. І тоді звідси випливатиме, що $\forall B \in \mathcal{F}_Y : B \in \mathcal{L} \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$, що свідчить про виконання означення $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$-вимірності.

Отже, нехай $B_n \in \mathcal{L}, n \geq 1$. Із цього випливає, що $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}_X$, а звідси випливає, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = f\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \mathcal{F}_X$. А це означає, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{L}$.
Якщо $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$, то тоді $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}_X$, звідси $f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \in \mathcal{F}_X$, а тому це означає, що $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{L}$.
Нарешті, $f^{-1}(Y) = X$, тому звідси $Y \in \mathcal{L}$.
Отже, ми довели, що $\mathcal{L}$ утворює σ-алгебру. ■

Definition 3.1.4 Задано $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір.
Функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ називається $\mathcal{F}$**-вимірною**, якщо

$$f \text{ буде } (\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\text{-вимірною}$$

Конкретно в цьому випадку $(X, \mathcal{F}_X) = (X, \mathcal{F})$ та також $(Y, \mathcal{F}_Y) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Corollary 3.1.5 Задано $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір.

$$\text{Функція } f\colon X \to \mathbb{R} \text{ буде } \mathcal{F}\text{-вимірною} \iff \forall a \in \mathbb{R} : \left[\begin{aligned} & f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{F} \\ & f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{F} \\ & f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F} \\ & f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F} \end{aligned}\right.$$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: f є $\mathcal{F}$-вимірною, тоді автоматично, за означенням, $(a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, a), (-\infty, a]$ вони вже борельові, а тому виконується права частина.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{F}$.
Розглянемо клас множин $\mathcal{H} = \{[a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$, уже відомо, що $\forall B \in \mathcal{H} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Залишалася інша умова: $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Нехай $(a, b] \in \mathcal{P}_1$, звідси випливає, що $(a, b] = (a, +\infty) \setminus (b, +\infty)$, але водночас кожний $(x, +\infty) =$

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[x + \dfrac{1}{n}, +\infty\right) \in \sigma a(\mathcal{H})$, тож звідси $(a,b] \in \sigma a(\mathcal{H})$, тож $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{P}_1$, але тоді звідси $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \sigma a(\mathcal{P}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Для інших пунктів десь аналогічно, а десь навіть простіше.
Отже, за теоремою вище, довели, що f буде $\mathcal{F}$-вимірною. ∎

Надалі користуватимемося позначенням: $f^{-1}((a,+\infty)) \overset{\text{def.}}{=} \{f > a\}$. Решта позначень аналогічні.

Definition 3.1.6 Задано (X,ρ) – метричний простір.
Функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ називається **борельовою**, якщо

$$f \text{ буде } (\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(\mathbb{R}))\text{-вимірною}$$

Definition 3.1.7 Функція $f\colon A \to \mathbb{R}$, де $A \in \mathcal{S}_d$, називається **вимірною за Лебегом**, якщо

$$f \text{ буде } (\mathcal{S}_d \cap A)\text{-вимірною}$$

Під класом $\mathcal{S}_d \cap A$ мається на увазі всі множини з σ-алгебри $\mathcal{S}_d$ перетнути з A.
Це такий особливий клас функцій, для яких визначені міри Лебега $\lambda_d(f^{-1}(B))$ при $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, адже, за означенням, $f^{-1}(B)$ має бути вимірною за Лебегом на множині A.

Example 3.1.8 Будь-яка борельова функція $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ буде вимірною за Лебегом.

3.2 Дії з вимірними функціями

Proposition 3.2.1 Задані $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z$ – два відображення та $(X,\mathcal{F}_X),\ (Y,\mathcal{F}_Y),\ (Z,\mathcal{F}_Z)$ – два вимірних простори. Відомо, що f є $(\mathcal{F}_X,\mathcal{F}_Y)$-вимірною та g є $(\mathcal{F}_Y,\mathcal{F}_Z)$-вимірною. Тода $g \circ f$ буде $(\mathcal{F}_X,\mathcal{F}_Z)$-вимірною.

Proof.
Нехай $B \in \mathcal{F}_Z$. Зауважимо, що $(g\circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. За умовою твердження, $g^{-1}(B) \in \mathcal{F}_Y$ в силу вимірності g, але тоді $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{F}_X$ в силу вимірності f. ∎

Corollary 3.2.2 Задано $(X,\mathcal{F}_X)$ – вимірний простір та функції $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ – всі $\mathcal{F}_X$-вимірні. Маємо функцію $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – борельова. Тоді $h(x) = g(f_1(x),\dots,f_d(x))$ буде $\mathcal{F}_X$-вимірною.

Proof.
Розглянемо відображення $\vec{f}\colon X \to \mathbb{R}^d$ та мається уже $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, тоді наша функція $h = g \circ \vec{f}$. Залишилося довести, що $\vec{f}$ буде $(\mathcal{F}_X, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$-вимірною. Тоді вже за твердженням вище, ми отримаємо h, що буде $\mathcal{F}_X$-вимірною.
Нехай $\mathcal{P}_d$ – наш клас множин, уже відомо, що $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (насправді, навіть рівні). Залишилося показати, що $\forall B \in \mathcal{P}_d : \vec{f}^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$.
Значить, нехай $B \in \mathcal{P}_d$, тобто $B = \prod\limits_{i=1}^{d}(a_i,b_i]$, а тепер розглянемо його прообраз.
$\vec{f}^{-1}(B) = \left\{x \in X \mid \vec{f}(x) \in B\right\} = \{x \in X \mid f_1(x) \in (a_1,b_1],\dots,f_d(x) \in (a_d,b_d]\} = f_1^{-1}((a_1,b_1]) \cap \dots \cap f_d^{-1}((a_d,b_d])$. Але оскільки кожна f_i є $\mathcal{F}_X$-вимірною, то звідси всі ці прообрази $f_i^{-1}((a_i,b_i]) \in \mathcal{F}_X$. Але тоді звідси $\vec{f}^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$. ∎

Theorem 3.2.3 Задані $f_1, f_2\colon X \to \mathbb{R}$ – є $\mathcal{F}$-вимірними, ткож нехай $c \in \mathbb{R}$. Тоді такі функції, як-от: $f_1 + f_2,\ cf_1,\ f_1 \cdot f_2,\ |f_1|,\ \max\{f_1,f_2\},\ \min\{f_1,f_2\},\ \dfrac{f_1}{f_2}\mathbb{1}_{\{f_2\neq 0\}}$ – всі вони будуть $\mathcal{F}$-вимірними також.

Proof.
Окрім останньої функції, всі вони випливають з наслідка вище. Покажу не першому прикладі.
Маємо $f_1, f_2\colon X \to \mathbb{R}$, що $\mathcal{F}$-вимірні за умовою. Розглянемо відображення $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таким чином: $g(y_1,y_2) = y_1 + y_2$. Зрозуміло, що це – неперервна, а тому буде борельовою. Таким чином, $g(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) + f_2(x)$ буде $\mathcal{F}$-вимірною.

Зараз окремо розглянемо функцію $f = \dfrac{f_1}{f_2}\mathbb{1}_{\{f_2\neq 0\}}$. Оберемо $a \in \mathbb{R}$ та дослідимо $\{f < a\}$.

Запишемо її таким чином: $\{f < a\} = \{f < a, f_2 < 0\} \cup \{f < a, f_2 = 0\} \cup \{f < a, f_2 > 0\}$.
Зауважимо, що $\{f < a, f_2 < 0\} = \{f_1 - af_2 > 0, f_2 < 0\}$. Зокрема оскільки f_1, f_2 – $\mathcal{F}$-вимірні, то тоді звідси $f_1 - af_2$ також $\mathcal{F}$-вимірні, то звідси, за наслідком, $\{f < a, f_2 < 0\} \in \mathcal{F}$.
Так само доводиться $\{f < a, f_2 > 0\} = \{f_1 - af_2 < 0, f_2 > 0\} \in \mathcal{F}$.
Остання множина $\{f < a, f_2 = 0\} = \{0 < a\} = \left[\begin{array}{l}\emptyset \\ X\end{array}\right. \in \mathcal{F}$. ■

Corollary 3.2.4 За умовою, що f_1, f_2 є $\mathcal{F}$-вимірними, $\{f_1 < f_2\},\ \{f_1 > f_2\},\ \{f_1 = f_2\} \in \mathcal{F}$.
Вказівка: розглянути $f = f_2 - f_1$.

Theorem 3.2.5 Задані функції $f_n \colon X \to \mathbb{R}, n \geq 1$ – всі є $\mathcal{F}$-вимірними. Тоді $\inf\limits_{n\geq 1} f_n(x),\ \sup\limits_{n\geq 1} f_n(x),\ \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ – всі вони будуть $\mathcal{F}$-вимірними. Додатково, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ буде $\mathcal{F}$-вимірною за умовою, що ліміт існує $\forall x \in X$.

Proof.
$g^{(1)}(x) \overset{\text{def.}}{=} \inf\limits_{n\geq 1} f_n(x)$.

$\forall a \in \mathbb{R} : \{g^{(1)} \geq a\} = \{x \in X \mid g^{(1)}(x) \geq a\} = \{x \in X \mid f_n(x) \geq a, n \geq 1\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq a\} \in \mathcal{F}$.

$g^{(2)}(x) \overset{\text{def.}}{=} \sup\limits_{n\geq 1} f_n(x)$.

$\forall a \in \mathbb{R} : \{g^{(2)} \leq a\} = \{x \in X \mid g^{(2)}(x) \leq a\} = \{x \in X \mid f_n(x) \leq a, n \geq 1\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq a\} \in \mathcal{F}$.

$g^{(3)}(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
Насправді, зауважимо, що $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \inf\limits_{n\geq 1} \sup\limits_{k\geq n} f_k(x)$. Далі користаємося першими двома щойно доведеними.
$g^{(4)}(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
Аналогічно варто зауважити, що $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\limits_{n\geq 1} \inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$.

$g^{(5)}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
Якщо границя існує, то звідси $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. А далі користуємось щойно доведеним. ■

Corollary 3.2.6 За умовою, що f_n є $\mathcal{F}$-вимірними, $\{x \in X \mid \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\} \in \mathcal{F}$.

3.3 Наближення вимірних функцій

Definition 3.3.1 Функція $p \colon X \to \mathbb{R}$ називається **простою**, якщо вона приймає скінченне число значень.

Нехай маємо $p(x) = a_1,\ x \in A_1, \ldots, p(x) = a_n,\ x \in A_n$. Причому $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Тоді ми можемо просту функцію переписати в іншому вигляді:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

Зрозуміло, що якщо довільна функція приймає вигляд формули вище, то вона – проста.

Lemma 3.3.2 Задано $p \colon X \to \mathbb{R}$ – проста функція, у нашому випадку $p(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$.
p – $\mathcal{F}$-вимірна функція $\iff \forall k = \overline{1,n} : A_k \in \mathcal{F}$.

Theorem 3.3.3 Задано функцію $f \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – є $\mathcal{F}$-вимірною, причому $f \geq 0$. Тоді існує послідовність простих функцій $\{p_n \colon X \to \mathbb{R}, n \geq 1\}$ – причому зростаюча, всі невід'ємні та $\mathcal{F}$-вимірні – для якої $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$ при всіх $x \in X$.

Proof.
Ми задамо наступні прості функції ось таким чином:
$p_1(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 1 \\ \dfrac{k}{2}, & f(x) \in \left(\dfrac{k}{2}, \dfrac{k+1}{2}\right] \end{cases}$, тут $k = \overline{0,1}$.
$p_2(x) = \begin{cases} 2, & f(x) > 2 \\ \dfrac{k}{2^2}, & f(x) \in \left(\dfrac{k}{2^2}, \dfrac{k+1}{2^2}\right] \end{cases}$, тут $k = \overline{0,7}$.
$\vdots$
Тобто для p_1 ділимо по OY відрізок $[0,1]$ на $\dfrac{1}{2}$; для p_2 ділимо по OY відрізок $[0,2]$ на $\dfrac{1}{4}$ ... З'ясуємо, чому це справді прості функції. Тому що можна це записати ось так:
$p_1(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{\{f(x)>1\}}(x) + \sum_{k=0}^{2^1} \dfrac{k}{2} \mathbb{1}_{\left\{f(x)\in\left(\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}\right]\right\}}(x)$.
$p_2(x) = 2 \cdot \mathbb{1}_{\{f(x)>2\}}(x) + \sum_{k=0}^{7} \dfrac{k}{2^2} \mathbb{1}_{\left\{f(x)\in\left(\frac{k}{2^2},\frac{k+1}{2^2}\right]\right\}}(x)$.
$\vdots$
Тут скінченні значення та всі множини на індикаторах неперетинні.
Всі вони будуть невід'ємними – це цілком зрозуміло. Всі вони також будуть вимірними, тому що f є $\mathcal{F}$-вимірною; а це означає, що $\{f > 1\} \in \mathcal{F}$ та $\left\{f \in \left(\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right]\right\} = \left\{f > \dfrac{k}{2^n}\right\} \cap \left\{f \le \dfrac{k+1}{2^n}\right\} \in \mathcal{F}$.
Найскладніше довести монотонне зростання. Покажу, що $p_2 \le p_3$, для інших аналогічно.
Якщо x беремо такі, що $f(x) > 2$, тоді у функції p_3 маємо $p_3(x) = \dfrac{k}{2^3}$, але $k > 2 \cdot 2^3$; або $p_3(x) = 3$ при $f(x) > 3$. Водночас маємо $p_2(x) = 2$ у двох випадках. Тоді $p_2 \le p_3$, зважаючи два випадки.
Якщо x беремо такі, що $f(x) \le 2$, тоді розглядається один $f(x) \in \left(\dfrac{k}{2^2}, \dfrac{k+1}{2^2}\right]$. Запишемо так: $\left(\dfrac{k}{2^2}, \dfrac{k+1}{2^2}\right] = \left(\dfrac{2k}{2^3}, \dfrac{2k+1}{2^3}\right] \cup \left(\dfrac{2k+1}{2^3}, \dfrac{2k+2}{2^3}\right]$. Із всього цього випливає, що $p_2(x) = \dfrac{k}{2^2}$, а також $p_3(x) = \dfrac{2k}{2^3}$ або $p_3(x) = \dfrac{2k+1}{2^3}$. У двох випадках маємо $p_2 \le p_3$.
Нарешті, доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$. Заздалегідь зауважимо, що $p_n \le f$ за побудовою.
Нехай спочатку $x \in X$ такий, що $f(x) = +\infty$. Тоді в цій точці $\{p_n(x), n \ge 1\}$ не є обмеженою та в силу зростання p_n матимемо $\lim\limits_{n\to\infty} = +\infty = f(x)$. Точніше кажучи, $\{p_n(x) = n, n \ge 1\}$.
Нехай тепер $x \in X$ такий, що $f(x) < +\infty$. Тоді зауважимо, що має існувати номер n, для якого $f(x) < n$, а значить, $f(x) \in \left(\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right]$. Через нерівність це можна записати як $\dfrac{k}{2^n} \le f(x) \le \dfrac{k+1}{2^n} \implies p_n(x) \le f(x) \le p_n(x) + \dfrac{1}{2^n}$. Для нашого випадку $f(x) - \dfrac{1}{2^n} \le p_n(x) \le f(x)$. Спрямовуючи $n \to \infty$, отримаємо бажане. ■

Для довільної функції $f \colon X \to \mathbb{R}$ надалі користуватимемося такими позначеннями:
$f_+(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x)\mathbb{1}_{\{f\ge 0\}}(x) \overset{\text{або}}{=} \max\{f(x), 0\}$.
$f_-(x) \overset{\text{def.}}{=} -f(x)\mathbb{1}_{\{f<0\}}(x) \overset{\text{або}}{=} -\min\{f(x), 0\}$.
Якщо функція f буде $\mathcal{F}$-вимірними, то всі ці функції f_+, f_- будуть також $\mathcal{F}$-вимірними. Також зауважимо, що f_+, f_- – обидва невід'ємні функції, а також
$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$.
$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$.

Corollary 3.3.4 Задано функцію $f \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – є $\mathcal{F}$-вимірною. Тоді існує послідовність простих функцій $\{p_n \colon X \to \mathbb{R}, n \ge 1\}$ – всі $\mathcal{F}$-вимірні – для якої $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$ при всіх $x \in X$. Причому $|p_n| \le |f|$.

Proof.
Розпишемо функцію $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$. Обидві функції є невід'ємними та $\mathcal{F}$-вимірними, тому за попередньою теоремою, існують відповідно $\{p_n\}, \{q_n\}$ – невід'ємні, $\mathcal{F}$-вимірні та монотонно зростаючі послідовності простих функцій, для яких $p_n \to f_+,\ q_n \to f_-$.

Розглянемо послідовність $\{p_n(x) - q_n(x), n \geq 1\}$. Тоді $p_n - q_n \to f_+ - f_- = f$.
Нарешті, $|p_n - q_n| \leq |p_n| + |q_n| \leq f_+ + f_- = |f|$. ■

3.4 Еквівалентні функції

Definition 3.4.1 Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та функції $f, g \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$.
Вони називаються **еквівалентними відносно міри** λ, якщо

$$\exists N \subset X : \lambda(N) = 0 : \forall x \in X \setminus N : f(x) = g(x)$$

Позначення: $f \sim g \pmod{\lambda}$ або $f = g \pmod{\lambda}$.

Remark 3.4.2 У випадку, коли f, g є $\mathcal{F}$-вимірними, то завжди існує множина $N = \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$, для якої $\lambda(N) = 0$. (*TODO: обміркувати*)

Example 3.4.3 Зокрема розглянемо функцію Діріхле $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Відносно міри Лебега на $\mathbb{R}$ отримаємо $\mathfrak{D} \sim 0 \pmod{\lambda_1}$. Треба просто покласти в цьому випадку $N = \mathbb{Q}$, для якої $\lambda(N) = 0$.

Theorem 3.4.4 Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір із мірою та функції $f, g \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$. Відомо, що f є $\mathcal{F}$-вимірною, також $f \sim g \pmod{\lambda}$, і головне λ – повна міра. Тоді g також $\mathcal{F}$-вимірна.

Proof.
По-перше, за умовою, існує $N \subset X$, для якої $\lambda(N)$ та $f(x) = g(x)$ при $x \in X \setminus N$.
Нехай $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$, тоді нам треба розглянути $g^{-1}(B)$.
$g^{-1}(B) = \{x \in X \mid g(x) \in B\} = \{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) \neq f(x)\} \cup \{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) = f(x)\}$.
Кожну з двох множин розглянемо окремо.
$\{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) \neq f(x)\} \subset \{x \in X \mid g(x) \neq f(x)\} \subset N$. Оскільки $\lambda(N) = 0$ та λ – повна міра, то звідси $\{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) \neq f(x)\} \in \mathcal{F}$.
$\{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) = f(x)\} = \{x \in X \mid f(x) \in B, g(x) = f(x)\} =$
$= \{x \in X \mid f(x) \in B\} \setminus \{x \in X \mid f(x) \in B, f(x) \neq g(x)\} = f^{-1}(B) \setminus \{x \in X \mid f(x) \in B, f(x) \neq g(x)\}$.
Щодо останньої множини, аналогічно через повноту міри $\{x \in X \mid f(x) \in B, f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{F}$.
Також в силу $\mathcal{F}$-вимірності f, маємо $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.
Сумуючи це все, отримали $g^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. ■

Definition 3.4.5 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та функції $f, f_n \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ та $n \geq 1$.
Функції f_n **збігається до** f **майже скрізь відносно міри** λ, якщо

$$\exists N \subset X : \lambda(N) = 0 : \forall x \in X \setminus N : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

Позначення: $f_n \to f \pmod{\lambda}$.

Example 3.4.6 Маємо функції $f_n(x) = \sin^n x$ при $x \in \mathbb{R}$. Відносно міри Лебега на $\mathbb{R}$ маємо $f_n \to 0$ $(\mathrm{mod}\ \lambda_1)$. Просто покладемо $N = \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

Theorem 3.4.7 Єдиність збіжності майже скрізь
Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та відомо, що $f_n \to f \pmod{\lambda}$, $f_n \to g \pmod{\lambda}$. Тоді $f \sim g \pmod{\lambda}$.

Proof.
Маємо множини N_1, N_2, для яких $\lambda(N_1) = \lambda(N_2) = 0$, а також $\forall x \in X \setminus N_1 : f_n \to f$ та $\forall x \in X \setminus N_2 : f_n \to g$ при $n \to \infty$. Далі розглянемо множину $N = N_1 \cup N_2$. Тоді звідси випливає, що $\lambda(N) = 0$, а також $f_n \to f, f_n \to g$ одночасно. У силу єдиності границі, $f = g$ при $x \in X \setminus N$. Отже, $f \sim g$ $(\mathrm{mod}\ \lambda)$. ■

Theorem 3.4.8 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та відомо, що $f_n \to f \pmod{\lambda}$, а також $f \sim g \pmod{\lambda}$. Тоді $f_n \to g \pmod{\lambda}$.
Приблизно такі самі кроки доведення, що в попередній теоремі.

Theorem 3.4.9 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та відомо, що $f_n \to f \pmod{\lambda}$, всі f_n є $\mathcal{F}$-вимірними і головне λ – повна міра. Тоді f буде $\mathcal{F}$-вимірною.

Proof.
Маємо $f_n \to f \pmod{\lambda}$, тобто $\exists N \subset X : \lambda(N) = 0$ та $f_n \to f$ для всіх $x \in X \setminus N$.
Розглянемо функції $\tilde{f}_n(x) = f_n(x)\mathbb{1}_{X \setminus N}(x)$ та $\tilde{f}(x) = f(x)\mathbb{1}_{X\setminus N}(x)$. Зауважимо, що $f_n \sim \tilde{f}_n \to \tilde{f} \sim f$. Раз всі f_n є $\mathcal{F}$-вимірними, то тоді кожний $\tilde{f}_n$ є $\mathcal{F}$-вимірним в силу повноти λ. Але тоді $\tilde{f}$ є також $\mathcal{F}$-вимірною як границя. Нарешті, f буде $\mathcal{F}$-вимірною в силу повноти λ. ■

3.5 Теорема Єгорова

Theorem 3.5.1 Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір із мірою, причому $\lambda(X) < +\infty$. Задані функції $f_n, f \colon X \to \mathbb{R}$ – всі вони $\mathcal{F}$-вимірні, причому $f_n \to f \pmod{\lambda}$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_\varepsilon \in \mathcal{F} : \lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon, f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus A_\varepsilon$ при $n \to \infty$.

Proof.
Маємо $f_n \to f \pmod{\lambda}$, тобто звідси $\exists N : \lambda(N) = 0 : \forall x \in X \setminus N : f_n \to f$. А це означає наступне: $\forall x \in X \setminus N : \forall \varepsilon > 0 : \exists k \geq 1 : \forall n \geq k : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Мовою множин це все можна записати таким чином:
$X \setminus N \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$.
$N \supset \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$.
Зауважимо, що права множина буде вимірною на $\mathcal{F}$ в силу того, що f_n, f є $\mathcal{F}$-вимірними. Оскільки $\lambda(N) = 0$, то звідси $\lambda\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$. Але також варто зауважити, що послідовність множин $\left\{\displaystyle\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, k \geq 1\right\}$ буде спадати. Оскільки $\lambda(X) < +\infty$, тоді
$\lambda\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$.
Тобто звідси для чисел $\dfrac{\delta}{2^j}$ маємо $\exists k_j \geq 1 : \lambda\left(\displaystyle\bigcup_{n=k_j}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j}\right\}\right) < \dfrac{\delta}{2^j}$ для всіх $j \geq 1$.
Нарешті, покладемо множину $A_\delta = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=k_j}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j}\right\}$. Оцінимо його міру.
$\lambda(A_\delta) \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \lambda\left(\bigcup_{n=k_j}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j}\right\}\right) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^j} = \delta$.
Далі $X \setminus A_\delta = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=k_j}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j}\right\}$. Це означає наступне:
$\forall j \geq 1 : \exists k_j : \forall n \geq k_j : \forall x \in X \setminus A_\delta : |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{1}{j}$.
Це означає, що $\forall n \geq k_j : \displaystyle\sup_{x \in X \setminus A_\delta} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \to 0$ при $j \to \infty$. І це в точності означає, що $f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus A_\varepsilon$ при $n \to \infty$. ■

3.6 Збіжність за мірою

Definition 3.6.1 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та функції $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$ та $n \geq 1$ – всі вони $\mathcal{F}$-вимірні.
Функція f_n **збігається до** f **за мірою** λ, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

Позначення: $f_n \xrightarrow{\lambda} f$.

Theorem 3.6.2 Єдиність збіжності за мірою
Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір та відомо, що $f_n \xrightarrow{\lambda} f, f_n \xrightarrow{\lambda} g$. Тоді $f \sim g \pmod{\lambda}$.

Proof.
За умовою, маємо $\forall \varepsilon > 0$:
$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \lambda\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$
Зауважимо, що $\{x \in X : |f(x)-g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in X : |g(x) - f_n(x)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}.$
Звідси при $n \to \infty$ отримаємо наступне:
$\lambda\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \leq \lambda\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right\} + \lambda\left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right\} \to 0.$
Отже, $\forall \varepsilon > 0 : \lambda\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = 0$.
Зокрема при $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ маємо $\lambda\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \dfrac{1}{k}\right\} = 0$, це дозволить сказати наступне:
$\lambda\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = \lambda\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \dfrac{1}{k}\}\right) =$
$= \lim\limits_{k\to\infty} \lambda\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \dfrac{1}{k}\right\} = 0.$
Значить, знайшли множину $N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$, для якої $\forall x \in X \setminus N : f(x) = g(x)$, при цьому $\lambda(N) = 0$. За означенням, $f \sim g \pmod{\lambda}$. ■

Theorem 3.6.3 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та відомо, що $f_n \xrightarrow{\lambda} f$, а також $f \sim g \pmod{\lambda}$. Тоді $f_n \xrightarrow{\lambda} g$.
Вправа: довести.

Remark 3.6.4 У нас вже є два види збіжності: майже скрізь відносно міри та за мірою. Але
$f_n \to f \pmod{\lambda} \;\not\Longrightarrow\; f_n \xrightarrow{\lambda} f.$
$f_n \xrightarrow{\lambda} f \;\not\Longrightarrow\; f_n \to f \pmod{\lambda}.$
Нижче будуть відповідні приклади, які покажуть, що прямого зв'язку, взагалі-то кажучи, нема.

Example 3.6.5 Розглянемо $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$, а також нехай λ_1 – міра Лебега на $\mathbb{R}$.
$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x) \to 0 = f \pmod{\lambda_1}$ (насправді, тут збіжність всюди, не просто майже скрізь)
$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x) \overset{\lambda_1}{\not\to} 0 = f$, оскільки $\lambda_1\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geq 1\} = \lambda_1\{x \in [n, n+1]\} = 1 \not\to 0$.

Example 3.6.6 Розглянемо знову λ_1 – міра Лебега на $\mathbb{R}$, але вже такі функції:
$f_1(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$
$f_2(x) = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(x) \qquad f_3(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}(x)$
$f_4(x) = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4}]}(x) \qquad f_5(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}(x) \qquad f_6(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}(x) \qquad f_7(x) = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1]}(x)$
$\vdots$
У нас на кожному рівні відрізок $[0, 1]$ ділиться на $\dfrac{1}{2^n}$ частин.
$f_n(x) \xrightarrow{\lambda_1} 0$, тому що $\forall 0 < \varepsilon \leq 1$ маємо таку послідовність:
$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_1(x)| \geq \varepsilon\} = 1$
$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_2(x)| \geq \varepsilon\} = \dfrac{1}{2}$
$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_3(x)| \geq \varepsilon\} = \dfrac{1}{2}$
$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_4(x)| \geq \varepsilon\} = \dfrac{1}{4}$
$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_5(x)| \geq \varepsilon\} = \dfrac{1}{4}$
$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_6(x)| \geq \varepsilon\} = \dfrac{1}{4}$
$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_7(x)| \geq \varepsilon\} = \dfrac{1}{4}$
$\vdots$
Тобто мається $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dots\right\}$, яка повільно, але прямує до нуля. Тож $\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} \to 0$.
При $\varepsilon > 1$ зрозуміло, що $\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} = 0 \to 0$.
$f_n(x) \not\to 0 \pmod{\lambda_1}$. Ми доведемо, що взагалі $f_n(x) \not\to 0$ при $n \to \infty$.
Нехай $x \in [0, 1]$, тоді можна відокремити підпослідовність функцій в т. x, щоб була стаціонарна

послідовність $\{1, 1, \dots\}$, яка не є збіжною до нуля. Просто тому що $x \in [0,1] \implies x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ або $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \implies x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ або $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ або $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ або $x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \implies \dots$

3.7 Основні твердження, що позв'язують обидві збіжності. Фундаментальність за мірою

Theorem 3.7.1 Теорема Лебега про зв'язок між збіжностями
Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір із мірою, причому $\lambda(X) < +\infty$. Задані функції $f_n, f \colon X \to \mathbb{R}$ – всі вони $\mathcal{F}$-вимірні, причому $f_n \to f \pmod{\lambda}$. Тоді $f_n \xrightarrow{\lambda} f$.

Proof.
Маємо $f_n \to f \pmod{\lambda}$, тобто звідси $\exists N : \lambda(N) = 0 : \forall x \in X \setminus N : f_n \to f$. А це означає наступне:
$\forall x \in X \setminus N : \forall \varepsilon > 0 : \exists k \geq 1 : \forall n \geq k : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Мовою множин це все можна записати таким чином:
$X \setminus N \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$.
$N \supset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$.
Зауважимо, що права множина буде вимірною на $\mathcal{F}$ в силу того, що f_n, f є $\mathcal{F}$-вимірними. Оскільки $\lambda(N) = 0$, то звідси $\lambda\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$. Але також варто зауважити, що послідовність множин $\left\{\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, k \geq 1\right\}$ буде спадати. Оскільки $\lambda(X) < +\infty$, тоді
$\lambda\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda\left(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$ (*)
Це означає, що $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda\{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \lim\limits_{k\to\infty} \lambda\left(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$.
Це в точності $f_k \xrightarrow{\lambda} f$. ■

Remark 3.7.2 Якщо подивитися уважно, тут початок доведення повністю збігається з початком доведенням теореми Єгорова до моменту (*). Тому тут треба лише акцентувати увагу на останні міркування.

Definition 3.7.3 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та функції $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ та $n \geq 1$ – всі вони $\mathcal{F}$-вимірні.
Послідовність f_n називається **фундаментальною за мірою** λ, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : \lambda\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} < \delta$$

Можна по-інашкому це записати:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lambda\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} \to 0, \ m, n \to \infty$$

Proposition 3.7.4 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та послідовність f_n, що збіжна за мірою λ. Тоді f_n – фундаментальна за мірою λ.

Proof.
Маємо $f_n \xrightarrow{\lambda} f$, тобто $\forall \delta > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, m \geq N :$
$\lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \delta \qquad \lambda\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \delta$.
Аналогічним чином можна зауважити наступне:
$\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.
Звідси легко випливає, що $\lambda\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} < \delta$. ■

Theorem 3.7.5 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та послідовність f_n, що фундаментальна за мірою λ. Тоді існує $\mathcal{F}$-вимірна функція f та підпослідовність f_{n_k}, для яких

$f_{n_k} \to f \pmod{\lambda}, k \to \infty$
$f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f, k \to \infty.$

Proof.
I. Спочатку знайдемо підпослідовність $\{f_{n_k}\}$, яка нам буде необхідною.
Маємо f_n – фундаментальна, тобто $\forall \delta > 0 : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \lambda\{x : |f_n - f_m| \geq \varepsilon\} < \delta$.
Зокрема оберемо $\varepsilon = \delta = \dfrac{1}{2^k}$, тоді звідси $\exists N_k : \lambda \left\{ x : |f_{N_k} - f_{N_{k+1}}| \geq \dfrac{1}{2^k} \right\} < \dfrac{1}{2^k}$, ми будемо брати N_k так, щоб вона строго зростала. Фундаментальну послідовність $\{f_{N_k}, k \geq 1\}$ з умовою $\exists N_k :$ $\lambda \left\{ x : |f_{N_k} - f_{N_{k+1}}| \geq \dfrac{1}{2^k} \right\} < \dfrac{1}{2^k}$ ми знайшли.

II. Далі знайдемо функцію, яка буде необхідною.
Розглянемо множину $M = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=j}^{\infty} \left\{ x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \dfrac{1}{2^k} \right\}$. Зауважимо, що $\lambda(M) = 0$, оскільки

$$\lambda(M) \leq \lambda \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{ x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k} \right\} \right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \lambda \left\{ x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k} \right\} < \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j-1}} \to 0.$$

Далі візьмемо доповнення до множини N – отримаємо наступне:
$$X \setminus M = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} \left\{ x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| < \frac{1}{2^k} \right\}.$$
Зараз доведемо, що для кожної $x \in X \setminus N$ послідовність $\{f_{N_k}(x), k \geq 1\}$ буде фундаментальною.
Оберемо $k, l \geq j$, тоді звідси маємо:
$$|f_{N_k}(x) - f_{N_l}(x)| \leq |f_{N_k}(x) - f_{N_{k+1}}(x)| + |f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_{k+2}}(x)| + \dots + |f_{N_{l-1}}(x) - f_{N_l}(x)| <$$
$$< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{l-1}} \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots = \frac{1}{2^{k-1}} \to 0 \text{ при } k, l \to \infty.$$
Значить, $\{f_{N_k}(x), k \geq 1\}$ буде збіжною при кожному $x \in X \setminus M$. Далі просто зафіксуємо функцію $f(x) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_{N_k}(x), & x \in X \setminus M \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} = \lim\limits_{k\to\infty} (f_{N_k}(x) \cdot \mathbb{1}_{X\setminus M}(x))$. Це – та сама шукана $\mathcal{F}$-вимірна функція, як добуток першої вимірної (як границя) та другої вимірної.

III. Для цієї функції доведемо всі збіжності.
Зрозуміло, що $f_{N_k} \to f \pmod{\lambda}$, за побудуовою f та $\lambda(M) = 0$.
Зафіксуємо $\varepsilon, \delta > 0$. Оберемо такі $j \geq 1$, щоб $\dfrac{1}{2^{j-1}} < \min\{\varepsilon, \delta\}$. Розглянемо тепер ось таку множину $\tilde{M} = \bigcup\limits_{k=j}^{\infty} \left\{ x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \dfrac{1}{2^k} \right\}$. Оскільки $M \subset \tilde{M}$, то звідси $X \setminus M \supset X \setminus \tilde{M}$, а тому зокрема $\forall x \in X \setminus \tilde{M} : \exists \lim\limits_{k\to\infty} f_{N_k}(x) = f(x)$.
Зауважимо, що виконується наступне:
$$|f_{N_k}(x) - f(x)| = \lim_{l\to\infty} |f_{N_k}(x) - f_{N_l}(x)| \overset{\text{див. II}}{\leq} \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon.$$
Значить, $\forall x \in X \setminus \tilde{M} : |f_{N_k}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Мовою множин це означає, що
$X \setminus \tilde{M} \subset \{x : |f_{N_k}(x) - f(x)| < \varepsilon\}$.
$\tilde{M} \supset \{x : |f_{N_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$.
$$\text{Але тоді } \lambda\{x : |f_{N_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \lambda(\tilde{M}) = \lambda \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{ x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k} \right\} \right) \overset{\text{див. II}}{<} \frac{1}{2^{j-1}} < \delta.$$
Висновок: $f_{N_k} \xrightarrow{\lambda} f$. ■

Corollary 3.7.6 Теорема Ріса
Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та послідовність $f_n \xrightarrow{\lambda} f$. Тоді існує підпослідовність f_{n_k}, для якої $f_{n_k} \to f \pmod{\lambda}$.

Proof.
Збіжна за мірою означає фундаментальність за мірою. За теоремою вище, існує підпослідовність f_{n_k}, для якої $f_{n_k} \to g \pmod{\lambda}$.

Зрозуміло, що $f_n \xrightarrow{\lambda} f \implies f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$. Також за теоремою вище, $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} g$. А за єдиністю, $f \sim g \pmod{\lambda}$, але це тоді означає, що $f_{n_k} \to f \pmod{\lambda}$. ■

Corollary 3.7.7 Послідовність f_n фундаментальна за мірою $\lambda \iff f_n$ збіжна за мірою λ.

Proof.
$\boxed{\Leftarrow}$ Уже було.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: f_n – фундаментальна за мірою λ. Тоді за теоремою вище, існує підпослідовність $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$.
Нехай $\varepsilon > 0$, тоді за аналогічними міркуваннями (ми вже цю оцінку не раз показували):
$\lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \lambda\left\{x \in X : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right\} + \lambda\left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$.
Якщо $n \to \infty$, то автоматично $n_k \to \infty$, а в цьому випадку $\lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \to 0, n \to \infty$.
Отже, $f_n \xrightarrow{\lambda} f$. ■

Theorem 3.7.8 Теорема Лузіна
Задано $A = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$ та λ – міра Лебега. Маємо функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ – вимірна за Лебегом. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists g\colon A \to \mathbb{R}, g \in C(A) : \lambda\{x \in A : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$.
Без доведення.

4 Інтеграл Лебега

Надалі всюди я буду мати $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір із мірою, якщо ніде додатково це не буде вказано.

4.1 Первинні означення

Definition 4.1.1 Задано $p\colon X \to \mathbb{R}$ – проста, невід'ємна та $\mathcal{F}$-вимірна функція, тобто $p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ при $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = X$. Також нехай задано $A \in \mathcal{F}$.
Інтегралом Лебега від простої, невід'ємної функції p на множині A називають число:

$$\int_A p\, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda(A_k \cap A)$$

Якщо міра буде нескінченність, то ми кладемо $a \cdot +\infty = +\infty$ при $a \neq 0$, а також $0 \cdot +\infty = 0$.

Бувають ще позначають як $\int_A p(x)\, d\lambda(x)$ або навіть $\int_A p(x)\, \lambda(dx)$.

Remark 4.1.2 Нам треба переконатися, що інтеграл Лебега не залежить від представлення простої функції. Тому що, наприклад, я можу записати $p(x) = 2\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + 4\mathbb{1}_{(1,2]}(x)$, але можу записати як $p(x) = 2\mathbb{1}_{[0,0.5)} + 2\mathbb{1}_{[0.5,1)} + 4\mathbb{1}_{(1,2]}(x)$ – одна й та сама проста функція, але представлення різне.

Proof.
Розглянемо два представлення простої, невід'ємної $\mathcal{F}$-вимірної функції:
$p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x) \qquad p(x) = \sum_{i=1}^{j} b_i \mathbb{1}_{B_i}(x) \qquad \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup_{i=1}^{j} B_i = X.$
Для множини A зауважимо, що виконується рівність:
$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A) \qquad A = \bigsqcup_{i=1}^{j} (B_i \cap A).$
Далі для кожного представлення розпишемо інтеграл Лебега:
$$\int_A p\, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda(A_k \cap A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A)$$
$$\int_A p\, d\lambda = \sum_{i=1}^{j} b_i \lambda(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=1}^{n} b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A)$$
Якщо $A_k \cap B_i = \emptyset$, то тоді в цьому випадку $\lambda(A_k \cap B_i \cap A) = 0$. Тому надалі розглядаються випадки $A_k \cap B_i \neq \emptyset$. У цьому випадку беремо $x \in A_k \cap B_i$, звідси маємо $p(x) = a_k = b_i$. Помножимо обидві частини на $\lambda(A_k \cap B_i \cap A)$ – отримаємо $a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A) = b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A)$, а далі просумуємо по k, i – отримаємо рівність двох інтегралів. ■

Proposition 4.1.3 Властивості інтеграла Лебега від простої невід'ємної функції
Справедливі такі пункти:
1) Нехай p_1, p_2 – прості невід'ємні $\mathcal{F}$-вимірні функції, $p_1 \leq p_2$. Також $A \in \mathcal{F}$. Тоді $\int_A p_1\, d\lambda \leq \int_A p_2\, d\lambda$;
2) Нехай $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset$. Також p – проста невід'ємна $\mathcal{F}$-вимірна функція. Тоді $\int_{A \sqcup B} p\, d\lambda = \int_A p\, d\lambda + \int_B p\, d\lambda$;
3) Нехай $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B$. Також p – проста невід'ємна $\mathcal{F}$-вимірна функція. Тоді $\int_A p\, d\lambda \leq \int_B p\, d\lambda$;

Proof.
Доведемо виконання кожної властивості:

1) Маємо прості функції $p_1(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$, $p_2(x) = \sum_{i=1}^{j} b_i \mathbb{1}_{B_i}(x)$, причому $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup_{i=1}^{j} B_i = X$.
Аналогічними міркуваннями, що в зауваженні вище, розпишемо інтеграли Лебега:

$\int_A p_1\, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A);$
$\int_A p_2\, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A).$
Аналогічно розглянемо лише випадки $A_k \cap B_i \neq \emptyset$. Беремо $x \in A_k \cap B_i$, звідси $p_1(x) = a_k \leq b_i = p_2(x)$, просто тому що $p_1 \leq p_2$. Далі множимо на міру $\lambda(A_k \cap B_i \cap A)$ та сумуємо по k, i – отримали бажану нерівність.

2) *Випливає з того, що λ – адитивна функція множин.*

3) Зауважимо, що якщо $A \subset B$, то звідси $B = A \sqcup (B \setminus A)$. За властивістю 2), маємо
$\int_B p\, d\lambda = \int_A p\, d\lambda + \int_{B \setminus A} p\, d\lambda \geq \int_A p\, d\lambda.$

■

Definition 4.1.4 Задано $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – невід'ємна та $\mathcal{F}$ функція. Також нехай задано $A \in \mathcal{F}$.
Інтегралом Лебега від невід'ємної функції f на множині A називають число

$$\int_A f\, d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p\, d\lambda$$

Множина $K(p) = \{p\colon X \to \mathbb{R}$ – прості невід'ємні та $\mathcal{F}$-вимірні : $p \leq f\}$.

Remark 4.1.5 $K(f) \neq \emptyset$, тому що принаймні нульова функція $0 \in K(f)$.

Remark 4.1.6 Перше означення узгоджується з другим означенням, якщо в другому означенні взяти p – невід'ємну $\mathcal{F}$-вимірну функцію, але вже просту.

Proof.
За другим означенням інтеграла Лебега, маємо наступне:
$\underset{(2)}{\int_A} p\, d\lambda = \sup_{q \in K(p)} \int_A q\, d\lambda \geq \underset{(1)}{\int_A} p\, d\lambda$ (нерівність за означенням супремума, причому $p \in K(p)$).
Тепер оберемо $q \in K(p)$, тут q – проста невід'ємна $\mathcal{F}$-вимірна функція з умовою $q \leq p$. Тоді за властивістю 1) просто інтеграла Лебега, $\underset{(1)}{\int_A} q\, d\lambda \leq \underset{(1)}{\int_A} p\, d\lambda$. Але оскільки це виконано для всіх $q \in K(p)$, то зокрема для $\sup_{q \in K(p)} \int_A q\, d\lambda = \underset{(2)}{\int_A} p\, d\lambda \leq \underset{(1)}{\int_A} p\, d\lambda.$
Разом отримали рівність $\underset{(2)}{\int_A} p\, d\lambda \leq \underset{(1)}{\int_A} p\, d\lambda.$ ■

Definition 4.1.7 Задано $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – $\mathcal{F}$-вимірна функція. Також нехай задано $A \in \mathcal{F}$.
Інтегралом Лебега від функції f на множині A називають число

$$\int_A f\, d\lambda = \int_A f_+\, d\lambda - \int_A f_-\, d\lambda,$$

якщо хоча б один з інтегралів скінченний.
У цьому випадку $f = f_+ - f_-$, причому f_+, f_- – невід'ємні функції.

Функція f називається **інтегрованою за Лебегом на множині** A, якщо кожний обидва інтеграли в правій частині – скінченні.
Позначення: $f \in L(A, \lambda)$.

Remark 4.1.8 Друге означення узгоджується з третім означенням, якщо в третьому означенні взяти f – $\mathcal{F}$-вимірну функцію, але вже невід'ємну.

Proof.
Дійсно, коли f – невід'ємна, то звідси $f_+ = f$, а також $f_- = 0$. Тож звідси
$$\int_A f\,d\lambda \underset{(3)}{=} \int_A f_+\,d\lambda - \int_A f_-\,d\lambda \underset{(2)}{=} \int_A f\,d\lambda.$$ ■

Example 4.1.9 Розглянемо $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Тоді f_+, f_- – прості невід'ємні функції, де $f_+ = f_- = 1$, а за означенням, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_+\,d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} f_-\,d\lambda_1 = +\infty$, де λ_1 – міра Лебега. Ці дві функції не є інтегровними. При цьому $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda_1$ не визначений.

4.2 Наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій

Theorem 4.2.1 Задано $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – невід'ємна $\mathcal{F}$-вимірна функція. За теоремою, існує послідовність $\{p_n, n \geq 1\}$ так, що $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$, причому p_n – прості невід'ємні та $\mathcal{F}$-вимірні та $p_n \leq f$.
Тоді $\displaystyle\int_A f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A p_n\,d\lambda$.

Для доведення даної теореми сформулюємо одну лему:

Lemma 4.2.2 Задані $p, p_n\colon X \to \mathbb{R}$ – прості невід'ємні та $\mathcal{F}$-вимірні функції, причому
1) $p_n \leq p_{n+1}$
2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n \geq p$.
Тоді $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A p_n\,d\lambda \geq \int_A p\,d\lambda$.

Proof.
Маємо функцію $p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$, де $A_i \in \mathcal{F}$, причому $\displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{j} A_i = X$.
Нехай $\varepsilon > 0$ та розглянемо множини $B_n = \{x \in A : p_n \geq (1-\varepsilon)p\}$. Зауважимо, що:
B_n зростає за умовою 1);
$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$ за умовою 2).
Тож звідси випливатиме наступне:
$$\int_A p_n\,d\lambda \geq \int_{B_n} p_n\,d\lambda \geq \int_{B_n} (1-\varepsilon)p\,d\lambda = \sum_{i=1}^{j} (1-\varepsilon)a_i\lambda(A_i \cap B_n).$$
За неперервністю міри знизу, $\lambda(A_i \cap B_n) \to \lambda(A_i \cap A)$ при $n \to \infty$, звідси
$$\lim_{n\to\infty} \int_A p_n\,d\lambda \geq (1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{j} a_i\lambda(A_i \cap A) = (1-\varepsilon)\int_A p\,d\lambda.$$
Записана границя ліворуч існує, як границя неспадної послідовності. А далі, $\varepsilon \to 0$ – отримали бажану нерівність $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A p_n\,d\lambda \geq \int_A p\,d\lambda$. ■

Тепер ми готові до доведення основної теореми.

Proof.
Границя праворуч існує як границя неспадної послідовності.
Оскільки $p_n \leq f$, то $p_n \in K(f)$ і з другого означення інтеграла Лебега,
$$\int_A f\,d\lambda = \sup_{p\in K(f)} \int_A p\,d\lambda \geq \int_A p_n\,d\lambda \implies \int_A f\,d\lambda \geq \lim_{n\to\infty} \int_A p_n\,d\lambda.$$
Із іншого боку, для кожної $p \in K(f)$ маємо
$$p(x) \leq f(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x) \overset{\text{лема}}{\implies} \int_A p\,d\lambda \leq \lim_{n\to\infty} \int_A p_n\,d\lambda \implies \int_A f\,d\lambda \leq \lim_{n\to\infty} \int_A p_n\,d\lambda.$$ ■

4.3 Основні властивості та твердження

Theorem 4.3.1 Задано $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – невід'ємна та $\mathcal{F}$-вимірна функція. Тоді функція множин $\mu(A) = \int_A f\,d\lambda$ задає міру на $\mathcal{F}$.

Proof.
Функція множин μ уже невід'ємна, оскільки $\mu(A) = \int_A f\,d\lambda = \sup_{p\in K(f)} \int_A p\,d\lambda \geq 0$.
Залишилося довести σ-адитивність інтеграла. Нехай $A_n \in \mathcal{F}$, всі неперетинні. Уже автоматично $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{F}$. Ми розглянемо кілька випадків:
I. Випадок функції $\mathbb{1}_B$, де множина $B \in \mathcal{F}$.
$\mu(A) = \int_A \mathbb{1}_B\,d\lambda = \lambda(A\cap B) = \lambda\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n\cap B) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}\mathbb{1}_B\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

II. Випадок функції p – проста невід'ємна та $\mathcal{F}$-вимірна.
Тобто маємо $p = \sum_{i=1}^{j} b_i\mathbb{1}_{B_i}$ при $B_i \in \mathcal{F}$, $\bigsqcup_{i=1}^{j} B_i = X$. Із кроку I, вже відомо, що
$\mu_i(A) = \int_A \mathbb{1}_{B_i}\,d\lambda$ задає міру. Зауважимо, що тоді звідси
$\mu(A) = \int_A p\,d\lambda = \sum_{i=1}^{j} b_i\lambda(A\cap B_i) = \sum_{i=1}^{j} b_i\int_A \mathbb{1}_{B_i}\,d\lambda = b_i\mu_i(A)$.
Лінійна комбінація мір при невід'ємних коефіцієнтах залишається мірою (неважко показати).

III. Випадок функції f – невід'ємна та $\mathcal{F}$-вимірна.
Тоді існує послідовність простих невід'ємних та $\mathcal{F}$-вимірних функції $\{p_k\}$, для яких $p_k \to f$. Звідси маємо $\int_B f\,d\lambda = \lim_{k\to\infty}\int_B p_k\,d\lambda$ для кожної $B \in \mathcal{F}$. Ми хочемо довести, що $\int_A f\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\,d\lambda$.
Оберемо $p_k \in K(f)$, тоді звідси випливає
$\int_A p_k\,d\lambda \geq \int_{\bigsqcup_{n=1}^{q} A_n} p_k\,d\lambda \overset{\text{крок II}}{=} \sum_{n=1}^{q}\int_{A_n} p_k\,d\lambda$.
Спрямувавши $k\to\infty$, а згодом спрямувавши $q\to\infty$, отримаємо наступне:
$\int_A f\,d\lambda \geq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\,d\lambda$.

Із іншого боку, для кожного $p \in K(f)$ маємо $\int_A p\,d\lambda \overset{\text{крок II}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} p\,d\lambda \leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\,d\lambda$.
Оскільки це виконується для всіх $p \in K(f)$, то звідси отримаємо:
$\int_A f\,d\lambda \leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\,d\lambda$.

Нарешті, довели $\mu(A) = \int_A f\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. ■

Proposition 4.3.2 Властивості інтеграла Лебега
Всюди будуть розглядатися функції $f, g\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$, що $\mathcal{F}$-вимірні, а також множини $A, B \in \mathcal{F}$. Виконуються наступні властивості:
1) Нехай $N \in \mathcal{F}$ така, що $\lambda(N) = 0$. Тоді $\int_A f\,d\lambda = 0$.
2) $\int_X f\cdot 1_A\,d\lambda = \int_A f\,d\lambda$ (за умовою, що бодай один з цих інтегралів інсує)
3) $\int_A cf\,d\lambda = c\int_A f\,d\lambda$ при $c \in \mathbb{R}$) (за умовою, що $\int_A f\,d\lambda$ існує)
4) Нехай $f \leq g$. Тоді $\int_A f\,d\lambda \leq \int_A g\,d\lambda$ (за умовою, що обидва інтеграли існують)
5) Нехай f – невід'ємна та $A \subset B$. Тоді $\int_A f\,d\lambda \leq \int_B f\,d\lambda$

6) Нехай $A \subset B$ та при цьому існує $\int_B f\,d\lambda$. Тоді існуватиме й $\int_A f\,d\lambda$. Причому якщо $f \in L(B,\lambda)$, то й $f \in L(A,\lambda)$.

7) Припустимо $\int_X f_-\,d\lambda < +\infty$. Тоді $\nu(A) = \int_A f\,d\lambda$ буде σ-адитивною на $\mathcal{F}$ (спойлер: дана функція множин задає заряд).

8) $f \in L(A,\lambda) \iff |f| \in L(A,\lambda)$, причому справедлива нерівність $\left|\int_A f\,d\lambda\right| \le \int_A |f|\,d\lambda$.

9) Нехай $f \sim g \pmod{\lambda}$. Тоді $\int_A f\,d\lambda = \int_A g\,d\lambda$ (за умовою, що хоча б один з цих інтегралів існує)

10) Нехай $f \in L(A,\lambda)$. Тоді $|f| < +\infty \pmod{\lambda}$ на множині A

11) Нехай f – невід'ємна та $\int_A f\,d\lambda = 0$. Тоді $f = 0 \pmod{\lambda}$ на множині A.

12) Нехай $\int_A f\,d\lambda = 0$ для всіх $A \in \mathcal{F}$. Тоді $f \equiv 0 \pmod{\lambda}$ на X.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості:

1) Розглянемо кілька випадків:

I. p – проста невід'ємна та $\mathcal{F}$-вимірна, тоді $\int_N p\,d\lambda = \sum_{k=1}^n a_k\lambda(A_k \cap N) = 0$, тому що $\lambda(A_k \cap N) = 0$.

II. f – невід'ємна та $\mathcal{F}$-вимірна, тоді $\int_N f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_N p_n\,d\lambda \overset{\text{крок I}}{=} 0$.

III. f – довільна $\mathcal{F}$-вимірна, тоді $\int_N f\,d\lambda = \int_N f_+\,d\lambda - \int_N f_-\,d\lambda \overset{\text{крок II}}{=} 0$.

2) Розглянемо кілька випадків:

I. p – проста невід'ємна та $\mathcal{F}$-вимірна, тобто $p(x)\sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$. Звідси $p(x)\mathbb{1}_A(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k\cap A}(x)$ – теж проста, а значить, $\int_X p\cdot\mathbb{1}\,d\lambda = \sum_{k=1}^n a_k\lambda(X\cap(A\cap A_k)) = \sum_{k=1}^n a_k\lambda(A\cap A_k) = \int_A p\,d\lambda$.

II. f – невід'ємна та $\mathcal{F}$-вимірна, тоді відомо, що $p_n \to f$ за теоремою. Але при цьому $p_n\mathbb{1}_A$ також монотонно зростає та $p_n\mathbb{1}_A \to f$. Значить,
$\int_X f\cdot\mathbb{1}_A\,d\lambda = \lim_{r\to\infty}\int_X p_r\mathbb{1}_A\,d\lambda \overset{\text{крок I}}{=} \lim_{r\to\infty}\int_A p_r\,d\lambda = \int_A f\,d\lambda$.

III. f – довільна $\mathcal{F}$-вимірна, тобто $f = f_+ - f_-$. Але тоді $f\mathbb{1}_A = (f\mathbb{1}_A)_+ - (f\mathbb{1}_A)_- = f_+\mathbb{1}_A - f_-\mathbb{1}_A$. Значить, $\int_X f\cdot\mathbb{1}_A\,d\lambda = \int_X (f\mathbb{1}_A)_+\,d\lambda - \int_X (f\mathbb{1}_A)_-\,d\lambda \overset{\text{крок II}}{=} \int_A f_+\,d\lambda - \int_A f_-\,d\lambda = \int_A f\,d\lambda$.

3) Спочатку розглянемо сценарій $c \ge 0$. Знову кілька випадків:

I. p – проста невід'ємна та $\mathcal{F}$-вимірна, тобто $p(x)\sum_{k=1}^n a_k\mathbb{1}_{A_k}(x)$. Звідси $cp(x) = \sum_{k=1}^n (ca_k)\mathbb{1}_{A_k}(x)$ – теж проста, а значить, $\int_A cp\,d\lambda = \sum_{k=1}^n (ca_k)\lambda(A\cap A_k) = c\int_A p\,d\lambda$.

II. f – невід'ємна та $\mathcal{F}$-вимірна, тоді відомо, що $p_n \to f$ за теоремою. Але при цьому cp_n також монотонно зростає та $cp_n \to f$. Значить, $\int_A cf\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_A cp_n\,d\lambda \overset{\text{крок I}}{=} \lim_{n\to\infty} c\int_A p_n\,d\lambda = c\int_A f\,d\lambda$.

III. f – довільна $\mathcal{F}$-вимірна, тобто $f = f_+ - f_-$. Але тоді $cf = (cf)_+ - (cf)_- = cf_+ - cf_-$. Значить, $\int_A cf\,d\lambda = \int_A (cf)_+\,d\lambda - \int_A (cf)_-\,d\lambda \overset{\text{крок II}}{=} c\int_A f_+\,d\lambda - c\int_A f_-\,d\lambda = c\int_A f\,d\lambda$.

Також розглянемо $c < 0$. Позначимо число $d = -c > 0$, тоді вже виконується
$\int_A df\,d\lambda = d\int_A f\,d\lambda = -c\int_A f\,d\lambda$.
Із іншого боку, $df = (-c)f = (-cf) = (-cf)_+ - (-cf)_- = cf_- - cf_+$. Тож
$\int_A df\,d\lambda = \int_A cf_-\,d\lambda - \int_A cf_+\,d\lambda = -\int_A cf_+\,d\lambda + \int_A cf_-\,d\lambda = -\int_A cf\,d\lambda$.
Маючи два рівності, отримаємо звідси $\int_A cf\,d\lambda = c\int_A f_?\lambda$.

4) Спочатку розглянемо випадки, коли $f \leq g$ та f, g – невід'ємні. Зауважимо, що $K(f) \subset K(g)$, але тоді звідси $\displaystyle\int_A f\,d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p\,d\lambda \leq \sup_{p \in K(g)} \int_A p\,d\lambda = \int_A g\,d\lambda$.
Тепер f, g – довільні, тобто $f = f_+ - f_-$ та $g = g_+ - g_-$. Звідси
$\displaystyle\int_A f\,d\lambda = \int_A f_+\,d\lambda - \int_A f_-\,d\lambda \leq \int_A g_+\,d\lambda - \int_A g_-\,d\lambda = \int_A g\,d\lambda.$

5) *Випливає з властивості інтеграла Лебега від простої функції.*

6) *Випливає з властивості 5) інтегралу Лебега.*

7) Із умови випливає, що $\displaystyle\int_X f\,d\lambda$ існує. А за властивістю 6), всі $\displaystyle\int_A f\,d\lambda$ існують при $A \subset X$. Властивість σ-адитивності довести неважко.

8) Спочатку варто зауважити, що $\displaystyle\int_A |f|\,d\lambda = \int_A f_+\,d\lambda + \int_A f_-\,d\lambda$. Дійсно,
$\displaystyle\int_A |f|\,d\lambda = \int_{A \cap \{f \geq 0\}} |f|\,d\lambda + \int_{A \cap \{f < 0\}} |f|\,d\lambda = \int_A |f| \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}}\,d\lambda + \int_A |f| \mathbb{1}_{\{f < 0\}}\,d\lambda = \int_A f_+\,d\lambda + \int_A f_-\,d\lambda.$
Із цієї рівності легко вилпиває $f \in L(A, \lambda) \iff |f| \in L(A, \lambda)$. Нарешті,
$\displaystyle\left|\int_A f\,d\lambda\right| = \left|\int_A f_+\,d\lambda - \int_A f_-\,d\lambda\right| \leq \left|\int_A f_+\,d\lambda\right| + \left|\int_A f_-\,d\lambda\right| = \int_A f_+\,d\lambda + \int_A f_-\,d\lambda = \int_A |f|\,d\lambda.$

9) Маємо N – множина, що $\lambda(N) = 0$ та $f(x) = g(x)$ для $x \in A \setminus N$. Тоді
$\displaystyle\int_A f_+\,d\lambda = \int_{A \setminus N} f_+\,d\lambda + \int_N f_+\,d\lambda = \int_{A \setminus N} f_+\,d\lambda = \int_{A \setminus N} g_+\,d\lambda = \int_{A \setminus N} g_+\,d\lambda + \int_N g_+\,d\lambda = \int_A g_+\,d\lambda.$
Аналогічним чином $\displaystyle\int_A f_-\,d\lambda = \int_A g_-\,d\lambda$.

10) !Припустимо, що міра $\lambda\{x \in A : |f(x)| = +\infty\} = \varepsilon > 0$. Це ми взяли заперечення від умови $|f| < +\infty \pmod{\lambda}$ на A. Тоді звідси при фіксованому $n \geq 1$ маємо
$\displaystyle\int_A |f|\,d\lambda \geq \int_{A \cap \{|f| \geq n\}} |f|\,d\lambda > \int_{A \cap |f| \geq n} n\,d\lambda = n\lambda(A \cap \{|f| \geq n\}) \geq n\varepsilon.$
Якщо $n \to \infty$, то звідси отримаємо $|f| \notin L(A, \lambda) \implies f \notin L(A, \lambda)$. Суперечність!

11) Ми хочемо довести, що $\lambda\{x \in A : f \neq 0\} = 0$. Для цього
$\displaystyle 0 = \int_A f\,d\lambda \geq \int_{A \cap \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}} f\,d\lambda \geq \int_{A \cap \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}} \frac{1}{n}\,d\lambda = \frac{1}{n}\lambda\left(A \cap \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right).$
Тобто $\displaystyle\lambda\left(A \cap \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$.

Але зауважимо, що $\displaystyle\{x \in A : f \neq 0\} = A \cap \{x : f \neq 0\} = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : f \geq \frac{1}{n}\right\}$. Оскільки множина зростає, то за неперервністю міри знизу, доведемо $\lambda\{x \in A : f \neq 0\} = 0$.

12) Використаємо попередню властивість 11). Маємо наступне:
$\displaystyle\int_X f_+\,d\lambda = \int_X f \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}}\,d\lambda = \int_{\{f \geq 0\}} f\,d\lambda = 0 \implies f_+ = 0 \pmod{\lambda}.$
$\displaystyle\int_X f_-\,d\lambda = \int_X (-f) \mathbb{1}_{\{f < 0\}}\,d\lambda = \int_{\{f < 0\}} (-f)\,d\lambda = -\int_{\{f < 0\}} f\,d\lambda = 0 \implies f_- = 0 \pmod{\lambda}.$
Разом неважко розписати, що $f = f_+ - f_- = 0 \pmod{\lambda}$.

Всі властивості доведені. ■

Theorem 4.3.3 Задані функції $f, g \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – $\mathcal{F}$-вимірні функції, а також $A \in \mathcal{F}$. Припустимо, що $f, g \in L(A, \lambda)$, то звідси $f + g \in L(A, \lambda)$, причому
$\displaystyle\int_A (f + g)\,d\lambda = \int_A f\,d\lambda + \int_A g\,d\lambda.$

Remark 4.3.4 У доведенні буде зауваження, що для f, g – невід'ємних, рівність завжди виконана.

Proof.
Розглянемо кілька випадків:
I. p, q – обидва прості невід'ємні та $\mathcal{F}$-вимірні функції.
Тобто $p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ та $q(x) = \sum_{i=1}^{j} b_i \mathbb{1}_{B_i}(x)$. Тоді вже показувалося (TODO: десь вставити), що $p + q$ – проста, але також $p(x) + q(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} (a_k + b_i) \mathbb{1}_{A_k \cap B_i}(x)$. Звідси випливає наступне:

$$\int_A p + q \, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} (a_k + b_i) \lambda(A_k \cap B_i \cap A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A) + \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=1}^{n} b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda(A_k \cap A) + \sum_{i=1}^{j} b_i \lambda(B_i \cap A) = \int_A p \, d\lambda + \int_A q \, d\lambda.$$

II. f, g – обидва невід'ємні та $\mathcal{F}$-вимірні функції.
Тоді існують послідовності простих невід'ємних та $\mathcal{F}$-вимірних функцій $\{p_n\}, \{q_n\}$, для яких $p_n \to f, q_n \to g$. Тоді зрозуміло, що $p_n + q_n \to f + g$ (така послідовність теж монотонно зростає).
$\int_A f + g \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_A p_n + q_n \, d\lambda \overset{\text{крок I}}{=} \lim_{n \to \infty} \int_A p_n \, d\lambda + \lim_{n \to \infty} \int_A q_n \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_A g \, d\lambda.$

III. f, g – довільні $\mathcal{F}$-вимірні функції.
Нехай для початку $f, g \in L(A, \lambda)$. Тож звідси отримаємо таку оціночку:
$\int_A |f + g| \, d\lambda \leq \int_A |f| + |g| \, d\lambda \overset{\text{крок II}}{=} \int_A |f| \, d\lambda + \int_A |g| \, d\lambda < +\infty$, за нашим нехай.
Отже, $|f + g| \in L(A, \lambda) \iff f + g \in L(A, \lambda)$.
Залишилося довести рівність. Спочатку розглянемо випадок $f \geq 0, g < 0$. Розіб'ємо множину A на об'єднання таких множин: $A = A_+ \sqcup A_-$.
$A_+ = \{x \in A \mid f(x) + g(x) \geq 0\}$ $\qquad A_- = \{x \in A \mid f(x) + g(x) < 0\}$.
На множині A_+ уже відомо, що $\int_{A_+} f + g \, d\lambda = \int_{A_+} f \, d\lambda + \int_{A_+} g \, d\lambda$ (крок II).
На множині A_- зауважимо, що $-g = -(f + g) + f$, причому $-(f + g), f$ – обидва невід'ємні. Тоді за кроком II, $\int_{A_-} -g \, d\lambda = \int_{A_-} -(f + g) + f \, d\lambda = \int_{A_-} -(f + g) \, d\lambda + \int_{A_-} f \, d\lambda$. За властивостями вище, отримаємо рівність $\int_{A_-} f + g \, d\lambda = \int_{A_-} f \, d\lambda + \int_{A_-} g \, d\lambda$.
Два рівності ми додамо, а далі, користуючись адитивністю інтеграла, отримаємо:
$\int_A f + g \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_A g \, d\lambda$ для випадку $f \geq 0, g < 0$.
Тепер розглянемо повністю загальний випадок функцій f, g. Розіб'ємо множину A на об'єднання таки множин: $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4$.
$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \geq 0, g(x) \geq 0\}$ $\qquad A_3 = \{x \in A \mid f(x) < 0, g(x) \geq 0\}$.
$A_2 = \{x \in A \mid f(x) \geq 0, g(x) < 0\}$ $\qquad A_4 = \{x \in A \mid f(x) < 0, g(x) < 0\}$.
На множині A_1, A_2, A_3 лінійність уже виконується. Для A_4 треба зауважити, що $-f, -g$ – невід'ємні, а там аналогічною процедурою можна отримати лінійність. Залишилось чотири рівності пододавати та скористатися адитивністю інтеграла – отримаємо рівність: $\int_A f + g \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_A g \, d\lambda$. ■

4.4 Граничні теореми

Theorem 4.4.1 Інтегрування невід'ємної монотонної послідовності
Задано $f_n \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – всі невід'ємні $\mathcal{F}$-вимірні, причому дана послідовність монотонно зростає. Тоді $\int_A \lim_{n \to \infty} f_n \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n \, d\lambda$.

Proof.
Позначимо $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ – вона визначена на $\bar{\mathbb{R}}$ в силу монотонного зростання $\{f_n\}$. Всі f_n невід'ємні за умовою, тож існують послідовності простих невід'ємних та $\mathcal{F}$-вимірних функцій $\{p_{nq}\}$, для яких $p_{nq} \to f_n,\ q \to \infty$.

Розглянемо послідовність $\{\tilde{p}_j\}$, що задається як $\tilde{p}_j(x) = \max\limits_{\substack{1\le n\le j\\ 1\le q\le j}} p_{nq}(x)$. Всі ці функції: прості, бо кожні необхідні нам p_{nq} приймають скінченне значення; невід'ємні – тут зрозуміло; $\mathcal{F}$-вимірна як максимум $\mathcal{F}$-вимірних. Ми хочемо довести, що $\tilde{p}_j \to f,\ j \to \infty$.
По-перше, $\tilde{p}_j \ge p_{nj}$, як максимум. Спрямуємо спочатку $j \to \infty$, потім $n \to \infty$ – буде $\lim\limits_{j\to\infty} \tilde{p}_j \ge f$.
По-друге, для кожного $n \le j$ та кожного $q \le j$ маємо $p_{nq} \le f_n \le f_j$. Оскільки це для кожних n, q виконано, то тим паче $\tilde{p}_j \le f_j$. При $j \to \infty$ отримаємо $\lim\limits_{j\to\infty} \tilde{p}_j \le f$.
Отже, дійсно $\tilde{p}_j \to f, j \to \infty$. Більше того, справедлива така оцінка:
$\tilde{p}_j \le f_j \le f \implies \int_A \tilde{p}_j \, d\lambda \le \int_A f_j \, d\lambda \le \int_A f \, d\lambda$.
При $j \to \infty$ буде $\int_A \tilde{p}_j \, d\lambda \to \int_A f \, d\lambda$. За теоремою про двох поліцаїв, $\int_A f \, d\lambda = \lim\limits_{j\to\infty} \int_A f_j \, d\lambda$. ■

Corollary 4.4.2 Інтегрування невід'ємного функціонального ряду
Задано $f_n \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – всі невід'ємні $\mathcal{F}$-вимірні. Тоді $\int_A \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \, d\lambda = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_A f_n \, d\lambda$.

Вказівка: скористатися теоремою вище, розглянувши послідовність $g_k = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n$.

Theorem 4.4.3 Теорема Бепо Леві (інтегрування довільної монотонної послідовності)
Задано $f_n \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$, причому $f_n \in L(A, \lambda)$, дана послідовність монотонно зростає. При цьому $\sup\limits_{n\ge 1} \int_A f_n \, d\lambda < +\infty$. Тоді $\int_A \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda$.

Proof.
Позначимо $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ – вона визначеня на $\bar{\mathbb{R}}$ в силу монотонного зростання $\{f_n\}$.
Розглянемо функції $g_n = f_1 - f_n$. Зауважимо, що всі невід'ємні, а також це монотонна послідовність. Причому $g = f_1 - f$, де в нас $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$. Зокрема оскільки $f_1, f_n \in L(A, \lambda)$, то сюди включаються умови, що f_1, f_n є $\mathcal{F}$-вимірними. Тоді за попередньою теоремою, $\int_A g \, d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int_A g_n \, d\lambda$.
$\int_A f_1 - f \, d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_1 - f_n \, d\lambda = \int_A f_1 \, d\lambda - \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda$.
Праворуч ми розписали, просто тому що $f_n \in L(A, \lambda)$. А ось ліворуч ми це так не можемо. Нам треба довести, що $f_1 - f \in L(A, \lambda), f \in L(A, \lambda)$. І тоді там вже можна розписати.
Маємо $\int_A g_n \, d\lambda$ – послідовність таких інтегралів – зростає. Але оскільки $\sup\limits_{n\ge 1} \int_A f_n \, d\lambda < +\infty$, то звідси $\sup\limits_{n\ge 1} \int_A g_n \, d\lambda \le \sup\limits_{n\ge 1} \int_A f_n \, d\lambda - \int_A f_1 \, d\lambda < +\infty$. Звідси $\int_A g \, d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int_A g_n \, d\lambda < +\infty$. А це в точності $g = f - f_1 \in L(A, \lambda)$. Після цього $f \in L(A, \lambda)$.
$\int_A f_1 - \int_A f \, d\lambda = \int_A f_1 \, d\lambda - \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda \implies \int_A f \, d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda$. ■

Theorem 4.4.4 Теорема Фату
Задано $f_n \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – всі неві'ємні $\mathcal{F}$-вимірні. Тоді $\int_A \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n \, d\lambda \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda$.

Proof.
Маємо функцію $f = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\ge n} f_k$. Позначимо $g_n = \inf\limits_{k\ge n} f_k$. Зауважимо, що g_n – невід'ємні та $\mathcal{F}$-вимірні (як інфімум вимірних), причому послідовність зростає. Значить, за теоремою про невід'ємну послідовність,
$\int_A f \, d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int_A g_n \, d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int_A \inf\limits_{k\ge n} f_k = \varliminf\limits_{n\to\infty} \int_A \inf\limits_{k\ge n} f_k \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda$. ■

Theorem 4.4.5 Теорема Лебега
Задано $f_n \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – всі $\mathcal{F}$-вимірні, причому $f_n \to f \pmod{\lambda}$. Нехай існує функція $g \in L(A, \lambda)$, для якої $|f_n| \le g \pmod{\lambda}$ – мажоруюча функція. Тоді $f \in L(A, \lambda)$, причому $\int_A f \, d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda$.

Proof.
Зауважимо, що оскільки $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$ та $f_n \to f \pmod{\lambda}$, то звідси $|f| \leq g \pmod{\lambda}$. Оскільки мажоранта $g \in L(A, \lambda)$, то звідси $f \in L(A, \lambda)$.
Із той самої нерівності $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$ та умови $g \in L(A, \lambda)$ випливає $f_n \in L(A, \lambda)$.
Оскільки $|f| \leq g$, то звідси $-g \leq f \leq g$, тобто $g + f \geq 0$ та $g - f \geq 0$ – і це все $\pmod{\lambda}$.
Застосуємо теорему Фату для цих двох функцій в двох нерівностях.
$\displaystyle\int_A g + f \, d\lambda = \int_A \varliminf_{n\to\infty} (g + f_n) \, d\lambda \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A g + f_n \, d\lambda = \int_A g \, d\lambda + \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda.$
$g, f \in L(A, \lambda) \implies g + f \in L(A, \lambda)$, тому юзаємо лінійність. Звідси $\displaystyle\int_A f \, d\lambda \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda$.
$\displaystyle\int_A g - f \, d\lambda = \int_A \varliminf_{n\to\infty} (g - f_n) \, d\lambda \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A g - f_n \, d\lambda = \int_A g \, d\lambda - \varlimsup_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda.$
Знову можна застосувати зліва лінійність – отримаємо $\displaystyle\int_A f \, d\lambda \geq \varlimsup_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda$.
Ці нерівності дають зробити висновок, що $\displaystyle\int_A f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda$. ■

Corollary 4.4.6 Теорема Лебега (другий варіант)
Задано $f_n \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – всі $\mathcal{F}$-вимірні, причому $f_n \xrightarrow{\lambda} f \pmod{\lambda}$. Нехай існує функція $g \in L(A, \lambda)$, для якої $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$ – мажоруюча функція. Тоді $f \in L(A, \lambda)$, причому $\displaystyle\int_A f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda$.
Тобто ми замінили умову збіжності майже скрізь на збіжність за мірою.

Proof.
За теоремою Ріса, можна підібрати підпослідовність, щоб $f_{n_k} \to f \pmod{\lambda}$. Якщо $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$, то тоді зрозуміло, що $|f_{n_k}| \leq g \pmod{\lambda}$, звідси отримаємо аналогічним чином $f \in L(A, \lambda)$. Незважаючи на заміни в умовах, все одно $f_n \in L(A, \lambda)$.
Нащо це додатково перевіряти. Для того, щоб можна було коректно записати доведення існування границі від супротивного. $f, f_n \in L(A, \lambda)$, а значить, вони можуть бути в інтегралі.

!Припустимо, що $\displaystyle\int_A f_n \, d\lambda \not\to \int_A f \, d\lambda$ (зауваження вище дозволяє нам таке записати). Тобто звідси існує якийсь $\varepsilon^* > 0$, де для кожного k існує $n_k \geq k$, щоб $\displaystyle\left| \int_A f_{n_k} \, d\lambda - \int_A f \, d\lambda \right| \geq \varepsilon^*$.
Для підпослідовності f_{n_k} все одно $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$, але знову ж за теоремою Ріса, $f_{n_{k_m}} \to f \pmod{\lambda}$ для деякої підпідпослідовності. Але за теоремою Лебега (для першого випадку), $\displaystyle\int_A f_{n_{k_m}} \, d\lambda \to \int_A f \, d\lambda$ – суперечність! ■

Remark 4.4.7 Зараз буде кілька зауважень, демонстрація якого буде на наступного прикладі:
1) умова монотонності в **Th. 4.4.1** суттєва;
2) нерівність в теоремі Фату може бути строгою;
3) умова існування мажоранти в теоремі Лебега суттєва.

Example 4.4.8 Маємо $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ та міру Лебега λ_1. Ми вже знаємо, що $f_n \to 0 \pmod{\lambda_1}$.
При цьому $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda_1 = \lambda_1([n, n+1]) = 1$, а також $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} 0 \, d\lambda_1 = 0$.
Тобто звідси $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda_1 \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda_1$.
Всі невід'ємні та вимірни, але зрозуміло, що послідовність не монотонна.
Також $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varliminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda_1 = 0 < 1 = \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda_1$.
Також задовольняє всім умовам Лебега, але лише мажоранта відсутня. Якби мажоранта $g \in L(A, \lambda)$ існувала, при яких $\mathbb{1}_{[n,n+1]} \leq g \pmod{\lambda_1}$, то ми би отримали $g \geq 1 \pmod{\lambda_1}$. Але тоді звідси маємо $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda \geq \int_{\mathbb{R}} 1 \, d\lambda_1 = +\infty$ – суперечить умові.

4.5 Порівняння інтеграла Рімана з інтегралом Лебега

Theorem 4.5.1 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Тоді $f \in L([a,b],\lambda_1)$, де λ_1 – міра Лебега, при цьому $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda_1$.

Proof.
Оскільки $f \in \mathcal{R}([a,b])$, то вона обмежена деякою константою. Дана константа буде мажорантою g. Нехай τ_n – розбиття відрізка $[a,b]$ так, щоб відрізок поділився на підвідрізки довжин $\dfrac{b-a}{2^n}$. Зауважимо, що $|\tau_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Розглянемо наступні функціональні послідовності:

$$\overline{f}_n(x) = f(a)\mathbb{1}_{\{a\}}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} M_k \mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k]}(x) \qquad \underline{f}_n(x) = f(a)\mathbb{1}_{\{a\}}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} m_k \mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k]}(x).$$

У цьому випадку маємо $M_k = \sup\limits_{x\in(x_{k-1},x_k]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x\in(x_{k-1},x_k]} f(x)$.

Зауважимо, що всі ці функції $\overline{f}_n, \underline{f}_n$ вимірні за Лебегом в силу вимірності всіх індикаторів, бо $\{a\}, (x_{k-1},x_k]$ вимірні за Лебегом. Ще помітимо, що $\overline{f}_n$ спадає та $\underline{f}_n$ зростає, але обидва обмежені в силу нерівності $\underline{f}_n \le f \le \overline{f}_n$. Тоді існують $\overline{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f}_n$ та $\underline{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f}_n$. Значить, виконана нерівність $\underline{f} \le f \le \overline{f}$, причому $\underline{f}, \overline{f}$ також вимірні за Лебегом. Значить, всі $\overline{f}, \underline{f} \in L([a,b],\lambda_1)$ за теоремою Лебега, бо вони за модулем обмежені мажорантою.

$$\int_{[a,b]} \overline{f}\,d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \overline{f}_n\,d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} M_k \Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$$\int_{[a,b]} \underline{f}\,d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \underline{f}_n\,d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} m_k \Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Отже, $\displaystyle\int_{[a,b]} \overline{f} - \underline{f}\,d\lambda = 0 \implies \overline{f} = \underline{f} \pmod{\lambda_1}$. Отримаємо тоді $\underline{f} \le f \le \underline{f} \pmod{\lambda_1}$. Оскільки $\underline{f}$ вимірна за Лебегом, а міра Лебега – повна, то тоді f – вимірна за Лебегом. Вона також обмежена мажорантою, тож $f \in L([a,b],\lambda_1)$. Щодо інтегралу:

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_{[a,b]} \underline{f}\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

Theorem 4.5.2 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a,A])$ для всіх $A > a$.

1) нехай $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ абсолютно збіжний. Тоді $f \in L([a,+\infty),\lambda_1)$ та $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{[a,+\infty)} f\,d\lambda_1$;

2) нехай $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ не абсолютно збіжний. Тоді $f \notin L([a,+\infty),\lambda_1)$.

Всюди λ_1 – це міра Лебега.

Proof.
1) Розглянемо випадок $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – абсолютно збіжний, тоді звідси $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$.

Оскільки $f \in \mathcal{R}([a,A])$, то звідси $f \in L([a,A],\lambda_1)$, при цьому $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = \int_{[a,A]} f\,d\lambda_1$.

Зауважимо, що $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[a,a+n]} \to f$ при $n \to \infty$, причому $|f_n|$ монотонна послідовність. Отже,

$$\int_{[a,+\infty)} |f|\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,+\infty)} |f|\mathbb{1}_{[a,a+n]}\,d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,a+n]} |f|\,d\lambda =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} |f(x)|\,dx = \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty \implies f \in L([a,+\infty),\lambda_1).$$

Для коректності треба пересвідчитися, що f вимірна за Лебегом. Маємо $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, а тому звідси $f^{-1}(B) = \{x \in [a,+\infty) : f(x) \in B\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in [a,a+n] : f(x) \in B\} \in \mathcal{S}_1$. Останні множини вимірні за Лебегом, бо $f \in \mathcal{R}([a,a+n])$.

$$\int_{[a,+\infty)} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,+\infty)} f\mathbb{1}_{[a,a+n]}\,d\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,a+n]} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Даний ланцюг рівностей працює в силу теореми Лебега, де в якості мажоранти вступає $|f|$.

2) Розглянемо випадок $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – не абсолютно збіжний, тоді $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = +\infty$. За міркуваннями вище, отримаємо $\displaystyle\int_{[a,+\infty)} |f|\,d\lambda = +\infty$, а це означає $f \notin L([a,+\infty),\lambda_1)$. ■

Example 4.5.3 Обчислити $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^n x\,dx$.
Стандартними інструментами математичного аналізу це можна зробити, але мега важко.
Маємо функцію $f(x) = e^{-x}\sin^n x\,dx$ – зрозмуіло, що вона інтегровна. Також неважко переконатися, що $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжна абсолютно. Тоді працює щойно отримана теорема, зокрема
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^n x\,dx = \int_{[0,+\infty)} e^{-x}\sin^n x\,d\lambda_1(x)$.
Зауважимо, що $e^{-x}\sin^n x \to 0, n \to \infty \pmod{\lambda_1}$, а також вона обмежена мажорантою $e^{-x} \in L([0,+\infty),\lambda_1)$. Тоді за теоремою Лебега, отримаємо:
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^n x\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} e^{-x}\sin^n x\,d\lambda_1(x) = \int_{[0,+\infty)} 0\,d\lambda_1 = 0$.

TODO: додати інтеграл Рімана-Стілт'еса.

4.6 Інтеграл з параметром

Definition 4.6.1 Задано $(X,\mathcal{F},\lambda)$ – вимірний простір з мірою та функцію $f\colon X\times T \to \bar{\mathbb{R}}$.
Інтегралом з параметром назвемо наступну функцію:

$$I(t) = \int_X f(x,t)\,d\lambda(x)$$

Вона визначена в цих точках $t \in T$, де функція f стає $\mathcal{F}$-вимірною.

Theorem 4.6.2 Про неперервність
Задано $f\colon X\times T \to \bar{\mathbb{R}}$, причому T – метричний простір. Нехай для кожного $x \in X$ відомо $f(x,\cdot) \in C(T)$, а також для кожного $t \in T$ відомо, що $f(\cdot,t)$ є $\mathcal{F}$-вимірною. Нарешті, нехай існує мажоранта $g \in L(X,\lambda)$ (не залежить від t), для якої $|f(x,t)| \le g(x)$.
Тоді $I \in C(T)$.

Proof.
Нехай $\{t_n\} \subset T$ задається так, щоб $t_n \to t_0, n \to \infty$. Хочемо довести, що $I(t_n) \to I(t_0)$.
Оскільки $f(\cdot,t_n)$ всі $\mathcal{F}$-вимірні, причому $f(\cdot,t_n) \to f(\cdot,t_0)$ за неперервністю, а також $|f(x,t_n)| \le g(x)$, то за теоремою Лебега, ми маємо, що $I(t)$ визначена для $t_0 \in T$, тому що $f(\cdot,t) \in L(X,\lambda)$.
Більш того, $\displaystyle I(t_0) = \int_X f(x,t_0)\,d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X f(x,t_n)\,d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} I(t_n)$. ■

Theorem 4.6.3 Про диференціювання
Задано $f\colon X\times T \to \bar{\mathbb{R}}$, причому T – відкрита підмножина $\mathbb{R}$. Нехай для кожного $t \in T$ відомо, що $f(\cdot,t) \in L(X,\lambda)$. Також $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ визначена на $X \times T$. Нарешті, нехай існує мажоранта $g \in L(X,\lambda)$ (яка не залежить від t), для якої $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x)$.
Тоді I – диференційована на множині T, причому $\displaystyle I'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,d\lambda(x)$.

Proof.
Нехай $\{t_n\} \subset T$ задається так, щоб $t_n \to t_0, n \to \infty$. Маємо
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I(t_n)-I(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n - t_0}\left(\int_X f(x,t_n)\,d\lambda(x) - \int_X f(x,t_0)\,d\lambda(x)\right) \overset{f(\cdot,t)\in L(X,\lambda)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t-t_0} \boxed{=}$
За теоремою Лагранжа, $\left|\dfrac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t-t_0}\right| = \left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t_n^*)\right| \le g(x)$ при проміжному $t_n^* \in G$. Можна застосувати теорему Лебега
$\displaystyle\boxed{=} \int_X \lim_{n\to\infty} \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t-t_0}\,d\lambda(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,d\lambda(x)$.
Таким чином, I диференційована в будь-якій точці $t_0 \in G$ та $\displaystyle I'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,d\lambda(x)$. ■

4.7 Заміна змінної

Нехай задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ та $(X', \mathcal{F}', \lambda')$ – два вимірних простори з мірами. Причому друга міра визначається таким чином:

$$\lambda'(A) = \lambda(T^{-1}A),$$

де $T\colon X \to X'$ відображення $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-вимірне.

Lemma 4.7.1 λ' дійсно задає міру.
Випливає з властивостей прообраза.

Theorem 4.7.2 Задано функцію $f\colon X' \to \bar{\mathbb{R}}$ – $\mathcal{F}'$-вимірна. Тоді $\displaystyle\int_X f(Tx)\,d\lambda(x) = \int_{X'} f(x')\,d\lambda'(x')$. Якщо існує хоча б один з цих інтегралів, то існує інший та вони рівні.

Proof.
Перед цим треба зауважити, що $f \circ T\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ буде $\mathcal{F}$-вимірною як композиція двох вимірних, тому інтеграл брати можна.
Ми розглянемо кілька випадків:
I. Випадок функції $\mathbb{1}_A$, де множина $A \in \mathcal{F}'$.
Зауважимо, що $\mathbb{1}_A(Tx) = \begin{cases} 1, & Tx \in A \\ 0, & Tx \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in T^{-1}A \\ 0, & x \notin T^{-1}A \end{cases} = \mathbb{1}_{T^{-1}A}(x)$. Значить, отримаємо
$\displaystyle\int_X \mathbb{1}_A(Tx)\,d\lambda(x) = \int_X \mathbb{1}_{T^{-1}A}(x)\,d\lambda(x) = \lambda(T^{-1}(A)) = \lambda'(A) = \int_{X'} \mathbb{1}_A(x')\,d\lambda'(x')$.

II. Випадок функції p – проста невід'ємна та $\mathcal{F}'$-вимірна.
Тобто маємо $p(x') = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x')$.
$\displaystyle\int_X p(Tx)\,d\lambda(x) \overset{\text{крок I}}{=} \sum_{k=1}^n a_k \lambda(T^{-1}A_k) = \sum_{k=1}^n a_k \lambda'(A_k) = \int_{X'} p(x')\,d\lambda'(x')$.

III. Випадок функції f – невід'ємна та $\mathcal{F}'$-вимірна.
Тоді є послідовність $\{p_n\}$ – прості невід'ємні та $\mathcal{F}'$-вимірна, зростаюча, для якої $p_n(x') \to f(x')$. Раз збіжність виконується для кожнних точок $x' \in X'$, то й для $Tx \in X'$ виконано $p_n(Tx) \to f(Tx)$ при всіх $x \in X$. У нас $p_n(Tx)$ все одно буде простою невід'ємною та $\mathcal{F}'$-вимірною, а також зростаючою. Таким чином,
$\displaystyle\int_X f(Tx)\,d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X p_n(Tx)\,d\lambda(x) \overset{\text{крок II}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{X'} p_n(x')\,d\lambda(x') = \int_{X'} f(x')\,d\lambda'(x')$.

IV. Випадок функції f – довільної $\mathcal{F}'$-вимірної.
Маємо $f(x') = f_+(x') - f_-(x')$. Тоді звідси $f(Tx) = f_+(Tx) - f_-(Tx)$, але тоді
$\displaystyle\int_X f(Tx)\,d\lambda(x) = \int_X f_+(Tx)\,d\lambda(x) - \int_X f_-(Tx)\,d\lambda(x) \overset{\text{крок III}}{=} \int_{X'} f_+(x')\,d\lambda'(x') - \int_{X'} f_-(x')\,d\lambda'(x) =$
$\displaystyle\int_{X'} f(x')\,d\lambda'(x)$. ■

5 Заряди

5.1 Основні означення. Розклад Гана

Definition 5.1.1 Задано $\mathcal{F}$ – σ-алгебра.
Зарядом ми називатимемо функцію множин $\nu \colon \mathcal{F} \to (-\infty, +\infty]$, де

$$\nu \text{ – } \sigma\text{-адитивна}$$

Proposition 5.1.2 Властивості зарядів
Задано ν – заряд на σ-алгебрі $\mathcal{F}$. Тоді виконуються такі пункти:
1) $\nu(\emptyset) = 0$;
2) ν – адитивна;
3) Нехай $A, B \in \mathcal{F}$ так, щоб $A \subset B$ та $\nu(B) < +\infty$. Тоді $\nu(A) < +\infty$.

Proof.
Доведемо виконання всіх пунктів:

1) За узгодженістю (див. розділ про міри) існує множина $A \in \mathcal{F}$, для якої $\nu(A) < +\infty$. Звідси, за σ-адитивністю, $\nu(A) = \nu(A) + \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset) + \dots$. Оскільки $\nu(A) < +\infty$, то ряд збіжний, а для рівності треба вимагати $\nu(\emptyset) = 0$.

2) Нехай $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$ – всі неперетинні. Тоді
$\nu\left(\bigsqcup_{n=1}^{k} A_k\right) = \nu(A_1) + \dots + \nu(A_k) + \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset) + \dots = \sum_{n=1}^{k} \nu(A_k)$.

3) За умовою, звідси $B = A \sqcup (B \setminus A)$, але тоді $\nu(B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) < +\infty$. Отже, звідси випливає, що $\nu(A) < +\infty$ (неважко від супротивного показати).

Всі властивості доведені. ■

Definition 5.1.3 Задано ν – заряд на $\mathcal{F}$.
Множина $B \in \mathcal{F}$ називається **додатною** (відосно заряду ν), якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : A \subset B : \nu(A) \geq 0$$

Множина $B \in \mathcal{F}$ називається **від'ємною** (відосно заряду ν), якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : A \subset B : \nu(A) \leq 0$$

Remark 5.1.4 $\emptyset$ є одночасно додатною та від'ємною множиною. Із цього випливає, що набір додатних множин та набір від'ємних множин – непорожні.

Theorem 5.1.5 Розклад Гана
Задано ν – заряд на $\mathcal{F}$. Тоді існують множини $X_+, X_- \in \mathcal{F}$ – відповідно додатна та від'ємна множини, для яких $X_+ \sqcup X_- = X$.

Proof.
I. *Існування множини* X_-
Розглянемо значення $\alpha = \inf\limits_{A \text{ – від'ємна}} \nu(A)$. Із цього можна відокремити послідовність $\{A_n, n \geq 1\}$, для яких $\nu(A_n) \to \alpha$. Покладемо $X_- = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ та доведемо, що вона – також від'ємна.
Перейдемо до неперетинних множин, задавши $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$
Зауважимо, що $X_- = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$.
Нехай $B \subset X_-$, тобто звідси $B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap B)$. Тобто $\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n \cap B)$.
У нас $B_n \subset A_n$, ну а тому $B_n \cap B \subset B_n \subset A_n$. Оскільки A_n від'ємна, то тоді $\nu(B \cap B_n) \leq 0$. Власне, тоді загалом $\nu(B) \leq 0$.
Цікаве зауваження: ми щойно довели, що зліченне об'єднання від'ємних множин – від'ємна.

Ми окремао ще доведемо, що $\nu(X_-) = \alpha$ – знадобиться для другої частини.
Оскільки X_- уже від'ємна множина, то $\nu(X_-) \geq \alpha$, за інфімумом.

$$\nu(X_-) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \nu(B_n) = \lim_{k\to\infty} \nu\left(A_1 \cup \dots \cup A_k\right) \leq \lim_{k\to\infty} \nu(A_k) = \alpha.$$

Таким чином, ми довели $\nu(X_-) = \alpha$.
Окреме пояснення останньої нерівності, тобто $\nu(A_1 \cup \dots \cup A_k) \leq \nu(A_k)$.
Зауважимо, що $A_1 \cup \dots \cup A_k$ – від'ємна, як скінченне об'єднання від'ємних, а тому для множини $A_1 \cup \dots \cup A_k \setminus A_k \subset A_1 \cup \dots \cup A_k$ маємо $\nu(A_1 \cup \dots \cup A_k \setminus A_k) \leq 0$. Додавши $\nu(A_k)$ з двох сторін, отримаємо $\nu(A_1 \cup \dots \cup A_k) \leq \nu(A_k)$.

II. *Існування множини* X_+
Існує спокуса покласти множину $X_+ = X \setminus X_-$. Залишилося довести, що вона буде додатною.
!Припустимо, що це не так, тобто існує множина $C \in \mathcal{F}$ така, щоб $C \subset X_+$, але $\nu(C) < 0$.
Якби C була від'ємною, то розглянемо множину $X'_- = C \sqcup X_-$ та зауважимо, що $\nu(X'_-) = \nu(C) + \alpha < \alpha$. Водночас множина $\nu(X'_-) \geq \alpha$ в силу того, що C, X_- обидва від'ємні. Тобто неможливо.
Тому C не може бути від'ємною, а тому існує множина $C_1 \in \mathcal{F}, C_1 \subset C$, для якої $\nu(C_1) > 0$. Причому звідси ми можемо підібрати $k_1 \in \mathbb{N}$ – найменше можливе, щоб $\nu(C_1) > \dfrac{1}{k_1}$.
Розглянемо тепер множину $C \setminus C_1$. Зауважимо, що $\nu(C \setminus C_1) = \nu(C) - \nu(C_1) < 0$. Якби вона була від'ємною, то аналогічними міркуваннями, що з C, ми б прийшли до суперечності.
Значить $C \setminus C_1$ не може бути від'ємною, а тому існує множина $C_2 \in \mathcal{F}, C_2 \subset C \setminus C_1$, для якої $\nu(C_2) > 0$. Знову візьмемо найменше можливе $k_2 \in \mathbb{N}$, щоб $\nu(C_2) > \dfrac{1}{k_2}$.
Розглянемо тепер множину $C \setminus (C_1 \cup C_2)$. Зауважимо, що $\nu(C \setminus (C_1 \cup C_2)) = \nu(C) - \nu(C_1) - \nu(C_2) < 0$.
Аналогічно дана множина не є від'ємною, а тому існує $C_3 \in \mathcal{F}, C_3 \subset C \setminus (C_1 \cup C_2)$, для якої $\nu(C_3) > 0$. Знову візьмемо найменше можливе $k_3 \in \mathbb{N}$, щоб $\nu(C_3) > \dfrac{1}{k_3}$.

$\vdots$

Цей процес будемо продовжувати нескінченне число разів. Маємо $D = C \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Зауважимо, що $\nu(D) = \nu(C) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n) < 0$. Множина D не може бути від'ємною, тому що, знову ж таки, припустивши D – від'ємна та розглянувши множину $X'_- = D \sqcup X_-$, ми отримаємо $\nu(X'_-) < \alpha$ з одного боку та $\nu(X'_-) \geq \alpha$ з іншого. Це неможливо.
Значить, D не може бути від'ємною, тож існує $D_1 \in \mathcal{F}, D_1 \subset D$, для якого $\nu(D_1) > 0$. Обереться таке найменше $l \in \mathbb{N}$, для якого $\nu(D_1) > \dfrac{1}{l}$.
Але зауважимо щодо $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset C$. Оскільки $\nu(C) < 0 < +\infty$, то звідси $\nu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n) < +\infty$, тобто ряд збіжний. Звідси $\nu(C_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки $\nu(C_n) > \dfrac{1}{k_n}$, то тоді $k_n \to \infty$.
Так ось, $\nu(D_1) > \dfrac{1}{l} > \dfrac{1}{k_N}$, тому що при $k_n \to \infty$ отримаємо, що знайдеться N, для якого $k_n > l$.
Отримана нерівність неможлива, тому що на кроці N ми взяли множину $C_N \subset C \setminus \bigcup_{m=1}^{N-1} C_m$, для якої $\nu(C_N) > \dfrac{1}{k_N}$, при цьому k_N – найменше можливе. Але замість C_N нам треба було брати $D_1 \subset D = C \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m \subset C \setminus \bigcup_{m=1}^{N-1} C_m$ – і було би $\nu(D_1) > \dfrac{1}{l}$. Це теж неможливо.
Тобто ми з'ясували, що D є ані від'ємною, ані невід'ємною. Суперечність! ■

Remark 5.1.6 Зауважимо, що розклад Гана, взагалі-то кажучи, не єдиний.

Example 5.1.7 Зокрема маємо $\nu(A) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_A(x_k)$ на 2^X. Тут $x_k \in X$ та $a_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Оскільки це заряд, то звідси є розклад Гана, але тут може бути кілька розкладів:

$X = X_-^1 \sqcup X_+^1$, де $X_+^1 = \{x_k \in X \mid a_k > 0\}$ та $X_-^1 = X \setminus X_+^1$.
$X = X_-^2 \sqcup X_+^2$, де $X_+^2 = X \setminus X_-^2$ та $X_-^2 = \{x_k \in X \mid a_k < 0\}$.

Theorem 5.1.8 Розклад Жордана
Задано ν – заряд на $\mathcal{F}$. Ми вже знаємо, що $X = X_+ \sqcup X_-$.
Тоді $\nu = \nu_+ - \nu_-$, причому $\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+)$ та $\nu_-(A) = -\nu(A \cap X_-)$. У цьому випадку ν_+ – міра та ν_- – скінченна міра, обидва визначені на $\mathcal{F}$.
Якщо ν – (σ-)скінченна міра, то ν_+ також буде (σ-)скінченною.

Proof.
ν_+ – міра, тому що для будь-якої множини $A \in \mathcal{F}$ маємо $A \cap X_+ \subset X_+$, а за означенням додатної множини, $\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+) \geq 0$; дана міра зрозуміло, що σ-адитивна, бо заряд ν є таким.
ν_- – міра, доводиться аналогічно. Але вона скінченна, оскільки $-\infty < \nu(A \cap X_-) \leq 0$ за тим, які значення приймає функція множин.
Тепер доведемо розклад заряду. Маємо наступне:
$\nu(A) = \nu(A \cap X) = \nu((A \cap X_+) \sqcup (A \cap X_-)) = \nu(A \cap X_+) + \nu(A \cap X_-) = \nu_+(A) - \nu_-(A)$.
Із цієї рівності з того, що ν буде (σ)-скінченною, легко випливає, що ν_+ також (σ)-скінченна. ■

Theorem 5.1.9 Розклад Жордана буде єдиним, незважаючи на неєдиний розклад Гана.

Proof.
Маємо два розклади Гана $X = X_+^1 \sqcup X_-^1$ та $X = X_+^2 \sqcup X_-^2$. Маємо два розклади Жордана:
$\nu(A) = \nu_+^1(A) - \nu_-^1(A) \qquad \nu(A) = \nu_+^2(A) - \nu_-^2(A)$.
Зараз доведемо, що $\nu_+^1(A) = \nu_+^2(A)$. Дійсно,
$\nu_+^1(A) = \nu(A \cap X_+^1) = \nu(A \cap X_+^1 \cap X) = \nu((A \cap X_+^1 \cap X_+^2) \sqcup (A \cap X_+^1 \cap X_-^2)) =$
$= \nu(A \cap X_+^1 \cap X_+^2) + \nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2) = \nu(A \cap X_+^1 \cap X_+^2)$.
У цьому випадку $\nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2) = 0$. Із одного боку, $A \cap X_+^1 \cap X_-^2 \subset X_+^1$, а тому за означенням додатної множини, $\nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2) \geq 0$. Із іншого боку, $A \cap X_+^1 \cap X_-^2 \subset X_-^2$, а тому за означенням від'ємної множини, $\nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2) \leq 0$.
$\nu_+^2(A) = \nu(A \cap X_+^1 \cap X_+^2)$ – доводиться аналогічним чином.
Звідси випливає $\nu_+^1(A) = \nu_+^2(A)$. Як наслідок, $\nu_-^1(A) = \nu_-^2(A)$ в силу розклада Жордана. ■

Definition 5.1.10 Задано ν – заряд на $\mathcal{F}$.
Повною варіацією заряду ν називається міра:

$$|\nu| = \nu_+ + \nu_-$$

Те, що вона міра, випливає з рокзладу Жордана. Також у силу єдиності, означенняк коректне.

Example 5.1.11 Маємо функцію $f \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$, для якої визначено $\displaystyle\int_X f\,d\lambda$, причому $\displaystyle\int_X f_-\,d\lambda < +\infty$.
Ми вже знаємо, що функція множин $\nu(A) = \displaystyle\int_A f\,d\lambda$ буде σ-адитивною. Також
$\nu(A) \geq -\int_A f_-\,d\lambda \geq -\int_X f_-\,d\lambda > -\infty$.
Отже, наша функція множин ν – заряд. Маємо розбиття $X = \{x : f(x) \geq 0\} \sqcup \{x : f(x) < 0\}$ – розклад Гана. Розглянемо тепер розклад Жордана:
$\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+) = \displaystyle\int_{A \cap X_+} f\,d\lambda = \int_A f \mathbb{1}_{f \geq 0}\,d\lambda = \int_A f_+\,d\lambda$.
$\nu_-(A) = -\nu(A \cap X_-) = -\displaystyle\int_{A \cap X_-} f\,d\lambda = \int_A (-f) \mathbb{1}_{f<0}\,d\lambda = \int_A f_-\,d\lambda$.
$\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A)$ – тут в точності записано третє означення інтеграла Лебега.
$|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = \displaystyle\int_A f_+\,d\lambda + \int_A f_-\,d\lambda = \int_A |f|\,d\lambda$.

5.2 Теорема Радона-Нікодима

Маємо всюди $(X, \mathcal{F})$ – вимірний простір. Всі міри та заряди будуть задані тут.

Definition 5.2.1 Заряд ν називається **абсолютно неперервним відносно міри** λ, якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : \lambda(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

Позначення: $\nu \ll \lambda$.

Example 5.2.2 Для міри λ та заряду $\nu(A) = \int_A f\,d\lambda$ виконується $\nu \ll \lambda$.

Proposition 5.2.3 Еквівалентні означення абсолютної неперервності
Задано ν – заряд із розкладом $\nu = \nu_+ - \nu_-$, а також λ – міра. Тоді
$\nu \ll \lambda \iff \begin{cases} \nu_+ \ll \lambda \\ \nu_- \ll \lambda \end{cases} \iff |\nu| \ll \lambda.$

Proof.
Дано: $\nu \ll \lambda$. Хочемо довести, що $\begin{cases} \nu_+ \ll \lambda \\ \nu_- \ll \lambda \end{cases}$.
Нехай $A \in \mathcal{F}$ так, що $\lambda(A) = 0$. Розглянемо $\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+)$. Оскільки $A \cap X_+ \subset A$, то звідси $\lambda(A \cap X_+) = 0$, а за умовою дано, $\nu(A \cap X_+) = 0 = \nu_+(A)$. А це доводить те, що $\nu_+ \ll \lambda$. Аналогічно доводиться $\nu_- \ll \lambda$.

Дано: $\begin{cases} \nu_+ \ll \lambda \\ \nu_- \ll \lambda \end{cases}$. Хочемо довести, що $|\nu| \ll \lambda$.
Нехай $A \in \mathcal{F}$ так, що $\lambda(A) = 0$. За дано, $\nu_+(A) = \nu_-(A) = 0$, тож $|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = 0$. Отже, $|\nu| \ll \lambda$.

Дано: $|\nu| \ll \lambda$. Хочемо довести, що $\nu \ll \lambda$.
Нехай $A \in \mathcal{F}$ так, що $\lambda(A) = 0$. Маємо тоді $|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = 0$, але оскільки ν_+, ν_- обидва міри, то звідси єдина можливість для рівності – це $\nu_+(A) = \nu_-(A) = 0$. Значить, $\nu(A) = 0$, а тому $\nu \ll \lambda$. ■

Theorem 5.2.4 Теорема Радона-Нікодими
Задано ν, λ – заряд та міра, обидва σ-скінченні, причому $\nu \ll \lambda$. Тоді існує $\mathcal{F}$-вимірна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$, для якої $\nu(A) = \int_A f\,d\lambda$. Дана функція буде єдина з точністю до еквівалентності $(\mathrm{mod}\ \lambda)$.

Proof.
I. *Випадок, коли ν, λ – обидва міри, які є скінченними.*
I. i. *Існування.*
Розглянемо множину $G = \left\{ g\colon X \to \mathbb{R} \mid g \text{ – невід'ємні, } \mathcal{F}\text{-вимірні} : \forall A \in \mathcal{F} : \int_A g\,d\lambda \le \nu(A) \right\}$. Дана множина непорожня, бо $0 \in G$. Також доведемо, що $g_1, g_2 \in G \overset{(*)}{\Longrightarrow} \max\{g_1, g_2\} \in G$.
$\int_A \max\{g_1, g_2\}\,d\lambda = \int_{A \cap \{g_1 > g_2\}} g_1\,d\lambda + \int_{A \cap \{g_1 \le g_2\}} g_2\,d\lambda \le \nu(A \cap \{g_1 > g_2\}) + \nu(A \cap \{g_1 \le g_2\}) = \nu(A)$.
Оберемо $\alpha = \sup\limits_{g \in G} \int_X g\,d\lambda$. Тобто ми просто беремо найбільше з всіх можливих інтегралів (очевидно, що треба брати інтеграл по X). Зауважимо, що $\alpha < +\infty$ в силу скінченності ν. Відокремимо послідовність $\{g_n, n \ge 1\}$ так, щоб $\int_X g_n\,d\lambda \to \alpha$.
Розглянемо послідовність $\{f_n, n \ge 1\}$, що визначена як $f_n = \max\{g_1, \dots, g_n\}$. Всі вони $\mathcal{F}$-вимірні та невід'ємні – це зрозуміло. Також дана послідовність зростає монотонно, а тому існує $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ – це наша шукана функція. Причому $\int_A f\,d\lambda = \lim\limits_{n \to \infty} \int_A f_n\,d\lambda$.
Всі $f_n \in G$ за (*), тобто $\int_A f_n\,d\lambda \le \nu(A)$. При $n \to \infty$ отримаємо $\int_A f\,d\lambda \le \nu(A)$, тобто $f \in G$. Автоматично це означає, що $\int_X f\,d\lambda \le \alpha$, як супремум. Із іншого боку, $f \ge f_n \ge g_n \implies \int_X f\,d\lambda \ge \int_X f_n\,d\lambda \ge \int_X g_n\,d\lambda$. Узявши $n \to \infty$, отримаємо $\int_X f\,d\lambda \ge \alpha$.
Таким чином, отримали $\nu(A) - \int_A f\,d\lambda \ge 0$, а також $\int_X f\,d\lambda = \alpha$ (це буде пізніше заюзано).
Позначимо $\varphi(A) = \nu(A) - \int_A f\,d\lambda$ – це буде мірою, через невід'ємність (вище) та через зрозумілим чином σ-адитивність. Нам треба переконатися, що $\varphi(A) = 0$ для всіх $A \in \mathcal{F}$.

!Припустимо, що існує множина A^*, для якої $\varphi(A^*) > 0$. Із цього випливатиме $\lambda(A^*) > 0$ в силу умови $\nu \ll \lambda$. Тоді існує таке $\beta > 0$, щоб $\varphi(A^*) - \beta\lambda^*(A) > 0$. (від супротивного можна довести).
Розглянемо тепер $\varphi - \beta\lambda$ – це буде заряд на σ-алгебрі $\mathcal{F} \cap A^*$. Тоді ми можемо розкласти за Ганом $A^* = A^*_+ \sqcup A^*_-$. Оскільки $(\varphi - \beta\lambda)(A^*) > 0$, то звідси $(\varphi - \beta\lambda)(A^*_+) > 0$. А звідси отримаємо $\lambda(A^*_+) > 0$.
У силу додатності множини A^*_+, маємо для кожного $C \subset A^*_+$ нерівність $(\varphi - \beta\lambda)(C) \geq 0$, а звідси випливає нерівність $\beta\lambda(C) + \displaystyle\int_C f\, d\lambda \leq \nu(C)$.
Нарешті, розглянемо функцію $h = f + \beta\mathbb{1}_{A^*_+}$. Спочатку покажемо, що $h \in G$.

$$\int_A h\, d\lambda = \int_{(A\cap A^*_+)\sqcup(A\setminus A^*_+)} h\, d\lambda = \int_{A\cap A^*_+} f + \beta\mathbb{1}_{A^*_+}\, d\lambda + \int_{A\setminus A^*_+} f\, d\lambda \leq$$

$$\leq \int_{A\cap A^*_+} f\, d\lambda + \beta\lambda(A \cap A^*_+) + \nu(A \setminus A^*_+) \leq \nu(A \cap A^*_+) + \nu(A \setminus A^*_+) = \nu(A).$$

Отже, $\displaystyle\int_X h\, d\lambda \leq \alpha$ за супремумою Із іншого боку, зауважимо наступне:

$$\int_X h\, d\lambda = \int_X f + \beta\mathbb{1}_{A^*_+}\, d\lambda = \int_X f\, d\lambda + \beta\lambda(A^*_+) = \alpha + \beta\lambda(^*_+) > \alpha.$$ Суперечність!

Припущення про те, що $\exists A^* \in \mathcal{F} : \varphi(A^*) = 0$ невірне. Отже, $\nu(A) = \displaystyle\int_A f\, d\lambda$ для всіх $A \in \mathcal{F}$.

До речі, $\displaystyle\int_X f\, d\lambda \leq \nu(X) < +\infty$, тобто звідси $|f| < +\infty \pmod{\lambda}$. Ми замінимо еквівалентним чином на функцію f, де $|f| < +\infty$ повністю всюди. Тоді вона повертає лише $\mathbb{R}$.

I. i. *Єдиність.*
Припустимо, що існують дві функції $f, \tilde{f}$, для яких $\nu(A) = \displaystyle\int_A f\, d\lambda$ та $\nu(A) = \displaystyle\int_A \tilde{f}\, d\lambda$. Звідси випливає, що $\displaystyle\int_X f - \tilde{f}\, d\lambda = 0$, а тому $f - \tilde{f} = 0 \pmod{\lambda} \implies f = \tilde{f} \pmod{\lambda}$. Отже, функція має бути єдиною з точністю до еквівалентності.

II. *Випадок, коли ν, λ – обидва міри, які є σ-скінченними.*
Маємо $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i,\ \nu(X_i) < +\infty \qquad X = \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j,\ \lambda(Y_j) < +\infty.$
На множинах $X_i \cap Y_j$ обидва міри ν, λ будуть скінченними. Набір всіх цих множин $X_i \cap Y_j$ – зліченна, тож запишемо його як упорядковану послідовність $\{Z_n, n \geq 1\}$.
Перейдемо до неперетинних множин, $V_1 = Z_1,\ V_2 = Z_2 \setminus Z_1,\ V_3 = Z_3 \setminus (Z_1 \cup Z_2), \dots$ Тоді звідси ясно, що $X = \displaystyle\bigsqcup_{n=1}^{\infty} V_n$. На $V_n \cap \mathcal{F}$ зауважимо, що λ, ν скінченні, причому все одно $\nu \ll \lambda$. Значить, можна застосувати крок I., тобто для кожного $n \geq 1$ знайдеться функція $f_n \colon V_n \to \mathbb{R}$, для якої $\nu(B) = \displaystyle\int_B f_n\, d\lambda$ для всіх $B \subset V_n, B \in \mathcal{F}$.
Візьмемо функцію $f \colon X \to \mathbb{R}$, яка на кожній V_n дорівнює відповідній f_n. Значить,

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A\cap V_n} f_n\, d\lambda \overset{f_n = f \text{ на } V_n}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A\cap V_n} f\, d\lambda = \int_A f\, d\lambda$$ для кожної $A \in \mathcal{F}$.

Всі функції f_n єдині з точністю до еквівалетності, тоді звідси f також єдина з точністю до еквівалетності.

III. *Випадок, коли ν – заряд σ-скінченний та λ – міра σ-скінченна.*
Маємо $X = X_+ \sqcup X_-$ – розклад Гана заряду ν, беремо розклад Жордана $\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A)$.
Оскільки $\nu \ll \lambda$, то звідси $\nu_+, \nu_- \ll \lambda$. Обидві міри ν_+, ν_- є σ-скінченними, а тому можна застосувати крок II, тобто існуються функції $f_+ \colon X_+ \to \mathbb{R}$ та $f_- \colon X_- \to \mathbb{R}$, для яких
$\nu_+(B) = \displaystyle\int_B f_+\, d\lambda$ на $X_+ \cap \mathcal{F}$, $\qquad \nu_-(C) = \displaystyle\int_C f_-\, d\lambda$ на $X_- \cap \mathcal{F}$.
Покладемо $f \colon X \to \mathbb{R}$ так, щоб $f = f_+$ на X_+ та $f = -f_-$ на X_-. Значить, для всіх $A \in \mathcal{F}$

$$\nu(A) = \nu(A \cap X_+) + \nu(A \cap X_-) = \int_{A\cap X_+} f_+\, d\lambda - \int_{A\cap X_-} f_-\, d\lambda = \int_{A\cap X_+} f\, d\lambda + \int_{A\cap X_-} f\, d\lambda = \int_A f\, d\lambda.$$

Зрозуміло, що f єдина з точністю до еквівалетності, бо f_+, f_- у себе єдині. ■

Remark 5.2.5 Функція f із теореми Радона-Нікодими називається **щільністю** або **похідною заряду** ν **за мірою** λ.
Позначення: $f = \dfrac{d\nu}{d\lambda}$.

TODO: доповнити якісь там ще теми

6 Добуток просторів

6.1 Множини та функції

Задані $(X_1, \mathcal{F}_1),\ (X_2, \mathcal{F}_2)$ – два вимірних простори. Позначимо $X = X_1 \times X_2$.

Definition 6.1.1 Вимірним прямокутником на X назвемо такий клас множин:

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1,\ A_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

Remark 6.1.2 Хоча $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ є σ-алгебрами, але $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ утвроює лише півкільце за **Th. 1.1.7**.

Definition 6.1.3 Добутком σ-алгебр $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ називають клас множин

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma a(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$$

Theorem 6.1.4 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Proof.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Оберемо $\displaystyle\prod_{i=1}^{m+n} (a_i, b_i] \in \mathcal{P}_{m+n}$, тоді звідси зауважимо $\displaystyle\prod_{i=1}^{m+n} (a_i, b_i] = \underbrace{\prod_{i=1}^{m} (a_i, b_i]}_{\in \mathcal{P}_m \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)} \times \underbrace{\prod_{i=m+1}^{m+n} (a_i, b_i]}_{\in \mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$.
Отже, ми довели, що $\mathcal{P}_{m+n} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma a(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Оскільки найправіше утворює σ-алгебру, то звідси $\sigma a(\mathcal{P}_{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Зафіксуємо $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} (a_i, b_i] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Розглянемо клас $\mathcal{H}_1 = \left\{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \mid \displaystyle\prod_{i=1}^{m} (a_i, b_i] \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \right\}$.
Цілком неважко буде довести, що $\mathcal{H}_1$ утвроює σ-алгебру. Також зауважимо, що $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{P}_n$. Таким чином, отримаємо $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Зафіксуємо $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Розглянемо клас $\mathcal{H}_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \mid A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})\}$. Аналогічно неважко довести, що $\mathcal{H}_2$ утворює σ-алгебру, а також $\mathcal{H}_2 \supset \mathcal{P}_m$ (це ще випливає з $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$). Таким чином, отримаємо $\mathcal{H}_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.
Отже, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ маємо $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$. Це можна переписати ось так:
$\forall A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$.
Це означає $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$. Але оскільки $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$ утворює σ-алгебру, то звідси
$\sigma a(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$. ■

Definition 6.1.5 Нехай задано множину $E \subset X$ та $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.
x_1**-перерізом множини** E називається множина

$$E_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E\}$$

x_2**-перерізом множини** E називається множина

$$E_{x_2} = \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in E\}$$

Example 6.1.6 Нехай E – вимірний прямокутник, тобто $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, тобто $E = E_1 \times E_1$, при цьому $E_1 \in \mathcal{F}_1,\ E_2 \in \mathcal{F}_2$. Тоді ми отримаємо $E_{x_1} = \begin{cases} E_2, & x_1 \in E_1 \\ \emptyset, & x_1 \notin E_1 \end{cases}$ та аналогічно $E_{x_2} = \begin{cases} E_1, & x_2 \in E_2 \\ \emptyset, & x_2 \notin E_2 \end{cases}$.
Дійсно, $E_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2\}$. Якщо $x_1 \in E_1$, то тоді тут $E_{x_1} = E_2$. Якщо $x_1 \notin E_1$, то тоді який б $x_2 \in E_2$ не взяли, уже $(x_1, x_2) \notin E_1 \times E_2$, а тому $E_{x_1} = \emptyset$.
Зазначимо, що в цьому випадку $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ та $E_{x_2} \in \mathcal{F}_1$ завжди.

Lemma 6.1.7 Нехай $E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. Тоді для кожного $x_1 \in X_1$ та $x_2 \in X_2$ маємо $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2,\ E_{x_2} \in \mathcal{F}_1$.

Proof.
Ми доведемо, що для для кожного $x_1 \in X_1$ матимемо $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, бо друге аналогічно.
Розглянемо клас $\mathcal{H} = \{E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \mid \forall x_1 \in X_1 : E_{x_1} \in \mathcal{F}_2\}$.
Ми вже знаємо (за попереднім прикладом), що $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Зауважимо, що $\mathcal{H}$ утвроює σ-алгебру,

це окремо ми скоро обговоримо. Після цього ми отримаємо $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, що доводить нашу лему.
Нехай $E^{(n)} \in \mathcal{H}$, тобто $E^{(n)}_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ при всіх $n \geq 1$. Зауважимо, що виконується така рівність: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^{(n)}_{x_1} = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^{(n)}\right)_{x_1}$. Прокоментую рівність окремо.
Нехай $x_2 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^{(n)}_{x_1}$, тобто звідси $x_2 \in E^{(N)}_{x_1}$ при деякому $N \geq 1$, а тому $(x_1, x_2) \in E^{(N)}$. Значить, $(x_1, x_2) \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$, а це означає, що $x_2 \in \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^{(n)}\right)_{x_1}$. Із того, що $x_2 \in \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^{(n)}\right)_{x_1}$ аналогічним чином випливає $x_2 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^{(n)}_{x_1}$.
Отже, із цих рівностей випливає, що $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^{(n)}\right)_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, а тому звідси отримаємо $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \in \mathcal{H}$.
Нехай $E^{(1)}, E^{(2)} \in \mathcal{H}$, тобто $E^{(1)}_{x_1}, E^{(2)}_{x_1} \in \mathcal{F}_2$. Зауважимо, що виконується така рівність: $E^{(1)}_{x_1} \setminus E^{(2)}_{x_1} = (E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1}$ Прокоментую рівність окремо.
Нехай $x_2 \in E^{(1)}_{x_2} \setminus E^{(2)}_{x_1}$, тобто $x_2 \in E^{(1)}_{x_1}$ та $x_2 \notin E^{(2)}_{x_1}$. Звідси $(x_1, x_2) \in E^{(1)}$ та $(x_1, x_2) \notin E^{(2)}$, а далі $(x_1, x_2) \in E^{(1)} \setminus E^{(2)}$. Отримали $x_2 \in (E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1}$. Із того, що $x_2 \in (E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1}$, аналогічним чином випливає $x_2 \in E^{(1)}_{x_2} \setminus E^{(2)}_{x_1}$.
Отже, із цих рівностей випливає, що $(E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, а тому звідси отримаємо $E^{(1)} \setminus E^{(2)} \in \mathcal{H}$.
Нарешті, $X \in \mathcal{H}$, тому що $X_{x_1} = X_2 \in \mathcal{F}_2$. ■

Далі роглянемо функції $f\colon X = X_1 \times X_2 \to \bar{\mathbb{R}}$. Позначимо через $f_{x_1}(x_2)$ функцію $f(x_1, x_2)$, де аргумент x_1 вважається фіксованим. Аналогічно позначимо $f_{x_2}(x_1)$.

Lemma 6.1.8 Нехай функція $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ є $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$-вимірною. Тоді для кожного $x_1 \in X_1$ маємо, що f_{x_1} є $\mathcal{F}_2$-вимірною; для кожного $x_2 \in X_2$ маємо, що f_{x_2} є $\mathcal{F}_1$-вимірною.

Proof.
Ми доведемо, що для кожного $x_1 \in X_1$ маємо $\mathcal{F}_2$-вимірність f_{x_1}, бо друге аналогічно.
Нехай $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$, розглянемо прообраз даного відображення:
$f^{-1}_{x_1}(B) = \{x_2 \in X_2 \mid f_{x_1}(x_2) \in B\} = \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in f^{-1}(B)\} = (f^{-1}(B))_{x_1}$.
Оскільки f є $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$-вимірною, то звідси для множини $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ матимемо $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. Але за щойно доведеною лемою, для кожного $x_1 \in X_1$ отримаємо $(f^{-1}(B))_{x_1} \in \mathcal{F}_2$. ■

6.2 Добуток мір

Задані $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ – два вимірних простори з мірами. Позначимо $X = X_1 \times X_2$.
Попередньо визначимо функцію множин на півкільці $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$:

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$$

Lemma 6.2.1 μ задає міру на $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Proof.
μ вже буде невід'ємною, просто тому що μ_1, μ_2 – міри, а там $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$. Значить, і $\mu = \mu_1\mu_2 \geq 0$.
Нехай $E^{(n)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ – неперетинні множини, причому $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Отже, ми взагалі маємо $E^{(n)} = E^{(n)}_1 \times E^{(n)}_2$, причому $E^{(n)}_1 \in \mathcal{F}_1$, $E^{(n)}_2 \in \mathcal{F}_2$, а також $E = E_1 \times E_2$. Зауважимо, що справедливе наступне:
$\mathbb{1}_{E_1 \times E_2}(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{E_1}(x_1)\mathbb{1}_{E_2}(x_2)$.
Дійсно, нехай $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, тоді звідси $\mathbb{1}_{E_1 \times E_2}(x_1, x_2) = 1$. Із іншого боку, $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \implies x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$, а тому $\mathbb{1}_{E_1}(x_1)\mathbb{1}_{E_2}(x_2) = 1$.
Тепер нехай $(x_1, x_2) \notin E_1 \times E_2$, тоді звідси $\mathbb{1}_{E_1 \times E_2}(x_1, x_2) = 0$. Із іншого боку, $(x_1, x_2) \notin E_1 \times E_2$ означає три опції: або $x_1 \in E_1, x_2 \notin E_2$, або $x_1 \notin E_1, x_2 \in E_2$, або $x_1 \notin E_1, x_2 \notin E_2$. У всіх трьох випадках маємо $\mathbb{1}_{E_1}(x_1)\mathbb{1}_{E_2}(x_2) = 0$.

Також зауважимо, що для неперетинних множин E_n маємо $\mathbb{1}_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n}(x)$.

Разом отримаємо таку рівність:
$\mathbb{1}_{E_1}\mathbb{1}_{E_2} = \mathbb{1}_E = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E^{(n)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_1^{(n)}}\mathbb{1}_{E_2^{(n)}}$.
Проінтегруємо рівності по X_1 відносно μ_1. Це можливо робити в силу вимірності функцій:
$\int_{X_1} \mathbb{1}_{E_1}\mathbb{1}_{E_2}\,d\mu_1 = \int_{X_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_1^{(n)}}\mathbb{1}_{E_2^{(n)}}\,d\mu_1$.
Знаючи, що для невід'ємних функціях ряд та інтеграл можна поміняти місцями, отримаємо:
$\mathbb{1}_{E_2}\mu_1(E_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}^{(n)}_{E_2}\mu_1(E_1^{(n)})$.
Проінтегруємо рівності по X_2 відносно μ_2 (аналогічним чином це можливо). Такими самимим міркуваннями отримаємо рівність:
$\mu_2(E_2)\mu_1(E_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E_1^{(n)})\mu_2(E_2^{(n)})$.
Але за визначенням функції множини на $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, маємо $\mu(E) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E^{(n)})$.
Отже, довели невід'ємність та σ-адитивність, тож μ – дійсно міра на $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. ■

Отже, маємо μ – легітимна міра на півкільці $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Далі продовжимо її за схемою Каратеодорі – отримаємо міру на σ-алгебрі, яку я позначу за $\mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$.
Нам відомо, що множина вимірних за Каратеодорі містить півкільце, тобто $\mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2 \supset \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Але оскільки ми маємо σ-алгебру, то тоді звідси $\mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2 \supset \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

Definition 6.2.2 **Добутком мір** μ_1, μ_2 називатимемо продожвення міри μ, яка визначена на $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ як $\mu(E) = \mu(E_1)\mu(E_2)$, за схемою Каратеодорі.
Позначення: $\mu_1 \times \mu_2$.

Theorem 6.2.3 Для мір Лебега виконується рівність $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$.

Proof.
TODO: розібрати. ■

Lemma 6.2.4 Задано μ_1, μ_2 – обидва σ-скінченні та повні міри відповідно на $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$. Нехай $E \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$. Тоді:
1) $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$;
2) $f(x_1) = \mu_2(E_{x_1})$ буде $\mathcal{F}_1$-вимірною;
3) $\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1})\,d\mu_1(x_1) = \mu(E)$

Proof.
1. *Випадок, коли μ_1, μ_2 обидва скінченні міри.*
Розглянемо клас $\mathcal{H}$ – набір всіх множин $E \in \mathcal{F}$, для яких виконуються пункти 1),2),3). Ми хочемо довести, що $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}$. Для цього розіб'ємо на кілька етапів.

I. $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.
Нехай $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, тоді, згадавши **Ex. 6.1.6**, маємо $E_{x_1} = \begin{cases} E_2, & x_1 \in E_1 \\ \emptyset, & x_1 \notin E_1 \end{cases}$, але в будь-якому випадку $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ – пункт 1 є.
$\mu_2(E_{x_1}) = \begin{cases} \mu_2(E_2), & x_1 \in E_1 \\ 0, & x_1 \notin E_1 \end{cases} = \mu_2(E_2) \cdot \mathbb{1}_{E_1}(x_1)$. Така функція від x_1 буде $\mathcal{F}_1$-вимірною, оскільки $E_1 \in \mathcal{F}_1$, а тому індикатор вимірна – пункт 2 є.
$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1})\,d\mu_1(x_1) = \mu_2(E_2) \int_{X_1} \mathbb{1}_{E_1}(x_1)\,d\mu_1(x_1) = \mu_2(E_2)\mu_1(E_1) = \mu(E)$ – пункт 3 є.
Разом ми отримали, що множина $E \in \mathcal{H}$.

II. $\mathcal{H} \supset k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$.
Нехай $E \in k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$. Оскільки $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ – це півкільце, то згадаємо **Th. 1.2.6**, тоді $E = \bigsqcup_{k=1}^{n} E^{(k)}$,

причому $E^{(k)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Ми вже доводили, що $E_{x_1} = \left(\bigsqcup_{k=1}^n E^{(k)} \right)_{x_1} = \bigsqcup_{k=1}^n E^{(k)}_{x_1}$. За кроком I, всі $E^{(k)}_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, а тому звідси $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ – пункт 1 є.
$\mu_2(E_{x_1}) = \sum_{k=1}^n \mu_2\left(E^{(k)}_{x_1}\right)$, але в силу крока I, всі $\mu_2\left(E^{(k)}_{x_1}\right)$ є $\mathcal{F}_1$-вимірними, тому $\mu_2(E_{x_1})$ також $\mathcal{F}_1$-вимірна як сума – пункт 2 є.
$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \sum_{k=1}^n \int_{X_1} \mu_2\left(E^{(k)}_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) \overset{\text{крок I}}{=} \sum_{k=1}^n \mu\left(E^{(k)}\right) = \mu(E)$ – пункт 3 є.
Разом ми отримали, що множина $E \in \mathcal{H}$.

III. $\mathcal{H}$ – монотонний клас.
Нехай $E^{(n)} \in \mathcal{H}$, причому вони зростають та $E = \bigcup_{n=1}^\infty E^{(n)}$. Хочемо $E \in \mathcal{H}$.
Маємо $E_{x_1} = \left(\bigcup_{n=1}^\infty E^{(n)} \right)_{x_1} = \bigcup_{n=1}^\infty E^{(n)}_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, просто тому що $E^{(n)}_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ – пункт 1 є.
$\mu_2(E_{x_1}) = \lim_{n\to\infty} \mu_2\left(E^{(n)}_{x_1}\right)$ за неперервністю міри знизу. Оскільки $\mu_2\left(E^{(n)}_{x_1}\right)$ є $\mathcal{F}_1$-вимірною, то $\mu_2(E_{x_1})$ також $\mathcal{F}_1$-вимірна як границя – пункт 2 є.
$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \lim_{n\to\infty} \int_{X_1} \mu_2\left(E^{(n)}_{x_1}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E^{(n)}) = \mu(E)$. Перша рівність виконана, оскільки $\mu_2\left(E^{(n)}_{x_1}\right)$ формує невід'ємну монотонну послідовність (бо в нас $E^{(n)}_{x_1}$ зростає як множина), а далі **Th. 4.4.1**. Остання рівність виконана в силу неперервності міри знизу – пукнт 3 є.
Власне, довели $E \in \mathcal{H}$.
Аналогічно якщо $E^{(n)} \in \mathcal{H}$, причому вони тепер спадають та $E = \bigcup_{n=1}^\infty E^{(n)}$, то звідси $E \in \mathcal{H}$. Єдине там використовується неперервність міри зверху, але міри в нас скінченні, тому все нормально.

IV. $\mathcal{H} \supset \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$.
Дійсно, оскільки $\mathcal{H} \supset k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ за кроком II, а також $\mathcal{H}$ – монотонний клас за кроком III, то звідси $\mathcal{H} \supset mk(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$. За **Th. 1.2.8**, маємо $\mathcal{H} \supset \sigma k(k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)) = \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$. Думаю, останню рівність пояснювати не варто, тут зрозуміло.

V. $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$ (останній крок).
Спочатку доведемо, що для кожного $E \in \mathcal{F}$ ми можемо підібрати таку множину $A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, для якої $E \subset A$, а також $\mu(A \setminus E) = 0$.
Власне, нехай $E \in \mathcal{F}$, тоді тут $\mu(E) = \inf_{\substack{E \subset \bigcup_{n=1}^\infty E^{(n)} \\ E^{(n)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}} \sum_{n=1}^\infty \mu\left(E^{(n)}\right)$. Для кожного $k \geq 1$ ми можемо підібрати $E \subset \bigcup_{n=1}^\infty E^{(nk)}$, для яких $\sum_{n=1}^\infty \mu\left(E^{(nk)}\right) < \mu(E) + \frac{1}{k}$.
Оберемо множину $A = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty E^{(nk)}$, причому в цьому випадку дійсно $A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$. Також зрозуміло, що $E \subset A$, якщо перетнути всі вкладення вище по k. Нарешті,
$\mu(A \setminus E) = \mu(A) - \mu(E) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu\left(E^{(nk)}\right) - \mu(E) < \frac{1}{k}$.
При $k \to \infty$ отримаємо бажану рівність $\mu(A \setminus E) = 0$.

Нехай тепер $E \in \mathcal{F}$, але поки обмежимось $\mu(E) = 0$. Ми вже знаємо, що є множина $A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, для якої $A \supset E$ (ясно, що й $A_{x_1} \supset E_{x_1}$) та $\mu(A \setminus E) = 0$. Але в наших кондиціях $\mu(A) = 0$.
У нас є бонус в тому, що $A \in \mathcal{H}$ за кроком IV, а тому виконуються пункти 1),2),3) з леми. Зокрема $0 = \mu(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1})\, d\mu_1(x_1)$. Звідси випливає, що $\mu_2(A_{x_1}) = 0 \pmod{\mu_1}$. Тоді, маючи $A_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, умову $E_{x_1} \subset A_{x_1}$ та умову, що μ_1 повна міра, отримаємо $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$ – пункт 1 є.
Більше того, за тим же вкладенням, $\mu(E_{x_1}) = 0 \pmod{\mu_1}$. Зрозуміло, що 0 є $\mathcal{F}_1$-вимірною, а в силу

повноти μ_1, отримаємо, що $\mu(E_{x_1})$ також $\mathcal{F}_1$-вимірна – пункт 2 є.
$\displaystyle\int_{X_1} \mu_2\left(E_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) = 0 = \mu(E)$ – пункт 3 є.

Нарешті, нехай $E \in \mathcal{F}$ (без додаткових обмежень). Ми вже знаємо, що є множина $A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, для якої $A \supset E$ та $\mu(A \setminus E) = 0$. Ми зведемо до попереднього кейсу.
Зауважимо, що $E = A \setminus (A \setminus E)$. Але тоді зрозуміло, що $E_{x_1} = A_{x_1} \setminus (A \setminus E)_{x_1}$. Ми уже маємо $A_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, але також $(A \setminus E)x_1 \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$, просто тому що $\mu(A \setminus E) = 0$. Разом отримаємо $E \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$ – пункт 1 є.
$\mu_2\left(E_{x_1}\right) = \mu_2\left(A_{x_1}\right) - \mu_2\left((A \setminus E)_{x_1}\right)$. Праворуч $\mathcal{F}_1$-вимірна, тоді ліворуч буде теж $\mathcal{F}_1$-вимірність в силу того, що μ_1 – повна міра – пункт 2 є.
$\displaystyle\int_{X_1} \mu_2\left(E_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \mu_2\left(A_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) - \int_{X_1} \mu_2\left((A \setminus E)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) = \mu(A) - \mu(A \setminus E) = \mu(E)$ – пункт 3 є.
Тим самим ми (нарешті) завершили крок IV та довели лему для першого випадку.

2. Випадок, коли μ_1, μ_2 обидва σ-скінченні міри.
Значить, за умовою, є множини $X_1^{(n)} \in \mathcal{F}_1$, для яких $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_1^{(n)} = X_1$ та $\mu_1\left(X_1^{(n)}\right) < +\infty$; є множини $X_2^{(n)} \in \mathcal{F}_2$, для яких $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_2^{(n)} = X_2$ та $\mu_2\left(X_2^{(n)}\right) < +\infty$.
Перейдемо до множин $Y_1^{(n)} = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} X_1^{(n)}$ та $Y_2^{(n)} = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} X_2^{(n)}$. Слід зазначити, що на $Y_1^{(n)} \cap \mathcal{F}_1$ та $Y_2^{(n)} \cap \mathcal{F}_2$ міри μ_1, μ_2 є скінченними – ми звели до першого випадку, а для нього лема виконана.
Нехай $E \in \mathcal{F}$. Зауважимо, що $Y^{(n)} \cap E$ зростає до E. На множині $Y^{(n)} \cap E$ виконані вже 1),2),3).
$E_{x_1} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (Y^{(n)} \cap E)_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$ – пункт 1 є.
$\mu_2(E_{x_1}) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right)$ за неперервністю міри знизу. Також $\mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right)$ уже $\mathcal{F}_1$-вимірна, а тому звідси $\mu_2(E_{x_1})$ також $\mathcal{F}_1$-вимірна як границя – пункт 2 є.
$\displaystyle\int_{Y_1^{(n)}} \mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) = \mu\left(Y^{(n)} \cap E\right)$ – це мені вже відомо. Але перепишемо так:
$\displaystyle\int_{X_1} \mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right) \mathbb{1}_{Y_1^{(n)}}(x_1)\, d\mu_1(x_1) = \mu\left(Y^{(n)} \cap E\right)$. Спрямувавши $n \to \infty$, отримаємо
$\displaystyle\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \mu(E)$.
Права частина – неперервність міри знизу. Ліва частина через **Th. 4.4.1**, бо в нас послідовність $\mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right) \mathbb{1}_{Y_1^{(n)}}$ є всі $\mathcal{F}_1$-вимірними, а також зростає до $\mu_2(E_{x_1})$ – крок 3 є. ■

6.3 Теорема Тонеллі та Фубіні

Задані $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ – два вимірних простори з мірами. Позначимо $X = X_1 \times X_2$.

Theorem 6.3.1 Теорема Тонеллі
Нехай μ_1, μ_2 – міри, що повні та σ-скінченні. Задано функцію $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – невід'ємна та $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$-вимірна. Відомо, що:
1) f_{x_1} буде $\mathcal{F}_2$-вимірною $\pmod{\mu_1}$;
2) $g(x_1) = \displaystyle\int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)$ буде $\mathcal{F}_1$-вимірною;
3) $\displaystyle\int_X f\, d\mu = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)$.

Remark 6.3.2 Функція $g(x_1)$, можливо, не є визначеною на множині міри нуль в силу того, що перша умова працює майже скрізь відносно μ_1, але в силу повноти міри ми можемо взяти еквівалентну їй функцію, де визначено все, яка не впливає ніяк на вимірність.

Proof.
I. Випадок функції $\mathbb{1}_B$, де множина $B \in \mathcal{F}$.

Але оскільки $B \in \mathcal{F}$, то вже автоматично виконуються щойно доведена лема.
Зафіксуємо точку $x_1 \in X_1$, тоді звідси отримаємо переріз функції:
$(\mathbb{1}_B)_{x_1}(x_2) = \mathbb{1}_B(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in B \\ 0, & (x_1, x_2) \notin B \end{cases} = \begin{cases} 1, & x_2 \in B_{x_1} \\ 0, & x_2 \notin B_{x_1} \end{cases} = \mathbb{1}_{B_{x_1}}(x_2)$.
Отримана фукція $\mathcal{F}_2$-вимірна $\pmod{\mu_1}$, тому що $B_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$ (п. 1 леми) – пункт 1 є.
$\displaystyle\int_{X_2} (\mathbb{1}_B)_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2) = \int_{X_2} \mathbb{1}_{B_{x_1}}(x_2)\, d\mu_2(x_2) = \mu_2(B_{x_1})$
Цей інтеграл буде $\mathcal{F}_1$-вимірною, бо $\mu_2(B_{x_1})$ буде $\mathcal{F}_1$-вимірною (п. 2 леми) – пункт 2 є.
$\displaystyle\int_X \mathbb{1}_B\, d\mu = \mu(B) \overset{\text{п. 3 леми}}{=} \int_{X_1} \mu_2(B_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \int_{X_2} (\mathbb{1}_B)_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)\, d\mu_1(x_1)$ – пункт 3 є.

II. Випадок функції p – проста невід'ємна та $\mathcal{F}$-вимірна.
Тобто мається $\displaystyle p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A^{(k)}}(x)$, причому всі $A^{(k)} \in \mathcal{F}$. Зафіксуємо $x_1 \in X_1$, тоді
$\displaystyle p_{x_1}(x_2) = p(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^n a_k \left(\mathbb{1}_{A^{(k)}}\right)_{x_1}(x_2)$.
Ми вже знаємо, що кожний індикатор, за кроком I, буде $\mathcal{F}_2$-вимірною $\pmod{\mu_1}$, а тому звідси сама p_{x_1} також $\mathcal{F}_2$-вимірна $\pmod{\mu_1}$ – пункт 1 є.
$\displaystyle\int_{X_2} p_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2) = \sum_{k=1}^n a_k \int_{X_2} \left(\mathbb{1}_{A^{(k)}}\right)_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)$.
Даний інтеграл буде $\mathcal{F}_1$-вимірною як сума $\mathcal{F}_1$-вимірних з крока I – пункт 2 є.
$$\int_X p\, d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu\left(A^{(k)}\right) \overset{\text{крок I}}{=} \sum_{k=1}^n a_k \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} \left(\mathbb{1}_{A^{(k)}}\right)_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2) =$$
$$= \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} \sum_{k=1}^n a_k \left(\mathbb{1}_{A^{(k)}}\right)_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} p_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2) \text{ – пункт 3 є.}$$

III. Випадок функції f – невід'ємна та $\mathcal{F}$-вимірна.
Маємо послідовність $\{p_n\}$ – прості невід'ємні та $\mathcal{F}$-вимірні, де $p_n \to f$.
$f_{x_1} = \lim\limits_{n\to\infty} (p_n)_{x_1}$ при фіксованому $x_1 \in X_1$. За кроком II, всі $(p_n)_{x_1}$ будуть $\mathcal{F}_2$-вимірною $\pmod{\mu_1}$, а тому й f буде $\mathcal{F}_2$-вимірною $\pmod{\mu_1}$ як ліміт – пункт 1 є.
$\displaystyle\int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2) = \lim_{n\to\infty} \int_{X_2} (p_n)_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)$ – $\mathcal{F}_1$-вимірна як границя за кроком II - пункт 2 є.
$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X p_n\, d\lambda \overset{\text{крок II}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} (p_n)_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} (p_n)_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2).$$
Остання рівність виконана спочатку за **Th. 4.4.1**, а далі за **Th. 4.2.1** – пункт 3 є. ■

Theorem 6.3.3 Теорема Фубіні
Нехай μ_1, μ_2 – міри, що повні та σ-скінченні. Задано функцію $f \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$, причому $f \in L(X, \mu)$. Відомо, що:
1) $f_{x_1} \in L(X_2, \mu_2) \pmod{\mu_1}$;
2) $\displaystyle g(x_1) = \int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2) \in L(X_1, \mu_1)$;
3) $\displaystyle\int_X f\, d\mu = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)$.

Proof.
I. Випадок функції f – невід'ємна.
Уже виконується для неї теорема Тонеллі, але ще нічого невідомо про інтегрованіть, що в Фубіні.
$\displaystyle\int_X f\, d\mu = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)$ за Тонеллі. Але оскільки $f \in L(X, \lambda)$, то звідси маємо $\displaystyle\int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2) < +\infty \pmod{\mu_1}$, а це в точності $f_{x_1}(x_2) \in L(X_2, \mu_2) \pmod{\mu_1}$ – пункт 1 є.
Також $g(x_1) \in L(X_1, \mu_1)$ за щойно отриманим – пункт 2 є.
Пункт 3 випливає з теореми Тонеллі, який ми вже розписували тут.

II. Випадок функції f – довільної.

Маємо $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, кожна з яких невід'ємна, а тому працює крок I.
При фіксованому x_1 маємо $f_{x_1}(x_2) = (f_+)_{x_1}(x_2) - (f_-)_{x_1}(x_2)$.
Ця рівність автоматично доводить пункти 1), 2). Щодо 3),

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu \overset{\text{крок I}}{=}$$

$$= \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} (f_+)_{x_1}(x_2)\,d\mu_2(x_2) - \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} (f_-)_{x_1}(x_2)\,d\mu_2(x_2) =$$

$$= \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \left(\int_{X_2} (f_+)_{x_1}(x_2)\,d\mu_2(x_2) - \int_{X_2} (f_-)_{x_1}(x_2)\,d\mu_2(x_2) \right) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\,d\mu_2(x_2).$$

■

7 Простір L_p

7.1 Основні нерівності

Lemma 7.1.1 Нерівність Юнга
Задані числа $p, q > 1$, причому $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тода для всіх $a, b \geq 0$ виконується нерівність $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Proof.
Якщо $a = 0$ або $b = 0$, то нерівність цілком зрозуміла. Тому надалі $a, b > 0$.
Розглянемо функцію $f(a) = ab - \dfrac{a^p}{p} - \dfrac{b^q}{q}$ та дослідимо її. Обчислимо похідну
$f'(a) = b - a^{p-1}$.
Зауважимо, що в точці $a = b^{\frac{1}{p-1}}$ досягається найменше значення. Тож
$\min\limits_{a>0} f(a) = f\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = b^{\frac{1}{p-1}} b - \dfrac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} - \dfrac{b^q}{q} = b^q - \dfrac{b^q}{p} - \dfrac{b^q}{q} = b^q \left(1 - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right) = 0.$
Таким чином, $\forall a > 0 : f(a) \geq 0$, звідси випливає нерівніть $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$. ■

Theorem 7.1.2 Нерівність Гьольдера
Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір, функції $f, g \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ – $\mathcal{F}$-вимірні та $p, q > 1$ такі, що $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Тоді $\displaystyle\int_X |fg|\, d\lambda \leq \left(\int_X |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f|^q\, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$

Proof.
Припустимо, що $\left(\displaystyle\int_X |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = 0$, тоді звідси $|f| = 0 \pmod{\lambda}$. У такому разі нерівність спрацьовує. Аналогічно все буде при $\left(\displaystyle\int_X |g|^q\, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} = 0$.
Припустимо, що $\left(\displaystyle\int_X |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = +\infty$. Тоді права частина нерівності буде точно $+\infty$ (бо випадок, коли один із інтегралів нуль, був розглянутий). Отже, нерівність автоматом виконана. Аналогічно все буде при$\left(\displaystyle\int_X |g|^q\, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} = +\infty$.

Тепер ми можемо зробити еквівалентні перетворення. Щоб довести Гьольдера, ми доведемо, що
$\dfrac{\displaystyle\int_X |f||g|\, d\lambda}{\left(\displaystyle\int_X |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \left(\displaystyle\int_X |g|^q\, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$ (по суті, ми праву частині нерівності поділили). Оскільки інтеграли – це дійсні числа, то ми їх внесемо всередину інтеграла чисельника як множними.
$\displaystyle\int_X \frac{|f|}{\left(\int_X |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g|}{\left(\int_X |g|^q\, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}}\, d\lambda \leq 1.$
Проте ця нерівність дійсно буде виконаною. Дійсно,

$$\frac{|f|}{\left(\int_X |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g|}{\left(\int_X |g|^q\, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}} \overset{\text{нер-ть Юнга}}{\leq} \frac{\left(\frac{|f|}{\left(\int_X |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{|g|}{\left(\int_X |g|^q\, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}}\right)^q}{q} = \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\displaystyle\int_X |f|^p\, d\lambda} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\displaystyle\int_X |g|^q\, d\lambda}$$

Тепер проінтегруємо обидві частини:
$\displaystyle\int_X \frac{|f|}{\left(\int_X |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g|}{\left(\int_X |g|^q\, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}}\, d\lambda \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$ ■

Theorem 7.1.3 Нерівність Мінковського
Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір, функції $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірні та $p \geq 1$. Тоді
$\left(\displaystyle\int_X |f+g|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\displaystyle\int_X |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\displaystyle\int_X |g|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}.$

Proof.
Розглянемо випадок $p = 1$. Тоді нерівність випливає з нерівності трикутника $|f + g| \le |f| + |g|$.
Тепер випадок $p > 1$, тоді оберемо $q > 1$, щоб була рівність $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Припустимо, що $\left(\displaystyle\int_X |f+g|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = 0$. Тоді нерівність автоматично виконана.
Припустимо, що $\left(\displaystyle\int_X |f+g|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = +\infty$. Скориставшись нерівністю Єнсена для функції x^p, $p > 1$, отримаємо $\left(\dfrac{|f+g|}{2}\right)^p \le \left(\dfrac{|f|+|g|}{2}\right)^p \overset{\text{нер-ть Єнсена}}{\le} \dfrac{|f|^p + |g|^p}{2}$. Після інтегрування всіх частин нерівностей, отримаємо, що хоча б один доданок у правій нерівності має бути $+\infty$. Тож нерівність виконується.
Для всіх інших випадків буде інше доведення.

$$\int_X |f+g|^p \, d\lambda = \int_X |f+g||f+g|^{p-1} \, d\lambda \le \int_X |f||f+g|^{p-1} \, d\lambda + \int_X |g||f+g|^{p-1} \, d\lambda \overset{\text{нер-ть Гьольдера}}{\le}$$
$$\le \left(\int_X |f|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_X |g|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Зауважимо, що $(p-1)q = p$, зважаючи на рівність $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Далі поділимо обидві частини нерівності на $\left(\displaystyle\int_X |f+g|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$ (саме через це я на початку розбивав на випадки). Отримаємо

$$\left(\int_X |f+g|^p \, d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\int_X |f+g|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_X |f|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}. \quad \blacksquare$$

Lemma 7.1.4 Нерівність Чебишова
Задано $(X, \mathbb{F}, \lambda)$ – вимірний простір та функція $f \colon X \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-вимірна. Тоді $\forall \varepsilon > 0 :$
$\lambda\left(\{x \in X : |f(x)| \ge \varepsilon\}\right) \le \dfrac{1}{\varepsilon} \displaystyle\int_X |f| \, d\lambda$.

Proof.
$$\int_X |f| \, d\lambda \ge \int_{\{|f| \ge \varepsilon\}} |f| \, d\lambda \ge \int_{\{|f| \ge \varepsilon\}} \varepsilon \, d\lambda = \varepsilon \lambda\{x \in X : |f(x)| \ge \varepsilon\}. \quad \blacksquare$$

7.2 Конструкція простору L_p

Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір та число $1 \le p < \infty$. Розглянемо множину

$$\tilde{L}_p(X, \lambda) = \{f \colon X \to \bar{\mathbb{R}} \mid f - \mathcal{F} - \text{вимірна}, |f|^p \in L(X, \lambda)\}$$

Установимо на даній множині відношення еквівалентності:

$$f \sim g \iff f = g \pmod{\lambda}$$

Отримаємо нове означення:

Definition 7.2.1 Простором $L_p = L_p(X, \lambda)$ при $1 \le p < \infty$ називають множину класів еквівалентності, що отримана з $\tilde{L}_p(X, \lambda)$ за допомогою встановленого відношення еквівалентності.

У класі еквівалентності лежать майже одні й ті самі функції. Такі функції завжди мають (якби мовити) дуже схожі властивості з точки зору теорії міри. Значить, ці функції можна вважати однаковими. Тому, поступаючись формальністю, ми будемо говорити, що L_p – це просто набір функцій.

Proposition 7.2.2 $(L_p, \|\cdot\|_p)$, де число $1 \le p < +\infty$ – дійсний нормований простір, причому норма задається ось так:
$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$$

Remark 7.2.3 Зазначимо, що L_p – векторний простір над $\mathbb{R}$. Дійсно, маємо $f, g \in L_p$, тоді звідси $\|f\|_p, \|g\|_p < +\infty$. Значить, за нерівністю Мінковського, $\|f + g\|_p < +\infty$, тож $f + g \in L_p$. Зрозуміло також, що $\|\alpha f\|_p < +\infty, \alpha \in \mathbb{R}$, тож $\alpha f \in L_p$.

Proof.
Нам треба просто перевірити властивості норми.
1) $\|f\|_p \geq 0$ – зрозуміло, бо під інтегралом стоїть невід'ємна функція $|f|^p$. Далі зауважимо, що при $\|f\|_p = 0$ маємо $f = 0 \pmod{\lambda}$, тож $f = 0$ як елемент L_p.
2) $\|\alpha f\|_p = \left(\int_X |\alpha f|^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|f\|_p$.
3) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ – це просто нерівність Мінковського в більш компактному вигляді.
Отже, у нас дійсно встановлений нормований простір. ■

Proposition 7.2.4 Установлений вище нормований простір $(L_p, \|\cdot\|_p)$ – банахів.

Proof.
Інакше кажучи, нам треба довести повноту. Нехай $\{f_n, n \geq 1\} \subset L_p$ – фундаментальна послідовність, тобто $\|f_n - f_m\|_p \to 0$. За нерівністю Чебишова, маємо таку оцінку:
$\lambda\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)|^p \geq \varepsilon\}\right) \leq \dfrac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f_m|^p \, d\lambda = \dfrac{1}{\varepsilon} \|f_n - f_m\|_p^p \to 0$.
$\lambda\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon^{\frac{1}{p}}\right\}\right) \leq \dfrac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \|f_n - f_m\|_p^p \to 0$.
Отже, $\{f_n\}$ – фундаментальна послідовність за мірою. Значить, за **Th. 3.7.5**, існує підпослідовність $\{f_{n_k}\}$, для якої $f_{n_k} \to f \pmod{\lambda}$, де функція f є $\mathcal{F}$-вимірною. Наша мета буде довести, що $\|f_n - f\|_p \to 0$ при $n \to \infty$, тобто послідовність $\{f_n\} \subset L_p$ буде збігатися за нормою до функції f, причому треба окремо показати, що $f \in L_p$.
Нехай $\varepsilon > 0$. Із фундаментальності $\{f_{n_k}\}$ відносно норми, $\exists k_0 : \forall k, l \geq k_0 : \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p < \varepsilon \iff$
$\iff \int_X |f_{n_k} - f_{n_l}|^p \, d\lambda < \varepsilon^p$. За лемою Фату, отримаємо наступне при $k \geq k_0$:
$\int_X |f_{n_k} - f| \, d\lambda = \int_X \lim_{l \to \infty} |f_{n_k} - f_{n_l}|^p \, d\lambda \leq \varliminf_{l \to \infty} \int_X |f_{n_k} - f_{n_l}|^p \, d\lambda \leq \varepsilon^p < +\infty$.
Отже, звідси $f_{n_k} - f \in L_p$. Оскільки L_p – векторний простір, то звідси $f \in L_p$.
Поки розписували нерівності, отримали $\int_X |f_{n_k} - f|^p \, d\lambda \leq \varepsilon^p \iff \|f_{n_k} - f\|_p \leq \varepsilon$, причому $\forall k \geq k_0$.
Отже, $\|f_{n_k} - f\|_p \to 0, k \to \infty$.
Оскільки $\{f_n\}$ – фундаментальна та $\{f_{n_k}\}$ – збіжна до f, то $\{f_n\}$ – теж збіжна до f.
Ми довели, що $(L_p, \|\cdot\|_p)$ – справді банахів. ■

7.3 Щільні підмножини L_p

Theorem 7.3.1 Множина простих функцій – щільна підмножина простору L_p.

Тобто для всіх $f \in L_p$ та $\varepsilon > 0$ існує проста функція $q \in L_p$, для якої $\|f - q\|_p < \varepsilon$.

Proof.
I. Випадок $f \geq 0$.
Тоді існують прості невід'ємні та вимірні функції $\{q_n\}$ так, що монотонним чином $q_n \to f$.
$0 \leq f - q_n \leq f \implies |f - q_n|^p \leq |f|^p \qquad \lim_{n \to \infty} |f(x) - q_n(x)|^p = 0$.
За теоремою Лебега про мажоровану збіжність, взявши мажоранту $|f|^p \in L(X, \lambda)$, отримаємо, що $\int_X |f - q_n|^p \, d\lambda \to 0 \iff \|f - q_n\|_p \to 0, n \to \infty$.
Серед цих q_n знайдеться функція q, для якої $\|f - q\|_p < \varepsilon$.

II. Випадок f – довільна.
Тоді $f = f_+ - f_-$, де кожна з функцій в доданку – невід'ємна. Значить, за кроком I, існують прості функції $q_+, q_- \in L_p$, для яких $\|f_+ - q_+\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad \|f_- - q_-\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Оберемо функцію $q = q_+ - q_-$, яка теж проста, причому $q \in L_p$. Тоді
$\|f - q\|_p = \|(f_+ - q_+) - (f_- - q_-)\| \leq \|f_+ - q_+\|_p + \|f_- - q_-\|_p < \varepsilon$. ■

Theorem 7.3.2 Припустимо, що λ на $\mathcal{F}$ була отримана за схемою за Каратеодорі з півкільця $\mathcal{P}$, причому λ – σ-скінченна на $\mathcal{P}$. Тоді для всіх $f \in L_p$ та $\varepsilon > 0$ існує проста функція $q \in L_p$, для якої $\|f - q\|_p < \varepsilon$.

От тільки для простої функції $q(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ уже буде $A_k \in \mathcal{P}$ (у порівнянні з попереднім).

Proof.
I. Випадок $f = \mathbb{1}_C, C \in \mathcal{F}$.
$\displaystyle\int_X |f|^p \, d\lambda < +\infty \iff \int_X \mathbb{1}_C^p \, d\lambda = \lambda(C) < +\infty$.
За теоремою про наближення міри її значеннями на кільці, знайдеться $B \in k(\mathcal{P})$, для якої $\lambda(C \triangle B) < \varepsilon^p$, де $B = \displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k, A_k \in \mathcal{P}$.

Покладемо $q(x) = \mathbb{1}_B(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}(x)$. Це – проста функція потрібного вигляду. Тоді

$$\|f - q\|_p = \left(\int_X |\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |\mathbb{1}_{C \triangle B}|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{\frac{1}{p}}(C \triangle B) < \varepsilon.$$

II. Випадок $f \in L_p$ – проста (не обов'язково невід'ємна), тобто $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} c_j \mathbb{1}_{C_j}, C_j \in \mathcal{F}, c_i \neq 0$.

$$\int_X |f|^p \, d\lambda = \sum_{i=1}^{j} |c_i|^p \lambda(C_i) < +\infty \overset{c_i \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda(C_i) < +\infty \iff \mathbb{1}_{C_i} \in L_p.$$

Тоді за кроком I, візьмемо прості функції q_i потрібного вигляду, для яких $\|\mathbb{1}_{C_i} - q_i\|_p < \dfrac{\varepsilon}{\displaystyle\sum_{i=1}^{j} |c_i|}$.

Покладемо $q = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} c_i q_i$ та зауважимо, що q має необіхдний вигляд. Тоді

$$\|f - q\|_p \leq \sum_{i=1}^{j} |c_i| \|\mathbb{1}_{C_i} - q_i\|_p < \varepsilon.$$

III. Випадок $f \in L_p$ – довільна.
За попередньою теоремою, знайдеться проста функція $f_0 \in L_p$, для якої $\|f - f_0\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Далі, за кроком II, для простої функції $f_0 \in L_p$ існує проста функція q потрібного вигляду, для якої $\|f_0 - q\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ну тоді ясно, що $\|f - q\|_p < \varepsilon$. ■

Нарешті, розглянемо тепер частинний випадок $L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$, тобто в нас $X = \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F} = \mathcal{S}_d,\ \lambda = \lambda_d$ – міра Лебега.

Corollary 7.3.3 Простір $L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ – сепарабельний при всіх $1 \leq p < +\infty$.

Proof.
Розглянемо зліченне півкільце множин $\tilde{\mathcal{P}}_d = \left\{ \displaystyle\prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\}$. Розглянемо M – набір функцій вигляду $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} r_i \mathbb{1}_{C_i}, r_i \in \mathbb{Q}, C_i \in \tilde{\mathcal{P}}_d, j \geq 1$. Можна зазначити, що M – зліченна множина. Ми доведемо, що M буде щільною в L_p.

Функціями з M можна як завгодно близько за нормою $\|\cdot\|_p$ наближати функції вигляду $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} c_i \mathbb{1}_{C_i}, c_i \in \mathbb{R}, C_i \in \tilde{\mathcal{P}}_d$, а дані функції, у свою чергу, наближають функції типу $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} c_i \mathbb{1}_{D_i}, c_i \in \mathbb{R}, D_i \in \mathcal{P}_d$.
Із попередньої теореми, маємо, що набір функцій такого вигляду – щільна підмножина L_p. ■

Список використаних джерел

1. В. М. Радченко, плейліст "Теорія міри та інтеграли. Лекції" *клік*

2. А. Я. Дороговцев, книга "Элементы общей теории меры и интеграла" *клік*