

Зміст

1	Диференціальні рівняння першого порядку	2
1.1	Основні означення	2
1.2	Деякі типи рівнянь першого порядку	2
1.2.1	Рівняння з відокремлювальними змінними	2
1.2.2	Однорідне рівняння	3
1.2.3	Лінійне рівняння	4
1.2.4	Рівняння Бернуллі	5
1.2.5	Рівняння, що можна звести до однорідного	6
1.3	Задача Коші	7
2	Диференціальні рівняння n-го порядку	9
2.1	Основні означення	9
2.2	Деякі типи рівнянь, що допускають зниження порядку	9
2.2.1	Рівняння, в якій немає залежності від y в правій частині	9
2.2.2	Рівняння, в якій немає залежності від x в правій частині	10
2.2.3	Рівняння, в якій лише залежність від похідної на два порядки нижче за похідну в лівій частині	10
2.3	Задача Коші	10
3	Лінійні диференціальні рівняння	12
3.1	Однорідне рівняння	13
3.2	Неоднорідне рівняння	17
3.3	Однорідне рівняння з постійними коефіцієнтами	19
3.4	Неоднорідне рівняння з постійними коефіцієнтами	22
4	Диференціальні рівняння, що не потрапили	23
4.1	Рівняння $y' = f(ax + by + c)$	23
4.2	Квазіоднорідні рівняння	23
4.3	Лінійне рівняння методом Ейлера	24
4.4	Рівняння Рікатті	24
4.5	Канонічний вигляд рівняння Рікатті	25
4.6	Спеціальні рівняння Рікатті	26
4.7	Диференціальні рівняння в симетричній формі	27
4.7.1	Рівняння в повних диференціалах	27
4.7.2	Інтегровальний множник	28

1 Диференціальні рівняння першого порядку

1.1 Основні означення

Definition 1.1.1 Задана область $D \subset \mathbb{R}^2$ – відкрита та однозв'язна; функція $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Диференціальним рівнянням першого порядку називається таке рівняння:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

Definition 1.1.2 Розв'язком рівняння (1) називається функція $y = \varphi(x)$, що визначений та диференційований на відкритому інтервалі $I \subset \mathbb{R}$, графік якої міститься в області D та задовольняє рівнянню (1).

Definition 1.1.3 Графіком розв'язку $y = \varphi(x)$ називають інтегральною кривою.

Example 1.1.4 Задане диференціальне рівняння: $y' = \frac{y}{x}$. Розв'язком буде функція $\varphi(x) = Cx$, причому вона задається на:

$I = (0, +\infty)$, якщо $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$;

$I = (-\infty, 0)$, якщо $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$.

Геометричний зміст

Якщо $y = \varphi(x)$ – розв'язок рівняння (1), то $k = \frac{d\varphi(x)}{dx}$ – кутовий коефіцієнт до графіку функції $y = \varphi(x)$ в точці x .

Remark 1.1.5 Розв'язки рівняння (1) іноді зручно розглядати як $x = \psi(y)$. Тоді диференціальне рівняння (1) записують так:

$$x' = \frac{1}{f(x, y)}$$

Remark 1.1.6 У загальному випадку розв'язок рівняння (1) може розглядатись як неявна функція $F(x, y) = 0$. Тоді рівняння (1) записують так:

$$dy - f(x, y)dx = 0$$

Definition 1.1.7 Рівнянням Пфаффа називають ось таке диференціальне рівняння:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

Definition 1.1.8 Задана область $D \subset \mathbb{R}^2$ – відкрита та однозв'язна; точка $(x_0, y_0) \in D$.

Задачею Коші з початковою умовою (x_0, y_0) називається система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Розв'язком задачі Коші називають розв'язок $y = \varphi(x)$ першого рівняння, для якого $\varphi(x_0) = y_0$.

Example 1.1.9 Маємо задачі Коші $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$. Для неї існує єдиний розв'язок $y = \frac{x^2}{2}$ на $I = \mathbb{R}$.

1.2 Деякі типи рівнянь першого порядку

1.2.1 Рівняння з відокремлювальними змінними

Розглянемо ось таке диференціальне рівняння:

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0,$$

Ми припускаємо, що функції $M_1, N_1, f_1 \in C(I_1)$ та функції $M_2, N_2, f_2 \in C(I)$. Також будемо розглядати лише такі функції, де $M_2 \neq 0, N_1 \neq 0$.

Із урахуванням вимог, диференціальне рівняння перепишеться таким чином:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy.$$

Далі проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx = - \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy.$$

Нехай в обох частинах рівності ми знайшли первісні $F_1(x), F_2(y)$. Тоді розв'язок задається неявно таким чином:

$$F_1(x) = -F_2(y) + C.$$

При деяких $x_* \in I_1, y_* \in I_2$ таких, що $M_2(y_*) = 0, N_1(x_*) = 0$, ці точки будуть відкинуті. Тобто розв'язок задається на меншому інтервалі.

До речі, початкове диференціальне рівняння можна записати іншим чином:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y),$$

$$\text{де } f_1(x) = \frac{M_1(x)}{M_2(x)}, \quad f_2(y) = \frac{N_1(y)}{N_2(y)}.$$

Example 1.2.1 Розв'язати диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = 2x \cos^2 y$.

Розглянемо окремо, коли $\cos^2 y = 0$. Тоді $y_* \equiv \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ – розв'язок.

Тепер випадок $\cos^2 y \neq 0$. Тому ми поділимо на $\cos^2 y$ – отримаємо:

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = 2x dx$$

Інтегруємо обидві частини – маємо:

$\operatorname{tg} y = x^2 + C$ на інтервалі $I = \mathbb{R} \setminus \{y_*\}$ – розв'язок. Можна записати розв'язок в іншому вигляді:
 $y = \arctg(x^2 + C) + \pi m, m \in \mathbb{Z}$.

1.2.2 Однорідне рівняння

Definition 1.2.2 Функція $f(x, y)$ називається **однорідною**, якщо

$$\forall t \neq 0 : f(tx, ty) = f(x, y)$$

Example 1.2.3 Зокрема функція $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ – однорідна, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{t^2 x^2 + t^2 y^2}{t^2 xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = f(x, y).$$

Proposition 1.2.4 Функція $f(x, y)$ – однорідна $\iff \exists F : f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$.

Proof.

\Leftarrow Дано: $\exists F : f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$. Тоді $f(tx, ty) = F\left(\frac{ty}{tx}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right) = f(x, y)$.

Отже, $f(x, y)$ – однорідна.

\Rightarrow Дано: $f(x, y)$ – однорідна. Тоді $f(x, y) = f\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = f\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{y}{x}\right) \stackrel{f(tx, ty) = f(x, y)}{=} f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Тому оберемо функцію $F(z) = f(1, z)$, що й завершує доведення. ■

Тепер розглянемо класичне диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' = f(x, y)$$

Проте цього разу $f(x, y)$ – однорідна функція.

Скористаємось наступною заміною: $y = xz$, де $z = z(x)$.

Якщо знайти похідну, то отримаємо $y' = z + xz'$. Тоді наше початкове рівняння матиме вигляд:

$$z + xz' = f(x, xz) \stackrel{f - \text{однорідна}}{=} f(1, z) \stackrel{\text{позн.}}{=} g(z).$$

$$xz' = g(z) - z.$$

$$z' = \frac{1}{x}(g(z) - z).$$

Прийшли до рівняння з відокремлювальними змінними, якщо позначити $f_1(x) = \frac{1}{x}$ та $f_2(z) = (g(z) - z)$. Таке рівняння ми вже навчилися розв'язувати. Коли завершимо розв'язок, то робимо зворотну заміну: $z = \frac{y}{x}$.

Example 1.2.5 Розв'язати рівняння: $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Можна зауважити, що $\frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{x+y}{x-y}$. Тобто ця функція – однорідна. Тому робимо заміну: $y = xz, z = z(x) \implies y' = z + xz'$.

Підставивши цю заміну в рівняння, отримаємо таке:

$$z + xz' = \frac{1+z}{1-z} \implies xz' = \frac{z^2+1}{1-z} \implies \frac{dx}{x} = \frac{1-z}{z^2+1} dz.$$

$$\ln|x| + C = \arctg z - \frac{1}{2} \ln(z^2+1) \cdot 2.$$

$$\ln x^2 + \ln(z^2+1)C' = 2 \arctg z.$$

Повернемо все як було, взявши зворотну заміну $z = \frac{y}{x}$. Тоді отримаємо розв'язок:

$$2 \arctg \frac{y}{x} = \ln C \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1.2.3 Лінійне рівняння

Definition 1.2.6 Розглянемо ось таке диференціальне рівняння:

$$y' + a(x)y = b(x),$$

де $a, b \in C(I)$. Це називається **лінійним рівнянням**.

При $b(x) \equiv 0$ таке рівняння називають **однорідним**. В іншому випадку – **неоднорідним**.

Розв'язок однорідного диференціального рівняння

Ми розглянемо рівняння $y' + a(x)y = 0$. Насправді, це – рівняння з відокремленими змінними. Розв'яжемо її:

$$\frac{dy}{y} = -a(x) dx.$$

$$\ln|y| = - \int a(x) dx + \ln C \text{ або } y \equiv 0, \text{ при цьому стала } C > 0.$$

Якщо проекспоненціювати рівняння, отримаємо наступне: $y = Ce^{-\int a(x) dx}$, причому цього разу $C \in \mathbb{R}$ в силу модуля та нульового розв'язку.

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

Для такого рівняння існують кілька способів. Розглянемо кожний окремо.

I. *Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих)*.

Ми маємо рівняння $y' + a(x)y = b(x)$. Спочатку ми розв'яжемо те саме рівняння тільки в однорідному вигляді, тобто $y' + a(x)y = 0$. Ми вже знайшли його розв'язок, це в нас $y_{\text{hom}} = Ce^{-\int a(x) dx}$. Метод варіації сталих полягає в наступному: розглянемо $y = C(x)e^{-\int a(x) dx}$. Тобто ми замість сталої C поставили функцію C , що буде неперервно-диференційована. Підставимо його в неоднорідне рівняння – отримаємо:

$$C'(x)e^{-\int a(x) dx} - C(x)e^{-\int a(x) dx}a(x) + a(x)C(x)e^{-\int a(x) dx} = b(x).$$

$$C'(x)e^{-\int a(x) dx} = b(x).$$

$$C'(x) = b(x)e^{\int a(x) dx}.$$

$$C(x) = \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx + D, \text{ де } D \in \mathbb{R}.$$

Знайшли функцію $C(x)$, яку можна підставити. Власне, $y = C(x)e^{-\int a(x) dx}$ задає розв'язок.

Example 1.2.7 Розв'язати рівняння: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ методом Лагранжа.

Тут буде демонструватись ті самі кроки. Спочатку знайдемо загальний однорідний розв'язок:

$$y' + 2xy = 0 \implies \frac{dy}{y} = -2x dx \implies \ln|y| = -x^2 + C \implies y_{\text{hom}} = Ce^{-x^2}.$$

Задамо новий розв'язок $y = C(x)e^{-x^2}$ та підставимо в початкове неоднорідне рівняння:
 $C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}.$

$$C'(x) = x \implies C(x) = \frac{x^2}{2} + D.$$

Остаточно отримаємо, що:

$$y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + D \right) = e^{-x^2} D + e^{-x^2} \frac{x^2}{2}.$$

II. Метод Бернуллі.

Ми маємо рівняння $y' + a(x)y = b(x)$. Проведемо таку заміну:

$y = uv$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$. $y' = u'v + v'u$.

Підставивши ці дві заміни, отримаємо наступне:

$$u'v + v'u + a(x)uv = b(x) \implies u'v + u(v' + a(x)v) = b(x).$$

Далі ми оберемо таку функцію v , щоб $v' + a(x)v = 0$. Це ніщо інше як однорідне рівняння. Її розв'язок вже знаємо: $v = e^{-\int a(x) dx}$. Нам буде достатньо взяти один з розв'язків. Підставимо це рівняння в наше неоднорідне рівняння:

$$-e^{-\int a(x) dx} \cdot u' = b(x).$$

$$u' = -b(x)e^{\int a(x) dx}.$$

$$u = -\int b(x)e^{\int a(x) dx} + C.$$

$$\text{Загалом отримали розв'язок } y = uv = e^{-\int a(x) dx} \left(C - \int b(x)e^{\int a(x) dx} \right).$$

Виглядає, ніби розв'язок інший, проте все нормально. Розв'язки будуть двома способами одні й ті самі.

Example 1.2.8 Розв'язати рівняння: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ методом Бернуллі.

Проводимо заміну: $y = uv$, тут $u = u(x)$, $v = v(x)$; тоді звідси $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2} \implies u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}.$$

Оберемо таку функцію v , щоб $v' + 2xv = 0$. Якщо розв'язати її, отримаємо $v = e^{-x^2}$. Тоді

$$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2} \implies u' = x \implies u = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{Разом отримаємо наступне: } y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + C \right) = e^{-x^2} C + e^{-x^2} \frac{x^2}{2}.$$

1.2.4 Рівняння Бернуллі

Definition 1.2.9 Розглядується ось таке диференціальне рівняння:

$$y' + a(x)y = b(x)y^\lambda,$$

де $a, b \in C(I)$, а також $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Це називається **рівнянням Бернуллі**.

Remark 1.2.10 При $\lambda = 0$ рівняння буде лінійним. При $\lambda = 1$ рівняння буде з відокремленими змінними. Ми їх вже вміємо розв'язувати, тому такі λ я викинув.

Зауважимо, що коли $\lambda > 0$, то $y \equiv 0$ буде також розв'язком.

Далі ділимо обидві частини на y^λ – отримаємо:

$$y'y^{-\lambda} + a(x)y^{-\lambda+1} = b(x).$$

Проведемо ось таку заміну:

$$z = y^{-\lambda+1}, \text{ де } z = z(x). \quad z' = (-\lambda + 1)y^{-\lambda}y'.$$

Підставивши ці заміни, отримаємо, насправді кажучи, лінійне рівняння, яке вміємо робити:

$$\frac{z'}{1-\lambda} + a(x)z = b(x).$$

Після розв'язку даного рівняння проводимо всі можливі зворотні заміни.

Example 1.2.11 Розв'язати рівняння: $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$. Зауважимо, що це справді рівняння

Бернуллі: тут $\lambda = 2$. Тоді $y \equiv 0$ – один з розв'язів. Далі поділимо на y^2 :

$$y'y^{-2} + \frac{y^{-1}}{x+1} + 1 = 0.$$

Проводимо заміну: $z = y^{-1} \implies z' = -y^{-2}y'$. Підставимо її:

$$-z' + \frac{z}{x+1} + 1 = 0.$$

Отримали стандартне лінійне рівняння. Якщо розв'язати методами вище, отримаємо:

$$z = \frac{x+1}{2} + \frac{C}{x+1}.$$

Зробивши зворотню заміну, отримаємо наступне:

$$z = y^{-1} = \frac{x+1}{2} + \frac{C}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + 2C}{2(x+1)}.$$

$$\text{Остаточно: } y = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2 + 2C} \text{ або } y \equiv 0.$$

1.2.5 Рівняння, що можна звести до однорідного

Нехай задане ось таке диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

Оскільки ми "хочемо" звести це рівняння до однорідної, то нам необхідно перетворити цю дріб на наступний вигляд:

$$Y' = \frac{\alpha_1X + \beta_1Y}{\alpha_2X + \beta_2Y}$$

Можна компоненти дробу розглянути як два рівняння прямої $\begin{cases} \alpha_1X + \beta_1Y = 0 \\ \alpha_2X + \beta_2Y = 0 \end{cases}$ та зауважити, що в них існує єдиний розв'язок $(0, 0)$.

В нашому конкретному випадку $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$. Система матиме єдиний розв'язок за умо-

вою, що $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Скажімо (x_0, y_0) – наш розв'язок. Тепер для однорідного вигляду я хочу таку заміну на x та y закласти, щоб згодом вони перетнулися в точку $(0, 0)$.

Тоді проводиться ось така заміна:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \implies \begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases} \implies \frac{dY}{dX} = Y'.$$

Отримали рівняння, яку ми "захотіли". Якщо погратись з алгеброю, то буде саме такий вираз:

$$Y' = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}.$$

А далі це однорідне рівняння, яке ми навчилися розв'язувати.

Example 1.2.12 Розв'язати рівняння $y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$.

Одразу зауважу, що $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, тож наш спосіб спрацює. Знайдемо точку перетину цих прямих:

$$\begin{cases} -x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Тепер проведемо заміну: } \begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \implies \begin{cases} dX = dx \\ dY = dy \end{cases}.$$

$$Y' = \frac{2Y - X}{2X - Y}.$$

Отримали однорідне рівняння. Якщо розв'язати стандартним способом, отримаємо:

$$CX^2 = \frac{\frac{Y}{X} - 1}{(\frac{Y}{X} + 1)^3} = \frac{YX^2 - X^3}{(Y + X)^3}.$$

$$C = \frac{Y - X}{(Y + X)^3}.$$

Проведемо зворотню заміну та отримаємо остаточну відповідь:

$$C = \frac{y - x - 3}{(y + x - 1)^3}.$$

1.3 Задача Коші

Definition 1.3.1 Задана область $D \subset \mathbb{R}^2$ та функція $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Така функція задовольняє умові Ліпшиця відносно y , якщо

$$\exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Proposition 1.3.2 Заданий прямокутник $\Pi = I_a \times I_b \subset \mathbb{R}^2$. Відомо, що функція $f(x, y)$ має частинну похідну f'_y , яка обмежена в D . Тоді f задовольняє умові Ліпшиця в D відносно змінної y , причому $L = \sup_{(x,y) \in D} |f'_y(x, y)|$.

Proof.

Зафіксуємо довільне x . За теоремою Лагранжа, $\exists \xi \in (y_1, y_2) : f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y(x, \xi) \cdot (y_1 - y_2)$.

$$\text{Тоді } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f'_y(x, \xi)| |y_1 - y_2| \leq \sup_{(x,y) \in D} |f'_y(x, y)| |y_1 - y_2|.$$

Покладемо $L = \sup_{(x,y) \in D} |f'_y(x, y)|$ — отримали умову Ліпшиця відносно y . ■

Насправді, таке твердження уже було в математичному аналізі першого семестру, коли перелічували наслідки з теорем Лангранжа. Тому тут не новина.

А тепер розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

де функція $f: \Pi = I_a \times I_b \rightarrow \mathbb{R}$. У нашому випадку $I_a = [x_0 - a, x_0 + a]$, $I_b = [y_0 - b, y_0 + b]$.

Наша головна мета: дізнатись, чи буде розв'язок задачі Коші єдиним взагалі і за якими умовами

Lemma 1.3.3 Функція $y(x)$ — розв'язок задачі Коші $\iff y(x)$ задовольняє інтегральному рівнянню $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$.

Proof.

\Rightarrow Дано: $y(x)$ — розв'язок задачі Коші, тобто

$$y'(t) = f(t, y(t)) \implies \int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \implies y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

\Leftarrow Дано: $y(x)$ — розв'язок інтегрального рівняння. Продиференціюємо з обох сторін:

$$y'(x) = 0 + f(x, y(x)) = f(x, y(x)).$$

Більш того, $y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t)) dt = y_0$. Отримали, що $y(x)$ — розв'язок нашої задачі Коші. ■

Ця лема знадобиться, оскільки розв'язок задачі Коші $y_*(x)$ ми будемо знаходити як границю рівномірно збіжної послідовності функцій $\{y_n(x), n \geq 1\}$ так, що:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$y_0(x) \equiv y_0.$$

Theorem 1.3.4 Теорема Пікара

Задана функція $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $f \in C(\Pi)$ та задовольняє умові Ліпшиця відносно y . Тоді задача Коші містить єдиний розв'язок $y_*(x)$ на інтервалі $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$.

Proof.

I. Існування.

Доведення існування розіб'ємо на чотири основні кроки. Доведемо їх.

1) Всі y_n знаходяться в прямокутнику $I_h \times I_b \subset \Pi$.

Тобто хочемо показати, що $\forall n \geq 1 : \forall x \in I_h : |y_n(x) - y_0| \leq b$. Доведення буде за МІ.

$$\text{База індукції: } n = 1 \implies |y_1(x) - y_0(x)| = \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt - y_0 \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \right| \leq \boxed{}$$

Оскільки $f \in C(\Pi)$, то вона взагалі є обмеженою, тому $\exists M = \max_{(x,y) \in \Pi} |f(x,y)|$.

$$\boxed{\leq} M|x - x_0| \leq Mh \leq M \frac{b}{M} = b.$$

Припущення індукції: умова виконується для фіксованого n .

Крок індукції: перевіримо твердження для $n + 1$.

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_n(t))| dt \right| \boxed{\leq}$$

За припущенням МІ, y_n вже лежить в заданому прямокутнику. Тому $f(x, y_n(x))$ також обмежена.

$$\boxed{\leq} M|x - x_0| \leq Mh \leq M \frac{b}{M} = b.$$

Отже, всі y_n лежать в прямокутнику $I_h \times I_b$. МІ доведено.

2) *Послідовність $\{y_n(x), n \geq 1\}$ рівномірно збігається.*

Зауважимо, що $y_n(x) = y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x))$.

Розглянемо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k(x) - y_{k-1}(x))$. Спробуємо довести збіжність критерієм Ваєрштраса, тобто

ми оцінимо $|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \forall x \in I_h$ таким чином, щоб було число.

$$|y_1(x) - y_0(x)| \stackrel{1)}{\leq} M|x - x_0| = M \frac{|x - x_0|}{1!}.$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))| dt \right| \leq$$

$$\stackrel{\text{умова Лібшиця}}{\leq} \left| \int_{x_0}^x L|y_1(t) - y_0(t)| dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x LM|t - x_0| dt \right| = ML \frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

⋮

Методами МІ отримаємо таку оцінку $\forall k \geq 1$ та $\forall x \in I_h$:

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq ML^{k-1} \frac{|x - x_0|^k}{k!} \leq ML^{k-1} \frac{h^k}{k!}.$$

Отримаємо мажорантний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{h^k}{k!}$. Такий ряд буде збіжним. Дійсно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{h^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{(Lh)^k}{k!} = \frac{M}{L} (e^{Lh} - 1) - \text{збіжний}.$$

Отже, підсумовуючи, отримаємо, що $y_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} y_*(x)$.

3) $y_*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ також знаходиться в прямокутнику $I_h \times I_b$.

Згідно з 1), можемо отримати ось таку оцінку:

$$|y_*(x) - y_0| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) - y_0 \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n(x) - y_0) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n(x) - y_0| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b = b.$$

4) $y_*(x) \in C(\Pi)$ та є розв'язком задачі Коші.

Оскільки $y_0(x), f(x, y) \in C(\Pi)$, то $f(x, y_0(x)) \in C(\Pi)$. Тоді $y_1(x) \in C(\Pi)$, а методами МІ доведемо $y_n(x) \in C(\Pi)$. Нарешті, через рівномірну збіжність, $y_*(x) \in C(\Pi)$.

$$\begin{aligned} y_*(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \right) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(t)) dt = \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_*(t)) dt. \end{aligned}$$

Тоді за лемою, $y_*(x)$ – розв'язок задачі Коші.

II. Єдиність.

Припустимо, що існують два розв'язки задачі Коші: $y_*(x), y_{**}(x)$. Розглянемо функцію $z(x) = y_{**}(x) - y_*(x)$ та оцінимо її:

$$\begin{aligned} |z(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_{**}(t)) - f(t, y_*(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_{**}(t)) - f(t, y_*(t))| dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x L|y_{**}(t) - y_*(t)| dt \right| = \\ &= \left| \int_{x_0}^x L|z(t)| dt \right| \leq LM'|x - x_0| \leq LM'h. \end{aligned}$$

(TODO: дописати пруф.)

■

2 Диференціальні рівняння n -го порядку

2.1 Основні означення

Definition 2.1.1 Задана область $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – відкрита та однозв’язна; функція $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Диференціальним рівнянням n -го порядку називається таке рівняння:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3)$$

Definition 2.1.2 Розв’язком рівняння (3) називається функція $y = \varphi(x)$, що визначений та диференційований n разів на відкритому інтервалі $I \subset \mathbb{R}$, всі похідні якого містяться в області D та задовольняє рівнянню (3).

Example 2.1.3 Задане диференціальне рівняння: $y'' = e^x$. Розв’язком буде наступа функція $\varphi(x) = e^x + C_0x + C_1$ на інтервалі $I = \mathbb{R}$.

Definition 2.1.4 Задана область $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – відкрита, однозв’язна; точка $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$. Задачею Коші з початковою умовою $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ називається система рівнянь:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Розв’язком задачі Коші називають розв’язок $y = \varphi(x)$ першого рівняння, для якого $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Example 2.1.5 Маємо задачу Коші $\begin{cases} y'' = e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$. Уже отримали, що $y = e^x + C_0x + C_1$. Тоді якщо

знайти всі похідні та підставити значення, то отримаємо:

$$\begin{cases} e^0 + C_1 = 1 \\ e^0 + C_0 = 1 \end{cases} \implies C_0 = 0, C_1 = 0. \text{ Отже, } y = e^x - \text{розв’язок задачі Коші.}$$

2.2 Деякі типи рівнянь, що допускають зниження порядку

2.2.1 Рівняння, в якій немає залежності від y в правій частині

Розглянемо диференціальне рівняння такого типу:

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Це рівняння, де праворуч немає залежності від y . Для нього проводиться така заміна:

$$z(x) = y'(x) \implies y'' = z, \dots, y^{(n)} = z^{(n-1)}.$$

Отримаємо таке рівняння:

$$z^{(n-1)} = f(x, z, z', \dots, z^{(n-2)}).$$

Ну а далі як пощастить з типажом рівняння. Загального рецепту нема в даному випадку.

Також можемо розглянути рівняння такого типу:

$$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$$

Це рівняння, де праворуч нема залежності від $y, y', \dots, y^{(k)}$. Для нього проводиться така заміна: $z(x) = y^{(k)}(x)$.

Отримаємо таке рівняння:

$$z^{(n-k)} = f(x, z, z', \dots, z^{(n-k-1)}).$$

Аналогічно далі, як буде, як пощастить.

Example 2.2.1 Розв'язати рівняння $xy^{(4)} - y''' = 0$.

Проведемо заміну: $z = y''' \Rightarrow z' = y^{(4)}$. У результаті отримаємо:

$$xz' - z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow z = C_1 x$$

$$y''' = C_1 x \Rightarrow y'' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \Rightarrow y' = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 x + C_3 \Rightarrow y = C_1 \frac{x^4}{4!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 x + C_4.$$

Але C_1, C_2, C_3, C_4 – константи, тому можна записати іншим шляхом:

$$y = C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

2.2.2 Рівняння, в якій немає залежності від x в правій частині

Розглянемо диференціальне рівняння такого типу:

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Це рівняння, де праворуч нема залежності від x . Для нього проводиться така заміна:

$$y' = p(y).$$

Далі рахуємо другі, треті і т.д. похідні, але достатньо часто буде другої:

$$y'' = p'(y)y' = p'(y)p(y).$$

В результаті чого ми отримаємо рівняння від функції $p(y)$ $(n - 1)$ -го порядку.

Example 2.2.2 Розв'язати рівняння: $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$.

Проведемо заміну: $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'(y)y' = p'p$. Тоді отримаємо:

$$p'p = \frac{1}{4\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{dp}{dy} p = \frac{1}{4\sqrt{y}} \Rightarrow p dp = \frac{dy}{4\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{p^2}{2} = \frac{\sqrt{y}}{2} + C_1 \Rightarrow$$

$$p = \pm \sqrt{\sqrt{y} + C_1}$$

$$y' = \pm \sqrt{\sqrt{y} + C_1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}} = \pm dx \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{4}{3} \sqrt{(\sqrt{y} + C_1)^3} - 4C_1 \sqrt{\sqrt{y} + C_1} = C_2 \pm x$$

2.2.3 Рівняння, в якій лише залежність від похідної на два порядки нижче за похідну в лівій частині

Розглянемо диференціальне рівняння такого типу:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$$

Проведемо таку заміну:

$$z(x) = y^{(n-2)}(x).$$

Тоді буде таке рівняння:

$$z'' = f(z).$$

Домножимо обидві частини на $2z'$ і позначимо за $\int f(z) dz = F(z)$. Отримаємо:

$$2z'z'' = 2z'f(z)$$

$$((z')^2)' = (2F(z))'$$

$$(z')^2 = 2F(z) + C_1 \Rightarrow z' = \pm \sqrt{F(z) + C_1}.$$

Далі вже як піде.

Example 2.2.3 Розв'язати рівняння: $\varphi'' = -k \sin \varphi$, де $\varphi = \varphi(t)$

$$2\varphi'\varphi'' = -2k\varphi' \sin \varphi.$$

$$((\varphi')^2)' = 2k(\cos \varphi)'$$

$$(\varphi')^2 = 2k \cos \varphi + C_1$$

Нехай $C_1 = 0$ (для спрощення). Тоді:

$$\varphi' = \pm \sqrt{2k \cos \varphi} \Rightarrow \frac{d\varphi}{\sqrt{2k \cos \varphi}} = \pm dt \Rightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{2k}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}} + C_2.$$

2.3 Задача Коші

Definition 2.3.1 Задана область $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ та функція $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

Така функція **задовольняє умові Ліпшиця відносно** $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, якщо

$$\exists L > 0 : \left| f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}) \right| \leq L \left(|y_1 - y_2| + |y_1' - y_2'| + \dots + |y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}| \right)$$

Proposition 2.3.2 Заданий прямокутник $\Pi = I_a \times \Pi_b \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Відомо, що функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ має всі частинні неперервні похідні в Π . Тоді f задовольняє умові Ліпшиця, причому

$$L = \max\{L_1, L_2, \dots, L_{n-1}\}, \quad L_i = \sup_{(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})} \left| f'_{y^{(i-1)}}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \right|.$$

Proof.

Ми розглянемо функцію $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ таку, що

$$g(t) = f(x, (1-t)y_1 + ty_2, (1-t)y'_1 + ty'_2, \dots, (1-t)y_1^{(n-1)} + ty_2^{(n-1)})$$

Зокрема отримаємо:

$$g(0) = f(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)})$$

$$g(1) = f(x, y_2, y'_2, \dots, y_2^{(n-1)})$$

Частинні похідні неперервні, тому $g \in C^1([0, 1])$. За теоремою Лагранжа,

$\exists \xi \in (0, 1) : g(0) - g(1) = -g'(\xi)$, де в нашому випадку

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u^{(n-1)}} \frac{du^{(n-1)}}{dt} \quad \square$$

$$u = (1-t)y_1 + ty_2, \dots, u^{(n-1)} = (1-t)y_1^{(n-1)} + ty_2^{(n-1)}$$

$$\square \frac{\partial f}{\partial u}(y_2 - y_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u^{(n-1)}}(y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}).$$

Залишилось зробити оцінку:

$$\begin{aligned} |g(0) - g(1)| &= |g'(\xi)| \leq |L_1(y_2 - y_1) + \dots + L_{n-1}(y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)})| \leq \\ &\leq |L_1(y_2 - y_1)| + \dots + |L_{n-1}(y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)})| \leq L(|y_1 - y_2| + \dots + |y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}|). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Тепер розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

де функція $f: \Pi = I_a \times \Pi_b \rightarrow \mathbb{R}$. У нашому випадку $I_a = [x_0 - a, x_0 + a]$,

$$\Pi_b = [y_0 - b, y_0 + b] \times [y'_0 - b, y'_0 + b] \times \dots \times [y_0^{(n-1)} - b, y_0^{(n-1)} + b].$$

Theorem 2.3.3 Теорема Пікара

Задана функція $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $f \in C(\Pi)$ та задовольняє умові Ліпшиця відносно $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.

Тоді задача Коші містить єдиний розв'язок $y_*(x)$ на інтервалі $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$.

Доведення проводиться аналогічним чином, як з рівнянням першого порядку.

3 Лінійні диференціальні рівняння

Definition 3.0.1 n називається рівняння наступного вигляду:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$

Розв'язком називається функція $\varphi \in C^n(J)$, $J \subset I$, якщо вона задовольняє цьому рівнянню. Якщо $b(x) \equiv 0$, то рівняння називається **однорідним**. В інакшому випадку - **неоднорідним**.

Theorem 3.0.2 Задача Коші для лінійного диференціального рівняння містить єдиний розв'язок.

Proof.

Отже, є в нас задача Коші:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Доведення теореми буде посылатись на теорему Пікара в диф. рівнянні порядку n

Тому перше рівняння системи перепишемо в іншому вигляді:

$$y^{(n)} = b(x) - a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \dots - a_1(x)y' - a_0(x)y$$

Знайдемо всі її часткові похідні:

$$f'_y = -a_0(x), f'_{y'} = -a_1(x), \dots, f'_{y^{(n-1)}} = -a_{n-1}(x)$$

Всі вони є неперервними функціями на $\Pi = I_a \times \Pi_b$, тому що

$a_0, \dots, a_{n-1} \in C(I)$, $I_a \subset I$, $\Pi_b \subset \mathbb{R}^n$ - довільний паралелепіпед навколо точки умов Коші. Отже, функція під умовою Ліпшиця. А значить, спрацьовує теорема Пікара ■

Визначимо оператор $L: C^n(I) \rightarrow C(I)$ такий, що:

$$(Ly)(x) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

Тобто наше рівняння перепишеться як: $(Ly)(x) = b(x)$

Lemma 3.0.3 Множина $C^k(I)$ є лінійним простором, для якого:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x), \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lemma 3.0.4 Оператор L є лінійним

Proof.

Remark 3.0.5 $Ly \in C(I)$

Доведення безпосередньо за означенням:

$$\begin{aligned} L(y + z) &= (y + z)^{(n)} + a_{n-1}(x)(y + z)^{(n-1)} + \dots + a_1(x)(y + z)' + a_0(x)(y + z) = \\ &= y^{(n)} + z^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-1}(x)z^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_1(x)z' + a_0(x)y + a_0(x)z = \\ &= Ly + Lz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\alpha y) &= (\alpha y)^{(n)} + a_{n-1}(x)(\alpha y)^{(n-1)} + \dots + a_1(x)(\alpha y)' + a_0(x)(\alpha y) = \\ &= \alpha y^{(n)} + \alpha a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha a_1(x)y' + \alpha a_0(x)y = \alpha Ly \end{aligned}$$

Proposition 3.0.6 Множина розв'язків утворюють лінійний простор $= \ker L$

Впливає з означення ядра

Corollary 3.0.7 Якщо y_1, \dots, y_n - розв'язки, то $y = C_1y_1 + \dots + C_ny_n$ - розв'язок також

Тепер перейдемо до розв'язку рівнянь

3.1 Однорідне рівняння

Спробуємо розв'язати рівняння

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

де $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$

Нагадаємо:

Definition 3.1.1 Система функцій $\{f_1, \dots, f_n\} \subset C^k(I)$ називається:

- **лінійно НЕзалежними**, якщо із $\forall x \in I : c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$ випливає, що $c_1 = \dots = c_n = 0$
- **лінійно залежними**, якщо $\exists c_1, \dots, c_n : c_1^2 + \dots + c_n^2 \neq 0$, для яких $\forall x \in I : c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$

Definition 3.1.2 Задана система функцій $\{f_1, \dots, f_n\} \in C^{(n-1)}(I)$

Визначимо **детермінант Вронського** як функцію $W : I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$W[f_1, f_2, \dots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Example 3.1.3 Нехай є система $\{1, x, x^2, \dots, x^{k-1}\}$. Тоді

$$W[1, x, x^2, \dots, x^{k-1}](x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{k-1} \\ 0 & 1! & 2x & \dots & (k-1)x^{k-2} \\ 0 & 0 & 2! & \dots & (k-1)(k-2)x^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (k-1)! \end{vmatrix} =$$

$$= 1!2! \dots (k-1)!$$

Example 3.1.4 Дуже важливий приклад

Нехай є система $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$

Тут $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ та всі різні. Тоді маємо:

$$W[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}](x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \equiv$$

Виносимо $e^{\lambda_1 x}$ з першої колони, $e^{\lambda_2 x}$ з другої колони...

$$\equiv e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} D_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Останній множник - детермінант Вандеморда. Із курсу лінійної алгебри,

$$D_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

Тому остаточно матимемо:

$$W[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}](x) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

Proposition 3.1.5 Якщо $\{f_1, \dots, f_n\} \subset C^{(n-1)}(I)$ - лінійно залежні над \mathbb{R} , то $W[f_1, \dots, f_n](x) \equiv 0$

Proof.

Система - л.з., тобто при c_1, \dots, c_n , що не всі нулі:

$c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$ Продиференціюємо рівняння $(n-1)$ разів. Тоді отримається система:

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \dots + c_n f_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Знову з курсу лінійної алгебри, система має нетривіальний розв'язок \iff детермінант коефіцієнтів $= 0$

У нас c_1, c_2, \dots, c_n - нетривіальні, тому матриця коефіцієнтів

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W[f_1, f_2, \dots, f_n](x) \equiv 0$$

■

Corollary 3.1.6 Якщо $\exists x_0 : W[f_1, \dots, f_n](x_0) \neq 0$, то $\{f_1, \dots, f_n\}$ - лінійно НЕзалежна
Тут записано просто обернене твердження

Повертаючись до **Ех. 3.1.3.**, обидва детермінанта Вронського ненулеві. Тому система $\{1, x, \dots, x^{k-1}\}$ та $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ - лінійно НЕзалежні

Remark 3.1.7 Якщо $W[f_1, \dots, f_n] \equiv 0$, то $\{f_1, \dots, f_n\}$ може бути лінійно НЕзалежною

Example 3.1.8 Розглянемо систему $\{x^2, x|x|\} \subset C'((-2, 2))$

$$W[x^2, x|x|](x) = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 2x^2|x| - 2x^2|x| \equiv 0$$

Але за означенням л.н.з.,

$$\forall x \in (-2, 2) : C_1 x^2 + C_2 x|x| = 0 \stackrel{x=1, x=-1}{\implies} \begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \implies C_1 = C_2 = 0$$

Тому система - лінійно НЕзалежна

Theorem 3.1.9 Задані $y_1, \dots, y_n \in \ker L$ - тобто розв'язки нашого однорідного рівняння
 $\{y_1, \dots, y_n\}$ - л.н.з. над $\mathbb{R} \iff W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0$

Proof.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0$. Тоді за **Сrl 3.1.4.** система $\{y_1, \dots, y_n\}$ - л.н.з.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{y_1, \dots, y_n\}$ - л.н.з.

!Припустимо, що $\exists x_0 \in I : W[y_1, \dots, y_n](x_0) = 0$. Тоді система рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

має нетривіальні розв'язки

Нехай $c_1 = c_1^0, \dots, c_n = c_n^0$

Розглянемо функцію:

$$y(x) = c_1^0 y_1(x) + \dots + c_n^0 y_n(x)$$

Якщо продиференціювати $(n-1)$ раз та всюди $x = x_0$, то можна отримати, що:

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Таким чином отримана задача Коші:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Проте зауважимо, що $z(x) \equiv 0$ - також розв'язок задачі Коші. Тому в силу єдиності рішення задачі Коші, маємо, що $y(x) \equiv 0$

Отже, для $c_1 = c_1^0, \dots, c_n = c_n^0$ отримали: $c_1^0 y_1(x) + \dots + c_n^0 y_n(x) = 0$. Це є означенням л.з., що суперечить нашим припущенням.

Висновок: $W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0$

■

Theorem 3.1.10 Позначу через y_1, y_2, \dots, y_n наступні розв'язки задачі Коші:

$$y_1 : \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad y_2 : \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad \dots y_n : \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Тоді $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ утворюють лінійний базис в просторі розв'язків нашого рівняння

Proof.

Базис означає лінійну незалежність та презентацію кожного елемента в лінійну комбінацію. Перевіримо на л.н.з.:

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Отже, за **Crl. 3.1.4.**, система - л.н.з.

Доведемо, що будь-який розв'язок $y = y_1 c_1 + \dots + y_n c_n$. Коротше, треба знайти c_1, \dots, c_n і довести, що вони єдині

Диференціюємо $(n-1)$ разів і вставляємо x_0 кожного разу. Тоді

$c_1 = y(x_0), \dots, c_n = y^{(n-1)}(x_0)$. Ці константи виражаються єдиним чином

Отже, $\exists! c_1, \dots, c_n : y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$

Висновок: $\{y_1, \dots, y_n\}$ - базис ■

Corollary 3.1.11 $\dim L = n$

Corollary 3.1.12 Будь-яка л.н.з. система з n розв'язків утворює базис в просторі його рішень

Definition 3.1.13 Лінійним базисом $\{y_1, \dots, y_n\}$ в просторі розв'язків рівняння називають **фундаментальною системою розв'язків**

В той же час $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ - **загальний розв'язок**

Lemma 3.1.14 Якщо $a_{ij} \in C'(I)$, $j = \overline{1, n}$, то

$$\begin{aligned} & \left(\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} \right)' = \\ & = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \\ & + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Proof.

Доведення проводимо за означенням:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1\sigma(1)}(x) \cdot a_{2\sigma(2)}(x) \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}(x)$$

Тут S_n - група перестановок множини $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$

$\sigma(k) \in A_n$ - значення перестановки σ на елементі $k \in A_n$

$$\epsilon_{\sigma} = \begin{cases} 1, \text{ парна перестановка} \\ -1, \text{ непарна перестановка} \end{cases}$$

А тепер візьмемо похідну від правої частини:

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1\sigma(1)}(x) \cdot a_{2\sigma(2)}(x) \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}(x) \right)' = \\
& \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a'_{1\sigma(1)}(x) \cdot a_{2\sigma(2)}(x) \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}(x) + \\
& + \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1\sigma(1)}(x) \cdot a'_{2\sigma(2)}(x) \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}(x) + \\
& + \dots + \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1\sigma(1)}(x) \cdot a_{2\sigma(2)}(x) \cdot \dots \cdot a'_{n\sigma(n)}(x) \stackrel{def}{=} \\
& = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \\
& + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Theorem 3.1.15 Формула Остроградського-Якобі

Задана $\{y_1, \dots, y_n\}$ - фундаментальна система розв'язків нашого рівняння та якась т. $x_0 \in I$. Тоді

$$W[y_1, \dots, y_n](x) = W[y_1, \dots, y_n](x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_{n-1}(t) dt}$$

Proof.

Знайдемо похідну від детермінанта Вронського (**Lm. 3.1.9.**):

$$\begin{aligned}
W'[y_1, \dots, y_n](x) &= \begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \\
&+ \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) & \dots & y''_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

Тут всі детермінанти, окрім останнього, онуляються через однакові рядки

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \stackrel{=}{=}$$

Оскільки y_1, \dots, y_n - розв'язки, то ми можемо виразити старші подіхні:

$$y_i^{(n)} = -a_0(x)y_j - a_1(x)y'_j - \dots - a_{n-1}(x)y_j^{(n-1)}, j = \overline{1, n}$$

Підставимо в наш детермінант і зробимо такі кроки:

- помножимо перший рядок на a_0 і додамо до останнього рядка;

- помножимо другий рядок на a_1 і додамо до останнього рядка;

...

Нарешті, винесемо $-a_{n-1}$. Отримаємо:

$$\stackrel{=}{=} -a_{n-1}(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = -a_{n-1}(x) W[y_1, \dots, y_n](x)$$

Отже, отримали таку тотожність:

$$W'[y_1, \dots, y_n](x) = -a_{n-1}(x)W[y_1, \dots, y_n](x)$$

А це - диф. рівняння з відокремленими змінними, яку ми розв'яжемо:

$$\frac{dW[y_1, \dots, y_n](t)}{dt} = -a_{n-1}(t)$$

$$\frac{dW[y_1, \dots, y_n](t)}{W[y_1, \dots, y_n](t)} = -a_{n-1}(t) dt$$

Інтегруємо на інтервалі $[x, x_0]$:

$$\ln \left| \frac{W[y_1, \dots, y_n](x)}{W[y_1, \dots, y_n](x_0)} \right| = - \int_{x_0}^x a_{n-1}(t) dt$$

$$W[y_1, \dots, y_n](x) = W[y_1, \dots, y_n](x_0) e^{- \int_{x_0}^x a_{n-1}(t) dt}$$

Взагалі, тут мав би бути знак \pm , але якщо підставити $x = x_0$, то залишиться лише + ■

Метод розв'язку лінійних однорідних диференціальних рівнянь найчастіше другого порядку саме базується на теоремі Остроградського-Якобі. Спочатку ми вгадуємо перший частковий розв'язок, а далі за формулою шукаємо другий частковий, а згодом можна отримати загальний розв'язок

Example 3.1.16 Розв'язати рівняння: $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$

Буду розглядувати на інтервалі $x > -\frac{1}{2}$

$$y'' + \frac{4x}{2x+1}y' - \frac{4}{2x+1}y = 0$$

Можна вгадати, що $y_1 = x$ - частковий розв'язок

Тоді за формулою Остроградського-Якобі:

$$\begin{vmatrix} x & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = W_0 e^{- \int_1^x \frac{4t}{2t+1} dt}. \text{ Тут } x_0 = 1$$

$$- \int_1^x \frac{4t}{2t+1} dt = \dots = -2x + \ln(2x+1) + 2 - \ln 3$$

$$\Rightarrow W_0 e^{- \int_1^x \frac{4t}{2t+1} dt} = W_0 e^{\ln(2x+1)} e^{-2x} e^{2-\ln 3} = W_1 (2x+1) e^{-2x}$$

Таким чином за нашою формулою:

$$xy_2' - y_2 = W_1 (2x+1) e^{-2x}$$

Ну а тут стандартне диф. рівняння першого порядку. Поділимо на x^2 і зауважимо:

$$\frac{y_2'x - y_2}{x^2} = W_1 \frac{2^{-2x}2x + e^{-2x}}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{y_2}{x} \right)' = -W_1 \left(\frac{e^{-2x}}{x} \right)'$$

$$\frac{y_2}{x} = -W_1 \frac{e^{-2x}}{x}$$

$$y_2 = -W_1 e^{-2x}$$

Отже, остаточно загальний розв'язок:

$$y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$$

3.2 Неоднорідне рівняння

Спробуємо розв'язати рівняння

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$

Theorem 3.2.1 Про структуру розв'язків

y - розв'язок неоднорідного рівняння $\iff y = y_{g.h.} + y_{p.inh.}$

Де $y_{g.h.}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння, а $y_{p.inh.}$ - частковий розв'язок неоднорідного рівняння

Proof.

\Rightarrow Дано: y - розв'язок неоднорідного рівняння

Розглянемо $y_0 = y - y_{p.inh.}$. Для цього маємо:

$$Ly_0 = L(y - y_{p.inh.}) = Ly - Ly_{p.inh.} = b(x) - b(x) = 0$$

$$\Rightarrow y_0 = y_{g.h.} \Rightarrow y = y_{g.h.} + y_{p.inh.}$$

⊞ Дано: $y = y_{g.h.} + y_{p.inh.}$

Тоді $Ly = L(y_{g.h.} + y_{p.inh.}) = Ly_{g.h.} + Ly_{p.inh.} = b(x) \Rightarrow y$ - розв'язок неоднорідного рівняння ■

Corollary 3.2.2 Якщо y_1 - розв'язок $Ly_1 = b_1(x)$, а y_2 - розв'язок $Ly_2 = b_2(x)$, то $y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$ - розв'язок $Ly = \beta_1 b_1(x) + \beta_2 b_2(x)$

Для неоднорідних рівнянь існує поки єдиний загальний вихід, як розв'язати рівняння

Метод варіації довільних сталих

Спочатку знайдемо $y_{g.h.}$ з нашого рівняння, тобто:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Якщо вважати, що y_1, \dots, y_n - фундаментальна система розв'язків, то

$$y_{g.h.} = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

Наш розв'язок ми будемо шукати в такому вигляді:

$$y = c_1(x)y_1 + \dots + c_n(x)y_n$$

А тут $c_1(x), \dots, c_n(x)$ - такі функції, задовільняючи наступним умовам:

$$\begin{cases} c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 \dots + c'_n(x)y_n = 0 \\ c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2 \dots + c'_n(x)y'_n = 0 \\ \vdots \\ c'_1(x)y_1^{(n-2)}(x) + c'_2(x)y_2^{(n-2)}(x) \dots + c'_n(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \end{cases}$$

Використовуючи всі наші умови, ми підставимо наше y до неоднорідного рівняння. Але перед цим знайдемо похідні:

$$y' = c'_1(x)y_1(x) + c_1(x)y'_1(x) + \dots + c'_n(x)y_n(x) + c_n(x)y'_n(x) \stackrel{\text{умова}}{=} \\ = c_1(x)y'_1(x) + \dots + c_n(x)y'_n(x)$$

$$y'' = c'_1(x)y'_1(x) + c_1(x)y''_1(x) + \dots + c'_n(x)y'_n(x) + c_n(x)y''_n(x) \stackrel{\text{умова}}{=} \\ = c_1(x)y''_1(x) + \dots + c_n(x)y''_n(x)$$

$$\dots \\ y^{(n-1)} = c'_1(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c'_n(x)y_n^{(n-2)}(x) + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) \stackrel{\text{умова}}{=} \\ = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Легко побачити, що завдяки системі зверху, ми можемо функції c_1, \dots, c_n сприйняти як константу, що виноситься з похідної

$$y^n = c'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \dots + c'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) + c_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Підставляємо в неоднорідне рівняння:

$$\begin{aligned} & \left(c'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) + c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(n)}(x) \right) + \\ & + a_{n-1}(x) \left(c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) \right) + \dots + \\ & + a_1(x) (c_1(x)y'_1(x) + \dots + c_n(x)y'_n(x)) + \\ & + a_0(x) (c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)) = b(x) \end{aligned}$$

І перегрупуємо ці доданки:

$$\begin{aligned} & c_1(x) \left(y_1^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'_1(x) + a_0(x)y_1(x) \right) + \\ & + c_2(x) \left(y_2^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'_2(x) + a_0(x)y_2(x) \right) + \dots + \\ & + c_n(x) \left(y_n^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_n^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'_n(x) + a_0(x)y_n(x) \right) + \\ & + c'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) = b(x) \end{aligned}$$

Але оскільки y_1, \dots, y_n - фундаментальна система розв'язків, тобто

$$Ly_i = 0, i = \overline{1, n}, \text{ то залишається:}$$

$$c'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) = b(x)$$

Дане рівняння додамо до нашої системи.

В результаті

$$\begin{cases} c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 \cdots + c'_n(x)y_n = 0 \\ c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2 \cdots + c'_n(x)y'_n = 0 \\ \vdots \\ c'_1(x)y_1^{(n-2)}(x) + c'_2(x)y_2^{(n-2)}(x) \cdots + c'_n(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) = b(x) \end{cases}$$

Розв'язуючи відносно $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$, отримаємо, що вона має єдиний розв'язок, оскільки детермінант матриці коефіцієнтів - детермінант Вронського - ненулевий, згідно з тим, що y_1, \dots, y_n - фундаментальна система

Залишилось їх проінтегрувати:

$$c_1(x) = \int_{x_0}^x c'_1(t) dt + \tilde{c}_1, \dots, c_n(x) = \int_{x_0}^x c'_n(t) dt + \tilde{c}_n$$

Та підставити в наш початковий y :

$$y = \left(\int_{x_0}^x c'_1(t) dt \right) y_1 + \cdots + \left(\int_{x_0}^x c'_n(t) dt \right) y_n + \tilde{c}_1 y_1 + \cdots + \tilde{c}_n y_n =$$

$$= y_{p.inh.} + y_{g.h.} \iff y - \text{розв'язок нашого неоднорідного рівняння}$$

Отже, враховуючи всі наші умови:

$y = c_1(x)y_1 + \cdots + c_n(x)y_n$ - розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

Example 3.2.3 Розв'язати рівняння: $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x - 1$

Тут фундаментальна система розв'язків: $y_1 = e^x, y_2 = x$

Запишемо загальний розв'язок:

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)x$$

Тут $c_1(x), c_2(x)$ - такі функції, задовільняючи умовам:

$$\begin{cases} c'_1(x)e^x + c'_2(x)x = 0 \\ c'_1(x)e^x + c'_2(x) = x - 1 \end{cases}$$

Розв'язки системи: $c'_1(x) = xe^{-x}, c'_2(x) = -1$

$$\Rightarrow c_1(x) = \cdots = -xe^{-x} - e^{-x} + \tilde{c}_1$$

$$\Rightarrow c_2(x) = -x + \tilde{c}_2$$

Отже,

$$y = e^x(-xe^{-x} - e^{-x} + \tilde{c}_1) + x(-x + \tilde{c}_2) = -x - 1 + \tilde{c}_1 e^x - x^2 + x\tilde{c}_2$$

$$\Rightarrow y = \tilde{c}_1 e^x + \tilde{c}_2 x - (x^2 + 1)$$

3.3 Однорідне рівняння з постійними коефіцієнтами

Спробуємо розв'язати рівняння

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

де $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

Деяка інформація про комплекснозначні функції в полі дійсних чисел

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$f(x) = u(x) + iv(x), \text{ де } u(x) = \operatorname{Re} f(x), v(x) = \operatorname{Im} f(x)$$

Похідна від цієї функції визначається таким чином:

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

Всі властивості похідних зберігаються для комплекснозначних функцій

Визначимо ще один оператор D - оператор диференціювання:

$$Df = f'$$

Тобто наше рівняння матиме вигляд:

$$Ly = D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1Dy + a_0Iy = 0$$

Розглянемо функцію $y = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}$. Підставимо в наше рівняння:

$$Le^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0e^{\lambda x} =$$

$$= e^{\lambda x} (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) = e^{\lambda x} P(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow Le^{\lambda x} = e^{\lambda x} P(\lambda) = 0 \iff P(\lambda) = 0$$

Definition 3.3.1 Характеристичним многочленом будемо називати вираз:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

З наших міркувань отримали, що:

Proposition 3.3.2 $e^{\lambda x}$ - корінь рівняння $\iff \lambda \in \mathbb{C}$ - корінь характеристичного полінома $P(\lambda) = 0$

I. Випадок різних (лише дійсних) коренів

Theorem 3.3.3 Система $\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_n x}\}$ є фундаментальною системою розв'язків. Причому $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ - різні корені характеристичного полінома

Proof.

Згідно з **Ех. 3.1.3.**, така система є лінійно НЕзалежною. Оскільки $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ - різні корені характеристичного полінома, то $e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_n x}$ - розв'язки нашого рівняння. Отже, за **Сrl. 3.1.7.(2)**, система є фундаментальною ■

Example 3.3.4 Розв'язати рівняння: $y'' - y = 0$

Запишемо характеристичний поліном:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$$

Звідси $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \xrightarrow{Th.3.3.I.} \{e^x, e^{-x}\}$ - фундаментальна система. Отже, $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

II. Випадок різних (можливо комплексних) коренів

Theorem 3.3.5 Система

$$\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_l x}\} \cup \{e^{\alpha_1 x} \cos \omega_1 x, e^{\alpha_1 x} \sin \omega_1 x, \dots, e^{\alpha_k x} \cos \omega_k x, e^{\alpha_k x} \sin \omega_k x\}$$

є фундаментальною системою розв'язків. Причому $\mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{R}$ та $\lambda_1 = \alpha_1 + i\omega_1, \dots, \lambda_k = \alpha_k + i\omega_k \in \mathbb{C}$ - різні корені характеристичного полінома

Proof.

До речі, якщо $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - корні характеристичного полінома, то (курс ліналу) $\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_k}$ - також є коренями

Отже, за умовою і **Prp. 3.3.2.**, фундаментальний розв'язок рівняння задається системою

$$\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_l x}, e^{\lambda_1 x}, e^{\overline{\lambda_1} x}, \dots, e^{\lambda_k x}, e^{\overline{\lambda_k} x}\}$$

Замінімо цю систему функцій наступною системою:

$$\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_l x}, \frac{e^{\lambda_1 x} + e^{\overline{\lambda_1} x}}{2}, \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\overline{\lambda_1} x}}{2i}, \dots, \frac{e^{\lambda_k x} + e^{\overline{\lambda_k} x}}{2}, \frac{e^{\lambda_k x} - e^{\overline{\lambda_k} x}}{2i}\}$$

Маємо права, оскільки від цього л.н.з. система не зміниться. В силу лінійності оператора L , вони теж будуть розв'язками. Більш того, за формулами Ейлера:

$$\frac{e^{\lambda_j x} + e^{\overline{\lambda_j} x}}{2} = e^{\alpha_j x} \cos \omega_j x$$

$$\frac{e^{\lambda_j x} - e^{\overline{\lambda_j} x}}{2i} = e^{\alpha_j x} \sin \omega_j x$$

Отримали, отримаємо бажану систему:

$$\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_l x}\} \cup \{e^{\alpha_1 x} \cos \omega_1 x, e^{\alpha_1 x} \sin \omega_1 x, \dots, e^{\alpha_k x} \cos \omega_k x, e^{\alpha_k x} \sin \omega_k x\}$$

Remark 3.3.6 Тут всього n функцій в системі: l - дійсних і $2k$ - комплексних. $l + 2k = n$

Example 3.3.7 Розв'язати рівняння: $y'' + y = 0$

Запишемо характеристичний поліном:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$$

Звідси $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \xrightarrow{Th.3.3.II.} \{\cos x, \sin x\}$ - фундаментальна система. Отже, $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

III. Випадок кратних (можливо комплексних) коренів

Theorem 3.3.8 Система

$$\bigcup_{j=1}^l \{e^{\mu_j x}, x e^{\mu_j x}, \dots, x^{s_j-1} e^{\mu_j x}\} \cup$$

$$\bigcup_{j=1}^k \{e^{\alpha_j x} \cos \omega_j x, e^{\alpha_j x} \sin \omega_j x, \dots, x^{r_j-1} e^{\alpha_j x} \cos \omega_j x, x^{r_j-1} e^{\alpha_j x} \sin \omega_j x\}$$

є фундаментальною системою розв'язків. Причому $\mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{R}$ з кратністю s_1, \dots, s_l та $\lambda_1 = \alpha_1 + i\omega_1, \dots, \lambda_k = \alpha_k + i\omega_k \in \mathbb{C}$ з кратністю r_1, \dots, r_k - різні корені характеристичного полінома

Proof.

Доведення дуже масивне. Тому розіб'ємо на 3 леми:

Lemma 3.3.9 Якщо $\lambda_j \in \mathbb{C}$ - корінь кратності s_j характеристичного полінома $P\lambda = 0$, то розв'язком нашого рівняння буде:

$$y = x^p e^{\lambda_j x}, \forall p \in \mathbb{N} : 0 \leq p < s_j$$

Proof.

Зазначимо, що справедлива така рівність:

$$D_\lambda^p e^{\lambda x} \Big|_{\lambda=\lambda_j} = \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^p e^{\lambda x} \Big|_{\lambda=\lambda_j} = x^p e^{\lambda_j x}$$

Отриманою функцією подіємо на оператор:

$$\begin{aligned} L \left(D_\lambda^p e^{\lambda x} \Big|_{\lambda=\lambda_j} \right) &= (D_x^n + a_{n-1} D_x^{n-1} + \dots + a_1 D_x + a_0 I_x) \left(D_\lambda^p e^{\lambda x} \Big|_{\lambda=\lambda_j} \right) = \\ D_\lambda^p D_x^n e^{\lambda x} &= D_x^n D_\lambda^p e^{\lambda x} \\ &= D_\lambda^p (P(\lambda) e^{\lambda x}) \Big|_{\lambda=\lambda_j} \stackrel{\text{пр. Лейбница}}{=} \sum_{q=0}^p C_p^q P^{(q)}(\lambda) (e^{\lambda x})^{(p-q)} \Big|_{\lambda=\lambda_j} = \sum_{q=0}^p C_p^q P^{(q)}(\lambda_j) \lambda_j^{p-q} e^{\lambda_j x} \end{aligned}$$

Оскільки λ_j - корінь кратності s_j , то з курсу ліналу,

$$P(\lambda_j) = \dots = P^{(s_j-1)}(\lambda_j) = 0, \text{ але } P^{(s_j)}(\lambda_j) \neq 0$$

Тому при $0 \leq p < s_j$ отримаємо, що:

$$\sum_{q=0}^p C_p^q P^{(q)}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow L(x^p e^{\lambda_j x}) = 0$$

Отже, $x^p e^{\lambda_j x}$ - розв'язки ■

Lemma 3.3.10 Система $\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{s-1} e^{\lambda x}\}$ є лінійно НЕзалежною над \mathbb{C} (для довільних j в нашому випадку)

Proof.

Припустимо, що ця система - л.з., тобто:

$$\exists C_0, \dots, C_{s-1} \in \mathbb{C} \text{ нетривіальні: } C_0 e^{\lambda x} + C_1 x e^{\lambda x} + \dots + C_{s-1} x^{s-1} e^{\lambda x} = 0$$

Звідси випливає, що:

$$e^{\lambda x} (C_0 + C_1 x + \dots + C_{s-1} x^{s-1}) = 0$$

Отримаємо, що права дужка має бути нулевою. Це означає, що система $\{1, x, \dots, x^{s-1}\}$ - л.з., що суперечить (в силу **Ех. 3.1.3.(1)**).

Тому $\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{s-1} e^{\lambda x}\}$ - л.н.з. ■

Lemma 3.3.11 Якщо $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ - різні комплексні числа з кратністю s_1, \dots, s_m , тоді система $\{e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{s_1-1} e^{\lambda_1 x}\} \cup \dots \cup \{e^{\lambda_m x}, x e^{\lambda_m x}, \dots, x^{s_m-1} e^{\lambda_m x}\}$ є лінійно НЕзалежною над \mathbb{C}

Proof.

Знову припустимо, що ця система - л.з., тобто:

$$\exists C_{pq} \in \mathbb{C} \text{ не всі нулі: } \sum_{p=1}^m \sum_{q=0}^{s_p-1} C_{pq} x^q e^{\lambda_p x} = 0$$

Перепозначу $\sum_{q=0}^{s_p-1} C_{pq} x^q = f_p(x)$. Тоді

$$f_1(x) e^{\lambda_1 x} + f_2(x) e^{\lambda_2 x} + \dots + f_m(x) e^{\lambda_m x} = 0$$

Через те, що не всі C_{pq} нулеві, то принаймні одна з $f_p(x)$ є ненулевою. Вважатимемо, що $f_1(x) \neq 0$

Поділимо рівняння на $e^{\lambda_m x}$, отримавши:

$$f_1(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x} + f_2(x) e^{(\lambda_2 - \lambda_m)x} + \dots + f_m(x) = 0$$

Продиференціюємо таку кількість разів, щоб позбутись від $f_m(x)$. Тут кожний доданок матиме наступний вираз:

$$\frac{d^l}{dx^l} \left(f_p(x) e^{(\lambda_p - \lambda_m)x} \right) = \sum_{q=0}^l C_l^q f_p^{(q)}(x) (\lambda_p - \lambda_m)^{l-q} e^{(\lambda_p - \lambda_m)x} \stackrel{\text{позн}}{=} f_p^{(l)}(x) e^{(\lambda_p - \lambda_m)x}$$

Зокрема для $k = 1$:

$$f_1^{(l)}(x) = \underbrace{f_1(x) (\lambda_1 - \lambda_m)^l}_{\neq 0} + \sum_{q=1}^l C_l^q f_1^{(q)}(x) (\lambda_1 - \lambda_m)^{l-q} e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x} \neq 0$$

Отримаємо, що:

$$f_1(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x} + f_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_m)x} + \dots + f_{m-1}(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x} = 0$$

Вийшла така ж сама тотожність по формі, що й з самого початку.

Якщо продовжити за МІ, то прийдемо до тотожності:

\vdots

$$f_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0$$

Але за умовою, $f_1(x) \neq 0$, що суперечить нашому припущенню ■

Ці 3 леми й завершують доведення теореми ■

Example 3.3.12 Розв'язати рівняння: $y^{(8)} + 8y^{(6)} + 16y^{(4)} = 0$ Запишемо характеристичний поліном:
 $P(\lambda) = \lambda^8 + 8\lambda^6 + 16\lambda^4 = 0$

Звідси:

$\lambda_1 = 0$ - кратність 4, тому тут система: $\{1, x, x^2, x^3\}$

$\lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$ - кратності 2, тому тут система: $\{\cos 2x, \sin 2x, x \cos 2x, x \sin 2x\}$

Отже, $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5 \cos x + C_6 \sin x + C_7x \cos x + C_8x \sin x$

3.4 Неоднорідне рівняння з постійними коефіцієнтами

Спробуємо розв'язати рівняння

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}, b \in C(I)$

В нашому випадку ми будемо розглядати $b(x) = e^{\sigma x}(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m)$. Тут $\sigma \in \mathbb{R}$, а також $=T_m(x)$

$b_m \neq 0$. І нехай характеристичний поліном $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$

Для правої частини існує 3 унікальних випадків

I. Нерезонансний випадок

Theorem 3.4.1 Якщо $P(\sigma) \neq 0$, то існує частковий розв'язок рівняння такого вигляду:

$$y_{p.inh.} = e^{\sigma x}(q_0 + q_1x + \dots + q_mx^m) = Q_m(x)$$

Proof.

За принципом суперпозиції, ми будемо мати, що:

$y_{p.inh.} = y_0 + \dots + y_m$, де

$$Ly_j = y_j^{(n)} + a_{n-1}y_j^{(n-1)} + \dots + a_1y_j' + a_0y_j = b_jx^je^{\sigma x}, j = \overline{0, m}$$

Розглянемо дію оператора $D_\sigma = \frac{d}{dx} - \sigma I$ на вираз $x^je^{\sigma x}$. Отримаємо:

$$D_\sigma^j(x^je^{\sigma x}) = j!e^{\sigma x} \text{ (можна самому переконатись)}$$

$$D_\sigma^{j+1}(x^je^{\sigma x}) = 0$$

Останній оператор ми застосуємо до обох частин рівняння:

$$D_\sigma^{j+1}(Ly) = b_j D_\sigma^{j+1}(x^je^{\sigma x}) = 0 - \text{однорідне лінійне рівняння } \square$$

Підставимо $y = e^{\lambda x}$

$$D_\sigma^{j+1}(Le^{\lambda x}) = D_\sigma^{j+1}(P(\lambda)e^{\lambda x}) = P(\lambda)(\lambda - \sigma)^{j+1}e^{\lambda x} = 0$$

Тоді характеристичний поліном для \square $P'(\lambda) = P(\lambda)(\lambda - \sigma)^{j+1} = 0$

Корені: $\sigma, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, кратності r_1, \dots, r_k . За умовою, $P(\sigma) \neq 0$, а тому $\sigma \neq \lambda_l, l = \overline{1, k}$.

Фундаментальна система: до цього + $\{e^{\sigma x}, xe^{\sigma x}, \dots, x^je^{\sigma x}\}$ ■

4 Диференціальні рівняння, що не потрапили

4.1 Рівняння $y' = f(ax + by + c)$

Маємо таке рівняння:

$$y' = f(ax + by + c)$$

Якщо $b = 0$, то тоді ми прийдемо до рівняння з відокремленими змінними
Робимо заміну

$$z(x) = ax + by + c$$

Тоді $z' = a + by'$

$$\Rightarrow \frac{z' - a}{b} = f(z)$$

$\Rightarrow z' = bf(z) + a$ - рівняння з відокремленими змінними...

Example 4.1.1 Розв'язати рівняння: $y' = (x + y + 1)^2$

Заміна: $z = x + y + 1 \Rightarrow z' = 1 + y'$

$$z' - 1 = z^2 \Rightarrow z' = z^2 + 1 \Rightarrow \frac{dz}{z^2 + 1} = dx \Rightarrow \arctg z = x + C$$

Проводимо зворотню заміну:

$$\arctg(x + y + 1) = x + C$$

4.2 Квазіоднорідні рівняння

Маємо стандартне диф. рівняння

$$y' = f(x, y)$$

І нехай додатково для функції $f(x, y)$ виконується така властивість

$$\exists \sigma \in \mathbb{R} : \forall t \neq 0 : f(tx, t^\sigma y) = t^{\sigma-1} f(x, y)$$

Якщо $\sigma = 1$, то ми повертаємось до однорідних рівнянь

Робимо заміну

$$y = z \cdot x^\sigma$$

Тоді $y' = z'x^\sigma + \sigma z x^{\sigma-1}$

$$\Rightarrow z'x^\sigma + \sigma z x^{\sigma-1} = f(x, z x^\sigma)$$

Оскільки маємо квазіоднорідне рівняння, то $f(x, z x^\sigma) = x^{\sigma-1} f(1, z)$

$$\Rightarrow z'x + \sigma z = f(1, z) \Rightarrow z' = \frac{f(1, z) - \sigma z}{x}$$

Це вже рівняння з відокремленими змінними

Example 4.2.1 Розв'язати рівняння $y' = y^2 + \frac{1}{4x^2}$

Перевірка на квазіоднорідність:

$$f(tx, t^\sigma y) = t^{2\sigma} y^2 + \frac{1}{4t^2 x^2} \stackrel{?}{=} t^{\sigma-1} \left(y^2 + \frac{1}{4x^2} \right)$$

$$\begin{cases} 2\sigma = \sigma - 1 \\ -2 = \sigma - 1 \end{cases}$$

Отже, маємо, що $\sigma = -1$

$$\text{Заміна: } y = zx^{-1} \Rightarrow y' = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = \frac{z^2}{x^2} + \frac{1}{4x^2} \Rightarrow z'x - z = z^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow z' = \frac{z^2 + z + \frac{1}{4}}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2}{x} \Rightarrow -\frac{1}{z + \frac{1}{2}} = \ln|x| + C$$

Проводимо зворотню заміну:

$$-\frac{2}{2xy + 1} = \ln|x| + C$$

Remark 4.2.2 Квазіоднорідні рівняння можуть скоротити область визначення. Наприклад, якщо $\sigma = \frac{1}{2}$, то ми маємо розв'язки лише для $x > 0$
Тоді можна застосувати заміну $x = -p$, коли $x < 0$

4.3 Лінійне рівняння методом Ейлера

Розглядується рівняння наступного вигляду:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Домножимо обидві частини рівняння на $e^{\int a(x) dx}$, маємо:

$$y' e^{\int a(x) dx} + a(x) y e^{\int a(x) dx} = b(x) e^{\int a(x) dx}$$

$$\left(y e^{\int a(x) dx} \right)' = b(x) e^{\int a(x) dx}$$

$$y e^{\int a(x) dx} = \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx + C$$

$$y = e^{-\int a(x) dx} \left(\int b(x) e^{\int a(x) dx} dx + C \right)$$

Example 4.3.1 Розв'язати рівняння: $y' - \frac{2y}{x} = 2x^3$

$$\text{Тут } a(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow \int a(x) dx = -2 \ln x = -\ln x^2$$

А далі множимо обидві частини рівняння на $e^{\int a(x) dx} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow \frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = 2x \Rightarrow \left(\frac{y}{x^2} \right)' = 2x \Rightarrow \frac{y}{x^2} = x^2 + C$$

$$\Rightarrow y = x^4 + Cx^2$$

4.4 Рівняння Рікатті

Розглянемо таке рівняння

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

де $P, Q, R \in C(I)$

Remark 4.4.1 При $P(x) \equiv 0$ маємо лінійне рівняння

При $R \equiv 0$ маємо рівняння Бернуллі, де $\lambda = 2$

При $P = Q = R = \text{const}$ маємо рівняння з відокремленими змінними

Проведемо заміну

$$y = z + y_{part}$$

де $z = z(x)$ - така функція, що зможе звести до рівняння Бернуллі, а y_{part} - якийсь частковий розв'язок

$$\Rightarrow y' = z' + y'_{part} = z' + P(x)y_{part}^2 + Q(x)y_{part} + R(x)$$

Підставимо це в наше рівняння:

$$z' + P(x)y_{part}^2 + Q(x)y_{part} + R(x) = P(x)(z + y_{part})^2 + Q(x)(z + y_{part}) + R(x)$$

Якщо трохи поскоротити, отримаємо таке рівняння:

$$z' = P(x)z^2 + (2P(x)y_{part} + Q(x))z$$

А це вже - рівняння Бернуллі з $\lambda = 2$...

Example 4.4.2 Розв'язати рівняння $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$

$$\text{Або } y' = -y^2 + 2xy + (5 - x^2)$$

Спробуємо вгадати розв'язок у вигляді $y_{part} = kx + b \Rightarrow y'_{part} = k$

$$\Rightarrow k = -(kx + b)^2 + 2x(kx + b) + (5 - x^2)$$

$$\Rightarrow k = -k^2x^2 - 2kxb - b^2 + 2kx^2 + 2bx + 5 - x^2$$

$$\Rightarrow (k^2 - 2k)x^2 + (2kb - 2b)x + (k + b^2) = -x^2 + 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k^2 - 2k = -1 \\ 2kb - 2b = 0 \\ k + b^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$$

Візьмемо $y_{part} = x + 2$

Заміна: $y = z + x + 2 \Rightarrow y' = z' + 1$

$$\Rightarrow z' + 1 = -(z + x + 2)^2 + 2x(z + x + 2) + 5 - x^2$$

$$\Rightarrow z' = -z^2 - 4z$$

$$\Rightarrow z' + 4z = -z^2 - \text{рівняння Бернуллі, } \lambda = 2$$

...

$$z = -\frac{4C'}{C' - e^{4x}}$$

Зворотня заміна:

$$y - x - 2 = -\frac{4C'}{C' - e^{4x}}$$

4.5 Канонічний вигляд рівняння Рікатті

Маємо таке рівняння

$$y' = y^2 + \tilde{Q}(x)$$

Виявляється, що будь-яке рівняння Рікатті можна звести до канонічного вигляду
Для цього проведемо заміну:

$$y = \alpha(x)z(x)$$

де $\alpha(x)$ - така функція, щоб коефіцієнт при z^2 був рівний 1

$$y' = \alpha'z + \alpha z'$$

$$\Rightarrow \alpha'z + \alpha z' = P(x)\alpha^2(x)z^2(x) + Q(x)\alpha(x)z(x) + R(x)$$

Поділимо на α та виразимо z'

$$z' = P\alpha z^2 + \left(Q - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)z + \frac{R}{\alpha}$$

$P\alpha = 1$ згідно з заміною

Візьмемо $\alpha(x) = \frac{1}{P(x)}$. Тоді наша перша заміна вже матиме вигляд:

$$y = \frac{z(x)}{P(x)}$$

Проведемо другу заміну

$$z = u(x) + \beta(x)$$

де $\beta(x)$ - така функція, щоб коефіцієнт при u був рівний 0

$$z' = u' + \beta'$$

$$\Rightarrow u' + \beta' = (u + \beta)^2 + \left(Q - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)(u + \beta) + \frac{R}{\alpha}$$

Виразимо u'

$$u' = u^2 + u\left(2\beta + Q - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) + \beta^2 + \left(Q - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)\beta + \frac{R}{\alpha} - \beta'$$

$$2\beta + Q - \frac{\alpha'}{\alpha} = 0 \text{ згідно з заміною}$$

$$\beta^2 + \left(Q - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)\beta + \frac{R}{\alpha} - \beta' = \tilde{Q}(x)$$

І нарешті, візьмемо $\beta = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - Q\right)$, де $\alpha = \frac{1}{P(x)}$

$$\Rightarrow u' = u^2 + \tilde{Q}(x) - \text{рівняння Рікатті в канонічному вигляді}$$

Example 4.5.1 Звести до канонічного рівняння Рікатті $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} + \frac{3}{x^2}$

$$P(x) = \frac{1}{x^2}, Q(x) = \frac{2}{x}, R(x) = \frac{3}{x^2}$$

Заміна 1: $y = \frac{z(x)}{P(x)} = x^2 z \Rightarrow y' = x^2 z' + 2xz$
 $\Rightarrow x^2 z' + 2xz = x^2 z^2 + 2xz + \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 z' = x^2 z^2 + \frac{3}{x^2}$
 $\Rightarrow z' = z^2 + \frac{3}{x^4}$ - канонічне рівняння

4.6 Спеціальні рівняння Рікатті

Маємо таке рівняння

$$y' + Ay^2 = Bx^m$$

де $A, B, m \in \mathbb{R}$

Remark 4.6.1 При $m = 0$ маємо рівняння з відокремленими змінними
 При $m = -2$ маємо квазіоднорідне рівняння, де $\sigma = -1$

Theorem 4.6.2 Спеціальне рівняння Рікатті є інтегрованим $\iff \frac{m}{2m+4} \in \mathbb{Z}$

Факт доволі складний

Розглянемо випадок, коли $\frac{m}{2m+4} \in \mathbb{Z}$

Зробимо заміну

$$y = \frac{z(x)}{x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} \\ \Rightarrow \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} + A \frac{z^2}{x^2} &= Bx^m \\ \Rightarrow z'x - z + Az^2 &= Bx^{m+2} \end{aligned}$$

Зробимо другу заміну

$$x^{m+2} = t$$

де t - невідома змінна

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dz}{dt} (m+2)x^{m+1} \\ \Rightarrow x \frac{dz}{dx} &= (m+2) \frac{dz}{dt} x^{m+2} = (m+2)t \frac{dz}{dt} \\ \Rightarrow (m+2)t \frac{dz}{dt} - z + Az^2 &= Bt \end{aligned}$$

$$t \frac{dz}{dt} - \frac{1}{m+2} z + \frac{A}{m+2} z^2 = \frac{Bt}{m+2}$$

Отримали рівняння Рікатті вигляду

$$t \frac{dz}{dt} + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t$$

В залежності від ситуації виконаємо одну з двох заміни

$$z(t) = \frac{t}{a + u(t)}, \alpha < -\frac{1}{2}$$

$$\text{де } a = \frac{1 + \alpha}{2}$$

Або

$$z(t) = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{t}{u(t)}, \alpha > -\frac{1}{2}$$

Такі заміни робимо стільки разів, скільки потрібно, поки не отримуюємо ще одне рівняння Рікатті

$$u't - \frac{1}{2}u + Du^2 = Ht$$

Зробимо останню заміну

$$u = v(t)\sqrt{t}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u' &= v' \sqrt{t} + \frac{v \sqrt{t}}{2} \\ \Rightarrow u' t \sqrt{t} + D v^2 t &= H t \\ v' \sqrt{t} &= H - D v^2 - \text{рівняння з відокремленими змінними} \end{aligned}$$

4.7 Диференціальні рівняння в симетричній формі

Маємо рівняння Пфаффа

$$M(x, y) dx = N(x, y) dy = 0$$

де $M, N: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2, M, N \in C(D)$, а також $|M(x, y)| + |N(x, y)| \neq 0$

Definition 4.7.1 Крива $x = x(t), y = y(t), t \in I$ є **розв'язком** заданого рівняння, якщо

$$\begin{aligned} x(t), y(t) &\in C'(I) \\ \forall t \in I : ((x(t), y(t)) &\in D \\ M(x(t), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Definition 4.7.2 Вираз $F(x, y, c) = 0$ задає **загальний розв'язок** заданого рівняння, якщо будь-який розв'язок кривої може бути представлений у такому вигляді

4.7.1 Рівняння в повних диференціалах

Definition 4.7.3 Рівняння Пфаффа називається **рівнянням в повних диференціалах**, якщо

$$\exists u(x, y) \in C'(D) : \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

Тоді рівняння прийме такий вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0 \iff du = 0 \iff u(x, y) = c$$

Theorem 4.7.4 Критерій рівняння в повних диференціалах

$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ - в повних диференціалах $\iff \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ Доведення див. в мат аналізі 3 семестр

Example 4.7.5 Розв'язати рівняння $(x^2 + y) dx + (x + y^2) dy = 0$

Оскільки $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$, то таке рівняння - в повних диференціалах

Отже, $\exists u(x, y) : \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$

$$\Rightarrow u(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y) = \int (x^2 + y) dx + \varphi(y) =$$

$$= \frac{x^3}{3} + yx + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx + \varphi(y) \right)$$

$$\Rightarrow x + y^2 = x + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^3}{3}$$

$$\text{Остаточно } u(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + C$$

4.7.2 Інтегровальний множник

Тепер розглянемо рівняння Пфаффа, але вже не в повних диференціалах

Проте завжди можна звести до повних диференціалах шляхом домноження на деяку неперервну функцію $\mu(x, y)$

Example 4.7.6 $y dx - x dy = 0$, не є рівнянням в повних диференціалах, тому що

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Проте якщо рівняння домножити на $\mu(x, y) = \frac{1}{y^2}$, то тепер

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

Definition 4.7.7 Функція $\mu(x, y)$ називається **інтегровальним множником**, якщо при множенні на рівняння Пфаффа ми отримуємо рівняння в повних диференціалах

З'ясуємо, як це знайти:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \iff \frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

Рівняння справа й дасть відповідь на те, який множник нам треба

Часткові випадки:

1. $\mu = \mu(x)$

$$\text{Тоді } \frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \iff \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\iff \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{1}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ Оскільки ліва функція лише залежить від x , то права частина рівняння водночас теж має лише залежати від x . Отже, $\mu(x)$ буде знайдено, інтегруючи це рівняння

2. $\mu = \mu(y)$

Аналогічним чином, не буду розписувати

Example 4.7.8 Розв'язати рівняння $(x^2 + y^2 + x) dx + y dy = 0$

Маємо, що $\frac{\partial M}{\partial x} = 2y, \frac{\partial N}{\partial x} = 0$

$$\text{Тоді } \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = 2 = \mu(x) \Rightarrow \exists \mu = \mu(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{1}{\mu(x)} = 2 \Rightarrow \mu = e^{2x}$$

Домножимо рівняння на інтегровальний множник:

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x) dx + e^{2x}y dy = 0$$

Тепер це - рівняння в повних диференціалах...

Рівняння Пфаффа також має множники $\mu = \mu(\omega(x, y))$ (наприклад, $\mu(x + y), \mu(xy), \mu(x^2 + y^2), \dots$), але то таке