Зміст

1 Диференціальні рівняння першого порядку

1.1 Основні означення

Definition 1.1.1. Задана область $D \subset \mathbb{R}^2$ - відкрита та однозв'язна; функція $f : D \to \mathbb{R}$
Диференціальним рівнянням першого порядку називається наступний вираз:

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Definition 1.1.2. Розв'язком рівняння (1) називається функція $y = \varphi(x)$, що визначений та диференційований на відкритому інтервалі $I \subset \mathbb{R}$, графік якої міститься в області D та задовольняє рівнянню (1)

Definition 1.1.3. Графіком розв'язку $y = \varphi(x)$ називається **інтегральною кривою**

Example 1.1.4. Задане диференціальне рівняння: $y' = \dfrac{y}{x}$
Розв'язком буде функція $\varphi(x) = Cx$, причому:
$I = (0, +\infty)$, якщо $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
$I = (-\infty, 0)$, якщо $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$

Геометричний зміст

Якщо $y = \varphi(x)$ - розв'язок рівняння (1), то $k = \dfrac{d\varphi(x)}{dx}$ - кутовий коефіцієнт до графіку функції $y = \varphi(x)$ в т. x

Remark 1.1.4.1. Розв'язки рівняння (1) іноді зрузчно розглядати як $x = \psi(y)$. Тоді рівняння (1) записують так:

$$x' = \frac{1}{f(x, y)}$$

Remark 1.1.4.2. В загальному випадку розв'язок рівняння (1) може розглядатись як неявна функція $F(x, y) = 0$. Тоді рівняння (1) записують так:

$$dy - f(x, y)dx = 0$$

Definition 1.1.5. Рівнянням Пфаффа називають наступне рівняння:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

(TODO)

Definition 1.1.6. Задана область $D \subset \mathbb{R}^2$ - відкрита та однозв'язна; точка $(x_0, y_0) \in D$
Задачею Коші з початковою умовою (x_0, y_0) називається система рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Розв'якзом називають такий розв'язок функції першого рівняння $y = \varphi(x)$, для якого $\varphi(x_0) = y_0$

Example 1.1.7. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$
Для нього існує єдиний розв'язок $y = \dfrac{x^2}{2}$, $I = \mathbb{R}$

1.2 Деякі типи рівнянь першого порядку

1.2.1 Рівняння з відокремлювальними змінними

Дане рівняння має наступний вигляд:

$$M_1(x)M_2(y)\,dx + N_1(x)N_2(y)\,dy = 0$$

або

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$$

M_1, N_1, f_1 - неперервні на I_1, а M_2, N_2, f_2 - неперервні на I_2.
Розглянемо випадок, коли $M_2(y) \not\equiv 0$, $N_1(x) \not\equiv 0$. Тоді рівняння перепишеться наступним чином:
$\dfrac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx = -\dfrac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy$
Далі проінтегруємо її:
$\displaystyle\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx = -\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy$
Якщо в обох частинах ми знайшли первісні $F_1(x), F_2(y)$, то розв'язок задається неявно таким чином:

$F_1(x) = -F_2(y) + C$
При якихось $x_* \in I_1, y_* \in I_2$ таких, що $M_2(y_*) = 0$, $N_1(x_*) = 0$, ці точки будуть відкинуті. Тобто розв'язок задається на меншому інтервалі

Example. Розв'язати рівняння: $\dfrac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y$
Спочатку перевіримо, коли $\cos^2 y = 0$. Тоді
$y_* \equiv \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ - розв'язок
Тепер поділимо на $\cos^2 y$:
$\dfrac{dy}{\cos^2 y} = 2x\,dx$
Інтегруємо обидві частини та маємо:
$\operatorname{tg} y = x^2 + C$ на інтервалі $I = \mathbb{R} \setminus \{y_*\}$ - розв'язок
Можна привести в іншому вигляді:
$y = \operatorname{arctg}(x^2 + C) + \pi m, m \in \mathbb{Z}$

1.2.2 Однорідне рівняння

Definition 1.2.2.1. Функція $f(x,y)$ називається **однорідною**, якщо:

$$\forall t \neq 0 : f(tx, ty) = f(x,y)$$

Example 1.2.2.2. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ - однорідна, оскільки:
$f(tx,ty) = \dfrac{t^2x^2 + t^2y^2}{t^2xy} = \dfrac{x^2+y^2}{xy} = f(x,y)$

Proposition 1.2.2.3. Функція $f(x,y)$ - однорідна $\iff \exists F(z) :$
$f(x,y) = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$
Proof.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\exists F(z) : f(x,y) = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$
Тоді $f(tx,ty) = F\left(\dfrac{ty}{tx}\right) = F\left(\dfrac{y}{x}\right) = f(x,y)$. Отже, $f(x,y)$ - однорідна

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $f(x,y)$ - однорідна
Тоді $f(x,y) = f\left(x \cdot 1, x \cdot \dfrac{y}{x}\right) = f\left(t \cdot 1, t \cdot \dfrac{y}{x}\right) \overset{f(tx,ty)=f(x,y)}{=} f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$
Тому оберемо $F(z) = f(1,z)$, що й завершує доведення ■

А тепер як розв'язувати. Дано стандартне диф. рівняння:

$$y' = f(x,y)$$

Цього разу $f(x,y)$ - однорідна
Скористаємось наступною заміною:

$$y = xz, \text{де } z = z(x)$$

Знайдемо її похідну:
$y' = z + xz'$
Тоді наше початкове рівняння матиме вигляд:
$z + xz' = f(x, xz) \overset{\text{однорідна}}{=} f(1, z) \overset{\text{позначу}}{=} g(z)$
$xz' = g(z) - z$
Прийшли до рівняння з відокремлювальними змінними
$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{g(z) - z}$...
Після інтегрування замінюємо: $z = \dfrac{y}{x}$. Ну а далі як вийде

Example. Розв'язати рівняння: $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$
Можна помітити, що $\dfrac{tx+ty}{tx-ty} = \dfrac{x+y}{x-y}$. Тобто ця функція - однорідна.
Тому робимо заміну:
$y = xz, z = z(x) \Rightarrow y' = z + xz'$
$z + xz' = \dfrac{1+z}{1-z} \Rightarrow xz' = \dfrac{z^2+1}{1-z} \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{1-z}{z^2+1}\, dz$
$\ln|x| + C = \operatorname{arctg} z - \dfrac{1}{2}\ln\big(z^2+1\big) | \cdot 2$
$\ln x^2 + \ln\big(z^2+1\big)C' = 2\operatorname{arctg} z$
$z = \dfrac{y}{x}$
$2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}$

1.2.3 Лінійне рівняння

Розглядується рівняння наступного вигляду (TODO):

$$y' + a(x)y = b(x)$$

де $a, b \in C(I)$.
При $b(x) \equiv 0$ таке рівняння називають **однорідним**. В іншому випадку - **неоднорідним**
Розв'язок даного рівняння буде складатись так:
$y = y_{\text{g.h.}} + y_{\text{p.inh.}}$
$y_{\text{g.h.}}$ - загальний розв'язок однорідного диф. рівняння

$y_{\text{p.inh.}}$ - частковий розв'язок неоднорідного диф. рівняння
Знайдемо $y_{\text{g.h.}}$:
$y' + a(x)y = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = -a(x)\,dx \Rightarrow \ln|y| = -A(x) + C$
де $A(x) = \displaystyle\int a(x)\,dx$
$\Rightarrow y_{\text{g.h.}} = Ce^{-A(x)}$
Наступним кроком буде знайти $y_{\text{p.inh.}}$. Це можна зробити, якщо в початкове рівняння підставити цей раз наступне:
$y = C(x)e^{-A(x)}$, тут $C(x)$ - функція
Підставляючи, отримаємо задачу - знайти функція $C(x)$. Там рівняння буде з відокремленою змінною. Після чого ми підставляємо $C(x)$ в
$y = C(x)e^{-A(x)} = y_{\text{p.inh}}$

Example. Розв'язати рівняння: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
Тут буде демонструватись ті самі кроки
Спочатку знайдемо загальний однорідний розв'язок:
$y' + 2xy = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = -2x\,dx \Rightarrow \ln|y| = -x^2 + C \Rightarrow y_{\text{g.h.}} = Ce^{-x^2}$
Задамо новий розв'язок: $y = C(x)e^{-x^2}$ та підставимо в початкове:
$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}$
$C'(x) = x \Rightarrow C(x) = \dfrac{x^2}{2} + C_0$
Остаточно отримаємо, що:
$y = e^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + C_0\right) = e^{-x^2}C_0 + e^{-x^2}\dfrac{x^2}{2}$

Інший варіант розв'язку такого рівняння - це метод Бернуллі
Заміна: $y = uv$, де $u = u(x), v = v(x)$
$y' = u'v + v'u$
$\Rightarrow u'v + v'u + a(x)uv = b(x) \Rightarrow u'v + u(v' + a(x)v) = b(x)$
Далі ми $v' + a(x)v = 0$. Там достатньо одного розв'язку. Отримавши v, можемо знайти звідси u

1.2.4 Рівняння Бернуллі

Розглядується рівняння наступного вигляду:

$$y' + a(x)y = b(x)y^\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Remark. При $\lambda = 0$ рівняння буде лінійним.
При $\lambda = 1$ рівняння буде з відокремленими змінними

Якщо $\lambda > 0$, то $y \equiv 0$ буде також розв'язком
А далі ділимо обидві частини на y^λ:
$y'y^{-\lambda} + a(x)y^{-\lambda+1} = b(x)$
Робимо заміну: $z = y^{-\lambda+1}$, $z = z(x)$
$z' = (-\lambda + 1)y^{-\lambda}y'$
$\Rightarrow \dfrac{z'}{1-\lambda} + a(x)z = b(x)$
А далі вже розв'язується лінійне рівняння...

Example. Розв'язати рівняння: $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$
(тут $\lambda = 2$)
$y \equiv 0$ - розв'язок. Далі ділимо на y^2:
$y'y^{-2} + \dfrac{y^{-1}}{x+1} + 1 = 0$
Заміна: $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y'$
$-z' + \dfrac{z}{x+1} + 1 = 0$
Заміна 2: $z = uv \Rightarrow z' = u'v + v'u$
$-u'v - v'u + \dfrac{uv}{x+1} + 1 = 0 \Rightarrow u'v - u(\underbrace{\dfrac{v}{x+1} - v'}_{=0}) = 1$

$\dfrac{v}{x+1} - v' = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow v = \dfrac{1}{x+1}$
$u'\dfrac{1}{x+1} = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow u = \dfrac{1}{2}(x+1)^2 + C$
Зворотня заміна 2: $z = uv = \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{C}{x+1}$
Зворотня заміна 1: $z = y^{-1} = \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{C}{x+1} = \dfrac{(x+1)^2 + 2C}{2(x+1)}$
Остаточно отримаємо:
$y = \dfrac{2(x+1)}{(x+1)^2 + 2C}$
$y \equiv 0$

1.2.5 Рівняння, що можна звести до однорідного

Нехай задане ось таке рівняння:

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

Оскільки ми "хочемо" звести це рівняння до однорідної, то нам необхідно перетворити цю дріб на наступний вигляд

$$Y' = \frac{\alpha_1 X + \beta_1 Y}{\alpha_2 X + \beta_2 Y}$$

Можна компоненти дробу розглянути як два рівняння прямої:
$\begin{cases} \alpha_1 X + \beta_1 Y = 0 \\ \alpha_2 X + \beta_2 Y = 0 \end{cases}$
та помітити, що в них існує єдиний розв'язок $(0, 0)$.

В нашому конкретному випадку:
$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$
Система матиме єдиний розв'язок при умові, що $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Скажімо (x_0, y_0). Тепер для однорідного вигляду я хочу таку заміну на x та y закласти, щоб згодом вони перетнулись в т. $(0, 0)$.
Тоді заміна:
$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dY}{dX} = Y'$
Тому ми отримали рівнання, яку ми "захотіли". І якщо погратись з алгеброю, то буде саме такий вираз:
$Y' = \dfrac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}$
А далі це однорідне рівняння...

Example. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$
Одразу зауважу, що $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$
Знайдемо точку перетину цих прямих:
$\begin{cases} -x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$
Заміна: $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dX = dx \\ dY = dy \end{cases}$
$Y' = \dfrac{2Y - X}{2X - Y}$
Заміна 2: $Y = ZX, Z = Z(X) \Rightarrow Y' = Z + XZ'$
$Z + XZ' = \dfrac{2Z - 1}{2 - Z} \Rightarrow XZ' = \dfrac{Z^2 - 1}{2 - Z} \Rightarrow \dfrac{dX}{X} = \dfrac{2 - Z}{Z^2 - 1} dZ$

$\ln|X| + C = \frac{1}{2}\ln|Z-1| - \frac{3}{2}\ln|Z+1|$
$\ln(CX)^2 = \ln\left|\frac{Z-1}{(Z+1)^3}\right|$
$CX^2 = \frac{Z-1}{(Z+1)^3}$
Зворотня заміна 2:
$CX^2 = \frac{\frac{Y}{X}-1}{(\frac{Y}{X}+1)^3} = \frac{YX^2 - X^3}{(Y+X)^3}$
$C = \frac{Y-X}{(Y+X)^3}$
Зворотня заміна і остаточна відповідь:
$C = \frac{y-x-3}{(y+x-1)^3}$

1.3 Задача Коші

Definition 1.3.1. Задана область $D \subset \mathbb{R}^2$ та функція $f : D \to \mathbb{R}$
Така функція **задовольняє умові Ліпшиця відносно** y, якщо

$$\exists L > 0 : |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Proposition 1.3.2. Задан прямокутник $\Pi = I_a \times I_b \subset \mathbb{R}^2$. Відомо, що функція $f(x,y)$ має часткову похідну f'_y, яка обмежена в D. Тоді f задовільняє умові Ліпшица в D, причому $L = \sup\limits_{(x,y)\in D} |f'_y(x,y)|$

Proof.
Зафіксуємо довільне значення x
За теоремою Лагранжа, $\exists \xi \in (y_1, y_2)$:
$f(x,y_1) - f(x,y_2) = f'_y(x,\xi)\cdot(y_1 - y_2)$
Тоді $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|f'_y x, \xi\right||y_1 - y_2| \leq \underset{\substack{||\\ L}}{\sup\limits_{(x,y)\in D}} |f'_y(x,y)||y_1-y_2|$ ■

А тепер розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

де $f : \Pi = I_a \times I_b \to \mathbb{R}$
$I_a = [x_0 - a, x_0 + a], I_b = [y_0 - b, y_0 + b]$

Наша головна мета: дізнатись, чи буде розв'язок задачі Коші єдиним взагалі і за якими умовами

Lemma 1.3.3. Функція $y(x)$ - розв'язок задачі Коші $\iff$ $y(x)$ задовільняє інтегральному рівнянню:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

Причому $y : I \subset I_a \to I_b$ - диференційована
Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $y(x)$ - розв'язок задачі Коші, тобто
$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \displaystyle\int_{x_0}^{x} y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \Rightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $y(x)$ - розв'язок інтегрального рівняння
Продиференціюємо з обох сторін:
$y'(x) = 0 + f(x, y(x)) = f(x, y(x))$
Більш того, $y(x_0) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))\, dt = y_0$
Отримали, що $y(x)$ - розв'язок нашої задачі Коші $\blacksquare$

Ця лема знадобиться, оскільки розв'язок задачі Коші $y_*(x)$ ми будемо знаходити як границю рівномірно збіжної послідовності функцій $\{y_n(x), n \geq 1\}$ так, що:
$y_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt \ \forall n \in \mathbb{N}$
$y_0(x) \equiv y_0$

Theorem 1.3.4. Теорема Пікара
Задана функція $f : \Pi \to \mathbb{R}$ така, що $f \in C(\Pi)$ та під умовою Ліпшиця відносно y
Тоді задача Коші містить <u>єдиний</u> розв'язок $y_*(x)$ на інтервалі $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$
Proof.
Частина 1. Існування
1) Доведемо **(MI)**, що всі y_n знаходяться в прямокутнику $I_h \times I_b \subset \Pi$, тобто $\forall n \geq 1 : \forall x \in I_h : |y_n(x) - y_0| \leq b$
$n = 1 \Rightarrow |y_1(x) - y_0(x)| = \left| y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt - y_0 \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\, dt \right| \leq$
Оскільки $f \in C(\Pi)$, то вона взагалі є обмеженою, тому $\exists M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|$

$\le M|x-x_0| \le Mh \le M\dfrac{b}{M} = b$

Нехай умова виконується для фіксованого n. Перевіримо твердження для $n+1$:

$|y_{n+1}(x)-y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t))|\, dt\right| \le$

За припущенням, y_n вже лежить в заданому прямокутнику. Тому $f(x, y_n(x))$ є також обмеженою

$\le M|x-x_0| \le Mh \le M\dfrac{b}{M} = b$

Отже, всі y_n лежать в прямокутнику $I_h \times I_b$

2) Доведемо, що послідовність $\{y_n(x), n \ge 1\}$ рівномірно збігається

Зауважимо, що

$y_n(x) = y_0 + (y_1(x)-y_0) + (y_2(x)-y_1(x)) + \dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x))$

Розглянемо ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (y_k(x) - y_{k-1}(x))$.

Спробуємо довести збіжність критерієм Вейерштрасса, тобто ми оцінимо $|y_k(x)-y_{k-1}(x)|$ $\forall x \in I_h$ таким чином, щоб було число

$|y_1(x)-y_0(x)| \overset{\text{п. 1)}}{\le} M|x-x_0| = M\dfrac{|x-x_0|}{1!}$

$|y_2(x)-y_1(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))\, dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))|\, dt\right| \le$

$\overset{\text{умова Ліпшиця}}{\le} \left|\int_{x_0}^{x} L|y_1(t)-y_0|\, dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} LM|t-x_0|\, dt\right| = ML\dfrac{|x-x_0|^2}{2!}$

...

Використовуючи **МІ**, отримаємо таку оцінку $\forall k \ge 1$ і $\forall x \in I_h$:

$|y_k(x)-y_{k-1}(x)| \le ML^{k-1}\dfrac{|x-x_0|^k}{k!} \le ML^{k-1}\dfrac{h^k}{k!}$

Отримаємо мажорантний ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}$. Перевіримо на збіжність:

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{h^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{L}\frac{(Lh)^k}{k!} = \frac{M}{L}\left(e^{Lh}-1\right)$ - збіжний

Отже, підсумовуючи, отримаємо, що $y_n(x) \rightrightarrows y_*(x)$

3) Доведемо, що $y_*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ також знаходиться в прямокутнику $I_h \times I_b$

Згідно з п.1), можемо отримати, що:

$|y_*(x)-y_0| = |\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) - y_0| = |\lim\limits_{n\to\infty}(y_n(x)-y_0)| = \lim\limits_{n\to\infty}|y_n(x)-y_0| \le$

$\leq \lim_{n\to\infty} b = b$

4) Доведемо, що $y_*(x) \in C(\Pi)$ та є розв'язком задачі Коші
Оскільки $y_0(x), f(x, y) \in C(\Pi)$, то $f(x, y_0(x)) \in C(\Pi)$
Тоді $y_1(x) \in C(\Pi)$, а за **МІ**, $y_n(x) \in C(\Pi)$. І нарешті, через рівномірну збіжність, $y_*(x) \in C(\Pi)$

$$y_*(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt \right) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \lim_{n\to\infty} y_{n-1}(t))\, dt =$$
$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_*(t))\, dt$$

Тоді за лемою, $y_*(x)$ - розв'язок задачі Коші. **Кінець частини 1.**

Частина 2. Єдиність
!Вважаємо, що існують два розв'язки задачі Коші: $y_*(x), y_{**}(x)$.
Розглянемо функцію $z(x) = y_{**}(x) - y_*(x)$ та оцінимо її:
$$|z(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_{**}(t)) - f(t, y_*(t))\, dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{**}(t)) - f(t, y_*(t))|\, dt \right| \leq$$
$$\left| \int_{x_0}^{x} L|y_{**}(t) - y_*(t)|\, dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} L|z(t)|\, dt \right| \leq LM'|x - x_0| \leq LM'h \text{ (TODO)}$$
■

2 Диференціальні рівняння n-го порядку

2.1 Основні означення

Definition 2.1.1. Задана область $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ - відкрита та однозв'язна; функція $f : D \to \mathbb{R}$

Диференціальним рівнянням n-го порядку називається наступний вираз:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{3}$$

Definition 2.1.2. Розв'язком рівняння (3) називається функція $y = \varphi(x)$, що визначений та диференційований n разів на відкритому інтервалі $I \subset \mathbb{R}$, всі похідні якого містяться в області D та задовольняє рівнянню (3)

Example 2.1.3. Задане диференціальне рівняння: $y'' = e^x$

Розв'язком буде функція $\varphi(x) = e^x + C_0 x + C_1$ на інтервалі $I = \mathbb{R}$

Definition 2.1.4. Задана область $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ - відкрита та однозв'язна; точка $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}) \in D$

Задачею Коші з початковою умовою $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)})$ називається система рівнянь:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Розв'якзом називають такий розв'язок функції першого рівняння $y = \varphi(x)$, для якого $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, $\cdots$, $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Example 2.1.5. $\begin{cases} y'' = e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Вже отримали, що $y = e^x + C_0 x + C_1$. Тоді якщо знайти всі похідні та підставити значення, то отримаємо:

$\begin{cases} e^0 + C_1 = 1 \\ e^0 + C_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_0 = 0, C_1 = 0$. Отже, $y = e^x$ - розв'язок задачі Коші

2.2 Задача Коші

Definition 2.2.1. Задана область $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ та функція $f : D \to \mathbb{R}$
Така функція **задовольняє умові Ліпшиця відносно** $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$, якщо

$$\exists L > 0 : \left| f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}) \right| \leq$$
$$\leq L \left(|y_1 - y_2| + |y_1' - y_2'| + \cdots + \left| y_1^{n-1} - y_2^{(n-1)} \right| \right)$$

Proposition 2.2.2. Задан прямокутник $\Pi = I_a \times \Pi_b \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Відомо, що функція $f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ має всі частні неперервні похідні в Π. Тоді f задовільняє умові Ліпшиця, причому $L = \max\{L_1, L_2, \dots, L_{n-1}\}$, $L_i = \sup\limits_{(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})} \left| f'_{y^{(i-1)}}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \right|$

Proof.
Ми розглянемо функціяю $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ таку, що:
$g(t) = f(x, (1-t)y_1 + ty_2, (1-t)y_1' + ty_2', \dots, (1-t)y_1^{(n-1)} + ty_2^{(n-1)})$
Зокрема отримаємо:
$g(0) = f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})$
$g(1) = f(x, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)})$
Часткові похідні неперервні, тому $g \in C^1([0, 1])$. За теоремою Лагранжа,
$\exists \xi \in (0, 1) : g(0) - g(1) = -g'(\xi)$
де $g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial u^{(n-1)}}\dfrac{du^{(n-1)}}{dt} \boxed{=}$
$u = (1-t)y_1 + ty_2, \dots, u^{(n-1)} = (1-t)y_1^{(n-1)} + ty_2^{(n-1)}$
$\boxed{=} \dfrac{\partial f}{\partial u}(y_2 - y_1) + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial u^{(n-1)}}(y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)})$
Залишилось зробити оцінку:
$|g(0) - g(1)| = |g'(\xi)| \leq |L_1(y_2 - y_1) + \cdots + L_{n-1}(y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)})| \leq$
$\leq |L_1(y_2 - y_1)| + \cdots + |L_{n-1}(y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)})| \leq L \left(|y_1 - y_2| + \cdots + |y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}| \right)$
■

Тепер розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

де $f : \Pi = I_a \times \Pi_b \to \mathbb{R}$
$I_a = [x_0 - a, x_0 + a]$,
$\Pi_b = [y_0 - b, y_0 + b] \times [y_0' - b, y_0' + b] \times \cdots \times [y_0^{(n-1)} - b, y_0^{(n-1)} + b]$

Theorem 2.1.6. Теорема Пікара
Задана функція $f : \Pi \to \mathbb{R}$ така, що $f \in C(\Pi)$ та під умовою Ліпшиця відносно $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$
Тоді задача Коші містить єдиний розв'язок $y_*(x)$ на інтервалі
$I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$
Доведення проводиться аналогічним чином, як з рівнянням першого порядку

2.3 Деякі типи рівнянь, що допускають зниження порядку

2.3.1 Рівняння, в якої немає залежності від y в правій частині

Тобто в нас рівняння буде такого типу:

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Для нього проводиться наступна заміна: $z(x) = y'(x)$. Тоді
$y'' = z, \dots, y^{(n)} = z^{(n-1)}$
Отримаємо наступне рівняння:
$z^{(n-1)} = f(x, z, z', \dots, z^{(n-2)})$
Ну а далі як пощастить з типажом рівняння

Також можемо розглянути рівняння такого типу:

$$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$$

Для нього проводиться наступна заміна: $z(x) = y^{(k)}(x)$
Тоді отримаємо наступне рівняння:
$z^{(n-k)} = f(x, z, z', \dots, z^{(n-k-1)})$
І т.д.

Example. Розв'язати рівняння: $xy^{(4)} - y''' = 0$
Заміна: $z = y''' \Rightarrow z' = y^{(4)}$
$xz' - z = 0 \Rightarrow \dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow z = C_1 x$
$y''' = C_1 x \Rightarrow y'' = C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 \Rightarrow y' = C_1 \dfrac{x^3}{3!} + C_2 x + C_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = C_1\dfrac{x^4}{4!} + C_2\dfrac{x^2}{2!} + C_3x + C_4$
Але C_1, C_2, C_3, C_4 - константи, тому можна записати іншим шляхом:
$y = C_1x^4 + C_2x^2 + C_3x + C_4$

2.3.2 Рівняння, в якої немає залежності від x в правій частині

Тобто в нас рівняння буде такого типу:

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Проведемо таку заміну: $y' = p(y)$
Далі рахуємо другі, треті і т.д. похідні, але достатньо часто буде другої:
$y'' = p'(y)y' = p'(y)p(y)$
В результаті чого ми отримаємо рівняння від функції $p(y)$ $(n-1)$-го порядку

Example. Розв'язати рівняння: $y'' = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$
Заміна: $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'(y)y' = p'p$
$p'p = \dfrac{1}{4\sqrt{y}} \Rightarrow \dfrac{dp}{dy}p = \dfrac{1}{4\sqrt{y}} \Rightarrow p\,dp = \dfrac{dy}{4\sqrt{y}} \Rightarrow \dfrac{p^2}{2} = \dfrac{\sqrt{y}}{2} + C_1 \Rightarrow$
$p = \pm\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$
$y' = \pm\sqrt{\sqrt{y} + C_1} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}} = \pm dx \Rightarrow \dots$
$\Rightarrow \dfrac{4}{3}\sqrt{(\sqrt{y} + C_1)^3} - 4C_1\sqrt{\sqrt{y} + C_1} = C_2 \pm x$

2.3.3 Рівняння тип 3

Буде нехай таке рівняння:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$$

Проведемо наступну заміну: $z(x) = y^{(n-2)}(x)$
Тоді буде таке рівняння:
$z'' = f(z)$
Домножимо обидві частини на $2z'$ і нехай $\displaystyle\int f(z)\,dz = F(z)$
$2z'z'' = 2z'f(z)$
$((z')^2)' = (2F(z))'$
$(z')^2 = 2F(z) + C_1 \Rightarrow z' = \pm\sqrt{F(z) + C_1}$ І т.д.

Example. Розв'язати рівняння: $\varphi'' = -k\sin\varphi$, де $\varphi = \varphi(t)$
$2\varphi'\varphi'' = -2k\varphi'\sin\varphi$
$((\varphi')^2)' = 2k(\cos\varphi)'$
$(\varphi')^2 = 2k\cos\varphi + C_1$
Нехай $C_1 = 0$ (для спрощення). Тоді:
$\varphi' = \pm\sqrt{2k\cos\varphi} \Rightarrow \dfrac{d\varphi}{\sqrt{2k\cos\varphi}} = \pm dt \Rightarrow t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\displaystyle\int\dfrac{d\varphi}{\sqrt{cos\varphi}} + C_2$

3 Лінійні диференціальні рівняння

Definition 3.0.1. Лінійним диференціальним рівнянням порядку n називається рівняння наступного вигляду:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$
Розв'язком називається функція $\varphi \in C^n(J)$, $J \subset I$, якщо вона задовольняє цьому рівнянню
Якщо $b(x) \equiv 0$, то рівняння називається **однорідним**. В інакшому випадку - **неоднорідним**

Theorem 3.0.2. Задача Коші для лінійного диференціального рівняння містить єдиний розв'язок
Proof.
Отже, є в нас задача Коші:
$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$
Доведення теореми буде посилатись на теорему Пікара в диф. рівнянні порядку n
Тому перше рівняння системи перепишемо в іншому вигляді:
$y^{(n)} = b(x) - a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \cdots - a_1(x)y' - a_0(x)y$
Знайдемо всі її часткові похідні:
$f'_y = -a_0(x)$, $f'_{y'} = -a_1(x)$, $\ldots$, $f'_{y^{(n-1)}} = -a_{n-1}(x)$
Всі вони є неперервними функціями на $\Pi = I_a \times \Pi_b$, тому що $a_0, \ldots, a_{n-1} \in C(I), I_a \subset I$, $\Pi_b \subset \mathbb{R}^n$ - довільний паралелепіпед навколо точки умов Коші. Отже, функція під умовою Ліпшиця. А значить, спрацьовує теорема Пікара ■

Визначимо оператор $L : C^n(I) \to C(I)$ такий, що:

$$(Ly)(x) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

Тобто наше рівняння перепишеться як: $(Ly)(x) = b(x)$
Lemma 3.0.3.1. Множина $C^k(I)$ є лінійним простором, для якого:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \alpha \in \mathbb{R}$$

Lemma 3.0.3.2. Оператор L є лінійним
Proof.
Remark. $Ly \in C(I)$
Доведення безпосередньо за означенням:
$L(y+z) = (y+z)^{(n)}+a_{n-1}(x)(y+z)^{(n-1)}+\dots+a_1(x)(y+z)'+a_0(x)(y+z) =$
$= y^{(n)}+z^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+a_{n-1}(x)z^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_1(x)z'+a_0(x)y+$
$a_0(x)z =$
$= Ly + Lz$
$L(\alpha y) = (\alpha y)^{(n)} + a_{n-1}(x)(\alpha y)^{(n-1)} + \dots + a_1(x)(\alpha y)' + a_0(x)(\alpha y) =$
$= \alpha y^{(n)} + \alpha a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha a_1(x)y' + \alpha a_0(x)y = \alpha Ly$ ■

Proposition 3.0.4. Множина розв'язків утворюють лінійний простор $= \ker L$
Випливає з означення ядра

Corollary 3.0.4. Якщо $y_1, \dots, y_n$ - розв'язки, то $y = C_1y_1 + \dots + C_ny_n$ - розв'язок також
Тепер перейдемо до розв'язку рівнянь

3.1 Однорідне рівняння

Спробуємо розв'язати рівняння

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

де $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$
Нагадуємо:
Definition 3.1.1. Система функцій $\{f_1, \dots, f_n\} \subset C^k(I)$ називається:
- **лінійно НЕзалежними**, якщо із $\forall x \in I : c_1f_1(x) + \dots + c_nf_n(x) = 0$ випливає, що $c_1 = \dots = c_n = 0$
- **лінійно залежними**, якщо $\exists c_1, \dots, c_n : c_1^2 + \dots + c_n^2 \neq 0$, для яких $\forall x \in I : c_1f_1(x) + \dots + c_nf_n(x) = 0$

Definition 3.1.2. Задана система функцій $\{f_1, \dots, f_n\} \in C^{(n-1)}(I)$
Визначимо **детермінант Вронського** як функцію $W : I \to \mathbb{R}:$

$$W[f_1, f_2, \dots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Example 3.1.3.(1) Нехай є система $\{1, x, x^2, \dots, x^{k-1}\}$. Тоді

$$W[1, x, x^2, \dots, x^{k-1}](x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{k-1} \\ 0 & 1! & 2x & \dots & (k-1)x^{k-2} \\ 0 & 0 & 2! & \dots & (k-1)(k-2)x^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (k-1)! \end{vmatrix} =$$

$= 1!2!\dots(k-1)!$

Example 3.1.3.(2) Дуже важливий приклад

Нехай є система $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$

Тут $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ та всі різні. Тоді маємо:

$$W[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}](x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \boxed{=}$$

Виносимо $e^{\lambda_1 x}$ з першої колони, $e^{\lambda_2 x}$ з другої колони...

$$\boxed{=} e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} D_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Останній множник - детермінант Вандеморда. Із курсу лінійної алгебри,

$D_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \displaystyle\prod_{1 \le j < i \le n} (\lambda_i - \lambda_j)$

Тому остаточно матимемо:

$W[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}](x) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \displaystyle\prod_{1 \le j < i \le n} (\lambda_i - \lambda_j)$

Proposition 3.1.4. Якщо $\{f_1, \dots, f_n\} \subset C^{(n-1)}(I)$ - лінійно залежні над $\mathbb{R}$, то $W[f_1, \dots f_n](x) \equiv 0$

Proof.

Система - л.з., тобто при $c_1, \dots, c_n$, що не всі нулі:

$c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$ Продиференціюємо рівняння $(n-1)$ разів. Тоді отримається система:

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \dots + c_n f_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Знову з курсу лінійної алгебри, система має нетрививіальний розв'язок

$\iff$ детермінант коефіцієнтів $= 0$
У нас $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - нетривіальні, тому матриця коефіцієнтів

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W[f_1, f_2, \cdots, f_n](x) \equiv 0 \blacksquare$$

Corollary 3.1.4. Якщо $\exists x_0 : W[f_1, \ldots, f_n](x_0) \neq 0$, то $\{f_1, \ldots, f_n\}$ - лінійно НЕзалежна
Тут записано просто обернене твердження

Повертаючись до **Ex. 3.1.3.**, обидва детермінанта Вронського ненулеві. Тому система $\{1, x, \ldots, x^{k-1}\}$ та $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ - лінійно НЕзалежні

Remark 3.1.5. Якщо $W[f_1, \ldots, f_n] \equiv 0$, то $\{f_1, \ldots, f_n\}$ <u>може</u> бути лінійно НЕзалежною

Example 3.1.5. Розгянемо систему $\{x^2, x|x|\} \subset C'((-2, 2))$
$W[x^2, x|x|](x) = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 2x^2|x| - 2x^2|x| \equiv 0$
Але за означенням л.н.з.,
$\forall x \in (-2, 2) : C_1x^2 + C_2x|x| = 0 \overset{x=1, x=-1}{\Rightarrow} \begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$
Тому система - лінійно НЕзалежна

Theorem 3.1.6. Задані $y_1, \ldots, y_n \in \ker L$ - тобто розв'язки нашого однорідного рівняння
$\{y_1, \ldots, y_n\}$ - л.н.з. над $\mathbb{R} \iff W[y_1, \ldots, y_n](x) \not\equiv 0$
Proof.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $W[y_1, \ldots, y_n](x) \not\equiv 0$. Тоді за **Crl 3.1.4.** система $\{y_1, \ldots, y_n\}$ - л.н.з.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{y_1, \ldots, y_n\}$ - л.н.з.
!Припустимо, що $\exists x_0 \in I : W[y_1, \ldots, y_n](x_0) = 0$. Тоді система рівнянь:
$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + \cdots + c_ny_n(x_0) = 0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) + \cdots + c_ny_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$ має нетривіальні розв'язки
Нехай $c_1 = c_1^0, \ldots, c_n = c_n^0$

Розглянемо функцію:
$y(x) = c_1^0 y_1(x) + \dots + c_n^0 y_n(x)$
Якщо продиференціювати $(n-1)$ раз та всюди $x = x_0$, то можна отримати, що:
$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$
Таким чином отримана задача Коші:
$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$
Проте зауважимо, що $z(x) \equiv 0$ - також розв'язок задачі Коші. Тому в силу єдиності рішення задачі Коші, маємо, що $y(x) \equiv 0$
Отже, для $c_1 = c_1^0, \dots, c_n = c_n^0$ отримали: $c_1^0 y_1(x) + \dots + c_n^0 y_n(x) = 0$. Це є означенням л.з., що суперечить нашим припущенням.
Висновок: $W[y_1, \dots, y_n](x) \not\equiv 0$ ■

Theorem 3.1.7. Позначу через $y_1, y_2, \dots, y_n$ наступні розв'язки задачі Коші:
$$y_1 : \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad y_2 : \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \dots y_n : \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$
Тоді $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ утворюють лінійний базис в просторі розв'язків нашого рівняння

Proof.
Базис означає лінійну незалежність та презентацію кожного елементу в лінійну комбінацію
Перевіримо на л.н.з.:
$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$
Отже, за **Crl. 3.1.4.**, система - л.н.з.
Доведемо, що будь-який розв'язок $y = y_1 c_1 + \dots + y_n c_n$. Коротше, треба знайти $c_1, \dots, c_n$ і довести, що вони єдині
Диференціюємо $(n-1)$ разів і вставляємо x_0 кожного разу. Тоді
$c_1 = y(x_0), \dots, c_n = y^{(n-1)}(x_0)$. Ці константи виражаються єдиним чином
Отже, $\exists! c_1, \dots, c_n : y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$

Висновок: $\{y_1, \ldots . y_n\}$ - базис ■

Corollary 3.1.7.(1) $\dim L = n$
Corollary 3.1.7.(2) Будь-яка л.н.з. система з n розв'язків утворює базис в просторі його рішень

Definition 3.1.8. Лінійним базисом $\{y_1 \ldots , y_n\}$ в просторі розв'язків рівняння називають **фундаментальною системою розв'язків**
В той же час $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ - **загальний розв'язок**

Lemma 3.1.9. Якщо $a_{ij} \in C'(I) i, j = \overline{1, n}$, то

$$\left(\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} \right)' =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \ldots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \ldots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \ldots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Proof.
Доведення проводимо за означенням:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}(x) \cdot a_{2\sigma(2)}(x) \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}(x)$$

Тут S_n - група перестановок множини $A_n = \{1, 2, \ldots , n\}$
$\sigma(k) \in A_n$ - значення перестановки σ на елементі $k \in A_n$

$$\epsilon_\sigma = \begin{cases} 1, \text{парна перестановка} \\ -1, \text{непарна перестановка} \end{cases}$$

А тепер візьмемо похідну від правої частини:

$$\left(\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}(x) \cdot a_{2\sigma(2)}(x) \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}(x) \right)' =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a'_{1\sigma(1)}(x) \cdot a_{2\sigma(2)}(x) \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}(x) +$$
$$+ \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}(x) \cdot a'_{2\sigma(2)}(x) \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}(x) +$$
$$+ \dots + \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}(x) \cdot a_{2\sigma(2)}(x) \cdot \ldots \cdot a'_{n\sigma(n)}(x) \overset{def}{=}$$
$$= \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$
$$+ \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix} \blacksquare$$

Theorem 3.1.10. Теорема Остроградського-Якобі
Задана $\{y_1, \dots, y_n\}$ - фундаментальна система розв'язків нашого рівняння та якась т. $x_0 \in I$. Тоді

$$W[y_1, \dots, y_n](x) = W[y_1, \dots, y_n](x_0) e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\, dt}$$

Proof.
Знайдемо похідну від детермінанта Вронського (**Lm. 3.1.9.**):

$$W'[y_1, \dots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) & \dots & y''_n(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) & \dots & y''_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} =$$

Тут всі детермінанти, окрім останнього, онуляться через однакові рядки

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \boxed{=}$$

Оскільки $y_1, \dots, y_n$ - розв'язки, то ми можемо виразити старші подіхні:
$y_i^{(n)} = -a_0(x)y_j - a_1(x)y_j' - \dots - a_{n-1}(x)y_j^{(n-1)}, j = \overline{1,n}$
Підставимо в наш детермінант і зробимо такі кроки:
- помножимо перший рядок на a_0 і додамо до останнього рядка;
- помножимо другий рядок на a_1 і додамо до останнього рядка;
...
Нарешті, винесемо $-a_{n-1}$. Отримаємо:

$$\boxed{=} -a_{n-1}(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = -a_{n-1}(x)W[y_1, \dots, y_n](x)$$

Отже, отримали таку тотожність:
$W'[y_1, \dots, y_n](x) = -a_{n-1}(x)W[y_1, \dots, y_n](x)$
А це - диф. рівняння з відокремленими змінними, яку ми розв'яжемо:

$$\frac{dW[y_1, \dots, y_n](t)}{dt} = -a_{n-1}(t)$$

$$\frac{dW[y_1, \dots, y_n](t)}{W[y_1, \dots, y_n](t)} = -a_{n-1}(t)\, dt$$

Інтегруємо на інтервалі $[x, x_0]$:

$$\ln \left| \frac{W[y_1, \dots, y_n](x)}{W[y_1, \dots, y_n](x_0)} \right| = -\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\, dt$$

$$W[y_1, \dots, y_n](x) = W[y_1, \dots, y_n](x_0)e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\, dt}$$

Взагалі, тут мав би бути знак $\pm$, але якщо підставити $x = x_0$, то залишиться лише + $\blacksquare$

Метод розв'язку лінійних однорідних диференціальних рівнянь найчастіше другого порядку саме базується на теоремі Остроградського-Якобі. Спочатку ми вгадуємо перший частковий розв'язок, а далі за формулою шукаємо другий частковий, а згодом можна отримати загальний розв'язок

Example Розв'язати рівняння: $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$
Буду розглядувати на інтервалі $x > -\dfrac{1}{2}$

$$y'' + \frac{4x}{2x+1}y' - \frac{4}{2x+1}y = 0$$

Можна вгадати, що $y_1 = x$ - частковий розв'язок
Тоді за формулою Остроградського-Якобі:
$\begin{vmatrix} x & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = W_0 e^{-\int_1^x \frac{4t}{2t+1}\, dt}$. Тут $x_0 = 1$

$-\int_1^x \frac{4t}{2t+1}\,dt = \dots = -2x + \ln(2x+1) + 2 - \ln 3$
$\Rightarrow W_0 e^{-\int_1^x \frac{4t}{2t+1}\,dt} = W_0 e^{\ln(2x+1)} e^{-2x} e^{2-\ln 3} = W_1(2x+1)e^{-2x}$
Таким чином за нашою формулою:
$xy_2' - y_2 = W_1(2x+1)e^{-2x}$
Ну а тут стандартне диф. рівняння першого порядку. Поділимо на x^2 і зауважимо:
$\frac{y_2' x - y_2}{x^2} = W_1 \frac{2^{-2x} 2x + e^{-2x}}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{y_2}{x}\right)' = -W_1\left(\frac{e^{-2x}}{x}\right)'$
$\frac{y_2}{x} = -W_1 \frac{e^{-2x}}{x}$
$y_2 = -W_1 e^{-2x}$
Отже, остаточно загальний розв'язок:
$y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$

3.2 Неоднорідне рівняння

Спробуємо розв'язати рівняння

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$
Theorem 3.2.1. Про структуру розв'язків
y - розв'язок неоднорідного рівняння $\iff y = y_{g.h.} + y_{p.inh.}$
Де $y_{g.h.}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння, а $y_{p.inh.}$ - частковий розв'язок неоднорідного рівняння
Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: y - розв'язок неоднорідного рівняння
Розглянемо $y_0 = y - y_{p.inh.}$. Для цього маємо:
$Ly_0 = L(y - y_{p.inh,}) = Ly - Ly_{p.inh.} = b(x) - b(x) = 0$
$\Rightarrow y_0 = y_{g.h} \Rightarrow y = y_{g.h.} + y_{p.inh.}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $y = y_{g.h.} + y_{p.inh.}$
Тоді $Ly = L(y_{g.h.} + y_{p.inh.}) = Ly_{g.h.} + Ly_{p.inh.} = b(x) \Rightarrow y$ - розв'язок неоднорідного рівняння ■
Corollary 3.2.1. Принцип суперпозиції
Якщо y_1 - розв'язок $Ly_1 = b_1(x)$, а y_2 - розв'язок $Ly_2 = b_2(x)$, то
$y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$ - розв'язок $Ly = \beta_1 b_1(x) + \beta_2 b_2(x)$

Для неоднорідних рівнянь існує поки єдиний загальних вихід, як розв'язати рівняння

Метод варіації довільних сталих

Спочатку знайдемо $y_{g.h.}$ з нашого рівняння, тобто:

$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

Якщо вважати, що $y_1, \ldots, y_n$ - фундаментальна система розв'язків, то

$y_{g.h.} = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$

Наш розв'язок ми будемо шукати в такому вигляді:

$y = c_1(x)y_1 + \cdots + c_n(x)y_n$

А тут $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ - такі функції, задовільняючи наступним умовам:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 \cdots + c_n'(x)y_n = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' \cdots + c_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \end{cases}$$

Використовуючи всі наші умови, ми підставимо наше y до неоднорідного рівняння. Але перед цим знайдемо похідні:

$y' = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + \cdots + c_n'(x)y_n(x) + c_n(x)y_n'(x) \overset{\text{умова}}{=}$

$= c_1(x)y_1'(x) + \cdots + c_n(x)y_n'(x)$

$y'' = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'(x) + c_n(x)y_n''(x) \overset{\text{умова}}{=}$

$= c_1(x)y_1''(x) + \cdots + c_n(x)y_n''(x)$

...

$y^{(n-1)} = c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) \overset{\text{умова}}{=}$

$= c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$

Легко побачити, що завдяки системі зверху, ми можемо функції $c_1, \ldots, c_n$ сприйняти як константу, що виноситься з похідної

$y^n = c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + c_n(x)y_n^{(n)}(x)$

Підставляємо в неоднорідне рівняння:

$$\left(c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)}(x)\right) +$$

$$+ a_{n-1}(x)\left(c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x)\right) + \cdots +$$

$$+ a_1(x)\left(c_1(x)y_1'(x) + \cdots + c_n(x)y_n'(x)\right) +$$

$$+ a_0(x)\left(c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)\right) = b(x)$$

І перегрупуємо ці доданки:

$$c_1(x)\left(y_1^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)\right) +$$

$$+ c_2(x)\left(y_2^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x)\right) + \cdots +$$

$$+ c_n(x)\left(y_n^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_n^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_n'(x) + a_0(x)y_n(x)\right) +$$

$+ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = b(x)$
Але оскільки $y_1, \dots, y_n$ - фундаментальна система розв'язків, тобто $Ly_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, то залишається:
$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = b(x)$
Дане рівняння додамо до нашої системи.

В результаті
$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 \cdots + c_n'(x)y_n = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' \cdots + c_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = b(x) \end{cases}$$
Розв'язуючи відносно $c_1'(x) \dots, c_n'(x)$, отримаємо, що вона має єдиний розв'язок, оскільки детермінант матриці коефіцієнтів - детермінант Вронського - ненулевий, згідно з тим, що $y_1, \dots, y_n$ - фундаментальна система
Залишилось їх проінтегрувати:
$c_1(x) = \int_{x_0}^{x} c_1'(t)\,dt + \tilde{c}_1, \dots, c_n(x) = \int_{x_0}^{x} c_n'(t)\,dt + \tilde{c}_n$
Та підставити в наш початковий y:
$y = \left(\int_{x_0}^{x} c_1'(t)\,dt\right) y_1 + \cdots + \left(\int_{x_0}^{x} c_n'(t)\,dt\right) y_n + \tilde{c}_1 y_1 + \cdots + \tilde{c}_n y_n =$
$= y_{p.inh.} + y_{g.h.} \iff y$ - розв'язок нашого неоднорідного рівняння

Отже, враховуючи всі наші умови:
$y = c_1(x)y_1 + \cdots + c_n(x)y_n$ - розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

Example. Розв'язати рівняння: $y'' + \dfrac{x}{1-x}y' - \dfrac{1}{1-x}y = x - 1$
Тут фундаментальна система розв'язків: $y_1 = e^x$, $y_2 = x$
Запишемо загальний розв'язок:
$y = c_1(x)e^x + c_2(x)x$
Тут $c_1(x), c_2(x)$ - такі функції, задовільняючи умовам:
$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)x = 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x) = x - 1 \end{cases}$$
Розв'язки системи: $c_1'(x) = xe^{-x}$, $c_2'(x) = -1$
$\Rightarrow c_1(x) = \cdots = -xe^{-x} - e^{-x} + \tilde{c}_1$
$\Rightarrow c_2(x) = -x + \tilde{c}_2$
Отже,
$y = e^x(-xe^{-x} - e^{-x} + \tilde{c}_1) + x(-x + \tilde{c}_2) = -x - 1 + \tilde{c}_1 e^x - x^2 + x\tilde{c}_2$

$\Rightarrow y = \tilde{c}_1 e^x + \tilde{c}_2 x - (x^2 + 1)$

3.3 Однорідне рівняння з постійними коефіцієнтами

Спробуємо розв'язати рівняння

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

Деяка інформація про комплекснозначні функції в полі дійсних чисел
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:
$f(x) = u(x) + iv(x)$, де $u(x) = \operatorname{Re} f(x), v(x) = \operatorname{Im} f(x)$
Похідна від цієї функції визначається таким чином:
$f'(x) = u'(x) + iv'(x)$
Всі властивості похідних зберігаються для комплекснозначних функцій

Визначимо ще один оператор D - оператор диференціювання:
$Df = f'$
Тобто наше рівняння матиме вигляд:
$Ly = D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1 Dy + a_0 Iy = 0$
Розглянемо функцію $y = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}$. Підставимо в наше рівняння:
$Le^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} =$
$= e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) = e^{\lambda x}P(\lambda) = 0$
$\Rightarrow Le^{\lambda x} = e^{\lambda x}P(\lambda) = 0 \iff P(\lambda) = 0$
Definition 3.3.1. Характеристичним многочленом будемо називати вираз:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

З наших міркувань отримали, що:
Proposition 3.3.2. $e^{\lambda x}$ - корінь рівняння $\iff \lambda \in \mathbb{C}$ - корінь характеристичного полінома $P(\lambda) = 0$

I. Випадок різних (лише дійсних) коренів
Theorem 3.3.I. Система $\{e^{\mu_1 x}, \ldots, e^{\mu_n x}\}$ є фундаментальною системою розв'язків. Причому $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ - різні корені характеристичного полінома
Proof.
Згідно з **Ex. 3.1.3.**, така система є лінійно НЕзалежною. Оскільки $\mu_1, \ldots, \mu_n \in$

$\mathbb{R}$ - різні корені характеристичного полінома, то $e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_n x}$ - розв'язки нашого рівняння. Отже, за **Crl. 3.1.7.(2)**, система є фундаментальною ■

Example 1. Розв'язати рівняння: $y'' - y = 0$
Запишемо характеристичний поліном:
$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$
Звідси $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \overset{Th.3.3.I.}{\Rightarrow} \{e^x, e^{-x}\}$ - фундаментальна система.
Отже, $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

II. Випадок різних (можливо комплексних) коренів
Theorem 3.3.II. Система
$\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_l x}\} \cup \{e^{\alpha_1 x}\cos\omega_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\omega_1 x, \dots, e^{\alpha_k x}\cos\omega_k x, e^{\alpha_k x}\sin\omega_k x\}$
є фундаментальною системою розв'язків. Причому $\mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{R}$ та $\lambda_1 = \alpha_1 + i\omega_1, \dots, \lambda_k = \alpha_k + i\omega_k \in \mathbb{C}$ - різні корені характеристичного полінома
Proof.
До речі, якщо $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - корні характеристичного полінома, то (курс ліналу) $\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_k}$ - також є коренями
Отже, за умовою і **Prp. 3.3.2.**, фундаментальний розв'язок рівняння задається системою
$\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_l x}, e^{\lambda_1 x}, e^{\overline{\lambda_1} x}, \dots, e^{\lambda_k x}, e^{\overline{\lambda_k} x}\}$
Замінимо цю систему функцій наступною системою:
$$\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_l x}, \frac{e^{\lambda_1 x} + e^{\overline{\lambda_1} x}}{2}, \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\overline{\lambda_1} x}}{2i}, \dots, \frac{e^{\lambda_k x} + e^{\overline{\lambda_k} x}}{2}, \frac{e^{\lambda_k x} - e^{\overline{\lambda_k} x}}{2i}\}$$
Маємо права, оскільки від цього л.н.з. система не зміниться. В силу лінійності оператора L, вони теж будуть розв'яками. Більш того, за формулами Ейлера:
$$\frac{e^{\lambda_j x} + e^{\overline{\lambda_j} x}}{2} = e^{\alpha_j x}\cos\omega_j x$$
$$\frac{e^{\lambda_j x} - e^{\overline{\lambda_j} x}}{2i} = e^{\alpha_j x}\sin\omega_j x$$
Отримали, отримаємо бажану систему:
$\{e^{\mu_1 x}, \dots, e^{\mu_l x}\} \cup \{e^{\alpha_1 x}\cos\omega_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\omega_1 x, \dots, e^{\alpha_k x}\cos\omega_k x, e^{\alpha_k x}\sin\omega_k x\}$ ■
Remark. Тут всього n функцій в системі: l - дійсних і $2k$ - копмлексних.
$l + 2k = n$

Example 2. Розв'язати рівняння: $y'' + y = 0$
Запишемо характеристичний поліном:

$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$
Звідси $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \overset{Th.3.3.II.}{\Rightarrow} \{\cos x, \sin x\}$ - фундаментальна система.
Отже, $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

III. Випадок кратних (можливо комплексних) коренів
Theorem 3.3.III. Система
$$\bigcup_{j=1}^{l} \{e^{\mu_j x}, xe^{\mu_j x}, \dots, x^{s_j - 1} e^{\mu_j x}\} \cup$$
$$\cup \bigcup_{j=1}^{k} \{e^{\alpha_j x} \cos \omega_j x, e^{\alpha_j x} \sin \omega_j x, \dots, x^{r_j - 1} e^{\alpha_j x} \cos \omega_j x, x^{r_j - 1} e^{\alpha_j x} \sin \omega_j x\}$$
є фундаментальною системою розв'язків. Причому $\mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{R}$ з кратністю $s_1, \dots, s_l$ та $\lambda_1 = \alpha_1 + i\omega_1, \dots, \lambda_k = \alpha_k + i\omega_k \in \mathbb{C}$ з кратністю $r_1, \dots, r_k$- різні корені характеристичного полінома
Proof.
Доведення дуже масивне. Тому розіб'ємо на 3 леми

Lemma 1. Якщо $\lambda_j \in \mathbb{C}$ - корінь кратності s_j характеристичного полінома $P\lambda = 0$, то розв'язком нашого рівняння буде:
$y = x^p e^{\lambda_j x}, \forall p \in \mathbb{N} : 0 \le p < s_j$
Proof.
Зазначимо, що справедлива така рівність:
$$D_\lambda^p e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_j} = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^p e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_j} = x^p e^{\lambda_j x}$$
Отриманою функцією подіємо на оператор:
$$L\left(D_\lambda^p e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_j}\right) = \left(D_x^n + a_{n-1} D_x^{n-1} + \dots + a_1 D_x + a_0 I_x\right)\left(D_\lambda^p e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_j}\right) =$$
$$D_\lambda^a D_x^b = D_x^b D_\lambda^a$$
$$= D_\lambda^p \left(P(\lambda) e^{\lambda x}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_j} \overset{\text{пр. Лейбниця}}{=} \sum_{q=0}^{p} C_p^q P^{(q)}(\lambda)(e^{\lambda x})^{(p-q)}\Big|_{\lambda=\lambda_j} = \sum_{q=0}^{p} C_p^q P^{(q)}(\lambda_j) \lambda_j^{p-q} e^{\lambda_j x}$$
Оскільки λ_j - корінь кратності s_j, то з курсу ліналу,
$P(\lambda_j) = \dots = P^{(s_j - 1)}(\lambda_j) = 0$, але $P^{(s_j)}(\lambda_j) \neq 0$
Тому при $0 \le p < s_j$ отримаємо, що:
$$\sum_{q=0}^{p} C_p^q P^{(q)}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow L(x^p e^{\lambda_j x}) = 0$$
Отже, $x^p e^{\lambda_j x}$ - розв'язки ■

Lemma 2. Система $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{s-1} e^{\lambda x}\}$ є лінійно НЕзалежною над

$\mathbb{C}$ (для довільних j в нашому випадку)
!**Proof.**
Припустимо, що ця система - л.з., тобто:
$\exists C_0, \ldots, C_{s-1} \in \mathbb{C}$ нетривіальні: $C_0 e^{\lambda x} + C_1 x e^{\lambda x} + \cdots + C_{s-1} x^{s-1} e^{\lambda x} = 0$
Звідси випливає, що:
$e^{\lambda x}(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{s-1} x^{s-1}) = 0$
Отримаємо, що права дужка має бути нулевою. Це означає, що система $\{1, x, \ldots, x^{s-1}\}$ - л.з., що суперечить (в силу **Ex. 3.1.3.(1)**).
Тому $\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots, x^{s-1} e^{\lambda x}\}$ - л.н.з. ■

Lemma 3. Якщо $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ - різні комплексні числа з кратністю $s_1, \ldots, s_m$, тоді система
$\{e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{s_1 - 1} e^{\lambda_1 x}\} \cup \cdots \cup \{e^{\lambda_m x}, x e^{\lambda_m x}, \ldots, x^{s_m - 1} e^{\lambda_m x}\}$ є лінійно НЕзалежною над $\mathbb{C}$
!**Proof.**
Знову припустимо, що ля система - л.з., тобто:
$\exists C_{pq} \in \mathbb{C}$ не всі нулі: $\displaystyle\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=0}^{s_p - 1} C_{pq} x^q e^{\lambda_p x} = 0$
Перепозначу $\displaystyle\sum_{q=0}^{s_p - 1} C_{pq} x^q = f_p(x)$. Тоді
$f_1(x) e^{\lambda_1 x} + f_2(x) e^{\lambda_2 x} + \cdots + f_m(x) e^{\lambda_m x} = 0$
Через те, що не всі C_{pq} нулеві, то принаймні одна з $f_p(x)$ є ненулевою. Вважатимемо, що $f_1(x) \not\equiv 0$
Поділимо рівняння на $e^{\lambda_m x}$, отримавши:
$f_1(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_m) x} + f_2(x) e^{(\lambda_2 - \lambda_m) x} + \cdots + f_m(x) = 0$
Продиференціюємо таку кількість разів, щоб позбутись від $f_m(x)$. Тут кожний доданок матиме наступний вираз:
$$\frac{d^l}{dx^l}\left(f_p(x) e^{(\lambda_p - \lambda_m)x}\right) = \sum_{q=0}^{l} C_l^q f_p^{(q)}(x)(\lambda_p - \lambda_m)^{l-q} e^{(\lambda_p - \lambda_m)x} \overset{\text{позн}}{=} \tilde{f_p}(x) e^{(\lambda_p - \lambda_m)x}$$
Зокрема для $k = 1$:
$$\tilde{f_1}(x) = \underbrace{f_1(x)(\lambda_1 - \lambda_m)^l}_{\neq 0} + \sum_{q=1}^{l} C_l^q f_1^{(q)}(x)(\lambda_1 - \lambda_m)^{l-q} e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x} \neq 0$$
Отримаємо, що:
$\tilde{f_1}(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x} + \tilde{f_2}(x) e^{(\lambda_2 - \lambda_m)x} + \cdots + \tilde{f_{m-1}}(x) e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x} = 0$
Вийшла така ж сама тотожнсть по формі, що й з самого початку.
Якщо продовжити за МІ, то прийдемо до тотожності:
$\vdots$
$\tilde{f_1}(x) e^{\lambda_1 x} = 0$

Але за умовою, $f_1(x) \neq 0$, що суперечить нашему припущенню $\blacksquare$
Ці 3 леми й завершують доведення теореми $\blacksquare$

Example 3. Розв'язати рівняння: $y^{(8)} + 8y^{(6)} + 16y^4 = 0$ Запишемо характеристичний поліном:
$P(\lambda) = \lambda^8 + 8\lambda^6 + 16\lambda^4 = 0$
Звідси:
$\lambda_1 = 0$ - кратність 4, тому тут система: $\{1, x, x^2, x^3\}$
$\lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$ - кратності 2, тому тут система: $\{\cos 2x, \sin 2x, x\cos 2x, x\sin 2x\}$
Отже, $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5\cos x + C_6\sin x + C_7x\cos x + C_8x\sin x$

3.4 Неоднорідне рівняння з постійними коефіцієнтами

Спробуємо розв'язати рівняння

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}, b \in C(I)$
В нашому випадку ми будемо розглядати $b(x) = e^{\sigma x}(\underbrace{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}_{=T_m(x)})$.
Тут $\sigma \in \mathbb{R}$, а також $b_m \neq 0$. І нехай характеристичний поліном $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$

Для правої частини існує 3 унікальних випадків
I. Нерезонансний випадок
Theorem. Якщо $P(\sigma) \neq 0$, то існує частковий розв'язок рівняння такого вигляду:
$y_{p.inh.} = e^{\sigma x}(\underbrace{q_0 + q_1x + \dots + q_mx^m}_{=Q_m(x)})$
Proof.
За принципом суперпозиції, ми будемо мати, що:
$y_{p.inh} = y_0 + \dots + y_m$, де
$Ly_j = y_j^{(n)} + a_{n-1}y_j^{(n-1)} + \dots + a_1y_j' + a_0y_j = b_jx^je^{\sigma x}, j = \overline{0, m}$
Розглянемо дію оператора $D_\sigma = \dfrac{d}{dx} - \sigma I$ на вираз $x^je^{\sigma x}$. Отримаємо:
$D_\sigma^j\left(x^je^{\sigma x}\right) = j!e^{\sigma x}$ (можна самому переконатись)
$D_\sigma^{j+1}\left(x^je^{\sigma x}\right) = 0$
Останній оператор ми застосуємо до обох частин рівняння:
$D_\sigma^{j+1}(Ly) = b_jD_\sigma^{j+1}\left(x^je^{\sigma x}\right) = 0$ - однорідне лінійне рівняння []
Підставимо $y = e^{\lambda x}$

$D_\sigma^{j+1}(Le^{\lambda x}) = D_\sigma^{j+1}(P(\lambda)e^{\lambda x}) = P(\lambda)(\lambda - \sigma)^{j+1}e^{\lambda x} = 0$
Тоді характеристичний поліном для [] $P'(\lambda) = P(\lambda)(\lambda - \sigma)^{j+1} = 0$
Корені: $\sigma, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, кратність $r_1, \ldots, r_k$. За умовою, $P(\sigma) \neq 0$, а тому $\sigma \neq \lambda_l, l = \overline{1, k}$.
Фундаментальна система: до цього + $\{e^{\sigma x}, xe^{\sigma x}, \ldots, x^j e^{\sigma x}\}$

4 Диференціальні рівняння, що не потрапили

4.1 Рівняння $y' = f(ax + by + c)$

Маємо таке рівняння:

$$y' = f(ax + by + c)$$

Якщо $b = 0$, то тоді ми прийдемо до рівняння з відокремленими змінними
Робимо заміну

$$z(x) = ax + by + c$$

Тоді $z' = a + by'$
$\Rightarrow \dfrac{z' - a}{b} = f(z)$
$\Rightarrow z' = bf(z) + a$ - рівняння з відокремленими змінними...

Example. Розв'язати рівняння: $y' = (x + y + 1)^2$
Заміна: $z = x + y + 1 \Rightarrow z' = 1 + y'$
$z' - 1 = z^2 \Rightarrow z' = z^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{dz}{z^2 + 1} = dx \Rightarrow \operatorname{arctg} z = x + C$
Проводимо зворотню заміну:
$\operatorname{arctg}(x + y + 1) = x + C$

4.2 Квазіоднорідні рівняння

Маємо стандартне диф. рівняння

$$y' = f(x, y)$$

І нехай додатково для функції $f(x, y)$ виконується така властивість

$$\exists \sigma \in \mathbb{R} : \forall t \neq 0 : f(tx, t^\sigma y) = t^{\sigma - 1} f(x, y)$$

Якщо $\sigma = 1$, то ми повертаємось до однорідних рівнянь
Робимо заміну

$$y = z \cdot x^\sigma$$

Тоді $y' = z'x^\sigma + \sigma z x^{\sigma - 1}$
$\Rightarrow z'x^\sigma + \sigma z x^{\sigma - 1} = f(x, zx^\sigma)$
Оскільки маємо квазіоднорідне рівняння, то $f(x, zx^\sigma) = x^{\sigma - 1} f(1, z)$

$\Rightarrow z'x + \sigma z = f(1,z) \Rightarrow z' = \dfrac{f(1,z) - \sigma z}{x}$
Це вже рівняння з відокремленими змінними

Example. Розв'язати рівняння $y' = y^2 + \dfrac{1}{4x^2}$
Перевірка на квазіоднорідність:
$f(tx, t^\sigma y) = t^{2\sigma}y^2 + \dfrac{1}{4t^2x^2} \stackrel{?}{=} t^{\sigma-1}\left(y^2 + \dfrac{1}{4x^2}\right)$
$\begin{cases} 2\sigma = \sigma - 1 \\ -2 = \sigma - 1 \end{cases}$
Отже, маємо, що $\sigma = -1$
Заміна: $y = zx^{-1} \Rightarrow y' = \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2}$
$\Rightarrow \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2} = \dfrac{z^2}{x^2} + \dfrac{1}{4x^2} \Rightarrow z'x - z = z^2 + \dfrac{1}{4} \Rightarrow z' = \dfrac{z^2 + z + \dfrac{1}{4}}{x}$
$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\left(z + \dfrac{1}{2}\right)^2}{x} \Rightarrow -\dfrac{1}{z + \dfrac{1}{2}} = \ln|x| + C$
Проводимо зворотню заміну:
$-\dfrac{2}{2xy+1} = \ln|x| + C$

Remark. Квазіоднорідні рівняння можуть скоротити область визначення.
Наприклад, якщо $\sigma = \dfrac{1}{2}$, то ми маємо розв'язки лише для $x > 0$
Тоді можна застосувати заміну $x = -p$, коли $x < 0$

4.3 Лінійне рівняння методом Ейлера

Розглядується рівняння наступного вигляду:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Домножимо обидві частини рівняння на $e^{\int a(x)\,dx}$, маємо:
$y'e^{\int a(x)\,dx} + a(x)ye^{\int a(x)\,dx} = b(x)e^{\int a(x)\,dx}$
$\left(ye^{\int a(x)\,dx}\right)' = b(x)e^{\int a(x)\,dx}$
$ye^{\int a(x)\,dx} = \displaystyle\int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx + C$

$$y = e^{-\int a(x)\,dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx + C\right)$$

Example. Розв'язати рівняння: $y' - \dfrac{2y}{x} = 2x^3$
Тут $a(x) = -\dfrac{2}{x} \Rightarrow \displaystyle\int a(x)\,dx = -2\ln x = -\ln x^2$
А далі множимо обидві частини рівняння на $e^{\int a(x)\,dx} = e^{-\ln x^2} = \dfrac{1}{x^2}$
$\Rightarrow \dfrac{y'}{x^2} - \dfrac{2y}{x^3} = 2x \Rightarrow \left(\dfrac{y}{x^2}\right)' = 2x \Rightarrow \dfrac{y}{x^2} = x^2 + C$
$\Rightarrow y = x^4 + Cx^2$

4.4 Рівняння Рікатті

Розглянемо таке рівняння

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

де $P, Q, R \in C(I)$

Remark. При $P(x) \equiv 0$ маємо лінійне рівняння
При $R \equiv 0$ маємо рівняння Бернуллі, де $\lambda = 2$
При $P = Q = R = const$ маємо рівняння з відокремленими змінними

Проведемо заміну

$$y = z + y_{part}$$

де $z = z(x)$ - така функція, що зможе звести до рівняння Бернуллі, а y_{part} - якийсь частковий розв'язок
$\Rightarrow y' = z' + y'_{part} = z' + P(x)y_{part}^2 + Q(x)y_{part} + R(x)$
Підставимо це в наше рівняння:
$z' + P(x)y_{part}^2 + Q(x)y_{part} + R(x) = P(x)(z + y_{part})^2 + Q(x)(z + y_{part}) + R(x)$
Якщо трохи поскоротити, отримаємо таке рівняння:
$z' = P(x)z^2 + (2P(x)y_{part} + Q(x))z$
А це вже - рівняння Бернуллі з $\lambda = 2$...

Example. Розв'язати рівняння $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$
Або $y' = -y^2 + 2xy + (5 - x^2)$
Спробуємо вгадати розв'язок у вигляді $y_{part} = kx + b \Rightarrow y'_{part} = k$
$\Rightarrow k = -(kx + b)^2 + 2x(kx + b) + (5 - x^2)$

$\Rightarrow k = -k^2x^2 - 2kxb - b^2 + 2kx^2 + 2bx + 5 - x^2$
$\Rightarrow (k^2 - 2k)x^2 + (2kb - 2b)x + (k + b^2) = -x^2 + 5$
$\Rightarrow \begin{cases} k^2 - 2k = -1 \\ 2kb - 2b = 0 \\ k + b^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$
Візьмемо $y_{part} = x + 2$

Заміна: $y = z + x + 2 \Rightarrow y' = z' + 1$
$\Rightarrow z' + 1 = -(z + x + 2)^2 + 2x(z + x + 2) + 5 - x^2$
$\Rightarrow z' = -z^2 - 4z$
$\Rightarrow z' + 4z = -z^2$ - рівняння Бернуллі, $\lambda = 2$
...
$z = -\dfrac{4C'}{C' - e^{4x}}$
Зворотня заміна:
$y - x - 2 = -\dfrac{4C'}{C' - e^{4x}}$

4.5 Канонічний вигляд рівняння Рікатті

Маємо таке рівняння

$$y' = y^2 + \tilde{Q}(x)$$

Виявляється, що будь-яке рівняння Рікатті можна звести до канонічного вигляду
Для цього проведемо заміну:

$$y = \alpha(x)z(x)$$

де $\alpha(x)$ - така функція, щоб коефіцієнт при z^2 був рівний 1
$y' = \alpha' z + \alpha z'$
$\Rightarrow \alpha' z + \alpha z' = P(x)\alpha^2(x)z^2(x) + Q(x)\alpha(x)z(x) + R(x)$
Поділимо на α та виразимо z'
$z' = P\alpha z^2 + \left(Q - \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right) z + \dfrac{R}{\alpha}$
$P\alpha = 1$ згідно з заміною
Візьмемо $\alpha(x) = \dfrac{1}{P(x)}$. Тоді наша перша заміна вже матиме вигляд:
$y = \dfrac{z(x)}{P(x)}$

Проведемо другу заміну

$$z = u(x) + \beta(x)$$

де $\beta(x)$ - така функція, щоб коефіцієнт при u був рівний 0
$z' = u' + \beta'$
$\Rightarrow u' + \beta' = (u+\beta)^2 + \left(Q - \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)(u+\beta) + \dfrac{R}{\alpha}$
Виразимо u'
$u' = u^2 + u\left(2\beta + Q - \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right) + \beta^2 + \left(Q - \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)\beta + \dfrac{R}{\alpha} - \beta'$
$2\beta + Q - \dfrac{\alpha'}{\alpha} = 0$ згідно з заміною
$\beta^2 + \left(Q - \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)\beta + \dfrac{R}{\alpha} - \beta' = \tilde{Q}(x)$
І нарешті, візьмемо $\beta = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{\alpha'}{\alpha} - Q\right)$, де $\alpha = \dfrac{1}{P(x)}$
$\Rightarrow u' = u^2 + \tilde{Q}(x)$ - рівняння Рікатті в канонічному вигляді

Example. Звести до канонічного рівняння Рікатті $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{2y}{x} + \dfrac{3}{x^2}$
$P(x) = \dfrac{1}{x^2}, Q(x) = \dfrac{2}{x}, R(x) = \dfrac{3}{x^2}$
Заміна 1: $y = \dfrac{z(x)}{P(x)} = x^2 z \Rightarrow y' = x^2 z' + 2xz$
$\Rightarrow x^2 z' + 2xz = x^2 z^2 + 2xz + \dfrac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 z' = x^2 z^2 + \dfrac{3}{x^2}$
$\Rightarrow z' = z^2 + \dfrac{3}{x^4}$ - канонічне рівняння

4.6 Спеціальні рівняння Рікатті

Маємо таке рівняння

$$y' + Ay^2 = Bx^m$$

де $A, B, m \in \mathbb{R}$

Remark. При $m = 0$ маємо рівняння з відокремленними змінними
При $m = -2$ маємо квазіоднорідне рівняння, де $\sigma = -1$

Theorem. Спеціальне рівняння Рікатті є інтегрованим $\iff \dfrac{m}{2m+4} \in$

$\mathbb{Z}$
Факт доволі складний

Розглянемо випадок, коли $\dfrac{m}{2m+4} \in \mathbb{Z}$
Зробимо заміну

$$y = \frac{z(x)}{x}$$

$\Rightarrow y' = \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2}$
$\Rightarrow \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2} + A\dfrac{z^2}{x^2} = Bx^m$
$\Rightarrow z'x - z + Az^2 = Bx^{m+2}$
Зробимо другу заміну

$$x^{m+2} = t$$

де t - невідома змінна
$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dz}{dt}(m+2)x^{m+1}$
$\Rightarrow x\dfrac{dz}{dx} = (m+2)\dfrac{dz}{dt}x^{m+2} = (m+2)t\dfrac{dz}{dt}$
$\Rightarrow (m+2)t\dfrac{dz}{dt} - z + Az^2 = Bt$
$t\dfrac{dz}{dt} - \dfrac{1}{m+2}z + \dfrac{A}{m+2}z^2 = \dfrac{Bt}{m+2}$
Отримали рівняння Рікатті вигляду
$t\dfrac{dz}{dt} + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t$
В залежності від ситуації виконаємо одну з двох замін

$$z(t) = \frac{t}{a+u(t)}, \alpha < -\frac{1}{2}$$

де $a = \dfrac{1+\alpha}{2}$
Або

$$z(t) = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{t}{u(t)}, \alpha > -\frac{1}{2}$$

Такі заміни робимо стільки разів, скільки потрібно, поки не отримуємо ще одне рівняння Рікатті

$u't - \frac{1}{2}u + Du^2 = Ht$
Зробимо останню заміну

$$u = v(t)\sqrt{t}$$

$\Rightarrow u' = v'\sqrt{t} + \frac{v\sqrt{t}}{2}$
$\Rightarrow u't\sqrt{t} + Dv^2t = Ht$
$v'\sqrt{t} = H - Dv^2$ - рівняння з відокремленими змінними

4.7 Диференціальні рівняння в симетричній формі

Маємо рівняння Пфаффа

$$M(x,y)\,dx = N(x,y)\,dy = 0$$

де $M, N : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2, M, N \in C(D)$, а також
$|M(x,y)| + |N(x,y)| \not\equiv 0$

Definition. Крива $x = x(t), y = y(t),\ t \in I$ є **розв'язком** заданого рівняння, якщо

$$\begin{aligned} x(t), y(t) \in C'(I) \\ \forall t \in I : ((x(t), y(t)) \in D \\ M(x(t)), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t) \equiv 0 \end{aligned}$$

Definition. Вираз $F(x,y,c) = 0$ задає **загальний розв'язок** заданого рівняння, якщо будь-який розв'язок кривої може бути представлений у такому вигляді

4.7.1 Рівняння в повних диференціалах

Definition. Рівняння Пфаффа називається **рівнянням в повних диференціалах**, якщо

$$\exists u(x,y) \in C'(D) : \frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

Тоді рівняння прийме такий вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = 0 \iff du = 0 \iff u(x,y) = c$$

Theorem. Критерій рівняння в повних диференціалах
$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ - в повних диференціалах $\iff \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$
Доведення див. в мат analізі 3 семестр

Example. Розв'язати рівняння $(x^2+y)\,dx + (x+y^2)\,dy = 0$
Оскільки $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1$, то таке рівняння - в повних диференціалах
Отже, $\exists u(x,y) : \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$
$\Rightarrow u(x,y) = \displaystyle\int M(x,y)\,dx + \varphi(y) = \int (x^2+y)\,dx + \varphi(y) =$
$= \dfrac{x^3}{3} + yx + \varphi(y)$
$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\displaystyle\int M(x,y)\,dx + \varphi(y)\right)$
$\Rightarrow x + y^2 = x + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \dfrac{y^3}{3}$
Остаточно $u(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + xy + \dfrac{y^3}{3} + C$

4.7.2 Інтегрувальний множник

Тепер розглянемо рівняння Пфаффа, але вже не в повних диференціалах
Проте завжди можна звести до повних диференціалах шляхом домноження на деяку неперервну функцію $\mu(x,y)$

Example. $y\,dx - x\,dy = 0$, не є рівняннях в повних диференціалах, тому що
$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1, \dfrac{\partial N}{\partial x} = -1$
Проте якщо рівняння домножити на $\mu(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$, то тепер
$\dfrac{1}{y}\,dx - \dfrac{x}{y^2}\,dy = 0$
$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{1}{y^2}$

Definition. Функція $\mu(x,y)$ називається **інтегрувальним множником**, якщо при множенні на рівняння Пфаффа ми отримуємо рівняння в повних диференціалах

З'ясуємо, як це знайти:
$\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x} \iff \dfrac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\dfrac{\partial N}{\partial x}$
Рівняння справа й дасть відповідь на те, який множник нам треба

Часткові випадки:
1. $\mu = \mu(x)$
Тоді $\dfrac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\dfrac{\partial N}{\partial x} \iff \mu\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\dfrac{\partial N}{\partial x}$
$\iff \dfrac{\partial \mu}{\partial x}\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ Оскільки ліва функція лише залежить від x, то права частина рівняння водночас теж має лише залежати від x. Отже, $\mu(x)$ буде знайдено, інтегруючи це рівняння

2. $\mu = \mu(y)$
Аналогічним чином, не буду розписувати

Example. Розв'язати рівняння $(x^2 + y^2 + x)\, dx + y\, dy = 0$
Маємо, що $\dfrac{\partial M}{\partial x} = 2y, \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$
Тоді $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y$
$\Rightarrow \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = 2 = \mu(x) \Rightarrow \exists \mu = \mu(x)$
$\Rightarrow \dfrac{\partial \mu}{\partial x}\dfrac{1}{\mu(x)} = 2 \Rightarrow \mu = e^{2x}$
Домножимо рівняння на інтегрувальний множник:
$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)\, dx + e^{2x}y\, dy = 0$
Тепер це - рівняння в повних диференціалах...

Рівняння Пфаффа також має множники $\mu = \mu(\omega(x,y))$ (наприклад, $\mu(x+y), \mu(xy), \mu(x^2+y^2), \dots$), але то таке