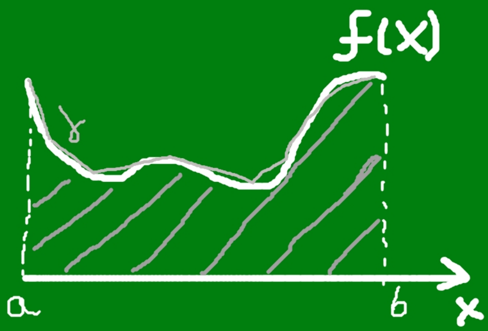
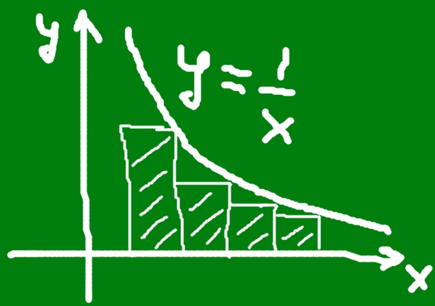
Real analysis II



$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

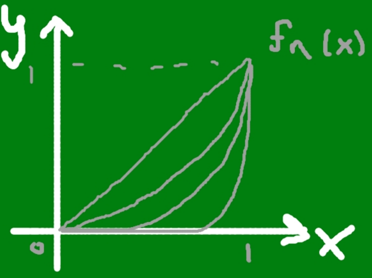


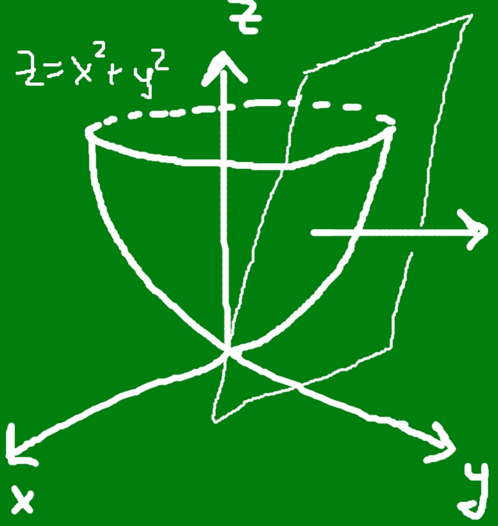
$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots = -\ln 2$$

$$-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots = -\frac{3}{2}\ln 2$$

$$\{ f_n(x) = x^n, n \geq 1 \}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$$





$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$$

Зміст

1 Невизначений інтеграл **4**
- 1.1 Первісна, основні означення невизначеного інтегралу 4
- 1.2 Заміна змінної 5
- 1.3 Інтегрування частинами 6
- 1.4 Інтегрування дробово-раціональних функцій 6
- 1.5 Інтегрування тригонометричних функцій 8
- 1.6 Інтегрування ірраціональних виразів 9
- 1.7 Диференціальний біном 10

2 Визначений інтеграл **11**
- 2.1 Підхід Рімана 11
- 2.2 Суми Дарбу 12
- 2.3 Існування інтеграла 14
- 2.4 Класи інтегрованих функцій 15
- 2.5 Властивості інтегралів 18
- 2.6 Інтеграл як функція верхньої межі 19
- 2.7 Обчислення визначених інтегралів 22
  - 2.7.1 Заміна змінної 22
  - 2.7.2 Інтегрування частинами 23
- 2.8 Застосування визначеного інтеграла 24
  - 2.8.1 Площа криволінійної трапеції 24
  - 2.8.2 Площа криволінійного сектора 26
  - 2.8.3 Крива, яка спрямовується 26
  - 2.8.4 Об'єм тіла обертання 28

3 Невласні інтеграли **30**
- 3.1 Основні означення 30
- 3.2 Властивості 30
- 3.3 Дослідження на збіжність/розбіжність 33
  - 3.3.1 Дослідження для додатних функції 33
  - 3.3.2 Дослідження для знакодовільних функцій 35
- 3.4 Особливі випадки 37
- 3.5 Невласний інтеграл в сенсі головного значення по Коші 38

4 Ряди **40**
- 4.1 Первинний аналіз збіжності та арифметика рядів 40
- 4.2 Знакододатні ряди 41
- 4.3 Знакозмінні ряди 46
- 4.4 Трошки детально про абсолютно збіжні ряди 49

5 Функціональні ряди **52**
- 5.1 Функціональні послідовності 52
- 5.2 Функціональні ряди 55
- 5.3 Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів 58
- 5.4 Степеневі ряди 60
- 5.5 Ряди Тейлора 62

6 Вступ до $\mathbb{R}^m$ **65**
- 6.1 Топологія та принцип аналіза в $\mathbb{R}^m$ 65
- 6.2 Границя послідовності 66
- 6.3 Функція від декількох змінних. Границя функції 69
- 6.4 Неперервність функції 71
- 6.5 Символіка Ландау 72
- 6.6 Границя та неперервність векторнозначної функції кількох змінних, символіка Ландау 73
- 6.7 Крива в $\mathbb{R}^m$ 74

7 Диференційованість **75**
7.1 Для функції із багатьма змінними . . . 75
7.2 Для векторнозначних функцій . . . 78
7.3 Похідна за напрямком. Градієнт . . . 80
7.4 Неявно задані функції . . . 81
7.5 Обернені функції . . . 83
7.6 Геометричне та алгебраїчне застосування . . . 84
7.6.1 Дотична площина, нормальна пряма поверхні . . . 84
7.6.2 Дотична пряма, нормальна площина кривої . . . 85
7.6.3 Приблизне обчислення . . . 86
7.7 Диференціювання та похідні старших порядків . . . 86
7.8 Формула Тейлора . . . 90
7.9 Локальні екстремуми . . . 91
7.10 Умовні локальні екстремуми . . . 93

8 Інтеграли з параметром **97**
8.1 Основні означення та властивості . . . 97
8.2 Невласні інтеграли з параметром. Ознаки збіжності . . . 100
8.3 Властивості невласного інтегралу . . . 101
8.4 Інтеграл Діріхле . . . 104
8.5 Інтеграл Ейлера-Пуассона . . . 104
8.6 Гамма-функція . . . 105
8.7 Бета-функція . . . 106
8.8 Зв'язок між Γ та B функціями . . . 107

1 Невизначений інтеграл

У рамках даного розділу розглядатимуться множини I, J, що будуть проміжками одного з типів: $[a,b], (a,b), (a,b]$, причому можливий нескінчений проміжок.

1.1 Первісна, основні означення невизначеного інтегралу

Definition 1.1.1 **Первісною** для функції $f : I \to \mathbb{R}$ називають функцію $F : I \to \mathbb{R}$, для якої

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x)$$

Example 1.1.2 Зокрема $F(x) = x^2$ - первісна функції $f(x) = 2x$ на $I = \mathbb{R}$.

Example 1.1.3 Зокрема $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$ - первісна функції $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ на $I = \mathbb{R}$.

Proposition 1.1.4 Якщо $F(x), \Phi(x)$ - первісні для $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + C$.
Випливає з наслідків теореми Лагранжа.

Remark 1.1.5 Не кожна функція може мати первісну. Зокрема $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не має первісної на $I = [-1, 1]$.
!Припустимо, що f має первісну F, тоді обов'язково $F \in C((-1,1))$. Оберемо $0 < x < 1$ та застосуємо теорему Лагранжа:
$F(x) - F(0) = \operatorname{sgn} \xi \cdot (x - 0) = x$, де $\xi \in (0, x)$. Таким чином, $\dfrac{F(x) - F(0)}{x} = 1$.
При $x \to 0 + 0$ отримаємо $F'(0 + 0) = 1$, але водночас $F'(0) = F'(0 + 0) = 0$. Суперечність!

Definition 1.1.6 Множину всіх первісних для функції $f(x)$ називають **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$.
Позначення: $\displaystyle\int f(x)\,dx = \{F(x) : F'(x) = f(x)\}$.

Remark 1.1.7 Але враховуючи твердження вище, ми можемо записувати одну з первісних, тобто $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$, де F - первісна функції f.

Example 1.1.8 $\displaystyle\int 2x\,dx = \{x^2 + C | C \in \mathbb{R}\}$.

Оскільки є якась первісна, то можна записати як $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + C$.

Proposition 1.1.9 **Властивості**
1) $\displaystyle\int f'(x)\,dx = f(x) + C$;
2) $\displaystyle\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$;
Далі задамо функції f, g, які мають відповідно первісні F, G. Тоді:
3) αF - первісна для функції αf, причому $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$;
4) $F + G$ - первісна для функції $f + g$, причому $\displaystyle\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Proof.
1), 2) *випливають з означення.*

3) Якщо F - первісна функції f, то тоді αF - первісна функції αf, тому що
$(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$.
Отже, $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha F(x) + C = \alpha\,(F(x) + C^*) = \alpha \int f(x)\,dx$.

4) Якщо F, G - первісні відповідно функції f, g, то $F + G$ - первісна функції $f + g$, тому що
$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.
Отже, $\displaystyle\int f(x) + g(x)\,dx = F(x) + G(x) + C = F(x) + C^* + G(x) + C^{**} = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$. ■

Remark 1.1.10 Підінтегральний вираз $f(x)\,dx$ варто розглядати як диференціал функції $F(x)$, тобто
$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff d(F(x) + C) = f(x)\,dx$

Remark 1.1.11 Взагалі-то кажучи, символ $\int f(x)\,dx$ можна також використовувати, щоб позначити як первісну функції f, якщо не можна записати F як функцію.
Зокрема $\int e^{-x^2}\,dx$ - первісна функції e^{-x^2}, проте записати як функцію від змінної не можна.

Таблиця первісних

$f(x)$	$F(x)$
1	x
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
e^x	e^x
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$

Example 1.1.12 Обчислимо $\int (x+2)^2 + \operatorname{tg}^2 x\,dx$.
Робити будемо це, використовуючи таблицю первісних та властивості інтегралів.
$\int (x+2)^2 + \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int x^2 + 4x + 4 + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\,dx = \int x^2\,dx + 4\int x\,dx + 3\int 1\,dx + \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx =$
$= \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + \operatorname{tg} x + C.$

1.2 Заміна змінної

Theorem 1.2.1 Задано функцію $f : I \to \mathbb{R}$, має первісну F; функцію $g : J \to I$ - диференційована. Тоді $(f \circ g)g'$ має первісу $F \circ g$ на J, причому
$\int (f \circ g)(x) g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt.$

Proof.
Дійсно, $F \circ g$ - первісна для $(f \circ g)g'$, оскільки $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$.
Отже, $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(g(x))\,dg(x) = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$. ■

Example 1.2.2 Обчислити $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

$\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx \boxed{=}$ Проведемо заміну: $\ln x = t$. Тоді $\dfrac{1}{x}\,dx = dt$

$\displaystyle\boxed{=} \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$

1.3 Інтегрування частинами

Theorem 1.3.1 Задані функції $u, v : I \to \mathbb{R}$ - обидва диференційовані. Відомо, що $u'v$ має первісну. Тоді uv' також має первісну, причому
$\displaystyle\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$

Proof.
Ми знаємо, що $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \implies u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u(x)v'(x)$.
Функції $(uv)'$, uv' мають первісну, одна дорівнює uv, а інша просто за умовою. Тоді $(uv)' - uv' = uv'$ теж має первісну та дорівнює:
$\displaystyle\int u(x)v'(x)\,dx = \int (u(x)v(x))' - u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$ ■

Remark 1.3.2 Більш зручно записати таку формулу: $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Example 1.3.3 Обчислити $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$.

$\displaystyle\int x^2e^x\,dx \boxed{=}$
Робимо заміну $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$ $\qquad e^x\,dx = dv \Rightarrow v = e^x$
$\displaystyle\boxed{=} x^2e^x - \int 2xe^x\,dx \boxed{\boxed{=}}$
Знову заміну $u = 2x \Rightarrow du = 2\,dx$ $\qquad e^x\,dx = dv \Rightarrow v = e^x$
$\displaystyle\boxed{\boxed{=}} x^2e^x - (2xe^x - \int 2e^x\,dx) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

1.4 Інтегрування дробово-раціональних функцій

Розглянемо $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, де $P(x), Q(x)$ - многочлени з дійсними коефіцієнтами. Є два випадки:
I. $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$
Тоді можемо поділити їх з остачею: $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$.
А тому $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$
,де $S(x)$ - деякий многочлен, який можна проінтегрувати таблицею, а також $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$.
Зараз буде пункт, як такий випадок інтегрувати.

II. $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$
За наслідком основної теореми алгебри, розкладемо $Q(x)$ таким чином:
$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}$.
Причому дискримінант квадратних трьохчленів - від'ємний.
Тоді за теоремою десь із курсу ліналу, ми можемо $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ записати як суму простих дробів:
$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - a_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{m1}}{x - a_m} + \dots + \frac{A_{mk_m}}{(x - a_m)^{k_m}} +$$
$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + p_sx + q_s} + \dots + \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}}.$$
Коротше, залишається розглянути 4 вигляди інтегралу:

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$

2) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$

3) $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx \boxed{=}$

Знаменник розпишу як $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}$.

Зробимо заміну: $x+\frac{p}{2} = t \Rightarrow dx = dt$

Також $Bx+C = Bt - B\frac{p}{2} + C$.

Перепозначення: $\frac{4q-p^2}{4} = a^2 > 0 \qquad C - B\frac{p}{2} = M$.

$\boxed{=} \displaystyle\int \frac{Bt+M}{t^2+a^2}\,dt = B\int \frac{t}{t^2+a^2}\,dt + M\int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt \boxed{\boxed{=}}$

$\displaystyle\int \frac{t}{t^2+a^2}\,dt = \frac{dt^2}{2(t^2+a^2)} = \frac{1}{2}\ln|t^2+a^2|$

$\displaystyle\int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}\,dt = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{t}{a}}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}$

$\boxed{\boxed{=}} \frac{B}{2}\ln|t^2+a^2| + \frac{M}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$

Ну а далі робимо зворотню заміну - інтеграл розв'язаний.

4) $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}\,dx \boxed{=}$

Тут робимо ті самі заміни, що в 3)

$\boxed{=} \displaystyle\int \frac{Bt+M}{(t^2+a^2)^l}\,dt = B\int \frac{t}{(t^2+a^2)^l}\,dt + M\int \frac{1}{(t^2+a^2)^l}\,dt$

Ну і тут я ланцюг рівностей зупиню, якщо перший інтеграл - ще ок, то другий - це дупа

$\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+a^2)^l}\,dt = \int \frac{dt^2}{2(t^2+a^2)^l}\,dt = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-l)s^{l-1}}$

$\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+a^2)^l}\,dt \boxed{=} \qquad u = \frac{1}{(t^2+a^2)^l} \qquad dv = dt$

$\boxed{=} \displaystyle\frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{l+1}}\,dt + \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^l} - a^2\frac{dt}{(t^2+a^2)^{l+1}}\right)$

Позначимо за $I_l = \displaystyle\int \frac{t}{(t^2+a^2)^l}\,dt$

Тоді маємо таке рівняння:

$I_l = \dfrac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l\cdot I_l - 2la^2\cdot I_{l+1}$

Залишилось виразити I_{l+1} та розв'язати рівняння рекурсивно, причому I_1 ми вже рахували.

1)+2)+3)+4) $\implies$ інтеграл $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ - розв'язаний.

Example 1.4.1 Обчислити $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^3}\,dx$

Оскільки $\deg(x^4) > \deg(1+x^3)$, то ми поділимо многочлени. Отримаємо:

$\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^3}\,dx = \int x - \frac{x}{x^3+1}\,dx = x^2 - \int \frac{x}{x^3+1}\,dx.$

Обчислимо другий інтеграл. Перед цим розкладемо дріб на суму простих дробів методом невизначених коефіцієнтів:

$\dfrac{x}{x^3+1} = \dfrac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1} \boxed{=}$

$A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) = x$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=1 \\ A+C=0 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{1}{3}, B=\frac{1}{3}, C=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{=} -\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2-x+1}$$

Таким чином, треба порахувати такий інтеграл:

$$\int \frac{x}{x^3+1}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx \boxed{=}$$

І розглянемо другий інтеграл:

$$\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{4x+4}{(2x-1)^2+3}\,dx = \int \frac{4x-2}{(2x-1)^2+3}\,dx + \int \frac{6}{(2x-1)^2+3}\,dx =$$

$$= \ln\big((2x-1)^2+3\big) + 6\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \ln\big(4x^2-4x+4\big) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{=} -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln\big(4x^2-4x+4\big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

Разом отримаємо:

$$\int \frac{x^4}{1+x^3}\,dx = x^2 + \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln\big(4x^2-4x+4\big) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Example 1.4.2 Обчислити $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

Можна скористатися отриманою рекурентною формулою, а можна зробити ті самі кроки.

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^1}\,dx = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^1}\,dx \overset{u=\text{дріб},dv=dx}{=} \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\Longrightarrow \operatorname{arctg} x = \frac{x}{x^2+1} + 2\operatorname{arctg} x - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

1.5 Інтегрування тригонометричних функцій

I. Розглянемо $\int \sin^k x \cos^m x\,dx$, де $k, m \in \mathbb{Z}$. Маємо такі заміни:

1) k - непарне, тобто $k = 2l+1$, тоді заміна: $\cos x = t$.

2) m - непарне, тобто $m = 2l+1$, тоді заміна: $\sin x = t$.

3) k, m - парні, тобто $k = 2l, m = 2n$, тоді знижуємо степені формулами:
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Всі ці заміни приведуть до інтегрування дробово-раціональних виразів.

Example 1.5.1 Обчислити $\int \cos^3 x\,dx$

Заміна: $t = \sin x$, випадок 2), тоді $dt = \cos x\,dx$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int (1-t^2)\,dx = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

II. Розглянемо $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, де R - дробово-раціональний вираз від $\sin x, \cos x$. Маємо таку заміну - її ще називають **універсальною тригонометричною підстановкою**:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg} t \Longrightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Підставивши, ми отримуємо випадок інтегрування дробово-раціональних виразів.

Example 1.5.2 Обчислити $\displaystyle\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

Заміна: $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, випадок II. Тоді беремо решта замін звідси, з нашого пункту.

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \int \frac{1}{5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2\,dt}{5+5t^2-3+3t^2} = \int \frac{dt}{4t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2t + C =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

Але універсальна підстановка не завжди може буде ефективною.

III. Проводжимо розглядати $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,dx$. Нехай є кілька випадків:

1) $R(-u, v) = -R(u, v)$, тоді заміна: $\cos x = t$;
2) $R(u, -v) = -R(u, v)$, тоді заміна: $\sin x = t$;
3) $R(-u, -v) = R(u, v)$, тоді заміна: $\operatorname{tg} x = t$ або $\operatorname{ctg} x = t$.

Без доведення. Важкі алгебраїчні перетворення.

Example 1.5.3 Обчислити $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,dx$.

Маємо $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{(2+\cos x)\sin x}$, зауважимо, що $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тож беремо заміну $t = \cos x$. Отже,

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,dx = \int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)}\,dt = \cdots = \frac{1}{3}\ln|t+2| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln|t-1| + C =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|\cos x+2| - \frac{1}{2}\ln|\cos x+1| + \frac{1}{6}\ln|\cos x-1| + C.$$

1.6 Інтегрування ірраціональних виразів

I. Розглянемо $\displaystyle\int R\left(\sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[k_n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, де R - дробово-раціональний вираз, причому $ad - cb \neq 0$.

Заміна: $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^m$, де число $m = \operatorname{lcm}(k_1, \dots, k_n)$.

Виразимо x з цього рівняння:

$ax + b = t^m cx + t^m d \implies x = \dfrac{t^m d - b}{a - ct^m}$

А потім шукаємо $dx = \dfrac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(a-ct)^2}\,dt$.

Підставивши, ми отримуємо інтеграл дробово-раціонального виразу.

Example 1.6.1 Обчислити $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\,dx$

Заміна: $t^2 = x+1$. Тоді $x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{t+2}{t^4-t}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}\,dt \boxed{=}$$

обчислення цього інтегралу проводиться як в п. 4, тому я пропускаю цей момент

$$\boxed{=} -\ln\left(t^2+t+1\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + 2\ln|t-1| + C =$$
$$= -\ln\left(x+2+\sqrt{x+1}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + 2\ln|\sqrt{x+1}-1| + C$$

II. Розглянемо такі інтеграли:

1) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$

Заміна: $x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t\,dt$

2) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$

Заміна: $x = a\operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt$

3) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx$
Заміна: $x = \dfrac{a}{\cos t} \Rightarrow dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}\sin t\,dt$

Усі заміни приведуть до інтегралу тригонометричних функцій.

Example 1.6.2 Обчислити $\displaystyle\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$
Заміна: $x = 2\sin t$, випадок 1). Тоді $dx = 2\cos t\,dt$
$\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = \int 2(1+\cos 2t)\,dt = 2t + \sin 2t + C = 2t + 2\sin t\cos t + C =$
$= 2\arcsin\dfrac{x}{2} + 2\dfrac{x}{2}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}} + C = 2\arcsin\dfrac{x}{2} + \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

1.7 Диференціальний біном

Розглянемо $\displaystyle\int x^m(ax^n + b)^p\,dx$, де $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Існують лише три випадки, як його розв'язати, для цього я наведу діаграму нижче, які застосовувати заміни.
Але для початку оскільки $m, n, p \in \mathbb{Q}$, то я запишу як дріб $m = \dfrac{s_1}{q_1}$, $n = \dfrac{s_2}{q_2}$, $p = \dfrac{s_3}{q_3}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
p \in \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{ні}} & \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{ні}} & p + \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{ні}} & \textbf{не обчислюється} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\text{так}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\text{так}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\text{так}} & & \\
x = t^{\operatorname{lcm}(q_1, q_2)} & & ax^n + b = t^{q_3} & & a + bx^{-n} = t^{q_3} & &
\end{array}$$

Заміни називають **підстановками Чебишова**, що приводять до інтегралу дробово-раціональних виразів. Якщо жодна з пунктів не спрацьовує, то інтеграл не може бути обчисленим через елементарні функції (*без доведення*).

Example 1.7.1 Обчислити $\displaystyle\int \sqrt[3]{x - x^3}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}(1-x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$
Тут у нас $m = \dfrac{1}{3}$, $n = 2$, $p = \dfrac{1}{3}$
Спрацьовує 3), тому що $p + \dfrac{m+1}{n} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1 + \frac{1}{3}}{2} = 1 \in \mathbb{Z}$
Заміна: $-1 + x^{-2} = t^3$
$-2x^{-3}\,dx = 3t^2\,dt$
$\displaystyle\int \sqrt[3]{x - x^3}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}(1-x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \int (x^{-2} - 1)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}\,dx = \int t \cdot x \cdot \frac{3t^2 x^3\,dt}{-2} = \int \frac{3t^3\,dt}{-2(t^3+1)^2} =$
$= \dfrac{3}{-2}\left(\displaystyle\int \frac{dt}{t^3+1} - \int \frac{dt}{(t^3+1)^2}\right) \boxed{=}$
обчислення цього інтегралу проводиться як в п. 4, тому я пропускаю цей момент
$\boxed{=} -\dfrac{\ln|t+1|}{2} + \dfrac{\ln\left(t^2 - t + 1\right)}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\ln|t+1|}{3} - \dfrac{\ln\left(t^2 - t + 1\right)}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} +$
$\dfrac{t}{2t^3 + 2} + C =$
$= -\dfrac{1}{6}\ln|t+1| + \dfrac{1}{12}\ln\left(t^2 - t + 1\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + \dfrac{t}{2t^3+2} + C$
І підставляємо $t = \sqrt[3]{x^{-2} + 1}$.

2 Визначений інтеграл

2.1 Підхід Рімана

Definition 2.1.1 **Розбиттям** множини $[a, b]$ називають множину точок $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, для яких

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Definition 2.1.2 Позначимо за $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Тоді числом

$$|\tau| = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$$

називають **діаметром** (або **дрібністю**) розбиття τ.

Definition 2.1.3 Задані розбиття τ, τ' відрізка $[a, b]$. Якщо $\tau \subset \tau'$, то τ' називають **підрозбиттям** розбиття τ.

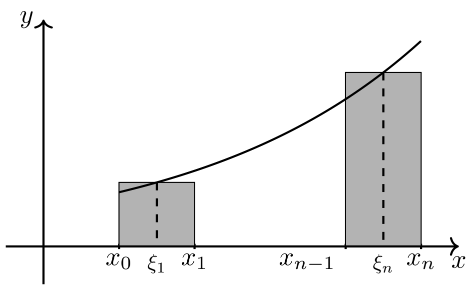
Proposition 2.1.4 Задано τ' - підрозбиття для τ. Тоді $|\tau'| \leq |\tau|$.

Proof.
Дійсно, із розбиття ми можемо отримати підрозбиття шляхом додавання точок. Тоді деякі інтервали будуть ділитись на підінтервали через додавання точки. Відповідно діаметр зменшується. ■

Definition 2.1.5 Задано $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - розбиття відрізка $[a, b]$
Елементи множини $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ називають **відміченими точками**.
Тут $\xi_1 \in [x_0, x_1), \xi_2 \in [x_1, x_2), \dots, \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$.

Definition 2.1.6 Задано функцію $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, розбиття $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ та відмічені точки $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.
Інтегральною сумою Рімана функції f для нашого розбиття τ та відмічених точок називають число:

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$



Definition 2.1.7 Задано функцію $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Функція f називається **інтегрованою за Ріманом** на $[a, b]$, якщо існує таке число $I \in \mathbb{R}$, для якого виконана умова:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies |\sigma(\tau, \xi, f) - I| < \varepsilon$$

Число I називають **інтегралом Рімана**.

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Позначення: $I = \lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma(f, \tau, \xi)$ (трошки нелегально, тому що не знаю, що таке границя за базою).
Множина інтегрованих функцій за Ріманом позначається так: $\mathcal{R}([a, b])$.

Remark 2.1.8 Детально переформулюю частину означення: для кожного розбиття τ, якщо вона є скільки завгодно малою, то тоді виконується нерівність для кожної множини обраних точок ξ.
Також нотація $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma(f,\tau,\xi)$ - це не границя функції σ в звичному вигляді, а трохи іншої специфікації границя.

Example 2.1.9 Доведемо, що функція $f(x) = 1 \in \mathcal{R}([a,b])$, а також $\displaystyle\int_a^b 1\,dx = b - a$.
Для початку зафіксуємо розбиття $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ та відмітимо точки $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Це аби знайти інтегральну суму:
$\sigma(f,\tau,\xi) = \displaystyle\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$
$\sigma(1,\tau,\xi) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \Delta x_k = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a.$
І ця інтегральна сума має це значенням при довільному розбитті. Якщо встановити $I = b - a$, то тоді:
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (\tau,\xi) : |\tau| < \delta \implies |\sigma(\tau,\xi,f) - I| = |b - a - (b - a)| = 0 < \varepsilon.$
Отже, $f(x) = 1 \in \mathcal{R}([a,b])$, а інтеграл $\displaystyle\int_a^b 1\,dx = b - a$.

Theorem 2.1.10 Задано функцію $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Число I - інтеграл Рімана $\iff \forall (\tau_n, \xi_n) : |\tau_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \sigma(f,\tau_n,\xi_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$.
Зрозуміло. Фактично, це можна вважати як означення 'за Гейне', але не зовсім. Проте схожі.

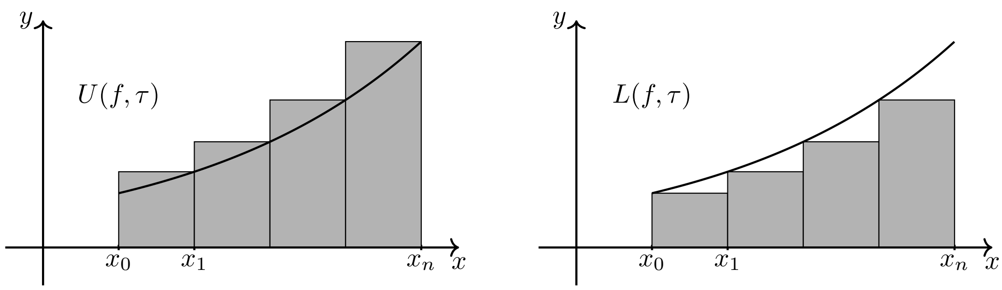
2.2 Суми Дарбу

Definition 2.2.1 Задано функцію $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - обмежена. Визначмо такі значення для розбиття $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$:

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \qquad M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \qquad k = 1,\dots,n$$

Верхньою та нижньою сумою Дарбу називають такі суми:

$$U(f,\tau) = \sum_{k=1}^n M_k\Delta x_k \qquad L(f,\tau) = \sum_{k=1}^n m_k\Delta x_k$$



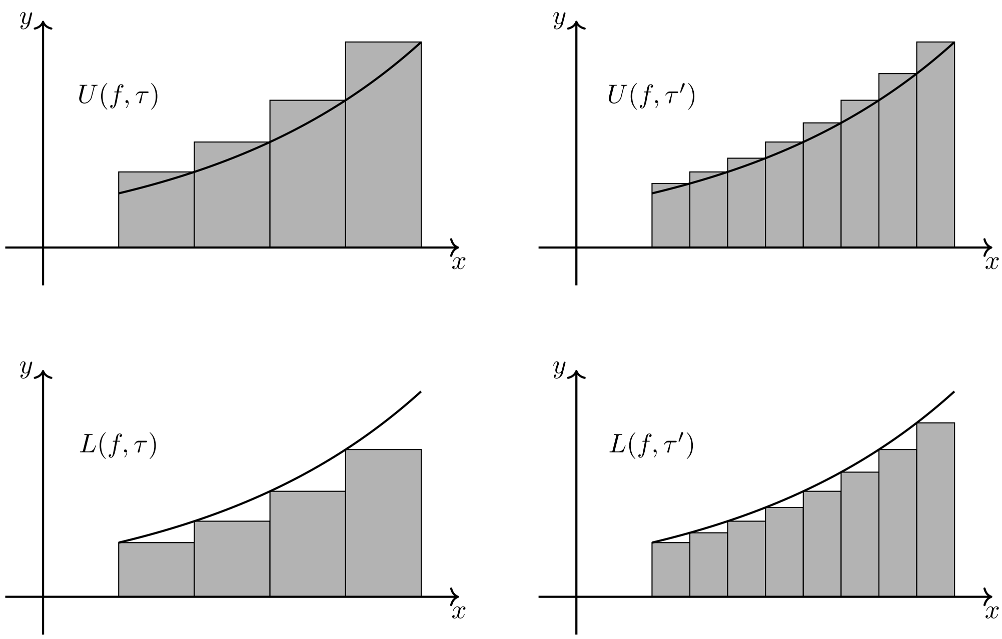
Remark 2.2.2 Із означення випливає, що $L(f,\tau) \le \sigma(f,\tau,\xi) \le U(f,\tau)$, оскільки $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$.

Lemma 2.2.3 Задано функцію $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - обмежена та будь-яке розбиття τ. Тоді маємо:
$L(f,\tau) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f,\tau,\xi) \qquad U(f,\tau) = \sup\limits_{\xi} \sigma(f,\tau,\xi)$

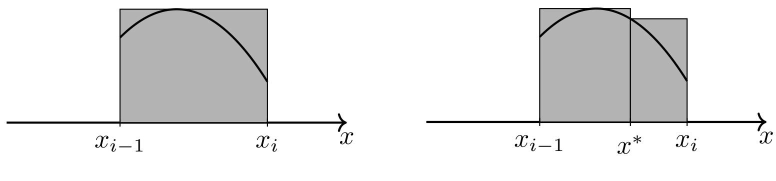
Proof.
Зафіксуємо розбиття $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, тоді f - обмежена на $[x_{k-1}, x_k], \forall k$.
А тепер візьмемо деякий набір точок ξ, тоді зрозуміло, що $f(\xi_k) \le M_k, \forall k \implies f(\xi_k)\Delta x_k \le M_k\Delta x_k$
Просумуємо всі рівняння, які тут в нас є - тоді отримаємо:
$\displaystyle\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^n M_k\Delta x_k \implies \sigma(f,\tau,\xi) \le U(f,\tau)$

А далі зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки $M_k = \sup\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, то тоді $\exists x_\varepsilon : f(x_\varepsilon) > M_k - \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
І ось ці точки $x_\varepsilon = \xi'_k$ - це буде мій набір точок, який існує. Тоді маємо
$f(\xi'_k) > M_k - \dfrac{\varepsilon}{b-a} \implies f(\xi'_k)\Delta x_k > M_k \Delta x_k - \dfrac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k$
Аналогічно просумуємо всі рівняння - отримаємо:
$\sum\limits_{k=1}^n f(\xi'_k)\Delta x_k > \sum\limits_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k \implies S_{\tau,\xi'}(f) > U(f,\tau) - \varepsilon$
Остаточно, ми отримали $U(f,\tau) = \sup\limits_{\xi} \sigma(f,\tau,\xi)$. Випадок $L(f,\tau) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f,\tau,\xi)$ аналогічний. ■

Lemma 2.2.4 Задано функцію $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - обмежена та розбиття τ. Також задамо підрозбиття τ'. Тоді $U(f,\tau) \geq U(f,\tau')$, а також $L(f,\tau) \leq L(f,\tau')$.



Proof.
Достатньо розглянути підрозбиття $\tau' = \tau \cup \{x^*\}$, припустимо $x^* \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,n}$. Тому що якщо в мене буде більше точок, то будемо поступово їх додавати.
$U(f,\tau) = \sum\limits_{k=1}^n M_k \Delta x_k = M_i \Delta x_i + \sum\limits_{k=1, k\neq i}^n M_k \Delta x_k \boxed{\geq}$
Зауважимо, що $M_i \Delta x_i = M_i(x_i - x_{i-1}) = M_i(x_i - x^* + x^* - x_{i-1}) = M_i(x_i - x^*) + M_i(x^* - x_{i-1}) \geq \tilde{M}(x_i - x^*) + \tilde{\tilde{M}}(x^* - x_{i-1})$
,де $\tilde{M} = \sup\limits_{x \in [x^*, x_i]} f(x) \qquad \tilde{\tilde{M}} = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x^*]} f(x)$



$\boxed{\geq} \sum\limits_{k=1, k\neq i}^n M_k \Delta x_k + \tilde{M}(x_i - x^*) + \tilde{\tilde{M}}(x^* - x_{i-1}) = U(f, \tau \cup \{x^*\}) = U(f,\tau')$.
Випадок $L(f,\tau) \leq L(f,\tau')$ аналогічний. ■

Lemma 2.2.5 Задано функцію $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - обмежена. Візьмемо будь-які два розбиття τ', τ''. Тоді $L(f,\tau') \leq U(f,\tau'')$.

Proof.
Зафіксую $\tau = \tau' \cup \tau''$ - це є підрозбиттям одночасно розбиття τ' та розбиття τ''. Тоді за попередньою лемою,
$L(f, \tau') \leq L(f, \tau) \leq U(f, \tau) \leq U(f, \tau'')$. ■

Definition 2.2.6 Верхнім/нижнім інтегралом Дарбу будемо називати такі вирази:

$$I^*(f) = \inf_\tau U(f, \tau) \qquad I_*(f) = \sup_\tau L(f, \tau)$$

Remark 2.2.7 Справедлива така нерівність: $I_*(f) \leq I^*(f)$.
Випливає з щойно доведеної леми.

Proposition 2.2.8 Задано функцію $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - обмежена. Тоді
$\lim\limits_{|\tau| \to 0} L(f, \tau) = I_*(f) \qquad \lim\limits_{|\tau| \to 0} U(f, \tau) = I^*(f)$.

Proof.
Маємо $I_*(f) = \sup\limits_\tau L(f, \tau)$, тоді звідси
$\forall \tau : L(f, \tau) \leq I_*(f)$
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau_\varepsilon : L(f, \tau_\varepsilon) > I_*(f) - \varepsilon$.
Встановимо $\delta = \dfrac{|\tau_\varepsilon|}{2}$. Тоді $\forall \tau : |\tau| \leq |\tau_\varepsilon| < \delta \implies I_*(f) - \varepsilon < L(f, \tau_\varepsilon) \leq L(f, \tau) \leq I_*(f) < I_*(f) + \varepsilon$.
Тобто звідси отримали, що $|L(f, \tau) - I_*(f)| < \varepsilon$, що й доводить рівність $\lim\limits_{|\tau| \to 0} L(f, \tau) = I_*(f)$.
Аналогічні міркування для другої рівності. ■

2.3 Існування інтеграла

Theorem 2.3.1 Необхідна умова інтегрованості
Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді f - обмежена на $[a, b]$.

Proof.
Оскільки $f \in \mathcal{R}([a, b])$, то звідси $\exists I \in \mathbb{R}$, для якого виконано:
для $\varepsilon = 1 : \exists \delta : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies \forall \xi : |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < 1 \implies |\sigma(f, \tau, \xi)| < |I| + 1$.
!Припустимо, що f - не обмежена зверху, тоді $\exists k_0 = \overline{1, n} : f$ - необмежена на $[x_{k_0 - 1}, x_{k_0}]$. Тобто $\forall M > 0 : \exists x \in [x_{k_0 - 1}, x_{k_0}] : f(x) > M$. Якщо встановити $M = j$, то знайдеться послідовність $\{x_j, j \geq 1\} = \{\xi_{k_0}^{(j)}, j \geq 1\}$, для якої $f\left(\xi_{k_0}^{(j)}\right) \to +\infty$.
Розглянемо послідовність відмічених точок $\{\xi_j, j \geq 1\}$, де $\xi_j = \{\xi_1, \dots, \xi_{k_0 - 1}, \xi_{k_0}^{(j)}, \xi_{k_0 + 1}, \dots, \xi_n\}$. А далі розглянемо послідовність інтегральних сум $\{\sigma_j, j \geq 1\} = \{\sigma(f, \tau, \xi_j), j \geq 1\}$. Тоді
$\sigma_j = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{k_0 - 1})\Delta x_{k_0 - 1} + f(\xi_{k_0}^{(j)})\Delta x_{k_0} + f(\xi_{k_0 + 1})\Delta x_{k_0 + 1} + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n \to +\infty$.
Проте ми ж мали, що $\forall \xi_j : |\sigma(f, \tau, \xi_j)| \leq 1 + |I|$. Суперечність! ■

Remark 2.3.2 Взагалі-то кажучи, в іноземних підручниках під час введення означення інтегралу Рімана одразу вважають f - обмеженою на $[a, b]$.

Theorem 2.3.3 Перший критерій інтегрованості
Задано функцію $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff f$ - обмежена на $[a, b]$ та $I_*(f) = I^*(f)$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді автоматично f - обмежена та
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$.
Оскільки $\forall \xi : \sigma(f, \tau, \xi) < I + \varepsilon$, то зокрема $\sup\limits_\xi \sigma(f, \tau, \xi) = U(f, \tau) \leq I + \varepsilon$.
Оскільки $\forall \xi : \sigma(f, \tau, \xi) > I - \varepsilon$, то зокрема $\inf\limits_\xi \sigma(f, \tau, \xi) = L(f, \tau) \geq I - \varepsilon$.
Додатково
$I^*(f) = \inf\limits_\tau U(f, \tau) \leq U(f, \tau) \leq I + \varepsilon$
$I_*(f) = \sup\limits_\tau L(f, \tau) \geq L(f, \tau) \geq I - \varepsilon$.
Остаточно $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq I + \varepsilon - I + \varepsilon = 2\varepsilon$, виконано $\forall \varepsilon > 0 \implies I^*(f) = I_*(f)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: f - обмежена на $[a,b]$ та $I^*(f) = I_*(f) \overset{\text{позн.}}{=} I$.

Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді за критерієм супремуму та інфімуму, $\exists \tau_\varepsilon^1, \tau_\varepsilon^2 : \begin{matrix} L(f,\tau_\varepsilon^1) > I - \varepsilon \\ U(f,\tau_\varepsilon^2) < I + \varepsilon \end{matrix}$.

Встановимо $\delta = |\tau_\varepsilon^1 \cup \tau_\varepsilon^2|$. Тоді $\forall (\tau,\xi) : |\tau| < \delta \implies$
$I - \varepsilon < L(f,\tau_\varepsilon^1) \le L(f,\tau) \le \sigma(f,\tau,\xi) \le U(f,\tau) \le U(f,\tau_\varepsilon^2) < I + \varepsilon \implies |\sigma(f,\tau,\xi) - I| < \varepsilon$.
Таким чином, $f \in \mathcal{R}([a,b])$. ■

Example 2.3.4 Задано $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ - функція Діріхле. З'ясуємо, чи $\mathfrak{D} \in \mathcal{R}([a,b])$.

Задамо довільне розбиття $\tau = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$. Розглянемо якийсь відрізок $[x_{k-1}, x_k]$. Якщо обидва числа раціональні, то знайдеться ірраціональне. Якщо обидва числа ірраціональні, то знайдеться раціональне. А тому в будь-якому випадку $M_k = 1$ та $m_k = 0$.
Отже $U(\mathfrak{D},\tau) = b - a, \qquad L(\mathfrak{D},\tau) = 0$.
Нарешті, $I_*(\mathfrak{D}) = b - a$ та $I^*(\mathfrak{D}) = 0$, оскільки ми отримаємо величину, що відносно не залежить від розбиття. За критерієм, $I_*(\mathfrak{D}) \ne I^*(\mathfrak{D}) \implies \mathfrak{D} \notin \mathcal{R}([a,b])$.

Remark 2.3.5 Один з прикладів, коли із обмеженості функції не випливає її інтегрованість.

Corollary 2.3.6 Якщо функція $f \in \mathcal{R}([a,b])$ та $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ - його відповідний інтеграл, то справедлива нерівність:
$L(f,\tau) \le \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le U(f,\tau)$.

Theorem 2.3.7 Другий критерій інтегрованості
Задано функцію $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
$f \in \mathcal{R}([a,b]) \iff f$ - обмежена на $[a,b]$ та $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau : U(f,\tau) - L(f,\tau) < \varepsilon$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Тоді f - обмежена та $I_*(f) = I^*(f)$. За критеріями $\sup, \inf$, маємо:
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau_1, \tau_2 : L(f,\tau_1) > I - \varepsilon \quad U(f,\tau_2) < I + \varepsilon$.
Отже, $U(f,\tau) - L(f,\tau) < 2\varepsilon$ для $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau : U(f,\tau) - L(f,\tau) < \varepsilon$.
Тоді $0 \le I^*(f) - I_*(f) \le U(f,\tau) - L(f,\tau) < \varepsilon$. Отже, $I^*(f) = I_*(f) \implies f \in \mathcal{R}([a,b])$. ■

Remark 2.3.8 Можна інакше переписати: $f \in \mathcal{R}([a,b]) \iff \lim\limits_{|\tau| \to 0} (U(f,\tau) - L(f,\tau)) = 0$.

2.4 Класи інтегрованих функцій

Theorem 2.4.1 Задано функцію $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Тоді $f + g \in \mathcal{R}([a,b])$

Proof.
Нехай $\varepsilon > 0$ задано.
$f \in \mathcal{R}([a,b]) \implies \exists \tau_1 : U(f,\tau_1) - L(f,\tau_1) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
$g \in \mathcal{R}([a,b]) \implies \exists \tau_2 : U(g,\tau_2) - L(g,\tau_2) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Тоді $\exists \tau = \tau_1 \cup \tau_2 : \begin{matrix} U(f,\tau) - L(f,\tau) \le U(f,\tau_1) - L(f,\tau_1) < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ U(g,\tau) - L(g,\tau) \le U(g,\tau_2) - L(g,\tau_2) < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$
$\implies U(f+g,\tau) - L(f+g,\tau) \le U(f,\tau) + U(g,\tau) - L(f,\tau) - L(g,\tau) < \varepsilon$.
Таким чином, ми отримали, що $f \in \mathcal{R}([a,b])$. ■

Theorem 2.4.2 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Тоді $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b]), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Доведення є аналогічним.
Вказівка: $\sup \alpha f(x) = \alpha \sup f(x), \alpha > 0 \qquad \sup \alpha f(x) = \alpha \inf f(x), \alpha \le 0$.

Theorem 2.4.3 Функція $f \in \mathcal{R}([a,b]) \iff \forall c \in (a,b) : f \in \mathcal{R}([a,c])$ та $f \in \mathcal{R}([c,b])$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $f \in \mathcal{R}([a,b])$, тобто $\forall \varepsilon : \exists \tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} : U(f,\tau) - L(f,\tau) < \varepsilon$.
Зафіксуємо точку $c \in (a,b)$, у нас виникне два випадки:
I. $c \in \tau \implies c = x_k, k = \overline{1, n-1}$.
Тоді маємо розбиття $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, де $\tau_1 = \{x_0, \dots, c\}, \tau_2 = \{c, \dots, x_n\}$. Таким чином,
$U(f,\tau_1) - L(f,\tau_1) = U(f,\tau_1) + U(f,\tau_2) - L(f,\tau_1) - L(f,\tau_2) - U(f,\tau_2) + L(f,\tau_2) = U(f,\tau) - L(f,\tau) - (U(f,\tau_2) - L(f,\tau_2)) \leq U(f,\tau) - L(f,\tau) < \varepsilon$.
$U(f,\tau_2) - L(f,\tau_2) < \varepsilon$ аналогічними міркуваннями.
Отже, $f \in \mathcal{R}([a,c])$ та $f \in \mathcal{R}([c,b])$.

II. $c \notin \tau \implies c \neq x_k, k = \overline{1, n-1}$.
Отримаємо підрозбиття $\tau' = \tau \cup \{c\}$. А для підрозбиття $U(f,\tau') - L(f,\tau') \leq U(f,\tau) - L(f,\tau) < \varepsilon$.
А ось тут ми повертаємось до пункту I, розглядаючи випадок, що $c \in \tau'$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Зрозуміло.* ■

Theorem 2.4.4 Задано функцію $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - монотонна. Тоді $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

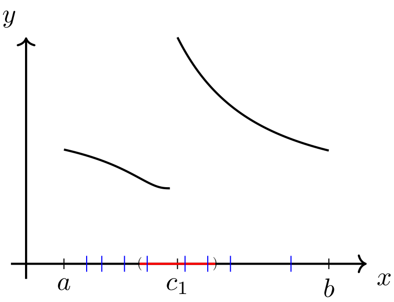
Proof.
Розглянемо випадок, коли f - нестрого зростає на $[a,b]$.
Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді розглянемо таке розбиття τ, щоб $|\tau| < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Тоді маємо:
$U(f,\tau) - L(f,\tau) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k+1}) - f(x_k))\Delta x_k \leq |\tau| \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) =$
$= |\tau|(f(x_n) - f(x_0) = |\tau|(f(b) - f(a)) < \varepsilon$.
Отже, $f \in \mathcal{R}([a,b])$. ■

Theorem 2.4.5 Задано функцію $f \in C([a,b]$. Тоді $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Proof.
$f \in C([a,b]) \implies f \in C_{unif}([a,b]) \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x_1, x_2 \in [a,b] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Оберемо таке розбиття τ, щоб $|\tau| < \delta$.
Також $f \in C([a,b]) \implies f \in C([x_{k-1}, x_k]) \implies \exists f(x_k') = \displaystyle\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \exists f(x_k'') = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.
Позначмо $m_k = f(x_k'), M_k = f(x_k'')$. Оскільки $|\tau| < \delta$, то звідси $|x_k' - x_k''| \leq |x_{k-1} - x_k| \leq |\tau| < \delta \implies M_k - m_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Отже, $U(f,\tau) - L(f,\tau) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon$. А тому й $f \in \mathcal{R}([a,b])$. ■

Theorem 2.4.6 Задано функцію $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - обмежена та неперервна всюду, окрім в точках $c_1, c_2, \dots, c_m$. Тоді $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Proof.
Обмежимось випадком, що $f \in C([a,b] \setminus \{c_1\})$. А далі просто за МІ.
Функція f - обмежена, тоді $\exists C > 0 : \forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq C$.
Заздалегідь нехай $\varepsilon > 0$. Розглянемо множину $D = [a,b] \setminus (c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1)$, де $\delta_1 > 0$. Потім вкажу, чому воно дорівнює. Також позначу $(c_1 - \delta, c_1 + \delta_1) = V$.
Оскільки $f \in C([a,b] \setminus \{c_1\})$, то $f \in C(D)$, тоді за Кантором,
$\exists \delta_2 : \forall x', x'' : |x' - x''| < \delta_2 \implies |f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Встановимо $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, а далі візьмемо таке розбиття τ, щоб $|\tau| < \delta$.



$U(f,\tau)-L(f,\tau)=\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum\limits_{k:[x_{k-1},x_k]\cap V=\emptyset}(M_k-m_k)\Delta x_k+\sum\limits_{k:[x_{k-1},x_k]\cap V\neq\emptyset}(M_k-m_k)\Delta x_k \boxed{<}$

Перша сума - там, де відрізки не потрапили цілком в окіл т. c_1. В силу другої теореми Вейєрштрасса та теореми Кантора (аналогічні міркування з попередньої теореми), $M_k-m_k<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Друга сума - там, де відрізки потрапили в окіл т. c_1. В силу обмеженності функції f маємо, що $M_k-m_k\le 2C$. Також зауважимо, що $\sum\limits_{k:[x_{k-1},x_k]\cap V=\emptyset}\Delta x_k\le 2\delta_1+2|\tau|<\delta_1+2\delta\le 4\delta_1$.

Тому що червоний інтервал має довжину $2\delta_1$ та є два відрізка, частина якої всередині та інша поза неї. Кожний з двох цих відрізків не перевищує $|\tau|$, а тому й δ.

$\boxed{<}\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+2C\cdot 4\delta_1=\dfrac{\varepsilon}{2}+8C\delta_1=\varepsilon.$

От тепер я надам $\delta_1=\dfrac{\varepsilon}{16C}$, але це можна було зробити з самого початку.

Таким чином, $f\in\mathcal{R}([a,b])$. ■

Example 2.4.7 Розглянемо декілька прикладів:

1. $f(x)=\operatorname{sgn}x\in\mathcal{R}([a,b])$, бо $|f(x)|\le 1$ та всюди неперервна, окрім т. $x=0$, коли $0\in[a,b]$.

2. $g(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\in\mathcal{R}([-1,1])$, бо $|g(x)|\le 1$ та всюди неперервна, окрім т. $x=0$.

Theorem 2.4.8 Задано функцію $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$. Тоді $f\cdot g\in\mathcal{R}([a,b])$.

Proof.

Оскільки $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$, то по-перше, вони обмежені, тобто

$\exists C_1,C_2:\forall x:|f(x)|\le C_1,|g(x)|\le C_2$.

По друге, $\forall\varepsilon>0:\exists\tau_1,\tau_2:$

$U(f,\tau_1)-L(f,\tau_1)<\dfrac{\varepsilon}{2C_1}\qquad U(g,\tau_2)-L(g,\tau_2)<\dfrac{\varepsilon}{2C_2}$.

Нам буде необхідна ось така оцінка:

$|f(x)g(x)-f(y)g(y)|=|f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)|\le$

$\le|f(x)||g(x)-g(y)|+|g(y)||f(x)-f(y)|\le C_1\sup|g(x)-g(y)|+C_2\sup|f(x)-f(y)|$.

Це виконано $\forall x,y\in[a,b]$. Тоді підберемо такі точки x,y, щоб ліворуч був отриманий sup:

$\sup|f(x)g(x)-f(y)g(y)|\le C_1\sup|g(x)-g(y)|+C_2\sup|f(x)-f(y)|$.

Перепишемо цю рівність інакше:

$\sup f(x)g(x)-\inf f(x)g(x)\le C_1(\sup g(x)-\inf g(x))+C_2(\sup f(x)-\inf f(x))$. А далі встановимо $\tau=\tau_1\cup\tau_2$, тоді маємо:

$$U(f\cdot g,\tau)-L(f\cdot g,\tau)=\sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)g(x)\cdot\Delta x-\sum_{k=1}^{n}\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)g(x)\cdot\Delta x=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)g(x)-\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)g(x)\right)\Delta x_k\le C_1(U(f,\tau)-L(f,\tau))+C_2(U(g,\tau)-L(g,\tau))<\varepsilon.$$

Таким чином, $f\cdot g\in\mathcal{R}([a,b])$. ■

Corollary 2.4.9 Задано функцію $f\in\mathcal{R}([a,b])$. Тоді $|f|\in\mathcal{R}([a,b])$.

Вказівка: $|f(x)|=f(x)\cdot\operatorname{sgn}f(x)$.

2.5 Властивості інтегралів

Theorem 2.5.1 Лінійність I
$\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

Proof.
Це є продовженням доведення **Th. 1.4.1.**
Оскільки $f + g \in \mathcal{R}$, то звідси маємо $I^*(f+g) = I_*(f+g) = \displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,dx.$
$L(f,\tau)+L(g,\tau) \leq L(f+g,\tau) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,dx \leq U(f+g,\tau) \leq U(f,\tau)+U(g,\tau) < L(f,\tau)+L(g,\tau)+\varepsilon.$

Але ми також знаємо такі нерівності: $\begin{matrix} L(f,\tau) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq U(f,\tau) \\ L(g,\tau) \leq \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \leq U(g,\tau) \end{matrix}.$

$L(f,\tau) + L9g,\tau) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leq U(f,\tau) + U(g,\tau) < L(f,\tau) + L(g,\tau) + \varepsilon.$
$-\varepsilon < \displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,dx - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\right) < \varepsilon$, виконано $\forall \varepsilon > 0$.
Отже, $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$ ■

Theorem 2.5.2 Лінійність II
$\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$
Зрозуміло.

Theorem 2.5.3 Адитивність
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Proof.
Це є продовженням доведення **Th. 1.4.3.**
$L(f,\tau) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq U(f,\tau) < L(f,\tau) + \varepsilon$
$L(f,\tau_1) \leq \displaystyle\int_a^c f(x)\,dx \leq U(f,\tau_1) < L(f,\tau_1) + \varepsilon$
$L(f,\tau_2) \leq \displaystyle\int_c^b f(x)\,dx \leq U(f,\tau_2) < L(f,\tau_2) + \varepsilon$
$\Longrightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \left(\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\right)\right| < 2\varepsilon$, виконано $\forall \varepsilon > 0$.
Отже, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$ ■

Theorem 2.5.4 Задано $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Відомо, що $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0$. Тоді $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Proof.
Оскільки $f \in \mathcal{R}([a,b])$, то тоді $I_*(f) = I^*(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.$
Тоді $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = I^*(f) \geq U(f,\tau) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \geq 0.$ ■

Corollary 2.5.5 Задані $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Якщо $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x)$, то тоді
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$
Вказівка: розглянути функцію $h(x) = g(x) - f(x)$.

Corollary 2.5.6 $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
Вказівка: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

Theorem 2.5.7 I теорема про середнє
Задані функції $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, причому g має однаковий знак на $[a,b]$. Позначу $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$.
Тоді $\exists c \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x)\,dx = c \int_a^b g(x)\,dx$.

Proof.
Розглянемо випадок $g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$. Справедлива нерівність:
$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \implies m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx$.
Якщо $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то звідси $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, а число $c \in [m, M]$ обираємо довільне.

Якщо $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, то поділимо нерівність на цю штуку:
$m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M$. Тоді позначимо $c = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$.
Звідси $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = c \int_a^b g(x)\,dx$. ■

Corollary 2.5.8 Якщо додатково вимагати функцію $f \in C([a,b])$, то тоді
$\exists \xi \in (a,b) : \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx$.

Proof.
$f \in C([a,b])$, то за Больцано-Коші, $\exists \xi \in [a,b] : c = f(\xi)$. Ну а далі попередня теорема. ■

2.6 Інтеграл як функція верхньої межі

Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Будемо розглядати ось таку функцію $g : [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Remark 2.6.1 Додатково існує певна домовленість з інтегралами, щоб було жити простіше:

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0$$
$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

Theorem 2.6.2 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Тоді $g \in C([a,b])$.

Proof.
$|g(x_1) - g(x_2)| = \left| \int_a^{x_1} f(t)\,dt - \int_a^{x_2} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt \right| \boxed{\leq}$
Оскільки $f \in \mathcal{R}([a,b])$, то звідси f - обмежена на $[a,b]$, тобто $\exists M \geq 0 : \forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq M$.
$\boxed{\leq} \left| \int_{x_1}^{x_2} M\,dt \right| = M|x_2 - x_1| < M\delta = M\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.
Отже, нехай $\varepsilon > 0$. Тоді існує $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, для якого $\forall x_1, x_2 \in [a,b] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$.
Отже, $g \in C_{unif}([a,b]) \implies g \in C([a,b])$. ■

Theorem 2.6.3 Задано функцію $f \in C([a,b])$. Тоді $g \in C'([a,b])$, причому $g'(x) = f(x)$.

Proof.
Будемо доводити, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f(x)$.
$\dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\left(\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \dfrac{1}{\Delta x}\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$
$f(x) = \dfrac{f(x)}{\Delta x}\Delta x = \dfrac{f(x)}{\Delta x}\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} dt = \dfrac{1}{\Delta x}\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dt.$
Тоді маємо таку оцінку:
$\left|\dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} - f(x)\right| = \dfrac{1}{|\Delta x|}\left|\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dt\right| = \dfrac{1}{|\Delta x|}\left|\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t) - f(x)\,dt\right| \leq$
$\leq \dfrac{1}{|\Delta x|}\left|\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)|\,dt\right| \boxed{<}$
Оскільки $f \in C([a,b])$, то звідси $f \in C_{unif}([a,b])$, а тому
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Фіксуємо таке δ, щоб $|\Delta x| < \delta$.
Тоді $\forall t \in [x, x+\Delta x]$ або $[x+\Delta x, x] : |t - x| < |\Delta x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon$.
$\boxed{<} \dfrac{1}{|\Delta x|}\left|\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} \varepsilon\,dt\right| = \dfrac{|x+\Delta x - x|}{|\Delta x|}\varepsilon = \varepsilon.$

Остаточно $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \Delta x : |\Delta x| < \delta \implies \left|\dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} - f(x)\right| < \varepsilon$. Отже, $g'(x) = f(x)$. ■

Corollary 2.6.4 Функція $g(x) = F(x)$. Тобто функція $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ є первісною функції $f(x)$, якщо $f \in C([a,b])$.
Отже, будь-яка неперервна функція f має первісну $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ на $[a,b]$.

Theorem 2.6.5 Формула Ньютона-Лейбніца
Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a,b])$, яка має первісну Φ.
Тоді $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b$.

Proof.
Якщо $f \in C([a,b])$, то це є прямим наслідком. Дійсно, за умовою, f має первісну Φ. Але водночас за наслідком, f має первісну F, причому $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Тоді $\Phi(x) = F(x) + C$

$$\begin{cases} \Phi(a) = C \\ \Phi(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt + C \end{cases} \implies \int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

У загальному вигляді доведення відрізняється.
$f \in \mathcal{R}([a,b]) \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies |\sigma(f,\tau,\xi) - I| < \varepsilon$.
Встановимо будь-яке розбиття $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, щоб $|\tau| < \delta$. Зауважимо, що
$\Phi(b) - \Phi(a) = (\Phi(x_1) - \Phi(x_0)) + (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) + \dots + (\Phi(x_n) - \Phi(x_{n-1}))$.
Оскільки Φ - первісна, тобто вона диференційована, тоді неперервна як наслідок. Можемо застосувати до кожної дужки теорему Лагранжа:
$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(\xi_1)\Delta x_1 + \Phi'(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + \Phi'(\xi_n)\Delta x_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$.
Причому $\xi_k \in (x_k, x_{k-1})$.
Отже, $\Phi(b) - \Phi(a) = \sigma(f,\tau,\xi')$, де $\xi' = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Таким чином, для нашого розбиття ξ' виконано $|\sigma(f,\tau,\xi') - I| = |\Phi(b) - \Phi(a) - I| < \varepsilon$. А це виконано $\forall \varepsilon > 0$.
Отже, $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$. ■

Example 2.6.6 Функція $x^2 \in \mathcal{R}([0,1])$ в силу монотонності та має первісну $\dfrac{x^3}{3}$.
Тоді $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3}$.

Example 2.6.7 Приклад, де формула Ньютона-Лейбніца не працює

Запишу для початку первісну $F(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Неважко показати, що

$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}\sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

На жаль, функція f - необмежена в т. $x_0 = 0$, а тому $f \notin \mathcal{R}([a,b])$, якщо $0 \in [a,b]$. Тим не менш, f має первісну F. Проте формула Ньютона-Лейбніца не працює.

Remark 2.6.8 Отже, f має первісну F на $[a,b] \not\Longrightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Example 2.6.9 Існує навіть функція $f(x) = \operatorname{sgn} x$, де $f \in \mathcal{R}([-1,1])$, проте не має первісної саме на $[-1,1]$. Спробуємо обчислити інтеграл іншим чином.

$\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx = \int_{-1}^{0} \operatorname{sgn} x\,dx + \int_{0}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx.$

Розглянемо $g_1(t) = \displaystyle\int_{-1}^{t} \operatorname{sgn} x\,dx$, де $t \in [-1,0]$. Оскільки $\operatorname{sgn} \in \mathcal{R}([-1,0])$, то звідси $g_1 \in C([-1,0])$, зокрема:

$g_1(0) = \displaystyle\int_{-1}^{0} \operatorname{sgn} x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{\varepsilon} \operatorname{sgn} x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{\varepsilon}(-1)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(-x)\Big|_{-1}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon-1) = -1.$

Аналогічно якщо розглянути функцію $g_2(t) = \displaystyle\int_{t}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx$, де $t \in [0,1]$, то можна отримати, що (пишу уже неформально):

$g_2(0) = \displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx = \int_{0}^{1} 1\,dx = x\Big|_{0}^{1} = 1.$

Остаточно отримали $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx = -1 + 1 = 0.$

Remark 2.6.10 Отже, $f \in \mathcal{R}([a,b]) \not\Longrightarrow f$ має первісну F на $[a,b]$.

А тепер запишемо теорему, якої не вистачає попередньому підрозділу.

Theorem 2.6.11 II теорема про середнє
Задані функції $f \in \mathcal{R}([a,b])$ та g - монотонна.
Тоді $\exists c \in (a,b) : \displaystyle\int_{a}^{b} f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_{a}^{c} f(x)\,dx + g(b)\int_{c}^{b} f(x)\,dx.$
Додатково ми доводимо цією формулою, що $f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$.

Перед цим ми розглянемо наступні три леми.

Lemma 2.6.12 Тотожність Абеля

Встановимо $A_k = \displaystyle\sum_{p=1}^{k} a_p$ та $A_0 = 0$. Тоді виконується рівність:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = (A_n b_n - A_{m-1} b_m) - \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

Proof.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k = (A_n b_n - A_{m-1} b_m) + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} A_{k-1} b_k \boxed{=}$$

У другій сумі лічильник замінюємо $k \to k-1$.

$$\boxed{=} (A_n b_n - A_{m-1} b_m) + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1} = (A_n b_n - A_{m-1} b_m) - \sum_{k=m}^{n+1} A_k (b_{k+1} - b_k) \quad \blacksquare$$

Remark 2.6.13 Тотожність Абеля дуже схожа на формулу інтегрування частинами, де в якості $u \to b_k \implies du \to (b_{k+1} - b_k)$, а також $dv \to a_k \implies v \to A_k$.

Lemma 2.6.14 Задані функції $f \in \mathcal{R}([a,b])$ та g - не зростає на $[a,b]$ та $g \geq 0$.
Тоді $\exists \xi \in [a,b] : \displaystyle\int_{a}^{b} f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_{a}^{\xi} f(x)\,dx.$

Proof.
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x)-g(x_{k-1}))\,dx.$$
Розберемося з другою сумою:
$$\left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x)-g(x_{k-1}))\,dx\right| \le \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)||g(x)-g(x_{k-1})|\,dx \overset{f\in\mathcal{R}\Rightarrow f-\text{обм.}}{\le}$$
$$\le C\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(x)-g(x_{k-1})|\,dx \le C\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]} |g(x)-g(y)|\,dx =$$
$$= C\sum_{k=1}^n \sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]} |g(x)-g(y)|\Delta x_k = C\sum_{k=1}^n (\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} g(x) - \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} g(x))\Delta x = C(U(g,\tau)-L(g,\tau)) \overset{|\tau|\to 0}{\longrightarrow}$$
$$\overset{g-\text{не зростає}\Rightarrow g\in\mathcal{R}}{\longrightarrow} 0.$$
Отже, $\displaystyle\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x)-g(x_{k-1}))\,dx \overset{|\tau|\to 0}{\longrightarrow} 0 \implies \sum_{k=1}^n g(x_{k-1})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \overset{|\tau|\to 0}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$

Лишилось з'ясувати, що приховує перша сума.

Позначимо $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$. Оскільки $f \in \mathcal{R}([a,b])$, то $F \in C([a,b]) \implies$ вона приймає найбільше, найменше значення. Тоді
$$\sum_{k=1}^n g(x_{k-1})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1})(F(x_k)-F(x_{k-1}))\boxed{=}$$
А далі застосуємо тотожість Абеля при $a_k = F(x_k)-F(x_{k-1}), b_k = g(x_{k-1})$.
$$\boxed{=}F(x_n)g(x_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)(g(x_k)-g(x_{k-1})) = F(x_n)g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)(g(x_{k-1})-g(x_k)).$$
Звідси отримаємо таку нерівність:
$$mg(a) = mg(x_{n-1}) + m\sum_{k=1}^{n-1}(g(x_{k-1})-g(x_k)) \le \sum_{k=1}^n g(x_{k-1})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \le$$
$$\le Mg(x_{n-1}) + M\sum_{k=1}^{n-1}(g(x_{k-1})-g(x_k)) = Mg(a),$$ де $m = \min\limits_{t\in[a,b]} F(t), M = \max\limits_{t\in[a,b]} F(t)$.

Якщо $|\tau| \to 0$, то звідси випливає, що $mg(a) \le \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le Mg(a)$.

Випадок $g(a) = 0$ ясно. А далі поділимо тепер на $g(a)$ - отримаємо:

$m \le \dfrac{1}{g(a)}\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M \implies \dfrac{1}{g(a)}\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(\xi)$, де $\xi \in [a,b]$ із теореми Больцано-Коші.

Остаточно, $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx$. ■

Lemma 2.6.15 Задані функції $f \in \mathcal{R}([a,b])$ та g - не спадає на $[a,b]$ та $g \ge 0$.
Тоді $\exists \xi \in [a,b] : \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$.
Або аналогічно, або можна звести до попередньої леми.

Використовуючи першу лему, ми доводимо нашу теорему для неспадної функції. А другою лемою доводимо теорему для незростаючої.
Вказівка: розглянути функцію $G(x) = g(b)-g(x)$, якщо g - не спадна. Для незростаючої аналогічно.

2.7 Обчислення визначених інтегралів

2.7.1 Заміна змінної

Theorem 2.7.1 Задано функцію $f \in C([a,b])$. Також задано функцію $\varphi \in C'([\alpha,\beta])$, причому $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$. Тоді
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$
Proof.
Оскільки $f \in C([a,b])$, то вона має первісну F, за формулою Ньютона-Лейбніца,

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
Але оскільки φ - диференційована функція, то звідси функція $f\circ\varphi\cdot\varphi'$ має первісну $F\circ\varphi$. Нарешті, оскільки $f\circ\varphi\cdot\varphi' \in C([\alpha,\beta])$, то ми можемо застосувати формулу Ньютона-Лейбніца.
$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$. ■

Example 2.7.2 Обчислити $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.
Якщо обчислювати невизначений інтеграл, то напрошується заміна:
$x = \sin t$, тоді звідси $dx = \cos t\,dt$.
Виникне $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$.
Тепер виникає питання, чи буде це працювати в визначеному інтегралі.
Маємо $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, для якої $f \in C([-1,1])$. Також маємо $\varphi(t) = \sin t$, додатково
$\varphi(\alpha) = 0 \implies \sin\alpha = 0 \implies \alpha = 0$
$\varphi(\beta) = 1 \implies \sin\beta = 1 \implies \beta = \dfrac{\pi}{2}$.
Відомо, що $\varphi \in C'\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$. Тоді заміна змінної працює та
$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

2.7.2 Інтегрування частинами

Theorem 2.7.3 Задані функції u, v - диференційовані на $[a,b]$, причому $u', v' \in \mathcal{R}([a,b]$. Тоді
$\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$.

Proof.
Оскільки існують u', v', то звідси $u, v \in C([a,b]) \implies u, v \in \mathcal{R}([a,b])$.
Розглянемо функцію $h(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x) \in \mathcal{R}([a,b])$. Вона має первісну $H(x) = u(x)v(x)$.
Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца, маємо:
$\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx = H(b) - H(a) = u(b)v(b) - u(a)v(a) = u(x)v(x)\Big|_a^b$
З іншого боку, $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx + v(x)u'(x)\,dx = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$.
Отже, $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$. ■

Example 2.7.4 Обчислити $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx$.
Маємо $u = \ln x$, тоді $du = \dfrac{1}{x}\,dx$ Далі $dv = dv$, тоді $v = x$.
Важливо, що $u' = \dfrac{1}{x}$ та $v' = 1$ - всі інтегровані, тобто $u', v' \in \mathcal{R}([1,2])$. Тому інтегруємо частинами.
$\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}\,dx = 2\ln 2 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1$.

Example 2.7.5 Важливий
Обчислити $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \overset{\text{позн.}}{=} I_n$.
Розглянемо окремо випадок $n = 0$ та $n = 1$.
$I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.
$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
Якщо $n \ge 2$, то ми будемо інтегрувати частинами, якщо переписати $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\,dx$.
$u = \sin^{n-1} x \implies du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x\,dx$

$dv = \sin x\, dx \implies v = -\cos x$.
$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x\, dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\, dx =$
$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$.
Таким чином, отримали: $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.
Якщо $n = 2k$, то $I_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k}\dfrac{2k-3}{2k-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$
Якщо $n = 2k+1$, то $I_{2k+1} = \dfrac{2k}{2k+1}\dfrac{2k-2}{2k-1}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1$
Остаточно, $I_{2k} = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $\qquad I_{2k+1} = \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$

На цьому ще не все. Зауважимо, що оскільки $-1 \le \sin x \le 1$, то тоді $\sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x$, а звідси випливає, що $I_{2n+1} \le I_{2n} \le I_{2n-1}$.
Тоді отримаємо оцінку $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \dfrac{2n}{2n+1} \le \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \le 1$. За теоремою про двох поліцаїв, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$. Якщо цю границю розписати отримаємо результат:

Theorem 2.7.6 Формула Валліса
$\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1}\dfrac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n)}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot(2n-1)}$.

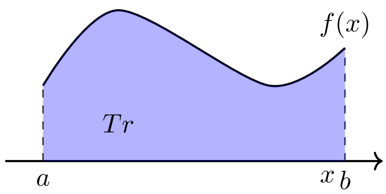
2.8 Застосування визначеного інтеграла

2.8.1 Площа криволінійної трапеції

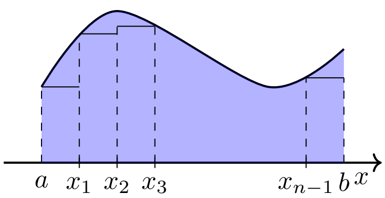
Що таке взагалі **площа**, я буду вважати відомою штукою. Також відомо для мене буде площа прямокутника, що суттєво важливо.

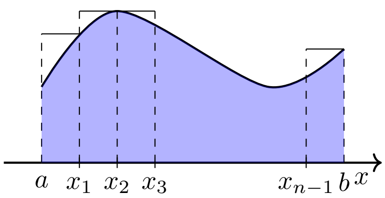
Definition 2.8.1 Задано функцію $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ так, щоб $f(x) \ge 0$ та обмежена.
Криволінійною трапецією називають таку множину:

$$Tr(f,[a,b]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a,b], y \in [0, f(x)]\}$$



Задамо тепер деяке розбиття $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Через ці точки проведемо вертикальну пряму.
Тоді наша площа криволінійної трапеції $S(Tr(f,[a,b]))) = \sum\limits_{k=1}^{n} S(Tr(f,[x_{k-1},x_k]))$.
На кожному відрізку $[x_{k-1}, x_k]$ ми:
- впишемо прямокутник P_k', висота якої дорівнює $\inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$;
- опишемо прямокутник P_k'', висота якої дорівнює $\sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.





Сума площ вписаних прямокутників дорівнює $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = S(P')$.

Сума площ описаних прямокутників дорівнює $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = S(P'')$.

Definition 2.8.2 Задано криволінійну трапецію $Tr(f,[a,b])$.
Внутрішньою площею криволінійної трапеції $Tr(f,[a,b]))$ називають число:

$$S_*(Tr) = \sup_{\tau} S(P')$$

Зовнішньою площею криволінійної трапеції $Tr(f,[a,b]))$ називають число:

$$S^*(Tr) = \inf_{\tau} S(P'')$$

Definition 2.8.3 Криволінійна трапеція називається **квадрованою**, якщо

$$S_*(Tr) = S^*(Tr) = S$$

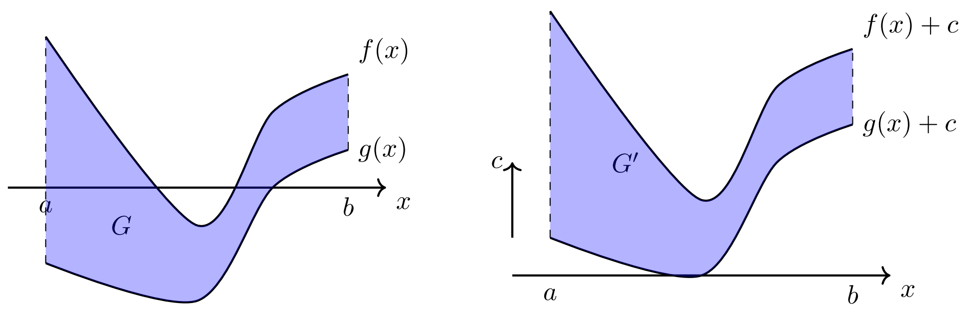
Число S називається **площею** криволінійної трапеції.
(Означення працює не тільки для криволінійної трапеції).

Theorem 2.8.4 Задано функцію $f \in C([a,b])$ та $f(x) \geq 0$. Задамо криволінійну трапецію $Tr(f,[a,b])$. Тоді вона є квадрованю та $S(Tr) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Proof.
Оскільки $f \in C([a,b])$, то $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Звідси $S_*(Tr) = I_*(f) = I^*(f) = S^*(Tr)$. Тобто Tr - квадрована.
Автоматично звідси $S(Tr) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. ■

Theorem 2.8.5 Задані функції $f,g \in C([a,b])$, причому $f(x) \geq g(x)$. Задамо фігуру $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], y \in [f(x),g(x)]\}$. Тоді вона є квадрованою та $S(G) = \displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$.

Proof.
Оскільки $g \in C([a,b])$, то вона приймає найменше значення.
Якщо від'ємне, то перемістимо фігуру G на число $c = |\inf\limits_{x\in[a,b]} g(x)|$ догори. Отримаємо фігуру $G' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], y \in [f(x)+c, g(x)+c]\}$.
Якщо додатнє, то тоді $G' = G$ (тут все зрозуміло).

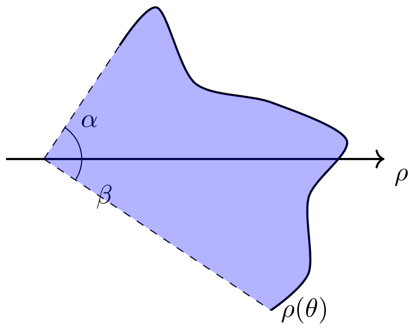


Зауважимо, що $S(G') = S(Tr(f+c,[a,b])) - S(Tr(g+c,[a,b]))$
Отже, $S(G) = S(G') = \displaystyle\int_a^b f(x) + c\,dx - \int_a^b g(x) + c\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$. ■

2.8.2 Площа криволінійного сектора

Definition 2.8.6 Задано функцію $\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$.
Криволінійним сектором називають таку множину:

$$Sec(\rho, [\alpha, \beta]) = \{(\theta, \rho) : \theta \in [\alpha, \beta] : \rho \in [0, \rho(\theta)]\}$$



Задамо тепер деяке розбиття $\tau = \{\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \beta\}$. Через ці кути проведемо $\rho(\theta_k)$. Тоді площа нашого криволінійного сектора $S(Sec(\rho, [\alpha, \beta])) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S(Sec(\rho, [\theta_{k-1}, \theta_k]))$.

На кожному відрізку $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ ми:
- впишемо сектор Q'_k, радіус якої дорівнює $\displaystyle\inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta)$;
- опишемо сектор Q''_k, радіус якої дорівнює $\displaystyle\sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta)$.

Тут має бути рисунок, але не шарю, як це зробити.

Сума площ вписаних секторів дорівнює $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \Delta\theta_k \left(\inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta) \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \Delta\theta_k \inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \frac{1}{2} \rho^2(\theta) = L\left(\frac{1}{2}\rho^2, \tau\right)$.

Сума площ описаних секторів дорівнює $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \Delta\theta_k \left(\sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta) \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \Delta\theta_k \sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \frac{1}{2} \rho^2(\theta) = U\left(\frac{1}{2}\rho^2, \tau\right)$.

Theorem 2.8.7 Задано функцію $\rho \in C([\alpha, \beta])$. Задамо криволінійний сектор $Sec(\rho, [\alpha, \beta])$. Тоді він є квадрованим та $S(Sec) = \displaystyle\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta)\, d\theta$.

Proof.
Оскільки $\rho \in C([\alpha, \beta])$, то $\rho \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$, а тому $\frac{1}{2}\rho^2 \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$. Звідси $S_*(Sec) = I_*\left(\frac{1}{2}\rho^2\right) = I^*\left(\frac{1}{2}\rho^2\right) = S^*(Sec)$. Тобто Sec - квадрована.

Автоматично звідси $S(Sec) = \displaystyle\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta)\, d\theta$. ■

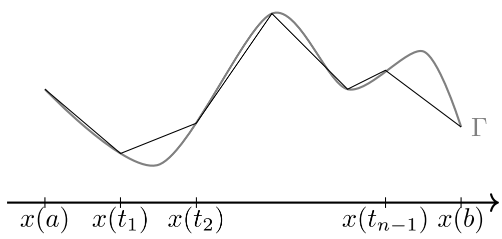
2.8.3 Крива, яка спрямовується

Definition 2.8.8 Задано функції $x, y \in C([a, b])$.
Неперервною кривою на площині називають таку множину:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]\}$$

Нехай $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ - деяке розбиття відрізка $[a, b]$. Встановимо Γ_τ - ломана, що отримана в результаті сполучення кожної пари сусідніх точок $(x(t_{k-1}), y(t_{k-1}))$ та $(x(t_k), y(t_k))$.

Довжина ломаної $L(\Gamma_\tau) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$.



Definition 2.8.9 Криву називають **такою, що спрямовується**, якщо існує таке число $L \in \mathbb{R}$, для якого виконана умова:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies |L(\Gamma_\tau) - L| < \varepsilon$$

Число L називають **довжиною** кривої Γ.
Позначення: $\lim\limits_{|\tau|\to 0} L(\Gamma_\tau) = L$ (знову нелегальне позначення).

Theorem 2.8.10 Задано функції $x, y \in C'([a,b])$. Тоді крива Γ буде такою, що спрямовується, а $L(\Gamma) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.

Proof.
Задамо розбиття τ, маємо довжину ломаної $L(\Gamma_\tau) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$.
За умовою теореми, можемо застосувати теорему Лагранжа, тоді
$\exists \xi_k \in (t_{k-1}, t_k) : x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = x'(\xi_k)\Delta t_k$.
$\exists \eta_k \in (t_{k-1}, t_k) : y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}) = y'(\eta_k)\Delta t_k$.
Тоді $L(\Gamma_\tau) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2}\Delta t_k$.
Розпишемо цю формулу інакшим чином:
$L(\Gamma_\tau) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2}\Delta t_k + \sum_{k=1}^n (\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2})\Delta t_k =$
$= \sigma\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \tau, \xi\right) + r_\tau$. Тоді:
$|L(\Gamma_\tau) - \sigma\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \tau, \xi\right)| = |r_\tau| \le \displaystyle\sum_{k=1}^n |y'(\eta_k) - y'(\xi_k)|\Delta t_k < \varepsilon \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \varepsilon(b-a)$.
Значить, крива Γ є такою, що спрямовується, а також довжина $L(\Gamma) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$. ■

Theorem 2.8.11 Задано функцію $f \in C'([a,b])$. Задамо криву $\Gamma = \{(x,y) : x \in [a,b], y = f(x)\}$. Тоді вона буде спрямованою, а $L(\Gamma) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

Proof.
Функцію f можна параметризувати: $x = x(t), y = y(t)$.
Нехай в $x(t_1) = a, x(t_2) = b$.

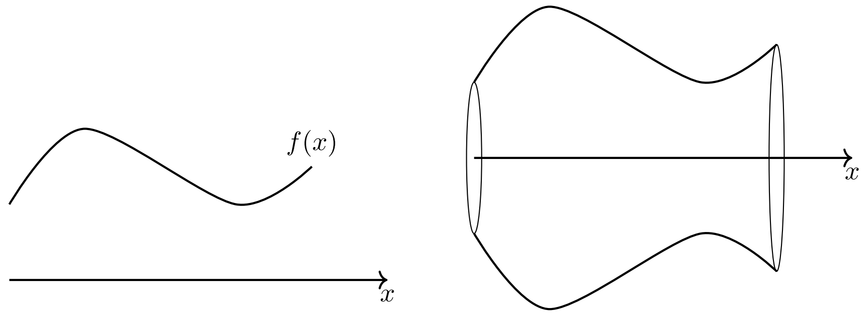
$$L(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} x'(t)\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$ ■

Theorem 2.8.12 Задано функцію $\rho \in C'([\alpha,\beta])$. Задамо криву $\Gamma = \{(\theta, r) : \theta \in [\alpha,\beta], r = \rho(\theta)\}$. Тоді вона буде спрямованою, а $L(\Gamma) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\, d\theta$.
Вказівка: $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$.

Remark 2.8.13 Є такий об'єкт, як крива Коха - приклад кривої, що не можна спрямувати. Тим не менш, вона має площу.

2.8.4 Об'єм тіла обертання

Задано функцію $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ так, щоб $f(x) \geq 0$ та обмежена. Розглянемо криволінійну трапецію $Tr(f, [a, b])$.
Ми отримаємо тіло G, що було отримано в результаті обертання трапеції Tr відносно осі OX.



Ми також вписували/описували прямокутники. Якщо їх обернути навколо OX, то кожна з них стане циліднром радіуса відповідно $\inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $\sup\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.

Сума об'ємів вписаних циліндрів дорівнює $\sum\limits_{k=1}^{n} \pi \left(\inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right)^2 \Delta x_k = V(G')$.

Сума об'ємів описаних циліндрів дорівнює $\sum\limits_{k=1}^{n} \pi \left(\sup\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right)^2 \Delta x_k = V(G'')$.

Definition 2.8.14 Внутрішнім об'ємом тіла G називають число:

$$V_*(G) = \sup_\tau V(G')$$

Зовнішнім об'ємом тіла G називають число:

$$V^*(G) = \inf_\tau V(G'')$$

Definition 2.8.15 Тіло G називають **кубованою**, якщо

$$V_*(G) = V^*(G) = V$$

Число V називають **об'ємом** тіла G.

Theorem 2.8.16 Задано функцію $f \in C([a, b])$ така, що $f(x) \geq 0$. Тоді G є кубованою та
$V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx$.
Вказівка: $(\sup f(x))^2 = \sup f^2(x)$.

На даному етапі нам буде достатньо інструментарію, щоб довести даний результат:

Theorem. $\pi \notin \mathbb{Q}$.
Нижчеописане доведення було придумано математиком Айвеном Нівеном.

Proof.
!Припустимо, що $\pi \in \mathbb{Q}$, тобто розпишемо $\pi = \dfrac{a}{b}$. Не втрачаючи загальності, вважаємо $a, b \in \mathbb{N}$.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ та розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}$. Також для зручності позначимо $F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$ – вона визначена коректно, бо функція f, зрозуміло, диференційована. Доведення буде в кілька етапів.

I. $F(0) + F(\pi) \in \mathbb{Z}$.
Розпишемо функцію f в більш розгорнутому вигляді через біном-Ньютона – маємо наступне:
$f(x) = \dfrac{x^n}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^k b^k a^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k C_n^k b^k a^{n-k}}{n!}x^{n+k} = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{c_{n+k}}{n!}x^{n+k} =$
$= \dfrac{c_0}{n!} + \dfrac{c_1}{n!}x + \dots + \dfrac{c_n}{n!}x^n + \dfrac{c_{n+1}}{n!}x^{n+1} + \dots + \dfrac{c_{n+k}}{n!}x^{n+k}$.
У цьому випадку $c_m = 0$ при $m < n$, а в іншому випадку $c_m \in \mathbb{Z}$. Значить, звідси
$f^{(m)}(0) = 0$ при $m < n$ $\qquad f^{(m)}(0) = \dfrac{m!}{n!}c_m$ при $n \le m \le 2n$. Причому $f^{(m)} \in \mathbb{Z}$.
Таким чином, ми отримаємо $F(0) \in \mathbb{Z}$.
Зауважимо, що $f(\pi - x) = f(x)$, тому звідси $f^{(m)}(\pi - x) = (-1)^m f^{(m)}(x)$. Зокрема при $x = \pi$ маємо $(-1)^m f^{(m)}(\pi) = f^{(m)}(0)$. Таким чином, отримаємо $F(\pi) \in \mathbb{Z}$ (насправді, $F(\pi) = F(0)$).

II. $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = F(0) + F(\pi)$.
Продиференціюємо функцію F двічі та зауважимо, що $f^{(2n+2)} \equiv 0$. Після цього можна зауважити таке співвідношення:
$F''(x) + F(x) = f(x)$.
Дана рівність дозволяє сказати нам, що $f(x)\sin x = (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)'$. Тоді
$\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = F'(x)\sin x - F(x)\cos x\Big|_0^\pi = F(0) + F(\pi)$.
Можна було просто підставити $f = F'' + F$ та ручками пошукати невизначений інтеграл, якщо важко побачити.

III. $0 < F(0) + F(\pi) < 1$.
Зауважимо, що при $x \in (0, \pi)$ матиемо $f(x) > 0$. Також нам відомо, що $0 < \sin x < 1$. Таким чином, звідси $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx > 0$, а це означає, що $F(0) + F(\pi) \in \mathbb{N}$.
Із іншого боку, при $x \in [0, \pi]$ ми матимемо $0 \le x(a - bx) \le \pi a$. Також нам відомо, що $0 \le \sin x \le 1$. Таким чином, звідси $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx \le \pi\dfrac{(\pi a)^n}{n!}$. Нам відомо, що $\pi \cdot \dfrac{(\pi a)^n}{n!} \to 0$ при $n \to \infty$, тому знайдеться таке натуральне число $n \in \mathbb{N}$, щоб $F(0) + F(\pi) < 1$.

Нарешті, прийшли до суперечності! ■

3 Невласні інтеграли

3.1 Основні означення

Розглянемо два основні випадки:
I. Задано таку функцію $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, що $\forall A \in [a, +\infty) : f \in \mathcal{R}([a, A])$.

Definition 3.1.1 Невласним інтегралом I роду називають такий вираз:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\, dx$$

Remark 3.1.2 Аналогічно визначається для $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$.

II. Задано таку функцію $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, що $\forall A \in [a, b) : f \in \mathcal{R}([a, A])$, причому функція необмежена навколо точки b.

Definition 3.1.3 Невласним інтегралом II роду називають такий вираз:

$$\int_a^{b} f(x)\, dx = \lim_{A \to b-0} \int_a^A f(x)\, dx$$

Дане означення можна переписати інакше, якщо $A = b - \varepsilon$, причому тепер $\varepsilon \to 0 + 0$.

Remark 3.1.4 Аналогічно визначається для $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.

Definition 3.1.5 Якщо границя існує, то невласний інтеграл (I або II роду) називається **збіжним**. Інакше - **розбіжним**.

Надалі я буду позначати $\omega = \left[\begin{array}{c} b \\ +\infty \end{array}\right.$. Також $A \to \omega$ позначає $A \to +\infty$ або $A \to b - 0$.

Example 3.1.6 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} \boxed{=}$
$= \displaystyle\lim_{A \to +\infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A \to +\infty} \ln A = +\infty$ при $\alpha = 1$
$= \displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^A =$
$= \displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha} - 1) = +\infty$ при $\alpha < 1$
$= \displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1) = \frac{1}{\alpha - 1}$ при $\alpha > 1$
Таким чином, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ - збіжний при $\alpha > 1$ та розбіжний при $\alpha \leq 1$.

Example 3.1.7 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} \boxed{=}$
$= \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0+0} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = -\infty$ при $\alpha = 1$
$= \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_\varepsilon^1 =$
$= \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \varepsilon^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}$ при $\alpha < 1$
$= \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right) = +\infty$ при $\alpha > 1$.
Таким чином, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ - збіжний при $\alpha < 1$ та розбіжний при $\alpha \geq 1$.

3.2 Властивості

Lemma 3.2.1 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді невласний інтеграл повністю збігається з визначеним інтегралом.

Proof.
$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{невласний}} = \lim_{A\to b-0} \int_a^A f(x)\,dx = \lim_{A\to b-0}(F(A)-f(a)) \overset{(*)}{=} F(b)-F(a) = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{визначений}}.$
(*) Оскільки $f \in \mathcal{R}([a,b])$, то тоді первісна $F \in C([a,b])$, а тому рівність справедлива. ■

Theorem 3.2.2 Лінійність
Задані функції $f, g \in \mathcal{R}([a,A]), \forall A \in [a,\omega)$, причому $\int_a^\omega f(x)\,dx, \int_a^\omega g(x)\,dx$ - збіжні. Тоді $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \int_a^\omega \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)\,dx$ - збіжний та
$\int_a^\omega \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)\,dx = \alpha_1 \int_a^\omega f(x)\,dx + \alpha_2 \int_a^\omega g(x)\,dx.$

Proof.
$\int_a^\omega \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)\,dx = \lim_{A\to\omega} \int_a^A \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)\,dx = \lim_{A\to\omega} \left(\alpha_1 \int_a^A f(x)\,dx + \alpha_2 \int_a^A g(x)\,dx \right) =$
$= \alpha_1 \int_a^\omega f(x)\,dx + \alpha_2 \int_a^\omega g(x)\,dx.$ ■

Example 3.2.3 Обчислити $\int_0^{+\infty} 2e^{-x} + \frac{1}{1+x^2}\,dx.$
Маємо $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$, тобто цей інтеграл - збіжний.
Маємо $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, тобто цей інтеграл - збіжний.
Тоді $\int_0^{+\infty} 2e^{-x} + \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2 + \frac{\pi}{2}$ - також збіжний.

Example 3.2.4 Обчислити $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\,dx.$
Маємо $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ - збіжний, але $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ - розбіжний.
Отже, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\,dx$ - розбіжний.

Theorem 3.2.5 Адитивність
Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a,A]), \forall A \in [a,\omega)$.
$\int_a^\omega f(x)\,dx$ - збіжний $\iff \forall c \in (a,\omega) : \int_c^\omega f(x)\,dx$ - збіжний.
$\int_a^\omega f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\omega f(x)\,dx$, незалежно від збіжності.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\int_a^\omega f(x)\,dx$ - збіжний.
Розглянемо $\int_a^A f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^A f(x)\,dx \implies \int_c^A f(x)\,dx = \int_a^A f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$. Тоді
$\lim_{A\to\omega} \int_c^A f(x)\,dx = \lim_{A\to\omega} \left(\int_a^A f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx \right)$
$\int_c^\omega f(x)\,dx = \int_a^\omega f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$, тобто наш інтеграл - збіжний, причому
$\int_a^\omega f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\omega f(x)\,dx.$

$\boxed{\Leftarrow}$ *Аналогічні міркування.* ■

Theorem 3.2.6 Формула заміни змінної
Задано функцію $f \in C([a,\omega))$. Також задано функцію $\varphi \in C'([\alpha,\gamma))$, причому $a = \varphi(\alpha)$, $\lim_{\beta\to\gamma} \varphi(\beta) \overset{\text{або}}{=}$

$\varphi(\gamma) = \omega$, де $\gamma = \left[\begin{array}{l} b \\ +\infty \end{array}\right.$. Додатково вимагаємо $\varphi' > 0$ всюди. Тоді

$\displaystyle\int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma)} f(x)\,dx.$

Для рівності треба існування хоча б однієї границі.

Proof.

Зафіксуємо $\beta \in [\alpha, \gamma)$. Можна застосувати формулу заміни змінної для функції $\varphi \in C'([\alpha, \beta])$ та $f \in C([\varphi(\alpha), \varphi(\beta)])$.

$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$

Тепер маємо $\beta \to \gamma$. Оскільки φ - неперервна та строго зростає, то тоді існує φ^{-1}. Таким чином, $\lim\limits_{\beta\to\gamma} \varphi(\beta) = \omega \iff \lim\limits_{u\to\omega} \varphi^{-1}(u) = \gamma$. Завдяки цьому, ми можемо довести існування одного інтеграла з існування іншого. ■

Theorem 3.2.7 Формула інтегрування частинами

Задані функції u, v - диференційовані на $[a, \omega)$, причому $\forall A \in [a, \omega) : u', v' \in \mathcal{R}([a, A])$. Тоді

$\displaystyle\int_a^\omega u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^\omega - \int_a^\omega v(x)u'(x)\,dx.$

Тут в позначенні $u(x)v(x)\Big|_a^\omega \overset{\text{def.}}{=} \lim\limits_{A\to\omega} u(x)v(x)\Big|_a^A$.

Для рівності треба існування хоча б двох скінченних границь.

Proof.

Дійсно, $\displaystyle\int_a^A u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^A - \int_a^A v(x)u'(x)\,dx$. А далі вже $A \to \omega$. ■

Example 3.2.8 Обчислити $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x}$.

Якщо обчислювати невизначений інтеграл, то напрошується заміна:

$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, тоді звідси $dt = \dfrac{1}{2}(1+t^2)\,dx$.

Виникне $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2+\cos(2\operatorname{arctg} t)}\frac{2}{1+t^2}\,dt.$

Тепер виникає питання, чи буде ця заміна працювати.

Маємо $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos x}$, для якої $f \in C([0, \pi])$. Також маємо $\varphi(t) = \operatorname{arctg} t$, додатково

$\varphi(\alpha) = 0 \implies \operatorname{arctg}\alpha = 0 \implies \alpha = 0$

$\varphi(\beta) = \pi \implies \operatorname{arctg}\beta = \pi \implies \beta = +\infty$.

Відомо, що $\varphi \in C'([0, +\infty))$ та φ - строго зростає. Тоді заміна змінної працює та

$$\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{3+t^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{2\,dt}{3+t^2} = \lim_{A\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^A =$$
$$\lim_{A\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{A}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Інтеграл - збіжний.

До речі, початковий інтеграл був визначеним, а за допомогою замін, ми перейшли на невласні інтеграли.

Example 3.2.9 Обчислити $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.

$\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \ln x\,dx \boxed{=}$

Інтегруємо частинами: $u = \ln x$, $dv = dx$.

$$\boxed{=}\lim_{\varepsilon\to0}\left(x\ln x\Big|_{0+\varepsilon}^1 - x\Big|_{0+\varepsilon}^1\right) = \lim_{\varepsilon\to0}(-\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\ln\varepsilon}{-\dfrac{1}{\varepsilon}} + \lim_{\varepsilon\to0}(\varepsilon-1) \overset{\text{I L'H}}{=} \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\dfrac{1}{\varepsilon}}{\dfrac{1}{\varepsilon^2}} - 1 = -1.$$

Інтеграл - збіжний.

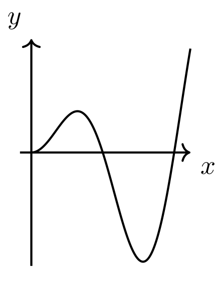
Remark 3.2.10 Завдяки теоремі про заміні змінної, ми можемо перейти із невласного інтеграла II роду в невласний інтеграл I роду.
Заміна: $x = b - \dfrac{1}{t}$. Бачимо, що зростає, неперервно-диференційована, а також
$x = a \implies t = \dfrac{1}{b-a}$
$x = b \implies t \to +\infty$.
Отже, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt = \int_c^{+\infty} g(t)\,dt$ - отримали інтеграл I роду.
А тому, не втрачаючи загальності, всі теореми можна було б розглядати лише для I роду.

3.3 Дослідження на збіжність/розбіжність

Theorem 3.3.1 Критерій Коші
Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, A]), \forall A \in [a, \omega)$.
$\displaystyle\int_a^\omega f(x)\,dx$ - збіжний $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \left[\begin{array}{l}\delta,\text{якщо } \omega = b \\ \Delta,\text{якщо } \omega = +\infty\end{array}\right. : \forall \left[\begin{array}{l}A_1, A_2 \in (b-\delta, b),\text{якщо } \omega = b \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty),\text{якщо } \omega = +\infty\end{array}\right. \implies$
$\left|\displaystyle\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Proof.
Позначимо $\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx = F(t)$.
$\displaystyle\int_a^\omega f(x)\,dx = \lim_{A\to\omega} F(A)$ - збіжний $\overset{\text{критерій Коші для ліміта}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : \exists \left[\begin{array}{l}\delta,\text{якщо } \omega = b \\ \Delta,\text{якщо } \omega = +\infty\end{array}\right. :$
$\forall \left[\begin{array}{l}A_1, A_2 \in (b-\delta, b),\text{якщо } \omega = b \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty),\text{якщо } \omega = +\infty\end{array}\right. \implies |F(A_1) - F(A_2)| = \left|\displaystyle\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$ ■

Example 3.3.2 Довести, що $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin x\,dx$ - розбіжний.
Розглянемо точки $A_1^k = 2k\pi$ та $A_2^k = (2k+1)\pi$. Ми обрали такі точки, щоб $\forall x \in (A_1^k, A_2^k) : \sin x \geq 0$.
Тоді
$\left|\displaystyle\int_{A_1^k}^{A_2^k} x\sin x\,dx\right| = \displaystyle\int_{A_1^k}^{A_2^k} x\sin x\,dx \overset{\text{I теор. про середнє}}{=} \xi \displaystyle\int_{A_1^k}^{A_2^k} \sin x\,dx = \xi(\cos A_1^k - \cos A_2^k) = 2\xi \overset{\xi\in(A_1^k, A_2^k)}{\geq}$
$2A_1^k > 1$.
Отже, існує $\varepsilon = 1$, для якого, який б $\Delta > 0$ не взяв, знайдуться $A_1^k, A_2^k > \Delta$ при $k = [\Delta] + 1$, щоб $\left|\displaystyle\int_{A_1^k}^{A_2^k} x\sin x\,dx\right| \geq \varepsilon$. За критерієм Коші, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin x\,dx$ - розбіжний.



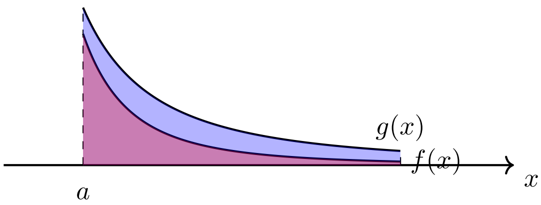
Площа, коли $\sin x \geq 0$, стає набагато більшою, тому інтуїтивно має розбігатись.

3.3.1 Дослідження для додатних функції

Тобто в цьому підпідрозділі розглядаються функції $f(x), g(x) \geq 0$ на всьому області визначення.

Theorem 3.3.3 Ознака порівняння в нерівностях
Задані функції $f, g \in \mathcal{R}([a, A]) : \forall A \in [a, \omega)$ - додатні. Відомо, що $\forall x \in [a, \omega) : f(x) \leq g(x)$. Тоді

1) Якщо $\displaystyle\int_a^\omega g(x)\,dx$ - збіжний, то $\displaystyle\int_a^\omega f(x)\,dx$ - збіжний;
2) Якщо $\displaystyle\int_a^\omega f(x)\,dx$ - розбіжний, то $\displaystyle\int_a^\omega g(x)\,dx$ - розбіжний.



Якщо площа більшої функції скінченна, то площа меншої функції тим паче.

Proof.
Маємо функції $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,dx \qquad G(t) = \int_a^t g(x)\,dx$.
Зафіксуємо такі t_1, t_2, що $a < t_1 < t_2 < \omega$. Тоді
$F(t_2) = \displaystyle\int_a^{t_2} f(x)\,dx = \int_a^{t_1} f(x)\,dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \geq \int_a^{t_1} f(x)\,dx = F(t_1)$.
Таким чином, F - неспадна функція. Аналогічно G - неспадна функція.
1) Нехай відомо, що $\displaystyle\int_a^\omega g(x)\,dx$ - збіжний, отже,
$\displaystyle\int_a^\omega g(x)\,dx = \lim_{A\to\omega} G(A) \overset{G\text{ - неспадна}}{=} \sup_{t\in[a,\omega)} G(t)$.
Оскільки $\forall x \in [a,\omega) : f(x) \leq g(x)$, то тоді $F(t) \leq G(t)$. А отже, $F(t) \leq \displaystyle\sup_{t\in[a,\omega)} G(t)$.
Через те, що $F(t)$ - обмежена та неспадна, то $\exists \displaystyle\lim_{A\to\omega} F(A) = \int_a^\omega f(x)\,dx$ - збіжний.
2) А тепер нехай відомо, що $\displaystyle\int_a^\omega f(x)\,dx$ - розбіжний.
!Якщо припустити, що інтеграл $\displaystyle\int_a^\omega g(x)\,dx$ - збіжний, то за п. 1), інтеграл з $\displaystyle\int_a^\omega f(x)\,dx$ - збіжний, що суперечність!
Таким чином, $\displaystyle\int_a^\omega g(x)\,dx$ - розбіжний. ■

Example 3.3.4 Дослідити на збіжність $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$
Маємо $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}$. Відомо, що $\cos^2 x \leq 1$. Встановимо функцію $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Тоді $\forall x \in (0,1] : f(x) \leq g(x)$.
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ - збіжний (еталон). Отже, за ознакою порівняння, п. 1), $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$ - збіжний.

Theorem 3.3.5 Ознака порівняння в границях
Задані функції $f, g \in \mathcal{R}([a,A]) : \forall A \in [a,\omega)$ - строго додатні. Відомо, що $\exists \displaystyle\lim_{x\to\omega-0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Тоді
1) Якщо $L \neq 0, \neq \infty$, то обидва $\displaystyle\int_a^\omega f(x)\,dx, \int_a^\omega g(x)\,dx$ - збіжні або розбіжні;
2) Ящо $L = 0$, то зі збіжності $\displaystyle\int_a^\omega g(x)\,dx$ випливає збіжність $\displaystyle\int_a^\omega f(x)\,dx$.

Proof.
1) Розглянемо $L \neq 0$, але оскільки $f, g > 0$, то $L > 0$.
$\exists \displaystyle\lim_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = L \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists c \in [a,\omega) : \forall x \geq c : \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$.
Розглянемо $\varepsilon = \dfrac{L}{2}$, тоді $\dfrac{L}{2} < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \dfrac{3L}{2} \Rightarrow \dfrac{L}{2}g(x) < f(x) < \dfrac{3L}{2}g(x)$.

Якщо $\int_c^\omega g(x)\,dx$ - збіжний, то $\int_c^\omega \frac{3L}{2}g(x)\,dx$ - збіжний, то $\int_c^\omega f(x)\,dx$ - збіжний. Отже, $\int_a^\omega f(x)\,dx$ - збіжний.
Якщо $\int_c^\omega f(x)\,dx$ - збіжний, то $\int_c^\omega \frac{L}{2}g(x)\,dx$ - збіжний, то $\int_c^\omega g(x)\,dx$ - збіжний. Отже, $\int_a^\omega f(x)\,dx$ - збіжний.
Це все за арифметичними властивостями збіжності, попередньою ознакою порівняння, п.1). та теоремою про збіжність в адитивності.
Тож $\int_a^\omega f(x)\,dx$, $\int_a^\omega g(x)\,dx$ - одночасно збіжні.
Аналогічно можна довести однакову розбіжність, якщо починати нерівність зліва.

2) Розглянемо $L = 0$, то $\exists \lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists c \in [a,\omega) : \forall x \geq c : \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon$.
Розглянемо $\varepsilon = 1$, то тоді $f(x) < g(x), \forall x \geq c$, а це вже посилання на попередню теорему. ■

Example 3.3.6 Дослідити на збіжність $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{1}{5}}}$
Маємо функцію $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{1}{5}}}$. Візьмемо функцію $g(x) = \frac{1}{x^{-\frac{4}{5}}}$. Тоді

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{1}{5}}}}{\frac{1}{x^{-\frac{4}{5}}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

А тепер оскільки $\int_0^1 \frac{1}{x^{-\frac{4}{5}}}$ - розбіжний (еталон), то за ознакою порівняння в лімітах, п. 1), $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{1}{5}}}$ - розбіжний.

3.3.2 Дослідження для знакодовільних функцій

Definition 3.3.7 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a;A]), \forall A \in [a,\omega)$.
$\int_a^\omega f(x)\,dx$ називається **абсолютно збіжним**, якщо $\int_a^\omega |f(x)|\,dx$ - збіжний.
$\int_a^\omega f(x)\,dx$ називається **умовно збіжним**, якщо $\int_a^\omega |f(x)|\,dx$ - розбіжний, але при цьому $\int_a^\omega f(x)\,dx$ - збіжний.

Proposition 3.3.8 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a;A]), \forall A \in [a,\omega)$.
Відомо, що $\int_a^\omega f(x)\,dx$ - абсолютно збіжний. Тоді $\int_a^\omega f(x)\,dx$ - збіжний.

Proof.
$\int_a^\omega |f(x)|\,dx$ - збіжний. За критерієм Коші, $\forall \varepsilon > 0 : \exists \left[\begin{array}{l} \delta, \text{якщо } \omega = b \\ \Delta, \text{якщо } \omega = +\infty \end{array}\right. : \forall \left[\begin{array}{l} A_1, A_2 \in (b-\delta, b), \text{якщо } \omega = b \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty), \text{якщо } \omega = +\infty \end{array}\right. \implies$
$\left|\int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon \implies \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$
Тоді за критерієм Коші, $\int_a^\omega f(x)\,dx$ - збіжний. ■

Theorem 3.3.9 Ознака Діріхле
Задані функції $f, g \in \mathcal{R}([a,A]), \forall A \in [a,\omega)$. Відомо, що:
1) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ - обмежена на $[a,\omega)$;
2) $g(x)$ - монотонна та н.м. при $x \to \omega$.
Тоді $\int_a^\omega f(x)g(x)\,dx$ - збіжний.

Remark 3.3.10 Взагалі-то кажучи, можна не вимагати, щоб $g \in \mathcal{R}([a,A])$, тому що вона монотонна.

Proof.
Будемо доводити за критерієм Коші про збіжність. Нехай $\varepsilon > 0$.
Оскільки $F(x)$ - обмежена, то звідси $\exists C > 0 : \forall x \in [a, \omega) : |F(x)| \leq C$.
Також g - н.м. при $x \to \omega$, то звідси $\exists \left[\begin{array}{l}\delta \\ \Delta\end{array}\right. : \forall x \in [a, \omega) : \left[\begin{array}{l}x \in (b-\delta, b) \\ x \in (\Delta, +\infty)\end{array}\right. \implies |g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4C}$.
Тоді в критерії Коші $\exists \left[\begin{array}{l}\delta \\ \Delta\end{array}\right. : \forall A_1, A_2 \in [a, \omega) : \left[\begin{array}{l}A_1, A_2 \in (b-\delta, b) \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty)\end{array}\right.$
$\implies \left| \displaystyle\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx \right| \boxed{=}$
Оскільки g - монотонна на $[A_1, A_2]$ та $f \in \mathcal{R}([A_1, A_2])$, то тоді застосуємо другу теорему про середнє
$\exists \xi \in (A_1.A_2) : \displaystyle\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx = g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx$.
$\boxed{=} \left| g(A_1) \displaystyle\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx \right| \leq \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx \right| + \left| g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx \right| \boxed{\leq}$
Оскільки $\left| \displaystyle\int_a^{A_1} f(x)\,dx \right| \leq C$ та $\left| \displaystyle\int_a^{\xi} f(x)\,dx \right| \leq C$, то звідси
$\left| \displaystyle\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^{\xi} f(x)\,dx - \int_a^{A_1} f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^{\xi} f(x)\,dx \right| + \left| \int_a^{A_1} f(x)\,dx \right| \leq 2C$.
Аналогічними міркуваннями $\left| \displaystyle\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx \right| \leq 2C$.
$\boxed{\leq} 2Cg(A_1) + 2Cg(A_2) < 2C\dfrac{\varepsilon}{4C} + 2C\dfrac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon$.
Отже, за критерієм Коші, $\displaystyle\int_a^{\omega} f(x)g(x)\,dx$ - збіжний. ■

Theorem 3.3.11 Ознака Абеля
Задані функції $f, g \in \mathcal{R}([a, A]), \forall A \in [a, \omega)$. Відомо, що:
1) $\displaystyle\int_a^{\omega} f(x)\,dx$ - збіжний;
2) $g(x)$ - монотонна та обмежена на $[a, \omega)$.
Тоді $\displaystyle\int_a^{\omega} f(x)g(x)\,dx$ - збіжний.

Remark 3.3.12 Різниця між Діріхле полягає в тому, що вимоги до 1) ми посилюємо, а вимоги до 2) ми послаблюємо. Ця теорема, насправді, є прямим наслідком, проте відокремити її можна як теорему.

Proof.
$\displaystyle\int_a^{\omega} f(x)\,dx = \lim_{x \to \omega} \int_a^x f(t)\,dt$, тоді вона обмежена. П. 1) уже маємо.
g - монотонна та обмежена, тому $\exists \lim\limits_{x \to \omega} g(x) = L$. Далі розглянемо функцію $h(x) = g(x) - L$, яка також монотонна, але вже н.м. при $x \to \omega$. П. 2) уже маємо для $h(x)$.
Тоді $\displaystyle\int_a^{\omega} f(x)h(x)\,dx$ - збіжний. Отже,
$\displaystyle\int_a^{\omega} f(x)g(x)\,dx = \lim_{x \to \omega} \int_a^x f(t)g(t)\,dt = \lim_{x \to \omega} \int_a^x f(t)h(t) + Lf(t)\,dt = \int_a^{\omega} f(x)h(x)\,dx + L \int_a^{\omega} f(x)\,dx$ - збіжний. ■

Example 3.3.13 Інтеграл Діріхле
Дослідимо на збіжність $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.
Маємо $f(x) = \sin x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
До речі, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, тож $x = 0$ - усувна точка, тобто вона не є особливою точкою. Тому $\forall A \in [0, +\infty) : \dfrac{\sin x}{x} \in \mathcal{R}([0, A])$.

Перевіримо умови Діріхле.
$\left|\int_0^A f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^A \sin x\,dx\right| = |-\cos A + \cos 0| \le 2$, виконано $\forall A \ge 0$ - встановимо $M = 2$. Тоді обмежена.
$g(x) = \dfrac{1}{x}$ - монотонна, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
Таким чином, за ознакою Діріхле, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ - збіжний.

Дослідимо тепер на абсолютну збіжність.
!Припустимо, що це, дійсно, абсолютно збіжний інтеграл, тобто $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ - збіжний.
Зауважимо, що $|\sin x| \ge \sin^2 x$. Тоді за ознакою порівняння в нерівностях, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ - збіжний.
Тому збіжними будуть два інтеграли:
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos^2 x}{x}\,dx =$
$\displaystyle= \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1+\cos 2x}{2x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$
Звідси $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\,dx$ та $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$ - збіжні. Проте за еталоном, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\,dx$ НЕ є збіжним.
Суперечність!
Висновок: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ - умовно збіжний.

3.4 Особливі випадки

I. Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a,b]), \forall a,b \in \mathbb{R}$. Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$

причому $c \in \mathbb{R}$ - деяке число.
Збіжним буде даний інтеграл, якщо інтеграли в правій частині всі збіжні. У протилежному випадку - розбіжний.

Example 3.4.1 Обчислити $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.
Спочатку $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \operatorname{arctg}(x+1) + C$.
Оберемо точку 0 із проміжка $(-\infty, +\infty)$. Отримаємо два інтеграли:
$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2} = \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{-\infty}^{0} = \operatorname{arctg} 1 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} = \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 1.$
Таким чином, два інтеграли збіжні, а тому збіжним буде перший інтеграл, причому
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \pi.$

II. Задано функцію $f \in \mathcal{R}([\alpha,\beta]), \forall \alpha,\beta \in (a,b)$, причому функція необмежена навколо точки a, b. Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

причому $c \in (a,b)$ - деяке число.
Збіжним буде даний інтеграл, якщо інтеграли в правій частині всі збіжні. У протилежному випадку - розбіжний.

Example 3.4.2 Обчислити $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
Оберемо точку 0 із проміжка $(-1,1)$. Отримаємо два інтеграли:
$\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{0} = \frac{\pi}{2}$
$\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{2}$.
Таким чином, два інтеграли збіжні, а тому збіжним буде перший інтеграл, причому
$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$

III. Задано функцію $f \in \mathcal{R}([\alpha,\beta]), \forall[\alpha,\beta] \subset [a,b] \setminus \{c\}$, причому функція необмежена навколо точки c. Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Збіжним буде даний інтеграл, якщо інтеграли в правій частині всі збіжні. У протилежному випадку - розбіжний.

IV. Задано функцію $f \in \mathcal{R}([\alpha,\beta]), \forall[\alpha,\beta] \subset (a,+\infty)$, причому функція необмежена навколо точки a. Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$

причому $c \in \mathbb{R}$ - деяке число.
Збіжним буде даний інтеграл, якщо інтеграли в правій частині всі збіжні. У протилежному випадку - розбіжний.
Тут аналогічно можна розглянути випадок із нескінченності до точки необмеженості.

Example 3.4.3 Дослідити на збіжність $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)}$.
Маємо комбінований інтеграл, що розіб'ється ось так:
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x(x-9)} + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x(x-9)} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x(x-9)} + \int_{1}^{9} \frac{dx}{x(x-9)} + \int_{9}^{10} \frac{dx}{x(x-9)} + \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)}.$
Для збіжності треба, щоб абсолютно всі інтеграли з цього доданку збігались. Але $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x(x-9)}$ розбіжний - це легко показати.
Отже, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)}$ - розбіжний.

3.5 Невласний інтеграл в сенсі головного значення по Коші

Definition 3.5.1 Головним значенням невласного інтеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ називається ось це:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx$$

Definition 3.5.2 Головним значенням невласного інтеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, де функція f необмежена в т. $c \in (a,b)$, називається ось це:

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varphi}^{b} f(x)\,dx \right)$$

Remark 3.5.3 Якщо один із двох інтегралів збігається, то тоді й v.p. інтеграл теж буде збігатись. В зворотному - невірно.

Example 3.5.4 Контрприклади

Маємо $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ - розбіжний (там виникне еталон)

Але v.p. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon) = 0$ - збіжний.

Маємо $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ - розбіжний.

Але v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} x\,dx = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\right) = 0$ - збіжний.

Example 3.5.5 Обчислити v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)}$.

v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)} = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx$

4 Ряди

Definition 4.0.1 Рядом називають формальну нескінченну суму нескінченної послідовності чисел $\{a_n, n \geq 1\}$:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Частковою сумою даного ряда називають суму перших k членів:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

В такому випадку в нас виникає послідовність часткових сум $\{S_k, k \geq 1\}$.

Якщо така послідовність часткових сум є збіжною, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають **збіжним** та **сумма** цього ряду дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k = S$$

Інакше - **розбіжним**.

Example 4.0.2 Знайдемо суму: $1 + q + q^2 + \ldots$

Розглянемо часткову суму $S_k = 1 + q + \cdots + q^k = \dfrac{1-q^k}{1-q}$ - сума геом. прогресії.

$\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1-q^k}{1-q} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{1-q}, |q| < 1 \\ \infty, |q| > 1 \end{array}\right.$.

При $q = 1$ маємо: $1 + 1 + 1 + \ldots$,тобто $S_k = k \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} S_k = \infty$.

Підсумуємо:

- сума є збіжною при $|q| < 1$ та $1 + q + q^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-q}$;

- сума є розбіжнрю при $|q| \geq 1$.

4.1 Первинний аналіз збіжності та арифметика рядів

Proposition 4.1.1 Необхідна ознака збіжності ряду

Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Proof.

Зафіксуємо часткові суми: $S_{k+1} = \sum\limits_{n=1}^{k+1} a_n \quad S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$.

Оскільки ряд є збіжним, то звідси

$\lim\limits_{k\to\infty} S_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} (S_{k+1} - S_k) = S - S = 0$. ■

Example 4.1.2 Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots$

Оскільки $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$, то за необхідною ознакою збіжності, маємо, що ряд - розбіжний.

Remark 4.1.3 Це лише - необхідна ознака, в жодному випадку не достатня. Якщо границя буде нулевою, то це не означає, що ряд збігається, потрібну інші дослідження.

Theorem 4.1.4 Критерій Коші

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon$.

Proof.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний $\iff \exists \lim_{k\to\infty} S_k$ - збіжна границя $\overset{\text{критерій Коші}}{\iff}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : |S_{k+p} - S_k| = \left|\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| < \varepsilon$ ■

Example 4.1.5 Важливий
Розглянемо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - **гармонічний ряд**. Доведемо, що даний ряд - розбіжний, використовуючи критерій Коші, тобто
$\exists \varepsilon > 0 : \forall K : \exists k_1, k_2 \geq K : \left|\sum_{n=k_1}^{k_2} \frac{1}{n}\right| \geq \varepsilon$
Дійсно, якщо $\varepsilon = 0.5$, $k_1 = K, k_2 = 2K$, то отримаємо:
$\left|\sum_{n=K}^{2K} \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \dots + \frac{1}{2K} > K\frac{1}{2K} = 0.5.$
Отже, цей ряд - розбіжний.
Один з прикладів, що підтверджує, що необхідна умова збіжності не є достатньою.

Proposition 4.1.6 Задані $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжні. Тоді збіжними будуть й наступні ряди:
1) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Proof.
Доведу друге. Перший пункт аналогічно. Зафіксуємо часткові суми:
2) $S_k(a) = \sum_{n=1}^{k} a_n \quad , S_k(b) = \sum_{n=1}^{k} b_n$.
Тоді $S_k(a) + S_k(b) = \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{k} b_n$.
Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжні, то $\lim_{k\to\infty} S_k(a) = S(a), \quad \lim_{k\to\infty} S_k(b) = S(b)$.
$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{k\to\infty} (S_k(a) + S_k(b)) = S(a) + S(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. ■

Definition 4.1.7 Хвостом (або **остачею**) ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають ряд $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, де $m \in \mathbb{N}$.
Тобто ми відкидуємо перші $m-1$ доданків та сумуємо, починаючи з m.

Proposition 4.1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний $\iff \sum_{n=m}^{\infty} a_n$ - збіжний, причому $\forall m \in \mathbb{N}$.

Proof.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний $\overset{\text{критерій Коші}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left|\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| < \varepsilon \iff$

$\iff \exists K' = \max\{K, m\} : \forall k \geq K' : \forall p \geq 1 : \left|\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| < \varepsilon \iff \sum_{n=m}^{\infty} a_n$ - збіжний. ■

4.2 Знакододатні ряди

Тобто розглядаємо зараз лише ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, такі, що $\forall n \geq 1 : a_n \geq 0$.

Proposition 4.2.1 $\{S_k, k \geq 1\}$ - мононтонно неспадна послідовність.

Proof.
$\forall k \geq 1 : S_{k-1} - S_k = a_{k+1} \geq 0 \Rightarrow S_k \leq S_{k+1}$. ■

Proposition 4.2.2 Якщо $\{S_k, k \geq 1\}$ - обмежена, то тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.

Proof.
Щойно дізнались що послідовність часткових сум монотонна. До того ж, вона є обмеженою за умовою. Отже, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$, тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний. ■

Theorem 4.2.3 Ознака порівняння в нерівностях
Задані $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ таким чином, що $\forall n \geq 1 : a_n \leq b_n$. Тоді:
1) якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжний, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний теж.
2) якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - розбіжний, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - розбіжний теж.

Proof.
Оскільки $\forall n \geq 1 : a_n \leq b_n$, то тоді $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$, де $k \in \mathbb{N}$.
1) Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжний ряд, тоді $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} b_n = \tilde{S}$.
Отже, в нашій нерівності, якщо $k \to \infty$, то маємо $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \tilde{S}$.
Отже, існує границя, а тому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.
2) Це є оберненим твердженням до 1). ■

Example 4.2.4 Важливий
Розглянемо далі $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ - **ряд Діріхле**. Дослідимо на збіжність.
Нехай $\alpha < 1$, тоді $\forall n \geq 1 : \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n^\alpha}$.
За ознакою порівняння та минулим прикладом, отримаємо, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ - розбіжний.
Нехай $\alpha > 1$, тоді отримаємо таку оцінку:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \dots \leq$$
$$\leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \dots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \dots = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}}.$$
Наш ряд - обмежений, а послідовність часткових сум - монотонна. Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ - збіжний.
Підсумуємо: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ - $\left[\begin{array}{l} \text{розбіжний}, \alpha \leq 1 \\ \text{збіжний}, \alpha > 1 \end{array}\right.$.

Theorem 4.2.5 Ознака порівняння в границях
Задані $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, тут члени строго додатні. Відомо, що $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$. Тоді:

1) Якщо $l \neq 0$ та $l \neq \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжні або розбіжні одночасно;

2) Якщо $l = 0$, то зі збіжності $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Remark 4.2.6 До речі, $l \geq 0$, оскільки всі члени - додатні.

Proof.
1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l \neq 0$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \left|\dfrac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon$.
Оберемо $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$, тоді $\dfrac{l}{2} < \dfrac{a_n}{b_n} < \dfrac{3l}{2} \Rightarrow \dfrac{l}{2} b_n < a_n < \dfrac{3l}{2} b_n$, $\forall n \geq N$.
Припустимо, що $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$ - збіжний, тоді збіжним буде $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \dfrac{3l}{2} b_n$, а отже, за попередньою теоремою, $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ - збіжний. Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.
Якщо $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ - збіжний, тоді збіжним буде $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \dfrac{l}{2} b_n$, а отже $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$ - збіжний. Тому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжний.
Аналогічними міркуваннями доводиться розбіжність.
Тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжні або розбіжні одночасно.

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l = 0$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$
Оберемо $\varepsilon = 1$, тоді $\forall n \geq N : a_n < b_n$. Тоді виконується попередня теорема, один з двох пунктів. ■

Example 4.2.7 Дослідити на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$.
Маємо $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$. Встановимо $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Обчислимо границю їхніх відношень:
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 \operatorname{arctg} n}{1+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{1 + \dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{\pi}{2}$.
А оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ - збіжний, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$ - збіжний.

Theorem 4.2.8 Ознака Даламбера
Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - строго додатний. Тоді:
1) Якщо $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд - збіжний;
2) Якщо $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд - розбіжний.

Proof.
1) Маємо $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, тоді $\forall \varepsilon > 0$, зокрема для $\varepsilon = \dfrac{1-q}{2}$, проміжок $(q+\varepsilon, +\infty)$ має скінченну кількість членів послідовності $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$, тобто $\exists N : \forall n \geq N : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = \dfrac{1+q}{2}$.
Звідси випливає, що $a_{n+1} < \dfrac{1+q}{2} a_n$.

$$\implies a_{N+1} < \frac{1+q}{2} a_N$$

$$\implies a_{N+2} < \frac{1+q}{2} a_{N+1} < \left(\frac{1+q}{2}\right)^2 a_N$$

$$\vdots$$

$$\implies \forall k \geq 1 : a_{N+k} < \left(\frac{1+q}{2}\right)^k a_N$$

Розглянемо ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+q}{2}\right)^k a_N = a_N\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+q}{2}\right)^k$

Вираз під сумою буде менше за 1, цей ряд - геометрична прогресія, збіжний.

Тоді $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ - збіжний, отже, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.

2) Маємо $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, тоді $\forall\varepsilon > 0$, зокрема для $\varepsilon = \dfrac{q-1}{2}$, проміжок $(-\infty, q-\varepsilon)$ має скінченну кількість членів послідовності $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$, тобто $\exists N : \forall n \geq N : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon = \dfrac{1+q}{2}$.

Аналогічними міркуваннями отримаємо $\forall k \geq 1 : a_{N+k} > \left(\dfrac{q+1}{2}\right)^k a_N$.

Розглянемо ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q+1}{2}\right)^k a_N = a_N\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q+1}{2}\right)^k$

А тут геометрична прогресія при виразі, що більше одиниці - розбіжний.

Тоді $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ - розбіжний, отже, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - розбіжний. ■

Corollary 4.2.9 Ознака Даламбера (стандартний вигляд)

Задано $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - строго додатний. Нехай $\exists \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тоді:

1) Якщо $q < 1$, то ряд - збіжний;
2) Якщо $q > 1$, то ряд - розбіжний;
3) Якщо $q = 1$, то відповіді нема.

Proof.
Якщо $\exists \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то автоматично $\exists \displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $\exists \displaystyle\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Ну а далі чисто за попередньою теоремою.

3) А тепер в чому проблема при $q = 1$. Розглянемо обидва ряди: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Використаємо для обох ознаку Даламбера:

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot n = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\cdot n^2 = 1.$

Результат - однаковий, проте один ряд - розбіжний, а інший - збіжний. Тож $q = 1$ не дає відповіді, шукаємо інші методи. ■

Example 4.2.10 Дослідити на збіжність $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$.

$a_n = \dfrac{3^n(n!)^2}{(2n)!} \qquad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{3}{4} < 1.$

Отже, наш ряд - збіжний за Даламбером.

Theorem 4.2.11 Радикальна ознака Коші

Задано $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - додатний. Нехай $\exists \displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$. Тоді:

1) Якщо $q < 1$, то ряд - збіжний;
2) Якщо $q > 1$, то ряд - розбіжний;
3) Якщо $q = 1$, то відповіді нема.

Proof.
1) $\exists \displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q < 1$, тобто $\forall\varepsilon > 0$: проміжок $(q+\varepsilon, +\infty)$ має скінченну кількість елементів, тобто $\forall\varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \implies a_n < (q+\varepsilon)^n$.

Оберемо $\varepsilon = \dfrac{1-q}{2}$. Тоді маємо: $a_n < \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^n$.

Розглянемо ряд $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ - геометрична прогресія, вираз в сумі менше за одиниці - збіжний.
Отже, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ - збіжний, а тому $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.

2) $\exists \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, тобто $\exists\{\sqrt[n(p)]{a_{n(p)}}, p \geq 1\} : \lim\limits_{p\to\infty} \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}} = q$ - така підпослідовність, що містить цю границю $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists P : \forall p \geq P : \left| \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}} - q \right| < \varepsilon$.
Оберемо $\varepsilon = \dfrac{q-1}{2}$, тоді $a_{n(p)} > \left(\dfrac{q+1}{2}\right)^{n(p)}$. Тоді $\lim\limits_{p\to\infty} a_{n(p)} \geq \lim\limits_{p\to\infty}\left(\dfrac{q+1}{2}\right)^{n(p)} = \infty$.
Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Це означає, що необхідна умова збіжності не виконується - розбіжний.

3) Для $q = 1$ треба розглянути такі самі ряди як при доведенні ознаки Даламбера. ■

Example 4.2.12 Дослідити на збіжність $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

$$a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{3} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{e}{3} < 1.$
Отже, наш ряд - збіжний за Коші.

Theorem 4.2.13 Інтегральна ознака Коші
Задано $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - додатний. Встановимо функцію $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, яка під такими умовами:
1) $\forall n \geq 1 : a_n = f(x)$;
2) f не зростає на $[1, +\infty)$.
Тоді $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжні або розбіжні одночасно.

Proof.
Оскільки $f(x)$ спадає, то $\forall k \geq 1 : \forall x \in [k, k+1]$:
$a_k \geq f(x) \geq a_{k+1}$.
$a_k = \displaystyle\int_k^{k+1} a_k\,dx \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq \int_k^{k+1} a_{k+1}\,dx = a_{k+1}$.
Просумуємо ці нерівності від $k = 1$ до $k = M$, отримаємо:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{M} a_k \geq \int_1^{M+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{M} a_{k+1}$.
Нехай $\displaystyle\sum_{k=1}^{M}$ - збіжний. Тоді якщо $M \to \infty$, то отримаємо, що $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ приймає скінченне значення, а тому збіжний.
Нехай $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ - збіжний. Тому $\displaystyle\sum_{k=1}^{M} a_{k+1}$ - обмежений. А оскільки він додатній, то звідси, збіжний.
Випадок розбіжності доводиться від супротивного. ■

Example 4.2.14 Дослідити на збіжність $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Маємо функцію $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$. Зрозуміло, що f спадає на $[2, +\infty)$, бо $x, \ln^2 x$ там зростають.
$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$ - збіжний.
Отже, наш ряд - збіжний за Коші інтегральним.

Theorem 4.2.15 Ознака Раабе
Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - строго додатний. Нехай $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$. Тоді
1) Якщо $q < 1$, то ряд - розбіжний;
2) Якщо $q > 1$, то ряд - збіжний;
3) Якщо $q = 1$, то відповіді нема.

Proof.
Маємо $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$, тобто можна сказати $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - q = o(1)$ при $n\to\infty$.
Або $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{q}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$.
Одночасно ми розглянемо $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, тоді звідси $\dfrac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$.

1) $q > 1$, тоді ми зможемо знайти $\alpha \in (1, q)$. Звідси
$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{b_n}{b_{n+1}} = \dfrac{q-\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$, починаючи з деякого номеру.
Тоді $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > \dfrac{b_n}{b_{n+1}} \implies \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Оскільки $\alpha > 1$, то тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжний. А із цієї нерівності випливає, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.

2) $q < 1$, то тоді ми зможемо знайти $\alpha \in (q, 1)$. А далі всі процедури аналогічні.

3) Розглянути ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ - розбіжний та $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ - збіжний за інтегральною ознакою Коші. Обидві дають одиничну границю. ■

Example 4.2.16 Дослідити на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{2022}$.

$a_n = \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{2022}$. Тоді маємо:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{2022} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{2022} - 1}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{2022}{2n+1} + o\left(\dfrac{1}{2n+1}\right) - 1}{\dfrac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2022n}{2n+1} = 1011 > 1.$$
Таким чином, заданий ряд - збіжний за Раабе.

4.3 Знакозмінні ряди

Definition 4.3.1 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Definition 4.3.2 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **умовно збіжним**, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний, але $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - не збіжний.

Proposition 4.3.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - абсолютно збіжний. Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.

Proof.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - абсолютно збіжний $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - збіжний $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 :$
$\left|\sum\limits_{n=k}^{k+p} |a_n|\right| < \varepsilon \implies \left|\sum\limits_{n=k}^{k+p} a_n\right| \leq \left|\sum\limits_{n=k}^{k+p} |a_n|\right| < \varepsilon \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний. ■

Theorem 4.3.4 Ознака Лейбніца

Задано ряд вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, де $a_n \geq 0$ - **знакозмінний ряд**. Відомо, що:
1) $\{a_n, n \geq 1\}$ - монотонно спадає;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Тоді заданий ряд - збіжний.

Proof.
Розглянемо послідовність часткових сум $\{S_{2k}, k \geq 1\}$. Отримаємо наступне:
$S_{2k} = \underset{\geq 0}{(a_1 - a_2)} + \underset{\geq 0}{(a_3 - a_4)} + \cdots + \underset{\geq 0}{(a_{2k-1} - a_{2k})} \geq 0$.
$S_{2k} = a_1 - \underset{\geq 0}{(a_2 - a_3)} - \underset{\geq 0}{(a_4 - a_5)} - \cdots - \underset{\geq 0}{(a_{2k-2} - a_{2k-1})} - a_{2k} \leq a_1$.
Тобто $0 \leq S_{2k} \leq a_1$ - обмежена послідовність.
Також $S_{2(k+1)} = S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \geq S_{2k}$ - монотонна. Таким чином, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = S$.
Розглянемо ще одну послідовність часткових сум $\{S_{2k+1}, k \geq 1\}$. Зрозуміло, що $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$
$\implies \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} + \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = S + 0 = S$.

Остаточно, маємо, що послідовність $\{S_m, m \geq 1\}$ - збіжна, тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ - збіжний. ■

Corollary 4.3.5 $\forall k \geq 1 : |S - S_k| \leq a_{k+1}$.

Proof.
Розглянемо хвіст ряду $S - S_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n+1}a_n$. А також розглянемо $\tilde{S_m} = \sum\limits_{n=k+1}^{m} (-1)^{n+1}a_n$. Тоді

$$\tilde{S_m} = S_m - S_k = (-1)^{k+1}\left(a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+1} - a_{k+5}) - \cdots - \left[\begin{array}{l} (a_{m-1} - a_m), k \not\vdots 2 \\ \qquad a_m, k \vdots 2 \end{array}\right.\right)$$

$$\Rightarrow |\tilde{S_m}| = \left|a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+1} - a_{k+5}) - \cdots - \left[\begin{array}{l} (a_{m-1} - a_m), k \not\vdots 2 \\ \qquad a_m, k \vdots 2 \end{array}\right.\right| =$$

$$= a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+1} - a_{k+5}) - \cdots - \left[\begin{array}{l} (a_{m-1} - a_m), k \not\vdots 2 \\ \qquad a_m, k \vdots 2 \end{array}\right. \leq a_{k+1}$$

$\implies |S - S_k| = \lim\limits_{m\to\infty} |\tilde{S_m}| \leq a_{k+1}$. ■

Example 4.3.6 Обчислити суму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$ з точністю до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Зрозуміло, що $a_n = \dfrac{1}{n!} \geq 0$, монотонно спадає та н.м. Отже, виконуються ознаки Лейбніца, а тому й отриманий наслідок.
$|S - S_k| \leq a_{k+1} < \varepsilon \implies \dfrac{1}{(k+1)!} < \dfrac{1}{10^5} \implies (k+1)! > 100000$.
Достатньо взяти нам $k = 8$. Тому ми отримаємо:
$S \approx S_8 = -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} - \dfrac{1}{5040} + \dfrac{1}{40320} = \dfrac{-3641}{5760}$.

Theorem 4.3.7 Ознаки Діріхле та Абеля

Задано ряд вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Нехай виконано один з двох блок умов:

$\sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ - обмежена.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний.
$\{b_n, n \geq 1\}$ - монотонна та н.м.	$\{b_n, n \geq 1\}$ - монотонна та обмежена.
ознака Діріхле	*ознака Абеля*

Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ - збіжний.

Proof.
Спочатку почнемо з ознаки Діріхле. Припустимо b_n спадає. Застосуємо критерій Коші для доведення.
$\left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n b_n\right| = \left|A_{k+p}b_{k+p} - A_k b_{k+1} - \sum\limits_{n=k+1}^{k+p-1} A_n(b_{n+1}-b_n)\right| = \left|A_{k+p}b_{k+p} - A_k b_{k+1} + \sum\limits_{n=k+1}^{k+p-1} A_n(b_n - b_{n+1})\right| \leq$
$|A_{k+p}b_{k+p} - A_k b_{k+1}| + \sum\limits_{n=k+1}^{k+p-1} |A_n||b_{n+1}-b_n| \boxed{<}$
За умовою, $A_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ - обмежена, тобто $\exists C > 0 : \forall k \geq 1 : |A_k| \leq C$.
Також b_n - н.м., тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : |b_k| < \varepsilon$.
Тоді $|A_{k+p}b_{k+p} - A_k b_{k+1}| \leq |A_{k+p}||b_{k+p}| + |A_k||b_{k+1}| < 2C\varepsilon$.
Також $\sum\limits_{n=k+1}^{k+p-1} |A_n||b_{n+1}-b_n| \leq C \sum\limits_{n=k+1}^{k+p-1} (b_n - b_{n+1}) = C(b_{k+1} - b_{k+p}) \leq Cb_{k+1} < C\varepsilon$
$\boxed{<} 3C\varepsilon$. Виконано $\forall \varepsilon > 0$ та $\forall k \geq K : \forall p \geq 1$. Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ - збіжний.

Далі доводимо ознаку Абеля. Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний, то тоді обмежений. Оскільки $\{b_n\}$ монотонна та обмежена, то $b_n \to B$. Якщо розглянути $c_n = b_n - B$, то маємо $\{c_n, n \geq 1\}$ - монотонна та н.м.
Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ - збіжний за Діріхле. А далі ясно, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ - збіжний. ■

Example 4.3.8 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Будемо для цього використовувати ознаку Діріхле, встановимо $a_n = \sin n, b_n = \dfrac{1}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{k} \sin n = \sum_{n=1}^{k} \frac{\sin(1 \cdot n)\sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{k} \left(\cos\left(n - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{3}{2} - \cos\frac{5}{2} + \dots + \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{1}{2} - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) =$$
$$\frac{\sin\frac{k+1}{2}\sin\frac{k}{2}}{\sin\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, $\left|\sum\limits_{n=1}^{k} \sin n\right| = \left|\dfrac{\sin\frac{k+1}{2}\sin\frac{k}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}} \implies \sum\limits_{n=1}^{k} \sin n$ - обмежена.
Зрозуміло, що $\dfrac{1}{n}$ монотонна та н.м.
Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n}$ - збіжний.

Example 4.3.9 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n} e^{-n}$.

Будемо для цього використовувати ознаку Абеля, встановимо $a_n = \dfrac{\sin n}{n}, b_n = e^{-n}$.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n}$ - збіжний за попереднім прикладом.
e^{-n} - монотонна, оскільки $e^{-n-1} - e^{-n} = e^{-n}(e^{-1} - 1) < 0$.

e^{-n} - обмежена, оскільки $0 < e^{-n} < e$.

Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} e^{-n}$ - збіжний.

Theorem 4.3.10 Теорема Рімана

Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - умовно збіжний.

Тоді для довільного $M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ буде існувати перестановка членів ряду, після якої новий ряд із переставленими членами буде збіжним до числа M.

Без доведення.

4.4 Трошки детально про абсолютно збіжні ряди

Для кожного числа $a \in \mathbb{R}$ визначимо додатну та від'ємну частину числа:

$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} 0, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$

Маємо кілька зауважень. Перше з них – це $0 \leq a^+ \leq |a|$ та $0 \leq a^- \leq |a|$. Більш того, $a = a^+ - a^-$. Нарешті, $|a| = a^+ + a^-$.

Тепер ми можемо розділити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на додатну частину $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ та на від'ємну частину $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Proposition 4.4.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний абсолютно $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ – обидва збіжні (як невід'ємні ряди). Більш того, в такому випадку матимемо

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-, \qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-.$

Proof.

Для доведення в обидві сторони треба зауважити, що справедлива рівність:

$0 \leq \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} |a_n| = \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n^+ + \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n^-$

А з даної рівності безпосередньо випливають дві нерівності:

$0 \leq \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n^+ \leq \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} |a_n|$

$0 \leq \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n^- \leq \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} |a_n|.$

Ми таким чином доведемо твердження в обидві сторони.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n^+ - \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |a_n| = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n^+ + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$ ■

Definition 4.4.2 Заданий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Перестановкою даного ряду назвемо ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$, для якого виконана така умова:

$$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ – біекція} : b_m = a_{f(m)}$$

Example 4.4.3 Наприклад маємо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ Ми переставимо члени так, що спочатку йдуть парні члени, а згодом непарні – отримаємо новий ряд

$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + 1 + \frac{1}{3} + \ldots$
Формально кажучи, ми встановили бієкцію $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таким чином: $b_1 = a_2, b_2 = a_4, \ldots$ та для деяких індексів $b_{m_1} = a_1, b_{m_2} = a_3, \ldots$

Theorem 4.4.4 Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – абсолютно збіжний. Тоді кожна перестановка даного ряду збігається туди ж.

Proof.
Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – абсолютно збіжний. Доведення розіб'ємо на два випадки:

I. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – невід'ємний ряд.

Зафіксуємо перестановочний ряд $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$, у цьому випадку $b_m = a_{f(m)}$ та $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – бієкція.

Нехай $\varepsilon > 0$. За умовою збіжності, існує $N \in \mathbb{N}$, для якого $0 \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{N} a_k < \varepsilon$.
Зауважимо, що оскільки f – бієкція, то тоді можемо підібрати $M = \max\{m \in \mathbb{N} : 1 \le f(m) \le N\}$, для якого $\{1, \ldots, N\} \subset f^{-1}(\{1, \ldots, M\})$. Таке вкладення означає наступне: члени $a_1, \ldots, a_N$ включені серед членів $b_1, \ldots, b_M$. Із урахуванням цього та того факту, що всі члени ряда невід'ємні, маємо $\sum_{k=1}^{N} a_k \le \sum_{j=1}^{M} b_j$.

Нехай маємо $m > M$, тоді звідси $\sum_{k=1}^{N} a_k \le \sum_{j=1}^{m} b_j \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Маючи додатково нерівність вище, отримаємо оцінку $0 \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{j=1}^{m} b_j < \varepsilon$. Залишилося спрямувати $m \to \infty$ – отримаємо оцінку $0 \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{j=1}^{\infty} b_j \le \varepsilon < 2\varepsilon$. Оскільки це виконано при всіх $\varepsilon > 0$, то тоді $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

II. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – довільний ряд.

Зафіксуємо перестановочний ряд $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$. Тоді $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^+, \sum_{m=1}^{\infty} b_m^-$ – перестановочні ряди для $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.
Оскільки ці ряди невід'ємні, то для них маємо $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Отже, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ також буде абсолютно збіжним рядом, при цьому
$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=1}^{\infty} b_m^+ - \sum_{m=1}^{\infty} b_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$ ■

Example 4.4.5 Обчислити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.
Цілком зрозуміло, що це збіжний ряд, (за д'Аламбером), причому абсолютно. Отже, ми можемо переставляти члени ряду, оскільки від цього сума не зміниться за теоремою вище.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots =$$
$$\begin{aligned} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} & + \frac{1}{2^3} + \ldots \\ + \frac{1}{2^2} & + \frac{1}{2^3} + \ldots \\ & + \frac{1}{2^3} + \ldots \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

5 Функціональні ряди

5.1 Функціональні послідовності

Definition 5.1.1 **Функціональною послідовністю** назвемо послідовність $\{f_n(x), n \geq 1\}$, всі функції задані на одній множині A.

Definition 5.1.2 Функція $f(x)$, що задана теж на множині A, називається **поточковою границею** функціональної послідовності $\{f_n(x), n \geq 1\}$, якщо

$$\forall x \in A : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Example 5.1.3 Розглянемо послідовність $\left\{ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}, n \geq 1 \right\}$ на $[0,5]$.
Тоді $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x} = \dfrac{x}{\dfrac{1}{n} + 1 + \dfrac{x}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x = f(x)$.

Remark 5.1.4 Поточкова збіжність дала змогу створити нову функцію $f(x)$, збираючи всі точки $x \in A$. Додатково зазначу, що в кожній точці $x \in A$ виникає числова послідовність, яка має єдину границю при збіжності - тому наша функція $f(x)$ є єдиною такою.

Definition 5.1.5 Функція $f(x)$ називається **рівномірною границею** функціональної послідовності $\{f_n(x), n \geq 1\}$ на множині A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Позначення: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$.

Corollary 5.1.6 $f(x)$ - рівномірна границя послідовності $\{f_n(x), n \geq 1\}$ на $A \iff$
$\iff \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0, n \to \infty$.
Дійсно, $\forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

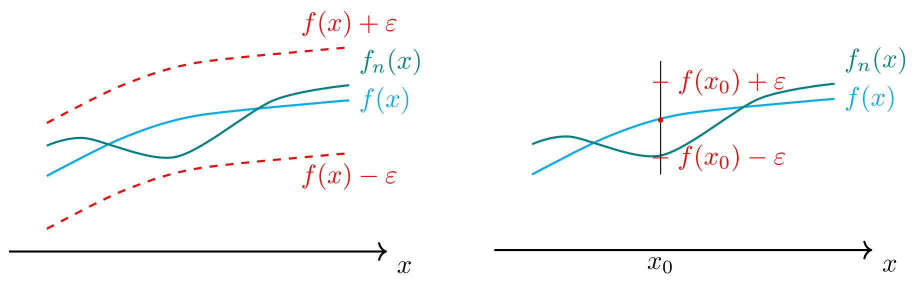
Proposition 5.1.7 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ - послідовність на A. Відомо, що $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$ на множині A. Тоді $\forall x \in A : f_n(x) \to f(x), n \to \infty$.

Proof.
За умовою, $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \implies f_n(x) \to f(x), n \to \infty$. ■

Corollary 5.1.8 Рівномірно збіжна послідовність має єдину рівномірну границю.

Remark 5.1.9 Таким чином, єдиний кандидат на рівномірну збіжність послідовність $\{f_n, n \geq 1\}$ - це сама функція f, що була отримана в результаті поточкової збіжності.

Example 5.1.10 Розглянемо послідовність $\left\{ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}, n \geq 1 \right\}$ на $[0,5]$.
Маємо $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x} = \dfrac{x}{\dfrac{1}{n} + 1 + \dfrac{x}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x = f(x)$.
Також $\sup\limits_{x\in[0,5]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,5]} \dfrac{x+x^2}{1+n+x} \boxed{=}$
Розглянемо функцію $h(x) = \dfrac{x+x^2}{1+n+x}$ на $[0,5]$. Знайдемо похідну:
$h'(x) = \dfrac{(1+2x)(1+n+x) - x - x^2}{(1+n+x)^2} = \dfrac{1+n+2x+2nx+x^2}{(1+n+x)^2} > 0$.
Отже, h - строго монотонно зростає. Тому найбільше значення досягається при $x = 5$.
$\boxed{=} \dfrac{5+25}{1+n+5} = \dfrac{30}{6+n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Таким чином, $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \to \infty$.



Ліворуч - рівномірна збіжність. Праворуч - поточкова збіжність.

Тепер найголовніше питання, а для чого власне нам потрібна рівномірна збіжність, чому не достатньо поточкової збіжності. Одну з відповідей на це питання дає такий приклад.

Example 5.1.11 Розглянемо послідовність $\{f_n(x) = x^n, n \geq 1\}$ на множині $[0, 1]$. Тоді маємо:
$f_n(x) = x^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} = f(x).$

$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \begin{cases} 0, & x = 1 \\ x^n, & x \in [0,1) \end{cases} = 1.$
В загальному випадку, $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \not\to 0$, а тому можемо сказати, що $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x), n \to \infty$.

Найголовніше з цього прикладу, що $f_n \in C([0, 1])$, проте $f \notin C([0, 1])$, а хотілось би. Саме тому нам потрібні рівномірні збіжності.

Але перед цим надамо деякі нові поняття та певні критерії для зручності.

Definition 5.1.12 Нормою функції $f(x)$ на множині A назвемо таке число:

$$||f|| = \sup_{x\in A} |f(x)|$$

Proposition 5.1.13 Властивості
Задані функції f, g на множині A. Тоді справедливо наступне:
1) $||f|| \geq 0$;
2) $||f|| = 0 \iff f(x) = 0, \forall x \in A$;
3) $||\lambda f|| = |\lambda| \cdot ||f||, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
4) $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$;
5) $|||f|| - ||g||| \leq ||f - g||$.

Proof.
1), 3) зрозуміло.
2) $||f|| = 0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in A} |f(x)| = 0 \Rightarrow 0 \leq |f(x)| \leq 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.
В зворотньому напрямку все зрозуміло.
4) $||f + g|| = \sup\limits_{x\in A} |f(x) + g(x)| \leq \sup\limits_{x\in A}(|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup\limits_{x\in A} |f(x)| + \sup\limits_{x\in A} |g(x)| = ||f|| + ||g||$.
5) *Вказівка:* $||f|| \leq ||f - g||$ та $||g|| \leq ||g - f||$. ■

Remark 5.1.14 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \to \infty \iff ||f_n - f|| \to 0, n \to \infty$

Тепер буде нам набагато простіше розписувати, що таке рівномірна збіжність.

Theorem 5.1.15 Критерій Коші
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$ на $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : ||f_n - f_m|| < \varepsilon$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$ на A

Тоді $||f_n - f|| \to 0, n \to \infty \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \begin{matrix} ||f_n - f|| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ ||f_m - f|| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$

$\implies ||f_n - f_m|| = ||f_n - f + f - f_m|| \leq ||f_n - f|| + ||f_m - f|| < \varepsilon.$

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : ||f_n - f_m|| < \varepsilon \implies \forall x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$
Якщо зафіксувати точку $x_0 \in A$, то отримаємо фундаментальну послідовність $\{f_n(x_0), n \geq 1\} \implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.
Якщо $m \to \infty$, то маємо, що $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Оскільки це може бути $\forall x_0 \in A$, то тоді $||f_n - f|| < \varepsilon \implies f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$ на A. ■

Theorem 5.1.16 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ - послідовність на множині A та $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$.
Відомо, що $\forall n \geq 1 : \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = c_n$, де $x_0 \in \mathbb{R}$ - гранична точка A. Тоді послідовність $\{c_n, n \geq 1\}$ - збіжна, а також $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Proof.
Оскільки $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$, то за критерієм Коші,
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon \implies \forall x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$
Якщо $x \to x_0$, то отримаємо, що $|c_n - c_m| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$. Тоді за критерієм Коші, $\{c_n, n \geq 1\}$ - збіжна, тобто $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.
Лишилось довести, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.
Оскільки $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$, тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n, m \geq N_1 : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Оскільки $c_n \to c$, $n \to \infty$, то тоді для такого самого $\varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n \geq N_2 : |c_n - c| < \varepsilon$.
Зафіксуємо $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді $\lim\limits_{x\to x_0} f_N(x) = c_N \implies \exists \delta : \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \implies |f_N(x) - c_N| < \varepsilon$.
$\implies |f(x) - c| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - c_N + c_N - c| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_N(x) - c_N| + |c_N - c| < 3\varepsilon.$
Остаточно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. ■

Corollary 5.1.17 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ - послідовність на множині A та $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$.
Відомо, що $\forall n \geq 1 : f_n(x) \in C(A)$. Тоді $f(x) \in C(A)$, а також $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Theorem 5.1.18 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ - послідовність на множині $[a, b]$ та $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$.
Відомо, що $\forall n \geq 1 : f_n(x) \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$, а також $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Proof.
Маємо $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$.
Зокрема $\forall x \in [a, b] : |f_N(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} \implies f_N(x) - \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$.
Тоді $\forall k = 1, \ldots, n$ виконуються нерівності:
$m_k(f) \geq f_N(x) - \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} \geq m_k(f_N) - \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$.
$M_k(f) \leq f_N(x) + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq M_k(f_N) + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$.
Звідси випливає, що $M_k(f) - m_k(f) \leq M_k(f_N) - m_k(f_N) + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Оскільки $f_N \in \mathcal{R}([a, b])$, то $\exists \tau : U(f_N, \tau) - L(f_N, \tau) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$U(f, \tau) - L(f, \tau) = \sum_{k=1}^{n} (M_k(f) - m_k(f))\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(M_k(f_N) - m_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) \Delta x_k =$$
$$= (U(f_N, \tau) - L(f_N, \tau)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon \implies f \in \mathcal{R}([a, b]).$$

Для доведення рівності зробимо таку оцінку та прямування:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b f_n(x) - f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b ||f - f_n||\,dx =$$
$$= ||f - f_n||(b-a) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

Theorem 5.1.19 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ - послідовність на множині $[a,b]$. Відомо, що:
1) $\exists x_0 \in [a,b] : \{f_n(x_0), n \geq 1\}$ - збіжна послідовність;
2) $\forall n \geq 1 : f_n$ - диференційована на $[a,b]$;
3) $\{f'_n, n \geq 1\}$ - рівновірно збіжна послідовність на $[a,b]$.
Тоді $\{f_n, n \geq 1\}$ - рівномірно збіжна послідовність на $[a,b]$. Звідси можна визначити функцію $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, тоді f - диференційована на $[a,b]$, а також $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$.

Proof.
$\{f'_n\}$ рівномірно збіжна на $[a,b] \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n,m \geq N_1 : \forall x \in [a,b] : |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon$.
$\{f_n(x_0)\}$ збіжна $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n,m \geq N : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$.
Позначимо $\varphi_{n,m}(x) = f_n(x) - f_m(x)$. Тоді ми маємо такі нерівності:
$|\varphi'_{n,m}(x)| < \varepsilon \qquad |\varphi_{n,m}(x_0)| < \varepsilon$.
Фіксуємо деяку т. $x \in [a,b]$, а також $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді $\forall n,m \geq N$ і за теоремою Лагранжа: $\varphi_{n,m}(x) - \varphi_{n,m}(x_0) = \varphi'_{n,m}(\xi)(x - x_0)$, причому $\xi \in (x, x_0)$ або (x_0, x).
$\implies |f_n(x) - f_m(x)| = |\varphi_{n,m}(x)| = |\varphi_{n,m}(x) - \varphi_{n,m}(x_0) + \varphi_{n,m}(x_0)| \leq |\varphi_{n,m}(x_0)| + |\varphi'_{n,m}(\xi)||x - x_0| <$
$< \varepsilon + (b-a)\varepsilon = (b - a + 1)\varepsilon$.
Таким чином, ми довели критерієм Коші, що $\{f_n\}$ рівномірно збіжна на $[a,b]$. Зокрема звідси визначаємо функцію (як в теоремі) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Далі беремо будь-яку точку $x_{00} \in [a,b]$. Покажемо, що f в цій точці диференційована.
Маємо $f'_n(x_{00}) = \lim\limits_{x\to x_{00}} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_{00})}{x - x_{00}}$. Позначимо $\psi_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(x_{00})}{x - x_{00}}$, $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_{00})}{x - x_{00}}$.
$|\psi_n(x) - \psi(x)| = \dfrac{1}{|x - x_{00}|} |f_n(x) - f_n(x_{00}) - f(x) + f(x_{00})| = \dfrac{1}{|x - x_{00}|} |\varphi_{n,\infty}(x) - \varphi_{n,\infty}(x_{00})| =$
$\boxed{=} \dfrac{1}{|x - x_{00}|} |\varphi'_{n,\infty}(\xi)||x - x_{00}| = |\varphi'_{n,\infty}(\xi)| \boxed{<} \varepsilon$.
Рівність $\boxed{=}$ за Лагранжем, причому $\xi \in (x, x_{00})$ або (x_{00}, x); $\boxed{<}$ за пунктом 3) теореми.
Тоді $\psi_n(x) \rightrightarrows \psi(x), n \to \infty$ на $[a,b] \setminus \{x_{00}\}$. А оскільки $\psi_n \in C([a,b] \setminus \{x_{00}\})$, то звідси
$\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$. ■

Theorem 5.1.20 Теорема Діні
Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ - монотонна послідовність на множині $[a,b]$, причому $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Відомо, що $\forall n \geq 1 : f_n \in C([a,b])$ та $f \in C([a,b])$. Тоді $f_n \rightrightarrows f, n \to \infty$ на $[a,b]$.

Proof.
Ми припустимо, що $\{f_n(x), n \geq 1\}$ - монотонно зростає, бо для спадної майже аналогічно. Оскільки також $f_n(x) \to f(x)$, то звідси в силу монотонності $f_n(x) \leq f(x)$.
Тепер розглянемо функцію $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$. За умовою, $r_n \in C([a,b])$, далі $\{r_n(x), n \geq 1\}$ - монотонно спадає, а також $r_n(x) \to 0$. Зараз необхідно довести, що $r_n(x) \rightrightarrows 0$.
Нехай $x_0 \in [a,b]$, тоді $r_n(x_0) \to 0 \implies \forall x \in [a,b] : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : r_N(x_0) < \varepsilon$. $r_N \in C([a,b])$, зокрема неперервна в т. x_0, тому $\exists \delta : \forall x \in [a,b] : |x - x_0| < \delta \implies |r_N(x) - r_N(x_0)| < \varepsilon$. Звідси та з попередньої нерівності випливає, що $r_N(x) < 2\varepsilon$, і це виконано в $U_\delta(x_0) \cap [a,b]$.
Відрізок $[a,b]$ можна покрити скінченною кількістю інтервалів за лемою Гейне-Бореля, тобто в нашому випадку знайдуться точки $x_1, \dots, x_k \in [a,b]$, для яких знайдуться номера $N_1, \dots, N_k$, а також околи, які покриють відрізок.
Встановимо $N = \max\{N_1, \dots, N_k\}$. Якщо взяти довільне $y \in [a,b]$, то знайдеться окіл т. $x_i, i = \overline{1,k}$, де справедлива нерівність $r_N(y) < \varepsilon$. Не забуваємо, що в нас спадна послідовність.
Отже, $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall y \in [a,b] : r_n(y) < r_N(y) < \varepsilon$.
Таким чином, $r_n(x) \rightrightarrows 0$, що призводить до результату теореми Діні. ■

5.2 Функціональні ряди

Definition 5.2.1 Функціональним рядом називають суму членів функціональної послідовності $\{a_n(x), n \geq 1\}$:

$$a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

Частковою сумою даного ряда називають суму перших k функцій:

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_k(x)$$

В такому випадку в нас виникає функціональна послідовність часткових сум $\{S_k(x), k \geq 1\}$.
Якщо така послідовність збігається в т. x_0, то ряд є **збіжним** в т. x_0 та **сума** цього ряду дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = \lim_{k\to\infty} S_k(x_0) = S(x_0)$$

Інакше - **розбіжним**.
Якщо ряд збігається $\forall x \in B$, то B називають **областю збіжності**

Якщо ряд абсолютно збігається $\forall x \in B$, то B називають **областю абсолютної збіжності**

Якщо ряд умовно збігається $\forall x \in B$, то B називають **областю умовної збіжності**

Example 5.2.2 Дослідити на збіжність ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Для початку перевіримо на абсолютну збіжність, для цього ми досліджуємо $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|$. Застосуємо ознаку Даламбера:
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}(1+x^{2n})|}{|(1+x^{2n+2})x^n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n+2}}\right| =$
$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n+2}} + 1}\right| = \frac{1}{|x|}$ при $|x| > 1$.
$= |x|$ при $|x| < 1$.
$= 1$ при $|x| = 1$.
Отже, при $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ в перших двох випадках, тобто при $|x| \neq 1$. Це означає збіжність.
При $|x| = 1 \implies x = \pm 1$ треба додатково дослідити.
$\displaystyle x = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+1} = +\infty \implies$ розбіжний.
$\displaystyle x = -1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+1}$ - розбіжний, оскільки $\displaystyle\nexists \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2}$.
Таким чином, область абсолютної збіжності $B_{abs} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$; область умовної збіжності $B_{cond} = \emptyset$.

Definition 5.2.3 Якщо послідовність часткових сум $\{S_k(x), k \geq 1\}$ збігається рівномірно на множині A, то ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ називають **рівномірно збіжним** на A.

Theorem 5.2.4 Критерій Коші
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - рівномірно збіжний на множині $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left\|\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x)\right\| < \varepsilon$.
Випливає з критерію Коші рівновірної збіжності функціональних послідовностей.

Corollary 5.2.5 Необхідна умова рівномірної збіжності
Задано $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - рівномірно збіжний на A. Тоді $a_k(x) \rightrightarrows 0, k \to \infty$ на A.
Вказівка: критерій Коші при $p = 1$.

Theorem 5.2.6 Мажорантна ознака Вейєрштрасса
Задано $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - ряд на множині A. Відомо, що:

1) $\exists\{c_n, n \geq 1\} : \forall n \geq 1 : \forall x \in A : |a_n(x)| \leq c_n$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ - збіжний. Його ще називають **мажорантним рядом**.

Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збігається рівномірно на множині A.

Proof.

За критерієм Коші, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ - збіжний $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} c_n \right| < \varepsilon$.

Тоді $\forall x \in A : \left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right| \leq \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} |a_n(x)| \leq \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} c_n < \varepsilon$.

Тому за критерієм Коші, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - рівномірно збіжний на множині A. ■

Example 5.2.7 Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$.

Оскільки $\left| \dfrac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, причому це виконано завжди, а мажорантний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ - збіжний, то за ознакою Вейєрштрасса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ - збіжний рівномірно на $\mathbb{R}$.

Theorem 5.2.8 Ознаки Діріхле та Абеля

Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ - ряд на множині A.

Нехай виконано один з двох блок умов:

$\sum\limits_{n=1}^{k} a_n(x)$ - рівномірно обмежена на A	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - збіжний рівномірно на A
$\{b_n(x), n \geq 1\}$ - монотонна та $b_n(x) \overset{\rightarrow}{\rightarrow} 0$ на A	$\{b_n(x), n \geq 1\}$ - монотонна та рівномірно обмежена на A
ознаки Діріхле	*ознаки Абеля*

Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ - збіжний рівномірно на множині A.

Доводиться так само, як було в числових рядах.

Example 5.2.9 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^\alpha}$, якщо $0 < \alpha \leq 1$.

Аналогічними міркуваннями як в **Ex. ???** ми можемо отримати таку формулу:

$\sum\limits_{n=1}^{k} \sin nx = \dfrac{\sin\left(\dfrac{k+1}{2} x\right)}{\sin \dfrac{x}{2}} \sin \dfrac{kx}{2}$ за умовою, що $\sin \dfrac{x}{2} \neq 0 \implies x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Тоді $\left| \sum\limits_{n=1}^{k} \sin nx \right| \leq \dfrac{1}{\left| \sin \dfrac{x}{2} \right|} \leq \dfrac{1}{C}$, за умовою, що розглядається область $[a, b] \subset (2\pi m, 2\pi(m+1))$.

Ну й також $\dfrac{1}{n^\alpha}$ - монотонна та рівномірно н.м. (тому що від x не залежить) на $[a, b]$.

Таким чином, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^\alpha}$ збігається рівномірно в будь-якому відрізку $[a, b] \subset (2\pi m, 2\pi(m+1))$.

Розглянемо тепер відрізок $[0, \delta]$, де $\delta > 0$, та покажемо криетрієм Коші, що ряд розбіжний.

Дійсно, $\exists \varepsilon > 0 : \forall K : \exists k > K : \exists p = 2k \geq 1 : \exists x = \dfrac{1}{k} \in [0, \delta]$:

$$\left| \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{\sin \frac{n}{k}}{n^\alpha} \right| \geq \left| \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{\sin 1}{n^\alpha} \right| = \sin 1 \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sin 1 \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{(2k)^\alpha} \geq \sin 1 \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{2k} =$$

$\dfrac{\sin 1}{2} = \varepsilon$.

5.3 Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів

Theorem 5.3.1 Задано $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - рівномірно збіжний на A.

Відомо, що $\forall n \geq 1 : \exists \lim\limits_{x \to x_0} a_n(x) = c_n$, де $x_0 \in \mathbb{R}$ - гранична точка A. Тоді $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ - збіжний, а також $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Proof.

Із умови теореми випливає, що $\forall k \geq 1 : \displaystyle\lim_{x \to x_0} S_k(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{k} a_n(x) = \sum_{n=1}^{k} c_n$. Оскільки ряд - рівномірно збіжний, то тоді $\{S_k(x), k \geq 1\}$ - рівномірно збіжна. Тоді за **Th.???**,
$\displaystyle\lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$. ■

Corollary 5.3.2 Задано $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - рівномірно збіжний на A.
Відомо, що $\forall n \geq 1 : a_n(x) \in C(A)$. Тоді $S(x) \in C(A)$.

Example 5.3.3 Довести, що $\displaystyle\lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Спочатку треба довести рівномірну збіжність ряду $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ в деякому лівому околі т. $x = 1$.

Застосуємо ознаку Абеля при $a_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}, b_n(x) = x^n$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ - збіжна за ознакою Лейбніца, а оскільки вона не залежить від x, то тому ще й рівномірно в околі т. $x = 1$.
x^n - зрозуміло, монотонна та монотонно обмежена, оскільки $|x^n| \leq 1$.
Таким чином, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ - рівномірно обмежена в лівому околі т. $x = 1$.
А далі $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \in C$, а отже, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \in C$, в тому числі в т. $x = 1$.
Таким чином, $\displaystyle\lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n}$.

Theorem 5.3.4 Задано $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - рівномірно збіжний на $[a, b]$.
Відомо, що $\forall n \geq 1 : a_n(x) \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді $S(x) \in \mathcal{R}([a, b])$, а також
$\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n(x)\, dx \right)$.

Proof.

З умови теореми випливає, що $\forall k \geq 1 : S_k(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ як сума інтегрованих функцій.

Оскільки ряд - рівномірно збіжний, то тоді $\{S_k(x), k \geq 1\}$ - рівномірно збіжна. Тоді за **Th. 10.1.?.**, $S(x) \in \mathcal{R}([a, b])$.
Доведемо тепер тотожність:

$\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) dx = \int_a^b \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n(x)\right) dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{k} a_n(x)\right) dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\int_a^b a_n(x)\,dx\right) =$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n(x)\,dx\right).$ ∎

Example 5.3.5 Довести, що $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ для всіх $x \in (-1,1]$.

Розглянемо ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$. Аналогічними міркуваннями (як в попередньому прикладі) ми можемо довести, що ряд збіжний рівномірно на $(-1,1]$. Покладемо деяке число $x>0$. Оскільки $(-1)^n t^n \in \mathcal{R}([0,x])$, то звідси $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \in \mathcal{R}([0,x])$. Таким чином,

з одного боку, $\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$;

із іншого боку, $\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+x)$.

Остаточно отримали, що $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ для всіх $x \in (-1,1]$.

Theorem 5.3.6 Задано $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$. Відомо, що:

1) $\exists x_0 \in [a,b] : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ - збіжний;

2) $\forall n \geq 1 : a_n(x)$ - диференційовані на $[a,b]$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ - рівномірно збіжний на $[a,b]$.

Тоді $S(x)$ - збіжний рівномірно, $S(x)$ - диференційована на $[a,b]$, а також $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$.

Proof.

Маємо, $\{S_k(x), k \geq 1\}$, де $S_k(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n(x)$.

1) $\forall n \geq 1 : a_n$ - диференційовані на $[a,b]$, а тому $\forall k \geq 1 : S_k$ - також диференційована на $[a,b]$.

2) Відомо, що $\exists x_0 \in [a,b]$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ - збіжний, тобто послідовність $\{S_k(x_0), k \geq 1\}$ - збіжна.

3) Маємо $S_k'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n'(x)$, про яку відомо, що $S_k'(x) \rightrightarrows S'(x), k \to \infty$.

Тоді за **Th. ???**, $S_k(x) \rightrightarrows S(x), k \to \infty$, а також

$S'(x) = \displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n(x)\right)' = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x).$ ∎

Example 5.3.7 Знайдемо похідну ряда $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}$ на відрізку $(-1,1]$.

Треба пересвідчитись, що можна це робити диференціювання:

1) $(-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{2^n}$ - всі диференційовані;

2) Якщо $x=1$, то ряд $S(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ - збіжний за ознакою Лейбніца.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}$ - рівномірно збіжний за Абеля.

Отже, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n} \implies xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)$.
Остаточно $S'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, додатково $S'(0) = 0$.

5.4 Степеневі ряди

Definition 5.4.1 Степеневим рядом називаємо ми такий функціональний ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

де $\{a_n, n \geq 0\}$ - числова послідовність.

Theorem 5.4.2 Теорема Коші-Адамара
Задано $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ - степеневий ряд. Нехай $\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$ - **радіус збіжності**. Тоді ряд:
при $|x-x_0| < R$ - збіжний абсолютно;
при $|x-x_0| > R$ - розбіжний;
при $|x-x_0| = R$ - відповіді нема.

Proof.
Скористаємось радикальною ознакою Коші для нашого ряду:
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)|^n} = |x-x_0| \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = q$.
Тоді:
При $q < 1$, тобто $|x-x_0| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$ - збіжний абсолютно;
При $q > 1$, тобто $|x-x_0| > \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$ - розбіжний;
При $q = 1$ - нема відповіді. ■

Corollary 5.4.3 Наслідок із ознаки Даламбера
Задано $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ - степеневий ряд. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ - **радіус збіжності**. Тоді ряд:
при $|x-x_0| < R$ - збіжний абсолютно;
при $|x-x_0| > R$ - розбіжний;
при $|x-x_0| = R$ - відповіді нема.

Proof.
Скористаємось ознакою Даламбера для нашого ряду:
$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$.
Тоді:
При $q < 1$, тобто $|x-x_0| < \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ - збіжний абсолютно;
При $q > 1$, тобто $|x-x_0| > \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ - розбіжний;
При $q = 1$ - нема відповіді. ■

Example 5.4.4 Знайдемо область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{2^n(n+1)}$.
Маємо $a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$, тоді $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n+2)}{n+1} = 2$.
Отже, при $|x-7| < 2 \implies x \in (5,9)$ ряд збіжний абсолютно. Також при $|x-7| > 2 \implies x \in (-\infty, 5) \cup (9, +\infty)$ ряд розбіжний.
А ось в $x = 5, x = 9$ треба додатково обстежити.
При $x = 9$ маємо $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ - розбіжний.

При $x = 5$ маємо $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ - збіжний за Лейбніцем, але умовно.
Отже, область збіжності $B = [5, 9)$.

Theorem 5.4.5 Теорема Абеля
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ - рівномірно збіжний на будь-якому відрізку із області збіжності.

Proof.
Зафіксуємо довільний відрізок $[a, b]$. Будемо розглядати декілька випадків.
1. $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.
Зафіксуємо число $M = \max\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\}$. Звідси $\forall x \in [a, b] : |x - x_0| < M < R$, а тому $|a_n(x - x_0)^n| < |a_n|M^n$.

Розглянемо мажорантний ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n M^n$. Застосуємо ознаку Коші:
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|M^n} = M \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < R \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Отже, цей ряд - збіжний. Тоді за ознакою Вейерштраса, степеневий ряд - збіжний рівномірно на $[a, b]$.

2. $[a, b] \subset [x_0, x_0 + R]$.
Розпишемо ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n$.

Розглянемо випадок, коли ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ - збіжний. Збіжність степеневого ряду проведемо за ознакою Абеля:
$g_n(x) = \left(\dfrac{x - x_0}{R}\right)^n$
Домовились, що $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ - збіжний, причому рівномірно, оскільки не залежить від x.
Послідовність $\left\{g_n(x) = \left(\dfrac{x - x_0}{R}\right)^n, n \geq 1\right\}$ - рівномірно обмежена, оскільки
$\forall x \in [a, b] \subset [x_0, x_0 + R] : |x - x_0| \leq R \Rightarrow \forall n \geq 1 : \left|\dfrac{x - x_0}{R}\right|^n \leq 1$.
А також послідовність є монотонною, тому що $\dfrac{x - x_0}{R} < 1$.
Отже, за Абелем, ряд - рівномірно збіжний на $[a, b]$.

Аналогічно, коли $[a, b] \subset [x_0 - R, x_0]$ за умовою, що $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ - збіжний.

3. $[a, b] \subset [x_0 - R, x_0 + R]$.
Тоді відрізок $[a, b]$ розбивається на $[a, x_*] \cup [x_*, b]$.
На цих відрізках ряд збіжний рівномірно за п. 2. ■

Example 5.4.6 Зокрема ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{2^n(n+1)}$ збіжний рівномірно в будь-якому відрізку із області збіжності $[5, 9)$, у тому числі в тому, що містить початок т. $x = 5$.

А тепер ми позначимо степеневий ряд $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Theorem 5.4.7 $S \in C$ в області збіжності.

Proof.
Візьмемо якусь точку $x_* \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Зафіксуємо деякий відрізок $[a, b] \ni x_*$. На відрізку $[a, b]$ ряд - збіжний рівномірно за теоремою Абеля, члени ряду - неперервні функції. Отже, $S(x) \in C([a, b]) \implies S(x) \in C(\{x_*\})$.
Оскільки т. x_* була довільною, то одразу $S(x) \in C((x_0 - R, x_0 + R))$. ■

Theorem 5.4.8 $S \in \mathcal{R}$ в області збіжності, а також $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-x_0)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$.
Причому радіус збіжності нового степеневого ряду зберігається.

Proof.
На відрізку $[x_0, x_*]$ або $[x_*, x_0]$, де $x_* \in (x_0 - R, x_0 + R)$, степеневий ряд збігається рівномірно за Абелем. Тому $S \in \mathcal{R}([x_0, x_*]$ або $[x_*, x_0])$. Тотожність випливає з цього ж Th. Тепер перевіримо, що радіус збіжності дійсно такий самий. За Коші-Адамара,

$$R_{new} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\dfrac{a_n}{n+1}\right|}} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{|a_n|}} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} |a_n|} = 1 \cdot R = R. \quad \blacksquare$$

Theorem 5.4.9 S - диференційований в області збіжності, а також $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)' =$
$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$. Причому радіус збіжності нового степеневого ряду зберігається.

Proof.
Розглянемо ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$. Радіус збіжності збігається, оскільки

$$R_{new} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Візьмемо якусь точку $x_* \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Нехай відрізок $[a, b] \ni x_*$. На відрізку $[a, b]$ ряд - збіжний рівномірно за теоремою Абеля. Використаємо далі умови для диференціювання:
1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ - збіжний принаймні в одній точці;
2) Всі члени ряду - диференційовані функції;
3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* (x-x_0)^n$ - рівномірно збіжний на $[a, b]$ за Абелем.
Отже, $S(x)$ - диференційований на $[a, b]$, зокрема і в т. x_*. Оскільки т. x_* була довільною, то одразу $S(x)$ - диференційований в $(x_0 - R, x_0 + R)$.
Тому дійсно, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$. $\blacksquare$

Corollary 5.4.10 $S \in C^{\infty}$ в області збіжності.

5.5 Ряди Тейлора

Definition 5.5.1 Функцію f називають **аналітичною** в т. $x_0 \in \mathbb{R}$, якщо в околі т. x_0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Example 5.5.2 Функція $f(x) = \ln(1+x)$ - аналітична на $(-1, 1]$, оскільки $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

Оскільки степеневий ряд - нескінченно-диференційована, то $f \in C^{\infty}$. У такому випадку можемо знайти коефіцієнти:
$f(x_0) = a_0$
$f'(x_0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}|_{x=x_0} = a_1$
$f''(x_0) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}|_{x=x_0} = 2a_2$

$\vdots$

Таким чином, аналітична функція задається **рядом Тейлора**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Remark 5.5.3 Із цього випливає, що аналітична функція задає степеневий ряд рядом Тейлора однозначно.

Remark 5.5.4 Якщо $x_0 = 0$, то ряд Тейлора зазвичай це називають **рядом Маклорена**.

Remark 5.5.5 f - аналітична $\implies f \in C^\infty$. У зворотному випадку не завжди працює.

Example 5.5.6 Зокрема $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Функція $f \in C^\infty(0-R, 0+R)$, але $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \geq 1$.

Якщо допустити розклад функції в ряд Тейлора, то отримаємо $f(x) \equiv 0$, що суперечить початковим умовам.

Theorem 5.5.7 Теорема Тейлора

Задано функцію f та точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Відомо, що

1) $f \in C^{(\infty)}((x_0 - R, x_0 + R))$;

2) $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \geq 1 : \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M^n$.

Тоді f - аналітична в т. x_0, тобто $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ функція розкладеться в ряд Тейлора $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, причому рівномірно збіжний на $(x_0 - R, x_0 + R)$ (при $R = +\infty$ - на множині $\mathbb{R}$).

Proof.

Розкладемо функцію в ряд Тейлора за остачею Лагранжа:

$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$.

Тоді маємо, що

$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right| = \left|\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right| \leq \frac{M^{k+1}}{(k+1)!}R^{k+1}$.

Розглянемо тепер ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!}R^{k+1}$. За ознакою Даламбера, $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{MR}{k+2} = 0 < 1$.

Цей ряд є збіжним. Отже, за необхідною ознакою збіжності, $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!}R^{k+1} = 0$.

Звідси випливає, що

$\sup_{x \in (x_0 - R, x_0 + R)} \left|f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right| \leq \frac{M^{k+1}}{(k+1)!}R^{k+1} \to 0,\ k \to \infty$.

Отримали $\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \overset{\to}{\to} f,\ k \to \infty$

Таким чином, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ - збіжний рівномірно на $(x_0 - R, x_0 + R)$. ■

Example 5.5.8 Маємо функцію $\cos x$. Розглянемо деяку точку $x_0 = 0$, встановимо $R = +\infty$.

$\exists M = 1 : \forall n \geq 1 : \forall x \in \mathbb{R} : |f^{(n)}(x)| = \left|\cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)\right| \leq 1$.

Таким чином, ми можемо розкласти $\cos x$ в ряд Тейлора - отримаємо такий вигляд:

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, x \in \mathbb{R}$.

Основні розклади

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!};\quad x \in \mathbb{R}$
2. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!};\quad x \in \mathbb{R}$
3. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k};\quad x \in \mathbb{R}$
4. $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k;\quad |x| < 1$
5. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k;\quad x \in (-1, 1]$
6. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k;\quad |x| < 1$

Всі решта функцій зазвичай розкладаються вже за основними розкладами функцій.

Example 5.5.9 Розкласти функцію $f(x) = \ln\big(1 + 2x - 8x^2\big)$ в ряд Тейлора.
Зауважимо, що $\ln\big(1 + 2x - 8x^2\big) = \ln(1-2x)(1+4x) = \ln(1-2x) + \ln(1+4x)$.
$\ln(1-2x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-2x)^k = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k$ за умовою $|2x| < 1$.
$\ln(1+4x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (4x)^k = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k} x^k$ за умовою $|4x| < 1$.
Остаточно $f(x) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^k + (-4)^k}{k}\right) x^k$ за умовою $|x| < \frac{1}{4}$.

6 Вступ до $\mathbb{R}^m$

Простір $\mathbb{R}^m$ зберігає в собі **арифметичні вектори** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, причому $\forall j = \overline{1,m} : x_j \in \mathbb{R}$.

Візьмемо довільні вектори $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$. Ми можемо створити операції **додавання** та **множення на скаляр** таким чином:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_m + y_n \end{pmatrix} \qquad \alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Із таким означенням операцій легко доводиться, що $\mathbb{R}^m$ утворює лінійний простір.
Надалі ми ще будемо використовувати **скалярний добуток**, що визначається таким чином:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_my_m$$

Таким чином, $\mathbb{R}^m$ буде утворювати евклідів простір.

6.1 Топологія та принцип аналіза в $\mathbb{R}^m$

Definition 6.1.1 **Нормою** на множині $\mathbb{R}^m$ будемо називати тут таку величину:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$$

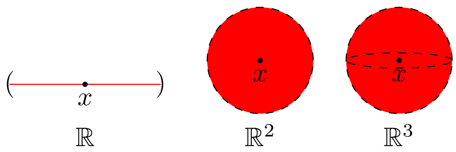
Фактично кажучи, норма - це узагальнення довжини від початку. В нашому випадку початок грає роль $\vec{0}$.
А ось відстань між двома векторами описується таким чином:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Решта означень будуть абсолютно аналогічними, просто тепер буде випадок з векторами.

Definition 6.1.2 **ε-околом** точки $\vec{x}$ будемо називати таку множину:

$$U_\varepsilon(\vec{x}) = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^m : ||\vec{x} - \vec{a}|| < \varepsilon\}$$



Її ще також називають **відкритим шаром** з радіусом ε в центрі т. $\vec{x}$ та позначається як $B(\vec{x}, \varepsilon)$.

Definition 6.1.3 Задамо множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та елемент $\vec{a} \in A$.
Точку $\vec{a}$ називають **внутрішньою**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{a}) \subset A$$

А множина A називається **відкритою**, якщо кожна її точка - внутрішня.

Definition 6.1.4 Задамо множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та елемент $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$.
Точку $\vec{a}$ називають **граничною** множини A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{a} : \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{a})$$

А множина A називається **замкненою**, якщо вона містить всі граничні точки.

Definition 6.1.5 Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та т. $\vec{x} \in A$.
Точка $\vec{x}$ називається **ізольованою**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A = \{\vec{x}\}$$

Також решта тверджень будуть схожі на ті твердження, що були при топології $\mathbb{R}$. Тому доводити я повторно не буду, просто залишу як нагадування.

Proposition 6.1.6 Якщо $\{A_\lambda\}$ - сім'я зліченних відкритих підмножин, то $\bigcup\limits_\lambda A_\lambda$ - відкрита.

Proposition 6.1.7 $\vec{a}$ - гранична точка $A \subset \mathbb{R}^m \iff \forall \varepsilon > 0 : A \cap U_\varepsilon(\vec{a})$ - нескінченна множина.

Proposition 6.1.8 A - відкрита множина $\iff A^c$ - замкнена множина.

Proposition 6.1.9 Якщо $\{A_\lambda\}$ - сім'я зліченних замкнених підмножин, то $\bigcap\limits_\lambda A_\lambda$ - замкнена.

Proposition 6.1.10 Точка $\vec{x} \in A$ - ізольована $\iff \vec{x}$ - не гранична для A.

Proposition 6.1.11 $\mathbb{R}^m, \emptyset$ - одночасно відкриті та замкнені множини.

Proposition 6.1.12 Відкритий шар $B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$ є дійсно відкритим.
Замкнений шар $B[\vec{a}, r] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| \le r\}$ є дійсно замкненим.

Proof.
Нехай $\vec{x} \in B(\vec{a}, r) \implies \|\vec{x} - \vec{a}\| < r$. Встановимо $\varepsilon = r - \|\vec{x} - \vec{a}\|$.
Тоді $\vec{y} \in U_\varepsilon(\vec{x}) \implies \|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon \implies \|\vec{y} - \vec{a}\| = \|\vec{y} - \vec{x} + \vec{x} - \vec{a}\| \le \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon + \|\vec{x} - \vec{a}\| = \varepsilon \implies \vec{y} \in B(\vec{a}, r)$.
Отже, $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset B(\vec{a}, r)$, так для кожної т. $\vec{x} \in B(\vec{a}, r)$. А тому множина $B(\vec{a}, r)$ - відкрита.

$B[\vec{a}, r] = \mathbb{R}^m \setminus B(\vec{a}, r) = \mathbb{R}^m \cap B^c(\vec{a}, r)$ - обидві множини є замкненими. Тому перетин замкнена. ■

Definition 6.1.13 Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$.
Вона називається **обмеженою**, якщо

$$\exists R > 0 : \forall \vec{x} \in A : \|\vec{x}\| \le R$$

Або інакше це можна записати таким чином:

$$\exists R > 0 : A \subset U_R(\vec{0})$$

Example 6.1.14 Зокрема одинична сфера $S^m = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x}\| = 1\}$ буде обмеженою.

6.2 Границя послідовності

Definition 6.2.1 Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ називається **границею послідовності** векторів $\{\vec{a}^{(n)}, n \ge 1\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| < \varepsilon$$

Позначення: $\lim\limits_{n \to \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$.

Theorem 6.2.2 Для послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \ge 1\}$ існує $\lim\limits_{n \to \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a} \iff$
$\iff$ для всіх координат послідовності $\{a_j^{(n)}, n \ge 1\}$ існують $\lim\limits_{n \to \infty} a_j^{(n)} = a_j, j = \overline{1, m}$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N : ||\vec{a}^{(n)} - \vec{a}|| < \varepsilon$.

У нас границя визначається вектором $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$. Тоді $\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_1^{(m)} - a_m)^2}$

$\implies \forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)} - a_j| = \sqrt{(a_j^{(n)} - a_j)^2} < \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_1^{(m)} - a_m)^2} < \varepsilon$.

Отже, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_j^{(n)} = a_j$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall j = \overline{1,m} : \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_j^{(n)} = a_j$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |a_j^{(n)} - a_j| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.
$\Longrightarrow \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \dfrac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$.
Отже, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$. ■

Definition 6.2.3 Послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : ||\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}|| < \varepsilon$$

Theorem 6.2.4 Критерій Коші
$\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - збіжна $\iff$ $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - фундаментальна.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - збіжна, тобто $\forall j = \overline{1,m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ - збіжні.
Тоді всі вони - фундаментальні за критерієм Коші матана $\mathbb{R}$, тобто
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_j : \forall n, k \geq N_j : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.
$\Longrightarrow \exists N = \max\{N_1, \dots, N_m\} : \forall n, k \geq N :$
$\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1^{(k)})^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m^{(k)})^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \dfrac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$.
Отже, наша послідовність - фундаментальна.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - фундаментальна, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| < \varepsilon$.
Тоді $\forall j = \overline{1,m} : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \varepsilon$ (зрозуміло), тобто $\forall j = \overline{1,m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ - фундаментальні.
Отже, вони всі - збіжні, а тому $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ - збіжна. ■

Definition 6.2.5 Послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається **обмеженою**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$$

Definition 6.2.6 Підпослідовність послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається послідовність $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$, де $\{n_l, l \geq 1\}$ - строго зростаюча послідовність в $\mathbb{N}$.

Theorem 6.2.7 Теорема Больцано-Вейєрштрасса
Будь-яка обмежена послідовність векторів має збіжну підпослідовність векторів.

Proof.
Маємо обмежену послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$, тобто $\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$
Тоді кожна координата є обмеженою, оскільки $\forall j = \overline{1,m} : |a_j^{(n)}| \leq \sqrt{\left|a_1^{(n)}\right|^2 + \dots + \left|a_m^{(n)}\right|^2} \leq C$.
Тобто всі послідовності $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ - обмежені.
Розглянемо $\{a_1^{(n)}, n \geq 1\}$ - обмежена. Тоді існує збіжна підпослідовність $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$.
Розглянемо підпослідовність $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$. Вона також є обмеженою, тому всі координатні послідовності - обмежені.
Розглянемо $\{a_2^{(n_l)}, l \geq 1\}$ - обмежена. Тоді існує збіжна підпідпослідовність $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$.
Оскільки підпослідовність $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$ - збіжна, то збіжною буде й підпідпослідовність $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$.
Розглянемо підпідпослідовність $\{\vec{a}^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ - за аналогічними міркуваннями, теж обмежена.
Розглянемо підпідпослідовність $\{a_3^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ - обмежена. Тоді існує збіжна підпідпідпослідовність $\{a_3^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$.
Оскільки підпідпослідовності $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$, $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ - збіжні, то збіжними будуть підпідпідпослідовності $\{a_1^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$, $\{a_2^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$.
$\vdots$
Після m кроків отримаємо підпослідовність $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$, у якій всі координатні послідовності є збіжними. Тоді $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$ - збіжна. ■

Proposition 6.2.8 Задані дві послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}, \{\vec{b}^{(n)}, n \geq 1\}$, такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)} = \vec{b}$. Тоді:
1) $\forall c \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} c\vec{a}^{(n)} = c \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)} + \vec{b}^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} + \lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}, \lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)}\right)$.

Proof.
1),2) *випливає з властивостей границь в* $\mathbb{R}$, *якщо розглянути покоординатну збіжність.*

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_1^{(n)} b_1^{(n)} + \dots + a_m^{(n)} b_m^{(n)}) = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m = (\vec{a}, \vec{b}) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}, \lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)}\right)$.
■

Example 6.2.9 Розглянемо $\vec{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \dfrac{n-1}{n} & \dfrac{2n^2-1}{n^2} & \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}^T$ - послідовність векторів в $\mathbb{R}^4$. Обчислимо її границю.
Ми можемо обчислити покоординатно, згідно з теоріями:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_2^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1.$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_3^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-1}{n^2} = 2.$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_4^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e.$
Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \dfrac{n-1}{n} & \dfrac{2n^2-1}{n^2} & \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & e \end{pmatrix}^T.$

Theorem 6.2.10 Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$.
$\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ гранична точка для $A \iff \exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\vec{x}^0$ - гранична точка для A, тобто $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ - нескінченна.
Зафіксуємо $\varepsilon = \dfrac{1}{n} \implies \forall \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \dfrac{1}{n}$. Тоді $\forall j = \overline{1, m} : |x_j^{(n)} - x_j^0| < \dfrac{1}{n}$.
За теоремою про 2 поліцаїв, отримаємо: $\forall j = \overline{1, m} : x_j^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_j^0$.
Із покоординатної збіжності випливає, що $\vec{x}^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}^0$ для послідовності $\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$. Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \varepsilon$
$\implies \forall n \geq N : \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ - тобто нескінченна $\implies \vec{x}^0$ - гранична точка. ■

Example 6.2.11 Зокрема одинична сфера $S^m = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x}\| = 1\}$ буде замкненою.
Нехай $\vec{\xi} \in S^m$, хочемо показати, що буде вона граничною.
Розглянемо послідовність $\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset S^m$ таким чином:
$x_1^{(n)} = \xi_1 + \dfrac{1}{n}$, починаючи з деякого номера при $\xi_1 \neq 1$ $\qquad x_1^{(n)} = \xi_1 - \dfrac{1}{n}$ при $\xi_1 = 1$
$x_2^{(n)} = \xi_2$
$\vdots$
$x_{m-1}^{(n)} = \xi_{m-1}$
$x_m^{(n)} = \sqrt{1 - \left(x_1^{(n)}\right)^2 - \dots - \left(x_{m-1}^{(n)}\right)^2}.$
Зауважимо, що $\forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{\xi}$, а також $\vec{x}^{(n)} \to \vec{\xi}$ при $n \to \infty$.
Тепер розглянемо $\vec{\xi} \notin S^m$, тобто звідси $\left[\begin{array}{l} \|\xi\| < 1 \\ \|\xi\| > 1 \end{array}\right.$.
!Припустимо, що $\vec{\xi}$ - гранична точка для S^m. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{x} \in S^m : \vec{x} \neq \vec{\xi} : \|\vec{x} - \vec{\xi}\| < \varepsilon$.

У випадку $\|\vec{\xi}\| > 1$ ми маємо $1 < \|\vec{\xi}\| = \|\vec{\xi} - \vec{x} + \vec{x}\| \leq \|\vec{\xi} - \vec{x}\| + \|\vec{x}\| < 1 + \varepsilon$.
Оскільки виконано $\forall \varepsilon > 0$, то звідси $\|\vec{\xi}\| = 1$, що неможливо.
У випадку $\|\vec{\xi}\| < 1$ ми маємо $\varepsilon > \|\vec{x} - \vec{\xi}\| \geq |\|\vec{x}\| - \|\vec{\xi}\|| = |1 - \|\vec{\xi}\|| = 1 - \|\vec{\xi}\| > 0 \implies \varepsilon > 1 - \|\vec{\xi}\| > 0$.
Оскільки виконано $\forall \varepsilon > 0$, то звідси $\|\vec{\xi}\| = 1$, що неможливо.
У двох випадках отримали суперечність!
Таким чином, ми довели, що S^m - закмнена множина.

6.3 Функція від декількох змінних. Границя функції

Ми будемо розглядати функції вигляду $f : A \to \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^m$. Тобто ця функція має m аргументів, а повертає деяке дійсне число.

Example 6.3.1 Розглянемо такі приклади:
1.Маємо функцію $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\} \to \mathbb{R}$, що задана як $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;
2.Маємо функцію $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, що задана як $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m) = x_1 x_2^2 \dots x_m^m$.

Definition 6.3.2 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A.
Число a називається **границею функції** $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$ **в т.** $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - a| < \varepsilon \text{ - def. Коші}$$
$$\forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\vec{x}^{(n)}) = a \text{ - def. Гейне}$$

Позначення: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = a$.

Theorem 6.3.3 Означення Коші $\iff$ Означення Гейне.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Proposition 6.3.4 Арифметичні властивості
Задані функції $f, g : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A. Відомо, що $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = a, \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} g(\vec{x}) = b$. Тоді:
1) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} cf(\vec{x}) = ca, \forall c \in \mathbb{R}$;
2) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = a + b$;
3) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x})g(\vec{x}) = ab$;
4) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \dfrac{a}{b}$ при $b \neq 0$.
Всі вони випливають із арифметичних послідовностей та означення Гейне.

Theorem 6.3.5 Критерій Коші
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A.
$\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \vec{x_1}, \vec{x_2} \in A : ||\vec{x_1} - \vec{x_2}|| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2})| < \varepsilon$.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Example 6.3.6 Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)} \left(\dfrac{y}{x} + \cos(xy)\right)$. Можна позначати це інакше: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to\pi}} \left(\dfrac{y}{x} + \cos(xy)\right)$.
$\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)} \left(\dfrac{y}{x} + \cos(xy)\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)} \dfrac{y}{x} + \lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)} \cos(xy) = \dfrac{\pi}{1} + \cos\pi = \pi - 1$.

Example 6.3.7 Покажемо, що не існує границі $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.
Для доведення скористаємось означенням Гейне. Візьмемо дві послідовності:
$\{(x_n, y_n), n \geq 1\}$ так, щоб $y_n = x_n$, а також $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Тоді $\dfrac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \dfrac{2x_n^2}{2x_n^2} \to 1$.
$\{(x_n, y_n), n \geq 1\}$ так, щоб $y_n = -x_n$, а також $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Тоді $\dfrac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \dfrac{-2x_n^2}{2x_n^2} \to -1$.
Можна конкретизувати, сказати $x_n = \dfrac{1}{n}$, а можна цього не робити, напевно. У будь-якому випадку, ми показали, що не існує границі.
Тобто ми прямували до точки $(0,0)$ з двох сторін: вздовж прямої $y = x$ та $y = -x$.

Theorem 6.3.8 Границя в полярних координатах
Задано функцію $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Припустимо, що $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = F_1(\rho)F_2(\varphi)$, причому $\lim\limits_{\rho\to 0} F_1(\rho) = 0$ та $F_2(\varphi)$ - обмежена. Тоді $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Proof.
Маємо $\lim\limits_{\rho\to 0} F_1(\rho) = 0 \implies \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta : \forall\rho : |\rho| < \delta \implies |F_1(\rho)| < \varepsilon$.
Також F_2 - обмежена, тобто $\exists M > 0 : \forall\varphi : |F_2(\varphi)| < M$.
Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді існує таке $\delta > 0$, що $\forall(x,y)$, якщо $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2} = |\rho| < \delta$, то звідси $|f(x,y)| = |f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)| = |F_1(\rho)||F_2(\varphi)| < M\varepsilon$.
Таким чином, дійсно, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. ■

Example 6.3.9 Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.
Маємо $x = \rho\cos\varphi$ та $y = \rho\sin\varphi$. Тоді функція $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2} = \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$.
Ми змогли розбити на функції $F_1(\rho) = \rho^2 \xrightarrow{\rho\to 0} 0$ та $F_2(\varphi) = \cos^2\varphi\sin^2\varphi$ - обмежена, бо $|F_2(\varphi)| \leq 1$.
Таким чином, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 0$.

Remark 6.3.10 Якщо так станеться, що для двох різних кутів θ при $\rho \to 0$ ми отримаємо два різних ліміта, то тоді $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Definition 6.3.11 Число $L = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ називається **ітераційною границею**, якщо $\exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = g(y)$.
Аналогічно визначається $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

Останнє дається для загального знання, таке ми точно використовувати не будемо. Тут надто багато плутанини з ними.

Example 6.3.12 Маємо функцію $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}$.
Якщо шукати $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, то вона не існує, тому що при фіксованому x ми маємо порахувати границю від $\sin\dfrac{1}{y}$, якого не існує. Також не існує $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ за аналогічними міркуваннями.
Проте! Подвійна границя $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Дійсно,
$\left|x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq \left|x\sin\dfrac{1}{y}\right| + \left|y\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon$.
Остання оцінка отримана в силу $\|(x,y)\| < \delta$, кладемо $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ - границя доведена.

Example 6.3.13 Маємо функцію $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \qquad \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$.
Проте! Подвійної границі $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує. Дійсно, якщо $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$, то тоді
$f(x,y) = \dfrac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2} = \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi$.
Для різного напрямку кривої отримаємо різні границі, а тому не існує. Цим активно зловживати не будемо.

Remark 6.3.14 Окремо можуть виникнути границі вигляду $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y)$. У такому разі необхідні уточнення, що мається увазі під цим лімітом. Або дивитись на контекст задачі.

Example 6.3.15 Маємо $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$. У даному контексті мається на увазі, що x, y робимо скільки завгодно великими одночасно.

Маємо ось таку оцінку: $0 \leq (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = \dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}} \leq \dfrac{(x+y)^2}{e^{x+y}}$.
Оскільки $x>0, y>0$ в силу характеру прямування, то ця нерівність справедлива. Цілком зрозуміло, що при $x\to+\infty, y\to+\infty$ одночасно маємо $x+y\to+\infty$, а тому $\dfrac{(x+y)^2}{e^{x+y}} \to 0, x+y\to+\infty$.
Таким чином, $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)} = 0$.

6.4 Неперервність функції

Definition 6.4.1 Задано функцію $f: A\to\mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка.
Функція f називається **неперервною в т.** $\vec{x}^0$, якщо $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0)$. В будь-якій ізольованій точці $\vec{x}^0$ функція f також неперервна.
Функція f називається **неперервною на множині** A, якщо в $\forall \vec{x}\in A: f$ - неперервна.

Remark 6.4.2 Можна було спочатку дати означення через ε-δ мову, а згодом прийти до еквівалентного означення, як в мат. аналізі $\mathbb{R}$, однак тут все цілком аналогічно.

Proposition 6.4.3 Задані функції $f,g: A\to\mathbb{R}$ та $\vec{x}^0\in A$ - гранична точка. Відомо, що f,g - неперервні в т. $\vec{x}^0$. Тоді:
1) cf - неперервна в т. $\vec{x}^0, \forall c\in\mathbb{R}$;
2) $f+g$ - неперервна в т. $\vec{x}^0$;
3) fg - неперервна в т. $\vec{x}^0$;
4) $\dfrac{f}{g}$ - неперервна в т. $\vec{x}^0$, якщо $g(\vec{x}^0)\neq 0$.
Випливають з властивостей границь функцій та неперервності.

Theorem 6.4.4 Наступні функції є неперервними на своїй множині A:
1) $f(\vec{x}) = const$ - константа, $A=\mathbb{R}^m$;
2) $f(\vec{x}) = x_j, j=\overline{1,m}$ - координата, $A=\mathbb{R}^m$;
3) $P(x_1,x_2,\dots,x_m) = \sum\limits_{\substack{0\leq k_1\leq n_1\\ 0\leq k_2\leq n_2\\ \dots\\ 0\leq k_m\leq n_m}} a_{k_1k_2\dots k_m}\cdot x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_m^{k_m}$ - многочлен від m змінних, $A=\mathbb{R}^m$;
4) $R(x_1,\dots,x_m) = \dfrac{P(x_1,\dots,x_m)}{Q(x_1,\dots,x_m)}$ - раціональна функція від m змінних, $A=\mathbb{R}^m\setminus\{\vec{x}: Q(\vec{x})=0\}$.

Proof.
1) Все зрозуміло.

2) $|f(\vec{x})-f(\vec{x}^0)| = |x_j - x_j^0| < \varepsilon$, тому встановлюється $\delta=\varepsilon$.

3) Безпосередньо випливає з **Prp. ?.4.2.** як сума та добуток функцій 1),2).

4) Безпосередньо випливає з **Prp ?.4.2.** як частка двох функцій 3). ■

Example 6.4.5 Доведемо, що функція $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ неперервна на $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.
Для цього покажемо, що $\sqrt{x^2+y^2}$ - неперервна в деякій точці $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Дійсно,
$|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}| = \dfrac{|x^2+y^2-x_0^2-y_0^2|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \leq \dfrac{|x^2+y^2-x_0^2-y_0^2|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \to 0$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$.
Ми вже знаємо, що $f(x,y)=x^2+y^2$ - неперервна в т. (x_0,y_0), а тому $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0}(x^2+y^2) = x_0^2+y_0^2$, тож вище все правильно.
Отже, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$.
А це й доводить неперервність функції f в будь-якій точці $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

Example 6.4.6 Дослідити на розривність функцію $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.
Точки, де відбувається розрив - це точки $x=-y$. Тобто маємо $(x,y)=(a,-a), a\in\mathbb{R}$ - точка

розриву.

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{3a^2}, & a \neq 0 \\ \infty, & a = 0 \end{cases}.$$

Отже, маємо $(0,0)$ - точка нескінченного розриву та $(a,-a), a \neq 0$ - точка усуненого розриву.

Theorem 6.4.7 Теорема Вейєрштраса 1, 2
Задано множину A - замкнена, обмежена та функція $f : A \to \mathbb{R}$ - неперервна на A. Тоді:
1. f - обмежена на A;
2. $\exists \left[\begin{gathered} \vec{x}^* \in A \\ \vec{x}_* \in A \end{gathered}\right. : \left[\begin{gathered} f(\vec{x}^*) = \max_{\vec{x}\in A} f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}_*) = \min_{\vec{x}\in A} f(\vec{x}) \end{gathered}\right.$.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Definition 6.4.8 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$.
Функція f називається **рівномірно неперервною** на множині A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x_1}, \vec{x_2} \in A : ||\vec{x_1} - \vec{x_2}|| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2})| < \varepsilon$$

Theorem 6.4.9 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ - рівномірно неперервна на A. Тоді вона є неперервною на A.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Theorem 6.4.10 Теорема Кантора
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та A - замкнена, обмежена.
Відомо, що f - неперевна на A. Тоді вона є рівномірно неперервною на A.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

6.5 Символіка Ландау

Definition 6.5.1 Задані функції $f, g : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}$ - гранична точка A.
Функція f називається **О-великою** від функції g в т. $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists L > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies |f(\vec{x})| \leq L|g(\vec{x})|$$

Позначення: $f(\vec{x}) = O(g(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0$.
Функція f називається **о-малою** від функції g в т. $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies |f(\vec{x})| < \varepsilon|g(\vec{x})|$$

Позначення: $f(\vec{x}) = o(g(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0$.

Всі властивості символік Ландау для функції від однієї змінної переходять на функцію від декількох змінних в силу аналогічності доведення.

Example 6.5.2 Зокрема $xy = o(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ при $(x,y,z) \to (0,0,0)$. Дійсно,
$\left| \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right| \leq \dfrac{|x||y|}{\sqrt{x^2}} = |y| \to 0$ при $(x,y,z) \to (0,0,0)$. Отже, $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$.

6.6 Границя та неперервність векторнозначної функції кількох змінних, символіка Ландау

Ми будемо розглядати вектор-функції кількох (або однієї) змінної вигляду $\vec{f}: A \to \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}^m$.

Тобто тепер $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) \end{pmatrix}$.

Example 6.6.1 Маємо деяку функцію $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, що задана таким чином:
$\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$. Або зазвичай це пишуть так: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$.

Definition 6.6.2 Задано функцію $\vec{f}: A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A.
Вектор $\vec{b}$ називається **границею вектор-функції** $\vec{f}(\vec{x})$ **в т.** $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : ||\vec{x} - \vec{x}^0|| < \delta \Rightarrow ||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}|| < \varepsilon \text{ - def. Коші}$$
$$\forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \vec{f}(\vec{x}^{(n)}) = \vec{b} \text{ - def. Гейне}$$

Позначення: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$.

Theorem 6.6.3 Означення Коші $\iff$ Означення Гейне
Все аболютно аналогічно.

Proposition 6.6.4 Задано функцію $\vec{f}: A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A.
$\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{u} \iff \forall j = \overline{1,k} : \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f_j(\vec{x}) = u_j$.
Випливає із означення Гейне та покоординатної збіжності.

Proposition 6.6.5 Арифметичні властивості
Задані функції $\vec{f}, \vec{g}: A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A. Відомо, що
$\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{u}, \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{v}$. Тоді:
1) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} c\vec{f}(\vec{x}) = c\vec{u}, \forall c \in \mathbb{R}$;
2) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(t)) = \vec{u} + \vec{v}$;
3) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} (\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})) = (\vec{u}, \vec{v})$.
Всі вони випливають із векторних послідовностей та означення Гейне.

Remark 6.6.6 У випадку векторної функції $\vec{a}: A \to \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}$, оскільки прямування йде за дійсною множиною, то ми можемо визначти **границю зліва та справа** даної функції. Тут все зрозуміло, як виглядатиме означення.

Example 6.6.7 Знайти границю $\lim\limits_{t\to 0+0} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T$.
За одним твердженням, ми можемо покоординатно шукати границі:
$\lim\limits_{t\to 0+0} \dfrac{\sin 2t}{t} = 2 \qquad \lim\limits_{t\to 0+0} t^t = 1$.
Отже, $\lim\limits_{t\to 0+0} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Definition 6.6.8 Задана функція $f: A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка.
Функція $\vec{f}$ називається **неперервною в т.** $\vec{x}^0$, якщо $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}^0)$.

Remark 6.6.9 Аналогічно сума неперервних функцій - неперервна; множення на скаляр - все одно неперервна. До речі, також скалярний добуток неперервний функцій - теж неперервна.

Remark 6.6.10 Ще тут виконується теорема Вейєрштраса 1, 2 для таких функцій.

Theorem 6.6.11 Задані множини $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^k$
Задані функції $\vec{f}: A \to B$ - неперервна в т. $\vec{x}^0$, $\vec{g}: B \to \mathbb{R}^n$ - неперервна в т. $\vec{f}(\vec{x}^0)$.
Тоді функція $h: A \to \mathbb{R}^n : h(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$ - неперервна в т. $\vec{x_0}$.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Definition 6.6.12 Задані функції $\vec{f}, \vec{g} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка A.
Функція $\vec{f}$ називається **O-великою** від функції $\vec{g}$ в т. $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists L > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x})\| \leq L\|\vec{g}(\vec{x})\|$$

Позначення: $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{O}(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0$.
Функція $\vec{f}$ називається **o-малою** від функції $\vec{g}$ в т. $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x})\| < \varepsilon\|\vec{g}(\vec{x})\|$$

Позначення: $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{o}(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0$.

Corollary 6.6.13 $\vec{f}(\vec{x}) = o(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0 \iff \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}^0} \dfrac{\|\vec{f}(\vec{x})\|}{\|\vec{g}(\vec{x})\|} = 0$.

6.7 Крива в $\mathbb{R}^m$

Definition 6.7.1 **Кривою** в $\mathbb{R}^m$ називають множину значень вектор-функції: $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, причому $\vec{r}$ - неперервна на $[a, b]$:

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$$

Definition 6.7.2 Крива Γ називається **простою**, якщо

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \implies t_1 = t_2 \text{ або } \{t_1, t_2\} = \{a, b\}$$

Крива Γ називається **замкненою**, якщо $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
Просту та замкнену криву називають **жордановою**.

7 Диференційованість

7.1 Для функції із багатьма змінними

Definition 7.1.1 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Функція f називається **диференційованою в т.** $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R} : f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1 \Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{o(||\Delta\vec{x}||)}$$

Тобто диференційованість означає, що поверхня навколо т. $\vec{x}$ дуже схожа на площину, що проходить через т. $\vec{x}$.

Example 7.1.2 Розглянемо функцію $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$ на $\mathbb{R}$. Вона є диференційованою в будь-якій точці (x_0, y_0).
$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 - x_0 y_0 - y_0^2) =$
$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0 y_0 - x_0 \Delta y - y_0 \Delta x - \Delta x \Delta y - y_0^2 - 2y_0 \Delta y - \Delta y^2 - x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2 =$
$= (2x_0 - y_0)\Delta x + (-x_0 - 2y_0)\Delta y + (\Delta x^2 - \Delta x \Delta y - \Delta y^2)$.
Залишилось довести, що $\Delta x^2 - \Delta x\Delta y - \Delta y^2 = o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Дійсно,
$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta x^2 - \Delta x\Delta y - \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2 \sin\varphi\cos\varphi - \rho^2\sin^2\varphi}{\rho} =$
$= \lim\limits_{\rho\to 0} \rho(\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi) = 0$.
Отже, $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (2x_0 - y_0)\Delta x + (-x_0 - 2y_0)\Delta y + \underset{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}{o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)}$.

Proposition 7.1.3 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Функція f - диференційована в т. $\vec{x}^0$. Тоді вона неперервна в т. $\vec{x}^0$.

Proof.
f - диференційована в т. $\vec{x}^0$, тобто $f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{o(||\Delta\vec{x}||)}$.
Або можна це записати інакше:
$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1(x_1 - x_1^0) + \dots + L_m(x_m - x_m^0) + \underset{\vec{x}\to\vec{x}^0}{o(||\vec{x} - \vec{x}^0||)} \implies \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} (f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0))\boxed{=}$
Всі дужки прямують покоординатно до нуля, o-маленьке також, в силу н.м.
$\boxed{=}0 \implies f$ - неперервна в т. $\vec{x}^0$. ■

Definition 7.1.4 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Частинною похідною функції f за змінною x_j в т. $\vec{x}^0$ називають величину:

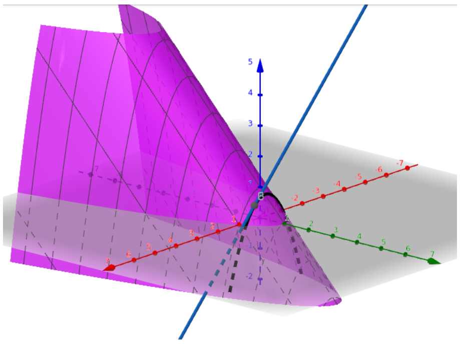
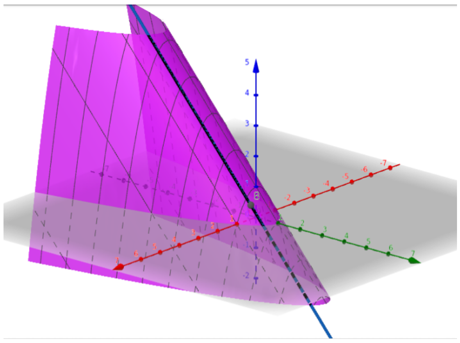
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j}$$

Якщо уважно придивитись на означення, то, насправді, ми просто підставили $x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0$ та отримали функцію $g(x_j) = f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0)$ - функція від одного агрументу x_j - та обчислили похідну цієї функції в т. x_j^0. Отже,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = g'(x_j^0)$$

Example 7.1.5 Маємо функцію $f(x, y) = 1 - x^2 - y$. Знайдемо всі її частинні похідні.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$

Сенс $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ - знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь OX.
Аналогічно $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ - знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь OY.

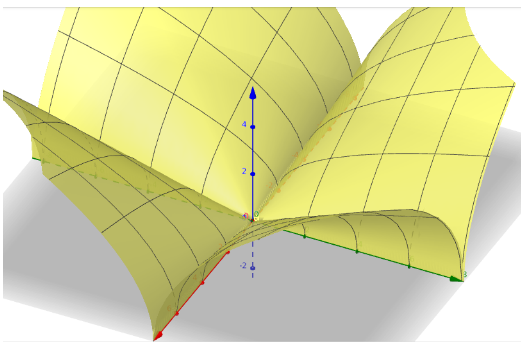
Таких дотичних прямих існують безліч, але про це згодом.

Proposition 7.1.6 Необхнідна умова диференційованості
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Тоді вона має частинні похідні в т. $\vec{x}^0$, причому $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = L_j$.

Proof.
f - диференційована в т. $\vec{x}^0$, тоді $\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R}$:
$f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$.
У окремому випадку, встановити можна $\Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \Delta x_j & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$.
Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \dfrac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j} \overset{f \text{ - диф.}}{=}$
$= \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \dfrac{L_1 \cdot 0 + \dots + L_j \Delta x_j + \dots + L_m \cdot 0 + o(|\Delta x_j|)}{\Delta x_j} = \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \dfrac{L_j \Delta x_j + o(\Delta x_j)}{\Delta x_j} = L_j$. ■

Remark 7.1.7 У зворотному напрямку це не завжди вірно.

Example 7.1.8 Маємо функцію $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Розглянемо цю функції в околі т. $(x_0, y_0) = (0,0)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0$.
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\sqrt{|0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0$.
Тобто в т. (x_0, y_0) функція має частинні похідні. Проте виявляється, що в (x_0, y_0) вона - не диференційована. Дійсно,
$f(\Delta x, \Delta y) = 0\Delta x + 0 \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$, тобто
$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \overset{\text{полярна заміна}}{=} \lim\limits_{\rho \to 0} \sqrt{|\cos\varphi \sin\varphi|}$ - не існує, тому рівність вище не вірна.



Можливо виникне питання, а чи існують інші числа $(L_1, L_2) \neq (0,0)$. Ні. Це випливає з необхідної умови диференційованості.

Виникає тоді інше питання, а коли ми можемо гарантувати диференційованість через існування частинних похідних.

Theorem 7.1.9 Достатня умова диференційованості
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Відомо, що в деякому околі т. $\vec{x}^0$ існують всі частинні похідні в околі т. $\vec{x}^0$, які неперервні в т. $\vec{x}^0$.
Тоді f - диференційована в т. $\vec{x}^0$.

Ми будемо доводити при $m = 2$. Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа

Proof.
Отже, дано $f(x, y)$ та в околі т. (x_0, y_0) існують частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, які неперервні в (x_0, y_0).
Розглянемо приріст аргументу $\Delta x, \Delta y$ так, щоб ми були всередині околу т. (x_0, y_0). Нехай $\Delta x > 0, \Delta y > 0$, для інших все аналогічно.
$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \boxed{=}$
Позначу $h(t) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + t), t \in [0, \Delta y]$. Тоді $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = h(\Delta y) - h(0)$.
h - диференційована на $[0, \Delta y]$, оскільки існує $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, яка неперервна. А тому $h \in C([0, \Delta y])$. Тоді за Лагранжом:
$h(\Delta y) - h(0) = h'(c_1)\Delta y, c_1 \in (0, y)$
$h'(t) = f'_t(x_0 + \Delta x, y_0 + t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + t)$
$\implies h(\Delta y) - h(0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y.$

Аналогічно $g(s) = f(x_0 + s, y_0), s \in [0, \Delta x]$. Тоді $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = g(\Delta x) - g(0) \overset{\text{Th. Лагранжа}}{=}$
$= g'(c_2)\Delta x = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x, c_2 \in (0, \Delta x)$.
Повертаємось до нашої рівності.

$\boxed{=} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x$
Залишилось довести, що
$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) \underset{\Delta x \to 0 \quad \Delta y \to 0}{=} o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)$.
Маємо:
$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) =$
$= \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x \right) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) =$
$= \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \Delta x + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \Delta y$
Якщо $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, то звідси $c_1 \to 0, c_2 \to 0$ та за умовою того, що частинні похідні є неперервними, маємо:
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \overset{\text{позн}}{=} \alpha \to 0$
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \overset{\text{позн}}{=} \beta \to 0$
Далі:
$\left| \dfrac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \overset{\text{К-Б}}{\leq} \left| \dfrac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \to 0 \implies \dfrac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0, \Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$
Остаточно отримуємо:
$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) \underset{\Delta x \to 0 \quad \Delta y \to 0}{=} o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)$.
Тобто звідси f - диференційована в т. (x_0, y_0). ■

Definition 7.1.10 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Похідною функції f в т. $\vec{x}^0$ називається ковектор

$$f'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} (\vec{x}^0)$$

Таким чином, ми можемо визначити лінійний функціонал по $\Delta\vec{x}$ таким чином:
$f'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)\Delta x_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{x}^0)\Delta x_m$.
Тоді означення диференційованої функції f перепишеться ось так:
$f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$.

Proposition 7.1.11 Задані функції $f, g : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Відомо, що f, g - диференційовані в т. $\vec{x}^0$. Тоді:
1) αf - диференційована в т. $\vec{x}^0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, похідна $(\alpha f)'(\vec{x}^0) = \alpha f'(\vec{x}^0)$;
2) $f + g$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$, похідна $(f+g)'(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)$;
3) fg - диференційована в т. $\vec{x}^0$, похідна $(fg)'(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) + f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)$.

Proof.
1) *Зрозуміло.*

2) $(f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) + g(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})) - (f(\vec{x}^0) + g(\vec{x}^0)) = (f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0)) + (g(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - g(\vec{x}^0)) =$
$= f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|) + g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|) = (f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$.

3) $f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})g(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) =$
$= (f(\vec{x}^0) + f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)) \cdot (g(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) \boxed{=}$
Після розкриття дужок ми залишимо лише доданки $(f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x}$ та $(g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x}$.
Ось чому:
$f(\vec{x}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|) \qquad g(\vec{x}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$
$(f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}) \cdot (g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$, тому що, розписавши, побачимо $\Delta x_i \Delta x_j = o(\|\Delta\vec{x}\|)$.
$(f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x})o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|) \qquad (g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x})o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$,
тому що, розписавши, побачимо $\Delta x_j o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$.
$(o(\|\Delta\vec{x}\|))^2 = o(\|\Delta\vec{x}\|)$
Повертаємось до рівності:
$\boxed{=}(f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} + (g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)$. ■

Definition 7.1.12 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Диференціалом функції $f(x)$ **в т.** $\vec{x}^0$ називається такий вираз:

$$df(\vec{x}^0, \Delta\vec{x}) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}$$

Частіше позначають ще диференціал в точці ось так: $df_{\vec{x}^0}$.

Remark 7.1.13 Якщо згадати лінійну алгебру, то $df_{\vec{x}^0} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – це, насправді, лінійний функціонал, де в нас записується ковектор $f'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0) \end{pmatrix}$. І ми маємо:
$df_{\vec{x}^0}(\Delta\vec{x}) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}$.

Як й раніше, аргумент $\Delta\vec{x}$ опускають, а також позначають $\Delta\vec{x} = \vec{dx}$, тобто
$\Delta x_1 = dx_1, \dots, \Delta x_m = dx_m$. Тоді маємо інший вигляд:

$$df(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \vec{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)\, dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{x}^0)\, dx_m$$

Example 7.1.14 Маємо функцію $f(x, y) = 1 - x^2 - y$. Ми вже знайшли $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x, \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$, вони є неперервними в будь-якій точці.
Отже, f - диференційована будь-де. Знадемо тепер диференціал функції. Це дуже просто:
$df(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\, dy = (-2x)\, dx - dy \overset{\text{або}}{=} \begin{pmatrix} -2x & -1 \end{pmatrix} \vec{dr}$.

7.2 Для векторнозначних функцій

Definition 7.2.1 Задано функцію $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Вектор-функція $\vec{f}$ називається **диференційованою в т.** $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists M \in Mat(m \times k) : \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \underset{\Delta\vec{x} \to \vec{0}}{\vec{o}(||\Delta\vec{x}||)}$$

Зараз дізнаємось, що це за матриця $M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix}$ під час доведення твердження.

Proposition 7.2.2 Задано функцію $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
$\vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0 \iff f_1, \dots, f_k$ - диференційовані в т. $\vec{x}^0$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$, тобто $\exists M \in Mat(m \times k) : \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{\vec{o}(||\Delta\vec{x}||)}$.

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(||\Delta\vec{x}||) \\ \vdots \\ \vec{o}(||\Delta\vec{x}||) \end{pmatrix}$$

Із цієї рівності випливає, що $\forall j = \overline{1,k}$:
$f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f_j(\vec{x}^0) = M_{j1}\Delta x_1 + \dots + M_{jm}\Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to 0}{o(||\Delta\vec{x}||)}$.
Це означає, що f_j - диференційована в т. $\vec{x}^0$. Тоді звідси випливає, що:
$M_{j1} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}(\vec{x}^0), \dots, M_{jm} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_m}(\vec{x}^0)$.
В результаті отримаємо ось такий вигляд матриці:

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_k' \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = J(x) = \vec{f}'(\vec{x}^0) \text{ - \textbf{матриця Якобі}}$$

Матриця Якобі описує **похідну** вектор-функції $\vec{f}$ в т. $\vec{x}^0$, тобто $\vec{f}'$ - це лінійний оператор. А якщо матриця буде квадратною, то ми можемо обчислити $\det \vec{f}'(\vec{x}^0)$ - **якобіан**.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $f_1, \dots, f_k$ - диференційовані в т. $\vec{x}^0$. Хочемо довести, що
$\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}^0) - \vec{f}(\vec{x}^0) - M\Delta\vec{x} = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$, але це є правда, тому що:
$\forall j = \overline{1,k}$: f_j - диференційована $\implies f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}^0) - f_j(\vec{x}^0) - f_j'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} = o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$ - виконана покоординатна рівність. ∎

Proposition 7.2.3 Задано функцію $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Відомо, що вектор-функція $\vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$. Тоді вона неперервна в т. $\vec{x}^0$.

Proof.
Дійсно, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \left(M(\vec{x} - \vec{x}^0) + \vec{o}(||\vec{x} - \vec{x}^0||)\right) = 0$, оскільки виконується покоординатна границя. ∎

Proposition 7.2.4 Задані функції $\vec{f}, \vec{g} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Відомо, що $\vec{f}, \vec{g}$ - диференційовані в т. $\vec{x}^0$.
Тоді $\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$, похідна $(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})'(\vec{x}^0) = \alpha\vec{f}'(\vec{x}^0) + \beta\vec{g}'(\vec{x}^0)$.
Випливає з арифметики матриці. Ну тут зрозуміло.

Example 7.2.5 Важливий
Маємо вектор-функцію $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}$. Знайдемо її похідну та якобіан.

$$\vec{f}'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \det \vec{f}'(\vec{x}^0) = \cos\varphi\rho\cos\varphi + \sin\varphi\rho\sin\varphi = \rho.$$

Ще знадобиться, коли будемо шукати подвійні інтеграли.

Proposition 7.2.6 Задані функції $\vec{f} : A \to B$ та $\vec{g} : B \to \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$.
Відомо, що $\vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$ та $\vec{g}$ - диференційована в т. $\vec{y}^0$.
Тоді $\vec{g} \circ \vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$, похідна $(\vec{g} \circ \vec{f})'(\vec{x}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)$.

Lemma 7.2.7 Задано матрицю $A \in Mat(m \times k)$. Тоді $\exists C \geq 0 : \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^m : \|A\vec{h}\| \leq C\|\vec{h}\|$.

Proof.

Дійсно, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \implies A\vec{h} = \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + \dots + a_{1m}h_m \\ \vdots \\ a_{k1}h_1 + \dots + a_{km}h_m \end{pmatrix}$

$\implies \|A\vec{h}\| = \sqrt{(a_{11}h_1 + \dots + a_{1m}h_m)^2 + \dots + (a_{k1}h_1 + \dots + a_{km}h_m)^2} \overset{\text{К-Б}}{\leq}$
$\leq \sqrt{(a_{11}^2 + \dots + a_{1m}^2)(h_1^2 + \dots + h_m^2) + \dots + (a_{k1}^2 + \dots + a_{km}^2)(h_1^2 + \dots + h_m^2)} =$
$= \|\vec{h}\| \sqrt{(a_{11}^2 + \dots + a_{1m}^2) + \dots + (a_{k1}^2 + \dots + a_{km}^2)} = C\|\vec{h}\|.$ ■

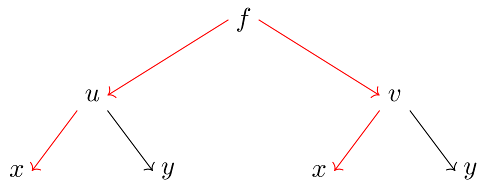
Тепер безпосередньо доведення твердження.

Proof.

$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0)) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0) + \vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0)) =$
$= \vec{g}(\vec{y}^0 + \Delta\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\Delta\vec{y} + o(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\boxed{=}$
Залишилось довести, що $\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$, якщо $\Delta\vec{x} \to \vec{0}$, тобто
$\lim\limits_{\Delta\vec{x} \to \vec{0}} \dfrac{\|\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\|}{\|\Delta x\|} = 0.$
$\dfrac{\|\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\|}{\|\Delta x\|} \leq \dfrac{\|\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\| + \|\vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\|}{\|\Delta x\|} \overset{\text{Lm.}}{\leq} C\dfrac{\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)}{\|\Delta\vec{x}\|} + \dfrac{\vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)}{\|\Delta\vec{x}\|} =$
$= C\dfrac{\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)}{\|\Delta\vec{x}\|} + \dfrac{\vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)}{\|\Delta\vec{y}\|}\dfrac{\|\Delta\vec{y}\|}{\|\Delta\vec{x}\|}.$
Якщо $\Delta\vec{x} \to \vec{0}$, то перший доданок прямує до нуля, а другий буде прямувати до нуля, якщо $\dfrac{\|\Delta\vec{y}\|}{\|\Delta\vec{x}\|}$ буде обмеженою. Зараз це й покажемо:
$\dfrac{\|\Delta\vec{y}\|}{\|\Delta\vec{x}\|} = \dfrac{\|\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} \leq \dfrac{\|\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x}\| + \|\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} \overset{\text{Lm.}}{\leq} C^* + \dfrac{\|\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|}$
Якщо $\Delta\vec{x} \to \vec{0}$, то отримаємо обмеженість.
Отже, остаточно, $\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$, якщо $\Delta\vec{x} \to \vec{0}$, а значить
$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$ при $\Delta\vec{x} \to \vec{0}$. ■

Corollary 7.2.8 Задано функцію $\vec{f} : A \to B$ та $g : B \to \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$.
Відомо, що $\vec{f}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$ та g - диференційована в т. $\vec{y}^0$.
Тоді $\dfrac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial g}{\partial y_1}(\vec{y}^0)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \dfrac{\partial g}{\partial y_2}(\vec{y}^0)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \dots + \dfrac{\partial g}{\partial y_n}(\vec{y}^0)\dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$, виконано $\forall j = \overline{1,m}$.
Тут $h(\vec{x}) = g(\vec{f}(\vec{x}))$.

Example 7.2.9 Маємо функцію $f\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$. Знайдемо частинні похідні за x, y.
Позначимо $u(x,y) = xy$, $v(x,y) = \dfrac{x}{y}$. Тоді маємо:
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{1}{y}$
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot x + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{-x}{y^2}.$



Схематично, як шукати $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

7.3 Похідна за напрямком. Градієнт

Definition 7.3.1 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. А також задано вектор $\vec{l}$, такий, що $\|\vec{l}\| = 1$. Її ще називають **напрямком**.

Похідною функції f за напрямком $\vec{l}$ в т. $\vec{x}^0$ називають величину

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t}$$

Як вже було зазначено, дотичних прямих буває дуже багато, тому ми й задаємо напрямок.

Remark 7.3.2 Якщо всі координати вектора $\vec{l}$ будуть нулевими, окрім $l_j = 1$, то $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$.

Theorem 7.3.3 Задано функцію f - диференційована в т. $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \vec{l} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} l_m$.

Proof.
f - диференційована в т. $\vec{x}^0$, тобто $f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} tl_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} tl_m + o(\|t\vec{l}\|)$. Тому

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} tl_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} tl_m + o(\|t\vec{l}\|)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} l_m. \quad \blacksquare$$

Example 7.3.4 Маємо функцію $f(x, y) = 1 - x^2 - y$. Знайти похідну за напрямком $\vec{l} = (0.6, 0.8)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1.$
$\implies \dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = -0.6 \cdot 2x - 0.8 \cdot 1 = -1.2x - 0.8.$

Definition 7.3.5 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Градієнтом функції f в т. $\vec{x}^0$ називають такий вектор

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}^0) \overset{\text{або}}{=} \nabla f(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} (\vec{x}^0)$$

Похідну функції $\vec{f}$ за напрямком $\vec{l}$ в т. $\vec{x}^0$ можна записати інакше:
$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \left(\operatorname{grad} f(\vec{x}^0), \vec{l}\right)$.

Example 7.3.6 Зокрема для функції $f(x, y) = 1 - x^2 - y$ маємо, що $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2x \\ -1 \end{pmatrix}$

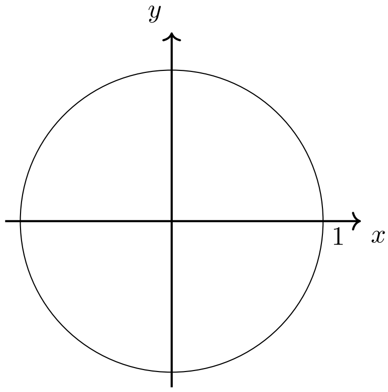
$\operatorname{grad} f(\vec{x}^0)$ описує, який треба взяти напрямок руху в т. $\vec{x}^0$, щоб ріст функції був найбільшим. Цей факт підтвердить наступне твердження:

Proposition 7.3.7 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0)$ приймає:
- max значення $\iff \vec{l} \uparrow\uparrow \operatorname{grad} \vec{f}(\vec{x}^0)$;
- min значення, $\iff \vec{l} \uparrow\downarrow \operatorname{grad} \vec{f}(\vec{x}^0)$.

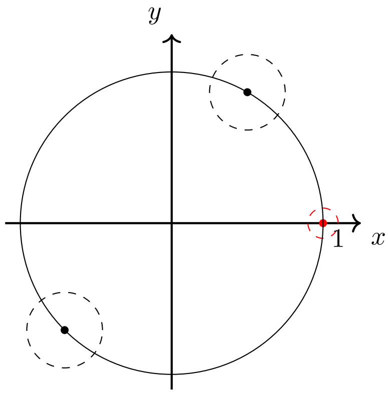
Proof.
Дійсно, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \left(\operatorname{grad} f(\vec{x}^0), \vec{l}\right) = \|\operatorname{grad} f(\vec{x}^0)\| \|\vec{l}\| \cos \alpha = \|\operatorname{grad} f(\vec{x}^0)\| \cos \alpha$:
- max $\iff \alpha = 0$;
- min $\iff \alpha = \pi$. $\blacksquare$

7.4 Неявно задані функції

Remark 7.4.1 Приклад для розуміння
Задано рівняння кола на площині $\mathbb{R}^2$ - один з прикладів неявної функції:
$x^2 + y^2 - 1 = 0$.



Зрозуміло, що це - не графік функції однієї змінної. Просто тому що кожному значенню x тут ставиться у відповідність два значення y.
Проте якщо розглядати деякий малий окіл т. (x_0, y_0), то ми отримаємо деякий шматок малюнку, що й буде графіком функції. Зокрема в нашому випадку або $y = \sqrt{1-x^2}$, або $y = -\sqrt{1-x^2}$.
Проте існують певні точки, де цього зробити не можна - точки $(1,0), (-1,0)$. Як би ми не зменшували окіл цієї точки, там завжди кожного іксу два ігрика були б. Я цю точку позначил червоним кольором.



Саме тому з'явилась мотивацію створити теорему, де через рівняння $F(x,y) = 0$ ми можемо отримати $y = f(x)$ в деякому околі т. (x_0, y_0) під деякими важливими умовами.

Важливо розуміти, що функція існує, проте явну формулу отримати не завжди вийде. Зокрема маємо неявну функцію $y^5 + y^3 + y + x = 0$. Щоб знати $y = f(x)$, треба розв'язати рівняння п'ятої степені, проте корені цього многочлена не можна виразити через формулу. І тим не менш, під деякими умовами, ми можемо знати функцію $y = f(x)$, просто без формули.

Theorem 7.4.2 Задано неявну функцію F - неперервно-диференційована в околі т. (x_0, y_0). Відомо, що виконуються такі умови:
1) $F(x_0, y_0) = 0$;
2) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
Тоді існує єдина функція f - неперервно-диференційована в меншому околі т. x_0, причому

$$F(x,y) = 0 \iff y = f(x), \text{ а також } f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)\Big|_{(x,f(x))}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\Big|_{(x,f(x))}}.$$

Додатково, якщо $F \in C^{(m)}$, то $f \in C^{(m)}$.
Без доведення.

Example 7.4.3 Зокрема для $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ маємо, що вона - неперервна,
$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$ - диференційована.

Причому $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \iff y \neq 0$.
Тому за попередньою теоремою, дійсно, існує функція $y = f(x)$, але найголовніше: $f'(x) = -\dfrac{x}{y}$.

Theorem 7.4.4 Задано неявну вектор-функцію $\vec{F}$ - неперервно-диференційована в околі т. $(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \in \mathbb{R}^{m+k}$. Відомо, що виконуються такі умови:
1) $\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = \vec{0}$;
2) $\exists \left(\vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0)\right)^{-1}$ - оборотна матриця похідних за $\vec{y}$.
Тоді існує єдина вектор-функція $\vec{f}$ - неперервно-диференційована в меншому околі т. $\vec{x}^0$, причому $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \iff \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, а також $\vec{f}'(\vec{x}) = -(\vec{F}'_y(\vec{x}, \vec{y}))^{-1} \cdot \vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y})\Big|_{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))}$.
Без доведення.

Example 7.4.5 Задано вектор-функцію $\vec{F}$ таким чином: $\begin{cases} x^2 + y_1^2 - \dfrac{1}{2}y_2^2 = F_1(x, y_1, y_2) = 0 \\ x + y_1 + y_2 - 2 = F_2(x, y_1, y_2) = 0 \end{cases}$.

Маємо $\det \vec{F}'_y(x, y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2y_1 + y_2 \neq 0 \iff y_2 \neq -2y_1$, а тому й $x \neq 2 + y_2$.
Тоді враховуючи обмеження, існує вектор-функція $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$, але тепер знайдемо похідну. Маємо:
$\vec{F}'_y = \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies (\vec{F}'_y)^{-1} = \dfrac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix}$
$\vec{F}'_x = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{f}' = -(\vec{F}'_y)^{-1}\vec{F}'_x = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 2x + y_2 \\ -2x + 2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x + y_2}{2y_1 + y_2} \\ \dfrac{-2x + 2y_1}{2y_1 + y_2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

Тут записано матрицю Якобі для функції $\vec{F}$. Червоним виділено $\vec{F}'_y$, а синім виділено $\vec{F}'_x$.

7.5 Обернені функції

Theorem 7.5.1 Задано вектор-функцію $\vec{g} : U(\vec{y}^0) \to U(\vec{x}^0)$, де $\vec{x}^0 = \vec{g}(\vec{y}^0)$, де $U(\vec{x}^0), U(\vec{y}^0) \subset \mathbb{R}^n$. Відомо, що виконуються такі умови:
1) $\vec{g}$ - неперервно-диференційована;
2) $\exists(\vec{g}'(\vec{y}^0))^{-1}$.
Тоді існує вектор-функція $\vec{f} : U(\vec{x}^0) \to U(\vec{y}^0)$, причому:
1) $\vec{f}$ - неперервно-диференційована;
2) $\vec{f}'(\vec{x}) = (\vec{g}'(\vec{f}(\vec{x})))^{-1}$.

Proof.
Розглянемо функцію $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} - \vec{g}(\vec{y})$. Про неї відомо, що:
1) $\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = \vec{0}$, просто тому що $\vec{x}^0 = \vec{g}(\vec{y}^0)$.
2) $\exists(\vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0))^{-1}$, тому що зауважимо, що $\vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = -\vec{g}'(\vec{y}^0)$, а для такої матриці оборотна матриця існує за умовою.
Отже, $\exists! f$, для якого $F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{g}(\vec{y}) \iff \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.
Нарешті, $\vec{f}'(\vec{x}) = -(\vec{F}'_y(\vec{x}, \vec{y}))^{-1}\vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{g}'(\vec{y}))^{-1}$.
У цьому випадку $\vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbb{I}$, де $\mathbb{I}$ - одинична матриця. ■

Example 7.5.2 Задано функцію $\vec{g} : A \to \mathbb{R}^2$, де множина $A = \{(x,y) : 0 < y < x\}$.
$\vec{g}(x,y) \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ xy \end{pmatrix}$.
Спробуємо знайти обернену функцію.
Зрозуміло, що $\vec{g}$ - неперервно-диференційована. Доведемо, що $\exists (\vec{g}'(x,y))^{-1}$.
$\vec{g}'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \implies \det \vec{g}'(x,y) = x - y \neq 0$, оскільки $0 < x < y$.
Тоді існує обернена вектор-функція $\vec{f} = \vec{g}^{-1}$. Спробуємо її знайти:
$\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$
$\dfrac{v}{y} + y = u \implies y^2 - uy + v = 0 \implies y = \dfrac{u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2} \implies x = \dfrac{u + \sqrt{u^2-4v}}{2}$.
І все це за умовою, що $u^2 - 4v > 0$ та $u, v > 0$. Отже, $\vec{g}^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} g_1^{-1}(u,v) \\ g_2^{-1}(u,v) \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} u + \sqrt{u^2-4v} \\ u - \sqrt{u^2 - 4v} \end{pmatrix}$

7.6 Геометричне та алгебраїчне застосування

7.6.1 Дотична площина, нормальна пряма поверхні

Задамо функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A \subset \mathbb{R}^2$ - внутрішня точка. Встановимо таку поверхню:

$$\Pi = \{(x,y,z) : z = f(x,y)\}$$

Відомо, що площина в $\mathbb{R}^3$, що проходить через т. (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$, задається рівнянням:

$$z = z_0 + K_1(x - x_0) + K_2(y - y_0), \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Definition 7.6.1 **Дотичною площиною** до поверхні Π в т. (x_0, y_0) називається площина в $\mathbb{R}^3$, що проходить через т. (x_0, y_0, z_0), для якої виконана рівність

$$z - f(x,y) = o(\|(x - x_0, y - y_0)\|), (x,y) \to (x_0, y_0)$$

Theorem 7.6.2 Поверхня Π має дотичну площину в т. $(x_0, y_0) \iff f$ - диференційована в т. (x_0, y_0). Причому $K_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), K_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
Доведення аналогічне, як в матані $\mathbb{R}$.

Отже, дотична площина для диференційованої функції f задається таким рівнянням:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

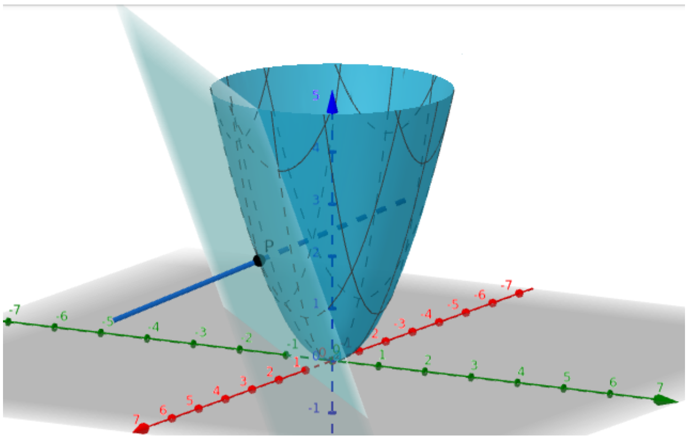
Definition 7.6.3 **Нормальною прямою** до поверхні Π в т. (x_0, y_0) називається пряма в просторі, що проходить через т. (x_0, y_0, z_0) та перпендикулярна дотичній площині.

Вектор нормалі дотичної площини $\vec{N} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$. Це буде напрямленим вектором для нормалі. Тоді нормальна пряма задається таким рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Example 7.6.4 Задамо функцію $f(x) = x^2 + y^2$. Знайдемо дотичну площину та нормальну пряму в т. $(1, -1)$.
$f(1, -1) = 2$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 2x\Big|_{(1,-1)} = 2 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 2y\Big|_{(1,-1)} = -2$.
Всі частинні похідні в околі т. $(1, -1)$ неперервні, а тому диференційовані. Отже, можемо отримати дотичну:

$z-2=2(x-1)-2(y+1) \implies 2x-2y-z=2;$
та нормаль:
$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}.$



7.6.2 Дотична пряма, нормальна площина кривої

Definition 7.6.5 Крива в просторі $\mathbb{R}^3$ задається таким рівнянням

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \qquad t\in(a,b) \\ z=z(t) \end{cases}$$

Відомо, що пряма в просторі $\mathbb{R}^3$, що проходить через т. (x_0,y_0,z_0), $x_0=x(t_0), y_0=y(t_0), z=z(t_0)$, задається таким рівнянням:

$$\begin{cases} x=(t-t_0)l_1+x_0 \\ y=(t-t_0)l_2+y_0 \qquad ,t\in\mathbb{R} \\ z=(t-t_0)l_3+z_0 \end{cases}$$

Definition 7.6.6 Дотичною прямою до кривої $\vec{x}=\vec{x}(t)$ називається пряма в просторі, що проходить через т. (x_0,y_0,z_0), для якої виконана рівність

$$\begin{cases} x(t)-(x_0+l_1(t-t_0))=o(|t-t_0|) \\ y(t)-(y_0+l_2(t-t_0))=o(|t-t_0|) \qquad ,t\to t_0 \\ z(t)-(z_0+l_3(t-t_0))=o(|t-t_0|) \end{cases}$$

Theorem 7.6.7 Пряма $\begin{cases} x=(t-t_0)l_1+x_0 \\ y=(t-t_0)l_2+y_0 \\ z=(t-t_0)l_3+z_0 \end{cases}$ - дотична до кривої $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ $\iff$ крива - диференційована в т. t_0, а також $l_1=x'(t_0), l_2=y'(t_0), l_3=z'(t_0)$.
Відносно зрозуміло.

Отже, дотична пряма задається рівнянням:

$$\begin{cases} x=(t-t_0)x'(t_0)+x_0 \\ y=(t-t_0)y'(t_0)+y_0 \qquad ,t\in\mathbb{R} \\ z=(t-t_0)z'(t_0)+z_0 \end{cases}$$

Напрямлений вектор прямої $\vec{l}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$. Тоді це буде нормальним вектором для нормальної площини. Нормальна площина задається таким рівнянням:

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

Example 7.6.8 Маємо криву $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 2\cos t \\ z = -\sin 2t \end{cases}$, де параметр $t \in [0, 2\pi]$. Знайдемо дотичну пряму та нормальну площину в $t_0 = \dfrac{5\pi}{6}$. Тобто в т. $\left(-1, \sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

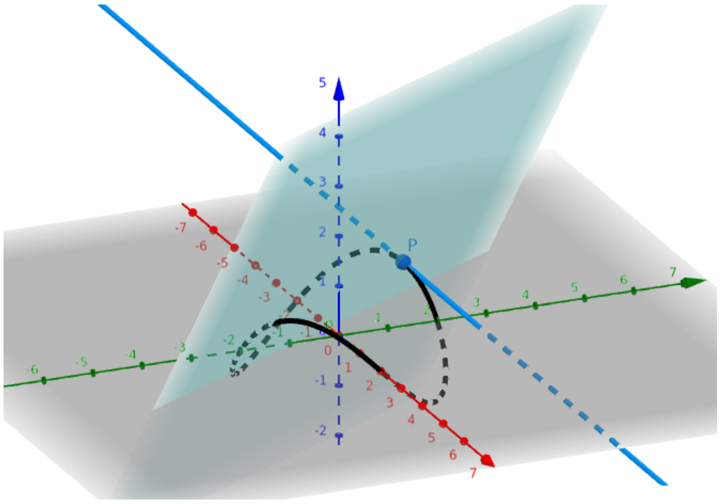
$$\begin{cases} x'(t_0) = 2\cos t\Big|_{t=t_0} = \sqrt{3} \\ y'(t_0) = -2\sin t\Big|_{t=t_0} = 1 \\ z'(t_0) = -2\cos 2t\Big|_{t=t_0} = -1 \end{cases}.$$

Таким чином, маємо дотичну пряму:

$$\frac{x+1}{\sqrt{3}} = \frac{y-\sqrt{3}}{1} = \frac{z - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-1};$$

та нормальну площину:

$$\sqrt{3}(x+1) + (y - \sqrt{3}) - \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$



7.6.3 Приблизне обчислення

Маємо f - диференційована в т. $\vec{x}^0$, тобто
$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)(x_n - x_n^0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|)$ при $\vec{x} \to \vec{x}^0$.
Якщо $\vec{x}_0$ близлький до $\vec{x}$, тобто $\|\vec{x} - \vec{x}^0\| \ll 1$, то тоді
$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}^0) + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)(x_n - x_n^0)$.

Example 7.6.9 Приблизно обчислити $\sqrt{(2.03)^2 + 5e^{0.02}}$.
Розглянемо функцію $z = \sqrt{x^2 + 5e^y}$. У нашому випадку $(x_0, y_0) = (2, 0)$ та $(x, y) = (2.03, 0.02)$.
Оскільки $\|(x - x_0, y - y_0)\| = \|(0.03, 0.02)\| \ll 1$, то можемо застосувати формулу:
$z \approx z_0 + \dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$. Маємо:

$z_0 = \sqrt{2^2 + 5e^0} = 3 \qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}(2, 0) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 5e^y}}\Big|_{(0,2)} = \dfrac{2}{3} \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}(2, 0) = \dfrac{5e^y}{2\sqrt{x^2 + 5e^y}}\Big|_{(0,2)} = \dfrac{5}{6}$.

Отже, $z = \sqrt{(2.03)^2 + 5e^{0.02}} \approx 3 + \dfrac{2}{3} \cdot 0.03 + \dfrac{5}{6} \cdot 0.02 = \dfrac{101}{30}$.

7.7 Диференціювання та похідні старших порядків

Definition 7.7.1 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Також f - диференційована в т. $\vec{x}^0$.

Частинними похідними другого роду від функції f в т. $\vec{x}^0$ називається вираз:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}^0)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}^0)$$

Example 7.7.2 Знайдемо всі частинні похідні другого порядку функції $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2 \implies \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y \implies \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16xy \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2 \end{cases}.$$

Можемо зауважити, що $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Проте в загальному випадку це не так.

Example 7.7.3 Розглянемо функцію $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Зосередимось лише на знаходженні $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\dfrac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} -x\dfrac{y^4 - x^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = -1$$

Таким чином, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Theorem 7.7.4 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Відомо, що $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x})$ в околі т. $\vec{x}^0$ та є неперервними в т. $\vec{x}^0$.
Тоді $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$.
Деколи ще називають це теоремою Шварца.

Ми будемо доводити при $m = 2$. Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа

Proof.
Отже, дано $f(x,y)$ та в околі т. (x_0, y_0) існують частинні похідні другого порядку $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ які неперервні в (x_0, y_0).
Розглянемо вираз $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$.
Покладемо функцію $k(s) = f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0), s \in [x_0, x_0 + \Delta x]$. Тоді $\Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0)$.
$k'(s) = (f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0))'_s = \dfrac{\partial f}{\partial s}(s, y_0 + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial s}(s, y_0)$.
Оскільки нам відомі другі частинні похідні, то зрозуміло, що в нас існує $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$, причому в тому самому околі т. (x_0, y_0). Тобто звідси k - диференційована на $[x_0, x_0 + \Delta x]$, тоді за теоремою Лагранжа, $\exists \xi_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x) : \Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0) = k'(\xi_1)\Delta x = \left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0 + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0)\right)\Delta x$.
Покладемо функцію $m(t) = \dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t), t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$. Тоді $\Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x$.
$m'(t) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t)\right)'_t = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, t)$.
Похідна дійсно існує за умовою теореми, тобто m - диференційована на $[y_0, y_0 + \Delta y]$, тоді за теоремою Лагранжа, $\exists \eta_1 \in (y_0, y_0 + \Delta y) : \Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x = m'(\eta_1)\Delta y \Delta x = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1)\Delta y \Delta x$.

Повернімось до виразу $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$, ми розглянемо її з іншої сторони.
Покладемо функцію $p(t) = f(x_0 + \Delta x, t) - f(x_0, t), t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$. Тоді $\Delta = p(y_0 + \Delta y) - p(y_0)$.

А далі я буду просто продовжувати рівність, міркування аналогічні, що пов'язані зі застосуванням теореми Лагранжа двічі:

$$\Delta = p(y_0+\Delta y)-p(y_0) = p'(\eta_2)\Delta y = (f(x_0+\Delta x,t)-f(x_0,t))'_t(\eta_2)\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x_0+\Delta x,\eta_2) - \frac{\partial f}{\partial t}(x_0,\eta_2)\right)\Delta y \boxed{=}$$

Покладемо функцію $q(s) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(s,\eta_2)$. А далі аналогічно.

$$\boxed{=}(q(x_0+\Delta x) - q(x_0))\Delta y = q'(\xi_2)\Delta x\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,\eta_2)\right)'_s(\xi_2)\Delta x\Delta y = \frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(\xi_2,\eta_2)\Delta x\Delta y.$$

Зауважу, що $\eta_2 \in (y_0, y_0+\Delta y), \xi_2 \in (x_0, x_0+\Delta x)$.

Отримали таку рівність: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(\xi_1,\eta_1)\Delta y\Delta x = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(\xi_2,\eta_2)\Delta x\Delta y \implies \dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(\xi_1,\eta_1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(\xi_2,\eta_2)$.
Нарешті, за умовою задачі, другі частинні похідні є неперервними в т. (x_0,y_0), тому далі одночасно прямуємо $x \to x_0, y \to y_0 \implies \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Оскільки $\xi_1,\xi_2 \in (x_0, x_0+\Delta x)$ $\eta_1,\eta_2 \in (y_0, y_0+\Delta y)$, то звідси $\xi_1,\xi_2 \to x_0$ та $\eta_1,\eta_2 \to y_0$.
Остаточно отримаємо $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$ (літери s,t я замінив на x,y, результат не зміниться). ■

Definition 7.7.5 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Функція f називається **двічі диференційованою в т.** $\vec{x}^0$, якщо всі частинні похідні існують в околі т. $\vec{x}^0$ та диференційовані в т. $\vec{x}^0$.

Example 7.7.6 Маємо функцію $z = x^2 + 2y^2 - 5xy$. З'ясуємо, чи буде ця функція двічі диференційованою.
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 5y \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y - 5x$
Усі отримані частинні похідні існують в будь-якому околі деякої точки.
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -5$
Отримані частинні похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за **Th.4.1.8.**, функція $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ - диференційована. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -5 \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$
Отримані частинні похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за **Th.4.1.8.**, функція $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ - диференційована.
Отже, за означенням, z - двічі диференційована функція.

Proposition 7.7.7 Функція f двічі диференційована в т. $\vec{x}^0 \iff \mathrm{grad} f$ - диференційована в т. $\vec{x}^0$.

Proof.
Дійсно, f - двічі диференційована в т. $\vec{x}^0 \iff \forall j = \overline{1,m} : \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0 \iff$

$\mathrm{grad} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}$ - як вектор-функція - диференційована в т. $\vec{x}^0$. ■

Розпишемо диференційованість вектор-функції $\mathrm{grad}\, f$ в т. $\vec{x}^0$ за означенням:
$\mathrm{grad}\, f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \mathrm{grad}\, f(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$.

Звідси ми маємо, що $M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_m} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_m}^2} \end{pmatrix}(\vec{x}^0) = H(\vec{x}^0) = f''(\vec{x}^0)$ - **матриця Гесе**

Матриця Гесе описує **другу похідну** функції f в т. $\vec{x}^0$ та одночасно **похідну** вектор-функції $\operatorname{grad} f$ в т. $\vec{x}^0$. Дана матриця - квадратна, тож ми можемо обчислити $\det f''(\vec{x}^0)$ - **гесіан**.

Definition 7.7.8 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Також f - диференційована в т. $\vec{x}^0$.
Другим диференціалом функції f називають вираз:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = d(df(\vec{x}^0))$$

З'ясуємо, як цей вираз можна по-інакшому записати. Маємо:
$d^2 f = d\,(df) = d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m}\,dx_m\right) = d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1\right) + \dots + d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\,dx_m\right) =$
$= d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)\,dx_1 + \dots + d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right)\,dx_m = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)\,dx_1 + \dots + \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)\,dx_m\right)\,dx_1 + \dots +$
$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right)\,dx_1 + \dots + \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right)\,dx_m\right)\,dx_m =$
$= \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\,dx_1^2 + \dots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}\,dx_m\,dx_1\right) + \dots + \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}\,dx_1\,dx_m + \dots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_m}^2}\,dx_m^2\right) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,dx_i\,dx_j.$
Отже, маємо іншу формулу для другого диференціалу в т. $\vec{x}^0$:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\,dx_i\,dx_j$$

Якщо придивитись, то $d^2 f(\vec{x}^0)$ виглядає як квадратична форма.

Example 7.7.9 Знайдемо другий диференціал функції $z = x^3 + 2y^2 - 5xy$.
Ми вже шукали другі частинні похідні $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -5 \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$. Таким чином,
$d^2 z = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 = 6x\,dx^2 - 10\,dx\,dy + 4\,dy^2$.

Definition 7.7.10 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Також f - k разів диференційована в т. $\vec{x}^0$.
Частинними похідним $k+1$-го порядку в т. $\vec{x}^0$ називають похідну:

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}\right)(\vec{x}^0) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(\vec{x}^0)$$
$$j_1 + j_2 + \dots + j_k + j_{k+1} = k+1$$

Remark 7.7.11 Що таке **похідна** k-го порядку, визначати не буду, бо ще рано. Необхідно щось про тензори знати.

Definition 7.7.12 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Також f - k разів диференційована в т. $\vec{x}^0$.
$k+1$**-им диференціалом** функції f називають вираз:

$$d^{k+1} f(\vec{x}^0) = d(d^k f(\vec{x}^0))$$

Якщо дуже сильно постаратись, то за індукцією можна довести таку формулу диференціала k-го порядку:

$$d^k f(\vec{x}^0) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(\vec{x}^0) \cdot dx_{j_1} \dots dx_{j_k}$$

Definition 7.7.13 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Функція f називається k**-разів диференційованою в т.** $\vec{x}^0$, якщо всі частинні похідні $(k-1)$-го порядку існують в околі т. $\vec{x}^0$ та всі вони диференційовані в т. $\vec{x}^0$.

Позначення: $C^k(A)$ - множина k разів неперервно-диференційованих функцій.

7.8 Формула Тейлора

Зробимо певні позначення:

$$[\vec{x}^0, \vec{x}] = \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in [0,1]\}$$
$$(\vec{x}^0, \vec{x}) = \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in (0,1)\}$$

Theorem 7.8.1 Теорема Тейлора (у формі Лагранжа)
Задано функцію f - диференційована n разів на $[\vec{x}^0, \vec{x}]$ та $(n+1)$-ий раз диференційована на $(\vec{x}^0, \vec{x})$. Тоді $\exists \vec{\xi} \in (\vec{x}^0, \vec{x})$ або $(\vec{x}, \vec{x}^0)$, для якого
$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \dfrac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + \dfrac{d^{n+1} f(\vec{\xi})}{(n+1)!}$.

Proof.
Розглянемо функцію $p(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$, тут $t \in [0,1]$ - функція від однієї змінної.
Знайдемо похідні від цієї функції:
$p'(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))'_t = (f(x_1 + t(x_1 - x_1^0), \dots, x_m + t(x_m - x_m^0)))'_t = (f(u_1, \dots, u_m))'_t =$
$= \dfrac{\partial f}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial u_m}\dfrac{\partial u_m}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial u_1}(x_1 - x_1^0) + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial u_m}(x_m - x_m^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial u_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_m - x_m^0 \end{pmatrix} =$
$= df(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$.
$p''(t) = [f'(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0)]'_t \overset{\text{аналогічно}}{=} d^2 f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$
$\vdots$
$p^{(k)}(t) = d^k f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$.
Коротше, наша функція n разів диференційована на $[0,1]$ та має $(n+1)$ похідну на $(0,1)$. Тому ми можемо розкласти формулу Тейлора як функцію з однією змінною. $\exists \xi \in (0,1)$:
$p(1) = p(0) + \dfrac{p'(0)}{1!}(1-0) + \dfrac{p''(0)}{2!}(1-0)^2 + \dots + \dfrac{p^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + \dfrac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}$.
А далі підставляємо все, що маємо:
$p(0) = f(\vec{x}^0)$
$p'(0) = df(\vec{x}^0)$
$p''(0) = d^2 f(\vec{x}^0)$
$\vdots$
$p^{(n+1)}(\xi) = d^{n+1} f(\vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0))$
Отже, $f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \dfrac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + \dfrac{d^{n+1} f(\vec{\xi})}{(n+1)!}$, де $\vec{\xi} = \vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0) \in (\vec{x}^0, \vec{x})$. ■

Theorem 7.8.2 Теорема Тейлора (у формі Пеано)
Задано функцію f - диференційована n разів в т. $\vec{x}^0$. Тоді
$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \dfrac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n), \vec{x} \to \vec{x}^0$.

Без доведення. Але певні плани доведення наведу.
Позначимо функцію $g(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \left(f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \dfrac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} \right)$. Наша мета показати, що $g(\vec{x}) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n)$.
Як і раніше, тут треба показати, що g та всі його частинні похідні до порядка включно n в т. $\vec{x}^0$ будуть нулями.
А далі вже показуємо, що $g(\vec{x}) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n)$.

Example 7.8.3 Розкласти функцію $f(x,y) = e^{x+y}$ відносно т. $(x_0, y_0) = (1, -1)$.
Заздалегідь зауважимо, що $\dfrac{\partial^s f}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2}}(1,-1) = e^{x+y}|_{(1,-1)} = 1$, де $s_1 + s_2 = s$.
$f(1,-1) = 1$
$f'(1,-1)(\vec{x} - \vec{x}^0) = (x-1) + (y+1)$
$f''(1,-1)(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 = (x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2$
$f'''(1,-1)(\vec{x} - \vec{x}^0)^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3$
$\vdots$

Таким чином, ми можемо це записати ось так:

$$f(x,y) = 1 + \left[\frac{(x-1)}{1!} + \frac{(y+1)}{1!}\right] + \left[\frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)(y+1)}{2!} + \frac{(y+1)^2}{2!}\right] + \dots +$$
$$+ \left[\frac{(x-1)^n}{n!} + \frac{C_n^2(x-1)^{n-1}(y+1)}{n!} + \dots + \frac{(y+1)^n}{n!}\right] + o\left(\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^k \frac{C_p^k}{k!}(x-1)^{k-p}(y+1)^p + o\left(\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}^n\right), (x,y) \to (1,-1).$$

Remark 7.8.4 Можна формулу Тейлора записати в якості ряда Тейлора за певними умовами, але я цього робити не буду.

7.9 Локальні екстремуми

Definition 7.9.1 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка.
Точка $\vec{x}^0$ називається точкою:
- **локального максимуму**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \geq f(\vec{x})$;
- **локального мінімуму**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \leq f(\vec{x})$.

для строгих екстремумів нерівність строга та існують околи $U_\varepsilon(\vec{x}^0) \setminus \{\vec{x}^0\}$.

Theorem 7.9.2 Необхідна умова локального екстремуму
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ - диференційована в т. $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня.
Відомо, що $\vec{x}^0$ - локальний екстремум. Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = 0, \forall j = \overline{1,m}$.

Proof.
Розглянемо функцію $h(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$ - функція від однієї змінної, така, що x_1^0 - локальний екстремум. Для інших змінних аналогічно. Більш того, $h'(x_1) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$.
Таким чином, за необхідною умовою локального екстремуму матана 1 семестру,
$h'(x_1) = 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = 0$. ■

Remark 7.9.3 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = 0, \forall j = \overline{1,m} \iff df(\vec{x}^0) \equiv 0$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Зрозуміло.
$\boxed{\Leftarrow}$ Підставити в диференціал $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = (1, 0, \dots, 0)$, щоб отримати $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) = 0$.

Definition 7.9.4 Точка $\vec{x}^0$ називається **стаціонарною** для функції f, якщо всі частинні похідні в заданній точці нулеві.

Proposition 7.9.5 Інше означення критичної точки
Точка $\vec{x}^0$ – стаціонарна $\iff df_{\vec{x}^0}$ – не сюр'єктивне.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *Зрозуміло.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $df_{\vec{x}^0}$ – не сюр'єктивне. Взагалі, будь-який функціонал уже автоматично сюр'єктивний. Тоді звідси $df_{\vec{x}^0} \equiv 0$ – єдиний варіант. Отже, звідси всі частинні похідні нулеві, а тому $\vec{x}^0$ – стаціонарна. ■

Theorem 7.9.6 Достатня умова локального екстремуму
Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$, таку, що f - двічі неперервно-диференційована в околі т. $\vec{x}^0 \in A$ - стаціонарна та внутрішня точка.
1) Нехай $d^2f(\vec{x}^0)$ - строго додатноозначена. Тоді $\vec{x}^0$ - строгий локальний мінімум;
2) Нехай $d^2f(\vec{x}^0)$ - строго від'ємноозначена. Тоді $\vec{x}^0$ - строгий локальний максимум;
3) Нехай $d^2f(\vec{x}^0)$ - знакозмінна. Тоді $\vec{x}^0$ - не локальний екстремум.

Proof.
1) Нехай $d^2f(\vec{x}^0)$ - додатно визначена.
Оскільки функція f - двічі диференційована в т. $\vec{x}^0$, то тоді за теоремою Тейлора в формі Пеано,

$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^2), \vec{x} \to \vec{x}^0.$
Позначу $\rho = \|\vec{x} - \vec{x}^0\|$, а також $\xi_k = \dfrac{x_k - x_k^0}{\rho}, k = \overline{1, m}$. Можна зауважити, що $\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 = 1$.
Оскільки $\vec{x}^0$ - стаціонарна, то звідси $df(\vec{x}^0) \equiv 0$, бо всі частинні похідні нулі. Таким чином,
$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{1}{2} d^2 f(\vec{x}^0) + o(\rho^2) = \dfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + o(\rho^2) = \dfrac{1}{2}\rho^2 \left(\sum_{i,j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\xi_i \xi_j + o(1) \right).$
Розглянемо функцію $F(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum_{i,j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\xi_i\xi_j$, що визначена на одиничній сфері
$S^m = \{\vec{\xi} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{\xi}\| = 1\}$, а ця множина - замкнена та обмежена. Також відомо, що $F \in C(S^m)$ як многочлен, а тому вона досягає мінімуму. Проте F - додатно визначена, а отже $\min F > 0$.
Рівність $f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{1}{2}\rho^2(F(\xi_1, \dots, \xi_m) + o(1)), \rho \to 0$ перепишеться таким чином:
$\exists \delta : \forall \rho < \delta \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > \dfrac{1}{4}\rho^2 \min F > 0$, остаточно
$\exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > 0.$
Тобто, знайшли окіл, де $\forall \vec{x} : f(\vec{x}^0) < f(\vec{x})$, а тому $\vec{x}^0$ - строгий локальний мінімум.

2) Все аналогічно.

3) А тепер припустимо, що $d^2 f(\vec{x}^0)$ - знако-невизначена. Ми розглядаємо функцію лише в деякому околі $U_{\delta_0}(\vec{x}^0)$ через диференційованість. Тоді $\exists \vec{\Delta x} : d^2 f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}) > 0$. Ми окіл ще звужимо до $U_{\delta = \|\vec{\Delta x}\|}(\vec{x}^0)$. Там будемо шукати точку в вигляді $\vec{x}^t = \vec{x}^0 + t\vec{\Delta x}$, де $t > 0$ - довільне. Тоді за Тейлором,
$f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{1}{2} d^2 f(\vec{x}^0, t\vec{\Delta x}) + o(\|\vec{x}^t - \vec{x}^0\|)$, де $\vec{x}^t \to \vec{x}^0$.
$f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{1}{2} t^2 d^2 f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}) + o(t^2 \|\vec{\Delta x}\|^2) = \dfrac{t^2}{2}\left(d^2 f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}) + o(1) \right)$, де $t \to 0$.
Якщо більш детально це розписати $o(1)$, а згодом обрати $\varepsilon = \dfrac{1}{2} d^2 f(\vec{x}^0, \Delta \vec{x})$, то отримаємо, що
$\exists \delta^* : \forall t : t < \delta^* \implies f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) > 0$.
Якщо так станеться, що $U_{\delta^*}(\vec{x}^0)$ буде більшим за $U_{\delta = \|\vec{\Delta x}\|}(\vec{x}^0)$, то тоді буде ми можемо взяти точку $\vec{x}^0 + \vec{\Delta x}$, для якої $f(\vec{x}^0 + \vec{\Delta x}) - f(\vec{x}^0) > 0$.
Також буде $\exists \vec{\Delta x}' : d^2 f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}') < 0$ в силу невизначеності знака. І там абсолютно аналогічно.
Остаточно, $\forall U_\delta$,
- якщо U_δ більший за U_{δ_0}, то вже автоматично виконано;
- інакше знайдуться точки по цим крокам.
Отже, $\vec{x}^0$ - не екстремум. ■

Example 7.9.7 Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.
Спочатку шукаємо критичні точки:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 36 = 0 \end{cases} \implies (x, y) \in \{(3, 2), (-3, -2), (2, 3), (-2, -3)\}.$$
Далі знайдемо другий диференціал:
$d^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2.$
$d^2 f = 6(x\, dx^2 + 2y\, dx\, dy + x\, dy^2).$
Для кожної критичної точки подивимось на цей диференціал.
I. $d^2 f(3, 2) = 6(3\, dx^2 + 4\, dx\, dy + 3\, dy^2)$.
Диференціал $d^2 f(3, 2)$ можна розглядати як квадратичну форму $(d^2 f(3, 2))(dx, dy)$. Даній квадратичній формі відповідає матриця $H = 6\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$ (див. лінійну алгебру). До речі, дана матриця - це в точності матриця Гесе.
Застосуємо критерій Сільвестра. Маємо $\Delta_1^H = 18 > 0$ та $\Delta_2^H = \det \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} = 6(3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 30 > 0$.
Отже, за цим критерієм, маємо $d^2 f(3, 2)$ - додатноозначена. Отже, $(3, 2)$ - локальний мінімум.

II. $d^2f(-3,-2)$ - аналогічними міркуваннями доводимо, що $(-3,-2)$ - локальний максимум.

III. $d^2f(2,3) = 12(dx^2 + 3\,dx\,dy + dy^2)$.
Знову запишемо матрицею $H = 6\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Зауважимо, що матриця має власні числа $-1, 5$. Вони різного знаку, що приводить до висновку: $d^2f(2,3)$ - знакозмінна. Отже, $(2,3)$ - не екстремум.

IV. $d^2f(-2,-3)$ - аналогічними міркуваннями доводимо, що $(-2,-3)$ - не екстремум.

Example 7.9.8 Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x,y) = x^2 + y^4$.
$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0 \end{cases} \implies (0,0)$ - єдина критична точка.
$d^2f = 2\,dx^2 + 12y^2\,dy^2$
$d^2f(0,0) = 2\,dx^2 \geq 0$ - дана квадратична форма невід'ємноозначена, тому що при $(dx,dy) = (0, 0.1)$ маємо $d^2f(0,0) = 0$. Тож скористатися достатньою умовою ми не можемо.
Однак можна зауважити, що $f(0,0) \leq f(x,y)$, причому $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, зокрема в будь-якій точці окола $(0,0)$. Таким чином, $(0,0)$ - локальний мінімум.

Example 7.9.9 Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x,y) = x^2 - y^4$.
Тут також $(0,0)$ - єдина критична точка, тут також $d^2f(0,0) = 2\,dx^2 \geq 0$ - невід'ємноозначена квадратична форма.
Проте цього разу $(0,0)$ не буде локальним екстремумом. Дійсно, для кожного околу $U_\delta(0,0)$ знайдуться точки $(x_1,y_1) = \left(\dfrac{\delta}{2}, 0\right)$ та $(x_2,y_2) = \left(0, \dfrac{\delta}{2}\right)$, причому ці дві точки в середині околу, для яких:
$f(x_1,y_1) = \dfrac{\delta^2}{4} > 0 = f(0,0)$ $\qquad f(x_2,y_2) = -\dfrac{\delta^4}{16} < 0 = f(0,0)$.

7.10 Умовні локальні екстремуми

Definition 7.10.1 Задано функцію $f : A \to \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ - відкрита множина. Задано також функції $g_1, \dots, g_m : A \to \mathbb{R}$. Розглянемо множину $\Gamma_{g_1,\dots,g_m} = \{\vec{x} \in G : g_1(\vec{x}) = \dots = g_m(\vec{x}) = 0\}$.
Точка $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1,\dots,g_m}$ називається **умовним локальним максимумом (мінімумом)**, якщо вона є локальним максимумом (мінімумом) функцій $\tilde{f} : \Gamma_{g_1,\dots,g_m} \to \mathbb{R}$, де $\tilde{f} \equiv f$.

Definition 7.10.2 Рівняння вигляду

$$\begin{aligned} g_1(\vec{x}) &= 0, \\ &\vdots \\ g_m(\vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

називається **рівняннями зв'язку**.

Example 7.10.3 Зокрема маємо функцію $f(x,y) = x^2 - y^2$ та функцію $g(x,y) = y = 0$.
Маємо тоді $\tilde{f}(x,y) = f(x,0) = x^2$, звідси $x = 0$ - точка локального мінімуму функції $\tilde{f}$.
Отже, $x = 0$ - точка умовного локального мінімуму функції f.

Definition 7.10.4 Задані функції $g_1, \dots, g_m : A \to \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^p$ - відкрита множина. Всі функції неперервно диференційовані на A.
Вони називаються **функціонально незалежними** в точці $\vec{x}^0 \in A$, якщо

$$\{g_1'(\vec{x}^0), \dots, g_m'(\vec{x}^0)\} \text{ - лінійно незалежна}$$

Example 7.10.5 Зокрема $\{g_1, g_2\}$, де $g_1(x,y) = x, g_2(x,y) = y$ - функціонально незалежні.
Дійсно, $g_1'(x,y) = (1,0)$ та $g_2'(x,y) = (0,1)$ в кожній точці. Ці похідна - лінійно незалежні.

Definition 7.10.6 Задані функції $f, g_1, \dots, g_m : A \to \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ - відкрита множина.
Функцією Лагранжа назвемо таку функцію:

$$F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \lambda_1 g_1(\vec{x}) - \dots - \lambda_m g_m(\vec{x}),$$

де $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

Theorem 7.10.7 Необхідна умова умовного локального екстремуму
Задані функції $f, g_1, \ldots, g_m : A \to \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ - відкрита множина. Всі функції - неперервно диференційовані на A.
Відомо, що $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1,\ldots,g_m}$ - умовний локальний екстремум функції f, а також $\{g_1, \ldots, g_m\}$ - функціонально незалежні в $\vec{x}^0$.
Тоді існують $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} : \vec{x}^0$ - стаціонарна точка функції Лагранжа.

Ми будемо доводити при $n = 2, m = 1$. Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа

Proof.
Нехай $f(x, y, z)$ має локальний екстремум $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma_g$ з рівнянням $g(x, y, z) = 0$.
У силу функціональної незалежності за умовою в точці, маємо $g'(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$, тобто всі частинні похідні ненулеві. Тоді за теоремою про неявну функцію, існує $\varphi : U(x_0, y_0) \to U(z_0)$, де
$\varphi(x_0, y_0) = z_0$
$\forall (x, y) \in U(x_0, y_0) : g(x, y, \varphi(x, y)) = \tilde{g}(x, y) = 0$.
Тоді маємо функцію $\tilde{f}(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$ - функція 2-х змінних, де (x_0, y_0) - точка локального екстремуму. Звідси випливає, що $d\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$
$d\tilde{f}(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, d\varphi(x_0, y_0) = 0.$
Також оскільки $\tilde{g}(x, y) \equiv 0$, то звідси маємо:
$d\tilde{g}(x_0, y_0) = dg(x_0, y_0) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, d\varphi(x_0, y_0) = 0.$
Останню рівність домножимо на λ, яка відніметься з першим рівнянням.
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}\right)(x_0, y_0, z_0)\, dx + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}\right)(x_0, y_0, z_0)\, dy + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z}\right)(x_0, y_0, z_0)\, d\varphi(x_0, y_0) = 0.$
Оскільки $\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ в силу функціональної незалежності, то ми оберемо такий λ, щоб $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$. Отримаємо:
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}\right)(x_0, y_0, z_0)\, dx + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}\right)(x_0, y_0, z_0)\, dy = 0.$
І ця рівність виконується для всіх $\Delta x, \Delta y$. Отже,
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0.$
Маючи ці рівності отримаємо:
$dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = d(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0) =$
$= \dfrac{\partial (f - \lambda g)}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \dfrac{\partial (f - \lambda g)}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \dfrac{\partial (f - \lambda g)}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, dz = 0.$
Це виконано для всіх $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Отже, (x_0, y_0, z_0) - стаціонарна точка F_λ. ■

Theorem 7.10.8 Достатня умова умовного локального екстремуму
Задані функції $f, g_1, \ldots, g_m : A \to \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ - відкрита множина. Всі функції - двічі неперервно диференційовані на A.
Відомо, що $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1,\ldots,g_m}$ - стаціонарна точка функції Лагранжа для деякого $\vec{\lambda}$. Нехай $\{g_1, \ldots, g_m\}$ - функціонально незалежні в т. $\vec{x}^0$. Розглянемо множину $\Gamma^*_{g_1,\ldots,g_m}(\vec{x}^0) = \{\vec{\Delta x} \in \mathbb{R}^{n+m} : dg_1(\vec{x}^0) = \cdots = dg_m(\vec{x}^0) = 0\}$.
1) Нехай $d^2F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$ - строго додатноозначена на $\Gamma^*_{g_1,\ldots,g_m}(\vec{x}^0)$. Тоді $\vec{x}^0$ - умовний локальний мінімум;
2) Нехай $d^2F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$ - строго від'ємноозначена на $\Gamma^*_{g_1,\ldots,g_m}(\vec{x}^0)$. Тоді $\vec{x}^0$ - умовний локальний максимум;
3) Нехай $d^2F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$ - знаконеозначена на $\Gamma^*_{g_1,\ldots,g_m}(\vec{x}^0)$. Тоді $\vec{x}^0$ - не умовний локальний екстремум.

Ми будемо доводити при $n = 2, m = 1$. Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа

Proof.
Нехай рівняння зв'язку лише $g(x, y, z) = 0$. Функція Лагранжа $F_\lambda(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$.
За умовою, (x_0, y_0, z_0) - стаціонарна точка F_λ для деякого λ.
g - функціонально незалежна в (x_0, y_0, z_0), тож $g'(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$. Ми тут припустимо, що $\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq$

0. Тоді за теоремою про неявну функцію, існує $\varphi : U(x_0, y_0) \to U(z_0)$, для якого
$\varphi(x_0, y_0) = z_0$
$\forall (x, y) \in U(x_0, y_0) : g(x, y, \varphi(x, y)) = \tilde{g}(x, y) = 0.$
Причому сама функція φ також двічі неперервно-диференційована.
Розглянемо функцію $\tilde{f} : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$, що визначена як $\tilde{f}(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$.
Покажемо, що (x_0, y_0) - стаціонарна точка функції $\tilde{f}$.
$d\tilde{f}(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, d\varphi(x_0, y_0)$.
$dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = d(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{\partial (f - \lambda g)}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \dfrac{\partial (f - \lambda g)}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \dfrac{\partial (f - \lambda g)}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, dz =$
$= \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \right) dx + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \right) dy + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) dz.$
Але в силу стаціонарної точки маємо $dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = 0$. Зокрема для $dz = d\varphi(x_0, y_0)$ маємо рівність нуля.
Оскільки $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, то звідси $dg(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in U, \forall (\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$.
$dg(x, y, \varphi(x, y)) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))\, dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))\, dy + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))\, d\varphi(x, y)$.
Зокрема, підставляючи $(x, y) = (x_0, y_0)$, отримаємо:
$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, d\varphi(x_0, y_0) = 0.$
Домножимо це рівняння на λ та додамо його до рівняння $dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = 0$. Отримаємо:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, d\varphi(x_0, y_0) = 0.$
Але це теж саме, що $d\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$, що доводить: (x_0, y_0) - стаціонарна точка $\tilde{f}$.

Тепер для визначення характеру точки (x_0, y_0) функції $\tilde{f}$ ми обчислимо другий диференціал. Якщо все обережно зробити, отримаємо:
$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2 f(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, d^2\varphi(x_0, y_0)$.
Аналогічним чином для $\tilde{g}(x, y)$ маємо:
$d^2\tilde{g}(x_0, y_0) = d^2 g(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, d^2\varphi(x_0, y_0) = 0.$
Попереднє рівняння віднімемо на останнє, помножене на λ - отримаємо:
$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} \right)(x_0, y_0, z_0) d^2\varphi(x_0, y_0)$.
$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2 F_\lambda(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d^2\varphi(x_0, y_0)$.
Але (x_0, y_0, z_0) - кртична функція F_λ, а тому
$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2 F_\lambda(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)}$.
Більш детально треба пояснити, що дає умова $\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)$. Ми вже знаємо, що $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \forall (x, y)$, а тому
$dg(x, y, \varphi(x, y))(x_0, y_0) = 0$, але звідси ж, враховуючи умову, отримаємо
$dg(x, y, \varphi(x, y))(x_0, y_0) = dg(x_0, y_0, z_0) = 0$.
А це означає, що $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \in \Gamma_g^*(x_0, y_0, z_0)$.
Остаточно $d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2 F_\lambda(x_0, y_0, z_0)|_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \in \Gamma_g^*(x_0, y_0, z_0)}$.
А далі все цілком зрозуміло.
1) $d^2 F_\lambda(x_0, y_0, z_0) > 0 \implies d^2\tilde{f}(x_0, y_0) > 0 \implies (x_0, y_0)$ - локальний мінімум $\tilde{f} \implies (x_0, y_0, z_0)$ - умовний локальний мінімум f;
2) аналогічно;
3) аналогічно. ■

Example 7.10.9 Дослідити функцію $f(x, y, z) = xyz$ на умовний локальний екстремум за умовою $(x, y, z) = 3$.
У цьому випадку $g(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$. Запишемо функцію Лагранжа:
$L_\lambda(x, y, z) = xyz - \lambda(x + y + z - 3)$.
Знайдемо всі критичні точки L_λ, що лежать на множині Γ_g:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial x} = yz - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial y} = xz - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial z} = xy - \lambda = 0 \\ g(x,y,z) = x + y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Якщо розв'язати систему рівнянь, отримаємо наступні розв'язки (x, y, z):
$M_0(1,1,1), M_1(3,0,0), M_2(0,3,0), M_3(0,0,3)$.
А також відповідні λ будуть наступні:
$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$.
Дослідимо тепер d^2L_λ для кожної точки з відповідним λ.
$d^2L_\lambda = \dfrac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^2}\,dx^2 + \dfrac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y^2}\,dy^2 + \dfrac{\partial^2 L_\lambda}{\partial z^2}\,dz^2 + 2\left(\dfrac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x\partial y}\,dx\,dy + \dfrac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y\partial z}\,dy\,dz + \dfrac{\partial^2 L_\lambda}{\partial z\partial x}\,dz\,dx\right) =$
$= 2(z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dx\,dz)$.
Із рівняння зв'язку маємо, що $d(x+y+z) = d(3) = 0 = dx + dy + dz \implies dz = -dx - dy$.
Підставимо це в d^2L_λ:
$d^2L_\lambda = 2(-ydx^2 + (z - x - y)\,dx\,dy - x\,dy^2)$.

I. $M_0(1,1,1)$ та $\lambda_0 = 1$.
$d^2L_{\lambda_0}(M_0) = 2(-dx^2 - dx\,dy - dy^2) = -2\left(\left(dx + \dfrac{1}{2}\,dy\right)^2 + \dfrac{3}{4}\,dy^2\right) < 0$. Тобто маємо від'ємноозначену квадратичну форму. Отже, $M_0(1,1,1)$ - умовний локальний максимум.

II. $M_1(3,0,0)$ та $\lambda_1 = 0$.
$d^2L_{\lambda_1}(M_1) = 2(-3\,dx\,dy - 3\,dy^2) = -6(dx+dy)\,dy$. Тобто маємо знаконеозначену квадратичну форму. Отже,$M_1(3,0,0)$ - не умовний локальний екстремум.

III. $M_2(0,3,0)$ та $\lambda_2 = 0$ - аналогічно не умовний локальний екстремум.
IV. $M_3(0,0,3)$ та $\lambda_3 = 0$ - аналогічно не умовний локальний екстремум.

8 Інтеграли з параметром

8.1 Основні означення та властивості

Definition 8.1.1 Задано функцію $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, таку, що $\forall y \in [c,d] : f \in \mathcal{R}([a,b])$.
Інтегралом з параметром називають таку функцію $J : [c,d] \to \mathbb{R}$:

$$J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Proposition 8.1.2 Неперервність
Задано функцію $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, таку що $f \in C([a,b] \times [c,d])$. Тоді $J \in C([c,d])$.

Proof.
Зауважимо, що $f \in C([a,b] \times [c,d])$. то звідси $\forall y \in [c,d] : f \in C([a,b]) \implies f \in \mathcal{R}([a,b])$. Тобто функція $J(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ коректно визначена.

$f(x,y) \in C([a,b] \times [c,d]) \implies f(x,y) \in C_{unif}([a,b] \times [c,d]) \implies$
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in [a,b] \times [c,d] : \|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\| =$
$= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Тоді $|J(y_1) - J(y_2)| = \left| \displaystyle\int_a^b f(x,y_1)\,dx - \int_a^b f(x,y_2)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \boxed{<}$
Якщо я оберу $(x,y_1),(x,y_2)$ так, що $\|(x,y_1) - (x,y_2)\| = \sqrt{(y_1-y_2)^2} = |y_1 - y_2| < \delta$, то тоді $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$
$\boxed{<} \displaystyle\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$.
Збираючи пазл, отримаємо $J \in C_{unif}([c,d]) \implies J \in C([c,d])$. ■

Proposition 8.1.3 Диференційованість
Задано функцію $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, таку, що $f \in C([a,b] \times [c,d])$. Відомо, що $\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a,b] \times [c,d])$.
Тоді J - диференційована на $[c,d]$, при цьому $J'(y) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.

Proof.
Диференційованість означає існування похідної, тобто необхідно довести її існування.
$\dfrac{J(y+\Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \dfrac{1}{\Delta y} \displaystyle\int_a^b f(x,y+\Delta y) - f(x,y)\,dx \boxed{=}$
Згадаємо Ньютона-Лейбніца та властивості інтеграла та розпишемо підінтегральний вираз таким чином:
$f(x,y+\Delta y) - f(x,y) = \displaystyle\int_y^{y+\Delta y} f'_y(x,t)\,dt = \int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt$
$\boxed{=} \dfrac{1}{\Delta y} \displaystyle\int_a^b \left(\int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt \right) dx$
Тепер зафіксуємо т. y_0 та розпишемо праву частину рівності, що ми доводимо:
$\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\Delta y} \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt \right) dx = \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt \right) dx$
Ну а тепер час доводити існування похідної:
$\left| \dfrac{J(y_0+\Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} - \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx \right| = \left| \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt \right) dx - \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt \right) dx \right| =$
$= \left| \dfrac{1}{\Delta y} \displaystyle\int_a^b \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt \right) dx \right| \boxed{<}$
За умовою твердження,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C([a,b] \times [c,d]) \implies \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C_{unif}([a,b] \times [c,d]) \implies$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,t),(x,y_0) \in [a,b]\times[c,d] : \|(x,t)-(x,y_0)\| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

$\boxed{<} \displaystyle\int_a^b \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{1}{\Delta y}\frac{\varepsilon}{b-a}\,dt\,dx = \varepsilon$

Знову збираємо пазл - отримуємо, що: $\forall y_0 \in [c,d]$:

$\exists \displaystyle\lim_{\Delta y\to 0} \frac{J(y_0+\Delta y)-J(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx = J'(y_0)$. Отже, J - диференційована на $[c,d]$. ■

Proposition 8.1.4 Інтегрованість

Задано функцію $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$, таку, що $f \in C([a,b]\times[c,d])$.

Тоді $J \in \mathcal{R}([c,d])$, а також $\displaystyle\int_c^d \underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{=J(y)}\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$.

Proof.

Розглянемо дві функції: $h(t) = \displaystyle\int_c^t \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \quad g(t) = \int_a^b \int_c^t f(x,y)\,dy\,dx$. В нашому випадку $t \in [c,d]$. Якщо $t = c$, то маємо, що $h(c) = g(c) = 0$.

Необхідно знайти, чому дорівнює $h'(t), g'(t)$. Зробимо позначення: $h(t) = \displaystyle\int_c^t J(y)\,dy \quad g(t) = \int_a^b F(x,t)\,dx$.

Маємо два інтеграли з параметром t. Другий інтеграл задовольняє умові з **Prp 3.1.3**, тоді можемо знайти похідну. Дійсно,

$F(x,t) \in C([a,b]\times[c,d])$, тому що $|F(x,t)-F(x_0,t_0)| = \left|\displaystyle\int_c^t f(x,y)\,dy - \int_c^{t_0} f(x_0,y)\,dy\right| =$

$= \left|\displaystyle\int_c^t f(x,y)-f(x_0,y)\,dy - \int_{t_0}^t f(x_0,y)\,dy\right|$, далі неважко оцінити.

А також $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x,t) = f(x,t) \in C([a,b]\times[c,d])$.

Перший - це інтеграл від верхньої межі, тому автоматично $h'(t) = J(t)$.

Другий рахується за попереднім твердженням, всі умови виконані для цього.

$g'(t) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dt = \int_a^b f(x,t)\,dx = J(t)$.

Таким чином, $\forall t \in [c,d] : h'(t) = g'(t) \implies h(t) = g(t) + C$.

Але оскільки $h(c) = g(c) = 0$, то одразу $C = 0 \Rightarrow h(t) = g(t)$.

Ну а тоді $h(d) = g(d) \implies \displaystyle\int_c^b \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$. ■

Example 8.1.5 Обчислити $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$.

Маємо $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$. Розглянемо функцію $f(x,\alpha) = x^2\cos\alpha x$ на $[0,2]\times[-1,1]$ (можна й менше взяти другу сторону, головне щоб навколо т. 0). Ця функція є неперервною, тоді $I(\alpha)$ неперервна, зокрема в т. $\alpha = 0$.

$\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx = \lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = I(0) = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3} = \frac{8}{3}$.

Example 8.1.6 Знайти похідну функції $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^2 e^{\alpha x^2}\frac{dx}{x}$.

Позначу $f(x,\alpha) = \dfrac{e^{\alpha x^2}}{x}$. Знайдемо частинну похідну за другим аргументом: $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = \dfrac{x^2 e^{\alpha x^2}}{x} = xe^{\alpha x^2}$.

Зауважимо, що f та $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ неперервні на прямокутнику $[1,2]\times[-1,1]$, тому ми можемо диференціювати функцію I, а також $I'(\alpha) = \displaystyle\int_1^2 xe^{\alpha x^2}\,dx$.

$I'(\alpha) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^2 e^{\alpha x^2}\,dx^2 = \frac{1}{2\alpha}e^{\alpha x^2}\Big|_1^2 = \frac{e^{4\alpha}-e^{\alpha}}{2\alpha}$.

Example 8.1.7 Обчислити $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$, якщо $a, b > 0$.

Зауважимо, що $\dfrac{x^b - x^a}{\ln x} = \displaystyle\int_a^b x^y\,dy$. Тоді взагалі маємо обчислити $\displaystyle\int_0^1 \int_a^b x^y\,dy\,dx$.
Оскільки функція $f(x,y) = x^y$ є неперервною на прямокутнику $[0,1] \times [a,b]$, то звідси ми можемо поміняти місцями порядок інтегрування, тобто
$$\int_0^1 \int_a^b x^y\,dy\,dx = \int_a^b \int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = \ln(y+1)\Big|_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$
Зараз будуть більш специфічні приклади. Але на них простіше зрозуміти узагальнення теореми про неперервність та диференційованість.

Example 8.1.8 Знайти $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} \int_\alpha^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.
Інтуїтивно хочеться, щоб це дорівнювало $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Наш ліміт тому запишемо так:
$$\lim_{\alpha\to 0} \int_\alpha^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \lim_{\alpha\to 0} \left(\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} + \int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} - \int_0^\alpha \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \right).$$
Перший інтеграл, тобто $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Тому задля нашої інтуїції, треба довести, що останні два інтеграла дорівнюють нулю.
$$\left| \int_0^\alpha \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \right| \le \int_0^\alpha \left| \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \right| \le \int_0^\alpha M\,dx = M\alpha \to 0.$$
$\left| \displaystyle\int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \right| \le M(1+\alpha-1) \to 0$ аналогічними міркуваннями.
Тут $M = \displaystyle\max_{x\in[0,2]\times[0,1]} \frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$, і це можна знайти через неперервність самої функції.
Отже, $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} \int_\alpha^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

Remark 8.1.9 Теорему про неперервність інтеграла з параметром можна узагальнити.
Маємо $f \in C([a,b]\times[c,d])$ та $a(y), b(y) \in C([c,d])$, причому $a(y) \ge a$ та $b(y) \le b$.
Тоді $J(y) = \displaystyle\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \in C([c,d])$.
Доведення аналогічне тому, як попередній приклад розв'язувався.

Example 8.1.10 Знайти похідну функції $F(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$, нехай $\alpha \ge 0$.
Інтуїтивно хочеться продиференціювати як інтеграл від межі та інтеграл від параметру.
Оскільки $\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x} = f(x,\alpha)$ неперервна функція, то вона має первісну H. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца:
$$F(\alpha) = H(x,\alpha)\Big|_\alpha^{\alpha^2} = H(\alpha^2,\alpha) - H(\alpha,\alpha).$$
$$F'(\alpha) = \frac{\partial H}{\partial \alpha^2}(\alpha^2,\alpha)\frac{d\alpha^2}{d\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha^2,\alpha) - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha,\alpha)\frac{d\alpha}{d\alpha} - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha,\alpha) =$$
$$= \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha^2}(\alpha^2,\alpha)\cdot 2\alpha - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha,\alpha)\cdot 1 \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha^2,\alpha) - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha,\alpha) \right) =$$
$$= \big(f(\alpha^2,\alpha)\cdot 2\alpha - f(\alpha,\alpha)\cdot 1\big) + \big(f(\alpha^2,\alpha) - f(\alpha,\alpha)\big).$$
Підставимо все, що маємо - отримаємо:
$$F'(\alpha) = \frac{\ln\big(1+\alpha^3\big)}{\alpha^2}\cdot 2\alpha - \frac{\ln\big(1+\alpha^2\big)}{\alpha} + \frac{\ln\big(1+\alpha^3\big)}{\alpha^2} - \frac{\ln\big(1+\alpha^2\big)}{\alpha} = \frac{\ln\big(1+\alpha^3\big)}{\alpha}\left(2+\frac{1}{\alpha}\right) - 2\frac{\ln\big(1+\alpha^2\big)}{\alpha}.$$

Remark 8.1.11 Для диференціювання існує більш загальна формула, якщо досліджувати функцію $J(y) = \displaystyle\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$. Вимагаємо $f, \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a,b]\times[c,d])$, $a,b \in C([c,d])$, причому $a(y) \ge a$ та $b(y) \le b$. Тоді маємо:
$$J'(y) = f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$
Для її доведення можна скористатися формулою Ньютона-Лейбніца.

8.2 Невласні інтеграли з параметром. Ознаки збіжності

Definition 8.2.1 Задано функцію $f : A \times B \to \mathbb{R}$, де $A, B \subset \mathbb{R}$, та $y_0 \in \mathbb{R}$ - гранична точка для B. Функція f **поточково збігається** до функції φ при $y \to y_0$, якщо

$$\forall x \in A : \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

Функція f **збігається рівномірно** до функції φ при $y \to y_0$ на множині A, якщо

$$\sup_{x \in A} |f(x, y) - \varphi(x)| \to 0, y \to y_0$$

Позначення: $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x), y \to y_0$.

Новий вигляд збіжності можна призвести до збіжності функціональних послідовностей таким твердженням.

Proposition 8.2.2 $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x), y \to y_0$ на множині $A \iff \forall \{y_n, n \geq 1\} \subset B : \forall n \geq 1 : y_n \neq y_0 :$ $f(x, y_n) \rightrightarrows \varphi(x), n \to \infty$ на множині A.
Випливає з означення рівномірної збіжності.

Theorem 8.2.3 Критерій Коші

$f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x), y \to y_0$ на $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall y_1, y_2 \in B, y_1, y_2 \neq y_0 : \begin{cases} |y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta \end{cases} \implies$ $\sup_{x \in A} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *Вказівка: означення рівномірної границі та нерівність трикутника.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall y_1, y_2 \in B, y_1, y_2 \neq y_0 : \begin{cases} |y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta \end{cases} \implies \sup_{x \in A} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon$.
Візьмемо деяку послідовність $\{y_n, n \geq 1\}$, де $y_n \neq y_0, y_n \to y_0$. Тоді
$\exists N : \forall n, m \geq N : |y_n - y_0| < \delta, |y_m - y_0| < \delta$. За умовою, звідси $\sup_{x \in A} |f(x, y_n) - f(x, y_m)| < \varepsilon$. За критерієм Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності, $f(x, y_n)$ є рівномірно збіжною на A. Отже, $f(x, y)$ - рівномірно збіжний на A за **Prp. 5.2.2.** ■

Тепер уже до суті цього підрозділу.

Definition 8.2.4 Задано функцію $f : [a, \omega) \times A$, таку, що $\forall y \in A : \forall c \in [a, \omega) : f \in \mathcal{R}([a, c])$. Також маємо збіжний невласний інтеграл із параметром $J(y) = \displaystyle\int_a^\omega f(x, y)\, dx$, $\forall y \in A$.
Невласний інтеграл **збігається рівномірно** на множині A, якщо

$$\sup_{y \in A} \left| \int_a^\omega f(x, y)\, dx - \int_a^c f(x, y)\, dx \right| \overset{c \to \omega}{\rightrightarrows} 0$$

Remark 8.2.5 Воно якось схоже за рівномірну збіжність функції, але трошки не так. Тут розглядається взагалі-то рівномірна збіжність функції $g(x, y)$ до функції $g(y)$ ТА при цьому аргумент $x \to x_0$.

Theorem 8.2.6 Критерій Коші
$\displaystyle\int_a^\omega f(x, y)\, dx$ - збіжний рівномірно на $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists C : \forall c_1, c_2 \in (C, \omega) : \sup_{y \in A} \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon$.
Випливає з критерію Коші рівномірної збіжності функцій.

Theorem 8.2.7 Ознака Вейєрштраса
Задані функції $f : [a, \omega) \times A \to \mathbb{R}$, $g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ такі, що
1) $\forall x \in [a, \omega) : \forall y \in A : |f(x, y)| \leq g(x)$;
2) $\displaystyle\int_a^\omega g(x)\, dx$ - збіжний.
Тоді $\displaystyle\int_a^\omega f(x, y)\, dx$ - збіжний рівномірно на A.

Proof.
$\sup\limits_{y\in A}\left|\int_c^\omega f(x,y)\,dx\right| \le \left|\int_c^\omega g(x)\,dx\right| \overset{c\to\omega}{\to} 0.$ ■

Example 8.2.8 Довести, що $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ рівномірно збіжний на множині $[1+\gamma,+\infty)$, якщо $\gamma>0$.
Маємо функцію $f(x,\alpha)=\dfrac{1}{x^\alpha}$. Також відома оцінка $x^\alpha > x^{1+\gamma} \implies \dfrac{1}{x^\alpha} < \dfrac{1}{x^{1+\gamma}}$, виконано $\forall x\ge 1$.
Також $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\gamma}}$ - збіжний невласний інтеграл (еталон). Тому за ознакою Вейєрштрасса, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ рівномірно збіжний на множині $[1+\gamma,+\infty)$.

Example 8.2.9 Довести, що $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ не є рівномірно збіжним на множині $(1,+\infty)$.
Дійсно, $\sup\limits_{\alpha>1}\left|\displaystyle\int_c^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\right| = \sup\limits_{\alpha>1}\left(\dfrac{1}{c^{\alpha-1}}\dfrac{1}{1-\alpha}\right) = +\infty \not\to 0$ при $c\to+\infty$.

Theorem 8.2.10 Ознака Діріхле та Абеля
Задані функції $f:[a,\omega)\times A\to\mathbb{R}$, $g:[a,\omega)\times A\to\mathbb{R}$ такі, що виконана одна з двох пар умов:

$\displaystyle\int_a^A f(x,y)\,dx$ - рівномірно обмежена на $[a,\omega)$.	$\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ - збіжний рівномірно на A.
g - монотонна на $[a,\omega)$ та $g(x,y)\rightrightarrows 0$, $x\to\omega$.	g - монотонна на $[a,\omega)$ та рівномірно обмежена на $[a,\omega)\times A$.
ознака Діріхле	*ознака Абеля*

Тоді $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,dx$ - рівномірно збіжний на A.
Поки без доведення.

Example 8.2.11 Довести, що $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}\,dx$ збіжний рівномірно на $[\alpha,+\infty)$, $\alpha>0$.
Розглянемо функції $f(x,y)=\sin xy$ та $g(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.
$\displaystyle\int_0^A \sin xy\,dx = -\frac{1}{y}\cos xy\Big|_0^A = -\frac{1}{y}\cos Ay+\frac{1}{y}$. Ця штука - рівномірно обмежена на $[0,+\infty)$, тому що $\dfrac{1}{y}|1-\cos Ay| \le \dfrac{1}{y} \le \dfrac{1}{\alpha}$, виконано $\forall A\in[0,+\infty)$.
$\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ ясно, що монотонна на $[0,+\infty)$ та рівномірно прямує до нуля при $x\to+\infty$.
Отже, за ознакою Діріхле, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}\,dx$ - збіжний рівномірно на $[\alpha,+\infty)$.

Example 8.2.12 Довести, що $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}\operatorname{arctg} xy\,dx$ збіжний рівномірно на $[\alpha,+\infty)$, $\alpha>0$.
Розглянемо функції $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}$ та $g(x,y)=\operatorname{arctg} xy$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}$ - збіжний рівномірно, попередній приклад.
$\operatorname{arctg} xy$ - монотонна по x, а також $\forall x:\forall y: |\operatorname{arctg} xy|\le\dfrac{\pi}{2}$, тобто рівномірно обмежена.
Отже, за ознакою Абеля, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}\operatorname{arctg} xy\,dx$ - збіжний рівномірно на $[\alpha,+\infty)$.

Theorem 8.2.13 Ознака Діні
Задано функцію $f\in C([a,\omega)\times[c,d])$. Також відомо, що $f\ge 0$ та $J(y)=\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx\in C([c,d])$.
Тоді J - збіжний рівномірно на $[c,d]$.
Випливає з ознаки Діні рівномірної збіжності функціонального ряда
TODO: додати ознаку Діні для цього випадку

8.3 Властивості невласного інтегралу

Proposition 8.3.1 Неперервність
Задано функцію $f:[a,\omega)\times[c,d]\to\mathbb{R}$, таку, що $f\in C([a,\omega)\times[c,d])$. Також J - рівномірно збіжний

на $[c,d]$. Тоді $J \in C([c,d])$.

Proof.
За означенням рівномірної збіжності, маємо, що $\sup\limits_{y\in[c,d]} \left| \int_\xi^\omega f(x,y)\,dx \right| \to 0, \xi \to \omega$

Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists \xi > a : \sup\limits_{y\in[c,d]} \left| \int_\xi^\omega f(x,y)\,dx \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Оцінимо J:

$|J(y_1) - J(y_2)| = \left| \int_a^\omega f(x,y_1)\,dx - \int_a^\omega f(x,y_2)\,dx \right| =$

$= \left| \int_a^\xi f(x,y_1)\,dx - \int_a^\xi f(x,y_2)\,dx + \int_\xi^\omega f(x,y_1)\,dx - \int_\xi^\omega f(x,y_2)\,dx \right| \le$

$\le \left| \int_a^\xi f(x,y_1) - f(x,y_2)\,dx \right| + \left| \int_\xi^\omega f(x,y_1)\,dx \right| + \left| \int_\xi^\omega f(x,y_2)\,dx \right| \boxed{<}$

Перший модуль: $f \in C_{unif}([a,\xi] \times [c,d])$

$\implies \exists \delta : \forall y_1, y_2 : |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{\xi - a}$

Другий модуль: $\sup\limits_{y\in[c,d]} \left| \int_\xi^\omega f(x,y)\,dx \right| < \dfrac{\varepsilon}{3} \implies \forall y \in [c,d] : \left| \int_\xi^\omega f(x,y)\,dx \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\boxed{<} \int_a^\xi \dfrac{\varepsilon}{\xi - a}\,dx + \dfrac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Збираємо пазл та маємо, що $J \in C_{unif}([c,d]) \implies J \in C([c,d])$. ■

Proposition 8.3.2 Інтегрованість
Задана функція $f : [a,\omega) \times [c,d] \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a,\omega) \times [c,d])$
Також J - рівномірно збіжний на $[c,d]$. Тоді $J \in D([c,d])$ та

$\int_c^d \underbrace{\int_a^\omega f(x,y)\,dx}_{=J(y)}\,dy = \int_a^\omega \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$.

Proof.
Розглянемо $\int_c^d J(y)\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy + \int_c^d \int_b^\omega f(x,y)\,dx\,dy$

Перший доданок - це визначений інтеграл, тому там виконується **Prp 3.1.4.**, тобто

$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

Другий доданок - цікавіше

$\left| \int_c^d \int_b^\omega f(x,y)\,dx\,dy \right| \le \int_c^d \left| \int_b^\omega f(x,y)\,dx \right| dy \le \int_c^d \sup\limits_{y\in[c,d]} \left| \int_b^\omega f(x,y)\,dx \right| dy =$

$= \sup\limits_{y\in[c,d]} \left| \int_b^\omega f(x,y)\,dx \right| (d-c) \to 0, b \to \omega$

Якщо $b \to \omega$, то тоді отримаємо

$\int_c^d J(y)\,dy = \int_a^\omega \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy + 0 = \int_a^\omega \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$. ■

Proposition 8.3.3 Диференційованість
Задана функція $f : [a,\omega) \times [c,d] \to \mathbb{R}$, така, що:

1) $\exists y_0 \in [c,d] : J(y_0)$ - збіжний;

2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a,\omega) \times [c,d])$;

3) $\int_a^\omega \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ - рівномірно збіжний.

Тоді J - збіжний, диференційована в $[c,d]$, при цьому $J'(y) = \int_a^\omega \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.

Proof.
Розглянемо функцію $I(y) = \int_a^\omega \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ - неперервна за умовною рівномірна. Часткові похідні є неперервними також за умовою. Тоді за **Prp. 3.2.6.**, $I \in \mathcal{R}([y,y_0])$

$\int_{y_0}^{y} I(t)\,dt = \int_a^\omega \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\,dx = \int_a^\omega f(x,y) - f(x,y_0)\,dx = J(y) - J(y_0)$
$\Rightarrow J(y) = \int_{y_0}^{y} I(t)\,dt - J(y_0)$ - обидва збіжні. Тому сума - збіжна
Отже, J - збіжний $\forall y \in [c,d]$
$\Rightarrow J'(y) = I(y) - 0 = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ ■

Example 8.3.4 Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x))}{\operatorname{tg} x}\,dx$.
Ми розглянемо функцію $J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(y\operatorname{tg} x))}{\operatorname{tg} x}\,dx$. Про неї відомо, що:
1) $\exists y_0 = 0 : J(0) = 0$, тобто звіжний;
2) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2\operatorname{tg}^2 x} \in C\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \times [-1,1]\right)$;
3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^2\operatorname{tg}^2 x}\,dx$ - збіжний рівномірно принаймні на $[-1,1]$ за мажорантною Вейєрштраса.
Дійсно, $\frac{1}{1+y^2\operatorname{tg}^2 x} \leq 1, \forall y \in [-1,1]$.
Отже, ми можемо продиференціювати функцію $J(y)$ та отримати:
$J'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^2\operatorname{tg}^2 x}\,dx \overset{t=\operatorname{tg} x}{=} \dots = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+y}$.
$J(y) = \int \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+y}\,dy = \frac{\pi}{2}\ln|1+y| + C$.
Оскільки $J(0) = 0$, то звідси $C = 0$. Наша мета була - знайти $J(1)$.
Таким чином, $J(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x))}{\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

Proposition 8.3.5 Невласне інтегрування невласного інтеграла
Задано функцію $f \in C([a,+\infty) \times [c,+\infty))$, причому $f \geq 0$. Також відомо, що $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \in C([c,+\infty))$, а також $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy \in C([a,+\infty))$.
Тоді якщо $\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$ - збіжний, то $\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx$ - збіжний. Навпаки теж.
Нарешті,
$\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx$.

Proof.
Позначимо $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$, про неї відомо, що $I \in C([c,+\infty))$, а також $\int_c^{+\infty} I(y)\,dy$ - збіжний.
Хочемо довести, що $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_a^R\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$.
Відомо, що $\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$ - збіжний, тобто
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta_1 : \forall d > c : d > \Delta_1 \implies \left|\int_d^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Також відомо, що $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ - збіжний рівномірно за ознакою Діні, тоді
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta_2 : \forall R > a : R > \Delta_2 \implies \forall y \in [c,+\infty) : \left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}$.
Оберемо $\Delta = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$, фіксуємо довільне $d > \Delta$ та $R > \Delta$ таким чином, щоб $d > c, R > a$.
А далі для доведення ліміту зробимо оцінку:
$\left|\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy - \int_c^{+\infty}\int_a^{R} f(x,y)\,dx\,dy\right| = \left|\int_c^{+\infty}\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right| =$

$= \left| \int_c^d \int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy + \int_d^{+\infty} \int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \left| \int_c^d \int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy \right| + \left| \int_d^{+\infty} \int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq$
$\leq \int_c^d \left| \int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy \right| + \left| \int_d^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy \right| < \int_c^d \frac{\varepsilon}{2(d-c)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$
Таким чином, дійсно, $\int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy.$ ■

8.4 Інтеграл Діріхле

Інтегралом Діріхле називають таку рівність, яку зараз доведу (про збіжність вже говорили)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Розглянемо функцію $J(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,dx$, причому підінтегральну функцію ви довизначимо в т. 0. Тоді підінтегральна функція неперервна.
Перш за все $J(a)$ - рівномірно збіжний на $[0,+\infty)$, бо за ознакою Абеля,
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ - збіжний рівномірно (доводили);
e^{-ax} - монотонна відносно x та рівномірно обмежена, бо $|e^{-ax}| \leq 1$.
Із цього ми отримуємо, що $J \in C([0,+\infty))$, а тому $J(0) = \lim\limits_{a \to 0} J(a)$.
Далі маємо:
1) $\exists a_0 = 0 : J(0)$ - збіжний;
2) $\frac{\partial f}{\partial a} = -e^{-ax} \sin x \in C([0,+\infty) \times [0,+\infty))$.
3) $-\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x\,dx$ збіжний рівномірно на $[\gamma,+\infty)$, де $\gamma > 0$, за мажорантною Вейєрштраса. Дійсно, $|e^{-ax}\sin x| \leq e^{-\gamma x}$, а $\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x}\,dx$ - збіжний.
Таким чином, $J'(a) = -\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x\,dx = \dots = -\frac{1}{1+a^2}$.
$\implies$ $J(a) = -\operatorname{arctg} a + C$, причому ця рівність виконана $\forall a \in [\gamma,+\infty)$. Але водночас $J(0) = \lim\limits_{a\to 0} J(a) = C$.
Але ми ще маємо, що $|J(a)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right| dx \overset{|\sin x| \leq x}{\leq} \int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$.
А тому $J(a) \to 0$ при $a \to +\infty$. Звідси випливає, що
$0 = -\frac{\pi}{2} + C \implies J(0) = \frac{\pi}{2}$.

Додатково дослідимо ось такий інтеграл та доведемо рівність:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$$

Поки обмежимось $a > 0$, тоді
$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx \overset{ax=t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.
$F(-a) = -F(a) = -\frac{\pi}{2}$ та $F(0) = 0$ - тут відносно ясно.

8.5 Інтеграл Ейлера-Пуассона

Інтегралом Ейлера-Пуассона називають таку рівність, яку зараз доведу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Позначимо $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Зробимо заміну $x = at$. А потім помножимо обидві частини рівності на e^{-a^2} Тоді;

$Je^{-a^2} = \int_0^{+\infty} e^{-a^2} e^{-a^2t^2} a\,dt$.

А потім проінтегруємо обидві частини рівності по a на $[0,+\infty)$ - отримаємо:

$\int_0^{+\infty} Je^{-a^2}\,da = J\int_0^{+\infty} e^{-a^2}\,da = J^2$.

А з іншого боку, ми отримали:

$J^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-a^2}e^{-a^2t^2} a\,dt\,da \overset{?}{=} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-a^2} a\,da\,dt \overset{s=-a^2t^2-a^2}{=}$

$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2+1)}\int_{-\infty}^0 e^s\,ds\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2(t^2+1)}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

$\implies J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Варто обґрунтувати рівняння зі знаком питання.

Функція $f(t,a) = ae^{-a^2(t^2+1)} \in C([0,+\infty)\times[0,+\infty))$, причому $f \geq 0$.

Також $\int_0^{+\infty} ae^{-a^2(t^2+1)}\,da = \frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1} \in C([0,+\infty))$ та $\int_0^{+\infty} ae^{-a^2(t^2+1)}\,dt = Je^{-a^2} \in C([0,+\infty))$ (неважко довести, шо J рівномірно збігається).

Нарешті, $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ae^{-a^2(t^2+1)}\,da\,dt$ ми знайшли та виявився збіжним.

Отже, рівність ? є справедливим.

8.6 Гамма-функція

Definition 8.6.1 Гамма-функцією називають таку функцію:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \alpha > 0$$

Lemma 8.6.2 $\alpha > 0$ - область збіжності гамми-функції.

Proof.

$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$.

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка - це $x = 0$.

Порівняємо з інтегралом $\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ - збіжний для $\alpha > 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1$. Отже, обидва збіжні, тому перший доданок - збіжний.

Розглянемо другий інтеграл. Особлива точка - це $x = \infty$.

Порівняємо з інтегралом $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ - збіжний для $\alpha > 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ за Лопіталя, } \alpha \geq 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1-\alpha}e^{\frac{x}{2}}} = 0, \alpha < 1 \end{array}\right.$. Отже, обидва збіжні, тому другий доданок - збіжний.

Остаточно, $\Gamma(\alpha)$ - збіжний при $\alpha > 0$. ■

Lemma 8.6.3 $\Gamma \in C^\infty((0,+\infty))$

Proof.

Коли будемо диференціювати n разів Γ-функцію, ми очікуватимемо таке:

$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$.

Спробуємо зараз довести, що $\Gamma^{(n)}$ - рівномірно збіжний на проміжку $[a,b] \subset (0,+\infty)$.

Маємо $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$.

Розглянемо перший інтеграл. Використаємо мажоранту Вейєрштрасса:

$|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x| = x^{\alpha-1}e^{-x}(-1)^n\ln^n x \leq \left[\begin{matrix}(-1)^n x^{b-1}e^{-x}\ln^n x \\ (-1)^n x^{a-1}e^{-x}\ln^n x\end{matrix}\right.$.
Ситуації тут можуть бути різними, але поведінка інтеграла не зміниться. Я буду на розгляд брати перший випадок.
Тобто дослідимо $\displaystyle\int_0^1 x^{b-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ на збіжність. Відомо, що $\ln x = o(x^{-\varepsilon}), x \to 0$, де $\varepsilon > 0$. Тоді правилом Лопіталя можна довести, що $\ln^n x = o(x^{-\varepsilon}), x \to 0$.
Завдяки цьому ми візьмемо $\displaystyle\int_0^1 x^{b-1}x^{-\varepsilon}e^{-x}\,dx$ - збіжний, допоки $b > \varepsilon$. Це доводили під час попередньої леми.
А далі $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^{b-1}e^{-x}\ln^n x}{x^{b-1}x^{-\varepsilon}e^{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln^n x}{x^{-\varepsilon}} = 0$.
Отже, $\displaystyle\int_0^1 x^{b-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ - збіжний. І тому за мажорантною Вейєрштрасса, $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ - збіжний рівномірно на $[a,b]$.
Аналогічно доводиться, що $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ - збіжний рівномірно на $[a,b]$. Там та сама оцінка на мажоранту, а також треба використати $\ln x = o(x^{\varepsilon}), x \to +\infty$, де $\varepsilon > 0$.
Остаточно, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ - збіжний рівномірно на $[a,b] \subset (0,+\infty)$, що й доводить $\Gamma \in C^\infty((0,+\infty))$. ■

Theorem 8.6.4 $\forall \alpha > 0 : \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
Вказівка: ліву частину інтегруємо частинами, $u = x^\alpha, dv = e^{-x}\,dx$.

Особливий випадок при $\alpha \in \mathbb{N}$.
$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1\Gamma(1)$
$\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$.
Таки чином, маємо результат:

Corollary 8.6.5 $\Gamma(n+1) = n!$

А далі перевіримо, чому дорівнює гамма-функція в т. $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx \overset{\text{Заміна: } t=\sqrt{x}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$
Далі скористаємось тотожністю $\Gamma(\alpha+1) = \Gamma(\alpha)$, щоб знайти $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+n\right)$. Отримаємо:

Corollary 8.6.6 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+n\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$

8.7 Бета-функція

Definition 8.7.1 Бета-функцією називають таку функцію:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \alpha,\beta > 0$$

Lemma 8.7.2 $\alpha,\beta > 0$ - область збіжності бети-функції.

Proof.
$\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$.
Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка - це $x = 0$.
Порівняємо з інтегралом $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}\,dx$ - збіжний для $\alpha > 0$.
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}} = 1$. Отже, обидва збіжні, тому перший доданок - збіжний.
Розглянемо другий інтеграл. Проводимо заміну $1-x = t$, тоді маємо:

$-\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\,dt$ - це той самий перший доданок. І він вже буде збіжним, якщо $\beta > 0$.
Остаточно, $B(\alpha,\beta)$ - збіжний при $\alpha > 0, \beta > 0$. ■

Proposition 8.7.3 $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy$
Вказівка: зробити заміну $x = \dfrac{y}{1+y}$.

Proposition 8.7.4 $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$.
Вказівка: $x = 1-t$.

Proposition 8.7.5 $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\alpha-1}{\beta+\alpha-1}B(\alpha-1,\beta)$ при $\alpha > 1$.
Вказівка: $u = x^{\alpha-1}$.

Зауважимо, що $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha) = \dfrac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}B(\beta-1,\alpha) = \dfrac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta-1)$ при $\beta > 1$.
Ще зауважимо, що $B(\alpha,1) = \dfrac{1}{\alpha}$, якщо порахувати B-функцію.
Використовуючи два зауваження, можемо отримати ось це:
$B(\alpha,n) = \dfrac{n-1}{\alpha+n-1}B(\alpha,n-1) = \dfrac{n-1}{\alpha+n-1}\dfrac{n-2}{\alpha+n-2}\dots\dfrac{2}{\alpha+2}\dfrac{1}{\alpha+1}\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}$
Зокрема при $\alpha = m$ ми отримаємо:
$B(m,n) = \dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$

8.8 Зв'язок між Γ та B функціями

Proposition 8.8.1 $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha,n)$.

Proof.
$\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \overset{x=\ln\frac{1}{u}}{=} \int_0^1 \ln^{\alpha-1}\frac{1}{u}\,\frac{1}{u}\,du = \int_0^1 (-\ln u)^{\alpha-1}\,du = \int_0^1 \lim_{t\to 0}\left(\frac{1-u^t}{t}\right)^{\alpha-1} du =$
$= \displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-u^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha-1} du \overset{\Gamma\in C((0,+\infty))}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^{\alpha-1}(1-u^{\frac{1}{n}})^{\alpha-1}\,du \overset{u=s^n}{=} \lim_{n\to\infty} n^\alpha \int_0^1 s^{n-1}(1-s)^{\alpha-1}\,ds =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(n,\alpha)$ ■

Theorem 8.8.2 Функціональне рівняння Ейлера
$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$.
$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\alpha\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\alpha\right) = \dfrac{\pi}{\cos\pi\alpha}$ при $-\dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Proof.
Використовуючи **Prp 3.8.1.**, отримаємо:
$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \dfrac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} \lim\limits_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\dfrac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n-\alpha}\dfrac{1}{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\dots\left(1+\frac{\alpha}{n-1}\right)}\dfrac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha}{n-1}\right)} =$
$= \dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)}$
В теорії рядів Фур'є (колись згодом) ми одержимо формулу:
$\sin(\pi\alpha) = \pi\alpha\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1-\dfrac{\alpha^2}{2^2}\right)\dots\left(1-\dfrac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right) \overset{\text{або}}{=} \pi\alpha\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{\alpha^2}{n^2}\right)$.
Власне звідси отримуємо $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$.

Друга формула вказівка: заміна $\beta = \alpha + \dfrac{1}{2}$. ■

Theorem 8.8.3 Зв'язок між Γ та B
$B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Proof.
Розглянемо $\Gamma(\alpha+\beta)$ та проведемо заміну $x = y(t+1), dx = (t+1)\,dy$.
$\Gamma(\alpha+\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}\,dx = (t+1)^{\alpha+\beta}\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}e^{-y(t+1)}\,dy$.
Отримаємо
$\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}e^{-y(t+1)}\,dy$
Помножимо обидві частини на $t^{\alpha-1}$ та проінтегруємо від 0 до $+\infty$ по t:
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}t^{\alpha-1}e^{-y}e^{-yt}\,dy\,dt$
$\Gamma(\alpha+\beta)\cdot B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} y^{\beta-1}e^{-y}\int_0^{+\infty} y^{\alpha}t^{\alpha-1}e^{-yt}\,dt\,dy$.
Внутрішній інтеграл при заміні $yt = x$ стане рівним $\Gamma(\alpha)$. Його виносимо з-під зовнішнього інтегралу, а сам інтеграв вже є $\Gamma(\beta)$. Тоді
$\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$.

А тепер час обґрунтувати обережно зміну порядку інтегрування: із $dy\,dt$ до $dt\,dy$.
Розглянемо функцію $f(t,y) = y^{\alpha+\beta-1}t^{\alpha-1}e^{-y(t+1)}$. Ми обмежимось лише випадком $\alpha > 1, \beta > 1$.
Зрозуміло, що $f \geq 0$, а також $f \in C([0,+\infty)\times[0,+\infty))$. В т. $(t,0),(0,y)$ все ок, тому що при наших α,β ми маємо $y^{\alpha+\beta-1} \to 0, t^{\alpha-1} \to 0$ при $y \to 0, t \to 0$.
$I(y)\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt = \Gamma(\alpha)y^{\beta-1}e^{-y}$ - це ми рахували вище. $F \in C([0,+\infty))$.
$J(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dy = \Gamma(\alpha+\beta)\frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha+\beta}}$ - теж вище було. $J \in C([0,+\infty))$.
Також $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt\,ds = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$, тобто це - збіжний інтеграл.
Отже, зміна порядку інтегралів є справедливою лише для $\alpha > 1, \beta > 1$, тобто
$B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ справедлива для $\alpha,\beta > 1$.

$B(\alpha-1,\beta-1) = \dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}B(\alpha,\beta-1) = \dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}\cdot\dfrac{\alpha+\beta-1}{\beta-1}B(\alpha,\beta)$, а тут уже $\alpha,\beta > 1$. Тоді
$B(\alpha-1,\beta-1) = \dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}\dfrac{\alpha+\beta-1}{\beta-1}B(\beta,\alpha) = \dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}\dfrac{\alpha+\beta-1}{\beta-1}\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} =$
$= \dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}\dfrac{\alpha+\beta-1}{\beta-1}\dfrac{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta-1)\Gamma(\beta-1)}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\Gamma(\alpha+\beta-2)} = \dfrac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha-1+\beta-1)}$.
Отже, ми довели нашу формулу зв'язка для всіх $\alpha > 0, \beta > 0$. ■