

$$(X, \mathcal{F}, \lambda)$$

$$\mathcal{P} \xrightarrow{\text{Karhunen-Loève theorem}} \mathcal{S}$$

$$A, B \in \mathcal{P}$$

$$A \cap B \in \mathcal{P}$$

$$A \cup B = \bigcup_i C_i, C_i \in \mathcal{P}$$

$$\int_a^b \varpi(x) dx$$

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c)$$

$$f = \frac{d\lambda}{d\lambda} \lambda$$

$$\lambda(A) = \int_A f d\lambda$$

Measure Theory

$$f \in \mathcal{R}([a, b])$$

$$\Downarrow$$

$$f \in L([a, b]), \lambda = \text{Lebesgue}$$

$$\int_{[a, b]} \varpi(x) d\lambda(x) = 0$$

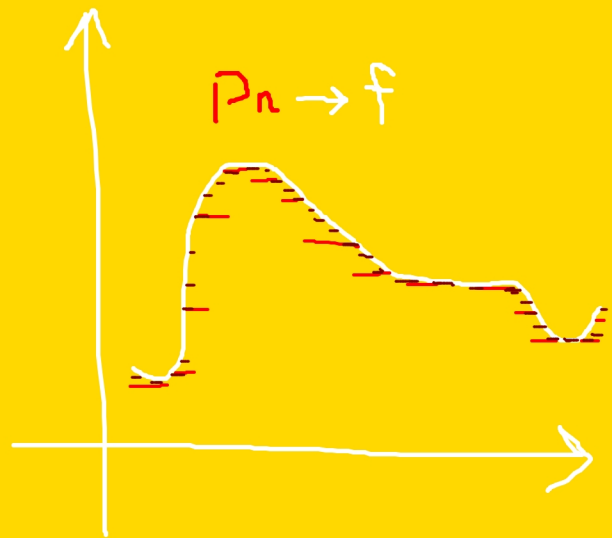
$$\int_A p d\lambda = \sum_i \alpha_i \lambda(A_i \cap A)$$

$$\int_A f d\lambda = \sup_{p \in \mathcal{K}(f) \cap A} \int p d\lambda$$

$$\int_A f d\lambda = \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda$$

$$L_p = \{f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid \int_X |f|^p d\lambda < +\infty\}$$

$$L_p / \sim \quad \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{1/p}$$



Зміст

1	Класи множин	3
1.1	Основні класи множин	3
1.2	Породжені класи множин	5
1.3	Борельові множини	7
2	Міри	9
2.1	Основні функції множин	9
2.2	Означення міри	9
2.3	Про міру Жордана	11
2.4	Зовнішні міри	13
2.5	Вимірність за Каратеодорі	15
2.6	Продовження міри	16
2.7	Міра Лебега	18
2.8	Регулярність мір	19
3	Вимірні функції	21
3.1	Основні означення	21
3.2	Дії з вимірними функціями	22
3.3	Наближення вимірних функцій	23
3.4	Еквівалентні функції	25
3.5	Теорема Єгорова	26
3.6	Збіжність за мірою	26
3.7	Основні твердження, що пов'язують обидві збіжності. Фундаментальність за мірою	28
4	Інтеграл Лебега	31
4.1	Первинні означення	31
4.2	Наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій	33
4.3	Основні властивості та твердження	34
4.4	Граничні теореми	37
4.5	Порівняння інтеграла Рімана з інтегралом Лебега	40
4.6	Інтеграл з параметром	41
4.7	Заміна змінної	42
5	Заряди	43
5.1	Основні означення. Розклад Гана	43
5.2	Теорема Радона-Нікодима	45
6	Добуток просторів	49
6.1	Множини та функції	49
6.2	Добуток мір	50
6.3	Теорема Тонеллі та Фубіні	53
7	Простір L_p	56
7.1	Основні нерівності	56
7.2	Конструкція простору L_p	57
7.3	Щільні підмножини L_p	58
7.4	Істотно обмежені функції	59

1 Класи множин

1.1 Основні класи множин

Definition 1.1.1 Задано X – деяка множина та $\mathcal{K} \subset 2^X$ – клас підмножин. Непорожній клас \mathcal{K} називається **кільцем**, якщо

$$\begin{aligned} \forall A, B \in \mathcal{K} : A \cup B \in \mathcal{K} \\ \forall A, B \in \mathcal{K} : A \setminus B \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

Proposition 1.1.2 Властивості кільця

Задано X та \mathcal{K} – кільце на цій множині. Тоді виконуються такі пункти:

- 1) $\emptyset \in \mathcal{K}$;
- 2) $\forall A, B \in \mathcal{K} : A \cap B \in \mathcal{K}$;
- 3) $\forall A_k \in \mathcal{K}, k = \overline{1, n} : \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{K}, \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{K}$.

Proof.

Покажемо виконання кожної властивості:

- 1) Оскільки \mathcal{K} – непорожня, то існує елемент $A \in \mathcal{K}$. Зокрема $A \setminus A = \emptyset \in \mathcal{K}$;
- 2) $\forall A, B \in \mathcal{K} : A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. За умовою кільця, $A \setminus B \in \mathcal{K}$ та $A \in \mathcal{K}$, а тому $A \cap B \in \mathcal{K}$.
- 3) Перше випливає з означення кільця, а друге випливає з властивості 2).

Всі властивості доведені. ■

Definition 1.1.3 Задано X – деяка множина та $\mathcal{A} \subset 2^X$ – клас підмножин. Непорожній клас \mathcal{A} називається **алгеброю**, якщо

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \text{кільце} \\ X \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Definition 1.1.4 Задано X – деяка множина та \mathcal{P} – клас підмножин. Непорожній клас \mathcal{P} назвемо **півкільцем**, якщо

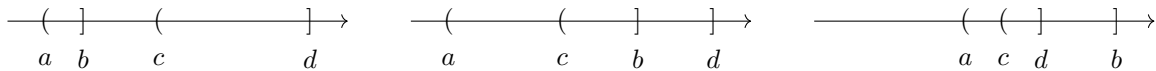
$$\begin{aligned} \forall A, B \in \mathcal{P} : A \cap B \in \mathcal{P} \\ \forall A, B \in \mathcal{P} : A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n C_i, C_i \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

Remark 1.1.5 $\emptyset \in \mathcal{P}$, тому що в силу непорожності $A \in \mathcal{P}$, а тому за другою умовою, з одного боку, $A \setminus A = \bigcup_{i=1}^n C_i$ при $C_i \in \mathcal{P}$; а з іншого боку, $A \setminus A = \emptyset$. Тому рівність виконується лише при $C_i = \emptyset \in \mathcal{P}$.

Example 1.1.6 Розглянемо $\mathcal{P}_1 = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ – клас підмножин \mathbb{R} . Воно утворює півкільце.

Нехай $(a, b] \in \mathcal{P}_1$ та $(c, d] \in \mathcal{P}_1$. Тоді звідси $(a, b] \cap (c, d]$ кілька опцій:

- 1) $(a, b] \cap (c, d] = \emptyset \in \mathcal{P}_1$, якщо ці напівінтервали не перетинаються;
- 2) $(a, b] \cap (c, d] = (c, b] \in \mathcal{P}_1$, якщо (не втрачаючи загальності) $a < c < b < d$;
- 3) $(a, b] \cap (c, d] = (c, d] \in \mathcal{P}_1$, якщо (не втрачаючи загальності) $(c, d] \subset (a, b]$.



Відповідно зліва направо: 1), 2), 3).

Далі розглянемо $(a, b] \setminus (c, d]$. Знову кілька опцій:

- 1) $(a, b] \setminus (c, d] = (a, b]$, якщо ці напівінтервали не перетинаються;
- 2) $(a, b] \setminus (c, d] = (a, c]$, якщо (не втрачаючи загальності) $a < c < b < d$;
- 3) $(a, b] \setminus (c, d] = (a, c] \sqcup (b, d]$, якщо (не втрачаючи загальності) $(c, d] \subset (a, b]$.

Усі вони розклалися не неперетинне об'єднання елементів з \mathcal{P}_1 .

Отже, \mathcal{P}_1 – дійсно утворює півкільце.

Theorem 1.1.7 Задані \mathcal{P}' та \mathcal{P}'' – два півкільця на відповідних множинах X_1, X_2 . Визначимо $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}'' = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{P}', A_2 \in \mathcal{P}''\}$. Тоді $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$ буде півкільцем на множині $X_1 \times X_2$.

Proof.

Нехай $A, B \in \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$, тобто $A = A_1 \times A_2$ та $B = B_1 \times B_2$, де $A_1, B_1 \in \mathcal{P}'$ та $A_2, B_2 \in \mathcal{P}''$.

$$A \cap B = (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2).$$

Причому $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{P}'$ та $A_2 \cap B_2 \in \mathcal{P}''$ за визначеннями півкільця. А за визначенням $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$, звідси $A \cap B \in \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$.

$$A \setminus B = [(A_1 \setminus B_1) \times A_2] \cup [(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)] \quad (\text{вправа: довести рівність}).$$

Зауважимо, що $A_1 \setminus B_1 = \bigcup_{i=1}^n C_i$ та $A_2 \setminus B_2 = \bigcup_{k=1}^m D_k$, причому $C_i \in \mathcal{P}', D_k \in \mathcal{P}''$. Значить, рівність можна дописати:

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n (C_i \times A_2) \cup \bigcup_{k=1}^m ((A_1 \cap B_1) \times D_k).$$

У нас записані елементи з $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$, а сама множина $A \setminus B$ записалася як неперетинне об'єднання елементів з $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$.

Висновок: $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$ задає півкільце на $X_1 \times X_2$. ■

Remark 1.1.8 Зрозуміло, що твердження працює для скінченного числа півкільця.

Example 1.1.9 Зокрема \mathcal{P}_1 – півкільце на \mathbb{R} . Визначимо нову множину $\mathcal{P}_d = \left\{ \prod_{i=1}^d (a_i, b_i] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$.

Тоді \mathcal{P}_d буде півкільцем множини \mathbb{R}^d , просто тому що $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_1$.

Remark 1.1.10 Будь-яке кільце \mathcal{K} – автоматично півкільце.

Адже перша умова виконана за властивістю 2) кільця. А також за означенням, $A \setminus B = A \setminus B$, де $A \setminus B \in \mathcal{K}$ – тобто цей елемент розписали не перетинне об'єднання з одного елемента з даного класу.

Definition 1.1.11 Задано X – деяка множина та $\sigma\mathcal{K} \subset 2^X$ – клас підмножин.

Непорожній клас $\sigma\mathcal{K}$ називається **σ -кільцем**, якщо

$$\begin{aligned} \forall A_n \in \sigma\mathcal{K}, n \geq 1 : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &\in \sigma\mathcal{K} \\ \forall A, B \in \sigma\mathcal{K} : A \setminus B &\in \sigma\mathcal{K} \end{aligned}$$

Proposition 1.1.12 Властивості σ -кільця

Задано X та $\sigma\mathcal{K}$ – σ -кільце на цій множині. Тоді виконуються такі пункти:

- 1) $\sigma\mathcal{K}$ – буде (просто) кільцем;
- 2) $\forall A_n \in \sigma\mathcal{K}, n \geq 1 : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma\mathcal{K}$.

Proof.

Покажемо виконання кожної властивості:

1) Візьмемо $A, B \in \sigma\mathcal{K}$, тоді звідси $A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \cup \dots \in \sigma\mathcal{K}$.

2) $\forall A_n \in \sigma\mathcal{K}, n \geq 1 : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \in \sigma\mathcal{K}$.

Всі властивості доведені. ■

Definition 1.1.13 Задано X – деяка множина та $\sigma\mathcal{A} \subset 2^X$ – клас підмножин.

Непорожній клас $\sigma\mathcal{A}$ називається **σ -алгеброю**, якщо

$$\begin{aligned} \sigma\mathcal{A} &\text{ – } \sigma\text{-кільце} \\ X &\in \sigma\mathcal{A} \end{aligned}$$

Definition 1.1.14 Задамо послідовність множин $\{A_n, n \geq 1\}$.

Вона буде називатися **зростаючою**, якщо $A_{n+1} \supset A_n$.

У такому випадку ми позначимо $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Вона буде називатися **спадною**, якщо $A_{n+1} \subset A_n$.

У такому випадку ми позначимо $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Обидві послідовності множин будемо називати **монотонними**.

Definition 1.1.15 Задано X – деяка множина та $\mathcal{M} \subset 2^X$ – клас підмножин.

Непорожній клас \mathcal{M} називається **монотонним**, якщо

$$\forall \{A_n \in \mathcal{M}, n \geq 1\} - \text{монотонна} : \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{M}$$

Theorem 1.1.16 Задано \mathcal{H} – кільце та монотонний клас множин X . Тоді \mathcal{H} – σ -кільце.

Proof.

Нехай $A_n \in \mathcal{H}, n \geq 1$. Розглянемо послідовність множин $\{B_n, n \geq 1\}$, що задається таким чином:
 $B_1 = A_1, B_2 = A_1 \cup A_2, B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \dots$

Зауважимо, що $\{B_n \in \mathcal{H}\}$ зростає, а в силу монотонності, звідси $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P}$.

Ну й якщо $A, B \in \mathcal{H}$, то за означенням кільця, $A \setminus B \in \mathcal{H}$.

Висновок: \mathcal{H} – σ -кільце. ■

1.2 Породжені класи множин

Definition 1.2.1 Задано X – множина та \mathcal{H} – непорожня множина.

Кільцем, породженим класом \mathcal{H} , називається така множина:

$$k(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{K}_\alpha - \text{кільце}}} \mathcal{K}_\alpha$$

σ -кільцем, породженим класом \mathcal{H} , називається така множина:

$$\sigma k(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{(\sigma \mathcal{K})_\alpha \supset \mathcal{H} \\ (\sigma \mathcal{K})_\alpha - \sigma\text{-кільце}}} (\sigma \mathcal{K})_\alpha$$

Алгеброю, породженим класом \mathcal{H} , називається така множина:

$$a(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{A}_\alpha - \text{алгебра}}} \mathcal{A}_\alpha$$

σ -алгеброю, породженим класом \mathcal{H} , називається така множина:

$$\sigma a(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{(\sigma \mathcal{A})_\alpha \supset \mathcal{H} \\ (\sigma \mathcal{A})_\alpha - \sigma\text{-алгебра}}} (\sigma \mathcal{A})_\alpha$$

Монотонним класом, породженим класом \mathcal{H} , називається така множина:

$$m(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{M}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{M}_\alpha - \text{монотонний клас}}} \mathcal{M}_\alpha$$

Remark 1.2.2 Я зосереджуся лише на породжених кільцях. Нижче будуть зазначені властивості породжених кілець – аналогічно ті властивості переписуються для інших породжених класів.

Remark 1.2.3 Зауважимо, що $k(\mathcal{H}) \neq \emptyset$. Оскільки \mathcal{K}_α – кільця, то тоді $\emptyset \in \mathcal{K}_\alpha$ при всіх α , а тому $\emptyset \in k(\mathcal{H})$.

Proposition 1.2.4 Властивості породженого кільця

Задано X – множина та \mathcal{H} – непорожня множина. Тоді виконуються такі пункти:

- 1) $k(\mathcal{H})$ – дійсно, кільце;
- 2) $k(\mathcal{H}) \supset \mathcal{H}$;
- 3) Нехай \mathcal{K} – якесь кільце, де $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$. Тоді звідси $\mathcal{K} \supset k(\mathcal{H})$.

Proof.

Доведемо виконання всіх пунктів:

1) Нехай $A, B \in k(\mathcal{H})$, тобто звідси $A, B \in \mathcal{K}_\alpha$ при всіх α . Оскільки \mathcal{K}_α – кільце при всіх α , то звідси $A \cup B \in \mathcal{K}_\alpha$ при всіх α . Тобто звідси $A \cup B \in k(\mathcal{H})$. Аналогічно доводимо, що $A \setminus B \in k(\mathcal{H})$.

2) це випливає з того, що всі $\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H}$, а далі перетнути треба по α .

3) Маємо $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ – якесь кільце. Тоді \mathcal{K} бере участь у перетині всіх кілець в $k(\mathcal{H})$, просто за умовою такого кільця. Значить, $k(\mathcal{H}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{K}_\alpha \supset \mathcal{H} \\ \mathcal{K}_\alpha \text{ – кільце} \\ \mathcal{K}_\alpha \neq \mathcal{K}}} \mathcal{K}_\alpha \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$.

Всі властивості доведені. ■

Corollary 1.2.5 $k(\mathcal{H})$ – найменше кільце, що містить \mathcal{H} – непорожній клас підмножин X .

Theorem 1.2.6 Задано \mathcal{P} – півкільце. Тоді $k(\mathcal{P}) = \{A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k \mid A_n \in \mathcal{P}\}$.

Proof.

Для спрощення позначимо клас множин $\mathcal{L} = \{A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k \mid A_n \in \mathcal{P}\}$. Хочемо довести, що $k(\mathcal{P}) = \mathcal{L}$. $\mathcal{L} \subset k(\mathcal{P})$.

Дійсно, якщо $D \in \mathcal{D}$, то звідси $D = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$, де всі $A_n \in \mathcal{P}$. Але $\mathcal{P} \subset k(\mathcal{P})$, звідси, за означенням кільця, $D \in k(\mathcal{H})$.

$\mathcal{L} \supset k(\mathcal{P})$.

Зрозуміло цілком, що $\mathcal{L} \supset \mathcal{P}$. Нам треба довести, що \mathcal{L} буде кільцем – і тоді звідси, за властивістю 3) породжених кілець, $\mathcal{L} \supset k(\mathcal{P})$.

Нехай $A, B \in \mathcal{L}$, тобто звідси $A = \bigsqcup_{i=1}^n C_i$, $B = \bigsqcup_{k=1}^m D_k$ та всі $C_i, D_k \in \mathcal{P}$.

$A \sqcup B \in \mathcal{L}$ (це якщо $A \cap B = \emptyset$, а тому звідси кожний $C_i \cap D_k = \emptyset$). Дійсно, $A \sqcup B = C_1 \sqcup \dots \sqcup D_m$, всі ці елементи з \mathcal{P} .

$A \cap B \in \mathcal{L}$. Дійсно, $A \cap B = \bigsqcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} (C_i \cap D_k)$, причому кожний $C_i \cap D_k \in \mathcal{P}$ за означенням півкільця.

$A \setminus B \in \mathcal{L}$ (перша вимога кільця). Спочатку зауважимо, що $A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^n (C_i \setminus B)$, а далі кожний

$C_i \setminus B = \bigcap_{k=1}^m (C_i \setminus D_k)$. Але оскільки $C_i, D_k \in \mathcal{P}$, то тоді $C_i \setminus D_k = \bigsqcup_{r=1}^{s_{ik}} G_r$ та кожний $G_r \in \mathcal{P}$. Звідси випливає $C_i \setminus D_k \in \mathcal{L}$, а тому далі $C_i \setminus B \in \mathcal{L}$ як перетин, а після $A \setminus B \in \mathcal{L}$ як диз'юнктивне об'єднання.

$A \cup B \in \mathcal{L}$ (друга вимога кільця). Дійсно, розпишемо $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$.

Отже, нарешті довели, що \mathcal{L} утворює кільце, що завершує доведення. ■

Example 1.2.7 Зокрема $k(\mathcal{P}_1) = \left\{ \bigsqcup_{k=1}^n (a_k, b_k] \mid (a, k, b_k] \subset \mathbb{R} \right\}$. Аналогічно визначається $k(\mathcal{P}_d)$.

Theorem 1.2.8 Задано \mathcal{K} – кільце. Тоді $m(\mathcal{K}) = \sigma k(\mathcal{K})$.

Proof.

$m(\mathcal{K}) \subset \sigma k(\mathcal{K})$.

Дійсно, $\sigma k(\mathcal{K}) \supset \mathcal{K}$, за властивістю породжених σ -кілець. Також $\sigma k(\mathcal{K})$ буде монотонним класом, тому що під $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n, A_n \in \mathcal{K}$, ми маємо на увазі зліченне об'єднання або перетин, що допустимо. Звідси випливає, що $\sigma k(\mathcal{K}) \supset m(\mathcal{K})$.

$$m(\mathcal{K}) \supset \sigma k(\mathcal{K}).$$

Маємо $m(\mathcal{K}) \supset \mathcal{K}$, за властивістю породжених монотонних класів. Нам треба довести, що $m(\mathcal{K})$ буде σ -кільцем – і тоді звідси $m(\mathcal{K}) \supset \sigma k(\mathcal{K})$. А щоб довести, що $m(\mathcal{K})$ буде σ -кільцем, достатньо за **Th. 1.1.16** довести, що $m(\mathcal{K})$ – просто кільце.

Нехай $A \in m(\mathcal{K})$. Розглянемо клас множин $\mathcal{L}(A) = \{B \subset X \mid A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in m(\mathcal{K})\}$. Покажемо, що це – монотонний клас.

Нехай $C_n \in \mathcal{L}(A)$, причому C_n зростає. Позначимо $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C$. Тоді

$A \cup C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cup C_n)$, причому $(A \cup C_n) \in m(\mathcal{K})$ (за визначенням $\mathcal{L}(A)$), а також $(A \cup C_n)$ монотонно зростає до $(A \cup C)$, звідси $A \cup C \in m(\mathcal{K})$.

$A \setminus C = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus C_n)$, причому $A \setminus C_n \in m(\mathcal{K})$ (за визначенням $\mathcal{L}(A)$), а також $(A \setminus C_n)$ монотонно спадає до $(A \setminus C)$, звідси $A \setminus C \in m(\mathcal{K})$.

$C \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus A)$, причому $C_n \setminus A \in m(\mathcal{K})$ (за визначенням $\mathcal{L}(A)$), а також $(C_n \setminus A)$ монотонно зростає до $(C \setminus A)$, звідси $C \setminus A \in m(\mathcal{K})$.

Із цих трьох випливає, що $C \in \mathcal{L}(A)$. Цілком аналогічно доводиться, що якщо $C_n \in \mathcal{L}(A)$ та C_n спадає, то $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{L}(A)$ (тут $A \in \mathcal{K}$!).

Нехай $A \in \mathcal{K}$. Оскільки \mathcal{K} – це кільце, то для кожної $B \in \mathcal{K}$ отримаємо $A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{K}$, а звідси $A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in m(\mathcal{K})$. Із цього випливає, що $B \in \mathcal{L}(A)$. Тобто із цього випливає, що для фіксованого $A \in \mathcal{K}$ маємо $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(A)$. Але оскільки $\mathcal{L}(A)$ – монотонний, то $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}(A)$.

Отже, для фіксованого $A \in \mathcal{K}$ і для будь-якої множини $B \in m(\mathcal{K})$, маємо $B \in \mathcal{L}(A)$, тобто $A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in m(\mathcal{K})$. Але конкретно цей запис означає, що $A \in \mathcal{L}(B)$. Тобто $A \in \mathcal{K} \implies A \in \mathcal{L}(B)$, а тому звідси $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(B)$. Аналогічно отримаємо $m(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}(B)$ (тут $A \in m(\mathcal{K})$! Важлива різниця!).

Тепер нехай $A \in m(\mathcal{K})$, тоді $A \in \mathcal{L}(B)$. Це означає, що $A \cup B, A \setminus B \in m(\mathcal{K})$. Дана штука виконується для будь-яких $A, B \in m(\mathcal{K})$, що й доводить означення кільця. ■

1.3 Борельові множини

Definition 1.3.1 Задано (X, ρ) – метричний простір та \mathcal{G} – набір усіх відкритих підмножин X . **Борельовою σ -алгеброю** в X називається наступна σ -алгебра:

$$\mathcal{B}(X) \stackrel{\text{def.}}{=} \sigma a(\mathcal{G})$$

Тобто ми взяли клас відкритих підмножин в Y та породили σ -алгебру.

Всі множини з $\mathcal{B}(X)$ називаються **борельовими**.

Remark 1.3.2 Переважно будемо користуватися стандартною метрикою, де це можливо.

Example 1.3.3 Розглянемо кілька прикладів борельових множин:

1) Якщо U – відкрита, то U – борельова.

Дійсно, U – відкрита, тобто $U \in \mathcal{G}$, але звідси $U \in \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(X)$ за властивістю породжених σ -алгебр.

2) Якщо V – замкнена, то U – борельова.

Дійсно, V – замкнена, тому $X \setminus V$ – відкрита. Розпишемо $V = X \setminus (X \setminus V)$. У нас множина $X \setminus V$ уже борельова за 1). Також X – відкрита множина, а тому знову борельова. Значить, $X, X \setminus V \in \sigma a(\mathcal{G}) \implies X \setminus (X \setminus V) = V \in \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(X)$ – борельова.

3. Одноточкова множина $\{x\}$ – борельова.

Дійсно, $\{x\}$ – замкнена множина, а тому за 2), уже борельова.

4. Скінченні, зліченні множини – всі вони борельові.

Усі ці множини отримуються через одноточкові множини, а далі 3).

Theorem 1.3.4 Для півкільця \mathcal{P}_d підмножин \mathbb{R}^d виконується $\sigma k(\mathcal{P}_d) = \sigma a(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Proof.

$$\sigma k(\mathcal{P}_d) = \sigma a(\mathcal{P}_d).$$

Дійсно, $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \mathcal{P}_d$, але σ -алгебра уже є σ -кільцем, тому звідси $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \sigma k(\mathcal{P}_d)$.

Далі $\sigma k(\mathcal{P}) \supset \mathcal{P}_d$, залишилося довести, що $\sigma k(\mathcal{P})$ утворює σ -алгебру – і тоді $\sigma k(\mathcal{P}_d) \supset \sigma a(\mathcal{P}_d)$.

Для цього зауважимо, що $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n]^d$, де всі $(-n, n]^d \in k(\mathcal{P}_d)$, а тому звідси $\mathbb{R}^d \in k(\mathcal{P}_d)$.

$$\sigma a(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Спочатку покажемо, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \sigma a(\mathcal{P}_d)$. Щоб це довести, необхідно довести, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \mathcal{P}_d$. А далі, зважаючи на той факт, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ утворює σ -алгебру, доведемо, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \sigma a(\mathcal{P}_d)$.

Нехай $A \in \mathcal{P}_d$, тобто $A = \prod_{i=1}^d (a_i, b_i]$. Зауважимо, що $(a_i, b_i] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a_i, b_i + \frac{1}{n}\right)$. Далі

$$A = \prod_{i=1}^d \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a_i, b_i + \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^d \left(a_i, b_i + \frac{1}{n}\right).$$

Декартів добуток відкритих множин – відкрита, а кожна відкрита – уже борельова. А оскільки там σ -алгебра, то допускається злічений перетин, звідси $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Отже, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \mathcal{P}_d$.

Нарешті, покажемо, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma a(\mathcal{P}_d)$. Щоб це довести, треба довести, що $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \mathcal{G}$, де \mathcal{G} – всі відкриті підмножини \mathbb{R}^d . Після цього ми отримуємо $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \sigma a(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Отже, нехай $U \in \mathcal{G}$, тобто нехай U – відкрита множина. Залишимо її таким чином:

$$U = \bigcup_{\substack{\prod_{i=1}^d (p_i, q_i] \subset U \\ p_i, q_i \in \mathbb{Q}}} \prod_{i=1}^d (p_i, q_i].$$

Якщо \vec{x} лежить в цьому об'єднанні, то тоді автоматично $\vec{x} \in U$.

Якщо $\vec{x} \in U$, то вона внутрішня, тож існує куля $B(\vec{x}, \varepsilon) \subset U$. А там $\forall \vec{y} : \|\vec{x} - \vec{y}\| < \varepsilon$. Тобто звідси $|x_i - y_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \implies y_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} < x_i < y_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}$. Між кожним з цих нерівностей можна знайти

раціональні числа $p_i, q_i \in \mathbb{Q}$, тоді звідси $p_i < x_i < q_i$. Звідси $\vec{x} \in \prod_{i=1}^d (p_i, q_i]$. Але також важливо

зауважити, що $\prod_{i=1}^d (p_i, q_i] \subset U$. Отже, \vec{x} лежить в цьому об'єднанні.

Множина U записалась як зліченне об'єднання елементів з $\mathcal{P}_d \subset \sigma a(\mathcal{P}_d)$. Отже, звідси $U \in \sigma a(\mathcal{P}_d)$.
Отже, $\mathcal{G} \subset \sigma a(\mathcal{P}_d)$. ■

2 Міри

2.1 Основні функції множин

Definition 2.1.1 Задано X – деяка множина та $\mathcal{H} \subset 2^X$ – клас підмножин.

Функцією множин називатимемо відображення $f: \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$. Ми будемо вважати надалі, що $-\infty$ неможливий.

Definition 2.1.2 Задано функцію множин f на \mathcal{H} .

Функція множин f називається **невід’ємною**, якщо

$$\forall A \in \mathcal{H} : f(A) \geq 0$$

Функція множин f називається **адитивною**, якщо

$$\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{H}, \text{ причому } \bigcup_{n=1}^k A_n \in \mathcal{H} : f\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) = \sum_{n=1}^k f(A_n)$$

Функція множин f називається **σ -адитивною**, якщо

$$\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}, \text{ причому } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H} : f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n)$$

Функція множин f називається **напіваадитивною**, якщо

$$\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{H}, \text{ причому } \bigcup_{n=1}^k A_n \in \mathcal{H} : f\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) \leq \sum_{n=1}^k f(A_n)$$

Функція множин f називається **σ -напіваадитивною**, якщо

$$\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}, \text{ причому } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H} : f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n)$$

Функція множин f називається **скінченною**, якщо

$$\forall A \in \mathcal{H} : f(A) < +\infty$$

Функція множин f називається **σ -скінченною**, якщо

$$\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H} : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A, f(A_n) < +\infty$$

Функція множин f називається **монотонною**, якщо

$$\forall A, B \in \mathcal{H} : A \subset B \implies f(A) \leq f(B)$$

Remark 2.1.3 Домовленність: ми не будемо далі розглядати функції множин f , для яких $f \equiv +\infty$. Це означає, що в кожній функції множин f буде існувати множина $A \in \mathcal{H}$, для якої $f(A) < +\infty$.

Remark 2.1.4 Зрозуміло, що якщо функція множин скінченна, то вона автоматично σ -скінченна.

2.2 Означення міри

Definition 2.2.1 Задано \mathcal{P} – півкільце.

Мірою ми називатимемо функцію множин $\lambda: \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$, де

$$\lambda - \text{невід’ємною та } \sigma\text{-адитивною.}$$

Proposition 2.2.2 Властивості мір

Задано λ – міра на півкільці \mathcal{P} . Тоді виконуються такі пункти:

- 1) $\lambda(\emptyset) = 0$;

- 2) λ – адитивна;
- 3) λ – монотонна;
- 4) λ – σ -напіваадитивна;
- 5) $\forall A \in \mathcal{P}, \forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : \lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

Proof.

Доведемо виконання всіх пунктів:

1) Тут на допомогу приходить узгодження в підпункті вище. У нас існує $A \in \mathcal{P}$, для якої $\lambda(A) < +\infty$. Розпишемо $A = A \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup \dots$, причому $\emptyset \in \mathcal{P}$. Звідси, за σ -адитивністю, $\lambda(A) = \lambda(A) + \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset) + \dots$. Але оскільки $\lambda(A) < +\infty$, то ряд збіжний, а для рівності треба вимагати $\lambda(\emptyset) = 0$.

2) Нехай $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{P}$, причому $\bigcup_{n=1}^k A_n \in \mathcal{P}$. Тоді за σ -адитивністю міри та за властивістю 1),

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lambda(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup \dots) = \lambda(A_1) + \dots + \lambda(A_n) + \lambda(\emptyset) + \dots = \sum_{n=1}^k \lambda(A_n).$$

3) Нехай $A, B \in \mathcal{P}$ таким чином, що $A \subset B$. Тоді звідси $B = (B \setminus A) \sqcup A$. На півкільці $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n C_i$

при $C_i \in \mathcal{P}$. Отже, звідси $B = \bigcup_{i=1}^n C_i \sqcup A$, а за властивістю 2) та невід'ємності міри, маємо

$$\lambda(B) = \sum_{i=1}^n \lambda(C_i) + \lambda(A) \geq \lambda(A).$$

4) Нехай $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}$, причому $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P}$. Ми розглянемо $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_1 =$

$A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$ – перейшли до системи неперетинних множин. Зауважимо, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P}$ (але при цьому неправильно казати, що $B_n \in \mathcal{P}$, тому юзаємо σ -адитивність!). Всі $A_n \in k(\mathcal{P})$, а тому звідси всі $B_n \in k(\mathcal{P})$, але тоді звідси $B_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} C_{in}$ при $C_{in} \in \mathcal{P}$. Також зауважимо, що $A_n \setminus B_n \in k(\mathcal{P})$,

а тому звідси $A_n \setminus B_n = \bigcup_{j=1}^{j_n} D_{jn}$ при $D_{jn} \in \mathcal{P}$.

Разом уже маємо $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} C_{in} \in \mathcal{P}$, причому всі $C_{in} \in \mathcal{P}$, тому скористаємось σ -адитивністю:

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}).$$

Водночас $A_n = A_n \setminus B_n \sqcup B_n = \bigcup_{j=1}^{j_n} D_{jn} \sqcup \bigcup_{i=1}^{i_n} C_{in} \in \mathcal{P}$, причому всі $C_{in}, D_{jn} \in \mathcal{P}$ – дійсно неперетинні всі між собою. Тому можна скористатися σ -адитивністю:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{j_n} \lambda(D_{jn}) + \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

5) Нехай $A \in \mathcal{P}$, а також задано покриття $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, де $A_n \in \mathcal{P}$. Зауважимо, що $A = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$, де $A \in \mathcal{P}$, а також $A \cap A_n \in \mathcal{P}$ за означенням півкільця. Тоді за 4),

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

До речі, властивість 5) – це певне узагальнення властивості 4), тобто σ -напіваадитивності.

Всі властивості доведені. ■

Remark 2.2.3 Якби λ була невід’ємною та просто адитивною, то властивості 1),3),4),5) також би виконувалися, тільки там скінченна кількість замість зліченної.

Corollary 2.2.4 Якщо λ задана на кільці \mathcal{K} , то $\forall A, B \in \mathcal{K} : A \subset B : \lambda(A \setminus B) = \lambda(A) - \lambda(B)$.

Вказівка: $A \sqcup (B \setminus A) = B$, у цьому випадку $B \setminus A \in \mathcal{K}$, тому все легітимно.

Theorem 2.2.5 Неперервність міри знизу

Задано λ – міра уже на кільці \mathcal{K} . Нехай задана зростаюча послідовність $\{A_n \in \mathcal{K}, n \geq 1\}$, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{K}$. Тоді $\lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$.

Proof.

Розглянемо $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus A_2, \dots$ – система неперетинних множин в силу зростання $\{A_n\}$. Зауважимо, що всі $B_n \in \mathcal{K}$, а також $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$. Тоді

$$\begin{aligned} \lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) &= \lambda\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^j \lambda(B_n) = \lim_{j \rightarrow \infty} (\lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1) + \lambda(A_3) - \lambda(A_2) + \dots + \lambda(A_j) - \lambda(A_{j-1})) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(A_j). \end{aligned}$$

Мабуть, окремо зауважу, що в сумі я скористався наслідком вище. ■

Theorem 2.2.6 Неперервність міри зверху

Задано λ – міра уже на кільці \mathcal{K} . Нехай спадна зростаюча послідовність $\{A_n \in \mathcal{K}, n \geq 1\}$, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{K}$, а також $\lambda(A_1) < +\infty$! Тоді $\lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$.

Proof.

Позначимо $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ та розглянемо послідовність $\{C_n \in \mathcal{K}, n \geq 1\}$ як $C_n = A_1 \setminus A_n$. Тепер послідовність зростає, при цьому $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = A_1 \setminus A \in \mathcal{K}$. Тоді за неперервністю міри знизу,

$$\lambda(A_1 \setminus A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_1 \setminus A_n).$$

Скориставшись зауваженням вище, а також фактом, що $\lambda(A_1) < +\infty$, маємо

$$\lambda(A_1) - \lambda(A) = \lambda(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) \implies \lambda(A) = \lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n). \quad \blacksquare$$

Example 2.2.7 Наведу приклад, де умова $\lambda(A_1) < +\infty$ є дуже важливою.

Розглянемо міру $\lambda(A) = \text{card}(A \cap \mathbb{Z})$ на $2^{\mathbb{R}}$. Далі розглянемо спадну послідовність $\{[n, +\infty), n \geq 1\}$, причому в цьому випадку $\lambda([1, +\infty)) = \text{card } \mathbb{N} = +\infty$. Тоді

$$\begin{aligned} \lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} [n, +\infty)\right) &= \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty)\right) = \lambda(\emptyset) = 0. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([n, +\infty)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{card}(\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n\}) = +\infty. \end{aligned}$$

Отже, $\lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} [n, +\infty)\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([n, +\infty))$ у даному випадку.

2.3 Про міру Жордана

Із курсу математичного аналізу відомо, що з себе представляє міра Жордана та клас вимірних множин \mathcal{K}_d . Даний контент можна подивитися в іншому пдф більш детально. Однак я зазначу, що міра Жордана m – ще не міра в сенсі означення, що було задано вище. Нам бракує лише σ -адитивності. Це питання розв’яжется згодом.

Lemma 2.3.1 Нехай $A \in \mathcal{K}_d$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists F_\varepsilon, U_\varepsilon \in \mathcal{K}_d$ – відповідно замкнена та відкрита множи-

на: $\begin{cases} m(A) - m(F_\varepsilon) < \varepsilon \\ m(U_\varepsilon) - m(A) < \varepsilon \end{cases}$. Причому до всього цього $F_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon$.

Тобто вимірну за Жорданом множину можна наблизити замкненим всередині множиною та відкритою зовні множиною.

Proof.

I. Існування замкненої множини.

A – вимірна за Жорданом, тоді $m(A) = \sup_{n \geq 0} m(F_{(n)})$, тоді існує N , для якого $m(F_{(N)}) > m(A) - \varepsilon$. Покладемо $F_\varepsilon = F_{(N)} \subset A$. Тоді звідси миттєво $m(A) - m(F_\varepsilon) < \varepsilon$. Ясно, що F_ε вимірна за Жорданом.

II. Існування відкритої множини.

Знову A вимірна за Жорданом, то $m(A) = \inf_{n \geq 0} m(F^{(n)})$, тоді існує \tilde{N} , для якого $m(F^{(\tilde{N})}) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}$.

У нас зараз $F^{(\tilde{N})} \supset A$, але поки що замкнена множина.

Згадаємо, що $F^{(\tilde{N})}$ складається зі скінченного об'єднання брусів вигляду $R = \prod_{i=1}^d \left[\frac{k_i}{2^{\tilde{N}}}, \frac{k_i+1}{2^{\tilde{N}}} \right]$.

Нехай $\delta > 0$ та замінимо замкнені бруси R на відкриті бруси $R(\delta) = \prod_{i=1}^d \left(\frac{k_i}{2^{\tilde{N}}} - \delta, \frac{k_i+1}{2^{\tilde{N}}} + \delta \right)$.

Зрозуміло, що $R(\delta) \supset R$, а тому звідси $F^{(\tilde{N})}(\delta) \supset F^{(\tilde{N})}$, де ось $F^{(\tilde{N})}(\delta)$ – об'єднання відкритих брусів. Оскільки m – монотонна міра, то $m(F^{(\tilde{N})}) \leq m(F^{(\tilde{N})}(\delta))$. Звідси маємо наступне:

$$\begin{aligned} m(F^{(\tilde{N})}) &\leq m(F^{(\tilde{N})}(\delta)) \stackrel{m - \text{напівадитивна}}{\leq} \sum m(R(\delta)) = \sum \prod_{i=1}^d \left(\frac{k_i+1}{2^{\tilde{N}}} + \delta - \left(\frac{k_i}{2^{\tilde{N}}} - \delta \right) \right) = \\ &= \sum \left(\frac{1}{2^{\tilde{N}}} + 2\delta \right)^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \sum \left(\frac{1}{2^{\tilde{N}}} \right)^d = \sum \prod_{i=1}^d \left[\frac{k_i+1}{2^{\tilde{N}}} - \frac{k_i}{2^{\tilde{N}}} \right] = \sum m(R) = m(F^{(\tilde{N})}). \end{aligned}$$

Значить, звідси існує $\delta_1 > 0$, для якого $m(F^{(\tilde{N})}(\delta_1)) - m(F^{(\tilde{N})}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Нарешті, покладемо $U_\varepsilon = F^{(\tilde{N})}(\delta_1) \supset F^{(\tilde{N})} \supset A$. Ясно, що це відкрита множина (як об'єднання відкритих) та вимірна за Жорданом. Тоді звідси

$$m(U_\varepsilon) - m(A) = (m(U_\varepsilon) - m(F^{(\tilde{N})})) + (m(F^{(\tilde{N})}) - m(A)) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Theorem 2.3.2 Міра Жордана m – міра (в сенсі означення вище) на кільці \mathcal{K}_d .

Proof.

Уже відомо, що m – невід'ємна функція множин, тому залишається σ -адитивність.

Нехай $A_n \in \mathcal{K}_d$ – неперетинні, причому $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{K}_d$. Ми хочемо довести $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

Зауважимо, що $\bigcup_{n=1}^j A_n \subset A$, тоді за монотонністю та скінченною адитивністю міри Жордана,

$$\sum_{n=1}^j m(A_n) \leq m(A). \text{ Якщо спрямуємо } j \rightarrow \infty, \text{ то отримаємо } m(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Далі застосуємо щойно доведену лему кілька разів. Нехай $\varepsilon > 0$. Для множини A оберемо замкнену вимірну за Жорданом множину $F_\varepsilon \subset A$, для якої $m(A) - m(F_\varepsilon) < \varepsilon$. Для кожної множини A_n оберемо відкриту вимірну за Жорданом множину $U_{\frac{\varepsilon}{2^n}} \supset A_n$, для якої $m(U_{\frac{\varepsilon}{2^n}}) - m(A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Зауважимо, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\frac{\varepsilon}{2^n}} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \supset F_\varepsilon$, тобто для F_ε у нас є відкрите покриття $\{U_{\frac{\varepsilon}{2^n}}, n \geq 1\}$.

Оскільки F_ε замкнена та обмежена, то вона є компактом. Значить, за лемою Гейне-Бореля, ми можемо відокремити скінченне підпокриття $\{U_1, \dots, U_k\}$, тобто $\bigcup_{i=1}^k U_i \supset F_\varepsilon$. Таким чином,

$$m(F_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^k m(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \left(m(A) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A) + \varepsilon.$$

Отже, $m(A) < \varepsilon + m(F_\varepsilon) < \sum_{i=1}^{\infty} m(A) + 2\varepsilon$, а тому при $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ отримаємо $m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_n)$. \blacksquare

Corollary 2.3.3 Розглянемо півкільце $\mathcal{P}_d = \left\{ \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$, а на ній функцію множин

$\lambda_d \left(\prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \right) = \prod_{k=1}^d (b_k - a_k)$. Тоді λ_d задає міру на \mathcal{P}_d .

Proof.

Дійсно, $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{K}_d$, тому звідси $\lambda_d(A) = m(A)$. ■

2.4 Зовнішні міри

Definition 2.4.1 Задано X – деяка множина та λ^* – функція множин на 2^X . Функція множин $\lambda^*: [0, +\infty]$ називається **зовнішньою мірою**, якщо

$$\begin{aligned} \lambda^*(\emptyset) &= 0 \\ \forall A \subset X : \forall A_1, A_2, \dots \subset X : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : \lambda^*(A) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) \end{aligned}$$

Друга умова – це узагальнення σ -напівадитивності.

Definition 2.4.2 Задано X – деяка множина та λ^* – функція множин на 2^X . Функція множин $\lambda^*: [0, +\infty]$ називається **зовнішньою мірою**, якщо

$$\lambda^*(\emptyset) = 0$$

λ^* – монотонна та σ -напівадитивна

Proposition 2.4.3 Обидва означення еквівалентні.

Proof.

\Rightarrow Дано: перше означення.

Нехай $A, B \subset X$ так, що $A \subset B$. Тоді з другої умови означення випливає, що $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$, якщо розписати $A \subset B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$.

Нехай $A_1, A_2, \dots \subset X$, але тоді, формально кажучи, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді за другою умовою означення, $\lambda^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$.

\Leftarrow Дано: друге означення.

Нехай $A_1, A_2, \dots \subset X$ та $A \subset X$ так, щоб $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Насправді кажучи, бажана нерівність доводиться аналогічним чином, як це було при доведенні властивості 5) міри. Але (конкретно в цьому випадку) є доведення дещо простіше.

Оскільки $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то із другої умови та третьої умови означення випливає миттєво, що

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Чому ми не могли так само простіше зробити в 5) властивості, залишаю як вправу. ■

Remark 2.4.4 Поняття "зовнішня міра" не пов'язана з тим, що це – міра, із властивістю зовнішності. Це просто вже такий сталий термін.

Example 2.4.5 Розглянемо $\lambda^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & \text{інакше} \end{cases}$. Вона – зовнішня міра (неважко довести).

Водночас вона не є мірою, тому що, обравши $A, B \neq \emptyset$ – неперетинні, порушиться адитивність.

Remark 2.4.6 Зрозуміло, що λ^* також просто напівадитивна (у загальному сенсі теж).

Definition 2.4.7 Задано λ – міра на півкільці \mathcal{P} .

Зовнішньою мірою, породженою мірою λ , називається функція множин λ^* , яка визначається таким правилом:

$$\lambda^*(A) = \begin{cases} \inf_{\substack{A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ A_n \in \mathcal{P}}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n), & \text{якщо існує хоча б одне злічення покриття множини } A \text{ елементами з } \mathcal{P} \\ +\infty, & \text{інакше} \end{cases}$$

Proposition 2.4.8 Задано λ – міра на півкільці \mathcal{P} . Маємо λ^* – зовнішня міра, породжена мірою λ . Тоді λ^* – справді зовнішня міра (за означенням).

Proof.

Зауважимо, що λ^* визначена на 2^X . Також зазначимо, що $\lambda^*(A) \geq 0$, просто тому що λ – міра, що є невід’ємною.

$$\lambda^*(\emptyset) = \emptyset.$$

Зауважимо, що $\emptyset \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset$. де $\emptyset \in \mathcal{P}$. Звідси випливає, що $\lambda^*(\emptyset) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\emptyset) = 0 \implies \lambda^*(\emptyset) = 0$.

Нехай тепер $A \subset X$, а також $A_1, A_2, \dots \subset X$, причому $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Треба $\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$.

Нехай існує A_N , для якого не знайдеться покриття елементами з \mathcal{P} . Тоді $\lambda^*(A_N) = +\infty$, а тому $\lambda^*(A) \leq +\infty$ автоматично. Тому надалі припускається, що для всіх A_n є покриття.

Нехай $\varepsilon > 0$, тоді для A_n існує покриття $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn}$, для якого $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_{kn}) < \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Зауважимо, що $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn}$, тобто є таке покриття. Тоді звідси

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_{kn}) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \varepsilon.$$

Якщо далі $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$, то отримаємо бажану оцінку:

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n). \quad \blacksquare$$

Remark 2.4.9 В означенні породженої зовнішньої міри λ^* можна обмежитися наборами неперетинних множин із півкільця \mathcal{P} , об’єднання яких містить множину A . Тоді при цьому $\lambda^*(A)$ не зміниться.

Proof.

Справді, хочемо знайти $\lambda^*(A)$. Нехай $\left\{ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{P} \right\} = \mathcal{C}$ – множина всіх можливих покриття A , а також $\left\{ A \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{P} \right\} = \mathcal{C}_{\sqcup}$ – множина всіх покриття A неперетинним чином.

Зауважимо, що $\mathcal{C}_{\sqcup} \subset \mathcal{C}$. Звідси випливає, що $\inf_{\mathcal{C}_{\sqcup}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \geq \inf_{\mathcal{C}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \lambda^*(A)$.

Із іншого боку, нехай $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, тоді зашлемо $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$ – система неперетинних множин. Аналогічно (як це було під час доведення властивості 4) міри)

отримаємо $B_n = \bigsqcup_{i=1}^{i_n} C_{in}$ при $C_{in} \in \mathcal{P}$. Отримали $A \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{i=1}^{i_n} C_{in}$. Звідси

$$\inf_{\mathcal{C}_{\sqcup}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) \stackrel{?}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \lambda^*(A).$$

Нерівність отрималася наступним чином: у нас $A_n \supset B_n \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_{in}$, а тому звідси випливає, що

$$A_n = B_n = \bigsqcup_{i=1}^{i_n} C_{in} \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{j_n} D_{jn} \text{ при } D_{jn} \in \mathcal{P}, \text{ але тоді}$$

$$\lambda(A_n) = \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}) + \sum_{j=1}^{j_n} \lambda(D_{jn}) \geq \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(C_{in}). \quad \blacksquare$$

2.5 Вимірність за Каратеодорі

Definition 2.5.1 Задано λ^* – зовнішня міра.

Множина $A \subset X$ називається **вимірною за Каратеодорі відносно λ^*** , якщо

$$\forall E \subset X : \lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A})$$

Позначення: \mathcal{S} – клас усіх вимірних множин за Каратеодорі (відносно зовнішньої міри).

Remark 2.5.2 $\mathcal{S} \neq \emptyset$, тому що порожня множина \emptyset завжди вимірна за Каратеодорі, тобто $\emptyset \in \mathcal{S}$.

Remark 2.5.3 Означення вимірних множин за Каратеодорі можна дещо послабити ось так:

$$\forall E \subset X : \lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A})$$

Дійсно, зауважимо, що $(E \cap A) \cup (E \cap \tilde{A}) = E$, тобто мається покриття для множини E , а тому за напівадитивністю зовнішньої міри,
 $\lambda^*(E) \leq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A})$.

Theorem 2.5.4 Теорема Каратеодорі

Задано λ^* – зовнішня міра. Тоді \mathcal{S} утворює σ -алгебру, а також $\lambda^*|_{\mathcal{S}}$ буде мірою.

Proof.

Доведення даної теореми будемо розбивати на три етапи.

I. \mathcal{S} буде алгеброю.

Нехай $A, B \in \mathcal{S}$, тобто A, B – вимірні за Каратеодорі, а тому $\forall E \subset X$:

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A}) \quad \lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap B) + \lambda^*(E \cap \tilde{B}).$$

Ми хочемо довести, що $\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap (A \cup B)) + \lambda^*(E \cap \overline{A \cup B})$, це й буде означати $A \cup B \in \mathcal{S}$.

$$\begin{aligned} \lambda^*(E) &= \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A}) \stackrel{B \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*(E \cap A) + [\lambda^*(E \cap \tilde{A} \cap B) + \lambda^*(E \cap \tilde{A} \cap \tilde{B})] = \\ &= [\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A} \cap B)] + \lambda^*(E \cap \tilde{A} \cap \tilde{B}). \end{aligned}$$

Хочеться показати, що ця дужка $[\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A} \cap B)] = \lambda^*(E \cap (A \cup B))$. Дійсно, $\lambda^*(E \cap (A \cup B)) \stackrel{A \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*(E \cap (A \cup B) \cap A) + \lambda^*(E \cap (A \cup B) \cap \tilde{A}) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \tilde{A} \cap B)$.

Отже, $\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap (A \cup B)) + \lambda^*(E \cap \overline{A \cup B})$ виконано для всіх $E \subset X$. Довели $A \cup B \in \mathcal{S}$.

Із означення вимірності за Каратеодорі випливає, що $A \in \mathcal{S} \iff \tilde{A} \in \mathcal{S}$. Оскільки $\emptyset \in \mathcal{S}$, то $X \in \mathcal{S}$.

Нарешті, якщо $A, B \in \mathcal{S}$, то звідси $A \setminus B = A \cap \tilde{B} = \overline{A \cup \tilde{B}} \in \mathcal{S}$.

II. \mathcal{S} буде σ -алгеброю.

Нехай $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ – поки неперетинні множини. Хочемо довести, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, тобто $\forall E \subset X$:

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right).$$

Спочатку доведемо рівність $\lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^k A_n\right) = \sum_{n=1}^k \lambda^*(E \cap A_n)$ за МІ по числу $k \geq 1$.

База індукції: $k = 1$ – нема що доводити.

Припущення індукції: нехай задана нерівність виконується для $k - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Крок індукції: } \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^k A_n\right) &\stackrel{A_k \in \mathcal{S}}{=} \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^k A_n \cap A_k\right) + \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^k A_n \cap \tilde{A}_k\right) = \\ &= \lambda^*(E \cap A_k) + \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{k-1} A_n\right) \stackrel{\text{припущення МІ}}{=} \lambda^*(E \cap A_k) + \sum_{n=1}^{k-1} \lambda^*(A_n) = \sum_{n=1}^k \lambda^*(E \cap A_n). \end{aligned}$$

МІ доведено. Тепер повернімось до бажаного.

Нам, за кроком I, уже відомо, що $\bigcup_{n=1}^k A_n \in \mathcal{S}$, тому звідси маємо:

$$\lambda^*(E) = \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^k A_n\right) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{n=1}^k A_n}\right) \geq \sum_{n=1}^k \lambda^*(E \cap A_n) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) \quad (!).$$

Остання нерівність отрималась за монотонністю, бо $E \cap \bigcup_{n=1}^k A_n \supset E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Нарешті, спрямуємо $k \rightarrow \infty$ – отримаємо:

$$\lambda^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E \cap A_n) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) \geq \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \lambda^*\left(E \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right).$$

Остання нерівність випливає з σ -напіваадитивності зовнішньої міри.

Власне, отримали $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, це був лише випадок неперетинних множин.

Нехай $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ – уже довільні. Розглянемо множини $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, \dots – система неперетинних множин. Причому всі $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{S}$, а звідси $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{S}$.

III. $\lambda^|_{\mathcal{S}}$ утворює міру.*

Залишилося довести, що λ^* буде σ -адитивною на \mathcal{S} .

Нехай $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ – неперетинні (уже автоматично $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$). Скористаємося нерівністю (!)

при $k \rightarrow \infty$, але замість E підставимо $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ – отримаємо наступне:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap A_n\right) + \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Водночас, за σ -напіваадитивністю зовнішньої міри, $\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$. А тому звідси

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n). \quad \blacksquare$$

Definition 2.5.5 Задано λ – міра на σ -алгебрі \mathcal{F} .

Міра λ називається **повною**, якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : \lambda(A) = 0 : \forall B \subset A : B \in \mathcal{F}$$

Із цього випливає, що $\lambda(B) = 0$.

Інколи ще говорять, що σ -алгебра \mathcal{F} **повна відносно міри λ** .

Example 2.5.6 Зокрема маємо $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$, а міра λ на ній визначається як $\lambda(X) = \lambda(\emptyset) = 0$. У цьому випадку міра λ не буде повною, бо якщо $\{x\} \subset X$, то не випливає $\{x\} \notin \mathcal{F}$.

Corollary 2.5.7 Міра $\lambda^*|_{\mathcal{S}} \stackrel{\text{позн.}}{=} \lambda$ із теореми Каратеодорі – повна.

Proof.

Нехай $A \in \mathcal{S}$ так, щоб $\lambda^*(A) = 0$ та оберемо множину $B \subset A$. Доведемо, що $B \in \mathcal{S}$.

Зауважимо, що $B \subset A, E \subset X$, звідси $E \cap B \subset A$, тому $\lambda^*(E \cap B) \leq \lambda^*(A) = 0 \implies \lambda^*(E \cap B) = 0$.
 $\lambda^*(E \cap B) + \lambda^*(E \setminus B) = \lambda^*(E \setminus B) \leq \lambda^*(E)$. ■

2.6 Продовження міри

Theorem 2.6.1 Задано λ – міра на півкільці \mathcal{P} та λ^* – зовнішня міра, породжена мірою λ . Тоді $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$, а також $\lambda^*|_{\mathcal{P}} \equiv \lambda$.

Proof.

$\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$.

Нехай $A \in \mathcal{P}$, нам треба довести, що $A \in \mathcal{S}$, інакше кажучи, $\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \bar{A})$.

Маємо $E \subset X$, якщо для нього не існує покриття, то $\lambda^*(E) = +\infty$, тоді автоматично нерівність виконана. Тому залишилося розглянути $E \subset X$, для яких є покриття.

Нехай $\varepsilon > 0$, тоді існує покриття $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, де $E_n \in \mathcal{P}$, для яких $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) < \lambda^*(E) + \varepsilon$. Тобто

звідси $\lambda^*(E) > \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) - \varepsilon$. Тепер розглянемо праву частину нерівності з Каратеодорі.

Зауважимо, що $E \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap A)$, а також $E \cap \bar{A} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap \bar{A})$, причому $E_n \cap A \in \mathcal{P}$, водночас

$E_n \cap \bar{A} = E \setminus A = \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{in}$, тож $E \cap \bar{A} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{in}$, де $B_{in} \in \mathcal{P}$. За визначенням зовнішньої міри,

$$\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \bar{A}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(B_{in}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Окремо варто пояснити, чому $\lambda(E_n \cap A) + \sum_{i=1}^{i_n} \lambda(B_{in}) = \lambda(E_n)$. У нас $E_n \in \mathcal{P}$, але водночас $E_n =$

$(E_n \cap A) \sqcup (E_n \cap \bar{A}) = (E_n \cap A) \sqcup \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{in}$, тут $E_n \cap A, B_{in} \in \mathcal{P}$, а тому можна застосовувати σ -адитивність міри.

Отже, $\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap \bar{A}) < \lambda^*(E) + \varepsilon$, а далі $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ – отримали бажану нерівність.

$$\lambda^*|_{\mathcal{P}} \equiv \lambda.$$

Нехай $A \in \mathcal{P}$, нам треба $\lambda^*(A) = \lambda(A)$.

Зауважимо, що $A \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, тому за зовнішньою мірою, $\lambda^*(A) \leq \lambda(A) + \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset) + \dots \implies \lambda^*(A) \leq \lambda(A)$.

Тепер беремо будь-яке покриття $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{P}$, які є. Зв властивістю 5) міри,

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) - \text{виконано для кожного покриття. Тому звідси } \lambda(A) \geq \lambda^*(A).$$

Із двох нерівностей випливає, що $\lambda^*(A) = \lambda(A)$, для всіх $A \in \mathcal{P}$. ■

Схема продовження міри за Каратеодорі

- 1) Визначаємо міру λ на півкільці \mathcal{P} – клас підмножин X ;
- 2) На множині 2^X визначаємо зовнішню міру λ^* , що породжена λ ;
- 3) $\lambda^*|_{\mathcal{S}}$ буде мірою на σ -алгебрі (теорема Каратеодорі), причому $\mathcal{S} \supset \mathcal{P}$, а також $\lambda^*|_{\mathcal{P}} \equiv \lambda$. І ось ця міра $\lambda^*|_{\mathcal{S}}$ – шукане продовження міри λ із \mathcal{P} на \mathcal{S} .

Деколи для зручності продовження також позначають за λ , але враховують визначення зовнішньої міри, якщо множина не з півкільця.

Theorem 2.6.2 Єдиність продовження міри

Задано λ – міра на півкільці \mathcal{P} , нехай вона є σ -скінченною. Ми вже за схемою Каратеодорі можемо продовжити її до міри λ^* , яка визначена на σ -алгебрі \mathcal{S} .

Нехай $\tilde{\lambda}$ – інше продовження міри λ з \mathcal{P} на \mathcal{S} . Тоді $\tilde{\lambda} \equiv \lambda^*$ на \mathcal{S} .

Proof.

Доведення розіб'ємо на дві частини.

I. Нехай λ – скінченна міра, при цьому $X \in \mathcal{P}$.

Нехай $A \in \mathcal{S}$, тоді точно існує хоча б одне покриття $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ при $A_n \in \mathcal{P}$ (можна взяти $A_1 = X$, покриття вже є). Тоді звідси, за властивістю 5) міри,

$$\tilde{\lambda}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\lambda}(A_n) \stackrel{A_n \in \mathcal{P}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) - \text{виконано для кожного покриття множини } A. \text{ Тоді } \tilde{\lambda}(A) \leq \lambda^*(A).$$

Узявши $X \setminus A \in \mathcal{S}$, ми аналогічно отримаємо $\tilde{\lambda}(X \setminus A) \leq \lambda^*(X \setminus A) \implies \tilde{\lambda}(A) \geq \lambda^*(A)$. Але тут суттєво як раз таки, щоб $\lambda(X) = \tilde{\lambda}(X) = \lambda^*(X) < +\infty$.

Отже, $\tilde{\lambda}(A) = \lambda^*(A)$ при кожному $A \in \mathcal{S}$.

II. Нехай λ – σ -скінченна міра.

За умовою, існують $X_n \in \mathcal{P}$, для яких $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$, а також кожний $\lambda(X_n) < +\infty$. Далі ми розглянемо $Y_1 = X_1, Y_2 = X_1 \setminus X_2, Y_3 = X_3 \setminus (X_1 \cup X_2)$ – система неперетинних множин. Тоді

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = X, \text{ але також звідси кожний } Y_n \in k(\mathcal{P}), \text{ тому звідси } Y_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} Z_{in}, \text{ де } Z_{in} \in \mathcal{P}.$$

Отримали $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} Z_{in}$, де $Z_{in} \in \mathcal{P}$. Причому зауважимо, що $\lambda(Z_{in}) < +\infty$, просто тому що $Z_{in} \subset Y_n \subset X_n$ та $\lambda(X_n) < +\infty$. Тому ми прийшли до випадку I, що було описано вище. Тобто $\tilde{\lambda}(A \cap Z_{in}) = \lambda^*(A \cap Z_{in})$ для всіх множин $A \in \mathcal{S} \cap Z_{in}$. Отже, $\forall A \in \mathcal{S}$:

$$\tilde{\lambda}(A) = \tilde{\lambda}(A \cap X) = \tilde{\lambda}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} (A \cap Z_{in})\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \tilde{\lambda}(A \cap Z_{in}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_n} \lambda^*(A \cap Z_{in}) \stackrel{\text{аналог}}{=} \lambda^*(A). \quad \blacksquare$$

Remark 2.6.3 Умова σ -скінченності є надзвичайно важливою для єдиності. Приклад ще не знайшов.

Theorem 2.6.4 Наближення міри її значеннями на кільці

Задано λ – σ -скінченна міра на півкільці \mathcal{P} . Продовжимо її до σ -алгебри \mathcal{S} (єдиним чином). Тоді $\forall A \in \mathcal{S}, \lambda(A) < +\infty : \forall \varepsilon > 0 : \exists B \in k(\mathcal{P}) : \lambda(A \triangle B) < \varepsilon$.

Proof.

Нехай $A \in \mathcal{S}$ так, щоб $\lambda(A) < +\infty$, а також нехай $\varepsilon > 0$. Тоді в силу визначення зовнішньої міри $\exists A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \lambda(A) + \varepsilon$. Покриття існує, бо $\lambda(A) < +\infty$.

Ряд зліва (що є невід’ємним) також збіжний, просто тому що $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$, тож за означення

існування ліміту, $\exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda(A_n) \right| < \varepsilon$.

Покладемо $B = \bigcup_{n=1}^K A_n$, причому зауважимо, що $B \in k(\mathcal{P})$. Залишилося оцінити міру.

$$\lambda(A \setminus B) = \lambda\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^K A_n\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^K A_n\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=K+1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=K+1}^{\infty} \lambda(A_n) < \varepsilon.$$

$$\lambda(B \setminus A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^K A_n \setminus A\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) - \lambda(A) < \varepsilon.$$

$$\lambda(B \triangle A) = \lambda(A \setminus B) + \lambda(B \setminus A) < 2\varepsilon. \quad \blacksquare$$

2.7 Міра Лебега

Беремо універсальну множину \mathbb{R}^d . На неї задаємо півкільце $\mathcal{P}_d = \left\{ \prod_{i=1}^d (a_i, b_i] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$, а зго-

дом на ній установимо міру λ таким чином: $\lambda\left(\prod_{i=1}^d (a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$. За схемою Каратеодорі, продовжимо міру на σ -алгебру \mathcal{S}_d .

Definition 2.7.1 Отримана міра на σ -алгебрі \mathcal{S}_d називається **мірою Лебега**. Позначатимемо за λ_d . Всі множини з \mathcal{S}_d називаються **вимірними за Лебегом**.

Remark 2.7.2 Із цього випливає, що λ_d – міра Лебега – повна.

Proposition 2.7.3 Кожна борельова множина – вимірна за Лебегом.

Proof.

Тобто треба довести, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d$.

Нам уже відомо, що $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{S}_d$, за теоремою про продовження міри до σ -алгебри. Але оскільки \mathcal{S}_d є σ -алгеброю, то тоді $\sigma a(\mathcal{P}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d$. ■

Розглянемо деякі значення міри Лебега на \mathbb{R} .

1. Оберемо одноточкову множину $\{x\}$, що є борельовою, тому звідси $\lambda_1(\{x\}) = 0$. Справді,

$$\lambda_1(\{x\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1\left(\left(x - \frac{1}{n}, x\right]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - x - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

2. Як наслідок, міра будь-якої скінченної або зліченної множини – нулева. Зокрема $\lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$.

3. Розглянемо $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$. Тоді їхні міри збігаються з мірою $\lambda_1((a, b]) = b - a$.

4. Також маємо $\lambda_1(\mathbb{R}) = +\infty$. Дійсно,
$$\lambda_1(\mathbb{R}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1((-n, n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = +\infty.$$

Theorem 2.7.4 Узагальнення вимірності

Задано A – вимірна за Жорданом. Тоді A – вимірна за Лебегом, при цьому $m(A) = \lambda_d(A)$.

TODO: записати доведення

2.8 Регулярність мір

TODO: додати

Чому міри визначаються переважно на спеціальних класах множин

За умовою, що виконується так звана *аксіома вибору*, ми зараз побудуємо особливу підмножину $E \subset \mathbb{R}$, яка НЕ є вимірною за Лебегом. Це так звана **множина Віталі**.

На множині $[0, 1]$ визначимо відношення еквівалентності таким чином:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

Побудуємо множину E ось так: із кожного класу еквівалентності оберемо лише одну точку.

Зауважимо, що всі $q + E, q \in \mathbb{Q}$ – неперетинні. Дійсно, припустимо, що деякі дві множини $q_1 + E, q_2 + E$ перетинаються, тобто знайдеться спільна точка x , для якої $x = q_1 + y_1, x = q_2 + y_2$. Звідси випливає, що $q_1 - q_2 = y_2 - y_1 \in \mathbb{Q}$, тобто елементи y_1, y_2 лежать в одному класі еквівалентності. При цьому $y_1, y_2 \in E$, але ми домовлялися обирати лише одну точку з кожного класу еквівалентності. Тепер нехай $y \in [0, 1]$. Оскільки E має одну точку з кожного класу еквівалентності, то існує $x \in E$, для якого $x \sim y \implies y - x \in \mathbb{Q}$. Позначимо $q = y - x$, тоді звідси $y = q + x \in q + E$. Причому знайдене $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$.

Розглянемо множину $A = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (q + E)$. Ми щойно довели, що кожна точка $y \in [0, 1]$ потрапляє в

одну з множин формату $q + E$. Значить, $[0, 1] \subset A$. Із іншого боку, цілком зрозуміло, що $A \subset [-1, 2]$, просто тому що елементи з E знаходяться на проміжку $[0, 1]$ і плюс раціональне з $[-1, 1]$.

Отже, $[0, 1] \subset A \subset [-1, 2]$.

!Тепер найважливіше: припустимо, що E – вимірна за Лебегом. Тоді множини $q + E$ також вимірні за Лебегом як множини зі зсувом. Отже, звідси

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (q + E)\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \lambda(q + E).$$

У числового ряду $(\mathbb{Q} \cap [-1, 1])$ – зліченна множина) всі доданки однакові. Якщо $\lambda(E) = 0$, то тоді $\lambda(A) = 0$. У протилежному випадку $\lambda(A) = +\infty$. Із іншого боку, міра Лебега – монотонна теж, тож звідси $\lambda([0, 1]) \leq \lambda(A) \leq \lambda([-1, 2])$, тобто отримали $1 \leq \lambda(A) \leq 3$. Отримали суперечність!

Мораль цього всього така: ми не зможемо побудувати таку функцію множин $\lambda: 2^{\mathbb{R}} \rightarrow (-\infty, +\infty]$, яка буде невід’ємною, σ -адитивною та інваріантною відносно зсуву множини. Значить, треба визнати, що $2^{\mathbb{R}}$ необхідно звужувати поступово до класів множин, які були визначені на самому початку.

3 Вимірні функції

3.1 Основні означення

Definition 3.1.1 Вимірним простором називають пару (X, \mathcal{F}) , де X – універсальна множина та \mathcal{F} – σ -алгебра. Всі множини з σ -алгебри будемо називати **вимірними**.

Вимірним простором з мірою називають трійку $(X, \mathcal{F}, \lambda)$, тут λ – міра на \mathcal{F} .

Definition 3.1.2 Задано відображення $f: X \rightarrow Y$, а також два вимірних простори (X, \mathcal{F}_X) , (Y, \mathcal{F}_Y) . Відображення f називається $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -**вимірною**, якщо

$$\forall B \in \mathcal{F}_Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$$

Якщо позначити $f^{-1}(\mathcal{F}_Y) \stackrel{\text{def.}}{=} \{B \in \mathcal{F}_Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X\}$, то означення перепишеться так:

$$f^{-1}(\mathcal{F}_Y) \subset \mathcal{F}_X$$

Theorem 3.1.3 Задано відображення $f: X \rightarrow Y$, а також два вимірних простори (X, \mathcal{F}_X) , (Y, \mathcal{F}_Y) . Нехай \mathcal{H} – клас множин Y , що задовольняє таким умовам:

1. $\forall B \in \mathcal{H} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$;

2. $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{F}_Y$.

Тоді відображення f буде $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -вимірною.

Тобто теорема каже, що не обов'язково перевіряти на всій σ -алгебрі \mathcal{F}_Y , щоб було означення вимірності. Достатньо взяти якісь множини та переконатися в них.

Proof.

Розглянемо множину $\mathcal{L} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X\}$. Зрозуміло, що $\mathcal{L} \supset \mathcal{H}$ за умовою. Якщо доведемо, що \mathcal{L} утворює σ -алгебру, то тоді $\mathcal{L} \supset \sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{F}_Y$. І тоді звідси випливатиме, що $\forall B \in \mathcal{F}_Y : B \in \mathcal{L} \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$, що свідчить про виконання означення $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -вимірності.

Отже, нехай $B_n \in \mathcal{L}, n \geq 1$. Із цього випливає, що $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}_X$, а звідси випливає, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) =$

$$f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \mathcal{F}_X. \text{ А це означає, що } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{L}.$$

Якщо $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$, то тоді $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}_X$, а звідси $f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \in \mathcal{F}_X$, а тому це означає, що $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{L}$.

Нарешті, $f^{-1}(Y) = X$, тому звідси $Y \in \mathcal{L}$.

Отже, ми довели, що \mathcal{L} утворює σ -алгебру. ■

Definition 3.1.4 Задано (X, \mathcal{F}) – вимірний простір.

Функція $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ називається \mathcal{F} -**вимірною**, якщо

$$f \text{ буде } (\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\text{-вимірною}$$

Конкретно в цьому випадку $(X, \mathcal{F}_X) = (X, \mathcal{F})$ та також $(Y, \mathcal{F}_Y) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Corollary 3.1.5 Задано (X, \mathcal{F}) – вимірний простір.

$$\text{Функція } f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ буде } \mathcal{F}\text{-вимірною} \iff \forall a \in \mathbb{R} : \begin{cases} f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{F} \\ f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{F} \\ f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F} \\ f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F} \end{cases}$$

Proof.

\Rightarrow Дано: $f \in \mathcal{F}$ -вимірною, тоді автоматично, за означенням, $(a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, a), (-\infty, a]$ вони вже борельові, а тому виконується права частина.

$$\Leftarrow \text{ Дано: } \forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{F}.$$

Розглянемо клас множин $\mathcal{H} = \{[a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$, уже відомо, що $\forall B \in \mathcal{H} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Залишалася інша умова: $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Нехай $(a, b] \in \mathcal{P}_1$, звідси випливає, що $(a, b] = (a, +\infty) \setminus (b, +\infty)$, але водночас кожний $(x, +\infty) =$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[x + \frac{1}{n}, +\infty \right) \in \sigma a(\mathcal{H})$, тож звідси $(a, b] \in \sigma a(\mathcal{H})$, тож $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \mathcal{P}_1$, але тоді звідси $\sigma a(\mathcal{H}) \supset \sigma a(\mathcal{P}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Для інших пунктів десь аналогічно, а десь навіть простіше.
Отже, за теоремою вище, довели, що f буде \mathcal{F} -вимірною. ■

Надалі користуватимемося позначенням: $f^{-1}((a, +\infty)) \stackrel{\text{def.}}{=} \{f > a\}$. Решта позначень аналогічні.

Definition 3.1.6 Задано (X, ρ) – метричний простір.
Функція $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ називається **борельовою**, якщо

$$f \text{ буде } (\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(\mathbb{R}))\text{-вимірною}$$

Definition 3.1.7 Функція $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, де $A \in \mathcal{S}_d$, називається **вимірною за Лебегом**, якщо

$$f \text{ буде } (\mathcal{S}_d \cap A)\text{-вимірною}$$

Під класом $\mathcal{S}_d \cap A$ мається на увазі всі множини з σ -алгебри \mathcal{S}_d перетнути з A .

Це такий особливий клас функцій, для яких визначені міри Лебега $\lambda_d(f^{-1}(B))$ при $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, адже, за означенням, $f^{-1}(B)$ має бути вимірною за Лебегом на множині A .

Example 3.1.8 Будь-яка борельова функція $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ буде вимірною за Лебегом.

3.2 Дії з вимірними функціями

Proposition 3.2.1 Задані $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ – два відображення та (X, \mathcal{F}_X) , (Y, \mathcal{F}_Y) , (Z, \mathcal{F}_Z) – два вимірних простори. Відомо, що $f \in (\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$ -вимірною та $g \in (\mathcal{F}_Y, \mathcal{F}_Z)$ -вимірною. Тоді $g \circ f$ буде $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Z)$ -вимірною.

Proof.

Нехай $B \in \mathcal{F}_Z$. Зауважимо, що $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. За умовою твердження, $g^{-1}(B) \in \mathcal{F}_Y$ в силу вимірності g , але тоді $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{F}_X$ в силу вимірності f . ■

Corollary 3.2.2 Задано (X, \mathcal{F}_X) – вимірний простір та функції $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ – всі \mathcal{F}_X -вимірні. Маємо функцію $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – борельова. Тоді $h(x) = g(f_1(x), \dots, f_d(x))$ буде \mathcal{F}_X -вимірною.

Proof.

Розглянемо відображення $\vec{f}: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ та мається уже $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, тоді наша функція $h = g \circ \vec{f}$. Залишилося довести, що \vec{f} буде $(\mathcal{F}_X, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ -вимірною. Тоді вже за твердженням вище, ми отримаємо h , що буде \mathcal{F}_X -вимірною.

Нехай \mathcal{P}_d – наш клас множин, уже відомо, що $\sigma a(\mathcal{P}_d) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (насправді, навіть рівні). Залишилося показати, що $\forall B \in \mathcal{P}_d: \vec{f}^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$.

Значить, нехай $B \in \mathcal{P}_d$, тобто $B = \bigcap_{i=1}^d (a_i, b_i]$, а тепер розглянемо його прообраз.

$\vec{f}^{-1}(B) = \{x \in X \mid \vec{f}(x) \in B\} = \{x \in X \mid f_1(x) \in (a_1, b_1], \dots, f_d(x) \in (a_d, b_d]\} = f_1^{-1}((a_1, b_1]) \cap \dots \cap f_d^{-1}((a_d, b_d])$. Але оскільки кожна $f_i \in \mathcal{F}_X$ -вимірною, то звідси всі ці прообрази $f_i^{-1}((a_i, b_i]) \in \mathcal{F}_X$. Але тоді звідси $\vec{f}^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$. ■

Theorem 3.2.3 Задані $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ – \mathcal{F} -вимірними, тож нехай $c \in \mathbb{R}$. Тоді такі функції, як-от: $f_1 + f_2$, cf_1 , $f_1 \cdot f_2$, $|f_1|$, $\max\{f_1, f_2\}$, $\min\{f_1, f_2\}$, $\frac{f_1}{f_2} \mathbb{1}_{\{f_2 \neq 0\}}$ – всі вони будуть \mathcal{F} -вимірними також.

Proof.

Окрім останньої функції, всі вони випливають з наслідка вище. Покажу не першому прикладі. Маємо $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$, що \mathcal{F} -вимірні за умовою. Розглянемо відображення $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ таким чином: $g(y_1, y_2) = y_1 + y_2$. Зрозуміло, що це – неперервна, а тому буде борельовою. Таким чином, $g(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) + f_2(x)$ буде \mathcal{F} -вимірною.

Зараз окремо розглянемо функцію $f = \frac{f_1}{f_2} \mathbb{1}_{\{f_2 \neq 0\}}$. Оберемо $a \in \mathbb{R}$ та дослідимо $\{f < a\}$.

Запишемо її таким чином: $\{f < a\} = \{f < a, f_2 < 0\} \cup \{f < a, f_2 = 0\} \cup \{f < a, f_2 > 0\}$.

Зауважимо, що $\{f < a, f_2 < 0\} = \{f_1 - af_2 > 0, f_2 < 0\}$. Зокрема оскільки f_1, f_2 – \mathcal{F} -вимірні, то тоді звідси $f_1 - af_2$ також \mathcal{F} -вимірні, то звідси, за наслідком, $\{f < a, f_2 < 0\} \in \mathcal{F}$.

Так само доводиться $\{f < a, f_2 > 0\} = \{f_1 - af_2 < 0, f_2 > 0\} \in \mathcal{F}$.

Остання множина $\{f < a, f_2 = 0\} = \{0 < a\} = \begin{cases} \emptyset \\ X \end{cases} \in \mathcal{F}$. ■

Corollary 3.2.4 За умовою, що $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ -вимірними, $\{f_1 < f_2\}, \{f_1 > f_2\}, \{f_1 = f_2\} \in \mathcal{F}$.

Вказівка: розглянути $f = f_2 - f_1$.

Theorem 3.2.5 Задані функції $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1$ – всі $\in \mathcal{F}$ -вимірними. Тоді

$\inf_{n \geq 1} f_n(x), \sup_{n \geq 1} f_n(x), \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ – всі вони будуть \mathcal{F} -вимірними. Додатково, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

буде \mathcal{F} -вимірною за умовою, що ліміт існує $\forall x \in X$.

Proof.

$$g^{(1)}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{n \geq 1} f_n(x).$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : \{g^{(1)} \geq a\} = \{x \in X \mid g^{(1)}(x) \geq a\} = \{x \in X \mid f_n(x) \geq a, n \geq 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq a\} \in \mathcal{F}.$$

$$g^{(2)}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{n \geq 1} f_n(x).$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : \{g^{(2)} \leq a\} = \{x \in X \mid g^{(2)}(x) \leq a\} = \{x \in X \mid f_n(x) \leq a, n \geq 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq a\} \in \mathcal{F}.$$

$$g^{(3)}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Насправді, зауважимо, що $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k(x)$. Далі користуємося першими двома щойно доведеними.

$$g^{(4)}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Аналогічно варто зауважити, що $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k(x)$.

$$g^{(5)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Якщо границя існує, то звідси $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. А далі користуємось щойно доведеним. ■

Corollary 3.2.6 За умовою, що $f_n \in \mathcal{F}$ -вимірними, $\{x \in X \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\} \in \mathcal{F}$.

3.3 Наближення вимірних функцій

Definition 3.3.1 Функція $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ називається **простою**, якщо вона приймає скінченне число значень.

Нехай маємо $p(x) = a_1, x \in A_1, \dots, p(x) = a_n, x \in A_n$. Причому $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Тоді ми можемо просту функцію переписати в іншому вигляді:

$$p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

Зрозуміло, що якщо довільна функція приймає вигляд формули вище, то вона – проста.

Lemma 3.3.2 Задано $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ – проста функція, у нашому випадку $p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$.

p – \mathcal{F} -вимірна функція $\iff \forall k = \overline{1, n} : A_k \in \mathcal{F}$.

Theorem 3.3.3 Задано функцію $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – $\in \mathcal{F}$ -вимірною, причому $f \geq 0$. Тоді існує послідовність простих функцій $\{p_n: X \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1\}$ – причому зростаюча, всі невід’ємні та \mathcal{F} -вимірні – для якої $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$ при всіх $x \in X$.

Proof.

Ми задамо наступні прості функції ось таким чином:

$$p_1(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 1 \\ \frac{k}{2}, & f(x) \in \left(\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right], \text{ тут } k = \overline{0, 1}. \end{cases}$$

$$p_2(x) = \begin{cases} 2, & f(x) > 2 \\ \frac{k}{2^2}, & f(x) \in \left(\frac{k}{2^2}, \frac{k+1}{2^2}\right], \text{ тут } k = \overline{0, 7}. \end{cases}$$

$$\vdots$$

Тобто для p_1 ділимо по OY відрізок $[0, 1]$ на $\frac{1}{2}$; для p_2 ділимо по OY відрізок $[0, 2]$ на $\frac{1}{4} \dots$ З'ясуємо, чому це справді прості функції. Тому що можна це записати ось так:

$$p_1(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{\{f(x) > 1\}}(x) + \sum_{k=0}^{2^1} \frac{k}{2} \mathbb{1}_{\{f(x) \in (\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}]\}}(x).$$

$$p_2(x) = 2 \cdot \mathbb{1}_{\{f(x) > 2\}}(x) + \sum_{k=0}^{2^2} \frac{k}{2^2} \mathbb{1}_{\{f(x) \in (\frac{k}{2^2}, \frac{k+1}{2^2}]\}}(x).$$

$$\vdots$$

Тут скінченні значення та всі множини на індикаторах неперетинні.

Всі вони будуть невід'ємними – це цілком зрозуміло. Всі вони також будуть вимірними, тому що $f \in \mathcal{F}$ -вимірною; а це означає, що $\{f > 1\} \in \mathcal{F}$ та $\left\{f \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right\} = \left\{f > \frac{k}{2^n}\right\} \cap \left\{f \leq \frac{k+1}{2^n}\right\} \in \mathcal{F}$.

Найскладніше довести монотонне зростання. Покажу, що $p_2 \leq p_3$, для інших аналогічно.

Якщо x беремо такі, що $f(x) > 2$, тоді у функції p_3 маємо $p_3(x) = \frac{k}{2^3}$, але $k > 2 \cdot 2^3$; або $p_3(x) = 3$ при $f(x) > 3$. Водночас маємо $p_2(x) = 2$ у двох випадках. Тоді $p_2 \leq p_3$, зважаючи два випадки.

Якщо x беремо такі, що $f(x) \leq 2$, тоді розглядається один $f(x) \in \left(\frac{k}{2^2}, \frac{k+1}{2^2}\right]$. Запишемо так:

$$\left(\frac{k}{2^2}, \frac{k+1}{2^2}\right] = \left(\frac{2k}{2^3}, \frac{2k+1}{2^3}\right] \cup \left(\frac{2k+1}{2^3}, \frac{2k+2}{2^3}\right].$$

Із всього цього випливає, що $p_2(x) = \frac{k}{2^2}$, а також $p_3(x) = \frac{2k}{2^3}$ або $p_3(x) = \frac{2k+1}{2^3}$. У двох випадках маємо $p_2 \leq p_3$.

Нарешті, доведемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$. Заздалегідь зауважимо, що $p_n \leq f$ за побудовою.

Нехай спочатку $x \in X$ такий, що $f(x) = +\infty$. Тоді в цій точці $\{p_n(x), n \geq 1\}$ не є обмеженою та в силу зростання p_n матимемо $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = +\infty = f(x)$. Точніше кажучи, $\{p_n(x) = n, n \geq 1\}$.

Нехай тепер $x \in X$ такий, що $f(x) < +\infty$. Тоді зауважимо, що має існувати номер n , для якого $f(x) < n$, а значить, $f(x) \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$. Через нерівність це можна записати як $\frac{k}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^n} \implies p_n(x) \leq f(x) \leq p_n(x) + \frac{1}{2^n}$. Для нашого випадку $f(x) - \frac{1}{2^n} \leq p_n(x) \leq f(x)$. Спрямовуючи $n \rightarrow \infty$, отримаємо бажане. ■

Для довільної функції $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ надалі користуватимемося такими позначеннями:

$$f_+(x) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x) \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}}(x) \stackrel{\text{abo}}{=} \max\{f(x), 0\}.$$

$$f_-(x) \stackrel{\text{def.}}{=} -f(x) \mathbb{1}_{\{f < 0\}}(x) \stackrel{\text{abo}}{=} -\min\{f(x), 0\}.$$

Якщо функція f буде \mathcal{F} -вимірними, то всі ці функції f_+, f_- будуть також \mathcal{F} -вимірними. Також зауважимо, що f_+, f_- – обидва невід'ємні функції, а також

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x).$$

Corollary 3.3.4 Задано функцію $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – \mathcal{F} -вимірною. Тоді існує послідовність простих функцій $\{p_n: X \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1\}$ – всі \mathcal{F} -вимірні – для якої $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$ при всіх $x \in X$. Причому $|p_n| \leq |f|$.

Proof.

Розпишемо функцію $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$. Обидві функції є невід'ємними та \mathcal{F} -вимірними, тому за попередньою теоремою, існують відповідно $\{p_n\}, \{q_n\}$ – невід'ємні, \mathcal{F} -вимірні та монотонно зростаючі послідовності простих функцій, для яких $p_n \rightarrow f_+, q_n \rightarrow f_-$.

Розглянемо послідовність $\{p_n(x) - q_n(x), n \geq 1\}$. Тоді $p_n - q_n \rightarrow f_+ - f_- = f$.
Нарешті, $|p_n - q_n| \leq |p_n| + |q_n| \leq f_+ + f_- = |f|$. ■

3.4 Еквівалентні функції

Definition 3.4.1 Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та функції $f, g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Вони називаються **еквівалентними відносно міри** λ , якщо

$$\exists N \subset X : \lambda(N) = 0 : \forall x \in X \setminus N : f(x) = g(x)$$

Позначення: $f \sim g \pmod{\lambda}$ або $f = g \pmod{\lambda}$.

Remark 3.4.2 У випадку, коли $f, g \in \mathcal{F}$ -вимірними, то завжди існує множина $N = \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$, для якої $\lambda(N) = 0$. (TODO: обміржувати)

Example 3.4.3 Зокрема розглянемо функцію Діріхле $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Відносно міри Лебега на \mathbb{R} отримаємо $\mathfrak{D} \sim 0 \pmod{\lambda_1}$. Треба просто покласти в цьому випадку $N = \mathbb{Q}$, для якої $\lambda(N) = 0$.

Theorem 3.4.4 Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір із мірою та функції $f, g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Відомо, що $f \in \mathcal{F}$ -вимірною, також $f \sim g \pmod{\lambda}$, і головне λ – повна міра. Тоді g також \mathcal{F} -вимірна.

Proof.

По-перше, за умовою, існує $N \subset X$, для якої $\lambda(N) = 0$ та $f(x) = g(x)$ при $x \in X \setminus N$.

Нехай $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$, тоді нам треба розглянути $g^{-1}(B)$.

$$g^{-1}(B) = \{x \in X \mid g(x) \in B\} = \{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) \neq f(x)\} \cup \{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) = f(x)\}.$$

Кожну з двох множин розглянемо окремо.

$\{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) \neq f(x)\} \subset \{x \in X \mid g(x) \neq f(x)\} \subset N$. Оскільки $\lambda(N) = 0$ та λ – повна міра, то звідси $\{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) \neq f(x)\} \in \mathcal{F}$.

$$\{x \in X \mid g(x) \in B, g(x) = f(x)\} = \{x \in X \mid f(x) \in B, g(x) = f(x)\} =$$

$$= \{x \in X \mid f(x) \in B\} \setminus \{x \in X \mid f(x) \in B, f(x) \neq g(x)\} = f^{-1}(B) \setminus \{x \in X \mid f(x) \in B, f(x) \neq g(x)\}.$$

Щодо останньої множини, аналогічно через повноту міри $\{x \in X \mid f(x) \in B, f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{F}$.

Також в силу \mathcal{F} -вимірності f , маємо $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Сумуючи це все, отримали $g^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. ■

Definition 3.4.5 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та функції $f, f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ та $n \geq 1$. Функції f_n **збігається до f майже скрізь відносно міри** λ , якщо

$$\exists N \subset X : \lambda(N) = 0 : \forall x \in X \setminus N : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Позначення: $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$.

Example 3.4.6 Маємо функції $f_n(x) = \sin^n x$ при $x \in \mathbb{R}$. Відносно міри Лебега на \mathbb{R} маємо $f_n \rightarrow 0 \pmod{\lambda_1}$. Просто покладемо $N = \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

Theorem 3.4.7 Єдиність збіжності майже скрізь

Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та відомо, що $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$, $f_n \rightarrow g \pmod{\lambda}$. Тоді $f \sim g \pmod{\lambda}$.

Proof.

Маємо множини N_1, N_2 , для яких $\lambda(N_1) = \lambda(N_2) = 0$, а також $\forall x \in X \setminus N_1 : f_n \rightarrow f$ та $\forall x \in X \setminus N_2 : f_n \rightarrow g$ при $n \rightarrow \infty$. Далі розглянемо множину $N = N_1 \cup N_2$. Тоді звідси випливає, що $\lambda(N) = 0$, а також $f_n \rightarrow f, f_n \rightarrow g$ одночасно. У силу єдиності границі, $f = g$ при $x \in X \setminus N$. Отже, $f \sim g \pmod{\lambda}$. ■

Theorem 3.4.8 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та відомо, що $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$, а також $f \sim g \pmod{\lambda}$. Тоді $f_n \rightarrow g \pmod{\lambda}$.

Приблизно такі самі кроки доведення, що в попередній теоремі.

Theorem 3.4.9 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та відомо, що $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$, всі f_n є \mathcal{F} -вимірними і головне λ – повна міра. Тоді f буде \mathcal{F} -вимірною.

Proof.

Маємо $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$, тобто $\exists N \subset X : \lambda(N) = 0$ та $f_n \rightarrow f$ для всіх $x \in X \setminus N$.

Розглянемо функції $\tilde{f}_n(x) = f_n(x)\mathbb{1}_{X \setminus N}(x)$ та $\tilde{f}(x) = f(x)\mathbb{1}_{X \setminus N}(x)$. Зауважимо, що $f_n \sim \tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f} \sim f$.

Раз всі $f_n \in \mathcal{F}$ -вимірними, то тоді кожний $\tilde{f}_n \in \mathcal{F}$ -вимірним в силу повноти λ . Але тоді $\tilde{f} \in$ також \mathcal{F} -вимірною як границя. Нарешті, f буде \mathcal{F} -вимірною в силу повноти λ . ■

3.5 Теорема Єгорова

Theorem 3.5.1 Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір із мірою, причому $\lambda(X) < +\infty$. Задані функції $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – всі вони \mathcal{F} -вимірні, причому $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_\varepsilon \in \mathcal{F} : \lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon, f_n \xrightarrow{\lambda} f$ на $X \setminus A_\varepsilon$ при $n \rightarrow \infty$.

Proof.

Маємо $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$, тобто звідси $\exists N : \lambda(N) = 0 : \forall x \in X \setminus N : f_n \rightarrow f$. А це означає наступне: $\forall x \in X \setminus N : \forall \varepsilon > 0 : \exists k \geq 1 : \forall n \geq k : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Мовою множин це все можна записати таким чином:

$$X \setminus N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

$$N \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Зауважимо, що права множина буде вимірною на \mathcal{F} в силу того, що $f_n, f \in \mathcal{F}$ -вимірними. Оскільки

$\lambda(N) = 0$, то звідси $\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$. Але також варто зауважити, що по-

слідовність множин $\left\{\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, k \geq 1\right\}$ буде спадати. Оскільки $\lambda(X) < +\infty$, тоді

$$\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Тобто звідси для чисел $\frac{\delta}{2^j}$ маємо $\exists k_j \geq 1 : \lambda\left(\bigcup_{n=k_j}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j}\right\}\right) < \frac{\delta}{2^j}$ для всіх $j \geq 1$.

Нарешті, покладемо множину $A_\delta = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=k_j}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j}\right\}$. Оцінімо його міру.

$$\lambda(A_\delta) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda\left(\bigcup_{n=k_j}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j}\right\}\right) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^j} = \delta.$$

Далі $X \setminus A_\delta = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=k_j}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j}\right\}$. Це означає наступне:

$$\forall j \geq 1 : \exists k_j : \forall n \geq k_j : \forall x \in X \setminus A_\delta : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j}.$$

Це означає, що $\forall n \geq k_j : \sup_{x \in X \setminus A_\delta} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. І це в точності означає, що $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ на $X \setminus A_\varepsilon$ при $n \rightarrow \infty$. ■

3.6 Збіжність за мірою

Definition 3.6.1 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та функції $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ та $n \geq 1$ – всі вони \mathcal{F} -вимірні.

Функція f_n збігається до f за мірою λ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

Позначення: $f_n \xrightarrow{\lambda} f$.

Theorem 3.6.2 Єдиність збіжності за мірою

Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір та відомо, що $f_n \xrightarrow{\lambda} f, f_n \xrightarrow{\lambda} g$. Тоді $f \sim g \pmod{\lambda}$.

Proof.

За умовою, маємо $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Зауважимо, що $\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in X : |g(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Звідси при $n \rightarrow \infty$ отримаємо наступне:

$$\lambda\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \leq \lambda\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \lambda\left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \rightarrow 0.$$

Отже, $\forall \varepsilon > 0 : \lambda\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = 0$.

Зокрема при $\varepsilon = \frac{1}{k}$ маємо $\lambda\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\} = 0$, це дозволить сказати наступне:

$$\lambda\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\} = 0.$$

Значить, знайшли множину $N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$, для якої $\forall x \in X \setminus N : f(x) = g(x)$, при цьому $\lambda(N) = 0$. За означенням, $f \sim g \pmod{\lambda}$. ■

Theorem 3.6.3 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та відомо, що $f_n \xrightarrow{\lambda} f$, а також $f \sim g \pmod{\lambda}$. Тоді $f_n \xrightarrow{\lambda} g$.

Вправа: довести.

Remark 3.6.4 У нас вже є два види збіжності: майже скрізь відносно міри та за мірою. Але

$$f_n \rightarrow f \pmod{\lambda} \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\lambda} f.$$

$$f_n \xrightarrow{\lambda} f \not\Rightarrow f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}.$$

Нижче будуть відповідні приклади, які покажуть, що прямого зв'язку, взагалі-то кажучи, нема.

Example 3.6.5 Розглянемо $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x)$, а також нехай λ_1 – міра Лебега на \mathbb{R} .

$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x) \rightarrow 0 = f \pmod{\lambda_1}$ (насправді, тут збіжність всюди, не просто майже скрізь)

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x) \not\xrightarrow{\lambda_1} 0 = f, \text{ оскільки } \lambda_1\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geq 1\} = \lambda_1\{x \in [n, n+1]\} = 1 \not\rightarrow 0.$$

Example 3.6.6 Розглянемо знову λ_1 – міра Лебега на \mathbb{R} , але вже такі функції:

$$f_1(x) = \mathbb{1}_{[0, 1]}(x)$$

$$f_2(x) = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \quad f_3(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}(x)$$

$$f_4(x) = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{4}]}(x) \quad f_5(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]}(x) \quad f_6(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}(x) \quad f_7(x) = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4}, 1]}(x)$$

⋮

У нас на кожному рівні відрізок $[0, 1]$ ділиться на $\frac{1}{2^n}$ частин.

$f_n(x) \xrightarrow{\lambda_1} 0$, тому що $\forall 0 < \varepsilon \leq 1$ маємо таку послідовність:

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_1(x)| \geq \varepsilon\} = 1$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_2(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_3(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_4(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_5(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_6(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_7(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_7(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_7(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_7(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_7(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_7(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_7(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_7(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{4}$$

Тобто мається $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$, яка повільно, але прямує до нуля. Тож $\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$.

При $\varepsilon > 1$ зрозуміло, що $\lambda_1\{x \in [0, 1] : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} = 0 \rightarrow 0$.

$f_n(x) \not\rightarrow 0 \pmod{\lambda_1}$. Ми доведемо, що взагалі $f_n(x) \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Нехай $x \in [0, 1]$, тоді можна відокремити підпослідовність функцій в т. x , щоб була стаціонарна

послідовність $\{1, 1, \dots\}$, яка не є збіжною до нуля. Просто тому що $x \in [0, 1] \implies x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ або $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \implies x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ або $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ або $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ або $x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \implies \dots$

3.7 Основні твердження, що пов'язують обидві збіжності. Фундаментальність за мірою

Theorem 3.7.1 Теорема Лебега про зв'язок між збіжностями

Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір із мірою, причому $\lambda(X) < +\infty$. Задані функції $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$ – всі вони \mathcal{F} -вимірні, причому $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$. Тоді $f_n \xrightarrow{\lambda} f$.

Proof.

Маємо $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$, тобто звідси $\exists N: \lambda(N) = 0: \forall x \in X \setminus N: f_n \rightarrow f$. А це означає наступне: $\forall x \in X \setminus N: \forall \varepsilon > 0: \exists k \geq 1: \forall n \geq k: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Мовою множин це все можна записати таким чином:

$$X \setminus N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

$$N \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Зауважимо, що права множина буде вимірною на \mathcal{F} в силу того, що $f_n, f \in \mathcal{F}$ -вимірними. Оскільки $\lambda(N) = 0$, то звідси $\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$. Але також варто зауважити, що по-

слідовність множин $\left\{\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, k \geq 1\right\}$ буде спадати. Оскільки $\lambda(X) < +\infty$, тоді

$$\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0. (*)$$

Це означає, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda\{x: |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$.

Це в точності $f_k \xrightarrow{\lambda} f$. ■

Remark 3.7.2 Якщо подивитися уважно, тут початок доведення повністю збігається з початком доведення теорема Єгорова до моменту (*). Тому тут треба лише акцентувати увагу на останні міркування.

Definition 3.7.3 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та функції $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ та $n \geq 1$ – всі вони \mathcal{F} -вимірні.

Послідовність f_n називається **фундаментальною за мірою λ** , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N: \lambda\{x \in X: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} < \delta$$

Можна по-іншому це записати:

$$\forall \varepsilon > 0: \lambda\{x \in X: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty$$

Proposition 3.7.4 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та послідовність f_n , що збіжна за мірою λ . Тоді f_n – фундаментальна за мірою λ .

Proof.

Маємо $f_n \xrightarrow{\lambda} f$, тобто $\forall \delta > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq N:$

$$\lambda\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \delta \quad \lambda\{x \in X: |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \delta.$$

Аналогічним чином можна зауважити наступне:

$$\{x \in X: |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in X: |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Звідси легко випливає, що $\lambda\{x \in X: |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} < \delta$. ■

Theorem 3.7.5 Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та послідовність f_n , що фундаментальна за мірою λ . Тоді існує \mathcal{F} -вимірна функція f та підпослідовність f_{n_k} , для яких

$$f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}, k \rightarrow \infty$$

$$f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f, k \rightarrow \infty.$$

Proof.

I. Спочатку знайдемо підпослідовність $\{f_{n_k}\}$, яка нам буде необхідною.

Маємо f_n – фундаментальна, тобто $\forall \delta > 0 : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \lambda\{x : |f_n - f_m| \geq \varepsilon\} < \delta$.

Зокрема оберемо $\varepsilon = \delta = \frac{1}{2^k}$, тоді звідси $\exists N_k : \lambda\left\{x : |f_{N_k} - f_{N_{k+1}}| \geq \frac{1}{2^k}\right\} < \frac{1}{2^k}$, ми будемо брати N_k так, щоб вона строго зростала. Фундаментальну послідовність $\{f_{N_k}, k \geq 1\}$ з умовою $\exists N_k : \lambda\left\{x : |f_{N_k} - f_{N_{k+1}}| \geq \frac{1}{2^k}\right\} < \frac{1}{2^k}$ ми знайшли.

II. Далі знайдемо функцію, яка буде необхідною.

Розглянемо множину $M = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k}\right\}$. Зауважимо, що $\lambda(M) = 0$, оскільки

$$\lambda(M) \leq \lambda\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \lambda\left\{x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k}\right\} < \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j-1}} \rightarrow 0.$$

Далі візьмемо доповнення до множини N – отримаємо наступне:

$$X \setminus M = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} \left\{x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| < \frac{1}{2^k}\right\}.$$

Зараз доведемо, що для кожної $x \in X \setminus N$ послідовність $\{f_{N_k}(x), k \geq 1\}$ буде фундаментальною.

Оберемо $k, l \geq j$, тоді звідси маємо:

$$|f_{N_k}(x) - f_{N_l}(x)| \leq |f_{N_k}(x) - f_{N_{k+1}}(x)| + |f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_{k+2}}(x)| + \dots + |f_{N_{l-1}}(x) - f_{N_l}(x)| <$$

$$< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{l-1}} \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots = \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty.$$

Значить, $\{f_{N_k}(x), k \geq 1\}$ буде збіжною при кожному $x \in X \setminus M$. Далі просто зафіксуємо функцію

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{N_k}(x), & x \in X \setminus M \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{N_k}(x) \cdot \mathbb{1}_{X \setminus M}(x)).$$

Це – та сама шукана \mathcal{F} -вимірна функція, як добуток першої вимірної (як границя) та другої вимірної.

III. Для цієї функції доведемо всі збіжності.

Зрозуміло, що $f_{N_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$, за побудовою f та $\lambda(M) = 0$.

Зафіксуємо $\varepsilon, \delta > 0$. Оберемо такі $j \geq 1$, щоб $\frac{1}{2^{j-1}} < \min\{\varepsilon, \delta\}$. Розглянемо тепер ось таку множину

$$\tilde{M} = \bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k}\right\}. \text{ Оскільки } M \subset \tilde{M}, \text{ то звідси } X \setminus M \supset X \setminus \tilde{M}, \text{ а тому зокрема}$$

$$\forall x \in X \setminus \tilde{M} : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_{N_k}(x) = f(x).$$

Зауважимо, що виконується наступне:

$$|f_{N_k}(x) - f(x)| = \lim_{l \rightarrow \infty} |f_{N_k}(x) - f_{N_l}(x)| \stackrel{\text{див. II}}{\leq} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon.$$

Значить, $\forall x \in X \setminus \tilde{M} : |f_{N_k}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Мовою множин це означає, що

$$X \setminus \tilde{M} \subset \{x : |f_{N_k}(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

$$\tilde{M} \supset \{x : |f_{N_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

$$\text{Але тоді } \lambda\{x : |f_{N_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \lambda(\tilde{M}) = \lambda\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{x : |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) \stackrel{\text{див. II}}{<} \frac{1}{2^{j-1}} < \delta.$$

$$\text{Висновок: } f_{N_k} \xrightarrow{\lambda} f. \quad \blacksquare$$

Corollary 3.7.6 Теорема Pica

Задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та послідовність $f_n \xrightarrow{\lambda} f$. Тоді існує підпослідовність f_{n_k} , для якої $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$.

Proof.

Збіжна за мірою означає фундаментальність за мірою. За теоремою вище, існує підпослідовність f_{n_k} , для якої $f_{n_k} \rightarrow g \pmod{\lambda}$.

Зрозуміло, що $f_n \xrightarrow{\lambda} f \implies f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$. Також за теоремою вище, $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} g$. А за єдиністю, $f \sim g \pmod{\lambda}$, але це тоді означає, що $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$. ■

Corollary 3.7.7 Послідовність f_n фундаментальна за мірою $\lambda \iff f_n$ збіжна за мірою λ .

Proof.

⊆ Уже було.

⊇ Дано: f_n – фундаментальна за мірою λ . Тоді за теоремою вище, існує підпослідовність $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$. Нехай $\varepsilon > 0$, тоді за аналогічними міркуваннями (ми вже цю оцінку не раз показували):

$$\lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \lambda\left\{x \in X : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \lambda\left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Якщо $n \rightarrow \infty$, то автоматично $n_k \rightarrow \infty$, а в цьому випадку $\lambda\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Отже, $f_n \xrightarrow{\lambda} f$. ■

Theorem 3.7.8 Теорема Лузіна

Задано $A = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k]$ та λ – міра Лебега. Маємо функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ – вимірну за Лебегом. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists g: A \rightarrow \mathbb{R}, g \in C(A) : \lambda\{x \in A : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon.$$

Без доведення.

4 Інтеграл Лебега

Надалі всюди я буду мати $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір із мірою, якщо ніде додатково це не буде вказано.

4.1 Первинні означення

Definition 4.1.1 Задано $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ – проста, невід’ємна та \mathcal{F} -вимірна функція, тобто $p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ при $\bigcup_{k=1}^n A_k = X$. Також нехай задано $A \in \mathcal{F}$.

Інтегралом Лебега від простої, невід’ємної функції p на множині A називають число:

$$\int_A p d\lambda = \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap A)$$

Якщо міра буде нескінченність, то ми кладемо $a \cdot +\infty = +\infty$ при $a \neq 0$, а також $0 \cdot +\infty = 0$.

Бувають ще позначають як $\int_A p(x) d\lambda(x)$ або навіть $\int_A p(x) \lambda(dx)$.

Remark 4.1.2 Нам треба переконатися, що інтеграл Лебега не залежить від представлення простої функції. Тому що, наприклад, я можу записати $p(x) = 2\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + 4\mathbb{1}_{(1,2]}(x)$, але можу записати як $p(x) = 2\mathbb{1}_{[0,0.5)} + 2\mathbb{1}_{[0.5,1)} + 4\mathbb{1}_{(1,2]}(x)$ – одна й та сама проста функція, але представлення різне.

Proof.

Розглянемо два представлення простої, невід’ємної \mathcal{F} -вимірної функції:

$$p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x) \quad p(x) = \sum_{i=1}^j b_i \mathbb{1}_{B_i}(x) \quad \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{i=1}^j B_i = X.$$

Для множини A зауважимо, що виконується рівність:

$$A = \bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A) \quad A = \bigcup_{i=1}^j (B_i \cap A).$$

Далі для кожного представлення розпишемо інтеграл Лебега:

$$\begin{aligned} \int_A p d\lambda &= \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap A) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A) \\ \int_A p d\lambda &= \sum_{i=1}^j b_i \lambda(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^j \sum_{k=1}^n b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A) \end{aligned}$$

Якщо $A_k \cap B_i = \emptyset$, то тоді в цьому випадку $\lambda(A_k \cap B_i \cap A) = 0$. Тому надалі розглядаються випадки $A_k \cap B_i \neq \emptyset$. У цьому випадку беремо $x \in A_k \cap B_i$, звідси маємо $p(x) = a_k = b_i$. Помножимо обидві частини на $\lambda(A_k \cap B_i \cap A)$ – отримаємо $a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A) = b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A)$, а далі просумуємо по k, i – отримаємо рівність двох інтегралів. ■

Proposition 4.1.3 Властивості інтеграла Лебега від простої невід’ємної функції

Справедливі такі пункти:

- 1) Нехай p_1, p_2 – прості невід’ємні \mathcal{F} -вимірні функції, $p_1 \leq p_2$. Також $A \in \mathcal{F}$. Тоді $\int_A p_1 d\lambda \leq \int_A p_2 d\lambda$;
- 2) Нехай $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset$. Також p – проста невід’ємна \mathcal{F} -вимірна функція. Тоді $\int_{A \cup B} p d\lambda = \int_A p d\lambda + \int_B p d\lambda$;
- 3) Нехай $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B$. Також p – проста невід’ємна \mathcal{F} -вимірна функція. Тоді $\int_A p d\lambda \leq \int_B p d\lambda$;

Proof.

Доведемо виконання кожної властивості:

- 1) Маємо прості функції $p_1(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$, $p_2(x) = \sum_{i=1}^j b_i \mathbb{1}_{B_i}(x)$, причому $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{i=1}^j B_i = X$.

Аналогічними міркуваннями, що в зауваженні вище, розпишемо інтеграли Лебега:

$$\int_A p_1 d\lambda = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A);$$

$$\int_A p_2 d\lambda = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A).$$

Аналогічно розглянемо лише випадки $A_k \cap B_i \neq \emptyset$. Беремо $x \in A_k \cap B_i$, звідси $p_1(x) = a_k \leq b_i = p_2(x)$, просто тому що $p_1 \leq p_2$. Далі множимо на міру $\lambda(A_k \cap B_i \cap A)$ та сумуємо по k, i – отримали бажану нерівність.

2) Випливає з того, що λ – адитивна функція множин.

3) Зауважимо, що якщо $A \subset B$, то звідси $B = A \sqcup (B \setminus A)$. За властивістю 2), маємо

$$\int_B p d\lambda = \int_A p d\lambda + \int_{B \setminus A} p d\lambda \geq \int_A p d\lambda.$$

■

Definition 4.1.4 Задано $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – невід’ємна та \mathcal{F} функція. Також нехай задано $A \in \mathcal{F}$. Інтегралом Лебега від невід’ємної функції f на множині A називають число

$$\int_A f d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p d\lambda$$

Множина $K(p) = \{p: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ – прості невід’ємні та } \mathcal{F}\text{-вимірні} : p \leq f\}$.

Remark 4.1.5 $K(f) \neq \emptyset$, тому що принаймні нульова функція $0 \in K(f)$.

Remark 4.1.6 Перше означення узгоджується з другим означенням, якщо в другому означенні взяти p – невід’ємну \mathcal{F} -вимірну функцію, але вже просту.

Proof.

За другим означенням інтеграла Лебега, маємо наступне:

$$\int_A p d\lambda = \sup_{q \in K(p)} \int_A q d\lambda \geq \int_A p d\lambda \quad (\text{нерівність за означенням супремума, причому } p \in K(p)).$$

Тепер оберемо $q \in K(p)$, тут q – проста невід’ємна \mathcal{F} -вимірна функція з умовою $q \leq p$. Тоді за властивістю 1) просто інтеграла Лебега, $\int_A q d\lambda \leq \int_A p d\lambda$. Але оскільки це виконано для всіх

$$q \in K(p), \text{ то зокрема для } \sup_{q \in K(p)} \int_A q d\lambda = \int_A p d\lambda \leq \int_A p d\lambda.$$

$$\text{Разом отримали рівність } \int_A p d\lambda = \int_A p d\lambda.$$

■

Definition 4.1.7 Задано $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – \mathcal{F} -вимірна функція. Також нехай задано $A \in \mathcal{F}$. Інтегралом Лебега від функції f на множині A називають число

$$\int_A f d\lambda = \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda,$$

якщо хоча б один з інтегралів скінченний.

У цьому випадку $f = f_+ - f_-$, причому f_+, f_- – невід’ємні функції.

Функція f називається **інтегрованою за Лебегом на множині A** , якщо кожний обидва інтеграли в правій частині – скінченні.

Позначення: $f \in L(A, \lambda)$.

Remark 4.1.8 Друге означення узгоджується з третім означенням, якщо в третьому означенні взяти f – \mathcal{F} -вимірну функцію, але вже невід’ємну.

Proof.

Дійсно, коли f – невід’ємна, то звідси $f_+ = f$, а також $f_- = 0$. Тож звідси

$$\int_A f d\lambda = \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda = \int_A f d\lambda. \quad (3) \quad (2)$$

Example 4.1.9 Розглянемо $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Тоді f_+, f_- – прості невід’ємні функції,

де $f_+ = f_- = 1$, а за означенням, $\int_{\mathbb{R}} f_+ d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} f_- d\lambda_1 = +\infty$, де λ_1 – міра Лебега. Ці дві функції не є інтегровними. При цьому $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1$ не визначений.

4.2 Наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій

Theorem 4.2.1 Задано $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – невід’ємна \mathcal{F} -вимірна функція. За теоремою, існує послідовність $\{p_n, n \geq 1\}$ так, що $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$, причому p_n – прості невід’ємні та \mathcal{F} -вимірні та $p_n \leq f$.

$$\text{Тоді } \int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda.$$

Для доведення даної теореми сформулюємо одну лему:

Lemma 4.2.2 Задані $p, p_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ – прості невід’ємні та \mathcal{F} -вимірні функції, причому

- 1) $p_n \leq p_{n+1}$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \geq p$.

$$\text{Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda \geq \int_A p d\lambda.$$

Proof.

Маємо функцію $p(x) = \sum_{i=1}^j a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$, де $A_i \in \mathcal{F}$, причому $\bigcup_{i=1}^j A_i = X$.

Нехай $\varepsilon > 0$ та розглянемо множини $B_n = \{x \in A : p_n \geq (1 - \varepsilon)p\}$. Зауважимо, що:

B_n зростає за умовою 1);

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$ за умовою 2).

Тож звідси випливатиме наступне:

$$\int_A p_n d\lambda \geq \int_{B_n} p_n d\lambda \geq \int_{B_n} (1 - \varepsilon)p d\lambda = \sum_{i=1}^j (1 - \varepsilon)a_i \lambda(A_i \cap B_n).$$

За неперервністю міри знизу, $\lambda(A_i \cap B_n) \rightarrow \lambda(A_i \cap A)$ при $n \rightarrow \infty$, звідси

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda \geq (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^j a_i \lambda(A_i \cap A) = (1 - \varepsilon) \int_A p d\lambda.$$

Записана границя ліворуч існує, як границя неспадної послідовності. А далі, $\varepsilon \rightarrow 0$ – отримали

$$\text{бажану нерівність } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda \geq \int_A p d\lambda. \quad \blacksquare$$

Тепер ми готові до доведення основної теореми.

Proof.

Границя праворуч існує як границя неспадної послідовності.

Оскільки $p_n \leq f$, то $p_n \in K(f)$ і з другого означення інтеграла Лебега,

$$\int_A f d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p d\lambda \geq \int_A p_n d\lambda \implies \int_A f d\lambda \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda.$$

Із іншого боку, для кожної $p \in K(f)$ маємо

$$p(x) \leq f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) \xrightarrow{\text{лема}} \int_A p d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda \implies \int_A f d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda. \quad \blacksquare$$

4.3 Основні властивості та твердження

Theorem 4.3.1 Задано $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – невід’ємна та \mathcal{F} -вимірна функція. Тоді функція множин $\mu(A) = \int_A f d\lambda$ задає міру на \mathcal{F} .

Proof.

Функція множин μ уже невід’ємна, оскільки $\mu(A) = \int_A f d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p d\lambda \geq 0$.

Залишилося довести σ -адитивність інтеграла. Нехай $A_n \in \mathcal{F}$, всі неперетинні. Уже автоматично $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{F}$. Ми розглянемо кілька випадків:

I. Випадок функції $\mathbb{1}_B$, де множина $B \in \mathcal{F}$.

$$\mu(A) = \int_A \mathbb{1}_B d\lambda = \lambda(A \cap B) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \mathbb{1}_B d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

II. Випадок функції p – проста невід’ємна та \mathcal{F} -вимірна.

Тобто маємо $p = \sum_{i=1}^j b_i \mathbb{1}_{B_i}$ при $B_i \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{i=1}^j B_i = X$. Із кроку I, вже відомо, що

$$\mu_i(A) = \int_A \mathbb{1}_{B_i} d\lambda \text{ задає міру. Зауважимо, що тоді звідси}$$

$$\mu(A) = \int_A p d\lambda = \sum_{i=1}^j b_i \lambda(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^j b_i \int_A \mathbb{1}_{B_i} d\lambda = b_i \mu_i(A).$$

Лінійна комбінація мір при невід’ємних коефіцієнтах залишається мірою (неважко показати).

III. Випадок функції f – невід’ємна та \mathcal{F} -вимірна.

Тоді існує послідовність простих невід’ємних та \mathcal{F} -вимірних функцій $\{p_k\}$, для яких $p_k \rightarrow f$. Звідси маємо $\int_B f d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B p_k d\lambda$ для кожної $B \in \mathcal{F}$. Ми хочемо довести, що $\int_A f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda$.

Оберемо $p_k \in K(f)$, тоді звідси випливає

$$\int_A p_k d\lambda \geq \int_{\bigcup_{n=1}^q A_n} p_k d\lambda \stackrel{\text{крок II}}{=} \sum_{n=1}^q \int_{A_n} p_k d\lambda.$$

Спрямувавши $k \rightarrow \infty$, а згодом спрямувавши $q \rightarrow \infty$, отримаємо наступне:

$$\int_A f d\lambda \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda.$$

$$\text{Із іншого боку, для кожного } p \in K(f) \text{ маємо } \int_A p d\lambda \stackrel{\text{крок II}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} p d\lambda \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda.$$

Оскільки це виконується для всіх $p \in K(f)$, то звідси отримаємо:

$$\int_A f d\lambda \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda.$$

$$\text{Нарешті, довели } \mu(A) = \int_A f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad \blacksquare$$

Proposition 4.3.2 Властивості інтеграла Лебега

Всюди будуть розглядатися функції $f, g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, що \mathcal{F} -вимірні, а також множини $A, B \in \mathcal{F}$. Виконуються наступні властивості:

- 1) Нехай $N \in \mathcal{F}$ така, що $\lambda(N) = 0$. Тоді $\int_A f d\lambda = 0$.
- 2) $\int_X f \cdot \mathbb{1}_A d\lambda = \int_A f d\lambda$ (за умовою, що бодай один з цих інтегралів існує)
- 3) $\int_A c f d\lambda = c \int_A f d\lambda$ при $c \in \mathbb{R}$ (за умовою, що $\int_A f d\lambda$ існує)
- 4) Нехай $f \leq g$. Тоді $\int_A f d\lambda \leq \int_A g d\lambda$ (за умовою, що обидва інтеграли існують)
- 5) Нехай f – невід’ємна та $A \subset B$. Тоді $\int_A f d\lambda \leq \int_B f d\lambda$

- 6) Нехай $A \subset B$ та при цьому існує $\int_B f d\lambda$. Тоді існуватиме й $\int_A f d\lambda$. Причому якщо $f \in L(B, \lambda)$, то й $f \in L(A, \lambda)$.
- 7) Припустимо $\int_X f_- d\lambda < +\infty$. Тоді $\nu(A) = \int_A f d\lambda$ буде σ -адитивною на \mathcal{F} (спойлер: дана функція множин задає заряд).
- 8) $f \in L(A, \lambda) \iff |f| \in L(A, \lambda)$, причому справедлива нерівність $\left| \int_A f d\lambda \right| \leq \int_A |f| d\lambda$.
- 9) Нехай $f \sim g \pmod{\lambda}$. Тоді $\int_A f d\lambda = \int_A g d\lambda$ (за умовою, що хоча б один з цих інтегралів існує)
- 10) Нехай $f \in L(A, \lambda)$. Тоді $|f| < +\infty \pmod{\lambda}$ на множині A
- 11) Нехай f – невід’ємна та $\int_A f d\lambda = 0$. Тоді $f = 0 \pmod{\lambda}$ на множині A .
- 12) Нехай $\int_A f d\lambda = 0$ для всіх $A \in \mathcal{F}$. Тоді $f \equiv 0 \pmod{\lambda}$ на X .

Proof.

Покажемо виконання кожної властивості:

1) Розглянемо кілька випадків:

- I. p – проста невід’ємна та \mathcal{F} -вимірна, тоді $\int_N p d\lambda = \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap N) = 0$, тому що $\lambda(A_k \cap N) = 0$.
- II. f – невід’ємна та \mathcal{F} -вимірна, тоді $\int_N f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_N p_n d\lambda \stackrel{\text{крок I}}{=} 0$.
- III. f – довільна \mathcal{F} -вимірна, тоді $\int_N f d\lambda = \int_N f_+ d\lambda - \int_N f_- d\lambda \stackrel{\text{крок II}}{=} 0$.

2) Розглянемо кілька випадків:

- I. p – проста невід’ємна та \mathcal{F} -вимірна, тобто $p(x) \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$. Звідси $p(x) \mathbb{1}_A(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k \cap A}(x)$ – теж проста, а значить, $\int_X p \cdot \mathbb{1}_A d\lambda = \sum_{k=1}^n a_k \lambda(X \cap (A \cap A_k)) = \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A \cap A_k) = \int_A p d\lambda$.
- II. f – невід’ємна та \mathcal{F} -вимірна, тоді відомо, що $p_n \rightarrow f$ за теоремою. Але при цьому $p_n \mathbb{1}_A$ також монотонно зростає та $p_n \mathbb{1}_A \rightarrow f$. Значить, $\int_X f \cdot \mathbb{1}_A d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_X p_r \mathbb{1}_A d\lambda \stackrel{\text{крок I}}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_A p_r d\lambda = \int_A f d\lambda$.
- III. f – довільна \mathcal{F} -вимірна, тобто $f = f_+ - f_-$. Але тоді $f \mathbb{1}_A = (f \mathbb{1}_A)_+ - (f \mathbb{1}_A)_- = f_+ \mathbb{1}_A - f_- \mathbb{1}_A$. Значить, $\int_X f \cdot \mathbb{1}_A d\lambda = \int_X (f \mathbb{1}_A)_+ d\lambda - \int_X (f \mathbb{1}_A)_- d\lambda \stackrel{\text{крок II}}{=} \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda = \int_A f d\lambda$.

3) Спочатку розглянемо сценарій $c \geq 0$. Знову кілька випадків:

- I. p – проста невід’ємна та \mathcal{F} -вимірна, тобто $p(x) \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$. Звідси $cp(x) = \sum_{k=1}^n (ca_k) \mathbb{1}_{A_k}(x)$ – теж проста, а значить, $\int_A cp d\lambda = \sum_{k=1}^n (ca_k) \lambda(A \cap A_k) = c \int_A p d\lambda$.
- II. f – невід’ємна та \mathcal{F} -вимірна, тоді відомо, що $p_n \rightarrow f$ за теоремою. Але при цьому cp_n також монотонно зростає та $cp_n \rightarrow cf$. Значить, $\int_A cf d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A cp_n d\lambda \stackrel{\text{крок I}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} c \int_A p_n d\lambda = c \int_A f d\lambda$.
- III. f – довільна \mathcal{F} -вимірна, тобто $f = f_+ - f_-$. Але тоді $cf = (cf)_+ - (cf)_- = cf_+ - cf_-$. Значить, $\int_A cf d\lambda = \int_A (cf)_+ d\lambda - \int_A (cf)_- d\lambda \stackrel{\text{крок II}}{=} c \int_A f_+ d\lambda - c \int_A f_- d\lambda = c \int_A f d\lambda$.

Також розглянемо $c < 0$. Позначимо число $d = -c > 0$, тоді вже виконується

$$\int_A df d\lambda = d \int_A f d\lambda = -c \int_A f d\lambda.$$

Із іншого боку, $df = (-c)f = (-cf) = (-cf)_+ - (-cf)_- = cf_- - cf_+$. Тож

$$\int_A df d\lambda = \int_A cf_- d\lambda - \int_A cf_+ d\lambda = - \int_A cf_+ d\lambda + \int_A cf_- d\lambda = - \int_A cf d\lambda.$$

Маючи два рівності, отримаємо звідси $\int_A cf d\lambda = c \int_A f d\lambda$.

4) Спочатку розглянемо випадки, коли $f \leq g$ та f, g – невід’ємні. Зауважимо, що $K(f) \subset K(g)$, але тоді звідси $\int_A f d\lambda = \sup_{p \in K(f)} \int_A p d\lambda \leq \sup_{p \in K(g)} \int_A p d\lambda = \int_A g d\lambda$.

Тепер f, g – довільні, тобто $f = f_+ - f_-$ та $g = g_+ - g_-$. Звідси $\int_A f d\lambda = \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda \leq \int_A g_+ d\lambda - \int_A g_- d\lambda = \int_A g d\lambda$.

5) Випливає з властивості інтеграла Лебега від простої функції.

6) Випливає з властивості 5) інтегралу Лебега.

7) Із умови випливає, що $\int_X f d\lambda$ існує. А за властивістю 6), всі $\int_A f d\lambda$ існують при $A \subset X$. Властивість σ -адитивності довести неважко.

8) Спочатку варто зауважити, що $\int_A |f| d\lambda = \int_A f_+ d\lambda + \int_A f_- d\lambda$. Дійсно, $\int_A |f| d\lambda = \int_{A \cap \{f \geq 0\}} |f| d\lambda + \int_{A \cap \{f < 0\}} |f| d\lambda = \int_A |f| \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}} d\lambda + \int_A |f| \mathbb{1}_{\{f < 0\}} d\lambda = \int_A f_+ d\lambda + \int_A f_- d\lambda$. Із цієї рівності легко випливає $f \in L(A, \lambda) \iff |f| \in L(A, \lambda)$. Нарешті, $\left| \int_A f d\lambda \right| = \left| \int_A f_+ d\lambda - \int_A f_- d\lambda \right| \leq \left| \int_A f_+ d\lambda \right| + \left| \int_A f_- d\lambda \right| = \int_A f_+ d\lambda + \int_A f_- d\lambda = \int_A |f| d\lambda$.

9) Маємо N – множина, що $\lambda(N) = 0$ та $f(x) = g(x)$ для $x \in A \setminus N$. Тоді $\int_A f_+ d\lambda = \int_{A \setminus N} f_+ d\lambda + \int_N f_+ d\lambda = \int_{A \setminus N} f_+ d\lambda = \int_{A \setminus N} g_+ d\lambda = \int_{A \setminus N} g_+ d\lambda + \int_N g_+ d\lambda = \int_A g_+ d\lambda$. Аналогічним чином $\int_A f_- d\lambda = \int_A g_- d\lambda$.

10) Припустимо, що міра $\lambda\{x \in A : |f(x)| = +\infty\} = \varepsilon > 0$. Це ми взяли заперечення від умови $|f| < +\infty \pmod{\lambda}$ на A . Тоді звідси при фіксованому $n \geq 1$ маємо $\int_A |f| d\lambda \geq \int_{A \cap \{|f| \geq n\}} |f| d\lambda > \int_{A \cap \{|f| \geq n\}} n d\lambda = n\lambda(A \cap \{|f| \geq n\}) \geq n\varepsilon$. Якщо $n \rightarrow \infty$, то звідси отримаємо $|f| \notin L(A, \lambda) \implies f \notin L(A, \lambda)$. Суперечність!

11) Ми хочемо довести, що $\lambda\{x \in A : f \neq 0\} = 0$. Для цього $0 = \int_A f d\lambda \geq \int_{A \cap \{f \geq \frac{1}{n}\}} f d\lambda \geq \int_{A \cap \{f \geq \frac{1}{n}\}} \frac{1}{n} d\lambda = \frac{1}{n} \lambda\left(A \cap \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right)$. Тобто $\lambda\left(A \cap \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$.

Але зауважимо, що $\{x \in A : f \neq 0\} = A \cap \{x : f \neq 0\} = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : f \geq \frac{1}{n}\right\}$. Оскільки множина зростає, то за неперервністю міри знизу, доведемо $\lambda\{x \in A : f \neq 0\} = 0$.

12) Використаємо попередню властивість 11). Маємо наступне:

$$\begin{aligned} \int_X f_+ d\lambda &= \int_X f \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}} d\lambda = \int_{\{f \geq 0\}} f d\lambda = 0 \implies f_+ = 0 \pmod{\lambda}. \\ \int_X f_- d\lambda &= \int_X (-f) \mathbb{1}_{\{f < 0\}} d\lambda = \int_{\{f < 0\}} (-f) d\lambda = - \int_{\{f < 0\}} f d\lambda = 0 \implies f_- = 0 \pmod{\lambda}. \end{aligned}$$

Разом неважко розписати, що $f = f_+ - f_- = 0 \pmod{\lambda}$.

Всі властивості доведені. ■

Theorem 4.3.3 Задані функції $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – \mathcal{F} -вимірні функції, а також $A \in \mathcal{F}$. Припустимо, що $f, g \in L(A, \lambda)$, то звідси $f + g \in L(A, \lambda)$, причому

$$\int_A (f + g) d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda.$$

Remark 4.3.4 У доведенні буде зауваження, що для f, g – невід’ємних, рівність завжди виконана.

Proof.

Розглянемо кілька випадків:

I. p, q – обидва прості невід’ємні та \mathcal{F} -вимірні функції.

Тобто $p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ та $q(x) = \sum_{i=1}^j b_i \mathbb{1}_{B_i}(x)$. Тоді вже показувалося (TODO: десь вставити),

що $p + q$ – проста, але також $p(x) + q(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j (a_k + b_i) \mathbb{1}_{A_k \cap B_i}(x)$. Звідси випливає наступне:

$$\begin{aligned} \int_A p + q d\lambda &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j (a_k + b_i) \lambda(A_k \cap B_i \cap A) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^j a_k \lambda(A_k \cap B_i \cap A) + \sum_{i=1}^j \sum_{k=1}^n b_i \lambda(A_k \cap B_i \cap A) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k \cap A) + \sum_{i=1}^j b_i \lambda(B_i \cap A) = \int_A p d\lambda + \int_A q d\lambda. \end{aligned}$$

II. f, g – обидва невід’ємні та \mathcal{F} -вимірні функції.

Тоді існують послідовності простих невід’ємних та \mathcal{F} -вимірних функцій $\{p_n\}, \{q_n\}$, для яких $p_n \rightarrow f, q_n \rightarrow g$. Тоді зрозуміло, що $p_n + q_n \rightarrow f + g$ (така послідовність теж монотонно зростає).

$$\int_A f + g d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n + q_n d\lambda \stackrel{\text{крок I}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A p_n d\lambda + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A q_n d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda.$$

III. f, g – довільні \mathcal{F} -вимірні функції.

Нехай для початку $f, g \in L(A, \lambda)$. Тож звідси отримаємо таку оціночку:

$$\int_A |f + g| d\lambda \leq \int_A |f| + |g| d\lambda \stackrel{\text{крок II}}{=} \int_A |f| d\lambda + \int_A |g| d\lambda < +\infty, \text{ за нашим нехай.}$$

Отже, $|f + g| \in L(A, \lambda) \iff f + g \in L(A, \lambda)$.

Залишилося довести рівність. Спочатку розглянемо випадок $f \geq 0, g < 0$. Розіб’ємо множину A на об’єднання таких множин: $A = A_+ \sqcup A_-$.

$$A_+ = \{x \in A \mid f(x) + g(x) \geq 0\} \quad A_- = \{x \in A \mid f(x) + g(x) < 0\}.$$

На множині A_+ уже відомо, що $\int_{A_+} f + g d\lambda = \int_{A_+} f d\lambda + \int_{A_+} g d\lambda$ (крок II).

На множині A_- зауважимо, що $-g = -(f + g) + f$, причому $-(f + g), f$ – обидва невід’ємні. Тоді за кроком II, $\int_{A_-} -g d\lambda = \int_{A_-} -(f + g) + f d\lambda = \int_{A_-} -(f + g) d\lambda + \int_{A_-} f d\lambda$. За властивостями вище,

$$\text{отримаємо рівність } \int_{A_-} f + g d\lambda = \int_{A_-} f d\lambda + \int_{A_-} g d\lambda.$$

Два рівності ми додамо, а далі, користуючись адитивністю інтеграла, отримаємо:

$$\int_A f + g d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda \text{ для випадку } f \geq 0, g < 0.$$

Тепер розглянемо повністю загальний випадок функцій f, g . Розіб’ємо множину A на об’єднання таких множин: $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4$.

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \geq 0, g(x) \geq 0\} \quad A_3 = \{x \in A \mid f(x) < 0, g(x) \geq 0\}.$$

$$A_2 = \{x \in A \mid f(x) \geq 0, g(x) < 0\} \quad A_4 = \{x \in A \mid f(x) < 0, g(x) < 0\}.$$

На множині A_1, A_2, A_3 лінійність уже виконується. Для A_4 треба зауважити, що $-f, -g$ – невід’ємні, а там аналогічно процедурою можна отримати лінійність. Залишилось чотири рівності подавати

$$\text{та скористатися адитивністю інтеграла – отримаємо рівність: } \int_A f + g d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_A g d\lambda. \quad \blacksquare$$

4.4 Граничні теореми

Theorem 4.4.1 Інтегрування невід’ємної монотонної послідовності

Задано $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – всі невід’ємні \mathcal{F} -вимірні, причому дана послідовність монотонно зростає. Тоді

$$\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

Proof.

Позначимо $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ – вона визначена на $\bar{\mathbb{R}}$ в силу монотонного зростання $\{f_n\}$. Всі f_n невід’ємні за умовою, тож існують послідовності простих невід’ємних та \mathcal{F} -вимірних функцій $\{p_{nq}\}$, для яких $p_{nq} \rightarrow f_n, q \rightarrow \infty$.

Розглянемо послідовність $\{\tilde{p}_j\}$, що задається як $\tilde{p}_j(x) = \max_{\substack{1 \leq n \leq j \\ 1 \leq q \leq j}} p_{nq}(x)$. Всі ці функції: прості, бо

кожні необхідні нам p_{nq} приймають скінченне значення; невід'ємні – тут зрозуміло; \mathcal{F} -вимірні як максимум \mathcal{F} -вимірних. Ми хочемо довести, що $\tilde{p}_j \rightarrow f$, $j \rightarrow \infty$.

По-перше, $\tilde{p}_j \geq p_{nj}$, як максимум. Спрямуємо спочатку $j \rightarrow \infty$, потім $n \rightarrow \infty$ – буде $\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{p}_j \geq f$.

По-друге, для кожного $n \leq j$ та кожного $q \leq j$ маємо $p_{nq} \leq f_n \leq f_j$. Оскільки це для кожних n, q виконано, то тим паче $\tilde{p}_j \leq f_j$. При $j \rightarrow \infty$ отримаємо $\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{p}_j \leq f$.

Отже, дійсно $\tilde{p}_j \rightarrow f$, $j \rightarrow \infty$. Більше того, справедлива така оцінка:

$$\tilde{p}_j \leq f_j \leq f \implies \int_A \tilde{p}_j d\lambda \leq \int_A f_j d\lambda \leq \int_A f d\lambda.$$

При $j \rightarrow \infty$ буде $\int_A \tilde{p}_j d\lambda \rightarrow \int_A f d\lambda$. За теоремою про двох поліцаїв, $\int_A f d\lambda = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A f_j d\lambda$. ■

Corollary 4.4.2 Інтегрування невід'ємного функціонального ряду

Задано $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – всі невід'ємні \mathcal{F} -вимірні. Тоді $\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\lambda$.

Вказівка: скористатися теоремою вище, розглянувши послідовність $g_k = \sum_{n=1}^k f_n$.

Theorem 4.4.3 Теорема Бепо Леві (інтегрування довільної монотонної послідовності)

Задано $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, причому $f_n \in L(A, \lambda)$, дана послідовність монотонно зростає. При цьому

$$\sup_{n \geq 1} \int_A f_n d\lambda < +\infty. \text{ Тоді } \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

Proof.

Позначимо $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ – вона визначена на $\bar{\mathbb{R}}$ в силу монотонного зростання $\{f_n\}$.

Розглянемо функції $g_n = f_1 - f_n$. Зауважимо, що всі невід'ємні, а також це монотонна послідовність. Причому $g = f_1 - f$, де в нас $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$. Зокрема оскільки $f_1, f_n \in L(A, \lambda)$, то сюди включаються

умови, що $f_1, f_n \in \mathcal{F}$ -вимірними. Тоді за попередньою теоремою, $\int_A g d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\lambda$.

$$\int_A f_1 - f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_1 - f_n d\lambda = \int_A f_1 d\lambda - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

Праворуч ми розписали, просто тому що $f_n \in L(A, \lambda)$. А ось ліворуч ми це так не можемо. Нам треба довести, що $f_1 - f \in L(A, \lambda)$, $f \in L(A, \lambda)$. І тоді там вже можна розписати.

Маємо $\int_A g_n d\lambda$ – послідовність таких інтегралів – зростає. Але оскільки $\sup_{n \geq 1} \int_A f_n d\lambda < +\infty$, то

звідси $\sup_{n \geq 1} \int_A g_n d\lambda \leq \sup_{n \geq 1} \int_A f_n d\lambda - \int_A f_1 d\lambda < +\infty$. Звідси $\int_A g d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\lambda < +\infty$. А це в

точності $g = f - f_1 \in L(A, \lambda)$. Після цього $f \in L(A, \lambda)$.

$$\int_A f_1 - \int_A f d\lambda = \int_A f_1 d\lambda - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda \implies \int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda. \quad \blacksquare$$

Theorem 4.4.4 Теорема Фату

Задано $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – всі невід'ємні \mathcal{F} -вимірні. Тоді $\int_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda$.

Proof.

Маємо функцію $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_k$. Позначимо $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. Зауважимо, що g_n – невід'ємні та \mathcal{F} -вимірні (як інфімум вимірних), причому послідовність зростає. Значить, за теоремою про невід'ємну послідовність,

$$\int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \inf_{k \geq n} f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \inf_{k \geq n} f_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda. \quad \blacksquare$$

Theorem 4.4.5 Теорема Лебега

Задано $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – всі \mathcal{F} -вимірні, причому $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$. Нехай існує функція $g \in L(A, \lambda)$, для

якої $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$ – мажоруюча функція. Тоді $f \in L(A, \lambda)$, причому $\int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda$.

Proof.

Зауважимо, що оскільки $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$ та $f_n \rightarrow f \pmod{\lambda}$, то звідси $|f| \leq g \pmod{\lambda}$. Оскільки мажоранта $g \in L(A, \lambda)$, то звідси $f \in L(A, \lambda)$.

Із той самої нерівності $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$ та умови $g \in L(A, \lambda)$ випливає $f_n \in L(A, \lambda)$.

Оскільки $|f| \leq g$, то звідси $-g \leq f \leq g$, тобто $g + f \geq 0$ та $g - f \geq 0$ – і це все $\pmod{\lambda}$.

Застосуємо теорему Фату для цих двох функцій в двох нерівностях.

$$\int_A g + f d\lambda = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} (g + f_n) d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g + f_n d\lambda = \int_A g d\lambda + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

$$g, f \in L(A, \lambda) \implies g + f \in L(A, \lambda), \text{ тому юзаємо лінійність. Звідси } \int_A f d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

$$\int_A g - f d\lambda = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} (g - f_n) d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g - f_n d\lambda = \int_A g d\lambda - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

$$\text{Знову можна застосувати зліва лінійність – отримаємо } \int_A f d\lambda \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda.$$

$$\text{Ці нерівності дають зробити висновок, що } \int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda. \quad \blacksquare$$

Corollary 4.4.6 Теорема Лебега (другий варіант)

Задано $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ – всі \mathcal{F} -вимірні, причому $f_n \xrightarrow{\lambda} f \pmod{\lambda}$. Нехай існує функція $g \in L(A, \lambda)$, для якої $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$ – мажоруюча функція. Тоді $f \in L(A, \lambda)$, причому $\int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda$.

Тобто ми замінили умову збіжності майже скрізь на збіжність за мірою.

Proof.

За теоремою Ріса, можна підібрати підпослідовність, щоб $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$. Якщо $|f_n| \leq g \pmod{\lambda}$, то тоді зрозуміло, що $|f_{n_k}| \leq g \pmod{\lambda}$, звідси отримаємо аналогічним чином $f \in L(A, \lambda)$. Незважаючи на заміни в умовах, все одно $f_n \in L(A, \lambda)$.

Нащо це додатково перевіряти. Для того, щоб можна було коректно записати доведення існування границі від супротивного. $f, f_n \in L(A, \lambda)$, а значить, вони можуть бути в інтегралі.

!Припустимо, що $\int_A f_n d\lambda \not\rightarrow \int_A f d\lambda$ (зауваження вище дозволяє нам таке записати). Тобто звідси

$$\text{існує якийсь } \varepsilon^* > 0, \text{ де для кожного } k \text{ існує } n_k \geq k, \text{ щоб } \left| \int_A f_{n_k} d\lambda - \int_A f d\lambda \right| \geq \varepsilon^*.$$

Для підпослідовності f_{n_k} все одно $f_{n_k} \xrightarrow{\lambda} f$, але знову ж за теоремою Ріса, $f_{n_{k_m}} \rightarrow f \pmod{\lambda}$ для деякої підпідпослідовності. Але за теоремою Лебега (для першого випадку), $\int_A f_{n_{k_m}} d\lambda \rightarrow \int_A f d\lambda$ – суперечність! \blacksquare

Remark 4.4.7 Зараз буде кілька зауважень, демонстрація якого буде на наступного прикладі:

- 1) умова монотонності в **Th. 4.4.1** суттєва;
- 2) нерівність в теоремі Фату може бути строгою;
- 3) умова існування мажоранти в теоремі Лебега суттєва.

Example 4.4.8 Маємо $f_n = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$ та міру Лебега λ_1 . Ми вже знаємо, що $f_n \rightarrow 0 \pmod{\lambda_1}$.

При цьому $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1 = \lambda_1([n, n+1]) = 1$, а також $\int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda_1 = 0$.

Тобто звідси $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda_1 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1$.

Всі невід'ємні та вимірні, але зрозуміло, що послідовність не монотонна.

Також $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda_1 = 0 < 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1$.

Також задовольняє всім умовам Лебега, але лише мажоранта відсутня. Якби мажоранта $g \in L(A, \lambda)$ існувала, при яких $\mathbb{1}_{[n, n+1]} \leq g \pmod{\lambda_1}$, то ми би отримали $g \geq 1 \pmod{\lambda_1}$. Але тоді звідси маємо

$$\int_{\mathbb{R}} g d\lambda \geq \int_{\mathbb{R}} 1 d\lambda_1 = +\infty - \text{суперечить умові.}$$

4.5 Порівняння інтеграла Рімана з інтегралом Лебега

Theorem 4.5.1 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді $f \in L([a, b], \lambda_1)$, де λ_1 – міра Лебега, при цьому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\lambda_1.$$

Proof.

Оскільки $f \in \mathcal{R}([a, b])$, то вона обмежена деякою константою. Дана константа буде мажорантою g . Нехай τ_n – розбиття відрізка $[a, b]$ так, щоб відрізок поділився на підвідрізки довжин $\frac{b-a}{2^n}$. Зауважимо, що $|\tau_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Розглянемо наступні функціональні послідовності:

$$\bar{f}_n(x) = f(a) \mathbb{1}_{\{a\}}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} M_k \mathbb{1}_{(x_{k-1}, x_k]}(x) \quad \underline{f}_n(x) = f(a) \mathbb{1}_{\{a\}}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} m_k \mathbb{1}_{(x_{k-1}, x_k]}(x).$$

$$\text{У цьому випадку маємо } M_k = \sup_{x \in (x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in (x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Зауважимо, що всі ці функції $\bar{f}_n, \underline{f}_n$ вимірні за Лебегом в силу вимірності всіх індикаторів, бо $\{a\}, (x_{k-1}, x_k]$ вимірні за Лебегом. Ще помітимо, що \bar{f}_n спадає та \underline{f}_n зростає, але обидва обмежені в силу нерівності $\underline{f}_n \leq f \leq \bar{f}_n$. Тоді існують $\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n$ та $\underline{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{f}_n$. Значить, виконана нерівність $\underline{f} \leq f \leq \bar{f}$, причому \underline{f}, \bar{f} також вимірні за Лебегом. Значить, всі $\bar{f}, \underline{f} \in L([a, b], \lambda_1)$ за теоремою Лебега, бо вони за модулем обмежені мажорантою.

$$\int_{[a, b]} \bar{f} d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} \bar{f}_n d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} M_k \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\int_{[a, b]} \underline{f} d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} \underline{f}_n d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} m_k \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

Отже, $\int_{[a, b]} \bar{f} - \underline{f} d\lambda = 0 \implies \bar{f} = \underline{f} \pmod{\lambda_1}$. Отримаємо тоді $\underline{f} \leq f \leq \bar{f} \pmod{\lambda_1}$. Оскільки \underline{f} вимірний за Лебегом, а міра Лебега – повна, то тоді f – вимірний за Лебегом. Вона також обмежена мажорантою, тож $f \in L([a, b], \lambda_1)$. Щодо інтегралу:

$$\int_{[a, b]} f d\lambda = \int_{[a, b]} \underline{f} d\lambda = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Theorem 4.5.2 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, A])$ для всіх $A > a$.

1) нехай $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ абсолютно збіжний. Тоді $f \in L([a, +\infty), \lambda_1)$ та $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_{[a, +\infty)} f d\lambda_1$;

2) нехай $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ не абсолютно збіжний. Тоді $f \notin L([a, +\infty), \lambda_1)$.

Всюди λ_1 – це міра Лебега.

Proof.

1) Розглянемо випадок $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – абсолютно збіжний, тоді звідси $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$.

Оскільки $f \in \mathcal{R}([a, A])$, то звідси $f \in L([a, A], \lambda_1)$, при цьому $\int_a^A f(x) dx = \int_{[a, A]} f d\lambda_1$.

Зауважимо, що $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[a, a+n]} \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$, причому $|f_n|$ монотонна послідовність. Отже,

$$\begin{aligned} \int_{[a, +\infty)} |f| d\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, +\infty)} |f| \mathbb{1}_{[a, a+n]} d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, a+n]} |f| d\lambda = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+n} |f(x)| dx = \int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \implies f \in L([a, +\infty), \lambda_1). \end{aligned}$$

Для коректності треба пересвідчитися, що f вимірний за Лебегом. Маємо $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, а тому звідси $f^{-1}(B) = \{x \in [a, +\infty) : f(x) \in B\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in [a, a+n] : f(x) \in B\} \in \mathcal{S}_1$. Останні множини вимірні за Лебегом, бо $f \in \mathcal{R}([a, a+n])$.

$$\int_{[a, +\infty)} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, +\infty)} f \mathbb{1}_{[a, a+n]} d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, a+n]} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+n} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Даний ланцюг рівностей працює в силу теореми Лебега, де в якості мажоранти вступає $|f|$.

2) Розглянемо випадок $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ – не абсолютно збіжний, тоді $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx = +\infty$. За міркуваннями вище, отримаємо $\int_{[a,+\infty)} |f| d\lambda = +\infty$, а це означає $f \notin L([a, +\infty), \lambda_1)$. ■

Example 4.5.3 Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^n x dx$.

Стандартними інструментами математичного аналізу це можна зробити, але мега важко. Маємо функцію $f(x) = e^{-x} \sin^n x$ – зрозуміло, що вона інтегровна. Також неважко переконатися, що $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ збіжна абсолютно. Тоді працює щойно отримана теорема, зокрема

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^n x dx = \int_{[0,+\infty)} e^{-x} \sin^n x d\lambda_1(x).$$

Зауважимо, що $e^{-x} \sin^n x \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \pmod{\lambda_1}$, а також вона обмежена мажорантою $e^{-x} \in L([0, +\infty), \lambda_1)$. Тоді за теоремою Лебега, отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^n x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,+\infty)} e^{-x} \sin^n x d\lambda_1(x) = \int_{[0,+\infty)} 0 d\lambda_1 = 0.$$

TODO: додати інтеграл Рімана-Стілтієса.

4.6 Інтеграл з параметром

Definition 4.6.1 Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою та функцію $f: X \times T \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Інтегралом з параметром назовемо наступну функцію:

$$I(t) = \int_X f(x, t) d\lambda(x)$$

Вона визначена в цих точках $t \in T$, де функція f стає \mathcal{F} -вимірною.

Theorem 4.6.2 Про неперервність

Задано $f: X \times T \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, причому T – метричний простір. Нехай для кожного $x \in X$ відомо $f(x, \cdot) \in C(T)$, а також для кожного $t \in T$ відомо, що $f(\cdot, t) \in \mathcal{F}$ -вимірною. Нарешті, нехай існує мажоранта $g \in L(X, \lambda)$ (не залежить від t), для якої $|f(x, t)| \leq g(x)$.

Тоді $I \in C(T)$.

Proof.

Нехай $\{t_n\} \subset T$ задається так, щоб $t_n \rightarrow t_0, n \rightarrow \infty$. Хочемо довести, що $I(t_n) \rightarrow I(t_0)$.

Оскільки $f(\cdot, t_n)$ всі \mathcal{F} -вимірні, причому $f(\cdot, t_n) \rightarrow f(\cdot, t_0)$ за неперервністю, а також $|f(x, t_n)| \leq g(x)$, то за теоремою Лебега, ми маємо, що $I(t)$ визначена для $t_0 \in T$, тому що $f(\cdot, t) \in L(X, \lambda)$.

$$\text{Більш того, } I(t_0) = \int_X f(x, t_0) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x, t_n) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(t_n). \quad \blacksquare$$

Theorem 4.6.3 Про диференціювання

Задано $f: X \times T \rightarrow \mathbb{R}$, причому T – відкрита підмножина \mathbb{R} . Нехай для кожного $t \in T$ відомо, що $f(\cdot, t) \in L(X, \lambda)$. Також $\frac{\partial f}{\partial t}$ визначена на $X \times T$. Нарешті, нехай існує мажоранта $g \in L(X, \lambda)$ (яка

не залежить від t), для якої $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$.

Тоді I – диференційована на множині T , причому $I'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\lambda(x)$.

Proof.

Нехай $\{t_n\} \subset T$ задається так, щоб $t_n \rightarrow t_0, n \rightarrow \infty$. Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(t_n) - I(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n - t_0} \left(\int_X f(x, t_n) d\lambda(x) - \int_X f(x, t_0) d\lambda(x) \right) \stackrel{f(\cdot, t) \in L(X, \lambda)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} d\lambda(x) \quad \square$$

За теоремою Лагранжа, $\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_n^*) \right| \leq g(x)$ при проміжному $t_n^* \in G$. Можна застосувати теорему Лебега

$$\square \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} d\lambda(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\lambda(x).$$

Таким чином, I диференційована в будь-якій точці $t_0 \in G$ та $I'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\lambda(x)$. ■

4.7 Заміна змінної

Нехай задані $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ та $(X', \mathcal{F}', \lambda')$ – два вимірних простори з мірами. Причому друга міра визначається таким чином:

$$\lambda'(A) = \lambda(T^{-1}A),$$

де $T: X \rightarrow X'$ відображення $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -вимірне.

Lemma 4.7.1 λ' дійсно задає міру.

Впливає з властивостей прообраза.

Theorem 4.7.2 Задано функцію $f: X' \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – \mathcal{F}' -вимірну. Тоді $\int_X f(Tx) d\lambda(x) = \int_{X'} f(x') d\lambda'(x')$. Якщо існує хоча б один з цих інтегралів, то існує інший та вони рівні.

Proof.

Перед цим треба зауважити, що $f \circ T: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ буде \mathcal{F} -вимірною як композиція двох вимірних, тому інтеграл брати можна.

Ми розглянемо кілька випадків:

I. Випадок функції $\mathbb{1}_A$, де множина $A \in \mathcal{F}'$.

Зауважимо, що $\mathbb{1}_A(Tx) = \begin{cases} 1, & Tx \in A \\ 0, & Tx \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in T^{-1}A \\ 0, & x \notin T^{-1}A \end{cases} = \mathbb{1}_{T^{-1}A}(x)$. Значить, отримаємо

$$\int_X \mathbb{1}_A(Tx) d\lambda(x) = \int_X \mathbb{1}_{T^{-1}A}(x) d\lambda(x) = \lambda(T^{-1}A) = \lambda'(A) = \int_{X'} \mathbb{1}_A(x') d\lambda'(x').$$

II. Випадок функції p – проста невід'ємна та \mathcal{F}' -вимірна.

Тобто маємо $p(x') = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x')$.

$$\int_X p(Tx) d\lambda(x) \stackrel{\text{крок I}}{=} \sum_{k=1}^n a_k \lambda(T^{-1}A_k) = \sum_{k=1}^n a_k \lambda'(A_k) = \int_{X'} p(x') d\lambda'(x').$$

III. Випадок функції f – невід'ємна та \mathcal{F}' -вимірна.

Тоді є послідовність $\{p_n\}$ – прості невід'ємні та \mathcal{F}' -вимірні, зростаюча, для якої $p_n(x') \rightarrow f(x')$. Раз збіжність виконується для кожних точок $x' \in X'$, то й для $Tx \in X'$ виконано $p_n(Tx) \rightarrow f(Tx)$ при всіх $x \in X$. У нас $p_n(Tx)$ все одно буде простою невід'ємною та \mathcal{F}' -вимірною, а також зростаючою.

Таким чином,

$$\int_X f(Tx) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X p_n(Tx) d\lambda(x) \stackrel{\text{крок II}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X'} p_n(x') d\lambda'(x') = \int_{X'} f(x') d\lambda'(x').$$

IV. Випадок функції f – довільної \mathcal{F}' -вимірної.

Маємо $f(x') = f_+(x') - f_-(x')$. Тоді звідси $f(Tx) = f_+(Tx) - f_-(Tx)$, але тоді

$$\begin{aligned} \int_X f(Tx) d\lambda(x) &= \int_X f_+(Tx) d\lambda(x) - \int_X f_-(Tx) d\lambda(x) \stackrel{\text{крок III}}{=} \int_{X'} f_+(x') d\lambda'(x') - \int_{X'} f_-(x') d\lambda'(x') = \\ &= \int_{X'} f(x') d\lambda'(x'). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

5 Заряди

5.1 Основні означення. Розклад Гана

Definition 5.1.1 Задано \mathcal{F} – σ -алгебра.

Зарядом ми називатимемо функцію множин $\nu: \mathcal{F} \rightarrow (-\infty, +\infty]$, де

$$\nu - \sigma\text{-адитивна}$$

Proposition 5.1.2 Властивості зарядів

Задано ν – заряд на σ -алгебрі \mathcal{F} . Тоді виконуються такі пункти:

- 1) $\nu(\emptyset) = 0$;
- 2) ν – адитивна;
- 3) Нехай $A, B \in \mathcal{F}$ так, щоб $A \subset B$ та $\nu(B) < +\infty$. Тоді $\nu(A) < +\infty$.

Proof.

Доведемо виконання всіх пунктів:

1) За узгодженістю (див. розділ про міри) існує множина $A \in \mathcal{F}$, для якої $\nu(A) < +\infty$. Звідси, за σ -адитивністю, $\nu(A) = \nu(A) + \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset) + \dots$. Оскільки $\nu(A) < +\infty$, то ряд збіжний, а для рівності треба вимагати $\nu(\emptyset) = 0$.

2) Нехай $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$ – всі неперетинні. Тоді

$$\nu\left(\bigsqcup_{n=1}^k A_k\right) = \nu(A_1) + \dots + \nu(A_k) + \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset) + \dots = \sum_{n=1}^k \nu(A_k).$$

3) За умовою, звідси $B = A \sqcup (B \setminus A)$, але тоді $\nu(B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) < +\infty$. Отже, звідси випливає, що $\nu(A) < +\infty$ (неважко від супротивного показати).

Всі властивості доведені. ■

Definition 5.1.3 Задано ν – заряд на \mathcal{F} .

Множина $B \in \mathcal{F}$ називається **додатною** (відносно заряду ν), якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : A \subset B : \nu(A) \geq 0$$

Множина $B \in \mathcal{F}$ називається **від'ємною** (відносно заряду ν), якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : A \subset B : \nu(A) \leq 0$$

Remark 5.1.4 \emptyset є одночасно додатною та від'ємною множиною. Із цього випливає, що набір додатних множин та набір від'ємних множин – непорожні.

Theorem 5.1.5 Розклад Гана

Задано ν – заряд на \mathcal{F} . Тоді існують множини $X_+, X_- \in \mathcal{F}$ – відповідно додатна та від'ємна множини, для яких $X_+ \sqcup X_- = X$.

Proof.

I. Існування множини X_-

Розглянемо значення $\alpha = \inf_{A - \text{від'ємна}} \nu(A)$. Із цього можна відокремити послідовність $\{A_n, n \geq 1\}$,

для яких $\nu(A_n) \rightarrow \alpha$. Покладемо $X_- = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ та доведемо, що вона – також від'ємна.

Перейдемо до неперетинних множин, задавши $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$

Зауважимо, що $X_- = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Нехай $B \subset X_-$, тобто звідси $B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap B)$. Тобто $\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n \cap B)$.

У нас $B_n \subset A_n$, ну а тому $B_n \cap B \subset B_n \subset A_n$. Оскільки A_n від'ємна, то тоді $\nu(B \cap B_n) \leq 0$. Власне, тоді загалом $\nu(B) \leq 0$.

Цікаве зауваження: ми щойно довели, що зліченне об'єднання від'ємних множин – від'ємна.

Ми окремао ще доведемо, що $\nu(X_-) = \alpha$ – знадобиться для другої частини.

Оскільки X_- уже від’ємна множина, то $\nu(X_-) \geq \alpha$, за інфімумом.

$$\nu(X_-) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \nu(B_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_1 \cup \dots \cup A_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k) = \alpha.$$

Таким чином, ми довели $\nu(X_-) = \alpha$.

Окреме пояснення останньої нерівності, тобто $\nu(A_1 \cup \dots \cup A_k) \leq \nu(A_k)$.

Зауважимо, що $A_1 \cup \dots \cup A_k$ – від’ємна, як скінченне об’єднання від’ємних, а тому для множини $A_1 \cup \dots \cup A_k \setminus A_k \subset A_1 \cup \dots \cup A_k$ маємо $\nu(A_1 \cup \dots \cup A_k \setminus A_k) \leq 0$. Додавши $\nu(A_k)$ з двох сторін, отримаємо $\nu(A_1 \cup \dots \cup A_k) \leq \nu(A_k)$.

II. Існування множини X_+

Існує спокуса покласти множину $X_+ = X \setminus X_-$. Залишилося довести, що вона буде додатною.

Припустимо, що це не так, тобто існує множина $C \in \mathcal{F}$ така, щоб $C \subset X_+$, але $\nu(C) < 0$.

Якби C була від’ємною, то розглянемо множину $X'_- = C \sqcup X_-$ та зауважимо, що $\nu(X'_-) = \nu(C) + \alpha < \alpha$. Водночас множина $\nu(X'_-) \geq \alpha$ в силу того, що C, X_- обидва від’ємні. Тобто неможливо.

Тому C не може бути від’ємною, а тому існує множина $C_1 \in \mathcal{F}, C_1 \subset C$, для якої $\nu(C_1) > 0$. Причому звідси ми можемо підібрати $k_1 \in \mathbb{N}$ – найменше можливе, щоб $\nu(C_1) > \frac{1}{k_1}$.

Розглянемо тепер множину $C \setminus C_1$. Зауважимо, що $\nu(C \setminus C_1) = \nu(C) - \nu(C_1) < 0$. Якби вона була від’ємною, то аналогічними міркуваннями, що з C , ми б прийшли до суперечності.

Значить $C \setminus C_1$ не може бути від’ємною, а тому існує множина $C_2 \in \mathcal{F}, C_2 \subset C \setminus C_1$, для якої $\nu(C_2) > 0$. Знову візьмемо найменше можливе $k_2 \in \mathbb{N}$, щоб $\nu(C_2) > \frac{1}{k_2}$.

Розглянемо тепер множину $C \setminus (C_1 \cup C_2)$. Зауважимо, що $\nu(C \setminus (C_1 \cup C_2)) = \nu(C) - \nu(C_1) - \nu(C_2) < 0$. Аналогічно дана множина не є від’ємною, а тому існує $C_3 \in \mathcal{F}, C_3 \subset C \setminus (C_1 \cup C_2)$, для якої $\nu(C_3) > 0$.

Знову візьмемо найменше можливе $k_3 \in \mathbb{N}$, щоб $\nu(C_3) > \frac{1}{k_3}$.

⋮

Цей процес будемо продовжувати нескінченне число разів. Маємо $D = C \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Зауважимо,

що $\nu(D) = \nu(C) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n) < 0$. Множина D не може бути від’ємною, тому що, знову ж таки,

припустивши D – від’ємна та розглянувши множину $X'_- = D \sqcup X_-$, ми отримаємо $\nu(X'_-) < \alpha$ з одного боку та $\nu(X'_-) \geq \alpha$ з іншого. Це неможливо.

Значить, D не може бути від’ємною, тож існує $D_1 \in \mathcal{F}, D_1 \subset D$, для якого $\nu(D_1) > 0$. Обереться таке найменше $l \in \mathbb{N}$, для якого $\nu(D_1) > \frac{1}{l}$.

Але зауважимо щодо $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset C$. Оскільки $\nu(C) < 0 < +\infty$, то звідси $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n) < +\infty$, тобто ряд збіжний. Звідси $\nu(C_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Оскільки $\nu(C_n) > \frac{1}{k_n}$, то тоді $k_n \rightarrow \infty$.

Так ось, $\nu(D_1) > \frac{1}{l} > \frac{1}{k_N}$, тому що при $k_n \rightarrow \infty$ отримаємо, що знайдеться N , для якого $k_n > l$.

Отримана нерівність неможлива, тому що на кроці N ми взяли множину $C_N \subset C \setminus \bigcup_{m=1}^{N-1} C_m$, для

якої $\nu(C_N) > \frac{1}{k_N}$, при цьому k_N – найменше можливе. Але замість C_N нам треба було брати

$D_1 \subset D = C \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m \subset C \setminus \bigcup_{m=1}^{N-1} C_m$ – і було би $\nu(D_1) > \frac{1}{l}$. Це теж неможливо.

Тобто ми з’ясували, що D є ані від’ємною, ані невід’ємною. Суперечність! ■

Remark 5.1.6 Зауважимо, що розклад Гана, взагалі-то кажучи, не єдиний.

Example 5.1.7 Зокрема маємо $\nu(A) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_A(x_k)$ на 2^X . Тут $x_k \in X$ та $a_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Оскільки це заряд, то звідси є розклад Гана, але тут може бути кілька розкладів:

$X = X_-^1 \sqcup X_+^1$, де $X_+^1 = \{x_k \in X \mid a_k > 0\}$ та $X_-^1 = X \setminus X_+^1$.
 $X = X_-^2 \sqcup X_+^2$, де $X_+^2 = X \setminus X_-^2$ та $X_-^2 = \{x_k \in X \mid a_k < 0\}$.

Theorem 5.1.8 Розклад Жордана

Задано ν – заряд на \mathcal{F} . Ми вже знаємо, що $X = X_+ \sqcup X_-$.

Тоді $\nu = \nu_+ - \nu_-$, причому $\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+)$ та $\nu_-(A) = -\nu(A \cap X_-)$. У цьому випадку ν_+ – міра та ν_- – скінченна міра, обидва визначені на \mathcal{F} .

Якщо ν – (σ) -скінченна міра, то ν_+ також буде (σ) -скінченною.

Proof.

ν_+ – міра, тому що для будь-якої множини $A \in \mathcal{F}$ маємо $A \cap X_+ \subset X_+$, а за означенням додатної множини, $\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+) \geq 0$; дана міра зрозуміло, що σ -адитивна, бо заряд ν є таким.

ν_- – міра, доводиться аналогічно. Але вона скінченна, оскільки $-\infty < \nu(A \cap X_-) \leq 0$ за тим, які значення приймає функція множин.

Тепер доведемо розклад заряду. Маємо наступне:

$$\nu(A) = \nu(A \cap X) = \nu((A \cap X_+) \sqcup (A \cap X_-)) = \nu(A \cap X_+) + \nu(A \cap X_-) = \nu_+(A) - \nu_-(A).$$

Із цієї рівності з того, що ν буде (σ) -скінченною, легко випливає, що ν_+ також (σ) -скінченна. ■

Theorem 5.1.9 Розклад Жордана буде єдиним, незважаючи на неєдиний розклад Гана.

Proof.

Маємо два розклади Гана $X = X_+^1 \sqcup X_-^1$ та $X = X_+^2 \sqcup X_-^2$. Маємо два розклади Жордана:

$$\nu(A) = \nu_+^1(A) - \nu_-^1(A) \quad \nu(A) = \nu_+^2(A) - \nu_-^2(A).$$

Зараз доведемо, що $\nu_+^1(A) = \nu_+^2(A)$. Дійсно,

$$\begin{aligned} \nu_+^1(A) &= \nu(A \cap X_+^1) = \nu(A \cap X_+^1 \cap X) = \nu((A \cap X_+^1 \cap X_+^2) \sqcup (A \cap X_+^1 \cap X_-^2)) = \\ &= \nu(A \cap X_+^1 \cap X_+^2) + \nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2) = \nu(A \cap X_+^1 \cap X_+^2). \end{aligned}$$

У цьому випадку $\nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2) = 0$. Із одного боку, $A \cap X_+^1 \cap X_-^2 \subset X_+^1$, а тому за означенням додатної множини, $\nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2) \geq 0$. Із іншого боку, $A \cap X_+^1 \cap X_-^2 \subset X_-^2$, а тому за означенням від'ємної множини, $\nu(A \cap X_+^1 \cap X_-^2) \leq 0$.

$\nu_+^2(A) = \nu(A \cap X_+^2 \cap X_+^1)$ – доводиться аналогічним чином.

Звідси випливає $\nu_+^1(A) = \nu_+^2(A)$. Як наслідок, $\nu_-^1(A) = \nu_-^2(A)$ в силу розкладу Жордана. ■

Definition 5.1.10 Задано ν – заряд на \mathcal{F} .

Повною варіацією заряду ν називається міра:

$$|\nu| = \nu_+ + \nu_-$$

Те, що вона міра, випливає з розкладу Жордана. Також у силу єдиності, означення коректне.

Example 5.1.11 Маємо функцію $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, для якої визначено $\int_X f d\lambda$, причому $\int_X f_- d\lambda < +\infty$.

Ми вже знаємо, що функція множин $\nu(A) = \int_A f d\lambda$ буде σ -адитивною. Також

$$\nu(A) \geq -\int_A f_- d\lambda \geq -\int_X f_- d\lambda > -\infty.$$

Отже, наша функція множин ν – заряд. Маємо розбиття $X = \{x : f(x) \geq 0\} \sqcup \{x : f(x) < 0\}$ – розклад Гана. Розглянемо тепер розклад Жордана:

$$\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+) = \int_{A \cap X_+} f d\lambda = \int_A f \mathbb{1}_{f \geq 0} d\lambda = \int_A f_+ d\lambda.$$

$$\nu_-(A) = -\nu(A \cap X_-) = -\int_{A \cap X_-} f d\lambda = \int_A (-f) \mathbb{1}_{f < 0} d\lambda = \int_A f_- d\lambda.$$

$\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A)$ – тут в точності записано третє означення інтеграла Лебега.

$$|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = \int_A f_+ d\lambda + \int_A f_- d\lambda = \int_A |f| d\lambda.$$

5.2 Теорема Радона-Нікодіма

Маємо всюди (X, \mathcal{F}) – вимірний простір. Всі міри та заряди будуть задані тут.

Definition 5.2.1 Заряд ν називається **абсолютно неперервним відносно міри λ** , якщо

$$\forall A \in \mathcal{F} : \lambda(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

Позначення: $\nu \ll \lambda$.

Example 5.2.2 Для міри λ та заряду $\nu(A) = \int_A f d\lambda$ виконується $\nu \ll \lambda$.

Proposition 5.2.3 Еквівалентні означення абсолютної неперервності

Задано ν – заряд із розкладом $\nu = \nu_+ - \nu_-$, а також λ – міра. Тоді

$$\nu \ll \lambda \iff \begin{cases} \nu_+ \ll \lambda \\ \nu_- \ll \lambda \end{cases} \iff |\nu| \ll \lambda.$$

Proof.

Дано: $\nu \ll \lambda$. Хочемо довести, що $\begin{cases} \nu_+ \ll \lambda \\ \nu_- \ll \lambda \end{cases}$.

Нехай $A \in \mathcal{F}$ так, що $\lambda(A) = 0$. Розглянемо $\nu_+(A) = \nu(A \cap X_+)$. Оскільки $A \cap X_+ \subset A$, то звідси $\lambda(A \cap X_+) = 0$, а за умовою дано, $\nu(A \cap X_+) = 0 = \nu_+(A)$. А це доводить те, що $\nu_+ \ll \lambda$. Аналогічно доводиться $\nu_- \ll \lambda$.

Дано: $\begin{cases} \nu_+ \ll \lambda \\ \nu_- \ll \lambda \end{cases}$. Хочемо довести, що $|\nu| \ll \lambda$.

Нехай $A \in \mathcal{F}$ так, що $\lambda(A) = 0$. За дано, $\nu_+(A) = \nu_-(A) = 0$, тож $|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = 0$. Отже, $|\nu| \ll \lambda$.

Дано: $|\nu| \ll \lambda$. Хочемо довести, що $\nu \ll \lambda$.

Нехай $A \in \mathcal{F}$ так, що $\lambda(A) = 0$. Маємо тоді $|\nu|(A) = \nu_+(A) + \nu_-(A) = 0$, але оскільки ν_+, ν_- обидва міри, то звідси єдина можливість для рівності – це $\nu_+(A) = \nu_-(A) = 0$. Значить, $\nu(A) = 0$, а тому $\nu \ll \lambda$. ■

Theorem 5.2.4 Теорема Радона-Нікодимі

Задано ν, λ – заряд та міра, обидва σ -скінченні, причому $\nu \ll \lambda$. Тоді існує \mathcal{F} -вимірна функція $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $\nu(A) = \int_A f d\lambda$. Дана функція буде єдина з точністю до еквівалентності (mod λ).

Proof.

I. *Випадок, коли ν, λ – обидва міри, які є скінченними.*

I. i. *Існування.*

Розглянемо множину $G = \left\{ g: X \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ – невід'ємні, } \mathcal{F}\text{-вимірні} : \forall A \in \mathcal{F} : \int_A g d\lambda \leq \nu(A) \right\}$. Дана

множина непорожня, бо $0 \in G$. Також доведемо, що $g_1, g_2 \in G \xrightarrow{(*)} \max\{g_1, g_2\} \in G$.

$$\int_A \max\{g_1, g_2\} d\lambda = \int_{A \cap \{g_1 > g_2\}} g_1 d\lambda + \int_{A \cap \{g_1 \leq g_2\}} g_2 d\lambda \leq \nu(A \cap \{g_1 > g_2\}) + \nu(A \cap \{g_1 \leq g_2\}) = \nu(A).$$

Оберемо $\alpha = \sup_{g \in G} \int_X g d\lambda$. Тобто ми просто беремо найбільше з всіх можливих інтегралів (очевидно, що треба брати інтеграл по X). Зауважимо, що $\alpha < +\infty$ в силу скінченності ν . Відокремимо послідовність $\{g_n, n \geq 1\}$ так, щоб $\int_X g_n d\lambda \rightarrow \alpha$.

Розглянемо послідовність $\{f_n, n \geq 1\}$, що визначена як $f_n = \max\{g_1, \dots, g_n\}$. Всі вони \mathcal{F} -вимірні та невід'ємні – це зрозуміло. Також дана послідовність зростає монотонно, а тому існує $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ –

це наша шукана функція. Причому $\int_A f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\lambda$.

Всі $f_n \in G$ за (*), тобто $\int_A f_n d\lambda \leq \nu(A)$. При $n \rightarrow \infty$ отримаємо $\int_A f d\lambda \leq \nu(A)$, тобто $f \in G$.

Автоматично це означає, що $\int_X f d\lambda \leq \alpha$, як супремум. Із іншого боку, $f \geq f_n \geq g_n \implies \int_X f d\lambda \geq$

$$\int_X f_n d\lambda \geq \int_X g_n d\lambda. \text{ Узявши } n \rightarrow \infty, \text{ отримаємо } \int_X f d\lambda \geq \alpha.$$

Таким чином, отримали $\nu(A) - \int_A f d\lambda \geq 0$, а також $\int_X f d\lambda = \alpha$ (це буде пізніше заюзано).

Позначимо $\varphi(A) = \nu(A) - \int_A f d\lambda$ – це буде мірою, через невід'ємність (вище) та через зрозумілим чином σ -адитивність. Нам треба переконатися, що $\varphi(A) = 0$ для всіх $A \in \mathcal{F}$.

Припустимо, що існує множина A^* , для якої $\varphi(A^*) > 0$. Із цього випливатиме $\lambda(A^*) > 0$ в силу умови $\nu \ll \lambda$. Тоді існує таке $\beta > 0$, щоб $\varphi(A^*) - \beta\lambda(A^*) > 0$. (від супротивного можна довести). Розглянемо тепер $\varphi - \beta\lambda$ — це буде заряд на σ -алгебрі $\mathcal{F} \cap A^*$. Тоді ми можемо розкласти за Га-ном $A^* = A_+^* \sqcup A_-^*$. Оскільки $(\varphi - \beta\lambda)(A^*) > 0$, то звідси $(\varphi - \beta\lambda)(A_+^*) > 0$. А звідси отримаємо $\lambda(A_+^*) > 0$.

У силу додатності множини A_+^* , маємо для кожного $C \subset A_+^*$ нерівність $(\varphi - \beta\lambda)(C) \geq 0$, а звідси впливає нерівність $\beta\lambda(C) + \int_C f d\lambda \leq \nu(C)$.

Нарешті, розглянемо функцію $h = f + \beta\mathbb{1}_{A_+^*}$. Спочатку покажемо, що $h \in G$.

$$\begin{aligned} \int_A h d\lambda &= \int_{(A \cap A_+^*) \sqcup (A \setminus A_+^*)} h d\lambda = \int_{A \cap A_+^*} f + \beta\mathbb{1}_{A_+^*} d\lambda + \int_{A \setminus A_+^*} f d\lambda \leq \\ &\leq \int_{A \cap A_+^*} f d\lambda + \beta\lambda(A \cap A_+^*) + \nu(A \setminus A_+^*) \leq \nu(A \cap A_+^*) + \nu(A \setminus A_+^*) = \nu(A). \end{aligned}$$

Отже, $\int_X h d\lambda \leq \alpha$ за супремумом. Із іншого боку, зауважимо наступне:

$$\int_X h d\lambda = \int_X f + \beta\mathbb{1}_{A_+^*} d\lambda = \int_X f d\lambda + \beta\lambda(A_+^*) = \alpha + \beta\lambda(A_+^*) > \alpha. \text{ Суперечність!}$$

Припущення про те, що $\exists A^* \in \mathcal{F} : \varphi(A^*) = 0$ невірне. Отже, $\nu(A) = \int_A f d\lambda$ для всіх $A \in \mathcal{F}$.

До речі, $\int_X f d\lambda \leq \nu(X) < +\infty$, тобто звідси $|f| < +\infty \pmod{\lambda}$. Ми замінимо еквівалентним чином на функцію f , де $|f| < +\infty$ повністю всюди. Тоді вона повертає лише \mathbb{R} .

I. i. Єдиність.

Припустимо, що існують дві функції f, \tilde{f} , для яких $\nu(A) = \int_A f d\lambda$ та $\nu(A) = \int_A \tilde{f} d\lambda$. Звідси випливає, що $\int_X f - \tilde{f} d\lambda = 0$, а тому $f - \tilde{f} = 0 \pmod{\lambda} \implies f = \tilde{f} \pmod{\lambda}$. Отже, функція має бути єдиною з точністю до еквівалентності.

II. Випадок, коли ν, λ — обидва міри, які є σ -скінченними.

$$\text{Маємо } X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \nu(X_i) < +\infty \quad X = \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j, \lambda(Y_j) < +\infty.$$

На множинах $X_i \cap Y_j$ обидва міри ν, λ будуть скінченними. Набір всіх цих множин $X_i \cap Y_j$ — зліченна, тож запишемо його як упорядковану послідовність $\{Z_n, n \geq 1\}$.

Перейдемо до неперетинних множин, $V_1 = Z_1, V_2 = Z_2 \setminus Z_1, V_3 = Z_3 \setminus (Z_1 \cup Z_2), \dots$. Тоді звідси ясно, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. На $V_n \cap \mathcal{F}$ зауважимо, що λ, ν скінченні, причому все одно $\nu \ll \lambda$. Значить,

можна застосувати крок I., тобто для кожного $n \geq 1$ знайдеться функція $f_n: V_n \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $\nu(B) = \int_B f_n d\lambda$ для всіх $B \subset V_n, B \in \mathcal{F}$.

Візьмемо функцію $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, яка на кожній V_n дорівнює відповідній f_n . Значить,

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap V_n} f_n d\lambda \stackrel{f_n=f \text{ на } V_n}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap V_n} f d\lambda = \int_A f d\lambda \text{ для кожної } A \in \mathcal{F}.$$

Всі функції f_n єдині з точністю до еквівалентності, тоді звідси f також єдина з точністю до еквівалентності.

III. Випадок, коли ν — заряд σ -скінченний та λ — міра σ -скінченна.

Маємо $X = X_+ \sqcup X_-$ — розклад Гана заряду ν , беремо розклад Жордана $\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A)$.

Оскільки $\nu \ll \lambda$, то звідси $\nu_+, \nu_- \ll \lambda$. Обидві міри ν_+, ν_- є σ -скінченними, а тому можна застосувати крок II, тобто існують функції $f_+: X_+ \rightarrow \mathbb{R}$ та $f_-: X_- \rightarrow \mathbb{R}$, для яких

$$\nu_+(B) = \int_B f_+ d\lambda \text{ на } X_+ \cap \mathcal{F}, \quad \nu_-(C) = \int_C f_- d\lambda \text{ на } X_- \cap \mathcal{F}.$$

Покладемо $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ так, щоб $f = f_+$ на X_+ та $f = -f_-$ на X_- . Значить, для всіх $A \in \mathcal{F}$

$$\nu(A) = \nu(A \cap X_+) + \nu(A \cap X_-) = \int_{A \cap X_+} f_+ d\lambda - \int_{A \cap X_-} f_- d\lambda = \int_{A \cap X_+} f d\lambda + \int_{A \cap X_-} f d\lambda = \int_A f d\lambda.$$

Зрозуміло, що f єдина з точністю до еквівалентності, бо f_+, f_- у себе єдині. ■

Remark 5.2.5 Функція f із теореми Радона-Нікодими називається **щільністю** або **похідною за-ряду ν за мірою λ** .

Позначення: $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$.

TODO: доповнити якісь там ще теми

6 Добуток просторів

6.1 Множини та функції

Задані (X_1, \mathcal{F}_1) , (X_2, \mathcal{F}_2) – два вимірних простори. Позначимо $X = X_1 \times X_2$.

Definition 6.1.1 Вимірним прямокутником на X назвемо такий клас множин:

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

Remark 6.1.2 Хоча $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \sigma$ -алгебрами, але $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ утворює лише півкільце за **Th. 1.1.7**.

Definition 6.1.3 Добутком σ -алгебр $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ називають клас множин

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$$

Theorem 6.1.4 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Proof.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Оберемо $\prod_{i=1}^{m+n} (a_i, b_i] \in \mathcal{P}_{m+n}$, тоді звідси зауважимо $\prod_{i=1}^{m+n} (a_i, b_i] = \prod_{i=1}^m (a_i, b_i] \times \prod_{i=m+1}^{m+n} (a_i, b_i]$.

Отже, ми довели, що $\mathcal{P}_{m+n} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Оскільки найправіше утворює σ -алгебру, то звідси $\sigma(\mathcal{P}_{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Зафіксуємо $\prod_{i=1}^m (a_i, b_i] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Розглянемо клас $\mathcal{H}_1 = \left\{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \mid \prod_{i=1}^m (a_i, b_i] \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) \right\}$.

Цілком неважко буде довести, що \mathcal{H}_1 утворює σ -алгебру. Також зауважимо, що $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{P}_n$. Таким чином, отримаємо $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Зафіксуємо $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Розглянемо клас $\mathcal{H}_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \mid A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})\}$. Аналогічно неважко довести, що \mathcal{H}_2 утворює σ -алгебру, а також $\mathcal{H}_2 \supset \mathcal{P}_m$ (це ще впливає з $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$). Таким чином, отримаємо $\mathcal{H}_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Отже, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ маємо $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$. Це можна переписати ось так:

$$\forall A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}).$$

Це означає $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$. Але оскільки $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$ утворює σ -алгебру, то звідси $\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$. ■

Definition 6.1.5 Нехай задано множину $E \subset X$ та $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

x_1 -перерізом множини E називається множина

$$E_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E\}$$

x_2 -перерізом множини E називається множина

$$E_{x_2} = \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in E\}$$

Example 6.1.6 Нехай E – вимірний прямокутник, тобто $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, тобто $E = E_1 \times E_2$, при цьому

$$E_1 \in \mathcal{F}_1, E_2 \in \mathcal{F}_2. \text{ Тоді ми отримаємо } E_{x_1} = \begin{cases} E_2, & x_1 \in E_1 \\ \emptyset, & x_1 \notin E_1 \end{cases} \text{ та аналогічно } E_{x_2} = \begin{cases} E_1, & x_2 \in E_2 \\ \emptyset, & x_2 \notin E_2 \end{cases}.$$

Дійсно, $E_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2\}$. Якщо $x_1 \in E_1$, то тоді тут $E_{x_1} = E_2$. Якщо $x_1 \notin E_1$, то тоді який б $x_2 \in E_2$ не взяли, уже $(x_1, x_2) \notin E_1 \times E_2$, а тому $E_{x_1} = \emptyset$.

Зазначимо, що в цьому випадку $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ та $E_{x_2} \in \mathcal{F}_1$ завжди.

Lemma 6.1.7 Нехай $E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. Тоді для кожного $x_1 \in X_1$ та $x_2 \in X_2$ маємо $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, $E_{x_2} \in \mathcal{F}_1$.

Proof.

Ми доведемо, що для кожного $x_1 \in X_1$ матимемо $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, бо друге аналогічно.

Розглянемо клас $\mathcal{H} = \{E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \mid \forall x_1 \in X_1 : E_{x_1} \in \mathcal{F}_2\}$.

Ми вже знаємо (за попереднім прикладом), що $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Зауважимо, що \mathcal{H} утворює σ -алгебру,

це окремо ми скоро обговоримо. Після цього ми отримаємо $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, що доводить нашу лему. Нехай $E^{(n)} \in \mathcal{H}$, тобто $E_{x_1}^{(n)} \in \mathcal{F}_2$ при всіх $n \geq 1$. Зауважимо, що виконується така рівність: $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{x_1}^{(n)} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \right)_{x_1}$. Прокоментую рівність окремо.

Нехай $x_2 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{x_1}^{(n)}$, тобто звідси $x_2 \in E_{x_1}^{(N)}$ при деякому $N \geq 1$, а тому $(x_1, x_2) \in E^{(N)}$. Значить, $(x_1, x_2) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$, а це означає, що $x_2 \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \right)_{x_1}$. Із того, що $x_2 \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \right)_{x_1}$ аналогічним чином випливає $x_2 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{x_1}^{(n)}$.

Отже, із цих рівностей випливає, що $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \right)_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, а тому звідси отримаємо $\bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \in \mathcal{H}$.

Нехай $E^{(1)}, E^{(2)} \in \mathcal{H}$, тобто $E_{x_1}^{(1)}, E_{x_1}^{(2)} \in \mathcal{F}_2$. Зауважимо, що виконується така рівність: $E_{x_1}^{(1)} \setminus E_{x_1}^{(2)} = (E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1}$. Прокоментую рівність окремо.

Нехай $x_2 \in E_{x_1}^{(1)} \setminus E_{x_1}^{(2)}$, тобто $x_2 \in E_{x_1}^{(1)}$ та $x_2 \notin E_{x_1}^{(2)}$. Звідси $(x_1, x_2) \in E^{(1)}$ та $(x_1, x_2) \notin E^{(2)}$, а далі $(x_1, x_2) \in E^{(1)} \setminus E^{(2)}$. Отримали $x_2 \in (E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1}$. Із того, що $x_2 \in (E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1}$, аналогічним чином випливає $x_2 \in E_{x_1}^{(1)} \setminus E_{x_1}^{(2)}$.

Отже, із цих рівностей випливає, що $(E^{(1)} \setminus E^{(2)})_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, а тому звідси отримаємо $E^{(1)} \setminus E^{(2)} \in \mathcal{H}$. Нарешті, $X \in \mathcal{H}$, тому що $X_{x_1} = X_2 \in \mathcal{F}_2$. ■

Далі розглянемо функції $f: X = X_1 \times X_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Позначимо через $f_{x_1}(x_2)$ функцію $f(x_1, x_2)$, де аргумент x_1 вважається фіксованим. Аналогічно позначимо $f_{x_2}(x_1)$.

Lemma 6.1.8 Нехай функція $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ -вимірною. Тоді для кожного $x_1 \in X_1$ маємо, що $f_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ -вимірною; для кожного $x_2 \in X_2$ маємо, що $f_{x_2} \in \mathcal{F}_1$ -вимірною.

Proof.

Ми доведемо, що для кожного $x_1 \in X_1$ маємо \mathcal{F}_2 -вимірність f_{x_1} , бо друге аналогічно.

Нехай $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$, розглянемо прообраз даного відображення:

$$f_{x_1}^{-1}(B) = \{x_2 \in X_2 \mid f_{x_1}(x_2) \in B\} = \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in f^{-1}(B)\} = (f^{-1}(B))_{x_1}.$$

Оскільки $f \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -вимірною, то звідси для множини $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ матимемо $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. Але за щойно доведеною лемою, для кожного $x_1 \in X_1$ отримаємо $(f^{-1}(B))_{x_1} \in \mathcal{F}_2$. ■

6.2 Добуток мір

Задані $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ – два вимірних простори з мірами. Позначимо $X = X_1 \times X_2$.

Попередньо визначимо функцію множин на півкільці $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$:

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$$

Lemma 6.2.1 μ задає міру на $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Proof.

μ вже буде невід'ємною, просто тому що μ_1, μ_2 – міри, а там $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$. Значить, і $\mu = \mu_1\mu_2 \geq 0$.

Нехай $E^{(n)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ – неперетинні множини, причому $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Отже, ми взагалі

маємо $E^{(n)} = E_1^{(n)} \times E_2^{(n)}$, причому $E_1^{(n)} \in \mathcal{F}_1$, $E_2^{(n)} \in \mathcal{F}_2$, а також $E = E_1 \times E_2$. Зауважимо, що справедливе наступне:

$$\mathbb{1}_{E_1 \times E_2}(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{E_1}(x_1)\mathbb{1}_{E_2}(x_2).$$

Дійсно, нехай $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, тоді звідси $\mathbb{1}_{E_1 \times E_2}(x_1, x_2) = 1$. Із іншого боку, $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \implies x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$, а тому $\mathbb{1}_{E_1}(x_1)\mathbb{1}_{E_2}(x_2) = 1$.

Тепер нехай $(x_1, x_2) \notin E_1 \times E_2$, тоді звідси $\mathbb{1}_{E_1 \times E_2}(x_1, x_2) = 0$. Із іншого боку, $(x_1, x_2) \notin E_1 \times E_2$ означає три опції: або $x_1 \in E_1, x_2 \notin E_2$, або $x_1 \notin E_1, x_2 \in E_2$, або $x_1 \notin E_1, x_2 \notin E_2$. У всіх трьох випадках маємо $\mathbb{1}_{E_1}(x_1)\mathbb{1}_{E_2}(x_2) = 0$.

Також зауважимо, що для неперетинних множин E_n маємо $\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n}(x)$.

Разом отримаємо таку рівність:

$$\mathbb{1}_{E_1} \mathbb{1}_{E_2} = \mathbb{1}_E = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E^{(n)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_1^{(n)}} \mathbb{1}_{E_2^{(n)}}.$$

Проінтегруємо рівності по X_1 відносно μ_1 . Це можливо робити в силу вимірності функцій:

$$\int_{X_1} \mathbb{1}_{E_1} \mathbb{1}_{E_2} d\mu_1 = \int_{X_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_1^{(n)}} \mathbb{1}_{E_2^{(n)}} d\mu_1.$$

Знаючи, що для невід'ємних функцій ряд та інтеграл можна поміняти місцями, отримаємо:

$$\mathbb{1}_{E_2} \mu_1(E_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_2^{(n)}} \mu_1(E_1^{(n)}).$$

Проінтегруємо рівності по X_2 відносно μ_2 (аналогічним чином це можливо). Такими самими міркуваннями отримаємо рівність:

$$\mu_2(E_2) \mu_1(E_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E_1^{(n)}) \mu_2(E_2^{(n)}).$$

Але за визначенням функції множини на $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, маємо $\mu(E) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E^{(n)})$.

Отже, довели невід'ємність та σ -адитивність, тож μ – дійсно міра на $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. ■

Отже, маємо μ – легітимна міра на півкільці $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Далі продовжимо її за схемою Каратеодорі – отримаємо міру на σ -алгебрі, яку я позначу за $\mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$.

Нам відомо, що множина вимірних за Каратеодорі містить півкільце, тобто $\mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2 \supset \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. Але оскільки ми маємо σ -алгебру, то тоді звідси $\mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2 \supset \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

Definition 6.2.2 Добутком мір μ_1, μ_2 називатимемо продовження міри μ , яка визначена на $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ як $\mu(E) = \mu(E_1) \mu(E_2)$, за схемою Каратеодорі.

Позначення: $\mu_1 \times \mu_2$.

Theorem 6.2.3 Для мір Лебега виконується рівність $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$.

Proof.

TODO: розібрати. ■

Lemma 6.2.4 Задано μ_1, μ_2 – обидва σ -скінченні та повні міри відповідно на $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$. Нехай $E \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$. Тоді:

- 1) $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$;
- 2) $f(x_1) = \mu_2(E_{x_1})$ буде \mathcal{F}_1 -вимірною;
- 3) $\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \mu(E)$

Proof.

1. *Випадок, коли μ_1, μ_2 обидва скінченні міри.*

Розглянемо клас \mathcal{H} – набір всіх множин $E \in \mathcal{F}$, для яких виконуються пункти 1), 2), 3). Ми хочемо довести, що $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}$. Для цього розіб'ємо на кілька етапів.

I. $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Нехай $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, тоді, згадавши **Ех. 6.1.6**, маємо $E_{x_1} = \begin{cases} E_2, & x_1 \in E_1 \\ \emptyset, & x_1 \notin E_1 \end{cases}$, але в будь-якому випадку $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ – пункт 1 є.

$\mu_2(E_{x_1}) = \begin{cases} \mu_2(E_2), & x_1 \in E_1 \\ 0, & x_1 \notin E_1 \end{cases} = \mu_2(E_2) \cdot \mathbb{1}_{E_1}(x_1)$. Така функція від x_1 буде \mathcal{F}_1 -вимірною, оскільки $E_1 \in \mathcal{F}_1$, а тому індикатор вимірний – пункт 2 є.

$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \mu_2(E_2) \int_{X_1} \mathbb{1}_{E_1}(x_1) d\mu_1(x_1) = \mu_2(E_2) \mu_1(E_1) = \mu(E)$ – пункт 3 є.

Разом ми отримали, що множина $E \in \mathcal{H}$.

II. $\mathcal{H} \supset k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$.

Нехай $E \in k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$. Оскільки $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ – це півкільце, то згадаємо **Th. 1.2.6**, тоді $E = \bigsqcup_{k=1}^n E^{(k)}$,

причому $E^{(k)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Ми вже доводили, що $E_{x_1} = \left(\bigcup_{k=1}^n E^{(k)} \right)_{x_1} = \bigcup_{k=1}^n E_{x_1}^{(k)}$. За кроком I, всі

$E_{x_1}^{(k)} \in \mathcal{F}_2$, а тому звідси $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ – пункт 1 є.

$\mu_2(E_{x_1}) = \sum_{k=1}^n \mu_2(E_{x_1}^{(k)})$, але в силу крока I, всі $\mu_2(E_{x_1}^{(k)}) \in \mathcal{F}_1$ -вимірними, тому $\mu_2(E_{x_1})$ також \mathcal{F}_1 -вимірна як сума – пункт 2 є.

$$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \sum_{k=1}^n \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}^{(k)}) d\mu_1(x_1) \stackrel{\text{крок I}}{=} \sum_{k=1}^n \mu(E^{(k)}) = \mu(E) - \text{пункт 3 є.}$$

Разом ми отримали, що множина $E \in \mathcal{H}$.

III. \mathcal{H} – монотонний клас.

Нехай $E^{(n)} \in \mathcal{H}$, причому вони зростають та $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$. Хочемо $E \in \mathcal{H}$.

Маємо $E_{x_1} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \right)_{x_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{x_1}^{(n)} \in \mathcal{F}_2$, просто тому що $E_{x_1}^{(n)} \in \mathcal{F}_2$ – пункт 1 є.

$\mu_2(E_{x_1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2(E_{x_1}^{(n)})$ за неперервністю міри низу. Оскільки $\mu_2(E_{x_1}^{(n)}) \in \mathcal{F}_1$ -вимірною, то $\mu_2(E_{x_1})$ також \mathcal{F}_1 -вимірна як границя – пункт 2 є.

$$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}^{(n)}) d\mu_1(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E^{(n)}) = \mu(E). \text{ Перша рівність виконана, оскільки}$$

ки $\mu_2(E_{x_1}^{(n)})$ формує невід'ємну монотонну послідовність (бо в нас $E_{x_1}^{(n)}$ зростає як множина), а далі **Th. 4.4.1**. Остання рівність виконана в силу неперервності міри низу – пункт 3 є.

Власне, довели $E \in \mathcal{H}$.

Аналогічно якщо $E^{(n)} \in \mathcal{H}$, причому вони тепер спадають та $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$, то звідси $E \in \mathcal{H}$. Єдине там використовується неперервність міри зверху, але міри в нас скінченні, тому все нормально.

IV. $\mathcal{H} \supset \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$.

Дійсно, оскільки $\mathcal{H} \supset k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ за кроком II, а також \mathcal{H} – монотонний клас за кроком III, то звідси $\mathcal{H} \supset mk(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$. За **Th. 1.2.8**, маємо $\mathcal{H} \supset \sigma k(k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)) = \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$. Думаю, останню рівність пояснювати не варто, тут зрозуміло.

V. $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$ (останній крок).

Спочатку доведемо, що для кожного $E \in \mathcal{F}$ ми можемо підібрати таку множину $A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, для якої $E \subset A$, а також $\mu(A \setminus E) = 0$.

Власне, нехай $E \in \mathcal{F}$, тоді тут $\mu(E) = \inf_{\substack{E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \\ E^{(n)} \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E^{(n)})$. Для кожного $k \geq 1$ ми можемо

підібрати $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(nk)}$, для яких $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E^{(nk)}) < \mu(E) + \frac{1}{k}$.

Оберемо множину $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(nk)}$, причому в цьому випадку дійсно $A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$. Також зрозуміло, що $E \subset A$, якщо перетнути всі вкладення вище по k . Нарешті,

$$\mu(A \setminus E) = \mu(A) - \mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E^{(nk)}) - \mu(E) < \frac{1}{k}.$$

При $k \rightarrow \infty$ отримаємо бажану рівність $\mu(A \setminus E) = 0$.

Нехай тепер $E \in \mathcal{F}$, але поки обмежимося $\mu(E) = 0$. Ми вже знаємо, що є множина $A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, для якої $A \supset E$ (ясно, що й $A_{x_1} \supset E_{x_1}$) та $\mu(A \setminus E) = 0$. Але в наших кондиціях $\mu(A) = 0$.

У нас є бонус в тому, що $A \in \mathcal{H}$ за кроком IV, а тому виконуються пункти 1), 2), 3) з леми. Зокрема

$$0 = \mu(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1). \text{ Звідси випливає, що } \mu_2(A_{x_1}) = 0 \pmod{\mu_1}. \text{ Тоді, маючи } A_{x_1} \in \mathcal{F}_2,$$

умову $E_{x_1} \subset A_{x_1}$ та умову, що μ_1 повна міра, отримаємо $E_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$ – пункт 1 є.

Більше того, за тим же вкладенням, $\mu(E_{x_1}) = 0 \pmod{\mu_1}$. Зрозуміло, що $0 \in \mathcal{F}_1$ -вимірною, а в силу

повноти μ_1 , отримаємо, що $\mu(E_{x_1})$ також \mathcal{F}_1 -вимірна – пункт 2 є.

$$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = 0 = \mu(E) - \text{пункт 3 є.}$$

Нарешті, нехай $E \in \mathcal{F}$ (без додаткових обмежень). Ми вже знаємо, що є множина $A \in \sigma k(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, для якої $A \supset E$ та $\mu(A \setminus E) = 0$. Ми зведемо до попереднього кейсу.

Зауважимо, що $E = A \setminus (A \setminus E)$. Але тоді зрозуміло, що $E_{x_1} = A_{x_1} \setminus (A \setminus E)_{x_1}$. Ми уже маємо $A_{x_1} \in \mathcal{F}_2$, але також $(A \setminus E)_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$, просто тому що $\mu(A \setminus E) = 0$. Разом отримаємо $E \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$ – пункт 1 є.

$\mu_2(E_{x_1}) = \mu_2(A_{x_1}) - \mu_2((A \setminus E)_{x_1})$. Праворуч \mathcal{F}_1 -вимірна, тоді ліворуч буде теж \mathcal{F}_1 -вимірність в силу того, що μ_1 – повна міра – пункт 2 є.

$$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1(x_1) - \int_{X_1} \mu_2((A \setminus E)_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \mu(A) - \mu(A \setminus E) = \mu(E) - \text{пункт 3 є.}$$

Тим самим ми (нарешті) завершили крок IV та довели лему для першого випадку.

2. Випадок, коли μ_1, μ_2 обидва σ -скінченні міри.

Значить, за умовою, є множини $X_1^{(n)} \in \mathcal{F}_1$, для яких $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_1^{(n)} = X_1$ та $\mu_1(X_1^{(n)}) < +\infty$; є множини

$X_2^{(n)} \in \mathcal{F}_2$, для яких $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_2^{(n)} = X_2$ та $\mu_2(X_2^{(n)}) < +\infty$.

Перейдемо до множин $Y_1^{(n)} = \bigcup_{k=1}^n X_1^{(n)}$ та $Y_2^{(n)} = \bigcup_{k=1}^n X_2^{(n)}$. Слід зазначити, що на $Y_1^{(n)} \cap \mathcal{F}_1$ та

$Y_2^{(n)} \cap \mathcal{F}_2$ міри μ_1, μ_2 є скінченними – ми звели до першого випадку, а для нього лема виконана.

Нехай $E \in \mathcal{F}$. Зауважимо, що $Y^{(n)} \cap E$ зростає до E . На множині $Y^{(n)} \cap E$ виконані вже 1), 2), 3).

$E_{x_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Y^{(n)} \cap E)_{x_1} \in \mathcal{F}_2 \pmod{\mu_1}$ – пункт 1 є.

$\mu_2(E_{x_1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right)$ за неперервністю міри знизу. Також $\mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right)$ уже \mathcal{F}_1 -вимірна, а тому звідси $\mu_2(E_{x_1})$ також \mathcal{F}_1 -вимірна як границя – пункт 2 є.

$\int_{Y_1^{(n)}} \mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1) = \mu\left(Y^{(n)} \cap E\right)$ – це мені вже відомо. Але перепишемо так:

$\int_{X_1} \mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right) \mathbb{1}_{Y_1^{(n)}}(x_1) d\mu_1(x_1) = \mu\left(Y^{(n)} \cap E\right)$. Спрямувавши $n \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \mu(E).$$

Права частина – неперервність міри знизу. Ліва частина через **Th. 4.4.1**, бо в нас послідовність $\mu_2\left(\left(Y^{(n)} \cap E\right)_{x_1}\right) \mathbb{1}_{Y_1^{(n)}}$ є всі \mathcal{F}_1 -вимірними, а також зростає до $\mu_2(E_{x_1})$ – крок 3 є. ■

6.3 Теорема Тонеллі та Фубіні

Задані $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ – два вимірних простори з мірами. Позначимо $X = X_1 \times X_2$.

Theorem 6.3.1 Теорема Тонеллі

Нехай μ_1, μ_2 – міри, що повні та σ -скінченні. Задано функцію $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – невід’ємна та $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \bar{\otimes} \mathcal{F}_2$ -вимірна. Відомо, що:

- 1) f_{x_1} буде \mathcal{F}_2 -вимірною $\pmod{\mu_2}$;
- 2) $g(x_1) = \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2)$ буде \mathcal{F}_1 -вимірною;
- 3) $\int_X f d\mu = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2)$.

Remark 6.3.2 Функція $g(x_1)$, можливо, не є визначеною на множині міри нуль в силу того, що перша умова працює майже скрізь відносно μ_1 , але в силу повноти міри ми можемо взяти еквівалентну їй функцію, де визначено все, яка не впливає ніяк на вимірність.

Proof.

I. Випадок функції $\mathbb{1}_B$, де множина $B \in \mathcal{F}$.

Але оскільки $B \in \mathcal{F}$, то вже автоматично виконуються щойно доведена лема.

Зафіксуємо точку $x_1 \in X_1$, тоді звідси отримаємо переріз функції:

$$(\mathbb{1}_B)_{x_1}(x_2) = \mathbb{1}_B(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in B \\ 0, & (x_1, x_2) \notin B \end{cases} = \begin{cases} 1, & x_2 \in B_{x_1} \\ 0, & x_2 \notin B_{x_1} \end{cases} = \mathbb{1}_{B_{x_1}}(x_2).$$

Отримана функція \mathcal{F}_2 -вимірною (mod μ_1), тому що $B_{x_1} \in \mathcal{F}_2$ (mod μ_1) (п. 1 леми) – пункт 1 є.

$$\int_{X_2} (\mathbb{1}_B)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \int_{X_2} \mathbb{1}_{B_{x_1}}(x_2) d\mu_2(x_2) = \mu_2(B_{x_1})$$

Цей інтеграл буде \mathcal{F}_1 -вимірною, бо $\mu_2(B_{x_1})$ буде \mathcal{F}_1 -вимірною (п. 2 леми) – пункт 2 є.

$$\int_X \mathbb{1}_B d\mu = \mu(B) \stackrel{\text{п. 3 леми}}{=} \int_{X_1} \mu_2(B_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \int_{X_2} (\mathbb{1}_B)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1) - \text{пункт 3 є.}$$

II. Випадок функції p – проста невід’ємна та \mathcal{F} -вимірною.

Тобто мається $p(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A^{(k)}}(x)$, причому всі $A^{(k)} \in \mathcal{F}$. Зафіксуємо $x_1 \in X_1$, тоді

$$p_{x_1}(x_2) = p(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^n a_k (\mathbb{1}_{A^{(k)}})_{x_1}(x_2).$$

Ми вже знаємо, що кожний індикатор, за кроком I, буде \mathcal{F}_2 -вимірною (mod μ_1), а тому звідси сама p_{x_1} також \mathcal{F}_2 -вимірною (mod μ_1) – пункт 1 є.

$$\int_{X_2} p_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \sum_{k=1}^n a_k \int_{X_2} (\mathbb{1}_{A^{(k)}})_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2).$$

Даний інтеграл буде \mathcal{F}_1 -вимірною як сума \mathcal{F}_1 -вимірних з крока I – пункт 2 є.

$$\begin{aligned} \int_X p d\mu &= \sum_{k=1}^n a_k \mu(A^{(k)}) \stackrel{\text{крок I}}{=} \sum_{k=1}^n a_k \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} (\mathbb{1}_{A^{(k)}})_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \\ &= \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} \sum_{k=1}^n a_k (\mathbb{1}_{A^{(k)}})_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} p_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) - \text{пункт 3 є.} \end{aligned}$$

III. Випадок функції f – невід’ємна та \mathcal{F} -вимірною.

Маємо послідовність $\{p_n\}$ – прості невід’ємні та \mathcal{F} -вимірні, де $p_n \rightarrow f$.

$f_{x_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n)_{x_1}$ при фіксованому $x_1 \in X_1$. За кроком II, всі $(p_n)_{x_1}$ будуть \mathcal{F}_2 -вимірною (mod μ_1), а тому й f буде \mathcal{F}_2 -вимірною (mod μ_1) як ліміт – пункт 1 є.

$$\int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_2} (p_n)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) - \mathcal{F}_1\text{-вимірною як границя за кроком II} - \text{пункт 2 є.}$$

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X p_n d\mu \stackrel{\text{крок II}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} (p_n)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2).$$

Остання рівність виконана спочатку за **Th. 4.4.1**, а далі за **Th. 4.2.1** – пункт 3 є. ■

Theorem 6.3.3 Теорема Фубіні

Нехай μ_1, μ_2 – міри, що повні та σ -скінченні. Задано функцію $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, причому $f \in L(X, \mu)$.

Відомо, що:

- 1) $f_{x_1} \in L(X_2, \mu_2)$ (mod μ_1);
- 2) $g(x_1) = \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) \in L(X_1, \mu_1)$;
- 3) $\int_X f d\mu = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2)$.

Proof.

I. Випадок функції f – невід’ємна.

Уже виконується для неї теорема Тонеллі, але ще нічого невідомо про інтегрованість, що в Фубіні.

$$\int_X f d\mu = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) \text{ за Тонеллі. Але оскільки } f \in L(X, \mu), \text{ то звідси маємо}$$

$$\int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) < +\infty \text{ (mod } \mu_1), \text{ а це в точності } f_{x_1}(x_2) \in L(X_2, \mu_2) \text{ (mod } \mu_1) - \text{пункт 1 є.}$$

Також $g(x_1) \in L(X_1, \mu_1)$ за щойно отриманим – пункт 2 є.

Пункт 3 випливає з теореми Тонеллі, який ми вже розписували тут.

II. Випадок функції f – довільної.

Маємо $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, кожна з яких невід'ємна, а тому працює крок I.

При фіксованому x_1 маємо $f_{x_1}(x_2) = (f_+)_{x_1}(x_2) - (f_-)_{x_1}(x_2)$.

Ця рівність автоматично доводить пункти 1), 2). Щодо 3),

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu \stackrel{\text{крок I}}{=} \\ &= \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} (f_+)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) - \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} (f_-)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) = \\ &= \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \left(\int_{X_2} (f_+)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) - \int_{X_2} (f_-)_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2) \right) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

■

7 Простір L_p

7.1 Основні нерівності

Lemma 7.1.1 Нерівність Юнга

Задані числа $p, q > 1$, причому $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді для всіх $a, b \geq 0$ виконується нерівність $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Proof.

Якщо $a = 0$ або $b = 0$, то нерівність цілком зрозуміла. Тому надалі $a, b > 0$.

Розглянемо функцію $f(a) = ab - \frac{a^p}{p} - \frac{b^q}{q}$ та дослідимо її. Обчислимо похідну

$$f'(a) = b - a^{p-1}.$$

Зауважимо, що в точці $a = b^{\frac{1}{p-1}}$ досягається найменше значення. Тож

$$\min_{a>0} f(a) = f\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = b^{\frac{1}{p-1}}b - \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} - \frac{b^q}{q} = b^q - \frac{b^q}{p} - \frac{b^q}{q} = b^q \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = 0.$$

Таким чином, $\forall a > 0 : f(a) \geq 0$, звідси випливає нерівність $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. ■

Theorem 7.1.2 Нерівність Гьольдера

Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір, функції $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – \mathcal{F} -вимірні та $p, q > 1$ такі, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\text{Тоді } \int_X |fg| d\lambda \leq \left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}$$

Proof.

Припустимо, що $\left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = 0$, тоді звідси $|f| = 0$ (mod λ). У такому разі нерівність спрацю-

вує. Аналогічно все буде при $\left(\int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} = 0$.

Припустимо, що $\left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = +\infty$. Тоді права частина нерівності буде точно $+\infty$ (бо випадок, коли один із інтегралів нуль, був розглянутий). Отже, нерівність автоматом виконана. Аналогічно все буде при $\left(\int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} = +\infty$.

Тепер ми можемо зробити еквівалентні перетворення. Щоб довести Гьольдера, ми доведемо, що

$$\frac{\int_X |f||g| d\lambda}{\left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1 \quad (\text{по суті, ми праву частині нерівності поділили}).$$

Оскільки інте-

$$\text{грали – це дійсні числа, то ми їх внесемо всередину інтеграла чисельника як множними.}$$

Проте ця нерівність дійсно буде виконаною. Дійсно,

$$\frac{|f|}{\left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g|}{\left(\int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}} \stackrel{\text{нер-ть Юнга}}{\leq} \frac{\left(\frac{|f|}{\left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}} \right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{|g|}{\left(\int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}} \right)^q}{q} = \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\int_X |f|^p d\lambda} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\int_X |g|^q d\lambda}$$

Тепер проінтегруємо обидві частини:

$$\int_X \frac{|f|}{\left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g|}{\left(\int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}} d\lambda \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \blacksquare$$

Theorem 7.1.3 Нерівність Мінковського

Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір, функції $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ – \mathcal{F} -вимірні та $p \geq 1$. Тоді

$$\left(\int_X |f+g|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proof.

Розглянемо випадок $p = 1$. Тоді нерівність випливає з нерівності трикутника $|f + g| \leq |f| + |g|$.

Тепер випадок $p > 1$, тоді оберемо $q > 1$, щоб була рівність $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Припустимо, що $\left(\int_X |f + g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = 0$. Тоді нерівність автоматично виконана.

Припустимо, що $\left(\int_X |f + g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = +\infty$. Скориставшись нерівністю Єнсена для функції x^p ,

$p > 1$, отримаємо $\left(\frac{|f + g|}{2}\right)^p \leq \left(\frac{|f| + |g|}{2}\right)^p \stackrel{\text{нер-ть Єнсена}}{\leq} \frac{|f|^p + |g|^p}{2}$. Після інтегрування всіх частин нерівностей, отримаємо, що хоча б один доданок у правій нерівності має бути $+\infty$. Тож нерівність виконується.

Для всіх інших випадків буде інше доведення.

$$\begin{aligned} \int_X |f + g|^p d\lambda &= \int_X |f + g| |f + g|^{p-1} d\lambda \leq \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\lambda + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\lambda \stackrel{\text{нер-ть Гьольдера}}{\leq} \\ &\leq \left(\int_X |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_X |g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $(p-1)q = p$, зважаючи на рівність $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Далі поділимо обидві частини

$$\begin{aligned} \text{нерівності на } \left(\int_X |f + g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} \text{ (саме через це я на початку розбивав на випадки). Отримаємо} \\ \left(\int_X |f + g|^p d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\int_X |f + g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemma 7.1.4 Нерівність Чебишова

Задано (X, \mathbb{F}, λ) – вимірний простір та функція $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ – \mathcal{F} -вимірна. Тоді $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lambda(\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f| d\lambda.$$

Proof.

$$\int_X |f| d\lambda \geq \int_{\{|f| \geq \varepsilon\}} |f| d\lambda \geq \int_{\{|f| \geq \varepsilon\}} \varepsilon d\lambda = \varepsilon \lambda\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}. \quad \blacksquare$$

7.2 Конструкція простору L_p

Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір та число $1 \leq p < \infty$. Розглянемо множину

$$\tilde{L}_p(X, \lambda) = \{f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \mid f - \mathcal{F} \text{ - вимірна, } |f|^p \in L(X, \lambda)\}$$

Установимо на даній множині відношення еквівалентності:

$$f \sim g \iff f = g \pmod{\lambda}$$

Отримаємо нове означення:

Definition 7.2.1 Простором $L_p = L_p(X, \lambda)$ при $1 \leq p < \infty$ називають множину класів еквівалентності, що отримана з $\tilde{L}_p(X, \lambda)$ за допомогою встановленого відношення еквівалентності.

У класі еквівалентності лежать майже одні й ті самі функції. Такі функції завжди мають (якби мовити) дуже схожі властивості з точки зору теорії міри. Значить, ці функції можна вважати однаковими. Тому, поступаючись формальністю, ми будемо говорити, що L_p – це просто набір функцій.

Proposition 7.2.2 $(L_p, \|\cdot\|_p)$, де число $1 \leq p < +\infty$ – дійсний нормований простір, причому норма задається ось так:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$$

Remark 7.2.3 Значимо, що L_p – векторний простір над \mathbb{R} . Дійсно, маємо $f, g \in L_p$, тоді звідси $\|f\|_p, \|g\|_p < +\infty$. Значить, за нерівністю Мінковського, $\|f + g\|_p < +\infty$, тож $f + g \in L_p$. Зрозуміло також, що $\|\alpha f\|_p < +\infty, \alpha \in \mathbb{R}$, тож $\alpha f \in L_p$.

Proof.

Нам треба просто перевірити властивості норми.

1) $\|f\|_p \geq 0$ – зрозуміло, бо під інтегралом стоїть невід’ємна функція $|f|^p$. Далі зауважимо, що при $\|f\|_p = 0$ маємо $f = 0 \pmod{\lambda}$, тож $f = 0$ як елемент L_p .

$$2) \|\alpha f\|_p = \left(\int_X |\alpha f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|f\|_p.$$

3) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ – це просто нерівність Мінковського в більш компактному вигляді.

Отже, у нас дійсно встановлений нормований простір.

Proposition 7.2.4 Установлений вище нормований простір $(L_p, \|\cdot\|_p)$ – банахів.

Proof.

Інакше кажучи, нам треба довести повноту. Нехай $\{f_n, n \geq 1\} \subset L_p$ – фундаментальна послідовність, тобто $\|f_n - f_m\|_p \rightarrow 0$. За нерівністю Чебишова, маємо таку оцінку:

$$\lambda(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)|^p \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f_m|^p d\lambda = \frac{1}{\varepsilon} \|f_n - f_m\|_p^p \rightarrow 0.$$

$$\lambda\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon^{\frac{1}{p}}\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \|f_n - f_m\|_p^p \rightarrow 0.$$

Отже, $\{f_n\}$ – фундаментальна послідовність за мірою. Значить, за **Th. 3.7.5**, існує підпослідовність $\{f_{n_k}\}$, для якої $f_{n_k} \rightarrow f \pmod{\lambda}$, де функція $f \in \mathcal{F}$ -вимірною. Наша мета буде довести, що $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тобто послідовність $\{f_n\} \subset L_p$ буде збігатися за нормою до функції f , причому треба окремо показати, що $f \in L_p$.

Нехай $\varepsilon > 0$. Із фундаментальності $\{f_{n_k}\}$ відносно норми, $\exists k_0 : \forall k, l \geq k_0 : \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p < \varepsilon \iff$

$$\iff \int_X |f_{n_k} - f_{n_l}|^p d\lambda < \varepsilon^p. \text{ За лемою Фату, отримаємо наступне при } k \geq k_0:$$

$$\int_X |f_{n_k} - f| d\lambda = \int_X \lim_{l \rightarrow \infty} |f_{n_k} - f_{n_l}|^p d\lambda \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_k} - f_{n_l}|^p d\lambda \leq \varepsilon^p < +\infty.$$

Отже, звідси $f_{n_k} - f \in L_p$. Оскільки L_p – векторний простір, то звідси $f \in L_p$.

$$\text{Поки розписували нерівності, отримали } \int_X |f_{n_k} - f|^p d\lambda \leq \varepsilon^p \iff \|f_{n_k} - f\|_p \leq \varepsilon, \text{ причому } \forall k \geq k_0.$$

Отже, $\|f_{n_k} - f\|_p \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Оскільки $\{f_n\}$ – фундаментальна та $\{f_{n_k}\}$ – збіжна до f , то $\{f_n\}$ – теж збіжна до f .

Ми довели, що $(L_p, \|\cdot\|_p)$ – справді банахів.

7.3 Щільні підмножини L_p

Theorem 7.3.1 Множина простих функцій – щільна підмножина простору L_p .

Тобто для всіх $f \in L_p$ та $\varepsilon > 0$ існує проста функція $q \in L_p$, для якої $\|f - q\|_p < \varepsilon$.

Proof.

I. Випадок $f \geq 0$.

Тоді існують прості невід’ємні та вимірні функції $\{q_n\}$ так, що монотонним чином $q_n \rightarrow f$.

$$0 \leq f - q_n \leq f \implies |f - q_n|^p \leq |f|^p \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - q_n(x)|^p = 0.$$

За теоремою Лебега про мажоровану збіжність, взявши мажоранту $|f|^p \in L(X, \lambda)$, отримаємо, що

$$\int_X |f - q_n|^p d\lambda \rightarrow 0 \iff \|f - q_n\|_p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Серед цих q_n знайдеться функція q , для якої $\|f - q\|_p < \varepsilon$.

II. Випадок f – довільна.

Тоді $f = f_+ - f_-$, де кожна з функцій в доданку – невід’ємна. Значить, за кроком I, існують прості функції $q_+, q_- \in L_p$, для яких $\|f_+ - q_+\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \|f_- - q_-\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Оберемо функцію $q = q_+ - q_-$, яка теж проста, причому $q \in L_p$. Тоді

$$\|f - q\|_p = \|(f_+ - q_+) - (f_- - q_-)\| \leq \|f_+ - q_+\|_p + \|f_- - q_-\|_p < \varepsilon.$$

Theorem 7.3.2 Припустимо, що λ на \mathcal{F} була отримана за схемою за Каратеодорі з півкільця \mathcal{P} , причому λ – σ -скінченна на \mathcal{P} . Тоді для всіх $f \in L_p$ та $\varepsilon > 0$ існує проста функція $q \in L_p$, для якої $\|f - q\|_p < \varepsilon$.

От тільки для простої функції $q(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ уже буде $A_k \in \mathcal{P}$ (у порівнянні з попереднім).

Proof.

I. Випадок $f = \mathbb{1}_C, C \in \mathcal{F}$.

$$\int_X |f|^p d\lambda < +\infty \iff \int_X \mathbb{1}_C^p d\lambda = \lambda(C) < +\infty.$$

За теоремою про наближення міри її значеннями на кільці, знайдеться $B \in k(\mathcal{P})$, для якої

$$\lambda(C \triangle B) < \varepsilon^p, \text{ де } B = \bigcup_{k=1}^n A_k, A_k \in \mathcal{P}.$$

Покладемо $q(x) = \mathbb{1}_B(x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}(x)$. Це – проста функція потрібного вигляду. Тоді

$$\|f - q\|_p = \left(\int_X |\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |\mathbb{1}_{C \triangle B}|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{\frac{1}{p}}(C \triangle B) < \varepsilon.$$

II. Випадок $f \in L_p$ – проста (не обов'язково невід'ємна), тобто $f = \sum_{i=1}^j c_j \mathbb{1}_{C_j}, C_j \in \mathcal{F}, c_i \neq 0$.

$$\int_X |f|^p d\lambda = \sum_{i=1}^j |c_i|^p \lambda(C_i) < +\infty \xrightarrow{c_i \neq 0} \lambda(C_i) < +\infty \iff \mathbb{1}_{C_i} \in L_p.$$

Тоді за кроком I, візьмемо прості функції q_i потрібного вигляду, для яких $\|\mathbb{1}_{C_i} - q_i\|_p < \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^j |c_i|}$.

Покладемо $q = \sum_{i=1}^j c_i q_i$ та зауважимо, що q має необхідний вигляд. Тоді

$$\|f - q\|_p \leq \sum_{i=1}^j |c_i| \|\mathbb{1}_{C_i} - q_i\|_p < \varepsilon.$$

III. Випадок $f \in L_p$ – довільна.

За попередньою теоремою, знайдеться проста функція $f_0 \in L_p$, для якої $\|f - f_0\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Далі, за кроком II, для простої функції $f_0 \in L_p$ існує проста функція q потрібного вигляду, для якої $\|f_0 - q\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Ну тоді ясно, що $\|f - q\|_p < \varepsilon$. ■

Нарешті, розглянемо тепер частинний випадок $L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$, тобто в нас $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F} = \mathcal{S}_d$, $\lambda = \lambda_d$ – міра Лебега.

Corollary 7.3.3 Простір $L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ – сепарабельний при всіх $1 \leq p < +\infty$.

Proof.

Розглянемо зліченне півкільце множин $\tilde{\mathcal{P}}_d = \left\{ \prod_{k=1}^d (a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\}$. Розглянемо M – набір функцій

вигляду $\sum_{i=1}^j r_i \mathbb{1}_{C_i}, r_i \in \mathbb{Q}, C_i \in \tilde{\mathcal{P}}_d, j \geq 1$. Можна зазначити, що M – зліченна множина. Ми доведемо, що M буде щільною в L_p .

Функціями з M можна як завгодно близько за нормою $\|\cdot\|_p$ наближати функції вигляду $\sum_{i=1}^j c_i \mathbb{1}_{C_i}, c_i \in \mathbb{R}, C_i \in \tilde{\mathcal{P}}_d$, а дані функції, у свою чергу, наближають функції типу $\sum_{i=1}^j c_i \mathbb{1}_{D_i}, c_i \in \mathbb{R}, D_i \in \mathcal{P}_d$.

Із попередньої теореми, маємо, що набір функцій такого вигляду – щільна підмножина L_p . ■

7.4 Істотно обмежені функції

Definition 7.4.1 Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір та $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ – \mathcal{F} -вимірна.

Функція f називається **істотно обмеженою**, якщо

$$\exists c > 0 : |f(x)| \leq c \quad (\text{mod } \lambda)$$

Інакше кажучи, $\lambda\{x \in X : |\lambda(x)| > c\} = 0$.

Definition 7.4.2 Істотною верхньою гранню називають найменше число, що обмежує істотно

$$\operatorname{ess\,sup}_X |f| = \inf\{c > 0 : \lambda\{x \in X : |f(x)| > c\} = 0\}$$

Дану штуку можна переписати в іншому вигляді: $\operatorname{ess\,sup}_X |f| = \inf_{\lambda(N)=0} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)|$.

Позначення: $\tilde{L}_\infty(X, \lambda)$ – множина всіх істотно обмежених функцій. Тобто

$$\tilde{L}_\infty(X, \lambda) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f - \mathcal{F} - \text{вимірна}, \operatorname{ess\,sup}_X |f| < \infty\}$$

Аналогічним чином ми профакторизуємо даний простір на основі відношення еквівалентності, що було задано в просторі \tilde{L}_p . Отримаємо простір $L_\infty = L_\infty(X, \lambda)$ – множина класів еквівалентностей.

Proposition 7.4.3 $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ – дійсний нормований простір, причому норма задається ось так:
 $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_X |f|$.

Proof.

Нам треба просто перевірити властивості норми.

1) $\|f\|_\infty \geq 0$ – зрозуміло, бо ми проходимося по додатним константам c , які істотно обмежують. Також $\|f\|_\infty = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists c_\varepsilon > 0 : c_\varepsilon < \varepsilon$. Зокрема зафіксуємо $\varepsilon = \frac{1}{k}$, тоді існують $c_k < \frac{1}{k}$, які обмежують істотно функцію f . Тобто $\exists N_k : \lambda(N_k) = 0 : \forall x \in X \setminus N_k : |f(x)| \leq c_k < \frac{1}{k}$. Оберемо множину $N = \bigcup_{k \geq 1} N_k$, яка також є множиною міри нуль, тоді $\forall x \in X \setminus N : |f(x)| < \frac{1}{k}$. При $k \rightarrow \infty$ отримаємо $f = 0 \pmod{\lambda}$.

$$\begin{aligned} 2) \quad \|\alpha f\|_\infty &= \operatorname{ess\,sup}_X |\alpha f| = \inf\{c > 0 : \lambda\{x : |\alpha f(x)| > c\} = 0\} = \inf\left\{|\alpha| \frac{c}{|\alpha|} > 0 : \lambda\left\{x : |f(x)| > \frac{c}{|\alpha|}\right\}\right\} \\ &= |\alpha| \inf\left\{\frac{c}{|\alpha|} > 0 : \lambda\left\{x : |f(x)| > \frac{c}{|\alpha|}\right\}\right\} = |\alpha| \operatorname{ess\,sup}_X |f| = |\alpha| \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

3) Мабуть, доведу це надзвичайно детально.

Розглянемо множину $A = \{c > 0 : \lambda\{x \in X : |f(x) + g(x)| > c\} = 0\}$ та дві множини $B_1 = \{c > 0 : \lambda\{x \in X : |f(x)| > c\} = 0\}$ та $B_2 = \{c > 0 : \lambda\{x \in X : |g(x)| > c\} = 0\}$. Із математичного аналізу ми вже знаємо, що з себе представляє множина $B_1 + B_2$. Ми хочемо довести, що $A \supset B_1 + B_2$ – і таким чином, $\inf A \leq \inf(B_1 + B_2) = \inf B_1 + \inf B_2$ – а це наша бажана нерівність $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Нехай $c \in B_1 + B_2$, тобто $c = c_1 + c_2$, причому $c_1 \in B_1, c_2 \in B_2$. Тобто $\lambda\{x \in X : |f(x)| > c_1\} = 0$, $\lambda\{x \in X : |g(x)| > c_2\} = 0$. Ми хочемо довести, що $\lambda\{x \in X : |f(x) + g(x)| > c\} = 0$.

Зауважимо, що справджується $\{x \in X : |f + g| > c_1 + c_2\} \subset \{x \in X : |f| > c_1\} \cup \{x \in X : |g| > c_2\}$, тому звідси випливає, що

$$\lambda\{x \in X : |f(x) + g(x)| > c_1 + c_2\} \leq \lambda\{x \in X : |f(x)| > c_1\} + \lambda\{x \in X : |g(x)| > c_2\} = 0.$$

Таким чином, ми довели, що $c \in A$ – а це завершує доведення третьої властивості норми.

Отже, у нас дійсно встановлений нормований простір. ■

Proposition 7.4.4 Установлений вище нормований простір $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ – банахів.

Proof.

Нехай $\{f_n, n \geq 1\} \subset L_\infty$ – фундаментальна послідовність. Позначимо кілька множин:

$$A_n = \{x \in X : |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\};$$

$$A_{nm} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\};$$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}.$$

Зауважимо, що $\lambda(A_n) = 0$ та $\lambda(A_{nm}) = 0$ в силу істотно обмежених функцій f_n . Звідси $\lambda(A) = 0$.

Якщо $x \in X \setminus \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}$, то тоді $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|x_n - x_m\|_\infty \rightarrow 0$, тобто тоді $\{f_n(x), n \geq 1\}$

– фундаментальна як числова послідовність, тож $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Якщо $x \in \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{mn}$, то

покладемо $f(x) = 0$.

Хочемо довести, що знайдена f – границя для послідовності $\{f_n, n \geq 1\} \subset L_{\infty}$.

Спочатку доведемо, що $f \in L_{\infty}$. Оскільки $\{f_n\}$ – фундаментальна, то вона обмежена, тож $\exists c > 0$:

$\forall n \geq 1 : \|f_n\|_{\infty} \leq c$. Якщо $x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то тоді $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty} \leq c$. Таким чином, для кожного

$x \in X \setminus A$ маємо, що $|f(x)| \leq c$. Отже, ми довели, що $f \in L_{\infty}(X, \lambda)$.

Залишилося показати $f_n \rightarrow f$. За фундаментальністю $\{f_n\}$, маємо, що $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon$. Значить, $\forall x \in X \setminus A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Спрямуємо $m \rightarrow \infty$ – отримаємо $\forall x \in X \setminus A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Тож звідси отримаємо $\|f_n - f\|_{\infty} < 2\varepsilon$. Отже, $f_n \rightarrow f$. ■

Proposition 7.4.5 Задано $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір, де λ – скінченна. Тоді $\forall p \geq 1 : L_{\infty} \subset L_p$. При цьому $\forall f \in L_{\infty} : \|f\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$.

Proof.

$L_{\infty} \subset L_p$.

Нехай $f \in L_{\infty}$, тобто це істотно обмежена функція, тобто $\exists c > 0 : \forall x \in X \setminus N : |f(x)| \leq c$ при $\lambda(N) = 0$. Отже, звідси $\int_X |f|^p d\lambda = \int_{X \setminus N} |f|^p d\lambda \leq \int_{X \setminus N} c^p d\lambda = c^p \lambda(X \setminus N) < \infty$. Значить, $f \in L_p$.

$\|f\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$. ■

Трошки про все те саме тільки в комплексному випадку

Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір з мірою (це дійсна міра). Ми тепер будемо розглядати функції $f: X \rightarrow \mathbb{C}$. Оскільки $f(x)$ повертає комплексне число, то тоді $f(x) = u(x) + iv(x)$, де в цьому випадку $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$, обидві функції $u, v: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition. Комплекснозначна функція f називається \mathcal{F} -вимірною, якщо

$$f - (\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))\text{-вимірна}$$

Proposition. $f - \mathcal{F}$ -вимірна (в комплексному сенсі) $\iff u, v - \mathcal{F}$ -вимірні (в дійсному сенсі).

Proof.

\Rightarrow Дано: $f - \mathcal{F}$ -вимірна. Зокрема для кожного $a \in \mathbb{R}$ та для множини $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < a\}$ (це відкрита множина, тому борельова) прообраз $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Із іншого боку, розпишемо прообраз детальніше:

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) < a\} = \{x \in X : u(x) < a\} = u^{-1}((-\infty, a)).$$

Отже, ми довели: $\forall a \in \mathbb{R} : u^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F}$, тобто $u - \mathcal{F}$ -вимірна.

Аналогічно доведемо, що $v - \mathcal{F}$ -вимірна, тільки для кожного $a \in \mathbb{R}$ треба розглянути множину $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < a\}$ (теж відкрита, тож теж борельова).

\Leftarrow Дано: $u, v - \mathcal{F}$ -вимірні. Тут треба скористатися таким фактом, що \mathbb{C} можна сприймати як \mathbb{R}^2 , як схожі топологічні простори. Тоді нам треба довести, що f тіпа $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ -вимірна. Ми знаємо, що $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma\mathcal{A}(\mathcal{P}_2)$, тому мені достатньо буде розглянути довільну множину $A \in \mathcal{P}_2$. Тобто $A = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$. Значить, $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} = \{x \in X : u(x) \in (a_1, b_1], v(x) \in (a_2, b_2]\} = u^{-1}((a_1, b_1]) \cap v^{-1}((a_2, b_2])$. Звідси отримали $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ (до речі, ми вже таке робили, проте зайвий раз можна повторити). Отже, $f - \mathcal{F}$ -вимірна. ■

Corollary. $f - \mathcal{F}$ -вимірна (в комплексному сенсі). Тоді $|f| - \mathcal{F}$ -вимірна (в дійсному сенсі).

Proof.

Маємо $f - \mathcal{F}$ -вимірна, тож звідси $u, v - \mathcal{F}$ -вимірні. Звідси $u^2 + v^2 - \mathcal{F}$ -вимірна та, оскільки $g(x) = \sqrt{x}$ – борельова, то $\sqrt{u^2 + v^2} = |f| - \mathcal{F}$ -вимірна. ■

Definition. Інтеграл Лебега для комплекснозначної функції визначатиметься таким чином:

$$\int_A f d\lambda = \int_A u dv + i \int_A v d\lambda,$$

де $A \in \mathcal{F}$. Все це працює за умовою, що два інтеграли праворуч існують.

Розглянемо буквально ту саму множину, що було раніше:

$$\tilde{L}_p(X, \lambda) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid f - \mathcal{F}\text{-вимірна}, |f|^p \in L(X, \lambda)\}$$

Цього разу $|f|^p \in L(X, \lambda)$ – інтегрована за Лебегом як дійсна функція. На ній знову задамо відношення еквівалентності

$$f \sim g \iff f = g \pmod{\lambda}$$

Знову отримаємо простір $L_p = L_p(X, \lambda)$ при $1 \leq p < \infty$ – множина класів еквівалентності. Аналогічним чином, ми будемо вважати, що L_p – то є просто набір функцій.

Remark. $f \in L_p^{\mathbb{C}} \iff |f| \in L_p^{\mathbb{R}}$.

Ця еквівалентність працюватиме лише за умовою, що f буде \mathcal{F} -вимірною.

Proposition. Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ – вимірний простір та $f = u + iv$.

$$f \in L_p^{\mathbb{C}} \iff u, v \in L_p^{\mathbb{R}}.$$

Proof.

Перед доведенням зауважимо, що справедлива така нерівність: $\max\{|u|, |v|\} \leq |f| \leq |u| + |v|$.

\Rightarrow Дано: $f \in L_p^{\mathbb{C}}$, тоді вона автоматично \mathcal{F} -вимірна, звідси u, v теж автоматично \mathcal{F} -вимірні. Ліва

нерівність каже нам про те, що

$$\int_X |u|^p d\lambda \leq \int_X |f|^p d\lambda < +\infty, \quad \int_X |v|^p d\lambda \leq \int_X |f|^p d\lambda < +\infty.$$

Значить, звідси $u, v \in L_p^{\mathbb{R}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $u, v \in L_p^{\mathbb{R}}$, тоді вони автоматично \mathcal{F} -вимірні, звідси f теж автоматично \mathcal{F} -вимірні. Згадаємо, що функція $x^p, p \geq 1, x \geq 0$ – опукла. Тож за нерівністю Єнсена, а також за правою нерівністю вище, отримаємо:

$$|f|^p \leq (|u| + |v|)^p = 2^p \cdot \left(\frac{|u| + |v|}{2} \right)^p \stackrel{\text{нер-ть Єнсена}}{\leq} 2^p \cdot \frac{|u|^p + |v|^p}{2}.$$

Нарешті, $\int_X |f|^p d\lambda \leq 2^{p-1} \left(\int_X |u|^p d\lambda + \int_X |v|^p d\lambda \right) < +\infty$. Значить, звідси $f \in L_p^{\mathbb{C}}$. ■

Proposition. Покладемо $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$ – буквально те саме. Тоді це – теж норма для комплексного L_p .

Remark. Знову варто пересвідчитися, що $L_p^{\mathbb{C}}$ – векторний простір над \mathbb{R} (да, саме над \mathbb{R}). Проте це впливає безпосередньо з того факту, що $L_p^{\mathbb{R}}$ – векторний простір над \mathbb{R} та з твердження вище.

Proof.

1), 2) цілком аналогічно доводиться.

$$3) \|f + g\|_p^{\mathbb{C}} = \|f + g\|_p^{\mathbb{R}} \stackrel{3) \text{ із } L_p^{\mathbb{R}}}{\leq} \|f\|_p^{\mathbb{R}} + \|g\|_p^{\mathbb{R}} = \|f\|_p^{\mathbb{C}} + \|g\|_p^{\mathbb{C}}. \quad \blacksquare$$

Proposition. Маємо послідовність $\{f_n\} \subset L_p^{\mathbb{C}}$, маємо розклад $f_n = u_n + iv_n$ та $f = u + iv$. $f_n \rightarrow f$ в $L_p^{\mathbb{C}} \iff u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$ в $L_p^{\mathbb{R}}$. Тут все це відбувається при $n \rightarrow \infty$.

Proof.

\Rightarrow Дано: $f_n \rightarrow f$, тобто звідси $\|f_n - f\|_p^{\mathbb{C}} \rightarrow 0$.

$$\|u_n - u\|_p^{\mathbb{R}} = \|u_n - u\|_p^{\mathbb{R}} \leq \|f_n - f\|_p^{\mathbb{C}} \rightarrow 0.$$

$$\|v_n - v\|_p^{\mathbb{R}} = \|v_n - v\|_p^{\mathbb{R}} \leq \|f_n - f\|_p^{\mathbb{C}} \rightarrow 0.$$

Отже, дійсно $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$ в просторі $L_p^{\mathbb{R}}$.

\Leftarrow Дано: $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$, тобто $\|u_n - u\|_p^{\mathbb{R}} \rightarrow 0, \|v_n - v\|_p^{\mathbb{R}} \rightarrow 0$.

$$\|f_n - f\|_p^{\mathbb{C}} = \|f_n - f\|_p^{\mathbb{R}} \leq \|u_n - u\|_p^{\mathbb{R}} + \|v_n - v\|_p^{\mathbb{R}} \leq \|u_n - u\|_p^{\mathbb{R}} + \|v_n - v\|_p^{\mathbb{R}} = \|u_n - u\|_p^{\mathbb{R}} + \|v_n - v\|_p^{\mathbb{R}} \rightarrow 0.$$

Отже, $f_n \rightarrow f$ в просторі $L_p^{\mathbb{C}}$. ■

Proposition. Установлений вище комплексний нормований простір $(L_p, \|\cdot\|_p)$ – банахів.

Proof.

Дійсно, нехай $\{f_n\} \subset L_p^{\mathbb{C}}$ – фундаментальна, маємо $f_n = u_n + iv_n$. Аналогічно можна довести, що $\|u_n - u_m\|_p \rightarrow 0$ та $\|v_n - v_m\|_p \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$. Звідси випливає, що $\{u_n\}, \{v_n\} \subset L_p^{\mathbb{R}}$ – фундаментальні. Проте оскільки $L_p^{\mathbb{R}}$ – банахів, то звідси $\{u_n\}, \{v_n\}$ – збіжні, внаслідок чого $\{f_n\}$ буде також збіжним. ■

Proposition. Якщо $L_p^{\mathbb{R}}$ – сепарабельний, то тоді $L_p^{\mathbb{C}}$ – сепарабельний.

TODO: дописати.

Список використаних джерел

1. В. М. Радченко, плейліст "Теорія міри та інтеграли. Лекції" [*клік*](#)
2. В. М. Радченко, конспект "Курс теорії міри та інтеграла" [*клік*](#)
3. А. Я. Дороговцев, книга "Элементы общей теории меры и интеграла" [*клік*](#)