

# Зміст

<b>1</b>	<b>Топологічні простори</b>	<b>2</b>
1.1	Топологія . . . . .	2
1.2	Зв'язок з метричними просторами . . . . .	3
1.3	Збіжність в топологічному просторі . . . . .	4
1.4	Неперервні відображення . . . . .	5
1.5	Гомеоморфність топологічних просторів . . . . .	7
1.6	Конструкція топології за базою . . . . .	8
1.7	Конструкція топології за передбазою . . . . .	10
1.8	Характеристики точок множин . . . . .	11
1.9	Топологічний підпростір . . . . .	12
1.10	Добуток просторів . . . . .	13
1.11	Фактортопологія . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Компактні простори</b>	<b>19</b>
2.1	Компактність . . . . .	19
2.2	Компактність та підпростори . . . . .	20
2.3	Компактність та добуток просторів . . . . .	21
2.4	Компактність та факторпростори . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Зв'язні простори</b>	<b>23</b>
3.1	Зв'язність . . . . .	23
3.2	Лінійна зв'язність . . . . .	24
3.3	Компоненти зв'язності та лінійної зв'язності . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Лема Урисона</b>	<b>29</b>
4.1	Корисні леми . . . . .	29
4.2	Функціональна збіжність . . . . .	30

# 1 Топологічні простори

## 1.1 Топологія

**Definition 1.1.1** Задано  $X$  – деяка множина.

Клас  $\tau$ , що містить підмножини  $X$ , називається **топологією**, якщо:

$$\begin{aligned} X, \emptyset &\in \tau \\ \forall \{U_\alpha \in \tau\} : \bigcup_{\alpha} U_\alpha &\in \tau \\ \forall U, V \in \tau : U \cap V &\in \tau \end{aligned}$$

Пару  $(X, \tau)$  називатимемо **топологічним простором**.

**Definition 1.1.2** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір.

Множина  $U$  називається **відкритою**, якщо

$$U \in \tau$$

Множина  $V$  називається **замкнутою**, якщо

$$X \setminus V \in \tau$$

**Example 1.1.3** Зокрема будь-який метричний простір  $(X, \rho)$  задає топологію

$\tau_\rho = \{\text{всі відкриті множини в } (X, \rho)\}$ . Тому що там виконуються твердження:  $X, \emptyset$  – відкриті, будь-яке об'єднання сім'ї відкритих – відкрита, будь-який перетин двох відкритих – відкрита.

**Example 1.1.4** Розглянемо множину  $X$  та  $\tau = 2^X$ . Тоді вона також задає топологію.

$(X, \tau)$ , де  $\tau = 2^X$ , ще називають **дискретною топологією**.

**Example 1.1.5** Розглянемо множину  $X$  та  $\tau = \{\emptyset, X\}$ . Тоді вона також задає топологію.

$(X, \tau)$ , де  $\tau = \{\emptyset, X\}$ , ще називають **недискретною топологією**.

**Example 1.1.6** Маємо  $X = \mathbb{R}$  та розглянемо  $\tau = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \emptyset \text{ або } U = \mathbb{R} \setminus S, S \subset \mathbb{R} - \text{деяка скінченна}\}$ .

Вона утворює топологію, а називається вона **топологія Заріського**.

Дійсно,  $\emptyset \in \tau$ , а також  $X \in \tau$ , тому що  $X = \mathbb{R} \setminus \emptyset$ .

Нехай  $\{U_\alpha \in \tau\}$  – сім'я, поки нехай всі такі, що  $U_\alpha = \mathbb{R} \setminus S_\alpha$  для деякої  $\{S_\alpha\}$  сім'ї скінченних підмножин. Тоді звідси  $\bigcup_{\alpha} U_\alpha = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\alpha} S_\alpha$ . Зрозуміло цілком, що  $\bigcap_{\alpha} S_\alpha$  буде скінченною, тож  $\bigcup_{\alpha} U_\alpha \in \tau$ .

Якщо існує принаймні одна множина  $U_\alpha$ , де  $U_\alpha = \emptyset$ , то тоді прибираємо їх – повертаємось до першого випадку.

Нехай  $U_1, U_2 \in \tau$ , тобто  $U_1 = \mathbb{R} \setminus S_1$  та  $U_2 = \mathbb{R} \setminus S_2$ , де множини  $S_1, S_2$  – скінченні. Тоді  $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R} \setminus (S_1 \cup S_2)$ , де  $S_1 \cup S_2$ , зрозуміло, скінченна. Тож  $U_1 \cap U_2 \in \tau$ . Якщо серед них  $U_i = \emptyset$ , то тоді все зрозуміло.

**Definition 1.1.7** Задано  $(X, \tau)$  та  $(X, \tau')$  – два топологічних простори.

$\tau'$  називається **сильнішою за  $\tau$** , якщо

$$\tau' \supset \tau$$

$\tau'$  називається **слабшою за  $\tau$** , якщо

$$\tau' \subset \tau$$

**Example 1.1.8** Якщо є множина  $X$ , то дискретна топологія є найсильнішою серед всіх інших топологій; а недискретна топологія є найслабшою серед всіх інших топологій.

**Definition 1.1.9** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $x \in X$ .

**Відкритим оком точки  $x$**  назовемо таку відкриту множину  $U$ , де

$$U \ni x$$

**Оком точки  $x$**  назовемо таку множину  $V$ , що містить відкритий окіл т.  $x$ , тобто

$$\exists U - \text{відкритий окіл точки } x : V \supset U$$

**Example 1.1.10** Розглянемо  $\mathbb{R}$  зі стандартною метрикою. Тоді  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  буде відкритим околom точки 0, тому що даний інтервал відкритий та містить 0. Водночас  $[-\varepsilon, \varepsilon], (-\varepsilon, \varepsilon], [-\varepsilon, \varepsilon)$  будуть околами точки 0, тому що всі вони містять відкритий окіл точки 0 (наприклад)  $(\varepsilon, \varepsilon)$ .

**Remark 1.1.11** Відкритий окіл точки  $x$  – також окіл точки  $x$ . Дійсно, нехай  $U$  – відкритий окіл  $x$ . Тоді  $\exists U$  – відкритий окіл точки  $x : U \supset U$ . Тобто за означенням,  $U$  – просто окіл точки  $x$ .

**Definition 1.1.12** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $A \subset X$ . Точка  $x$  називається **внутрішньою для  $A$** , якщо

$$\exists V - \text{окіл точки } x : V \subset A$$

**Proposition 1.1.13** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір.

$U$  – відкрита  $\iff \forall x \in U : x$  – внутрішня точка для  $U$ .

Це те саме звичне означення відкритої множини, яку ми давали в метричному просторі.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $U$  – відкрита. Тоді якщо  $x \in U$ , то тоді  $U$  – відкритий окіл точки  $x$ , причому  $U \subset U$ . Тобто  $x$  – внутрішня точка для  $U$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\forall x \in U : x$  – внутрішня точка для  $U$ . Тобто це означає, що  $\exists V_x$  – окіл точки  $x : V_x \subset U$ . Оскільки  $V_x$  – окіл точки  $x$ , то тоді  $\exists U_x$  – відкритий окіл точки  $x : U_x \subset V_x \subset U$ .

Зауважимо, що  $U = \bigcup_{x \in U} U_x$ . Оскільки  $\{U_x, x \in U\}$  – сім'я відкритих множин, то в силу означення топології,  $U$  буде відкритою як об'єднання. ■

## 1.2 Зв'язок з метричними просторами

**Definition 1.2.1** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір.

Топологічний простір називається **метризуючим**, якщо

$$\exists \rho - \text{метрика на множині } X : \tau_\rho = \tau$$

Інакше кажучи, метрика  $\rho$  **індукує ту саму топологію**, що була на початку.

**Example 1.2.2** Зокрема дискретний топологічний простір  $(X, \tau)$  буде метризуючим. Тому що існує

метрика  $d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$  – дискретна метрика. У цьому випадку (із теорії метричних просторів)

будь-яка підмножина  $X$  буде відкритою. Значить,  $\tau_d = \tau$ .

**Example 1.2.3** Але не дискретний топологічний простір  $(X, \tau)$  не буде метризуючим при  $\#X \geq 2$ .

Припустимо, що існує метрика  $\rho$ , яка індукує ту саму топологію. Зауважимо, що існує відкритий окіл  $\emptyset \subsetneq B(x; r) \subsetneq X$  при деякому  $r > 0$ . Якби було навпаки, тобто  $\forall r > 0$  було б  $B(x; r) = X$ , то звідси  $\bigcap_{r \geq 0} B(x; r) = X = \{x\}$ , проте у нас  $X$  містить більше одного елементу.

Таким чином, знайшли  $B(x; r) \neq X, B(x; r) \neq \emptyset$  – ще одна відкрита множина, але  $B(x; r) \notin \tau$  – суперечність!

**Remark 1.2.4** Один й той самий топологічний простір можна метризувати двома різними метриками (тобто нема ін'єктивності переходу з метричного в топологічний простори).

**Example 1.2.5** Маємо  $(\mathbb{Z}, \tau)$  – дискретний топологічний простір, яка метризується метрикою  $d$ . Розглянемо іншу метрику  $\rho(m, n) = |m - n|$  на  $\mathbb{Z}$ . Зауважимо, що тоді кожна множина – відкрита.

І дійсно,  $B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \left\{y \in \mathbb{Z} : |x - y| < \frac{1}{2}\right\} = \{x\}$  – будь-яка одноточкова множина відкрита. Тому якщо брати довільні об'єднання, то тоді вони будуть відкритими.

**Remark 1.2.6** Не кожний топологічний простір може бути метризуючим (тобто нема сюр'єктивності переходу з метричного в топологічний простори).

Дійсно, ми довели, що не дискретний топологічний простір не може бути метризуючим.

**Definition 1.2.7** Задані  $(X, \rho)$  та  $(X, \rho')$  – два метричних простори. Метрики називаються **топологічно еквівалентними**, якщо

$$\tau_\rho = \tau_{\rho'}$$

Тобто вони індукують одну й ту саму топологію.  
Позначення:  $\rho \sim \rho'$ .

**Definition 1.2.8** Задані  $(X, \rho)$  та  $(X, \rho')$  – два метричних простори. Метрики називаються **Ліпшицево еквівалентними**, якщо

$$\exists C, c > 0 : \forall x, y \in X : c\rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq C\rho(x, y)$$

Позначення:  $\rho \stackrel{\text{Lipsch}}{\sim} \rho'$ .

**Remark 1.2.9** Зрозуміло, що два означення задають відношення еквівалентності.

**Proposition 1.2.10** Задані  $(X, \rho)$  та  $(X, \rho')$  – два метричних простори. Відомо, що  $\rho \stackrel{\text{Lipsch}}{\sim} \rho'$ . Тоді  $\rho \sim \rho'$ .

**Proof.**

Нам треба довести, що  $\tau_\rho = \tau_{\rho'}$ . Це теж саме, що довести, що  $U$  – відкрита в  $(X, \rho) \iff U$  – відкрита в  $(X, \rho')$ .

Нехай  $U$  – відкрита в  $(X, \rho)$ . Нехай  $x \in U$ , тоді за умовою,  $\exists B_\rho(x; r) \subset U$ . За умовою твердження, існують константи  $c, C > 0$ , для яких  $c\rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq C\rho(x, y)$ . Із цієї нерівності випливає  $\rho'(x, y) \leq C\rho(x, y)$ , а з неї випливає, що  $B_{\rho'}(x, cr) \subset B_\rho(x, r)$ . І дійсно,

$$y \in B_{\rho'}(x, cr) \implies \rho'(x, y) \leq cr \implies \rho(x, y) \leq \frac{1}{c}\rho'(x, y) \leq r \implies y \in B_\rho(x, r).$$

Отже,  $B_{\rho'}(x, cr) \subset U$ , тобто знайшли такий окіл, а тому  $x$  – внутрішня точка  $U$  відносно  $(X, \rho')$ . Оскільки це для довільної точки, то  $U$  – відкрита в  $(X, \rho')$ .

Нехай  $U$  – відкрита в  $(X, \rho')$ , то тоді аналогічно доводиться. Просто цього разу в нерівності  $c\rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq C\rho(x, y)$  використовується права частина нерівності. ■

**Remark 1.2.11** Якщо  $\rho \sim \rho'$ , то не обов'язково  $\rho \stackrel{\text{Lipsch}}{\sim} \rho'$ .

**Example 1.2.12** Зокрема маємо  $(\mathbb{Z}, d)$  та  $(\mathbb{Z}, \rho)$  – два метричних простори. Тут  $d$  – дискретна метрика та  $\rho$  задається як  $\rho(m, n) = |m - n|$ . Із **Ех. 1.2.5**, вони генерують одну й ту саму топологію, тобто  $\tau_d = \tau_\rho$ . А це означає, що  $d \sim \rho$ .

При цьому ми маємо  $d \not\stackrel{\text{Lipsch}}{\sim} \rho$ . Дійсно, нехай  $C > 0$ . Можна підібрати  $x = 2[C] + 1, y = [C]$ , причому тут  $x, y \in \mathbb{Z}$ , для яких  $\rho(x, y) > Cd(x, y)$ .

### 1.3 Збіжність в топологічному просторі

**Definition 1.3.1** Задані  $(X, \tau)$  – топологічний простір та послідовність  $\{x_n \in X, n \geq 1\}$ . Послідовність **збігається до точки**  $x \in X$ , якщо

$$\forall U - \text{відкритий окіл точки } x : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n \in U$$

**Example 1.3.2** Розглянемо  $(X, \tau_{\text{disc}})$  – дискретний топологічний простір.

Послідовність  $\{x_n \in X, n \geq 1\}$  збігається до точки  $x \in X \iff \exists N : \forall n \geq N : x_n = x$ .

⇒ Дано:  $\{x_n\}$  збігається до  $x \in X$ . Тоді для будь-якого відкритого околу точки  $x$ , зокрема для  $\{x\}$  існує номер  $N$ , де  $\forall n \geq N : x_n \in \{x\}$ , тобто  $x_n = x, \forall n \geq N$ .

⇐ Дано:  $\exists N : \forall n \geq N : x_n = x$ . Нехай  $U$  – відкритий окіл точки  $x$ . У нас є номер  $N$ , де  $\forall n \geq N : x \in U$ , зокрема звідси  $x_n \in U$ , а тому звідси  $\{x_n\}$  збігається до точки  $x \in X$ .

**Example 1.3.3** Розглянемо  $(X, \tau_{\text{indisc}})$  – недискретний топологічний простір. Тоді довільна послідовність  $\{x_n \in X, n \geq 1\}$  збігається до будь-якої точки  $x \in X$ .

Дійсно, нехай  $U$  – відкритий окіл точки  $x \in X$ . У недискретному просторі лише  $U = X$  буде відкритим околom точки  $x$ . А значить, існує номер  $N = 1$ , де  $\forall n \geq N : x_n \in X$ .

Для того, щоб позбутися такої аномалії, нам треба нова класифікація топологічних просторів. Але це буде трошки пізніше.

## 1.4 Неперервні відображення

**Definition 1.4.1** Задані  $(X, \tau)$  та  $(Y, \tilde{\tau})$  – два топологічних простори. Відображення  $f: X \rightarrow Y$  називається **неперервним**, якщо

$$\forall U \in \tilde{\tau} : f^{-1}(U) \in \tau$$

Або простіше кажучи казати так:

$$\forall U - \text{відкрита в } Y : f^{-1}(U) - \text{відкрита в } X$$

**Example 1.4.2** Задано відображення  $f: X \rightarrow Y$ , де  $(X, \rho), (Y, \rho')$  – два метричних простори. Тоді звідси  $f$  – неперервне (в топологічному сенсі).

**Example 1.4.3** Задано відображення  $f: X \rightarrow Y$ , де  $(X, \tau_{\text{discr}})$  – дискретний топологічний простір. Тоді  $f$  – неперервне.

Справді, беремо  $U$  – відкриту множину в  $Y$ . Тоді прообраз  $f^{-1}(U)$  буде відкритим в  $X$ , бо в дискретній топології всі множини – відкриті.

**Example 1.4.4** Задано відображення  $f: X \rightarrow Y$ , де  $(Y, \tau_{\text{indiscr}})$  – недискретний топологічний простір. Тоді  $f$  – неперервне.

Справді, оберемо  $\emptyset, Y$  – єдині відкриті множини в  $Y$ . Тоді  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  та  $f^{-1}(Y) = X$  – обидва відкриті в  $X$ .

**Example 1.4.5** Задано відображення  $\text{id}: X \rightarrow X$ , тут відображення між  $(X, \tau)$  та  $(X, \tau')$ . Тоді  $\text{id}$  – неперервне  $\iff \tau$  сильніша за  $\tau'$ .

$\Rightarrow$  Дано:  $\text{id}$  – неперервне. Тобто  $\forall U \in \tau' : \text{id}^{-1}(U) = U \in \tau$ . А це в точності  $\tau' \subset \tau$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\tau' \subset \tau$ . Тобто  $\forall U \in \tau' : U \in \tau$ , але при цьому  $U = \text{id}^{-1}(U) \in \tau$ . Отже,  $\text{id}$  – неперервне.

**Proposition 1.4.6** Задані  $(X, \tau)$  та  $(Y, \tilde{\tau})$  – два топологічних простори.

Відображення  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне  $\iff \forall U$  – замкнена в  $Y : f^{-1}(U)$  – замкнена в  $X$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f$  – неперервне. Оберемо  $U$  – замкнену в  $Y$ . За означенням,  $X \setminus U$  – відкрита в  $Y$ , а тому за неперервністю,  $f^{-1}(X \setminus U)$  – відкрита в  $X$ . Зауважимо, що  $f^{-1}(X \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$  – відкрита в  $X$ . Отже,  $f^{-1}(U)$  – замкнена в  $X$ .

$\Leftarrow$  Цілком аналогічно доводиться. ■

В принципі, часто про відображення кажуть просто про неперервність, не уточнюючи в якій точці. Але для такого сценарія означення теж є.

**Definition 1.4.7** Задані  $(X, \tau)$  та  $(Y, \tilde{\tau})$  – два топологічних простори.

Відображення  $f: X \rightarrow Y$  називається **неперервним в точці**  $x \in X$ , якщо

$$\forall V - \text{окіл точки } f(x) : \exists U - \text{окіл точки } x : f(U) \subset V$$

**Proposition 1.4.8** Задані  $(X, \tau)$  та  $(Y, \tilde{\tau})$  – два топологічних простори.

Відображення  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне  $\iff \forall x \in X : f$  – неперервне в точці  $x$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f$  – неперервне. Оберемо будь-яку точку  $x \in X$ . Нехай  $V$  – окіл точки  $f(x)$ . Тоді існує  $\tilde{V}$  – відкритий окіл точки  $f(x)$ , де  $V \supset \tilde{V}$ . Значить, за неперервністю,  $f^{-1}(\tilde{V})$  – відкритий окіл точки  $x$ . Також із  $V \supset \tilde{V}$  випливає  $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(\tilde{V})$ . Таким чином,  $f^{-1}(V)$  – окіл точки  $x$ . Нарешті, варто зауважити, що виконується  $f(f^{-1}(V)) \subset V$ .

Таким чином,  $f$  – неперервне в точці  $x \in X$ , причому довільній.

$\Leftarrow$  Дані:  $\forall x \in X : f$  – неперервне в точці  $x$ . Нехай  $U$  – відкрита множина в  $Y$ . Хочемо показати, що  $f^{-1}U$  – відкрита, тобто всі точки внутрішні.

Нехай  $x \in f^{-1}U$ , тобто  $f(x) \in U$ , тоді за означення неперервності в точці, існує окіл  $U_x$  точки  $x$ , де  $f(U_x) \subset U \implies U_x \subset f^{-1}U$ . Отже,  $x$  – внутрішня точка.

Таким чином,  $f$  – неперервне відображення. ■

**Proposition 1.4.9 "Означення Гейне"**

Задані  $(X, \tau)$  та  $(Y, \tilde{\tau})$  – два топологічних простори та відображення  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне. Тоді виконується "означення Гейне", тобто нехай  $\{x_n \in X, n \geq 1\}$  збігається до точки  $x \in X$ . Тоді  $\{f(x_n) \in Y, n \geq 1\}$  збігається до точки  $f(x) \in Y$ .

**Proof.**

Нехай  $\{x_n \in X, n \geq 1\}$  збігається до точки  $x$ . Оберемо  $U$  – відкритий окіл точки  $f(x)$ , тоді за неперервністю,  $f^{-1}(U)$  – відкритий окіл точки  $x$ , а тому звідси за збіжністю, існує  $N$ , де  $\forall n \geq N: x_n \in f^{-1}(U) \implies f(x_n) \in U$ . ■

**Remark 1.4.10** Якщо виконано означення Гейне, то з цього в загальному випадку неперервність НЕ випливає.

**Proposition 1.4.11 Інші властивості**

1.  $\text{id}: X \rightarrow X$  – неперервне відображення будь-якій топології  $\tau$ ;
2. Нехай  $f: X \rightarrow Y$  та  $g: Y \rightarrow Z$  – обидва неперервні. Тоді  $g \circ f: X \rightarrow Z$  – неперервне.

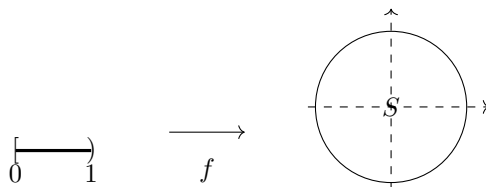
1. *Вказівка:*  $\text{id}^{-1}(U) = U$ .
2. *Вказівка:*  $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ .

**Remark 1.4.12** Нехай відображення  $f: X \rightarrow Y$  бієктивне. Якщо  $f$  – неперервне, то не обов'язково (!), щоб  $f^{-1}$  було неперервним.

**Example 1.4.13** Зокрема вже відомо, що  $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  буде неперервним відображенням, якщо в першому  $(\mathbb{R}, d)$  – дискретний метричний простір та в другому  $(\mathbb{R}, \rho)$  – стандартний евклідів простір. Тут виконується неперервність, оскільки  $\tau_{\text{discr}}$  – найсильніша топологія.

Утім відображення  $\text{id}^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  уже не буде неперервним. Тому що  $[-1, 1]$  – відкрита множина відносно дискретної топології, але  $\text{id}^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1]$  – НЕ відкрита множина відносно евклідової топології.

**Example 1.4.14** Більш геометричний приклад буде наступним. Маємо відображення  $f: (0, 1] \rightarrow S$ , де  $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  – одиничне коло (метрика буде стандартною всюду). Визначимо  $f(t) = e^{2\pi i t}$ . Зрозуміло, що це бієктивне відображення та є неперервним.



У цьому напрямку неперервність означає, що ми  $(0, 1]$  деформували в коло  $S$ , просто об'єднавши тіпа края.

Але  $f^{-1}: S \rightarrow (0, 1]$  уже не буде неперервним.

Припустимо, що все-таки неперервне. Тоді оскільки  $\left\{1 - \frac{1}{n}, n \geq 1\right\}$  збігається до 1, а тому  $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow f(1) = e^{2\pi i} = 1$ . Утім в силу неперервності  $f^{-1}$  ми маємо  $f^{-1}\left(f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$ , хоча  $f^{-1}(1) = 0$ . Суперечність!

Тут щоб із кола зробити палку, треба розірвати її в точці  $z = 1$ . Тому нема неперервності. Саме тому приходить новий розділ, де ми хочемо, щоб, деформувавши один об'єкт, отримали топологічно той самий об'єкт і навпаки.

## 1.5 Гомеоморфність топологічних просторів

**Definition 1.5.1** Задані  $(X, \tau)$  та  $(Y, \tilde{\tau})$  – два топологічних простори. Відображення  $f: X \rightarrow Y$  називається **гомеоморфізмом**, якщо

$$\begin{aligned} f & \text{ – неперервне} \\ f & \text{ – бієктивне} \\ f^{-1} & \text{ – неперервне} \end{aligned}$$

**Definition 1.5.2** Задані  $(X, \tau)$  та  $(Y, \tilde{\tau})$  – два топологічних простори. Вони будуть називатися **гомеоморфними**, якщо

$$\exists f: X \rightarrow Y \text{ – гомеоморфізм}$$

Позначення:  $X \cong Y$ .

**Remark 1.5.3** Топологічні простори, які є гомеоморфними, задають відношення еквівалентності.  $X \cong X$ , оскільки  $\text{id}: X \rightarrow X$  (одна топологія) – гомеоморфізм.  $X \cong Y \iff Y \cong X$  просто за означенням гомеоморфізма.  $X \cong Y, Y \cong Z \implies X \cong Z$ , тому що  $g \circ f$  задає гомеоморфізм між ними. У цьому випадку  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  – гомеоморфізми.

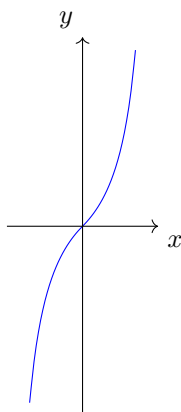
**Example 1.5.4** Зокрема відрізок  $[0, 1] \cong [a, b]$ , якщо встановити  $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$  як  $f(t) = (1-t)a + tb$  – і це відображення буде гомеоморфізмом. Дійсно,  $f \in C([0, 1])$  як лінійна функція. Далі знайдемо обернене відображення – воно дорівнює  $f^{-1}(u) = \frac{u-a}{b-a}$ , причому  $f^{-1} \in C([a, b])$  знову як лінійна функція.

**Example 1.5.5** Із цього прикладу можна отримати  $[a, b] \cong [c, d]$ , тому що  $[a, b] \cong [0, 1]$  та  $[0, 1] \cong [c, d] \implies [a, b] \cong [c, d]$ .

Аналогічно можна довести, що  $(a, b) \cong (c, d)$ ,  $(a, b] \cong (c, d] \cong [c, d) \cong [a, b)$ .

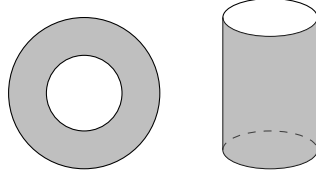
**Example 1.5.6** За **Ех. 1.4.14**, ми отримали  $(0, 1] \not\cong S$ .

**Example 1.5.7** Також маємо  $(a, b) \cong \mathbb{R}$ . Можна спочатку довести, що  $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$ , якщо задати  $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$  – це дійсно буде гомеоморфізмом.



А вже далі в силу транзитивності, ми отримаємо  $(a, b) \cong \mathbb{R}$ .

**Example 1.5.8** Тепер розглянемо такі два об'єкти. Перший: кільце з внутрішнім радіусом 1 та зовнішнім радіусом 2, для зручності розташуємо центр на початку координат. Другий: циліндр без двох основ. Інтуїтивно вони будуть гомеоморфними, тому що: циліндр отримаємо з кільця, якщо його кільце намагатися розтягнути вгору; кільце отримаємо з циліндра, якщо його сплющити.



Строго можна довести гомеоморфність цих об'єктів, якщо задати відображення  $(r \cos \theta, r \sin \theta) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta, r)$ , що буде гомеоморфізмом. У цьому випадку  $r \in [1, 2]$  та  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

**Example 1.5.9** Ще важливий приклад,  $[a, b] \not\cong \mathbb{R}$ .

Припустимо, що все ж таки  $[a, b] \cong \mathbb{R}$ , тобто існує між ними гомеоморфізм  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Оскільки  $f \in C([a, b])$ , то звідси воно досягає найбільшого значення  $M$  та найменшого значення  $m$ . Тобто  $f([a, b]) = [m, M]$ . Але оскільки  $f$  – бієкція, то звідси  $f([a, b]) = \mathbb{R}$ . Але при цьому  $[m, M] \neq \mathbb{R}$  – суперечність!

**Example 1.5.10** Мабуть, в алгебраїчній топології буде доведено, що  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$ .

## 1.6 Конструкція топології за базою

**Definition 1.6.1** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір.

Клас  $\mathcal{B}$  підмножин  $X$  назвемо **базою топології**  $\tau$ , якщо

$$\forall U \in \tau : U = \bigcup_{V \in \tilde{\mathcal{B}}} V, \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$$

Тобто  $\mathcal{B}$  – база, якщо кожна відкрита множина записується як об'єднання множин з класу  $\mathcal{B}$ .

**Remark 1.6.2** Всі множини з класу  $\mathcal{B}$  – відкриті автоматично, тобто  $\mathcal{B} \subset \tau$ , просто тому що їх можна сприймати як об'єднання з одного елементу.

**Example 1.6.3** Зокрема маємо метричний простір  $(X, \rho)$ , де індукується топологія  $\tau_\rho$ . Тоді для неї база  $\mathcal{B} = \{B(x; r) \mid x \in X, r > 0\}$  – набір всіх відкритих куль. Дійсно, нехай  $U$  – відкрита множина, тоді  $\forall x \in U : x$  – відкрита, а тому  $\exists B(x; r_x) \subset U$ . Тоді звідси  $U = \bigcup_{x \in X} B(x; r_x)$ .

**Example 1.6.4** Якщо  $(X, \tau_{\text{discr}})$  – дискретна топологія, то тоді  $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$  – база. Дійсно, кожна підмножина  $U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$ , ну й  $U$  уже апіорі відкрита.

**Proposition 1.6.5** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $\mathcal{B}$  – база топології. Тоді:

1.  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$  – тобто  $X$  записуємо як об'єднання всіх множин із бази;
2.  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : B_1 \cap B_2 = \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U$ , де  $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$  – тобто перетин елементів з бази записується як об'єднання з цієї самої бази.

**Proof.**

Дійсно, оскільки  $\mathcal{B}$  – база топології, то кожна відкрита множина – це об'єднання множин із бази.

1. Зокрема  $X$  – відкрита, тому  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$ .

2. Нехай  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ . Вони вдвох – відкриті (див. зауваження). Значить,  $B_1 \cap B_2$  є відкритою множиною, а тому  $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U$ . ■

**Definition 1.6.6** Нехай задано множину  $X$  (просто множина без топології).

Клас  $\mathcal{B}$  підмножин  $X$  назвемо **базою множини**  $X$ , якщо

1.  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$
2.  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : B_1 \cap B_2 = \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U$ , де  $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$



Якщо  $(X, \tau)$  – топологія та  $\mathcal{B}$  – база топології, то  $\mathcal{B}$  – база множини (щойно вище довели).  
Виявляється, що якщо в нас є множина  $X$ , для якої ми хочемо згенерувати топологію, то нам потрібно створити базу  $\mathcal{B}$  множини  $X$ .

**Proposition 1.6.7 Конструкція топології за базою**

Задано  $X$  – множину та  $\mathcal{B}$  – база цієї множини. Створимо  $\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U \mid \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B} \right\}$  – тобто клас, що складається з усіх можливих об'єднань елементів з бази. Тоді  $(X, \tau_{\mathcal{B}})$  утворює топологічний простір. Ми  $\tau_{\mathcal{B}}$  називаємо **топологією, що породжена базою  $\mathcal{B}$** . Причому це єдина така топологія, де  $\mathcal{B}$  – база топології.

**Proof.**

Маємо  $\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U \mid \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B} \right\}$ , перевіримо всі пункти для топології.

1.  $\emptyset \in \tau_{\mathcal{B}}$ , тому що можна записати  $\emptyset = \bigcup_{U \in \emptyset} U$ , де  $\emptyset \subset \mathcal{B}$ . Також  $X \in \tau_{\mathcal{B}}$ , тому що  $\mathcal{B}$  – база множини

$X$ , а значить,  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$ .

2. Нехай  $\{U_{\alpha} \mid U_{\alpha} \in \tau_{\mathcal{B}}\}$  – сім'я відкритих множин. Тобто  $U_{\alpha} = \bigcup_{B_{\alpha}} U$ , де  $B_{\alpha} \subset \mathcal{B}$ . Тоді звідси

$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \bigcup_{U \in B_{\alpha}} U$ , причому  $\bigcup_{\alpha} B_{\alpha} \subset \mathcal{B}$ . Отже,  $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \in \tau_{\mathcal{B}}$ .

3. Нехай  $U_1, U_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$ . Тобто звідси  $U_1 = \bigcup_{U \in B_1} U$  та  $U_2 = \bigcup_{U \in B_2} U$ , де  $B_1, B_2 \subset \mathcal{B}$ . Значить, звідси

$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\substack{U \in B_1 \\ V \in B_2}} (U \cap V)$ . Оскільки  $U, V \in \mathcal{B}$ , то в силу того, що  $\mathcal{B}$  – база множини  $X$ , звідси

$U \cap V = \bigcup_{W \in \tilde{B}_{U,V}} W$ . Тоді  $U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\substack{U \in B_1 \\ V \in B_2}} \bigcup_{W \in \tilde{B}_{U,V}} W = \bigcup_{W \in \tilde{\mathcal{B}}} W$ . Детально треба уточнити, що кожний

$\tilde{B}_{U,V} \subset \mathcal{B}$ , тоді  $\bigcup_{\substack{U \in B_1 \\ V \in B_2}} \tilde{B}_{U,V} \stackrel{\text{позн.}}{=} \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ . Висновок:  $U_1 \cap U_2$  записали як об'єднання множин з бази  $\mathcal{B}$ ,

тож  $U_1 \cap U_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$ .

Із цих пунктів випливає, що  $\tau_{\mathcal{B}}$  – дійсно топологія.

Також з цього випливає, що  $\mathcal{B}$  – не просто база множини  $X$ , а ще й база топології  $\tau_{\mathcal{B}}$ .

Припустимо, що існує  $\tau'$  – якась інша топологія на  $X$ , яка має базу топології  $\mathcal{B}$ . Нам треба довести, що  $\tau' = \tau_{\mathcal{B}}$ .

Нехай  $U \in \tau'$ , тоді звідси за означенням бази топології,  $U = \bigcup_{V \in \tilde{\mathcal{B}}} V$ , де  $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ . Але в силу того, як

ми визначали  $\tau_{\mathcal{B}}$ , випливає, що  $U \in \tau_{\mathcal{B}}$ .

Нехай  $U \in \tau_{\mathcal{B}}$ , тоді звідси за побудовою,  $U = \bigcup_{V \in \tilde{\mathcal{B}}} V$ , але тоді  $V \in \tau'$  – відкрита множина як

об'єднання однієї множини з бази. За означенням топології,  $U \in \tau'$ .

Власне, з цього випливає, що  $\tau_{\mathcal{B}} = \tau'$ . ■

**Remark 1.6.8** Не хочеться це вставляти як окреме твердження, але є ось така еквівалентність:

$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : B_1 \cap B_2 = \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U$ , де  $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B} \iff \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : \forall x \in B_1 \cap B_2 : \exists W \in \mathcal{B} : x \in W \subset B_1 \cap B_2$ .

Зазвичай саме праву частину використовують в якості другої умови бази множини та в твердженні про конструкцію топології за базою. Тим не менш, цю еквівалентність доведу.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано: ліва частина. Нехай  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , тоді звідси  $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{W \in \tilde{\mathcal{B}}} W$ . Оберемо точку  $x \in B_1 \cap B_2$ ,

тоді звідси  $x \in W_0$ , де  $W_0 \in \mathcal{B}$ . Отже, ми знашли  $W_0 \in \mathcal{B}$ , для якої  $x \in W_0 \subset B_1 \cap B_2$ .

⊆ Дано: права частина. Нехай  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , тоді  $\forall x \in B_1 \cap B_2 : \exists W_x \in \mathcal{B} : x \in W_x \subset B_1 \cap B_2$ .  
Зауважимо, що звідси  $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} W_x$ , причому ми об'єднуємо елементи з  $\mathcal{B}$ . ■

**Proposition 1.6.9** Задані  $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$  – топологічні простіри та  $\tilde{\mathcal{B}}$  – база топології  $\tilde{\tau}$ . Відомо, що  $\forall U \in \tilde{\mathcal{B}} : f^{-1}(U) \in \tau$ . Тоді  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне.

**Remark 1.6.10** Тобто коли топологія побудована за базою, то для неперервності достатньо перевірити умову для елементів з бази, а не з усієї топології.

**Proof.**

Нехай  $U$  – відкрита множина в  $Y$ , тобто звідси  $U = \bigcup_{V \in \mathcal{B}'} V$ , де  $\mathcal{B}' \subset \tilde{\mathcal{B}}$  за визначенням бази.

Тоді звідси  $f^{-1}(U) = \bigcup_{V \in \mathcal{B}'} f^{-1}(V)$ , де всі  $f^{-1}(V)$  відкриті за умовою. Отже,  $f^{-1}(U)$  – відкрита як об'єднання. Отже,  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне. ■

**Definition 1.6.11** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $\mathcal{B}$  – його база.

Простір задовольняє **другу аксіому зліченності** (англ. **second-countable**), якщо

$\mathcal{B}$  – зліченна база

**Example 1.6.12** Зокрема  $(\mathbb{R}, \tau)$  з евклідовою топологією буде second-countable.

Розглянемо  $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ . Варто спочатку довести, що вона утворює базу стандартної топології. Дійсно, нехай  $U \in \tau$ . Її можемо в стандартній топології записати як  $U = \bigcup_{x \in U} (x - r, x + r)$ .

Надалі вся увага на  $(x - r, x + r) \stackrel{\text{позн.}}{=} (u, v)$ . Слід зауважити, що тут  $u, v \in \mathbb{R}$ . Але відомо, що для  $u$  існує послідовність раціональних чисел  $\{q_n, n \geq 1\}$  так, щоб  $v \geq q_n \geq u$ , а також  $q_n \rightarrow u$ . Аналогічно існує послідовність раціональних чисел  $\{r_n, n \geq 1\}$  так, щоб  $u \leq r_n \leq v$ , а також  $r_n \rightarrow v$ . Тоді запишемо  $(u, v) = \bigcup_{\substack{q_n, r_n \in \mathbb{Q} \\ q_n < r_n}} (q_n, r_n)$ . Таким чином, отримали  $(u, v)$  як об'єднання множин з бази,

тобто  $U$  записується як об'єднання множин з бази.

Висновок:  $\mathcal{B}$  – база стандартної топології. Оскільки  $\mathbb{Q}$  – зліченна множина, то кількість інтервалів  $(a, b)$  також буде зліченною, тому second-countable.

## 1.7 Конструкція топології за передбазою

**Definition 1.7.1** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір.

Клас  $\mathcal{S}$  підмножин  $X$  назовемо **передбазою топології  $\tau$** , якщо

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \bigcap_{i=1}^n S_i \mid S_i \in \mathcal{S} \right\} \text{ утворює базу топології } \tau.$$

Тобто звідси випливає, що кожна відкрита множина записується як об'єднання скінченних перетинів множин з  $\mathcal{S}$ .

Ми вже знаємо, що якщо  $\mathcal{B}$  – база, то тоді можна побудувати топологію. Тобто якщо ми хочемо, щоб  $\mathcal{S}$  була передбазою, то треба спочатку утворити базу  $\mathcal{B}$ , а із бази вже утворити топологію.

**Proposition 1.7.2** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір.

$\mathcal{S}$  – передбаза  $X \iff \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = X$  (тут об'єднання всіх елементів з  $\mathcal{S}$ ).

**Proof.**

⊇ Дано:  $\mathcal{S}$  – передбаза  $X$ , тоді  $\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n S_i \mid S_i \in \mathcal{S} \right\}$  утворює базу топології, тому й базу  $X$ .

Значить,  $\bigcup_{V \in \mathcal{B}} V = X$ . У цьому об'єднанні беруть участь множини  $U \in \mathcal{S}$ , а всі решта з об'єднання

будуть перетинами з двох чи більше елементів  $\mathcal{S}$ . Таким чином, достатньо об'єднати  $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = X$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = X$ .

Нам треба показати, що  $\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n S_i \mid S_i \in \mathcal{S} \right\}$  – база  $X$ . Дійсно,

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V = X \text{ (пояснення вище).}$$

Нехай  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , тобто  $B_1 = \bigcap_{i=1}^{n_1} S_i$  та  $B_2 = \bigcap_{j=1}^{n_2} S_j$ . Тоді звідси  $B_1 \cap B_2 = \bigcap_{i=1}^{n_1} S_i \cap \bigcap_{j=1}^{n_2} S_j = \bigcap_{k=1}^m S_k$ .

Отже,  $\mathcal{B}$  – база множини  $X$ , а тому  $\mathcal{S}$  – передбаза  $X$ . ■

**Proposition 1.7.3** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $\mathcal{S}$  – передбаза топології. Тоді  $\tau$  – найслабша топологія, що містить  $\mathcal{S}$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\mathcal{S}$  – передбаза топології. Для зручності позначу початкову топологію за  $\tau_{\mathcal{S}}$ .

Припустимо, що  $\tau$  – слабша топологія, що містить  $\mathcal{S}$ , тобто  $\tau \subset \tau_{\mathcal{S}}$ . Нам залишилося довести, що  $\tau_{\mathcal{S}} \subset \tau$ .

Беремо  $U \in \tau_{\mathcal{S}}$ , тоді звідси  $U = \bigcup \bigcap_{\text{скінченний}} W$ , де  $W \in \mathcal{S}$ . Зауважимо, що  $W \in \tau$  також, бо  $\tau$

містить  $\mathcal{S}$ . Таким чином,  $\bigcap_{\text{скінченний}} W \in \tau \implies U \in \tau$ . ■

## 1.8 Характеристики точок множин

Нам вже відоме означення внутрішньої точки. Ще раз нагадаю:

**Definition 1.8.1** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $A \subset X$ .

Точка  $x$  називається **внутрішньою** для  $A$ , якщо

$$\exists V - \text{окіл точки } x : V \subset A$$

**Definition 1.8.2** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $A \subset X$ .

Точка  $x \in X$  називається **граничною** для  $A$ , якщо

$$\forall V - \text{окіл точки } x : V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Є ще різні види точок, але поки зосередимось на них.

У метричному просторі ми вводили поняття відкритих та замкнених множин як раз через внутрішні та граничні точки. У топологічному просторі ми означення відкритої множини звели до означення з використанням внутрішніх точок. Зробимо те саме для замкнених множин.

**Proposition 1.8.3** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $A \subset X$ .

$A$  – замкнена  $\iff A$  містить всі граничні точки  $A$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $A$  – замкнена, тобто  $X \setminus A$  – відкрита множина.

Припустимо, що  $x$  – гранична точка  $A$ , але  $x \notin A$ . Тобто  $x \in X \setminus A$ . Водночас звідси  $x$  буде внутрішньою точкою  $X \setminus A$ , тобто існує  $V$  – окіл точки  $x$ , для якого  $V \subset X \setminus A \implies V \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ . Але для цього ж околу ми знаємо, що  $V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$  – суперечність!

Отже, обов’язково треба вимагати  $x \in A$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $A$  містить всі свої граничні точки. Доведемо, що  $X \setminus A$  відкрита.

Нехай  $x \in X \setminus A$ , тоді вона уже не є граничною точкою, тобто  $\exists V$  – окіл точки  $x : V \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ , зокрема звідси  $V \subset X \setminus A$ . Отже,  $x$  – внутрішня точка.

Тож звідси  $X \setminus A$  – відкрита, тобто  $A$  – замкнена. ■

*TODO: дописати!*

## 1.9 Топологічний підпростір

**Definition 1.9.1** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $A \subset X$ .

Топологією підпростору на  $A$  називають таку множину:

$$\tau_A = \{U \subset A \mid \exists W \in \tau : U = A \cap W\}$$

Пара  $(A, \tau_A)$  називається **підпростором** топологічного простору  $(X, \tau)$ .

Якщо  $U \in \tau_A$ , то будемо казати, що  $U$  відкрита на  $A$ . Також якщо  $A \setminus U \in \tau_A$  будемо казати, що  $U$  – замкнена на  $A$ .

**Proposition 1.9.2**  $\tau_A$  задає топологію та  $(A, \tau_A)$  теж утворює топологічний простір.

**Proof.**

1.  $\emptyset, A \in \tau_A$  зі зрозумілих причин;

2. Нехай  $\{U_\alpha \in \tau_A\}$  – сім'я відкритих. Тобто  $U_\alpha = A \cap W_\alpha$ , де  $\{W_\alpha \in \tau\}$  – сім'я відкритих в  $(X, \tau)$ . Тоді звідси  $\bigcup U_\alpha = A \cap \bigcup W_\alpha$ , де множина  $\bigcup W_\alpha \in \tau$ . Отже,  $\bigcup U_\alpha \in \tau_A$ .

3. Нехай  $U_1, U_2 \in \tau_A$ , тобто  $U_1 = A \cap W_1$  та  $U_2 = A \cap W_2$  при  $W_1, W_2 \in \tau$ . Звідси маємо  $U_1 \cap U_2 = A \cap (W_1 \cap W_2)$ , де  $W_1 \cap W_2 \in \tau$ , але звідси  $U_1 \cap U_2 \in \tau_A$ . ■

**Example 1.9.3** Зокрема в метричному просторі  $(X, \rho)$ , якщо  $A \subset X$ , ми вже знаємо, що  $U$  – відкрита на  $A \iff U = A \cap W$  для деякої  $W$  – відкритої в  $X$ . Тобто, по суті, індукований простір  $(A, \rho_A)$  індукує топологію підпростору  $\tau_A$ .

**Example 1.9.4** Маємо  $(X, \tau_{\text{discr}})$  – дискретний топологічний простір. Оберемо  $A \subset X$ , тоді підпростір  $(A, \tau_A)$  – теж дискретний топологічний простір.

Ну дійсно,  $U \subset A \subset X$ , а будь-яка підмножина в дискретному просторі – відкрита.

**Example 1.9.5** Маємо  $(X, \tau_{\text{indiscr}})$  – дискретний топологічний простір. Оберемо  $A \subset X$ , тоді підпростір  $(A, \tau_A)$  – теж дискретний топологічний простір.

Дійсно, нехай  $U$  – відкрита в  $A$ , тобто звідси  $U = A \cap W$ , де  $W$  – відкрита в  $X$ . Значить, або  $W = \emptyset$ , або  $W = X$ . Тоді звідси  $U = A \cap X = A$  або  $U = \emptyset$ . Інших відкритих – нема.

**Proposition 1.9.6** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $A \subset X$ .

$V$  – замкнена на  $A \iff \exists S$  – замкнена в  $X : V = A \cap S$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $V$  – замкнена на  $A$ , тобто  $A \setminus V$  – відкрита на  $A$ , а тому  $A \setminus V = A \cap W$  при  $W$  – відкрита на  $X$ . Значить, звідси  $V = A \setminus (A \setminus V) = A \setminus (A \cap W) = A \cap (X \setminus W)$ . Позначимо  $X \setminus W = S$ , яка є замкнутою в  $X$ . Звідси випливає, що  $V = A \cap S$ .

$\Leftarrow$  Аналогічно. ■

**Proposition 1.9.7** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $U \subset A \subset X$ . Відомо, що  $U$  – відкрита на  $A$  та  $A$  – відкрита на  $X$ . Тоді  $U$  – відкрита на  $X$ .

Аналогічно виконується, якщо всюди – замкнені множини.

**Proof.**

За умовою,  $U$  – відкрита на  $A$ , тобто звідси  $U = A \cap W$ ; причому  $W$  – відкрита на  $X$  та  $A$  – відкрита на  $X$  за умовою. Отже,  $U$  – відкрита на  $X$  як перетин. ■

**Remark 1.9.8** У цьому твердженні дуже важливо, щоб  $A$  була відкритою на  $X$ !

**Example 1.9.9** Маємо  $X = \mathbb{R}$  із евклідовою метрикою,  $A = [0, +\infty)$  та  $U = [0, 1)$ .

У цьому випадку  $A$  не є відкритою на  $X$  – зрозуміло. Далі зауважимо, що  $U$  – відкрита на  $A$ , просто тому що  $[0, 1) = [0, +\infty) \cap (1, +\infty)$ , де  $(1, +\infty)$  – відкрита на  $X$ . Але  $U$  – не відкрита на  $X$ .

**Remark 1.9.10** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $A \subset X$ . Означення топології підпростору на  $A$  можна переписати по-інакшому. Для цього розглянемо вкладення  $\iota_A : A \rightarrow X$ , а далі зауважимо, що для кожної  $W \subset X$  маємо  $\iota_A^{-1}(W) = W \cap A$ . Тоді звідси маємо:

$$\tau_A = \iota_A^{-1}(\tau)$$

Тоді  $\tau_A$  ще інколи називають **індукованою топологією** на  $A$ .

**Proposition 1.9.11** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $A$  – підпростір. Тоді вкладення  $\iota_A: A \rightarrow X$  неперервне.

*Вказівка:*  $\iota_A^{-1}(W) = W \cap A$ .

**Remark 1.9.12**  $\tau_A$  – найслабша на  $A$  топологія серед всіх інших, для якої  $\iota$  – неперервне. Тому що  $\tau_A$  визначено так, що лише  $\iota_A^{-1}(W)$  – відкриті, більше нічого.

**Proposition 1.9.13** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $A$  – підпростір. Нехай  $(Y, \tilde{\tau})$  – інший топологічний простір.

Відображення  $f: Y \rightarrow A$  – неперервне  $\iff \iota \circ f: Y \rightarrow X$  – неперервне.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow \iota \circ f & \downarrow \iota \\ & & X \end{array}$$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f: Y \rightarrow A$  – неперервне. Тоді автоматично  $\iota \circ f: Y \rightarrow X$  буде неперервним як композиція неперервних.

$\Leftarrow$  Дано:  $\iota \circ f: Y \rightarrow X$  – неперервне. Оберемо  $U$  – відкриту на  $A$ , тобто  $U = A \cap W$  при деякому  $W$  – відкритому на  $X$ . Розглянемо  $f^{-1}(U) = f^{-1}(A \cap W) = f^{-1}(\iota^{-1}(W)) = (\iota \circ f)^{-1}(W)$ . Але оскільки  $W$  – відкритий на  $X$ , то за умовою,  $(\iota \circ f)^{-1}(W)$  – відкритий на  $Y$ . ■

**Example 1.9.14** Зокрема на стандартних топологіях маємо відображення  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  як  $f(x) = \sin x$ . Із мат. аналізу, воно є неперервним. Але за твердженням вище,  $\iota \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , де мається  $\iota: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , – неперервне теж відображення.

Тобто твердження каже, що властивість неперервності залишається, якщо збільшити чи зменшити область значень.

**Proposition 1.9.15** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне. Тоді звуження  $f|_A: A \rightarrow Y$  – теж неперервне, де  $A \subset X$ .

*Вказівка:*  $f|_A = f \circ \iota$ , де  $\iota: A \rightarrow X$ .

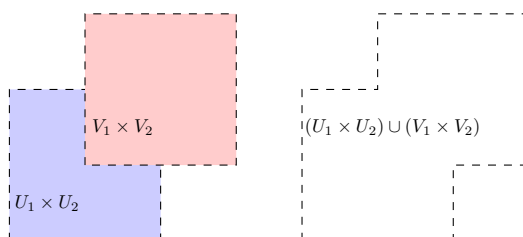
**Example 1.9.16** Тобто маємо  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ , що задано  $f(x) = \sin x$ , що неперервне. Тоді  $f|_{[-\pi, \pi]}: [-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  – теж неперервне.

**Example 1.9.17** Тепер маємо  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що задається як  $f(x) = \frac{1}{x}$ . У цьому випадку  $f|_{(0, +\infty)}$  буде неперервним відображенням з мат. аналізу, але  $f$  – не є неперервним.

## 1.10 Добуток просторів

Нехай задані  $(X_1, \tau_1)$  та  $(X_2, \tau_2)$  – два топологічних простори. Хочеться задати топологію на  $X_1 \times X_2$ . Перше вгадування: чи буде множина  $\{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$  утворювати топологію? Ні, цього недостатньо.

**Example 1.10.1** Зокрема маємо  $(\mathbb{R}, \tau_1)$  та  $(\mathbb{R}, \tau_2)$  – дві евклідові топології. Розглянемо множину  $U_1 \times U_2 = (0, 2) \times (0, 2)$  та множину  $V_1 \times V_2 = (1, 3) \times (1, 3)$ . А далі треба подивитися на  $(U_1 \times U_2) \cup (V_1 \times V_2)$  та зауважити наступне: це буде відкрита множина, але не потрапляє в нашу "топологію", тому що я не можу її записати як  $W_1 \times W_2$ .



Значить, треба трошки по-інакшому до цього підійти.

Розглянемо  $\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$ . Якщо вона ще не утворює топологію, то спробуємо показати, що це утворює базу множини  $X_1 \times X_2$ . Дійсно:

1.  $X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$ , навіть не обов'язково розписувати як об'єднання. Хоча можна це зробити,  $X_1 \times X_2 = \bigcup_{U_1 \times U_2 \in \mathcal{B}} U_1 \times U_2$ , і в це же об'єднання буде входити  $X_1 \times X_2$ , а тому рівність легітимна;

2. Нехай  $U, V \in \mathcal{B}$ , тобто  $U = U_1 \times U_2$  та  $V = V_1 \times V_2$ , у цьому випадку  $U_1, V_1$  – відкриті в  $X_1$  та  $U_2, V_2$  – відкриті в  $X_2$ . Тоді звідси зауважимо, що  $U \cap V = (U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2)$ . Оскільки  $U_1 \cap V_1$  та  $U_2 \cap V_2$  залишаються відкритими у себе, то звідси  $U \cap V$  записали як добуток відкритих, тож  $U \cap V \in \mathcal{B}$ .

Таким чином,  $\mathcal{B}$  – дійсно база  $X_1 \times X_2$ , а тому можна спорудити топологію.

**Definition 1.10.2** Задані  $(X_1, \tau_1)$  та  $(X_2, \tau_2)$  – два топологічних простори.

**Добутком топологій**  $\tau_1, \tau_2$  назвемо топологію, яка породжена базою

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$$

Позначення:  $\tau_1 \times \tau_2 \stackrel{\text{def.}}{=} \tau_{\mathcal{B}}$ .

Це ще інколи називають **тіхоновською топологією**.

**Proposition 1.10.3** Задані  $(X_1, \tau_1)$  та  $(X_2, \tau_2)$  – два топологічних простори. Наступні твердження еквівалентні:

- 1)  $U$  – відкрита на  $X_1 \times X_2$ ;
- 2)  $U = \bigcup_{\alpha} U_1^{\alpha} \times U_2^{\alpha}$  для деяких сімей  $\{U_1^{\alpha}\}$  та  $\{U_2^{\alpha}\}$  відкритих множин відповідно на  $X_1, X_2$ ;
- 3)  $\forall (x_1, x_2) \in U : \exists U_1, U_2$  – відповідно відкриті околи точки  $x_1, x_2 : U_1 \times U_2 \subset U$ .

**Proof.**

1)  $\Leftrightarrow$  2) випливає з означення добутку топологій.

2)  $\Rightarrow$  3) зрозуміло.

3)  $\Leftarrow$  2) Дано: виконується 3), тоді для кожної точки  $(x_1, x_2) \in U$  існують відкриті околи  $U_1^x, U_2^x$ , причому  $U_1^x \times U_2^x \subset U$ . Зауважимо, що  $U = \bigcup_{(x_1, x_2) \in U} U_1^x \times U_2^x$ , тож 2) виконано. ■

**Theorem 1.10.4** Задано  $\mathbb{R}^n$  із евклідовою топологією. Тоді вона буде збігатися з добутком топологій  $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ , де в  $\mathbb{R}$  стоїть стандартна топологія.

**Remark 1.10.5** Зауважимо, що топологія з евклідовою метрикою збігається з топологією, що породжена метрикою  $d_{\infty} = \max_{i=1, n} |x_i - y_i|$ . Це суттєво спростить доведення теореми.

**Proof.**

Тобто треба довести, що  $U$  – відкрита в  $\mathbb{R}^n \iff U$  – відкрита в  $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ .

$\Rightarrow$  Дано:  $U$  – відкрита в  $\mathbb{R}^n$ .

Нехай  $(x_1, \dots, x_n) \in U$ , тоді звідси існує окіл  $B_{d_{\infty}}(\vec{x}, r) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r) \subset U$ . Позначимо  $U_i = (x_i - r, x_i + r)$  – отримали, що існують  $U_i$  – відкриті околи точок  $x_i, i = \overline{1, n}$ , для яких  $U_1 \times \cdots \times U_n \subset U$ . А тому звідси  $U$  – відкрита на  $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $U$  – відкрита в  $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ .

Нехай  $(x_1, \dots, x_n) \in U$ , тоді існують відкриті околи  $U_i$  точок  $x_i, i = \overline{1, n}$ , для яких  $U_1 \times \cdots \times U_n \subset U$ . Оскільки  $U_i$  – відкриті околи, то існує  $(x_i - r_i, x_i + r_i) \subset U_i$  при  $r_i > 0$ . Значить,  $(x_1 - r_1, x_1 + r_1) \times \cdots \times (x_n - r_n, x_n + r_n) \subset U$ . Покладемо  $r = \min_{i=1, n} r_i$ , тоді звідси  $(x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r) \subset U$ .

Або, інакше кажучи,  $B_{d_{\infty}}(\vec{x}, r) \subset U$ . Тобто звідси  $U$  – відкрита на  $\mathbb{R}^n$  відносно  $d_{\infty}$ , а тому й відносно евклідової метрики. ■

**Proposition 1.10.6** Задані  $(X_1, \tau_1)$  та  $(X_2, \tau_2)$  – два топологічних простори. Тоді відображення  $\text{pr}_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$  та  $\text{pr}_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$  – неперервні.

$$X_1 \xleftarrow{\text{pr}_1} X_1 \times X_2 \xrightarrow{\text{pr}_2} X_2$$

**Proof.**

Достатньо показати для  $\text{pr}_1$ , бо з  $\text{pr}_2$  все симетрично.

Нехай  $U_1$  – відкрита в  $X_1$ . Тоді звідси  $\text{pr}_1^{-1}(U_1) = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid x_1 \in U_1\} = U_1 \times X_2$  – відкрита як добуток двох відкритих. ■

**Proposition 1.10.7** Задані  $(X_1, \tau_1)$  та  $(X_2, \tau_2)$  – два топологічних простори. Нехай  $(Z, \sigma)$  – також топологічний простір, встановимо відображення  $f: Z \rightarrow X_1 \times X_2$  як  $z \mapsto (f_1(z), f_2(z))$ .

$f$  – неперервне  $\iff f_1, f_2$  – обидва неперервні (покоординатно).

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f$  – неперервне. Зауважимо, що  $f_1 = \text{pr}_1 \circ f$  та  $f_2 = \text{pr}_2 \circ f$ . Тоді  $f_1, f_2$  – неперервні як композиція неперервних.

$\Leftarrow$  Дано:  $f_1, f_2$  – обидва неперервні.

Нехай  $U \in \mathcal{B}$  – база топології  $\tau_1 \times \tau_2$ , тобто  $U = U_1 \times U_2$ , де  $U_1, U_2$  – відкриті на  $X_1, X_2$ . Звідси  $f^{-1}(U) = \{z \in Z \mid (f_1(z), f_2(z)) \in U_1 \times U_2\} = f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2)$ . За умовою, маємо  $f_1^{-1}(U_1), f_2^{-1}(U_2)$  – відкриті на  $Z$ . Тобто звідси випливає, що  $f^{-1}(U)$  – відкрита на  $Z$ . ■

**Proposition 1.10.8 Еквівалентний спосіб побудувати топологію**

Задані  $(X_1, \tau_1)$  та  $(X_2, \tau_2)$  – два топологічних простори. Розглянемо такий клас:

$$\mathcal{S} = \{\text{pr}_1^{-1}(U), U \in \tau_1\} \cup \{\text{pr}_2^{-1}(V), V \in \tau_2\}$$

Тоді  $\mathcal{S}$  утворює передбазу множини  $X_1 \times X_2$ . У нас утвориться топологія для  $X_1 \times X_2$  – і це буде та сама топологія, що була визначена через базу.

**Proof.**

Нам треба об'єднати всі елементи даного класу. Маємо

$$\begin{aligned} \bigcup_{U \in \tau_1} \text{pr}_1^{-1}(U) \cup \bigcup_{V \in \tau_2} \text{pr}_2^{-1}(V) &= \bigcup_{U \in \tau_1} (U \times X_2) \cup \bigcup_{V \in \tau_2} (X_1 \times V) = \left( \left( \bigcup_{U \in \tau_1} U \right) \times X_2 \right) \cup \left( X_1 \times \left( \bigcup_{V \in \tau_2} V \right) \right) = \\ &= (X_1 \times X_2) \cup (X_1 \times X_2) = X_1 \times X_2. \end{aligned}$$

У передостанній рівності два об'єднання замінилися на  $X_1, X_2$  відповідно, просто тому що це найбільші множини, які також відкриті.

Таким чином, у нас вже є топологія  $\tau_{\mathcal{S}}$ . Переконаємося, що це та сама топологія, що й  $\tau_{\mathcal{B}}$ .

$\tau_{\mathcal{S}} \subset \tau_{\mathcal{B}}$  – цілком зрозуміло.

$\tau_{\mathcal{B}} \subset \tau_{\mathcal{S}}$ , просто лише варто зауважити, що  $U \times V = \text{pr}_1^{-1}(U) \cap \text{pr}_2^{-1}(V)$ . ■

**Remark 1.10.9** Таким чином,  $\tau_1 \times \tau_2$  – найслабша на  $X_1 \times X_2$  топологія серед всіх інших, для якої проєкції – неперервні. Просто тому що вона породжена передбазою, а вона – найменша.

**Узагальнення добутку топологій**

Припустимо, що  $\{(X_\alpha, \tau_\alpha, \alpha \in I)\}$  – довільна сім'я топологічних просторів. Ми вже з'ясували, що набору множин  $\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ , де  $U_\alpha \in \tau_\alpha$ , недостатньо для формування топології. Однак ми можемо знову розглянути наступний клас:

$$\mathcal{B}_{\blacksquare} = \left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha \in \tau_\alpha \right\}$$

Це утворює базу множини  $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ , тому ми знайшли топологію  $\tau_{\mathcal{B}}$  для множини  $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ . Така топологія в зарубіжній літературі називається **box topology**.

На жаль, дане наївне узагальнення призводить до певних проблем.

**Example 1.10.10** Розглянемо відображення  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  таким чином:  $f(x) = (x, x, x, \dots)$  Зауважимо, що множина  $U = \prod_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right)$  – відкрита множина в сенсі box topology. Проте  $f^{-1}(U) = \{0\}$  уже не буде відкритою, якщо розглядати стандартну топологію. Тобто ми вже маємо відображення  $f$ , яке не є неперервним.

При цьому подивимося на це відображення з іншої сторони, як на  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$ , де кожний  $f_i(x) = x$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Маючи стандартну топологію, ясно, що це неперервне відображення. Отже, у нас не виконується таке:  
 $f$  – неперервне  $\not\iff f_i$  – неперервні (тобто покоординатна неперервність).

Цей приклад можна трактувати інакше: у нас ”дуже багато” відкритих множин, які нам заважають жити. Аби працювало твердження вище, ми трошки змінимо базу ось таким чином:

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha \in \tau_\alpha, U_\alpha \neq X_\alpha \text{ лише скінченне число разів} \right\}$$

Даний клас також задаватиме базу топології за аналогічними міркуваннями. Тільки треба зазначити, що для  $\prod_{\alpha} X_\alpha$  справедливе обмеження. Також якщо для  $U, V \in \mathcal{B}$  виконано обмеження, то для  $U \cap V$  теж. Така топологія в зарубіжній літературі називається **product topology**.

Існує альтернативний спосіб побудувати саме product topology. Розглянемо клас

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in I} \{ \text{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid U_\alpha \in \tau_\alpha \}$$

Зауважимо, що  $\mathcal{S}$  утворює передбазу множини  $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ : аналогічним чином треба пооб’єднати всі елементи. Тоді в нас утвориться топологія  $\tau_{\mathcal{S}}$ , яка, насправді, збігається з product topology, тобто  $\tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\mathcal{B}}$ .

$\tau_{\mathcal{S}} \subset \tau_{\mathcal{B}}$ . Дійсно, нехай  $U \in \tau_{\mathcal{S}}$ , тоді звідси  $U = \bigcup \bigcap_{\text{скінченний}} W$ , де кожний  $W \in \mathcal{S}$ , тобто  $W =$

$\text{pr}_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) = \prod_{\substack{\alpha \in I \\ \text{на } \alpha_0 \text{ стоїть } U_{\alpha_0}}} X_\alpha$ . Оскільки в нас скінченний перетин, то в нас буде скінченне число  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ . Тобто будуть  $W_{\alpha_i}$ . Отримаємо, що  $\bigcap W_{\alpha_i} = \prod_{\substack{\alpha \in I \\ \text{на } \alpha_i, i = \overline{1, k} \text{ стоїть } U_{\alpha_i}}} X_\alpha \stackrel{\text{позн.}}{=} R$ . Отри-

мали елемент  $R \in \mathcal{B}$ , бо там виконані обмеження. Отже,  $U = \bigcup R, R \in \mathcal{B}$ , тобто  $U \in \tau_{\mathcal{B}}$ .

$\tau_{\mathcal{B}} \supset \tau_{\mathcal{S}}$ . Дійсно, зауважимо, що  $\prod_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} \text{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha)$  при  $U_\alpha \neq X_\alpha$  лише при скінченній кількості.

Із даного обмеження випливатиме, що перетин тут скінченний.

**Remark 1.10.11** Box topology та product topology мають однаковий сенс при скінченній сім’ї топологічних просторів.

## 1.11 Фактортопологія

Тут є куча варіантів, як це визначати, тому розглянемо всі.

**Definition 1.11.1** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $q: X \rightarrow Y$  – сюр’єктивне відображення. **Фактортопологію на  $Y$**  визначимо таким чином:

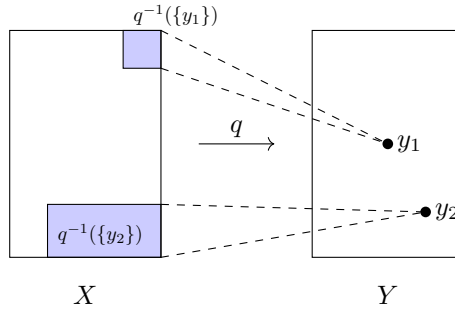
$$U \subset Y \text{ – відкрита на } Y \iff q^{-1}U \text{ – відкрита на } X$$

Позначення:  $\tau/\sim$  (соро це позначення буде виправданим).

**Remark 1.11.2**  $\tau/\sim$  дійсно задає топологію та  $(Y, \tau/\sim)$  утворює топологічний простір. Це впливає з властивостей прообразів.

Оскільки  $q$  сюр’єктивне відображення, то для кожної  $y \in Y$  знайдеться  $x \in X$ , щоб  $y = q(x)$ . По-інакшому це можна сказати як  $q^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ .





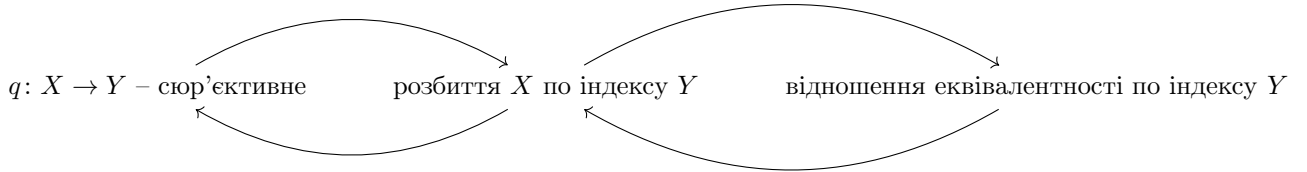
Також в силу сюр'єктивності ми маємо розбиття множини  $X$ . Тобто звідси отримали  $X = \bigsqcup_{y \in Y} q^{-1}(\{y\})$ .

Навпаки, нехай множина  $X$  має розбиття, тобто  $X = \bigsqcup_y S_y$ . Тоді можна визначити відображення  $q$  таким чином: якщо  $y \in S_y$ , то тоді  $S_y \ni x \xrightarrow{q} y$ , причому це задає сюр'єктивне відображення.

Нехай знову є розбиття множини  $X$ , тоді вона має відношення еквівалентності  $x_1 \sim x_2 \iff x_1, x_2$  лежать в одній множині розбиття.

А якщо є відношення еквівалентності на  $X$ , то зрозуміло, що відбувається розбиття класами еквівалентності  $[x]$ .

Коротше, у нас виникла така діаграма:



Мораль така: ми можемо трьома різними способами задати фактортопологію: або через довільну сюр'єкцію, або через розбиття (досить рідко), або через відношення еквівалентності. Запишу інше означення:

**Definition 1.11.3** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $\sim$  – відношення еквівалентності на  $X$ . **Фактортопологію на  $X/\sim$**  визначимо таким чином:

$$U \subset X/\sim \text{ – відкрита на } X/\sim \iff \pi^{-1}(U) \text{ – відкрита на } X,$$

де  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  – факторвідображення (яке є сюр'єктивним).

**Remark 1.11.4** Із означення випливає, що  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  – неперервне.

**Proposition 1.11.5** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $\sim$  – відношення еквівалентності на  $X$ .  $V \subset X/\sim$  – замкнена на  $X/\sim \iff \pi^{-1}(V)$  – замкнена на  $X$ .

*Вправа: довести.*

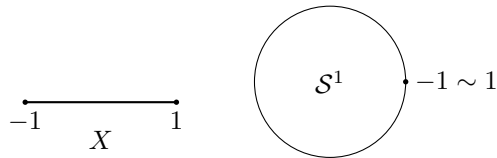
**Proposition 1.11.6** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $\sim$  – відношення еквівалентності на  $X$ . Також нехай  $(Y, \sigma)$  – інший топологічний простір та відображення  $f: X/\sim \rightarrow Y$ .  $f$  – неперервне  $\iff f \circ \pi$  – неперервне.

**Proof.**

$\Rightarrow$  випливає з того, що  $f, \pi$  одночасно неперервні.

$\Leftarrow$  Дано:  $f \circ \pi$  – неперервне. Нехай тепер  $U$  – відкрита в  $Y$ . За умовою,  $(f \circ \pi)^{-1}(U)$  відкрита на  $X$ , але тоді  $\pi^{-1}f^{-1}(U)$  відкрита на  $X$ . Значить, за означенням,  $f^{-1}(U)$  – відкрита на  $X/\sim$ . ■

**Example 1.11.7** Розглянемо відрізок  $X = [-1, 1]$ . Ми можемо задати на ній відношення еквівалентності таким чином:  $-1 \sim 1$ . Інтуїтивно кажучи, відношення еквівалентності 'склеює' точки один з одним (тобто в цьому випадку  $-1, 1$  будуть склеєними). У результаті маємо отримати коло:



Тобто, інтуїтивно кажучи,  $X/\sim \cong S^1$ , саме гомеоморфні.

Скоро математично я це доведу.

*TODO: доповнити!*

## 2 Компактні простори

### 2.1 Компактність

**Definition 2.1.1** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір.

**Покриттям**  $X$  назвемо сім'ю підмножин  $\{U_i \mid i \in I\}$  множини  $X$ , для яких

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

Якщо множина індексів  $I$  скінченна, то покриття називається **скінченним**. Якщо всі множини в сім'ї відкриті, то покриття називається **відкритим**.

**Definition 2.1.2** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір. Нехай  $\{U_i \mid i \in I\}$  – покриття  $X$ . **Підпокриттям** назвемо набір  $\{U_i \mid i \in J\}$ , де  $J \subset I$ , якщо це теж покриття.

**Example 2.1.3** Зокрема множини  $(n-1, n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  утворюють відкрите покриття  $\mathbb{R}$ .

**Definition 2.1.4** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір. Даний простір назвемо **компактним**, якщо

$$\forall \{U_i \mid i \in I\} \text{ – відкрите : } \exists \{U_i \mid i \in J\}, J \subset I, J \text{ – скінченний індекс}$$

Тобто для будь-якого відкритого покриття  $X$  існує скінченне підпокриття.

**Example 2.1.5**  $\mathbb{R}$  не є компактом.

Дійсно, оберемо відкрите покриття  $\{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Якби існувало скінченне підпокриття  $\{(n-1, n+1) \mid n \in J\}$ , то тоді в  $J \subset \mathbb{Z}$  є найбільший елемент  $N \in \mathbb{Z}$ . Тоді з цього випливає, що  $N+1 \notin \bigcup_{n \in J} (n-1, n+1)$ . Але водночас  $\bigcup_{n \in J} (n-1, n+1) = \mathbb{R}$ , тобто  $N+1 \in \mathbb{R}$  – це неможливо.

Висновок: знайшли покриття  $\{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , яка не містить скінченне підпокриття.

**Example 2.1.6** Недискретний топологічний простір  $(X, \tau_{\text{indiscr}})$  – компактний.

Дійсно, оберемо будь-яке відкрите покриття  $\{U_i \mid i \in I\}$ , у нас  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ . Кожний  $U_i = \emptyset$  або  $X$ .

Значить, існує множина  $U_{i_0} = X$ . Тоді  $\{U_{i_0}\}$  формує скінченне підпокриття.

**Example 2.1.7** Будь-який скінченний простір – компактний.

Маємо відкрите покриття  $\{U_i \mid i \in I\}$ , тобто  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ . Топологічний простір скінченний, тобто  $X$  – скінченний, тож  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Кожний  $x_j \in U_{i_j}$ . Тож існує скінченне підпокриття  $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_j}\}$ .

**Example 2.1.8** Дискретний простір  $(X, \tau_{\text{discr}})$  – компактний  $\iff$  це скінченний простір.

$\Rightarrow$  Дано:  $(X, \tau_{\text{discr}})$  – компактний. Тобто для будь-якого відкритого покриття, зокрема для  $\{\{x\} \mid x \in X\}$  існує скінченне підпокриття  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , звідси  $X = \bigcup_i \{x_i\}$ .

$\Leftarrow$  **дуб. Ex. 2.1.7**

**Definition 2.1.9** Задано множину  $X$  та  $A \subset X$ .

**Покриттям множини**  $A$  назвемо сім'ю  $\{W_i \mid i \in I\}$  підмножин  $X$ , для яких

$$A \subset \bigcup_{i \in I} W_i$$

$\{W_i \mid i \in J\}$ ,  $J \subset I$  називається **підпокриттям**, якщо це теж покриття множини  $A$ .

**Remark 2.1.10** Особливий випадок при  $A = X$ , із першим означенням збігається.

**Definition 2.1.11** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $A \subset X$ .

Множина (!)  $A$  називається **компактом**, якщо

$$(A, \tau_A) \text{ – компактний простір,}$$

тобто будь-яке відкрите покриття  $A$  підмножинами  $A$  має скінченне підпокриття.

**Proposition 2.1.12** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $A \subset X$ .

$A$  – компактна  $\iff$  будь-яке покриття  $A$  відкритими підмножинами  $X$  містить скінченне підпокриття.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $A$  – компактна, тобто  $(A, \tau_A)$  – компактний простір. Нехай  $\{W_i \subset X \mid i \in I\}$  – відкрите покриття множини  $A$ , тобто звідси  $A \subset \bigcup_{i \in I} W_i$ . Але звідси випливає, що  $A \cap \bigcup_{i \in I} W_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap W_i) = A$ .

Отримали покриття  $\{A \cap W_i \mid i \in I\}$  множини  $A$  підмножинами  $A$ . Оскільки  $(A, \tau_A)$  – компактний, то звідси існує скінченне підпокриття  $\{A \cap W_i \mid i \in J\}$ , тобто звідси  $\bigcup_{i \in J} (A \cap W_i) = A = A \cap \bigcup_{i \in J} (A \cap W_i)$ .

Значить, звідси  $A \subset \bigcup_{i \in J} W_i$ . Тобто  $\{W_i \subset X \mid i \in J\}$  – скінченне підпокриття.

$\Leftarrow$  Дано: будь-яке покриття  $A$  відкритими підмножинами  $X$  містить скінченне підпокриття. Насправді, ідейно все те саме робиться. ■

## 2.2 Компактність та підпростори

**Example 2.2.1** Із курсу математичного аналізу,  $[0, 1]$  – компактний (лема Гайне-Бореля). Однак  $(0, 1) \subset [0, 1]$  більше не є компактом, тому що відкрите покриття  $\{(\varepsilon, 1) \mid \varepsilon > 0\}$  не містить скінченного підпокриття.

Тобто цей приклад показує, що треба додати певні обмеження, щоб підмножина була теж автоматично компактною.

**Proposition 2.2.2** Задано  $(X, \tau)$  – компактний простір та  $A \subset X$  – замкнена. Тоді  $(A, \tau_A)$  – компактний.

**Proof.**

Нехай  $\{W_i \subset X \mid i \in I\}$  – відкрите покриття  $A$ , тобто  $\bigcup_{i \in I} W_i \supset A$ . Але ми знаємо, що  $A$  – замкнена,

тобто  $X \setminus A$  – відкрита. Зауважимо, що  $(X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} W_i = X$ . Тобто  $\{X \setminus A\} \cup \{W_i \mid i \in I\}$  утворює

відкрите покриття  $X$ . За компактністю, існує скінченне підпокриття  $\{X \setminus A\} \cup \{W_i \mid i \in J\}$ , тож звідси  $(X \setminus A) \cup \bigcup_{j \in J} W_j = X$ .

Із цього випливає, що  $\bigcup_{j \in J} W_j \supset A$ . Тобто знайшли скінченне підпокриття  $\{W_i \subset X \mid i \in J\}$ .

Висновок:  $A$  – компактна множина.

Окремо варто звернути увагу, коли із відкритого покриття  $\{X \setminus A\} \cup \{W_i \mid i \in I\}$  може бути скінченне підпокриття  $\{W_i \mid i \in K\}$ . Тоді звідси  $\bigcup_{i \in K} W_i = X \supset A$  – автоматично доводиться. ■

Коротше, будь-яка замкнена множина – компактна. Але не кожна компактна множина буде замкненою.

**Example 2.2.3** Зокрема маємо  $(X, \tau_{\text{indiscr}})$  – недискретний простір, оберемо  $Y \subsetneq X$ , утворимо знову недискретний простір  $(Y, \tau_Y)$  за **Ех. 1.9.5**.

Зауважимо, що  $Y$  – компактна множина, тому що  $(Y, \tau_Y)$  – компактний простір в силу недискретності. Але  $Y$  – НЕ замкнена множина, тобто  $X \setminus Y$  – НЕ відкрита множина, тому що в  $(X, \tau_{\text{indiscr}})$  лише  $\emptyset, X$  – відкриті.

Утім можна зробити певні зміни, аби в зворотному напрямку це спрацювало.

**Proposition 2.2.4** Задано  $(X, \tau)$  – гаусдорфів (уже не компактний) простір та  $A$  – компактна множина. Тоді  $A$  – замкнена.

**Proof.**

Ми хочемо зараз довести, що  $X \setminus A$  – відкрита множина. Значить, нехай  $x \in X \setminus A$ . Оберемо також будь-який  $a \in A$ . У силу гаусдорфовості, існують околиці  $U_a, V_a$  – відповідно відкриті околиці точки

$x, a$  такі, що  $U_a \cap V_a = \emptyset$ . Зауважимо, що  $\bigcup_{a \in A} V_a \supset A$ . Маємо  $\{V_a \subset X \mid a \in A\}$  – відкрите покриття,

а за компактністю  $A$ , можна знайти скінченне підпокриття  $\{V_a \subset X \mid a \in B\}$ .

Зафіксуємо  $U = \bigcap_{a \in B} U_a$ , який є теж відкритим (в силу скінченного перетину) та околom точки  $x$ .

Доведемо, що  $U \subset X \setminus A$ .

Нехай  $y \in A$ , тобто  $y \in V_b$  при деякому  $b \in B$ . Але відомо, що  $V_b \cap U_b = \emptyset$ , а тому  $b \notin U_b \implies b \notin U$ .

Висновок:  $X \setminus A$  – відкрита, а тому  $A$  – замкнена. ■

**Corollary 2.2.5** Задано  $(X, \tau)$  – компактний та гаусдорфів простір.

$A$  – компактна  $\iff A$  – замкнена.

## 2.3 Компактність та добуток просторів

**Theorem 2.3.1** Теорема Тіхонова (скінченний варіант)

Задані  $(X, \tau_1)$  та  $(Y, \tau_2)$  – компактні топологічні простори. Тоді  $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$  – теж компактний топологічний простір.

**Proof.**

Отже, нехай  $\{S_i \mid i \in I\}$  – відкрите покриття  $X \times Y$ . Для кожного  $(x, y) \in X \times Y$  можна обрати  $S_i \ni (x, y)$ , а звідси можна обрати відкриті  $U_{x,y}, W_{x,y}$  – відповідно околи точки  $x, y$ , для яких  $U_{x,y} \times W_{x,y} \subset S_i$ . Сім'я множин  $\{U_{x,y} \times W_{x,y} \mid x \in X, y \in Y\}$  – відкрите покриття  $X \times Y$ , бо

$$\bigcup_{(x,y) \in X \times Y} (U_{x,y} \times W_{x,y}) = \bigcup_{x \in X} U_{x,y} \times \bigcup_{y \in Y} W_{x,y} = X \times Y.$$

Тому достатньо шукати скінченне підпокриття саме для цієї сім'ї.

Зафіксуємо  $x \in X$ . Зауважимо, що  $\{W_{x,y} \mid y \in Y\}$  – відкрите покриття  $Y$ . Але оскільки  $(Y, \tau_2)$  – компактний, то існує скінченне підпокриття  $\{W_{x,y} \mid y \in \tilde{Y}\}$ . Покладемо тепер  $U_x = \bigcap_{y \in \tilde{Y}} U_{x,y}$ , що

також буде відкритим околom точки  $x$ . Тоді звідси випливає, що  $U_x \times Y \subset \bigcup_{y \in \tilde{Y}} (U_{x,y} \times W_{x,y})$ , бо

$(x, y) \in U_x \times Y$ , тому  $x \in U_{x,y}$  для всіх  $y \in \tilde{Y}$ . Обравши довільний  $y \in \tilde{Y}$ , отримаємо  $y \in W_{x,y}$ .

Тепер  $\{U_x \mid x \in X\}$  – відкрите покриття  $X$  (за міркуваннями вище). Але оскільки  $(X, \tau_1)$  – компактний, то існує скінченне підпокриття  $\{U_x \mid x \in \tilde{X}\}$ .

Нарешті, я стверджую, що  $\{U_{x,y} \times W_{x,y} \mid x \in \tilde{X}, y \in \tilde{Y}\}$  буде скінченним підпокриттям  $X \times Y$ . Те, що це скінченна, випливає зі скінченності  $\tilde{X}, \tilde{Y}$ . Нехай тепер  $(x, y) \in X \times Y$ , тоді  $x \in U_x$  для деякого  $x \in \tilde{X}$ , тож  $(x, y) \in U_x \times Y$ , але тоді  $(x, y) \in U_{x,y} \times W_{x,y}$  для деякого  $y \in \tilde{Y}$ . ■

**Remark 2.3.2** Цілком зрозуміло, що теорема Тіхонова працює, коли в нас  $n$  штук компактних топологічних просторів.

**Example 2.3.3** Зокрема звідси  $[0, 1]^n$  буде компактною множиною, оскільки  $[0, 1]$  – компактна.

## 2.4 Компактність та факторпростори

**Lemma 2.4.1** Задані  $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$  – два топологічних простори та  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне. Якщо  $X$  – компактна, то тоді  $fX$  – компактна.

**Proof.**

Маємо  $\{W_i \subset Y \mid i \in I\}$  – відкрите покриття  $fX$ . Візьмемо сім'ю прообразів  $\{f^{-1}(W_i) \subset X \mid i \in I\}$ . Зауважимо:

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(W_i) = f^{-1} \left( \bigcup_{i \in I} W_i \right) \supset f^{-1}f(X) = X.$$

Отже,  $\{f^{-1}(W_i) \subset X \mid i \in I\}$  – відкрите покриття  $X$ , але в силу компактності існує скінченне підпокриття  $\{f^{-1}(W_i) \subset X \mid i \in J\}$ . Залишилось показати, що  $\{W_i \subset Y \mid i \in J\}$  (яке вже є скінченним) буде підпокриттям  $fX$ . І дійсно, ми маємо  $X = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(W_i) = \bigcup_{i \in J} W_i$ . Але тоді

$$fX = f \left( \bigcup_{i \in J} f^{-1}(W_i) \right) \subset \bigcup_{i \in J} W_i.$$

■

**Corollary 2.4.2** Будь-який факторпростір – компактний простір.

Випливає з того, що  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  – неперервне відображення.

**Definition 2.4.3** Задані  $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$  – два топологічних простори та  $f: X \rightarrow Y$  – відображення.  $f$  називається **відкритим**, якщо

$$\forall U \subset X \text{ – відкрита в } X : fU \text{ – відкрита в } Y$$

$f$  називається **замкненим**, якщо

$$\forall V \subset X \text{ – замкнена в } X : fV \text{ – замкнена в } Y$$

**Proposition 2.4.4** Задані  $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$  – один компактний, а другий – гаусдорфів простори та  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне відображення. Тоді  $f$  – замкнене.

**Proof.**

Нехай  $V$  – замкнена на  $X$ , тоді  $V$  – компакт як множина. Значить,  $fV$  – компакт. У силу гаусдорфовості,  $fV$  – замкнена в  $Y$ . ■

Уже якось було, що неперервна бієкція не гарантує гомеоморфність між двома просторами. Але, додавши певні обмеження, можна саме так і ствердити:

**Proposition 2.4.5** Задані  $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$  – один компактний, а другий – гаусдорфів простори та  $f: X \rightarrow Y$  – неперервна бієкція. Тоді  $f$  – гомеоморфізм.

**Proof.**

Нам треба лишень довести, що  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  буде неперервним відображенням.

Нехай  $V$  – замкнена в  $Y$  та розглянемо  $(f^{-1})^{-1}(V) \stackrel{f \text{ – бієкція}}{=} fV$ . Нам уже відомо, що  $f$  – замкнене відображення, а тому  $fV$  має бути замкненою на  $X$ . Тобто  $(f^{-1})^{-1}(V)$  – замкнена на  $X$ . ■

**Example 2.4.6** Зокрема будь-які дві компактно-гаусдорфові простори будуть між собою гомеоморфними.

**Proposition 2.4.7** Задані  $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$  – один компактний, а другий – гаусдорфів простори та  $f: X \rightarrow Y$  – неперервна сюр'єкція. Тоді  $Y \cong X/\sim$ . Тут відношення еквівалентності  $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$ .

*TODO: доробити!*

## 3 Зв'язні простори

### 3.1 Зв'язність

**Definition 3.1.1** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір.

Ми назвемо простір **незв'язним**, якщо

$$\exists U, V \in \tau : U \neq \emptyset, V \neq \emptyset : X = U \sqcup V$$

У протилежному випадку ми будемо це називати **зв'язним**.

**Example 3.1.2** Зокрема  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  – незв'язний, тому що існують відкриті непорожні та неперетинні  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$ , які дають  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = X$ .

**Example 3.1.3** Простір  $\mathbb{Q}$  (як підпростір  $\mathbb{R}$ ) – незв'язний. Дійсно, нехай  $U = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$  та  $V = (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$  – два відкритих, непорожніх та неперетинних множин. Тоді  $U \cap V = \emptyset$  (оскільки  $\sqrt{2}$  ірраціональне).

**Example 3.1.4** Будь-який  $(X, \tau_{\text{discr}})$  – дискретний топологічний простір – незв'язний, якщо  $\#X \geq 2$ . Оберемо  $x \in X$ , тоді  $\{x\} \sqcup (X \setminus \{x\}) = X$ .

**Example 3.1.5** Будь-який  $(X, \tau_{\text{indiscr}})$  – недискретний топологічний простір – зв'язний, якщо  $X \neq \emptyset$ . Розпишемо  $X = U \sqcup V$ , тут обидва відкриті. Але звідси випливає, що  $U \in \{X, \emptyset\}$  та  $V \in \{X, \emptyset\}$ . Тобто дійсно,  $U = \emptyset$  або  $V = \emptyset$ . Це означає, що порушується означення незв'язності.

**Lemma 3.1.6** Задані  $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$  – топологічних простори та  $f: X \rightarrow Y$  – відображення. Нехай  $U, V$  – такі відкриті підмножини, що  $U \sqcup V = X$ .

$f$  – неперервне  $\iff f|_U, f|_V$  – неперервні.

Дану лему часто називають *pasting lemma*.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано  $f$  – неперервне. Тоді треба згадати, що  $f|_U = f \circ \iota_U$  та  $f|_V = f \circ \iota_V$ . Вкладення вже неперервне, тобто звідси  $f|_U, f|_V$  – неперервні як композиція.

$\Leftarrow$  Дано:  $f|_U, f|_V$  – неперервні. Нехай  $W$  – відкрита в  $Y$ . Тоді

$$f^{-1}(W) = \{x \in U \mid f(x) \in W\} \sqcup \{x \in V \mid f(x) \in W\} = (f|_U)^{-1}(W) \sqcup (f|_V)^{-1}(W).$$

За умовою,  $(f|_U)^{-1}(W)$  – відкрита в  $U$ , але сама  $U$  – відкрита в  $X$ . Значить,  $(f|_U)^{-1}(W)$  – відкрита в  $X$ . Аналогічним чином  $(f|_V)^{-1}(W)$  – відкрита в  $U$ .

Разом отримаємо  $f^{-1}(W)$  – відкрита в  $X$ . ■

**Remark 3.1.7** Згідно з означенням,  $\emptyset$  буде зв'язним. Бачив авторів, які не вважали дану множину ані зв'язною, ані незв'язною.

#### Proposition 3.1.8 Еквівалентні означення

Задано  $(X, \tau)$ ,  $X \neq \emptyset$  – топологічний простір. Наступні еквівалентні:

- 1)  $(X, \tau)$  – зв'язний;
- 2) єдині підмножини  $X$ , що є відкритими та замкненими одночасно, – це  $\emptyset, X$ ;
- 3) будь-яке неперервне відображення  $f: X \rightarrow D$ , де  $D$  – дискретний простір, буде сталим.
- 4) будь-яке неперервне відображення  $f: X \rightarrow \{y_1, y_2\}$ , де  $\{y_1, y_2\}$  – двоточковий дискретний простір, буде сталим.

**Proof.**

1)  $\Rightarrow$  2) Дано:  $(X, \tau)$  – зв'язний. Нехай  $U$  – замкнена та відкрита одночасно. Тобто  $U, X \setminus U$  одночасно відкриті. При цьому вони неперетинні, непорожні, а тому звідси  $U \sqcup (X \setminus U) = X$ . У силу зв'язності єдина можлива опція – це бути  $U = X$  або  $U = \emptyset$ .

2)  $\Rightarrow$  3) Дано: єдині підмножини  $X$ , що є відкритими та замкненими одночасно, – це  $\emptyset, X$ .

Розглянемо неперервне відображення  $f: X \rightarrow D$ , де  $D$  – дискретний. Оберемо  $x \in X$ , тоді  $\{f(x)\}$  – відкрита й замкнена одночасно в  $D$ . У силу неперервності,  $f^{-1}\{f(x)\}$  – відкрита та замкнена в  $X$ , тоді  $f^{-1}\{f(x)\} = \emptyset$  або  $f^{-1}\{f(x)\} = X$ . Перша рівність неможлива, бо точка  $x$  там лежить. Значить,  $f^{-1}\{f(x)\} = X$ . Висновок:  $f(y) = f(x), \forall y \in X$ , тобто тут  $f(x)$  грає роль константи.

3)  $\Rightarrow$  4) Дано: будь-яке неперервне відображення  $f: X \rightarrow D$ , де  $D$  – дискретний простір, буде сталим. Зокрема фіксуємо  $D_2$  points – довільний двоточковий дискретний простір – закінчили.

4)  $\Rightarrow$  1) Дано: будь-яке неперервне відображення  $f: X \rightarrow \{y_1, y_2\}$ , де  $\{y_1, y_2\}$  – двоточковий дискретний простір, буде сталим. Нехай  $U, V$  – відкриті підмножини так, щоб  $U \sqcup V = X$ . Визначимо відображення  $g: X \rightarrow \{y_1, y_2\}$ , що задано як  $g(x) = \begin{cases} y_1, & x \in U \\ y_2, & x \in V \end{cases}$ . Тоді  $g|_U, g|_V$  неперервні (легко ручками перевірити), а звідси  $g$  – неперервне за лемою. Але оскільки  $g$  задовольняє умові 'дано', то звідси  $g$  приймає стале значення. Тобто  $U = X, V = \emptyset$  або навпаки. ■

**Lemma 3.1.9** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір. Нехай  $A, B \subset X$  такі, що  $A \subset B \subset \text{Cl}(A)$ . Також нехай  $A$  – зв'язна. Тоді  $B$  – також зв'язна.

**Proof.**

Нехай  $f: B \rightarrow D$  – неперервне відображення до дискретного простору. Тоді  $f|_A: A \rightarrow D$  також неперервне (композиція неперервних, бо  $f|_A = f \circ \iota_A$ ). Тоді це стала функція, оскільки  $A$  – з'єднана область за умовою. Скажімо,  $f|_A(a) = d, \forall a \in A$ . Тепер,  $d$  та  $f$  – обидва неперервні функції з  $B$  в  $D$  (який є гаусдорфовим). Зауважимо, що  $A$  – щільна на  $B$  в силу  $A \subset B \subset \text{Cl}(A)$ . Дійсно, якщо розглянути підпростір  $(B, \tau_B)$ , то  $B$  – замкнена та містить  $A$ , а тому  $B \supset \text{Cl}(A)$ ; отже,  $B = \text{Cl}(A)$ . На щільній множині  $A$  виконано  $f(a) = a$ , а тому  $f(b) = d$  на всій множині  $B$ .

Отже,  $f: B \rightarrow D$  теж стала, тобто  $B$  – зв'язна. ■

**Lemma 3.1.10** Задані  $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$  – топологічні простори та  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне. Відомо, що  $X$  – зв'язний. Тоді  $f(X)$  – також зв'язний.

**Proof.**

Спочатку розглянемо випадок, коли  $f$  – сюр'єктивне. У цьому випадку  $f(X) = Y$ . Маємо  $U \sqcup V = Y$ , де  $U, V$  – відкриті в  $Y$ , тоді  $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$  – неперетинні та відкриті в  $X$ , при цьому  $f^{-1}(Y) = X = f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V)$ . Оскільки  $X$  – зв'язний, то (наприклад)  $f^{-1}(U) = \emptyset$ , а за сюр'єктивністю,  $U = \emptyset$ . Якщо  $f: X \rightarrow Y$  – довільне, то тоді  $g: X \rightarrow f(X)$ , де  $g \equiv f$ , – сюр'єктивне, і там закінчили. ■

**Proposition 3.1.11** Задані  $(X, \tau_1)$  та  $(Y, \tau_2)$  – два зв'язних топологічних простори. Тоді  $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$  – також зв'язний.

**Proof.**

Розглянемо неперервне відображення  $f: X \times Y \rightarrow D$ , де  $D$  – дискретний простір. Оберемо  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ . Зауважимо, що  $\{x\} \times Y \cong Y$ , тож звідси  $\{x\} \times Y$  має бути зв'язною також. Значить,  $f|_{\{x\} \times Y}$  буде сталою. Зокрема звідси  $f(x, y) = f(x, y')$ .

Аналогічним чином  $X \times \{y'\} \cong X$ , а там через зв'язність отримаємо  $f(x', y') = f(x, y')$ .

Разом отримали  $f(x, y) = f(x', y')$ , тобто  $f$  – стала. Отже,  $X \times Y$  – зв'язна. ■

**Example 3.1.12** Із курсу матана,  $[a, b]$  – зв'язний. Але за твердженням, звідси випливає, що всі куби  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  будуть зв'язними в  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma 3.1.13** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та  $(A_i, i \in I)$  – покриття  $X$ , причому всі  $A_i$  – зв'язні, та всі вони перетинаються між собою. Тоді  $X$  – зв'язна.

**Proof.**

Нехай  $f: X \rightarrow D$  – неперервне відображення, де  $D$  – дискретний простір. Тоді неперервним буде  $f|_{A_i}: A_i \rightarrow D$ , але в силу зв'язності  $A_i$ , ми маємо  $f|_{A_i} \equiv d_i$ . Оберемо інше звуження  $f|_{A_j}: A_j \rightarrow D$ , тоді аналогічно  $f|_{A_j} \equiv d_j$ . Проте  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ , тож звідси  $d_i = d_j$ . Таким чином, стала не залежить від  $i \in I$ , а тому  $f$  буде сталою на  $X$ . Отже,  $X$  – зв'язна. ■

## 3.2 Лінійна зв'язність

**Definition 3.2.1** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір.

**Шляхом** в  $X$  називають неперервне відображення  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ . Ми називаємо  $\gamma$  **шляхом від  $x$  до  $y$** , якщо  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ .

Простір  $X \neq \emptyset$  називається **лінійно зв'язним**, якщо

$$\forall x, y \in X : \exists \gamma - \text{шлях від } x \text{ до } y$$



**Lemma 3.2.2** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір. Нехай  $X$  – лінійно зв’язний. Тоді  $X$  – (просто) зв’язний.

**Proof.**

Нехай  $f: X \rightarrow D$  – неперервне, де  $D$  – дискретний простір. Оберемо  $x, y \in X$ , тоді, за умовою, існує шлях  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ , причому  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ . Звідси відображення  $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow D$  – також неперервне. Оскільки  $[0, 1]$  – зв’язна, то тоді  $f \circ \gamma$  – стале відображення, зокрема  $f(x) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(y)$ . Отже,  $f$  – також стале, а тому  $X$  – зв’язний. ■

**Example 3.2.3** Підмножина  $X \subset \mathbb{R}^n$  називається **випуклою**, якщо  $\forall x, y \in X, \forall t \in [0, 1] : (1 - t)x + ty \in X$ . Тоді кожна випукла підмножина  $\mathbb{R}^n$  буде лінійно зв’язною, оскільки  $t \mapsto (1 - t)x + ty$  визначає довільний шлях з  $x$  в  $y$ .

Отже, всі випуклі підмножини  $\mathbb{R}^n$  – зв’язні.

Нехай задані шлях  $\gamma$  з  $x$  в  $y$  та шлях  $\delta$  з  $y$  в  $z$ . Ми можемо їх об’єднати ці шляхи таким чином: визначаємо  $\gamma * \delta: [0, 1] \rightarrow X$ , який задається ось так:

$$(\gamma * \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \delta(2t - 1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Задане відображення досі залишається шляхом, тільки тепер з  $x$  в  $z$ .

**Example 3.2.4** Простір  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  буде лінійно зв’язним при  $n \geq 2$ .

Нехай  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Якщо пряма між  $x, y$  не проходить через 0, то тоді дана пряма визначає шлях з  $x$  в  $y$ .

Інакше ми можемо обрати точку  $z \in X$ , що не лежить на цій прямій (це можливо в силу умови  $n \geq 2$ ). Пряма через  $x, z$  не проходить через 0, тому це – шлях з  $x$  в  $z$ . Аналогічно пряма через  $z, y$  не проходить через 0, тому це – шлях з  $z$  в  $y$ . Отже, можна об’єднати два шляхи – отримаємо шлях з  $x$  в  $y$ .

**Lemma 3.2.5** Задано  $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$  – топологічні простори та  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне. Тоді  $\Gamma_f \cong X$ , де  $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$  – графік функції (для дійснозначних функцій це був би справді графік).

**Proof.**

Визначимо такі функції:

$$p: \Gamma_f \rightarrow X \quad (x, y) \mapsto x$$

$$q: X \rightarrow \Gamma_f \quad x \mapsto (x, f(x)).$$

Зауважимо, що  $p \circ q = \text{id}_X$  та  $q \circ p = \text{id}_{\Gamma_f}$ . Тож вони взаємно оборотні. Залишилося довести, що ці два відображення – неперервні.

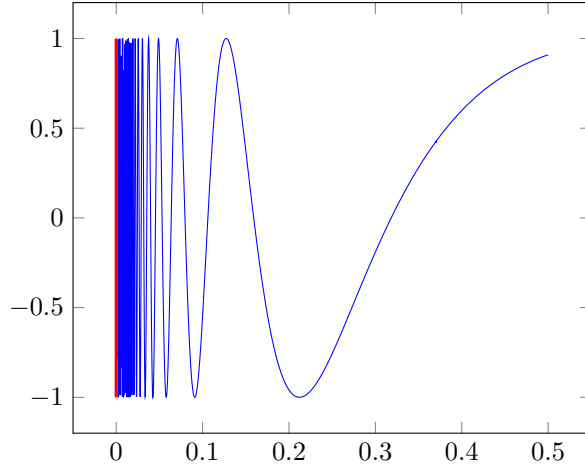
Для  $p$  маємо  $p = \text{pr} \circ \iota$ , де  $\text{pr}: X \times Y \rightarrow X, \iota: \Gamma_f \rightarrow X \times Y$ . Оскільки ці два відображення неперервні, то композиція теж буде неперервною.

Для  $q$  ми розглянемо  $\iota \circ q: X \rightarrow X \times Y$ . Зауважимо, що  $(\iota \circ q)(x) = (x, f(x)) = (\text{id}_X(x), f(x))$  – обидві функції неперервні, тож  $\iota \circ q$  – неперервне. За **Prp. 1.9.13**,  $q$  – неперервне. ■

**Remark 3.2.6** Тепер, нарешті, можемо поговорити про те, що зворотне твердження не працює. Тобто зі зв’язності не випливає лінійна зв’язність в загальному випадку.

**Example 3.2.7** Розглянемо підмножини  $L = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$  та  $C = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \right\}$ .

Будемо зосереджені підпросторі  $X = L \cup C$ , яка називається **сіносуїдальною кривою** тополога.



I.  $X$  – зв’язна.

Спочатку зауважимо, що  $C \cong (0, +\infty)$  за **Lm. 3.2.5** та  $(0, +\infty)$  – зв’язна, тож сама  $C$  буде також зв’язною. Залишилося довести, що  $\text{Cl}(C) \supset X \supset C$  – і тоді вже  $X$  буде зв’язною за **Lm. 3.1.9**.

Нехай  $(0, y) \in L$ , тут  $|y| \leq 1$ . Оберемо довільне  $\varepsilon > 0$ . Тоді існує елемент  $z > \frac{1}{\varepsilon}$ , для якого  $y = \sin z$ .

Покладемо  $x = \frac{1}{z}$ , тоді отримаємо  $(x, y) \in C$ , при цьому  $\|(0, y), (x, y)\| = |x| < \varepsilon$ . Таким чином,  $(0, y) \in \text{Cl}(C)$ , що дає нам вкладення  $\text{Cl}(C) \supset L$ . Проте оскільки  $\text{Cl}(C) \supset C$ , то з цих двох вкладень випливає  $\text{Cl}(C) \supset X$ . (насправді кажучи,  $X = \text{Cl}(C)$ ).

II.  $X$  – не лінійно зв’язна.

Припустимо, що існує шлях  $\gamma$  із точки  $(0, 0)$  до точки  $\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ . Маємо  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ , де  $t \in [0, 1]$ . Оскільки  $\gamma$  – неперервний, то  $\gamma_1, \gamma_2$  – також неперервні. Але  $[0, 1]$  – компакт, тож  $\gamma_1, \gamma_2$  – рівномірно неперервні, тож  $\exists \delta > 0 : \forall t, t' \in [0, 1] : |t - t'| < \delta \implies |\gamma_2(t) - \gamma_2(t')| < 2$ .

Оберемо таке  $N \in \mathbb{N}$ , щоб  $\frac{1}{N} < \delta$ . Далі відрізок  $[0, 1]$  розіб’ємо на підвідрізки довжини  $\frac{1}{N}$  рівномірним чином. Тобто  $\left[0, \frac{1}{N}\right], \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right], \dots, \left[\frac{N-1}{N}, 1\right]$ . Оскільки  $\gamma_1$  – шлях від 0 до  $\frac{1}{\pi}$ , то за теоремою

Коші про середнє, існують  $t_k \in [0, 1]$ , для яких  $\gamma_1(t_k) = \frac{1}{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi}$ . Тут в нас  $k \geq 1$ .

Оскільки кількість  $t_k$  нескінченна, то має знайтися інтервал  $\left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]$ , який містить хоча б дві

точки формату  $t_k$ . Тобто тут будуть точки  $t_k, t_m \in \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]$ , де припустимо  $1 \leq k < m$ . Звідси

випливає, що  $\frac{1}{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi} > \frac{1}{\left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi} > \frac{1}{\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi}$ . Знову за теоремою Коші про середнє,

знайдеться точка  $t$  між  $t_k$  та  $t_m$ , для якої  $\gamma_1(t) = \frac{1}{\left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi}$ . Але тоді

$|\gamma_2(t_k) - \gamma_2(t)| = |1 - (-1)| = 2$ , при цьому  $|t_k - t| \leq \frac{1}{N} < \delta$  – суперечність!

Тим не менш, існує критерій, для якого зв’язність та лінійна зв’язність – це однакові речі, просто треба додати децю.

**Proposition 3.2.8** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір.

$X$  – лінійно зв’язний  $\iff \begin{cases} X \text{ – зв’язний} \\ \text{кожна точка } X \text{ має хоча б один окіл, який є лінійно зв’язний} \end{cases}$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Уже доводили, що із лінійної зв’язності випливає зв’язність. Друга умова виконується, бо

кожна точка  $x \in X$  містить окіл  $X$ , який є лінійно зв'язним.

⇐ Дано:  $\begin{cases} X - \text{зв'язний} \\ \text{кожна точка } X \text{ має хоча б один окіл, який є зв'язний шляхом} \end{cases}$ .

Зафіксуємо  $x \in X$ . Розглянемо множину  $U = \{y \in X : \text{існує шлях між } x \text{ та } y\}$ . Хочемо довести, що  $U$  є відкритою та замкнутою одночасно: таким чином, оскільки  $X$  зв'язна, то  $U = X$  (бо  $x \in U$ ), а це буде означати, що між двома довільними точками знайдеться шлях; а тому  $X$  буде лінійно зв'язним.

Отже, нехай  $y \in U$ , тобто існує шлях між  $x$  та  $y$ . За умовою, для точки  $y$  можна взяти окіл  $W_y$ , який є лінійно зв'язним. Тоді для кожної точки  $w \in W_y$  існує шлях між  $y$  та  $w$ . Якщо склеїти два шляхи, отримаємо шлях між  $x$  та  $w$ . Тож  $w \in U$ . Таким чином,  $W_y \subset U \implies U$  – відкрита.

Тепер нехай  $y \in X \setminus U$ . За умовою, для точки  $y$  можна взяти окіл  $W_y$ , який є лінійно зв'язним. Значить,  $W_y \subset X \setminus U$ . Якщо припустити, що це не так, то знайдеться точка  $w \in W_y \cap U$ ; значить, існує шлях між  $x, w$  та шлях між  $w, y$  – отримаємо шлях між  $x, y$ , але тоді  $y \in U$  – суперечить умові. Отже,  $X \setminus U$  – відкрита, тобто  $U$  – замкнена. ■

**Lemma 3.2.9** Задані  $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$  – топологічні простори та  $f: X \rightarrow Y$  – неперервне. Відомо, що  $X$  – лінійно зв'язний. Тоді  $f(X)$  – також лінійно зв'язний.

**Proof.**

Нехай  $y, y' \in f(X)$ . Тоді  $y = f(x), y' = f(x')$  для  $x, x' \in X$ . Оскільки  $X$  – лінійно зв'язний, то існує шлях  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  між  $x, x'$  в просторі  $X$ . Тоді  $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow Y$  – шлях між  $y, y'$  в просторі  $Y$ . ■

**Proposition 3.2.10** Задані  $(X, \tau_1)$  та  $(Y, \tau_2)$  – два лінійно зв'язних топологічних простори. Тоді  $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$  – також лінійно зв'язний.

**Proof.**

Нехай  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ . Оскільки  $X, Y$  – лінійно зв'язні, то існують шляхи:  $\gamma_1$  між  $x, x'$  в  $X$ ;  $\gamma_2$  між  $y, y'$  в  $Y$ . Тож  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2): [0, 1] \rightarrow X \times Y$  задає шлях між  $(x, y), (x', y')$  уже в  $X \times Y$ . ■

### 3.3 Компоненти зв'язності та лінійної зв'язності

Задано  $(X, \tau)$  – непорожній топологічний простір. Задамо **відношення зв'язності**:

$$x \sim y \iff \exists C \subset X, C - \text{зв'язна} : x, y \in C$$

**Lemma 3.3.1** Відношення зв'язності задає відношення еквівалентності.

**Proof.**

I. Рефлексивність. Беремо  $\{x\} \subset X$ , що є зв'язною, тоді  $x, x \in \{x\}$ , тобто  $x \sim x$ .

II. Симетричність. Миттєво видно з означення.

III. Транзитивність. Маємо  $x \sim y, y \sim z$ , тобто існують множини  $C, D \subset X$ , що є зв'язними та  $x, y \in C, y, z \in D$ . Зауважимо, що  $C \cup D \subset X$  буде також зв'язною, причому  $x, z \in C \cup D$ . Отже,  $x \sim z$ . ■

Клас еквівалентності називають **компонентом зв'язності**  $X$ .

**Proposition 3.3.2** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір та відношення зв'язності. Тоді:

- 1) кожний компонент зв'язності множини  $X$  – зв'язний;
- 2) кожний компонент зв'язності множини  $X$  – максимальний серед інших зв'язних підпросторів;
- 3) найбільший зв'язний підпростір  $X$  – компонент зв'язності.

Отже, компоненти зв'язності топологічного простору – найбільші зв'язні підпростори.

**Proof.**

Доведемо кожний пункт окремо.

1) Нехай  $C$  – компонент зв'язності  $X$ . Оскільки це клас еквівалентності, то  $C = [x]$ . Оберемо довільний  $y \in C$ , тоді  $x \sim y$ , тобто існує зв'язна підмножина  $D_y \subset X$ , для якої  $x, y \in D_y$ . Зауважимо, що для всіх  $y \in C$  ми маємо  $D_y \subset C$ , оскільки для кожного  $z \in D_y$  ми маємо  $z \sim x$ , тобто  $z \in C$ . Значить,  $C = \bigcup_{y \in C} D_y$ . Всі  $D_y$  зв'язні, тож об'єднання буде також зв'язним.

2) Нехай  $C$  – компонент зв'язності  $X$ .

Припустимо, що існує  $D \subset X$  – такий зв'язний підпростір, що  $D \supset C$ . Тобто існує ще більша множина. Маємо  $C = [x]$ . Зауважимо, що  $D \subset C$ , адже при  $z \in D$  маємо  $x \in C \subset D$ , тобто  $x \sim z$  (за означенням  $\sim$ ). Тобто  $z \in C$ . Таким чином,  $D = C$ .

3) Нехай  $C$  – найбільший зв'язний підпростір  $X$ . У нас точно  $C \neq \emptyset$ , тож оберемо точку  $x \in C$ . Для кожного  $y \in C$  ми маємо  $x \sim y$ , бо  $C \ni x, y$  та є зв'язним. Значить,  $C \subset [x]$ . Із іншого боку,  $[x]$  – зв'язний за 1), тоді за максимальністю  $C$ , маємо  $C = [x]$ .

Усі пункти доведені. ■

**Proposition 3.3.3** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір.

$X$  – зв'язний  $\iff X$  містить лише один компонент зв'язності.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $X$  – зв'язний. Тоді дана множина є компонентом зв'язності  $X$ . Дійсно,  $X \subset X, X$  – зв'язна та  $x, y \in X$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $X$  має лише один компонент зв'язності. Даний компонент зв'язності дорівнює  $X$ . Кожний компонент зв'язності – зв'язний, тобто  $X$  – зв'язний. ■

**Proposition 3.3.4** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір. Тоді кожний компонент зв'язності – замкнена множина.

**Proof.**

Нехай  $C$  – компонент зв'язності  $X$ . За **Lm. 3.1.9**, маємо  $\text{Cl}(C)$  – зв'язна множина та  $\text{Cl}(C) \supset C$ . Оскільки  $C$  – максимальна зв'язна множина, то звідси  $C = \text{Cl}(C)$ , що гарантує замкненість. ■

**Example 3.3.5** Компонентами зв'язності  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  будуть  $(-\infty, 0)$  та  $(0, +\infty)$ .

**Definition 3.3.6** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір.

Простір називається **цілком незв'язним**, якщо

кожний компонент зв'язності – одноточкова множина.

Еквівалентно кажучи, якщо кожний зв'язний підпростір має рівно один елемент.

**Example 3.3.7** Ми знаємо, що дискретний простір – зв'язний, тільки якщо це простір з однієї точки. Оскільки кожний підпростір дискретного простору – дискретний, то єдині зв'язні підпростори – ці, що з одним елементом. Отже, дискретний простір – цілком незв'язний.

**Example 3.3.8**  $\mathbb{Q}$  – цілком незв'язна множина (яка не є дискретною, бо  $\{0\}$  не відкрита).

Нехай  $x, y \in \mathbb{Q}$  при  $x \neq y$ , тоді звідси  $x \not\sim y$ . Дійсно, ми можемо обрати ірраціональне число  $u \in \mathbb{R}$  між  $x, y$ , а потім якщо  $C \subset \mathbb{Q}$  містить  $x, y$ , ми матимемо неперетинні непорожні відкриті підмножини  $(-\infty, u) \cap C$  та  $C \cap (u, +\infty)$ , об'єднання якого дає  $C$ . Тоді  $C$  – незв'язна.

## 4 Лема Урисона

### 4.1 Корисні леми

**Lemma 4.1.1** Задано  $(X, \tau)$  – топологічний простір. Для всіх  $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  задамо відкриті множини  $V_r \subset X$ , для яких виконується  $\text{Cl}(V_r) \subset V_{r'}$  при  $r < r'$ . Тоді існує неперервна функція  $f: X \rightarrow [0, 1]$ , для якої  $f(x) = 0, x \in V_0$  та  $f(x) = 1, x \notin V_1$ .

**Proof.**

Визначимо функцію  $f: [0, 1]$  ось таким чином:  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin V_1 \\ \inf_{x \in V_r} \{r\}, & x \in V_1 \end{cases}$ .

Зауважимо, що в нашому випадку, що при  $x \in V_0$  маємо  $f(x) = 0$ . Дійсно, оскільки  $x \in V_0$ , то звідси  $x \in V_r, \forall r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ , найменше можливе значення – це нуль. Тож звідси  $f(x) = 0$ .

Для доведення неперервності ми спочатку розглянемо сім'ю  $\mathcal{S} = \bigcup_{a \in [0, 1]} \{[0, a), (a, 1]\}$ . Вона буде

утворювати передбазу топології  $[0, 1]$ . Це випливає з того факту, що  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{a, b \in \mathbb{R}} \{(-\infty, a), (b, +\infty)\}$

утворює передбазу топології  $\mathbb{R}$ , а також з того факту, що  $[0, 1]$  – топологічний підпростір  $\mathbb{R}$ .

Нам залишилося перевірити два прообрази для кожного  $a \in [0, 1]$ .

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup_{r < a} V_r.$$

Дійсно, маємо  $x \in f^{-1}([0, a)) \iff f(x) < a \iff \inf_{x \in V_r} \{r\} < a \iff x \in V_r$  для деякого  $r < a$ .

Ми отримали, що  $f^{-1}([0, a))$  – відкрита як зліченне об'єднання відкритих.

$$f^{-1}((a, 1]) = \bigcup_{r > a} (X \setminus \text{Cl}(V_r)). \quad (\text{TODO: додумати}). \quad \blacksquare$$

**Lemma 4.1.2** Задано  $(X, \tau)$  – нормальний топологічний простір. Припустимо, що  $A$  – замкнена та  $U$  – відкрита, де  $A \subset U$ . Тоді існує  $V$  – відкрита множина, для якої  $A \subset V, \text{Cl}(V) \subset U$ .

Тобто між замкнутою та відкритою множинами можна підібрати проміжну відкриту множину, яка містить замкнену, а замикання міститься в відкритій.

**Proof.**

Оберемо  $A, X \setminus U$  – обидва замкнені множини. За нормальністю, існують відкриті множини  $V, W$ , що неперетинні, для яких  $V \supset A, W \supset X \setminus U$ . Тобто  $V \supset A$  та  $X \setminus W \subset U$ . Із того, що  $V, W$  – неперетинні, тобто  $V \cap W = \emptyset$ , випливає  $V \subset X \setminus W$ . Маємо ланцюг  $A \subset V \subset X \setminus W \subset U$ . Оскільки  $V \subset X \setminus W$ , то тоді й  $\text{Cl}(V) \subset \text{Cl}(X \setminus W) = X \setminus W$ . Власне, звідси довели:  $A \subset V, \text{Cl}(V) \subset U$ .  $\blacksquare$

### Theorem 4.1.3 Лема Урисона

Задано  $(X, \tau)$  – нормальний топологічний простір та  $A, B$  – замкнені та неперетинні. Тоді існує неперервна функція  $f: X \rightarrow [0, 1]$ , для якої  $f(x) = 0, x \in A$  та  $f(x) = 1, x \in B$ .

**Proof.**

Ідея доведення полягає в наступному: ми хочемо побудувати відкриті множини  $V_r \subset X, r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ , що задовольняє таким вимогам:

- 1)  $A \subset V_0$ ;
- 2)  $B \subset X \setminus V_1$ ;
- 3)  $r < r' \implies \text{Cl}(V_r) \subset V_{r'}$ .

Оскільки  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  – зліченна множина, то ми маємо послідовність  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$  різних раціональних чисел. Не втрачаючи загальності,  $r_1 = 1, r_2 = 0$ , а всі решта  $0 < r_n < 1$ .

*База індукції* (їх будуть дві): треба побудувати  $V_{r_1} = V_1$  та  $V_{r_2} = V_0$ . Покладемо  $V_1 = X \setminus B$  – уже відкрита. Оскільки  $A \subset X, V_1 \subset X$  – одна замкнена, інша відкрита, то за другою лемою, існує відкрита множина  $V_0$ , для якої  $A \subset V_0$  та  $\text{Cl}(V_0) \subset V_1$ . Уже маємо  $V_{r_1}, V_{r_2}$ , які задовольняють вимогам 1), 2), 3).

Для всіх інших  $V_{r_n}$  нам достатньо буде довести 3).

*Припущення індукції:*  $V_{r_3}, \dots, V_{r_n}$  побудовані так, що задовольняють нашим умовам вище.

*Крок індукції:* побудуємо  $V_{r_{n+1}}$ . Із наших послідовностей  $r_1, r_2, \dots, r_n$  оберемо два якнайближчих числа  $r_i, r_j$ , щоб  $r_i < r_{n+1} < r_j$ . Нам достатньо довести, що  $\text{Cl}(V_{r_i}) \subset V_{r_{n+1}}, \text{Cl}(V_{r_{n+1}}) \subset V_{r_j}$ .

Зауважимо, що  $\text{Cl}(V_{r_i})$  та  $V_{r_j}$  – відповідно замкнена та відкрита множини. Тоді за другою лемою, існує відкрита множина (яку як раз-таки позначимо й за  $V_{r_{n+1}}$ ), для якої справджуються ці два

вкладення.

Мі доведено.

Значить, за першою лемою, існує неперервна функція  $f: X \rightarrow [0, 1]$ , для якої  $f(x) = 0, x \in V_0$  та  $f(x) = 1, x \notin V_1$ . За умовами 1), 2), отримаємо  $f(x) = 0, x \in A$  та  $f(x) = 1, x \in B$ . ■

**Remark 4.1.4** Справедливе й зворотне твердження. Маємо  $(X, \tau)$  та  $A, B$  – довільні замкнені та неперетинні, для яких завжди існує неперервна функція  $f: X \rightarrow [0, 1]$ , для якої  $f(x) = 0, x \in A$  та  $f(x) = 1, x \in B$ . Тоді  $X$  – нормальний простір.

**Proof.**

Припустимо, що  $A, B$  – замкнені та неперетинні множини. Тоді існує  $f: X \rightarrow [0, 1]$ , що неперервна та задовільняє іншим умовам. Зауважимо, що  $A \subset f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$  та  $B \subset f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ . Ці прообрази відкриті в силу неперервності, а також неперетинні в силу неперетинностей цих інтервалів. Тобто ми довели означення нормальності. ■

## 4.2 Функціональна збіжність

**Definition 4.2.1** Задані  $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$  – топологічні простори та  $\{f_n, n \geq 1\}$ ,  $f_n: X \rightarrow Y$  – функціональна послідовність.

Послідовність  $\{f_n\}$  **збігається поточково** до функції  $f: X \rightarrow Y$ , якщо

$$\forall x \in X : \{f_n(x)\} \subset Y \text{ збігається до } f(x).$$

**Remark 4.2.2** Якщо  $f_n \rightarrow f$  поточково та  $f_n: X \rightarrow Y$  – неперервні, то не обов'язково  $f: X \rightarrow Y$  буде неперервною.

*Контрприклад дивіться в мат. аналізі II.*

**Definition 4.2.3** Задані  $(X, \tau), (Y, \rho)$  – топологічний та метричний простори та  $\{f_n, n \geq 1\}$ ,  $f_n: X \rightarrow Y$  – функціональна послідовність.

Послідовність  $\{f_n\}$  **збігається поточково** до функції  $f: X \rightarrow Y$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall x \in X : \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

**Proposition 4.2.4** Задані  $(X, \tau), (Y, \rho)$  – топологічний та метричний простори. Відомо, що  $\{f_n\}$ ,  $f_n: X \rightarrow Y$  – збіжна рівномірно. Тоді  $\{f_n\}$  – збіжна поточково.

**Proof.**

Нехай  $x \in X$ , також нехай  $B(f(x), \varepsilon)$  – відкритий окіл  $f(x)$ . Тоді за нашим  $\varepsilon > 0$  (в силу рівномірної неперервності)  $\exists N : \forall n \geq N : \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ , тобто звідси  $f_n(x) \in B(f(x), \varepsilon)$ . ■

**Remark 4.2.5** Зворотне твердження не працює.

*Контрприклад дивіться в мат. аналізі II.*

**Proposition 4.2.6** Задані  $(X, \tau), (Y, \rho)$  – топологічний та метричний простори. Відомо, що  $\{f_n\}$ ,  $f_n: X \rightarrow Y$  – збіжна рівномірно та всі  $f_n$  – неперервні. Тоді  $f$  – неперервне.

**Proof.**

TODO: довести. ■

## Використані джерела

1. Tom Leinster, General Topology, 2014-2015