# Зміст

# 1 Комплексні числа

## 1.1 Вступ

Комплексним числом будемо називати число такого формату:

$$a + ib$$

Тут $a, b \in \mathbb{R}$. А число $i$ називають **уявною одиницею** - це таке число, що

$$i^2 = -1$$

Множину комплексних чисел ми позначимо за $\mathbb{C}$.

### Коли комплексні числа рівні

Якщо у нас є два комплексних числа $a_1 + ib_1$ та $a_2 + ib_2$, то тоді

$$a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \iff \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

Інтуїтивне пояснення буде згодом, чому саме так.

### Основна арифметика

Ми можемо два комплексних числа довадати/віднімати, множити та ділити. Тобто якщо маємо $a_1 + ib_1$ та $a_2 + ib_2$ то
$(a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$

$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + a_1ib_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

Із діленням ситуація цікавіша. Для числа $z = a + bi$ введемо поняття **комплексно спряжене число** - це комплексне число такого формату:

$$\bar{z} = a - ib$$

**Example 1.1.1** Маємо $z = 3 + 4i$. Спряженим буде $\bar{z} = 3 - 4i$.

Якщо тепер перемножити стандартне комплексне число на його спряжене, то ми отримаємо наступне:

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

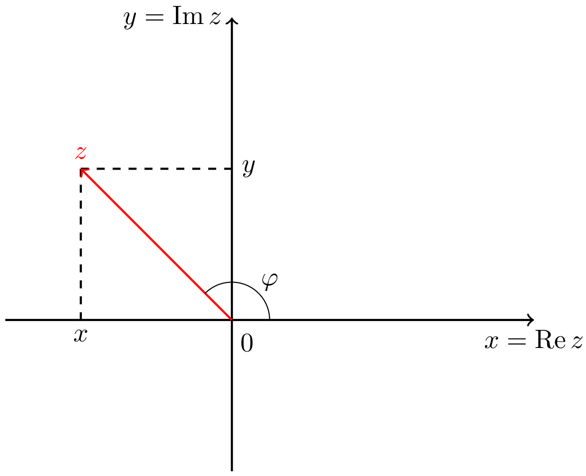
Ідея ділення двох комплексних чисел полягає в домноженні дроба на комплексно спряжене число знаменника, тобто:
$\dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \dfrac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \dfrac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$

**Example 1.1.2** $\dfrac{2 + 3i}{1 - i} = \dfrac{(2 + 3i) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \dfrac{2 + 2i + 3i + 3i^2}{1^2 - i^2} = \dfrac{2 + 5i - 3}{2} = \dfrac{-1 + 5i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i.$

## 1.2 Геометрична інтерпретація та ще трохи арифметики

Нехай є комплексне число $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$. Уведемо нові позначення:
$x = \operatorname{Re} z$ - цю частину комплексного числа називають ще **дійсною частиною**.
$y = \operatorname{Im} z$ - цю частину комплексного числа називають ще **уявною частиною**.
Нагадаю, що комплексно спряжене до числа $z$ позначаємо так: $\bar{z} = x - iy$.

Копмлексне число можна інтерпретувати як **?**вектор**?** на такій системі координат:




Можемо знайти **довжину** комплексного числа - відстань до початку координат

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Із цього випливає наступна формула:
$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Ще одне нове позначення:
$\varphi = \arg z$ - **аргумент комплексного числа**. Зазвичай $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

При $z = 0$ маємо $|z| = 0$, а тому звідси $\arg z =?$. Тому надалі уникаємо тут випадок $z = 0$.

Повернімось до малюнку вище та спробуємо знайти $x, y$. За геометрічними міркуваннями:
$\begin{cases} x = |z| \cos \varphi \\ y = |z| \sin \varphi \end{cases}$
Такі значення $x, y$ ми підставимо в комплексне число $z = x + iy$.
Отримаємо **тригонометричну формулу** комплексного числа:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

З'ясуємо арифметику комплексних чисел в тригонометричній формулі. Нехай є 2 комплексних числа:
$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$
$z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

### Множення

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1||z_2|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_2) \\ &= |z_1||z_2|(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i[\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1]) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Отримали, що коли ми множимо два комплексних числа, модулі ми **множимо**, а аргументи ми **додаємо**, тобто
$\begin{cases} |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \end{cases}$
$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

### Ділення

$\dfrac{z_1}{z_2} \overset{\text{позначу}}{=} w$, де $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$.
Наша мета: знайти $|w|$ та $\arg w = \psi$.

Ми вже навчилися множити два комплексних числа в тригонометричній формі, тому зведемо таким чином:

$z_1 = wz_2 \implies \begin{cases} |z_1| = |z_2| \cdot |w| \\ \arg z_1 = \arg z_2 + \arg w \end{cases} \implies \begin{cases} |z_1| = |z_2| \cdot |w| \\ \varphi_1 = \varphi_2 + \psi \end{cases}$

Я тут позначив $\arg z_1 = \varphi_1 \qquad \arg z_2 = \varphi_2$.

Звідси знайдемо, чому дорівнює $|w|$ та $\psi$:

$\begin{cases} |w| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \\ \psi = \varphi_1 - \varphi_2 \end{cases}$

В результаті оскільки $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$, ми отримаємо:

$w = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Отримали, що коли ми ділимо два комплексних числа, модулі ми **ділимо**, а аргументи ми **віднімаємо**.

**Зведення в степінь**

$z^n \overset{\text{позначу}}{=} w$, де $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Знову наша мета: знайти $|w|$ та $\arg w = \psi$.

Оскільки $w = z \underset{\text{n разів}}{\cdots} z$, то за множенням комплексним чисел, маємо, що $\begin{cases} |w| = |z| \underset{\text{n разів}}{\cdots} |z| \\ \arg w = \arg z + \underset{\text{n разів}}{\dots} + \arg z \end{cases}$

$\implies \begin{cases} |w| = |z|^n \\ \arg w = n\arg z = n\varphi \end{cases}$.

В результаті отримали **формулу Муавра**:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

**Remark 1.2.1** Вважаємо, що $z^0 = 1$ при $z \neq 0$.

**Вилучення коренів**

**Definition 1.2.2** Комплексне число $w$ буде $n$**-м коренем від** $z$, якщо $w^n = z$.

Позначення: $w = \sqrt[n]{z}$.

$\sqrt[n]{z} \overset{\text{позн.}}{=} w$, де $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Ще раз мета: знайти $|w|$ та $\arg w = \psi$.

Ми щойно навчилися зводити комплексне число в степінь, тому зведемо таким чином:

$z = w^n$.

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = w^n$.

Отримаємо, що $\begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\psi = \varphi + 2\pi k \end{cases} \implies \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} \end{cases}$.

Більш детальне пояснення другого рівняння системи.

Ми мали, що $\cos\varphi = \cos(n\psi)$. Оскільки cos - $2\pi$-періодична функція, то нас влаштовують не лише $\varphi = n\psi$, а також кути $+2\pi$, $+4\pi$, $\dots$.

В результаті отримаємо:

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Якщо $k = n$, то ми отримаємо комплексне число для випадку $k = 0$ через періодичність тригонометричних функцій

Якщо $k = n + 1$, то ми отримаємо комплексне число для випадку $k = 1$ через періодичність тригонометричних функцій

Тощо...

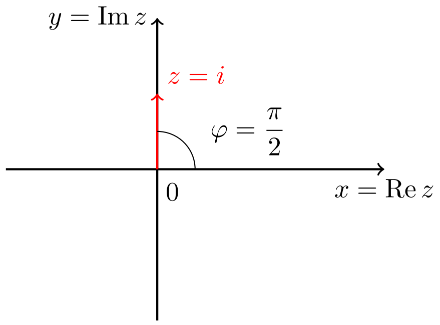
Якщо $k = -1$, то ми отримаємо комплексне число для випадку $k = n - 1$ через періодичність тригонометричних функцій

Тощо...

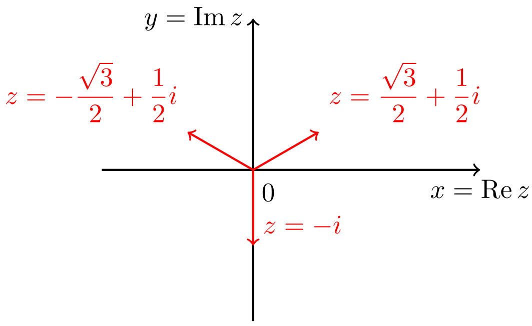
Отже:

**Proposition 1.2.3** $\sqrt[n]{z}$ має рівно $n$ комплексних чисел при $z \neq 0$.

**Example 1.2.4** Знайти $\sqrt[3]{i}$.
Розпишемо $i = 0 + i \cdot 1$. Якщо це намалювати на площині, то отримаємо, що
$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \quad \arg i = \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.




А тепер витягуємо корінь:
$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right), \qquad k = 0, 1, 2$$
$$k = 0 \implies \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$k = 1 \implies \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$k = 2 \implies \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$




## 1.3 Квадратні рівняння

Одна з головних мотивацій створення комплексних чисел - це квадратне рівняння $x^2 = -1$.
В дійсних числах казали, що розв'язків нема. І дійсно, яке б ми число не зводили в квадрат, ми завжди отримуємо додатне число. Наразі ситуація змінюється і ми навчилися вилучати від'ємні корені. В результаті,
$x = \sqrt{-1} = \pm i$.

**Remark 1.3.1** Там не випадково не написано $\pm$ перед коренем, тому що
$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \left[\begin{array}{l} \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sqrt{|z|}\left(-\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \end{array}\right. = \pm\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

Тобто, вилучаючи квадратний корінь, ми вже отримуємо два значення, тобто виникає $\pm$ після цього процесу. Але тепер можна спокійно розв'язувати квадратні рівняння.

$az^2 + bz + c = 0$
$$a\left(z^2 + \frac{2b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - \frac{b^2}{4a} = 0$$

$a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a}$
$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$
$z+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$z = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

## 1.4 Первинні результати

**Proposition 1.4.1** Задані два комплексних числа $z, w$. Тоді
1. $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$;
2. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$;
3. $|zw| = |z||w|$.

**Proof.**
Ми маємо $z = x_1 + iy_1$ та $w = x_2 + iy_2$. Тоді звідси
$z + w = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
$zw = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
$|zw| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2}$.
А далі вже доводимо ці тотожності вище:
1. $\overline{z+w} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - 1y_2) = \bar{z} + \bar{w}$.
2. $\overline{zw} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \bar{z}\bar{w}$.
3. $|zw|^2 = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 = x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2) = |z|^2|w|^2$. ■

**Proposition 1.4.2 Нерівність трикутника**
Задані два комплексних числа $z, w$. Тоді $|z + w| \leq |z| + |w|$.

**Proof.**
Хочемо довести, що $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$.
Спочатку зауважимо, що $|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w})$.
Далі просто розкриємо дужки в правій частині:
$(z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} = |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$.
Маємо $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \in \mathbb{R}$, а тому звідси $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |\operatorname{Re}(z\bar{w})| \leq |z\bar{w}|$.
Дійсно, $\operatorname{Re}(a + bi) \leq |a + bi|$, тому що $\operatorname{Re}(a + bi) = a = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi|$.
Отже, $|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2$. ■

Решта нерівностей, що пов'язані з модулями, також тут працюють. Просто тому що ми довели нерівність трикутника.

# 2 Числові послідовності, функції, границі та неперервність

## 2.1 Числові послідовності

**Definition 2.1.1 Послідовністю** комплексних чисел назвемо набір чисел $\{z_n, n \geq 1\}$, де $z_n \in \mathbb{C}$.

**Definition 2.1.2** Число $z \in \mathbb{C}$ називається **границею** числової послідовності $\{z_n, n \geq 1\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |z_n - z| < \varepsilon$$

Дану числову послідовність будемо називати **збіжною**, якщо ліміт існує та $z \in \mathbb{C}$. У протилежному випадку - **розбіжною**.

**Proposition 2.1.3** Задано $\{z_n, n \geq 1\}$ - числова послідовність, де $z_n + x_n + iy_n$, та $z = x + iy, z \in \mathbb{C}$.
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \iff \begin{cases} \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \end{cases}$.

**Proof.**
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} = z \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |z_n - z| < \varepsilon \iff |z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon \iff$
$\iff \begin{cases} |x_n - x| < \varepsilon \\ |y_n - y| < \varepsilon \end{cases} \iff \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y.$
Хіба шо в зворотному напрямку там будуть існувати $N_1, N_2$ для кожного ліміту, але можна потім записати $N = \max\{N_1, N_2\}$. ■

**Definition 2.1.4** Числова послідовність $\{z_n, n \geq 1\}$ називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : |z_n - z_m| < \varepsilon$$

**Lemma 2.1.5** Послідовність $\{z_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна $\iff$ $\{x_n, n \geq 1\}, \{y_n, n \geq 1\}$ - фундаментальні.
У цьому випадку $z_n = x_n + iy_n$.
*Аналогічно доводиться, як попереднє твердження.*

**Theorem 2.1.6 Критерій Коші**
Послідовність $\{z_n, n \geq 1\}$ - збіжна $\iff$ $\{z_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна.
*Доведення зрозуміле.*

**Definition 2.1.7** Числова послідовність $\{z_n, n \geq 1\}$ називається **обмеженою**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : |z_n| \leq M$$

**Proposition 2.1.8** Задано послідовність $\{z_n, n \geq 1\}$ - збіжна. Тоді вона - обмежена.
*Доведення аналогічне, як в матані $\mathbb{R}$.*

**Proposition 2.1.9** Задані послідовності $\{z_n^{(1)}, n \geq 1\}$ та $\{z_n^{(2)}, n \geq 1\}$ - збіжні. Тоді $\{z_n^{(1)} + z_n^{(2)}, n \geq 1\}, \{\lambda z_n^{(1)}, n \geq 1\}, \lambda \in \mathbb{C}$, $\{z_n^{(1)} \cdot z_n^{(2)}, \geq 1\}$ та $\left\{\dfrac{z_n^{(1)}}{z_n^{(2)}}, \geq 1\right\}$ (тут якщо ліміт для $z_n^{(2)}$ ненулевий) - збіжні, причому:
$\lim\limits_{n\to\infty}(z_n^{(1)} + z_n^{(2)}) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(1)} + \lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(2)}$.
$\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda z_n^{(1)}) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(1)}$.
$\lim\limits_{n\to\infty}(z_n^{(1)} z_n^{(2)}) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(1)} \lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(2)}$.
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n^{(1)}}{z_n^{(2)}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(1)}}{\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(2)}}$.
*Доведення неважке.*

**Proposition 2.1.10 Достатня умова збіжності**
Задано $\{z_n, n \geq 1\}$ - числова послідовність. Представимо в вигляді $z_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$, де $\rho_n = |z_n|$ та $\varphi_n = \arg z_n$. Відомо, що $\rho_n \to \rho_0, \varphi_n \to \varphi_0$ при $n \to \infty$.
Тоді $z_n \to z_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ при $n \to \infty$.

**Proof.**
$|z_n - z_0| = |\rho_n e^{i\varphi_n} - \rho_0 e^{i\varphi_0}| \overset{\text{самостійно}}{=} \sqrt{\rho_n^2 + \rho_0^2 - 2\rho_n\rho_0\cos(\varphi_n - \varphi_0)}\boxed{\rightarrow}$
Оскільки $\varphi_n \to \varphi_0, n \to \infty$, то в силу неперервності $\cos x$ як дійснозначної функції маємо $\cos(\varphi_n - \varphi_0) \to 1, n \to \infty$.
Також $\sqrt{x}$ неперервна функція як дійснозначна функція, тому можна отримати ось таке прямування.
$\boxed{\rightarrow}\sqrt{\rho_0^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\rho_0 \cdot 1} = 0, n \to \infty.$ ■

## 2.2 Функції комплексної змінної. Границі функцій

Ми будемо розглядати **комплексні функції** $f : A \to \mathbb{C}$, де множина $A \subset \mathbb{C}$. Зазвичай позначають як $w = f(z)$.

**Example 2.2.1** Розглянемо кілька прикладів:
$w = \bar{z}$ $\quad w = \operatorname{Re} z$ $\quad w = \operatorname{Im} z$.
Ці три функції визначені на $A = \mathbb{C}$

**Remark 2.2.2** Маємо $z = x + iy$, а також функцію $f(z) = w = u + iv$.
Тоді задання функції $f(z)$ еквівалентно заданню двох дійсних функцій $u(x, y), v(x, y)$. І тоді

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

де $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$.

**Example 2.2.3** Зокрема маємо $f(z) = \bar{z}$, або це перепишеться як
$f(x, y) = x - iy$. У цьому випадку $u(x, y) = x, v(x, y) = -y$.

**Definition 2.2.4 Показникову функцію** $w = e^z, z = x + iy \in \mathbb{C}$ визначимо таким чином:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Деколи це ще позначають як $w = \exp(z)$.

**Proposition 2.2.5 Властивості показникової функції**
1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ при $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$.
2. $e^z$ - періодична, де $T = 2\pi i$.
3. $|e^z| = e^x$.
4. $\arg e^z = y$.
*Доведення неважке.*

**Corollary 2.2.6** $e^{2\pi n i} = 1$ $\quad e^{(2n+1)\pi i} = -1$.

**Definition 2.2.7** Визначимо ще дві тригонометричні функції:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

**Proposition 2.2.8 Властивості тригонометричних функцій**
1. $\sin z, \cos z$ - періодичні, де $T = 2\pi$.
2. $\sin z$ - непарна функція та $\cos z$ - парна функція.
*Доведення неважке.*

**Remark 2.2.9** Комплексні функції $\sin z, \cos z$ підпорядковуються стандартним тригонометричним тотожностям.

**Corollary 2.2.10 Формула Ейлера**
$e^{iz} = \cos z + i \sin z$, де $z \in \mathbb{C}$.

**Corollary 2.2.11 Показникова форма комплексного числа**
$z = |z|e^{i\varphi}$, де $\varphi = \arg z$.

**Definition 2.2.12 Логарифмічну функцію** $w = \operatorname{Ln} z$ визначимо як функцію, для якого:

$$e^w = e^{\operatorname{Ln} z} = z$$

Вона визначена всюди, окрім $z = 0$.

Тепер розпишемо $e^w = z$ більш детально. Маємо $z = |z|e^{i\varphi}$ та $w = u + iv$, тоді
$e^u e^{iv} = |z|e^{i\varphi} \implies \begin{cases} e^u = |z| \\ v = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies \begin{cases} u = \ln|z| \\ v = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
В останній системі перша рівність - там всі числа дійсні. Тепер підставимо все отримане:
$w = \ln|z| + i\varphi + 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$.
Але нам відомо, що $\varphi = \arg z$, а тому ми отримаємо:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| = i \arg z + 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$$

**Proposition 2.2.13 Властивості логарифма**
1. $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$.
2. $\operatorname{Ln} \dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$.
*Доведення неважке.*

**Definition 2.2.14 Степеневу функцію** визначимо таким чином:

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$$

Тут степінь $\alpha \in \mathbb{C}$.

**Definition 2.2.15** Визначимо деякі гіперболічні функції. Зокрема гіперболічний **сінус, косінус, тангенс, котангенс**:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \\ \operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \end{aligned}$$

**Definition 2.2.16** Задано функцію $f : A \to \mathbb{C}$, де $z_0 \in \mathbb{C}$ - гранична точка $A$.
Число $W$ називається **границею функції $f$ в т.** $z_0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z \in A : z \neq z_0 : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - W| < \varepsilon \text{ - за Коші}$$
$$\forall \{z_n, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : z_n \neq z_0 : \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(z_n) = W \text{ - за Гейне}$$

Позначення: $W = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

**Theorem 2.2.17** Означення Коші $\iff$ Означення Гейне.
*Доведення аналогічне, як в матані $\mathbb{R}$.*

**Remark 2.2.18** Думаю, мені не варто писати властивості границь функцій, більшість з яких просто копіюються сюди.

**Theorem 2.2.19** Задано функцію $f : A \to \mathbb{C}$ та $z_0 \in \mathbb{C}$ - гранична точка $A$. Нехай $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ при $z = x + iy$, $z_0 = z_0 + iy_0$. Також нехай $W = a + bi$.

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = W \iff \begin{cases} \exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \\ \exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b \end{cases}.$$

*Випливає з означення Гейне та твердження про збіжність комплексної послідовності.*

## 2.3 Неперервність функції

**Definition 2.3.1** Задано функцію $f : A \to \mathbb{C}$ та $z_0 \in A$ - гранична точка $A$.
Функція $f$ називається **неперервною в т.** $z_0$, якщо

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Функція $f$ називається **неперервною на** $A$, якщо $\forall z_0 \in A : f$ - неперервна в т. $z_0$. Позначається як $f \in C(A)$.
Також в ізольованих точках функція $f$ неперервна.

**Theorem 2.3.2** Задано функцію $f : A \to \mathbb{C}$ та $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ - гранична точка $A$.
$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ - неперервна в т. $z_0 \iff u, v$ - неперервні в т. $(x_0, y_0)$.
*Зрозуміло.*

**Example 2.3.3** Зокрема ось такі функції неперервні на $\mathbb{C}$:
1. $f(z) = C, C \in \mathbb{C}$;
2. $f(z) = az + b$;
3. $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$;
4. $f(z) = e^z$;
5. $f(z) = \cos z, f(z) = \sin z$;
6. $f(z) = \operatorname{sh} z, f(z) = \operatorname{ch} z$.

**Definition 2.3.4** Задано функцію $f : A \to \mathbb{C}$ та $z_0 \in A$ - гранична точка $A$.
Функція $f$ називається **рівномірно неперервною на** $A$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z_1, z_2 \in A : |z_1 - z_2| < \delta \implies |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

Позначення: $f \in C_{unif}(A)$.

**Theorem 2.3.5** Задано функцію $f \in C_{unif}(A)$. Тоді $f \in C(A)$.

**Theorem 2.3.6 Теорема Кантора**
Задано функцію $f \in C(A)$, де $A$ - замкнена та обмежена множина. Тоді $f \in C_{unif}(A)$.

Всі ці теореми доводяться аналогічно, як в матані $\mathbb{R}$.

### Кілька прикладів на це все

**Example 2.3.7** Довести, що $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$, якщо $\operatorname{Re} p > 0$.
Маємо $\left|\dfrac{1}{n^p}\right| = \left|\dfrac{1}{n^{a+bi}}\right| = \left|\dfrac{1}{n^a}\right|\left|\dfrac{1}{n^{bi}}\right| = \left|\dfrac{1}{n^a}\right|\left|\dfrac{1}{e^{bi \operatorname{Ln} n}}\right| = \dfrac{1}{n^a} \to 0, n \to \infty$, просто тому що $a > 0$.
Таким чином, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$, якщо $\operatorname{Re} p > 0$.

**Example 2.3.8** Довести, що $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$.
Маємо $z_n = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$, звідси отримаємо:
$|z_n| = \left(\sqrt{\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^2 + \dfrac{y^2}{n^2}}\right)^n = \left(1 + \dfrac{x^2 + y^2 + 2xn}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \to e^x$ при $n \to \infty$ (показати самостійно).
$\arg z_n = \arg \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = n \arg \left(1 + \dfrac{z}{n}\right) = n \operatorname{arctg} \dfrac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = n \operatorname{arctg} \dfrac{y}{n + x} \to y, n$ при $n \to \infty$.
За достатньою умовою, отримаємо $z_n = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n \to e^x e^{iy} = e^z$.

## 2.4 Трошки про символіку Ландау

**Definition 2.4.1** Задані дві функції $f, g : A \to \mathbb{C}$ та $z_0 \in \mathbb{C}$ - гранична точка $A$.
Функція $f$ називається **о-малою** від функції $g$ при $z \to z_0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall z \in A : z \neq z_0 : |z - z_0| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

Позначення: $f(z) = o(g(z)), z \to z_0$.

**Theorem 2.4.2** $f(z) = o(g(z)) \iff \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
*Зрозуміло.*

**Example 2.4.3** Зокрема маємо $o(z - z_0) = o(|z - z_0|)$ при $z \to z_0$.
Дійсно, маємо $\dfrac{z - z_0}{|z - z_0|} = \dfrac{(x - x_0) + i(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$.
Зокрема $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$ та $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$ (див матан $\mathbb{R}^m$).
Таким чином, звідси $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{z - z_0}{|z - z_0|} = 0$. Тоді всі функції $f = o(z - z_0), z \to z_0$ стануть автоматично $f = o(|z - z_0|), z \to z_0$. І навпаки теж.

**Proposition 2.4.4** $o(|z - z_0|) = o(|z - z_0|) + io(|z - z_0|)$.

**Proof.**
Нехай $f(z) = o(|z - z_0|)$, тобто $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{|z - z_0|} = 0$.
Водночас знаємо, що $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, а також $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, тож звідси випливає, що
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{u(x, y)}{|z - z_0|} = 0 \qquad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{v(x, y)}{|z - z_0|} = 0$.
Отже, $u(x, y) = o(|z - z_0|)$ та $v(x, y) = o(|z - z_0|), z \to z_0$.
Таким чином, $o(|z - z_0|) = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = o(|z - z_0|) + io(|z - z_0|)$. ■

## 2.5 Ряди

**Definition 2.5.1** **Рядом** визначимо ось таку нескінченну суму комплексних чисел:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots$$

Аналогічно визначимо **часткові суми** таким чином:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} z_n$$

Якщо послідовність часткових сум $\{S_k, k \geq 1\}$ буде збіжним, то тоді ряд зверху називається **збіжним**. Інакше - **розбіжним**.

**Example 2.5.2** Зокрема маємо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, але тепер $q \in \mathbb{C}$.
Зауважимо, що $1 - q^{k+1} = (1 - q)(1 + q + \dots + q^k)$, навіть в комплексному випадоку. Тому все чудово, звідси отримаємо
$\sum\limits_{n=1}^{k} q^n = 1 + q + \dots + q^k = \dfrac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$, тільки якщо $q \neq 1$.
При $|q| < 1$ маємо $\sum\limits_{n=1}^{k} q^n = \dfrac{1 - q^{k+1}}{1 - q} \to \dfrac{1}{1 - q}$, тому що $q^k \to 0, k \to \infty$.
При $|q| > 1$ маємо $\sum\limits_{n=1}^{k} q^n = \dfrac{1 - q^{k+1}}{1 - q} \to \infty$, тому що $q^k \to \infty, k \to \infty$.
При $q = 1$ маємо взагалі $\sum\limits_{n=1}^{k} q^n = 1 + 1 + \dots + 1 = k + 1 \to +\infty$ при $k \to \infty$.
При $q = e^{i\varphi}, \varphi \in (0, 2\pi)$ (при $\varphi = 0$ маємо $q = 1$, а для інших кутів відбувається періодичність) отримаємо неіснування границі. Треба просто обережно розписати дріб.
Точки $q = e^{i\varphi}$ відповідають випадку $|q| = 1$.

Висновок: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ та збігається до цього при $|q| < 1$. Для випадку $|q| \geq 1$ ряд буде розбіжним.

**Remark 2.5.3** Аналогічно виконуються властивості лінійності, якщо обидва ряди збіжні.
Також аналогічно ряд збіжний $\iff$ його хвіст ряду збіжний.

**Theorem 2.5.4 Критерій Коші**
$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ - збіжний $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k}^{k+p} z_n \right| < \varepsilon$.
*Відносно зрозуміло.*

**Corollary 2.5.5 Необхідна умова збіжності ряду**
Задано $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ - збіжний ряд.
Тоді $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

**Definition 2.5.6** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ збіжний.

**Theorem 2.5.7** Задано ряд - абсолютно збіжний. Тоді ряд - збіжний.
*Відносно зрозуміло.*

# 3 Диференціювання

Всюди тут вважається, що множина $A \subset \mathbb{C}$. Якщо десь потрібні додаткові умови, вони будуть зазначені.

## 3.1 Основні означення

**Definition 3.1.1** Задано функцію $f : A \to \mathbb{C}$ та $z_0 \in A$ - внутрішня точка.
Функція $f$ нзивається **диференційованою в т.** $z_0$, якщо

$$\exists L \in \mathbb{C} : f(z) - f(z_0) = L(z - z_0) + o(z - z_0), z \to z_0$$

А **похідною в т.** $z_0$ називають границю нижче, якщо вона існує

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

**Proposition 3.1.2** Задано функцію $f : A \to \mathbb{C}$ та $z_0 \in A$ - внутрішня точка. Відомо, що $f$ - диференційована в т. $z_0$. Тоді $f$ - неперервна в т. $z_0$.

**Proof.**
Маємо $\exists L \in \mathbb{C} : f(z) - f(z_0) = L(z - z_0) + o(z - z_0), z \to z_0$. Тоді звідси
$\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim\limits_{z \to z_0} (L(z - z_0) + o(z - z_0)) = 0.$ ■

**Proposition 3.1.3** Задано функцію $f : A \to \mathbb{C}$ та $z_0 \in A$ - внутрішня точка.
Функція $f$ - диференційована в т. $z_0 \in A \iff \exists f'(z_0)$.

**Proof.**
$f$ - диференційована в т. $z_0 \iff \exists L \in \mathbb{C} : f(z) - f(z_0) = L(z - z_0) + o(z - z_0) \iff$
$\iff o(z - z_0) = f(z) - f(z_0) - L(z - z_0) \iff$
$\iff \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - L = 0 \iff \exists L = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =$
$f'(z_0)$. ■

**Theorem 3.1.4 Теорема Коші-Рімана**
Задано функцію $f = u + iv : A \to \mathbb{C}$ та $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ - внутрішня точка.
$f$ - диференційована в т. $z_0 \iff u, v$ - диференційовані в т. $(x_0, y_0)$ та виконуються такі умови:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

**Proof.**
$f$ - диференційована в т. $z_0 \iff \exists L \in \mathbb{C} : f(z) - f(z_0) = L(z - z_0) + o(z - z_0) \iff$
$\iff \exists L = A + iB; A, B \in \mathbb{R} :$
$u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) = (A + iB)(x + iy - x_0 - iy_0) + o(|z - z_0|) \iff$
$\iff \exists A, B \in \mathbb{R} : u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0)) =$
$= A(x - x_0) + B(y - y_0) + i(A(y - y_0) + B(x - x_0)) + o(|z - z_0|) + io(|z - z_0|) \iff$
$$\iff \exists A, B \in \mathbb{R} : \begin{cases} u(x, y) - u(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(|z - z_0|) \\ v(x, y) - v(x_0, y_0) = A(y - y_0) + B(x - x_0) + o(|z - z_0|) \end{cases} \boxed{\iff}$$
У цьому випадку $|z - z_0| = \|(x, y), (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.
А також $z \to z_0 \iff (x, y) \to (x_0, y_0)$.
$$\boxed{\iff} u, v \text{ - диференційовані в т. } (x_0, y_0) \text{ та } \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = A = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) - B = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$ ■

**Remark 3.1.5** Оскільки $f'(z_0) = L$, то за Коші-Рімана,

$$f'(z_0) = L = A + iB \overset{\text{наприклад}}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Взагалі-то кажучи, є чотири варіанти, як розписати похідну. Два варіанти $A$ та два варіанти $B$.

**Example 3.1.6** Знайти похідну від функції $f(z) = \bar{z}$.
Маємо $f(z) = x - iy \implies u(x,y) = x, v(x,y) = -y$. Шукаємо частинні похідні:
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1.$
Уже зауважимо, що $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$, а тому за Коші-Рімана, $f(z)$ - не диференційована, причому ніде.

**Example 3.1.7** Знайти похідну від функції $f(z) = z\operatorname{Re}(z-1)$.
Маємо $f(z) = x(x-1) + iy(x-1) \implies u(x,y) = x^2 - x, v(x,y) = xy - y$. Шукаємо частинні похідні:
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1,\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = x - 1, \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial v}{\partial x} = y.$
Використаємо умову Коші-Рімана - отримаємо:
$\begin{cases} 2x - 1 = x - 1 \\ 0 = y \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$
Отже, $f$ - диференційована лише в т. $z_0 = 0 + 0i = 0$, а похідна
$f'(0) = -1 + 0 = -1$.

**Example 3.1.8** Знайти похідну $f(z) = e^z$.
Розпишемо спочатку $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y \implies u(x,y) = e^x\cos y$; $v(x,y) = e^x\sin y$.
Перевіримо умову Коші-Рімана. Для цього шукаємо частинні похідні:
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y;\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y;\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y;\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y;$
$\implies \begin{cases} e^x\cos y = e^x\cos y \\ -e^x\sin y = -(e^x\sin y) \end{cases}.$
Дана система виконується $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Отже, $f$ - диференційована в будь-якій т. $z_0 \in \mathbb{C}$, а її похідна дорівнює:
$f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_)) = e^{x_0}\cos y_0 + ie^{x_0}\sin y_0 = e^{x_0}e^{iy_0} = e^{z_0}.$

**Remark 3.1.9** Насправді, всі функції з таблиці похідних (не лише $e^z$) мають таку ж саму похідну в комплекснозначному випадку. Також зазначу, що арифметика похідної та похідна від композиції теж зберігається для комплекснозначних функцій.

**Theorem 3.1.10** Задано функцію $f : A \to \mathbb{C}$, де $A$ - відкрита множина. Відомо, що $f'(z) = 0$ в будь-якій точці $z \in A$.
Тоді $f(z) = C, C \in \mathbb{C}$.

**Proof.**
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \implies \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \overset{\text{умова Коші-Рімана}}{\implies} \begin{cases} du = 0 \\ dv = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u = C_1 \\ v = C_2 \end{cases}$$
Отже, $f(z) = C_1 + iC_2 = C$, де $C \in \mathbb{C}$. ■

**Corollary 3.1.11** Якщо $f'(z) = g'(z)$ в будь-якій точці $z \in A$, то $f(z) = g(z) + C$.
*Вказівка: розглянути функцію $h(z) = f(z) - g(z)$.*

## 3.2 Умова Коші-Рімана в полярній системі координат

Задане комплексне число $z = x + iy$ представимо в іншому вигляді:
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Тоді якщо покласти $\rho = |z|$, то отримаємо:
$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$
Нехай задано функцію $f : A \to \mathbb{C}$, ми маємо $f(z) = u(x,y) + i(x,y)$.
Знайдемо такі частинні похідні для функції $u$:
$\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi$ (1)
$\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\dfrac{\partial u}{\partial x} + \rho\cos\varphi\dfrac{\partial u}{\partial y}$ (2)

Отримали систему двох рівнянь відносно $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$, яку ми розв'яжемо.
Для отримання $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ необхідно: $(1)\cdot \rho\cos\varphi - (2)\cdot\sin\varphi$
Для отримання $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ необхідно: $(1)\cdot \rho\sin\varphi + (2)\cdot\cos\varphi$
$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi \end{cases}$
Аналогічно проведемо все те саме для функції $v$, де хочемо знайти $\dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$. Тоді отримаємо:
$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi \end{cases}$
Нарешті, застосуємо умову Коші-Рімана:
$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi = \dfrac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi \ (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi = -\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi \ (2) \end{cases}$
Зробимо ось такі перетворення системи:
$\begin{cases} (1)\cdot\cos\varphi + (2)\cdot\sin\varphi \\ (1)\cdot\sin\varphi - (2)\cdot\cos\varphi \end{cases}$
Остаточно отримаємо умову Коші-Рімана в полярній системі координат:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

Показовим буде приклад нижче, навіщо взагалі умова Коші-Рімана через полярні координати.

**Example 3.2.1** Знайти похідну $f(z) = z^n$.
Якщо розписати $z^n = (x+iy)^n$, то далі буде неприємно робити справу з формулою бінома Ньютона.
Тому доцільно розглянути полярну заміну:
$f(z) = z^n = |z^n|(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \underbrace{\rho^n\cos n\varphi}_{=u(\rho,\varphi)} + i\underbrace{\rho^n\sin n\varphi}_{=v(\rho,\varphi)}$.
Далі шукаємо необхідні частинні похідна - отримаємо:
$\begin{cases} n\rho^{n-1}\cos n\varphi = \dfrac{1}{\rho}\rho^n\cdot n\cos n\varphi \\ -\dfrac{1}{\rho}\cdot\rho^n n\sin n\varphi = -n\rho^{n-1}\sin n\varphi \end{cases}$.
Умова Коші-Рімана виконується завжди. А тому похідна існує всюди. Знайдемо її:
$f'(z) = \dfrac{1}{\rho}\rho^n\cdot n\cos n\varphi + in\rho^{n-1}\sin n\varphi = n\rho^{n-1}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = nz^{n-1}$.

## 3.3 Гармонічні функції

**Definition 3.3.1** Задано функцію $f : A \to \mathbb{C}$ та $z_0 \in A$ - внутрішня точка.
Функція $f$ називається **аналітичною в т.** $z_0$, якщо $f$ - диференційова в околі т. $z_0$, тобто:

$$\exists \delta > 0 : \forall z \in A : |z - z_0| < \delta \implies f \text{ -диференційована в т. } z$$

Інколи таку функцію ще називають **голоморфною** або **регулярною**.
Функція $f$ називається **аналітичноюна відкритій множині** $A$, якщо $\forall z_0 \in A : f$ - аналітична в т. $z_0$.
Функція $f$ нахивається **аналітичною на довільній множині** $A$, якщо $f$ можна продовжити до відкритої множини $B \supset A$, причому так, щоб $f$ - аналітична на $B$.

**Remark 3.3.2** До речі, $f$ аналітична на відкритій множині $A$ - це теж саме саме, що сказати, що $f$ диференційована на відкритій множині $A$.

**Definition 3.3.3** Задано функцію $H : A \to \mathbb{R}^2$ (ось тут $A \subset \mathbb{R}^2$) і така точка $(x_0, y_0) \in A$, що на цьому околі існують частинні похідні другого порядку.
Функція $H$ називається **гармонічною в т.** $(x_0, y_0)$, якщо справедлива рівність:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0$$

**Theorem 3.3.4** Задано функцію $v$ (або $u$) - гармонічна в околі т. $(x_0, y_0)$.
Тоді існує комплексна функція $f$ - аналітична, для якого $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$ (або $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$).

**Proof.**
Оскільки $v$ - гармонічна, то тоді $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.
Ми хочемо знайти $u$ із розкладу $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Причому ми хочемо, щоб $f$ була аналітичною. Застосуємо умову Коші-Рімана:
$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$
Для знаходження $u$ можна розписати повний диференціал:
$du = \dfrac{\partial u}{\partial x} dx + \dfrac{\partial u}{\partial y} dy = \dfrac{\partial v}{\partial y} dx - \dfrac{\partial v}{\partial x} dy = P dx + Q dy.$
Перевіримо, що ми зможемо знайти цю функцію через криволінійний інтеграл II роду. Для цього доведемо, що $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.
Справді, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ та $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.
Рівність є справедливою в силу гармонічності функції. Тому (за лемою Пуанкаре) наш криволінійний інтеграл II роду може бути обчисленим, а також він не залежить від шляху, тому:
$u = \displaystyle\int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}\, dx - \frac{\partial v}{\partial x}\, dy + C$
Отже, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
Випадок, коли дано, що $u$ - гармонічна, є аналогічним. ■

**Remark 3.3.5** Зворотне твердження до даної теореми є вірним.

Дійсно, якщо дано функцію $f$ - аналітична, то ми використовуємо умову Коші-Рімана. Якщо систему продиференціювати спочатку по $x$, додати обидві рядочки, а потім зробити ті самі процедури по $y$, то отримаємо умови гармонічності функцій для $u, v$.

**Remark 3.3.6** Таке доведення, скоріш, є конструктивним на основі прикладів, аніж теоретичним.

**Example 3.3.7** Дізнатись, чи є функція $u(x, y) = 2xy + 3$ гармонічною. Якщо так, відновити функцію $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2y \implies \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x \implies \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
$\implies \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ - гармонічна. Отже, за теоремою вище, ми можемо знайти уявну частину функції для аналітичної функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Скористаємось умовою Коші-Адамара:
$\begin{cases} 2y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 2x = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \implies dv = -2x\, dx + 2y\, dy$
$\implies v(x, y) = \displaystyle\int_{(0,0)}^{(x,y)} -2x\, dx + 2y\, dy = \cdots = -x^2 + y^2 + C.$
Отже, $f(x, y) = 2xy + 3 + i(y^2 - x^2 + C)$. Якщо звести до функції від змінної $z = x + iy$, то $f(z) = -iz^2 + C$.

### 3.4 Геометричне застосування

Задано функцію $f$ - аналітична в т. $z_0$. В околі т. $z_0$ розглянемо диференційовану криву $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$. Познаимо $z(t_0) = z_0$.
Подієму функцією $f$ на цю криву $\gamma$ та отримаємо нову криву $\tilde{\gamma}(t) = f(z(t))$.
$\tilde{\gamma}(t)$ - диференційована в околі т. $t_0$, причому

$$(\tilde{\gamma}(t))' = f'(z(t))z'(t) \iff \begin{cases} |\tilde{\gamma}(t)|' = |f'(z(t))||z'(t)| \\ \arg((\tilde{\gamma}(t))') = \arg(f'(z(t)) + \arg(z'(t)) \end{cases}$$

Згадаємо формулу довжини кривої: $l(\gamma) = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.
У нашому випадку:

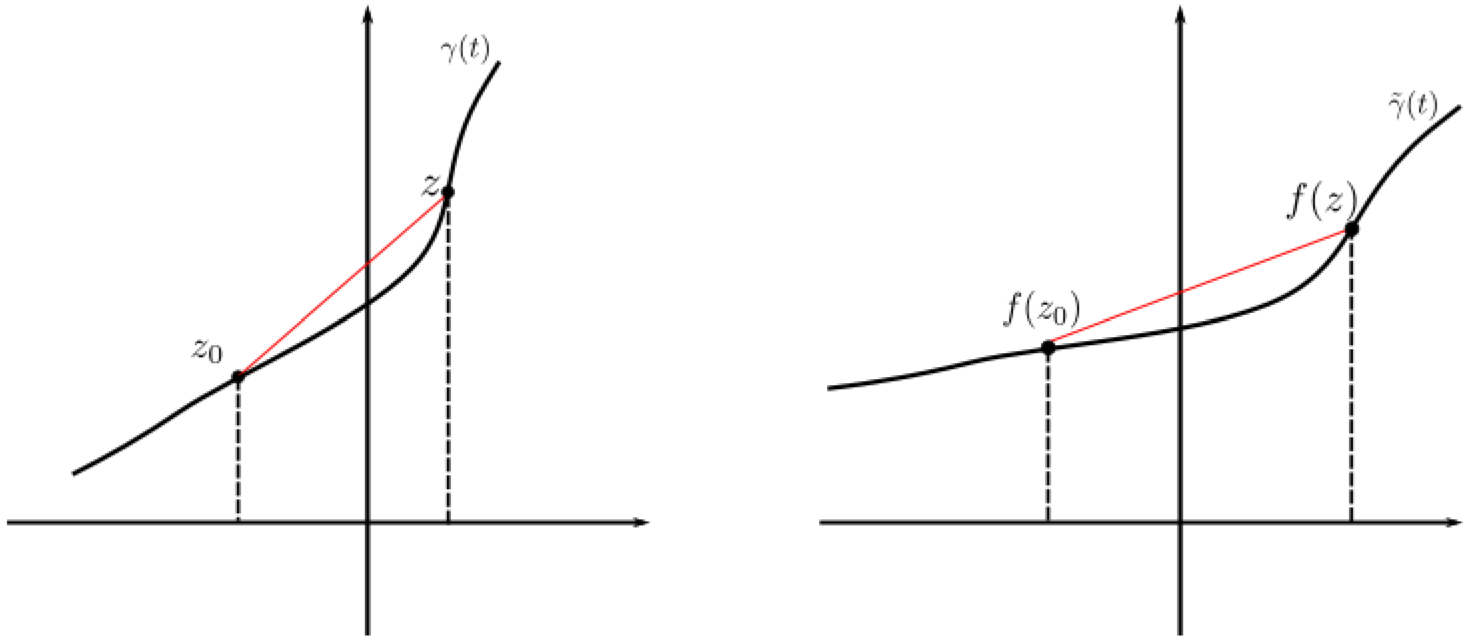
$$l(\tilde{\gamma}) = \int_{t_1}^{t_2} |(\tilde{\gamma}(t))'|\, dt$$

$$l(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} |z'(t)|\, dt$$

Тоді $|f'(z(t))|$ - **коефіцієнт розтягнення в т.** $z_0$

$(\tilde{\gamma}(t))', \gamma'(t))$ - дотичні вектори до кривої.
Тоді $\arg f'(z)$ - **кут, на який повертається дотичний вектор**

Більш розгорнуту інформацію про аналітичні функції можна побачити в підручнику Шабата "Введение в комплексный анализ".




Шматок кривої навколо т. $z_0$ розтянули та повернули на деякий кут. (на малюнку масштаб не відповідає реальності: тут $z$ має бути близьким до $z_0$).

**Example 3.4.1** Знайти кут повороту та коефіцієнт розтягнення в т. $z_0 = 1 + i$ для $f(z) = z^3$.
$f(z_0) = (1 + i)^3 = (-2 + 2i)$, це нам ще знадобиться.
Оскільки $f'(z) = 3z^2$, то $f'(z_0) = 3(1 + i)^2 = 6i \implies |f'(z_0)| = 6, \arg f'(z_0) = \dfrac{\pi}{2}$.

# 4 Інтегрування

## 4.1 Основні методи інтегрування

Задано функцію $f : G \to \mathbb{C}$, де $G$ - деяка область. Нехай $\Gamma \subset G$ - кусково-гладка крива орієнтовна крива, що має почааток $z_0$ та кінець $z$.
Розіб'ємо криву $\Gamma$ на дуги точками $\tau = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n\}$, що розташовані послідовно в додатному напрямку кривої. Оберемо $\xi_k$ на кожній дузі між $z_{k-1}, z_k$.
Позначимо $|\tau| = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |z_k - z_{k-1}|$.

Складемо інтегральну суму $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_{k-1} - z_k) = \sigma(f, \tau, \xi)$.

**Definition 4.1.1** Число $C \in \mathbb{C}$ називається **інтегралом** від функції $f$ вздовж кривої $\Gamma$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies |\sigma(f, \tau, \xi) - C| < \varepsilon$$

Позначення: $C = \displaystyle\int_\Gamma f(z)\, dz$.

**Theorem 4.1.2** Задано функцію $f \in C_{\text{piecewise}}(G)$, де $G$ - область. Нехай $\Gamma \subset G$ - кусково-гладка крива. Розкладемо $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Тоді інтеграл від $f$ вздовж кривої $\Gamma$ буде існувати, причому
$\displaystyle\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\Gamma u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy + i \int_\Gamma v(x,y)\, dx + u(x,y)\, dy$.

**Proof.**
Маємо $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, також $z_k = x_k + iy_k$, а також $\xi_k = \tilde{x}_k + i\tilde{y}_k$. Тоді
$\displaystyle\sigma(f, \tau, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) + iv(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k))(x_k - x_{k-1} + i(y_k - y_{k-1})) =$
$\displaystyle= \sum_{k=1}^{n} (u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\Delta x_k - v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\Delta y_k) + i \sum_{k=1}^{n} (v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\Delta x_k + u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\Delta y_k)$.
Запишу я ось так: $\sigma = \sigma_{Re} + i\sigma_{Im}$.
Оскільки функція $f$ кусково неперервна, то тоді функції $u, v$ також. Зокрема векторні поля $(u, -v)^T, (v, u)$ будуть кусково неперервними. Значить, у нас вже існують інтеграли II роду, що знаходяться в теоремі праворуч від знака дорівнює. А тому далі неважко буде прийти до рівності. ■

**Example 4.1.3** Обчислити $\displaystyle\int_\Gamma \text{Im}(z)\, dz$, де $\Gamma = \{(x,y) : y = 2x^2, 0 \le x \le 1\}$.

Маємо функцію $f(z) = \operatorname{Im} z$. Запишемо $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, у цьому випадку $u(x,y) = y, v(x,y) = 0$. Отже,
$\displaystyle\int_\Gamma \text{Im}(z)\, dz = \int_\Gamma y\, dx + i \int_\Gamma y\, dy$.
Кожний криволінійний інтеграл II роду обчислимо окремо. Але вже запишу параметризацію:
$x = t, t \in [0,1]$, $y = 2t^2 \qquad dx = dt, dy = 4t\, dt$.
$\displaystyle\int_\Gamma y\, dx = \int_0^1 2t^2\, dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.
$\displaystyle\int_\Gamma y\, dy = \int_0^1 2t^2 \cdot 4t\, dt = 2t^4 \Big|_0^1 = 2$.
Отже, остаточно $\displaystyle\int_\Gamma \text{Im}(z)\, dz = \frac{2}{3} + 2i$.

## 4.2 Властивості та інші теореми

**Proposition 4.2.1** Інтеграл $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$ від параметризації кривої не залежить.

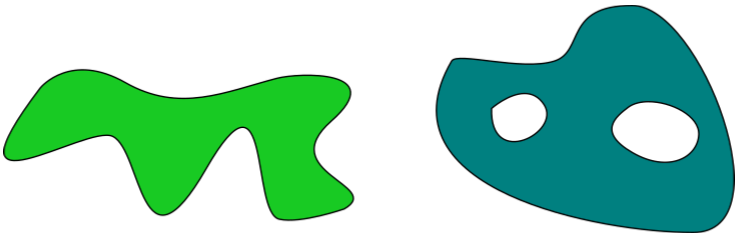
*Випливає з властивостей криволінійного інтегралу II роду*

**Proposition 4.2.2** Для цього ж інтегралу виконуються лінійні властивості та адитивність.
*Випливають з властивостей криволінійного інтегралу II роду*

**Theorem 4.2.3 Ознака модуля**
$$\left|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int\limits_\gamma |f(z)|\,|dz|$$

**Proof.**
$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_{k-1}-z_k)\right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)||z_{k-1}-z_k| \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k)|z_{k-1}z_k|.$$
Тут $|z_{k-1}-z_k| \leq |z_{k-1}z_k|$. Ліворуч - це довжина прямої між цими двома точками, а праворуч - це довжина кривої між цими точками.
А далі ми просто робимо $|\tau| \to 0$, тоді буде граничний перехід. Отже,
$$\left|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz|.$$
Праворуч - це тіпа криволінійний інтеграл $I$ роду по криві $\gamma$. Тут замість $dl$ я написав $|dz|$, щоб був більш вагомий акцент. ■

Перед іншими теоремами нагадаю дещо.
Є область $D$. Однозв'язним називають ту область $D$, де $\partial D$ (границя області) є зв'язною множиною.



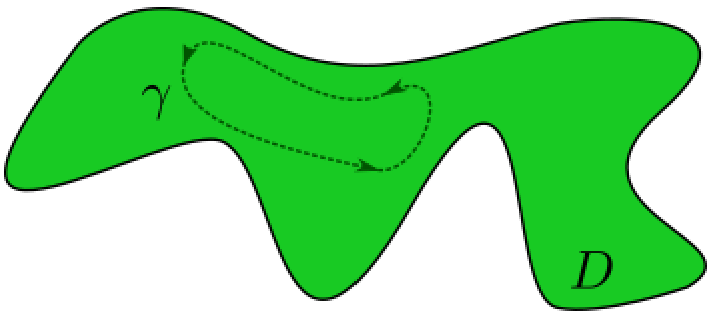
Ліворуч - однозв'язна область. Праворуч - вже не є однозв'язною, оскільки вона містить (грубо кажучи) дірки.

**Theorem 4.2.4 Теорема Коші**
Задано $D$ - обмежена область, $\partial D$ - кусково-гладка границя та функцію $f$ - аналітична в $D \cup \partial D$.
Тоді $\displaystyle\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$

**Proof.**
$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial D} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\partial D} v\,dx + u\,dy \boxed{=}$$
За теоремою Коші-Рімана, можна побачити, що коефіцієнти при $dx$ рівні коефіцієнту при $dy$ в кожному інтегралі. Тоді за лемою Пуанкаре про незалежність від шляху, ми отримаємо бажане.
$\boxed{=} 0.$ ■

**Corollary 4.2.5** Задано функцію $f$ - аналітична в однозв'язній області $D$. Тоді для довільного замкненого контуру $\gamma$ в $D$ виконується рівність:
$$\oint\limits_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

**Corollary 4.2.6** Інтеграл від комплексної функції не залежить від шляху. А тому якщо є якась крива $\gamma$, що проходить через $z_1, z_2$, то ми можемо застосувати позначення:
$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz.$$




Однозв'язна область $D$ і замкнений контур $\gamma$

**Example 4.2.7** $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^2}{z-i}\,dz = 0$

Звісно, є неприємна точка $z = i$, але незважаючи на це, в колі $|z| = \dfrac{1}{2}$ наша функція є аналітичною. Тому теорема Коші спрацьовує.

Перед наступною теоремою, я би хотів швидко обчислити один інтеграл.

**Example 4.2.8** Обчислити $\displaystyle\int\limits_{\gamma} 1\,d\zeta$, де крива $\gamma$ сполучає точки $z_1$ (початок) та $z_2$ (кінець).

Оскільки $f(\zeta) = 1$ - аналітична всюди, тоді не буде залежності від шляху. А тому ми можемо розглянути пряму, що проходить через $z_1, z_2$.
$\displaystyle\int\limits_{\gamma} 1\,d\zeta = \int\limits_{\gamma} 1\,dx + i\int\limits_{\gamma} 1\,dy \boxed{=}$
Ми маємо $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$. Запишемо параметризацію:
$x = t, t \in [x_1, x_2]$ та $y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(t - x_1) + y_1$. Тоді звідси $dx = dt, dy = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,dt$.
$\boxed{=} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} dt + i\int_{x_1}^{x_2} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,dt = x_2 - x_1 + i\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = z_2 - z_1.$
Окремо треба розглядати випадок вертикальних та горизонтальних прямих, але все ясно там.
Отже, $\displaystyle\int_{\gamma} 1\,d\zeta = \int_{z_1}^{z_2} 1\,d\zeta = z_2 - z_1$ - схоже на застосування формули Ньютона-Лейбніца. У цьому випадку $F(z) = z$ буде первісною для функції $f(z) = 1$.

**Theorem 4.2.9** Задано функцію $f$ - аналітична в однозв'язній області $D$. Тоді функція $f$ має первісну $F$ в області $D$.

**Proof.**
Розглянемо функцію $F(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ - інтеграл з верхньою межею. Перевіримо, що $F'(z) = f(z)$.
$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = \frac{1}{z - z_1}\left[\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,d\zeta\right] = \frac{1}{z - z_1}\int_{z_1}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$$
Водночас за попереднім прикладом, отримаємо
$$f(z_1) = f(z_1)\frac{1}{z - z_1}\cdot(z - z_1) = \frac{1}{z - z_1}\int_{z_1}^{z} f(z_1)\,d\zeta$$
Звідси випливає, що:
$$\left|\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1)\right| = \frac{1}{|z - z_1|}\left|\int_{z_1}^{z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_1}^{z} f(z_1)\,d\zeta\right| =$$
$$= \frac{1}{|z - z_1|}\left|\int_{z_1}^{z} f(\zeta) - f(z_1)\,d\zeta\right| \le \frac{1}{|z - z_1|}\int_{z_1}^{z} |f(\zeta) - f(z_1)|\,|d\zeta| \boxed{<}$$
Оскільки $f$ - аналітична, то вона є неперервною. Звідси - рівномірно неперервна, тобто $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta : \forall z : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_1)| < \varepsilon$. Тоді $|\zeta - z_1| < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z_1)| < \varepsilon$
$$\boxed{<} \frac{1}{|z - z_1|}\int_{z_1}^{z} \varepsilon\,|d\zeta| = \varepsilon$$
Це означає, що $\exists \displaystyle\lim_{z \to z_1} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = f(z_1) = F'(z_1)$. І це $\forall z_1 \in D$ ■

**Corollary 4.2.10** Якщо $\Phi$ - первісна, то $\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$.

**Proof.**
$\Phi$ - первісна $\implies \Phi'(z) = f(z)$
За щойно доведеною теоремою, $F'(z) = f(z)$. Отже, $\Phi(z) = F(z) + C$
$$\begin{cases}\Phi(z_0) = 0 + C \\ \Phi(z_1) = F(z_1) + C\end{cases} \implies F(z_1) = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$$ ∎

**Remark 4.2.11** Існування первісної не обов'язково в однозв'язній області.

## Трохи ліричного відступу по темі

У нас взагалі ще існують функції вигляду $f : A \to \mathbb{C}$, де тепер $A \subset \mathbb{R}$. Тобто функція приймає дійсне число, а повертає вже комплексне. Тоді функцію $f$ можна розписати як
$f(t) = u(t) + iv(t)$.
У цьому випадку $u(t) = \operatorname{Re} f(t), v(t) = \operatorname{Im} f(t)$, обидва $u, v : A \to \mathbb{R}$.

Оскільки $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (як множини чисел), то зокрема $A \subset \mathbb{C}$, а тому ось цей типаж функції ми можемо розглядати як функцію, що приймає комплексне число, а повертає комплексне значення. Ось так:
$u(t) = u(t, s)$, де $s = 0$
$v(t) = v(t, s)$, де $s = 0$
$f(t) = u(t, s) + iv(t, s) = f(t + is)$, де $s = 0$.

Тепер розглянемо функцію $f : A \to \mathbb{C}$, де $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Наш відрізок $[a, b]$ буде кривою $\gamma$, починаючи з точки $a$. Тоді подивимось на інтеграл:
$\displaystyle\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int\limits_\gamma v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy \boxed{=}$
Параметризація кривої: $x = t, t \in [a, b], y = 0$. Звідси маємо $dx = dt, dy = 0$.
$\boxed{=} \displaystyle\int_a^b u(t, 0)\,dt + i\int_a^b v(t, 0)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + \int_a^b v(t)\,dt$.
Із іншого боку, відрізок $[a, b]$ на комплексній площині буде однов'язною (бо це одна границя, яка зв'язна), тому можна записати так:
$\displaystyle\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b u(t) + iv(t)\,dt$.
Таким чином, ми чесно отримали, що
$$\int_a^b u(t) + iv(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$
при $u, v$ - дійсно значні функції.

**Повернімось до основної теми**

**Theorem 4.2.12** Задано криву $\gamma$ параметричним рівнянням $z = z(t)$, причому $t \in [\alpha, \beta]$. Тоді
$\displaystyle\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt$.

**Proof.**
Маємо криву $z(t) = x(t) + iy(t)$. Тоді розпишемо, що маємо:
$\displaystyle\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_\gamma u(x(t), y(t))\,dx - v(x(t), y(t))\,dy + i\int\limits_\gamma v(x(t), y(t))\,dx + u(x(t), y(t)\,dy =$
$\displaystyle= \int_\alpha^\beta u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\,dt =$
$\displaystyle= \int_\alpha^\beta [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))]x'(t) + [iu(x(t), y(t)) - v(x(t), y(t))]y'(t)\,dt =$
$\displaystyle= \int_\alpha^\beta [u(x, y)+iv(x, y)]x'(t)+i[u(x, t)+v(x, y)]y'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))(x'(t)+iy'(t))\,dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt.$
∎

**Example 4.2.13 Важливий**

Обчислити $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z-z_0)^n}$ по колу $C = \{z : |z-z_0| = R\}, n \in \mathbb{N}$.

Зробимо параметризацію: $z - z_0 = Re^{it}, t \in \overrightarrow{[0, 2\pi]}$

$dz = Rie^{it}\, dt$

$$\implies \oint \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}\, dt}{R^n e^{nit}} = i\int_0^{2\pi} R^{1-n} e^{(1-n)it}\, dt = \left[\begin{array}{l} 2\pi i, n = 1 \\ \dfrac{1}{R^{n-1}} \dfrac{1}{(1-n)i} e^{(1-n)it}\Big|_0^{2\pi} = 0, n \neq 1 \end{array}\right. .$$

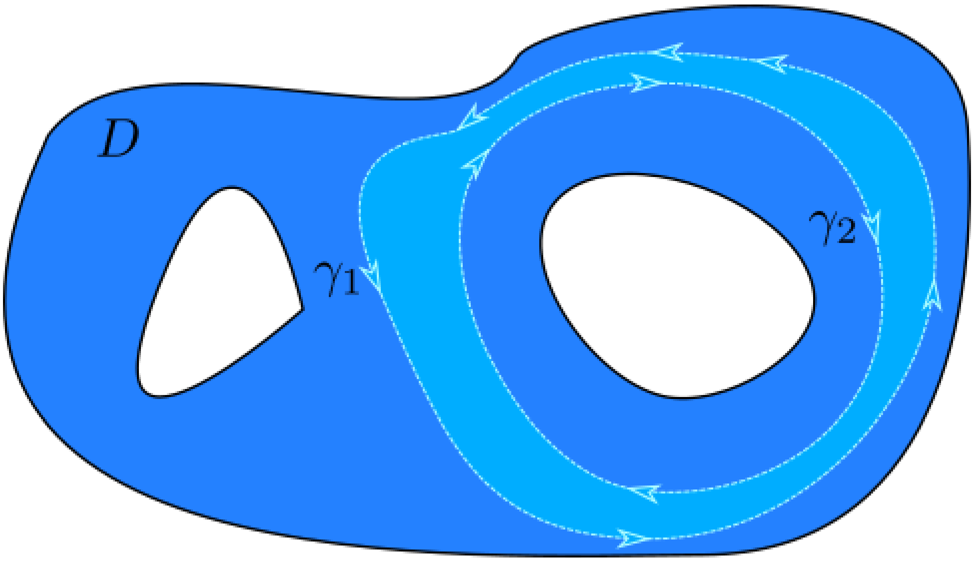
По-перше, зауважимо, що при $n = 1$ інтеграл ніяк не залежить від радіусу кола, а також від центру кола $z_0$.

По-друге, цей приклад гарантує, що умова однозв'язності області важлива для теореми Коші. У цьому випадку область, що всередині кривої $C$ без точки $z_0$, не буде однозв'язною.

**Theorem 4.2.14 Теорема Коші 2**

Задано функцію $f$ - аналітична в області $D$. Відомо, що замкнені контури $\gamma_1$, $\gamma_2$ обмежують однозв'язну область $D_{\gamma_1\gamma_2}$, де $f$ - аналітична. Тоді

$$\oint\limits_{\gamma_1} f(z)\, dz = \oint\limits_{\gamma_2} f(z)\, dz$$




Тут $D_{\gamma_1\gamma_2}$ яскраво-блакитна область

**Proof.**

Вважатимемо, що контури $\gamma_1^+, \gamma_2^+$ протилежно напрямлені.

$$\oint\limits_{\gamma_1^+} f(z)\, dz - \oint\limits_{\gamma_2^+} f(z)\, dz = \oint\limits_{\gamma_1^+} f(z)\, dz + \oint\limits_{\gamma_2^-} f(z)\, dz = \oint\limits_{\gamma_1^+\cup\gamma_2^-} f(z)\, dz =$$

$$= \oint\limits_{\gamma_1^+\cup\gamma_2^-} u\, dx - v\, dy + i \oint\limits_{\gamma_1^+\cup\gamma_2^-} u\, dy + v\, dx \overset{\text{ф-ла Гріна}}{=}$$

$$= \iint\limits_{D_{\gamma_1^+\cup\gamma_2^-}} -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\, dxdy + i \iint\limits_{D_{\gamma_1^+\cup\gamma_2^-}} -\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\, dxdy \overset{\text{умова Коші-Рімана}}{=} 0$$ ■

**Theorem 4.2.15 Інтегральна формула Коші**

Задано функцію $f$ - аналітична в області $D$ і т. $z_0 \in D$. Відомо, що замкнений контур $\gamma \in D$ охоплює т. $z_0$ та обмежує однозв'язну область $D_\gamma$.

Тоді $\oint\limits_\gamma \dfrac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$.

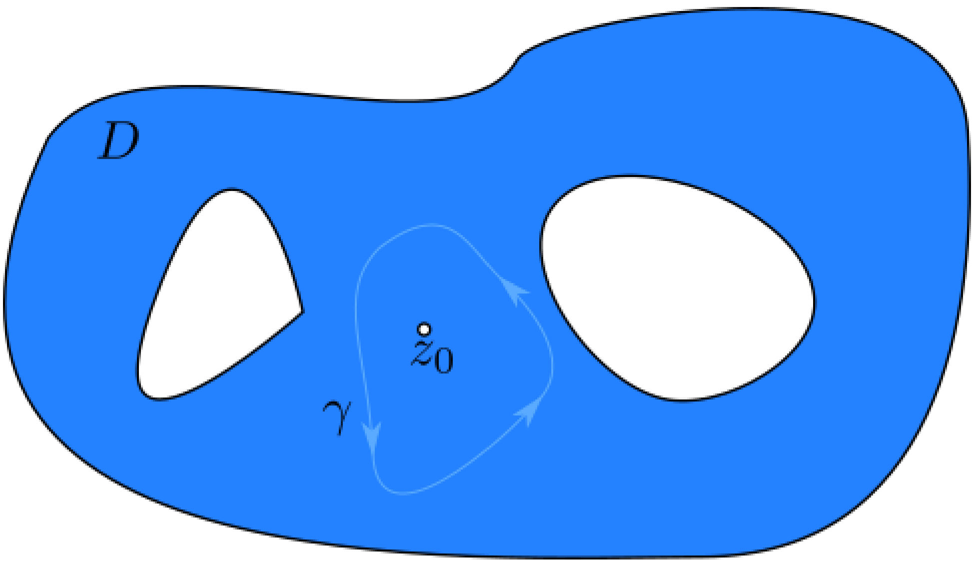



Рис. 1: Контур $\gamma$ утворює однозв'язну область.

**Proof.**
Розглянемо коло $C = \{z : |z - z_0| = \rho\}$ таке, що $C \subset D_\gamma$. Тоді за попередньою теоремою,
$\oint\limits_\gamma \dfrac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \oint\limits_C \dfrac{f(z)}{z - z_0}\,dz \boxed{=}$
Покладемо $z - z_0 = \rho e^{it} \implies dz = \rho i e^{it}\,dt$
$\boxed{=} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} \cdot \rho i e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})\,dt = i\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) - f(z_0)\,dt + i\int_0^{2\pi} f(z_0)\,dt =$
$= i\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) - f(z_0)\,dt + 2\pi i f(z_0).$
А далі зауважимо, що $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})\,dt \to 0$ при $\rho \to 0$ в силу того, що $f$ аналітична. Тому легко отримаємо бажану рівність. ■

**Example 4.2.16** $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\sin z}{z}\,dz = 2\pi i \sin 0 = 0.$

## Більш просунуті речі

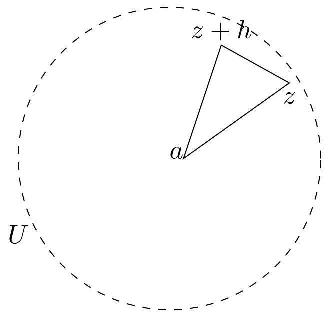
**Definition 4.2.17 Первісною** функції $f$ в області $D$ назвемо таку голоморфну в $D$ функцію $F$, що

$$F'(z) = f(z)$$

**Theorem 4.2.18** Маємо функцію $f$ в області $D$. Нехай $F, \Phi$ - дві первісні в області $D$.
Тоді $\Phi(z) = F(z) + C$.
*Зрозуміло.*

**Lemma 4.2.19** Задано функцію $f \in C(U)$, де $U = \{z : |z - a| < r\}$ - коло. Візьмемо $\Delta \subset U$ - будь-який трикутник, одна з вершин це точка $a$, причому границі лежать також всередині. Відомо, що $\displaystyle\oint_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.
Тоді існує первісна $F(z) = \displaystyle\int_a^z f(\zeta)\,d\zeta$ в області $U$.

**Proof.**

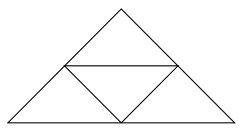



Оберемо довільну точку $z \in U$, беремо таке $h$, щоб $z+h \in U$. Тоді
$\displaystyle\int_a^z f(\zeta)\,d\zeta + \int_z^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta = \int_a^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta$.
Дана рівність виконана в силу того, що $\displaystyle\oint_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.
$\displaystyle F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta$.
Також зауважимо, що $\displaystyle\int_z^{z+h} f(z)\,d\zeta = f(z)h$, а тому звідси
$\displaystyle\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_z^{z+h} |f(\zeta)-f(z)|\,d\zeta < \varepsilon$.
Оскільки $f \in C(U)$, то тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \zeta : |\zeta - z| < \delta \implies |f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon$.
Таким чином, $F'(z) = f(z)$ в будь-якій точці $z \in U$. ■

**Remark 4.2.20** Не обов'язково вимагати, щоб саме будь-який трикутник мав інтеграл нулевий. Адже цей трикутник можна розписати як суму трьох трикутників з вершиною $a$, а всі вони нулі автоматом.

**Lemma 4.2.21** Задано функцію $f$ - голоморфна в області $D$.
Тоді для будь-якого трикутника, $\Delta \subset D$ разом з границями маємо $\displaystyle\oint_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

**Proof.**
!Припустимо, що існує трикутник $\Delta \subset D$ разом з границями, для якого $\displaystyle\left|\oint_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| = M > 0$.
Трикутник $\Delta$ розіб'ємо на 4 трикутника, проводячи середні лінії.



Будемо всі трикутники орієнтовувати в протилежний напрямок.
$\displaystyle\oint_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \oint_{\partial\Delta_{(1)}} f(z)\,dz + \oint_{\partial\Delta_{(2)}} f(z)\,dz + \oint_{\partial\Delta_{(3)}} f(z)\,dz + \oint_{\partial\Delta_{(4)}} f(z)\,dz$.
Думаю, цю рівність пояснювати не треба. Звідси випливає, що серед чотирьох трикутників існує один, який я позначу $\Delta_1$, для якого
$\displaystyle\left|\oint_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4}$.
Ось цей трикутник $\Delta_1$ ми аналогічно розбиваємо, проводячи середнії лінії. Аналогічно записуємо інтеграл за $\partial\Delta_1$ як суму інтегралів по кожному трикутнику. Аналогічно знайдеться серед чотирьох трикутників трикутник, який позначу за $\Delta_2$, для якого
$\displaystyle\left|\oint_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4^2}$.
$\vdots$
Так продовжуємо, отримаємо $\displaystyle\left|\oint_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4^n}, \forall n \geq 1$.
Ці трикутники $\Delta_n$ зобов'язані мати спільну точку $z_0 \in \Delta \subset D$. У силу голоморфності функції $f$,

маємо в т. $z_0$, що
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall z \in U' : |\alpha(z)| = \left| \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$
У цьому випадку $U' = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$. Цей окіл має містити якийсь трикутник, що бере участь у послідовності $\Delta_1, \Delta_2, \dots$. Позначу за $\Delta_N$. Отже,
$\displaystyle\oint_{\partial\Delta_N} f(z)\,dz = \oint_{\partial\Delta_N} f(z_0)\,dz + \oint_{\partial\Delta_N} f'(z_0)(z - z_0)\,dz + \oint_{\partial\Delta_N} \alpha(z)(z - z_0)\,dz = \oint_{\partial\Delta_N} \alpha(z)(z - z_0)\,dz.$
Зауважимо, що $|z - z_0| \le |\partial\Delta_N|$, де $|\partial\Delta_N|$ позначаю за периметр трикутника. Причому за нашою побудовою, $|\partial\Delta_N| = \dfrac{|\partial\Delta|}{2^N}$. Отже,
$\left| \displaystyle\oint_{\partial\Delta_N} f(z)\,dz \right| = \left| \displaystyle\oint_{\partial\Delta_N} \right| \alpha(z)(z - z_0)\,dz < \varepsilon |\partial\Delta_N|^2 = \varepsilon \dfrac{|\partial\Delta|^2}{4^N}.$
Використовуючи найпершу нерівність разом з найостаннішою, отримаємо $0 \le M < \varepsilon |\partial\Delta|^2 \implies M = 0$. Суперечність! ■

**Theorem 4.2.22 Існування первісної локально**
Задано функцію $f$ - голоморфна в області $D$.
Тоді для будь-якого кола $U = \{z : |z - z_0| < r\} \subset D$ існує первісна $F(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$.
*Спочатку друга лема, потім перша лема.*

## 4.3 Степеневі ряди

Для комплексних чисел степеневий ряд визначається так само:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Так само радіус збіжності визначається або за Даламбером, або за Коші-Адамаром.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \text{ або } R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Область збіжності визначає нерівність:

$$|z - z_0| < R$$

**Example 4.3.1** Визначити область збіжності ряду $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2 2^n}$.
Знайдемо радіус $R$ за Коші-Адамара:
$R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\dfrac{1}{|n^2 2^n|}}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{|n^2|}}} = 2$
Отже, степеневий ряд збігається, коли $|z - 1| < 2$.

Надалі будемо вважати, що ми вже знаємо про цей факт:

$$\sum_{z=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \text{ при } |z| < 1$$

Хоча це доволі неважко показати, але тим не менш.

**Theorem 4.3.2 Теорема Тейлора**
Задано функцію $f$ - аналітична в області $D$.
Тоді знайдеться коло $\{\zeta : |\zeta - z_0| < R\} \subset D$, де функція $f$ розкладається в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \rho < R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

**Proof.**
Скористаємось інтегральною формулою Коші: $\oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 2\pi i f(z)$

За ще одною теоремою Коші, ми можемо змінити контуру інтегрування. Тоді отримаємо:
$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z}\,d\zeta \boxed{=}$

Тут ми оберемо таке $\rho$, щоб $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$

$\boxed{=} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}\,d\zeta =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta \cdot (z - z_0)^n$

Нарешті, якщо покласти $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$, то $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Ми внесли інтеграл в середину степеневого ряду. Це також можливо, як в степеневих рядах дійсного аналізу. ■

**Corollary 4.3.3** $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$, де $M = \max\limits_{z \in D} |f(z)|$.

**Proof.**
$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \left| \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| |dz| \overset{\zeta - z_0 = \rho e^{it}}{\leq}$

$\overset{|f(\zeta)| \leq M}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\rho^n}\,dt = \frac{M}{\rho^n}$ ■

**Theorem 4.3.4 Теорема Луівілля**
Задано функцію $f$ - аналітична всюди, але обмежена. Тоді $f(z) = C, C \in \mathbb{C}$.

**Proof.**
За попередньою теоремою, ми можемо розкласти в ряд $f(z)$. Оскільки вона всюди аналітична, ми можемо спрямувати $R \to \infty$. Тоді за щойно доведеним наслідком, $|c_n| \leq \frac{M}{R^n} \to 0$, але $c_n$ ніяк не залежить від обраного $R$.
Отже, $c_n = 0$ при $n \neq 0 \implies f(z) = c_0$. ■

**Corollary 4.3.5** $\cos z$ та $\sin z$ не є обмеженими.

**Theorem 4.3.6** Розклад степеневого ряду є єдиним.
*Це випливає, насправді, з теореми Тейлора. Можна спробувати припустити, що є два ряди, рівні за значенням, але коефіцієнти різні. Причому, радіус збіжності теж може бути різним. Але розписуючи коефіцієнти, ми прийдемо до їхньої рівності через всілякі теореми Коші.*

**Proposition 4.3.7** Задано функцію $f$, що має первісну в області $D$, Тоді $f$ аналітична в $D$.

**Proof.**
Отже, нехай є первісна $F$, яка може розкластися в ряд Тейлора:
$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, |z - z_0| < R$. Тоді

$f(z) = F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \implies f'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z - z_0)^{n-2}$
Ряд має такий самий радіус збіжності. ■

**Proposition 4.3.8** Задано функцію $f$ - аналітична в області $D$. Тоді $f$ - $\infty$-диференційована.

**Proof.**
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \implies$
$\forall k \geq 1 : \exists f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-(k-1))c_n(z-z_0)^{n-k}$.
У всіх такий самий радіус збіжності. ∎

**Theorem 4.3.9** Задані $f, g$ - аналітичні в колі $|z - z_0| < R$ таким чином, що множина $S = \{z : f(z) = g(z)\}$ містить граничну точку $z_0$. Тоді $f(z) = g(z)$ на всьому колі.

**Proof.**
Розкладемо обидві функції в степеневий ряд:
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$
$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$
Далі розглянемо послідовність $\{z_k, k \geq 1\} \subset S$ таку, що $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0$. Тоді $\forall k : f(z_k) = g(z_k) \implies$
$\underbrace{\lim_{k\to\infty} f(z_k)}_{= c_0} = \underbrace{\lim_{k\to\infty} g(z_k)}_{= a_0}$
$f(z_k) - c_0 = f(z_k) - a_0$
Ділимо на $z - z_k$. Тоді
$\frac{1}{z_k - z_0}(f(z_k) - c_0) = \frac{1}{z_k - z_0}(f(z_k) - a_0)$
$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z_k - z_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_k - z_0)^{n-1}$
$\implies c_1 = a_1$ при $k \to \infty$
$f(z_k) - c_0 - c_1(z - z_0) = g(z_k) - a_0 - a_1(z - z_0)$
Ділимо на $(z - z_k)^2$. Тоді...
За МІ, ми отримаємо, що $\forall n \geq 1 : c_n = a_n \Rightarrow f(z) = g(z)$. ∎

**Corollary 4.3.10** Маємо такі ряди:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Радіус збіжності - всюди.

**Proof.**
Доведу лише перший ряд. Решта аналогічно.
Маємо $f(z) = e^z, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
Якщо покласти $S = \mathbb{R}$, то тоді вона має 0 - гранична точка $S$ та $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Отже, $f(z) = g(z)$. ∎

**Corollary 4.3.11** Задано функцію $f$ - аналітична в $D$. Тоді функцію можна розкласти як ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

**Proof.**
$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, |x-x_0| < R$
$g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z-x_0)^n$
Якщо покласти $S = (x_0 - R, x_0 + R)$, де $x_0$ - гранична точка, то отримаємо $f(z) = g(z)$. ■

**Corollary 4.3.12 Узагальнена інтегральна формула Коші**
Задано функцію $f$ - аналітична в області $D$ і т. $z_0 \in D$. Відомо, що замкнений контур $\gamma \in D$ охоплює т. $z_0$ та обмежує однозв'язну область $D_\gamma$.
Тоді $\oint\limits_\gamma \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$.

**Example 4.3.13** Розкласти функцію $\dfrac{1}{5+z^2}$ в ряд Тейлора
$\dfrac{1}{5+z^2} = \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{1+\frac{z^2}{5}} \overset{\frac{z^2}{5}=t}{=} \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{1+t} = \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{1-(-t)} = \dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-t)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{2n}}{5^{n+1}}$
Де $|-t| < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{z^2}{5}\right| < 1 \Rightarrow |z| < \sqrt{5}$

**Example 4.3.14** $\oint\limits_{|z+i|=1} \dfrac{\sin z}{(z+i)^3}\,dz = \dfrac{2\pi i}{2!}(\sin z)''\Big|_{z=-i} = -\pi \operatorname{sh} 1$

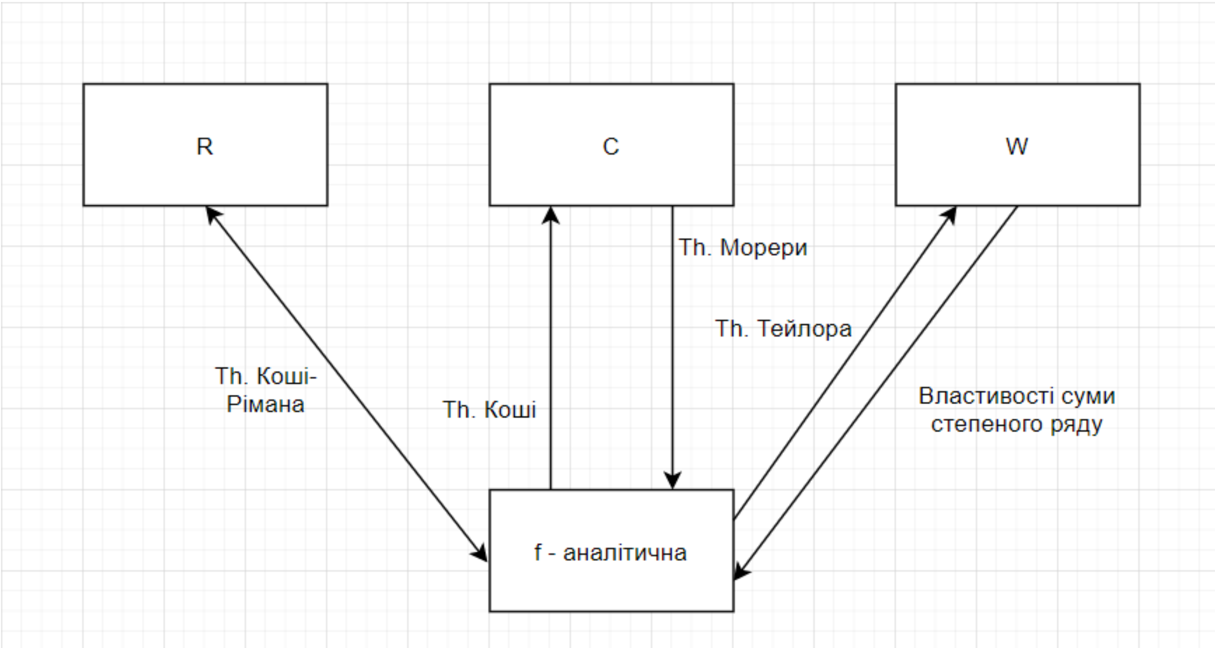
**Theorem 4.3.15 Теорема Морери**
Задано функцію $f \in C(D)$, де $D$ - однозв'язна область. Відомо, що для довільного закмненого контуру $\gamma$ в $D$ виконується $\oint\limits_\gamma f(z)\,dz = 0$.
Тоді $f$ - аналітична в $D$.

**Proof.**
Із умови випливає, що інтеграл не залежить від шляху. Отже, коректно визначеним буде наступний інтеграл:
$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, z_0 \in D$. Доведемо, що $F$ - первісна до $f$.
$\dfrac{F(z_0+\Delta z) - F(z_0)}{\Delta z} = \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z_0+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta$
Крім того, $\int_{z_0}^{z_0+\Delta z} f(z_0)\,d\zeta = f(z_0)\Delta z$. Тоді
$\left|\dfrac{F(z_0+\Delta z) - F(z_0)}{\Delta z} - f(z_0)\right| \le \dfrac{1}{|\Delta z|}\int_{z_0}^{z_0+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)|\,d\zeta \boxed{<}$
Оскільки $f \in C(D)$, то тоді вона неперервна в якомусь колі $\{z : |z-\zeta| > r\} \subset D$. Звідси вона рівномірно неперервна в колі, а далі можна аналогічно (як було на кілька теорем вище) прийти до нерівності $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$.
$\boxed{<} \varepsilon$.
Отже, $F'(z) = f(z)$. Тому $F$ - аналітична, а тоді - $\infty$-диференційована. Випливає, що $\exists F''(z) = f'(z) \implies f$ - аналітична. ■

**Theorem 4.3.16 Узагальнення**
Задано функцію $f \in C(D)$, де $D$ - однозв'язна область. Тоді наступні умови є еквівалентними:

$$\underbrace{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}}_{R} \iff \forall \gamma \subset D : \underbrace{\oint\limits_\gamma f(z)\,dz = 0}_{C} \iff f \underbrace{\text{- розкладається в Тейлора}}_{W}$$

**Proof.**
■




Схематичне доведення

## 4.4 Нулі аналітичної функції

**Definition 4.4.1** Задано функцію $f$ - аналітична в $D$.
Точка $z_0 \in D$ називається **нулем функції** $f(z)$, якщо

$$f(z_0) = 0$$

Точка $z_0 \in D$ називається **нулем кратності** $k$, якщо

$$\exists g - \text{ аналітична в } D : f(z) = (z - z_0)^k g(z), g(z_0) \neq 0$$

**Theorem 4.4.2** Задано функція $f$ - аналітична в $D$.
$z_0$ - корінь кратності $k \iff \begin{cases} f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \\ f^{(k)}(z_0) \neq 0 \end{cases}$.

**Proof.**
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $z_0$ - корінь кратності $k$, тобто $\exists g$ - аналітична: $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, $g(z_0) \neq 0$.
Оскільки $g$ - аналітична, то $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$.
$\Longrightarrow \ f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n+k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m$.
Ліворуч вираз починається з дужки номера $k$. А правий вираз - з дужки номера 0. Тому всі вирази з дужками від 0 до $k - 1$ мають бути нулевими. Отже,
$\begin{cases} f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \\ f^{(k)}(z_0) \neq 0 \end{cases}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\begin{cases} f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \\ f^{(k)}(z_0) \neq 0 \end{cases}$
$\Longrightarrow \ f(z) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-k}$.
Покладемо $g(z) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-k}$, причому $g(z_0) \neq 0$. Тоді $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$
$\Longrightarrow$ $z_0$ - корінь кратності $k$. ■

## 4.5 Ряди Лорана

Ряд Лорана має ось такий вигляд:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Розпишемо даний ряд іншим чином:
$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \boxed{=}$
В першій сумі замінимо лічильник: $n=-k$
$\displaystyle\boxed{=} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}}_{\text{головна частина}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{правильнаа частина}}.$
Далі дізнаємось область збіжності для двох рядів:
- правильна частина: $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \implies |z-z_0| < R.$

- головна частина: тимчасова заміна $t = \dfrac{1}{z-z_0}$. Тоді отримаємо степеневий ряд вигляду $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}t^k$.

$R' = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_{-k}|}} \Rightarrow |t| < R' \implies |z-z_0| > \dfrac{1}{R'} \overset{\text{покладемо}}{=} r.$
Таким чином область збіжності ряду Лорану визначається кільцем:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_{-k}|} = r < |z-z_0| < R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Ба більше, сума ряду Лорана є аналітичною в цьому кільці.

**Theorem 4.5.1 Теорема Лорана**
Задано функцію $f$ - аналітична в кільці $K = \{z : r < |z-z_0| < R\}$. Тоді $f$ розкладається в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$
$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\,d\zeta,\ r<\rho<R$$

**Proof.**
Скористаємось інтегральною формулою Коші: $\displaystyle\oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = 2\pi i f(z).$

За ще одною теоремою Коші, ми можемо змінити контуру інтегрування. Тоді отримаємо:
$f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \boxed{=}$
Тут $c = c_1 \cup c_2^- = \{\zeta : |\zeta-z_0| < R\} \cup \{\zeta : |\zeta-z_0| > r\}$

$$\boxed{=} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c_1\cup c_2^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{c_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - \oint\limits_{c_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{c_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0+z_0-z}\,d\zeta - \oint\limits_{c_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0+z_0-z}\,d\zeta\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{c_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\,d\zeta + \oint\limits_{c_2} \frac{f(\zeta)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}\,d\zeta\right) \boxed{=}$$

Вважаємо, що $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$ та $\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| < 1$

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_2}\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^n}\,d\zeta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\cdot(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_2}f(\zeta)(\zeta-z_0)^n\,d\zeta\cdot\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Прийшли до ряду Лорана. За теоремою Коші, ми можемо змінити коло $c_1$ та $c_2$, щоб коло було радіусом $\rho$.

Нарешті, якщо покласти $c_m=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint\limits_{|\zeta-z|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\,d\zeta$, $m\in\mathbb{Z}$, то

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n. \qquad \blacksquare$$

**Theorem 4.5.2** Розклад в ряд Лорана є єдиним в заданому кільці.
*Випливає з теореми Лорана. Якщо вважати, що є різні розклади ряда Тейлора в різних кільцях, то ми можем взяти інше кільце, щоб ряд розпадався одночасно. А там буде супереченість.*

**Theorem 4.5.3** Розкласти $f(z)=\dfrac{1}{z(z-3)}$ в ряд Лорана в т. $z_0=0$.

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\frac{1}{-3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{3^{n+1}}=$$

$$=-\frac{1}{3z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{3^{n+1}},\text{ якщо }\left|\frac{z}{3}\right|<1\iff|z|<3$$

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+2}},\text{ якщо }\left|\frac{3}{z}\right|<1\iff|z|>3$$

## 4.6 Особливі точки

**Definition 4.6.1** Точка $z_0$ називається **особливою для** $f(z)$, якщо в ній вона не є визначеною.

**Definition 4.6.2** Точка $z_0$ називається **ізольовано особливою для** $f(z)$, якщо в деякому проколеному околі т. $z_0$ $f$ - аналітична.

**Класифікація особливих ізольованих точок**:
- **усувна**, якщо $\exists\lim\limits_{z\to z_0}f(z)\in\mathbb{C}$;
- **полюс**, якщо $\exists\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$;
- **суттєва**, якщо $\nexists\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$.

### 4.6.1 Усувна точка

**Theorem 4.6.3** Задано функцію $f$ - аналітична в проколеному околі т. $z_0$.
Точка $z_0$ - усувна $\iff$ при розкладі $f(z)$ в ряд Лорана всі коефіцієнти головної частині є нулевими.

**Proof.**
Для доведення $\boxed{\Rightarrow}$ ми оцінимо коефіцієнти головної частини:

$$|c_{-k}|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-k+1}}\,dz\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint\limits_{|z-z_0|=\rho}f(z)(z-z_0)^{k-1}\,dz\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|\left|(z-z_0)^{k-1}\right||\,dz|\le\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|\rho^{k-1}|\,dz|\le$$

Через те, що $z_0$ - усувна, то $\exists\lim\limits_{z\to z_0}f(z)\in\mathbb{C}$, а тому функція є обмеженою в околі т. $z_0$.

$$\le\frac{\rho^{k-1}}{2\pi}\oint\limits_{|z-z_0|=\rho}M|\,dz|=M\rho^{k-1}.$$

За наслідком теореми Коші, ми можемо $\rho \to 0$. Тоді $0 \le |c_{-k}| \le M\rho^{k-1} \to 0 \ \forall k \ge 1$.

У випадку $\boxed{\Leftarrow}$ ряд Лорана перетвориться в степеневий ряд, де можна обчислити ліміт при $z \to z_0$. ■

**Corollary 4.6.4** Якщо т. $z_0$ - усувна, то при розкладі $f(z)$ матиме вигляд степеневого ряду. Усувну точку $z_0$ можна довизначити значенням $c_0$ з ряду. Тоді $f$ - аналітична в цій точці.

### 4.6.2 Полюс

Якщо т. $z_0$ є полюсом, то $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.

Розглянемо функцію $h(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, для якого $z_0$ - усувна. Довизначивши функцію в т. $z_0$, ми отримаємо, що $h(z_0) = 0$. Звідси в ній вона аналітична, а також є нулем функції.

Вважатимемо, що $z_0$ - нуль кратності $k$, тобто $h(z) = (z-z_0)^k g(z)$, $g(z_0) \ne 0$. Тоді $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^k g(z)}$.

**Definition 4.6.5** Точка $z_0$ для $f$ є **полюсом степені (кратності)** $k$, якщо для функції $h(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ точка $z_0$ - нуль кратності $k$.

**Lemma 4.6.6** $z_0$ - полюс для $f$ степені $k \iff \exists \lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)^k f(z) = a$. Причому $a \ne 0, a \ne \infty$.

**Proof.**

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $z_0$ - полюс степені $k$. Тоді

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)^k}{h(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)^k g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} \ne 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\exists \lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)^k f(z) = a \ne 0$. Тоді для функції $(z-z_0)^k f(z)$ т. $z_0$ - усувна. Тому якщо довизначити її, то створимо нову функцію:

$g(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^k f(z)}$ - аналітична $\implies g(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{(z-z_0)^k f(z)} = \dfrac{1}{a}$.

Тому $\dfrac{1}{f(z)} = g(z)(z-z_0)^k$ і $z_0$ - корінь кратності $k$ для $h(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. ■

**Proposition 4.6.7** Задано таку функцію $f(z) = \dfrac{a(z)}{b(z)}$, що $z_0$ - корінь рівняння для чисельника і знаменника з відповідними кратностями $k$ і $m$. Тоді $z_0$ - $\left[\begin{array}{c} \text{усувна}, k \ge m \\ \text{полюс степені } m-k, k < m \end{array}\right.$

**Proof.**

Дійсно, за умовою твердження, $f(z) = \dfrac{(z-z_0)^k a_1(z)}{(z-z_0)^m b_1(z)}$. При $k < m$ отримаємо, що $z - z_0$ залишається в знаменнику. Тому при $z \to z_0$ функція прямує до нескінченності.

А якщо $k \ge m$, то при $z \to z_0$ отримаємо $f(z) \to 0$. ■

**Theorem 4.6.8** Задано функцію $f$ - аналітична в проколеному околі т. $z_0$.

Точка $z_0$ є полюсом степені $k \iff$ при розкладі $f(z)$ в ряд Лорана головна частина містить лише $k$ доданків.

**Proof.**

$z_0$ - полюс степені $k \iff$ для $\dfrac{1}{f(z)} = g(z)(z-z_0)^k$, $z_0$ - нуль кратності $k \iff f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^k} \underbrace{\dfrac{1}{g(z)}}_{=h(z)} = \dfrac{1}{(z-z_0)^k} h(z)$, $h(z)$ - аналітична в околі т. $z_0 \iff f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^k} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$,

$a_0 = h(z_0) \ne 0 \iff f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k} \underset{n-k=m}{=} \sum\limits_{m=-k}^{\infty} a_{m+k}(z-z_0)^m \underset{a_{m-k}=c_m}{=} \sum\limits_{m=-k}^{\infty} c_m (z-z_0)^m$

$\iff$ ряд Лорана містить лише $k$ доданків головної частини. ■

### 4.6.3 Суттєва точка

**Theorem 4.6.9** Задано функцію $f$ - аналітична в проколеному околі т. $z_0$.
Точка $z_0$ є суттєвою $\iff$ при розкладі $f(z)$ в ряд Лорана головна частини має нескінченну кількість доданків.
*Просто тому, що при кількості 0 буде усувна точка. Якщо скінченна кількість, то це вже полюс.*

**Example 4.6.10** Знайти всі особливі точки для функції $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{\sin z}$.
Проблема виникає в $\sin z = 0 \iff z_k = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
Перевіримо т. $z_0 = 0$:
$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z-1}{\sin z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z-1}{z}\dfrac{z}{\sin z} \overset{\text{чудові границі}}{=} 1\cdot 1 = 1.$
Отже, $z_0$ - усувна точка.
Розглянемо далі т. $z_k = \pi k$, $k \neq 0$:
Зауважимо, що $\sin z_k = 0$, але $(\sin z_k)' = \cos z_k \neq 0$. Тому для знаменнику $z_k$ - корінь кратності 1
$\lim\limits_{z\to \pi k} \dfrac{e^z-1}{\sin z} = \infty$ (в чисельнику буде якесь ненульове число).
Таким чином, $z_k$ - полюс порядка 1.

**Example 4.6.11** Знайти всі особливі точки для функції $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.
Проблемна точка: $z = 0$.
Розкладемо функцію в ряд Лорана в т. $z_0 = 0$:
$e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^n n!}$.
Ряд Лорана містить нескінченну кількість головної частини. А тому $z = 0$ - суттєва точка.

**Remark 4.6.12** Першу/другу чудові границі варто було б показати окремо, що вони реально працюють в комплексному випадку.

$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim\limits_{z\to 0} \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n+1)!} = \lim\limits_{z\to 0}\left(1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n+1)!}\right) = 1 + 0 = 1.$
Аналогічно для другої чудової границі, $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z-1}{z} = 1$.

## 4.7 Лишки

**Definition 4.7.1** Задано функцію $f$ - аналітична в проколеному околі $z_0$ та контур $\gamma$, що охоплює т. $z_0$ та належить проколеному околу т. $z_0$.
**Лишком функціїї $f(z)$ в т. $z_0$** називається ось такий вираз:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz$$

**Remark 4.7.2** Із теореми Коші випливає, що нема різниці, яку криву $\gamma$, що охоплює $z_0$, треба обирати. Тож означення є коректним.

**Theorem 4.7.3** Задано функцію $f$ - аналітична в проколеному околі $z_0$.
Тоді $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$.

**Proof.**
Дійсно, оскільки $f$ - аналітична, ми можемо розкласти в Лорана. Зокрема
$c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z)\,dz = \operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z).$ ■

**Методи знаходження лишків для різних типів особливих точок**:

### 4.7.1 Усувна точка

**Lemma 4.7.4** Якщо т. $z_0$ - усувна, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

**Proof.**
Дійсно, при т. $z_0$ - усувна - отримаємо, що Лоран не містить головної частини, а тому
$c_{-1} = \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$. ■

### 4.7.2 Полюс

**Theorem 4.7.5** Якщо $z_0$ - полюс порядку $k$, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z\to z_0} (f(z)(z-z_0)^k)^{(k-1)}$.

**Proof.**
$z_0$ - полюс степені $k$, тоді

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \implies$$

$$f(z)(z-z_0)^k = c_{-k} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+k}.$$

Далі продиферинціюємо $(k-1)$ разів, отримавши наступне:

$$(f(z)(z-z_0)^k)^{(k-1)} = (k-1)!c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-k)\cdots(n-2)c_n(z-z_0)^{n+1}.$$

В обох частинах рівності знайдемо границю:

$$\lim_{z\to z_0} (f(z)(z-z_0)^k)^{(k-1)} = (k-1)!c_{-1} + 0 = (k-1)! \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$ ■

**Corollary 4.7.6 Частинні випадки**
1. Якщо $z_0$ - полюс степені 1, тоді $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$.

2. Якщо $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $z_0$ - не нуль чисельника, але нуль знаменника кратності 1. Тоді $z_0$ - полюс порядку 1. Отже:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{(z-z_0)}} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)}$$

$$\implies \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)}.$$

### 4.7.3 Суттєва точка

Тут $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$ рахується лише за розкладом в ряд Лорана за рахунок здобуття $c_{-1}$.

**Example 4.7.7** Знайти всі лишки функції $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{\sin z}$.
Уже знаємо, що $z = 0$ - усувна та $z = \pi k, k \neq 0$ - полюс порядку 1.
$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$.

$$\operatorname*{res}_{z=\pi k} f(z) = \lim_{z\to\pi k} \frac{e^z-1}{\sin z}(z-\pi k) \overset{z-\pi k=t}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t e^{\pi k}-1}{\sin(\pi k + t)} t = \lim_{t\to 0} \frac{e^t e^{\pi k} - 1}{(-1)^k \sin t} t = (-1)^k (e^{\pi k} - 1).$$

**Example 4.7.8** Знайти всі лишки функції $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.
Уже знаємо, що т. $z = 0$ є суттєвою. Але все рівно звернемось до ряду Лорана:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{z^n n!}.$$

Коефіцієнтом перед $\dfrac{1}{z}$ буде $c_{-1} = 1$. Отже. $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 1$.

## 4.8 Застосування лишків для обчислення інтегралів

**Theorem 4.8.1 Теорема Коші для лишків, 1***
Задано функцію $f$ - аналітична в області $D$ за винятком скінченної кількості особливих точок - і замкнений контур $\gamma$, якийй охоплює особливі точки $z_1, z_2, \cdots z_n$.

Тоді $\displaystyle\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$

**Proof.**
Для кожної точки $z_1, \cdots, z_n$ ми розглянемо коло $U_j = \{z : |z - z_j| < \delta_j\}$, причому вони не перетинаються між собою. Тут $\gamma$ охоплює кожну $U_j$. Тоді

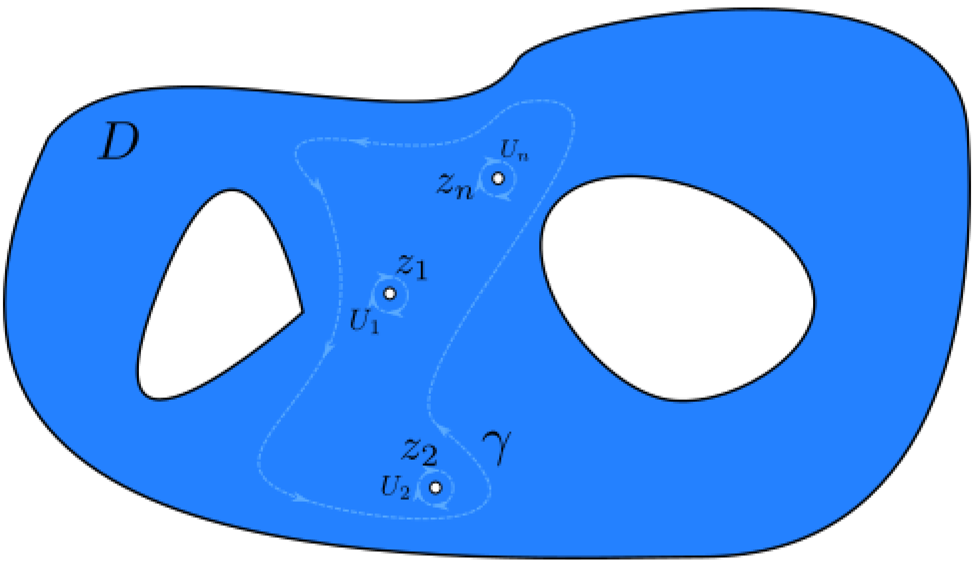
$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz - \left(\oint\limits_{U_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint\limits_{U_n} f(z)\,dz\right) +$$
$$+ \left(\oint\limits_{U_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint\limits_{U_n} f(z)\,dz\right) \boxed{=}$$

Для кожного інтегралу з мінусом ми замінюємо знак, змінюючи напрямок контуру

$$\boxed{=} \oint\limits_{\gamma \cup U_1^- \cup \cdots \cup U_n^-} f(z)\,dz + \left(\oint\limits_{U_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint\limits_{U_n} f(z)\,dz\right) \boxed{=}$$

Перший інтеграл обмежує всю область $D$, окрім тих, що потрапляють до кожного кола. А така область є однорідною. Тому за теоремою Коші, перший інтеграл буде нулевим

$$\boxed{=} \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{U_k} f(z)\,dz \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$ ■




**Example 4.8.2** $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)} \boxed{=}$

Розглянемо функцію $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$. Тут $z = 1, z = 2$ - обидві полюси 1 порядку, тому

$\displaystyle\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z}{(z-1)(z-2)}(z-1) = -1$

$\displaystyle\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = \lim_{z \to 2} \frac{z}{(z-1)(z-2)}(z-2) = 2$

$\boxed{=} 2\pi i (\operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=2} f(z)) = 2\pi i.$

**Theorem 4.8.3 Теорема Коші для лишків, 2***
Задано функцію $f$ - аналітична в $\mathbb{C}$ за винятком скінченної кількості особливих точок $z_1, z_2, \cdots z_n$.

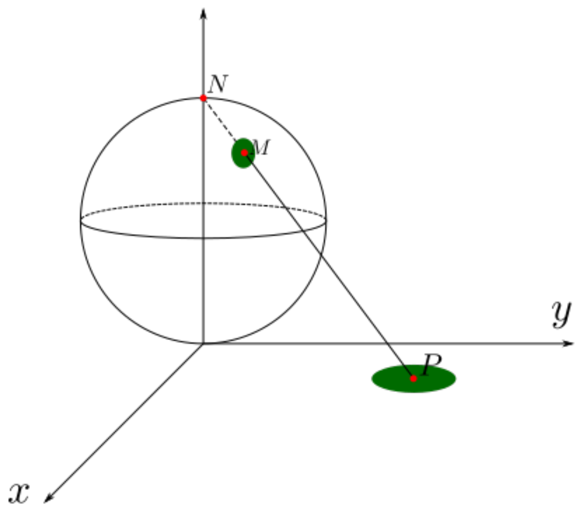
Тоді (див. п. 2.9.3. про лишки в $\infty$) $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0.$

**Proof.**
Розглянемо замкнений контур $\gamma$, що охоплює всі скінченні особливі точки
$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma^+} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$$
■

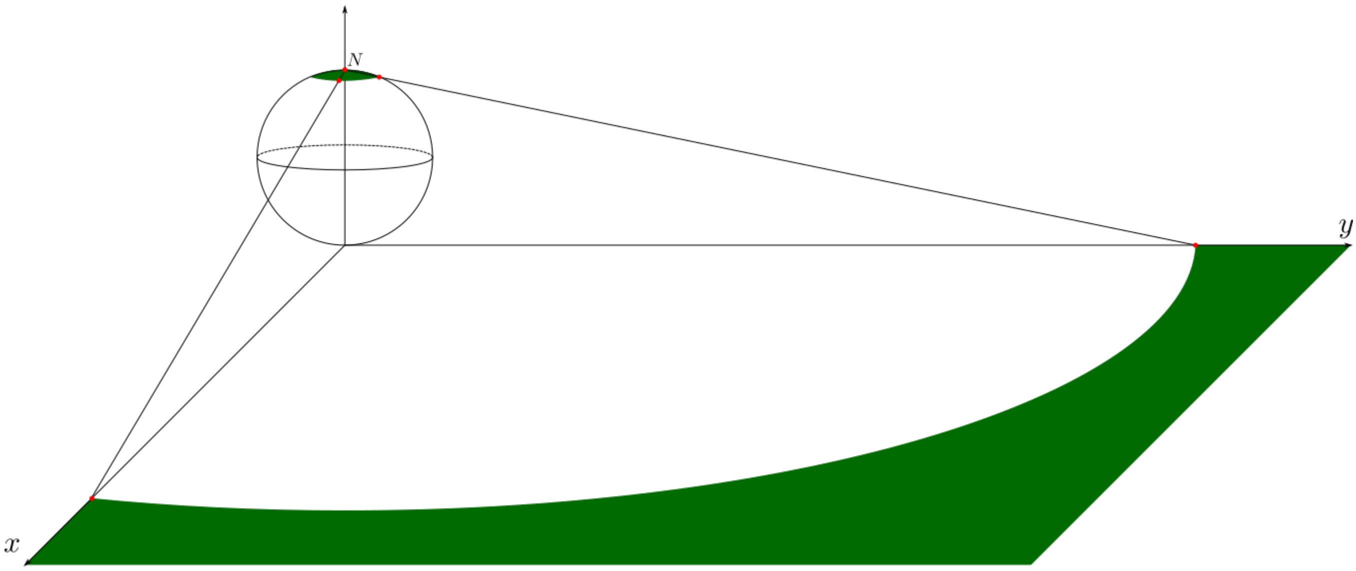
**Remark 4.8.4** Ми не розглядаємо нескінченну кількість особливих точок, оскільки в цьому випадку з'являються граничні точки. А вони не є ізольованими.

## 4.9 Нескінченна особлива точка

Хочеться піти здалеку, як зрозуміти цю дивну точку, $z = \infty$.
Вважаємо, що в нас є система координат, на якій ми побудуємо сферу радіусом $\frac{1}{2}$ таким чином, щоб сфера торкалась площини $XOY$ в точці $(0, 0)$. На площині $XOY$ кожна точка з координатами $(x, y)$ буде відповідати значенню комплексного числа $z = x + iy$. І позначимо верхню точку сфери $N$.




Через точку із $XOY$ (скажімо, т. $P$) та т. $N$ проведемо пряму. Отримаємо точку перетину $M$. Тоді кожна точка сфери відповідає точці $XOY$. Звідси якщо взяти якийсь окіл т. $M$, то вона відповідатиме окілу т. $P$.
І навпаки: кожна точка $XOY$ відповідає т. сфери... Але не в т. $N$. Взагалі кажучи, жодна точка $XOY$ не відповідає $N$, оскільки пряма буде паралельна до цієї площини. Тому вирішили, що для т. $N$ ставимо в відповідність т. $z = \infty$.
Тепер візьмемо окіл т. $N$ радіуса $D$ і подивимось, який окіл відповідає $XOY$. Принаймні це нам знадобиться, якщо ми хочемо розкласти в ряд Лорана.
Отримаємо площину вигляду $|z| > D$. Тобто всі точки комплексної площини за межами кола.




Якось так.

### 4.9.1 Розклад в Лорана

Нехай $f$ - аналітична на $\{z : |z| > D\}$. Зробимо перетворення $w = \frac{1}{z}$. Точка $z = \infty$ переводить в точку $w = 0$.
Розглянемо ряд Лорана в околі $z = \infty$, тобто для $\{z : |z| > D\}$.
$f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = g(w)\boxed{=}$
$|z| > D \iff \left|\frac{1}{w}\right| > D \iff |w| < \frac{1}{D}$.
$\boxed{=}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{w^k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k}_{\text{головна частина}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z_n}}_{\text{правильна частина}}$.
Отримали ряд Лорана в околі $z = \infty$.

Коефіцієнти ряду обчислюються ось так:
$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{g(w)}{w^{n+1}}\, dw\boxed{=}$
Проведемо заміну: $w = \frac{1}{z} \Rightarrow g(w) = f(z) \implies dw = -\frac{1}{z^2}\, dz$.
І візьмемо контур $|w| = \rho$ - коло, щоб було простіше рахувати. Тоді якщо $w = \rho e^{it}, t \in [0, \vec{2\pi}]$ - обхід проти годинникової стрілки, то
$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{\rho} e^{-it}, t \in [2\vec{\pi}, 0]$ - обхід за годинниковою стрілкою.
Отже, $|w| = \rho$ переводиться в $|z| = \frac{1}{\rho}$ зі зміном орієнтації.
Тому $\gamma \to \gamma_-$ (перед інтегралом буде ще знак мінус).
$\boxed{=} -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} -\frac{f(z)z^{n+1}}{z^2}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z) z^{n-1}\, dz$.
Остаточно:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k}_{\text{головна частина}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z_n}}_{\text{правильна частина}}$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z) z^{n-1}\, dz$$

### 4.9.2 Ізольовані точки

**Definition 4.9.1** Точка $z = \infty$ називається **ізольованою особливою для** $f(z)$, якщо $\exists R$ : в області $\{z : |z| > R\}$ функція $f$ - аналітична.

**Класифікація ізольованих точок**:
- **усувна**, якщо $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$;
- **полюс**, якщо $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$;
- **суттєва**, якщо $\nexists \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Порядок полюса $z = \infty$: $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty \iff \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.
Тоді порядком цієї точки функції $f(z)$ називають кратність нуля функції $h(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, а точніше кратність нуля точки $w_0 = 0$ для функції $g(w) = h\left(\dfrac{1}{w}\right)$.

**Proposition 4.9.2** Маємо:
Точка $z = \infty$ - усувна $\iff$ ряд Лорана не містить головної частини.
Точка $z = \infty$ - полюс порядку $k$ $\iff$ ряд Лорана містить $k$ доданків головної частини.
Точка $z = \infty$ - суттєва $\iff$ ряд Лорана містить нескінченну кількість доданків головної частини.
*Всі ці твердження випливають з того, що ряд Лорана в* $z = \infty$ *- це ряд Лорана в* $w = \dfrac{1}{z} = 0$.

### 4.9.3 Лишки

**Definition 4.9.3** Задано функцію $f$ та ізольована точка $z = \infty$.
**Лишком функції** $f(z)$ **в т.** $\infty$ називається ось такий вираз:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_-} f(z)\,dz$$

За межами $\gamma_-$ немає інших особливих точок.

**Theorem 4.9.4** Задана функція $f$ та ізольована точка $z = \infty$. Тоді $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -c_1$.
*Випливає з розкладу ряду Лорана та визначення коефіцієнтів*

Шукати лишки можна за аналогічними теоремами в залежності від класифікації ізольованої точки.

**Example 4.9.5** Визначити тип ізольованої точки $z_* = \infty$ для функції $f(z) = 1 - z + 2z^2$ і знайти лишок.
Тут вже функція розкладена в ряд Лорана в т. $z_* = \infty$, що містить дві доданки головної частини.
А тому $z_* = \infty$ - полюс порядку 2.
Коефіцієнт перед $z$: $c_1 = -1$. Тому звідси $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -c_1 = 1$.

## 4.10 Застосування лишків до дійсних інтегралів

I. $R(x, y)$ - дробово-раціональна функція від $x, y$
Розглянемо $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx \boxed{=}$
Заміна: $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
$e^{ix} = z \Rightarrow z \in \{z : |z| = 1\}$ - коло радіуса 1, що рухається проти годинникової стрілки
$e^{-ix} = \dfrac{1}{z}$
$\Rightarrow \cos x = \dfrac{z + \frac{1}{z}}{2} = \dfrac{z^2 + 1}{2z}$
$\Rightarrow \sin x = \dfrac{z - \frac{1}{z}}{2} = \dfrac{z^2 - 1}{2zi}$
$dz = ie^{ix}\,dx$

$\boxed{=} - \oint\limits_{|z|=1} iR\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right)\frac{dz}{z}\boxed{=}$

Підінтегральна функція - дробово-раціональний вираз від $z$, що має скінченну кількість особливих точок, в тому числі скінченну кількість полюсів в колі $|z| = 1$

$\boxed{=} 2\pi\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_j}\left(R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right)\frac{1}{z}\right)$

**Example.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x+\sin x}\boxed{=}$

Проводимо ту саму заміну: $z = e^{ix} \Rightarrow \cos x = \dfrac{z^2+1}{2z}, \sin x = \dfrac{z^2-1}{2zi}$

$dx = \dfrac{-i}{z}\,dz$

$\boxed{=} - i\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z^2+1}{2z}+\frac{z^2-1}{2zi}}\frac{dz}{z} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{2}{4iz+iz^2+i+z^2-1}\,dz =$

$= \oint\limits_{|z|=1}\frac{2}{z^2(1+i)+4iz+i-1}\,dz\boxed{=}$

Перепозначу: $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1+i)+4iz+i-1}$

Подивимось на особливі точки підінтегрального виразу:

$z^2(1+i)+4iz+i-1 = 0$

$z_1 = \dfrac{\sqrt{2}-2}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$

$z_2 = -\dfrac{\sqrt{2}+2}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$

Обидва вони полюси першої кратності. Лише одна точка - $z_1$ - потрапляє в коло $|z| = 1$

$f(z) = \dfrac{1}{(1+i)(z-z_1)(z-z_2)}$

$\boxed{=} 2\cdot 2\pi i\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = 4\pi i\lim_{z\to z_1}\dfrac{1}{(1+i)(z-z_2)} = 4\pi i\dfrac{1}{(1+i)(z_1-z_2)} = \cdots =$

$= \sqrt{2}\pi$

II. Невласні дійсні інтеграли

Розглянемо $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{обчислимо}}{=\!=} p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{+A} f(x)dx$

**Theorem.** Задана функція $f(x)$ на $\mathbb{R}$ така, що вона продовжується аналітично на верхню півплощину $\mathbb{C}$ (тобто $\operatorname{Im} z \geq 0$) за виключенням скінченної кількості точок $z_1, \cdots, z_n$

Наша функція $f(z)$ така, що $\exists \lim\limits_{|z|\to\infty}|zf(z)| = 0$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)$$

**Proof.**

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx =$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{\overrightarrow{[-R,R]}} f(z)dz + \int\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)dz - \int\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)dz\right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{\substack{\overrightarrow{[-R,R]}\cup|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)dz - \int\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)dz\right) \boxed{=}$$

Обидва інтеграли мають напрямок в противогодинникової стрілки

Розглянемо $\left|\int\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)dz\right| \leq \int\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geq 0}} |f(z)||dz| =$

Заміна: $z = Re^{it}, t \in [0,\pi], |dz| = R\,dt$

$= \int_0^\pi f(Re^{it})R\,dt$

Нас цікавить границя цього модулю:

$\lim\limits_{R\to\infty} f(Re^{it})R = \lim\limits_{\substack{|z|\to\infty\\ |z|=R}} |zf(z)| \overset{\text{умова}}{=} 0$

Звідси $\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^\pi f(Re^{it})R\,dt = 0$

$\boxed{=}\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{\substack{\overrightarrow{[-R,R]}\cup|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)dz =$

Для великих $R$ наш контур охоплює всі особливі точки $f(z)$. Але наша кількість скінченна

$= \sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=z_j} f(z)$ ■

**Example.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \boxed{=}$

Розглянемо функцію $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$, при цьому $\operatorname{Im} z > 0$

Для неї є чотири проблемні точки $z_1, z_2, z_3, z_4$, але потрапляють лише $z_1, z_4$ - два полюси, обидва першого порядку:

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow \operatorname*{res}\limits_{z=z_1} f(z) = \frac{i+1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}i}$

$z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow \operatorname*{res}\limits_{z=z_4} f(z) = \frac{-i+1}{(z_4-z_1)(z_4-z_2)(z_4-z_3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}i}$

І нарешті, треба перевірити умову: $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = \lim\limits_{z\to\infty} z\cdot\frac{z^2+1}{z^4+1} = 0$

$\boxed{=}2\pi i\frac{1}{\sqrt{2}i} = \pi\sqrt{2}$

III. Розглянемо $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx$ або $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx$

Варто зауважити, що $\cos\alpha x = \operatorname{Re} e^{i\alpha x}$, $\sin\alpha x = \operatorname{Im} e^{i\alpha x}$

Тому:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$

Тоді далі будемо розглядати

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = \lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$

**Lemma. Лема Жордана**

Задана функція $f$ - аналітична на верхній півплощині $\mathbb{C}$ за виключенням скінченної кількості особливих точок.

Відомо, що $\lim\limits_{|z|\to\infty} \max\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} |f(z)| = 0$. Тоді

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0$$

**Proof.**

$$\left| \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)e^{i\alpha z}\,dz \right| \leq \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} |f(z)e^{i\alpha z}|\,|dz| =$$

Заміна: $z = Re^{it}, t \in [0, \pi], |dz| = R\,dt$

$$= \int_0^{pi} \left| f(Re^{it})e^{iR\alpha e^{it}} \right| R\,dt \boxed{\leq}$$

Розглянемо окремо $\left|e^{iR\alpha e^{it}}\right| = \left|e^{iR\alpha(\cos t + i\sin t)}\right| = \underbrace{|e^{iR\alpha\cos t}|}_{=1}|e^{-\alpha R\sin t}| = e^{-\alpha R\sin t}$

$$\sin t \geq \begin{cases} \frac{2}{\pi}t, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \\ \frac{2}{\pi}(\pi - t), t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \overset{\text{позначимо}}{=} g(t)$$

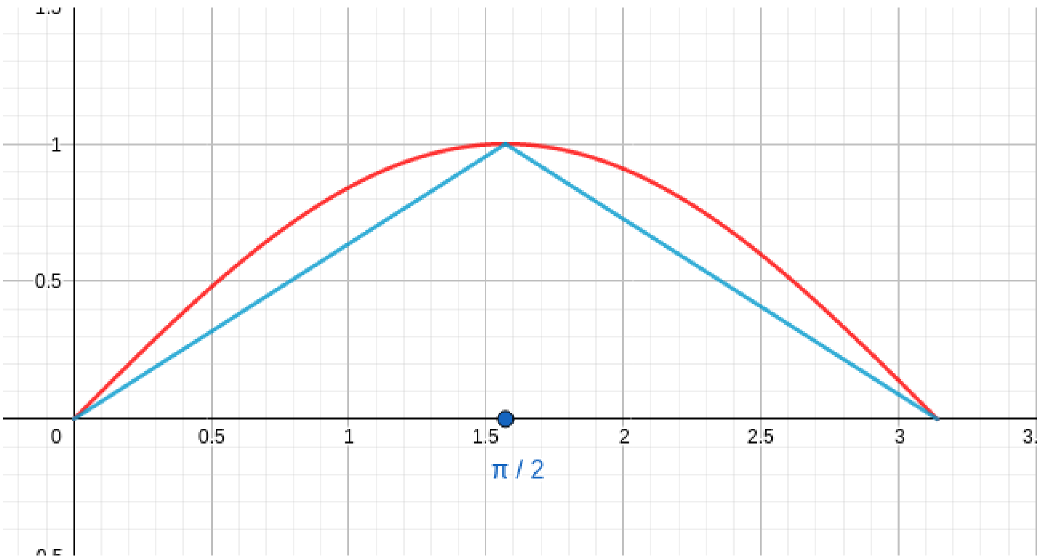



Рис. 2: Червоний - $\sin t$, Синій - $g(t)$

Отже,
$e^{-\alpha R\sin t} \leq e^{-\alpha R g(t)}$

$$\boxed{\leq} \max_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} |f(z)| \int_0^{\pi} e^{-\alpha R g(t)} R\,dt = \max_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} |f(z)| \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\frac{2\pi}{t}} R\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\alpha R\frac{2}{\pi}(\pi-t)} R\,dt \right) =$$

$$= \max_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} |f(z)| R \left( -\frac{\pi}{2\alpha R}(e^{-\alpha R} - 1) + \frac{\pi}{2\alpha R}(1 - e^{-\alpha R}) \right) = \max_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} |f(z)| \left( -\frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha R} + \frac{\pi}{\alpha} \right) =$$

$$= \max_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} |f(z)| \frac{\pi}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha R}\right)$$

Якщо $R \to \infty$, то отриманий вираз прямує до нуля. Таким чином,

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0 \blacksquare$$

**Theorem.** Задана функція $f(x)$ на $\mathbb{R}$ така, що вона продовжується аналітично на верхню півплощину $\mathbb{C}$ за виключенням скінченної кількості точок $z_1, \cdots, z_n$
Наша функція $f(z)$ така, що $\exists \lim\limits_{|z|\to\infty} \max\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} |f(z)| = 0$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)e^{i\alpha z}$$

**Proof.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{\overrightarrow{[-R,R]}} f(z)e^{i\alpha z}dz + \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)e^{i\alpha z}dz - \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)e^{i\alpha z}dz\right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{\substack{\overrightarrow{[-R,R]}\cup|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)e^{i\alpha z}dz - \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)e^{i\alpha z}dz\right) \overset{\text{Lm. Жордана}}{=}$$

$$= \lim_{R\to\infty} (2\pi i) \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)e^{i\alpha z} = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)e^{i\alpha z} \blacksquare$$

**Example.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20} = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+4x+20} \boxed{=}$

Розглянемо функцію $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4z+20}$, де $\operatorname{Im} z \geq 0$

$z_1, z_2$ - корені знаменнику, але $z_1 = -2+4i$ - полюс першого порядку - потрапляє в нашу область

Більш того, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z}{z^2+4z+20} = 0$

$\boxed{=} \operatorname{Im}[2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=z_1} f(z)e^{iz}] = \operatorname{Im}\left[2\pi i \lim\limits_{z\to -2+4i} \dfrac{ze^{iz}}{2+2+4i}\right] = \cdots =$

$= \operatorname{Im}\left[\dfrac{\pi}{4}e^{-4}(4i-2)(\cos 2 - i\sin 2)\right] = \dfrac{\pi}{4}e^{-4}(4\cos 2 + 2\sin 2)$

# 5 Ряди Фур'є

## Передмова до цієї теми

Зазвичай аби розповісти про ряди Фур'є та їхнє появлення на світ, необхідно знати багато тем з лінійної алгебри 2 семестру. Користуючись нагодою, я хочу передати величезний "привіт"одному викладачу, що максимально завалив зміст дисципліни лін. ал. (із КН ММСА)

І водночас двічі вдячний ГБ за уникнення таких складнощів та дав, в принципі, достойне оповідання рядів Фур'є без лінійки.

## 5.1 Початок

Нехай задана $g(z)$ - аналітична в кільці $K = \{z : 1 - \varepsilon_1 < |z| < 1 + \varepsilon_2\}$. Причому $\{z : |z| = 1\} \subset K$
Розкладемо $g(z)$ в ряд Лорана за степенем $z$ в цьому кільці:

$g(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$,

де $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{g(z)}{z^{n+1}}\, dz$

А тепер зробимо наступне:
$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{ix}, x \in [0, 2\pi]$. Тоді
$g(z) = g(e^{ix}) \overset{\text{позн}}{=} f(x)$

$c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{g(z)}{z^{n+1}}\, dz \overset{z=e^{ix}}{=} \dfrac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \dfrac{f(x)}{e^{(n+1)ix}} i e^{ix}\, dx = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$

Отримали комплексну форму ряду Фур'є

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, c_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$

Є деякі необхідні умови:
$f \in D([0, 2\pi]) \iff f$ - $2\pi$-періодична інтегрована на будь-якому відрізку $\iff f \in D([-\pi, \pi])$
За функцією $f(x)$ будуємо ряд Фур'є:

$S(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, c_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$

**Головні питання до цього ряду:**
1) збіжність ряду Фур'є
2) якщо збігається, то який зв'язок між $S(x)$ та $f(x)$
Будемо вивчати для випадку $f(x)$ - дійснозначна функція (в подальшому)

Розглянемо ряд Фур'є

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} \boxed{=}$

Коефіцієнти головної частини:

$c_{-k} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx}\, dx = \overline{\dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx} = \overline{c_k}$

Тому $c_{-k} e^{-ikx} = \overline{c_k}\,\overline{e^{ikx}} = \overline{c_k e^{ikx}}$

$\boxed{=} c_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Bigg( \underbrace{\overline{c_n e^{inx}} + c_n e^{inx}}_{\in \mathbb{R}} \Bigg) \boxed{=}$

Маленький комплексний факт:

$\begin{cases} w = a + ib \\ \overline{w} = a - ib \end{cases} \Rightarrow w + \overline{w} = 2a = 2 \operatorname{Re} w$

$\boxed{=} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}(c_n e^{inx}) \boxed{\boxed{=}}$
З'ясуємо більш детально про коефіцієнт:
$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$
Тоді:
$\operatorname{Re}(c_n e^{inx}) =$
$= \operatorname{Re}\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)\cdot(\cos nx + i\sin nx)\right) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\cdot\cos nx + \int_0^{2\pi}\right.$
$\boxed{\boxed{=}} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\cdot\cos nx + \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx\cdot\sin nx\right)$
$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$
Отримали дійсну формулу ряда Фур'є:

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, n\in\mathbb{N}$$

Але ці формули для функції $2\pi$-періодичних

Розглянемо відображення $[0,2\pi]\leftarrow[0,2l]$
$[0,2\pi]\to x,\ x = \frac{t}{l}\pi, t\in[0,2l]$
Тоді $f(x) = f(\frac{t}{l}\pi) \overset{\text{позн}}{=} g(t)$ - задана на $[0,2l]$, тобто $2l$-періодична
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \overset{x=\frac{t}{l}\pi}{=} \frac{1}{l}\int_0^{2l} g(t)\cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\,dt$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \overset{x=\frac{t}{l}\pi}{=} \frac{1}{l}\int_0^{2l} g(t)\sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\,dt$
Тоді розклад в ряд:
$g(t) \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right)$
Найчастіше зручно шукати коефіцієнти в такому вигляді:
$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(t)\cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\,dt$
$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(t)\sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\,dt$

## 5.2 Аналіз збіжності ряду

**Lemma 3.2.1. Лема Рімана**
Задана функція $f\in D([a,b])$ (навіть в невласному сенсі абсолютно). Тоді

$$1)\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx \to 0, \lambda\to\infty$$
$$2)\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx \to 0, \lambda\to\infty$$

**Proof.**
Доведемо перший пукнт, другий аналогічно

Ми розглянемо чотири випадки функції $f$:
а) $f(x) = c$ (константа)
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \frac{c}{\lambda}\sin\lambda x\Big|_a^b = \frac{c}{\lambda}(\sin\lambda b - \sin\lambda a) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$$

б) $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k 1_{<\alpha_k,\beta_k>}(x)$ (проста функція)
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_a^b 1_{<\alpha_k,\beta_k>}(x)c_k\cos\lambda x\,dx = \sum_{k=1}^{n} c_k\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\cos\lambda x\,dx = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} c_k(\sin\lambda\beta_k - \sin\lambda\alpha_k) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$$

в) $f \in D([a,b])$, або $\exists\{p_n(x), n \geq 1\} : p_n \rightrightarrows f$ (інтегрована функція)
$\Rightarrow \forall\varepsilon : \exists N : \sup\limits_{x\in[a,b]} |p_N(x) - f(x)| < \varepsilon \iff$
$\forall x \in [a,b] : p_N(x) - \varepsilon < f(x) < p_N(x) + \varepsilon$
$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx - \int_a^b p_N(x)\cos\lambda x\,dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - p_N(x))\cos\lambda x\,dx\right| \leq$$
$$\leq \int_a^b |f(x) - p_N(x)||\cos\lambda x|\,dx \leq \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a)$$
Таким чином оскільки за п. б), $\int_a^b p_N(x)\cos\lambda x\,dx \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$, то
$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\Lambda : \forall|\lambda| > \Lambda : \left|\int_a^b p_N(x)\cos\lambda x\,dx\right| < \varepsilon(b-a)$$
Звідси маємо:
$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \leq \left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx - \int_a^b p_N(x)\cos\lambda x\,dx\right| + \left|\int_a^b p_N(x)\cos\lambda x\,dx\right| < 2\varepsilon(b-a)$$
Отже, за означенням, $\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$

г) випадок невласного інтегралу, що збіжний абсолютно, тобто (наприклад)
$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\delta\to 0+}\int_a^{b-\delta} f(x)\cos\lambda x\,dx$$
(аналогічно для особливої точки $a$, або коли маємо безліч особливих точок $c_1,\ldots,c_n \in (a,b)$)
$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| = \left|\int_a^{b-\delta} f(x)\cos\lambda x\,dx + \int_{b-\delta}^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \leq$$
$$\leq \left|\int_a^{b-\delta} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| + \int_{b-\delta}^b |f(x)||\cos\lambda x|\,dx \leq$$
$$\leq \left|\int_a^{b-\delta} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| + \int_{b-\delta}^b |f(x)|\,dx \boxed{<}$$
Оскільки $\int_a^b |f(x)|\,dx$ збігається, то $\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta : \int_{b-\delta}^b |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$
Більш того, за п. в), $\int_a^{b-\delta} f(x)\cos\lambda x\,dx \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$, тому $\exists\Lambda : \forall|\lambda| > \Lambda : \left|\int_a^{b-\delta} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$
$$\boxed{<}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
Отже, за означенням, $\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$ ■

Розглянемо частковий ряд: $S_k(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, де
$a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$
Тоді,

$$S_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\cos nx + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\sin nx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos nt\cos nx + \sin nt\sin nx)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=1}^{k}\cos n(t-x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos n(t-x)\right)dt \boxed{=}$$

Знайдемо суму підінтегрального виразу:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos n\alpha = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\frac{\cos n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\sin\Big(\frac{\alpha}{2} + n\alpha\Big) + \sin\Big(\frac{\alpha}{2} - n\alpha\Big)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2} + \dots + \sin\frac{(2k+1)\alpha}{2} - \sin\frac{(2k-1)\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{(2k+1)\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\Big(\frac{(2k+1)\alpha}{2}\Big)}{2\sin\big(\frac{\alpha}{2}\big)}$$

$$\boxed{=}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\Big(\frac{(2k+1)(t-x)}{2}\Big)}{2\sin\Big(\frac{(t-x)}{2}\Big)}\,dt \overset{t-x=u}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x)\frac{\sin\Big(\frac{(2k+1)}{2}u\Big)}{\sin\big(\frac{1}{2}u\big)}\,du =$$

Наша функція $f$ - $2\pi$-періодична, також і друга функція (як сума cos). Тоді границю $[-\pi - x, \pi - x]$ можна замінити на $[-\pi, \pi]$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\frac{\sin\Big(\frac{(2k+1)}{2}u\Big)}{\sin\big(\frac{1}{2}u\big)}\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(u+x)\frac{\sin\Big(\frac{(2k+1)}{2}u\Big)}{\sin\big(\frac{1}{2}u\big)}\,du + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(u+x)\frac{\sin\Big(\frac{(2k+1)}{2}u\Big)}{\sin\big(\frac{1}{2}u\big)}\,du\boxed{=}$$

Зробимо заміну в другому інтегралі: $u = -v$ і замінимо потім на літеру $u$. Отримаємо наступне

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\Big(\frac{(2k+1)}{2}u\Big)}{\sin\big(\frac{1}{2}u\big)} + f(x-u)\frac{\sin\Big(\frac{(2k+1)}{2}u\Big)}{\sin\big(\frac{1}{2}u\big)}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+u) + f(x-u))\frac{\sin\Big(\frac{(2k+1)}{2}u\Big)}{2\sin\big(\frac{1}{2}u\big)}\,du$$

Таким чином ми довели теорему:

**Theorem 3.2.2.** Задана функція $f$ - $2\pi$-періодична, інтегрована. Тоді $S_k(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{k} a_n\cos nx + b_n\sin nx$ - часткова сума ряду Фур'є - дорівнює іншому виразу:

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+u) + f(x-u))D_k(u)\,du$$

**Перепозначення**: $\dfrac{\sin\Big(\frac{(2k+1)}{2}u\Big)}{2\sin\big(\frac{1}{2}u\big)} = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{k}\cos ku = D_k(u)$ - ядро Діріхле

**Властивості ядра Діріхле:**
1) $D_k(u)$ - парна, $2\pi$-періодична функція
2) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_k(u)\,du = 1$
**Proof.**
1. *Вже доводили під час муток з формулами*
2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_k(u)\,du = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\,du + \sum_{n=1}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ku\,du = \frac{1}{2}2\pi = \pi$ ■

Але нас ще цікавить збіжність часткового ряду
Розглянемо рівність:
$S_k(x) - c = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (f(x+u)+f(x-u))D_k(u)\,du - c\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(u)\,du =$
$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (f(x+u)+f(x-u))D_k(u)\,du - c\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_k(u)\,du =$
$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (f(x+u)+f(x-u)-2c)D_k(u)\,du =$
Позначимо $f(x+u)+f(x-u)-2c = g_{c,x}(u)$
$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g_{c,x}(u)D_k(u)\,du$
Сформулюємо зараз нову теорему та доведемо її:

**Theorem 3.2.3. Ознака Діні (для рядів Фур'є)**
Задана функція $f$ - $2\pi$-періодчина, інтегрована.
Якщо $\exists\delta>0 : \displaystyle\int_0^{\delta} \frac{|g_{c,x}(u)|}{u}\,du$ - збіжний, то $S_k(x)\to c, k\to\infty$
**Proof.**
Вже з'ясували, що $S_k(x) - c = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g_{c,x}(u)D_k(u)\,du =$
$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\delta} g_{c,x}(u)D_k(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} g_{c,x}(u)D_k(u)\,du$
Розглянемо доданки по черзі:
2. $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\delta}^{\pi} g_{c,x}(u)\frac{\sin\left(\frac{(2k+1)}{2}u\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}u\right)}\,du \to 0, k\to\infty$
за лемою Рімана, тому що $\dfrac{g_{c,x}(u)}{\sin\left(\frac{1}{2}u\right)}$ - функція без особових точок та інтегрована
1. $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\delta} g_{c,x}(u)\frac{\sin\left(\frac{(2k+1)}{2}u\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}u\right)}\,du$
Можемо застосувати лему Рімана. Але треба зазначити, що $\displaystyle\int_0^{\delta}\left|\frac{g_{c,x}(u)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\right|du$ збіжний абсолютно.
Перевіримо за ознакою порівняння в граничній формі.
За умовою теореми, $\displaystyle\int_0^{\delta}\frac{|g_{c,x}(u)|}{u}\,du$ - збіжний
$\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\frac{|g_{c,x}(u)|}{2\sin\frac{u}{2}}}{\frac{|g_{c,x}(u)|}{u}} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{2\sin\frac{u}{2}} = 1$
Отже, наш інтеграл збіжний. Тоді за лемою Рімана,
$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\delta} g_{c,x}(u)\frac{\sin\left(\frac{(2k+1)}{2}u\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}u\right)}\,du \to 0,\ k\to\infty$
Остаточно: $S_k(x) - c \to 0,\ k\to\infty$ ■

**Corollary 3.2.3.(1).** Якщо $f$ - диференційована в т. $x_0$, то
$S_k(x_0)\to f(x_0), k\to\infty$
**Proof.**

З ознаки Діні випливає, що достатньо перевірити збіжність інтеграла за умовою теореми
А зараз:
$g_{c,x_0}(u) = f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2c \overset{c=f(x_0)}{=} (f(x_0+u) - f(x_0)) + (f(x_0-u) - f(x_0))$
$\Rightarrow \dfrac{|g_{c,x_0}(u)|}{u} = \dfrac{|(f(x_0+u) - f(x_0)) + (f(x_0-u) - f(x_0))|}{u} =$
$= \left| \dfrac{f(x_0+u) - f(x_0)}{u} + \dfrac{f(x_0) - f(x_0-u)}{-u} \right| \overset{u\to 0}{\to} |f'(x_0) + f'(x_0)| = |f'(x_0)|$
Таким чином, у підінтегрованої функції т. $u = 0$ є усувною. Тому збіжний
Отже, $S_k(x_0) \to f(x_0), k \to \infty$ ■

**Corollary 3.2.3.(2).** Якщо для $f$ т. $x_0$ є стрибком та містить ліву і праву похідну, то $S_k(x_0) \to \dfrac{1}{2}(f(x_0,+) + f(x_0,-))$
**Proof.**
$c = \dfrac{1}{2}(f(x_0,+) + f(x_0,-))$
Тоді $g_{c,x_0}(u) = f(x_0+u) - f(x_0,+) + f(x_0-u) - f(x_0,-)$
$\Rightarrow \dfrac{|g_{c,x_0}(u)|}{u} = \dfrac{|(f(x_0+u) - f(x_0,+)) + (f(x_0-u) - f(x_0,-))|}{u} =$
$= \left| \dfrac{f(x_0+u) - f(x_0,+)}{u} + \dfrac{f(x_0,-) - f(x_0-u)}{-u} \right| \overset{u\to 0}{\to} |f'(x_0,+) + f'(x_0,-)|$
Тоді інтеграл в ознаку Діні збігається. Отже $S_k(x_0) \to c$ ■

**Corollary 3.2.3.(3).** Якщо $f$ задовільняє умові Ліпшиця в околі т. $x_0$, то $S_k(x) \to f(x_0)$, $k \to \infty$
**Proof.**
$c = f(x_0)$
$\Rightarrow \dfrac{|g_{c,x_0}(u)|}{u} = \dfrac{|(f(x_0+u) - f(x_0)) + (f(x_0-u) - f(x_0))|}{u} \leq$
$\leq \dfrac{|f(x_0+u) - f(x_0)|}{u} + \dfrac{|f(x_0-u) - f(x_0)|}{u} \leq \dfrac{Lu}{u} + \dfrac{Lu}{u} = 2L$
Тобто така функція є обмеженою в околі $(0,\delta)$, тому є інтегрованою
За ознаки Діні, $S_k(x) \to f(x_0)$ ■

Проаналізуємо тепер ряд Фур'є на рівномірну збіжність
**Theorem 3.2.4.** Задана функція $f$ - $2\pi$-періодчина, кусково неперервно-диференційована. Тоді ряд Фур'є рівномірно збігається до $f$
*Без доведення, бо я заплутався вже (в цей день ГБ не щастило)*

**Example.** Розкласти функцію в ряд Фур'є $f(x) = 6 - x$ на проміжку $(3,9)$
Її період $T = 6 = 2l$, тому $l = 3$
Ряд Фур'є містить таку форму:
$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\dfrac{\pi n x}{3}\right) + b_n \sin\left(\dfrac{\pi n x}{3}\right)$
Знайдемо всі коефіцієнти за формулами:
$a_n = \dfrac{1}{3}\int_3^9 (6-x)\cos\left(\dfrac{\pi n x}{3}\right)\,dx = 0, \forall n \neq 0$
*Можна міркувати двома способами чому 0: або через періодичність ми можемо змінити границі інтегрування на $[-3,3]$ та використати той факт, що функція - непарна; або площа фігури $[3,6]$ рівний протилежно площі фігури $[6.9]$. Другий варіант все ж таки більш сприятливий*
$a_n = \dfrac{1}{3}\int_3^9 (6-x)\,dx \overset{\text{ті самі міркування}}{=} 0$
$b_n = \dfrac{1}{3}\int_3^9 (6-x)\sin\left(\dfrac{\pi n x}{3}\right)\,dx \overset{u=6-x}{=} \dots \overset{dv=\sin\left(\frac{\pi n x}{3}\right)dx}{=} (-1)^n \dfrac{6}{\pi n}$
Отже, $f(x) \rightsquigarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{6}{\pi n} \sin\left(\dfrac{\pi n x}{3}\right)$
У нас тут функція $f$ - диференційована в т. $x \neq 3 + 6k, k \in \mathbb{Z}$. Тоді за першим наслідком ознаки Діні, $S(x) = f(x)$

При $x_k = 3 + 6k$ ці точки є стрибками, а також містять ліву та праву похідні. Тоді за другим наслідком ознаки Діні,
$S(x_k) = \frac{1}{2}(f(x_k+) + f(x_k-)) = 0$

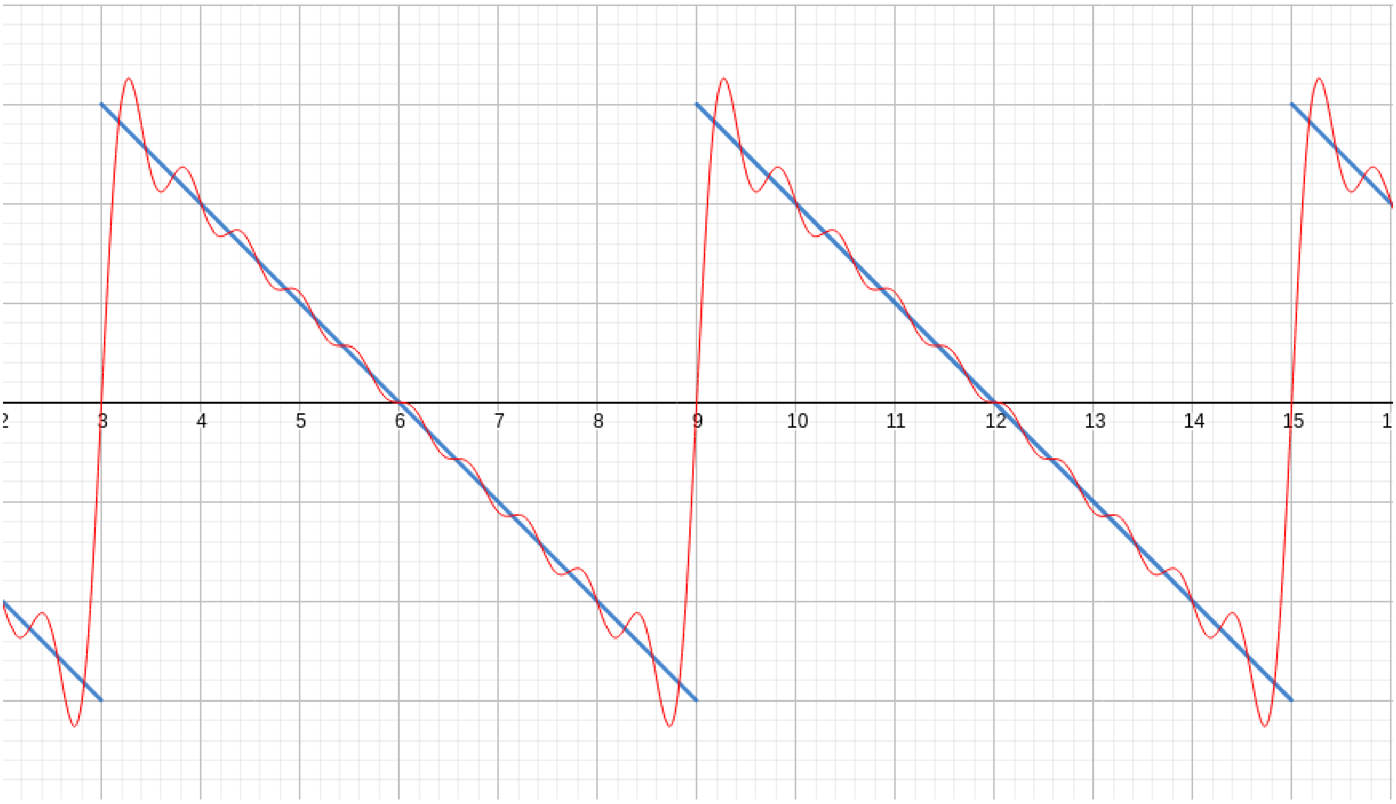



Рис. 3: Червоний графік відповідає розкладу в ряд Фур'є
(тут я взяв лише 10 доданків; при нескінченної кількості вона буде схожа за наш початковий графік, оскім стрибків)

## 5.3 Додатковий зміст із практики (*)

**Властивості ряду Фур'є**
1. Якщо на $(-l, l)$ задана непарная функція $f$, то $\forall n \geq 1 : a_n = 0$
2. Якщо на $(-l, l$ задана парна функція $f$, то $\forall n \geq 1 : b_n = 0$
3. Якщо $f \in C((-l, l))$, що є $2l$-періодична, то $f \in C(\mathbb{R})$
*Залишу без доведення*

**Розклад функції $f(x)$, що задана на $[0, l)$, в ряд за косінус та сінус**
1. cos-Фур'є
Продовжимо нашу функцію на $(-l, 0)$ парним чином, тобто:
$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in [0, l) \\ f(-x), x \in (-l, 0) \end{cases}$
Якщо обережно перевірити, то $\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x)$, $x \in (-l, l)$
Оскільки вона парна, то $\forall n \geq 1 : b_n = 0$
$\Rightarrow \tilde{f}(x) \rightsquigarrow S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$
Причому $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{l} \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \, dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \, dx$
Ну а якщо виконаються ознаки Діні, то при $x \in [0, l)$ :

$S(x) = \tilde{f(x)} = f(x)$

2. sin-Фур'є
Продовжимо нашу функцію на $(-l, 0)$ непарним чином, тобто:
$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in [0, l) \\ -f(-x), x \in (-l, 0) \end{cases}$
Якщо обережно перевірити, то $\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x)$, $x \in (-l, l)$
Оскільки вона непарна, то $\forall n \geq 1 : a_n = 0$
$\Rightarrow \tilde{f}(x) \rightsquigarrow S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$
Причому $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-l}^{l} \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\, dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\, dx$
Ну а якщо виконаються ознаки Діні, то при $x \in [0, l)$ :
$S(x) = \tilde{f(x)} = f(x)$

**Example.** Розкласти функцію $f(x) = x - 1$ в косінус-ряд, $x \in (0, 2)$
Робимо той самий алгоритм:
$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x - 1, x \in (0, 2) \\ -x - 1, x \in (-2, 0) \end{cases}$ - 4-періодична, до речі $\Rightarrow l = 2$
Обчислимо коефіцієнти:
$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)\, dx \overset{\text{ну там за частинами}}{=} \left[\begin{array}{c} 0, n = 2k \\ \dfrac{-8}{\pi^2(2k+1)^2}, n = 2k+1 \end{array}\right.$$
Таким чином, $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi^2(2k+1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k+1)x}{2}\right)$
Функція $\tilde{f}(x)$ на $(0, 2)$ є диференційованою, тому за наслідком ознаки Діні,
$\tilde{f(x)} = f(x) = x - 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi^2(2k+1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k+1)x}{2}\right)$
**Remark!** Функцію з прикладу можна розкласти в ряд Фур'є стандартним шляхом, не подовжуючи її. Це говорить про те, що розклад в якомусь сенсі не є єдиним

## 5.4 Середнє за Чезаро

**Definition 3.4.1.** Задана функція $f$ - $2\pi$-періодчина, інтегрована і ряд Фур'є $S$ для неї
**Середнім за Чезаро** називають наступний вираз

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\left(S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)\right)$$

Отримаємо інтегральний вигляд середнього за Чезаро
$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)}{2}u\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}u\right)}\, du =$$
$$= \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2\pi \sin\left(\frac{1}{2}u\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{(2k+1)}{2}u\right) du \boxed{=}$$
Розпишемо суму в інтегралі:
$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{(2k+1)}{2}u\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)}{2}u\right)\sin\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} =$$
$$= \frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}(\cos(ku) - \cos((k+1)u)) = \frac{1 - \cos nu}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$
$$\boxed{=} \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2\pi} \frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}\, du =$$

$u = 2v, du = 2dv$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2v)+f(x-2v)}{2\pi} \frac{\sin^2 nv}{n\sin^2 v}\, dv$
Таким чином ми довели лему:

**Lemma 3.4.2.** Задана функція $f$ - $2\pi$-періодчина, інтегрована і ряд Фур'є $S$ для неї. Тоді середнє за Чезаро має інтегрований вираз:

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2v)+f(x-2v))F_n(v)\, dv$$

**Перепозначення**: $\frac{\sin^2 nv}{2n\sin^2 v} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(2v) = F_n(v)$ - ядро Феєра

**Властивості ядра Феєра**:
1) $F_k(v)$ - парна, $2\pi$-періодчина
2) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(v)\, dv = 1$ *Для обох пунктів розглянути другу формулу ядра Феєра*

**Theorem 3.4.3. Теорема Феєра**
Задана функція $f$ -, неперервна на $[0, 2\pi]$. Тоді $\sigma_n(f) \rightrightarrows f$ на $[0, 2\pi]$
*Поки що без доведення*

**Corollary 3.4.3.(1).** $\forall \varepsilon > 0$ існує тригонометричний многочлен $T_\varepsilon(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} A_n \cos nx + B_n \sin nx$ такий, що $\|f - T_\varepsilon\| < \varepsilon$
**Proof.**
Дійсно існує, можна $T_\varepsilon(x) = \sigma_n(f)(x)$ ■

**Corollary 3.4.3.(2).** Якщо $f \in C([a,b])$, тоді $\forall \varepsilon > 0$ існує звичайний многочлен $P_\varepsilon(x)$ такий, що $\|f - P_\varepsilon\| < \varepsilon$
**Proof.**
Задана функція $f(x), x \in [a,b]$
Задамо $t = \frac{x-a}{b-a} \cdot 2\pi, t \in [0, 2\pi]$
Звідси $x = \frac{t(b-a)}{2\pi} + a$
$f(x) \overset{\text{підставляємо x і позначення}}{=} g(t),\ g \in C([0, 2\pi])$
Тоді за теоремою Феєра, $\sigma_n(g) \rightrightarrows g$, або
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \left\|g_{N(\varepsilon)}(g) - g\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\sigma_{N(\varepsilon)}(g)(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} A_n \cos nt + B_n \sin nt$ - розкладається в ряд Тейлора $\sigma_{N(\varepsilon)}(g)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$
Тоді $\exists K_\varepsilon$ : для часткової суми цього ряду $\sum_{k=0}^{K(\varepsilon)} c_k t^k = P_\varepsilon(k)$ виконано $\|\sigma_n(g) - P_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тому
$\|g - P_\varepsilon\| = \left\|g - \sigma_{N(\varepsilon)}(g) + \sigma_{N(\varepsilon)}(g) - P_\varepsilon\right\| \le \left\|g - \sigma_{N(\varepsilon)}(g)\right\| + \left\|\sigma_{N(\varepsilon)}(g) - P_\varepsilon\right\| < \varepsilon$
$P_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(\frac{x-a}{b-a} \cdot 2\pi) = P_{1\varepsilon}(x)$
$\Rightarrow \|g - P_\varepsilon\| = \|f - P_{1\varepsilon}\| < \varepsilon$ ■

**Theorem 3.4.4. Рівність Парсеваля**

Задана функція $f$ - $2\pi$-періодчина, інтегрована. Тоді

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

де $a_n, b_n$ - коефіцієнти як в ряду Фур'є
**Proof.**
$S_k(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Тоді можна отримати, що
$\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_k(x)\right)^2\,dx \to 0$, якщо $n \to \infty$

$$\int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_k(x)\right)^2\,dx = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - 2\int_0^{2\pi} f(x) S_k(x)\,dx + \int_0^{2\pi} S_k^2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx -$$

$$-2\left(\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n \int_0^{2\pi} \cos nx f(x)\,dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx f(x)\,dx\right)\right) + \int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)^2 dx$$

Зауважимо, що справедлива така рівність: $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right)^2 = \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_l c_j$

$$\boxed{=} \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - 2\left(\frac{a_0}{2}\cdot \pi a_0 + \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot \pi a_n + b_n \cdot \pi b_n\right) +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 dx + \int_0^{2\pi} 2 \cdot \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{n=1}^{k} a_n \cos nx + b_n \sin nx\,dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{k} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)^2 dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - 2\left(\frac{a_0}{2}\cdot \pi a_0 + \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot \pi a_n + b_n \cdot \pi b_n\right) +$$

$$+ \frac{\pi a_0^2}{2} + a_0 \sum_{n=1}^{k}\left(a_n \int_0^{2\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx\,dx\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} a_n a_m \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} 2a_n b_m \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx\,dx + \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} b_n b_m \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\,dx \boxed{\boxed{=}}$$

Зауважимо, що $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin nx\,dx = 0$

Також звідси випливає, що $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\,dx = 0$,
але при $m \neq n$. Тому пропадуть безліч доданків прямо зараз

$$\boxed{\boxed{=}} \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - 2\pi \sum_{n=0}^{k} a_n^2 + b_n^2 + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin^2 nx\,dx\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=0}^{k} a_n^2 + b_n^2\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

І НАРЕШТІ, отримали довгоочікувану рівність:
$\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ ■

**Example 3.4.4. Приклад застосування**
Нехай $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$. Вона є непарною, тому $a_n = 0 : \forall n \geq 0$
$b_n = \dots = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n}$
А тепер застосуємо рівність Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3} \overset{\text{Th. 3.3.4.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

## 5.5 Перетворення Фур'є

**Definition 3.5.1.** Задана функція $f(x)$ на $\mathbb{R}$ - абсолютно інтегрована
**Перетворенням Фур'є** функції $f(x)$ називається функція:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx = \hat{f}(\lambda) \overset{\text{або}}{=} \mathscr{F}\{f(x)\}$$

**Theorem 3.5.2. Властивості**
1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx$ збіжний рівномірно на $\mathbb{R}$

2. $\hat{f}(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

3. Якщо функція $f(x)$ є такою, що $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|^k)|f(x)|\,dx$ збіжний, то $\exists(\hat{f}(\lambda))^{(k)} = \widehat{((ix)^k f(x))}(\lambda)$

4. Якщо $f(x) \in C^{(k-1)}(\mathbb{R})$, $\exists f^{(k)}(x)$ - абсолютно інтегрована на $\mathbb{R}$ та $f^{(n)}(x) \to 0$, $x \to \pm\infty, n = \{0,\dots,k-1\}$, то $\widehat{(f^{(k)})}(\lambda) = (-i\lambda)^k\hat{f}(\lambda)$
**Proof.**
1. За ознакою Вейерштрасса та умовою властивості, $|f(x)e^{i\lambda x}| = |f(x)||e^{i\lambda x}| = |f(x)|$, тому і виконується рівномірна збіжність

2. Наслідок властивості 1

3. Для довільних $n$ із $\{0,1,\dots,k\}$: $(1+|x|^n) < (1+|x|^k)$
Тому збіжним буде $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|^n)|f(x)|\,dx$, а згодом
$(\hat{f}(\lambda))^{(k)} = \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right)^{(k)}$ (*)
Обчислимо формально, чому дорівнює права частина (нам поки невідомо, чи виконується рівність):
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(x)e^{i\lambda x}\right)^{(k)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(ix)^k e^{i\lambda x}\,dx$. Її ми перевіримо на рівномірну збіжність. Знову за Вейерштрассом
$|f(x)(ix)^k e^{i\lambda x}| = |f(x)||(ik)^x||e^{i\lambda x}| = |f(x)||x^k| \le |f(x)|(1+|x|^k)$
Враховуючи умову властивості, досліджуючий інтеграл є рівномірно збіжним
Тому рівність (*) є справедливою. Тому
$(\hat{f}(x))^{(k)} = \widehat{((ix)^k f(x))}(\lambda)$

4. $\widehat{(f^{(k)})}(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x)e^{i\lambda x}\,dx =$
Інтегруємо за частинами так, щоб я знизив похідну, тому:
$u = e^{i\lambda x} \Rightarrow du = i\lambda e^{i\lambda x}\,dx$
$dv = f^{(k)}(x)\,dx \Rightarrow v = f^{(k-1)}(x)$
$= \underbrace{f^{(k-1)}(x)e^{i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\to 0} - i\lambda\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-1)}(x)e^{i\lambda x}\,dx =$

Робимо ту саму Санту-Барбару до кінця і отримаємо бажану формулу
$= (-i\lambda)^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x} = (-i\lambda)^k \hat{f}(\lambda)\,dx$ ■

**Example.** Знайти перетворення Фур'є для функції $f(x) = e^{-ax^2+bx+c}$,
$a > 0$
Варто перевірити на абсолютну збіжність:
$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c}\,dx = e^c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{bx}}{e^{ax^2}}\,dx$
Скористаємось фактом (колись давно з 2 семестру), що $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{kx^2}}$ - збіжний. Тоді за ознакою границі,
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{e^{bx}}{e^{ax^2}}}{\frac{1}{e^{kx^2}}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{(k-a)x^2+bx} = (0 < k < a) = (e^{-\infty}) = 0$
Тому там наш інтеграл збігається абсолютно. А ТЕПЕР вже можна й перетворення
$f(\hat{\lambda}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c}e^{i\lambda x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+(b+i\lambda)x+c}\,dx =$
В степені виділяємо повний квадрат, мені впадлу вставляти це, тому одразу ж :c
$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x-\frac{b+i\lambda}{2a}\right)^2+c+\frac{(b+i\lambda)^2}{4a}}\,dx =$
Заміна: $x - \frac{b+i\lambda}{2a} = t$
$= e^{c+\frac{(b+i\lambda)^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\,dt = e^{c+\frac{(b+i\lambda)^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

## 5.6 Зворотнє перетворення Фур'є

**Definition 3.6.1.** Задана функція $g(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ - абсолютно інтегрована
**Зворотнім перетворенням Фур'є** функції $g(\lambda)$ називається функція:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda = \check{g}(x)$$

Хочемо: $(\check{\hat{f}})(x) = f(x)$
**Proof.**
Ну або в інакшому вигляді, ми пруфимо, що
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx \right) e^{-i\lambda s}\,d\lambda = f(s)$
Розпишемо ліву частину:
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx \right) e^{-i\lambda s}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi} \lim\limits_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx \right) e^{-i\lambda s}\,d\lambda$
і спростимо вираз в ліміті:
$\int_{-A}^{A} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx \right) e^{-i\lambda s}\,d\lambda = \int_{-A}^{A} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda(x-s)}\,dx \right) d\lambda =$
Через те, що $|f(x)e^{i\lambda(x-s)}| = |f(x)|$, то внутрішній інтеграл абсолютно збіжний. Тому можна змінити місцями порядок інтегрування
$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-A}^{A} f(x)e^{i\lambda(x-s)}\,d\lambda \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left( \int_{-A}^{A} e^{i\lambda(x-s)}\,d\lambda \right) dx =$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{e^{i\lambda(x-s)}}{i(x-s)}\Big|_{-A}^{A}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{2\sin A(x-s)}{x-s}\,dx \overset{x-s=t}{=}$
$= \int_{-\infty}^{0} 2f(s+t)\frac{\sin At}{t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} 2f(s+t)\frac{\sin At}{t}\,dt \overset{t=-t \text{ в першому}}{=}$

$= \displaystyle\int_0^{+\infty} 2(f(s+t)+f(s-t))\frac{\sin At}{t}\,dt$

Тоді

$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right)e^{-i\lambda s}\,d\lambda - c =$

$= \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(s+t)+f(s-t))\frac{\sin At}{t}\,dt - c\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin At}{t}\,dt =$

$= \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(s+t)+f(s-t)-2c)\frac{\sin At}{t}\,dt =$

Позначимо $f(s+t)+f(s-t)-2c = h_{c,s}(t)$

$= \displaystyle\int_0^{+\infty} h_{c,s}(t)\frac{\sin At}{t}\,dt$

Сформулюємо теорему та доведемо її:

**Theorem 3.6.1. Ознака Діні (для перетворення Фур'є)**

Задана така функція $f$, що є абсолютно збіжною на $\mathbb{R}$.

Якщо $\exists\delta>0 : \displaystyle\int_0^{\delta}\frac{|h_{c,s}(t)|}{t}\,dt$ - збіжний, то $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_{c,s}(t)\frac{\sin At}{t}\,dt \to 0,\ A\to\infty$

*Якщо розписати наш інтеграл як сума* $[0,\delta]$, $[\delta,+\infty)$, *то ми матимемо два інтеграли, що прямують до нуля за лемою Рімана*

**Corollary 3.6.1.**

1) Якщо $f$ - неперервно-диференційована в т. $x_0$, то $(\check{\hat{f}})(x_0) = f(x_0)$

2) Якщо $f$ - диференційована в лівому та правому околі т. $x_0$, то $(\check{\hat{f}})(x_0) = \dfrac{f(x_0,+)+f(x_0,-)}{2}$

**Proof.**

1) Встановимо $c = f(x_0)$, тоді

$(\check{\hat{f}})(x_0) = \displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_0^{+\infty}(f(x_0+t)-f(x_0)+f(x_0-t)-f(x_0))\frac{\sin At}{t}\,dt = 0$

*Майже дослівно повторюємо доведення з 1-го наслідку з ознаки Діні для рядів*

2) *Майже дослівно повторюємо доведення з 2-го наслідку з ознаки Діні для рядів* ■

# 6 Операційне числення

## 6.1 Оригінали функцій

**Definition 4.1.1.** Функція $f(t)$ називається **оригіналом**, якщо вона під умовами:
1) $f(t) = 0, t < 0$
2) $f(t)$ - кусково неперервна
3) $\exists M : \exists \alpha : |f(t)| < Me^{\alpha t}$

**Example 4.1.1.** $\sin t \to \begin{cases} \sin t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ - функцію перевели в оригінал

**Definition 4.1.2. Функція Хевісайда** визначається наступним чином

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

**Example 4.1.2.** $\sin t \to \sin t \cdot \chi(t)$ - скорочена версія **Ex. 4.1.1**

**Definition 4.1.3.** Задан $f(t)$ - оригінал
**Степенем зростання** $f(t)$ називається число:

$$\sigma(f) = \inf\{\alpha : \exists M : |f(t)| < Me^{\alpha t}\}$$

**Example 4.1.3.**
1. $f(t) = \sin t$. (тут автоматично вважаємо, що виконується перша умова). Перевіримо третю умову:
3) $|\sin t| \leq 1 = 1 \cdot e^{0t}$, тобто $\exists M = 1, \alpha = 0$
Знайдемо степінь зростання:
$\forall \alpha > 0 : |\sin t| < 1 \cdot e^{\alpha t}$
Припустимо, що для $\alpha < 0 : \exists M : |\sin t| < M \cdot e^{\alpha t}$
Якщо $t \to \infty$, то $|\sin t| \to 0$, що є суперечченням (в неї ліміту вопще нема)
Тому $\sigma(f) = 0$

2. $f(t) = e^{\mu t}$
Зрозуміло, що $|e^{\mu t}| < 1 \cdot e^{\mu t}$, тобто $\alpha = \mu$
$\forall \alpha > \mu : |e^{\mu t}| < 1 \cdot e^{\alpha t}$
Припустимо знову, що для $\alpha < \mu : \exists M : e^{\mu t} < Me^{\alpha t}$, або
$e^{t(\mu - \alpha)} < M$
Якщо $t \to \infty$, то $e^{(\mu - \alpha)t} \to \infty$, прийшли до суперечення
Тому $\sigma(f) = \mu$

3. $f(t) = t^\mu, \mu > 0$
Перевіримо третю умову, тобто
$\exists ? M : |t^\mu| \leq Me^{\alpha t} \iff \dfrac{t^\mu}{e^{\alpha t}} < M$
Якщо $t \to \infty$, то $\dfrac{t^\mu}{e^{\alpha t}} \to 0$ ЗА УМОВОЮ, що $\alpha > 0$, а тому така дріб є обмеженою. Отже знак питання прибираємо
Припустимо, що для $\alpha < 0 : \exists M : t^\mu < Me^{\alpha t}$
Зробимо аналогічні кроки, та отримаємо, що дріб прямує до нескінченності, що суперечить припущенню
І окремо при $\alpha = 0$: $t^\mu < M$ - також суперечення
Але тим не менш, $\sigma(f) = \inf\{\alpha > 0\} = 0$

**Proposition 4.1.4. Арифметичні властивості оригіналів**
Задані $f(t), g(t)$ - оригінали. Тоді
1) $h(t) = g(t) + g(t)$ - оригінал, а $\sigma(h) = \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$

2) $h(t) = af(t), a \in \mathbb{R}$ - оригінал, а $\sigma(h) = \sigma(f)$
3) $h(t) = f(t)g(t)$ - оригінал, а $\sigma(h) = \sigma(f) + \sigma(g)$
**Proof.**
Умови 1 та 2 всюди автоматично виконуються (в принципі)
З умови твердження відомо, що $\begin{cases} |f(t)| < M_1 e^{\alpha_1 t} \\ |g(t)| < M_2 e^{\alpha_2 t} \end{cases}$. Тоді
1) $|h(t)| \le |f(t)| + |g(t)| < M_1 e^{\alpha_1 t} + M_2 e^{\alpha_2 t} < (M_1 + M_2) e^{\alpha t}$, якщо $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$
Пункт 3 виконується, тому $h$ - оригінал. Більш того, $\sigma(h) = \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$

2) *при перевірки п. 3 там просто нафіг піде константа а*

3) $|h(t)| < M_1 e^{\alpha_1 t} M_2 e^{\alpha_1 t} = M_1 M_2 e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t}$
Пукнт 3 виконуєься, тому $h$ - оригінал. Більш того, $\sigma(h) = \sigma(f) + \sigma(g)$ ∎

**Definition 4.1.5. Згорткою функцій** $f(x)$ та $g(x)$ на $\mathbb{R}$ називається функція:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(x-u)\, du$$

Що буде, якщо $f, g$ - оригінали? Яким буде вигляд згортки?
$f * g(t) \overset{\text{вже доводимо}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(t-s)\, ds =$
З $s < 0$ випливає $f(s) = 0$
З $s > t$ випливає $t - s < 0 \Rightarrow g(t-s) = 0$
$= \int_0^t f(s) g(t-s)\, ds$
Таким чином:

**Proposition 4.1.5.(1).** Якщо $f, g$ - оригінали, то
$f * g(t) = \int_0^t f(s) g(t-s)\, ds$

**Proposition 4.1.5.(2).** Якщо $f, g$ - оригінали, то $f * g(t) = g * f(t)$
*Під час інтегрування провести заміну:* $t - s = u$

**Proposition 4.1.5.(3).** Якщо $f, g$ - оригінали, то $f * g$ - теж оригінал, а $\sigma(f * g) = \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$
**Proof.**
Пункти 1, 2 виконані. Залишилось перевірити пункт 3
$|f * g(t)| = \left| \int_0^t f(s) g(t-s)\, ds \right| \le \int_0^t |f(s)||g(t-s)|\, ds <$
$< \int_0^t |f(s)||g(t-s)|\, ds < \int_0^t M_1 e^{\alpha_1 s} M_2 e^{\alpha_2 (t-s)}\, ds = e^{\alpha_2 t} M_1 M_2 \int_0^t e^{(\alpha_1 - \alpha_2)s}\, ds =$
$= \dfrac{e^{\alpha_2 t} M_1 M_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t} - 1) = \dfrac{M_1 M_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) = \dfrac{M_1 M_2}{|\alpha_1 - \alpha_2|} |e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}| \le$
$\le \dfrac{M_1 M_2}{\alpha_1 - \alpha_2} 2 e^{\alpha t}$, якщо $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$
Таким чином, $f * g$ - оригінал, а $\sigma(f * g) = \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$ ∎

## 6.2 Перетворення Лапласа

**Definition 4.2.1.** Заданий $f$ - оригінал
**Перетворенням Лапласа** $f(t)$ називається

$$f(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt = F(p) \overset{\text{або}}{=} \mathscr{L}\{f(t)\}$$

$F(p)$ називають **зображенням**, де $p \in \mathbb{C}$

| $f$ | $F$ |
|---|---|
| $\chi(t)$ | $\dfrac{1}{p}$ |
| $e^{\alpha t}$ | $\dfrac{1}{p-\alpha}$ |
| $\operatorname{ch}\alpha t$ | $\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$ |
| $\operatorname{sh}\alpha t$ | $\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$ |
| $\sin\alpha t$ | $\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$ |
| $\cos\alpha t$ | $\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$ |
| $t^n$ | $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ |

Табл. 1: Таблиця зображень

**Proposition 4.2.2. Про збіжність**
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ збіжний на комплексній півплощині $\{p : \operatorname{Re} p > \sigma(f)\}$, а рівномірно збіжний на $\{p : \operatorname{Re} p > \alpha > \sigma(f)\}$
**Proof.**
$p = x + iy$, $\operatorname{Re} p = x > \sigma(f)$
Доведемо за ознакою порівняння
$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)||e^{-xt}e^{iyt}| < Me^{\alpha t}e^{-xt} = Me^{(\alpha-x)t}$, $\forall\alpha > \sigma(f)$
Якщо обрати таке $\alpha$, щоб $x > \alpha > \sigma(f)$, то отримаємо:
$|f(t)e^{-pt}| < Me^{(\alpha-x)t}$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} Me^{(\alpha-x)t}\,dt = \dots = \frac{M}{x-\alpha}$ - збіжний
Отже, збіжний і початковий інтеграл - зображення ■

**Theorem 4.2.3.** Заданий $f(t)$ - оригінал зі степенем вільності $\sigma(f)$. Тоді зображення $F(p)$ є аналітичною функцією на півплощині
$\{p : \operatorname{Re} p > \sigma(f)\}$
**Proof.**
Формально, $F'(p) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)te^{-pt}\,dt$. Для рівності треба, щоб права рівність збігалась рівномірно
До речі, $f(t)t$ - теж оригінал, зі степенем вільності $\sigma(f(t)t) = \sigma(f)$
Тоді $\forall\alpha_0 > \sigma(f) : \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)te^{-pt}$ - збіжний рівномірно на $\{p : \operatorname{Re} p > \alpha_0 > \sigma(f)\}$
Отже, рівність справедлива ■

**Theorem 4.2.4.** Заданий $f(t)$ - оригінал. Тоді $F(p) \to 0$, $\operatorname{Re} p \to \infty$
**Proof.**
$|F(p)| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt\right| \le \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)||e^{-(x+iy)t}|\,dt = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\,dt <$
Ми обираємо таке $\alpha$, щоб $\sigma(f) < \alpha < x$
$< \displaystyle\int_0^{+\infty} Me^{\alpha t}e^{-xt}\,dt = \dots = \frac{M}{x-\alpha} \to 0$, якщо $x = \operatorname{Re} p \to \infty$ ■

**Theorem 4.2.5. Властивості зображень**
1. Лінійність, $\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(p) + \beta G(p)$

2. Зміщенність, $e^{\alpha t}f(t) \leftrightarrow F(p-\alpha)$

3. Запізнення,
Нехай є оригінал $f(t)$ та функція Хевісайда $\eta(t)$. Розглянемо $g(t) = f(t-\tau)\eta(t-\tau), \tau > 0$. Тоді $g(t) \leftrightarrow F(p)e^{-p\tau}$

4. Диференціювання зображення,
$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^nF(p) - (f^{(n-1)}(0) + pf^{(n-2)}(0) + \dots + p^{n-1}f(0))$ (тут всі похідні є оригіналами)

5. Інтегрування оригіналу, $\displaystyle\int_0^t f(s)\,ds \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$

6. Диференціювання зображення, $t^kf(t) \leftrightarrow (-1)^kF^{(k)}(p)$

7. Інтегрування зображення, $\displaystyle\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^{+\infty} F(q)\,dq$, тут $q \to \infty$ таким чином, що $\operatorname{Re} q \to \infty$

8. $f * g(t) \leftrightarrow F(p)G(p)$
**Proof.**
1. *Випливає з лінійних властивостей інтегралів*

2. *Просто розписуємо інтеграл, а там властивості степеней буде*

3. *Зробити заміну:* $t - \tau = s$

4. $\displaystyle f'(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt \overset{u=e^{-pt}, dv=f'(t)\,dt}{=} f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} - (-p)\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt =$
Оскільки $f$ - оригінал, то $|f(t)| < Me^{\alpha t}$. Далі, $|e^{-pt}| = e^{-xt}$, $\alpha < x$
Тому $|f(t)e^{-pt}| < Me^{\alpha t}e^{-xt} \to 0$, коли $t \to \infty = pF(p) - f(0)$
$= pF(p) - f(0)$
Ну а далі чисто за МІ

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(s)\,ds \leftrightarrow \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)e^{-pt}\,dt \overset{u=\int_0^t f(s)\,ds, dv=e^{-pt}\,dt}{=}$
$\displaystyle= \frac{-1}{p}\int_0^t f(s)\,ds \cdot e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}F(p)$

6. $\displaystyle tf(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt} = -\int_0^{+\infty} f(t)(e^{-pt})'_p\,dt = -\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt\right)' =$
$= -F'(p)$
Потім тупо за МІ

7. $\displaystyle\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow G(p)$ (якесь зображення)
За властивістю 6, $\displaystyle f \cdot \frac{f(t)}{t} \leftrightarrow -G'(p)$
$\Rightarrow F(p) \leftrightarrow f(t) \leftrightarrow -G'(p) \Rightarrow G'(p) = -F(p)$
Також, $\displaystyle\left(\int_p^{+\infty} F(q)\,dq\right)'_p = -F(p)$
Отже, $\displaystyle G(p) = \int_p^{+\infty} F(q)\,dq$

8. $\displaystyle f*g(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} (f*g)(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(s)g(t-s)\,ds\right)e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty}\int_0^t f(s)g(t-s)e^{-p((t-s)+s)}\,ds\,dt =$

Заміна змінних: $t - s = y$, $s = s$
$y = [0, +\infty), s = [0, +\infty)$, $J = 1$
$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(s)g(y)e^{-p(y+s)}\, ds\, dy = \int_0^{+\infty} g(y)e^{-py}\, dy \int_0^{+\infty} f(s)e^{-ps}\, ds =$
$= G(p)F(p)$ ■

**Theorem 4.2.6. Теорема Мелліна**
Заданий $f(t)$, $F(p)$ - диференційований оригінал зі степенем вільності $\sigma(f) = \alpha$ та його зображення. Тоді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, x > \alpha$$

**Proof.**
Розглянемо оригінал $g(t) = f(t)e^{-xt}$, такий, що $x > \alpha$
Покажемо, що $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt \overset{\text{або}}{=} \int_0^{+\infty} |g(t)|\, dt$ - абсолютно збіжний
Візьмемо якийсь $\alpha < x_* < x$. Тоді
$|g(t)| < Me^{x_* t}e^{-xt} = Me^{(x_*-x)t}$
$\int_0^{+\infty} Me^{(x_*-x)t}\, dt = \frac{M}{x_* - x} e^{(x_*-x)t}\Big|_0^{+\infty} < \infty$
Тоді за Вейерштрасса, наш початковий інтеграл збіжний. Отже, для $g(t)$ можна застосувати перетворення Фур'є (стандартне та зворотнє)
Оскільки $f(t)$ - частково неперервно-диференційований, то за ознакою Діні та наслідками з неї отримаємо:
$g(t) = \check{\hat{g}}(t) \overset{\text{п. 3.6.}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{i\lambda(s-t)}\, ds\, d\lambda \overset{g(s)=f(s)e^{-sx}, s<0}{=}$
$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g(s)e^{i\lambda(s-t)}\, ds\, d\lambda$
$f(t)e^{-tx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(s)e^{-sx}e^{i\lambda(s-t)}\, ds\, d\lambda =$
$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(s)e^{-sx+i\lambda s}e^{-i\lambda t}\, ds\, d\lambda =$
$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f(s)e^{-s(x-i\lambda)}e^{-i\lambda t}\, ds \right) d\lambda \overset{\lambda=-y}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f(s)e^{-s(x+iy)}e^{iyt}\, ds \right) dy$
$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f(s)e^{-s(x+iy)}e^{(x+iy)t}\, ds \right) dy \overset{x+iy=p}{=}$
$= \frac{1}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left( \int_0^{+\infty} f(s)e^{-ps}\, ds \right) e^{pt} \frac{1}{i}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)e^{pt}\, dp$ ■

Доведена формула називається **формулою Мелліна**. Більш детальне та красиве доведення буде в книжці Тихонова "Теория функций комплексного анализа"

## 6.3 Відновлення оригінала

### 6.3.1 За допомогою лишків

**Theorem.** Заданий $f(t)$, $F(p)$ - диференційований оригінал зі степенем вільності $\sigma(f) = \alpha$ та його зображення, яка є аналітичною всоди за виключенням скінченної кількості точок $p_1, \dots, p_n$ (такі, що $\operatorname{Re} p_t < \alpha$). Тоді

$$f(t) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{p=p_j} F(p)e^{pt}$$

**Proof.**
Через умови ми можемо скористатись формулою Мелліна:

$f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp =$
Заміна: $p = qe^{i\frac{\pi}{2}} = iq \Rightarrow dp = i\,dq$
$= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\infty+ix}^{-\infty+ix} F(iq)e^{qit} i\,dq =$
Заміна2: $q = ip = i(x+iy) = ix - y \Rightarrow dq = -dy$
$= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x+iy)e^{(x+iy)t}\,dy \overset{F(x+iy)=g(y)}{=} \dfrac{1}{2\pi}e^{xt}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{iyt}\,dy \overset{\text{за умовами особливих точок}}{=}$
$= \dfrac{1}{2\pi}e^{xt}2\pi i\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{res}_{p=p_j} g(z)e^{izt} = \sum_{j=1}^{k}\operatorname*{res}_{p=p_j} g(z)e^{izt} = ...$
*Десь ГБ забув і: сам не можу знайти(((*

### 6.3.2 За розкладом зображення в ряд Лорана

**Lemma.** Заданий $f(t)$, $F(p)$ - диференційований оригінал та його зображення. Якщо $F(p) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{p^n}$, то

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

**Proof.**
$f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{p^n}e^{pt}\,dp =$
$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{1}{p^n}e^{pt}\,dp\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)!}t^{n-1}$ ■

## 6.4 Трохи корисних прикладів використання

**Example 4.4.1.** Розв'язати систему диференціальних рівнянь: $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -4x - y \end{cases}$
Додатково $x(0) = 5$, $y(0) = -7$
$x(t) \to X(p) \Rightarrow x'(t) \to pX(p) - x(0) = pX(p) - 5$
$y(t) \to Y(p) \Rightarrow y'(t) \to pY(p) - y(0) = pY(p) + 7$
Отже, система матиме такий вигляд:
$\begin{cases} pX - 5 = 3X + Y \\ pY + 7 = -4X - Y \end{cases}$ Обчислимо систему, розв'язуючи відносно $X(p), Y(p)$. Використовуючи магію метода Крамера, отримаємо
$\begin{cases} X(p) = \dfrac{5p-2}{(p-1)^2} \\ Y(p) = \dfrac{-7p+1}{(p-1)^2} \end{cases}$
$X(p) = \dfrac{5}{(p-1)} + \dfrac{3}{(p-1)^2} \to x(t) = 5e^t + 3te^t$
$Y(p) = \dfrac{-7}{(p-1)} + \dfrac{-6}{(p-1)^2} \to y(t) = -7e^t - 6te^t$

**Example 4.4.2.** Розв'язати інтегральне рівняння:
$\displaystyle\int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = \operatorname{ch} t - \cos t$
$x(t) \to X(p)$
$\operatorname{ch} t \to \dfrac{p}{p^2-1}$
$\cos t \to \dfrac{p}{p^2+1}$

І нарешті, зауважимо згортку: $\int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = ch * x(t) \to \frac{p}{p^2-1}X(p)$ Тому рівняння матиме вигляд:

$\frac{p}{p^2-1}X(p) = \frac{p}{p^2-1} - \frac{p}{p^2+1}$

Виразимо $X(p)$ і отримаємо:

$X(P) = \frac{2}{p^2+1} \to x(t) = 2\sin t$

$\blacksquare$