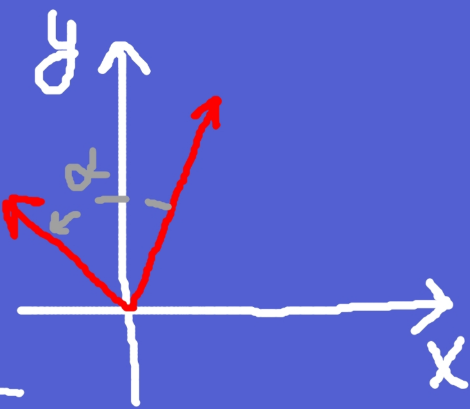
Linear Algebra

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



$$\dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A = \dim L$$

$$A : L \to M$$

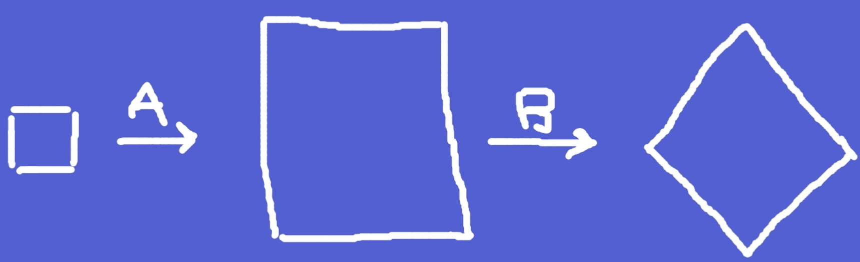
$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\
 & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_n & 1 \\ 0 & \lambda_n \end{matrix}}
\end{array}$$

$$0 \xleftarrow[A-\lambda I]{} f \xleftarrow[A-\lambda I]{} h^{(1)} \xleftarrow[A-\lambda I]{} h^{(2)}$$

$$\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}_2[X]$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = f(x)$$

$$\dim M_1 + \dim M_2 = \dim(M_1 + M_2) + \dim(M_1 \cap M_2)$$



Зміст

1 Лінійні простори

1.1 Основні означення лінійних просторів

Definition 1.1.1 Лінійним простором називається множина L, на якій задані дві операції:

1. $\forall x, y \in L : \exists! z \in L : z = x + y$ – операція додавання
2. $\forall x \in L, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \exists! w \in L : w = \lambda x$ – операція множення на скаляр

та які задовільняють наступним аксіомам:

1) $\forall x, y \in L : x + y = y + x$
2) $\forall x, y, z \in L : (x + y) + z = x + (y + z)$
3) $\exists 0 \in L : \forall x \in L : x + 0 = x$
4) $\forall x \in L : \exists \tilde{x} \in L : x + \tilde{x} = 0$
5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall x \in L : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
6) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \forall x, y \in L : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall x \in L : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
8) $\forall x \in L : 1 \cdot x = x$

Деколи лінійний простір називають по-іншому: **векторний простір**.
Всі елементи векторного простору називають часто ще **векторами**. Я цього робити не буду.

Remark 1.1.2 Якщо $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то лінійний простір називається **дійсним**. При $\mathbb{C}$ – **комплексним**.
Я далі лише буду розглядати дійсні простори, якщо щось додаткове не буде сказано. Для комплексних просторів все буде аналогічно.

Example 1.1.3 Розглянемо прості приклади лінійних просторів:
1) $L = \mathbb{R}^3$ – вектори в просторі;
2) $L = \mathbb{R}[x]$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами;
3) $L = C(A)$ – неперервні функції на множині A.

Example 1.1.4 Задамо множину $L = \mathbb{R}_{>0}$, на якій задаються операції таким чином:
$x + y = x \cdot y \qquad \lambda x = x^\lambda$.
Ми доведемо, що утвориться лінійний простір. Дійсно,
1) $x + y = x \cdot y = y \cdot x = y + x$;
2) $(x + y) + z = (x \cdot y) + z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x + (y \cdot z) = x + (y + z)$;
3) Існує елемент $0 = 1$, для якого $x + 0 = x \cdot 0 = x \cdot 1 = x$. Тут 0 – не число, а символ спеціальний;
4) Існує елемент $\tilde{x} = \dfrac{1}{x}$, для якого $x + \tilde{x} = x \cdot \tilde{x} = x \cdot \dfrac{1}{x} = 1 = 0$;
5) $(\alpha + \beta)x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = \alpha x + \beta x$;
6) $\alpha(x + y) = (x + y)^\alpha = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = \alpha x + \alpha y$;
7) $\alpha(\beta x) = \alpha x^\beta = (x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta)x$;
8) $1 \cdot x = x^1 = x$.
Всі вісім аксіом виконані. Отже, L – лінійний простір.

Proposition 1.1.5 Властивості лінійних просторів
Задано L – лінійний простір. Тоді виконуються такі пункти:
1) існуючий елемент $0 \in L$ – єдиний;
2) $\forall x \in L$ існуючий елемент $\tilde{x}$ – єдиний;
3) $\underset{\in \mathbb{R}}{0} \cdot x = \underset{\in L}{0}$;
4) $\tilde{x} = (-1) \cdot x$. Скорочено позначають елемент $(-1) \cdot = -x$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості.
1) !Припустимо, що $\exists \tilde{0} \in L : x + \tilde{0} = x$ - ще один нуль. Тоді $\tilde{0} = 0 + \tilde{0} = 0$. Суперечність! Отже, елемент – єдиний.

2) !Припустимо, що $\exists \tilde{\tilde{x}} \in L : x + \tilde{\tilde{x}} = 0$ - ще один обернений елемент. Тоді $\tilde{\tilde{x}} = 0 + \tilde{\tilde{x}} = (\tilde{x} + x) + \tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + (x + \tilde{\tilde{x}}) = \tilde{x} + 0 = \tilde{x}$. Суперечність! Отже, елемент – єдиний.

3) $0 \cdot x = (0 + 0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \Rightarrow 0 \cdot x = 0$. У нас остання рівність каже, що до елементу $0 \cdot x$ додається щось, що дорівнює $0 \cdot x$. І ось це щось буде рівне 0.

4) $x + (-x) = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = 0$.
Всі властивості доведені. ■

Remark 1.1.6 У разі якщо принаймні один з властивостей не буде виконаним, то L більше не буде лінійним простором.

Example 1.1.7 Задамо множину $L = \mathbb{R}^2$, на якій задаються операції таким чином:
$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Можемо зауважити, що $(-1) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Точніше кажучи, рівність виконана лише при $y_1 = 0$, але не для всіх таких векторів. Отже, L – не лінійний простір. Просто тому що порушується четверта властивість лінійних просторів.

1.2 Лінійні підпростори

Definition 1.2.1 Задано L – лінійний простір.
Підмножина $M \subset L$ називається **підпростором**, якщо

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall x, y \in M : x + y \in M \\ 2) & \forall x \in M : \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda x \in M \end{array}$$

Тобто множина M – замкнена відносно операцій на L.

Theorem 1.2.2 Задані L – лінійний простір та $M \subset L$ – підпростір. Тоді M – лінійний простір.

Proof.
На множині M вже задані операції за означенням із простору L. Перевіримо всі 8 аксіом. Отже, нехай $x, y, z \in M$, а це автоматично означає $x, y, z \in L$. Також нехай $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді:
1) $x + y = y + x$;
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3) Оскільки $x \in M$, то звідси $0 \cdot x \in M$, а тому $0 \cdot x \in L$, але оскільки L – лінійний простір, то за властивістю 3), $0 \cdot x = 0$, а також звідси $0 + x = 0$;
4) Оскільки $x \in M$, то звідси $(-1) \cdot x \in M$, а тому $(-1) \cdot x \in L$, але оскільки L – лінійний простір, то за властивістю 4), $(-1) \cdot x = -x$, а також звідси $x + (-x) = 0$;
5) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
8) $1 \cdot x = 1$.
Отже, M – лінійний простір за означенням. ■

Example 1.2.3 $M = \mathbb{R}_n[x]$ – многочлен степені не більший за n – підпростір лінійного простору $L = \mathbb{R}[x]$. Тому $M = \mathbb{R}_n[x]$ є також лінійним простором.

1.3 Лінійна залежність та лінійна незалежність

Definition 1.3.1 Задано L – лінійний простір.
Система елементів $\{x_1, \dots, x_n\} \subset L$ називається **лінійно незалежною (л.н.з.)**, якщо

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Система елементів $\{x_1, \dots, x_n\} \subset L$ називається **лінійно залежною (л.з.)**, якщо

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \neq 0 : \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

Remark 1.3.2 Означення лінійної залежності записане як заперечення лінійної незалежності.

Remark 1.3.3 Вираз $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \neq 0$ по-українськи можна трактувати як "не всі α_i нулеві".

Definition 1.3.4 **Лінійною комбінацією** елементів $y_1, \dots, y_n$ називається вираз

$$\gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_n y_n,$$

де $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

Example 1.3.5 Будь-які вектори $\{\vec{a},\vec{b}\}$ – л.н.з. в $\mathbb{R}^2 \iff$ вони не колінеарні (див. аналітичну геометрію).

Example 1.3.6 Задано лінійний простір $L=\mathbb{R}^4$ і система векторів $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_4\}$, де
$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{x}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-5\end{pmatrix}$.
Перевіримо, чи буде система $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_4\}$ л.н.з. Розпишемо їхню лінійну комбінацію:
$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\alpha_3\vec{x}_3+\alpha_4\vec{x}_4=\vec{0}$.
$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}4\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\3\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.
Дана рівняння можна записати в вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases}(1): \alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4=0\\(2): -\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4=0\\(3): 2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=0\\(4): 3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3-5\alpha_4=0\end{cases} \implies \begin{cases}(1): & \alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4=0\\(2): & \alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4=0\\(3)-2(1): & 6\alpha_2+5\alpha_3+\alpha_4=0\\(4)-3(1): & 11\alpha_2+3\alpha_3+8\alpha_4=0\end{cases}$$

$$\implies \begin{cases}(1): & \alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4=0\\(2): & \alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4=0\\-6(2)+(3): & 11\alpha_3-11\alpha_4=0\\-11(4)+(4): & 14\alpha_3-14\alpha_4=0\end{cases} \implies \begin{cases}\alpha_1=9\alpha_4\\\alpha_2=-3\alpha_4\\\alpha_3=\alpha_4\end{cases}$$

Звісно, є нульовий розв'язок, але такий розв'язок не буде єдиним. Можна взяти $(9,-3,1,1)$, щоб наша лінійна комбінація елементів $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_4$ була нульовою. Отже, $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_4\}$ – л.з.

Example 1.3.7 Перевіримо, чи буде $\{\sin x,\cos x,\cos 2x\}$ – л.н.з. в лінійному просторі $L=C(\mathbb{R})$.
$\alpha_1\sin x+\alpha_2\cos x+\alpha_3\cos 2x=0(x)$, причому виконано $\forall x\in\mathbb{R}$. Тут типу $0(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Якщо ця рівність виконується для довільних x, то зокрема має виконуватись і для конкретних.
При $x=0$ отримаємо $\alpha_2+\alpha_3=0$.
При $x=\dfrac{\pi}{2}$ отримаємо $\alpha_1-\alpha_3=0$.
При $x=\dfrac{\pi}{4}$ отримаємо $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2=0$.
Отже, виникає система, яка має одночасно виконуватися:

$$\begin{cases}\alpha_2+\alpha_3=0\\\alpha_1-\alpha_3=0\\\alpha_1+\alpha_2=0\end{cases} \implies \begin{cases}\alpha_2=-\alpha_3\\\alpha_1=\alpha_3\end{cases}$$

Тут вже можуть виникати думки, що це – л.з. система, але (!) візьмемо ще один $x=\dfrac{\pi}{3}$:
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1+\dfrac{1}{2}\alpha_2+\dfrac{1}{2}\alpha_3=0$.
У це рівняння підставимо отримані α_1,α_2 – маємо наступне:
$\sqrt{3}\alpha_3-\alpha_3+\alpha_3=0 \implies \alpha_3=0$. А отже, $\alpha_1=\alpha_2=0$.
Тобто щоб виконувались всі чотири рівняння одночасно, треба обов'язково $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.
Якщо підставляти абсолютно інші $x\in\mathbb{R}$, то ми отримаємо деяке рівняння, яке автоматично виконано в силу того, що $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0$.
Остаточно: $\{\sin x,\cos x,\cos 2x\}$ – л.н.з.

Remark 1.3.8 Тут не можна використовувати цю тотожність: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$. Тому що тут фігурує степінь "квадрат": нема множення двох елементів у лінійному просторі (лише множення на скаляр), $\cos^2 x$ або $\sin^2 x$ – це вже абсолютно інший елемент.

Proposition 1.3.9 Властивості л.з. систем
Задано L – лінійний простір та система $\{x_1,\dots,x_n\}$. Тоді виконуються такі пункти:
1) Якщо система містить л.з. підсистему $\{x_{j_1}\dots,x_{j_k}\}$, то вся система $\{x_1,\dots,x_n\}$ л.з.;
2) Якщо $\{x_1\dots,x_n\}$ містить принаймні один нульовий елемент, то ця система – л.з.;
3) Система $\{x_1\dots,x_n\}$ – л.з. $\iff$ існує елемент, який можна виразити як лінійну комбінацію від інших.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості.
1) $\{x_{j_1} \dots, x_{j_k}\}$ – л.з., тобто $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ненулеві: $\alpha_1 x_{j_1} + \dots + \alpha_k x_{j_k} = 0$. Звідси випливає, що:
$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_{j_1 - 1} + \alpha_1 x_{j_1} + 0x_{j_1+1} + \dots + \alpha_k x_{j_k} + \dots + 0x_n = 0$.
Деякі коефіцієнти в новій лінійнії комбінації ненулеві. Отже, $\{x_1 \dots, x_n\}$ – л.з.

2) Припустимо, що $x_j = 0$, маємо лінійну комбінацію $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_j \underset{=0}{x_j} + \alpha_n x_n = 0$. Можна взяти $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, але $\alpha_j = 1$. Тому наша система буде л.з.

3) В обидва боки доведення.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{x_1, \dots, x_n\}$ – л.з., тобто $\exists \beta_1, \dots, \beta_n$ не всі нулеві: $\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n = 0$.
Не всі нулеві, тобто $\exists \beta_j \neq 0$. Тоді $\beta_j x_j = -\beta_1 x_1 - \dots - \beta_{j-1} x_{j-1} - \beta_{j+1} x_{j+1} - \dots - \beta_n x_n$.
$x_j = \dfrac{-\beta_1}{\beta_j} x_1 - \dots - \dfrac{-\beta_n}{\beta_j} x_n$. А це є розклад в лінійну комбінацію інших.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\exists x_j : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n : x_j = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{j-1} x_{j-1} + \alpha_{j+1} x_{j+1} + \dots + \alpha_n x_n$.
$\implies \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{j-1} x_{j-1} + (-1) x_j + \alpha_{j+1} x_{j+1} + \dots + \alpha_n x_n = 0$.
Коефіцієнти не всі нулеві. Отже, $\{x_1, \dots, x_n\}$ – л.з.
Всі властивості доведені. ■

Proposition 1.3.10 Властивості л.н.з. систем
Задано L – лінійний простір та система $\{x_1, \dots, x_n\}$. Тоді виконуються такі пункти:
1) Якщо система $\{x_1, \dots, x_n\}$ л.н.з., то будь-яка підсистема теж л.н.з.;
2) Нехай $y \in L$ та є лінійною комбінацією елементів системи, тобто $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. Тоді $\{x_1, \dots, x_n\}$ – л.н.з. $\iff$ розклад елемента y є єдиним.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості.
1) *наслідок властивості 1) попереднього твердження.*

2) В обидва боки доведення.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{x_1, \dots, x_n\}$ – л.н.з.
!Припустимо, що розклад не є єдиним. Тобто існує ще одна лінійна комбінація для елемента y, тобто $y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$. Тоді:
$0 = y - y = (\alpha_1 - \beta_1) x_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) x_n$.
Але з умови л.н.з. випливає, що $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$. Суперечність!
Отже, в лінійну комбінацію елементу y розкладається єдиним чином.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n : y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. Перевіримо систему $\{x_1, \dots, x_n\}$ на л.н.з.
$\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n = 0$.
$y = y + 0 = (\alpha_1 + \gamma_1) x_1 + \dots + (\alpha_n + \gamma_n) x_n$
Але за умовою розклад єдиний, тому $\alpha + \gamma_1 = \alpha_1, \dots, \alpha_n + \gamma_n = \alpha_n \implies \gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$.
Отже, система $\{x_1, \dots, x_n\}$ – л.н.з.
Всі властивості доведені. ■

Елементарні перетворення л.н.з. та л.з. систем

Задано лінійний простір L та систему $\{x_1, \dots, x_n\}$. Її можна трохи видозмінити трьома перетвореннями: $P_{j \leftrightarrow k},\ P_{j \to \lambda j},\ P_{j \to j+k}$. Під час дії цих перетворень на систему вони роблять наступне:

I. $P_{j \leftrightarrow k} \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n\} = \{x_1, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_n\}$
j-ий та k-ий елементи зміняться місцями.

II. $P_{j \to \lambda j} \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\} = \{x_1, \dots, \lambda x_j, \dots, x_n\}$
до j-го елементу множимо скаляр, тільки якщо $\lambda \neq 0$.

III. $P_{j \to j+k} \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n\} = \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_k + x_j, \dots, x_n\}$
до j-го елементу додаємо k-ий елемент.

Proposition 1.3.11 Перетворення I, II та III зберігають лінійну залежність чи незалежність.

Proof.
Доведемо спочатку випадок л.н.з. Маємо початкову систему $\{x_1,\dots,x_n\}$ – л.н.з. Розглянемо кожне перетворення:

I. $P_{j\leftrightarrow k}\{x_1,\dots,x_j,\dots,x_k\dots,x_n\}=\{x_1,\dots,x_k,\dots,x_j\dots,x_n\}$.
$\alpha_1x_1+\dots+\alpha_jx_k+\dots+\alpha_kx_j+\dots+\alpha_nx_n=0 \overset{\text{початкова – л.н.з.}}{\Longrightarrow} \alpha_1=\dots=\alpha_n=0$.

II. $P_{j\to\lambda j}\{x_1,\dots,x_j,\dots,x_n\}=\{x_1,\dots,\lambda x_j,\dots,x_n\}$.
$\alpha_1x_1+\dots+\alpha_j\lambda x_j+\dots+\alpha_nx_n=0 \overset{\text{початкова – л.н.з.}}{\Longrightarrow} \alpha_1=\dots=\alpha_j\lambda=\dots=\alpha_n=0$. Але оскільки $\lambda\neq 0$, то гарантовано $\alpha_j=0$.

III. $P_{j\to j+k}\{x_1,\dots,x_j,\dots,x_k,\dots,x_n\}=\{x_1,\dots,x_j,\dots,x_k+x_j,\dots,x_n\}$.
$\alpha_1x_1+\dots+\alpha_jx_j+\dots+\alpha_k(x_k+x_j)+\dots+\alpha_nx_n=0 \implies$
$\alpha_1x_1+\dots+(\alpha_k+\alpha_j)x_j+\dots+\alpha_kx_k+\dots+\alpha_nx_n=0 \overset{\text{початкова – л.н.з.}}{\Longrightarrow}$
$\alpha_1=\alpha_j+\alpha_k=\dots=\alpha_k=\dots=\alpha_n=0$. Тоді $\alpha_j=0$.

Отже, л.н.з. система після будь-якого елементарного перетворення залишається л.н.з.

Залишилось довести випадок л.з. Мамємо початкову систему $\{x_1,\dots,x_n\}$ – л.з.
!Припустимо, що л.з. система після будь-якого з трьох перетворення стане л.н.з. Тобто система $P_{\text{будь-яке}}\{x_1,\dots,x_n\}$ – л.н.з. Зробимо зворотне перетворення (щоб повернути систему так, як вона виглядала) в залежності від того, яке перетворення використовували (I,II або III), тобто:
I. $\{x_1,\dots,x_k,\dots,x_j,\dots,x_n\}$ – змінити ще раз j-ий,k-ий елементи місцями (це буде $P_{j\leftrightarrow k}$));
II. $\{x_1,\dots,\lambda x_j,\dots,x_n\}$ – помножити на $\dfrac{1}{\lambda}$ j-ий елемент (це буде $P_{j\to\frac{1}{\lambda}j}$);
III. $\{x_1,\dots,x_j,\dots,x_k+x_j,\dots,x_n\}$ – помножити на (-1) елемент x_j, додати j-ий елемент до елементу x_k+x_j, а потім помножити на (-1) елемент $(-x_j)$ (це буде $P_{j\to(-1)j}$, далі $P_{j\to k+j}$, а потім $P_{j\to(-1)j}$).
Отримаємо початкову систему, що має стати л.н.з., згідно з щойно доведеним випадком. А ми маємо л.з. за умовою, тому суперечність!
Отже, л.з. система після елементарного перетворення залишається л.з. ■

Example 1.3.12 Задано систему векторів $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ в лінійному просторі $\mathbb{R}^3$. Перевірити, чи буде вона л.н.з., де
$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}14\\-27\\-49\\113\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}43\\-82\\-145\\340\end{pmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{pmatrix}85\\-163\\-293\\677\end{pmatrix}$.
Зробимо такі перетворення над системою: $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2-3\vec{x}_1,\vec{x}_3-6\vec{x}_1\}$. Позначу їх як $\{\vec{x}_1^*,\vec{x}_2^*,\vec{x}_3^*\}$, де
$\vec{x}_1^*=\vec{x}_1=\begin{pmatrix}14\\-27\\-49\\113\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2^*=\vec{x}_2-3\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}_3^*=\vec{x}_3-6\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.
Розпишемо їхню лінійну комбінацію – отримаємо:
$$\alpha_1\vec{x}_1^*+\alpha_2\vec{x}_2^*+\alpha_3\vec{x}_3^*=\vec{0} \implies \begin{cases}14\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\-27\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0\\113\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\end{cases} \implies \alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=0.$$
Таким чином, $\{\vec{x}_1^*,\vec{x}_2^*,\vec{x}_3^*\}$ – л.н.з., а тому початкова система $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ – л.н.з.

1.4 Лінійні оболонки

Definition 1.4.1 Задано L – лінійний простір і система $\{x_1,\dots,x_n\}\subset L$.
Лінійною оболонкою цієї системи називають множину всіх лінійних комбінацій:
$$\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_n\}=\{\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n \mid \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}\}$$
Інколи ще позначають л.о.$\{x_1,\dots,x_n\}$ в нашій літературі. Я дотримуватимусь першого позначення.
Якщо взяти довільну множину $M\subset L$, то **лінійна оболонка** множини задається таким чином:
$$\operatorname{span}M=\{\alpha_1x_1+\dots+\alpha_jx_j \mid j\geq 1,\ x_1,\dots,x_j\in M,\ \alpha_1,\dots,\alpha_j\in\mathbb{R}\}$$

Proposition 1.4.2 Задано L – лінійний простір. Тоді лінійна оболонка (системи або множини) є підпростором.

Proof.
Доведення за означенням. Нехай є $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Маємо, що $\forall w_1, w_2 \in \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, тобто:
$w_1 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$
$w_2 = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$
$w_1 + w_2 = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n \implies w_1 + x_2 \in \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$
$\lambda w_1 = \lambda\alpha_1 x_1 + \dots + \lambda\alpha_n x_n \implies \lambda w_1 \in \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$.
Отже, $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ задає підпростір L. Випадок для $\text{span}\, M$ є аналогічним. ■

Proposition 1.4.3 Задано L – лінійний простір та систему $\{x_1, \dots, x_n\} \subset L$. Тоді $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ – найменший підпростір, що містить елементи системи.

Математично кажучи, припустимо, що K – лінійний підпростір, що містить $x_1, \dots, x_n$ та при цьому $K \subset \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Тоді $K = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$.
Вказівка: показати, що $w \in \text{span}\{x_1, \dots, x_n\} \iff w \in K$.

Proposition 1.4.4 Задано L – лінійний простір та множину $M \subset L$. Тоді $\text{span}\, M$ – найменший підпростір, що містить множину M.
Аналогічно.

Corollary 1.4.5 Якщо M – лінійний підпростір L, то $\text{span}\, M = M$.

Example 1.4.6 Задано $L = \mathbb{R}^3$ і система з трьох векторів $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, де:
$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
Довести, що $\text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \mathbb{R}^3$.
$\text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \stackrel{\text{def.}}{=} \{\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$.

1.5 Підпорядковані та еквівалентні системи

Definition 1.5.1 Задано L – лінійний простір.
Система $\{y_1, \dots, y_n\} \subset L$ називається **підпорядкованою системою** під $\{x_1, \dots, x_m\} \subset L$, якщо:

$$\forall y_j : \exists \alpha_1^j, \dots, \alpha_m^j : y_j = \alpha_1^j x_1 + \dots + \alpha_m^j x_m$$

Позначення: $\{y_1, \dots, y_n\} \prec \{x_1, \dots, x_m\}$.
Якщо маємо множину $Y \subset L$, то вона називається **підпорядкованою** під $X \subset L$, якщо:

$$\forall y \in Y : \exists x_1, \dots, x_n \in X : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

Позначення: $Y \prec X$.

Proposition 1.5.2 Задано L – лінійний простір та системи $\{x_1, \dots, x_m\}$, $\{y_1, \dots, y_n\} \subset L$.
$\{y_1, \dots, y_n\} \prec \{x_1, \dots, x_m\} \iff \text{span}\{y_1, \dots, y_n\} \subset \text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{y_1, \dots, y_n\} \prec \{x_1, \dots, x_m\}$, тобто за означенням:
$\forall y_j : \exists \alpha_1^j, \dots, \alpha_m^j : y_j = \alpha_1^j x_1 + \dots + \alpha_m^j x_m \Rightarrow y_j \in \text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$.
$\forall w \in \text{span}\{y_1, \dots, y_n\}$, тобто $w = \beta_1 y_1 + \dots + \beta_n y_n \implies w \in \text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$
Тобто маємо $\text{span}\{y_1, \dots, y_n\} \subset \text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\text{span}\{y_1, \dots, y_n\} \subset \text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$.
$\implies \forall y_j \in \text{span}\{y_1, \dots, y_n\}$ (тому що $y_j = 0y_1 + \dots + 1y_j + \dots + 0y_n$) $\implies y_j \in \text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$:
$\exists \alpha_1^j, \dots, \alpha_m^j : y_j = \alpha_1^j x_1 + \dots + \alpha_m^j x_m$.
Таким чином, маємо $\{y_1, \dots, y_n\} \prec \{x_1, \dots, x_m\}$. ■

Proposition 1.5.3 Задано L – лінійний простір та множини $X, Y \subset L$.
$Y \prec X \iff \text{span}\, Y \subset \text{span}\, X$.
Аналогічне доведення.

Proposition 1.5.4 Властивості підпорядкованих систем
Підпорядкованість систем (або множин) задає відношення порядку. Тобто відношення: рефлексивне, антисиметричне і транзитивне.
Випливає частково з попереднього твердження.

Example 1.5.5 Нехай задано систему векторів $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ та $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$ з $\mathbb{R}^3$, де:
$\vec{y}_1 = (0,0,1) \quad \vec{x}_1 = (1,0,0)$
$\vec{y}_2 = (0,1,0) \quad \vec{x}_2 = (1,1,0)$
$\vec{y}_3 = (1,0,0) \quad \vec{x}_3 = (1,1,1)$
Перевірити, чи можна вважати, що $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\} \prec \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ та одночасно $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \prec \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$.
Розв'яжемо задачу на основі доведеного твердження.
Ми вже знаємо, що $\operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\} \overset{\textbf{Ex. 1.4.6}}{=} \mathbb{R}^3$.
$\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = \{\beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \beta_3\vec{x}_3 \mid \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}\} = \{(\beta_1+\beta_2+\beta_3, \beta_2+\beta_3, \beta_3) \mid \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}\} \overset{?}{=}$
$= \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$.
Пояснення: в рівності зі знаком питання ми вирішили ствердити, що так теж можна записати. Перевіримо, чи є довільними взагалі a, b, c.
$$\begin{cases} a = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ b = \beta_2 + \beta_3 \\ c = \beta_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta_1 = a - b \\ \beta_2 = b - c \\ \beta_3 = c \end{cases}$$
Отже, отримали, що $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$, або інакше $\begin{cases} \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \subset \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\} \\ \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\} \subset \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \end{cases}$.
Отже, $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\} \prec \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ та $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \prec \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$.

Theorem 1.5.6 Задано L – лінійний простір та системи, наведені нижче. Відомо, що
$\underbrace{\{y_1, \dots, y_n\}}_{\text{є лінійно незалежною}} \prec \{x_1, \dots, x_m\}$. Тоді $n \le m$.

Proof.
!Припустимо, що все ж таки $n > m$. Оскільки $\{y_1, \dots, y_n\}$ – л.н.з., то звідси всі вони ненулеві.
Розглянемо елемент y_1. За умовою теореми, $y_1 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m \neq 0$. Через неможливість рівності нуля, можна твердити, що знайдеться принаймні один ненульовий коефіцієнт.
Тоді, не втрачаючи загальності, нехай $\alpha_1 \neq 0$. Виразимо тепер x_1, маємо:
$x_1 = \alpha_1^{-1} y_1 - \alpha_1^{-1}\alpha_2 x_2 - \dots - \alpha_1^{-1}\alpha_m x_m$. З цього рівняння випливає, що $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \prec \{y_1, x_2, \dots, x_m\}$.
За транзитивністю, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \prec \{y_1, x_2, \dots, x_m\}$.
Розглянемо елемент y_2. За щойно отриманою умовою, $y_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m \neq 0$. Аналогічно має існувати принаймні один ненульовий коефіцієнт серед x.
Не втрачаючи загальності знову, $\beta_2 \neq 0$. Виражаємо x_2:
$x_2 = \beta_2^{-1} y_2 - \beta_2^{-1}\beta_1 y_1 - \dots - \beta_2^{-1}\beta_m x_m$. З цього рівняння випливає, що $\{y_1, x_2, \dots, x_m\} \prec \{y_1, y_2, \dots, x_m\}$.
За транзитивністю, $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\} \prec \{y_1, y_2, x_3, \dots, x_m\}$.
$\vdots$
І так можемо продовжувати допоки не дістанемося до $\{y_1, \dots, y_{m-1}, x_m\} \prec \{y_1, \dots, y_m\}$.
Остаточно: $\{y_1, \dots, y_n\} \prec \{y_1, \dots, y_m\}$ – суперечність! Тому що принаймні y_{m+1} має виражатися через лінійну комбінацію $\{y_1, \dots, y_n\}$, що л.н.з.
Висновок: $n \le m$. ■

Example 1.5.7 Приклад того, що зворотне твердження не є вірним. Саме:
$\{\vec{i}\} \not\prec \{\vec{k}, \vec{j}\}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори простору $\mathbb{R}^3$.

Definition 1.5.8 Задано L – лінійний простір.
Системи $\{y_1, \dots, y_n\} \subset L$ та $\{x_1, \dots, x_m\} \subset L$ називаються **еквівалентними**, якщо:
$$\{y_1, \dots, y_n\} \prec \{x_1, \dots, x_m\}$$
$$\{x_1, \dots, x_m\} \prec \{y_1, \dots, y_n\}$$
Позначення: $\{y_1, \dots, y_n\} \sim \{x_1, \dots, x_m\}$.
Аналогічно якщо $Y, X \subset L$, то вони **еквівалентні**, якщо:
$$Y \prec X$$
$$X \prec Y$$
Позначення: $X \sim Y$.

Proposition 1.5.9 Задано L – лінійний простір та системи $\{x_1, \dots, x_m\}, \{y_1, \dots, y_n\} \subset L$.
$\{y_1, \dots, y_n\} \sim \{x_1, \dots, x_m\} \iff \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_m\}$.
Випливає з **Prp. 1.5.2**

Proposition 1.5.10 Задано L – лінійний простір та множини $X, Y \subset L$.
$X \sim Y \iff \operatorname{span} Y = \operatorname{span} X$.
Аналогічно.

Proposition 1.5.11 Властивості еквівалентних систем
Еквівалентність систем (або множин) задає відношення еквівалентності. Тобто відношення: рефлексивне, симетричне і транзитивне.
Випливає з **Prp. 1.5.4**

Theorem 1.5.12 Задано L – лінійний простір та системи, наведені нижче. Відомо, що
$\underbrace{\{y_1, \dots, y_n\}}_{\text{є лінійно незалежною}} \sim \underbrace{\{x_1, \dots, x_m\}}_{\text{є лінійно незалежною}}$. Тоді $n = m$.
Випливає з **Th. 1.5.6**

Example 1.5.13 Приклад того, що зворотнє твердження не є вірним. Саме :
$\{\vec{i}, \vec{j}\} \not\sim \{\vec{i} - \vec{j}, \vec{j} - \vec{k}\}$ – тут знову одиничні вектори простору.

1.6 База та ранг

Definition 1.6.1 Задано L – лінійний простір.
Підсистема $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}\}$ системи $\{x_1, \dots, x_m\} \subset L$ називається **повною**, якщо

$$\forall x_t \in \{x_1, \dots, x_m\} : x_t \in \operatorname{span}\{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}\}$$

Definition 1.6.2 Задано L – лінійний простір.
Підсистема $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}\}$ системи $\{x_1, \dots, x_m\} \subset L$ називається **max. лінійно незалежною**, якщо

$$\forall x_t \in \{x_1, \dots, x_m\} : \{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}, x_t\} \text{ – лінійно залежна}$$

Proposition 1.6.3 Задано L – лінійний простір та систему $\{x_1, \dots, x_n\} \subset L$.
Підсистема є повною л.н.з. $\iff$ вона є max. л.н.з.

Proof.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}\}$ – max л.н.з. Звідси $\forall x_t \in \{x_1, \dots, x_m\}$ система $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}, x_t\}$ – л.з. Тоді кожний елемент виражається як лінійна комбінація інших. Зокрема $x_t = \beta_1 x_{j_1} + \dots + \beta_k x_{j_k}$.
Оскільки для довільних x_t, то звідси $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}\}$ – повна л.н.з.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}\}$ – повна л.н.з. Тоді $\forall x_t \in \{x_1, \dots, x_m\} : \exists \alpha_t^1, \dots, \alpha_t^k$:
$x_t = \alpha_t^1 x_{j_1} + \dots + \alpha_t^k x_{j_k} \implies \alpha_t^1 x_{j_1} + \dots + \alpha_t^k x_{j_k} + (-1)x_t = 0$, коефіцієнти не всі нулі.
Тому $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}, x_t\}$ – л.з., що й доводить max. л.н.з. ■

Definition 1.6.4 Задано L – лінійний простір.
Базою системи $\{x_1, \dots, x_m\} \subset L$ називається max. л.н.з. (або повна л.н.з.) підсистема.

Example 1.6.5 Задано систему $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} + 2\vec{j}, \vec{i} - 3\vec{j}\}$, де $\vec{i}, \vec{j}$ – одиничні вектори на площині.
Тут є такі бази: $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ або $\{\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{i} - 3\vec{j}\}$. (в принципі, зрозуміло чому). Перелічив не всі бази, які тут можуть бути.

Theorem 1.6.6 Задано L – лінійний простір та систему $\{x_1, \dots, x_m\} \subset L$, для якої є база $\{x_{p_1}, \dots, x_{p_s}\}$.
Тоді $\{x_1, \dots, x_m\} \sim \{x_{p_1}, \dots, x_{p_s}\}$.

Proof.
Зрозуміло, що $\{x_{p_1}, \dots, x_{p_s}\} \prec \{x_1, \dots, x_m\}$. Дійсно, $\{x_{p_1}, \dots, x_{p_s}\}$ – max. л.н.з., тоді $\{x_1, \dots, x_{p_1}, \dots, x_{p_s}, \dots, x_m\}$ – л.з. Тоді $\forall x_{p_j}, j = 1, \dots, s$ виражається через лінійну комбінацію інших.
Перевіримо, що навпаки теж працює:
$\forall x_t \in \{x_1 \dots, x_m\} : \exists \alpha_t^1, \dots, \alpha_t^s : x_t = \alpha_t^1 x_{p_1} + \dots + \alpha_t^s x_{p_s}$. Тоді за означенням, $\{x_1, \dots, x_m\} \prec \{x_{p_1}, \dots, x_{p_s}\}$.
Отже, $\{x_1, \dots, x_m\} \sim \{x_{p_1}, \dots, x_{p_s}\}$. ■

Theorem 1.6.7 Задано L – лінійний простір та систему $\{x_1, \dots, x_m\} \subset L$, для якої є дві бази: $\{x_{p_1}, \dots, x_{p_s}\}$ та $\{x_{t_1}, \dots, x_{t_l}\}$. Тоді $\{x_{p_1}, \dots, x_{p_s}\} \sim \{x_{t_1}, \dots, x_{t_l}\}$.
Як наслідок, за **Th. 1.5.12**, будь-яка база системи має однакову кількість елементів.
Випливає з **Th. 1.6.6** *та властивості транзитивності.*

Definition 1.6.8 Задано L – лінійний простір.
Рангом системи $\{x_1, \dots, x_m\} \subset L$ називається кількість елементів в (будь-якій) її базі.
Позначення: $\operatorname{rank}\{x_1, \dots, x_m\}$.

Example 1.6.9 Задано систему $\{f_1, f_2, f_3, f_4\} \subset \mathbb{R}_2[x]$, для якої треба знайти ранг, де:
$f_1(t) = t^2 - 3t + 2 \quad f_2(t) = 2t^2 + 3t - 5$
$f_3(t) = -t^2 - t + 2 \quad f_4(t) = -2t^2 + 5t - 3$
Загальна побудова: почергово додаємо елемент, допоки не дійдемо до л.з. А потім досліджуємо всі комбінації (раптом там виявиться л.н.з.).
$\{f_1\}$ – л.н.з.? Зрозуміло, що тут л.н.з.
$\{f_1, f_2\}$ – л.н.з.?
$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0 \iff f_1 = -\dfrac{\beta}{\alpha} f_2$. Але коефіцієнти не є пропорційними, тому $\{f_1, f_2\}$ – л.н.з.
$\{f_1, f_2, f_3\}$ – л.н.з.?

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0 \iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 9\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Отже, можна отримати ненульовий розв'язок. Отже, $\{f_1, f_2, f_3\}$ – л.з.
Решта систем із 3-х елементів (треба перевіряти) також є л.з.
Тому $\{f_1, f_2\}$ – max. л.н.з. – база, а остаточно $\operatorname{rank}\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = 2$.

Theorem 1.6.10 Задано L – лінійний простір та систему $\{x_1, \dots, x_m\} \subset L$. Тоді елементарні перетворення на систему не змінює ранг.

Proof.
Маємо систему $\{x_1, \dots, x_m\}$. Розглянемо кожне перетворення окремо (буду це робити лише над першими двома елементами, не втрачаючи загальності):
I. $P_{j \leftrightarrow k}\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \{x_2, x_1, \dots, x_m\}$. Тоді $\operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \operatorname{span}\{x_2, x_1, \dots, x_m\}$;
II. $P_{j \to \lambda j}\{x_1, \dots, x_m\} = \{\lambda x_1, \dots, x_m\}$. Тоді $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_m\} = \operatorname{span}\{\lambda x_1, \dots, x_m\}$;
III. $P_{j \to j+k}\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \{x_1 + x_2, x_2, \dots, x_m\}$. Тоді $\operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \operatorname{span}\{x_1 + x_2, x_2, \dots, x_m\}$.
Із цих рівностей випливає, що $\{x_1, \dots, x_m\} \sim P\{x_1, \dots, x_m\}$, де P – деяке елементарне перетворення. Водночас $\{x_1, \dots, x_m\}$ еквівалентна деякій базі, тож всі $P\{x_1, \dots, x_m\}$ еквівалентні цій же базі.
■

Example 1.6.11 Розглянемо той же приклад $\{f_1, f_2, f_3, f_4\} \subset \mathbb{R}_2[x]$, де
$f_1(t) = t^2 - 3t + 2 \quad f_2(t) = 2t^2 + 3t - 5$
$f_3(t) = -t^2 - t + 2 \quad f_4(t) = -2t^2 + 5t - 3$.
Зробимо ось такі перетворення по черзі:
до f_1 ми додамо f_3;
до f_2 ми додамо f_4;
до f_4 ми додамо $-2f_3$.
В результаті буде система $\{f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*\}$, де
$f_1^*(t) = -4t + 4 \quad f_2^*(t) = 8t - 8$
$f_3^*(t) = -t^2 - t + 2 \quad f_4^*(t) = 7t - 7$
На цьому моменті бачимо, що достатньо переконатись в тому, що $\{f_1^*, f_3^*\}$ – л.н.з. – а це неважко. Причому це автоматично max л.н.з. І тому звідси $\operatorname{rank}\{f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*\} = \operatorname{rank}\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = 2$.

1.7 Базис та розмірність

Definition 1.7.1 Задано L – лінійний простір.
Базисом лінійного простору називають його базу.

Theorem 1.7.2 Задано L – лінійний простір.
$\{x_1, \dots, x_n\}$ – базис простору $L \iff \forall y \in L : \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n : y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$.

Proof.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{x_1, \dots, x_n\}$ – базис.
Тоді за означенням, вона є базою, а тому є max л.н.з. системою. А тому $\forall y \in L$: система $\{x_1, \dots, x_n, y\}$ – л.з., звідси $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. У силу л.н.з. системи $\{x_1, \dots, x_n\}$ заданий розклад єдиний.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $y \in L : \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n : y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$.
Звідси $\{x_1, \dots, x_n\}$ – повна. А оскільки розклад єдиний, система $\{x_1, \dots, x_n\}$ – л.н.з. Отже, $\{x_1, \dots, x_n\}$ – база, звідси базис. ■

Corollary 1.7.3 Задано L – лінійний простір та $\{x_1, \dots, x_n\}$ – базис. Тоді $L = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Definition 1.7.4 Задано L – лініний простір.
Розмірністю лінійного простору називають кількість елементів в базисі (тобто ранг бази).
Позначення: $\dim L$.

Remark 1.7.5 Перевірити систему на базис можна трьома варіантами: перевірка на max л.н.з.; перевірка на повну л.н.з.; перевірка на єдиний розклад системи.

Example 1.7.6 Задано $L = \mathbb{R}_n[x]$. Розглянемо систему $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ та перевіримо, що це – базис. І дійсно, за критерієм,
$\forall f(x) \in \mathbb{R}_n[x] : \exists! a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} : f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \implies \{1, x, \dots, x^n\}$ – базис $\mathbb{R}_n[x]$
$\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

Remark 1.7.7 Надалі працюємо зі скінченновимірними просторами! Тобто коли $\dim L$ скінченне.

Example 1.7.8 Задано $L = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_2 + a_3 - 5a_4 = 0\}$. Знайдемо базис цього простору.
$a_1 - a_2 + a_3 - 5a_4 = 0 \implies a_1 = a_2 - a_3 + 5a_4$.

$$\forall \vec{a} \in L : \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 - a_3 + 5a_4 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Тому } \left\{ \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ – базис, } \dim L = 3.$$

Можна знайти також інший базис:
$a_3 = -a_1 + a_2 + 5a_4$

$$\forall \vec{a} \in L : \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -a_1 + a_2 + 5a_4 \\ a_4 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Тому } \left\{ \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ – базис, } \dim L = 3.$$

Example 1.7.9 Знайдемо базис та розмірність простору $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$. В цьому випадку

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

За щойно доведеною теоремою, нам необхідно знайти базу $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$. Зрозуміло, що $\{\vec{x}_1\}$ - л.н.з. та $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ - л.н.з. (не колінеарні вектори). Тоді перевіряємо $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ на л.н.з.

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 = \vec{0} \implies \begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \\ -4\alpha_1 + 6\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 + 7\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \end{cases} \implies \dots \implies \begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \text{ - має}$$

безліч розв'язків. Отже, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ - л.з.
Тоді $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ - max. л.н.з., а отже, є базою, а отже, є базисом $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$. Нарешті, $\dim \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = 2$.

Proposition 1.7.10 Задано L – лінійний простір та M – підпростір. Тоді $\dim M \leq \dim L$.

Proof.
Виділимо базис $\{f_1, \dots, f_k\} \subset L$ в M, тоді $\dim M = k$. Звідси в L система $\{f_1, \dots, f_k\}$ є л.н.з. Тоді ми можемо доповнити цю систему елементами $g_1, \dots, g_n \in L$, щоб утворити базис $\{f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_n\}$.
А отже, $\dim L = k + n = \dim M + n \implies \dim M \leq \dim L$. ■

Proposition 1.7.11 Задано L – лінійний простір та M – такий лінійний підпростір, що $M \subset L$ та додатково $\dim M = \dim L$. Тоді $L = M$.

Proof.
Нехай $\{f_1, \dots, f_n\}$ - базис в M. Тоді $\{f_1, \dots, f_n\}$ - л.н.з. в L, але оскільки $\dim M = \dim L$, то $\{f_1, \dots, f_n\}$ - базис в L. А тому $\forall y \in L : y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \implies y \in M$.
Тобто маємо, що $L \subset M$. За умовою $M \subset L$. Отже, $L = M$. ■

1.8 Сума, перетин лінійних просторів

Definition 1.8.1 Задано L – лінійний простір та M_1, M_2 – підпростори.
Перетином підпросторів називається множина:

$$M_1 \cap M_2 = \{x \in L \mid x \in M_1, x \in M_2\}$$

Сумою підпросторів називається множина:

$$M_1 + M_2 = \{z \in L : z = x + y \mid x \in M_1, y \in M_2\}$$

Lemma 1.8.2 $M_1 + M_2 = \operatorname{span}\{M_1 \cup M_2\}$.

Proof.
$\{z \in L : z = x + y : x \in M_1, y \in M_2\} \subset \operatorname{span}\{M_1 \cup M_2\}$ – випливає з означення л.о.
Перевіримо, що $\operatorname{span}\{M_1 \cup M_2\} \subset \{z \in L : z = x + y : x \in M_1, y \in M_2\}$. Справді,
$\forall w \in \operatorname{span}\{M_1 \cup M_2\} : w = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m$
$x_1, \dots, x_n \in M_1; y_1, \dots, y_m \in M_2$
$\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$
$w = \underbrace{(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)}_{=x \in M_1} + \underbrace{(\beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m)}_{=y \in M_2} \implies w = x + y \in \{z \in L : z = x + y : x \in M_1, y \in M_2\}$.
Отже, $\operatorname{span}\{M_1 \cup M_2\} = \{z \in L : z = x + y : x \in M_1, y \in M_2\} = M_1 + M_2$. ■

Theorem 1.8.3 Задано L – лінійний простір та M_1, M_2 – підпростори. Тоді $M_1 \cap M_2$ та $M_1 + M_2$ – підпростори L.

Proof.
1) $M_1 \cap M_2$ – підпростір?

$$\forall t_1, t_2 \in M_1 \cap M_2 : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \begin{cases} t_1, t_2 \in M_1 \\ t_1, t_2 \in M_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \in M_1 \\ \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \in M_2 \end{cases} \implies \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \in M_1 \cap M_2.$$

2) $M_1 + M_2$ – підпростір?

$$\forall z_1, z_2 \in M_1 + M_2 : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 \\ z_2 = x_2 + y_2 \end{cases} \quad x_1, x_2 \in M_1; y_1, y_2 \in M_2$$

$\implies \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = \underbrace{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}_{\in M_1} + \underbrace{(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}_{\in M_2} \in M_1 + M_2$. ■

Example 1.8.4 Задамо лінійний простір $L = \mathbb{R}^2$ та підпростори $M_1 = OX, M_2 = OY$ Тоді маємо:
$M_1 \cap M_2 = \{(0, 0)\}$.
$M_1 + M_2 = \mathbb{R}^2 \overset{\text{або}}{=} XOY$, тому що $\vec{z} \in M_1 + M_2 : \vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$.

Remark 1.8.5 $M_1 \cup M_2 \neq XOY$. Ця множина описує вектори, які мають принаймні одну нульову координату. Водночас $M_1 + M_2 = XOY$ – абсолютно довільний вектор площини.

Theorem 1.8.6 Формула Грасмана
Задано L – лінійний простір та M_1, M_2 – підпростори. Тоді
$\dim M_1 + \dim M_2 = \dim(M_1 + M_2) + \dim(M_1 \cap M_2)$.
Якщо чесно, то дане прізвище майже ніде я не бачив, але хай буде.

Proof.
Нехай $\{h_1, \ldots, h_k\}$ буде базисом для $M_1 \cap M_2$. Оскільки $M_1 \cap M_2$ – підпростір M_1, то за однією доведеною лемою, $\dim(M_1 \cap M_2) \leq \dim M_1$. Тоді базисом в M_1 буде система $\{h_1, \ldots, h_k, g_1, \ldots, g_m\}$.
Аналогічними міркуваннями для M_2 отримаємо базис $\{h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_n\}$.
Покажемо, що $\{h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m\}$ - базис $M_1 + M_2$.

I. *Система – л.н.з.*
$\alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_k h_k + \beta_1 f_2 + \cdots + \beta_n f_n + \gamma_1 g_1 + \cdots + \gamma_m g_m = 0$
$\implies \underset{\in M_2}{(\alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_k h_k + \beta_1 f_2 + \cdots + \beta_n f_n)} = \underset{\in M_1}{(-\gamma_1 g_1 - \cdots - \gamma_m g_m)}(*)$.
Елемент справа належить $M_1 \cap M_2$, оскільки сам належить M_1, а лівий елемент належить M_2.
Тому правий елемент можна розкласти за базисом $M_1 \cap M_2$:
$(-\gamma_1 g_1 - \cdots - \gamma_m g_m) = \tau_1 h_1 + \cdots + \tau_k h_k$.
$\implies \tau_1 h_1 + \cdots + \tau_k h_k + \gamma_1 g_1 + \cdots + \gamma_m g_m = 0$.
Оскільки $\{h_1, \ldots, h_k, g_1, \ldots, g_m\}$ - базис, то звідси $\tau_1 = \cdots = \tau_k = \gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0$.
Отже, рівняння $(*)$ матиме вигляд:
$\alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_k h_k + \beta_1 f_2 + \cdots + \beta_n f_n = 0$.
Оскільки $\{h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_k\}$ - базис, то звідси $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$.
Всі коефіцієнти в нас нульові, тоді $\{h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m\}$ - л.н.з.

II. *Система – повна.*
$\forall z \in M_1 + M_2 : z = x + y$,
$x = x_1 h_1 + \cdots + x_k h_k + \tilde{x_1} g_1 + \cdots + \tilde{x_m} g_m \in M_1$
$y = y_1 h_1 + \cdots + y_k h_k + \tilde{y_1} f_1 + \cdots + \tilde{y_n} f_n \in M_2$
$\Rightarrow z = (x_1 + y_1)h_1 + \cdots + (x_k + y_k)h_k + \tilde{x_1} g_1 + \cdots + \tilde{x_m} g_m + \tilde{y_1} f_1 + \cdots + \tilde{y_n} f_n$
Тобто система є справді повною.

Остаточно: $\{h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m\}$ – базис $M_1 + M_2$. Щодо рівності розмірностей:
$\dim(M_1 + M_2) = k + m + n \quad \dim(M_1 \cap M_2) = k$
$\dim M_1 = k + m \quad \dim M_2 = k + n$
$\implies \dim M_1 + \dim M_2 = \dim(M_1 + M_2) + \dim(M_1 \cap M_2)$. ■

Example 1.8.7 Нехай задані такі простори:
$$L_1 = \operatorname{span}\left\{\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$L_2 = \operatorname{span}\left\{\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$$
Маємо$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ – л.з., але водночас $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ – л.н.з. Також $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$ – л.з., але $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ – л.н.з.
Тому в лінійній оболонці лишаємо лише їх. Отже:
$L_1 = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$
$L_2 = \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$

$L_1 + L_2 = \operatorname{span}\{L_1 \cup L_2\} = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{y}_2\}$.
Оскільки наші вектори з простору $\mathbb{R}^3$, то max. л.н.з. система містить не більше 3 елементів. Можна переконатись самостійно, що $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1\}$ – л.н.з. Отже, $L_1 + L_2 = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1\}$.
Оскільки $\dim(L_1 + L_2) = 3$ та $L_1 + L_2 \subset \mathbb{R}^3$, то $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^3$ за **Prp. 1.7.11**

Скористаємось зв'язком між розмірностями:
$\underset{=2}{\dim} L_1 + \underset{=2}{\dim} L_2 = \underset{=3}{\dim}(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) \implies \dim(L_1 \cap L_2) = 1$.
Тоді $L_1 \cap L_2 = \operatorname{span}\{\vec{z}\}$
Якщо $\vec{z} \in L_1$, то $\vec{z} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2$
Якщо $\vec{z} \in L_2$, то $\vec{z} = \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2$
З іншого боку, коли $\vec{z} \in L_1 \cap L_2$, то $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 = \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2$.
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + 2\beta_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 3\beta_1 + 4\beta_2 \\ -\alpha_1 = -2\beta_1 - 2\beta_2 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, ми отримаємо:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2\beta_1 + 2\beta_2 \\ \alpha_2 = -\beta_1 \\ \alpha_2 = -5\beta_1 - 4\beta_2 \end{cases} \implies \beta_1 = -\beta_2. \text{ Тоді } \vec{z} = \beta_1\vec{y}_1 - \beta_1\vec{y}_2 = \beta_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Остаточно $L_1 \cap L_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

1.9 Пряма сума лінійних просторів

Definition 1.9.1 Задано L – лінійний простір та M_1, M_2 – підпростори.
Прямою сумою називають множину:

$$M_1 \dotplus M_2 = \{z \in L \mid \exists! x \in M_1, \exists! y \in M_2 : z = x + y\}$$

Хоча поширеним позначенням є $M_1 \oplus M_2$.

Lemma 1.9.2 Критерій прямої суми
$M_1 + M_2$ є прямою сумою $\iff M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

Proof.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $M_1 \dotplus M_2$, тобто пряма сума. Нехай $z \in M_1 \cap M_2 \Rightarrow \begin{cases} z \in M_1 \\ z \in M_2 \end{cases} \implies \begin{cases} z = \underset{M_1}{0} + \underset{M_2}{z} \\ z = \underset{M_1}{z} + \underset{M_2}{0} \end{cases}$.
За умовою розклад z - єдиний, тому $z = 0 + z = z + 0 \Rightarrow z = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.
!Припустимо, що z має не один розклад, тобто $\begin{cases} z = z_1 + y_1 \\ z = z_2 + y_2 \end{cases}$, $x_1, x_2 \in M_1$, $y_1, y_2 \in M_2$
$\implies 0 = z - z = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \implies \underset{\in M_1}{x_2 - x_1} = \underset{\in M_2}{y_1 - y_2}$.
Тому $x_1 - x_2 \in M_1, M_2$, та $y_1 - y_2 \in M_2, M_1 \implies x_2 - x_1 \in M_1 \cap M_2$, $y_2 - y_1 \in M_1 \cap M_2$.
Отже, $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. Суперечність!
Таким чином, $\forall z \in M_1 + M_2 : \exists! x \in M_1, \exists! t \in M_2 : z = x + y$, тобто пряма сума. ■

Example 1.9.3 Маємо $\mathbb{R}^3$ – лінійний простір та XOY (вектори на площині), OZ (вектори вздовж осі) – два підпростори. Вони утворюють пряму суму, тому що. $XOY \cap OZ = \{\vec{0}\}$.
Пряму суму можна інтуїтивно сприймати як "сумування двох просторів".

Proposition 1.9.4 Інше означення
$M_1 + M_2$ є прямою сумою $\iff \underset{\in M_1}{x} + \underset{\in M_2}{y} = 0 \implies x = y = 0$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $M_1 + M_2$ є прямою сумою. Нехай $x \in M_1, y \in M_2$ так, що $x + y = 0$.
Тоді $x = -y$. Із рівності випливає, що $x, -y \in M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Отже, $x = y = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall x \in M_1, y \in M_2 : x + y = 0 \implies x = y = 0$.
!Припустимо, що елемент $z \in L$ розкладається на суму не єдиним чином, тобто
$z = x + y$ та $z = x' + y'$, де маємо $x, x' \in M_1, y, y' \in M_2$. Тоді
$0 = (x - x') + (y - y') \implies x - x' = 0, y - y' = 0 \implies x = x', y = y'$. Суперечність!
Отже, $\forall z \in L : \exists! x \in M_1, \exists! y \in M_2 : z = x + y$, що й дозволяє утворити пряму суму. ■

Corollary 1.9.5 $\dim(M_1 \dotplus M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$.

Example 1.9.6 Перевірити, чи буде $\mathbb{R}^4 = L_1 \dotplus L_2$, якщо задані відповідні підпростори:
$L_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\}$;
$L_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$.
Якщо $\vec{x} \in L_1$, то $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 + x_3 - 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отримаємо базис

з трьох векторів, $\dim L_1 = 3$.

Якщо $\vec{x} \in L_2$, то $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отримаємо базис з одного вектора, $\dim L_2 = 1$.

Тоді $L_1 + L_2 = \operatorname{span}\{L_1, L_2\}$ – якщо обережно перевірити, то отримані 4 вектори будуть л.н.з., отже, $\dim(L_1 + L_2) = 4$ За формулою про зв'язок між розмірностями, маємо, що $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$. Тобто $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$.

Таким чином, $L_1 + L_2$ є прямою сумою. І нарешті, за **Prp. 1.7.11**, $\dim(L_1 \dot{+} L_2) = \dim \mathbb{R}^4$ та $L_1 \dot{+} L_2 \subset \mathbb{R}^4 \implies L_1 \dot{+} L_2 = \mathbb{R}^4$.

Theorem 1.9.7 Задано L – лінійний простір та M_1, M_2 – підпростори. Нехай $\{f_1, \dots, f_n\}$ - базис M_1 та $\{g_1, \dots, g_k\}$ – базис M_2.
$L = M_1 \dot{+} M_2 \iff \{f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_k\}$ – базис L.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $L = M_1 \dot{+} M_2$. Нехай $z \in L$, тобто $z \in M_1 \dot{+} M_2$. Тоді $\exists! x \in M_1, \exists! y \in M_2 : z = x + y$.
Оскільки $x \in M_1$, то існує єдиний розклад $x = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$.
Оскільки $y \in M_2$, то існує єдиний розклад $y = \beta_1 g_1 + \dots + \beta_k g_k$.
Таким чином, $z = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_k g_k$, причому розклад єдиний. Таким чином, за **Th. 1.7.2**, маємо $\{f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_k\}$ – базис поки $M_1 \dot{+} M_2 = L$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\{f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_k\}$ - базис L. Нехай $x \in M_1 \cap M_2$. Тоді з одного та іншого боків,
$x = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$
$x = \beta_1 g_1 + \dots + \beta_k g_k$.
Звідси $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n - \beta_1 g_1 - \dots - \beta_k g_k = 0 \overset{\text{л.н.з.}}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$.
Отже, звідси $x = 0$, а тому $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Тобто формується пряма сума.
Далі, ясно, що $M_1 \dot{+} M_2 \subset L$, а також $\dim L = n + k = \dim M_1 + \dim M_2 = \dim(M_1 \dot{+} M_2)$. Отже, за **Prp. 1.7.11**, $L = M_1 \dot{+} M_2$. ■

Remark 1.9.8 Якщо L – лінійний простір та $M_1, \dots, M_n$ - підпростори L, то аналогічне означення можна дати для прямої суми цих підпросторів:

$$M_1 \dot{+} \dots \dot{+} M_n = \{z \in L \mid \exists! x_1 \in M_1, \dots, \exists! x_n \in M_n : z = x_1 + \dots + x_n\}$$

Аналогічно можна сформулювати всі твердження, що були вище для прямої суми двох підпросторів. Вони доводяться досить легко. Хіба що запишу критерій прямої суми, бо трошки неочевидно.

Lemma 1.9.9 Критерій прямої суми для більше, ніж двох підпросторів
$M_1 + \dots + M_n$ є прямою сумою $\iff \forall i = \overline{1, n} : M_i \cap (M_1 + \underset{\text{без } i\text{-го}}{\dots} + M_n) = \{0\}$.

1.10 Факторпростори

Задано L – лінійний простір та M – підпростір. Визначимо ось таке відношення еквівалентності на множині L:

$$x \underset{M}{\sim} y \iff x - y \in M$$

Те, що це задає відношення еквівалентності, довести неважко. Отже, ми утворимо класи еквівалентності $[x] = \{y \in L \mid x \underset{M}{\sim} y\} = \{y \in L \mid x - y \in M\}$. Проте цю множину можна записати таким чином: $[x] = \{x + t \mid t \in M\}$.
Дійсно, $y \in [x]$, тобто $x - y \in M$, позначимо $t = x - y$. Тоді зауважимо, що $y = x - t = x + t^*$, де $t^* \in M$. Отже, $y \in \{x + t \mid t \in M\}$.
Тепер $y \in \{x + t \mid t \in M\}$. Звідси $y = x + t \implies t = y - x \in M$, тоді $y \in [x]$.
Даний клас еквівалентності має інше позначення та називають часто **суміжним класом**:

$$x + M = \{x + t \mid t \in M\}$$

Маючи суміжні класи, автоматично утворюємо факторможину $L/_{\sim} = \{[x] \mid x \in L\}$. Дана факторможина має трошки інше позначення:

$$L/_M = \{x + M \mid x \in L\}$$

На цю фактормножину $L/_M$ задамо операції додавання та множення на скаляр:
$\forall x, y \in L : (x + M) + (y + M) = (x + y) + M$;
$\forall x \in L : \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(x + M) = \lambda x + M$.

Lemma 1.10.1 Задані операції визначені коректним чином.

Proof.
I. *Операція + коректна.*
Доведемо, що із $x_1 + M = x_2 + M$ та $y_1 + M = y_2 + M$ випливає $(x_1 + x_2) + M = (y_1 + y_2) + M$.
$x_1 + M = x_2 + M \iff x_1 \sim x_2 \iff x_1 - x_2 \in M$.
$y_1 + M = y_2 + M \iff y_1 \sim y_2 \iff y_1 - y_2 \in M$.
Отже, $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \in M$, оскільки M – лінійний простір також, а тому $x_1 + x_2 \sim y_1 + y_2 \iff (x_1 + x_2) + M = (y_1 + y_2) + M$.

I. *Операція $\cdot\lambda$ коректна.*
Доведемо, що із $x_1 + M = x_2 + M$ випливає $\lambda(x_1 + M) = \lambda(x_2 + M)$.
$x_1 + M = x_2 + M \iff x_1 \sim x_2 \iff x_1 - x_2 \in M$.
Отже, $\lambda(x_1 - x_2) = \lambda x_1 - \lambda x_2 \in M$, оскільки M – лінійний простір також, а тому $\lambda x_1 \sim \lambda x_2 \iff \lambda(x_1 + M) = \lambda(x_2 + M)$. ■

Theorem 1.10.2 Множина $L/_M$ з операціями вище утворює лінійний простір.
Вправа: довести.

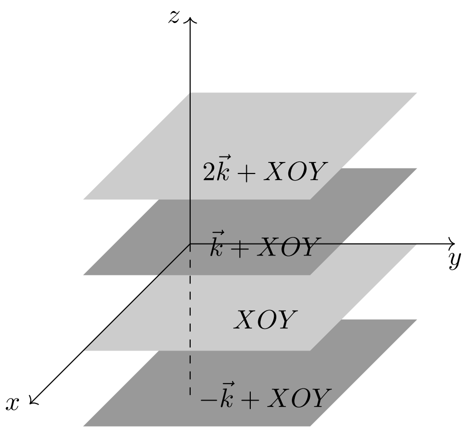
Що єдине зауважу – так це нульовий елемент тут $0 + M = M$, а обернені до $x + M$ є $-x + M$.

Definition 1.10.3 Лінійний простір $L/_M$ зі заданими операціями

$$\forall x, y \in L : (x + M) + (y + M) = (x + y) + M$$
$$\forall x \in L : \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(x + M) = \lambda x + M$$

називають **фактопростором**.

Example 1.10.4 Маємо $\mathbb{R}^3$ а також підпростір XOY. З'ясувати, що таке $\mathbb{R}^3/_{XOY}$.
$\vec{t_1} \sim \vec{t_2} \iff \vec{t_1} - \vec{t_2} \in XOY \iff \vec{t_1}, \vec{t_2}$ лежать на одній площині $\iff z_{t_1} = z_{t_2}$.
Отже, маємо $\vec{k} + XOY = \{\vec{t} \in \mathbb{R}^3 | z_t = z, z \in \mathbb{R}\}$, де $\vec{k}$ — одиничний вектор уздовж OZ.
Фактор-множина $\mathbb{R}^3/_{XOY} = \{\vec{t} + XOY | z_t \in \mathbb{R}\}$.



Кожна площина означає суміжний клас. Ми факторизували по XOY – і вийшло таке розбиття.

Theorem 1.10.5 Задано L – лінійний простір та M – підпростір. Тоді $\dim M + \dim L/_M = \dim L$.

Proof.
Маємо $\{f_1, \dots, f_n\}$ – базис M. Розширимо його до $\{f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_k\}$ – базису L.
Доведемо, що $\{g_1 + W, \dots, g_k + W\}$ – базис $L/_M$.
I. *Система – л.н.з.*
$\alpha_1(g_1 + W) + \dots + \alpha_k(g_k + W) = 0 + W$

$(\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_k g_k) + W = W$
$\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_k g_k \sim 0 \implies \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_k g_k \in M$.
$\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_k g_k = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n$
$\beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n - \alpha_1 g_1 - \dots - \alpha_k g_k = 0 \implies \beta_1 = \dots = \beta_n = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.
Таким чином, $\{g_1 + W, \dots, g_k + W\}$ – л.н.з. система.

II. *Розклад – єдиний.*
Тепер нехай $x + M \in L/_M$. Оскільки $x \in L$, то звідси $x = \gamma_1 f_1 + \dots + \gamma_n f_n + \delta_1 g_1 + \dots + \delta_k g_k$ – єдиний розклад Маємо
$x + M = (\gamma_1 f_1 + \dots + \gamma_n f_n + \delta_1 g_1 + \dots + \delta_k g_k) + M =$
$= ((\gamma_1 f_1) + M) + \dots + ((\gamma_n f_n) + M) + ((\delta_1 g_1) + M) + \dots + ((\delta_k g_k) + M) =$
$= \gamma_1(f_1 + M) + \dots + \gamma_n(f_n + M) + \delta_1(g_1 + M) + \dots + \delta_k(g_k + M) \overset{f_1,\dots,f_n \in M}{=}$
$= (0 + M) + \dots + (0 + M) + \delta_1(g_1 + M) + \dots + \delta_k(g_k + M) = \delta_1(g_1 + M) + \dots + \delta_k(g_k + M)$ – єдиний розклад.
Таким чином, $\{g_1 + W, \dots, g_k + W\}$ – базис. Тобто $\dim L/_M = k = (n + k) - n = \dim L - \dim M$. $\blacksquare$

2 Дії з лінійними просторами

2.1 Лінійні оператори

Definition 2.1.1 Задані L, M – лінійні простори.
Відображення $A\colon L \to M$, тобто: $\forall x \in L : Ax = y \in M$, називається **лінійним оператором**, якщо виконані такі умови:

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall x_1, x_2 \in L : A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \\ 2) & \forall \lambda \in \mathbb{R} : A(\lambda x) = \lambda A x \end{array}$$

Proposition 2.1.2 Властивості лінійних операторів
Задані L, M – лінійні простори та $A\colon L \to M$ – відображення. Тоді виконуються такі пункти:
1) Якщо A – лінійний оператор, то $A(0) = 0$;
2) A – лінійний оператор $\iff \forall x_1, x_2 \in L : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$;
3) Якщо A – лінійний оператор, то $\forall x_1, \dots, x_n \in L : \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$:
$A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 A x_1 + \dots + \alpha_n A x_n$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості.
1) $A(0) = A(x - x) = Ax + A(-x) = Ax - Ax = 0$.

2) Доведення в обидві сторони.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – лінійний оператор.
Тоді $\forall x_1, x_2 \in L : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = A(\alpha_1 x_1) + A(\alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall x_1, x_2 \in L : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$. Тоді:
1)) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \Rightarrow A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$;
2)) $\alpha_1 = 0 \Rightarrow A(\alpha_1 x_1) = \alpha_1 A x_1$.
Ці умови і показують, що A – лінійний оператор.

3) *випливає з другого, доведення за МІ за кількістю x.*
Всі властивості доведені. ■

Example 2.1.3 Нехай задано оператор $A\colon \underset{L}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}^2}} \to \underset{M}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}^2}}$, де $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 3x_2 + x_1 \end{pmatrix}$. Перевіримо, що такий оператор є лінійним.
$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \implies \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$.
$A(\vec{x} + \vec{y}) = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) \\ 3(x_2 + y_2) + (x_1 + y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 - 2x_2) + (y_1 - 2y_2) \\ (3x_2 + x_1) + (3y_2 + y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 3x_2 + x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 \\ 3y_2 + y_1 \end{pmatrix} =$
$= A\vec{x} + A\vec{y}$.
$\alpha \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$
$A(\alpha \vec{x}) = \begin{pmatrix} (\alpha x_1) - 2(\alpha x_2) \\ 3(\alpha x_2) + (\alpha x_1) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 3x_2 + x_1 \end{pmatrix} = \alpha A \vec{x}$.
Отже, за означенням, A – лінійний оператор.

Example 2.1.4 Нехай задано оператор $A\colon \underset{L}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}_n[t]}} \to \underset{M}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}_n[t]}}$ так, що $(Af)(t) = f(t+1) - g(t)$, де $g(t) \not\equiv 0$. Маємо $(A0)(x) = 0(t+1) - g(t) \equiv -g(t) \not\equiv 0$. Отже, за першою властивістю, A – НЕ лінійний оператор.

Definition 2.1.5 Задано L – лінійний простір. Лінійний оператор

$$\varphi\colon L \to \mathbb{R}$$

ще називають **лінійним функціоналом**.

Example 2.1.6 Зокрема маємо лінійний функціонал $\varphi\colon \underset{L}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}^4}} \to \mathbb{R}$, що задається як

$\varphi(\vec{x}) = x_1 + 3x_2 - \pi x_3 + \sqrt{17}\, x_4$.

2.2 Арифметичні дії з лінійними операторами

Definition 2.2.1 Задані лінійні оператори $A, B\colon L \to M$.
Сумою лінійних операторів називають відображення $A + B\colon L \to M$, яке задається правилом:

$$\forall x \in L : (A + B)x = Ax + Bx$$

Множення константи на лінійний оператор називають відображення $\alpha A\colon L \to M$, яке задається правилом:

$$\forall x \in L : (\alpha A)(x) = \alpha(Ax)$$

Definition 2.2.2 Оператор $I\colon L \to L$ називають **одиничним**, якщо

$$\forall x \in L : Ix = x$$

Definition 2.2.3 Оператор $O\colon L \to M$ називають **нульовим**, якщо

$$\forall x \in L : Ox = 0$$

Lemma 2.2.4 Задані лінійні оператори $A, B\colon L \to M$. Тоді $A + B$, $\alpha A, \alpha \in \mathbb{R}$ – лінійні оператори.

Proof.
Нехай $x_1, x_2 \in L$, а також $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді:
Випадок оператора $A + B$.
1) $(A + B)(x_1 + x_2) = A(x_1 + x_2) + B(x_1 + x_2) = Ax_1 + Bx_1 + Ax_2 + Bx_2 = (A + B)x_1 + (A + B)x_2$;
2) $(A + B)(\beta x_1) = A(\beta x_1) + B(\beta x_1) = \beta(Ax_1 + Bx_1) = \beta(A + B)x_1$.
Випадок оператора αA.
1) $(\alpha A)(x_1 + x_2) = \alpha(A(x_1 + x_2)) = \alpha(Ax_1 + Ax_2) = \alpha Ax_1 + \alpha Ax_2 = (\alpha A)x_1 + (\alpha A)x_2$;
2) $(\alpha A)(\beta x_1) = \alpha A(\beta x) = \beta(\alpha Ax) = \beta(\alpha A)x$.
Тож $A + B, \alpha A$ – дійсно лінійні оператори. ■

Remark 2.2.5 Одиничний оператор I зрозуміло, що лінійний оператор.

Proposition 2.2.6 Множину всіх лінійних операторів $A\colon L \to M$ позначають за $\mathcal{L}(L, M)$ – і це є лінійним простором із визначеними операціями $+$ (додаванням) та $\cdot\alpha$ (множенням на скаляр).
Вправа: перевірити 8 аксіом.

Proposition 2.2.7 Задані L, M – векторні простори, причому $\dim L = n$, $\dim M = m$. Тоді $\dim \mathcal{L}(M, N) = \dim L \cdot \dim M$.

Proof.
Нехай $\{x_1, \dots, x_n\}$ – базис L та $\{y_1, \dots, y_m\}$ – базис M. Розглянемо наступну систему операторів $\{E_{ij} \mid i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$. Кожна з цих операторів задається таким чином: $E_{ij}(x_k) = \begin{cases} y_i, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$.
I. *Система – л.н.з.*
$\alpha_{11}E_{11} + \dots + \alpha_{1n}E_{1n} + \dots + \alpha_{m1}E_{m1} + \dots + \alpha_{mn}E_{mn} \equiv O$.
Підставимо x_k в ліву частину – отримаємо $\alpha_{1k}y_1 + \dots + \alpha_{mk}y_m = 0$. Проте оскільки $\{y_1, \dots, y_m\}$ – л.н.з., то звідси $\alpha_{ik} = 0, i = \overline{1, m}$. Це все виконується для кожного k, тому звідси $\alpha_{ij} = 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

II. *Система – повна.*
Нехай $A \in \mathcal{L}(M, N)$. Для кожного $z \in L$ маємо $z = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$, тому звідси
$Az = \beta_1 Ax_1 + \dots + \beta_n Ax_n$.
Кожний елемент $\beta_j Ax_j = \beta_j \gamma_{1j} y_1 + \dots + \beta_j \gamma_{mj} y_m$. Тепер зауважимо, що
$E_{1j}(z) = \beta_1 E_{j1}(x_1) + \dots + \beta_n E_{1j}(x_n) = \beta_j y_1$.
$\vdots$
$E_{mj}(z) = \beta_1 E_{mj}(x_1) + \dots + \beta_n E_{mj}(x_n) = \beta_j y_m$.
Тобто $\beta_j Ax_j = \gamma_{1j} E_{1j} z + \dots + \gamma_{mj} E_{mj} z$.
$Az = (\gamma_{11} E_{11} z + \dots + \gamma_{m1} E_{m1} z) + \dots + (\gamma_{1n} E_{1n} z + \dots + \gamma_{mn} E_{mn} z)$.
Дана рівність виконується при всіх можливих $z \in L$. Скаляри γ_{ij} не залежать ніяким чином від z.
Отже, $A \equiv \gamma E_{11} + \dots + \gamma_{m1} E_{m1} + \dots + \gamma_{1n} E_{n1} + \dots + \gamma_{mn} E_{mn}$. ■

Definition 2.2.8 Познаймомимося з такою штукою, як **дельта-символ Кронекера**, яка визначена так:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Remark 2.2.9 Отже, в просторі $\mathcal{L}(M,N)$ ми знайшли базис $\{E_{ij} \mid i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\}$, де кожний оператор, із урахування нового означення, можна переписати як $E_{ij}x_k = y_i\delta_{jk}$. Тому й звідси отримаємо $\dim \mathcal{L}(L,M) = nm = \dim L \cdot \dim M$.

Definition 2.2.10 Задані лінійні оператори $A\colon L \to M,\ B\colon M \to N$.
Добутком лінійних операторів називають відображення $BA\colon L \to N$, яке визначено правилом:

$$\forall x \in L : (BA)x = B(Ax)$$

Lemma 2.2.11 Задані лінійні оператори $A\colon L \to M,\ B\colon M \to N$. Тоді BA – лінійний оператор.

Proof.
Нехай $x_1, x_2 \in L$, а також $\alpha \in \mathbb{R}$, тоді:
1) $(BA)(x_1 + x_2) = B(A(x_1 + x_2)) = B(Ax_1 + Ax_2) = B(Ax_1) + B(Ax_2) = (BA)x_1 + (BA)x_2$;
2) $(BA)(\alpha x_1) = B(A(\alpha x_1)) = B(\alpha Ax_1) = \alpha B(Ax_1) = \alpha(BA)x_1$.
Отже, BA – дійсно лінійний оператор. ■

Remark 2.2.12 Якщо $A, B\colon L \to L$ та задані $BA, AB\colon L \to L$, то взагалі $BA \neq AB$.

Example 2.2.13 Зокрема задамо лінійні оператори $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ таким чином:
$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ $\qquad B\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$
$BA\vec{x} = B\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$
$AB\vec{x} = A\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_1 + x_2 \\ -3x_1 + x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$
У цьому випадку зрозуміло, що $BA \not\equiv AB$.

Theorem 2.2.14 Властивості добутку лінійних операторів
Задані $A, B, C\colon L \to L$ – лінійні оператори. Тоді виконуються такі пункти:
1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
2) $A \cdot I = I \cdot A$;
3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \qquad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості.
1) З одного та іншого боків маємо:
$((A \cdot B) \cdot C)x = (A \cdot B) \cdot (Cx) = A \cdot (B \cdot (Cx))$
$(A \cdot (B \cdot C))x = A \cdot ((B \cdot C)x) = A \cdot (B \cdot (Cx))$
Таким чином, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

2) $(A \cdot I)x = A \cdot (Ix) = Ax = I \cdot (Ax) = (I \cdot A)x$
Таким чином, $A \cdot I = I \cdot A$.

3) Маємо:
$[A \cdot (B + C)]x = A \cdot [(B + C)x] = A \cdot (Bx + Cx) = A(Bx) + A(Cx) = (A \cdot B)x + (A \cdot C)x = (A \cdot B + A \cdot C)x$
$[(A + B) \cdot C]x = (A + B) \cdot (Cx) = A(Cx) + B(Cx) = (A \cdot C)x + (B \cdot C)x = (A \cdot C + B \cdot C)x$
Таким чином, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \qquad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
Всі властивості доведені. ■

Remark 2.2.15 Множина $\mathcal{L}(L,L)$ є кільцем з одиницею. Тому що $\mathcal{L}(L,L)$ – лінійний простір, а тому утворює абелеву групу, а також виконуються властивості вище. (це зауваження для тих, хто щось знає про теорію груп та кілець).

2.3 Ядро, образ

Definition 2.3.1 Задано лінійний оператор $A\colon L \to M$.
Ядром лінійного оператора A називають таку множину:

$$\ker A = \{x \in L : Ax = 0\}$$

Образом лінійного оператора A називають таку множину:

$$\operatorname{Im} A = \{y \in M : \exists x \in L : y = Ax\}$$

Theorem 2.3.2 Задано лінійний оператор $A\colon L \to M$. Тоді $\ker A$ та $\operatorname{Im} A$ – підпростори відповідно лінійним просторам L та M.

Proof.
I. $\ker A$ – *підпростір* L.
$\forall x_1, x_2 \in \ker A : \forall \lambda \in \mathbb{R} :$
$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0 \implies x_1 + x_2 \in \ker A$
$A(\lambda x_1) = \lambda A x_1 = 0 \implies \lambda x_1 \in \ker A$
Тому це є підпростором лінійного простора L.

II. $\operatorname{Im} A$ – *підпростір* M.
$\forall y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A \implies \forall y_1, y_2 \in M : \exists x_1, x_2 \in L : y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2, \forall \lambda \in \mathbb{R} :$
$y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2) \implies y_1 + y_2 \in \operatorname{Im} A$
$\lambda y_1 = \lambda A x_1 = A(\lambda x_1) \implies \lambda y_1 \in \operatorname{Im} A$
Тому це є підпростором лінійного простора M. ■

Example 2.3.3 Задано $A\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ – такий лінійний оператор: $(Af)(x) = f'(x)$ (те, що він лінійний, в цілому зрозуміло). Знайдемо ядро та образ.
$f \in \ker A \implies (Af)(x) = 0 \implies f'(x) \equiv 0 \implies f(x) = const.$
Отже, $\ker A = \{f(x) = const\} \overset{\text{або}}{=} \mathbb{R}_0[x]$.

$g \in \operatorname{Im} A$, тобто $\exists f : g(f) = (Af)(x) \implies g(x) = f'(x)$.
Отже, $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Образ не завжди легко шукати, тому дамо ще кілька важливих тверджень для спрощення пошуку.

Lemma 2.3.4 Структура образа
Задано лінійний оператор $A\colon L \to M$, нехай $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис L. Тоді $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$.

Proof.
Нехай $y \in \operatorname{Im} A \implies \exists x \in L : y = Ax$. Тоді маємо:
$y = Ax \overset{\text{за базисом}}{=} A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 Ae_1 + \dots + x_n Ae_n \implies y \in \operatorname{span}\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$.
Нехай тепер $y \in \operatorname{span}\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$. Тоді $y = \alpha_1 Ae_1 + \dots + \alpha_n Ae_n = A(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n)$. Звідси $\exists x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, для якого виконано $y = Ax \implies y \in \operatorname{Im} A$.
Отже, $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$.
Звісно, тут деякі елементи з лінійних оболонок можуть закреслитися, але в даному випадку це не суттєва помилка. ■

Theorem 2.3.5 Зв'язок розмірностей ядра та образа
Задано лінійний оператор $A\colon L \to M$, де L – скінченновимірний. Тоді $\dim\ker A + \dim\operatorname{Im} A = \dim L$.

Proof.
Нехай $\{f_1, \dots, f_n\}$ – базис $\ker A$ та $\{g_1, \dots, g_m\}$ – базис $\operatorname{Im} A$. У нас тут $\dim\ker A = n, \dim\operatorname{Im} A = m$.
$\forall j = 1, \dots, m : g_j \in \operatorname{Im} A \implies \exists h_j \in L : Ah_j = g_j$.
Перевіримо, що $\{f_1, \dots, f_n, h_1, \dots, h_m\}$ – базис L.

I. *Система – л.н.з.*
$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n + \beta_1 h_1 + \dots + \beta_m h_m = 0$ (*)
Подіємо оператором на всю комбінацію:
$A(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n + \beta_1 h_1 + \dots + \beta_m h_m) = A(0)$
$\alpha_1 Af_1 + \dots + \alpha_n Af_n + \beta_1 Ah_1 + \dots + \beta_m Ah_m = 0$

$0 + \dots + 0 + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_n g_n = 0 \overset{\text{базис}}{\implies} \beta_1 = \dots = \beta_n = 0.$
Підставимо отримане в (*):
$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0 \overset{\text{базис}}{\Rightarrow} \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$
Отже, з наших міркувань $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$. Таким чином, довели л.н.з.

II. *Система – повна.*
$\forall z \in L : Az \in \operatorname{Im} A \implies Az = \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_m g_m$.
Розглянемо такий елемент $w \in L$, таким чином, що: $w = z - (\gamma_1 h_1 + \dots + \gamma_m h_m)$. Перевіримо, що $w \in \ker A$.
$Aw = A(z - (\gamma_1 h_1 + \dots + \gamma_m h_m)) = Az - \gamma_1 Ah_1 - \dots - \gamma_m Ah_m = Az - \gamma_1 g_1 - \dots - \gamma_m g_m = 0 \implies w \in \ker A$. Тоді $\exists \tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{R} : w = \tau_1 f_1 + \dots + \tau_n f_n$ - розклад за базисом. Отримали:
$\tau_1 f_1 + \dots + \tau_n f_n = z - (\gamma_1 h_1 + \dots + \gamma_m h_m) \implies z = \tau_1 f_1 + \dots + \tau_n f_n + \gamma_1 h_1 + \dots + \gamma_m h_m$.
Таким чином, маємо повну л.н.з. систему.

Разом отримали, що $\{f_1, \dots, f_n, h_1, \dots, h_m\}$ – базис L, а отже, $\dim L = m + n$
$\implies \dim L = \dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A$. ■

Remark 2.3.6 Часто можна зустріти таку термінологію про $\dim \operatorname{Im} A$ та $\dim \ker A$.

Definition 2.3.7 Задано $A \colon L \to M$ – лінійний оператор.
Рангом оператора A називають розмірність образа оператора:

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A$$

Дефектом оператора A називають розмірність ядра оператора:

$$\operatorname{def} A = \dim \ker A$$

Example 2.3.8 Задано $A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ - такий лінійний оператор: $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$. Знайдемо ядро та образ даного оператора.

$\vec{x} \in \ker A \iff A\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3} x_3 \\ x_2 = \dfrac{5}{3} x_3 \end{cases} \iff \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} x_3 \\ \frac{5}{3} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Отже, $\ker A = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Зафіксуємо базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ – одиничні вектори. Звідси $A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Тоді за лемою, $\operatorname{Im} A = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$.

Але за теоремою, маємо $\dim \operatorname{Im} A = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker A = 2$. Тоді варто писати $\operatorname{Im} A = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Завдяки ядру та образу, ми можемо описати відображення на сюр'єктивність чи ін'єктивність.

Proposition 2.3.9 Задано лінійний оператор $A \colon L \to M$.
A – ін'єктивний оператор $\iff \ker A = \{0\}$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – ін'єктивний. Нехай $x \in \ker A$, тоді звідси $Ax = 0 = A0$. За ін'єктивністю, $x = 0$. Отже, $\ker A = \{0\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\ker A = \{0\}$. Нехай виконується $Ax = Ay$, тоді звідси $A(x-y) = Ax - Ay = 0$, тобто $x - y \in \ker A \implies x - y = 0$. Таким чином, $x = y$, а тому A - ін'єктивний. ■

Proposition 2.3.10 Задано лінійний оператор $A \colon L \to M$.
A – сюр'єктивний оператор $\iff \operatorname{Im} A = M$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – сюр'єктивний оператор. За означення образа, $\operatorname{Im} A \subset M$. Тепер нехай $y \in M$, тоді за сюр'єктивністю, $\exists x \in L : y = Ax$, тоді звідси $y \in \operatorname{Im} A$. Отже, $M \subset \operatorname{Im} A$. А тому $\operatorname{Im} A = M$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\operatorname{Im} A = M$, тобто звідси $\forall y \in M : \exists x \in L : y = Ax$. Отже, A - сюр'єктивний. ■

2.4 Обернений оператор

Definition 2.4.1 Задано $A \colon L \to M$ – деякий оператор.
Оператор A називають **оборотним**, якщо існує деякий оператор $B \colon M \to L$, для якого виконано:

$$\forall x \in L : BAx = x$$
$$\forall y \in M : ABy = y$$

Можна переписати умову інакше:

$$\begin{aligned} BA = I_L, &\quad I_L \colon L \to L \\ AB = I_M, &\quad I_M \colon M \to M \end{aligned}$$

Водночас оператор B називають **оберненим** до A.
Позначення: $B = A^{-1}$.

Example 2.4.2 Задано $A \colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ – такий лінійний оператор:
$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$
$(Af)(x) = \begin{pmatrix} a+b & a-2c \\ d & b-d \end{pmatrix}$
Визначимо оператор $B \colon \mathrm{Mat}(2 \times 2) \to \mathbb{R}_3[x]$ таким чином, що:
$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$B\mathbb{A} = (a-c-d) + (c+d)x + \dfrac{1}{2}(a-b-c-d)x^2 + cx^3$.
Перевіримо, що B – обернений оператор зліва та справа. Справді:
$\forall f \in \mathbb{R}_3[x] : (BAf)(x) = B(Af(x)) = B(A(a+bx+cx^2+dx^3)) = B\begin{pmatrix} a+b & a-2c \\ d & b-d \end{pmatrix} =$
$= [a+b-d-(b-d)] + [d+(b-d)]x + \dfrac{1}{2}[(a+b)-(a-2c)-d-(b-d)] + dx^3 = a+bx+cx^2+dx^3 = f(x)$.

$\forall \mathbb{A} \in Mat(2{\times}2) : AB\mathbb{A} = A(B\mathbb{A}) = A\left(B\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = A\left[(a-c-d) + (c+d)x + \dfrac{1}{2}(a-b-c-d)x^2 + cx^3\right] =$
$= \begin{pmatrix} (a-c-d)+(c+d) & (a-c-d) - 2\dfrac{1}{2}(a-b-c-d) \\ c & (c+d)-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbb{A}$.
Отримали: $(BAf)(x) = f(x)$ та $AB\mathbb{A} = \mathbb{A}$. Отже, B – обернений оператор до A, або $B = A^{-1}$.

Example 2.4.3 Задано $A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – такий лінійний оператор: $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$.
$A\vec{x} = \vec{y} \implies \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases}$.
Відносно x_1, x_2 система не містить розв'язків. Отже, не існує оберненого оператора.

Proposition 2.4.4 Задано $A \colon L \to M$ – лінійний та оборотний оператор. Тоді обернений оператор A^{-1} – лінійний.

Proof.
$\forall y_1, y_2 \in M \implies y_1 = AA^{-1}y_1, y_2 = AA^{-1}y_2 : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}:$
$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = A^{-1}(\alpha_1 AA^{-1}y_1 + \alpha_2 AA^{-1}y_2) = A^{-1}[A(\alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2)] =$
$= A^{-1}A(\alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2)) = \alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2.$
Отже, A^{-1} – лінійний оператор. ■

Proposition 2.4.5 Задано $A\colon L \to M$ – лінійний оборотний оператор. Тоді обернений оператор A^{-1} задається єдиним чином.

Proof.
За умовою, ми маємо зворотний оператор A_1^{-1}.
!Припустимо, що існує також A_2^{-1}. Тоді $\forall y \in M:$
$A_1^{-1}y = A_1^{-1}I_M y = A_1^{-1}AA_2^{-1}y = (A_1^{-1}A)(A_2^{-1}y) = I_L(\underbrace{A_2^{-1}y}_{\in L}) = A_2^{-1}y$
$\implies A_1^{-1} = A_2^{-1}$. Суперечність! ■

Proposition 2.4.6 Задано $A\colon L \to M$ – оборотний оператор. Тоді $A^{-1}\colon M \to L$ теж є оборотним, а для її оберненого оператору справедлива рівність $(A^{-1})^{-1} = A$.

Proof.
Якщо A – оборотний, то $\exists A^{-1}$, для якого $AA^{-1} = I_M$, $A^{-1}A = I_L$. Ну й ба більше, цей оператор – єдиний.
Створимо якийсь обернений оператор $T : L \to M$, щоб $A^{-1}T = I_L$, $TA^{-1} = I_M$.
Тоді: $I_L = A^{-1}A = A^{-1}T$ та $I_M = AA^{-1} = TA^{-1}$.
Звідси $T = A$. Отже, A^{-1} зворотний до $A = (A^{-1})^{-1}$. ■

Lemma 2.4.7 Задано $A\colon L \to M$ – лінійний оператор.
A – оборотний $\iff$ A – бієктивне відображення.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A - оборотний, тобто $\exists A^{-1}$.
A – сюр'єктивне відображення.
Зафіксуємо будь-який $y \in M$. Встановимо $x = A^{-1}y$. Тоді маємо, що $Ax = AA^1y = y$. Отже, оператор є сюр'єктивним.
A – ін'єктивне відображення.
!Припустимо, що $\forall x_1, x_2 \in L : x_1 \neq x_2 \implies Ax_1 = Ax_2$. Тоді звідси $Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2) = 0 = AA^{-1}0 \implies x_1 - x_2 = 0$. Суперечність!
Отже, $\forall x_1, x_2 \in L : x_1 \neq x_2 \implies Ax_1 \neq Ax_2$. Тобто є ін'єктивним.
Остаточно: сюр'єктивне + ін'єктивне = бієктивне.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A – бієктивний, тобто $\forall y \in M : \exists! x \in L : y = Ax$.
Побудуємо оператор $B\colon M \to L$, такий, що $\forall y \in M : x = By \in L$ Тоді:
$\forall y \in M : ABy = Ax = y;$
$\forall x \in L : BAx = By = x.$
Тому $B = A^{-1}$, а наш оператор A - оборотний. ■

Proposition 2.4.8 Властивості оборотних операторів
Задано $A\colon L \to M$ та $B\colon L \to M$ – оборотні оператори. Тоді виконуються такі пункти:
1) $I^{-1} = I$;
2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості.
1) $I \cdot I^{-1} = I \cdot I = I$.

2) $(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot I \cdot A^{-1} = I$.

3) $(\alpha A) \cdot (\alpha A)^{-1} = (\alpha A) \cdot (\alpha^{-1}A^{-1}) = \alpha A \cdot \alpha^{-1}A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$.
Всі властивості доведені. ■

Theorem 2.4.9 Задано $A\colon L \to M$ – лінійний оператор.
A – оборотний $\iff \begin{cases} \ker A = \{0\} \\ \operatorname{Im} A = M \end{cases}$.
*Випливає з **Lm. 2.4.7**, а згодом з **Prp. 2.3.9** та **Prp. 2.3.10**.*

Corollary 2.4.10 $A\colon L \to L$ – оборотний $\iff \left[\begin{array}{l} \ker A = \{0\} \\ \ \operatorname{Im} A = L \end{array}\right.$
Вказівка: зв'язок розмірностей ядра та образа.

2.5 Ізоморфні лінійні простори, ізоморфізм

Definition 2.5.1 Лінійні простори L, M називаються **ізоморфними**, якщо

$$\exists A\colon L \to M - \text{бієктивне}$$

Позначення: $L \cong M$.
У цьому випадку оператор A називають **ізоморфізмом**.

Theorem 2.5.2 Задано $A\colon L \to M$ – лінійний оператор.
A – ізоморфізм $\iff$ якщо $\{f_1, \dots, f_n\}$ – базис в L, то $\{ \underset{\substack{\| \\ Af_1}}{g_1}, \dots, \underset{\substack{\| \\ Af_n}}{g_n} \}$ – базис в M.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $L \cong M$, або $A\colon L \to M$ – ізоморфізм. Також в нас відомий базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ в L. Перевіримо, що $\{g_1, \dots, g_n\}$ – базис.
І дійсно, $\forall y \in M : y = Ax = A(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n) = \alpha_1 A f_1 + \dots + \alpha_n A f_n = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n$.
Отримали розклад єдиним чином. Отже, $\{g_1, \dots, g_n\}$ – базис в M.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\{f_1, \dots, f_n\},\ \{Af_1, \dots, Af_n\}$ – відповідно базиси в $L,\ M$.
Тобто маємо, що $Ax = A(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n) = \alpha_1 A f_1 + \dots + \alpha_n A f_n = y$.
Покажемо, що цей оператор є оборотним.
Із щойно "маємо"отримали, що $\forall y \in M : y \in \operatorname{Im} A \implies M \subset \operatorname{Im} A$ За означенням образа, $\operatorname{Im} A \subset M$.
Тоді $\operatorname{Im} A = M \implies \dim(\ker A) = 0 \implies \ker A = \{0\}$.
Отже, A – оборотний оператор, а тому – ізоморфізм. ■

Theorem 2.5.3 $L \cong M \iff \dim L = \dim M$.
Випливає під час доведення попередньої теореми.

Corollary 2.5.4 Будь-який простір розмірності n є ізоморфним арифметичному простору.
Математично кажучи, $L \cong \mathbb{R}^n$.

Example 2.5.5 $\mathbb{R}_2[x] \cong \mathbb{R}^3$, оскільки $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
$\forall f \in \mathbb{R}_2[x] : f(x) = ax^2 + bx + c \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

2.6 Пряма сума операторів

Definition 2.6.1 Задано L – лінійний простір, що розкладається на пряму суму $L = L_1 \dot{+} L_2$. Задано M – лінійний простір, що розкладається на пряму суму $M = M_1 \dot{+} M_2$. Також нехай існують такі оператори $A_1\colon L_1 \to M_1,\ A_2\colon L_2 \to M_2$.
Прямою сумою операторів A_1 та A_2 називають таке відображення $A_1 \dot{+} A_2\colon L_1 \dot{+} L_2 \to M_1 \dot{+} M_2$, яке визначено за правилом:

$$\forall x_1 \in L_1, x_2 \in L_2, x_1 + x_2 \in L_1 \dot{+} L_2 : (A_1 \dot{+} A_2)(x_1 + x_2) = A_1 x_1 + A_2 x_2 \in M_1 \dot{+} M_2$$

Proposition 2.6.2 Якщо A_1, A_2 – лінійні оператори, то тоді $A_1 \dot{+} A_2$ – лінійний оператор.

Proof.
$\forall x \in L_1 + L_2 : \exists! x_1 \in L_1, \exists! x_2 \in L_2$
$\forall y \in L_1 + L_2 : \exists! y_1 \in L_1, \exists! y_2 \in L_2$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$(A_1 \dot{+} A_2)(\alpha x + \beta y) = (A_1 \dot{+} A_2)((\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2)) =$
$= A_1(\alpha x_1 + \beta y_1) + A_2(\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha A_1 x_1 + \beta A_1 y_1 + \alpha A_2 x_2 \beta A_2 y_2 =$
$= \alpha(A_1 x_1 + A_2 x_2) + \beta(A_1 y_1 + A_2 y_2) = \alpha(A_1 \dot{+} A_2)(x_1 + x_2) + \beta(A_1 \dot{+} A_2)(y_1 + y_2) =$
$= \alpha(A_1 \dot{+} A_2)x + \beta(A_1 \dot{+} A_2)y$ ■

Навіщо це все, дізнаємось скоро. А зараз буде відступ, до операторів ми ще повернемось.

3 Теорія матриць

3.1 Вступ

Нехай задано оператор $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ таким чином:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Але деколи так писати оператори не сильно зручно. Ми домовимось це записувати ось таким чином:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Отримали новий цікавий об'єкт.

Definition 3.1.1 Матрицею $m \times n$ назвемо прямокутну таблицю елементів із множини $\mathbb{R}$, яка складається з m рядків та n стовпчиків:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

У цьому випадку $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Ще можна позначати матрицю $\mathbb{A} = (a_{ij})$.
Позначення: $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ – множина всіх матриць $m \times n$ з елементами $\mathbb{R}$.

Remark 3.1.2 Можна матрицю визначати з елементами з $\mathbb{C}$.

Отже, ми отримали, що оператор $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ можна записати в матричному вигляді: $A\vec{x} = \mathbb{A}\vec{x}$, де $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Цілком неважко показати, що даний оператор є лінійним.
Висновок: матриці задають лінійні оператори в $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$.

Поставимо обернену задачу: $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – лінійний оператор. З'ясуємо, чи буде існувати матриця, яка задає цей оператор.
Нехай $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ – базис в $\mathbb{R}^n$ (не обов'язково канонічний) $\implies$ $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$. Подіємо цим вектором на оператор:
$A\vec{x} = A(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1A\vec{e}_1 + \dots + x_nA\vec{e}_n \boxed{=}$
Отримали деякі вектори $A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n \in \mathbb{R}^m$, що мають якісь координати в канонічному базисі $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ із простору $\mathbb{R}^m$:

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad A\vec{e}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{=} x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \overset{\text{вище def.}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{A}\vec{x}.$$

Матриця $\mathbb{A}$ складається із стовпчиків дії A на базиси елементів $A\vec{e}_1$ – 1-й стовпчик, ..., $A\vec{e}_n$ – n-й стовпчик, тобто $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A\vec{e}_1 & \cdots & A\vec{e}_n \end{pmatrix}$.
Висновок: на заданому відображені наш лінійний оператор можна представити через матрицю.

Останнє питання полягає в тому, чи буде така матриця єдиною.
!Припустимо, що $\exists \mathbb{B} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) : \mathbb{A}\vec{x} = \mathbb{B}\vec{x}$, але $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$ – ще одна якась матриця.

Тоді $\forall j = 1, \dots, n : \mathbb{A}\vec{e}_j = \mathbb{B}\vec{e}_j \implies \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} \implies \forall j = 1, \dots, n : \forall i = 1, \dots, m : a_{ij} = b_{ij}$.

Але ж $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$. Суперечність!
Висновок: матриця лінійного оператора задається єдиним чином.

А тепер розглянемо одиничний оператор $I\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ та зафіксуємо $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ – будь-який базис.
$I\vec{x} = I\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + \dots + 1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \mathbb{I}\vec{x}$
Отримали квадратну **одиничну матрицю**:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

І нарешті, розглянемо нульовий оператор $O\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ та зафіксуємо $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ – будь-який базис.
$O\vec{x} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \mathbb{O}\vec{x}.$
Маємо в цьому випадку **нульову матрицю**:

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ми вже задали основні арифметичні дії з лінійними операторами: це додавання та множення на скаляр. Через них ми зможемо отримати арифметичні дії з матрицями.
Задані $A, B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – лінійні оператори та їхні матриці $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.
$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$
Створимо $A + B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, тоді
$(A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} = \mathbb{A}\vec{x} + \mathbb{B}\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_{m1}x_1 + \dots + b_{mn}x_n \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})x_1 + \dots + (a_{1n}+b_{1n})x_n \\ \vdots \\ (a_{m1}+b_{m1})x_1 + \dots + (a_{mn}+b_{mn})x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \vec{x}$

Створимо $\lambda A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, тоді
$(\lambda A)\vec{x} = \lambda A\vec{x} = \lambda \mathbb{A}\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11}x_1 + \dots + \lambda a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \lambda a_{m1}x_1 + \dots + \lambda a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \vec{x}$

Таким чином, ми на множині $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ можемо задати такі операції:
1. Операція додавання.
$\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) : \mathbb{A} + \mathbb{B} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Операція множення на скаляр.
$\forall \mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) : \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\lambda\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

І виконуються всі 8 аксіом (*Вправа: довести*). Отже:

Proposition 3.1.3 $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ (або $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ утворює лінійний простір з операціями вище.

Задані два лінійних оператори $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ та $B\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Першому оператору відповідає матриця $\mathbb{A}$, а другому – матриця $\mathbb{B}$, тобто $A\vec{x} = \mathbb{A}x$, $B\vec{x} = \mathbb{B}x$.
Знайдемо добуток операторів $BA\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, тут їй теж буде відповідати матриця $\mathbb{D}$ (якась інша).
Із одного боку, $(BA)\vec{x} = B(A\vec{x}) = B(\mathbb{A}\vec{x}) = \mathbb{B}(\mathbb{A}\vec{x})\boxed{=}$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \mathbb{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \vec{y}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{km} \end{pmatrix},\ \mathbb{B}\vec{y} = \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + \dots + b_{1m}y_m \\ \vdots \\ b_{k1}y_1 + \dots + b_{km}y_m \end{pmatrix}$$

$$\boxed{=} \begin{pmatrix} b_{11}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + b_{1m}(a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) \\ \vdots \\ b_{k1}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + b_{km}(a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (b_{11}a_{11} + \dots + b_{1m}a_{m1})x_1 + \dots + (b_{11}a_{1n} + \dots + b_{1m}a_{mn})x_n \\ \vdots \\ (b_{k1}a_{11} + \dots + b_{km}a_{m1})x_1 + \dots + (b_{k1}a_{1n} + \dots + b_{km}a_{mn})x_n \end{pmatrix}$$

А з іншого боку, $(BA)\vec{x} = \mathbb{D}\vec{x} = \begin{pmatrix} d_{11}x_1 + \dots + d_{1n}x_n \\ \vdots \\ d_{k1}x_1 + \dots + d_{kn}x_n \end{pmatrix}$.

Розпишемо останню матрицю більш детально:

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & \dots & d_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + \dots + b_{1m}a_{m1} & \dots & b_{11}a_{1n} + \dots + b_{1m}a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1}a_{11} + \dots + b_{km}a_{m1} & \dots & b_{k1}a_{1n} + \dots + b_{km}a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathbb{B}\mathbb{A}$$

Таким чином, ми навчились множити матриці, а також отримали $(BA)\vec{x} = (\mathbb{B}\mathbb{A})\vec{x}$.

Отже, для матриці $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{k\times m}(\mathbb{R})$ та матриці $\mathbb{B} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ отримаємо $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ та

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + \dots + b_{1m}a_{m1} & \dots & b_{11}a_{1n} + \dots + b_{1m}a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1}a_{11} + \dots + b_{km}a_{m1} & \dots & b_{k1}a_{1n} + \dots + b_{km}a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для множення матриці виконуються такі самі властивості як в лінійному операторі:
1) $(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\cdot\mathbb{C} = \mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C})$;
2) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{I} = \mathbb{I}\cdot\mathbb{A}$;
3) $\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}+\mathbb{D}) = \mathbb{A}\cdot\mathbb{B} + \mathbb{A}\cdot\mathbb{D}$.

Proposition 3.1.4 Для лінійного простору $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ система $\{\mathbb{E}_{11}, \dots, \mathbb{E}_{1n}, \dots, \mathbb{E}_{m1}, \dots, \mathbb{E}_{mn}\}$, де $\mathbb{E}_{ij}$ – матриця з одиницею в i рядку, j стовпчику та всюди нулі, утворює базис. Як наслідок, $\dim \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R}) = n\cdot m$.

Proof.
Чому $\{\mathbb{E}_{11}, \dots, \mathbb{E}_{1n}, \dots, \mathbb{E}_{m1}, \dots, \mathbb{E}_{mn}\}$ л.н.з., тут цілком зрозуміло.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{1n}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{m1}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots +$$

$$a_{mn}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = a_{11}\mathbb{E}_{11} + \dots + a_{1n}\mathbb{E}_{1n} + \dots + a_{m1}\mathbb{E}_{m1} + \dots + a_{mn}\mathbb{E}_{mn}.$$

*Можна було скористатися **Prp. 2.2.7**, щоб це довести.* ∎

Definition 3.1.5 Задано матрицю $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
Транспонованою матрицею називають матрицю $\mathbb{D} \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, яка створена таким чином:

$$\forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n} : d_{ij} = a_{ji}$$

Позначення: $\mathbb{D} = \mathbb{A}^T$.

Proposition 3.1.6 Властивості транспонованих матриць
Задано матрицю $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Тоді виконуються такі пункти:
1) $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$;
2) $(\lambda\mathbb{A})^T = \lambda\mathbb{A}^T$;
3) $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$;
4) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$.

Proof.
1), 2), 3) *відносно зрозуміло.*
4) Позначимо $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{C}$ та $\mathbb{B}^T\mathbb{A}^T = \mathbb{D}$.
Тут $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$. Таким чином, $c_{ji} = a_{j1}b_{1i} + \dots + a_{jn}b_{ni} = b^T_{i1}a^T_{1j} + \dots + b^T_{in}a^T_{nj} = d_{ij}$.
Отже, $\mathbb{C} = \mathbb{D} \implies (\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$. ∎

3.2 Коротко про n-лінійні функціонали

Definition 3.2.1 Задано L – лінійний простір.
n-лінійним функціоналом на L називають відображення: $F\colon L \times L \times \underset{n \text{ разів}}{\dots} \times L \to \mathbb{R}$, для якого виконані властивості:

$$\forall j = \overline{1,n} : \forall x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \in L : \forall x_j^1, x_j^2 \in L : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} :$$
$$F(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha x_j^1 + \beta x_j^2, x_{j+1}, \dots, x_n) =$$
$$= \alpha F(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, \dots x_n) + \beta F(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^2, x_{j+1}, \dots x_n)$$

Коротко кажучи, за кожним аргументом виконується лінійність.

Example 3.2.2 Розглянемо декілька прикладів:
1. $L = \mathbb{R}^3$, $\quad F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ – мішаний добуток;
2. $L = \mathbb{R}_n[x]$, $\quad F(f_0, f_1, \dots, f_n) = \displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{\pi^{17}} f_0(0)f_1(1)\dots f_n(n)\,dx$.

Definition 3.2.3 Задано $F\colon L^n \to \mathbb{R}$ – n-лінійний функціонал.
Функціонал називається **симетричним**, якщо виконується властивість:

$$\forall x_1 \dots, x_n \in L : \forall j, k = \overline{1,n}$$
$$F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

Функціонал **кососиметричним**, якщо виконується властивість:

$$\forall x_1 \dots, x_n \in L : \forall j, k = \overline{1,n}$$
$$F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n) = -F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

Example 3.2.4 Зокрема $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ – кососиметричний (властивість мішаного добутку).

Theorem 3.2.5 Задано $F\colon L^n \to \mathbb{R}$ – n-лінійний функціонал.
F – кососиметричний $\iff \forall x_1 \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in L : \forall y \in L :$
$F(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *за означенням.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: права умова. Зокрема виконано це для $y = x_j + x_k$, де $x_j, x_k \in L$. Тоді за лінійністю:

$0 = F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + x_k, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_j + x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \overset{\text{по першому } x_j+x_k}{=}$
$= F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_j + x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) +$
$+ F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_j + x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \overset{\text{обидва по другому } x_j+x_k}{=}$
$= \underbrace{F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \ldots, x_n)}_{=0} + F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) +$

$+ F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \ldots, x_n) + \underbrace{F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)}_{=0}$

$\implies F(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = -F(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_n).$
Отже, функціонал – кососиметричний. ■

Зараз варто зупинитися та згадати теорію про групи перестановок. Інакше далі важко буде. Про групи перестановок можна подивитися в pdf з абстрактної алгебри.

Definition 3.2.6 Задано $F\colon L^n \to \mathbb{R}$ – n-лінійний функціонал, $\dim L = n$. Також задана перестановка $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix} \in S_n$.
Дія перестановки на функціонал визначається так:

$$\tau F(x_1, \ldots, x_n) = F(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$$

Lemma 3.2.7 Задано $F\colon L^n \to \mathbb{R}$ – n-лінійний кососиметричний функціонал, $\dim L = n$. Також задана перестановка $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix} \in S_n$. Тоді $\tau F(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{l(\tau)} F(x_1, \ldots, x_n)$, де $l(\tau)$ – парність перестановки.

Proof.
Відомо, що перестановку можна записати на добуток транспозицій. Зокрема маємо $\tau = \sigma_1 \ldots \sigma_k$.
Розглянемо, як діє одна транспозиція на функціонал:
$\sigma_{j,k} F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$
$-F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$
Тоді якщо діяти по черзі, отримаємо бажану формулу:
$\tau F(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_1 \ldots \sigma_k F(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{l(\tau)} F(x_1, \ldots, x_n).$ ■

Theorem 3.2.8 Єдиність n-лінійного кососиметричного функціоналу
Задано $F, \Phi\colon L^n \to \mathbb{R}$ – n-лінійні кососиметричні функціонали, де $F, \Phi \not\equiv 0$ та $\dim L = n$. Тоді $\exists c \in \mathbb{R} : F(x_1, \ldots, x_n) \equiv c\Phi(x_1, \ldots, x_n)$.

Remark 3.2.9 Константа c не залежить від $x_1, \ldots, x_n$. Це буде видно під час доведення.

Proof.
Нехай $n = 2$ і задано базис $\{e_1, e_2\}$. Тоді:
$\forall x_1 \in L : x_1 = x_{11}e_1 + x_{21}e_2$
$\forall x_2 \in L : x_2 = x_{12}e_1 + x_{22}e_2$
$\implies F(x_1, x_2) = F(x_{11}e_1 + x_{21}e_2, x_{12}e_1 + x_{22}e_2) \boxed{=}$
Скористаємось лінійністю за кожним аргументом
$\boxed{=} x_{11}x_{12}\underset{=0}{F(e_1, e_1)} + x_{11}x_{22}F(e_1, e_2) + x_{21}x_{12}F(e_2, e_1) + x_{21}x_{22}\underset{=0}{F(e_2, e_2)} =$
$= x_{11}x_{22}F(e_1, e_2) - x_{21}x_{12}F(e_1, e_2) = F(e_1, e_2) \cdot \underbrace{(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})}_{\text{схожий на визначник 2 порядку}}$
Так само $\Phi(x_1, x_2) = \cdots = \Phi(e_1, e_2)(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})$.
Оберемо $c = \dfrac{F(e_1, e_2)}{\Phi(e_1, e_2)}$. Тоді $\dfrac{F(x_1, x_2)}{\Phi(x_1, x_2)} = \dfrac{F(e_1, e_2)(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})}{\Phi(e_1, e_2)(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})} = c$.

Нехай $n = 3$ і задано базис $\{e_1, e_2, e_3\}$. Тоді
$\forall x_1 \in L : x_1 = \sum_{j_1=1}^{3} x_{j_1 1}e_{j_1} \qquad \forall x_2 \in L : x_2 = \sum_{j_2=1}^{3} x_{j_2 2}e_{j_2} \qquad \forall x_3 \in L : x_3 = \sum_{j_3=1}^{3} x_{j_3 3}e_{j_3}$
$\implies F(x_1, x_2, x_3) = F\left(\sum_{j_1=1}^{3} x_{j_1 1}e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{3} x_{j_2 2}e_{j_2}, \sum_{j_3=1}^{3} x_{j_3 3}e_{j_3}\right) = \sum_{j_1=1}^{3}\sum_{j_2=1}^{3}\sum_{j_3=1}^{3} x_{j_1 1}x_{j_2 2}x_{j_3 3}F(e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}) \boxed{=}$

Залишаться лише 6 доданків, де в F стоять різні елементи за базисом.
$\boxed{=} x_{11}x_{22}x_{33}F(e_1,e_2,e_3)+x_{11}x_{23}x_{32}F(e_1,e_3,e_2)+x_{12}x_{21}x_{33}F(e_2,e_1,e_3)+x_{12}x_{23}x_{31}F(e_2,e_3,e_1)+$
$+\,x_{13}x_{21}x_{32}F(e_3,e_1,e_2)+x_{13}x_{22}x_{31}F(e_3,e_2,e_1)\boxed{=}$
Змінимо в усіх функціоналах порядок елементів базису на e_1,e_2,e_3 та винесемо за дужки.
$\boxed{=} F(e_1,e_2,e_3)\cdot\underbrace{(x_{11}x_{22}x_{33}-x_{11}x_{23}x_{32}-x_{12}x_{21}x_{33}+x_{12}x_{23}x_{31}+x_{13}x_{21}x_{32}-x_{13}x_{22}x_{31})}_{\text{схожий на визначник 3 порядку}}$
Ну а далі абсолютно аналогічні міркування, тут нам треба було акцентувати увагу на останній підкреслений вираз.

І нарешті, загальний випадок, $\dim L=n$.
$\forall k=1,\dots,n:\forall x_k\in L: x_k=\displaystyle\sum_{j_k=1}^{n} x_{j_k k}e_{j_k}$
$\implies F(x_1,\dots,x_n)=F\left(\displaystyle\sum_{j_1=1}^{n} x_{j_1 1}e_{j_1},\dots,\sum_{j_n=1}^{n} x_{j_n n}e_{j_n}\right)=\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n} x_{1j_1}\dots x_{nj_n}F(e_{j_1},\dots,e_{j_n})\boxed{=}$
Знову ж таки, зникають доданки, де принаймні 2 елементи однакові. Якщо математично:
$\exists j_k=j_l\implies F(e_1,\dots,e_{j_k},\dots,e_{j_l},\dots,e_n)=0$.
Тоді залишаються доданки, де $j_k\neq j_l$ – різні. Тому буде перестановка.
$\boxed{=}\displaystyle\sum_{\tau\in S_n} x_{j_1 1}x_{j_2 2}\dots x_{j_n n}F(e_{j_1},e_{j_2}\dots,e_{j_n})\boxed{=}$
І переставимо елементи базису в природному порядку, завдяки **Lm. 3.2.7**
$\boxed{=}\displaystyle\sum_{\tau\in S_n} x_{j_1 1}x_{j_2 2}\dots x_{j_n n}\tau F(e_1,e_2\dots,e_n)=\sum_{\tau\in S_n} x_{j_1 1}x_{j_2 2}\dots x_{j_n n}(-1)^{l(\tau)}F(e_1,e_2\dots,e_n)=$
$=F(e_1,\dots,e_n)\displaystyle\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{l(\tau)}x_{j_1 1}x_{j_2 2}\dots x_{j_n n}.$
Позначимо $A(x_1,\dots,x_n)=\displaystyle\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{l(\tau)}x_{j_1 1}x_{j_2 2}\dots x_{j_n n}$. Тоді $F(x_1,\dots,x_n)=F(e_1,\dots,e_n)A(x_1,\dots,x_n)$.
І далі все абсолютно аналогічно. ■

Remark 3.2.10 Якщо $\dim L=n$, але F – $(n+1)$-лінійний кососиметричний функціонал, то $F\equiv 0$.

Corollary 3.2.11 Задано $F\colon L^n\to\mathbb{R}$ – n-лінійний функціонал та $\{e_1,\dots,e_n\}$ – базис L. Тоді $F(x_1,\dots,x_n)=\displaystyle\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} x_{j_1 1}\dots x_{j_n n}F(e_{j_1},\dots,e_{j_n})$.

3.3 Визначники

Definition 3.3.1 Визначником (або **детермінантом**) **n-го порядку** будемо називати відображення $\det\colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, який визначений таким чином:

$$\det\mathbb{A}=F(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n),$$

де $F\colon\mathbb{R}^n\times\dots\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – n-лінійний кососиметричний функціонал, а $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ - відповідні стовпчики матриці $\mathbb{A}$. Причому розглядаємо базис одиничних векторів $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$, де $F(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)=1$.
Це робиться для того, щоб детермінант можна було б знайти однозначним чином.

Remark 3.3.2 Із доведення попередньої теореми випливає, що

$$\det\mathbb{A}=\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{l(\tau)}a_{j_1 1}\dots a_{j_n n},$$

де $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}=(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n)$.
Тобто сума таких елементів матриці: елемент першого стовпчика, елемент другого стовпчика і так до кінця. Головне – щоб позиції рядків не збігалися.

У визначника є кілька позначень: $\det\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$ або ще можна позначити $\begin{vmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

Властивості визначників

0) $\det \mathbb{I} = 1$.
Вилпиває з означення.

1) Нехай $\mathbb{A}_b = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a}_n)$, $\mathbb{A}_c = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{c}, \ldots, \vec{a}_n)$ та $\mathbb{A}_{b+c} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{b} + \vec{c}, \ldots, \vec{a}_n)$. Тоді $\det \mathbb{A}_{b+c} = \det \mathbb{A}_b + \det \mathbb{A}_c$.

2) Нехай $\mathbb{A}_\lambda = (\vec{a}_1, \ldots, \lambda\vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n)$. Тоді $\det \mathbb{A}_\lambda = \lambda \det \mathbb{A}$.

3) Нехай $\mathbb{A}_{jk} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n)$. Тоді $\det \mathbb{A}_{jk} = -\det \mathbb{A}_{kj}$.
Всі щойно перелічені властивості випливають з означення детермінанта – n-лінійний кососиметричний функціонал.

4) Нехай $\mathbb{A}_{j+\lambda k} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j + \lambda\vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n)$, де $j \neq k$. Тоді $\det(\mathbb{A}_{j+\lambda k}) = \det \mathbb{A}$.
Випливає з властивостей 1,2,3

5) $\det \mathbb{A}^T = \det \mathbb{A}$

Proof.
Маємо $\det \mathbb{A} = \displaystyle\sum_{\tau \in S_n} (-1)^{l(\tau)} a_{\tau(1)1} \ldots a_{\tau(n)n}$. Тобто в кожному стовпчику обираємо елемент з цього рядка, де ми ще не брали. Із таких міркувань випливає, що $\det \mathbb{A}^T = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$.
Переставимо множники таким чином, щоб другий індекс йшов нумерацією $1, 2, \ldots, n$. Що відбувається тим часом з перестановкою σ: перший рядок переставляється, а другий групується. Тобто ми отримаємо σ^{-1}. Також зазначу, що $l(\sigma) = l(\sigma^{-1})$, оскільки якщо $\sigma = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_n$ – добуток транспозицій, то звідси $\sigma^{-1} = \tau_n \ldots \tau_2\tau_1$.
Тож $\det \mathbb{A}^T = \displaystyle\sum_{\sigma^{-1} \in S_n} (-1)^{l(\sigma^{-1})} a_{\sigma^{-1}(1)1} \ldots a_{\sigma^{(-1)}(n)n} \overset{\sigma^{-1}=\tau}{=} \det \mathbb{A}$. ■

Обчислення визначника шляхом розкриття за рядком

Definition 3.3.3 Задано матрицю $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Мінором матриці $\mathbb{A}$ називається визначник M_{jk}, який був отриманий в результаті викреслення рядка j та стовпчика k з матриці $\mathbb{A}$.

6) Розкриття за j-им рядком: $\qquad \det \mathbb{A} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{jk} M_{jk}$.

Proof.
Доведемо розкриття за 1-м рядком. Для решти аналогічно.
Скористаємось теоремою про єдиність n-лінійного кососиметричного функціоналу. Для цього ми розглянемо два функціонала: 1) $F(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \det \mathbb{A}$;
2) $\Phi(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k} =$

$$= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Перевіримо на лінійність за 1-м аргументом: $\vec{a}_1 = \vec{b} + \alpha\vec{c}$. Тоді
$\Phi(\vec{b} + \alpha\vec{c}, \ldots, \vec{a}_n) =$

$$= (b_1 + \alpha c_1) \det \begin{pmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} b_2 + \alpha c_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n + \alpha c_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det \begin{pmatrix} b_2 + \alpha c_2 & a_{22} & \ldots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n + \alpha c_n & a_{n2} & \ldots \end{pmatrix} =$$

Починаючи з другого доданку, ми використаємо властивості детермінанту

$$= b_1 \det \begin{pmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} + \alpha c_1 \det \begin{pmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

$$- a_{12} \det \begin{pmatrix} b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \alpha a_{12} \det \begin{pmatrix} c_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n+1} a_{1n} \det \begin{pmatrix} b_2 & a_{22} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} \alpha a_{1n} \det \begin{pmatrix} c_2 & a_{22} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & a_{n2} & \dots \end{pmatrix} =$$

Перший стовпчик доданків відповідає першому функціоналу, а другий – другому.
$= \Phi(\vec{b}, \dots, \vec{a}_n) + \alpha \Phi(\vec{c}, \dots, \vec{a}_n)$
Отже, лінійний за 1-м аргументом. Для інших аргументів все аналогічно.

Перевіримо на кососиметричність для 1-го та 2-го аргументу:
$\Phi(\vec{a}_2, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) =$

$$= a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \dots \end{pmatrix} =$$

Перші два доданки ми змінимо місцями. А для решти за властивістю детермінанта, ми змінимо перший та другий стовпчики, зі знаком мінус.

$$= -a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \dots - (-1)^{n+1} a_{1n} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots \end{pmatrix} =$$

$= -\Phi(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$
Отже, кососиметричний за 1-м та 2-м аргументом. Для інших все аналогічно.

Таким чином, за теоремою про єдиність, обидві функціонали відрізняються на константу. Знайдемо $\Phi(\mathbb{I})$ та $F(\mathbb{I})$. За визначенням, $F(\mathbb{I}) = 1$.
$\Phi(\mathbb{I}) = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1$ (там залишився лише єдиний доданок, оскільки решта мають множення на нуль.). Оскільки $F(\mathbb{I}) = C \cdot \Phi(\mathbb{I})$, то $C = 1$. Остаточно, $F(\mathbb{A}) = \Phi(\mathbb{A})$. ■

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} b_k M_{jk} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Елементи $b_1, b_2, \dots, b_n$ знаходяться в j-му рядку.

7) "Фальшиве" розкриття за j-им рядком: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{mk} M_{jk} = \left[\begin{gathered} 0, m \neq j \\ \det \mathbb{A}, m = j \end{gathered} \right.$

Proof.
Випадок $m = j$ – це "правдиве" розкриття за j-им рядком за 5).
Випадок $m \neq j$ – маємо:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{mk} M_{jk} \overset{6)}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \| & \| & & \| \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} 0.$$

(*) За властивістю 5), ми можемо транспонувати матрицю. А за критерієм кососиметричного функціоналу, це має бути рівним нулю через два однакових стовпчика. ■

8) Розкладати детермінант можна за елементами за стовпчиком.

9) "Фальшиве" розкриття за j-им стовпчиком: $\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jm}M_{jk} = \left[\begin{array}{r} 0, m \neq k \\ \det \mathbb{A}, m = k \end{array}\right.$.

Використання методу Гауса для обчислення детермінанту

$$\det \mathbb{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

Беремо перший стовпчик. Спочатку розташовуємо рядки таким чином, щоб перший діагональний елемент був ненульовим (скажімо, у нас r_1 перестановок рядків). А потім робимо такі перетворення, щоб під діагональним елементом всі елементи були нулевими.

$$= (-1)^{r_1} \det \begin{pmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{12}} & \widetilde{a_{13}} & \dots & \widetilde{a_{1n}} \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} \\ 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & \dots & \widetilde{a_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \widetilde{a_{n2}} & \widetilde{a_{n3}} & \dots & \widetilde{a_{nn}} \end{pmatrix} = (-1)^{r_1}\tilde{a_{11}} \det \begin{pmatrix} \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} \\ \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & \dots & \widetilde{a_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a_{n2}} & \widetilde{a_{n3}} & \dots & \widetilde{a_{nn}} \end{pmatrix} \boxed{=}$$

Якщо ми не зможемо знайти рядок такий, щоб перший діагональний елемент був би ненульовим, то тоді звідси всі елементи першого стовпчика нулеві. У такому разі нічого страшно: рівність від цього не змінюється.

Тепер ми маємо визначник на розмірність менше. Робимо буквально ту саму процедуру, що на минулому кроці, допоки не буде дійдемо до першої розмірності. Скажімо, всього r_2 перестановок рядків.

$$\boxed{=}(-1)^{r_1+r_2}\widetilde{a_{11}} \det \begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{a_{22}}} & \widetilde{\widetilde{a_{23}}} & \dots & \widetilde{\widetilde{a_{2n}}} \\ 0 & \widetilde{\widetilde{a_{33}}} & \dots & \widetilde{\widetilde{a_{3n}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{\widetilde{a_{nn}}} \end{pmatrix} = (-1)^{r_1+r_2}\widetilde{a_{11}}\widetilde{\widetilde{a_{22}}} \det \begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{\widetilde{a_{33}}}} & \dots & \widetilde{\widetilde{\widetilde{a_{3n}}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \widetilde{\widetilde{\widetilde{a_{nn}}}} \end{pmatrix} = \dots =$$

$= (-1)^{r_1+r_2+\dots+r_{n-1}}\widetilde{a_{11}}\widetilde{\widetilde{a_{22}}}\dots\widetilde{\widetilde{\widetilde{a_{nn}}}}$.

Ось таким чином можна швиденько обчислити визначник.

Example 3.3.4 Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 9 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Тут використовується метод Гауса, а також кілька разів властивість 5):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 9 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_4=r_4+r_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -4 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_2=r_2+4r_1}{=}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 37 & 21 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 37 & 21 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 85 = 170.$$

Повернімося до властивостей визначників.

10) $\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{D} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{B} \end{array}\right) = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}$,

де $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \mathbb{B} \in \mathrm{Mat}_{k\times k}(\mathbb{R}),\ \mathbb{D} \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R})$. Також $\mathbb{O}$ – нульова матриця.

Proof.

В розгорнутому виді $\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{D} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{B} \end{array}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nk} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix} \overset{\text{метод Гауса}}{=}$

$$= \begin{vmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{12}} & \dots & \widetilde{a_{1n}} & \widetilde{d_{11}} & \widetilde{d_{12}} & \dots & \widetilde{d_{1k}} \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{d_{21}} & \widetilde{d_{22}} & \dots & \widetilde{d_{2k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{a_{nn}} & \widetilde{d_{n1}} & \widetilde{d_{n2}} & \dots & \widetilde{d_{nk}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \widetilde{b_{11}} & \widetilde{b_{12}} & \dots & \widetilde{b_{1k}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \widetilde{b_{22}} & \dots & \widetilde{b_{2k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \widetilde{b_{kk}} \end{vmatrix} = \widetilde{a_{11}}\widetilde{a_{22}}\dots\widetilde{a_{nn}} \cdot \widetilde{b_{11}}\widetilde{b_{22}}\dots\widetilde{b_{kk}} = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}.$$

У нас дійсно $\widetilde{a_{11}} \dots \widetilde{a_{nn}} = \det \mathbb{A}$. Ми можемо із цієї блочної матриці залишити лише матрицю $\mathbb{A}$, над якою робиться буквально той самий метод Гауса. Також $\widetilde{b_{11}} \dots \widetilde{b_{kk}} = \det \mathbb{B}$. Ми коли перетворюємо матрицю $\mathbb{A}$, то матриця $\mathbb{B}$ не змінюється. А далі ми просто беремо лише із великої матриці лише матрицю $\mathbb{B}$, над якою робиться буквально той самий метод Гауса. ■

11) $\det \mathbb{AB} = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}$.

Proof.
Ми скористуємося властивоістю 10) для доведення. Для цього розглянемо матриці $\mathbb{N}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{O} \\ \hline -\mathbb{I} & \mathbb{B} \end{array}\right)$ та $\mathbb{N}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{C} \\ \hline -\mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array}\right)$, де матриця $\mathbb{C} = \mathbb{AB}$ (у даному контексті $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2$ не множина натуральних чисел). Тоді маємо:

$\det \mathbb{N}_1 = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{O} \\ \hline -\mathbb{I} & \mathbb{B} \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B} & -\mathbb{I} \\ \hline -\mathbb{O} & \mathbb{A} \end{array}\right) = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}$

$\det \mathbb{N}_2 = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{C} \\ \hline -\mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array}\right) = (-1)^n \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{A} \\ \hline \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{array}\right) = \det \mathbb{C}$.

Ми хочемо довести, що $\det \mathbb{N}_1 = \det \mathbb{N}_2$.
Будемо рахувати $\det \mathbb{N}_1$ ось таким чином:
- до $n+1$-го стовпчика $\mathbb{N}_1$ додаємо 1-ий, що помножений на b_{11}, 2-ий, що помножений на b_{21}, $\dots$, n-ий, що помножений на b_{n1};
- до $n+2$-го стовпчика $\mathbb{N}_1$ додаємо 1-ий, що помножений на b_{12}, 2-ий, що помножений на b_{22}, $\dots$, n-ий, що помножений на b_{n2};

$\vdots$

- до $2n$-го стовпчика $\mathbb{N}_1$ додаємо 1-ий, що помножений на b_{1n}, 2-ий, що помножений на b_{2n}, $\dots$, n-ий, що помножений на b_{nn}.

Визначник від цього не зміниться. Тоді отримаємо:

$$\det \mathbb{N}_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \det \mathbb{N}_2.$$

Отже, $\det \mathbb{AB} = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}$. ■

Example 3.3.5 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2021 & 2022 \\ 2 & 5 & 2023 & 2024 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 = 18.$

Example 3.3.6 Обчислити так званий **визначник Вандермонда**:

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Будемо обчислювати таким чином:
- від n-го рядка віднімаємо $n-1$-ий, помножений на x_1;
- від $n-1$-го рядка віднімаємо $n-2$-ий, помножений на x_1;

$\vdots$

- від 2-го рядка віднімаємо 1-ий, помножений на x_1.

Оскільки від цього визначник не змінюється, то ми отримаємо:

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \overset{\text{розкриття за 1 стовпчиком}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \Delta(x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Отримали визначник Вандермонда $\Delta(x_2, x_3, \dots, x_n)$ розмірністю на один менше. Аналогічним чином ми отримаємо, що $\Delta(x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod_{j=3}^{n} (x_i - x_2) \Delta(x_3, x_4, \dots, x_n)$.

Тому $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \prod_{j=3}^{n} (x_j - x_2) \Delta(x_3, x_4, \dots, x_n)$.

Якщо продовжувати до кінця, то остаточно отримаємо таку формулу:

$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

3.4 Обернена матриця

Definition 3.4.1 Матрицю $\mathbb{A}$ називають **оборотною**, якщо існує матриця $\mathbb{B}$, для якої виконано:

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$$
$$\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$$

Водночас матрицю $\mathbb{B}$ називають **оберненою** до $\mathbb{A}$.
Позначення: $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.

Definition 3.4.2 Матрицю $\mathbb{A}$ називають **виродженою**, якщо

$$\det \mathbb{A} = 0.$$

Інакше таку матрицю називають **невиродженою**.

Theorem 3.4.3 Матриця $\mathbb{A}$ – оборотна $\iff$ A – невироджена.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\mathbb{A}$ – оборотна. Тоді $\exists \mathbb{A}^{-1} : \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$.
$\det\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}\right) = \det\mathbb{A}\det\mathbb{A}^{-1} = \det\mathbb{I} = 1$. Тому $\det\mathbb{A} \neq 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A – невироджена, тобто $\det\mathbb{A} \neq 0$. Спробуємо сконструювати обернену матрицю $\mathbb{A}^{-1}$.

Для цього розглянемо матрицю $\widetilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$ – **приєднана матриця**.

Тут $A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$ – **алгебраїчне доповнення**. Мінор беремо від матриці $\mathbb{A}$.
Головною мотивацією цієї побудови слугує властивість визначника 7), використання цієї формули.
Щоб це зробити, нам необхідно розглянути добуток таких матриць:

$$\mathbb{A} \cdot \widetilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\mathbb{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det\mathbb{A} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det\mathbb{A} \end{pmatrix} = \mathbb{I} \cdot \det\mathbb{A}.$$

Отже, $\mathbb{A} \cdot \widetilde{\mathbb{A}} = \mathbb{I}\det\mathbb{A}$. Але оскільки $\det\mathbb{A} \neq 0$ за умовою, то маємо, що $\mathbb{A} \cdot \dfrac{\widetilde{\mathbb{A}}}{\det\mathbb{A}} = \mathbb{I}$. Якщо встановити $\mathbb{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbb{A}}\widetilde{\mathbb{A}}$, то отримаємо $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$. ■

Corollary 3.4.4 Якщо матриця $\mathbb{A}$ є невиродженою, то можна знайти обернену за формулою $\mathbb{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbb{A}}\widetilde{\mathbb{A}}$, де $\widetilde{\mathbb{A}}$ – приєднана матриця, яка задається таким чином:

$\widetilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$, де кожне $A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$ – алгебраїчне доповнення.

Example 3.4.5 Знайти обернену матрицю від матриці $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$\det\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \neq 0$. Отже, можна знайти обернену:

$\mathbb{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbb{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T$, в нашому випадку $A_{11} = 2$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 4$.

Остаточно $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.4.6 Властивості обернених матриць
Виконуються такі пункти:
0) $\det\mathbb{A}^{-1} = (\det\mathbb{A})^{-1}$;
1) Для матриці $\mathbb{A}$ існуюча обернена матриця $\mathbb{A}^{-1}$ є єдиною;
2) $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$;
3) $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$;
4) $(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A}^{-1}$;
5) $(\alpha\mathbb{A})^{-1} = \alpha^{-1}\mathbb{A}^{-1}$;
6) $(\mathbb{A}^{-1})^k = (\mathbb{A}^k)^{-1}$;
7) $(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T$;
8) Якщо $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$, причому $a_{11}, \dots, a_{nn} \neq 0$.

0) отримано під час доведення теореми; 1)-5) випливають з властивостей обернених операторів. 6) – наслідок 4); 7),8) зрозуміло.

Побудова оберненої матриці методом Гауса

Definition 3.4.7 Елементарною матрицею назвемо матрицю $\mathbb{E}$, якщо її можна отримати із одиничної матриці $\mathbb{I}$ одним з трьох шляхів:

- зміною рядків місцями – позначу $\mathbb{E}_{i\leftrightarrow j}$;
- множенню рядка на скаляр – позначу $\mathbb{E}_{i\to\lambda i}$;
- додаванню одного рядка на друге, що помножене на число – позначу $\mathbb{E}_{i\to i+\lambda j}$ (хоча можна просто й додавати).

Example 3.4.8 У нас є матриця $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Нижче перелічені матриці будуть елементарними:

1) $\mathbb{E}_{1\leftrightarrow 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ми змінили перший та другий рядки місяцми.

2) $\mathbb{E}_{1\to'3'\cdot 1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, перший рядок помножили на скаляр 3.

3) $\mathbb{E}_{2\to 2+'2'\cdot 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, до другого рядка додали третій рядок, помножений на 2.

Proposition 3.4.9 Задано матрицю $\mathbb{A}$. Тоді:
1) $\mathbb{E}_{i\leftrightarrow j}\mathbb{A}$ – матриця, для якої рядки i та j змінились місцями;
2) $\mathbb{E}_{i\to\lambda i}\mathbb{A}$ – матриця, для якої i-ий рядок помножиться на скаляр $\lambda \neq 0$;
3) $\mathbb{E}_{i\to i+\lambda j}\mathbb{A}$ – матриця, для якої до i-ого рядка додасться рядок j, помножений на скаляр λ.
Вказівка: перемножити дві матриці та побачити результат.

Нехай в нас є матриця $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ (*).

У рівняння (*) домножимо обидві частині рівності на перетворення $T_1, T_2, \dots, T_n$, де кожна T_i описує одне з трьох вище перетворень. Беремо такі перетворення, щоб утворити таку матрицю:

$T_n \dots T_2 T_1 \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{12}} & \dots & \widetilde{a_{1n}} \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{a_{nn}} \end{pmatrix}$ (**)

У рівняння (**) домножимо обидві частині рівності на перетворення $T_{n+1}, T_{n+2}, \dots, T_m$, щоб праворуч виникла одинична матриця:

$T_m \dots T_{n+2} T_{n+1} T_n \dots T_2 T_1 \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$

Тоді звідси випливає, що для матриці $\mathbb{A}$ існує обернена матриця $\mathbb{A}^{-1} = T_m \dots T_{n+2} T_{n+1} T_n \dots T_2 T_1 \mathbb{I}$.

Висновок: під час пошуку оберненої матриці ми беремо матрицю $\mathbb{A}$ та матрицю $\mathbb{I}$, одночасно діємо на однакові перетворення до рівняння (*), а згодом до рівняння (**).
Це можна записати через **розширені матриці** таким чином:
$\left(\mathbb{A} \;\middle|\; \mathbb{I}\right) \longrightarrow \left(T_n \dots T_2 T_1 \mathbb{A} \;\middle|\; T_n \dots T_2 T_1 \mathbb{I}\right) \longrightarrow \left(\mathbb{I} \;\middle|\; \mathbb{A}^{-1}\right)$.

Example 3.4.10 Обчислити обернену матрицю $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ методом Гауса.

Запишемо розширену матрицю:

$\left(\mathbb{A} \;\middle|\; \mathbb{I}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \to -4r_2]{r_1 \to 3r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 9 & 3 & 0 \\ -12 & -8 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 + r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 \to -r_1]{r_2 \to 9r_2}$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -12 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & 27 & -36 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -12 & 0 & 24 & -36 \\ 0 & 9 & 27 & -36 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \to \frac{1}{9} r_2]{r_1 \to -\frac{1}{12} r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right) =$
$\left(\mathbb{I} \;\middle|\; \mathbb{A}^{-1}\right)$.

Таким чином, $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

3.5 Матричні алгебраїчні рівняння

Розглядаються такі рівняння

$$\mathbb{A}X = \mathbb{D}_1 \qquad X\mathbb{B} = \mathbb{D}_2 \qquad \mathbb{A}X\mathbb{B} = \mathbb{D}_3$$

У нашому випадку $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ та $\mathbb{B} \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})$ – обидва оборотні.
Також $\mathbb{D}_1 \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R}), \mathbb{D}_2 \in \mathrm{Mat}_{k\times m}(\mathbb{R}), \mathbb{D}_3 \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$.
Оскільки матриці оборотні то в першому рівнянні домножимо ліворуч на $\mathbb{A}^{-1}$, а в другому рівнянні домножимо праворуч на $\mathbb{B}^{-1}$. Третє рівняння – комбінація першого та другого. Отримаємо наступне:
1) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}X = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{D}_1 \implies X = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{D}_1$;
2) $X\mathbb{B}\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{D}_2\mathbb{B}^{-1} \implies X = \mathbb{D}_2\mathbb{B}^{-1}$;
3) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}X\mathbb{B}\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{D}_3\mathbb{B}^{-1} \implies X = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{D}_3\mathbb{B}^{-1}$.

3.6 Ізоморфізм та обернені матриці

Theorem 3.6.1 Задано матрицю $\mathbb{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.
Система $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ є л.н.з. в просторі $\mathbb{R}^n \iff \mathbb{A}$ – невироджена матриця.

Proof.
Перш за все спочатку встановимо лінійний оператор $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, якому відповідає матриця $\mathbb{A}$. Це означає, що $A\vec{e}_1 = \vec{a}_1, \dots, A\vec{e}_n = \vec{a}_n$. Тепер доведемо в обидві сторони теорему.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ – л.н.з., а тому базис в $\mathbb{R}^n \implies$ оператор A переводить із базиса $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ в базис $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \implies A$ – ізоморфізм, а тому $\exists A^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, якому відповідає якась матриця $\mathbb{B}$. Таким чином, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, тобто $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$. Отже, $\mathbb{A}$ – оборотна матриця, а тому невироджена.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\mathbb{A}$ – невироджена, а тому матриця $\mathbb{A}$ - оборотна. Встановимо оператор $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, якому відповідає матриця $\mathbb{A}^{-1}$. Зауважимо, що $AB = BA = I$, тому що $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$, а тому звідси $B = A^{-1}$. Отже, оператор A – ізоморфізм, а тому вона переводить базис в базис. Таким чином, $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ – базис, тож л.н.з. ■

3.7 Ранг матриці

Маємо $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. За лемою про структуру образа, $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n\} = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$.
Тоді звідси можемо отримати такі означення:

Definition 3.7.1 Стовпчиковим рангом матриці $\mathbb{A}$ називають рангом системи стовпчиків матриць

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} \mathbb{A} = \operatorname{rank}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$$

Definition 3.7.2 Рядковим рангом матриці $\mathbb{A}$ називають ранг системи рядків матриць:

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{row}} \mathbb{A} = \operatorname{rank}\{\vec{a}_1^T, \dots, \vec{a}_m^T\}$$

(я тут неформально $\vec{a}_j^T$ позначив за певний рядок матриці.)

Example 3.7.3 Маємо матрицю $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Знайдемо стовпчиковий та рядковий ранги.
Маємо систему $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$, кожний з яких репрезентує стовпчик. Зауважимо, що $\{\vec{a}_1, \vec{a}_4\}$ – л.н.з., а от уже будь-яка система з трьох векторів – л.з., бо містить в одній системі два колінеарних. Таким чином, $\operatorname{rank}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\} = 2$, а значить, $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} \mathbb{A} = 2$.
Маємо систему $\{\vec{a}_1^T, \vec{a}_2^T, \vec{a}_3^T\}$ (ще раз, неформалочка за позначенням), кожний з яких репрезентує рядок. Доведемо, що $\{\vec{a}_1^T, \vec{a}_2^T\}$ – л.н.з. система. Дійсно,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 7\alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \implies \alpha = \beta = 0.$$

А от система $\{\vec{a}_1^T, \vec{a}_2^T, \vec{a}_3^T\}$ – л.з., оскільки містить два однакових елементи.
Таким чином, $\operatorname{rank}\{\vec{a}_1^T, \vec{a}_2^T, \vec{a}_3^T\} = 2$, а значить, $\operatorname{rank}_{\text{row}} \mathbb{A} = 2$.
Цікаве спостереження: рядкові та стовпчикові ранги збіглись – і це не випадковість, бо ці ранги завжди будуть співпадати. Але це доведено буде згодом.

Definition 3.7.4 Задано матрицю $\mathbb{A} \in \operatorname{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$.
Мінором матриці $\mathbb{A}$ називається її визначник, яка складається з елементів, які стоять на перехресті $i_1, \dots, i_k$ рядків та $j_1, \dots, j_k$ стовпчиків (інше більш загальне означення мінору).
Позначення: $M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k}$.

Definition 3.7.5 Мінорним рангом матриці $\mathbb{A}$ називається максимальний порядок ненульовго мінора.
Позначення: $\operatorname{rank}_{\text{minor}} \mathbb{A}$.

Example 3.7.6 Маємо матрицю $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Тоді маємо такий мінор:
$M^{12}_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$.
Також $\operatorname{rank}_{\text{minor}} \mathbb{A} = 2$, оскільки існує $M^{12}_{14} \neq 0$, а решта мінорів вищого порядку – нульові. Зокрема $M^{123}_{j_1 j_2 j_3} = 0$. До речі, мінорний ранг збігся з рядковим рангом – знову не випадковість.

Theorem 3.7.7 Про базисний мінор
Задано матрицю $\mathbb{A} \in \operatorname{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Відомо, що існує $M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k} \neq 0$, але $\forall t = \overline{1,n}, \forall s = \overline{1,m}$: $M^{i_1,\dots,i_k,s}_{j_1,\dots,j_k,t} = 0$ – ненульовий мінор в такому разі називають **базисним**.
Тоді $\{\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_k}\}$ – база системи стовпчиків матриці $\mathbb{A}$. Внаслідок чого $\operatorname{rank}_{\text{col}} \mathbb{A} = k$.

Коротше кажучи, якщо в матриці $\mathbb{A}$ знайшли якийсь ненульовий мінор k-го порядку, а решта мінори $k+1$-го порядку (які містять мінор k-го порядку!) нулеві, то тоді $\operatorname{rank}_{\text{col}} \mathbb{A} = k$.

Proof.
Із одного боку, ми маємо, що $M^{i_1,\dots i_k,s}_{j_1,\dots j_k,t} = 0$.
А з іншого боку, $M^{i_1,\dots i_k,s}_{j_1,\dots j_k,t} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} & a_{i_1 t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} & a_{i_k t} \\ a_{s j_1} & \dots & a_{s j_k} & a_{st} \end{vmatrix} \boxed{=}$
Цей визначник ми розкриємо за останнім рядком.
$\boxed{=} (-1)^{k+1+1} a_{sj_1} M^{i_1,\dots,i_k}_{j_2,\dots,j_k t} + (-1)^{k+1+2} a_{sj_2} M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,j_3,\dots,j_k t} + \dots + (-1)^{k+1+k} a_{sj_k} M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_{k-1} t} + (-1)^{k+1+k+1} a_{st} M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k}$
За умовою, ми маємо $M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k} \neq 0$, а тому поділимо обидві частини рівності на цей мінор. А далі виразимо a_{st} – отримаємо:
$$(-1)^{k+1+k} a_{st} = (-1)^{k+1+1} a_{sj_1} \frac{M^{i_1,\dots,i_k}_{j_2,\dots,j_k t}}{M^{i_1,\dots,i_k}_{j_2,\dots,j_k}} + (-1)^{k+1+2} a_{sj_2} \frac{M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,j_3,\dots,j_k t}}{M^{i_1,\dots,i_k}_{j_2,\dots,j_k}} + \dots + (-1)^{k+1+k} a_{sj_k} \frac{M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_{k-1} t}}{M^{i_1,\dots,i_k}_{j_2,\dots,j_k}}$$
І множимо на (-1), якщо ліворуч стоїть мінус. Кожний дріб разом з $(-1)^q$ для спрощення я позначу відповідно $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \dots, \Gamma_{j_k}$ – всі ці коефіцієнти не залежать від $s = \overline{1,m}$. Тоді виникне:
$a_{st} = \Gamma_{j_1} a_{sj_1} + \dots + \Gamma_{j_k} a_{sj_k}$, виконана рівність $\forall s = \overline{1,m}$.
А тому якщо розглянути вектор $\vec{a}_t = \begin{pmatrix} a_{1t} \\ \vdots \\ a_{mt} \end{pmatrix}$, то $\vec{a}_t$ буде розписана як лінійна комбінація $\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_k}$ таким чином:
$\vec{a}_t = \Gamma_{j_1} \vec{a}_{j_1} + \dots + \Gamma_{j_k} \vec{a}_{j_k}$.
Отже, $\{\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_k}\}$ – повна система, бо $\{\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_k}, \vec{a}_t\}$ – л.з. $\forall t \in \overline{1,n}$. Залишилося довести л.н.з.
!Припустимо, що $\{\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_k}\}$ – л.з., тобто $\exists l : \vec{a}_{j_l} = \alpha_1 \vec{a}_{j_1} + \underset{\text{без } j_l}{\dots} + \alpha_{k-1} \vec{a}_{j_k}$, де не всі коефіцієнти нульові. Цей вектор, а точніше його координати, підставимо в мінор $M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k}$ – отримаємо:
$M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k} = 0$, бо на l-ий стовпчик виражається через інші. Суперечність!
Таким чином, $\{\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_k}\}$ – л.н.з., а тому це – наша база системи стовпчиків. ■

Corollary 3.7.8 $\operatorname{rank}_{\text{col}} \mathbb{A} = \operatorname{rank}_{\text{minor}} \mathbb{A}$.

Proof.
Із попередньої теореми, ми показали, що $\operatorname{rank}_{\text{col}} \mathbb{A} = k$. Тепер покажемо, що $\operatorname{rank}_{\text{minor}} \mathbb{A} = k$.
За умовою теореми, $M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k} \neq 0$, тож за означенням мінорного ранга, $\operatorname{rank}_{\text{minor}} \mathbb{A} \geq k$.
!Позначимо $\operatorname{rank}_{\text{minor}} \mathbb{A} = p$ та припустимо, що $p > k$. Тоді за означенням мінорного ранга, існує ненульовий мінор порядку p (його порядок максимальний). Тоді всі мінори вищого порядку за p нулеві, зокрема всі мінори порядку $p+1$ – нулеві. Тоді за теоремою про базисний мінор, $\operatorname{rank}_{\text{col}} \mathbb{A} = p = k$. Суперечність! ■

Corollary 3.7.9 $\operatorname{rank}_{\text{row}} \mathbb{A} = \operatorname{rank}_{\text{col}} \mathbb{A}$.

Proof.
$\operatorname{rank}_{\text{row}} \mathbb{A} = \operatorname{rank}_{\text{col}} \mathbb{A}^T = \operatorname{rank}_{\text{minor}} \mathbb{A}^T \overset{(*)}{=} \operatorname{rank}_{\text{minor}} \mathbb{A} = \operatorname{rank}_{\text{col}} \mathbb{A}$.
Рівність (*) виконано, тому що мінори та їхні транспоновані мінори однакові за значенням. ■

Remark 3.7.10 Надалі ми можемо позначати ранг матриці як $\operatorname{rank} \mathbb{A}$.

Remark 3.7.11 Для чого так багато рангів, ось стисла відповідь:
$\operatorname{rank}_{\text{minor}} \mathbb{A}$ – для деяких теоретичних доведень;
$\operatorname{rank}_{\text{row}} \mathbb{A}$ – для системи рівнянь;
$\operatorname{rank}_{\text{col}} \mathbb{A}$ – просто з нього все починалось. Ну й взагалі, стовпчиковий ранг – це операторний ранг.

Метод облямівних мінорів

Задано матрицю $\mathbb{A} \in \operatorname{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Наша мета: знайти $\operatorname{rank} \mathbb{A}$.
Знайдемо ненульовий мінор порядку 2. Нехай це мінор M^{1,i_1}_{1,j_1}.
Шукаємо для нього ненульовий облямівний мінор $M^{1,i_1,i_2}_{1,j_1,j_2}$, тобто той мінор, що містить минулий ненульовий мінор:
- якщо для всіх цих таких мінорів буде 0, то тоді $\operatorname{rank} \mathbb{A} = 2$;
- якщо знайдеться такий мінор, що не буде 0, то розглядаємо $M^{1,i_1,i_2,i_3}_{1,j_1,j_2,j_3}$. І робимо все знову за двома пунктами.

Чому не порядку 1, тому що зазвичай там мінор ненульовий, тобто зазвичай $\operatorname{rank} \mathbb{A} \geq 1$. $\operatorname{rank} \mathbb{A} = 0$ лише тоді, коли $\mathbb{A} = \mathbb{O}$.

Даний метод базується на доведеній теоремі про базисний мінор.

Example 3.7.12 Знайдемо ранг матриці $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ методом облямівних мінорів.
Можемо уже зауважити, що $\operatorname{rank} \mathbb{A} \geq 1$.
Розглянемо мінори порядку 2. Бачимо, що $M^{12}_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Отже, $\operatorname{rank} \mathbb{A} \geq 2$.
Розглянемо мінори порядку 3, що облямовує наш попередній мінор порядку 2. Їх всього 2: $M^{123}_{234}, M^{123}_{123}$.
$M^{123}_{234} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 36 - 24 - 6 = 0$ $\qquad M^{123}_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$.
Всі облямівні мінори нульові. Тому остаточно $\operatorname{rank} \mathbb{A} = 2$.

Метод Гауса

Задано матрицю $\mathbb{A} \in \operatorname{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Наша мета: знайти $\operatorname{rank} \mathbb{A}$.
Ми будемо зводити матрицю $\mathbb{A}$ до ступінчатого вигляду елементарними перетвореннями. Елементарні перетворення не змінюють (!) ранг, якщо розглядати систему рядків та посилатись на підпункт 1.3. А далі $\operatorname{rank} \mathbb{A}$ отримується безпосередньо через $\operatorname{rank}_{\text{row}} \mathbb{A}$.

Example 3.7.13 Знайдемо ранг матриці $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ методом Гауса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{r_3 \leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_2 \to -r_2 + 2r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_2 \to \frac{1}{5} r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко побачити, що $\operatorname{rank} \mathbb{A} = 2$ як рядковий ранг.

3.8 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо особливий випадок матричного рівняння:

$$\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}.$$

У цьому випадку $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ та $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Якщо перемножити матрицю з вектором, то це рівняння можна переписати покоординатно – отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Theorem 3.8.1 Метод Крамера
Задане рівняння $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$. Якщо $\mathbb{A}$ – оборотна матриця, то розв'язком рівняння $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ є такі вирази:
$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\det \mathbb{A}}, \dots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\det \mathbb{A}}$,
де Δ_i – майже $\det \mathbb{A}$, але на i-му стовпчику стоїть стовпчик $\vec{b}$.

Proof.
Оскільки матриця $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ – оборотна, то $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$. Розпишемо це покоординатно:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що після перемноження двох матриць ми отримаємо такі елементи:

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \overset{\text{властивість 6),8) визначника}}{=} \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{позн.}}{=} \Delta_1;$$

$$A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \overset{\text{властивість 6),8) визначника}}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{позн.}}{=} \Delta_2;$$

$\vdots$

$$A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \overset{i6),8)}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{pmatrix} \overset{\text{позн.}}{=} \Delta_n.$$

У результаті ми отримаємо $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\det \mathbb{A}}, \dots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\det \mathbb{A}}$. ■

Example 3.8.2 Розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}.$$

Для початку зауважимо, що $\det \mathbb{A} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 1$, тож наша матриця буде оборотною, а тому можна застосувати метод Крамера та шукати розв'язки $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\det \mathbb{A}}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\det \mathbb{A}}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\det \mathbb{A}}$.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 12 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 8 & 12 & -6 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -2 \\ 8 & 3 & 12 \end{vmatrix} = -1.$

Таким чином, $x_1 = 3, x_2 = -6, x_3 = -1$.

Remark 3.8.3 Такий метод можна застосовувати, коли порядок визначника невеликий, до трьох включно. В іншому випадку це неефективно.

3.8.1 Однорідні рівняння

Розглянемо так зване **однорідну** систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0},$$

тут $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ та $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Proposition 3.8.4 Множину розв'язків $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$ утворює простір $\ker \mathbb{A}$.
Випливає із означення $\ker \mathbb{A}$.

Definition 3.8.5 Фундаментальною системою розв'язків називають базис лінійного простору розв'язків $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k\}$ (або базис ядра).

Методом Гауса матрицю $\mathbb{A}$ перетворимо в матрицю ступінчатого вигляду. Далі переписуємо оновлену систему та проходимось знизу і догори.
Якщо кількість рівнянь k стане меншою за кількість невідомих n, то тоді обираємо вільні змінні, яких буде $n-k$ штук. Причому ми обираємо їх не абияк.

Example 3.8.6 Знайти фундаментальну систему розв'язків: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 - x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$.

Маємо матрицю $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & 5 & -1 & 7 \\ 2 & 6 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

Прийшли до матриці ступінчатого вигляду. Тепер розпишемо оновлену систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \\ -7x_3 + 5x_4 - 15x_5 = 0 \\ -9x_5 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -\dfrac{9}{7}x_4 - 3x_2 \\ x_3 = \dfrac{5}{7}x_4 \\ x_5 = 0 \\ x_2, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Кожний виділений елемент відповідає стовпчику матриці, а кожний стовпчик відповідає номеру змінної, яка НЕ буде вільною. Тобто в нашому випадку x_5, x_3, x_1 вільними не будуть, тобто виражатимуться через щось Отже, розв'язок можна записати в вигляді

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_2 - \dfrac{9}{7}x_4 \\ x_2 \\ \dfrac{5}{7}x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_4}{7} \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \vec{f}_1 + \frac{x_4}{7}\vec{f}_2.$$

Отже, ми знайшли $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ – фундаментальну систему розв'язків.

3.8.2 Неоднорідні рівняння

Якщо праворуч в нас вже ненульовий вектор, то маємо **неоднорідну** систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b},$$

тут $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, а також $\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$.
$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ та $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Theorem 3.8.7 Структура розв'язків
Всі розв'язки системи вище мають такий вигляд: $\vec{x}_{\mathrm{g,inhom}} = \vec{x}_{\mathrm{part}} + \vec{x}_{\mathrm{g,hom}}$, де
$\vec{x}_{\mathrm{g,hom}}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння, тобто замість $\vec{b}$ ми пишемо $\vec{0}$ для нашої системи;
$\vec{x}_{\mathrm{part}}$ – частинний розв'язок нашої системи;
$\vec{x}_{\mathrm{g,inhom}}$ – загальний розв'язок неоднорідного рівняння, що задана формулою вище.

hom – *homogeneous* – *однорідний*;
inhom – *inhomogeneous* – *не однорідний*;
part – *partial* – *частинний*;
g – *general* – *загальний.*

Proof.
Спочатку покажемо, що $\vec{x}_{\mathrm{part}} + \vec{x}_{\mathrm{g,hom}}$ є розв'язком нашого неоднорідного рівняння. Дійсно,
$\mathbb{A}(\vec{x}_{\mathrm{part}} + \vec{x}_{\mathrm{g,hom}}) = \mathbb{A}\vec{x}_{\mathrm{part}} + \mathbb{A}\vec{x}_{\mathrm{g,hom}} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$.
Далі покажемо, чому будь-який розв'язок неоднорідного рівняння має саме такий вигляд.
Нехай $\vec{x}^*$ – будь-який розв'язок системи $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$. Тоді $\mathbb{A}(\vec{x}^* - \vec{x}_{\mathrm{part}}) = \mathbb{A}\vec{x}^* - \mathbb{A}\vec{x}_{\mathrm{part}} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$.
Отже, $\vec{x}^* - \vec{x}_{\mathrm{part}}$ – розв'язок однорідного рівняння, що має таку фундаментальну систему: $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k\}$.
Тому $\vec{x}^* - \vec{x}_{\mathrm{part}} = C_1\vec{f}_1 + \dots + C_n\vec{f}_k = \vec{x}_{\mathrm{g,hom}} \implies \vec{x}^* = \vec{x}_{\mathrm{part}} + \vec{x}_{\mathrm{g,hom}}$. ■

Definition 3.8.8 Систему рівнянь називають **сумісною**, якщо

система має хоча б 1 розв'язок

Theorem 3.8.9 Теорема Кронекера-Капеллі
$\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ – сумісна система $\iff \operatorname{rank}\mathbb{A} = \operatorname{rank}(\mathbb{A} \mid \vec{b})$.

Proof.
Перш за все спочатку встановимо лінійний оператор $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, якому відповідає матриця $\mathbb{A}$. Це означає, що $A\vec{e}_1 = \vec{a}_1, \dots, A\vec{e}_n = \vec{a}_n$.
$\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ – сумісна $\iff \vec{b} \in \operatorname{Im}\mathbb{A} = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \iff \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}\} \overset{(*)}{\iff}$ $\dim\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \dim\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}\} \iff \operatorname{rank}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \operatorname{rank}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}\} \iff$ $\operatorname{rank}\mathbb{A} = \operatorname{rank}(\mathbb{A}|\vec{b})$.
Варто пояснити перехід $\overset{(*)}{\iff}$. Чому виконано $\boxed{\Rightarrow}$, тут зрозуміло.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\dim\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \dim\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}\}$. Зрозуміло, що $\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \subset \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}\}$.
Тоді ще за **Prp. 1.7.11**, маємо $\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}\}$. ■

Повертаємось до розділу 2

2.7 Побудова матриці лінійного оператора за заданим деяким лінійним оператором

Ми вже знаємо, що лінійному оператору $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ задається однозначно матриця $\mathbb{A}$, якщо в $\mathbb{R}^n$ маємо канонічний базис $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.
Мета: знайти матрицю для будь-якого іншого оператора.

Задані L, M – лінійні простори, $A\colon L \to M$ – лінійний оператор. За щойно отриманим наслідком, буде у нас наступна ситуація:
$L \cong \mathbb{R}^n \implies \{f_1, \dots, f_n\}$ – базис в L переводить в $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ – канонічний базис в $\mathbb{R}^n$.
А оператор $J_f\colon L \to \mathbb{R}^n$ такий, що $J_f(f_j) = \vec{e}_j$ – ізоморфізм.

$M \cong \mathbb{R}^m \implies \{g_1, \dots, g_n\}$ – базис в M переводить в $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ – канонічний базис в $\mathbb{R}^m$.
А оператор $J_g\colon M \to \mathbb{R}^m$ такий, що $J_g(g_k) = \vec{e}_k$ – ізоморфізм.
Але ми знаємо, що відображення $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ задає матрицю $\mathbb{A}$. Якраз її треба знайти.
Коротше, у нас виникне така картина:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "A"] \arrow[d, "J_f"] & M \arrow[d, "J_g"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbb{A}"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Матрицю із діаграми можна наступним чином: $\mathbb{A}\vec{x} = J_g(A(J_f^{-1}\vec{x}))$.
спочатку із $\mathbb{R}^n$ переводимось в L, далі в M і згодом в $\mathbb{R}^m$.
Тобто ми побудували оператор: $\mathbb{A} = J_g A J_f^{-1}$. А тепер дізнаємось, яким чином будується матриця:
$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ Оскільки $J_f^{-1}\vec{e}_j = f_j$, то звідси $J_f^{-1}\vec{x} = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$.
А тому $A(J_f^{-1}\vec{x}) = x_1 Af_1 + \dots + x_n Af_n$.
$\forall j = 1, \dots, n : Af_j \in M$ – розкладається за базисом $\{g_1, \dots, g_m\}$ в M, тобто
$Af_1 = a_{11}g_1 + \dots + a_{m1}g_m$
$\vdots$
$Af_n = a_{1n}g_1 + \dots + a_{mn}g_m$

$$J_g(A(J_f^{-1}\vec{x})) = J_g(x_1 Af_1 + \dots + x_n Af_n) = J_g\left(x_1 \sum_{k=1}^m a_{k1}g_k + \dots + x_n \sum_{k=1}^m a_{kn}g_k\right) =$$

$$= J_g\left(\sum_{k=1}^m (a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n)g_k\right) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{A}\vec{x}.$$

Та сама шукана матриця. Тепер можемо записати словесний алгоритм знаходження.

Алгоритм побудови матриці оператора

Оператором A діємо на:
- 1-й базисний вектор з L, результат розкладаємо за базисом M. Коефіцієнти розкладу утворюють 1-й стовпчик матриці $\mathbb{A}$;
- 2-й базисний вектор з L, результат розкладаємо за базисом M. Коефіцієнти розкладу утворюють 2-й стовпчик матриці $\mathbb{A}$;

$\vdots$
- n-й базисний вектор з L, результат розкладаємо за базисом M. Коефіцієнти розкладу утворюють n-й стовпчик матриці $\mathbb{A}$.

Example 2.7.1 Задано $A\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ – такий лінійний оператор
$(Af)(x) = f(x+1)$
Розглянемо для обох просторів базис $\{1, x, x^2\}$. Знайдемо матрицю оператора.
Маємо ось таку діаграму:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_2[x] \arrow[r, "A"] \arrow[d, "J"] & \mathbb{R}_2[x] \arrow[d, "J"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\mathbb{A}"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

Позначу $f_0(x) = 1 \qquad f_1(x) = x \qquad f_2(x) = x^2$.
$(Af_0)(x) = f_0(x+1) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$.

$(Af_1)(x) = f_1(x+1) = x+1 = 1+x+0x^2$.
$(Af_2)(x) = f_2(x+1) = (x+1)^2 = 1+2x+x^2$.
Отже, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remark 2.7.2 Порядок базису тепер є важливим. Якщо змінити елементи місцями, то відповідно може змінитись матриця.

2.8 Матриця добутку лінійних операторів

Задані $A\colon L \to M$, $B\colon M \to K$ – лінійні оператори.
Також є базиси $\{f_1, \dots, f_n\}$, $\{g_1, \dots, g_m\}$, $\{h_1, \dots, h_k\}$ відповідно для L, M, K.
$BA\colon L \to K$ – добуток.
$\mathbb{A}$ – матриця A в базисі $\{f_1, \dots, f_n\}$, що знайдена попереднім алгоритмом.
$\mathbb{B}$ – матриця B в базисі $\{g_1, \dots, g_m\}$, що знайдена попереднім алгоритмом.
Хочемо з'ясувати, чому дорівнює матриця для оператора BA.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "A"] \arrow[d, "J_f"] & M \arrow[r, "B"] \arrow[d, "J_g"] & K \arrow[d, "J_h"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbb{A}"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathbb{B}"] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

Маємо за умовою $\mathbb{A} = J_g A J_f^{-1}$ та $\mathbb{B} = J_h B J_g^{-1}$. Тоді звідси
$\mathbb{B}\mathbb{A} = J_h B J_g^{-1} J_g A J_f^{-1} = J_h (BA) J_f^{-1}$.
Тобто замість того, щоб робити кроки в п. 2.7. для оператора BA, достатньо просто перемножити матриці операторів A, B, що були знайдені в п. 2.7. От їх зазвичай простіше знайти.

Example 2.8.1 Задано $A\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, де $(Af)(x) = f(x+1)$, а також $B\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, де $(Bf)(x) = f'(x)$.
Для $\mathbb{R}_2[x]$ буде базис $\{1, x, x^2\}$ та для $\mathbb{R}_1[x]$ буде базис $\{1, x\}$.
Із попереднього прикладу, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Самостійно можна отримати $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Тоді матриця для оператора $BA\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, що вигдядає як $(ABf)(x) = f'(x+1)$, задається ось так:
$Mat(BA) = \mathbb{B}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.9 Матриця лінійного функціоналу

Задано $\varphi\colon L \to \mathbb{R}$ – лінійний функціонал. Також є базиси $\{f_1, \dots, f_n\}$, $\{1\}$ відповідно для $L, \mathbb{R}$.
Хочемо знайти матрицю Φ, яка задає лінійний функціонал.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "J"] & \mathbb{R} \arrow[d, "I"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Отримати матрицю можна вже за готовим алгоритмом (п. 2.7.)
$\varphi(f_1) = a_1 = a_1 \cdot 1$
$\varphi(f_2) = a_2 = a_2 \cdot 1$
$\vdots$
$\varphi(f_n) = a_n = a_n \cdot 1$
$\implies \Phi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ – цю матрицю лінійного функціоналу ще називають **ковектором**.

2.10 Матриця оператора переходу від одного базису до іншого

Задано L – лінійний простір, в якому два різних базиси: $\{g_1, \dots, g_n\}$, $\{f_1, \dots, f_n\}$.
Мета: перейти з першого базису до другого.
Будь-який елемент $x \in L$ можна розкласти двома шляхами:
$x = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$;

$x = b_1 g_1 + \dots + b_n g_n$.
Вже відомо, що $L \cong \mathbb{R}_g^n$, а з іншого боку, $L \cong \mathbb{R}_f^n$. Візьмемо канонічні базиси $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}_g$ та $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}_f$.

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "J_g"'] \arrow[dr, "J_f"] & \\
\mathbb{R}_g^n \arrow[rr, "\mathbb{U}_{g\to f}"] & & \mathbb{R}_f^n
\end{tikzcd}$$

Тут лінійні оператори працюють таким чином:

$$J_f x = a_1 J_f f_1 + \dots + a_n J_f f_n = a_1 \vec{e}_1 + \dots + a_n \vec{e}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{x}_f$$

$$J_g x = b_1 J_g g_1 + \dots + a_n J_g g_n = b_1 \vec{e}_1 + \vdots + b_n \vec{e}_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \vec{x}_g$$

Спробуємо знайти зв'язок. Для цього побудуємо матрицю оператора $\mathbb{U}$: (тут U – якийсь оператор):
$U\vec{x}_g = U(b_1\vec{e}_1 + \dots + b_n\vec{e}_n) = b_1 U\vec{e}_1 + \dots + b_n U\vec{e}_n = b_1 J_f J_g^{-1}\vec{e}_1 + \dots + b_1 J_f J_g^{-1}\vec{e}_n =$
$= b_1 J_f g_1 + \dots + b_n J_f g_n \boxed{=}$
Розкладемо $g_1, \dots, g_n$ за базисом $\{f_1, \dots, f_n\}$:
$g_1 = u_{11} f_1 + \dots + u_{n1} f_n$;
$\vdots$
$g_n = u_{1n} f_1 + \dots + u_{nn} f_n$.

$$\boxed{=} \sum_{k=1}^n b_k J_f g_k = \sum_{k=1}^n b_k J_f \left(\sum_{j=1}^n u_{jk} f_j \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n b_k u_{jk} \vec{e}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n u_{jk} b_k \right) \vec{e}_j = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^n u_{1k} b_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^n u_{nk} b_k \end{pmatrix} = \mathbb{U}\vec{x}_g,$$

де $\mathbb{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$.

Алгоритм побудови матриці оператора переходу з одного базису в інший

- розкладаємо $g_1, \dots, g_n$ за базисом $\{f_1, \dots, f_n\}$;
- коефіцієнти записуємо в матрицю $\mathbb{U}_{g\to f}$ в стовпчик.

Example 2.10.1 Задано лінійний простір $L = \mathbb{R}^3$. Знайдемо матрицю переходу з базису $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ в базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, де
$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.
$\vec{f_1} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
$\vec{f_2} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$
$\vec{f_3} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$
$\implies \mathbb{U}_{f\to e} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

А тепер знайдемо вектор $\vec{x}_f$ в старому базисі, якщо в новому базисі $\vec{x}_e = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Ясно, що $\vec{x}_e = \mathbb{U}_{f\to e}\vec{x}_f$. Звідси випливає, що $\vec{x}_f = \mathbb{U}_{f\to e}^{-1}\vec{x}_e = \mathbb{U}_{e\to f}\vec{x}_e$.
Декілька магій обчислень для одержання оберненої матриці:
$\mathbb{U}_{e\to f} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ 4 & 8 & -4 \\ 5 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ Тоді, додавши ще магії, отримаємо $\vec{x}_f = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2.11 Матриця лінійного оператору в різних базисах

Задано $A\colon L \to M$ – лінійний оператор.
В L задані два базиси: $\{f_1, \dots, f_n\}$, $\{g_1, \dots, g_n\}$.
В M задані два базиси: $\{h_1, \dots, h_k\}$, $\{p_1, \dots, p_k\}$.
Маємо більш складну картину:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "\mathbb{A}_{f,h}"] \arrow[dd, "\mathbb{U}_{f\to g}"'] & & & \mathbb{R}^k \arrow[dd, "\mathbb{U}_{h\to p}"] \\
& L \arrow[ul, "J_f"'] \arrow[dl, "J_g"] \arrow[r, "A"] & M \arrow[ur, "J_h"] \arrow[dr, "J_p"'] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "\mathbb{A}_{g,p}"] & & & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}$$

Із малюнку можемо виділити таке співвідношення між операторами:
$\mathbb{A}_{g,p}\vec{x}_g = J_p(A(J_g^{-1}\vec{x}_g)) = J_p(J_h^{-1}\mathbb{A}_{f,h}J_f)(J_g^{-1}\vec{x}_g) = (J_pJ_h^{-1})\mathbb{A}_{f,h}(J_fJ_g^{-1})\vec{x}_g = \mathbb{U}_{h\to p}\mathbb{A}_{f,h}\mathbb{U}_{g\to f}\vec{x}_g$.
Таким чином, маємо зв'язок:
$\mathbb{A}_{g,p} = \mathbb{U}_{h\to p}\mathbb{A}_{f,h}\mathbb{U}_{g\to f}$.

Example 2.11.1 Нехай задано оператор $A\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ ось таким чином:
$(Af)(x) = x(f(x+1) - f(x))$
В обох просторах розглядаємо базис $\{ \underset{\substack{\| \\ x^2+x-1}}{g_0}, \underset{\substack{\| \\ x^2-3x+2}}{g_1}, \underset{\substack{\| \\ x^2-2x+1}}{g_2} \}$. Знайти матрицю оператора.
Для цього ми розглянемо в обох просторах інший базис: $\{\underset{\substack{\| \\ 1}}{f_0}, \underset{\substack{\| \\ x}}{f_1}, \underset{\substack{\| \\ x^2}}{f_2}\}$. Наш випадок на діаграмі:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3_g \arrow[rrr, "\mathbb{A}_g"] \arrow[dd, "\mathbb{U}_{g\to f}"'] & & & \mathbb{R}^3_g \arrow[dd, "\mathbb{U}_{g\to f}"] \\
& \mathbb{R}_2[x] \arrow[ul, "J_g"'] \arrow[dl, "J_f"] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}_2[x] \arrow[ur, "J_g"] \arrow[dr, "J_f"'] & \\
\mathbb{R}^3_f \arrow[rrr, "\mathbb{A}_f"] & & & \mathbb{R}^3_f
\end{tikzcd}$$

Наша мета – знайти матрицю $\mathbb{A}_g$. Спочатку знайдемо $\mathbb{A}_f$, а далі $\mathbb{U}_{g\to f}$.

$$\begin{aligned} Af_0 &= 0 = 0f_0 + 0f_1 + 0f_2 \\ Af_1 &= x = 0f_0 + 1f_1 + 0f_2 \\ Af_2 &= 2x^2 + x = 0f_0 + 1f_1 + 2f_2 \end{aligned} \implies \mathbb{A}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_0 &= x^2 + x - 1 = -1f_0 + 1f_1 + 1f_2 \\ g_1 &= x^2 - 3x + 2 = 2f_0 - 3f_1 + 1f_2 \\ g_2 &= x^2 - 2x + 1 = 1f_0 - 2f_1 + 1f_2 \end{aligned} \implies \mathbb{U}_{g\to f} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbb{A}_g = \mathbb{U}^{-1}_{g\to f}\mathbb{A}_f\mathbb{U}_{g\to f} = \dots = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Remark 2.11.2 Чому не знайти цю матрицю як в п. 2.7.? Тому що базис є взагалі неприємним для розкладання. Враховуючи вигляд оператора, ми отримуємо подвійний біль.
Якщо скористатись методикою цього пункту, то ми використовуємо метод Гауса лише один раз для обчислення оберненої матриці. А при класичному методі треба буде застосувати метод Гауса тричі для розкладання за базисом.

Example 2.11.3 Нехай задано функціонал $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ такий, що $\varphi(\vec{x}) = x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4$. Знайти матрицю функціонала, якщо $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4\}$ – базис в $\mathbb{R}^4$ та $\{h_1\}$ – базис в $\mathbb{R}$, де

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ а також } h_1 = \sqrt{\frac{\pi}{e}}.$$

В просторі $\mathbb{R}^4$ ми розглянемо канонічний базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$, а в просторі $\mathbb{R}$ буде інший канонічний базис $\{1\}$. Наш випадок на діаграмі:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^4_f \arrow[rrr, "\Phi_{f,h}"] \arrow[dd, "\mathbb{U}_{f\to e}"'] & & & \mathbb{R}_h \arrow[dd, "\mathbb{U}_{h\to 1}"] \\
& \mathbb{R}^4 \arrow[ul, "J_g"'] \arrow[dl, "J_f"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \arrow[ur, "J_g"] \arrow[dr, "J_f"'] & \\
\mathbb{R}^4_e \arrow[rrr, "\Phi_{e,1}"] & & & \mathbb{R}_1
\end{tikzcd}$$

Наша задача зводиться до знаходження матриці $\Phi_{f,h}$. Спочатку знайдемо $\Phi_{e,1}$, а далі $\mathbb{U}_{f,e}$ та $\mathbb{U}_{h,1}$. Все практично моментально:

$$\Phi_{e,1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U}_{f\to e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{U}_{h\to 1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{e}} \end{pmatrix}$$

Тоді $\Phi_{f,h} = \mathbb{U}_{1\to h}\Phi_{e,1}\mathbb{U}_{f\to e} = \dots = \begin{pmatrix} -\frac{7\sqrt{\pi}}{e} & -\frac{\sqrt{\pi}}{e} & \frac{5\sqrt{\pi}}{e} & -\frac{13\sqrt{\pi}}{e} \end{pmatrix}$

2.12 Інваріантні підпростори

Definition 2.12.1 Задано $A\colon L \to L$ – лінійний оператор.
Підпростір L_1 називається **інваріантним** для оператора A, якщо

$$\forall x \in L_1 : Ax \in L_1$$

або якщо позначити $AL_1 = \{Ax | x \in L_1\}$, то зазвичай пишуть ось так:

$$AL_1 \subset L_1$$

Example 2.12.2 Розглянемо такі приклади інваріантних підпросторів:
1. $L_1 = \ker A$, тому що $\forall x \in \ker A : Ax = 0 \in \ker A$.
2. $L_1 = \operatorname{Im} A$, тому що $\forall y \in \operatorname{Im} A : Ay \in \operatorname{Im} A$.

Example 2.12.3 Задано лінійний оператор $A\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, де $Af = f'$.
Тоді $\mathbb{R}_0[x], \mathbb{R}_1[x], \dots, \mathbb{R}_n[x]$ – всі вони будуть інваріантними підпросторами для оператора A.

Definition 2.12.4 Задано $A\colon L \to L$ – лінійний оператор та L_1 – інваріантний підпростір.
Звуженням оператора A на підпросторі L_1 називається лінійний оператор: $A|_{L_1}\colon L_1 \to L_1$

$$\forall x \in L_1 : A|_{L_1} x = Ax$$

Remark 2.12.5 Розгляну паралель, щоб було зрозуміліше. Припустимо, що є дві функції:
$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$
$g(x) = \sin x, x \in [0, 2\pi]$
Функції є <u>різними</u> в силу області визначення, хоча закон однаковий. Але навіть не в цьому суть: можна привести 'криву паралель', що $f(x)$ – це A, в той час $g(x)$ – це $A|_{L_1}$.

Remark 2.12.6 $A|_{L_1}\colon L_1 \to L_1$ дійсно досі залишиться лінійним оператором, просто тому що $A|_{L_1} = A$ в просторі L_1, де якраз виконується лінійність.

Lemma 2.12.7 Задано $A\colon L \to L$ – лінійний оператор та L_1, L_2 – інваріантні підпростори.
Тоді $L_1 \cap L_2$ та $L_1 + L_2$ – обидва інваріантні підпростори.

Proof.
1) $\forall x \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in L_1 \\ x \in L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ax \in L_1 \\ Ax \in L_2 \end{cases} \Rightarrow Ax \in L_1 \cap L_2$.

2) $\forall x \in L_1 + L_2 \Rightarrow x = \overset{\in L_1}{x_1} + \overset{\in L_2}{x_2} \Rightarrow Ax = \overset{\in L_1}{Ax_1} + \overset{\in L_2}{Ax_2} \Rightarrow Ax \in L_1 + L_2$. ■

Proposition 2.12.8 Задано $A\colon L \to L$ – лінійний оператор та $L = L_1 \dot{+} L_2$, де L_1, L_2 – інваріантні підпростори. Тоді $A = A|_{L_1} + A|_{L_2}$.

Proof.
$\forall x \in L : \exists! x_1 \in L_1, \exists! x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2$
$Ax = Ax_1 + Ax_2 = A|_{L_1}x_1 + A|_{L_2}x_2 = (A|_{L_1} + A|_{L_2})(x_1 + x_2) = (A|_{L_1} + A|_{L_2})x$ ■

2.13 Матриця оператора в базисі, розширенному з базису в інваріантному підпросторі

Задано $A\colon L \to L$ – лінійний оператор та L_1 – інваріантний підпростір, в якому є базис $\{f_1, \dots, f_k\}$. Продовжимо його до базису L, маємо $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$.
Мета: знайти матрицю для розширеного базису.
$Af_1 \in L_1 \Rightarrow Af_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{k1}f_k$
$\vdots$
$Af_k \in L_1 \Rightarrow Af_k = a_{1k}f_1 + a_{2k}f_2 + \dots + a_{kk}f_k$
$Af_{k+1} \in L$, але $Af_{k+1} \notin L_1 \implies$
$Af_{k+1} = a_{1,k+1}f_1 + a_{2,k+1}f_2 + \dots + a_{k,k+1}f_k + a_{k+1,k+1}f_{k+1} + \dots + a_{n,k+1}f_n$
$\vdots$
$Af_n \in L$, але $Af_n \notin L_1 \implies$
$Af_n = a_{1,n}f_1 + a_{2,n}f_2 + \dots + a_{k,n}f_k + a_{k+1,n}f_{k+1} + \dots + a_{n,n}f_n$
Тоді матимемо наступний вигляд:

$$\mathbb{A}_f = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,n} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+2,k+1} & \dots & a_{k+2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{array}\right)$$

Тепер розглянемо звужений оператор $A|_{L_1}$ в базисі $\{f_1, \dots, f_k\}$.
Тоді $A|_{L_1}f_1 = Af_1, \dots, A|_{L_1}f_k = Af_k$.
Матриця матиме вигляд:

$$\mathbb{A}_{|_{L_1}f} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

Можна тоді сказати, що $\mathbb{A}_f = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{|_{L_1}f} & * \\ \hline \mathbb{O} & * \end{array}\right)$ – остаточна матриця.

Можна зробити більш уточнений вигляд матриці. Для цього розглянемо оператор $B\colon M \to M$, де $M = \operatorname{span}\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ (зрозуміло, що M – підпростір L) таким чином:
$Bf_{k+1} = a_{k+1,k+1}f_{k+1} + \dots + a_{n,k+1}f_n$
$\vdots$
$Bf_n = a_{k+1,n}f_{k+1} + \dots + a_{n,n}f_n$.
Тоді матриця задається як $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{k_1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.
Таким чином, $\mathbb{A}_f = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{|_{L_1}f} & \mathbb{D} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{B} \end{array}\right)$.

Example 2.13.1 Розглянемо лінійний оператор $A\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ як $Af = f$. Уже знаємо, що $\mathbb{R}_1[x]$ буде інваріантним. Маємо якийсь кастомний базис $\{1 + x, -2x\}$ в $\mathbb{R}_1[x]$, який згодом розширимо до базису $\{1 + x, -2x, x^2, x^3\}$ в $\mathbb{R}_3[x]$. Тоді матриця лінійного оператора в заданому базисі буде виглядати так:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

А тепер дивимось на звуження $A|_{\mathbb{R}_1[x]}$, бачимо, що $A|_{\mathbb{R}_1[x]}(1 + x) = A(1 + x) = 1$ та $A|_{\mathbb{R}_1[x]}(-2x) = A(-2x) = -2$. А матриця виглядає так:

$\mathbb{A}|_{\mathbb{R}_1[x]} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Можна сприймати все це таким чином:
- якщо ти береш многочлен з $\mathbb{R}_3[x]$, то аби подіяти на його, беремо матрицю $\mathbb{A}$;
- якщо ти береш многочлен з $\mathbb{R}_1[x]$, то аби подіяти на його, беремо матрицю $A|_{\mathbb{R}_1[x]}$. Можна й $\mathbb{A}$, але там надлишкова інформація про оператор, що ніяк не впливає на многочлен.

Залишається питання, що буде, якщо є 2 інваріантних підпростори.
Задано $A \colon L \to L$ – лінійний оператор та $L = L_1 \dot{+} L_2$, де L_1, L_2 – інваріантні підпростори.
$\{f_1, \dots, f_k\}$ – базис L_1.
$\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ – базис L_2.
Тоді $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$ – базис L за **Th. 1.9.7**.
Побудуємо в цьому базисі матрицю:
$A|_{L_1} f_1 = Af_1 = a_{11}f_1 + \dots + a_{k1}f_k$
$\vdots$
$A|_{L_1} f_k = Af_k = a_{1k}f_1 + \dots + a_{kk}f_k$
$A|_{L_2} f_{k+1} = Af_{k+1} = a_{k+1,k+1}f_{k+1} + \dots + a_{n,k+1}f_n$
$\vdots$
$A|_{L_2} f_n = Af_n = a_{k+1,n}f_{k+1} + \dots + a_{n,n}f_n$
Тоді маємо таку матрицю:

$$\mathbb{A}_f = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1,k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{|_{L_1}} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{A}_{|_{L_2}} \end{array}\right).$$

Якщо виникне випадок $L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} L_3$, то

$$\mathbb{A}_f \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}_{|_{L_1}} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{A}_{|_{L_2}} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{A}_{|_{L_3}} \end{array}\right)$$

За МІ (або за аналогічними міркуваннями) можна довести і для прямої суми із n підпросторів.

А тепер розглянемо $L = L_1 + L_2$ – уже не пряма сума. Позначу $L_1 \cap L_2 = L_{12}$, який є інваріантним.
Нехай $\{h_1, \dots, h_n\}$ – базис L_{12}. Продовжимо його до базисів L_1 та L_2:
$L_1 : \{f_1, \dots, f_s, h_1, \dots, h_n\}$;
$L_2 : \{g_1, \dots, g_t, h_1, \dots, h_n\}$.
Тоді матриця матиме такаий вигляд:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} * & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ * & \mathbb{A}_{|_{L_{12}}} & * \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & * \end{pmatrix}$$

Перший квадрат відповідає матриці $\mathbb{A}_{|_{L_1}}$, а другий квадрат – $\mathbb{A}_{|_{L_2}}$.

2.14 Спряжені простори та спряжені оператори

Definition 2.14.1 Задано L – лінійний простір.
Спряженим до простору L називають таку множину:

$$L^* = \{\varphi \colon L \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ – лінійний функціонал}\}$$

Англійською це кажуть **dual space**, це не дослівний переклад.
Якщо подивитись на означення, то скорочено можна написати $L^* = \mathcal{L}(L, \mathbb{R})$.
Інколи спряжений простір позначають за L'.

Remark 2.14.2 Ми вже знаємо, що множина $\mathcal{L}(L, \mathbb{R})$ утворює лінійний простір, як було зазначено раніше. Значить, спряжений простір $L^* = \mathcal{L}(L, \mathbb{R})$ – лінійний простір.

Proposition 2.14.3 Задано L – лінійний простір та $\{x_1, \dots, x_n\}$ – довільний базис. Тоді $\{f_1, \dots, f_n\}$ буде базисом L^*, де $f_k\colon L \to \mathbb{R}$ визначається таким чином: $f_k(x_i) = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$.
*Насправді, доведення аналогічне доведенню **Prp. 2.2.7**. Просто там ми доводили в загальному випадку $\mathcal{L}(L, M)$; все це працює для $\mathcal{L}(L, \mathbb{R}) = L^*$, для нашого випадку.*

Remark 2.14.4 У вищезгаданому твердженні базисні функціонали можна переписати як $f_k(x_i) = \delta_{ki}$. Сам базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ називають **спряженим базисом до** L (або **dual basis** англійською).

Definition 2.14.5 Задано L – лінійний простір.
Другим спряженим до простору L назвемо множину

$$L^{**} = (L^*)^*$$

Тобто від простору L^* ми беремо ще раз спряження.
Або $L^{**} \overset{\text{def.}}{=} \mathcal{L}(L^*, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(L, \mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Proposition 2.14.6 Задано L – лінійний простір та $x \in L$. Встановимо відображення $\phi\colon L^* \to \mathbb{R}$ таким чином: $\phi(f) = f(x)$. Тоді ϕ – лінійний функціонал на L^* (інакше кажучи, $\phi \in L^{**}$).

Proof.
$\phi(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = \phi(f_1) + \phi(f_2)$
$\phi(\alpha f) = (\alpha f)(x) = \alpha(f(x)) = \alpha(\phi(f))$. ■

Remark 2.14.7 Коли маємо $x \in L$, то тоді $\phi(f) = f(x)$, а при $y \in L$ маємо $\psi(f) = f(y)$. Тоді
$(\phi + \psi)(f) = \phi(f) + \psi(f) = f(x) + f(y) = f(x + y)$.
$(\alpha\phi)(f) = \alpha\phi(f) = \alpha f(x) = f(\alpha x)$.
Кожному $z \in L$ відповідає функціонал $\chi(f) = f(z)$. Зважаючи на рівності вище, ми можемо зробити позначення $\chi = z^{**}$.

Theorem 2.14.8 Задано L – скінченний лінійний простір. Тоді $L^{**} \cong L$.

Proof.
Маємо відображення $B\colon L \to L^{**}$, який записаний як $B(v) = v^{**}$. Даний оператор лінійний, бо
$B(v + u)(f) = (v + u)^{**}(f) = v^{**}f + u^{**}f = Bu(f) + Bv(f)$;
$B(\alpha v)(f) = (\alpha v)^{**}(f) = \alpha(v^{**}f) = \alpha \cdot Bv(f)$.
Якщо L скінченний, то в нього є $\dim L = n$, але в дуального базису $\dim L^* = n$, але в дуального дуального базису $\dim L^{**} = n$. Отже, $\dim L = \dim L^{**}$. ■

Definition 2.14.9 Відображення $B\colon L \to L^{**}$, який заданий як $Bv = v^{**}(f)$, називають **відображенням обчислень**. Має особливе позначення: $\operatorname{ev}(v)$.
Англійською це **evaluation map**. Переклад українською сильно не вжився.

Поясню, чому це можна називати відображенням обчислень. Ми коли беремо $v \in L$, то далі йому ставимо в відповідність деякий функцоінал $\phi(f) = v^{**}(f)$. При цьому $\phi(f) = f(v)$. Взявши точку $v \in L$, ми обчислюємо значення всіх функціоналів $f\colon L \to \mathbb{R}$ в точці v.

Remark 2.14.10 Якщо L – нескінченний простір, то це не завжди виконано $L \cong L^{**}$, але відображення ev буде лише ін'єктивним.
Справді, маємо $\operatorname{ev}\colon L \to L^{**}$, оберемо елемент $x \in \ker \operatorname{ev}$, тобто маємо $\operatorname{ev}(x) = O$, де $O\colon L^* \to \mathbb{R}$ – лінійний функціонал. Ми визначали $\operatorname{ev}(x)(f) = x^{**}(f)$. Тоді для кожного $f \in L^*$ маємо $x^{**}(f) = O(f) = 0$. Значить, $f(x) = 0$ та оскільки $f \in L^*$, то $x = 0$. Висновок: $\ker \operatorname{ev} = \{0\}$.

Remark 2.14.11 У випадку, коли $\dim L < \infty$, ми побудували, так би мовити, канончіний ізоморфізм. Це означає, що $L^{**} \cong L$ абсолютно ніяк (!) не залежать від вибору базису ані в L, ані в L^{**}. Це дає нам права зробити наступне: елемент $x^{**} \in L^{**}$ можемо ідентифікувати як елемент $x \in L$; також можемо писати $L = L^{**}$.

Definition 2.14.12 Задано L, M – лінійні простори та $A\colon L \to M$ – лінійний оператор.
Спряженим оператором до A назвемо відображення $A^*\colon M^* \to L^*$, що визначається як

$$A^*\varphi = \varphi \circ A$$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "A^*=\varphi\circ A"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.14.13 Задано L, M – лінійні простори та $A\colon L \to M$ – лінійний оператор. Тоді спряжений оператор $A^*\colon M^* \to L^*$ – лінійний.

Proof.
Маємо $\varphi_1, \varphi_2 \in M^*$ та $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Ми хочемо $A^*(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 A^*\varphi_1 + \lambda_2 A^*\varphi_2$.
Тобто треба, щоб рівність виконувалась $\forall x \in L$.
$A^*(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(x) = (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) \circ A(x) = (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(A(x)) = (\lambda_1\varphi_1)(A(x)) + (\lambda_2\varphi_2)(A(x)) =$
$= \lambda_1(\varphi_1(A(x)) + \lambda_2(\varphi_2(A(x)) = \lambda_1\varphi_1 \circ A(x) + \lambda_2\varphi_2 \circ A(x) = \lambda_1 A^*\varphi_1(x) + \lambda_2 A^*\varphi_2(x) =$
$= (\lambda_1 A^*\varphi_1 + \lambda_2 A^*\varphi_2)(x)$. ■

Theorem 2.14.14 Задано L, M – скінченні лінійні простори та $A\colon L \to M$ – лінійний оператор, якому відповідає матриця $\mathbb{A}$ переходу із базиса $\{x_1, \dots, x_n\}$ в базис $\{y_1, \dots, y_m\}$. Нехай $\{f_1, \dots, f_n\}$ та $\{g_1, \dots, g_n\}$ – спряжені базиси відповідно L, M. Тоді оператору $A^*\colon M^* \to L^*$ відповідатиме матриця $\mathbb{A}^T$ переходу із базиса $\{g_1, \dots, g_n\}$ в базис $\{f_1, \dots, f_n\}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{A}"'] & L \arrow[r, leftrightarrow, dashed] \arrow[d, "A"] & L^* \arrow[r] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^m \arrow[r] & M \arrow[r, leftrightarrow, dashed] & M^* \arrow[r] \arrow[u, "A^*"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "\mathbb{A}^T"']
\end{tikzcd}$$

Proof.
Маємо $Ax_i = a_{1i}y_1 + \dots + a_{mi}y_m$ за умовою теореми.
Також $A^*g_i = b_{1i}f_1 + \dots + b_{ni}f_n$, якому відповідає матриця $\mathbb{B}$. Нам необхідно знайти $b_{1i}, \dots, b_{ni}$.
Обчислимо цей функціонал в $x_j \in L$ – отримаємо:
$(A^*g_i)(x_j) = b_{1i}f_1(x_j) + \dots + b_{ji}f_j(x_j) + \dots + b_{ni}f_n(x_j) = b_{ji}$ – це з одного боку.
$(A^*g_i)(x_j) = (g_i \circ A)(x_j) = g_i(A(x_j)) = g_i(a_{1j}y_1 + \dots + a_{mj}y_m) = a_{1j}g_i(y_1) + \dots + a_{ij}g_i(y_i) + \dots + a_{mj}g_i(y_m) = a_{ij}$ – це з іншого боку.
Таким чином, $b_{ji} = a_{ij}$, а тому звідси $\mathbb{B} = \mathbb{A}^T$. ■

4 Нова ера з матрицями

4.1 Власні числа та власні вектори

Definition 4.1.1 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$.
Власним вектором оператора A називається такий ненульовий елемент $f \in L$, для якого

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : Af = \lambda f$$

Водночас число λ називається **власним числом** оператора A.
Англійською маємо відповідний переклад: **eigenvector**, **eigenvalue**.

Remark 4.1.2 Із означення випливає, що власному вектору відповідає *єдине* власне число в силу лінійності оператора. А власному числу може відповідати безліч власних векторів (див. нижче **Prp. 4.1.8**)

Example 4.1.3 Знайдемо власні значення та власні вектори для оператора $A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, що заданий $A\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$. Тут $\vec{a}$ – якийсь фіксований вектор.
За означенням маємо $A\vec{f} = \lambda \vec{f} \implies [\vec{f}, \vec{a}] = \lambda \vec{f}$.
Ліворуч маємо вектор, що перпендикулярний до $\vec{f}$, але водночас він дорівнює цьому ж вектору $\vec{f}$, який є домноженим на скаляр. Тоді звідси маємо єдиний випадок рівності, якщо $\lambda = 0$.
Знайдемо власні вектори:
$A\vec{f} = [\vec{f}, \vec{a}] = \vec{0} \implies \vec{f} \parallel \vec{a}$.
Таким чином, власні вектори – це вектори $\vec{f}$, що колінеарні $\vec{a}$, з власним числом $\lambda = 0$.

Proposition 4.1.4 Властивості власних чисел та векторів
Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$. Тоді виконуються такі пункти:
1) Нехай $f_1, \dots, f_k$ – власні вектори з попарно різними власними числами. Тоді $\{f_1, \dots, f_k\}$ – л.н.з.;
2) f – власний вектор оператора A з власним числом $\lambda \iff f$ – власний вектор оператора $(A - \mu I)$ з власним числом $(\lambda - \mu)$;
3) f – власний вектор з числом $\lambda \iff f \in \ker(A - \lambda I)$;
4) Нехай $\{g_1, \dots, g_n\}$ – базис L, також $\mathbb{A}_g$ – матриця A для нашого базису. Тоді
λ – власне число $A \iff \lambda$ – власне число $\mathbb{A}_g$
f – власний вектор A з власним числом $\lambda \iff J_g f$ – власний вектор $\mathbb{A}_g$;
5) Нехай $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Тоді λ – власне число оператора $\mathbb{A} \iff \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) = 0$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості.
1) Доведення за МІ.
І. *База індукції.* При $k = 1$ маємо $\{f_1\}$ – л.н.з. автоматично.
ІІ. *Припущення індукції.* припустимо, що $\{f_1, \dots, f_k\}$ – л.н.з.
ІІІ. *Крок індукції.* Доведемо, що система $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}\}$ – л.н.з.
$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k + \alpha_{k+1} f_{k+1} = 0$ $(*)$
Подіємо оператором на обидві частини рівності $(*)$. Матимемо:
$A(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k + \alpha_{k+1} f_{k+1}) = \alpha_1 A f_1 + \dots + \alpha_k A f_k + \alpha_{k+1} A f_{k+1} =$
$= \alpha_1 \lambda_1 f_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k f_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} f_{k+1}$ – ліва частина. Тоді:
$\alpha_1 \lambda_1 f_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k f_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} f_{k+1} = 0$ $(**)$
Із рівняння $(*)$ маємо: $\alpha_{k+1} f_{k+1} = -\alpha_1 f_1 - \dots - \alpha_k f_k$. Його підставимо в рівняння $(**)$, отримаємо:
$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) f_1 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) f_k = 0 \overset{\text{л.н.з.}}{\implies} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0, \dots, \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$.
Оскільки власні числа попарно різні, то звідси $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.
Підставимо отримані значення в рівняння $(*)$. Автоматично отримаємо $\alpha_{k+1} = 0$.
Остаточно, $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}\}$ – л.н.з.
МІ доведено.

2) f – власний вектор A з власним числом $\lambda \iff Af = \lambda f \iff Af - \mu f = \lambda f - \mu f \iff$
$\iff Af - \mu I f = (\lambda - \mu) f \iff (A - \mu I) f = (\lambda - \mu) f \iff f$ – власний вектор $(A - \mu I)$ з власним число $(\lambda - \mu)$.

3) $Af = \lambda f \iff Af - \lambda f = 0 \iff Af - \lambda I f = 0 \iff (A - \lambda I) f = 0 \iff f \in \ker(A - \lambda I)$.

4) Маємо наступну картину:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "A"] \arrow[d, "J_g"'] & L \arrow[d, "J_g"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbb{A}_g"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Тоді $Af = J_g^{-1}\mathbb{A}_g J_g f = \lambda f$. Обидві частини множимо на $J_g \implies \mathbb{A}_g(J_g f) = \lambda(J_g f)$.

5) λ - власне число для $\mathbb{A} \iff \exists \vec{f} \neq 0 : A\vec{f} = \lambda\vec{f} \iff \vec{f} \in \ker(A-\lambda I) \iff \ker(A-\lambda I) \neq \{0\} \iff$
$\iff \nexists(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{-1} \iff \det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}) = 0$.
Всі властивості доведені. ■

Definition 4.1.5 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$, в якому λ – власне число.
Власним підпростором оператора A називають множину всіх власних векторів з відповідним власним числом λ та нульовим елементом.
Позначення: L_λ.
Англійською такий підпростір називають **eigenspace**.

Corollary 4.1.6 $L_\lambda = \ker(A - \lambda I)$.
Випливає з властивості 3)

Remark 4.1.7 Таким чином, L_λ – інваріантний підпростір відносно A.
Якщо розглянути $A|_{L_\lambda}$, то він матиме лише єдине власне число λ. Бо кожному власному вектору з L_λ ставиться єдине лише власне число λ.

Remark 4.1.8 Також L_λ – автоматично підпростір лінійного простору L.

4.2 Про характеристичний многочлен

Definition 4.2.1 Задано матрицю $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Характеристичним многочленом називається вираз

$$\chi(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$$

А саме рівняння називається **характеристичним рівнянням**.

Remark 4.2.2 За властивістю 5), ми із рівняння $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0$ знаходимо власні числа. А власні вектори – як розв'язок рівняння $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\vec{f} = \vec{0}$.

Example 4.2.3 Задано матрицю $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдемо всі власні числа та власні вектори.

$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)+2+2+2(1-\lambda)-2(4-\lambda)+2(1-\lambda) =$
$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \implies (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$.
Розглянемо кожне власне число окремо для знаходження власних векторів:
$\lambda_1 = 1$

$(\mathbb{A} - \lambda_1\mathbb{I})\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 2f_1 - 2f_3 = 0 \\ f_1 - f_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f_1 = f_2 = f_3$

$\vec{f} = f_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Таким чином, $L_{\lambda_1} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\lambda_2 = 2$

$(\mathbb{A} - \lambda_2\mathbb{I})\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 2f_1 - f_2 - 2f_3 = 0 \\ f_1 - f_2 - f_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = f_3 \\ f_2 = 0 \end{cases}$

$\vec{f} = f_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Таким чином, $L_{\lambda_2} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\lambda_3 = 3$

$$(\mathbb{A} - \lambda_3 \mathbb{I})\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 = 0 \\ f_1 - f_2 - 2f_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = f_2 \\ f_3 = 0 \end{cases}$$

$\vec{f} = f_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Таким чином, $L_{\lambda_3} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Proposition 4.2.4 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та матриці $\mathbb{A}_f, \mathbb{A}_g$ в різних базисах. Тоді $\det(\mathbb{A}_f - \lambda \mathbb{I}) = \det(\mathbb{A}_g - \lambda \mathbb{I})$.
Тобто неважливо, який там базис в просторі L, характеристичний многочлен той самий.

Proof.
Матриці $\mathbb{A}_f, \mathbb{A}_g$ пов'язані тотожністю (п. 2.12):

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n_f \arrow[rrr, "\mathbb{A}_f"] \arrow[ddd, "\mathbb{U}_{f\to g}"'] & & & \mathbb{R}^n_f \arrow[ddd, "\mathbb{U}_{f\to g}"] \\
& & & \\
& L \arrow[uul, "J_f"] \arrow[r, "A"] \arrow[dl, "J_g"'] & L \arrow[uur, "J_f"'] \arrow[dr, "J_g"] & \\
\mathbb{R}^n_g \arrow[rrr, "\mathbb{A}_g"] & & & \mathbb{R}^n_g
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{A}_f = \mathbb{U}^{-1}_{f\to g} \mathbb{A}_g \mathbb{U}_{f\to g}$

$$\implies \det(\mathbb{A}_f - \lambda\mathbb{I}) = \det\Big(\mathbb{U}^{-1}_{f\to g}\mathbb{A}_g\mathbb{U}_{f\to g} - \lambda\mathbb{I}\Big) = \det\Big(\mathbb{U}^{-1}_{f\to g}\mathbb{A}_g\mathbb{U}_{f\to g} - \lambda\mathbb{U}^{-1}_{f\to g}\mathbb{U}_{f\to g}\Big) =$$
$$= \det\Big(\mathbb{U}^{-1}_{f\to g}(\mathbb{A}_g - \lambda\mathbb{I})\mathbb{U}_{f\to g}\Big) = \det\mathbb{U}_{f\to g}\det\mathbb{U}^{-1}_{f\to g}\det(\mathbb{A}_g - \lambda\mathbb{I}) = \det(\mathbb{A}_g - \lambda\mathbb{I}).$$

Важливо, що $\mathbb{U}_{f\to g}$ буде завжди оборотною, тому тут все коректно. ■

Example 4.2.5 Знайти власні числа оператора $A\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, що задається як
$A(ax^2 + bx + c) = bx^2 + cx$.
Нам потрібна матриця оператор, для цього потрібен базис. Ми довели, що майбутній характеристичний многочлен від базиса не залежить, тож оберемо $\{1, x, x^2\}$.

$$\begin{aligned} A1 &= 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \\ Ax &= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 \\ Ax^2 &= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \end{aligned} \implies \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тож $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = -\lambda^3$. Маємо єдине власне число $\lambda = 0$.

Theorem 4.2.6 Характеристичний многочлен має таку формулу:

$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = (-1)^n\lambda^n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_k\le n} (-1)^{n-k} M^{j_1\dots j_n}_{j_1\dots j_n}\right)\lambda^{n-k} + \det\mathbb{A}.$$

Словесно опишу многочлен: вільний коефіцієнт – це $\det\mathbb{A}$*; коефіцієнт при* λ *– це сума всіх можливих мінорів порядка* $n-1$*; коефіцієнт при* λ^2 *– це сума всіх можливих мінорів порядка* $n-2$ *тощо. Кожний одночлен чередується знаком, починаючи з вільного коефіцієнта.*

Proof.
Розглянемо випадок матриці $\mathbb{A}$ розмірності 2×2 для розуміння.

$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det\mathbb{A}.$$

Далі – матриця $\mathbb{A}$ розмірності 3×3, аналогічно для повного розуміння.

$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 -$$
$$-\left(\underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{=M^{12}_{12}} - \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}}_{=M^{13}_{13}} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{=M^{23}_{23}}\right)\lambda + \det\mathbb{A}.$$

Зауважимо, що коефіцієнт при λ є сумою головних мінорів (тобто тих мінорів, де номера рядка та стовпчиків співпадають).

І нарешті, матриця $\mathbb{A}$ розмірності $n \times n$.

$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} =$$

Аналізуємо цю матрицю:

- доданок при λ^n отримується при множенні тільки елементів головної діагоналі, тобто маємо коефіцієнт $(-1)^n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

- доданок при λ^{n-1} отримується при множенні всіх елементів головної діагоналі, крім, можливо, одного, по черзі, тобто маємо коефіцієнти:

$(-1)^{n-1}a_{11} + (-1)^{n-1}a_{22} + \dots + (-1)^{n-1}a_{nn} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

- доданок при λ^{n-2} отримується при множенні всіх елементів головної діагоналі, крім, можливо, двох, по черзі.

Наприклад, розглянемо один із доданків, в якому множимо елементи головної діагоналі з номерами $3, 4, \dots, n$, при множенні цих елементів обираємо λ^{n-2}, залишається цей вираз помножити на $\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Оскільки нам потрібний степінь $n-2$, то ми обираємо останній доданок, що є M_{12}^{12}.

Для інших випадків все аналогічно.

Загалом маємо коефіцієнт при λ^{n-2} :

$(-1)^{n-2}(M_{12}^{12} + M_{13}^{13} + \dots + M_{1n}^{1n} + M_{23}^{23} + \dots + M_{2n}^{2n} + \dots + M_{n-1,n}^{n-1,n} + M_{nn}^{nn}) =$

$= (-1)^{n-2} \sum\limits_{1 \le j < m \le n} M_{jm}^{jm}$ – сума всіх головних мінорів 2-го порядку.

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} + \dots$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} + \dots$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} + \dots + \dots + \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

- все аналогічно для λ^{n-3}, коефіцієнт:

$(-1)^{n-3} \sum\limits_{1 \le j < m < p \le n} M_{jmp}^{jmp}$ - сума всіх головних мінорів 3-го порядку.

$\vdots$

- коефіцієнт вільного доданку: $\det \mathbb{A}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$
В результаті маємо:
$$\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2}\sum_{1\le j<m\le n} M_{jm}^{jm}\lambda^{n-2}$$
$$+(-1)^{n-3}\sum_{1\le j<m<p\le n} M_{jmp}^{jmp}\lambda^{n-3} + \dots + \det\mathbb{A} =$$
$$= (-1)^n\lambda^n + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\left(\sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_k} M_{j_1j_2\dots j_k}^{j_1j_2\dots j_k}\lambda^{n-k}\right) + \det\mathbb{A}. \qquad \blacksquare$$

Example 4.2.7 За щойно доведеною формулою знайдемо характеристичний многочлен для той самої матриці $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
$$\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}) = -\lambda^3 + (4+1+1)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right)\lambda + \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - (6+6-1)\lambda + (4+2+4+2-8+2) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

4.3 Діагоналізація матриці

Definition 4.3.1 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та базис $\{f_1, \dots, f_n\}$.
Оператор A називають **діагоналізовним**, якщо матриця оператора в заданому базисі є діагоналізовною, тобто
$$\mathbb{A}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Theorem 4.3.2 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та базис $\{f_1, \dots, f_n\}$.
Оператор A – діагоналізовний $\iff$ $\{f_1, \dots, f_n\}$ – базис власних векторів оператора A.

Proof.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – діагоналізований, тоді для заданого базису матриця оператору $\mathbb{A}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Звідси випливає, що:
$Af_1 = a_{11}f_1 + 0f_2 + \dots + 0f_n = a_{11}f_1$
$\vdots$
$Af_n = 0f_1 + 0f_2 + \dots + a_{nn}f_n = a_{nn}f_n$
Тоді з цих рівностей можна твердити, що $f_1, \dots, f_n$ – власні вектори. Тому ми маємо базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ саме з власних векторів.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\{f_1, \dots, f_n\}$ – базис власних векторів. Кожний з власних векторів має своє власне число.
Побудуємо тоді матрицю за п. 2.7.:
$Af_1 = \lambda_1 f_1 = \lambda_1 f_1 + 0f_2 + \dots + 0f_n$;
$Af_2 = \lambda_2 f_2 = 0f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + 0f_n$;
$\vdots$
$Af_n = \lambda_n f_n = 0f_1 + 0f_2 + \dots + \lambda_n f_n$.
Тоді матриця оператора A в базисі власних векторів має вигляд:
$$\mathbb{A}_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

У **Ex. 4.2.3** мали 3 власних числа: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

І також ми мали власні вектори: $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – утворюють базис в $\mathbb{R}^3$.

Тому має діагоналізовану матрицю $\mathbb{A}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Remark 4.3.3 Головне зауважу, що в діагоналізованій матриці не обов'язково, щоб власні числа відрізнялись.

Example 4.3.4 Зокрема для матриці $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ характеристичний многочлен $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Бачимо, що для матриці 3×3 ми маємо лише два власних числа.

При $\lambda = 1$ маємо $\vec{f} \in \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, а ось при $\lambda = 2$ маємо $\vec{f} \in \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Всі ці три вектори вони утворюють базис $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$, останні два з яких мають однакові власні числа. Тому можна записати діагоналізовану матрицю $\mathbb{A}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remark 4.3.5 Не кожна матриця може бути діагоналізовною. Два приклади нижче.

Example 4.3.6 Зокрема для матриці обертання $R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ для кутів $\varphi \in (0, \pi)$ ми маємо, що

$\det(R - \lambda I) = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$.

Тут дискримінант – від'ємний при заданих кутах, а тому не має розв'язків, а тому не має власних чисел. Хоча тут можна ситуацію виправити, розглянувши комплексні числа.

Example 4.3.7 Задано матрицю $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ 5 & -11 & -6 \\ -6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, одразу скажу, що

$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = -(\lambda + 2)^2(\lambda + 3) = 0$, також

$L_{\lambda=-2} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \qquad L_{\lambda=-3} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Оскільки розмірність в нас 3, то для діагоналізовності треба базис з трьох векторів. Будь-які вектори $f_1 \in L_{\lambda=-2}, f_2 \in L_{\lambda=-3}$ вже будуть л.н.з., але не можна знайти f_3 (який відповідає одному з двох власних чисел), щоб ці три вектори стали л.н.з.

Definition 4.3.8 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та λ_0 – власне число.
Алгебраїчним кратним назвемо кратність кореня λ_0 характеристичного многочлена.
Геометричним кратним назвемо розмірність власного підпростору, тобто $\dim L_{\lambda_0}$.
Відповідні позначення: $a_{\lambda_0},\ g_{\lambda_0}$.

Proposition 4.3.9 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та M – A-інваріантний підпростір. Покладемо $B = A|_M \in \mathcal{L}(M, M)$. Тоді $\chi_B(\lambda) \mid \chi_A(\lambda)$ (один характеристичний многочлен ділить інший).

Proof.
Ми припустимо, що оператору B відповідає матриця $\mathbb{B}$. Нехай $\{f_1, \dots, f_k\}$ – базис M. Якщо ми розширимо до базису L, матимемо матрицю оператора $\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B} & \mathbb{C} \\ \mathbb{O} & \mathbb{D} \end{array}\right)$ згідно з підпункта 2.14. А тому звідси

$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B} - \lambda\mathbb{I} & \mathbb{C} \\ \mathbb{O} & \mathbb{D} - \lambda\mathbb{I} \end{array}\right) = \det(\mathbb{B} - \lambda\mathbb{I}) \det(\mathbb{D} - \lambda\mathbb{I})$.

Що й доводить твердження. Тобто $\chi_B(\lambda) \mid \chi_A(\lambda)$. ■

Corollary 4.3.10 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та λ_0 – власне число. Тоді $a_{\lambda_0} \geq g_{\lambda_0}$.

Proof.
Скористаємось попереднім твердженням, розглянувши $M = L_{\lambda_0}$, який теж інварівантний. Скажімо, $\dim L_{\lambda_0} = k$. Матриця $\mathbb{B}$ буде діагоналізовною, а також $\det(\mathbb{B} - \lambda\mathbb{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^k$, бо звужений оператор лише має власне число λ_0. Значить, $\chi_{L_{\lambda_0}}(\lambda) \mid \chi_A(\lambda)$, тобто $(\lambda_0 - \lambda)^k \mid \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$. А тому кратність кореня уж точно не менше за k. Тобто $a_{\lambda_0} \geq k = \dim L_{\lambda_0} = g_{\lambda_0}$. ■

Якщо побачити **Ex. 4.3.7**, то там $a_{\lambda=-2} = 2$, але $g_{\lambda=-2} = 1$.

Proposition 4.3.11 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – різні власні числа. Тоді $L_{\lambda_1} + \dots + L_{\lambda_k}$ утворює пряму суму.

Proof.
Для прямої суми треба показати, що $L_{\lambda_i} \cap \left(L_{\lambda_1} + \underset{\text{без } i}{\dots} + L_{\lambda_k} \right) = \{0\}, i = \overline{1,k}$. Зрозуміло, що там нульовий елемент дійсно лежить.
!Не встрачаючи загальності, розглянемо випадок $i = 1$. Припустимо, що $x \in L_{\lambda_1} \cap (L_{\lambda_2} + \dots + L_{\lambda_k})$ – ненульовий. $x \in L_{\lambda_1}$, тож x - власний вектор числа λ_1. Також $x = f_2 + \dots + f_k$ із суми. Із цієї рівності випливає, що система $\{x, f_2, \dots, f_k\}$ – л.з. система. Проте, оскільки $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - різні, дана система має бути л.н.з. – суперечність!
Отже, $L_{\lambda_1} \cap (L_{\lambda_2} + \dots + L_{\lambda_k}) = \{0\}$, для інших аналогічно. ■

Theorem 4.3.12 Критерій діагонізовності матриці
Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та базис $\{f_1, \dots, f_n\}$. Задані умови еквівалентні:
1) A – діагоналізовний;
2) $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$, причому $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$;
3) $L = L_{\lambda_1} \dot{+} \dots \dot{+} L_{\lambda_k}$;
4) $\{f_1, \dots, f_n\}$ – базис із суто власних векторів.

Proof.
$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Дано: A - діагоналізовний, тобто $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}$. Звідси $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = (\mu_1 - \lambda) \dots (\mu_n - \lambda)$. Але оскільки $\mu_1, \dots, \mu_n$ можуть співпадати, то ми запишемо в такому вигляді:
$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$, де $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Оскільки λ_i – власне число, то тоді $a_{\lambda_i} \geq g_{\lambda_i}$. Але водночас оскільки маємо діагоналізовну матрицю, то $Ah^i_l = \lambda_i h^i_l, l = \overline{1, \alpha_i}$, причому $\{h^i_1, \dots, h^i_{\alpha_i}\} \subset \{f_1, \dots, f_n\}$. Тоді система $\{h^i_1, \dots, h^i_{\alpha_i}\}$ має бути л.н.з., тож $\dim L_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} \geq \alpha_i = a_{\lambda_i}$.

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Дано: $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$, причому $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$. Тобто $\dim L_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$. По-перше, $a_{\lambda_1} + \dots + a_{\lambda_k} = \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$, оскільки степінь многочлена n; по-друге, оскільки $L_{\lambda_1}, \dots, L_{\lambda_k}$ утворює пряму суми, то об'єднавши їхні базиси, отримаємо базис L, просто тому що кількість базисних елементів n штук. Тоді за **Th. 1.9.7**, $L = L_{\lambda_1} \dot{+} \dots \dot{+} L_{\lambda_k}$.

$\boxed{3) \Rightarrow 4)}$ Дано: $L = L_{\lambda_1} \dot{+} \dots \dot{+} L_{\lambda_k}$. Нехай $\{h^i_1, \dots, h^i_{m_i}\}$ – базис L_{λ_i}, тоді за **Th. 1.9.7**, буде базис L, який складається з n елементів, кожний з яких – власний вектор.

$\boxed{4) \Rightarrow 1)}$ уже доводили. ■

4.4 Теорема Жордана

А от надалі будемо розглядати випадки операторів $A \in \mathcal{L}(L, L)$, де матрицю діагоналізувати не можна. При цьому ми будемо розглядати характеристичні многочлени $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$, що розкладаються на лінійні множники, тобто
$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \dots (\lambda_m - \lambda)^{k_m}$.
Зауважу, що якщо розглядати L над $\mathbb{C}$, то такий розклад завжди можливий за основною теоремою алгебри.

Theorem 4.4.1 Теорема Жордана
Задано матрицю $A \in \mathcal{L}(L, L)$, де L – лінійний простір над $\mathbb{C}$. Тоді існує базис L, який позначу за J, для якого матриця оператора виглядає таким чином:
$\mathbb{A}_J = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda_1)} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{J(\lambda_2)} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \boxed{J(\lambda_m)} \end{pmatrix}$ – така матриця називається **жордановою формою матриці**.
Не обов'язково, щоб $\lambda_i \neq \lambda_j$ всюди. На діагоналі в нас матриці виглядають так:
$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ – така матриця називається **жордановою клітиною**.
Матриця $\mathbb{A}_J$ – єдина з точністю до перестановки жорданових клітин (при цьому базис не єдиний).

Доведення даної теореми потребує додаткових теоретичних відомостей, які ми розглянемо нижче.

Lemma 4.4.2 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та M – інваріантний підпростір. Тоді M – інваріантний підпростір відносно $A - \lambda I$.

Proof.
$\forall x \in M : Ax \in M \implies (A - \lambda I)x = Ax - \lambda x \in M$. ■

4.5 Кореневі вектори

Definition 4.5.1 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$, в якому $\lambda \in \mathbb{R}$ – деяке число.
Вектор f називається **кореневим** (англійською **generalized eigenvector**), якщо

$$(A - \lambda I)^k f = 0, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Найменше $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, що обнуляє вектор, називається **висотою**.

Якщо висота 0, то тоді кореневим вектором буде лише 0.
Якщо висота 1, то тоді кореневими векторами будуть власні вектори з власним числом λ.
Таким чином, кореневі вектори – це узагальнене поняття власних векторів.

Remark 4.5.2 Якщо f – кореневий вектор висоти k, то $(A - \lambda I)f$ – кореневий вектор висоти $k - 1$.

Remark 4.5.3 Тут із означення випливає, що λ – власне число.
Дійсно, якщо f – кореневий вектор, то $(A - \lambda I)^k f = 0$, але тоді $(A - \lambda I)^{k-1} f \neq 0$. Звідси $(A - \lambda I)(A - \lambda I)^{k-1} f = 0$, тобто $(A - \lambda I)^{k-1} f$ – власний вектор оператора A з власним числом λ.

Remark 4.5.4 Множина кореневих векторів висоти $\leq k$ співпадає з множиною $\ker(A - \lambda I)^k$, яке є підпростором в L.

Таким чином, ми маємо такий ланюцг ядер:
$\{0\} \subset \underbrace{\ker(A - \lambda I)}_{=L_\lambda} \subset \ker(A - \lambda I)^2 \subset \dots \subset \ker(A - \lambda I)^k \subset \dots$.
Зокрема якщо існує f – кореневий вектор висоти k, то звідси
$\{0\} \subsetneq \underbrace{\ker(A - \lambda I)}_{=L_\lambda} \subsetneq \ker(A - \lambda I)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(A - \lambda I)^k$.
Строге включення, тому що k – мінімальне число, де $(A - \lambda I)^k$ онулює вектор f. Тобто в жодному разі вже $f \notin \ker(A - \lambda I)^{k-1}$.

Definition 4.5.5 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ – лінійний оператор, в якому $\lambda \in \mathbb{R}$ – власне число.
Кореневим підпростором оператора A з власним числом λ називають множину всіх кореневих векторів.
Позначення: L^λ.
Англійською це називають **generalized eigenspace**.

Remark 4.5.6 Тоді із ланцюга ядер випливає, що $L^\lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(A-\lambda I)^i$.

Proposition 4.5.7 L^λ – дійсно підпростір лінійного простору L.

Proof.
Нехай $u, v \in L^\lambda$, тоді звідси $(A-\lambda I)^{k_1}u = 0$ та $(A-\lambda I)^{k_2}v = 0$ для деяких $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.
Оберемо $k = \max\{k_1, k_2\}$, тоді звідси випливає, що
$(A-\lambda I)^k(\alpha u + \beta v) = \alpha(A-\lambda I)^k u + \beta(A-\lambda I)^k v = 0 + 0 = 0$.
Таким чином, $\alpha u + \beta v \in L^\lambda$. ■

Proposition 4.5.8 Властивості кореневих підпросторів
Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$, в якому $\lambda \in \mathbb{R}$ – власне число. Тоді:
1) L^λ – інваріантний відносно A;
2) $(A-\mu I)|_{L^\lambda}$ – невироджений при $\mu \neq \lambda$;
3) $\dim L^{\lambda_0} = a_{\lambda_0}$, де a_{λ_0} – алгебраїчна кратність характеристичного многочлена оператора A.
(TODO: переглянути доведення)

Proof.
1) Якщо взяти базис в L^λ, то тоді кожний з базисних елементів має свою висоту. Ми зафіксуємо максимальну висоту m, і тоді звідси $\forall x \in L^\lambda : (A-\lambda I)^m x = 0$. Звідси випливає, що
$L^\lambda = \ker(A-\lambda I)^m$. Ми позначимо $B = (A-\lambda I)^m$. Оскільки A з A та A з I комутують між собою, то звідси $AB = BA$. Отже, $\forall x \in L^\lambda = \ker B : Bx = 0 \implies A(Bx) = B(Ax) = 0 \implies Ax \in L^\lambda$.
Тобто L^λ - A-інваріантний, як наслідок $(A-\lambda I)$-інваріантний.

2) Треба довести фактично, що $\ker(A-\mu I)|_{L^\lambda} = \{0\}$. Я надалі розглядаю всі оператори, що звужені лише до L^λ, явно не показуючи.
Нехай $x \in \ker(A-\mu I))$. Тоді $(A-\mu I)x = 0$. Звідси
$(A-\lambda I)x = (A-\mu I + \mu I - \lambda I)x = (A-\mu I) + (\mu-\lambda)x = (\mu-\lambda)x$.
Оскільки x - кореневий вектор, то $(A-\lambda I)^m x = (\mu-\lambda)^m x = 0$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. У силу того, що $\mu \neq \lambda$, то єдиний варіант - вимагати $x = 0$.

Фактично кажучи, цією властивістю ми кажемо, що оператор $A|_{L^\lambda}$ має лише власне число λ - і більше ніяке. Тому характеристичний многочлен матиме вигляд:
$\det(\mathbb{A}|_{L^\lambda} - t\mathbb{I}) = (\lambda - t)^n$. Тут $\dim L^\lambda = n$. Але тут n - алгебраїчне кратне числа λ характеристичного многочлена $A|_{L^\lambda}$, тобто це не схоже на третю властивість.

3) Візьмемо якийсь базис $\{e_1, \dots, e_r\}$ в L^{λ_0} та розширимо до $\{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_k\}$ базису L. Матриця оператора A виглядатиме так:
$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}|_{L^{\lambda_0}} & \mathbb{C} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{B} \end{array}\right)$, а тому $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \det(\mathbb{A}|_{L^{\lambda_0}} - \lambda\mathbb{I}) \det(\mathbb{B} - \lambda\mathbb{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^r \det(\mathbb{B} - \lambda\mathbb{I})$.
!Припустимо, що λ_0 буде коренем $\det(\mathbb{B} - \lambda\mathbb{I})$. Тобто оператор B, що відповідає цій матриці, має власний вектор g, для якого $Bg = \lambda_0 g$. Причому $g = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_k f_k$. Також треба розуміти, що $g \notin L^{\lambda_0}$, бо в інакшому випадку $\beta_1 = \dots = \beta_k = 0 \implies g = 0$, що не наш варіант.
Тоді звідси випливає, що $(A-\lambda_0 I)g \in L^{\lambda_0}$. Це все тому, що
$(A-\lambda_0 I)g = Ag - \lambda_0 g = A(\beta_1 f_1 + \dots + \beta_k f_k) - \lambda_0 g = \beta_1 Af_1 + \dots + \beta_k Af_k - \lambda_0 g \boxed{=}$
Af_1 відповідає $r+1$-му стовпчику матриці $\mathbb{A}$. Під час розкладу буде якась комбінація з $e_1, \dots, e_r$ та комбінація з $f_1, \dots, f_k$, що співпаде з першою 'координатою' $\lambda_0 g$.
Аналогічно з рештою. Тобто в нас лишається лише лінійна комбінація з базисних елементів з L^{λ_0}.
$\boxed{=} d_1 e_1 + \dots + d_r e_r$.
Але якщо $(A-\lambda_0 I)g \in L^{\lambda_0}$, то тоді $(A-\lambda_0 I)^{m+1} g = 0$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. І виходить, що $g \in L^{\lambda_0}$.
Суперечність!
Таким чином, ми показали, що $a_{\lambda_0} = r$ в характеристичному многочлені. А це співпадає з $\dim L^{\lambda_0}$, бо був базис $\{e_1, \dots, e_r\}$. ■

Remark 4.5.9 Третя властивість підкреслює: алгебраїчна кратність кореня λ_0 характеристичного многочлена оператора $A|_{L^{\lambda_0}}$ співпадає з алгебраїчною кратністю кореня λ_0 характеристичного многочлена оператора A.

Proposition 4.5.10 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – різні власні числа. Тоді $L^{\lambda_1} + \dots + L^{\lambda_s}$ утворює пряму суму.

Proof.
Доведення по МІ за кількістю власних чисел.
I. *База індукції.* при $s = 1$ – нецікаво.
II. *Припущення індукції.* Припустимо, що $L^{\lambda_1} + \dots + L^{\lambda_{s-1}}$ утворює пряму суму.
III. *Крок індукції.* Покажемо, що $L^{\lambda_1} + \dots + L^{\lambda_{s-1}} + L^{\lambda_s}$ також утворює пряму суму.
Нехай $v_i \in L^{\lambda_i}, i = \overline{1,s}$ такі, що $v_1 + \dots + v_s = 0$.
Оскільки $v_s \in L^{\lambda_s}$, то $(A - \lambda_s I)^m v_s = 0$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Подієму цим оператором на рівняння вище – отримаємо:
$w_1 + \dots + w_{s-1} = 0$, де $w_i = (A - \lambda_s I)^m v_i \in L^{\lambda_i}$. Належність випливає з інваріантності кореневого підпростора. Оскільки $L^{\lambda_1} + \dots + L^{\lambda_{s-1}}$ утворює пряму суму, то звідси випливає, що $w_1, \dots, w_{s-1} = 0$. Тобто $w_i = (A - \lambda_s I)^m v_i = 0$, але оскільки $(A - \lambda_s I)$ – невироджений на L^{λ_i}, як наслідок $(A - \lambda_s I)^m$ – невироджений, то звідси $v_i = 0$.
Підставимо в найперше рівняння - отримаємо $v_s = 0$.
МІ доведено. ■

Theorem 4.5.11 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$, де L – лінійний простір над $\mathbb{C}$. Припустимо $\dim L = n$.
Тоді $L = L^{\lambda_1} \dot{+} L^{\lambda_2} \dot{+} \dots \dot{+} L^{\lambda_m}$.

Proof.
Нехай характеристичний поліном має власні числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. За попереднім твердженням,
$L^{\lambda_1} + \dots + L^{\lambda_m}$ утворює пряму суму.
Зауважимо, що $L^{\lambda_1} \dot{+} L^{\lambda_2} \dot{+} \dots \dot{+} L^{\lambda_m} \subset L$.
Також $\dim(L^{\lambda_1} \dot{+} L^{\lambda_2} \dot{+} \dots \dot{+} \dim L^{\lambda_m}) = \dim L^{\lambda_1} + \dots + L^{\lambda_m} = a_{\lambda_1} + \dots + a_{\lambda_m} = n = \dim L$, тому що сумуючи алегбраїчні кратності, отримаємо степінь многочлена.
Такми чином, $L = L^{\lambda_1} \dot{+} L^{\lambda_2} \dot{+} \dots \dot{+} L^{\lambda_m}$. ■

Ця теорема відіграє важливу роль в подальшому розвитку доведення теореми Жордана. Якщо ми продовжимо розглядати оператор $A \in \mathcal{L}(L, L)$, де L – лінійний простір над $\mathbb{C}$, то за пунктом 2.14. (завдяки щойно доведеної теореми), матрицю лінійного оператора можна записати ось так:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbb{A}|_{L^{\lambda_1}}} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{\mathbb{A}|_{L^{\lambda_2}}} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \boxed{\mathbb{A}|_{L^{\lambda_m}}} \end{pmatrix}$$

Залишилось з'ясувати, як виглядатиме матриця оператора $A|_{L^{\lambda_i}}$, який має єдине власне число λ_i.

4.6 Нільпотентні оператори

Definition 4.6.1 Задано $B \in \mathcal{L}(L, L)$.
Оператор B називається **нільпотентним**, якщо

$$\exists k \in \mathbb{N} : B^k = O$$

Example 4.6.2 Кілька прикладів:
1) Оператор $B \colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, який задається як $(Af)(x) = f'(x)$, буде нільпотентним.
2) Оператор $B = (A - \lambda I)|_{L^\lambda} \colon L^\lambda \to L^\lambda$ буде також нільпотентним (тому й виник такий розділ).

Proposition 4.6.3 Нільпотентний оператор має лише власне число $\lambda = 0$.

Proof.
Нехай f – власний вектор нільпотентного оператора B, тобто $Af = \lambda f$. Тоді $B^k f = \lambda^k f = 0$. Оскільки $f \neq 0$, то єдиний варіант – це $\lambda = 0$. ■

Corollary 4.6.4 Всі вектори з L будуть кореневими певної висоти для нільпотентного оператора B. Інакше кажучи, $L^{\lambda=0} = L$.

Definition 4.6.5 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та f – деякий елемент.
Циклічним підпростором, що породжений елементом f, називається множина

$$U = \operatorname{span}\{f, Af, A^2 f, \dots\}$$

Remark 4.6.6 У деталі про циклічні підпростори не буду копатися, але деякі факти для випадку кореневих векторів як раз знадобиться.

Proposition 4.6.7 Циклічний підпростір – найменший A-інваріантний підпростір, що містить f.

Proof.
$\forall x \in U : x = \alpha_0 f + \alpha_1 Af + \alpha_2 A^2 f + \dots$.
$Ax = \alpha_0 Af + \alpha_1 A^2 f + \alpha_2 A^3 f + \dots \implies Ax \in U$.
Тобто U – інваріантний.
Нехай W – ще один інваріантний, що містить f, але $W \subset U$. Покажемо, що $U \subset W$.
Оскільки $f \in W$, то в силу інваріантності, $Af \in W, A^2 f \in W, \dots$. Таким чином,
$\forall x \in U : x = \alpha_0 f + \alpha_1 Af + \dots \in W$. Тоді $W = U$. ■

Lemma 4.6.8 Задано $B \in \mathcal{L}(L, L)$ – нільпотентний. Нехай $f \in L$ – кореневий вектор висоти $k > 0$. Тоді система $\{f, Bf, \dots, B^{k-1} f\}$ – л.н.з.

Proof.
I. *База індукції.* При $k = 1$ – одна система з ненульового вектора – л.н.з.
II. *Припущення індукції.* Припустимо, що лема виконана для векторів висоти менших за k.
III. *Крок індукції.* Доведемо, що для k лема виконана.
$\beta_0 f + \beta_1 Bf + \dots + \beta_{k-1} B^{k-1} f = 0$.
Подіємо оператором B на дане рівняння – отримаємо:
$\beta_0 Bf + \beta_1 B^2 f + \dots + \beta_{k-2} B^{k-1} f = 0$.
Позначимо $Bf = g, B^2 f = Bg, \dots, B^{k-1} f = B^{k-2} g$. Причому важливо зауважити, що будуть також кореневими (див зауваження).
$\beta_0 g + \beta_1 Bg + \dots + \beta_{k-2} B^{k-2} g = 0$.
За припущенням МІ, $\{g, Bg, \dots, B^{k-2} g\}$ – л.н.з., а тому $\beta_0 = \dots = \beta_{k-2} = 0$.
Підставимо в початкове рівняння – отримаємо $\beta_{k-1} = 0$.
МІ доведено. ■

Corollary 4.6.9 Задано $B \in \mathcal{L}(L, L)$ – нільпотентний оператор та $\dim L = k$, а також f –кореневий вектор висоти k. Тоді $\{f, Bf, \dots, B^{k-1} f\}$ – базис для циклічного підпростору, породженого f.

Якщо позначити $e^{(j)} = Bf^{(k-j)}$, то ми отримаємо такий ланцюг:
$0 \xleftarrow[B]{} e_1 \xleftarrow[B]{} e_2 \xleftarrow[B]{} e_3 \xleftarrow[B]{} \dots \xleftarrow[B]{} e_k$

Тоді для оператора $B|_U : U \to U$ можна записати матрицю оператора в базисі $\{e_1, \dots, e_k\}$ таким чином:

$$\mathbb{B}|_U \overset{\text{позн.}}{=} J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – **нільпотентна клітина Жордана**.

Зауважимо, що $\operatorname{rank} J_k = k - 1$, як стовпчиковий ранг – це ще нам знадобиться.

Theorem 4.6.10 Задано $B \in \mathcal{L}(L, L)$ – нільпотентний оператор та $\dim L = n$. Тоді існує розклад $L = U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_p$, де кожна U_i – циклічні підпростори та $\dim U_i = k_i$.

Corollary 4.6.11 Якщо в кожному U_i взяти базис цих ланцюгів, то об'єднавши, отримаємо базис L, а згідно з п. 2.14., отримаємо матрицю оператора B в такому вигляді:

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{J_{k_2}} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \boxed{J_{k_p}} \end{pmatrix},$$

де J_{k_i} – нільпотентна клітина Жордана.

Proof.
Доведення МІ за $\dim L$.
I. *База індукції.* Маємо $\dim L = 1$. Тоді оскільки $\lambda = 0$ – власне число, то мається власний вектор $f \neq 0$. Тоді $Bf = 0$, а тому циклічним підпростором буде $\{f\}$.
II. *Припущення індукції.* Нехай теорема виконується для $\dim L < n$. III. *Крок індукції.* Доведемо теорему для $\dim L = n$. Оскільки $\operatorname{Im} B$ – інваріантний підпростір відносно B (доводили), то ми будемо розглядати $B|_{\operatorname{Im} B}$, який також нільпотентний. І дійсно, $\operatorname{Im} B \subset L$, а тому $B^k|_{\operatorname{Im} B} = O$. Також оскільки $\lambda = 0$ – власне число, то звідси $\dim \operatorname{Im} B = \dim L - \dim \ker B < n$.
За припущенням МІ, для нільпотентного оператора $B|_{\operatorname{Im} B}$ існує розклад $\operatorname{Im} B = W_1 \dot{+} \dots \dot{+} W_q$, де W_i – циклічні підпростори та $\dim W_i = k_i$. Маємо таку картину:

$$0 \xleftarrow[B]{} e_1^1 \xleftarrow[B]{} e_2^1 \xleftarrow[B]{} \dots \xleftarrow[B]{} e_{k_1}^1$$
$$0 \xleftarrow[B]{} e_1^2 \xleftarrow[B]{} e_2^2 \xleftarrow[B]{} \dots \xleftarrow[B]{} e_{k_2}^2$$
$$\vdots$$
$$0 \xleftarrow[B]{} e_1^q \xleftarrow[B]{} e_2^q \xleftarrow[B]{} \dots \xleftarrow[B]{} e_{k_q}^q$$

Кожний з ланцюгів утворює в себе базис. Оскільки $W_1, \dots, W_q$ утворюють пряму суму, то звідси вони разом утворюють базис.
Як наслідок, система $\{\underset{\in W_1}{e_1^1}, \dots, \underset{\in W_q}{e_1^q}\}$ має бути л.н.з. Але насправді, дана система – базис в $\ker B|_{\operatorname{Im} B}$.
Тому що якщо розглянути матрицю оператора $\mathbb{B}|_{\operatorname{Im} B}$, а вона виглядає як (див. наслідок вище)

$$\mathbb{B}|_{\operatorname{Im} B} = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{J_{k_2}} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \boxed{J_{k_q}} \end{pmatrix},$$

то бачимо, що $\operatorname{rank} \mathbb{B}|_{\operatorname{Im} B} = \dim \operatorname{Im} B|_{\operatorname{Im} B} = (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \dots + (k_q - 1) = (k_1 + \dots + k_q) - q = \dim \operatorname{Im} B + q$. Отже, $q = \ker B|_{\operatorname{Im} B} = \dim \operatorname{Im} B - \dim \operatorname{Im} B|_{\operatorname{Im} B}$.
Оскільки $e_{k_1}^1 \in \operatorname{Im} B$, то звідси $\exists x_1 \in L : Bx_1 = e_{k_1}^1$. Так само й для $e_{k_2}^2, \dots, e_{k_q}^q$.
Також $\ker B|_{\operatorname{Im} B} \subset \ker B$, тоді розширимо до базису $\{e_1^1, \dots, e_1^q, g_1, \dots, g_t\}$.
У нас буде розширена версія системи:

$$0 \xleftarrow[B]{} e_1^1 \xleftarrow[B]{} e_2^1 \xleftarrow[B]{} \dots \xleftarrow[B]{} e_{k_1}^1 \xleftarrow[B]{} x_1$$
$$0 \xleftarrow[B]{} e_1^2 \xleftarrow[B]{} e_2^2 \xleftarrow[B]{} \dots \xleftarrow[B]{} e_{k_2}^2 \xleftarrow[B]{} x_2$$
$$\vdots$$
$$0 \xleftarrow[B]{} e_1^q \xleftarrow[B]{} e_2^q \xleftarrow[B]{} \dots \xleftarrow[B]{} e_{k_q}^q \xleftarrow[B]{} x_q$$
$$0 \xleftarrow[B]{} g_1 \qquad \dots \qquad 0 \xleftarrow[B]{} g_t$$

Кожний з цих ланцюгів позначу за U_i, червоні позначу за P_j. І зараз ми доведемо, що $U_1 + \dots + U_q + P_1 + \dots + P_t$ утворюють пряму суму.
$u_1 + \dots + u_q + p_1 + \dots + p_t = 0$, де $u_i \in U_i$, тоді $u_i = \alpha_1^i e_1^i + \dots + \alpha_{k_i}^i e_{k_i}^i + \beta_i x_i$, та $p_i \in P_i$, тоді $p_i = \gamma_i g_i$.
Буде тоді таке жахіття:
$(\alpha_1^1 e_1^1 + \dots + \alpha_{k_1}^1 e_{k_1}^1 + \beta_1 x_1) + \dots + (\alpha_1^q e_1^q + \dots + \alpha_{k_q}^q e_{k_q}^q + \beta_q x_q) + \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_t g_t = 0$.
Подіємо оператором B на цю лінійну комбінацію. Тоді кожний вектор зсунеться, згідно з діаграмою вище – отримаємо:
$(\alpha_2^1 e_1^1 + \dots + \alpha_{k_1}^1 e_{k_1-1}^1 + \beta_1 e_{k_1}^1) + \dots + (\alpha_2^q e_1^q + \dots + \alpha_{k_q}^1 e_{k_q-1}^q + \beta_q e_{k_q}^q) = 0$.
Ці вектори утворюють базис – зазначили вище. Звідси випливає, що
$\alpha_2^1 = \dots = \alpha_{k_1}^1 = \beta_1 = 0, \dots, \alpha_2^q = \dots = \alpha_{k_q}^1 = \beta_q = 0$.
Підставимо ці числа – маємо:
$\alpha_1^1 e_1^1 + \dots + \alpha_1^q e_1^q + \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_t g_t = 0$.
Уже відомо, що $\{e_1^1, \dots, e_1^q, g_1, \dots, g_t\}$ – базис, а тому $\alpha_1^1 = \dots = \alpha_1^q = 0$.
Значить звідси $u_1 = \dots = u_q = 0, \gamma_1 = \dots = \gamma_t = 0$, що й доводить утворення прямої суми.
Далі покажемо, що $L = U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_q \dot{+} P_1 \dot{+} \dots \dot{+} P_t$. Ясно, що $U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_q \dot{+} P_1 \dot{+} \dots \dot{+} P_t \subset L$, а також $\dim(U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_q \dot{+} P_1 \dot{+} \dots \dot{+} P_t) = \dim U_1 + \dots + \dim U_q + \dim P_1 + \dots + \dim P_t =$
$= (k_1 + 1) + \dots + (k_q + 1) + 1 + \dots + 1 = (k_1 + \dots + k_q) + q + t = \dim \operatorname{Im} B + (q + t) = \dim \operatorname{Im} B + \dim \ker B = \dim L$.

Отже, $L = U_1 \dot{+} \ldots \dot{+} U_q \dot{+} P_1 \dot{+} \ldots \dot{+} P_t$.
MI доведено. ■

Повернімося до п. 4.4.

Використовуючи **Th. 4.5.11**, а потім на кожному **Th. 4.6.10**, разом з усіма можливими наслідками, отримуємо бажане доведння існування в теоремі Жордана.
Залишилось тільки показати єдиність такої форми. А це буде в наступному підрозділі.
Розглянемо зв'язок матриці оператора $A \in \mathcal{L}(L, L)$ в деякому базисі та жордановою формою.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n_e \arrow[rrr, "\mathbb{A}_e"] \arrow[dd, "\mathbb{U}"'] & & & \mathbb{C}^n_e \arrow[dd, "\mathbb{U}"] \\
& L \arrow[r, "A"] \arrow[ul] \arrow[dl] & L \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\mathbb{C}^n_J \arrow[rrr, "\mathbb{A}_J"] & & & \mathbb{C}^n_J
\end{tikzcd}$$

Розглядаємо базисні елементи жорданового базису. Будуємо матрицю $\mathbb{U}$ оператора переходу від одного базису до іншого. Отримаємо зв'язок: $\mathbb{A}_e = \mathbb{U}\mathbb{A}_J\mathbb{U}^{-1}$.

Example 4.6.12 Задано матрицю оператора $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Знайдемо жорданову форму.

$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \cdots = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1) = 0$.
$\lambda = -1$:

$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{f} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_4 \end{pmatrix} = f_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \vec{f} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Можемо взяти власний вектор $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$:

$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{f} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2 \\ f_3 \\ \frac{f_2}{2} \end{pmatrix} = f_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + f_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + f_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \vec{f} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Кількість л.н.з. векторів недостатня для базису. Тому має існувати приєднаний.

$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{h} = \vec{f}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & f_1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & f_2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & f_3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & f_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & f_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 - f_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_3 - 2f_1 \end{array}\right)$$

Щоб система була сумісною, ми вимагатимемо $\begin{cases} f_2 - f_1 = 0 \\ f_3 - 2f_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f_1 = f_2 \\ f_3 = 2f_1 \end{cases}$.

Під такі умови можемо взяти власний вектор $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тоді для нього знайдуться такі приєднані вектори:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 + 2h_4 \\ 1 + 2h_4 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \vec{h} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Оберемо $\vec{h_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Далі вже продовження не буде.

Також візьмемо $\vec{f_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, який не має продовження.

Таким чином, ми отримаємо таку форму:

$$\mathbb{A}_J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.7 Властивості жорданової форми матриці

Нехай λ_0 – власне число. Оператор A звузимо до $A|_{L^{\lambda_0}}$, а потім розглянемо $B = A|_{L^{\lambda_0}} - \lambda_0 I$, який буде нільпотентним. Тоді там є базис з набору ланцюгів.

Proposition 4.7.1 Кількість клітин Жордана, що відповідають власному числу λ_0, дорівнює $\dim(\ker(A - \lambda_0 I))$.

Proof.
Кожний ланцюг – це фактично опис клітини, і в кінці кожний ланцюг переводить в нульовий елемент. Тому кількість клітин задається $\dim(\ker B)$. ■

Proposition 4.7.2 Кількість клітин Жордана для власного числа λ_0, розмірність матриці якої не менше за $m \times m$, дорівнює $r_m = \dim(\ker(A - \lambda_0 I)^m) - \dim(\ker(A - \lambda_0 I)^{m-1})$.

Proof.
Див. малюнки. ■

Proposition 4.7.3 Кількість клітин Жордана для власного числа λ_0, розмірність якої рівно $m \times m$, дорівнює $R_m = r_m - r_{m+1}$.

Proof.
r_m – кількість клітин Жордана, розмірність якої не менше $m \times m$.
r_{m+1} – кількість клітин Жордана, розмірність якої не менше $(m+1) \times (m+1)$.
Отже, $R_m = r_m - r_{m+1}$ – наша бажана відповідь. ■

Example 4.7.4 До прикладу візьмемо оператор $A\colon \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ з відповідною матрицею (також заспойлерю його жорданову нормальну форму):

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{A}_J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Під час пошуку власних чисел, ми отримаємо $\lambda = 2$ - кратність 6, $\lambda = 4$ - кратність 2.
Якщо закрити руками другу матрицю, то може виникнути питання: скільки клітин Жордана буде для $\lambda = 2$?

Записуємо матрицю $\mathbb{A} - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Спочатку треба знайти ранг матриці, одразу дам: $\operatorname{rank}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I}) = 5$, звідси $\dim \operatorname{Im}(A - 2I) = 5$, а отже, $\dim \ker(A - 2I) = 3$.
Відповідь: всього 3 клітин Жордана (що й демонструє розклад).
Інше питання: скільки всього клітин Жордана буде для $\lambda = 2$, розмірність матриць яких не менше 2×2?

Уже знаємо $\dim \ker(A-2I) = 3$. Далі беремо матрицю $(\mathbb{A}-2\mathbb{I})^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Тут $\operatorname{rank}(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})^2 = 3$, тобто $\dim \operatorname{Im}(A - 2I)^2 = 3 \implies \dim \ker(A - 2I)^2 = 5$.
Відповідь: всього $\dim \ker(A - 2I)^2 - \dim \ker A - 2I = 5 - 3 = 2$ клітин.
Скільки вього клітин Жордана, розмірність якої 2×2? Відповідь: $R_2 = r_1 - r_2 = 3 - 2 = 1$.

Повернімось знову до п. 4.4.

Використовуючи властивості 1,3, ми отримали: кількість клітин Жордана та кількість клітин Жордана фіксовної розмірності жодним чином не залежало він обраного базису. Бо коли ми створювали матрицю нільпотентного оператора, то нам сильно базис й не був потрібним.
Таким чином, задається єдиність Жорданової матриці. Теорема повністю доведена.

4.8 Застосування жорданової форми: функції від операторів, матриць

Definition 4.8.1 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$, многочлен $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ (коефіцієнти $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$).
Многочленом від оператора A називають такий вираз оператор:

$$f(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_o I$$

Remark 4.8.2 Оператор $f(A)$ – також лінійний.
Також якщо оператор A має деяку матрицю $\mathbb{A}$ в деякому базисі, то матриця оператора $f(A)$: $f(\mathbb{A}) = a_n \mathbb{A}^n + \dots + a_1 \mathbb{A} + a_0 \mathbb{I}$.

Definition 4.8.3 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та $f \in \mathbb{R}[x]$.
Многочлен f називається **анулюючим** для оператора A, якщо

$$f(A) = O$$

де O – нульовий оператор (для матриць аналогічно).

Definition 4.8.4 **Мінімальним многочленом** оператора $A \in \mathcal{L}(L, L)$ назвемо найменший анулюючий многочлен ненульового степені зі старшим коефіцієнтом 1.
Позначення: $\mu_A(x)$.

Proposition 4.8.5 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та $\dim L = n$. Тоді існує єдиний мінімальний многочлен.

Proof.
Відомий факт, що $\mathcal{L}(L, L) \cong \mathrm{Mat}(n \times n)$, тоді звідси $\dim \mathcal{L}(L, L) = n^2$. Звідси випливає, що система $\{I, A, A^2, \dots, A^{n^2}\}$ буде л.з. системою, а за означенням л.з., $\exists a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n^2}$ - не всі нулеві, для яких $a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_{n^2} A^{n^2} = O$.
Отже, існує многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n^2} t^{n^2}$ ненульовий, який анулюючий. І серед всіх існуючих ми оберемо найменший, а потім треба ще поділити на старший ненульовий коефіцієнт. Отримаємо мінімальний многочлен.
Доведення єдиності проводиться від супротивного, що неважко показати. ■

Proposition 4.8.6 f – анулюючий многочлен для $A \iff \mu_A \mid f$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: f – анулюючий многочлен. Поділимо f на μ_A з остачею
$f(x) = q(x)\mu_A(x) + r(x)$, де $\deg r < \deg \mu$ або $r \equiv 0$. Перший випадок не є можливим, тому що $f(A) = q(A)\mu_A(A) + r(A) \implies r(A) = 0$ – анулюючий многочлен, яка зобов'язана мати $\deg r \geq \deg \mu$.
Отже, $r \equiv 0$.
А це доводить $\mu_A \mid f$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\mu_A \mid f \implies f(x) = q(x)\mu_A(x)$. Тоді ясно, що $f(A) = 0$, тобто f – анулюючий. ■

Обчислення многочлена

Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$ та $\dim L = n$. Відомо, що $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{A}_J\mathbb{U}^{-1}$ (зв'язок з попередньому підрозділу). Тоді можемо отримати:
$\mathbb{A}^2 = (\mathbb{U}\mathbb{A}_J\mathbb{U}^{-1})(\mathbb{U}\mathbb{A}_J\mathbb{U}^{-1}) = \mathbb{U}\mathbb{A}_J^2\mathbb{U}^{-1}$
$\vdots$
$\mathbb{A}^k = \mathbb{U}\mathbb{A}_J^k\mathbb{U}^{-1}, \forall k \geq 1$
За цим результатом обчислимо многочлен від матриці:
$f(\mathbb{A}) = f\left(\mathbb{U}\mathbb{A}_J\mathbb{U}^{-1}\right) = a_n\mathbb{U}\mathbb{A}^n\mathbb{U}^{-1} + \dots + a_1\mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^{-1} + a_o\mathbb{I} = \mathbb{U}(a_n\mathbb{A}_J^n + \dots + a_1\mathbb{A}_J + a_o\mathbb{I})\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}f(\mathbb{A}_J)\mathbb{U}^{-1}$

Ми вже знаємо, що $\mathbb{A}_J = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda_1)} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{J(\lambda_2)} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \boxed{J(\lambda_m)} \end{pmatrix}$.

Тоді $\mathbb{A}_J^k = \begin{pmatrix} \boxed{J^k(\lambda_1)} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{J^k(\lambda_2)} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \boxed{J^k(\lambda_m)} \end{pmatrix}$, $\forall k \geq 1$. Розписати треба – і буде ясно.

Таким чином, $f(\mathbb{A}_J) = a_n\mathbb{A}_J^n + \dots + a_1\mathbb{A}_J + a_0\mathbb{I} = \dots = \begin{pmatrix} \boxed{f(J(\lambda_1))} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{f(J(\lambda_2))} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \boxed{f(J(\lambda_m))} \end{pmatrix}$

І це ще не все, оскільки ми можемо знайти $f(J(\lambda_j))$.
Нашу початкову функцію ще можна записати через формулу Тейлора:
$f(x) = f(\lambda_j) + \dfrac{f'(\lambda_j)}{1!}(x - \lambda_j) + \dots + \dfrac{f^{(n)}(\lambda_j)}{n!}(x - \lambda_j)^n$.

Саме таким розкладом ми знайдемо бажане:
$f(J(\lambda_j)) = f(\lambda_j)I + \frac{f'(\lambda_j)}{1!}(J(\lambda_j) - \lambda_j I) + \dots + \frac{f^{(n)}(\lambda_j)}{n!}(J(\lambda_j) - \lambda_j I)^n \boxed{=}$

Тут $J(\lambda_j) - \lambda_j I = \begin{pmatrix} \lambda_j - \lambda_j & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j - \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j - \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j - \lambda_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = J(0)$

$\boxed{=} f(\lambda_j)I + \frac{f'(\lambda_j)}{1!}J(0) + \dots + \frac{f^{(n)}(\lambda_j)}{n!}J^n(0)$.
Знайдемо $J^k(0)$ тепер (або просто згадаю д/з).
Збільшуючи степінь, ми зсуваємо діагональ з одиничок. А там буде степінь, починаючи з якого, всі матриці будуть нулевими.
А далі в формулі два випадки:
$k \geq n$: $\implies f(J(\lambda_j)) = f(\lambda_j)J(0) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda_j)}{(k-1)!}J^{k-1}(0)$
$k < n$: $\implies f(J(\lambda_j)) = f(\lambda_j)J(0) + \dots + \frac{f^{(n)}(\lambda_j)}{n!}J^n(0)$
Але в цьому випадку $f^{(n+1)}(\lambda_j) = \dots = f^{(k)}(\lambda_j) = 0$. Все одно буде матриця той самої форми, як в першому випадку.

$$\implies f(J(\lambda_j)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_j) & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & \frac{f''(\lambda_j)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda_j)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda_j) & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & \dots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda_j)}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda_j) & \dots & \frac{f^{(k-3)}(\lambda_j)}{(k-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_j) \end{pmatrix}$$

Ну а далі просто підсумовуємо і отримуємо остаточні дані.

Corollary 4.8.7 $\mu_{J(\lambda)}(x) = (\lambda - x)^k$.

Proof.
Дійсно, якщо придивитись на отриману матрицю $f(J(\lambda))$, то ми її можемо зробити нулевою тоді й лише тоді, коли $f(\lambda) = f'(\lambda) = \dots = f^{(k-1)}(\lambda) = 0$. Ця рівність каже, що многочлен f має кратність корня λ не менше k. Отже, $(x-\lambda)^k \mid f$.
Тобто f – анулюючий для $J(\lambda) \iff (x-\lambda)^k \mid f$.
Також f – анулюючий для $J(\lambda) \iff \mu_{J(\lambda)} \mid f$.
Отже, з цього $(x-\lambda)^k \mid \mu_{J(\lambda)}$. Також оскільки $(x-\lambda)^k$ - анулюючий, бо $(J(\lambda) - \lambda I)^k = \mathbb{O}$ (бо матриця k-го розміру, згадай дз), то звідси $\mu_{J(\lambda)} \mid (x-\lambda)^k$.
Довели, що $\mu_{J(\lambda)}(x) = (\lambda - x)^k$. ■

Corollary 4.8.8 Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$, де L – лінійний простір над $\mathbb{C}$. Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – різні власні числа. Тоді $\mu_{\mathbb{A}_J}(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{k_i}$, де k_i – найбільший розмір клітини Жордана за власним числом λ_i в жордановій нормальній формі. Причому $\deg \mu_{\mathbb{A}_J} \leq \dim L$.
Не до кінця зрозумів.

Theorem 4.8.9 Теорема Гамільтона-Келі
Задано $A \in \mathcal{L}(L, L)$, де L – лінійний простір над $\mathbb{C}$. Тоді $\chi_A(A) = O$, де O – нульовий оператор.

Proof.
Маємо $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (x-\lambda_m)^{\alpha_m}$. Запишемо так, щоб власні числа розрізнялись:
$\chi_A(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \dots (x-\lambda_s)^{n_s}$. Тут числа n_i – сума всіх розмірів клітин Жордана для λ_i. Водночас користуючись попередніми позначеннями, k_i – найбільший розмір клітини Жордана. Тому $n_i \geq k_i$.
Таким чином, $\mu_A(x) \mid \chi_A(x)$ в силу щойно отриманої нерівності, отже χ_A – анулюючий для A, тобто $\chi_A(A) = O$. ■

Особлива увага до функції $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Виникає питання, як знайти $f(A)$. Сама процедура аналогічна, а функція f розкладається за Тейлором. Але існує єдина проблема – збіжність. Про збіжність буду (напевно, колись) порушувати питання на функані.

5 Евклідові простори та інше

5.1 Унітарні простори

Definition 5.1.1 Задано L – лінійний простір над $\mathbb{C}$.
Відображення $\varphi\colon L \times L \to \mathbb{C}$ називається **півторалінійним функціоналом**, якщо для нього виконано такі властивості:

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall x, y, z \in L : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x, z) + \beta\varphi(y, z) \\ 2) & \forall x, y, z \in L : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \varphi(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}\varphi(x, y) + \overline{\beta}\varphi(x, z) \end{array}$$

Відображення називають **білінійним функціоналом**, коли в пункті 2) $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ замінюються на α, β. Тобто виконується лінійність уже й за другим аргументом. Здебільшого такий випадок розглядається в лінійному просторі над $\mathbb{R}$.

Example 5.1.2 Розглянемо приклади білінійних функціоналів:

$$\begin{array}{lll} 1) & L = \mathbb{R}^3 & \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}); \\ 2) & L = \mathbb{R}[x] & \varphi(f, g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx; \\ 3) & L = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) & \varphi(A, B) = \mathrm{tr}(AB). \end{array}$$

Example 5.1.3 Розглянемо приклади півторалінійних функціоналів:

$$\begin{array}{lll} 1) & L = \mathbb{C}^2 & \varphi(\vec{z}, \vec{w}) = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2}; \\ 2) & L = \mathbb{C}[x] & \varphi(f, g) = \displaystyle\int_a^b f(x)\overline{g}(x)\,dx; \\ 3) & L = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) & \varphi(A, B) = \mathrm{tr}\Big(A\overline{B}^T\Big). \end{array}$$

Definition 5.1.4 Унітарним простором називають скінченний (!) лінійний простір E над $\mathbb{C}$, на якому задано півторалінійний функціонал $(\cdot,\cdot)\colon E\times E \to \mathbb{C}$, для якого виконуються такі властивості:

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall x \in E : (x, x) \geq 0 \\ 2) & (x, x) = 0 \iff x = 0 \\ 3) & \forall x, y \in E : (x, y) = \overline{(y, x)} \end{array}$$

Такий функціонал називають **скалярним добутком**.

Евклідовим простором назвемо все те саме; тільки в нас вже лінійний простір E над $\mathbb{R}$, а також там задається білінійний функціонал $(\cdot,\cdot)\colon E \times E \to \mathbb{R}$, всі властивості повторюються.

Remark 5.1.5 Важливо зауважити, що $(x, x) = \overline{(x, x)}$, завдяки пункту 3), а тому число $(x, x) \in \mathbb{R}$. Тоді нерівність в пункті 1) буде коректною.
Також якщо ми маємо евклідів простір, то $(x, y) = (y, x)$ в силу того, що $(y, x) = \overline{(y, x)}$, бо $(y, x) \in \mathbb{R}$.

Remark 5.1.6 Скалярний добуток ще часто позначають за $\langle\cdot,\cdot\rangle$, у трикутних дужках.

Example 5.1.7 Приклади 1), 2) в **Ex. 5.1.2**, **Ex. 5.1.3** лінійні простори є відповідно евклідовими, унітарними, а задані функціонали – це скалярні добутки.
Доведу лише для 1) **Ex. 5.1.3**. Перевіряємо всі властивості:
1) $\varphi(\vec{z}, \vec{z}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \in \mathbb{R}$ та $\varphi(\vec{z}, \vec{z}) \geq 0$;
2) $\varphi(\vec{z}, \vec{z}) = 0 \iff |z_1|^2 + |z_2|^2 = 0 \iff \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases} \iff \vec{z} = \vec{0}$;
3) $\varphi(\vec{z}, \vec{w}) = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} = \overline{\overline{z_1}w_1 + \overline{z_2}w_2} = \overline{\varphi(\vec{w}, \vec{z})}$.
Отже, $z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} = (\vec{z}, \vec{w})$.

Зауважимо, що евклідів або унітарний простір може бути нескінченним. Див. приклад 2).

Remark 5.1.8 Варто зазначити, що для унітарного (та еквлідового) простору може бути визначено декілька скалярних добутків.

Example 5.1.9 Зокрема для $E = \mathbb{R}_n[x]$ ми маємо такі скалярні добутки:
$(f, g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$;
$(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$, де a_i, b_i - відповідно коефіцієнти f, g;
$(f, g) = f(t_0)g(t_0) + f(t_1)g(t_1) + \cdots + f(t_n)g(t_n)$, де $t_i \in \mathbb{R}$.

Theorem 5.1.10 Нерівність Коші-Буняковського
Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідів або унітарний простір. Тоді $\forall x, y \in E : |(x, y)|^2 \le (x, x)(y, y)$.
У англомовних літературах це називають нерівністю Коші-Шварца.

Proof.
Маємо $(x, y) = |(x, y)|e^{i\varphi}$, де кут $\varphi = \arg(x + iy)$. Розглянемо вираз $(x + te^{i\varphi}y + x + te^{i\varphi}y) \ge 0$, виконано $\forall t \in \mathbb{R}$. Розпишемо ліву частини за властивостями функціоналу - отримаємо:
$(x, x) + (x, te^{i\varphi}y) + (te^{i\varphi}y, x) + (te^{i\varphi}y, te^{i\varphi}y) = (x, x) + \overline{te^{i\varphi}}(x, y) + te^{i\varphi}(y, x) + te^{i\varphi}\overline{te^{i\varphi}}(y, y)\boxed{=}$
Зауважимо, що $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$.
$\boxed{=}(x, x) + te^{-i\varphi}(x, y) + te^{i\varphi}(y, x) + t^2(y, y)\boxed{=}$
Далі оскільки $(x, y) = |(x, y)|e^{i\varphi}$, то звідси $e^{-i\varphi}(x, y) = |(x, y)|$.
А також $e^{i\varphi}(y, x) = \overline{e^{-i\varphi}(x, y)} = \overline{|(x, y)|} = |(x, y)|$.
$\boxed{=}(x, x) + 2t|(x, y)| + t^2(y, y) \ge 0$.
$D = 4|(x, y)|^2 - 4(x, x)(y, y) \le 0$, оскільки нерівність завжди виконана.
$\implies |(x, y)|^2 \le (x, x)(y, y)$. ■

Remark 5.1.11 $|(x, y)|^2 = (x, x)(y, y) \iff y = \alpha x$, де число $\alpha \in \mathbb{C}$ або $\mathbb{R}$.

Example 5.1.12 Зокрема маємо скалярний добуток $(f, g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$. За нерівністю Коші-Буняковського, $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx$.

5.2 Стисло про нормовані та метричні простори

Детально про нормовані та метричні простори можна подивитися в pdf про функціональний аналіз.

Definition 5.2.1 Нормованим простором називають лінійний простір N із заданою на ньому функцією $\|\cdot\| : N \to \mathbb{R}$, для якої виконуються такі властивості:

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall x \in E : \|x\| \ge 0, \qquad \|x\| = 0 \iff x = 0 \\ 3) & \forall x \in E : \forall \lambda \in \mathbb{R}(\text{ або } \mathbb{C}) : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \\ 4) & \forall x, y \in E : \|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \end{array}$$

Така функція називається **нормою**.

Example 5.2.2 Розглянемо декілька прикладів нормованих просторів:

1. $N = \mathbb{R}^n, \qquad \|\vec{x}\| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |x_j|$.
2. $N = \mathbb{C}^n, \qquad \|\vec{z}\| = \sqrt[p]{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p},\ p > 1$.
3. $N = C([a, b]), \quad \|f\| = \max\limits_{[a,b]} |f(x)|$.

Proposition 5.2.3 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – унітарний чи евклідів простір. Тоді простір є нормованим, а сама норма задається формулою: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Proof.
Перевіримо $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ на 4 аксіоми:
1) $\|x\| \ge 0$, оскільки $\sqrt{(x, x)} \ge 0$;
2) $\|x\| = 0 \iff \sqrt{(x, x)} = 0 \iff (x, x) = 0 \iff x = 0$;
3) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2(x, x)} = |\lambda|\sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$;
4) $\|x + y\| = \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)} = \sqrt{(x, x) + (x, y) + \overline{(x, y)} + (y, y)} =$
$= \sqrt{(x, x) + 2\operatorname{Re}(x, y) + (y, y)}\boxed{\le}$
Зауважимо, що $2\operatorname{Re}(x, y) \le 2|(x, y)|$ - факт з комплексного числення
$\boxed{\le}\sqrt{(x, x) + 2|(x, y)| + (y, y)} \overset{\text{нер-ть К-Б}}{\le} \sqrt{(x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y)} = \sqrt{\left(\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}\right)^2} =$
$= \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} = \|x\| + \|y\|$.
Отже, евклідовий простір є нормованим простором та $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. ■

Definition 5.2.4 **Метричним простором** називають множину $X \neq \emptyset$ із заданою на ньому функцією $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$, для якого виконуються такі властивості:

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall x, y \in X : \rho(x,y) \geq 0 \\ 2) & \rho(x,y) = 0 \iff x = y \\ 3) & \forall x, y \in X : \rho(x,y) = \rho(y,x) \\ 4) & \forall x, y, z \in X : \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,x) \end{array}$$

Така функція називається **відстанню**.

Proposition 5.2.5 Задано N - нормований простір. Тоді він є метричним простором, а відстань задається формулою: $\rho(x,y) = \|x - y\|$.

Proof.
Перевіримо $\rho(x,y) = \|x-y\|$ на 4 аксіоми:
1) $\rho(x,y) \geq 0$, оскільки $\|x-y\| \geq 0$;
2) $\rho(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$;
3) $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1|\|y-x\| = \rho(y,x)$;
4) $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = \rho(x,z) + \rho(z,y)$.
Отже, нормований простір є метричним простором та $\rho(x,y) = \|x-y\|$. ■

Corollary 5.2.6 $\rho(x,y) = \sqrt{(x-y, x-y)}$.

Definition 5.2.7 Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ - евклідів простір.
Косінусом кута між елементами x, y називається число:

$$\cos\alpha = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$$

Remark 5.2.8 Означення косінуса - коректне. Дійсно,
$|\cos\alpha| = \left|\dfrac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}\right| = \dfrac{(x,y)}{\|x\|\|y\|} \overset{\text{нер-ть К-Б}}{\leq} \dfrac{\|x\|\|y\|}{\|x\|\|y\|} = 1.$

Детально про метричний та нормований простори можна дізнатися вже на функціональному аналізі.

5.3 Ортогональні системи, процес Грама-Шмідта

Definition 5.3.1 Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – евклідів простір.
Елементи $x, y \in E$ називаються **ортогональними**, якщо

$$(x,y) = 0$$

Позначення: $x \perp y$.

Example 5.3.2 Зокрема маємо $\mathbb{R}[x]$ – евклідів простір зі скалярним добуток $(f,g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.
Зауважимо, що многочлени $x \perp x^2$, оскільки $(x, x^2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$ в силу непарності.

Definition 5.3.3 Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – евклідів простір.
Система елементів $\{x_1, \dots, x_n\}$ називається **ортогональною**, якщо

$$\forall j \neq k : x_j \perp x_k$$

Система елементів $\{x_1, \dots, x_n\}$ називається **нормованою**, якщо

$$\forall j : \|x_j\| = 1$$

Система, що є ортогональною та нормованою, називають **ортонормованою**.

Proposition 5.3.4 Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – евклідів простір. Відомо, що система $\{x_1, \dots, x_m\}$ - ортогональна та $\|x_j\| \neq 0, \forall j$. Тоді вона – л.н.з.

Proof.
$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0$.
Запишемо скалярний добуток $(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, x_j)$, де елемент x_j – довільний з системи.
Із одного боку, $(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, x_j) = (0, x_j) = 0$. Із іншого,
$(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, x_j) = \alpha_1(x_1, x_j) + \dots + \alpha_j(x_j, x_j) + \dots + \alpha_m(x_m, x_j)$.
Таким чином, маємо:
$\alpha_1(x_1, x_j) + \dots + \alpha_j(x_j, x_j) + \dots + \alpha_m(x_m, x_j) = 0$.
У силу ортогональности маємо $(x_j, x_k) = 0$, виконано $\forall j \neq k$. Тоді маємо:
$\alpha_j(x_j, x_j) = 0 \implies \alpha_j = 0$. І це виконано $\forall j$. Отже, $\{x_1, \dots, x_m\}$ л.н.з. ■

Proposition 5.3.5 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідів простір. Відомо, що система $\{x_1, \dots, x_m\}$ – ортогональна та $\|x_j\| \neq 0, \forall j$. Тоді система $\{e_1, \dots, e_m\}$, де $e_j = \dfrac{x_j}{\|x_j\|}$ – ортонормована.
Зрозуміло.

Corollary 5.3.6 Ортонормована система – л.н.з.

Процес ортогоналізації Грама-Шмідта

Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідів простір. Нехай є довільна система $\{x_1, \dots, x_m\}$. Побудуємо еквівалентну їй ортогональну систему $\{\widetilde{e_1}, \dots, \widetilde{e_m}\}$.
1) $\widetilde{e_1} = x_1$;
2) $\widetilde{e_2} = x_2 - \alpha_{21}\widetilde{e_1}$. Знайдемо α_{21} з умови $\widetilde{e_2} \perp \widetilde{e_1}$.
$0 = (\widetilde{e_2}, \widetilde{e_1}) = (x_2 - \alpha_{21}\widetilde{e_1}, \widetilde{e_1}) = (x_2, \widetilde{e_1}) - \alpha_{21}(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_1}) \implies \alpha_{21} = \dfrac{(x_2, \widetilde{e_1})}{(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_1})}$.
3) $\widetilde{e_3} = x_3 - \alpha_{31}\widetilde{e_1} - \alpha_{32}\widetilde{e_2}$. Знайдемо α_{31}, α_{32} з умов $\widetilde{e_3} \perp \widetilde{e_1}, \widetilde{e_2} \perp \widetilde{e_1}$.
$\begin{cases} (\widetilde{e_3}, \widetilde{e_1}) = 0 \\ (\widetilde{e_3}, \widetilde{e_2}) = 0 \end{cases} \implies$ аналогічним чином отримаємо $\alpha_{31} = \dfrac{(x_3, \widetilde{e_1})}{(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_1})} \qquad \alpha_{32} = \dfrac{(x_3, \widetilde{e_2})}{(\widetilde{e_2}, \widetilde{e_2})}$.
$\vdots$
Узагальнюючи, отримаємо наступне:
$\widetilde{e_k} = x_k - \alpha_{k1}\widetilde{e_1} - \dots - \alpha_{kk-1}\widetilde{e_{k-1}} = x_k - \sum\limits_{s=1}^{k=1} \alpha_{ks}\widetilde{e_s}$. Всюди $\alpha_{ks} = \dfrac{(x_k, \widetilde{e_s})}{(\widetilde{e_s}, \widetilde{e_s})}$, де число $s = \overline{1, k-1}$.
Більш того, зрозуміло, що $\{x_1, \dots, x_k\} \sim \{\widetilde{e_1}, \dots, \widetilde{e_k}\}$. Оці всі дослідження справедливі $\forall k = \overline{1, m}$.

На кожному кроці якщо система $\{x_1, \dots, x_k\}$ була л.н.з., то оскільки $\{x_1, \dots, x_k\} \sim \{\widetilde{e_1}, \dots, \widetilde{e_k}\}$, тоді $\operatorname{rank}\{\widetilde{e_1}, \dots, \widetilde{e_k}\} = k$, а тому система $\{\widetilde{e_1}, \dots, \widetilde{e_k}\}$ теж буде л.н.з.

Припустимо, що під час ортогоналізації в нас було $\{x_1, \dots, x_k\}$ л.н.з., а потім $\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ - раптом л.з., тоді точно $x_{k+1} \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k\} \implies \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$. Звідси випливає, що $\{\widetilde{e_1}, \dots, \widetilde{e_k}\} \sim \{x_1, \dots, x_k\} \sim \{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\} \sim \{\widetilde{e_1}, \dots, \widetilde{e_k}, \widetilde{e_{k+1}}\}$. Звідси $\operatorname{rank}\{\widetilde{e_1}, \dots, \widetilde{e_k}, \widetilde{e_{k+1}}\} = k$, тож звідси $\widetilde{e_{k+1}} = 0$.
Бо якщо $\widetilde{e_{k+1}} \neq 0$, система стане л.н.з., а ранг системи збільшиться на одиничку.
У цьому випадку елемент x_{k+1} ми викидуємо в смітник та продовжуємо ортогоналізацію. Отже, з цих двох абзаців, отримали:

Corollary 5.3.7 Система $\{x_1, \dots, x_k\}$ – л.н.з. $\iff \{\widetilde{e_1}, \dots, \widetilde{e_k}\}$ – л.н.з.

Остання дія – це ортонормуємо нашу систему за **Prp. 5.3.5** і отримаємо бажану систему $\{e_1, \dots, e_k\}$ – ортонормована система.

Процес ортогоналізації позначатиму далі так: $\{x_1, \dots, x_m\} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \{e_1, \dots, e_m\}$.

Example 5.3.8 Ортонормізувати систему $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ процесом Грама-Шмідта, де
$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$
$\vec{e}_1 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\vec{e}_2 = \vec{a}_2 - \dfrac{(\vec{a}_2, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{e}_3 = \vec{a}_3 - \frac{(\vec{a}_3, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}\vec{e}_1 - \frac{(\vec{a}_3, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)}\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0.5}{0.5}\begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

А далі нормалізуємо вектори:

$$\vec{f}_1 = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_2 = \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_3 = \frac{\vec{e}_3}{\sqrt{(\vec{e}_3, \vec{e}_3)}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lemma 5.3.9 Розклад Фур'є
Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідів простір та $\{e_1, \dots, e_n\}$ – ортонормований базис. Тоді $\forall x \in E : x = (x, e_1)e_1 + \dots + (x, e_n)e_n$.

Proof.
Нехай $x \in E$, тоді за базисом $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. Запишемо скалярний добуток (x, e_k), де $k = \overline{1, n}$.
$(x, e_k) = (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n), e_k) = \alpha_1(e_1, e_k) + \dots + \alpha_k(e_k, e_k) + \dots + \alpha_n(e_n, e_k) = \alpha_k$.
Тобто $\alpha_k = (x, e_k)$, де $k = \overline{1, n}$. Таким чином, розклад має форму:
$x = (x, e_1)e_1 + \dots + (x, e_n)e_n$. ■

Даний підрозділ можна повторити й для унітарних просторів – все абсолютно однакове. Просто переважно ці речі робляться дійсних (тобто в евклідових в нашому випадку) просторах.

5.4 Матриця Грама

Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідів (рідше унітарний) простір та $\{f_1, \dots, f_n\}$ – л.н.з. система. Тоді елемент $x \in E$ має єдиний розклад $x = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$.
Мета: знайти коефіцієнти $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, використовуючи скалярний добуток.
$(x, f_1) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n, f_1) = \alpha_1(f_1, f_1) + \alpha_2(f_2, f_1) \cdots + \alpha_n(f_1, f_n)$;
$(x, f_2) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n, f_2) = \alpha_1(f_1, f_2) + \alpha_2(f_2, f_2) \cdots + \alpha_n(f_2, f_n)$;
$\vdots$
$(x, f_n) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n, f_n) = \alpha_1(f_1, f_n) + \alpha_2(f_2, f_n) \cdots + \alpha_n(f_n, f_n)$.
Таким чином, отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1(f_1, f_1) + \alpha_2(f_2, f_1) \cdots + \alpha_n(f_1, f_n) = (x, f_1) \\ \alpha_1(f_1, f_2) + \alpha_2(f_2, f_2) \cdots + \alpha_n(f_2, f_n) = (x, f_2) \\ \vdots \\ \alpha_1(f_1, f_n) + \alpha_2(f_2, f_n) \cdots + \alpha_n(f_n, f_n) = (x, f_n) \end{cases}.$$

Запишемо це в матричному вигляді:
$\Gamma\vec{\alpha} = [\vec{x}]$, де

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & (f_2, f_1) & \dots & (f_n, f_1) \\ (f_1, f_2) & (f_2, f_2) & \dots & (f_n, f_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_1, f_n) & (f_2, f_n) & \dots & (f_n, f_n) \end{pmatrix} \text{ – **матриця Грама**}, \qquad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad [\vec{x}] = \begin{pmatrix} (x, f_1) \\ (x, f_2) \\ \vdots \\ (x, f_n) \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\forall x \in E : \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n$ в силу базису, то система має єдиний розв'язок, тобто існує обернена матриця $\Gamma^{-1} \implies \vec{\alpha} = \Gamma^{-1}[\vec{x}]$.

Припустимо, що тепер система $\{f_1, \dots, f_n\}$ лінійно залежна. Тоді існують не всі нульові $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, для яких $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0$. Аналогічно запишемо скалярні добутки – отримаємо:

$$\begin{cases} \alpha_1(f_1,f_1)+\alpha_2(f_2,f_1)\dots+\alpha_n(f_1,f_n)=(0,f_1)=0 \\ \alpha_1(f_1,f_2)+\alpha_2(f_2,f_2)\dots+\alpha_n(f_2,f_n)=(0,f_2)=0 \\ \vdots \\ \alpha_1(f_1,f_n)+\alpha_2(f_2,f_n)\dots+\alpha_n(f_n,f_n)=(0,f_n)=0 \end{cases}$$
Ми отримали однорідне рівння, що має не єдиний розв'язок. Таким чином, отримаємо:

Proposition 5.4.1 $\{f_1,\dots,f_n\}$ – л.н.з. система $\iff \det\Gamma[f_1,\dots,f_n]\neq 0$.

Proposition 5.4.2 Властивості матриці Грама
Задано $(E,(\cdot,\cdot))$ - евклідів простір та $\{f_1,\dots,f_n\}$ - система. Тоді виконуються такі пункти:
1) $\operatorname{rank}\{f_1,\dots,f_n\}=\operatorname{rank}\Gamma[f_1,\dots,f_n]$;
2) Нехай $\{f_1,\dots,f_n\}$ – лінійно незалежні вектори та $V=\operatorname{span}\{f_1,\dots,f_n\}$ – підпростір E. Тоді $\forall x\in E:\rho(x,V)=\sqrt{\dfrac{\det(\Gamma[f_1,\dots,f_n,x])}{\det(\Gamma[f_1,\dots,f_n])}}$;
3) Нехай $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ – система E, тоді об'єм, що побудований цими векторами $V=\sqrt{\det(\Gamma[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n])}$;
4) $\det(\Gamma[f_1,\dots,f_n])=\det(\Gamma[f_{i_1},\dots,f_{i_n}])$, де в останньому ми переставили систему $\{f_1,\dots,f_n\}$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості.
1) Якщо $\operatorname{rank}\{f_1,\dots,f_n\}=n$, тобто ми маємо базис $\{f_1,\dots,f_n\}$, то за міркуваннями вище, то $\exists\Gamma^{-1}[f_1,\dots,f_n]$, ну тобто $\operatorname{rank}\Gamma[f_1,\dots,f_n]=n$.
Нехай $\operatorname{rank}\{f_1,\dots,f_n\}=k<n$. Не втрачаючи загальності, нехай $\{f_1,\dots,f_k\}$ – базис, тобто впорядковано. Значить, за міркуваннями вище, $\det\Gamma[f_1,\dots,f_k]\neq 0$. Тоді $\{f_1,\dots,f_k,\widetilde{f}\}$ уже буде л.з., а тому $\forall\widetilde{f}:\det\Gamma[f_1,\dots,f_k,\widetilde{f}]=0$. Зауважимо, що $\det\Gamma[f_1,\dots,f_k]$ – мінор k-го порядку та $\det\Gamma[f_1,\dots,f_k,\widetilde{f}]$ – всі мінори $k+1$-го порядку. За лемою про базисний мінор, $\operatorname{rank}\Gamma[f_1,\dots,f_n]=k$.

2) *(див. відстань від простору до елемента нижче)*

3) Доведення за МІ за кількістю елементів.
I. *База індукції.* Маємо $n=2$, тобто хочемо довести, що $S_{\vec{v}_1,\vec{v}_2}=\sqrt{\det(\Gamma[\vec{v}_1,\vec{v}_2])}$.
Площа паралелограма $S_{\vec{v}_1,\vec{v}_2}=\|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\|\sin\alpha$, де α – кут між векторами. Але
$S^2_{\vec{v}_1,\vec{v}_2}=\|\vec{v}_1\|^2\|\vec{v}_2\|^2\sin^2\alpha=\|\vec{v}_1\|^2\|\vec{v}_2\|^2-\|\vec{v}_1\|^2\|\vec{v}_2\|^2\cos^2\alpha=\|\vec{v}_1\|^2\|\vec{v}_2\|^2-(\vec{v}_1,\vec{v}_2)^2=$
$=(\vec{v}_1,\vec{v}_1)(\vec{v}_2,\vec{v}_2)-(\vec{v}_1,\vec{v}_2)^2=\det\begin{pmatrix}(\vec{v}_1,\vec{v}_1) & (\vec{v}_2,\vec{v}_1)\\ (\vec{v}_1,\vec{v}_2) & (\vec{v}_2,\vec{v}_2)\end{pmatrix}=\det\Gamma[\vec{v}_1,\vec{v}_2]$.
II. *Припущення індукції.* Нехай для n формула виконується.
III. *Крок індукції.* Позначимо $k_{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n,\vec{v}_{n+1}}$ – сам парарлелепіпед. Ми можемо опустити висоту h на основу $k_{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n}$. Тоді за властивістю 2., ми маємо $h=\sqrt{\dfrac{\det(\Gamma[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n,\vec{v}_{n+1}])}{\det(\Gamma[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n])}}$. Із іншого боку, $k_{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n,\vec{v}_{n+1}}=h\cdot k_{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n}$.
За припущенням МІ, $k_{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n}=\sqrt{\det(\Gamma[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n])}$. Також сюди ми підставимо висоту h, звідси
$k_{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n,\vec{v}_{n+1}}=\sqrt{\dfrac{\det(\Gamma[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n,\vec{v}_{n+1}])}{\det(\Gamma[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n])}}\cdot\sqrt{\det(\Gamma[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n])}=\sqrt{\det(\Gamma[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n,\vec{v}_{n+1}])}$.
МІ доведено.

4) Формула випливає з 3. та згого факту, що немає значення, як конструювати паралелепіпед: або $k_{\vec{v_1},\dots,\vec{v_n}}$, або $k_{\vec{v_{i_1}},\dots,\vec{v_{i_n}}}$, об'єм залишиться одним й тим самим.

Всі властивості (майже) доведені. ■

5.5 Ортогональні підпростори, ортогональне доповнення

Definition 5.5.1 Задано $(E,(\cdot,\cdot))$ – евклідів простір та L_1,L_2 – підпростори.
Підпростори L_1,L_2 називаються **ортогональними**, якщо

$$\forall x\in L_1,\forall y\in L_2: x\perp y$$

Позначення: $L_1\perp L_2$.

Example 5.5.2 Маємо $E = \mathbb{R}^3$ з класничним скалярним добутком. Маємо два підпростори $L_1 = XOY$, $L_2 = OZ$. Зрозуміло, що $L_1 \perp L_2$. До речі, виникає враження, що L_1, L_2 одночасно утворюють пряму суму – це не випадковість.

Proposition 5.5.3 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідів простір та підпростори L_1, L_2. Відомо, що $L_1 \perp L_2$. Тоді L_1, L_2 утворюють пряму суму.

Proof.
$z \in L_1 \cap L_2 \implies \begin{cases} z \in L_1 \\ z \in L_2 \end{cases} \implies (z, z) = 0 \implies z = 0$. Отже, $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ – довели. ■

У цьому випадку пряму суму $L_1 \dot{+} L_2$ називають **ортогональною сумою**.
Позначення: $L_1 \bigoplus L_2$.

Definition 5.5.4 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідів простір та L – підпростір.
Ортогональним доповненням до L називається множина

$$L^\perp = \{y \in E : \forall x \in L : x \perp y\}$$

Proposition 5.5.5 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідів простір та L – підпростір. Тоді $L^\perp$ – теж підпростір.

Proof.
$\forall y_1, y_2 \in L^\perp : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$\forall x \in L : (x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(x, y_1) + \beta(x, y_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \implies x \perp \alpha y_1 + \beta y_2$
$\implies \alpha y_1 + \beta y_2 \in L^\perp$. ■

Corollary 5.5.6 $L \perp L^\perp$. Як наслідок, вони утворюють ортогональну суму.

Theorem 5.5.7 Ортогональний розклад евклідового простору
Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідів простір та L – підпростір. Тоді $E = L \bigoplus L^\perp$.

Доведення буде майже чесним, оскільки розглядаються лише скінченновимірні простори.

Proof.
Нехай $\{e_1, \dots, e_k\}$ - ортонормований базис простора L. Доповнимо його до $\{e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$ - до базису простору E. Не факт, що ця система ортонормована, тому застосуємо процес:
$\{e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_n\} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ – ортонормований базис E. (перші k елементи взагалі не змінюються, це легко показати)
Доведемо, що $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ – базис $L^\perp$.
I. Те, що вона л.н.з., це зрозуміло.
II. Нехай $y \in L^\perp$, тоді $y \in E \implies y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$ – розклад єдиним чином. Обчислимо скалярні добутки (y, e_j), де $j = \overline{1, k}$.
Із одного боку, оскільки $e_j \in L$, то звідси $(y, e_j) = 0$.
Із іншого боку, $(y, e_j) = (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_j e_j + \dots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n, e_j) =$
$= \alpha_1(e_1, e_j) + \dots + \alpha_j \underline{(e_j, e_j)} + \dots + \alpha_k(e_k, e_j) + \alpha_{k+1}(e_{k+1}, e_j) + \dots + \alpha_n(e_n, e_j) = \alpha_j$.
Отже, $\alpha_j = 0$, де $j = \overline{1, k}$. Звідси отримуємо $y = \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$.
Отже, $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ – базис $L^\perp$. Звідси за **Th. 1.9.7**, $E = L \dot{+} L^\perp$. Але оскільки $L \perp L^\perp$, то вони утворюють ортогональну суму, звідси $E = L \bigoplus L^\perp$. ■

Theorem 5.5.8 Єдиність ортогонального розкладу
Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ евклідів простір та L, M – підпростори. Відомо, що $E = L \bigoplus M$. Тоді $M = L^\perp$.

Proof.
За умовою, $M \perp L$, тож $M \subset L^\perp$. Також:
$\begin{cases} \dim M = \dim E - \dim L \\ \dim L^\perp = \dim E - \dim L \end{cases} \implies \dim M = \dim L^\perp$.
Тоді остаточно маємо $M = L^\perp$. ■

Remark 5.5.9 Інколи використовують позначення: $E \ominus L = L^\perp$.

Proposition 5.5.10 Властивості ортогонального доповнення
Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ - евклідів простір та L, L_1, L_2 – підпростори. Тоді виконуються такі пункти:

1) $E^{\perp} = \{0\} \qquad \{0\}^{\perp} = E$;
2) $(L^{\perp})^{\perp} = L$;
3) $L_1 \subset L_2 \implies L_2^{\perp} \subset L_1^{\perp}$;
4) $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$;
5) $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості:
1) Маємо дві рівності.
$y \in E^{\perp} \implies \forall z \in E : (y, z) = 0$ Зокрема для $z = y : (y, y) = 0 \implies y = 0$.
$y \in E \implies (x, 0) = 0 \implies x \in \{0\}^{\perp}$.

2) Маємо $E = L \bigoplus L^{\perp} \qquad E = L^{\perp} \bigoplus (L^{\perp})^{\perp}$. Із єдиності розкладу, маємо: $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

3) Нехай $y \in L_2^{\perp}$, тоді маємо $\forall x \in L_1 \implies x \in L_2 : (y, x) = 0 \implies y \in L_1^{\perp}$. Отже, $L_2^{\perp} \subset L_1^{\perp}$.

4) Нехай $z \in (L_1 + L_2)^{\perp}$, тоді $\forall x \in L_1 + L_2 : (x, z) = 0$. Тут $x = x_1 + x_2$.
Оберемо $x_1 \in L_1, x_2 = 0$. Тоді $(x_1, z) = 0 \implies z \in L_1^{\perp}$.
Оберемо $x_1 = 0, x_2 \in L_2$. Тоді $(x_2, z) = 0 \implies z \in L_2^{\perp}$.
Отже, $z \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$, а це свідчить про те, що $(L_1 + L_2)^{\perp} \subset L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$.
Нехай $z \in L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$. Тоді
$z \in L_1^{\perp} \implies \forall x_1 \in L_1 : (x_1, z) = 0$
$z \in L_2^{\perp} \implies \forall x_2 \in L_2 : (x_2, z) = 0$
$\implies \forall x = x_1 + x_2 \in L_1 + L_2 : (x, z) = 0 \implies z \in (L_1 + L_2)^{\perp} \implies L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp} \subset (L_1 + L_2)^{\perp}$.
Остаточно $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$.

5) Позначимо $L_1^{\perp} = M_1, L_2^{\perp} = M_2$. Тоді $L_1 = M_1^{\perp}, L_2 = M_2^{\perp}$ за властивістю 2). Із властивості 3):
$(M_1 + M_2)^{\perp} = M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp} \implies (L_1^{\perp} + L_2^{\perp})^{\perp} = L_1 \cap L_2$.
$L_1^{\perp} + L_2^{\perp} = ((L_1^{\perp} + L_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = (L_1 \cap L_2)^{\perp}$.
Всі властивості доведені. ■

Ми вже з'ясували, що для евклідового простору $(E, (\cdot, \cdot))$ та підпростору L можна виписати ортогональний розклад $E = L \bigoplus L^{\perp}$. А це означає, що
$\forall z \in E \implies \forall z \in L \dot{+} L^{\perp} : \exists! x \in L, \exists! y \in L^{\perp} : z = x + y$.

Definition 5.5.11 Маємо $z = x + y$ із міркувань вище.
Елемент x називають **ортогональною проєкцією** елемента z на L.
Позначення: $x = \operatorname{pr}_L z$.
Елемент y називають **ортогональним складником** елемента z відносно L.
Позначення: $y = \operatorname{ort}_L z$.

Тобто наш елемент $z \in E$ за наявністю підпростора L розкладається як $z = \operatorname{pr}_L z + \operatorname{ort}_L z$ єдиним чином, де $\operatorname{pr}_L z \in L$, $\operatorname{ort}_L z \in L^{\perp}$.

Example 5.5.12 Задано $E = \mathbb{R}^4$, скалярний добуток $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Розглянемо підпростір $L = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, де $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$. Знайти ортогональну проєкцію та ортогональний складник вектора $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}^T$.
Маємо $\vec{z} = \operatorname{pr}_L \vec{z} + \operatorname{ort}_L \vec{z} \implies \operatorname{ort}_L \vec{z} = \vec{z} - \operatorname{pr}_L \vec{z}$.
Оскільки $\operatorname{pr}_L \vec{z} \in L$, то звідси $\operatorname{pr}_L \vec{z} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2$. Тоді звідси випливає, що
$\operatorname{ort}_L \vec{z} = \vec{z} - \alpha_1 \vec{a}_1 - \alpha_2 \vec{a}_2$.
Оскільки $\operatorname{ort}_L \vec{z} \in L^{\perp}$, то звідси $\begin{cases} (\operatorname{ort}_L \vec{z}, \vec{a}_1) = 0 \\ (\operatorname{ort}_L \vec{z}, \vec{a}_2) = 0 \end{cases}$
Розпишемо кожний скалярний добуток:
$(\operatorname{ort}_L \vec{z}, \vec{a}_1) = (\vec{z} - \alpha_1 \vec{a}_1 - \alpha_2 \vec{a}_2, \vec{a}_1) = (\vec{z}, \vec{a}_2) - \alpha_1 (\vec{a}_1, \vec{a}_1) - \alpha_2 (\vec{a}_2, \vec{a}_1) = 23 - 18\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0$
$(\operatorname{ort}_L \vec{z}, \vec{a}_2) = (\vec{z} - \alpha_1 \vec{a}_1 - \alpha_2 \vec{a}_2, \vec{a}_2) = (\vec{z}, \vec{a}_2) - \alpha_1 (\vec{a}_1, \vec{a}_2) - \alpha_2 (\vec{a}_2, \vec{a}_2) = -20 + 5\alpha_1 - 15\alpha_2 = 0$
$\implies \begin{cases} -18\alpha_1 + 5\alpha_2 = -23 \\ 5\alpha_1 - 15\alpha_2 = 20 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$.
Отже, знайшли вектори:
$\operatorname{pr}_L \vec{z} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}^T$
$\operatorname{ort}_L \vec{z} = \vec{z} - \operatorname{pr}_L \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$.

Загальний пошук ортогональної проєкції та складника

Маємо $(E, (\cdot,\cdot))$ – евклідів простір. Розглянемо $L = \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_m\}$ – всі вектори всередині л.н.з.
$z \in E \implies z = \operatorname{pr}_L z + \operatorname{ort}_L z$
Оскільки $\operatorname{pr}_L z \in L$, то тоді $\operatorname{pr}_L z = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m$.
$\operatorname{ort}_L z = z - \operatorname{pr}_L z = z - \alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_m a_m$.
Оскільки $\operatorname{ort}_L z \in L^\perp$, а елементи $a_1, \dots, a_m \in L$, то звідси $\operatorname{ort}_L \perp a_1, \dots, \operatorname{ort}_L z \perp a_m$.

$$\begin{cases} (\operatorname{ort}_L z, a_1) = 0 \\ \vdots \\ (\operatorname{ort}_L z, a_m) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (z - \alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_m a_m, a_1) = 0 \\ \vdots \\ (z - \alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_m a_m, a_m) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \dots + \alpha_m(a_m, a_1) = (z, a_1) \\ \vdots \\ \alpha_1(a_1, a_m) + \dots + \alpha_m(a_m, a_m) = (z, a_m) \end{cases}.$$

Матриця системи: $\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_m, a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_1, a_m) & \dots & (a_m, a_m) \end{pmatrix} = \Gamma[a_1, \dots, a_m]$ – та матриця Грама.
Оскільки $\{a_1, \dots, a_m\}$ - л.н.з., то $\exists \Gamma^{-1}$, а тому існує єдиний розв'язок.
Таким чином, ми зможемо отримати $\operatorname{pr}_L z$ та $\operatorname{ort}_L z$ після знаходження $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Example 5.5.13 Повернімось до **Ex. 5.5.12** та ще раз знайдемо проєкцію та складник.
Маємо $\operatorname{pr}_L \vec{z} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2$, тобто нам просто треба знайти $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$.
Спочатку обчислимо матрицю Грама для векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ – маємо:
$\Gamma[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \begin{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & \vec{a}_2, \vec{a}_1) \\ (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & \vec{a}_2, \vec{a}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -5 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$
Також маємо $[\vec{z}] = \begin{pmatrix} (\vec{z}, \vec{a}_1) \\ \vec{z}, \vec{a}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -20 \end{pmatrix}$.
А далі розв'яжемо систему рівнянь $\Gamma[\vec{a}_1, \vec{a}_2]\vec{\alpha} = [\vec{z}] \implies \vec{\alpha} = \Gamma^{-1}[\vec{a}_1, \vec{a}_2][\vec{z}] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Власне, звідси $\operatorname{pr}_L \vec{z} = 1 \cdot \vec{a}_1 + (-1)\vec{a}_2$, а далі й $\operatorname{ort}_L \vec{z}$ можна знайти.

Можна піти далі та розглянути по-іншому систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \dots + \alpha_m(a_m, a_1) + (-1)(z, a_1) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1(a_1, a_m) + \dots + \alpha_m(a_m, a_m) + (-1)(z, a_m) = 0 \\ \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m + (-1) \operatorname{pr}_L z = 0 \end{cases}$$

Дане рівняння є однорідним та має ненульовий розв'язок $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, -1)$, а тому звідси визначник коефіцієнтів нульовий, тобто

$$\det \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_m, a_1) & (z, a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (a_1, a_m) & \dots & (a_m, a_m) & (z, a_m) \\ a_1 & \dots & a_m & \operatorname{pr}_L z \end{pmatrix} = 0$$

Або це можна записати ось таким чином:

$$\operatorname{pr}_L z \det \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_m, a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_1, a_m) & \dots & (a_m, a_m) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_m, a_1) & (z, a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (a_1, a_m) & \dots & (a_m, a_m) & (z, a_m) \\ a_1 & \dots & a_m & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Звідси ми зможемо знайти проєкцію таким чином:

$$\operatorname{pr}_L z = -\frac{\det \left(\begin{array}{c|c} \Gamma[a_1, \dots, a_m] & \begin{matrix} (z, a_1) \\ \vdots \\ (z, a_m) \end{matrix} \\ \hline a_1 \quad \dots \quad a_m & 0 \end{array}\right)}{\det \Gamma[a_1, \dots, a_m]}.$$

Definition 5.5.14 Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – евклідів простір та L – підпростір.
Відстанню від z до L називається таке число:

$$\rho(z, L) = \inf_{y \in L} \rho(z, y)$$

Але, знаючи, що $\rho(z,y) = \|z-y\|$, маємо формулу $\rho(z,L) = \inf\limits_{y \in L} \|z-y\|$.

Theorem 5.5.15 Екстремальна властивість проєкції
Задано $(E,(\cdot,\cdot))$ - скінченний евклідів простір та L - підпростір. Тоді $\rho(z,L) = \|\operatorname{ort}_L z\|$, причому ця відстань досягається на елементі $y = \operatorname{pr}_L z$.

Proof.
Маємо $z = \operatorname{pr}_L z + \operatorname{ort}_L z$. Зафіксуємо будь-який $y \in L$. Оцінимо відстань:
$\|z-y\|^2 = \|\operatorname{pr}_L z + \operatorname{ort}_L z - y\|^2 = (\operatorname{ort}_L z + [\operatorname{pr}_L z - y], \operatorname{ort}_L z + [\operatorname{pr}_L z - y]) =$
$= (\operatorname{ort}_L z, \operatorname{ort}_L z) + (\operatorname{pr}_L z - y, \operatorname{ort}_L z) + (\operatorname{ort}_L z, \operatorname{pr}_L z - y) + (\operatorname{pr}_L z - y, \operatorname{pr}_L z - y)\boxed{=}$
Зауважимо, що $\operatorname{ort}_L z \in L^\perp$, а $\operatorname{pr}_L z - y \in L$. Тому $(\operatorname{pr}_L z - y, \operatorname{ort}_L z) = (\operatorname{ort}_L z, \operatorname{pr}_L z - y) = 0$.
$\boxed{=} \|\operatorname{ort}_L z\|^2 + \|\operatorname{pr}_L z - y\|^2 \geq \|\operatorname{ort}_L z\|^2$.
Таким чином, $\forall y \in L : \|\operatorname{ort}_L z\| \leq \|z-y\| \implies \|\operatorname{ort}_L z\| = \inf\limits_{y \in L} \|z-y\| = \rho(z,L)$.
Згідно з ланцюга нерівності, $\rho(z,L)$ досягається при $y = \operatorname{pr}_L z$. ■

Повернімось до того, що ми знайшли проєкцію через матриці Грама. Тепер обчислимо ортогональний складник:

$$\operatorname{ort}_L z = z - \operatorname{pr}_L z = \frac{\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & (z,a_1) \\ & \Gamma[a_1,\dots,a_m] & & \vdots \\ & & & (z,a_m) \\ \hline a_1 & \dots & a_m & z \end{array}\right)}{\det \Gamma[a_1,\dots,a_m]}.$$

А далі залишилося знайти довжину цього вектора:

$$\|\operatorname{ort}_L z\|^2 = (\operatorname{ort}_L z, \operatorname{ort}_L z) = (\operatorname{ort}_L z, z - \operatorname{pr}_L z) = (\operatorname{ort}_L z, z) = \frac{\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & (z,a_1) \\ & \Gamma[a_1,\dots,a_m] & & \vdots \\ & & & (z,a_m) \\ \hline (a_1,z) & \dots & (a_m,z) & (z,z) \end{array}\right)}{\det \Gamma[a_1,\dots,a_m]} =$$

$$\frac{\det \Gamma[a_1,\dots,a_m,z]}{\det \Gamma[a_1,\dots,a_m]}.$$

Отже, отримали $\rho(z,L) = \sqrt{\dfrac{\det \Gamma[a_1,\dots,a_m,z]}{\det \Gamma[a_1,\dots,a_m]}}$ – властивість 2) матриці Грама.
Даний підрозділ можна повторити й для унітарних просторів - все абсолютно однакове. Просто переважно ці речі робляться в евклідових просторах

5.6 Ізоморфізм евклідових просторів

Definition 5.6.1 Задано $(E_1,(\cdot,\cdot)_1),(E_2,(\cdot,\cdot)_2)$ – два унітарних простори.
Вони називаються **ізоморфними**, якщо існує ізоморфізм (лінійних просторів) $U\colon E_1 \to E_2$, для якого виконується така умова:

$$\forall x,y \in E_1 : (Ux,Uy)_2 = (x,y)_1$$

Позначення: $E_1 \cong E_2$.

Remark 5.6.2 Взагалі-то кажучи, умови для цього означення можна послабити. Ми можемо від лінійного оператора $U\colon E_1 \to E_2$ лише вимагати, щоб $\operatorname{Im} U = E_2$. Ми тоді можемо автоматично отримати умову $\ker U = \{0\}$ (а отже, автоматично U стане ізоморфізмом). Дійсно,
$x \in \ker U \implies Ux = 0 \implies 0 = (Ux,Ux)_2 = (x,x)_1 \implies x = 0$.

Example 5.6.3 Відомо, що $\mathbb{R}_2[x] \cong \mathbb{R}^3$ як лінійні простори. Визначимо скалярні добутки для двох просторів $(f,g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$, а також $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Доведемо, що $(f,g) = (Uf,Ug)$, де U – ізоморфізм між цими просторами.
Фіксуємо канонічні базиси $\{1,x,x^2\}$ та $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.
Маємо $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ та $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, тоді звідси
$(Uf)(x) = a_0\vec{e}_1 + a_1\vec{e}_2 + a_2\vec{e}_3$ та $(Ug)(x) = b_0\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 + b_2\vec{e}_3$.
$(Uf,Ug) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 = (f,g)$.
Отже, відносно цих скалярних добутків $\mathbb{R}_2[x] \cong \mathbb{R}^3$ як евклідові простори.

Theorem 5.6.4 Задано $(E_1, (\cdot,\cdot)_1), (E_2, (\cdot,\cdot)_2)$ - два унітарних простори.
$E_1 \cong E_2 \iff \dim E_1 = \dim E_2$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $E_1 \cong E_2$, тобто існує ізоморфізм $U\colon E_1 \to E_2$ лінійних просторів $\implies \dim E_1 = \dim E_2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\dim E_1 = \dim E_2$.
Розглянемо $\{f_1, \dots, f_n\}$ – ортонормований базис E_1 та $\{g_1, \dots, g_n\}$ – ортонормований базис E_2. Побудуємо ізоморфізм лінійних просторів $U\colon E_1 \to E_2$ правилом $U(f_k) = g_k,\ k = \overline{1,n}$ (це справді ізоморфізм). Покажемо, що U – ізоморфізм евклідових просторів. Тобто залишилось перевірити умову збереження скалярного добутку.
Нехай задані $x \in E_1$ та $y \in E_1$, тоді розкладаємо:
$x = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$; $\qquad y = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n$;
$Ux = U(x_1 f_1 + \dots + x_n f_n) = x_1 g_1 + \dots + x_n g_n \qquad Uy = U(y_1 f_1 + \dots + y_n f_n) = y_1 g_1 + \dots + y_n g_n$
$(Ux, Uy)_2 = (x_1 g_1 + \dots + x_n g_n, y_1 g_1 + \dots + y_n g_n)_2 =$
$= x_1 \overline{y_1} (g_1, g_1)_2 + \dots + x_1 \overline{y_n} (g_1, g_n)_2 + \dots + x_n \overline{y_1} (g_n, g_1)_2 + \dots + x_n \overline{y_n} (g_n, g_n)_2 \boxed{=}$
Оскільки базис ортонормований, то $(g_j, g_k)_2 = 0 = (f_j, f_k)_1, j \neq k$ та $(g_j, g_j)_2 = 1 = (f_j, f_j)_1, \forall j$.
$\boxed{=} x_1 \overline{y_1} (f_1, f_1)_1 + \dots + x_1 \overline{y_n} (f_1, f_n)_1 + \dots + x_n \overline{y_1} (f_n, f_1)_1 + \dots + x_n \overline{y_n} (f_n, f_n)_1 =$
$= (x_1 f_1 + \dots + x_n f_n, y_1 f_1 + \dots + y_n f_n)_1 = (x, y)_1$.
Отже, $U\colon E_1 \to E_2$ – ізоморфізм евклідових просторів. ■

Remark 5.6.5 Не обов'язково брати саме ортонормований базис. Головне, щоб $(g_j, g_k)_2 = (f_j, f_k)_1$, тобто матриці Грама співпадали.

5.7 Спряжені простори, оператори та матриці в унітарних просторах

Перед цим нам необхідно такі теореми, аби можна було дати майбутнє означення:

Theorem 5.7.1 Теорема Ріса
Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – унітарний (евклідів) скінченний простір та лінійний функціонал $\varphi\colon E \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Тоді $\exists! f \in E : \forall x \in E : \varphi(x) = (x, f)$.

Це частинний випадок справжньої теореми Ріса, що розглядається в функціональному аналізі.

Proof.
I. *Існування.*
Якщо $\varphi \equiv 0$, то зрозуміло, що існує $f = 0$.
Якщо $\varphi \not\equiv 0$, то тоді зафіксуємо ортонормований базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в E.
Покладемо $f = \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \dots + \overline{\varphi(e_n)} e_n$. Тоді $\forall x \in L$:
$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$
$(x, f) = (x, \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \dots + \overline{\varphi(e_n)} e_n) = \varphi(e_1)(x, e_1) + \dots + \varphi(e_n)(x, e_n) \boxed{=}$
$(x, e_j) = (x_1 e_1 + \dots + x_j e_j + \dots + x_n e_n, e_j) = x_1(e_1, e_j) + \dots + x_j(e_j, e_j) + \dots + x_n(e_n, e_j) = x_j$.
$\boxed{=} x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$.
Таким чином, $\varphi(x) = (x, f)$.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що $\exists \widetilde{f} \in E : \varphi(x) = (x, \widetilde{f})$, але при цьому $\widetilde{f} \neq f$. Тоді
$\forall x \in E : 0 = \varphi(x) - \varphi(x) = (x, f) - (x, \widetilde{f}) = (x, f - \widetilde{f})$.
Отже, $f - \widetilde{f} \in E^\perp = \{0\} \implies \widetilde{f} = f$. Суперечність!
До речі, ми навіть не робили жодних припущень на $\widetilde{f}$, чи розклався він в ортонормованому базисі $\{e_1, \dots, e_n\}$ чи в якомусь іншому базисі – все одно довели єдиність. ■

Theorem 5.7.2 Задано $(E, (\cdot,\cdot))$, $(G, (\cdot,\cdot))$ – унітарні (евклідові) скінченні простори та лінійний оператор $A\colon E \to G$. Тоді $\exists! B\colon G \to E$ – лінійний оператор, для якого $\forall x \in E, \forall y \in G : (Ax, y)_G = (x, By)_E$.

Proof.
I. *Існування.*
Зафіксуємо $y \in G$, отримаємо $(Ax, y) = \psi_y(x)$, де $\psi_y\colon E \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$ – лінійний функціонал.
Тоді за теоремою Ріса, $\exists! f_y \in E : \forall x \in E : \psi_y(x) = (x, f_y)$.
Ми сконструювали оператор $B\colon G \to E$ таким чином, що $By = f_y$. Тобто звідси $(Ax, y)_G = (x, By)_E$.

Залишилось показати, що $B\colon G \to E$ - дійсно є лінійним оператором.
Нехай $y_1, y_2 \in G$ та $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, тоді звідси
$(Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = (x, B(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$
$(Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha_1}(Ax, y_1) + \bar{\alpha_2}(Ax, y_2) = \bar{\alpha_1}(x, By_1) + \bar{\alpha_2}(x, By_2) = (x, \alpha_1 By_1 + \alpha_2 By_2)$.
Отже, звідси $B(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 By_1 + \alpha_2 By_2$.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що $\exists \widetilde{B}\colon G \to E : (Ax, y)_G = (x, \widetilde{B}y)_E$, але при цьому $\widetilde{B} \neq B$. Тоді
$\forall x, y \in G : 0 = (Ax, y)_G - (Ax, y)_G = (x, By)_E - (x, \widetilde{B}y)_E = (x, (B - \widetilde{B})y)_E$.
Отже, $(B - \widetilde{B})y \in E^\perp = \{0\} \implies \widetilde{B} = B$. Суперечність! ■

Отримали нове означення:

Definition 5.7.3 Задано $(E, (\cdot,\cdot)), (G, (\cdot,\cdot))$ – унітарні скінченні простори та $A\colon E \to G$ – лінійний оператор.
Оператор $B\colon G \to E$ називається **спряженим до** A, якщо

$$\forall x \in E, \forall y \in G : (Ax, y)_G = (x, By)_E$$

Позначення: $B = A^*$.
Англійською це називають **adjoint operator**.

Proposition 5.7.4 Властивості спряженого оператора
Задані $(E, (\cdot,\cdot)), (G, (\cdot,\cdot))$ – унітарні скінченні простори. Тоді виконуються такі пункти:
0) $I^* = I \qquad O^* = O$;
1) $(A + B)^* = A^* + B^*$;
2) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;
3) $(AB)^* = B^* A^*$;
4) $(A^*)^* = A$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості.
0) Із одного боку, $\forall x \in E, \forall y \in G : (Ix, y)_G = (x, y)_G = (x, Iy)_E$. Із іншого боку, $(Ix, y)_G = (x, I^* y)_E$.
Отже $I = I^*$. Аналогічно доводиться для O.

1) $(x, (A + B)^* y)_E = ((A + B)x, y)_G = (Ax + Bx, y)_G = (Ax, y)_G + (Bx, y)_G =$
$= (x, A^* y)_E + (x, B^* y)_E = (x, (A^* + B^*)y)_E$.
Отже, $(A + B)^* = A^* + B^*$.

2) аналогічно 1)

3) $(x, (AB)^* y)_E = (ABx, y)_H \overset{Bx=z}{=} (Az, y)_H = (z, A^* y)_G = (Bx, A^* y)_G \overset{A^* y = w}{=} (Bx, w)_G = (x, B^* w)_E =$
$(x, B^* A^* y)_E$
Отже, $(AB)^* = B^* A^*$.

4) $((A^*)^* x, y)_E = (x, A^* y)_G = \overline{(A^* y, x)_G} = \overline{(y, Ax)_E} = (Ax, y)_E$.
Отже, $(A^*)^* = A$.
Всі властивості доведені. ■

Theorem 5.7.5 Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – евклідів простір та $A : E \to E$ – лінійний оператор.
Тоді $E = \ker A^* \bigoplus \operatorname{Im} A$, або $E = \ker A \bigoplus \operatorname{Im} A^*$.
Тут суттєво, щоб $A\colon E \to E$, аби образи та ядра були підпросторами E.

Proof.
Для першої рівності ми доведемо, що $\ker A^* \perp \operatorname{Im} A$. Нехай $x \in \ker A^*$, тобто $A^* x = 0$. Нехай $y \in \operatorname{Im} A$, тобто $y = Aw, w \in E$. Звідси $(x, y) = (x, Aw) = (A^* x, w) = (0, w) = 0 \implies x \perp y$.
Для другої рівності маємо наступне:
$\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp \implies E = \operatorname{Im} A \bigoplus (\operatorname{Im} A)^\perp = \ker A^* \bigoplus \operatorname{Im} A$. ■

Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – евклідів простір та $\{f_1, \dots, f_n\}$ – деякий базис. Нехай $x \in E$, тоді звідси $x = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$. Ми вже отримали факт, що $\Gamma \vec{\alpha} = [\vec{x}]$.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & (f_2, f_1) & \dots & (f_n, f_1) \\ (f_1, f_2) & (f_2, f_2) & \dots & (f_n, f_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_1, f_n) & (f_2, f_n) & \dots & (f_n, f_n) \end{pmatrix} \qquad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad [\vec{x}] = \begin{pmatrix} (x, f_1) \\ (x, f_2) \\ \vdots \\ (x, f_n) \end{pmatrix}$$

Розглянемо лінійний оператор $A\colon E \to G$. Побудуємо його матрицю в базисі $\{g_1, \dots, g_n\}$.
$Af_1 = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \dots + a_{n1}g_n$
Коефіцієнти $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ знаходяться за алгоритмом через матриці Грама.

Позначу $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ та $[\overrightarrow{Af}_1] = \begin{pmatrix} (Af_1, g_1) \\ (Af_1, g_2) \\ \vdots \\ (Af_1, g_n) \end{pmatrix}$.

Тоді $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ знаходимо в рівнянні $\Gamma\vec{a}_1 = [\overrightarrow{Af}_1] \implies \vec{a}_1 = \Gamma^{-1}[\overrightarrow{Af}_1]$.
Такі самі процедури для $Af_2, \dots, Af_n$, де ми шукаэмо $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.
Тоді матриця має вигляд:
$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^{-1}[\overrightarrow{Af}_1] & \Gamma^{-1}[\overrightarrow{Af}_2] & \dots & \Gamma^{-1}[\overrightarrow{Af}_n] \end{pmatrix} = \Gamma^{-1}[A]$.

Тут $[A] = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{Af}_1] & [\overrightarrow{Af}_2] & \dots & [\overrightarrow{Af}_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Af_1, g_1) & (Af_2, g_1) & \dots & (Af_n, g_1) \\ (Af_1, g_2) & (Af_2, g_2) & \dots & (Af_n, g_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (Af_1, g_n) & (Af_2, g_n) & \dots & (Af_n, g_n) \end{pmatrix}$.

Аналогічні побудови проведемо для спряженого оператора $A^*\colon G \to E$.
Тоді $\mathbb{A}^* = \Gamma^{-1}[A^*]$, де

$$[A^*] = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{A^*g}_1] & [\overrightarrow{A^*g}_2] & \dots & [\overrightarrow{A^*g}_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^*g_1, f_1) & (A^*g_2, f_1) & \dots & (A^*g_n, f_1) \\ (A^*g_1, f_2) & (A^*g_2, f_2) & \dots & (A^*g_n, f_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A^*g_1, f_n) & (A^*g_2, f_n) & \dots & (A^*g_n, f_n) \end{pmatrix}.$$

Пограємось з матрицею $[A^*]$ ним більш детально:

$$[A^*] = \begin{pmatrix} (A^*g_1, f_1) & (A^*g_2, f_1) & \dots & (A^*g_n, f_1) \\ (A^*g_1, f_2) & (A^*g_2, f_2) & \dots & (A^*g_n, f_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A^*g_1, f_n) & (A^*g_2, f_n) & \dots & (A^*g_n, f_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g_1, Af_1) & (g_2, Af_1) & \dots & (g_n, Af_1) \\ (g_1, Af_2) & (g_2, Af_2) & \dots & (g_n, Af_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_1, Af_n) & (g_2, Af_n) & \dots & (g_n, Af_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{(Af_1, g_1)} & \overline{(Af_2, g_1)} & \dots & \overline{(Af_n, g_1)} \\ \overline{(Af_1, g_2)} & \overline{(Af_2, g_2)} & \dots & \overline{(Af_n, g_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{(Af_1, g_n)} & \overline{(Af_2, g_n)} & \dots & \overline{(Af_n, g_n)} \end{pmatrix}^T \overset{\text{позн.}}{=} \overline{\begin{pmatrix} (Af_1, g_1) & (Af_2, g_1) & \dots & (Af_n, g_1) \\ (Af_1, g_2) & (Af_2, g_2) & \dots & (Af_n, g_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (Af_1, g_n) & (Af_2, g_n) & \dots & (Af_n, g_n) \end{pmatrix}}^T = ([\overline{A}])^T.$$

Тоді маємо $[A^*] = ([\overline{A}])^T = (\overline{\Gamma\mathbb{A}})^T \implies \mathbb{A}^* = \Gamma^{-1}[A^*] = \Gamma^{-1}\overline{\mathbb{A}}^T\overline{\Gamma}^T$.

Нарешті, зауважимо, що $\overline{\Gamma}^T = \overline{\begin{pmatrix} (f_1, f_1) & (f_2, f_1) & \dots & (f_n, f_1) \\ (f_1, f_2) & (f_2, f_2) & \dots & (f_n, f_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_1, f_n) & (f_2, f_n) & \dots & (f_n, f_n) \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} \overline{(f_1, f_1)} & \overline{(f_2, f_1)} & \dots & \overline{(f_n, f_1)} \\ \overline{(f_1, f_2)} & \overline{(f_2, f_2)} & \dots & \overline{(f_n, f_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{(f_1, f_n)} & \overline{(f_2, f_n)} & \dots & \overline{(f_n, f_n)} \end{pmatrix}^T =$

$$= \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_n) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_n, f_1) & (f_n, f_2) & \dots & (f_n, f_n) \end{pmatrix}^T = \Gamma.$$

Таким чином, ми отримали:
1) $\overline{\Gamma}^T = \Gamma$;
2) $\mathbb{A}^* = \Gamma^{-1}\overline{\mathbb{A}}^T\Gamma$.

5.8 Самоспряжений оператор

Definition 5.8.1 Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – унітарний простір.
Лінійний оператор $A\colon E \to E$ називають **самоспряженим**, якщо

$$A^* = A$$

Англійською це називають **self-adjoint operator**.

Proposition 5.8.2 Властивості самоспряжених операторів
Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – унітарний простір та A, B - самоспряжені оператори. Тоді виконуються такиі пункти:
0) I та O – самоспряжені;
1) $A + B$ – самоспряжений $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha A$ - самоспряжений;
2) AB – самоспряжений за умовою, що $AB = BA$;
3) $\forall x, y : (Ax, y) = (x, Ay)$.
Всі вони випливають із властивостей спряжених операторів.

Theorem 5.8.3 Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – унітраний простір та $A\colon E \to E$ - самоспряжений.
Тоді $E = \ker A \bigoplus \operatorname{Im} A$.
Випливає з **Th. 5.7.5**

Remark 5.8.4 Ми знаємо, що для спряженого оператора $\mathbb{A}^* = \Gamma^{-1}\overline{\mathbb{A}}^T\Gamma$. Але оскільки A – самоспряжений, то тоді звідси $\mathbb{A}^* = \overline{\mathbb{A}}^T$. Матрицю, від якої беруть спряження та транспонованість, називають ще **ермітовою**.

Remark 5.8.5 Матриця Грама є ермітовою.

Proposition 5.8.6 Властивості власних чисел та векторів для самоспряжених операторів
Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – унітарний простір та $A\colon E \to E$ – сапоспряжений. Тоді виконуються такі пункти:
1) Якщо λ – власне число A, тоді $\lambda \in \mathbb{R}$;
2) Якщо f_1, f_2 – власні вектори з різними власними числами λ_1, λ_2, то $f_1 \perp f_2$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості.
1) Нехай f – власний вектор для власного числа λ, тобто $Af = \lambda f$. Оскільки $f \neq 0$, то звідси $(f, f) \neq 0 \implies \lambda(f, f) = (\lambda f, f) = (Af, f) = (f, Af) = (f, \lambda f) = \overline{\lambda}(f, f) \implies \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$.

2) $\lambda_1(f_1, f_2) = (\lambda_1 f_1, f_2) = (Af_1, f_2) = (f_2, Af_1) = (f_1, \lambda_2 f_2) = \overline{\lambda_2}(f_1, f_2) = \lambda_2(f_1, f_2) \Rightarrow (f_1, f_2) = 0$.
Всі властивості доведені. ■

Theorem 5.8.7 Спектральна теорема
Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – унітарний простір та $A\colon E \to E$ – самоспряжений. Тоді в E існує ортонормований базис із власних векторів A.

Proof.
Індукція за $\dim E$.
I. *База індукції.* Маємо $\dim E = 1$. Знайдеться власне число λ, якому відповідає власний вектор f. Встановимо $e = \dfrac{f}{\|f\|}$ - нормований. Зрозуміло, що e – теж власний вектор власного числа λ.
Отже, ми побудували ортонормований базис $\{e\}$.

II. *Припущення індукції.* Нехай для $\dim E < n$ теорема виконується.
III. *Крок індукції.* Перевіримо для $\dim E = n$. Нехай λ_0 – власне число A, розглянемо оператор $B = A - \lambda_0 I$ – теж самоспряжений за властивостями. Тоді за **Th. 5.8.3**, маємо $E = \ker B \bigoplus \operatorname{Im} B$.
1) Оскільки $\ker B \neq \{0\}$, то нехай $\{e_1, \dots, e_k\}$ – ортонормований (уже застосували процес) базис $\ker B$. Всі вони є власними векторами власного числа λ_0.
2) $\operatorname{Im} B$ є інваріантним для A. Дійсно:
$\forall y \in \operatorname{Im} B : y = Bx = (A - \lambda_0 I)x \implies Ay = A(A - \lambda_0 I)x = (A - \lambda_0 I)(Ax) = B(Ax) \in \operatorname{Im} B$.
Тоді ми розглянемо $A|_{\operatorname{Im} B}$ - звужений оператор – теж самоспряжений. Дійсно,
$\forall y_1, y_2 \in \operatorname{Im} B : (A|_{\operatorname{Im} B} y_1, y_2) = (Ay_1, y_2) = (y_1, Ay_2) = (y_1, A|_{\operatorname{Im} B} y_2)$.
Оскільки $\dim \operatorname{Im} B < \dim E = n$, то за припущенням індукції, існує $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ – ортонормований

базис власних векторів $A|_{\operatorname{Im} B}$.
Але $\lambda_j e_j = A|_{\operatorname{Im} B} e_j = Ae_j$.
Отже, $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ – ортонормований базис власних векторів A в $\operatorname{Im} B$.
Розглянемо $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$. Оскільки $E = \ker B \bigoplus \operatorname{Im} B$, то $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ – ортонормований базис в E та всі вони є власними векторами для A.
МІ доведено. ■

Proposition 5.8.8 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – виключно унітарний простір та $B\colon E \to E$ лінійний оператор. Тоді $\exists! B_1, B_2$ – самоспряжені оператори, для яких $B = B_1 + iB_2$.

Proof.
I. *Існування.*
Розкладемо самоспряжений оператор B таким чином:
$B = \dfrac{B + B^*}{2} + i\dfrac{B - B^*}{2i}$.
$B_1 = \dfrac{B + B^*}{2} \implies (B_1)^* = \left(\dfrac{B + B^*}{2}\right)^* = \dfrac{B + B^*}{2} = B_1$
$B_2 = \dfrac{B - B^*}{2i} \implies (B_2)^* = \left(\dfrac{B^* - B}{2i}\right)^* = \dfrac{B^* - B}{-2i} = \dfrac{B - B^8}{2i} = B_2$
Тобто ми знайшли самоспряжені оператори, для яких $B = B_1 + iB_2$.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що $\exists B_3, B_4$ – самоспряжені: $B = B_3 + iB_4$. При цьому $B_3 \neq B_1, B_2 \neq B_4$.
Тоді $B_1 + iB_2 = B_3 + iB_3 \iff B_1 - B_3 = i(B_4 - B_2)$.
Водночас $B_1 - B_3 = (B_1 - B_3)^* = (i(B_4 - B_2))^* = -i(B_4 - B_2)^* = -i(B_4 - B_2) = -(B_1 + B_3)$
$\implies B_1 = B_3$, а тому $B_2 = B_4$. Суперечність! ■

Proposition 5.8.9 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – виключно евклідів простір та $B\colon E \to E$ – лінійний оператор. Тоді $\exists! B_1$ – самоспряжений, $\exists! B_2$ – кососпряжений (тобто $B_2^* = -B_2$), для яких $B = B_1 + B_2$.

Proof.
Запишемо B таким чином:
$B = \dfrac{B + B^*}{2} + \dfrac{B - B^*}{2} = B_1 + B_2$.
Зрозуміло, що перший – сампоспряжений, а другий – кососпряжений. Єдиність доводиться аналогічно. ■

5.9 Унітарний оператор

Definition 5.9.1 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – унітарний простір.
Лінійний оператор $U\colon E \to E$ називають **унітарним**, якщо

$$\forall x, y \in E : (Ux, Uy) = (x, y)$$

Якщо простір евклідів, то часто такий оператор називають **ортогональним**.

Proposition 5.9.2 Властивості унітарних операторі
Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – унітарний простір та $U\colon E \to E$ – лінійний оператор. Тоді виконуються такі пункти:
1) Якщо U – унітарний, то $\ker U = \{0\} \qquad \operatorname{Im} U = E$;
2) U – унітарний $\iff U^* = U^{-1}$;
3) Якщо U – унітарний, то U^* – унітарний теж;
4) U – унітарний $\iff U$ переводить ортонормований базис в ортонормований.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості.
1) $x \in \ker U \implies Ux = 0 \implies 0 = (Ux, Ux) = (x, x) \implies x = 0$.
$\dim(\operatorname{Im} U) = \dim E - \dim(\ker U) = \dim E$.
$\operatorname{Im} U \subset E \implies \operatorname{Im} U = E$.

2) Доведення в обидва сторони.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: U – унітарний.
$\ker U = \{0\}, \operatorname{Im} U = E \implies \exists U^{-1}$.
Тоді $\forall x, y \in E : (Ix, y) = (x, y) = (Ux, Uy) = (U^*(Ux), y) = (U^*Ux, y)$
$\implies U^*U = I \implies U^* = U^{-1}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $U^* = U^{-1}$.
Тоді $\forall x, y \in E : (x, y) = (Ix, y) = (U^{-1}Ux, y) = (U^*Ux, y) = (Ux, Uy)$
$\implies U$ – унітарний.

3) $\forall x, y \in E : (x, y) = (Ix, y) = (UU^{-1}x, y) = (UU^*x, y) = (U^*x, U^*y)$.

4) Доведення в обидва сторони.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: U – унітарний
Нехай $\{f_1, \dots, f_n\}$ – якийсь ортонормований базис. Система $\{g_1 = Uf_1, \dots, g_n = Uf_n\}$ – ортонормована. Дійсно,
$(g_j, g_k) = (Uf_j, Uf_k) = (f_j, f_k) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\{f_1, \dots, f_n\}$, $\{g_1, \dots, g_n\}$ – два ортонормованих базиси, де $Uf_j = g_j$ – умова перевода з одного базису в інший.
$\forall x \in E : x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j f_j \qquad \forall y \in E : y = \sum_{k=1}^{n} y_k f_k \implies$
$Ux = U\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j f_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j g_j \qquad Uy = U\left(\sum_{k=1}^{n} y_k f_k\right) = \sum_{k=1}^{n} y_k g_k \implies$
$(Ux, Uy) = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j g_j, \sum_{k=1}^{n} y_k g_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j \overline{y_k} (g_j, g_k) \boxed{=}$
Оскільки обидві базиси ортонормовані, то $(g_j, g_k) = (f_j, f_k) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$.
$\boxed{=} \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j \overline{y_k} (f_j, f_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j f_j, \sum_{k=1}^{n} y_k f_k\right) = (x, y)$.
Остаточно, U – унітарний оператор.
Всі властивості доведені. ■

5.10 Оператор ортогонального проєктування

Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – унітарний простір та L – підпростір. Уже відомо, що $E = L \bigoplus L^{\perp}$. Тоді кожний $x \in E$ єдиним чином розкладається в $x = \operatorname{pr}_L x + \operatorname{ort}_L x$.

Definition 5.10.1 Оператором ортогонального проєктування назвемо оператор $P_L \colon E \to E$ за таким правилом:

$$P_L x = \operatorname{pr}_L x$$

Цілком зрозуміло, що це задає саме лінійний оператор.

Proposition 5.10.2 Властивості
Маємо $P_L \colon E \to E$ – оператор ортпроєктування. Тоді виконуються такі пункти:
1) $P_L^2 = P_L$
2) $P_L^* = P_L$
3) Нехай $A \colon E \to E$ – такий лінійний оператор, що $A^2 = A^* = A$, Тоді, позначивши $L = \{Ax \mid x \in E\}$ – підпростір E, отримаємо $A = P_L$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості:

1) $P_L^2 x = P_L(P_L x) = P_L(\operatorname{pr}_L x) = \operatorname{pr}_L x = P_L x$.

2) $(P_L x, y) = (\operatorname{pr}_L x, \operatorname{pr}_L y + \operatorname{ort}_L y) = (\operatorname{pr}_L x, \operatorname{pr}_L y) + (\operatorname{pr}_L x, \operatorname{ort}_L y) = (\operatorname{pr}_L x, \operatorname{pr}_L y) =$
$= (\operatorname{pr}_L x, \operatorname{pr}_L y) + (\operatorname{ort}_L x, \operatorname{pr}_L y) = (\operatorname{pr}_L x + \operatorname{ort}_L x, \operatorname{pr}_L y) = (x, P_L y) \implies P_L^* = P_L$.

3) Розглянемо $L = \{Ax \mid x \in E\}$ та доведемо, що $x - Ax \in L^\perp$ при $x \in E$. Для кожного $y \in E$ маємо:
$(x - Ax, Ay) \overset{A=A^*}{=} (A(x - Ax), y) = (Ax - Ax^2, y) \overset{A=A^2}{=} (Ax - Ax, y) = 0$.
Таким чином, $x = \operatorname{pr}_L x + \operatorname{ort}_L x = Ax + (x - Ax)$, причому це для кожного $x \in E$.
Звідси випливає, що $Ax = \operatorname{pr}_L x$, а тому $A = P_L$.

Всі властивості доведені. ■

Proposition 5.10.3 Задано $P_L \colon E \to E$ – оператор ортпроєктування. Тоді для кожного $x \in E$ справедлива оцінка $\|P_L x\| \leq \|x\|$.

Proof.
$\|x\|^2 = (x, x) = (\operatorname{pr}_L x + \operatorname{ort}_L x, \operatorname{pr}_L x + \operatorname{ort}_L x) = (\operatorname{pr}_L x, \operatorname{pr}_L x) + (\operatorname{ort}_L x, \operatorname{ort}_L, x) =$
$= \|P_L x\|^2 + \|\operatorname{ort}_L x\|^2 \geq \|P_L x\|^2$. ■

Proposition 5.10.4 Інші властивості
Виконуються такі пункти:
1) Якщо $P_L \colon E \to E$ – ортпроєктор, то $P_{L^\perp} = I - P_L$ – теж ортпроєктор.
2) Нехай $P_L, P_M \colon E \to E$ – два ортпроєктори. Тоді $P_L + P_M$ – ортпроєктор $\iff P_L P_M = O$.
3) Нехай $P_L, P_M \colon E \to E$ – два ортпроєктори. Тоді $P_L P_M$ – ортпроєктор $\iff P_L P_M = P_M P_L$.
4) Нехай $P_L, P_M \colon E \to E$ – два ортпроєктори. Тоді $P_L - P_M$ – ортпроєктор $\iff P_L P_M = P_M$.

Proof.
Покажемо виконання кожної властивості:

1) По-перше, зауважимо, що виконується наступне:
$(I - P_L)^2 = I - 2P_L + P_L^2 = I - 2P_L + P_L = I - P_L$
$(I - P_L)^* = I^* - P_L^* = I - P_L$.
Тож звідси $I - P_L = P_M$, де $M = \{(I - P_L)x \mid x \in E\}$. Треба лише довести, що $M = L^\perp$.
Нехай $z \in M$, тобто $z = (I - P_L)x = x - \operatorname{pr}_L x$, причому $x \in E$. Тепер, $x = z + \operatorname{pr}_L x$. Оскільки $E = L \bigoplus L^\perp$, то звідси $x = \operatorname{ort}_L x + \operatorname{pr}_L x$. У силу єдиності розкладу, $z = \operatorname{ort}_L x \implies z \in L^\perp$.
Нехай $z \in L^\perp$, тобто $P_L z = 0$, а тому звідси $z = z - P_L z = (I - P_L)z$. Значить, $z \in M$.
Отже, $M = L^\perp$, тому отримуємо $I - P_L = P_{L^\perp}$.

2) Доведення в обидві сторони:
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $P_L + P_M$ – ортпроєктор.
Із одного боку, маємо $(P_L + P_M)^2 = P_L^2 + P_M^2 + P_L P_M + P_M P_L = P_L + P_M + P_L P_M + P_M P_L$.
Із іншого боку, маємо $(P_L + P_M)^2) = P_L + P_M$ за умовою.
Отже, отримали $P_L P_M + P_M P_L = O$. Помножимо зліва та справа на P_L – отримаємо:
$P_L P_M P_L + P_L P_M P_L = O \implies P_L P_M P_L = O$.
Зауважимо, що з цієї рівності ми отримаємо $P_L P_M P_L = P_L P_M P_M P_L = (P_L P_M)(P_L P_M)^* = O$.
Нарешті, ми цю рівність застосуємо, щоб довести бажане. Для кожного $x \in E$
$(P_L P_M x, P_L P_M x) = (P_L P_M (P_L P_M)^* x, x) = (Ox, x) = 0$. Тобто звідси $P_L P_M x = 0$ при всіх $x \in E$.
Аналогічно (до речі кажучи) можна довести, що $P_M P_L = O$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $P_L P_M = O$. Тоді маємо:
$(P_L + P_M)^2 = P_L^2 + P_L P_M + P_M P_L + P_M^2 = P_L + O + O^* = P_M = P_L + P_M$
$(P_L + P_M)^* = P_L^* + P_M^* = P_L + P_M$.
Із цього випливає, що $P_L + P_M$ буде ортогональним проєктором на $K = \{(P_L + P_M)x \mid x \in E\}$.
Доведемо, що $K = L \bigoplus M$, і тоді звідси $P_L + P_M = P_{L \bigoplus M}$.
Спочатку доведемо, що $L \perp M$. І дійсно, беремо $x \in L, y \in M$, тоді
$(x, y) = (P_L x, P_M y) = (x, P_L P_M y) = (x, 0) = 0 \implies x \perp y$.
Таким чином, $K = \{P_L x + P_M x \mid x \in E\} = L \bigoplus M$.

3) Доведення в обидві сторони:
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $P_L P_M$ – ортпроєктор. Тоді звідси $P_L P_M = P_L^* P_M^* = (P_M P_L)^* = P_M P_L$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $P_L P_M = P_M P_L$.

$(P_L P_M)^2 = (P_L P_M)(P_L P_M) = P_L P_M P_M P_L = P_L P_M P_L = P_L P_L P_M = P_L P_M$.
$(P_L P_M)^* = P_M^* P_L^* = P_M P_L = P_L P_M$.
Із цього випливає, що $P_L P_M$ буде ортогональним проєктором на $K = \{P_L P_M x \mid x \in E\}$. Доведемо, що $K = L \cap M$, і тоді звідси $P_L P_M = P_{L\cap M}$.
Нехай $z \in K$, тобто $z = P_L P_M x$, але водночас $z = P_M P_L x$. Із поведінки проєкції випливає, що $z \in L \cap M$.
Нехай $z \in L \cap M$, тоді $z = P_L P_M z$, звідси автоматично $z \in K$.

4) Доведення в обидві сторони:
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $P_L - P_M$ – ортпроєктор. Але тоді $I - (P_L - P_M) = (I - P_L) + P_M$ також ортпроєктор. Тоді за щойно доведеним 2), $(I - P_L)P_M = O \implies P_L P_M = P_M$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $P_L P_M = P_M$. Тоді аналогічно легко доводиться, що $(P_L - P_M)^2 = (P_L - P_M)^* = P_L - P_M$. Тому звідси $P_L - P_M$ буде ортогональним проєктором на $K = \{(P_L - P_M) \mid x \in E\}$. Доведемо, що $K \oplus M = L$. Дійсно,
$((P_L - P_M)x, P_M y) = (P_M(P_L - P_M)x, y) = (0, y) = 0 \implies K \perp M$. Більше того, $x \in L \implies x = P_L x = P_L x - P_M x + P_M x = (P_L - P_M)x + P_M x$.

Всі властивості доведені. ■

Remark 5.10.5 Важливо зауважити, що для двох ортогональних проєкторів P_L, P_M, якщо $P_L P_M = O$, то тоді $L \perp M$.

Proposition 5.10.6 Задано $(E, (\cdot,\cdot))$ – унітарний простір. Нехай $P_1, \dots, P_k$ – ортпроєктори.
$P_1 + \dots + P_k = P$ – ортпроєктор $\iff P_i P_j = O, \forall i \neq j$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: P – ортпроєктор. Зафіксуємо $x \in \{P_i y \mid y \in E\}$, тоді звідси
$\|x\|^2 \geq \|Px\|^2 = (Px, Px) = (Px, x) = \left(\sum_{i=1}^k P_i x, x\right) = \sum_{i=1}^k (P_i x, x) = \sum_{i=1}^k (P_i x, P_i x) = \sum_{i=1}^k \|P_i x\|^2 \geq \|P_i x\|^2 = \|x\|^2$.
Значить, $\|x\|^2 = \|P_i x\|^2 = \sum_{i=1}^k \|P_i x\|^2$. Із цієї рівності отримаємо $P_j x = 0$ при $j \neq i$.
Отже, $\forall y \in E : i \neq j : P_j P_i y = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $P_i P_j = O$ для всіх $i \neq j$. Звідси
$P^2 = (P_1 + \dots + P_k)(P_1 + \dots + P_k) = P_1^2 + \dots + P_k^2 + \sum_{i\neq j} P_i P_j = P_1 + \dots + P_k$.
$P^* = (P_1 + \dots + P_k)^* = P_1^* + \dots + P_k^* = P_1 + \dots + P_k$.
Отже, P – ортпроєктор. При цьому якщо $P_1 = P_{L_1}, \dots, P_k = P_{L_k}$, то звідси $P = P_{L_1 \bigoplus \dots \bigoplus L_k}$. ■

Corollary 5.10.7 Нехай $P_1, \dots, P_k$ – такі ортпроєктори, що $P_1 + \dots + P_k = I$. Тоді $P_i P_j = O$ при всіх $i \neq j$. Також якщо $P_i = P_{L_i}$, то звідси $L_1 \bigoplus \dots \bigoplus L_k = E$.

Ще раз окремо розглянемо $(E, (\cdot,\cdot))$ – евклідів простір та L – підпростір. Оберемо ортонормований базис $\{f_1, \dots, f_k\}$ простору L та розиширимо до ортонормованого базису $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$ простора E. Розглянемо оператор ортпроєктування $P_L : E \to E$. Знайдемо матричне представлення.
$P_L f_1 = f_1 \qquad P_L f_{k+1} = 0$
$\vdots$
$P_L f_k = f_k \qquad P_L f_n = 0$.
Починаючи з $k+1$-го вектора тут нулі, тому що $f_{k+1}, \dots, f_n \in L^\perp$ в силу того, що $E = L \bigoplus L^\perp$.
Значить, матриця виглядатиме ось таким чином:
$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right)$.

Remark 5.10.8 Можна по-іншому розписати спектральну теорему. Власне, у нас $A : E \to E$ – самоспряжений оператор. Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – власні числа та $P_i = P_{L_{\lambda_i}}$, де $i = \overline{1, s}$. Тоді $A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_s P_s$.

По-перше, у нас всі $P_i P_j = O$, просто тому що всі власні вектори, яким відповідають різним власним значенням, ортогональні. Рівність $I = P_1 + \cdots + P_s$ виконується в силу існування базису оператора A та розкладу $E = L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_s}$.

$$Ax = A\left(\sum_{k=1}^{s} P_k\right)x = A\sum_{k=1}^{s} P_k x = \sum_{k=1}^{s} Ax_k = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k P_k x = (\lambda_k P_k)\, x.$$

6 Квадратичні форми

6.1 Білінійні форми

Definition 6.1.1 Задано L – лінійний простір.
Білінійною формою будемо називати 2-лінійний функціонал $A\colon L \times L \to \mathbb{R}$. (див. **Def. 3.2.1**).

Remark 6.1.2 Нагадую, що замість $\mathbb{R}$ можна $\mathbb{C}$.

Definition 6.1.3 Задано L – лінійний простір та A – білінійна форма.
Білінійна форма називається **симетричною** (**symmteric**), якщо

$$A(x,y) = A(y,x)$$

Білінійна форма називається **кососиметричною** (**skew-symmteric**), якщо

$$A(x,y) = -A(y,x)$$

(це означення, яке хотілося би просто нагадати).

Proposition 6.1.4 Задано L – лінійний простір та A – симетрична та кососиметрична форма. Тоді $A \equiv 0$.

Proof.
$A(x,y) \overset{\text{skew}}{=} -A(y,x) \overset{\text{sym}}{=} -A(x,y) \implies A(x,y) = 0.$ ■

Proposition 6.1.5 Задано L – лінійний простір та A – білінійна форма. Тоді A можна представити єдиним чином в вигляді суми симетричної та кососиметричної форми, тобто
$A(x,y) = A_{\text{sym}}(x,y) + A_{\text{skew}}(x,y)$.

Proof.
I. *Існування.*
Встановимо такі форми:
$A_{\text{sym}}(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(A(x,y) + A(y,x)\right)$
$A_{\text{skew}}(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(A(x,y) - A(y,x)\right)$
Легко довести, що A_{sym} – симетрична, A_{skew} – кососиметрична та $A_{\text{sym}}(x,y) + A_{\text{skew}}(x,y) = A(x,y)$.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що $A(x,y) = \widetilde{A}_{\text{sym}}(x,y) + \widetilde{A}_{\text{skew}}(x,y)$, то є інший розклад. Тоді
$0 = A(x,y) - A(x,y) = (A_{\text{sym}}(x,y) + A_{\text{skew}}(x,y)) - (\widetilde{A}_{\text{sym}}(x,y) + \widetilde{A}_{\text{skew}}(x,y))$
$\implies A_{\text{sym}}(x,y) - \widetilde{A}_{\text{sym}}(x,y) = \widetilde{A}_{\text{skew}}(x,y) - A_{\text{skew}}(x,y)$.
Ліва частина є симетричною та кососиметричною одночасно, тоді $A_{\text{sym}}(x,y) - \widetilde{A}_{\text{sym}}(x,y) = 0 \implies \widetilde{A}_{\text{sym}}(x,y) = A_{\text{sym}}(x,y)$. Значить, $\widetilde{A}_{\text{skew}}(x,y) = A_{\text{skew}}(x,y)$. Суперечність! ■

Proposition 6.1.6 $\mathcal{B}(L)$ – множина всіх білінійних форм, що задані на лінійному просторі L – буде лінійним простором, де операція додавання та множення на скаляр визначається таким чином: маємо $A, B\colon L \times L \to L$ – дві білінійні форми, тоді
$A + B\colon L \times L \to \mathbb{R}$ – теж білінійна форма, яка визначається як $(A+B)(x,y) = A(x,y) + B(x,y)$;
$\lambda A\colon L \times L \to \mathbb{R}$ – теж білінійна форма, яка визначається як $(\lambda A)(x,y) = \lambda A(x,y)$.
Вправа: довести, що $A+B, \lambda A$ справді будуть білінійними формами, внаслідок чого показати, що $\mathcal{B}(L)$ утворює лінійний простір.

Corollary 6.1.7 $\mathcal{B}(L) = \mathcal{B}^+(L) \dot{+} \mathcal{B}^-(L)$,
$\mathcal{B}^+(L)$ – множина всіх симетричних білінійних форм, що задані на лінійному просторі L;
$\mathcal{B}^-(L)$ – множина всіх кососиметричних білінійних форм, що задані на лінійному просторі L.

Задамо L – лінійний простір, $\{f_1, \dots, f_n\}$ – базис та B – білінійна форма.
$x \in L \implies x = \xi_1 f_1 + \dots + \xi_n f_n$
$y \in L \implies y = \eta_1 f_1 + \dots + \eta_n f_n$

$B(x,y) = B(\xi_1 f_1 + \dots + \xi_n f_n, \eta_1 f_1 + \dots + \eta_n f_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j b_{ij}$, де $b_{ij} = B(f_i, f_j)$.
Таким чином, білінійну форму можна задати однозначно формулою:

$$B(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j b_{ij}$$

Формулу можна записати в матричному вигляді:

$$B(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j b_{ij} = \xi_1 \left(\eta_1 b_{11} + \eta_2 b_{12} + \dots + \eta_n b_{1n}\right) + \dots + \xi_n \left(\eta_1 b_{n1} + \eta_2 b_{n2} + \dots + \eta_n b_{nn}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 b_{11} + \eta_2 b_{12} + \dots + \eta_n b_{1n} \\ \eta_2 b_{12} + \eta_2 b_{22} + \dots + \eta_n b_{2n} \\ \vdots \\ \eta_1 b_{n1} + \eta_2 b_{n2} + \dots + \eta_n b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

Позначимо також $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$. Тоді отримаємо таку форму:

$$B(x,y) = \boldsymbol{\xi}^T \mathbb{B} \boldsymbol{\eta}$$

де $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ та $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$.
Відповімо на питання, чи є такий розклад єдиним.
!Припускаємо, що існує деяка інша матриця $\widetilde{\mathbb{B}}$, для якої $B(x,y) = \boldsymbol{\xi}\widetilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\eta}$. Тоді $\boldsymbol{\xi}^T\widetilde{\mathbb{B}}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}\mathbb{B}\boldsymbol{\eta}$, рівність виконана $\forall x, y \in L$. Підставимо тоді f_i та f_j – отримаємо $\widetilde{b_{ij}} = b_{ij}$. Суперечність!
Висновок: будь-яку білінійну форму в деякому базисі представляється матрицею єдиним чином.

Поставимо зворотне питання: чи задають матриці білійні форми в заданому базисі?
Нехай $\{f_1, \dots, f_n\}$ – базис L та матриця $\mathbb{B}$ задані. Встановимо форму $B(x,y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij} \xi_i \eta_j$.
Зрозуміло, що дана форма є білінійною.
Висновок: будь-яка матриця задає білійну форму в деякому базисі.

Remark 6.1.8 Розглянемо особливі випадки:
- при симетричній білінійній формі ми отримаємо $b_{ij} = b_{ji}$ – **симетричну матрицю** $\mathbb{B}$.
- при кососиметричній білінійній формі ми отримаємо $b_{ij} = -b_{ji}$ – **кососиметричну матрицю** $\mathbb{B}$.

Причому на головній діагоналі будуть нулі, оскільки $b_{ii} = -b_{ii}$ через умову кососиметричності.
Навпаки, якщо матриця була симетричною (кососиметричною), то буде білінійна симетрична (кососиметрична) форма.

Proposition 6.1.9 Задано L – лінійний простір та $B(x,y)$ – білінійна форма, що відповідає матриці $\mathbb{B}$. Тоді білінійній формі $\widetilde{B}(x,y) = B(y,x)$ відповідає матриця $\widetilde{\mathbb{B}} = \mathbb{B}^T$.

Proof.
Маємо $B(x,y) = \boldsymbol{\xi}^T \mathbb{B} \boldsymbol{\eta}$. Тоді $\widetilde{B}(x,y) = B(y,x) = \boldsymbol{\eta}^T \mathbb{B} \boldsymbol{\xi}$. Перепишемо в зручному вигляді, щоб був спочатку $\boldsymbol{\xi}$, а потім $\boldsymbol{\eta}$ – отримаємо:

$$\widetilde{B}(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \eta_i \xi_j b_{ij} = \sum_{j,i=1}^{n} \xi_j \eta_i b_{ij} = \boldsymbol{\xi}^T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbb{B}^T \boldsymbol{\eta} = B(y,x).$$ ■

Corollary 6.1.10 Задано матрицю $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Тоді $\mathbb{A} = \dfrac{\mathbb{A} + \mathbb{A}^T}{2} + \dfrac{\mathbb{A} - \mathbb{A}^T}{2}$.

Proof.
Маємо A – деяку білінійну форму, якій відповідає матриця $\mathbb{A}$. Тоді $A(x,y) = A_{\text{sym}}(x,y) + A_{\text{skew}}(x,y)$.

$$A_{\text{sym}}(x,y) = \frac{A(x,y)+A(y,x)}{2} = \frac{\boldsymbol{\xi}^T\mathbb{A}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}^T\mathbb{A}^T\boldsymbol{\eta}}{2} = \boldsymbol{\xi}^T\left(\frac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2}\right)\boldsymbol{\eta}$$
$$A_{\text{skew}}(x,y) = \frac{A(x,y)-A(y,x)}{2} = \frac{\boldsymbol{\xi}^T\mathbb{A}\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}^T\mathbb{A}^T\boldsymbol{\eta}}{2} = \boldsymbol{\xi}^T\left(\frac{\mathbb{A}-\mathbb{A}^T}{2}\right)\boldsymbol{\eta}$$
$$A(x,y) = \boldsymbol{\xi}^T\mathbb{A}\boldsymbol{\eta}$$
Таким чином, маємо $\mathbb{A} = \dfrac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2} + \dfrac{\mathbb{A}-\mathbb{A}^T}{2}$. ■

Задамо L – лінійний простір, $\{f_1,\dots,f_n\}$, $\{g_1,\dots,g_n\}$ – два різних базиса та B – білінійну форму.
У базисі $\{f_1,\dots,f_n\}$ білінійна форма задається $B_1(x,y) = \boldsymbol{\xi}_f^T\mathbb{B}_f\boldsymbol{\eta}_f$.
У базисі $\{g_1,\dots,g_n\}$ білінійна форма задається $B_2(x,y) = \boldsymbol{\xi}_g^T\mathbb{B}_g\boldsymbol{\eta}_g$.
Припустимо, що $\mathbb{B}_g$ задана. Мета: знайти білінійну форму B_1, тобто $\mathbb{B}_f$.
Але ми знаємо, що ми можемо побудувати матрицю переходу $\mathbb{U}_{f\to g}$, тоді $\mathbb{U}_{f\to g}\boldsymbol{\xi}_f = \boldsymbol{\xi}_g \implies$
$\boldsymbol{\xi}_g^T = \boldsymbol{\eta}_f^T\mathbb{U}_{f\to g}^T \qquad \mathbb{U}_{f\to g}\boldsymbol{\eta}_f = \boldsymbol{\eta}_g$.
Підставимо ці два значення в друге рівняння білінійної форми. Отримаємо:
$B_2(x,y) = \boldsymbol{\xi}_g^T\mathbb{B}_g\boldsymbol{\eta}_g = \boldsymbol{\xi}_f^T\mathbb{U}_{f\to g}^T\mathbb{B}_g\mathbb{U}_{f\to g}\boldsymbol{\eta}_f \overset{*}{=} B_1(x,y)$.
У силу єдиного представлення форми через матрицю та рівності (*) отримаємо:
$$\mathbb{B}_f = \mathbb{U}_{f\to g}^T\mathbb{B}_g\mathbb{U}_{f\to g}$$

Example 6.1.11 Розглянемо білінійну форму $B(\vec{x},\vec{y}) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + y_1x_2$ в просторі $\mathbb{R}^2$.
У канонічному базисі $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ буде матриця $\mathbb{B}_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Розглянемо базис $\{\vec{f}_1,\vec{f}_1\}$, де $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Йому відповідає матриця $\mathbb{B}_f$, яку треба знайти.
Матриця $\mathbb{U}_{f\to e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Тоді
$\mathbb{B}_f = \mathbb{U}_{f\to e}^T\mathbb{B}_e\mathbb{U}_{f\to e} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}$
Значить, $B_f(\vec{x},\vec{y}) = 10x_1y_1 + 5x_1y_2 - 5x_2y_1 - 10y_1y_2$.

Corollary 6.1.12 $\operatorname{rank}\mathbb{B}_f = \operatorname{rank}\mathbb{B}_g$.

6.2 Квадратичні форми

Definition 6.2.1 Задано L – лінійний простір та B – білінійна форма.
Квадратичною формою називають форму $A\colon L \to \mathbb{R}$, що приймає такий вигляд:
$$A(x) = B(x,x)$$

Example 6.2.2 Маємо білінійну форму $B(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$. Можемо поставити їй квадратичну форму $A(x) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2$.
Якщо візьмемо іншу білінійну форму $\widetilde{B}(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2$, то ми отримаємо ту саму квадратичну форму $A(x)$.

Remark 6.2.3 Отже, приклад каже, що за квадратичною формою ми не зможемо однозначно поставити в відповідність білінійну форму.

Remark 6.2.4 Квадратичну форму ще можна позначати за $A(x_1,\dots,x_n)$, де всередині стоять координати елемента x у відповідному базисі.

Proposition 6.2.5 Поляризаційна формула
Задано L – лінійний простір та $A = B(x,x)$ – квадратична форма від симетричної білінійної форми B. Тоді $2B(x,y) = A(x+y) - A(x) - A(y)$.
Вказівка: розписати $A(x+y)$.

Theorem 6.2.6 Існує взаємно однозначна відповідність між симетричними білінійними формами та квадратичними формами.

Proof.
Маємо $B_{\text{sym}}(x,y)$ – симетрична. Підставимо $y = x$, то тоді $B_{\text{sym}}(x,x) = A(x)$ – отримали квадратичну форму.

Маємо квадратичну форму $A(x)$. Використовуючи поляризаційну формулу, ми отримаємо $2B_{\text{sym}}(x,y) = A(x+y) - A(x) - A(y)$ – отримали (а точніше відновили) симетричну білінійну форму.

Таким чином, ми побудували взаємну однозначність $A(x) \underset{\text{побудова}}{\overset{\text{поляризаційна ф-ла}}{\rightleftarrows}} B_{\text{sym}}(x,y)$ ■

Remark 6.2.7 Надалі, визначаючи квадратичну форму, ми будемо ставити симетричну білінійну форму.

Із означення білійної квадратичної форми випливає, що квадратична форма в базисі $\{f_1, \dots, f_n\}$ простору L може бути записана так:

$$A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$$

де $a_{ij} = B_{\text{sym}}(f_i, f_j)$. Кожній квадратичній формі відповідає симетрична матриця

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тоді квадратична форма записується і ось так:

$$A(x) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x}$$

Зауважимо, що $a_{ij} = a_{ji}$ в силу симетричності білінійної форми – отримали так звану **симетричну матрицю**. Зауважимо, що $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$ в такому разі.

Definition 6.2.8 Задано L – лінійний простір та $A = B(x,x)$ – квадратична форма від симетричної білінійної форми B. Квадратична форма називається:
- **додатноозначеною**, якщо $\forall x \in L : x \neq 0 : A(x) > 0$;
- **від'ємноозначеною**, якщо $\forall x \in L : x \neq 0 : A(x) < 0$.
Одна з двох форм у такому разі називається **знакоозначеними**.

Квадратична форма називається **знакозмінною**, якщо $\exists x, y \in L : A(x) > 0, A(y) < 0$.
Квадратична форма називається **квазізнакоозначеною**, якщо $\forall x \in L : A(x) \geq 0$ (або $A(x) \leq 0$), але при цьому $\exists x^* \in L : x^* \neq 0 : A(x^*) = 0$.

6.3 Зведення квадратичної форми до суми квадратів

Маємо квадратичну форму $A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j =$
$= (a_{11}\xi_1^2 + a_{12}\xi_1\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_1\xi_n) + (a_{21}\xi_2\xi_1 + a_{22}\xi_2^2 + \dots + a_{2n}\xi_2\xi_n) + \dots + (a_{n1}\xi_n\xi_1 + a_{n2}\xi_n\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n^2)$.
Вважаємо, що $A(x) \not\equiv 0$.
Мета: звести квадратичну форму до вигляду $A(x) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \dots + \lambda_n\eta_n^2$.

6.3.1 Метод Лагранжа

Розглянемо два можливі випадки:
I. $a_{11} = 0$ (у такому разі припускається, що $a_{1j} \neq 0, j \neq 1$). Не втрачаючи загальності, ми розглянемо $a_{12} \neq 0$. Тоді робимо таку заміну:
$\xi_1 = \xi_1' - \xi_2'$, $\quad \xi_2 = \xi_1' + \xi_2'$, $\quad \xi_3 = \xi_3', \dots, \xi_n = \xi_n'$.
Отримаємо ось таку квадратичну форму:
$A(x) = 2a_{12}(\xi_1' - \xi_2')(\xi_1' + \xi_2') + 2a_{13}(\xi_1' - \xi_2')\xi_3' + \dots + 2a_{1n}(\xi_1' - \xi_2')\xi_n' +$
$+ a_{22}\xi_2^2 + 2a_{23}(\xi_1' + \xi_2')\xi_3' + \dots + 2a_{2n}(\xi_1' + \xi_2')\xi_n + \sum_{i,j=3}^{n} a_{ij}\xi_i'\xi_j' = \dots = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}'\xi_i'\xi_j'$.
Коефіцієнт тепер при ${\xi_1'}^2$, тобто $a_{11}' = 2a_{12} \neq 0$.

II. $a_{11} \neq 0$. Тоді з квадратичної форми відокремлюємо групу доданків, що містять ξ_1, тобто записуємо окремо $a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + \dots + 2a_{1n}\xi_1\xi_n$. Зробимо над ним таке перетворення:

$a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + \dots + 2a_{1n}\xi_1\xi_n =$
$= a_{11}\left(\xi_1^2 + 2\xi_1\frac{1}{a_{11}}(a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n) + \frac{1}{a_{11}^2}(a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n)^2 - \frac{1}{a_{11}^2}(a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n)^2\right) =$
$= a_{11}\left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\xi_n\right)^2 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n)^2 \boxed{=}$
Позначу $\eta_1 = \xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\xi_n$, а решта просто заміна літери: $\xi_2 = \eta_2, \dots, \xi_n = \eta_n$.
$\boxed{=} a_{11}\eta_1^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\eta_2^2 - \dots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}\eta_n^2 - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}\eta_2\eta_3 - \dots - 2\frac{a_{1n-1}a_{1n}}{a_{11}}\eta_{n-1}\eta_n$.
Таким чином, отримаємо квадратичну форму
$A(x) = a_{11}\eta_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\eta_2^2 - \dots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}\eta_n^2 - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}\eta_2\eta_3 - \dots - 2\frac{a_{1n-1}a_{1n}}{a_{11}}\eta_{n-1}\eta_n =$
$= a_{11}\eta_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^*\eta_i\eta_j$.

А потім розглянемо квадратичну форму $A'(x) = \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^*\eta_i\eta_j$ та робимо ті самі процедури, якщо $A'(x) \not\equiv 0$. При цьому координата η_1 не буде змінюватись. Кількість таких процедур буде скінченна, до n разів. Тоді ми й отримаємо бажаний результат:
$A(x) = \lambda_1\eta_1^2 + \dots + \lambda_n\eta_n^2$. (не обов'язково всі $\lambda_i \neq 0$).

Example 6.3.1 Маємо квадратичну форму $A(\vec{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$. Зведемо її до канонічного вигляду.
Маємо $a_{11} = 0$, але $a_{12} \neq 0$, тому робимо заміну $x_1 = x_1' - x_2'$, $x_2 = x_1' + x_2'$, $x_3 = x_3', x_4 = x_4'$.
$A(\vec{x}) = (x_1' - x_2')(x_1' + x_2') + (x_1' + x_2')x_3' + x_3'x_4' + x_4'(x_1' - x_2') = {x_1'}^2 - {x_2'}^2 + x_1'x_3' + x_2'x_3' + x_3'x_4' + x_4'x_1' - x_4'x_2'$.
Тепер коефіцієнт при ${x_1'}^2$ ненульовий, тому візьмемо всі доданки разом з x_1' та виділяємо квадрати:
${x_1'}^2 + x_1'x_3' + x_1'x_4' = {x_1'}^2 + 2x_1'\left(\frac{x_3'}{2} + \frac{x_4'}{2}\right) + \left(\frac{x_3'}{2} + \frac{x_4'}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_3'}{2} + \frac{x_4'}{2}\right)^2 =$
$= \left(x_1' + \left(\frac{x_3'}{2} + \frac{x_4'}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{x_3'}{2} + \frac{x_4'}{2}\right)^2 \boxed{=}$
Заміна: $y_1 = x_1' + \left(\frac{x_3'}{2} + \frac{x_4'}{2}\right)$, $y_2 = x_2', y_3 = x_3', y_4 = x_4'$
$\boxed{=} y_1^2 - \frac{y_3^2}{4} - \frac{y_4^2}{4} - \frac{1}{2}y_3y_4$.
Разом отримаємо $A(\vec{x}) = y_1^2 - y_2^2 + y_2y_3 - y_2y_4 - \frac{y_3^2}{4} - \frac{y_4^2}{4} + \frac{y_3y_4}{2}$.
Коефіцієнт при y_2^2 ненульовий, тому збираємо всі доданки разом з y_2 та виділяємо квадрати:
$-y_2^2 + y_2y_3 - y_2y_4 = -\left(y_2^2 + 2y_2\left(-\frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{2}\right) + \left(-\frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{2}\right)^2 - \left(-\frac{y_3}{2} + \frac{y_4}{2}\right)^2\right) =$
$= -\left(\left(y_2 + \left(\frac{-y_3}{2} + \frac{y_4}{2}\right)\right)^2 - \frac{y_3^2}{4} - \frac{y_4^2}{2} + \frac{y_3y_4}{2}\right) = -w_2^2 + \frac{w_3^2}{4} + \frac{w_4^2}{4} - \frac{w_3w_4}{2}$.
Разом отримаємо $A(\vec{x}) = w_1^2 - w_2^2 + \frac{w_3^2}{4} + \frac{w_4^2}{4} - \frac{w_3w_4}{2} - \frac{w_3^2}{2} - \frac{w_4^2}{4} + \frac{w_3w_4}{2}$
$\implies A(\vec{x}) = w_1^2 - w_2^2$.

Example 6.3.2 Спробуємо $A(\vec{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ звести до канонічного вигляду через матриці. Ми можемо нашу форму записати через матрицю $\mathbb{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Оскільки $a_{11} = 0$ та $a_{12} \neq 0$, то ми робимо заміну $x_1 = x_1' - x_2'$, $x_2 = x_1' + x_2'$ та $x_3 = x_3'$, $x_4 = x_4'$. Це буде означати, що ми переходимо з базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ до базису $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3', \vec{\ }_4'\}$, де $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, а решта $\vec{e}_3' = \vec{e}_3$, $\vec{e}_4' = \vec{e}_4$. Необхідна нам матриця виглядає так: $\mathbb{U}_{e' \to e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Звідси випливає, що $\mathbb{A}_{e'} = \mathbb{U}_{e' \to e}^T \mathbb{A}_e \mathbb{U}_{e' \to e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Оскільки тепер $a_{11} \neq 0$, то ми далі робимо заміну лише на першу координату: $y_1 = x'_1 + \left(\frac{1}{2}x'_3 + \frac{1}{2}x'_4\right)$.
Щоб було більш інтуїтивно, ми просто взяли всі числа першого рядка та помножили відповідно на x'_1, x'_2, x'_3, x'_4. Тоді ми отримаємо матрицю $\mathbb{U}_{e' \to y} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді звідси випливає, що

$\mathbb{A}_y = \mathbb{U}^T_{y \to e'} \mathbb{A}_{e'} \mathbb{U}_{y \to e'} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Оскільки тепер $a_{22} \neq 0$, то ми далі робимо заміну лише на другу координату: $w_2 = -y_2 + \frac{y_3}{2} - \frac{y_4}{2}$.
Аналогічним чином ми отримаємо $\mathbb{A}_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Саме ця матриця задає ту саму квадратичну форму $A(\vec{x}) = w_1^2 - w_2^2$.

6.3.2 Метод Якобі

Definition 6.3.3 Нехай задано матрицю $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.
Визначимо **кутові мінори** матриці $\mathbb{A}$ ось таким чином:

$$\Delta_1 = \det(a_{11}),\ \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \dots,\ \Delta_n = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Маємо квадратичну форму $A(x) = B(x,x)$, що відповідає матриці $\mathbb{A} = (a_{ij})$. Для методу Якобі вважаємо, що всі кутові мінори ненулеві. Побудуємо базис $\{f_1, \dots, f_n\}$, таким дивним чином:
$f_1 = e_1$
$f_2 = \alpha_{21}e_1 + e_2$
$\vdots$
$f_n = \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \dots + e_n$
де α_{21}, α_{31}, α_{32}, $\dots$ $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nn-1}$ – коефіцієнти-невідомі. Це дійсно базис, оскільки визначник коефіцієнтів ненулевий (попри те, що невідомі коефіцієнти).
Будемо шукати коефіцієнти за умовою, щоб $B(f_i, f_j) = 0,\ i < j$, тобто ці умови, завдяки яким квадратична форма стане канонічною.
Розглянемо поки що деякий вектор $f_j,\ j = \overline{2,n}$. Розпишемо рівняння $B(f_i, f_j) = 0$ для всіх можливих $i < j$.
$B(f_1, f_j) = B(e_1, f_j) = 0$.
$B(f_2, f_j) = B(\alpha_{21}e_1 + e_2, f_j) = \alpha_{21}B(e_1, f_j) + B(e_2, f_j) = B(e_1, f_j) = 0 \implies B(e_2, f_j) = 0$.
$B(f_3, f_j) = B(\alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + e_3, f_j) = \alpha_{31}B(e_1, f_j) + \alpha_{32}B(e_2, f_j) + B(e_3, f_j) = B(e_3, f_j) = 0 \implies B(e_3, f_j) = 0$
$\vdots$
$B(f_{j-1}, f_j) = B(\alpha_{j-1,1}e_1 + \alpha_{j-1,2}e_2 + \dots + e_{j-1}, f_j) = \alpha_{j-1,1}B(e_1, f_j) + \alpha_{j-1,2}B(e_2, f_j) + \dots + B(e_{j-1}, f_j) =$

$= \alpha_{j-1,1}B(f_1, f_j) + \alpha_{j-1,2}B(f_2, f_j) + \dots + B(e_{j-1}, f_j) = B(e_{j-1}, f_j) = 0 \implies B(e_{j-1}, f_j) = 0$.
Отримали систему $\begin{cases} B(e_1, f_j) = 0 \\ B(e_2, f_j) = 0 \\ \vdots \\ B(e_{j-1}, f_j) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_{11}\alpha_{j1} + a_{12}\alpha_{j2} + \dots + a_{1,j-1}\alpha_{j,j-1} = -a_{1j} \\ a_{21}\alpha_{j1} + a_{22}\alpha_{j2} + \dots + a_{2,j-1}\alpha_{j,j-1} = -a_{2j} \\ \vdots \\ a_{j-1,1}\alpha_{j1} + a_{j-1,2}\alpha_{j2} + \dots + a_{j-1,j-1}\alpha_{j,j-1} = -a_{j-1,j} \end{cases}$.

Зауважимо, що система має єдиний розв'язок, тому що ми маємо визначник коефіцієнтів, який відповідає кутовому мінору $\Delta_{j-1} \neq 0$. Зроблю заздалегідь таке позначення:
$\Delta^*_{j-1,i}$ – кутовий мінор, де замість i-го стовпчика буде стовпчик, що складається з чисел правої частини системи, тобто $-a_{1j}, -a_{2j}, \dots, -a_{j-1,j}$. Але я хочу переставити стовпчики таким чином, щоб другий індекс був по порядку, тобто $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j$ – такий визначник я позначу за $\Delta_{j-1,i}$. Тоді $\Delta^*_{j-1,i} = (-1)^{j-i}\Delta_{j-1,i} = (-1)^{j+i}\Delta_{j-1,i}$. Далі, формулою Крамера отримаємо:

$$\begin{cases} \alpha_{j1} = \dfrac{\Delta^*_{j-1,1}}{\Delta_{j-1}} = \dfrac{(-1)^{j+1}\Delta_{j-1,1}}{\Delta_{j-1}} \\ \alpha_{j2} = \dfrac{\Delta^*_{j-1,2}}{\Delta_{j-1}} = \dfrac{(-1)^{j+2}\Delta_{j-1,2}}{\Delta_{j-1}} \\ \vdots \\ \alpha_{j,j-1} = \dfrac{\Delta^*_{j-1,j-1}}{\Delta_{j-1}} = \dfrac{(-1)^{j+j-1}\Delta_{j-1,j-1}}{\Delta_{j-1}} \end{cases}$$

А далі робимо перехід до нового базису – отримаємо квадратичну форму канонічного вигляду:
$A(x) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \dots + \lambda_n\eta_n^2$.
Залишилось на основі знайдених коефіцієнтів знайти, чому дорівнюють λ_j.

$$\lambda_j = B(f_j, f_j) = B(\alpha_{j1}e_1 + \alpha_{j2}e_2 + \dots + \alpha_{j,j-1}e_{j-1} + e_j, f_j) = B(e_j, f_j) =$$
$$= B(e_j, \alpha_{j1}e_1 + \alpha_{j2}e_2 + \dots + \alpha_{j,j-1}e_{j-1} + e_j) = \alpha_{j1}a_{j1} + \alpha_{j2}a_{j2} + \dots + \alpha_{j,j-1}a_{j,j-1} + a_{jj} =$$
$$= \frac{(-1)^{j+1}\Delta_{j-1,1}}{\Delta_{j-1}}a_{j1} + \frac{(-1)^{j+2}\Delta_{j-1,2}}{\Delta_{j-1}}a_{j2} + \dots + \frac{(-1)^{j+j-1}\Delta_{j-1,j-1}}{\Delta_{j-1}}a_{j,j-1} + a_{jj} =$$
$$= \frac{1}{\Delta_{j-1}}\left((-1)^{j+1}a_{j1}\Delta_{j-1,1} + (-1)^{j+2}a_{j2}\Delta_{j-1,2} + \dots + (-1)^{j+j-1}a_{j,j-1}\Delta_{j-1,j-1} + (-1)^{j+j}a_{jj}\Delta_{j-1}\right) \boxed{=}$$

Якщо уважно придивитись, то в дужках записано розклад визначника, а точніше кутового мінору Δ_j, за j-м рядком.

$$\boxed{=} \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}.$$

Отже, для $j = \overline{2,n}$ маємо $\lambda_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}$.
Якщо $j = 1$, то $\lambda_1 = B(f_1, f_1) = B(e_1, e_1) = a_{11} = \Delta_1 \implies \lambda_1 = \Delta_1$.
Таким чином, ми отримали ось такий розклад в канонічному вигляді:
$A(x) = \Delta_1 x_1^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}x_2^2 + \dots + \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}x_n^2$.

Example 6.3.4 Маємо квадратичну форму $A(\vec{x}) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 - 16x_2x_3 + 5x_3^2$. Зведемо її до канонічного вигляду.
Матриця $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -8 \\ -2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$, кутові мінори $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = -4, \Delta_3 = -64$.
Таким чином, $q(\vec{y}) = y_1^2 - 4y_2^2 + 16y_3^2$.

6.4 Закон інерції квадратичних форм

Definition 6.4.1 Задано L – лінійний простір ($\dim L = n$) та A – канонічна квадратична форма. Така форма називається **нормальною**, якщо вона приймає такий вигляд:

$$A(x) = \xi_1^2 + \dots + \xi_k^2 - \xi_{k+1}^2 - \dots - \xi_m^2 + 0\xi_{m+1}^2 + \dots + 0\xi_n^2$$

Тобто коефіцієнти при ξ_i^2 приймає одне з трьох значень: $1, -1, 0$.

Remark 6.4.2 Ми вже можемо кожну квадратичну форму звести до канонічного вигляду. Але будь-яку канонічну форму можна нормалізувати (цілком зрозуміло як).

Theorem 6.4.3 Закон інерції
Задані L – лінійний простір та A – нормальна канонічна квадратична форма. Тоді кількість доданків з від'ємними та додатними коефіцієнтами не залежить від способу зведення до цієї форми.

Proof.
Маємо базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ в L, що має таке представлення: $A(x) = \xi_1^2 + \dots + \xi_k^2 - \xi_{k+1}^2 - \dots - \xi_{k+m}^2$.
Маємо базис $\{g_1, \dots, g_n\}$ в L, що має таке представлення: $A(x) = \eta_1^2 + \dots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \dots - \eta_{p+q}^2$.
Хочемо довести, що $k = p, m = q$. Оскільки ранг матриці в першому базисі збігається з рангом

другої матриці, то загальна кількість доданків однакова. Тобто нам досить довести $k = p$, тобто кількість додатних доданків в двух формах однакова.
!Припустимо, що $k > p$. Ми розглянемо простори $P = \mathrm{span}\{f_1, \dots, f_k\}$ та $N = \mathrm{span}\{g_{p+1}, \dots, g_n\}$. Ми знаємо, що $\dim P + \dim N = \dim(P + N) + \dim(P \cap N)$. Простір $N + P$ – це підпростір L (зрозуміло), тому $\dim(P + N) \leq \dim L = n$.
Отже, $k + (n - p) \leq n + \dim(P \cap N) \implies \dim(P \cap N) = k - p > 0 \implies P \cap N \neq \{0\}$.
Значить, існує деякий елемент $x \in P \cap N$.
Якщо $x \in P$, то $x = \gamma_1 f_1 + \dots + \gamma_k f_k \implies A(x) = \gamma_1^2 + \dots + \gamma_k^2 > 0$.
Якщо $x \in N$, то $x = \delta_{p+1} g_{p+1} + \dots + \delta_n g_n \implies A(x) = -\delta_{p+1} - \dots - \delta_{p+q} < 0$.
Тобто одночасно $A(x) > 0$ та $A(x) < 0$. Суперечність!
Таким чином, $k \leq p$. Аналогічно від супротивного можна довести, що $k \geq p$. Остаточно $k = p$. ■

Theorem 6.4.4 Задано L – лінійний простір, $\dim L = n$ та A – квадратична форма. Нехай p, q – відповідно кількість доданких з додатними, від'ємними коефіцієнтами к нормальній канонічній формі.
A – додатноозначена $\iff p = n$.
A – від'ємноозначена $\iff q = n$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – додатноозначена, тобто $A(x) > 0$.
!Припустимо, що $p < n$. Тобто квадратична форма має вигляд $A(x) = \eta_1^2 + \dots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \dots - \eta_l^2$. Тоді існує елемент $x = 0f_1 + \dots + 0f_p + \beta_{p+1} f_{p+1} + \dots + \beta_n f_n$, для якого $A(x) = -\eta_{p+1}^2 - \dots - \eta_l^2 \leq 0$. Суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $p = n$, тобто квадратична форма має вигляд $A(x) = \eta_1^2 + \dots + \eta_n^2$. Зрозуміло, що $\forall x \in L : A(x) > 0$, а $A(x) = 0 \iff \eta_i = 0, i = \overline{1, n}$, тобто це можливо лише для $x = 0$.
Отже, A – додатноозначена.

Абсолютно аналогічні міркування для другого випадку теореми. ■

Theorem 6.4.5 Критерій Силвестра

Задано L - лінійний простір та A – квадратична форма, яка має матрицю $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.
A – додатноозначена $\iff \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.
A – від'ємноозначена $\iff -\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$.
де $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ – кутові мінори матриці $\mathbb{A}$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – додатноозначена. Розкладемо її за методом Якобі, але спочатку треба попіклуватись про те, що $\Delta_i \neq 0, i = \overline{1, n}$.
!Припустимо, що існує $\Delta_k = 0$. Тоді система нижче має ненульовий розв'язок $\vec{\xi} \neq \vec{0}$:

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + \dots + a_{1k}\xi_k = 0 | \cdot \xi_1 \\ \vdots \\ a_{k1}\xi_1 + \dots + a_{kk}\xi_k = 0 | \cdot \xi_k \end{cases} \implies \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}\xi_i\xi_j = 0.$$

Тоді якщо візьмемо елемент $x = \xi_1 f_1 + \dots + \xi_k f_k \in L$, то звідси $A(x) = 0$. Суперечність!
Таким чином, $\forall i = \overline{1, n} : \Delta_i \neq 0$. А тепер запишемо квадратичну форму в канонічному вигляді:
$A(x) = \Delta_1 x_1^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \dots + \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2$.
Отже, за попередньою теоремою, всі коефіцієнти додатні, власне звідси $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$. Запишемо квадратичну форму A методом Якобі:
$A(x) = \Delta_1 x_1^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \dots + \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2$.
Оскільки всі коефіцієнти додатні, то за попередньою теоремою, A – додатноозначена. ■

6.5 Квадратичні форми в евклідовому просторі

Theorem 6.5.1 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідів простір та $B(x, y)$ – симетрична білінійна форма. Тоді існує $\{e_1, \dots, e_n\}$ – ортонормований базис, для якого квадратична форма $A(x) = B(x, x)$ запишеться таким чином:
$A(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2$, де λ_k – власні числа.

Proof.
Оскільки B – білінійна форма, то за теоремою Ріса, $\exists A : E \to E$, для якого $B(x, y) = (Ax, y)$. Причому A – самоспряжений оператор. За спектральною теоремою, існує ортонормований базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ із власних векторів оператора A.
Маємо $x \in E \implies x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$. Тоді $Ax = \lambda_1 \xi_1 e_1 + \dots + \lambda_n \xi_n e_n$. Лишилось записати квадратичну форму

$A(x) = (Ax, x) = (\lambda_1 \xi_1 e_1 + \dots + \lambda_n \xi_n e_n, \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2$. ■

6.6 Півторалінійні форми та квадратичні форми (узагальнення)

Definition 6.6.1 Задано L – лінійний простір (уже суто комплексний).
Півторалінійною формою будемо називати півторалінійний функціонал $A \colon L \times L \to \mathbb{C}$. (див. **Def. 5.1.1**)

Definition 6.6.2 Задано L – комплексний лінійний простір та A – півторалінійна форма.
Півторалінійна форма називається **ермітовою (hermitian)**, якщо

$$A(x, y) = \overline{A(y, x)}$$

Задамо L – комплексний лінійний простір, $\{f_1, \dots, f_n\}$ – базис та S – півторалінійна форма.
$x \in L \implies x = \xi_1 f_1 + \dots + \xi_n f_n$
$y \in L \implies y = \eta_1 f_1 + \dots + \eta_n f_n$
$S(x, y) = S(\xi_1 f_1 + \dots + \xi_n f_n, \eta_1 f_1 + \dots + \eta_n f_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} s_{ij}$, де $s_{ij} = S(f_i, f_j)$.
Таким чином, півторалінійну форму можна задати однозначно формулою:

$$S(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} s_{ij}$$

Формулу можна записати в матричному вигляді:

$$S(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} s_{ij} = \xi_1 \left(\overline{\eta_1} s_{11} + \overline{\eta_2} s_{12} + \dots + \overline{\eta_n} s_{1n} \right) + \dots + \xi_n \left(\overline{\eta_1} s_{n1} + \overline{\eta_2} s_{n2} + \dots + \overline{\eta_n} s_{nn} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\eta_1} s_{11} + \overline{\eta_2} s_{12} + \dots + \overline{\eta_n} s_{1n} \\ \overline{\eta_1} s_{12} + \overline{\eta_2} s_{22} + \dots + \overline{\eta_n} s_{2n} \\ \vdots \\ \overline{\eta_1} s_{n1} + \overline{\eta_2} s_{n2} + \dots + \overline{\eta_n} s_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\eta_1} \\ \overline{\eta_2} \\ \vdots \\ \overline{\eta_n} \end{pmatrix}$$

Позначимо також $\mathbb{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$. Тоді отримаємо таку форму:

$$S(x, y) = \boldsymbol{\xi}^T \mathbb{S} \overline{\boldsymbol{\eta}}$$

де $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ та $\overline{\boldsymbol{\eta}} = \overline{\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}}$.
Відповімо на питання, чи є такий розклад єдиним.
!Припускаємо, що існує деяка інша матриця $\widetilde{\mathbb{S}}$, для якої $S(x, y) = \boldsymbol{\xi} \widetilde{\mathbb{S}} \overline{\boldsymbol{\eta}}$. Тоді $\boldsymbol{\xi}^T \widetilde{\mathbb{S}} \overline{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\xi} \mathbb{S} \overline{\boldsymbol{\eta}}$, рівність виконана $\forall x, y \in L$. Підставимо тоді f_i та f_j – отримаємо $\widetilde{s_{ij}} = s_{ij}$. Суперечність!

Висновок: будь-яку півторалінійну форму в деякому базисі представляється матрицею єдиним чином.

Поставимо зворотне питання: чи задають матриці півторалінійні форми в заданому базисі?
Нехай $\{f_1, \dots, f_n\}$ – базис L та матриця $\mathbb{S}$ задані. Встановимо форму $S(x,y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} s_{ij}\xi_i\overline{\eta_j}$.
Зрозуміло, що дана форма є півторалінійною.
Висновок: будь-яка матриця задає півторалінійну форму в деякому базисі.

Remark 6.6.3 При ермітовій півторалінійній формі отримаємо $s_{ij} = \overline{s_{ji}}$ – **ермітову матрицю** $\mathbb{S}$.

Задамо L – лінійний простір, $\{f_1, \dots, f_n\}$, $\{g_1, \dots, g_n\}$ – два різних базиса та S – півторалінійну форму.
У базисі $\{f_1, \dots, f_n\}$ півторалінійна форма задається $S_1(x,y) = \boldsymbol{\xi}_f^T \mathbb{S}_f \overline{\boldsymbol{\eta}_f}$.
У базисі $\{g_1, \dots, g_n\}$ півторалінійна форма задається $S_2(x,y) = \boldsymbol{\xi}_g^T \mathbb{S}_g \overline{\boldsymbol{\eta}_g}$.
Припустимо, що $\mathbb{S}_g$ задана. Мета: знайти півторалінійну форму S_1, тобто $\mathbb{S}_f$.
Але ми знаємо, що ми можемо побудувати матрицю переходу $\mathbb{U}_{f\to g}$, тоді $\mathbb{U}_{f\to g}\boldsymbol{\xi}_f = \boldsymbol{\xi}_g \implies$
$\boldsymbol{\xi}_g^T = \boldsymbol{\eta}_f^T \mathbb{U}_{f\to g}^T \qquad \mathbb{U}_{f\to g}\boldsymbol{\eta}_f = \boldsymbol{\eta}_g$.
Підставимо ці два значення в друге рівняння півторалінійної форми. Отримаємо:
$S_2(x,y) = \boldsymbol{\xi}_g^T \mathbb{S}_g \overline{\boldsymbol{\eta}_g} = \boldsymbol{\xi}_f^T \mathbb{U}_{f\to g}^T \mathbb{S}_g \overline{\mathbb{U}_{f\to g}}\overline{\boldsymbol{\eta}_f} \overset{*}{=} S_1(x,y)$.
У силу єдиного представлення форми через матрицю та рівності (*) отримаємо:

$$\mathbb{S}_f = \mathbb{U}_{f\to g}^T \mathbb{S}_g \overline{\mathbb{U}_{f\to g}}$$

Corollary 6.6.4 $\operatorname{rank}\mathbb{S}_f = \operatorname{rank}\mathbb{S}_g$.

Definition 6.6.5 Задано L – лінійний простір та S – півторалінійна білінійна форма.
Квадратичною формою називають форму $A\colon L \to \mathbb{C}$, що приймає такий вигляд:

$$A(x) = S(x,x)$$

Remark 6.6.6 Як і в випадку білінійних форм, за квадратичною формою ми не зможемо однозначно поставити в відповідність півторалінійну форму. Треба обмеження.

Proposition 6.6.7 Поляризаційна формула
Задано L – лінійний простір та $A(x) = S(x,x)$ – квадратична форма від ермітової півторалінійної форми S. Тоді $4S(x,y) = A(x+y) - A(x-y) + i(A(x+iy) - A(x-iy))$.
Вказівка: розписати праву частину рівності.

Proof.
Ми спочатку розпишемо детально $A(x+y)$ – отримаємо наступне:
$A(x+y) = S(x+y,x+y) = S(x,x) + S(x,y) + \overline{S(x,y)} + S(y,y) = A(x) + A(y) + 2\operatorname{Re}S(x,y)$.
Отже, $2\operatorname{Re}S(x,y) = A(x+y) - A(x) - A(y)$ – відновили дійсну частину.
Так само розпишемо детально $A(x+iy)$ – отримаємо наступне:
$A(x+iy) = S(x+iy,x+iy) = S(x,x) + S(x,iy) + \overline{S(x,iy)} + S(iy,iy) = A(x) - A(y) + 2\operatorname{Re}S(x,iy)$.
Отже, $-2\operatorname{Im}S(x,y) = 2\operatorname{Re}S(x,iy) = A(x+iy) - A(x) - A(y)$ – відновили уявну частину.
Тепер для дійсної частини зауважимо наступне:
$2\operatorname{Re}S(x,y) = A(x+y) - A(x) - A(y)$;
$2\operatorname{Re}S(x,-y) = A(x-y) - A(x) - A(y)$ (ми тут замість y підставили $-y$).
Легко цілком бачити, що $\operatorname{Re}S(x,-y) = -\operatorname{Re}S(x,y)$. Якщо від першого відняти друге, отримаємо:
$4\operatorname{Re}S(x,y) = A(x+y) - A(x-y)$.
Тепер для уявної частини зауважимо наступне:
$2\operatorname{Im}S(x,y) = -A(x+iy) + A(x) + A(y)$;
$2\operatorname{Im}S(x,-y) = -A(x-iy) + A(x) + A(y)$ (ми тут замість y підставили $-y$).
Знову бачимо, що $\operatorname{Im}S(x,-y) = -\operatorname{Im}S(x,y)$. Від першого віднімаємо друге – отримаємо:
$4\operatorname{Im}S(x,y) = A(x+iy) - A(x-iy)$.
Нарешті, $4S(x,y) = 4\operatorname{Re}S(x,y) + i\cdot 4\operatorname{Im}S(x,y)$ – отримаємо поляризаційну рівність. ∎

Theorem 6.6.8 Існує взаємно однозначна відповідність між ермітовими півторалінійними формами та квадратичними формами.

Proof.
Маємо $S_{\text{herm}}(x,y)$ – ермітова. Підставимо $y = x$, то тоді $S_{\text{herm}}(x,x) = A(x)$ – отримали квадратичну форму.
Маємо квадратичну форму $A(x)$. Використовуючи поляризаційну формулу, ми отримаємо $4S_{\text{herm}}(x,y) = A(x+y) - A(x-y) + i(A(x+iy) - A(x-iy))$ – отримали (а точніше відновили) ермітову півтора-лінійну форму.

Таким чином, ми побудували взаємну однозначність $A(x) \underset{\text{побудова}}{\overset{\text{поляризаційна ф-ла}}{\rightleftarrows}} S_{\text{herm}}(x,y)$ ■

Remark 6.6.9 Надалі, визначаючи квадратичну форму, ми будемо ставити ермітову півторалінійну форму.

Із означення ермітової квадратичної форми випливає, що квадратична форма в базисі $\{f_1, \dots, f_n\}$ простору L може бути записана так:

$$A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \overline{\xi_j}$$

де $a_{ij} = S_{\text{herm}}(f_i, f_j)$. Кожній квадратичній формі відповідає ермітова матриця

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тоді квадратична форма записується і ось так:

$$A(x) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x}$$

Зауважимо, що $a_{ij} = a_{ji}$ в силу ермітовості півторалінійної форми – отримали так звану **ермітову матрицю**. Зауважимо, що $\overline{\mathbb{A}^T} = \mathbb{A}$ в такому разі.

Remark 6.6.10 Варто зазначити, що якщо $A(x) = S(x,x)$ – квадартична форма від ермітової півторалінійної форми S, то тоді A прийматиме лише дійсні значення.
Справді, маємо $A(x) = S(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\xi_j} s_{ij}$. Маємо $s_{ji} = \overline{s_{ij}}$. Розглянемо такі доданки:
$\xi_i \overline{\xi_j} s_{ij} + \xi_j \overline{\xi_i} s_{ji} = \xi_i \overline{\xi_j} s_{ij} + \overline{\xi_i \overline{\xi_j} s_{ij}} = 2\,\text{Re}(\xi_i \overline{\xi_j} s_{ij}) \in \mathbb{R}$.
$\xi_i \overline{\xi_i} s_{ii} = \xi_i^2 s_{ii} \in \mathbb{R}$ (оскільки $s_{ii} = \overline{s_{ii}}$, то $s_{ii} \in \mathbb{R}$).
Отже, якщо просумувати всі доданки, то отримаємо, що $\forall x \in L : A(x) \in \mathbb{R}$ для ермітової форми.

Definition 6.6.11 Задано L – лінійний простір та $A(x) = S(x,x)$ – квадратична форма від ермітової півторалінійної форми S. Квадратична форма називається:
- **додатноозначеною**, якщо $\forall x \in L : x \neq 0 : A(x) > 0$;
- **від'ємноозначеною**, якщо $\forall x \in L : x \neq 0 : A(x) < 0$.
Одна з двох форм у такому разі називається **знакоозначеними**.

Квадратична форма називається **знакозмінною**, якщо $\exists x, y \in L : A(x) > 0, A(y) < 0$.
Квадратична форма називається **квазізнакоозначеною**, якщо $\forall x \in L : A(x) \geq 0$ (або $A(x) \leq 0$), але при цьому $\exists x^* \in L : x^* \neq 0 : A(x^*) = 0$.

Remark 6.6.12 Нехай $A = S(x,x)$ – квадратична форма від ермітової півторалінійної форми S. Для A метод Лагранжа та метод Якобі працює абсолютно аналогічним чином, як це було при квадратичних формах, яким відповідають білінійна форма. Тобто ми можемо звести до канонічного вигляуд.
Також справедливий закон інерції для A.
А це означатиме врешті-решт, що для A працюватиме критерій Силвестра. Я це все уже вставляти не буду в даний розділ.

6.7 Зведення кривих та поверхонь 2-го порядку до канонічного вигляду

Маємо загальний вигляд кривої другого порядку:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

Розглянемо квадратну частину:
$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2 = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\right)$ - квадратична форма, а матриця $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$ - відповідно самоспряжена матриця.

Також маємо загальний вигляд поверхну другого порядку:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

Аналогічно розглянемо квадратну частину:
$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}\right)$ - квадратична форма, зі самоспряженою матрицею $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$.

Тоді рівняння кривої (випадок $\mathbb{R}^2$) та поверхні (випадок $\mathbb{R}^3$) другого порядку записується таким чином:
$(\vec{x}, A\vec{x}) + (\vec{b}, \vec{x}) + c = 0.$
Це рівняння зведемо до канонічного вигляду:
1. Оскільки A - самоспряжений, то існує ортонормований базис із власних векторів A.
U - унітарна матриця переходу: $\mathbb{A} = U\mathbb{A}_{\text{diag}}U^*$. Тоді маємо:
$(A\vec{x}, \vec{x}) = (UA_{\text{diag}}U^*\vec{x}, \vec{x}) = (A_{\text{diag}}U^*\vec{x}, U^*\vec{x}) = (A_{\text{diag}}\vec{y}, \vec{y}) = \left[\begin{array}{c} \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 \\ \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2 \end{array}\right.$

2. $(\vec{b}, \vec{x}) = (U^*\vec{b}, U^*\vec{x}) = (U^*\vec{b}, \vec{y})$. Знаходимо $\tilde{\vec{b}} = U^*\vec{b}$, тоді
$(\vec{b}, \vec{x}) = (\tilde{\vec{b}}, \vec{y}) = \left[\begin{array}{c} \widetilde{b_1}y_1 + \widetilde{b_2}y_2 \\ \widetilde{b_1}y_1 + \widetilde{b_2}y_2 + \widetilde{b_3}y_3 \end{array}\right.$
Остаточно отримаємо:
$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2 + \widetilde{b_1}y_1 + \widetilde{b_2}y_2 + \widetilde{b_3}y_3 + c = 0.$

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$. Тоді виділимо повні квадрати:
$\lambda_1\left(y_1 + \frac{\widetilde{b_1}}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_2 + \frac{\widetilde{b_2}}{2\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(y_3 + \frac{\widetilde{b_3}}{2\lambda_3}\right)^2 = -c + \frac{\widetilde{b_1}^2}{4\lambda_1} + \frac{\widetilde{b_2}^2}{4\lambda_2} + \frac{\widetilde{b_3}^2}{4\lambda_3}$
Зробимо заміни:
$z_1 = y_1 + \frac{\widetilde{b_1}}{2\lambda_1} \quad z_2 = y_2 + \frac{\widetilde{b_2}}{2\lambda_2} \quad z_3 = y_3 + \frac{\widetilde{b_3}}{2\lambda_3} \quad \widetilde{c} = -c + \frac{\widetilde{b_1}^2}{4\lambda_1} + \frac{\widetilde{b_2}^2}{4\lambda_2} + \frac{\widetilde{b_3}^2}{4\lambda_3}$
Отримаємо:
$\lambda_1z_1^2 + \lambda_2z_2^2 + \lambda_3z_3^2 = \widetilde{c}.$

Випадок, коли лише $\lambda_1 = 0$. Тоді робимо ті самі процедури та отримаємо:
$\lambda_2\left(y_2 + \frac{\widetilde{b_2}}{2\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(y_3 + \frac{\widetilde{b_3}}{2\lambda_3}\right)^2 + \widetilde{b_1}y_1 = -c + \frac{\widetilde{b_1}^2}{4\lambda_1} + \frac{\widetilde{b_2}^2}{4\lambda_2} + \frac{\widetilde{b_3}^2}{4\lambda_3}$
Зробимо заміни:
$z_2 = y_2 + \frac{\widetilde{b_2}}{2\lambda_2} \quad z_3 = y_3 + \frac{\widetilde{b_3}}{2\lambda_3} \quad \widetilde{c} = -c + \frac{\widetilde{b_2}^2}{4\lambda_2} + \frac{\widetilde{b_3}^2}{4\lambda_3} \quad z_1 = y_1 - \frac{\widetilde{c}}{\widetilde{b_1}}$
$\lambda_2z_2^2 + \lambda_3z_3^2 + \widetilde{b_1}z_1 = 0$ - а це є параболоїдом.
Випадок $\widetilde{b_1} = 0$: в $\mathbb{R}^3$ - циліндр, а в $\mathbb{R}^2$ - пара прямих.

Випадок, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (це вже лише для $\mathbb{R}^3$):

$\lambda_3 y_3^2 + \widetilde{b_1} y_1 + \widetilde{b_2} y_2 + \widetilde{b_3} y_3 + c = 0$
Виникає одна мрія: $\widetilde{b_1} = 0$
$\widetilde{\vec{b}} = U^* \vec{b}$
$U = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$, де $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ - власні числа для $\lambda_1 = \lambda_2$, а $\vec{f_3}$ - для $\lambda_3 \neq 0$

$$U^* \vec{b} = \begin{pmatrix} \overleftarrow{f_1} \cdot \vec{b} \\ \overleftarrow{f_2} \cdot \vec{b} \\ \overleftarrow{f_3} \cdot \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{f_1}, \vec{b}) \\ (\vec{f_2}, \vec{b}) \\ (\vec{f_3}, \vec{b}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{b_1} \\ \widetilde{b_2} \\ \widetilde{b_3} \end{pmatrix}$$

Щоб здійснити мрію, треба, щоб $(\vec{f_1}, \vec{b}) = 0$
Знаходимо $\vec{f_3}$ - власний для λ_3
Тоді $\mathrm{span}\{e_3\}^{\perp}$ - простір власних векторів для $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
Тоді $\vec{f_1} = [\vec{f_3}, \vec{b}] \perp \vec{b} \Rightarrow \widetilde{b_1} = 0$
f_1 - власний для $\lambda = 0$ та $f_2 = [\vec{f_1}, \vec{f_3}] \perp \vec{f_1}, \vec{f_3}$
Параметризуємо $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ - отримаємо ортонормований базис

U - матриця перехода $\widetilde{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{b_2} \\ \widetilde{b_3} \end{pmatrix}$

Тоді:
$\lambda_3 y_3^2 + \widetilde{b_3} y_3 + \widetilde{b_2} y_2 + c = 0$

$$\lambda_3 \left(y_3 + \frac{\widetilde{b_3}}{2\lambda_3} \right)^2 + \widetilde{b_2} \left(y_2 + \frac{c - \frac{\widetilde{b_3}^2}{4\lambda_3}}{\widetilde{b_2}} \right) = 0$$

Зробимо заміни:

$$z_1 = y_1 \qquad z_2 = y_2 + \frac{c - \frac{\widetilde{b_3}^2}{4\lambda_3}}{\widetilde{b_2}} \qquad z_3 = y_3 + \frac{\widetilde{b_3}}{2\lambda_3}$$

Отримаємо:
$\lambda_3 z_3^2 + \widetilde{b_2} z_2 = 0$ - а це є параболічним циліндром
При $\widetilde{b_2} = 0$ отримаємо пару площин.

$\blacksquare$