

Зміст

1	Топологічні простори	2
1.1	Топологія	2
1.2	Зв'язок з метричними просторами	3
1.3	Збіжність в топологічному просторі	4
1.4	Неперервні відображення	5
1.5	Гомеоморфність топологічних просторів	7
1.6	Конструкція топології за базою	8
1.7	Конструкція топології за передбазою	10
1.8	Характеристики точок множин	10
1.9	Топологічний підпростір	11
1.10	Добуток просторів	13
1.11	Фактортопологія	14
2	Компактні простори	17
2.1	Компактність	17
2.2	Компактність та підпростори	18
2.3	Компактність та добуток просторів	19
2.4	Компактність та факторпростори	19
3	Зв'язні простори	21
3.1	Зв'язність	21
3.2	Лінійна зв'язність	22
3.3	Компоненти зв'язності та лінійної зв'язності	25
4	Лема Урисона	27
4.1	Корисні леми	27

1 Топологічні простори

1.1 Топологія

Definition 1.1.1 Задано X – деяка множина.

Клас τ , що містить підмножини X , називається **топологією**, якщо:

$$\begin{aligned} X, \emptyset &\in \tau \\ \forall \{U_\alpha \in \tau\} : \bigcup_{\alpha} U_\alpha &\in \tau \\ \forall U, V \in \tau : U \cap V &\in \tau \end{aligned}$$

Пару (X, τ) називатимемо **топологічним простором**.

Definition 1.1.2 Задано (X, τ) – топологічний простір.

Множина U називається **відкритою**, якщо

$$U \in \tau$$

Множина V називається **замкнутою**, якщо

$$X \setminus V \in \tau$$

Example 1.1.3 Зокрема будь-який метричний простір (X, ρ) задає топологію

$\tau_\rho = \{\text{всі відкриті множини в } (X, \rho)\}$. Тому що там виконуються твердження: X, \emptyset – відкриті, будь-яке об'єднання сім'ї відкритих – відкрита, будь-який перетин двох відкритих – відкрита.

Example 1.1.4 Розглянемо множину X та $\tau = 2^X$. Тоді вона також задає топологію.

(X, τ) , де $\tau = 2^X$, ще називають **дискретною топологією**.

Example 1.1.5 Розглянемо множину X та $\tau = \{\emptyset, X\}$. Тоді вона також задає топологію.

(X, τ) , де $\tau = \{\emptyset, X\}$, ще називають **недискретною топологією**.

Example 1.1.6 Маємо $X = \mathbb{R}$ та розглянемо $\tau = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \emptyset \text{ або } U = \mathbb{R} \setminus S, S \subset \mathbb{R} - \text{деяка скінченна}\}$.

Вона утворює топологію, а називається вона **топологія Заріського**.

Дійсно, $\emptyset \in \tau$, а також $X \in \tau$, тому що $X = \mathbb{R} \setminus \emptyset$.

Нехай $\{U_\alpha \in \tau\}$ – сім'я, поки нехай всі такі, що $U_\alpha = \mathbb{R} \setminus S_\alpha$ для деякої $\{S_\alpha\}$ сім'ї скінченних підмножин. Тоді звідси $\bigcup_{\alpha} U_\alpha = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\alpha} S_\alpha$. Зрозуміло цілком, що $\bigcap_{\alpha} S_\alpha$ буде скінченною, тож $\bigcup_{\alpha} U_\alpha \in \tau$.

Якщо існує принаймні одна множина U_α , де $U_\alpha = \emptyset$, то тоді прибираємо їх – повертаємось до першого випадку.

Нехай $U_1, U_2 \in \tau$, тобто $U_1 = \mathbb{R} \setminus S_1$ та $U_2 = \mathbb{R} \setminus S_2$, де множини S_1, S_2 – скінченні. Тоді $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R} \setminus (S_1 \cup S_2)$, де $S_1 \cup S_2$, зрозуміло, скінченна. Тож $U_1 \cap U_2 \in \tau$. Якщо серед них $U_i = \emptyset$, то тоді все зрозуміло.

Definition 1.1.7 Задано (X, τ) та (X, τ') – два топологічних простори.

τ' називається **сильнішою за τ** , якщо

$$\tau' \supset \tau$$

τ' називається **слабшою за τ** , якщо

$$\tau' \subset \tau$$

Example 1.1.8 Якщо ϵ множина X , то дискретна топологія є найсильнішою серед всіх інших топологій; а недискретна топологія є найслабшою серед всіх інших топологій.

Definition 1.1.9 Задано (X, τ) – топологічний простір та $x \in X$.

Відкритим оком точки x назовемо таку відкриту множину U , де

$$U \ni x$$

Оком точки x назовемо таку множину V , що містить відкритий окіл т. x , тобто

$$\exists U - \text{відкритий окіл точки } x : V \supset U$$

Example 1.1.10 Розглянемо \mathbb{R} зі стандартною метрикою. Тоді $(-\varepsilon, \varepsilon)$ буде відкритим околom точки 0, тому що даний інтервал відкритий та містить 0. Водночас $[-\varepsilon, \varepsilon], (-\varepsilon, \varepsilon], [-\varepsilon, \varepsilon)$ будуть околами точки 0, тому що всі вони містять відкритий окіл точки 0 (наприклад) $(\varepsilon, \varepsilon)$.

Remark 1.1.11 Відкритий окіл точки x – також окіл точки x . Дійсно, нехай U – відкритий окіл x . Тоді $\exists U$ – відкритий окіл точки $x : U \supset U$. Тобто за означенням, U – просто окіл точки x .

Definition 1.1.12 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$. Точка x називається **внутрішньою для A** , якщо

$$\exists V - \text{окіл точки } x : V \subset A$$

Proposition 1.1.13 Задано (X, τ) – топологічний простір.

U – відкрита $\iff \forall x \in U : x$ – внутрішня точка для U .

Це те саме звичне означення відкритої множини, яку ми давали в метричному просторі.

Proof.

\Rightarrow Дано: U – відкрита. Тоді якщо $x \in U$, то тоді U – відкритий окіл точки x , причому $U \subset U$. Тобто x – внутрішня точка для U .

\Leftarrow Дано: $\forall x \in U : x$ – внутрішня точка для U . Тобто це означає, що $\exists V_x$ – окіл точки $x : V_x \subset U$. Оскільки V_x – окіл точки x , то тоді $\exists U_x$ – відкритий окіл точки $x : U_x \subset V_x \subset U$.

Зауважимо, що $U = \bigcup_{x \in U} U_x$. Оскільки $\{U_x, x \in U\}$ – сім'я відкритих множин, то в силу означення топології, U буде відкритою як об'єднання. ■

1.2 Зв'язок з метричними просторами

Definition 1.2.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.

Топологічний простір називається **метризуючим**, якщо

$$\exists \rho - \text{метрика на множині } X : \tau_\rho = \tau$$

Інакше кажучи, метрика ρ **індукує ту саму топологію**, що була на початку.

Example 1.2.2 Зокрема дискретний топологічний простір (X, τ) буде метризуючим. Тому що існує

метрика $d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ – дискретна метрика. У цьому випадку (із теорії метричних просторів)

будь-яка підмножина X буде відкритою. Значить, $\tau_d = \tau$.

Example 1.2.3 Але не дискретний топологічний простір (X, τ) не буде метризуючим при $\#X \geq 2$.

Припустимо, що існує метрика ρ , яка індукує ту саму топологію. Зауважимо, що існує відкритий окіл $\emptyset \subsetneq B(x; r) \subsetneq X$ при деякому $r > 0$. Якби було навпаки, тобто $\forall r > 0$ було б $B(x; r) = X$, то звідси $\bigcap_{r \geq 0} B(x; r) = X = \{x\}$, проте у нас X містить більше одного елементу.

Таким чином, знайшли $B(x; r) \neq X, B(x; r) \neq \emptyset$ – ще одна відкрита множина, але $B(x; r) \notin \tau$ – суперечність!

Remark 1.2.4 Один й той самий топологічний простір можна метризувати двома різними метриками (тобто нема ін'єктивності переходу з метричного в топологічний простори).

Example 1.2.5 Маємо (\mathbb{Z}, τ) – дискретний топологічний простір, яка метризується метрикою d . Розглянемо іншу метрику $\rho(m, n) = |m - n|$ на \mathbb{Z} . Зауважимо, що тоді кожна множина – відкрита.

І дійсно, $B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \left\{y \in \mathbb{Z} : |x - y| < \frac{1}{2}\right\} = \{x\}$ – будь-яка одноточкова множина відкрита. Тому якщо брати довільні об'єднання, то тоді вони будуть відкритими.

Remark 1.2.6 Не кожний топологічний простір може бути метризуючим (тобто нема сюр'єктивності переходу з метричного в топологічний простори).

Дійсно, ми довели, що не дискретний топологічний простір не може бути метризуючим.

Definition 1.2.7 Задані (X, ρ) та (X, ρ') – два метричних простори. Метрики називаються **топологічно еквівалентними**, якщо

$$\tau_\rho = \tau_{\rho'}$$

Тобто вони індукують одну й ту саму топологію.
Позначення: $\rho \sim \rho'$.

Definition 1.2.8 Задані (X, ρ) та (X, ρ') – два метричних простори. Метрики називаються **Ліпшицево еквівалентними**, якщо

$$\exists C, c > 0 : \forall x, y \in X : c\rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq C\rho(x, y)$$

Позначення: $\rho \stackrel{\text{Lipsch}}{\sim} \rho'$.

Remark 1.2.9 Зрозуміло, що два означення задають відношення еквівалентності.

Proposition 1.2.10 Задані (X, ρ) та (X, ρ') – два метричних простори. Відомо, що $\rho \stackrel{\text{Lipsch}}{\sim} \rho'$. Тоді $\rho \sim \rho'$.

Proof.

Нам треба довести, що $\tau_\rho = \tau_{\rho'}$. Це теж саме, що довести, що U – відкрита в $(X, \rho) \iff U$ – відкрита в (X, ρ') .

Нехай U – відкрита в (X, ρ) . Нехай $x \in U$, тоді за умовою, $\exists B_\rho(x; r) \subset U$. За умовою твердження, існують константи $c, C > 0$, для яких $c\rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq C\rho(x, y)$. Із цієї нерівності випливає $\rho'(x, y) \leq C\rho(x, y)$, а з неї випливає, що $B_{\rho'}(x, cr) \subset B_\rho(x, r)$. І дійсно,

$$y \in B_{\rho'}(x, cr) \implies \rho'(x, y) \leq cr \implies \rho(x, y) \leq \frac{1}{c}\rho'(x, y) \leq r \implies y \in B_\rho(x, r).$$

Отже, $B_{\rho'}(x, cr) \subset U$, тобто знайшли такий окіл, а тому x – внутрішня точка U відносно (X, ρ') . Оскільки це для довільної точки, то U – відкрита в (X, ρ') .

Нехай U – відкрита в (X, ρ') , то тоді аналогічно доводиться. Просто цього разу в нерівності $c\rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq C\rho(x, y)$ використовується права частина нерівності. ■

Remark 1.2.11 Якщо $\rho \sim \rho'$, то не обов'язково $\rho \stackrel{\text{Lipsch}}{\sim} \rho'$.

Example 1.2.12 Зокрема маємо (\mathbb{Z}, d) та (\mathbb{Z}, ρ) – два метричних простори. Тут d – дискретна метрика та ρ задається як $\rho(m, n) = |m - n|$. Із **Ех. 1.2.5**, вони генерують одну й ту саму топологію, тобто $\tau_d = \tau_\rho$. А це означає, що $d \sim \rho$.

При цьому ми маємо $d \not\stackrel{\text{Lipsch}}{\sim} \rho$. Дійсно, нехай $C > 0$. Можна підібрати $x = 2[C] + 1, y = [C]$, причому тут $x, y \in \mathbb{Z}$, для яких $\rho(x, y) > Cd(x, y)$.

1.3 Збіжність в топологічному просторі

Definition 1.3.1 Задані (X, τ) – топологічний простір та послідовність $\{x_n \in X, n \geq 1\}$. Послідовність **збігається до точки** $x \in X$, якщо

$$\forall U - \text{відкритий окіл точки } x : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n \in U$$

Example 1.3.2 Розглянемо (X, τ_{disc}) – дискретний топологічний простір.

Послідовність $\{x_n \in X, n \geq 1\}$ збігається до точки $x \in X \iff \exists N : \forall n \geq N : x_n = x$.

⇒ Дано: $\{x_n\}$ збігається до $x \in X$. Тоді для будь-якого відкритого околу точки x , зокрема для $\{x\}$ існує номер N , де $\forall n \geq N : x_n \in \{x\}$, тобто $x_n = x, \forall n \geq N$.

⇐ Дано: $\exists N : \forall n \geq N : x_n = x$. Нехай U – відкритий окіл точки x . У нас є номер N , де $\forall n \geq N : x \in U$, зокрема звідси $x_n \in U$, а тому звідси $\{x_n\}$ збігається до точки $x \in X$.

Example 1.3.3 Розглянемо $(X, \tau_{\text{indisc}})$ – недискретний топологічний простір. Тоді довільна послідовність $\{x_n \in X, n \geq 1\}$ збігається до будь-якої точки $x \in X$.

Дійсно, нехай U – відкритий окіл точки $x \in X$. У недискретному просторі лише $U = X$ буде відкритим околом точки x . А значить, існує номер $N = 1$, де $\forall n \geq N : x_n \in X$.

Для того, щоб позбутися такої аномалії, нам треба нова класифікація топологічних просторів. Але це буде трошки пізніше.

1.4 Неперервні відображення

Definition 1.4.1 Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори. Відображення $f: X \rightarrow Y$ називається **неперервним**, якщо

$$\forall U \in \tilde{\tau} : f^{-1}(U) \in \tau$$

Або простіше кажучи казати так:

$$\forall U - \text{відкрита в } Y : f^{-1}(U) - \text{відкрита в } X$$

Example 1.4.2 Задано відображення $f: X \rightarrow Y$, де $(X, \rho), (Y, \rho')$ – два метричних простори. Тоді звідси f – неперервне (в топологічному сенсі).

Example 1.4.3 Задано відображення $f: X \rightarrow Y$, де (X, τ_{discr}) – дискретний топологічний простір. Тоді f – неперервне.

Справді, беремо U – відкриту множину в Y . Тоді прообраз $f^{-1}(U)$ буде відкритим в X , бо в дискретній топології всі множини – відкриті.

Example 1.4.4 Задано відображення $f: X \rightarrow Y$, де $(Y, \tau_{\text{indiscr}})$ – недискретний топологічний простір. Тоді f – неперервне.

Справді, оберемо \emptyset, Y – єдині відкриті множини в Y . Тоді $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ та $f^{-1}(Y) = X$ – обидва відкриті в X .

Example 1.4.5 Задано відображення $\text{id}: X \rightarrow X$, тут відображення між (X, τ) та (X, τ') . Тоді id – неперервне $\iff \tau$ сильніша за τ' .

\Rightarrow Дано: id – неперервне. Тобто $\forall U \in \tau' : \text{id}^{-1}(U) = U \in \tau$. А це в точності $\tau' \subset \tau$.

\Leftarrow Дано: $\tau' \subset \tau$. Тобто $\forall U \in \tau' : U \in \tau$, але при цьому $U = \text{id}^{-1}(U) \in \tau$. Отже, id – неперервне.

Proposition 1.4.6 Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори.

Відображення $f: X \rightarrow Y$ – неперервне $\iff \forall U$ – замкнена в $Y : f^{-1}(U)$ – замкнена в X .

Proof.

\Rightarrow Дано: f – неперервне. Оберемо U – замкнену в Y . За означенням, $X \setminus U$ – відкрита в Y , а тому за неперервністю, $f^{-1}(X \setminus U)$ – відкрита в X . Зауважимо, що $f^{-1}(X \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ – відкрита в X . Отже, $f^{-1}(U)$ – замкнена в X .

\Leftarrow Цілком аналогічно доводиться. ■

В принципі, часто про відображення кажуть просто про неперервність, не уточнюючи в якій точці. Але для такого сценарія означення теж є.

Definition 1.4.7 Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори.

Відображення $f: X \rightarrow Y$ називається **неперервним в точці** $x \in X$, якщо

$$\forall V - \text{окіл точки } f(x) : \exists U - \text{окіл точки } x : f(U) \subset V$$

Proposition 1.4.8 Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори.

Відображення $f: X \rightarrow Y$ – неперервне $\iff \forall x \in X : f$ – неперервне в точці x .

Proof.

\Rightarrow Дано: f – неперервне. Оберемо будь-яку точку $x \in X$. Нехай V – окіл точки $f(x)$. Тоді існує \tilde{V} – відкритий окіл точки $f(x)$, де $V \supset \tilde{V}$. Значить, за неперервністю, $f^{-1}(\tilde{V})$ – відкритий окіл точки x . Також із $V \supset \tilde{V}$ випливає $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(\tilde{V})$. Таким чином, $f^{-1}(V)$ – окіл точки x . Нарешті, варто зауважити, що виконується $f(f^{-1}(V)) \subset V$.

Таким чином, f – неперервне в точці $x \in X$, причому довільній.

\Leftarrow Дані: $\forall x \in X : f$ – неперервне в точці x . Нехай U – відкрита множина в Y . Хочемо показати, що $f^{-1}U$ – відкрита, тобто всі точки внутрішні.

Нехай $x \in f^{-1}U$, тобто $f(x) \in U$, тоді за означення неперервності в точці, існує окіл U_x точки x , де $f(U_x) \subset U \implies U_x \subset f^{-1}U$. Отже, x – внутрішня точка.

Таким чином, f – неперервне відображення. ■

Proposition 1.4.9 "Означення Гейне"

Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори та відображення $f: X \rightarrow Y$ – неперервне. Тоді виконується "означення Гейне" тобто

нехай $\{x_n \in X, n \geq 1\}$ збігається до точки $x \in X$. Тоді $\{f(x_n) \in Y, n \geq 1\}$ збігається до точки $f(x) \in Y$.

Proof.

Нехай $\{x_n \in X, n \geq 1\}$ збігається до точки x . Оберемо U – відкритий окіл точки $f(x)$, тоді за неперервністю, $f^{-1}(U)$ – відкритий окіл точки x , а тому звідси за збіжністю, існує N , де $\forall n \geq N: x_n \in f^{-1}(U) \implies f(x_n) \in U$. ■

Remark 1.4.10 Якщо виконано означення Гейне, то з цього в загальному випадку неперервність НЕ випливає.

Proposition 1.4.11 Інші властивості

1. $\text{id}: X \rightarrow X$ – неперервне відображення будь-якій топології τ ;
2. Нехай $f: X \rightarrow Y$ та $g: Y \rightarrow Z$ – обидва неперервні. Тоді $g \circ f: X \rightarrow Z$ – неперервне.

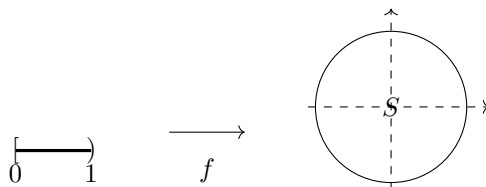
1. *Вказівка:* $\text{id}^{-1}(U) = U$.
2. *Вказівка:* $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

Remark 1.4.12 Нехай відображення $f: X \rightarrow Y$ бієктивне. Якщо f – неперервне, то не обов'язково (!), щоб f^{-1} було неперервним.

Example 1.4.13 Зокрема вже відомо, що $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ буде неперервним відображенням, якщо в першому (\mathbb{R}, d) – дискретний метричний простір та в другому (\mathbb{R}, ρ) – стандартний евклідів простір. Тут виконується неперервність, оскільки τ_{discr} – найсильніша топологія.

Утім відображення $\text{id}^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уже не буде неперервним. Тому що $[-1, 1]$ – відкрита множина відносно дискретної топології, але $\text{id}^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1]$ – НЕ відкрита множина відносно евклідової топології.

Example 1.4.14 Більш геометричний приклад буде наступним. Маємо відображення $f: (0, 1] \rightarrow S$, де $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – одиничне коло (метрика буде стандартною всюду). Визначимо $f(t) = e^{2\pi i t}$. Зрозуміло, що це бієктивне відображення та є неперервним.



У цьому напрямку неперервність означає, що ми $(0, 1]$ деформували в коло S , просто об'єднавши тіпа края.

Але $f^{-1}: S \rightarrow (0, 1]$ уже не буде неперервним.

Припустимо, що все-таки неперервне. Тоді оскільки $\left\{1 - \frac{1}{n}, n \geq 1\right\}$ збігається до 1, а тому $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow$

$f(1) = e^{2\pi i} = 1$. Утім в силу неперервності f^{-1} ми маємо $f^{-1}\left(f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$, хоча

$f^{-1}(1) = 0$. Суперечність!

Тут щоб із кола зробити палку, треба розірвати її в точці $z = 1$. Тому нема неперервності. Саме тому приходить новий розділ, де ми хочемо, щоб, деформувавши один об'єкт, отримали топологічно той самий об'єкт і навпаки.

1.5 Гомеоморфність топологічних просторів

Definition 1.5.1 Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори. Відображення $f: X \rightarrow Y$ називається **гомеоморфізмом**, якщо

$$\begin{aligned} f & \text{ – неперервне} \\ f & \text{ – бієктивне} \\ f^{-1} & \text{ – неперервне} \end{aligned}$$

Definition 1.5.2 Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори. Вони будуть називатися **гомеоморфними**, якщо

$$\exists f: X \rightarrow Y \text{ – гомеоморфізм}$$

Позначення: $X \cong Y$.

Remark 1.5.3 Топологічні простори, які є гомеоморфними, задають відношення еквівалентності. $X \cong X$, оскільки $\text{id}: X \rightarrow X$ (одна топологія) – гомеоморфізм. $X \cong Y \iff Y \cong X$ просто за означенням гомеоморфізма. $X \cong Y, Y \cong Z \implies X \cong Z$, тому що $g \circ f$ задає гомеоморфізм між ними. У цьому випадку $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ – гомеоморфізми.

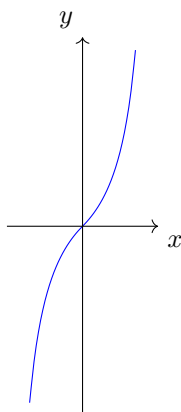
Example 1.5.4 Зокрема відрізок $[0, 1] \cong [a, b]$, якщо встановити $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ як $f(t) = (1-t)a + tb$ – і це відображення буде гомеоморфізмом. Дійсно, $f \in C([0, 1])$ як лінійна функція. Далі знайдемо обернене відображення – воно дорівнює $f^{-1}(u) = \frac{u-a}{b-a}$, причому $f^{-1} \in C([a, b])$ знову як лінійна функція.

Example 1.5.5 Із цього прикладу можна отримати $[a, b] \cong [c, d]$, тому що $[a, b] \cong [0, 1]$ та $[0, 1] \cong [c, d] \implies [a, b] \cong [c, d]$.

Аналогічно можна довести, що $(a, b) \cong (c, d)$, $(a, b] \cong (c, d] \cong [c, d) \cong [a, b)$.

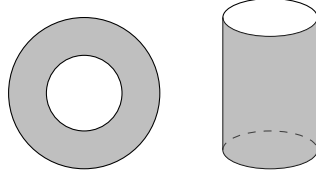
Example 1.5.6 За **Ех. 1.4.14**, ми отримали $(0, 1] \not\cong S$.

Example 1.5.7 Також маємо $(a, b) \cong \mathbb{R}$. Можна спочатку довести, що $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$, якщо задати $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ – це дійсно буде гомеоморфізмом.



А вже далі в силу транзитивності, ми отримаємо $(a, b) \cong \mathbb{R}$.

Example 1.5.8 Тепер розглянемо такі два об'єкти. Перший: кільце з внутрішнім радіусом 1 та зовнішнім радіусом 2, для зручності розташуємо центр на початку координат. Другий: циліндр без двох основ. Інтуїтивно вони будуть гомеоморфними, тому що: циліндр отримаємо з кільця, якщо його кільце намагатися розтягнути вгору; кільце отримаємо з циліндра, якщо його сплющити.



Строго можна довести гомеоморфність цих об'єктів, якщо задати відображення $(r \cos \theta, r \sin \theta) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta, r)$, що буде гомеоморфізмом. У цьому випадку $r \in [1, 2]$ та $\phi \in [0, 2\pi]$.

Example 1.5.9 Ще важливий приклад, $[a, b] \not\cong \mathbb{R}$.

Припустимо, що все ж таки $[a, b] \cong \mathbb{R}$, тобто існує між ними гомеоморфізм $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Оскільки $f \in C([a, b])$, то звідси воно досягає найбільшого значення M та найменшого значення m . Тобто $f([a, b]) = [m, M]$. Але оскільки f – бієкція, то звідси $f([a, b]) = \mathbb{R}$. Але при цьому $[m, M] \neq \mathbb{R}$ – суперечність!

Example 1.5.10 Мабуть, в алгебраїчній топології буде доведено, що $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$.

1.6 Конструкція топології за базою

Definition 1.6.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.

Клас \mathcal{B} підмножин X назовемо **базою топології** τ , якщо

$$\forall U \in \tau : U = \bigcup_{V \in \tilde{\mathcal{B}}} V, \quad \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$$

Тобто \mathcal{B} називається базою, якщо кожна відкрита множина записується як об'єднання множин з класу \mathcal{B} .

Example 1.6.2 Зокрема маємо метричний простір (X, ρ) , де індукується топологія τ_ρ . Тоді для неї база $\mathcal{B} = \{B(x; r) \mid x \in X, r > 0\}$ – набір всіх відкритих куль. Дійсно, нехай U – відкрита множина, тоді $\forall x \in U : x$ – відкрита, а тому $\exists B(x; r_x) \subset U$. Тоді звідси $U = \bigcup_{x \in X} B(x; r_x)$.

Example 1.6.3 Якщо (X, τ_{discr}) – дискретна топологія, то тоді $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ – база. Дійсно, кожна підмножина $U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$, ну й U уже апіорі відкрита.

Proposition 1.6.4 Задано (X, τ) – топологічний простір та \mathcal{B} – база топології. Тоді:

1. $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$ – тобто X записуємо як об'єднання всіх множин із бази;
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : B_1 \cap B_2 = \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U$, де $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ – тобто перетин елементів з бази записується як об'єднання з цієї самої бази.

Proof.

Дійсно, оскільки \mathcal{B} – база топології, то кожна відкрита множина – це об'єднання множин із бази.

1. Зокрема X – відкрита, тому $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$.

2. Нехай $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Вони вдвох є відкритими, тому що вони записані як об'єднання однієї множини з бази. Значить, $B_1 \cap B_2$ є відкритою множиною, а тому $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$. ■

Definition 1.6.5 Нехай задано множину X (уже не топологічний простір).

Клас \mathcal{B} підмножин X назовемо **базою множини** X , якщо

1. $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : B_1 \cap B_2 = \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U$, де $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$

Якщо (X, τ) – топологія та \mathcal{B} – база топології, то \mathcal{B} – база множини.

Виявляється, що якщо в нас є множина X , для якої ми хочемо згенерувати топологію, то нам потрібно створити базу \mathcal{B} множини X .

Proposition 1.6.6 Конструкція топології за базою

Задано X – множину та \mathcal{B} – база цієї множини. Створимо $\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U \mid \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B} \right\}$ – тобто клас, що

складається з усіх можливих об’єднань елементів з бази. Тоді $(X, \tau_{\mathcal{B}})$ утворює топологічний простір. Ми $\tau_{\mathcal{B}}$ називаємо **топологією, що породжена базою \mathcal{B}** . Причому це єдина така топологія, де \mathcal{B} – база топології.

Proof.

Маємо $\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U \mid \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B} \right\}$, перевіримо всі пункти для топології.

1. $\emptyset \in \tau_{\mathcal{B}}$, тому що можна записати $\emptyset = \bigcup_{U \in \emptyset} U$, де $\emptyset \subset \mathcal{B}$. Також $X \in \tau_{\mathcal{B}}$, тому що \mathcal{B} – база множини

X , а значить, $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$.

2. Нехай $\{U_{\alpha} \mid U_{\alpha} \in \tau_{\mathcal{B}}\}$ – сім’я відкритих множин. Тобто $U_{\alpha} = \bigcup_{\mathcal{B}_{\alpha}} U$, де $\mathcal{B}_{\alpha} \subset \mathcal{B}$. Тоді звідси

$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \bigcup_{\bigcup_{\alpha} \mathcal{B}_{\alpha}} U$, причому $\bigcup_{\alpha} \mathcal{B}_{\alpha} \subset \mathcal{B}$. Отже, $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \in \tau_{\mathcal{B}}$.

3. Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$. Тобто звідси $U_1 = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_1} U$ та $U_2 = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_2} U$, де $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$. Значить, звідси

$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{B}_1 \\ V \in \mathcal{B}_2}} (U \cap V)$. Оскільки $U, V \in \mathcal{B}$, то в силу того, що \mathcal{B} – база множини X , звідси

$U \cap V = \bigcup_{W \in \tilde{\mathcal{B}}_{U,V}} W$. Тоді $U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{B}_1 \\ V \in \mathcal{B}_2}} \bigcup_{W \in \tilde{\mathcal{B}}_{U,V}} W = \bigcup_{W \in \tilde{\mathcal{B}}} W$. Детально треба уточнити, що кожний

$\tilde{\mathcal{B}}_{U,V} \subset \mathcal{B}$, тоді $\bigcup_{\substack{U \in \mathcal{B}_1 \\ V \in \mathcal{B}_2}} \tilde{\mathcal{B}}_{U,V} \stackrel{\text{позн.}}{=} \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$. Висновок: $U_1 \cap U_2$ записали як об’єднання множин з бази \mathcal{B} ,

тож $U_1 \cap U_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$.

Із цих пунктів випливає, що $\tau_{\mathcal{B}}$ – дійсно топологія.

Також з цього випливає, що \mathcal{B} – не просто база множини X , а ще й база топології $\tau_{\mathcal{B}}$.

Припустимо, що існує τ' – якась інша топологія на X , яка має базу топології \mathcal{B} . Нам треба довести, що $\tau' = \tau_{\mathcal{B}}$.

Нехай $U \in \tau'$, тоді звідси за означенням бази топології, $U = \bigcup_{V \in \tilde{\mathcal{B}}} V$, де $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$. Але в силу того, як

ми визначали $\tau_{\mathcal{B}}$, випливає, що $U \in \tau_{\mathcal{B}}$.

Нехай $U \in \tau_{\mathcal{B}}$, тоді звідси за побудовою, $U = \bigcup_{V \in \tilde{\mathcal{B}}} V$, але тоді $V \in \tau'$ – відкрита множина як

об’єднання однієї множини з бази. За означенням топології, $U \in \tau'$.

Власне, з цього випливає, що $\tau_{\mathcal{B}} = \tau'$. ■

Proposition 1.6.7 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – топологічні простіри та $\tilde{\mathcal{B}}$ – база топології $\tilde{\tau}$. Відомо, що $\forall U \in \tilde{\mathcal{B}} : f^{-1}(U) \in \tau$. Тоді $f : X \rightarrow Y$ – неперервне.

Remark 1.6.8 Тобто коли топологія побудована за базою, то для неперервності достатньо перевірити умову для елементів з бази, а не з усієї топології.

Proof.

Нехай U – відкрита множина в Y , тобто звідси $U = \bigcup_{V \in \mathcal{B}'} V$, де $\mathcal{B}' \subset \tilde{\mathcal{B}}$ за визначенням бази.

Тоді звідси $f^{-1}(U) = \bigcup_{V \in \mathcal{B}'} f^{-1}(V)$, де всі $f^{-1}(V)$ відкриті за умовою. Отже, $f^{-1}(U)$ – відкрита як об’єднання. Отже, $f : X \rightarrow Y$ – неперервне. ■

Definition 1.6.9 Задано (X, τ) – топологічний простір та \mathcal{B} – його база. Простір задовольняє **другу аксіому зліченності** (англ. **second-countable**), якщо

\mathcal{B} – зліченна база

Example 1.6.10 Зокрема (\mathbb{R}, τ) з евклідовою топологією буде second-countable.

Розглянемо $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Варто спочатку довести, що вона утворює базу стандартної топології. Дійсно, нехай $U \in \tau$. Її можемо в стандартній топології записати як $U = \bigcup_{x \in U} (x - r, x + r)$.

Надалі вся увага на $(x - r, x + r) \stackrel{\text{позн.}}{=} (u, v)$. Слід зауважити, що тут $u, v \in \mathbb{R}$. Але відомо, що для u існує послідовність раціональних чисел $\{q_n, n \geq 1\}$ так, щоб $v \geq q_n \geq u$, а також $q_n \rightarrow u$. Аналогічно існує послідовність раціональних чисел $\{r_n, n \geq 1\}$ так, щоб $u \leq r_n \leq v$, а також $r_n \rightarrow v$. Тоді запишемо $(u, v) = \bigcup_{\substack{q_n, r_n \in \mathbb{Q} \\ q_n < r_n}} (q_n, r_n)$. Таким чином, отримали (u, v) як об'єднання множин з бази,

тобто U записується як об'єднання множин з бази.

Висновок: \mathcal{B} – база стандартної топології. Оскільки \mathbb{Q} – зліченна множина, то кількість інтервалів (a, b) також буде зліченною, тому second-countable.

1.7 Конструкція топології за передбазою

Definition 1.7.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.

Клас \mathcal{S} підмножин X назовемо **передбазою топології** τ , якщо

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \bigcap_{i=1}^n S_i \mid S_i \in \mathcal{S} \right\}$$

утворює базу топології τ . Тобто з цього випливає, що

$$\forall U \in \tau : U = \bigcup_{\bigcap_{i=1}^n S_i \in \mathcal{B}} \bigcap_{i=1}^n S_i, \text{ де } \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$$

Тобто кожна відкрита множина записується як об'єднання множин, кожна з яких записується лише як скінченні перетини множин з \mathcal{S} .

Ми вже знаємо, що якщо \mathcal{B} – база, то тоді можна побудувати топологію. Тобто якщо ми хочемо, щоб \mathcal{S} була передбазою, то треба спочатку утворити базу \mathcal{B} , а із бази вже утворити топологію.

TODO: доповнити

1.8 Характеристики точок множин

Нам вже відоме означення внутрішньої точки. Ще раз нагадаю:

Definition 1.8.1 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.

Точка x називається **внутрішньою** для A , якщо

$$\exists V - \text{окіл точки } x : V \subset A$$

Definition 1.8.2 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.

Точка $x \in X$ називається **граничною** для A , якщо

$$\forall V - \text{окіл точки } x : V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Є ще різні види точок, але поки зосередимось на них.

У метричному просторі ми вводили поняття відкритих та замкнених множин як раз через внутрішні та граничні точки. У топологічному просторі ми означення відкритої множини звели до означення з використанням внутрішніх точок. Зробимо те саме для замкнених множин.

Proposition 1.8.3 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.

A – замкнена $\iff A$ містить всі граничні точки A .

Proof.

\Rightarrow Дано: A – замкнена, тобто $X \setminus A$ – відкрита множина.

Припустимо, що x – гранична точка A , але $x \notin A$. Тобто $x \in X \setminus A$. Водночас звідси x буде внутрішньою точкою $X \setminus A$, тобто існує V – окіл точки x , для якого $V \subset X \setminus A \implies V \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. Але для цього ж околу ми знаємо, що $V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ – суперечність!

Отже, обов’язково треба вимагати $x \in A$.

\Leftarrow Дано: A містить всі свої граничні точки. Доведемо, що $X \setminus A$ відкрита.

Нехай $x \in X \setminus A$, тоді вона уже не є граничною точкою, тобто $\exists V$ – окіл точки x : $V \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$, зокрема звідси $V \subset X \setminus A$. Отже, x – внутрішня точка.

Тож звідси $X \setminus A$ – відкрита, тобто A – замкнена. ■

TODO: дописати!

1.9 Топологічний підпростір

Definition 1.9.1 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.

Топологією підпростору на A називають таку множину:

$$\tau_A = \{U \subset A \mid \exists W \in \tau : U = A \cap W\}$$

Пара (A, τ_A) називається **підпростором** топологічного простору (X, τ) .

Якщо $U \in \tau_A$, то будемо казати, що U відкрита на A . Також якщо $A \setminus U \in \tau_A$ будемо казати, що U – замкнена на A .

Proposition 1.9.2 τ_A задає топологію та (A, τ_A) теж утворює топологічний простір.

Proof.

1. $\emptyset, A \in \tau_A$ зі зрозумілих причин;

2. Нехай $\{U_\alpha \in \tau_A\}$ – сім’я відкритих. Тобто $U_\alpha = A \cap W_\alpha$, де $\{W_\alpha \in \tau\}$ – сім’я відкритих в (X, τ) . Тоді звідси $\bigcup U_\alpha = A \cap \bigcup W_\alpha$, де множина $\bigcup W_\alpha \in \tau$. Отже, $\bigcup U_\alpha \in \tau_A$.

3. Нехай $U_1, U_2 \in \tau_A$, тобто $U_1 = A \cap W_1$ та $U_2 = A \cap W_2$ при $W_1, W_2 \in \tau$. Звідси маємо $U_1 \cap U_2 = A \cap (W_1 \cap W_2)$, де $W_1 \cap W_2 \in \tau$, але звідси $U_1 \cap U_2 \in \tau_A$. ■

Example 1.9.3 Зокрема в метричному просторі (X, ρ) , якщо $A \subset X$, ми вже знаємо, що U – відкрита на $A \iff U = A \cap W$ для деякої W – відкритої в X . Тобто, по суті, індукований простір (A, ρ_A) індукує топологію підпростору τ_A .

Example 1.9.4 Маємо (X, τ_{discr}) – дискретний топологічний простір. Оберемо $A \subset X$, тоді підпростір (A, τ_A) – теж дискретний топологічний простір.

Ну дійсно, $U \subset A \subset X$, а будь-яка підмножина в дискретному просторі – відкрита.

Example 1.9.5 Маємо $(X, \tau_{\text{indiscr}})$ – дискретний топологічний простір. Оберемо $A \subset X$, тоді підпростір (A, τ_A) – теж дискретний топологічний простір.

Дійсно, нехай U – відкрита в A , тобто звідси $U = A \cap W$, де W – відкрита в X . Значить, або $W = \emptyset$, або $W = X$. Тоді звідси $U = A \cap X = A$ або $U = \emptyset$. Інших відкритих – нема.

Proposition 1.9.6 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.

V – замкнена на $A \iff \exists S$ – замкнена в X : $V = A \cap S$.

Proof.

\Rightarrow Дано: V – замкнена на A , тобто $A \setminus V$ – відкрита на A , а тому $A \setminus V = A \cap W$ при W – відкрита на X . Значить, звідси $V = A \setminus (A \setminus V) = A \setminus (A \cap W) = A \cap (X \setminus W)$. Позначимо $X \setminus W = S$, яка є замкнутою в X . Звідси випливає, що $V = A \cap S$.

\Leftarrow Аналогічно. ■

Proposition 1.9.7 Задано (X, τ) – топологічний простір та $U \subset A \subset X$. Відомо, що U – відкрита на A та A – відкрита на X . Тоді U – відкрита на X .

Аналогічно виконується, якщо всюди – замкнені множини.

Proof.

За умовою, U – відкрита на A , тобто звідси $U = A \cap W$; причому W – відкрита на X та A – відкрита на X за умовою. Отже, U – відкрита на X як перетин. ■

Remark 1.9.8 У цьому твердженні дуже важливо, щоб A була відкритою на X !

Example 1.9.9 Маємо $X = \mathbb{R}$ із евклідовою метрикою, $A = [0, +\infty)$ та $U = [0, 1)$.

У цьому випадку A не є відкритою на X – зрозуміло. Далі зауважимо, що U – відкрита на A , просто тому що $[0, 1) = [0, +\infty) \cap (1, +\infty)$, де $(1, +\infty)$ – відкрита на X . Але U – не відкрита на X .

Remark 1.9.10 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$. Означення топології підпростору на A можна переписати по-інакшому. Для цього розглянемо вкладення $\iota_A: A \rightarrow X$, а далі зауважимо, що для кожної $W \subset X$ маємо $\iota_A^{-1}(W) = W \cap A$. Тоді звідси маємо:

$$\tau_A = \iota_A^{-1}(\tau)$$

Тоді τ_A ще інколи називають **індукованою топологією** на A .

Proposition 1.9.11 Задано (X, τ) – топологічний простір та A – підпростір. Тоді вкладення $\iota_A: A \rightarrow X$ неперервне.

Вказівка: $\iota_A^{-1}(W) = W \cap A$.

Remark 1.9.12 τ_A – найслабша на A топологія серед всіх інших, для якої ι – неперервне. Тому що τ_A визначено так, що лише $\iota_A^{-1}(W)$ – відкриті, більше нічого.

Proposition 1.9.13 Задано (X, τ) – топологічний простір та A – підпростір. Нехай $(Y, \tilde{\tau})$ – інший топологічний простір.

Відображення $f: Y \rightarrow A$ – неперервне $\iff \iota \circ f: Y \rightarrow X$ – неперервне.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow \iota \circ f & \downarrow \iota \\ & & X \end{array}$$

Proof.

\Rightarrow Дано: $f: Y \rightarrow A$ – неперервне. Тоді автоматично $\iota \circ f: Y \rightarrow X$ буде неперервним як композиція неперервних.

\Leftarrow Дано: $\iota \circ f: Y \rightarrow X$ – неперервне. Оберемо U – відкрити на A , тобто $U = A \cap W$ при деякому W – відкрити на X . Розглянемо $f^{-1}(U) = f^{-1}(A \cap W) = f^{-1}(\iota^{-1}(W)) = (\iota \circ f)^{-1}(W)$. Але оскільки W – відкрити на X , то за умовою, $(\iota \circ f)^{-1}(W)$ – відкрити на Y . ■

Example 1.9.14 Зокрема на стандартних топологіях маємо відображення $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ як $f(x) = \sin x$. Із мат. аналізу, воно є неперервним. Але за твердженням вище, $\iota \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, де мається $\iota: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, – неперервне теж відображення.

Тобто твердження каже, що властивість неперервності залишається, якщо збільшити чи зменшити область значень.

Proposition 1.9.15 Задано (X, τ) – топологічний простір та $f: X \rightarrow Y$ – неперервне. Тоді звуження $f|_A: A \rightarrow Y$ – теж неперервне, де $A \subset X$.

Вказівка: $f|_A = f \circ \iota$, де $\iota: A \rightarrow X$.

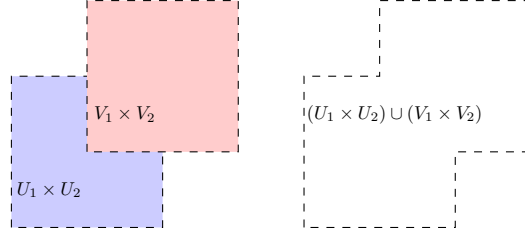
Example 1.9.16 Тобто маємо $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, що задано $f(x) = \sin x$, що неперервне. Тоді $f|_{[-\pi, \pi]}: [-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ – теж неперервне.

Example 1.9.17 Тепер маємо $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що задається як $f(x) = \frac{1}{x}$. У цьому випадку $f|_{(0, +\infty)}$ буде неперервним відображенням з мат. аналізу, але f – не є неперервним.

1.10 Добуток просторів

Нехай задані (X_1, τ_1) та (X_2, τ_2) – два топологічних простори. Хочеться задати топологію на $X_1 \times X_2$. Перше вгадування: чи буде множина $\{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$ утворювати топологію? Ні, цього недостатньо.

Example 1.10.1 Зокрема маємо (\mathbb{R}, τ_1) та (\mathbb{R}, τ_2) – дві евклідові топології. Розглянемо множину $U_1 \times U_2 = (0, 2) \times (0, 2)$ та множину $V_1 \times V_2 = (1, 3) \times (1, 3)$. А далі треба подивитися на $(U_1 \times U_2) \cup (V_1 \times V_2)$ та зауважити наступне: це буде відкрита множина, але не потрапляє в нашу 'топологію', тому що я не можу її записати як $W_1 \times W_2$.



Значить, треба трошки по-інакшому до цього підійти.

Розглянемо $\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$. Якщо вона ще не утворює топологію, то спробуємо показати, що це утворює базу множини $X_1 \times X_2$. Дійсно:

1. $X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$, навіть не обов'язково розписувати як об'єднання. Хоча можна це зробити, $X_1 \times X_2 = \bigcup_{U_1 \times U_2 \in \mathcal{B}} U_1 \times U_2$, і в це же об'єднання буде входити $X_1 \times X_2$, а тому рівність легітимна;

2. Нехай $U, V \in \mathcal{B}$, тобто $U = U_1 \times U_2$ та $V = V_1 \times V_2$, у цьому випадку U_1, V_1 – відкриті в X_1 та U_2, V_2 – відкриті в X_2 . Тоді звідси зауважимо, що $U \cap V = (U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2)$. Оскільки $U_1 \cap V_1$ та $U_2 \cap V_2$ залишаються відкритими у себе, то звідси $U \cap V$ записали як добуток відкритих, тож $U \cap V \in \mathcal{B}$.

Таким чином, \mathcal{B} – дійсно база $X_1 \times X_2$, а тому можна породити топологію.

Definition 1.10.2 Задані (X_1, τ_1) та (X_2, τ_2) – два топологічних простори.

Добутком топологій τ_1, τ_2 назвемо топологію, яка породжена базою

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$$

Позначення: $\tau_1 \times \tau_2 \stackrel{\text{def.}}{=} \tau_{\mathcal{B}}$.

Це ще інколи називають **тіхоновською топологією**.

Proposition 1.10.3 Задані (X_1, τ_1) та (X_2, τ_2) – два топологічних простори. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) U – відкрита на $X_1 \times X_2$;
- 2) $U = \bigcup_{\alpha} U_1^{\alpha} \times U_2^{\alpha}$ для деяких сімей $\{U_1^{\alpha}\}$ та $\{U_2^{\alpha}\}$ відкритих множин відповідно на X_1, X_2 ;
- 3) $\forall (x_1, x_2) \in U : \exists U_1, U_2$ – відповідно відкриті околи точки $x_1, x_2 : U_1 \times U_2 \subset U$.

Proof.

1) \Leftrightarrow 2) випливає з означення добутку топологій.

2) \Rightarrow 3) зрозуміло.

3) \Leftarrow 2) Дано: виконується 3), тоді для кожної точки $(x_1, x_2) \in U$ існують відкриті околи U_1^x, U_2^x , причому $U_1^x \times U_2^x \subset U$. Зауважимо, що $U = \bigcup_{(x_1, x_2) \in U} U_1^x \times U_2^x$, тож 2) виконано. ■

Theorem 1.10.4 Задано \mathbb{R}^n із евклідовою топологією. Тоді вона буде збігатися з добутком топологій $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, де в \mathbb{R} стоїть стандартна топологія.

Remark 1.10.5 Зауважимо, що топологія з евклідовою метрикою збігається з топологією, що породжена метрикою $d_\infty = \max_{i=1,n} |x_i - y_i|$. Це суттєво спростить доведення теореми.

Proof.

Тобто треба довести, що U – відкрита в $\mathbb{R}^n \iff U$ – відкрита в $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

\Rightarrow Дано: U – відкрита в \mathbb{R}^n .

Нехай $(x_1, \dots, x_n) \in U$, тоді звідси існує окіл $B_{d_\infty}(\vec{x}, r) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times (x_n - r, x_n + r) \subset U$. Позначимо $U_i = (x_i - r, x_i + r)$ – отримали, що існують U_i – відкриті околи точок $x_i, i = \overline{1, n}$, для яких $U_1 \times \dots \times U_n \subset U$. А тому звідси U – відкрита на $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

\Leftarrow Дано: U – відкрита в $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

Нехай $(x_1, \dots, x_n) \in U$, тоді існують відкриті околи U_i точок $x_i, i = \overline{1, n}$, для яких $U_1 \times \dots \times U_n \subset U$. Оскільки U_i – відкриті околи, то існує $(x_i - r_i, x_i + r_i) \subset U_i$ при $r_i > 0$. Значить, $(x_1 - r_1, x_1 + r_1) \times \dots \times (x_n - r_n, x_n + r_n) \subset U$. Покладемо $r = \min_{i=1,n} r_i$, тоді звідси $(x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times (x_n - r, x_n + r) \subset U$.

Або, інакше кажучи, $B_{d_\infty}(\vec{x}, r) \subset U$. Тобто звідси U – відкрита на \mathbb{R}^n відносно d_∞ , а тому й відносно евклідової метрики. ■

Proposition 1.10.6 Задані (X_1, τ_1) та (X_2, τ_2) – два топологічних простори. Тоді відображення $\text{pr}_1: X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ та $\text{pr}_2: X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ – неперервні.

$$X_1 \xleftarrow{\text{pr}_1} X_1 \times X_2 \xrightarrow{\text{pr}_2} X_2$$

Proof.

Достатньо показати для pr_1 , бо з pr_2 все симетрично.

Нехай U_1 – відкрита в X_1 . Тоді звідси $\text{pr}_1^{-1}(U_1) = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid x_1 \in U_1\} = U_1 \times X_2$ – відкрита як добуток двох відкритих. ■

Remark 1.10.7 $\tau_1 \times \tau_2$ – найслабша на $X_1 \times X_2$ топологія серед всіх інших, для якої проєкції – неперервні. *TODO: обміркувати*

Proposition 1.10.8 Задані (X_1, τ_1) та (X_2, τ_2) – два топологічних простори. Нехай (Z, σ) – також топологічний простір, встановимо відображення $f: Z \rightarrow X_1 \times X_2$ як $z \mapsto (f_1(z), f_2(z))$. f – неперервне $\iff f_1, f_2$ – обидва неперервні (покоординатно).

Proof.

\Rightarrow Дано: f – неперервне. Зауважимо, що $f_1 = \text{pr}_1 \circ f$ та $f_2 = \text{pr}_2 \circ f$. Тоді f_1, f_2 – неперервні як композиція неперервних.

\Leftarrow Дано: f_1, f_2 – обидва неперервні.

Нехай $U \in \mathcal{B}$ – база топології $\tau_1 \times \tau_2$, тобто $U = U_1 \times U_2$, де U_1, U_2 – відкриті на X_1, X_2 . Звідси $f^{-1}(U) = \{z \in Z \mid (f_1(z), f_2(z)) \in U_1 \times U_2\} = f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2)$. За умовою, маємо $f_1^{-1}(U_1), f_2^{-1}(U_2)$ – відкриті на Z . Тобто звідси випливає, що $f^{-1}(U)$ – відкрита на Z . ■

Remark 1.10.9 Можна узагальнити означення добутку топології. Маємо $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}$ – сім'я топологічних просторів та $X = \prod_{\alpha} X_\alpha$ – декартів добуток. Якщо визначити клас

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha} U_{\alpha} \mid U_{\alpha} \in \tau_{\alpha}, U_{\alpha} \neq X_{\alpha} \text{ лише скінченне число разів} \right\},$$

то вона утворить базу множини X , а тому можна утворити топологію.

Позначення: $\prod_{\alpha} \tau_{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \tau_{\mathcal{B}}$.

1.11 Фактортопологія

Тут є куча варіантів, як це визначати, тому розглянемо всі.

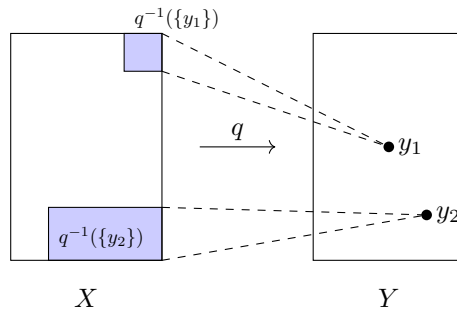
Definition 1.11.1 Задано (X, τ) – топологічний простір та $q: X \rightarrow Y$ – сюр’єктивне відображення. **Фактортопологію на Y** визначимо таким чином:

$$U \subset Y \text{ – відкрита на } Y \iff q^{-1}U \text{ – відкрита на } X$$

Позначення: τ/\sim (скоро це позначення буде виправданим).

Remark 1.11.2 τ/\sim дійсно задає топологію та (Y, τ_{\sim}) утворює топологічний простір. Це випливає з властивостей прообразів.

Оскільки q сюр’єктивне відображення, то для кожної $y \in Y$ знайдеться $x \in X$, щоб $y = q(x)$. По-інакшому це можна сказати як $q^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.



Також в силу сюр’єктивності ми маємо розбиття множини X . Тобто звідси отримали $X = \bigsqcup_{y \in Y} q^{-1}(\{y\})$.

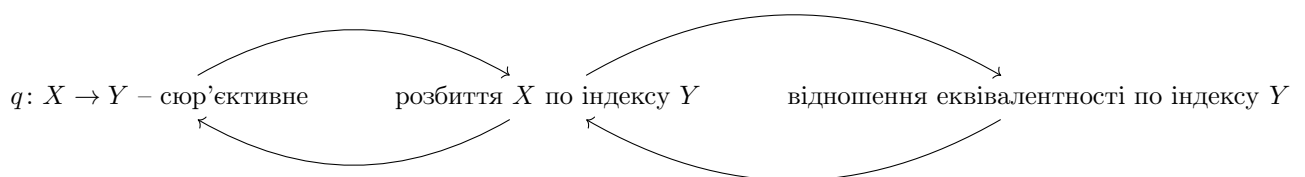
Навпаки, нехай множина X має розбиття, тобто $X = \bigsqcup_y S_y$. Тоді можна визначити відображення q

таким чином: якщо $y \in S_y$, то тоді $S_y \ni x \xrightarrow{q} y$, причому це задає сюр’єктивне відображення.

Нехай знову є розбиття множини X , тоді вона має відношення еквівалентності $x_1 \sim x_2 \iff x_1, x_2$ лежать в одній множині розбиття.

А якщо є відношення еквівалентності на X , то зрозуміло, що відбувається розбиття класами еквівалентності $[x]$.

Коротше, у нас виникла така діаграма:



Мораль така: ми можемо трьома різними способами задати фактортопологію: або через довільну сюр’єкцію, або через розбиття (досить рідко), або через відношення еквівалентності. Запишу інше означення:

Definition 1.11.3 Задано (X, τ) – топологічний простір та \sim – відношення еквівалентності на X . **Фактортопологію на X/\sim** визначимо таким чином:

$$U \subset X/\sim \text{ – відкрита на } X/\sim \iff \pi^{-1}(U) \text{ – відкрита на } X,$$

де $\pi: X \rightarrow X/\sim$ – факторвідображення (яке є сюр’єктивним).

Remark 1.11.4 Із означення випливає, що $\pi: X \rightarrow X/\sim$ – неперервне.

Proposition 1.11.5 Задано (X, τ) – топологічний простір та \sim – відношення еквівалентності на X . $V \subset X/\sim$ – замкнена на $X/\sim \iff \pi^{-1}(V)$ – замкнена на X .

Вправа: довести.

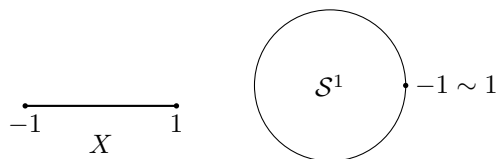
Proposition 1.11.6 Задано (X, τ) – топологічний простір та \sim – відношення еквівалентності на X . Також нехай (Y, σ) – інший топологічний простір та відображення $f: X/\sim \rightarrow Y$.
 f – неперервне $\iff f \circ \pi$ – неперервне.

Proof.

\Rightarrow випливає з того, що f, π одночасно неперервні.

\Leftarrow Дано: $f \circ \pi$ – неперервне. Нехай тепер U – відкрита в Y . За умовою, $(f \circ \pi)^{-1}(U)$ відкрита на X , але тоді $\pi^{-1}f^{-1}(U)$ відкрита на X . Значить, за означенням, $f^{-1}(U)$ – відкрита на X/\sim . ■

Example 1.11.7 Розглянемо відрізок $X = [-1, 1]$. Ми можемо задати на ній відношення еквівалентності таким чином: $-1 \sim 1$. Інтуїтивно кажучи, відношення еквівалентності 'склеює' точки один з одним (тобто в цьому випадку $-1, 1$ будуть склеєними). У результаті маємо отримати коло:



Тобто, інтуїтивно кажучи, $X/\sim \cong \mathcal{S}^1$, саме гомеоморфні.

Скоро математично я це доведу.

TODO: доповнити!

2 Компактні простори

2.1 Компактність

Definition 2.1.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.

Покриттям X назвемо сім'ю підмножин $\{U_i \mid i \in I\}$ множини X , для яких

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

Якщо множина індексів I скінченна, то покриття називається **скінченним**. Якщо всі множини в сім'ї відкриті, то покриття називається **відкритим**.

Definition 2.1.2 Задано (X, τ) – топологічний простір. Нехай $\{U_i \mid i \in I\}$ – покриття X . **Підпокриттям** назвемо набір $\{U_i \mid i \in J\}$, де $J \subset I$, якщо це теж покриття.

Example 2.1.3 Зокрема множини $(n-1, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ утворюють відкрите покриття \mathbb{R} .

Definition 2.1.4 Задано (X, τ) – топологічний простір. Даний простір назвемо **компактним**, якщо

$$\forall \{U_i \mid i \in I\} \text{ – відкрите : } \exists \{U_i \mid i \in J\}, J \subset I, J \text{ – скінченний індекс}$$

Тобто для будь-якого відкритого покриття X існує скінченне підпокриття.

Example 2.1.5 \mathbb{R} не є компактом.

Дійсно, оберемо відкрите покриття $\{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Якби існувало скінченне підпокриття $\{(n-1, n+1) \mid n \in J\}$, то тоді в $J \subset \mathbb{Z}$ є найбільший елемент $N \in \mathbb{Z}$. Тоді з цього випливає, що $N+1 \notin \bigcup_{n \in J} (n-1, n+1)$. Але водночас $\bigcup_{n \in J} (n-1, n+1) = \mathbb{R}$, тобто $N+1 \in \mathbb{R}$ – це неможливо.

Висновок: знайшли покриття $\{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, яка не містить скінченне підпокриття.

Example 2.1.6 Недискретний топологічний простір $(X, \tau_{\text{indiscr}})$ – компактний.

Дійсно, оберемо будь-яке відкрите покриття $\{U_i \mid i \in I\}$, у нас $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Кожний $U_i = \emptyset$ або X .

Значить, існує множина $U_{i_0} = X$. Тоді $\{U_{i_0}\}$ формує скінченне підпокриття.

Example 2.1.7 Будь-який скінченний простір – компактний.

Маємо відкрите покриття $\{U_i \mid i \in I\}$, тобто $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Топологічний простір скінченний, тобто X – скінченний, тож $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Кожний $x_j \in U_{i_j}$. Тож існує скінченне підпокриття $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_j}\}$.

Example 2.1.8 Дискретний простір (X, τ_{discr}) – компактний \iff це скінченний простір.

\Rightarrow Дано: (X, τ_{discr}) – компактний. Тобто для будь-якого відкритого покриття, зокрема для $\{\{x\} \mid x \in X\}$ існує скінченне підпокриття $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, звідси $X = \bigcup_i \{x_i\}$.

\Leftarrow **дуб. Ex. 2.1.7**

Definition 2.1.9 Задано множини X та $A \subset X$.

Покриттям множини A назвемо сім'ю $\{W_i \mid i \in I\}$ підмножин X , для яких

$$A \subset \bigcup_{i \in I} W_i$$

$\{W_i \mid i \in J\}$, $J \subset I$ називається **підпокриттям**, якщо це теж покриття множини A .

Remark 2.1.10 Особливий випадок при $A = X$, із першим означенням збігається.

Definition 2.1.11 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.

Множина (!) A називається **компактом**, якщо

$$(A, \tau_A) \text{ – компактний простір,}$$

тобто будь-яке відкрите покриття A підмножинами A має скінченне підпокриття.

Proposition 2.1.12 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.

A – компактна \iff будь-яке покриття A відкритими підмножинами X містить скінченне підпокриття.

Proof.

\Rightarrow Дано: A – компактна, тобто (A, τ_A) – компактний простір. Нехай $\{W_i \subset X \mid i \in I\}$ – відкрите покриття множини A , тобто звідси $A \subset \bigcup_{i \in I} W_i$. Але звідси випливає, що $A \cap \bigcup_{i \in I} W_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap W_i) = A$.

Отримали покриття $\{A \cap W_i \mid i \in I\}$ множини A підмножинами A . Оскільки (A, τ_A) – компактний, то звідси існує скінченне підпокриття $\{A \cap W_i \mid i \in J\}$, тобто звідси $\bigcup_{i \in J} (A \cap W_i) = A = A \cap \bigcup_{i \in J} (A \cap W_i)$.

Значить, звідси $A \subset \bigcup_{i \in J} W_i$. Тобто $\{W_i \subset X \mid i \in J\}$ – скінченне підпокриття.

\Leftarrow Дано: будь-яке покриття A відкритими підмножинами X містить скінченне підпокриття. Насправді, ідейно все те саме робиться. ■

2.2 Компактність та підпростори

Example 2.2.1 Із курсу математичного аналізу, $[0, 1]$ – компактний (лема Гайне-Бореля). Однак $(0, 1) \subset [0, 1]$ більше не є компактом, тому що відкрите покриття $\{(\varepsilon, 1) \mid \varepsilon > 0\}$ не містить скінченного підпокриття.

Тобто цей приклад показує, що треба додати певні обмеження, щоб підмножина була теж автоматично компактною.

Proposition 2.2.2 Задано (X, τ) – компактний простір та $A \subset X$ – замкнена. Тоді (A, τ_A) – компактний.

Proof.

Нехай $\{W_i \subset X \mid i \in I\}$ – відкрите покриття A , тобто $\bigcup_{i \in I} W_i \supset A$. Але ми знаємо, що A – замкнена,

тобто $X \setminus A$ – відкрита. Зауважимо, що $(X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} W_i = X$. Тобто $\{X \setminus A\} \cup \{W_i \mid i \in I\}$ утворює

відкрите покриття X . За компактністю, існує скінченне підпокриття $\{X \setminus A\} \cup \{W_i \mid i \in J\}$, тож звідси $(X \setminus A) \cup \bigcup_{j \in J} W_j = X$.

Із цього випливає, що $\bigcup_{j \in J} W_j \supset A$. Тобто знайшли скінченне підпокриття $\{W_i \subset X \mid i \in J\}$.

Висновок: A – компактна множина.

Окремо варто звернути увагу, коли із відкритого покриття $\{X \setminus A\} \cup \{W_i \mid i \in I\}$ може бути скінченне підпокриття $\{W_i \mid i \in K\}$. Тоді звідси $\bigcup_{i \in K} W_i = X \supset A$ – автоматично доводиться. ■

Коротше, будь-яка замкнена множина – компактна. Але не кожна компактна множина буде замкненою.

Example 2.2.3 Зокрема маємо $(X, \tau_{\text{indiscr}})$ – неискретний простір, оберемо $Y \subsetneq X$, утворимо знову неискретний простір (Y, τ_Y) за **Ех. 1.9.5**.

Зауважимо, що Y – компактна множина, тому що (Y, τ_Y) – компактний простір в силу неискретності. Але Y – НЕ замкнена множина, тобто $X \setminus Y$ – НЕ відкрита множина, тому що в $(X, \tau_{\text{indiscr}})$ лише \emptyset, X – відкриті.

Утім можна зробити певні зміни, аби в зворотному напрямку це спрацювало.

Proposition 2.2.4 Задано (X, τ) – гаусдорфів (уже не компактний) простір та A – компактна множина. Тоді A – замкнена.

Proof.

Ми хочемо зараз довести, що $X \setminus A$ – відкрита множина. Значить, нехай $x \in X \setminus A$. Оберемо також будь-який $a \in A$. У силу гаусдорфовості, існують околиці U_a, V_a – відповідно відкриті околиці точки

x, a такі, що $U_a \cap V_a = \emptyset$. Зауважимо, що $\bigcup_{a \in A} V_a \supset A$. Маємо $\{V_a \subset X \mid a \in A\}$ – відкрите покриття,

а за компактністю A , можна знайти скінченне підпокриття $\{V_a \subset X \mid a \in B\}$.

Зафіксуємо $U = \bigcap_{a \in B} U_a$, який є теж відкритим (в силу скінченного перетину) та околom точки x .

Доведемо, що $U \subset X \setminus A$.

Нехай $y \in A$, тобто $y \in V_b$ при деякому $b \in B$. Але відомо, що $V_b \cap U_b = \emptyset$, а тому $b \notin U_b \implies b \notin U$.

Висновок: $X \setminus A$ – відкрита, а тому A – замкнена. ■

Corollary 2.2.5 Задано (X, τ) – компактний та гаусдорфів простір.

A – компактна $\iff A$ – замкнена.

2.3 Компактність та добуток просторів

Theorem 2.3.1 Теорема Тіхонова (скінченний варіант)

Задані (X, τ_1) та (Y, τ_2) – компактні топологічні простори. Тоді $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ – теж компактний топологічний простір.

Proof.

Отже, нехай $\{S_i \mid i \in I\}$ – відкрите покриття $X \times Y$. Для кожного $(x, y) \in X \times Y$ можна обрати $S_i \ni (x, y)$, а звідси можна обрати відкриті $U_{x,y}, W_{x,y}$ – відповідно околи точки x, y , для яких $U_{x,y} \times W_{x,y} \subset S_i$. Сім'я множин $\{U_{x,y} \times W_{x,y} \mid x \in X, y \in Y\}$ – відкрите покриття $X \times Y$, бо

$$\bigcup_{(x,y) \in X \times Y} (U_{x,y} \times W_{x,y}) = \bigcup_{x \in X} U_{x,y} \times \bigcup_{y \in Y} W_{x,y} = X \times Y.$$

Тому достатньо шукати скінченне підпокриття саме для цієї сім'ї.

Зафіксуємо $x \in X$. Зауважимо, що $\{W_{x,y} \mid y \in Y\}$ – відкрите покриття Y . Але оскільки (Y, τ_2) – компактний, то існує скінченне підпокриття $\{W_{x,y} \mid y \in \tilde{Y}\}$. Покладемо тепер $U_x = \bigcap_{y \in \tilde{Y}} U_{x,y}$, що

також буде відкритим околom точки x . Тоді звідси випливає, що $U_x \times Y \subset \bigcup_{y \in \tilde{Y}} (U_{x,y} \times W_{x,y})$, бо

$(x, y) \in U_x \times Y$, тому $x \in U_{x,y}$ для всіх $y \in \tilde{Y}$. Обравши довільний $y \in \tilde{Y}$, отримаємо $y \in W_{x,y}$.

Тепер $\{U_x \mid x \in X\}$ – відкрите покриття X (за міркуваннями вище). Але оскільки (X, τ_1) – компактний, то існує скінченне підпокриття $\{U_x \mid x \in \tilde{X}\}$.

Нарешті, я стверджую, що $\{U_{x,y} \times W_{x,y} \mid x \in \tilde{X}, y \in \tilde{Y}\}$ буде скінченним підпокриттям $X \times Y$. Те, що це скінченна, випливає зі скінченності \tilde{X}, \tilde{Y} . Нехай тепер $(x, y) \in X \times Y$, тоді $x \in U_x$ для деякого $x \in \tilde{X}$, тож $(x, y) \in U_x \times Y$, але тоді $(x, y) \in U_{x,y} \times W_{x,y}$ для деякого $y \in \tilde{Y}$. ■

Remark 2.3.2 Цілком зрозуміло, що теорема Тіхонова працює, коли в нас n штук компактних топологічних просторів.

Example 2.3.3 Зокрема звідси $[0, 1]^n$ буде компактною множиною, оскільки $[0, 1]$ – компактна.

2.4 Компактність та факторпростори

Lemma 2.4.1 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори та $f: X \rightarrow Y$ – неперервне. Якщо X – компактна, то тоді fX – компактна.

Proof.

Маємо $\{W_i \subset Y \mid i \in I\}$ – відкрите покриття fX . Візьмемо сім'ю прообразів $\{f^{-1}(W_i) \subset X \mid i \in I\}$. Зауважимо:

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(W_i) = f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} W_i \right) \supset f^{-1} f(X) = X.$$

Отже, $\{f^{-1}(W_i) \subset X \mid i \in I\}$ – відкрите покриття X , але в силу компактності існує скінченне підпокриття $\{f^{-1}(W_i) \subset X \mid i \in J\}$. Залишилось показати, що $\{W_i \subset Y \mid i \in J\}$ (яке вже є скінченним) буде підпокриттям fX . І дійсно, ми маємо $X = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(W_i) = \bigcup_{i \in J} W_i$. Але тоді

$$fX = f \left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(W_i) \right) \subset \bigcup_{i \in J} W_i. \quad \blacksquare$$

Corollary 2.4.2 Будь-який факторпростір – компактний простір.

Випливає з того, що $\pi: X \rightarrow X/\sim$ – неперервне відображення.

Definition 2.4.3 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори та $f: X \rightarrow Y$ – відображення. f називається **відкритим**, якщо

$$\forall U \subset X \text{ – відкрита в } X : fU \text{ – відкрита в } Y$$

f називається **замкненим**, якщо

$$\forall V \subset X \text{ – замкнена в } X : fV \text{ – замкнена в } Y$$

Proposition 2.4.4 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – один компактний, а другий – гаусдорфів простори та $f: X \rightarrow Y$ – неперервне відображення. Тоді f – замкнене.

Proof.

Нехай V – замкнена на X , тоді V – компакт як множина. Значить, fV – компакт. У силу гаусдорфовості, fV – замкнена в Y . ■

Уже якось було, що неперервна бієкція не гарантує гомеоморфність між двома просторами. Але, додавши певні обмеження, можна саме так і ствердити:

Proposition 2.4.5 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – один компактний, а другий – гаусдорфів простори та $f: X \rightarrow Y$ – неперервна бієкція. Тоді f – гомеоморфізм.

Proof.

Нам треба лишень довести, що $f^{-1}: Y \rightarrow X$ буде неперервним відображенням.

Нехай V – замкнена в Y та розглянемо $(f^{-1})^{-1}(V) \stackrel{f \text{ – бієкція}}{=} fV$. Нам уже відомо, що f – замкнене відображення, а тому fV має бути замкненою на X . Тобто $(f^{-1})^{-1}(V)$ – замкнена на X . ■

Example 2.4.6 Зокрема будь-які дві компактно-гаусдорфові простори будуть між собою гомеоморфними.

Proposition 2.4.7 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – один компактний, а другий – гаусдорфів простори та $f: X \rightarrow Y$ – неперервна сюр'єкція. Тоді $Y \cong X/\sim$. Тут відношення еквівалентності $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$.

TODO: доробити!

3 Зв'язні простори

3.1 Зв'язність

Definition 3.1.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.

Ми назвемо простір **незв'язним**, якщо

$$\exists U, V \in \tau : U \neq \emptyset, V \neq \emptyset : X = U \sqcup V$$

У протилежному випадку ми будемо це називати **зв'язним**.

Example 3.1.2 Зокрема $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – незв'язний, тому що існують відкриті непорожні та неперетинні $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, які дають $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = X$.

Example 3.1.3 Простір \mathbb{Q} (як підпростір \mathbb{R}) – незв'язний. Дійсно, нехай $U = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ та $V = (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ – два відкритих, непорожніх та неперетинних множин. Тоді $U \cap V = \emptyset$ (оскільки $\sqrt{2}$ ірраціональне).

Example 3.1.4 Будь-який (X, τ_{discr}) – дискретний топологічний простір – незв'язний, якщо $\#X \geq 2$. Оберемо $x \in X$, тоді $\{x\} \sqcup (X \setminus \{x\}) = X$.

Example 3.1.5 Будь-який $(X, \tau_{\text{indiscr}})$ – недискретний топологічний простір – зв'язний, якщо $X \neq \emptyset$. Розпишемо $X = U \sqcup V$, тут обидва відкриті. Але звідси випливає, що $U \in \{X, \emptyset\}$ та $V \in \{X, \emptyset\}$. Тобто дійсно, $U = \emptyset$ або $V = \emptyset$. Це означає, що порушується означення незв'язності.

Lemma 3.1.6 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – топологічних простори та $f: X \rightarrow Y$ – відображення. Нехай U, V – такі відкриті підмножини, що $U \sqcup V = X$.

f – неперервне $\iff f|_U, f|_V$ – неперервні.

Дану лему часто називають *pasting lemma*.

Proof.

\Rightarrow Дано f – неперервне. Тоді треба згадати, що $f|_U = f \circ \iota_U$ та $f|_V = f \circ \iota_V$. Вкладення вже неперервне, тобто звідси $f|_U, f|_V$ – неперервні як композиція.

\Leftarrow Дано: $f|_U, f|_V$ – неперервні. Нехай W – відкрита в Y . Тоді

$$f^{-1}(W) = \{x \in U \mid f(x) \in W\} \sqcup \{x \in V \mid f(x) \in W\} = (f|_U)^{-1}(W) \sqcup (f|_V)^{-1}(W).$$

За умовою, $(f|_U)^{-1}(W)$ – відкрита в U , але сама U – відкрита в X . Значить, $(f|_U)^{-1}(W)$ – відкрита в X . Аналогічним чином $(f|_V)^{-1}(W)$ – відкрита в U .

Разом отримаємо $f^{-1}(W)$ – відкрита в X . ■

Remark 3.1.7 Згідно з означенням, \emptyset буде зв'язним. Бачив авторів, які не вважали дану множину ані зв'язною, ані незв'язною.

Proposition 3.1.8 Еквівалентні означення

Задано (X, τ) , $X \neq \emptyset$ – топологічний простір. Наступні еквівалентні:

- 1) (X, τ) – зв'язний;
- 2) єдині підмножини X , що є відкритими та замкненими одночасно, – це \emptyset, X ;
- 3) будь-яке неперервне відображення $f: X \rightarrow D$, де D – дискретний простір, буде сталим.
- 4) будь-яке неперервне відображення $f: X \rightarrow \{y_1, y_2\}$, де $\{y_1, y_2\}$ – двоточковий дискретний простір, буде сталим.

Proof.

1) \Rightarrow 2) Дано: (X, τ) – зв'язний. Нехай U – замкнена та відкрита одночасно. Тобто $U, X \setminus U$ одночасно відкриті. При цьому вони неперетинні, непорожні, а тому звідси $U \sqcup (X \setminus U) = X$. У силу зв'язності єдина можлива опція – це бути $U = X$ або $U = \emptyset$.

2) \Rightarrow 3) Дано: єдині підмножини X , що є відкритими та замкненими одночасно, – це \emptyset, X .

Розглянемо неперервне відображення $f: X \rightarrow D$, де D – дискретний. Оберемо $x \in X$, тоді $\{f(x)\}$ – відкрита й замкнена одночасно в D . У силу неперервності, $f^{-1}\{f(x)\}$ – відкрита та замкнена в X , тоді $f^{-1}\{f(x)\} = \emptyset$ або $f^{-1}\{f(x)\} = X$. Перша рівність неможлива, бо точка x там лежить. Значить, $f^{-1}\{f(x)\} = X$. Висновок: $f(y) = f(x), \forall y \in X$, тобто тут $f(x)$ грає роль константи.

3) \Rightarrow 4) Дано: будь-яке неперервне відображення $f: X \rightarrow D$, де D – дискретний простір, буде сталим. Зокрема фіксуємо D_2 points – довільний двоточковий дискретний простір – закінчили.

4) \Rightarrow 1) Дано: будь-яке неперервне відображення $f: X \rightarrow \{y_1, y_2\}$, де $\{y_1, y_2\}$ – двоточковий дискретний простір, буде сталим. Нехай U, V – відкриті підмножини так, щоб $U \sqcup V = X$. Визначимо відображення $g: X \rightarrow \{y_1, y_2\}$, що задано як $g(x) = \begin{cases} y_1, & x \in U \\ y_2, & x \in V \end{cases}$. Тоді $g|_U, g|_V$ неперервні (легко ручками перевірити), а звідси g – неперервне за лемою. Але оскільки g задовольняє умові 'дано', то звідси g приймає стале значення. Тобто $U = X, V = \emptyset$ або навпаки. ■

Lemma 3.1.9 Задано (X, τ) – топологічний простір. Нехай $A, B \subset X$ такі, що $A \subset B \subset \text{Cl}(A)$. Також нехай A – зв'язна. Тоді B – також зв'язна.

Proof.

Нехай $f: B \rightarrow D$ – неперервне відображення до дискретного простору. Тоді $f|_A: A \rightarrow D$ також неперервне (композиція неперервних, бо $f|_A = f \circ \iota_A$). Тоді це стала функція, оскільки A – з'єднана область за умовою. Скажімо, $f|_A(a) = d, \forall a \in A$. Тепер, d та f – обидва неперервні функції з B в D (який є гаусдорфовим). Зауважимо, що A – щільна на B в силу $A \subset B \subset \text{Cl}(A)$. Дійсно, якщо розглянути підпростір (B, τ_B) , то B – замкнена та містить A , а тому $B \supset \text{Cl}(A)$; отже, $B = \text{Cl}(A)$. На щільній множині A виконано $f(a) = a$, а тому $f(b) = d$ на всій множині B .

Отже, $f: B \rightarrow D$ теж стала, тобто B – зв'язна. ■

Lemma 3.1.10 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – топологічні простори та $f: X \rightarrow Y$ – неперервне. Відомо, що X – зв'язний. Тоді $f(X)$ – також зв'язний.

Proof.

Спочатку розглянемо випадок, коли f – сюр'єктивне. У цьому випадку $f(X) = Y$. Маємо $U \sqcup V = Y$, де U, V – відкриті в Y , тоді $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ – неперетинні та відкриті в X , при цьому $f^{-1}(Y) = X = f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V)$. Оскільки X – зв'язний, то (наприклад) $f^{-1}(U) = \emptyset$, а за сюр'єктивністю, $U = \emptyset$. Якщо $f: X \rightarrow Y$ – довільне, то тоді $g: X \rightarrow f(X)$, де $g \equiv f$, – сюр'єктивне, і там закінчили. ■

Proposition 3.1.11 Задані (X, τ_1) та (Y, τ_2) – два зв'язних топологічних простори. Тоді $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ – також зв'язний.

Proof.

Розглянемо неперервне відображення $f: X \times Y \rightarrow D$, де D – дискретний простір. Оберемо $(x, y), (x', y') \in X \times Y$. Зауважимо, що $\{x\} \times Y \cong Y$, тож звідси $\{x\} \times Y$ має бути зв'язною також. Значить, $f|_{\{x\} \times Y}$ буде сталою. Зокрема звідси $f(x, y) = f(x, y')$.

Аналогічним чином $X \times \{y'\} \cong X$, а там через зв'язність отримаємо $f(x', y') = f(x, y')$.

Разом отримали $f(x, y) = f(x', y')$, тобто f – стала. Отже, $X \times Y$ – зв'язна. ■

Example 3.1.12 Із курсу матана, $[a, b]$ – зв'язний. Але за твердженням, звідси випливає, що всі куби $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ будуть зв'язними в \mathbb{R}^n .

Lemma 3.1.13 Задано (X, τ) – топологічний простір та $(A_i, i \in I)$ – покриття X , причому всі A_i – зв'язні, та всі вони перетинаються між собою. Тоді X – зв'язна.

Proof.

Нехай $f: X \rightarrow D$ – неперервне відображення, де D – дискретний простір. Тоді неперервним буде $f|_{A_i}: A_i \rightarrow D$, але в силу зв'язності A_i , ми маємо $f|_{A_i} \equiv d_i$. Оберемо інше звуження $f|_{A_j}: A_j \rightarrow D$, тоді аналогічно $f|_{A_j} \equiv d_j$. Проте $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, тож звідси $d_i = d_j$. Таким чином, стала не залежить від $i \in I$, а тому f буде сталою на X . Отже, X – зв'язна. ■

3.2 Лінійна зв'язність

Definition 3.2.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.

Шляхом в X називають неперервне відображення $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$. Ми називаємо γ **шляхом від x до y** , якщо $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

Простір $X \neq \emptyset$ називається **лінійно зв'язним**, якщо

$$\forall x, y \in X : \exists \gamma - \text{шлях від } x \text{ до } y$$

Lemma 3.2.2 Задано (X, τ) – топологічний простір. Нехай X – лінійно зв’язний. Тоді X – (просто) зв’язний.

Proof.

Нехай $f: X \rightarrow D$ – неперервне, де D – дискретний простір. Оберемо $x, y \in X$, тоді, за умовою, існує шлях $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, причому $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Звідси відображення $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow D$ – також неперервне. Оскільки $[0, 1]$ – зв’язна, то тоді $f \circ \gamma$ – стале відображення, зокрема $f(x) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(y)$. Отже, f – також стале, а тому X – зв’язний. ■

Example 3.2.3 Підмножина $X \subset \mathbb{R}^n$ називається **випуклою**, якщо $\forall x, y \in X, \forall t \in [0, 1] : (1 - t)x + ty \in X$. Тоді кожна випукла підмножина \mathbb{R}^n буде лінійно зв’язною, оскільки $t \mapsto (1 - t)x + ty$ визначає довільний шлях з x в y .

Отже, всі випуклі підмножини \mathbb{R}^n – зв’язні.

Нехай задані шлях γ з x в y та шлях δ з y в z . Ми можемо їх об’єднати ці шляхи таким чином: визначаємо $\gamma * \delta: [0, 1] \rightarrow X$, який задається ось так:

$$(\gamma * \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \delta(2t - 1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Задане відображення досі залишається шляхом, тільки тепер з x в z .

Example 3.2.4 Простір $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ буде лінійно зв’язним при $n \geq 2$.

Нехай $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Якщо пряма між x, y не проходить через 0, то тоді дана пряма визначає шлях з x в y .

Інакше ми можемо обрати точку $z \in X$, що не лежить на цій прямій (це можливо в силу умови $n \geq 2$). Пряма через x, z не проходить через 0, тому це – шлях з x в z . Аналогічно пряма через z, y не проходить через 0, тому це – шлях з z в y . Отже, можна об’єднати два шляхи – отримаємо шлях з x в y .

Lemma 3.2.5 Задано $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – топологічні простори та $f: X \rightarrow Y$ – неперервне. Тоді $\Gamma_f \cong X$, де $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ – графік функції (для дійснозначних функцій це був би справді графік).

Proof.

Визначимо такі функції:

$$p: \Gamma_f \rightarrow X \quad (x, y) \mapsto x$$

$$q: X \rightarrow \Gamma_f \quad x \mapsto (x, f(x)).$$

Зауважимо, що $p \circ q = \text{id}_X$ та $q \circ p = \text{id}_{\Gamma_f}$. Тож вони взаємно оборотні. Залишилося довести, що ці два відображення – неперервні.

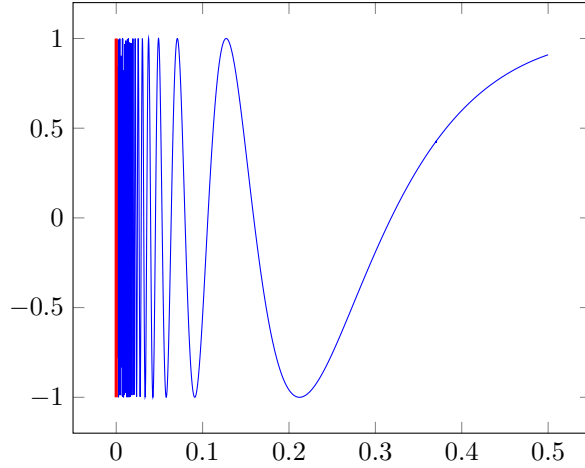
Для p маємо $p = \text{pr} \circ \iota$, де $\text{pr}: X \times Y \rightarrow X$, $\iota: \Gamma_f \rightarrow X \times Y$. Оскільки ці два відображення неперервні, то композиція теж буде неперервною.

Для q ми розглянемо $\iota \circ q: X \rightarrow X \times Y$. Зауважимо, що $(\iota \circ q)(x) = (x, f(x)) = (\text{id}_X(x), f(x))$ – обидві функції неперервні, тож $\iota \circ q$ – неперервне. За **Prp. 1.9.13**, q – неперервне. ■

Remark 3.2.6 Тепер, нарешті, можемо поговорити про те, що зворотне твердження не працює. Тобто зі зв’язності не випливає лінійна зв’язність в загальному випадку.

Example 3.2.7 Розглянемо підмножини $L = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$ та $C = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \right\}$.

Будемо зосереджені підпросторі $X = L \cup C$, яка називається **сіносуїдальною кривою** тополога.



I. X – зв’язна.

Спочатку зауважимо, що $C \cong (0, +\infty)$ за **Lm. 3.2.5** та $(0, +\infty)$ – зв’язна, тож сама C буде також зв’язною. Залишилося довести, що $\text{Cl}(C) \supset X \supset C$ – і тоді вже X буде зв’язною за **Lm. 3.1.9**.

Нехай $(0, y) \in L$, тут $|y| \leq 1$. Оберемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді існує елемент $z > \frac{1}{\varepsilon}$, для якого $y = \sin z$.

Покладемо $x = \frac{1}{z}$, тоді отримаємо $(x, y) \in C$, при цьому $\|(0, y), (x, y)\| = |x| < \varepsilon$. Таким чином, $(0, y) \in \text{Cl}(C)$, що дає нам вкладення $\text{Cl}(C) \supset L$. Проте оскільки $\text{Cl}(C) \supset C$, то з цих двох вкладень випливає $\text{Cl}(C) \supset X$. (насправді кажучи, $X = \text{Cl}(C)$).

II. X – не лінійно зв’язна.

Припустимо, що існує шлях γ із точки $(0, 0)$ до точки $\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$. Маємо $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, де $t \in [0, 1]$. Оскільки γ – неперервний, то γ_1, γ_2 – також неперервні. Але $[0, 1]$ – компакт, тож γ_1, γ_2 – рівномірно неперервні, тож $\exists \delta > 0 : \forall t, t' \in [0, 1] : |t - t'| < \delta \implies |\gamma_2(t) - \gamma_2(t')| < 2$.

Оберемо таке $N \in \mathbb{N}$, щоб $\frac{1}{N} < \delta$. Далі відрізок $[0, 1]$ розіб’ємо на підвідрізки довжини $\frac{1}{N}$ рівномірним чином. Тобто $\left[0, \frac{1}{N}\right], \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right], \dots, \left[\frac{N-1}{N}, 1\right]$. Оскільки γ_1 – шлях від 0 до $\frac{1}{\pi}$, то за теоремою

Коші про середнє, існують $t_k \in [0, 1]$, для яких $\gamma_1(t_k) = \frac{1}{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi}$. Тут в нас $k \geq 1$.

Оскільки кількість t_k нескінченна, то має знайтися інтервал $\left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]$, який містить хоча б дві

точки формату t_k . Тобто тут будуть точки $t_k, t_m \in \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]$, де припустимо $1 \leq k < m$. Звідси

випливає, що $\frac{1}{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi} > \frac{1}{\left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi} > \frac{1}{\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi}$. Знову за теоремою Коші про середнє,

знайдеться точка t між t_k та t_m , для якої $\gamma_1(t) = \frac{1}{\left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi}$. Але тоді

$|\gamma_2(t_k) - \gamma_2(t)| = |1 - (-1)| = 2$, при цьому $|t_k - t| \leq \frac{1}{N} < \delta$ – суперечність!

Тим не менш, існує критерій, для якого зв’язність та лінійна зв’язність – це однакові речі, просто треба додати децю.

Proposition 3.2.8 Задано (X, τ) – топологічний простір.

X – лінійно зв’язний $\iff \begin{cases} X \text{ – зв’язний} \\ \text{кожна точка } X \text{ має хоча б один окіл, який є лінійно зв’язний} \end{cases}$.

Proof.

\Rightarrow Уже доводили, що із лінійної зв’язності випливає зв’язність. Друга умова виконується, бо

кожна точка $x \in X$ містить окіл X , який є лінійно зв'язним.

⇐ Дано: $\begin{cases} X - \text{зв'язний} \\ \text{кожна точка } X \text{ має хоча б один окіл, який є зв'язний шляхом} \end{cases}$.

Зафіксуємо $x \in X$. Розглянемо множину $U = \{y \in X : \text{існує шлях між } x \text{ та } y\}$. Хочемо довести, що U є відкритою та замкнутою одночасно: таким чином, оскільки X зв'язна, то $U = X$ (бо $x \in U$), а це буде означати, що між двома довільними точками знайдеться шлях; а тому X буде лінійно зв'язним.

Отже, нехай $y \in U$, тобто існує шлях між x та y . За умовою, для точки y можна взяти окіл W_y , який є лінійно зв'язним. Тоді для кожної точки $w \in W_y$ існує шлях між y та w . Якщо склеїти два шляхи, отримаємо шлях між x та w . Тож $w \in U$. Таким чином, $W_y \subset U \implies U$ – відкрита.

Тепер нехай $y \in X \setminus U$. За умовою, для точки y можна взяти окіл W_y , який є лінійно зв'язним. Значить, $W_y \subset X \setminus U$. Якщо припустити, що це не так, то знайдеться точка $w \in W_y \cap U$; значить, існує шлях між x, w та шлях між w, y – отримаємо шлях між x, y , але тоді $y \in U$ – суперечить умові. Отже, $X \setminus U$ – відкрита, тобто U – замкнена. ■

Lemma 3.2.9 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – топологічні простори та $f: X \rightarrow Y$ – неперервне. Відомо, що X – лінійно зв'язний. Тоді $f(X)$ – також лінійно зв'язний.

Proof.

Нехай $y, y' \in f(X)$. Тоді $y = f(x), y' = f(x')$ для $x, x' \in X$. Оскільки X – лінійно зв'язний, то існує шлях $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ між x, x' в просторі X . Тоді $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow Y$ – шлях між y, y' в просторі Y . ■

Proposition 3.2.10 Задані (X, τ_1) та (Y, τ_2) – два лінійно зв'язних топологічних простори. Тоді $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ – також лінійно зв'язний.

Proof.

Нехай $(x, y), (x', y') \in X \times Y$. Оскільки X, Y – лінійно зв'язні, то існують шляхи: γ_1 між x, x' в X ; γ_2 між y, y' в Y . Тож $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2): [0, 1] \rightarrow X \times Y$ задає шлях між $(x, y), (x', y')$ уже в $X \times Y$. ■

3.3 Компоненти зв'язності та лінійної зв'язності

Задано (X, τ) – непорожній топологічний простір. Задамо **відношення зв'язності**:

$$x \sim y \iff \exists C \subset X, C - \text{зв'язна} : x, y \in C$$

Lemma 3.3.1 Відношення зв'язності задає відношення еквівалентності.

Proof.

I. Рефлексивність. Беремо $\{x\} \subset X$, що є зв'язною, тоді $x, x \in \{x\}$, тобто $x \sim x$.

II. Симетричність. Миттєво видно з означення.

III. Транзитивність. Маємо $x \sim y, y \sim z$, тобто існують множини $C, D \subset X$, що є зв'язними та $x, y \in C, y, z \in D$. Зауважимо, що $C \cup D \subset X$ буде також зв'язною, причому $x, z \in C \cup D$. Отже, $x \sim z$. ■

Клас еквівалентності називають **компонентом зв'язності** X .

Proposition 3.3.2 Задано (X, τ) – топологічний простір та відношення зв'язності. Тоді:

- 1) кожний компонент зв'язності множини X – зв'язний;
- 2) кожний компонент зв'язності множини X – максимальний серед інших зв'язних підпросторів;
- 3) найбільший зв'язний підпростір X – компонент зв'язності.

Отже, компоненти зв'язності топологічного простору – найбільші зв'язні підпростори.

Proof.

Доведемо кожний пункт окремо.

1) Нехай C – компонент зв'язності X . Оскільки це клас еквівалентності, то $C = [x]$. Оберемо довільний $y \in C$, тоді $x \sim y$, тобто існує зв'язна підмножина $D_y \subset X$, для якої $x, y \in D_y$. Зауважимо, що для всіх $y \in C$ ми маємо $D_y \subset C$, оскільки для кожного $z \in D_y$ ми маємо $z \sim x$, тобто $z \in C$. Значить, $C = \bigcup_{y \in C} D_y$. Всі D_y зв'язні, тож об'єднання буде також зв'язним.

2) Нехай C – компонент зв'язності X .

Припустимо, що існує $D \subset X$ – такий зв'язний підпростір, що $D \supset C$. Тобто існує ще більша множина. Маємо $C = [x]$. Зауважимо, що $D \subset C$, адже при $z \in D$ маємо $x \in C \subset D$, тобто $x \sim z$ (за означенням \sim). Тобто $z \in C$. Таким чином, $D = C$.

3) Нехай C – найбільший зв'язний підпростір X . У нас точно $C \neq \emptyset$, тож оберемо точку $x \in C$. Для кожного $y \in C$ ми маємо $x \sim y$, бо $C \ni x, y$ та є зв'язним. Значить, $C \subset [x]$. Із іншого боку, $[x]$ – зв'язний за 1), тоді за максимальністю C , маємо $C = [x]$.

Усі пункти доведені. ■

Proposition 3.3.3 Задано (X, τ) – топологічний простір.

X – зв'язний $\iff X$ містить лише один компонент зв'язності.

Proof.

\Rightarrow Дано: X – зв'язний. Тоді дана множина є компонентом зв'язності X . Дійсно, $X \subset X, X$ – зв'язна та $x, y \in X$.

\Leftarrow Дано: X має лише один компонент зв'язності. Даний компонент зв'язності дорівнює X . Кожний компонент зв'язності – зв'язний, тобто X – зв'язний. ■

Proposition 3.3.4 Задано (X, τ) – топологічний простір. Тоді кожний компонент зв'язності – замкнена множина.

Proof.

Нехай C – компонент зв'язності X . За **Lm. 3.1.9**, маємо $\text{Cl}(C)$ – зв'язна множина та $\text{Cl}(C) \supset C$. Оскільки C – максимальна зв'язна множина, то звідси $C = \text{Cl}(C)$, що гарантує замкненість. ■

Example 3.3.5 Компонентами зв'язності $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ будуть $(-\infty, 0)$ та $(0, +\infty)$.

Definition 3.3.6 Задано (X, τ) – топологічний простір.

Простір називається **цілком незв'язним**, якщо

кожний компонент зв'язності – одноточкова множина.

Еквівалентно кажучи, якщо кожний зв'язний підпростір має рівно один елемент.

Example 3.3.7 Ми знаємо, що дискретний простір – зв'язний, тільки якщо це простір з однієї точки. Оскільки кожний підпростір дискретного простору – дискретний, то єдині зв'язні підпростори – ці, що з одним елементом. Отже, дискретний простір – цілком незв'язний.

Example 3.3.8 \mathbb{Q} – цілком незв'язна множина (яка не є дискретною, бо $\{0\}$ не відкрита).

Нехай $x, y \in \mathbb{Q}$ при $x \neq y$, тоді звідси $x \not\sim y$. Дійсно, ми можемо обрати ірраціональне число $u \in \mathbb{R}$ між x, y , а потім якщо $C \subset \mathbb{Q}$ містить x, y , ми матимемо неперетинні непорожні відкриті підмножини $(-\infty, u) \cap C$ та $C \cap (u, +\infty)$, об'єднання якого дає C . Тоді C – незв'язна.

4 Лема Урисона

4.1 Корисні леми

Lemma 4.1.1 Задано (X, τ) – топологічний простір. Для всіх $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ задамо відкриті множини $V_r \subset X$, для яких виконується $\text{Cl}(V_r) \subset V_{r'}$ при $r < r'$. Тоді існує неперервна функція $f: X \rightarrow [0, 1]$, для якої $f(x) = 0, x \in V_0$ та $f(x) = 1, x \notin V_1$.

Proof.

Визначимо функцію $f: [0, 1]$ ось таким чином:
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin V_1 \\ \inf_{x \in V_r} \{r\}, & x \in V_1 \end{cases}$$

Зауважимо, що в нашому випадку, що при $x \in V_0$ маємо $f(x) = 0$. Дійсно, оскільки $x \in V_0$, то звідси $x \in V_r, \forall r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, найменше можливе значення – це нуль. Тож звідси $f(x) = 0$.

Для доведення неперервності ми спочатку розглянемо сім'ю $\mathcal{S} = \bigcup_{a \in [0, 1]} \{[0, a), (a, 1]\}$. Вона буде

утворювати передбазу топології $[0, 1]$. Це випливає з того факту, що $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{a, b \in \mathbb{R}} \{(-\infty, a), (b, +\infty)\}$

утворює передбазу топології \mathbb{R} , а також з того факту, що $[0, 1]$ – топологічний підпростір \mathbb{R} .

Нам залишилося перевірити два прообрази для кожного $a \in [0, 1]$.

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup_{r < a} V_r.$$

Дійсно, маємо $x \in f^{-1}([0, a)) \iff f(x) < a \iff \inf_{x \in V_r} \{r\} < a \iff x \in V_r$ для деякого $r < a$.

Ми отримали, що $f^{-1}([0, a))$ – відкрита як зліченне об'єднання відкритих.

$$f^{-1}((a, 1]) = \bigcup_{r > a} (X \setminus \text{Cl}(V_r)). \quad (\text{TODO: додумати}). \quad \blacksquare$$

Lemma 4.1.2 Задано (X, τ) – нормальний топологічний простір. Припустимо, що A – замкнена та U – відкрита, де $A \subset U$. Тоді існує V – відкрита множина, для якої $A \subset V, \text{Cl}(V) \subset U$.

Тобто між замкнутою та відкритою множинами можна підібрати проміжну відкриту множину, яка містить замкнену, а замикання міститься в відкритій.

Proof.

Оберемо $A, X \setminus U$ – обидва замкнені множини. За нормальністю, існують відкриті множини V, W , що неперетинні, для яких $V \supset A, W \supset X \setminus U$. Тобто $V \supset A$ та $X \setminus W \subset U$. Із того, що V, W – неперетинні, тобто $V \cap W = \emptyset$, випливає $V \subset X \setminus W$. Маємо ланцюг $A \subset V \subset X \setminus W \subset U$. Оскільки $V \subset X \setminus W$, то тоді й $\text{Cl}(V) \subset \text{Cl}(X \setminus W) = X \setminus W$. Власне, звідси довели: $A \subset V, \text{Cl}(V) \subset U$. \blacksquare

Theorem 4.1.3 Лема Урисона

Задано (X, τ) – нормальний топологічний простір та A, B – замкнені та неперетинні. Тоді існує неперервна функція $f: X \rightarrow [0, 1]$, для якої $f(x) = 0, x \in A$ та $f(x) = 1, x \in B$.

Proof.

Ідея доведення полягає в наступному: ми хочемо побудувати відкриті множини $V_r \subset X, r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, що задовольняє таким вимогам:

- 1) $A \subset V_0$;
- 2) $B \subset X \setminus V_1$;
- 3) $r < r' \implies \text{Cl}(V_r) \subset V_{r'}$.

Оскільки $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ – зліченна множина, то ми маємо послідовність $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$ різних раціональних чисел. Не втрачаючи загальності, $r_1 = 1, r_2 = 0$, а всі решта $0 < r_n < 1$.

База індукції (їх будуть дві): треба побудувати $V_{r_1} = V_1$ та $V_{r_2} = V_0$. Покладемо $V_1 = X \setminus B$ – уже відкрита. Оскільки $A \subset X, V_1 \subset X$ – одна замкнена, інша відкрита, то за другою лемою, існує відкрита множина V_0 , для якої $A \subset V_0$ та $\text{Cl}(V_0) \subset V_1$. Уже маємо V_{r_1}, V_{r_2} , які задовольняють вимогам 1), 2), 3).

Для всіх інших V_{r_n} нам достатньо буде довести 3).

Припущення індукції: V_{r_3}, \dots, V_{r_n} побудовані так, що задовольняють нашим умовам вище.

Крок індукції: побудуємо $V_{r_{n+1}}$. Із наших послідовностей r_1, r_2, \dots, r_n оберемо два якнайближчих числа r_i, r_j , щоб $r_i < r_{n+1} < r_j$. Нам достатньо довести, що $\text{Cl}(V_{r_i}) \subset V_{r_{n+1}}, \text{Cl}(V_{r_{n+1}}) \subset V_{r_j}$.

Зауважимо, що $\text{Cl}(V_{r_i})$ та V_{r_j} – відповідно замкнена та відкрита множини. Тоді за другою лемою, існує відкрита множина (яку як раз-таки позначимо й за $V_{r_{n+1}}$), для якої справджуються ці два

вкладення.

МІ доведено.

Значить, за першою лемою, існує неперервна функція $f: X \rightarrow [0, 1]$, для якої $f(x) = 0, x \in V_0$ та $f(x) = 1, x \notin V_0$. За умовами 1), 2), отримаємо $f(x) = 0, x \in A$ та $f(x) = 1, x \in B$. ■

Remark 4.1.4 Справедливе й зворотне твердження. Маємо (X, τ) та A, B – довільні замкнені та неперетинні, для яких завжди існує неперервна функція $f: X \rightarrow [0, 1]$, для якої $f(x) = 0, x \in A$ та $f(x) = 1, x \in B$. Тоді X – нормальний простір.

Proof.

Припустимо, що A, B – замкнені та неперетинні множини. Тоді існує $f: X \rightarrow [0, 1]$, що неперервна та задовільняє іншим умовам. Зауважимо, що $A \subset f^{-1} \left(\left[0, \frac{1}{2} \right) \right)$ та $B \subset f^{-1} \left(\left(\frac{1}{2}, 1 \right] \right]$. Ці прообрази відкриті в силу неперервності, а також неперетинні в силу неперетинностей цих інтервалів. Тобто ми довели означення нормальності. ■

Використані джерела

1. Tom Leinster, General Topology, 2014-2015