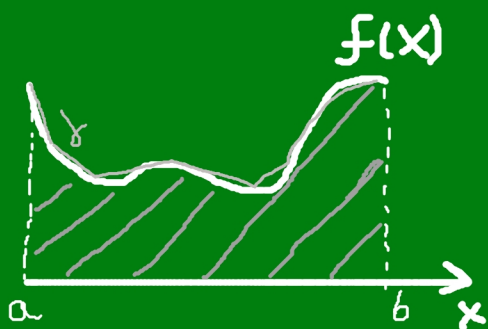
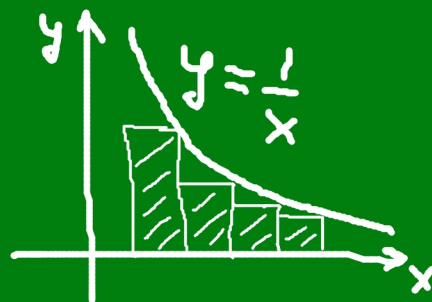


Real analysis II



$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = +\infty$$

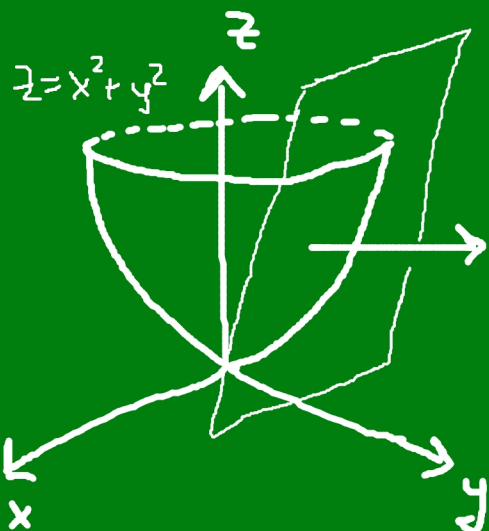
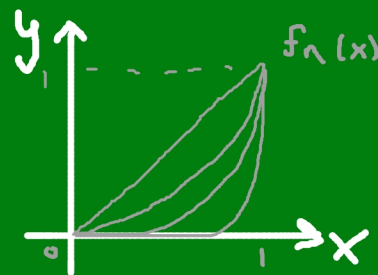


$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots = -\ln 2$$

$$-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots = -\frac{3}{2} \ln 2$$

$$\{f_n(x) = x^n, n \geq 1\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$$



$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Зміст

1	Невизначений інтеграл	4
1.1	Первісна, основні означення невизначеного інтегралу	4
1.2	Заміна змінної	5
1.3	Інтегрування частинами	6
1.4	Інтегрування дробово-раціональних функцій	6
1.5	Інтегрування тригонометричних функцій	8
1.6	Інтегрування ірраціональних виразів	9
1.7	Диференціальний біном	10
2	Визначений інтеграл	11
2.1	Підхід Рімана	11
2.2	Суми Дарбу	12
2.3	Існування інтеграла	14
2.4	Класи інтегрованих функцій	15
2.5	Властивості інтегралів	17
2.6	Інтеграл як функція верхньої межі	19
2.7	Обчислення визначених інтегралів	22
2.7.1	Заміна змінної	22
2.7.2	Інтегрування частинами	23
2.8	Застосування визначеного інтеграла	24
2.8.1	Площа криволінійної трапеції	24
2.8.2	Площа криволінійного сектора	25
2.8.3	Крива, яка спрямовується	26
2.8.4	Об'єм тіла обертання	27
3	Невласні інтеграли	31
3.1	Основні означення	31
3.2	Властивості	32
3.3	Дослідження на збіжність/розбіжність	34
3.3.1	Дослідження для додатних функцій	34
3.3.2	Дослідження для знакодовільних функцій	36
3.4	Особливі випадки	38
3.5	Невласний інтеграл в сенсі головного значення по Коші	39
4	Ряди	41
4.1	Первинний аналіз збіжності та арифметика рядів	41
4.2	Знакододатні ряди	43
4.3	Знакозмінні ряди	48
4.4	Трошки детально про абсолютно збіжні ряди	50
4.5	Трошки про умовно збіжні ряди	52
4.6	Добуток Коші	54
4.7	Нескінченні добутки	56
5	Функціональні ряди	59
5.1	Функціональні послідовності	59
5.2	Функціональні ряди	63
5.3	Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів	65
5.4	Степеневі ряди	67
5.5	Ряди Тейлора	69
6	Інтеграл Рімана-Стільтєса	72
6.1	Коротко про монотонні функції	72
6.2	Функції обмеженої варіації	74
6.3	Деякі додаткові твердження з функціями обмеженими варіаціями	76
6.4	Інтеграл Стільтєса	77
6.4.1	Означення за Ріманом	77
6.4.2	Означення за Дарбу	77

6.5	Існування інтеграла	78
6.6	Класи інтегрованих функцій	78
6.7	Властивості інтегралів	78
6.8	Інтеграл відносно функції обмеженої варіації	79
6.9	Обчислення інтеграла Стілтєса	79
6.10	Граничний перехід в інтегралі Стілтєса	80
7	Вступ до \mathbb{R}^m (багатовимірний математичний аналіз)	81
7.1	Про простір \mathbb{R}^m	81
7.2	Топологія та принцип аналізу в \mathbb{R}^m	82
7.3	Границя послідовності	84
7.4	Функція від декількох змінних. Границя функції	86
7.5	Неперервність функції	88
7.6	Символіка Ландау	89
7.7	Границя та неперервність векторнозначної функції кількох змінних, символіка Ландау	91
7.8	Крива в \mathbb{R}^m	92
8	Диференційованість	93
8.1	Для функції із багатьма змінними	93
8.2	Для векторнозначних функцій	96
8.3	Похідна за напрямком. Градієнт	98
8.4	Неявно задані функції	99
8.5	Обернені функції	101
8.6	Геометричне та алгебраїчне застосування	102
	8.6.1 Дотична площина, нормальна пряма поверхні	102
	8.6.2 Дотична пряма, нормальна площина кривої	103
	8.6.3 Приблизне обчислення	104
8.7	Диференціювання та похідні старших порядків	104
8.8	Формула Тейлора	108
8.9	Локальні екстремуми	109
8.10	Умовні локальні екстремуми	111

1 Невизначений інтеграл

У рамках даного розділу розглядатимуться множини I, J , що будуть проміжками одного з типів: $[a, b], (a, b), (a, b]$, причому можливий нескінченний проміжок.

1.1 Первісна, основні означення невизначеного інтегралу

Definition 1.1.1 Первісною для функції $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ називають функцію $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, для якої

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x)$$

Example 1.1.2 Зокрема $F(x) = x^2$ - первісна функції $f(x) = 2x$ на $I = \mathbb{R}$.

Example 1.1.3 Зокрема $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$ - первісна функції $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ на $I = \mathbb{R}$.

Proposition 1.1.4 Якщо $F(x), \Phi(x)$ - первісні для $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + C$.

Випливає з наслідків теореми Лагранжа.

Remark 1.1.5 Не кожна функція може мати первісну. Зокрема $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не має первісної на $I = [-1, 1]$.

Припустимо, що f має первісну F , тоді обов'язково $F \in C((-1, 1))$. Оберемо $0 < x < 1$ та застосуємо теорему Лагранжа:

$$F(x) - F(0) = \operatorname{sgn} \xi \cdot (x - 0) = x, \text{ де } \xi \in (0, x). \text{ Таким чином, } \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1.$$

При $x \rightarrow 0 + 0$ отримаємо $F'(0 + 0) = 1$, але водночас $F'(0) = F'(0 + 0) = 0$. Суперечність!

Definition 1.1.6 Множину всіх первісних для функції $f(x)$ називають **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$.

Позначення: $\int f(x) dx = \{F(x) : F'(x) = f(x)\}$.

Remark 1.1.7 Але враховуючи твердження вище, ми можемо записувати одну з первісних, тобто $\int f(x) dx = F(x) + C$, де F - первісна функції f .

Example 1.1.8 $\int 2x dx = \{x^2 + C | C \in \mathbb{R}\}$.

Оскільки є якась первісна, то можна записати як $\int 2x dx = x^2 + C$.

Proposition 1.1.9 Властивості

1) $\int f'(x) dx = f(x) + C$;

2) $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$;

Далі задамо функції f, g , які мають відповідно первісні F, G . Тоді:

3) αF - первісна для функції αf , причому $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$;

4) $F + G$ - первісна для функції $f + g$, причому $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

Proof.

1), 2) випливають з означення.

3) Якщо F - первісна функції f , то тоді αF - первісна функції αf , тому що $(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$.

Отже, $\int \alpha f(x) dx = \alpha F(x) + C = \alpha (F(x) + C^*) = \alpha \int f(x) dx$.

4) Якщо F, G - первісні відповідно функції f, g , то $F + G$ - первісна функції $f + g$, тому що $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.

Отже, $\int f(x) + g(x) dx = F(x) + G(x) + C = F(x) + C^* + G(x) + C^{**} = \int f(x) dx + \int g(x) dx$. ■

Remark 1.1.10 Підінтегральний вираз $f(x) dx$ варто розглядати як диференціал функції $F(x)$, тобто

$$\int f(x) dx = F(x) + C \iff d(F(x) + C) = f(x) dx$$

Remark 1.1.11 Взагалі-то кажучи, символ $\int f(x) dx$ можна також використовувати, щоб позначити як первісну функції f , якщо не можна записати F як функцію.

Зокрема $\int e^{-x^2} dx$ - первісна функції e^{-x^2} , проте записати як функцію від змінної не можна.

Таблиця первісних

$f(x)$	$F(x)$
1	x
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2+1})$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$

Example 1.1.12 Обчислимо $\int (x+2)^2 + \operatorname{tg}^2 x dx$.

Робити будемо це, використовуючи таблицю первісних та властивості інтегралів.

$$\begin{aligned} \int (x+2)^2 + \operatorname{tg}^2 x dx &= \int x^2 + 4x + 4 + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \int x^2 dx + 4 \int x dx + 3 \int 1 dx + \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

1.2 Заміна змінної

Theorem 1.2.1 Задано функцію $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, має первісну F ; функцію $g: J \rightarrow I$ - диференційована. Тоді $(f \circ g)g'$ має первісу $F \circ g$ на J , причому

$$\int (f \circ g)(x)g'(x) dx = \int f(t) dt.$$

Proof.

Дійсно, $F \circ g$ - первісна для $(f \circ g)g'$, оскільки $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$.

Отже, $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(g(x)) dg(x) = \int f(t) dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$. ■

Example 1.2.2 Обчислити $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

$\int \frac{1}{x \ln x} dx \equiv$ Проведемо заміну: $\ln x = t$. Тоді $\frac{1}{x} dx = dt$
 $\equiv \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |\ln x| + C$

1.3 Інтегрування частинами

Theorem 1.3.1 Задані функції $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ - обидва диференційовані. Відомо, що $u'v$ має первісну. Тоді uv' також має первісну, причому

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

Proof.

Ми знаємо, що $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \implies u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u(x)v'(x)$.

Функції $(uv)'$, uv' мають первісну, одна дорівнює uv , а інша просто за умовою. Тоді $(uv)' - uv' = uv'$ теж має первісну та дорівнює:

$$\int u(x)v'(x) dx = \int (u(x)v(x))' - u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx. \quad \blacksquare$$

Remark 1.3.2 Більш зручно записати таку формулу: $\int u dv = uv - \int v du$.

Example 1.3.3 Обчислити $\int x^2 e^x dx$.

$$\int x^2 e^x dx \equiv$$

Робимо заміну $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$ $e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$

$$\equiv x^2 e^x - \int 2x e^x dx \equiv$$

Знову заміну $u = 2x \Rightarrow du = 2 dx$ $e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$

$$\equiv x^2 e^x - (2x e^x - \int 2e^x dx) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

1.4 Інтегрування дробово-раціональних функцій

Розглянемо $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, де $P(x), Q(x)$ - многочлени з дійсними коефіцієнтами. Є два випадки:

I. $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$

Тоді можемо поділити їх з остачею: $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$.

$$\text{А тому } \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

,де $S(x)$ - деякий многочлен, який можна проінтегрувати таблицею, а також $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$.

Зараз буде пункт, як такий випадок інтегрувати.

II. $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$

За наслідком основної теореми алгебри, розкладемо $Q(x)$ таким чином:

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}.$$

Причому дискримінант квадратних трьохчленів - від'ємний.

Тоді за теоремоюдесь із курсу ліналу, ми можемо $\frac{R(x)}{Q(x)}$ записати як суму простих дробів:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - a_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{m1}}{x - a_m} + \dots + \frac{A_{mk_m}}{(x - a_m)^{k_m}} +$$

$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + p_s x + q_s} + \dots + \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}}.$$

Коротше, залишається розглянути 4 вигляди інтегралу:

$$1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

$$3) \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx \equiv$$

$$\text{Знаменник розпишу як } x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}.$$

$$\text{Зробимо заміну: } x + \frac{p}{2} = t \Rightarrow dx = dt$$

$$\text{Також } Bx+C = Bt - B\frac{p}{2} + C.$$

$$\text{Перепозначення: } \frac{4q-p^2}{4} = a^2 > 0 \quad C - B\frac{p}{2} = M.$$

$$\equiv \int \frac{Bt+M}{t^2+a^2} dt = B \int \frac{t}{t^2+a^2} dt + M \int \frac{1}{t^2+a^2} dt \equiv$$

$$\int \frac{t}{t^2+a^2} dt = \frac{dt^2}{2(t^2+a^2)} = \frac{1}{2} \ln|t^2+a^2|$$

$$\int \frac{1}{t^2+a^2} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1+(\frac{t}{a})^2} dt = \frac{1}{a} \int \frac{d\frac{t}{a}}{1+(\frac{t}{a})^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$$

$$\equiv \frac{B}{2} \ln|t^2+a^2| + \frac{M}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

Ну а далі робимо зворотню заміну - інтеграл розв'язаний.

$$4) \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l} dx \equiv$$

Тут робимо ті самі заміни, що в 3)

$$\equiv \int \frac{Bt+M}{(t^2+a^2)^l} dt = B \int \frac{t}{(t^2+a^2)^l} dt + M \int \frac{1}{(t^2+a^2)^l} dt$$

Ну і тут я ланцюг рівностей зупиню, якщо перший інтеграл - ще ок, то другий - це дупа

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^l} dt = \int \frac{dt^2}{2(t^2+a^2)^l} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-l)s^{l-1}}$$

$$\int \frac{1}{(t^2+a^2)^l} dt \equiv \quad u = \frac{1}{(t^2+a^2)^l} \quad dv = dt$$

$$\equiv \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{l+1}} dt + \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l \left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^l} - a^2 \frac{dt}{(t^2+a^2)^{l+1}} \right)$$

$$\text{Позначимо за } I_l = \int \frac{t}{(t^2+a^2)^l} dt$$

Тоді маємо таке рівняння:

$$I_l = \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l \cdot I_l - 2la^2 \cdot I_{l+1}$$

Залишилось виразити I_{l+1} та розв'язати рівняння рекурсивно, причому I_1 ми вже рахували.

$$1)+2)+3)+4) \Rightarrow \text{інтеграл } \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx - \text{розв'язаний.}$$

$$\textbf{Example 1.4.1} \text{ Обчислити } \int \frac{x^4}{1+x^3} dx$$

Оскільки $\deg(x^4) > \deg(1+x^3)$, то ми поділимо многочлени. Отримаємо:

$$\int \frac{x^4}{1+x^3} dx = \int x - \frac{x}{x^3+1} dx = x^2 - \int \frac{x}{x^3+1} dx.$$

Обчислимо другий інтеграл. Перед цим розкладемо дріб на суму простих дробів методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \equiv$$

$$A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 1 \\ A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{3}, B = \frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{=} -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3} \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

Таким чином, треба порахувати такий інтеграл:

$$\int \frac{x}{x^3+1} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx \boxed{=}$$

І розглянемо другий інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{4x+4}{(2x-1)^2+3} dx = \int \frac{4x-2}{(2x-1)^2+3} dx + \int \frac{6}{(2x-1)^2+3} dx = \\ &= \ln((2x-1)^2+3) + 6 \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \ln(4x^2-4x+4) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\boxed{=} -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln(4x^2-4x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

Разом отримаємо:

$$\int \frac{x^4}{1+x^3} dx = x^2 + \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \ln(4x^2-4x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Example 1.4.2 Обчислити $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

Можна скористатися отриманою рекурентною формулою, а можна зробити ті самі кроки.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^1} dx &= \operatorname{arctg} x \\ \int \frac{1}{(x^2+1)^1} dx &\stackrel{u=\operatorname{arctg} x, dv=dx}{=} \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\ \Rightarrow \operatorname{arctg} x &= \frac{x}{x^2+1} + 2 \operatorname{arctg} x - 2 \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\ \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C \end{aligned}$$

1.5 Інтегрування тригонометричних функцій

I. Розглянемо $\int \sin^k x \cos^m x dx$, де $k, m \in \mathbb{Z}$. Маємо такі заміни:

1) k - непарне, тобто $k = 2l + 1$, тоді заміна: $\cos x = t$.

2) m - непарне, тобто $m = 2l + 1$, тоді заміна: $\sin x = t$.

3) k, m - парні, тобто $k = 2l, m = 2n$, тоді знижуємо степені формулами:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Всі ці заміни приведуть до інтегрування дробово-раціональних виразів.

Example 1.5.1 Обчислити $\int \cos^3 x dx$

Заміна: $t = \sin x$, випадок 2), тоді $dt = \cos x dx$

$$\int \cos^3 x dx = \int (1-t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

II. Розглянемо $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де R - дробово-раціональний вираз від $\sin x, \cos x$. Маємо таку заміну - її ще називають **універсальною тригонометричною підстановкою**:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Підставивши, ми отримуємо випадок інтегрування дробово-раціональних виразів.

Example 1.5.2 Обчислити $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$

Заміна: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, випадок II. Тоді беремо решта заміни звідси, з нашого пункту.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 - 3 \cos x} &= \int \frac{1}{5 - 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2 dt}{5 + 5t^2 - 3 + 3t^2} = \int \frac{dt}{4t^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2t + C = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C \end{aligned}$$

Але універсальна підстановка не завжди може бути ефективною.

III. Проводжимо розглядати $\int R(\sin x, \cos x) dx$. Нехай є кілька випадків:

- 1) $R(-u, v) = -R(u, v)$, тоді заміна: $\cos x = t$;
- 2) $R(u, -v) = -R(u, v)$, тоді заміна: $\sin x = t$;
- 3) $R(-u, -v) = R(u, v)$, тоді заміна: $\operatorname{tg} x = t$ або $\operatorname{ctg} x = t$.

Без доведення. Важкі алгебраїчні перетворення.

Example 1.5.3 Обчислити $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$.

Маємо $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x}$, зауважимо, що $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тож беремо заміну $t = \cos x$. Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx &= \int \frac{1}{(2 + t)(1 - t^2)} dt = \dots = \frac{1}{3} \ln |t + 2| - \frac{1}{2} \ln |t + 1| + \frac{1}{6} \ln |t - 1| + C = \\ &= \frac{1}{3} \ln |\cos x + 2| - \frac{1}{2} \ln |\cos x + 1| + \frac{1}{6} \ln |\cos x - 1| + C. \end{aligned}$$

1.6 Інтегрування ірраціональних виразів

I. Розглянемо $\int R \left(\sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[k_n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$, де R - дробово-раціональний вираз, причому $ad - cb \neq 0$.

Заміна: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$, де число $m = \operatorname{lcm}(k_1, \dots, k_n)$.

Виразимо x з цього рівняння:

$$ax + b = t^m cx + t^m d \implies x = \frac{t^m d - b}{a - ct^m}$$

$$\text{А потім шукаємо } dx = \frac{mt^{m-1}(ad - bc)}{(a - ct)^2} dt.$$

Підставивши, ми отримуємо інтеграл дробово-раціонального виразу.

Example 1.6.1 Обчислити $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$

Заміна: $t^2 = x + 1$. Тоді $x = t^2 - 1 \implies dx = 2t dt$

$$\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{t + 2}{t^4 - t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t + 2}{t^3 - 1} dt \quad \boxed{=}$$

обчислення цього інтегралу проводиться як в п. 4, тому я пропускаю цей момент

$$\boxed{=} - \ln(t^2 + t + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} + 2 \ln |t - 1| + C =$$

$$= - \ln(x + 2 + \sqrt{x+1}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{3}} + 2 \ln |\sqrt{x+1} - 1| + C$$

II. Розглянемо такі інтеграли:

$$1) \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

Заміна: $x = a \sin t \implies dx = a \cos t dt$

$$2) \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

Заміна: $x = a \operatorname{tg} t \implies dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$

$$3) \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

$$\text{Заміна: } x = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 t} \sin t dt$$

Усі заміни приведуть до інтегралу тригонометричних функцій.

Example 1.6.2 Обчислити $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

Заміна: $x = 2 \sin t$, випадок 1). Тоді $dx = 2 \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4 - x^2} dx &= \int 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = \int 2(1 + \cos 2t) dt = 2t + \sin 2t + C = 2t + 2 \sin t \cos t + C = \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} + 2 \frac{x}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x \sqrt{4 - x^2}}{2} + C \end{aligned}$$

1.7 Диференціальний біном

Розглянемо $\int x^m (ax^n + b)^p dx$, де $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Існують лише три випадки, як його розв'язати, для цього я наведу діаграму нижче, які застосовувати заміни.

Але для початку оскільки $m, n, p \in \mathbb{Q}$, то я запишу як дріб $m = \frac{s_1}{q_1}$, $n = \frac{s_2}{q_2}$, $p = \frac{s_3}{q_3}$.

$$\begin{array}{ccccc} p \in \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{ні}} & \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{ні}} & p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{ні}} \text{не обчислюється} \\ \downarrow \text{так} & & \downarrow \text{так} & & \downarrow \text{так} \\ x = t^{\text{lcm}(q_1, q_2)} & & ax^n + b = t^{q_3} & & a + bx^{-n} = t^{q_3} \end{array}$$

Заміни називають **підстановками Чебишова**, що приводять до інтегралу дробово-раціональних виразів. Якщо жодна з пунктів не спрацьовує, то інтеграл не може бути обчислений через елементарні функції (без доведення).

Example 1.7.1 Обчислити $\int \sqrt[3]{x - x^3} dx = \int x^{\frac{1}{3}} (1 - x^2)^{\frac{1}{3}} dx$

Тут у нас $m = \frac{1}{3}$, $n = 2$, $p = \frac{1}{3}$

Спрацьовує 3), тому що $p + \frac{m+1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = 1 \in \mathbb{Z}$

Заміна: $-1 + x^{-2} = t^3$

$$-2x^{-3} dx = 3t^2 dt$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{x - x^3} dx &= \int x^{\frac{1}{3}} (1 - x^2)^{\frac{1}{3}} dx = \int (x^{-2} - 1)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} dx = \int t \cdot x \cdot \frac{3t^2 x^3 dt}{-2} = \int \frac{3t^3 dt}{-2(t^3 + 1)^2} = \\ &= \frac{3}{-2} \left(\int \frac{dt}{t^3 + 1} - \int \frac{dt}{(t^3 + 1)^2} \right) \quad \square \end{aligned}$$

обчислення цього інтегралу проводиться як в п. 4, тому я пропускаю цей момент

$$\begin{aligned} \square &= -\frac{\ln|t+1|}{2} + \frac{\ln(t^2-t+1)}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\ln|t+1|}{3} - \frac{\ln(t^2-t+1)}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \\ &\frac{t}{2t^3+2} + C = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{6} \ln|t+1| + \frac{1}{12} \ln(t^2-t+1) - \frac{\sqrt{3}}{6} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{t}{2t^3+2} + C$$

І підставляємо $t = \sqrt[3]{x^{-2} + 1}$.

2 Визначений інтеграл

2.1 Підхід Рімана

Definition 2.1.1 Розбиттям множини $[a, b]$ називають множину точок $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ при $n \in \mathbb{N}$, для яких

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Definition 2.1.2 Позначимо за $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Тоді число

$$|\tau| = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$$

називають **діаметром** (або **дрібністю**) розбиття τ .

Definition 2.1.3 Задані розбиття τ, τ' відрізка $[a, b]$. τ' називають **підрозбиттям** розбиття τ , якщо

$$\tau \subset \tau'.$$

Proposition 2.1.4 Задано τ' – підрозбиття для τ . Тоді $|\tau'| \leq |\tau|$.

Proof.

Із розбиття ми можемо отримати підрозбиття шляхом додавання точок. Тоді деякі інтервали будуть ділитись на підінтервали через додавання точки. Відповідно діаметр зменшується. ■

Definition 2.1.5 Задано $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ – розбиття відрізка $[a, b]$.

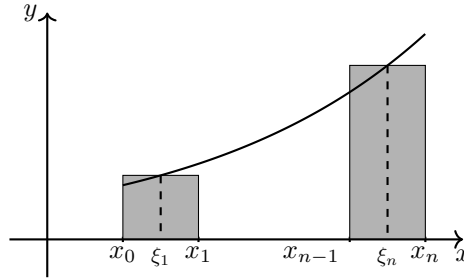
Елементи множини $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ називають **відміченими точками**. Для них

$$\xi_1 \in [x_0, x_1), \xi_2 \in [x_1, x_2), \dots, \xi_n \in [x_{n-1}, x_n].$$

Definition 2.1.6 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, розбиття $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ та відмічені точки $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

Інтегральною сумою Рімана функції f для нашого розбиття τ та відмічених точок називають число:

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$



Definition 2.1.7 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Функція f називається **інтегрованою за Ріманом** на $[a, b]$, якщо існує таке число $I \in \mathbb{R}$, для якого виконана умова:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall(\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies |\sigma(\tau, \xi, f) - I| < \varepsilon$$

Число I називають **інтегралом Рімана**.

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Позначення: $I = \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sigma(f, \tau, \xi)$

Множина інтегрованих функцій за Ріманом позначається так: $\mathcal{R}([a, b])$.

Remark 2.1.8 Детально переформулюю частину означення: для кожного розбиття τ , якщо вона є скільки завгодно малою, то тоді виконується нерівність для кожної множини обраних точок ξ . Також нотація $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sigma(f, \tau, \xi)$ – це не границя функції σ в звичному вигляді, а трохи іншої специфікації границя.

Example 2.1.9 Доведемо, що функція $f(x) = 1 \in \mathcal{R}([a, b])$, а також $\int_a^b 1 dx = b - a$.

Для початку зафіксуємо розбиття $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ та відмітимо точки $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Це аби знайти інтегральну суму:

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

$$\sigma(1, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a.$$

Інтегральна сума має це значенням при довільному розбитті. Якщо встановити $I = b - a$, то:
 $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall(\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies |\sigma(\tau, \xi, f) - I| = |b - a - (b - a)| = 0 < \varepsilon$.

Отже, $f(x) = 1 \in \mathcal{R}([a, b])$, а інтеграл $\int_a^b 1 dx = b - a$.

Theorem 2.1.10 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Число I – інтеграл Рімана $\iff \forall(\tau_n, \xi_n) : |\tau_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \sigma(f, \tau_n, \xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$.

Зрозуміло. Фактично, це можна вважати як означення 'за Гайне', але не зовсім. Проте схожі.

Підхід Рімана, на жаль, зовсім незручний для побудови теорії. Тому треба еквівалентні підходи.

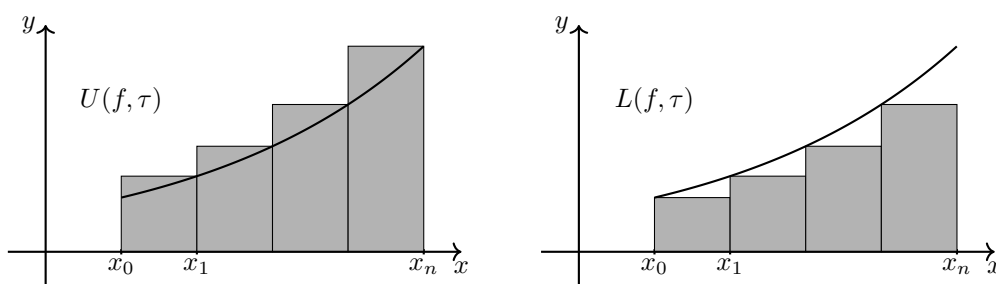
2.2 Суми Дарбу

Definition 2.2.1 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – обмежена. Визначмо такі значення для розбиття $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$:

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad k = 1, \dots, n$$

Верхньою та нижньою сумою Дарбу називають такі суми:

$$U(f, \tau) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad L(f, \tau) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$



Remark 2.2.2 Із означення випливає, що $L(f, \tau) \leq \sigma(f, \tau, \xi) \leq U(f, \tau)$, оскільки $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$.

Lemma 2.2.3 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – обмежена та будь-яке розбиття τ . Тоді маємо:

$$L(f, \tau) = \inf_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi) \quad U(f, \tau) = \sup_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi)$$

Proof.

Зафіксуємо розбиття $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, тоді f – обмежена на $[x_{k-1}, x_k], \forall k$.

А тепер візьмемо деякий набір точок ξ , тоді зрозуміло, що $f(\xi_k) \leq M_k, \forall k \implies f(\xi_k) \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k$.

Просумуємо всі рівняння, які тут в нас є – тоді отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \implies \sigma(f, \tau, \xi) \leq U(f, \tau).$$

А далі зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, то тоді $\exists x_\varepsilon : f(x_\varepsilon) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$.

І ось ці точки $x_\varepsilon = \xi'_k$ - це буде мій набір точок, який існує. Тоді маємо

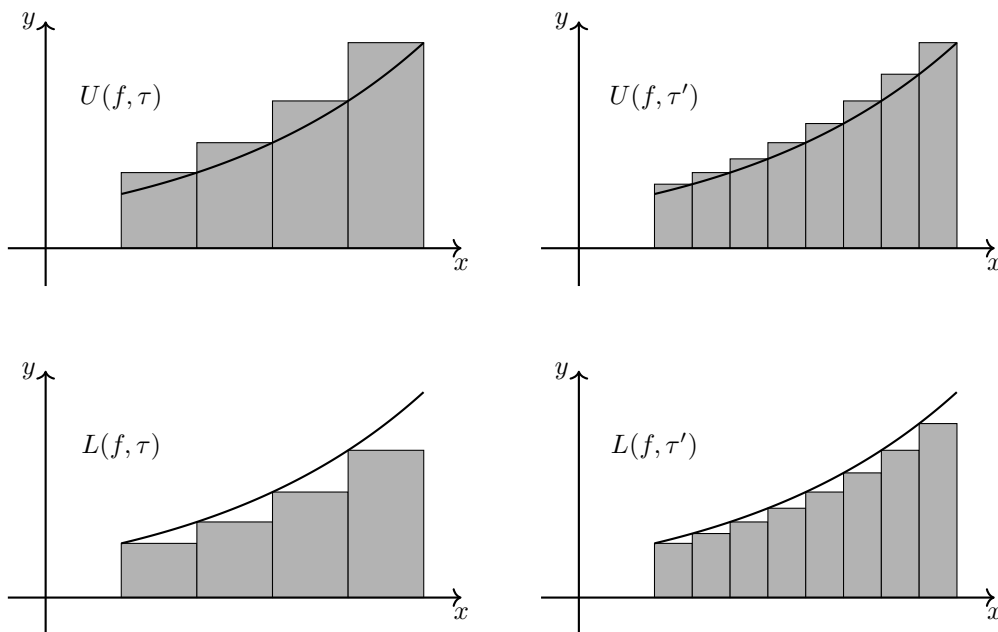
$$f(\xi'_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \implies f(\xi'_k) \Delta x_k > M_k \Delta x_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k$$

Аналогічно просумуємо всі рівняння - отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi'_k) \Delta x_k > \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k \implies S_{\tau, \xi'}(f) > U(f, \tau) - \varepsilon.$$

Остаточно, ми отримали $U(f, \tau) = \sup_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi)$. Випадок $L(f, \tau) = \inf_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi)$ аналогічний. ■

Lemma 2.2.4 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - обмежена та розбиття τ . Також задамо підрозбиття τ' . Тоді $U(f, \tau) \geq U(f, \tau')$, а також $L(f, \tau) \leq L(f, \tau')$.



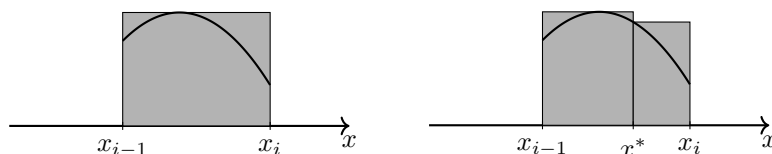
Proof.

Достатньо розглянути підрозбиття $\tau' = \tau \cup \{x^*\}$, припустимо $x^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$. Тому що якщо в мене буде більше точок, то будемо поступово їх додавати.

$$U(f, \tau) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = M_i \Delta x_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n M_k \Delta x_k \geq$$

Зауважимо, що виконується така нерівність:

$$M_i \Delta x_i = M_i(x_i - x_{i-1}) = M_i(x_i - x^* + x^* - x_{i-1}) = M_i(x_i - x^*) + M_i(x^* - x_{i-1}) \geq \widetilde{M}(x_i - x^*) + \widetilde{\widetilde{M}}(x^* - x_{i-1}), \text{ де } \widetilde{M} = \sup_{x \in [x^*, x_i]} f(x), \quad \widetilde{\widetilde{M}} = \sup_{x \in [x_{i-1}, x^*]} f(x).$$



$$\geq \sum_{k=1, k \neq i}^n M_k \Delta x_k + \widetilde{M}(x_i - x^*) + \widetilde{\widetilde{M}}(x^* - x_{i-1}) = U(f, \tau \cup \{x^*\}) = U(f, \tau').$$

Випадок $L(f, \tau) \leq L(f, \tau')$ аналогічний. ■

Lemma 2.2.5 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - обмежена. Візьмемо будь-які два розбиття τ', τ'' . Тоді $L(f, \tau') \leq U(f, \tau'')$.

Proof.

Зафіксуємо $\tau = \tau' \cup \tau''$ – це є підрозбиттям одночасно розбиття τ' та розбиття τ'' . Тоді за попередньою лемою, $L(f, \tau') \leq L(f, \tau) \leq U(f, \tau) \leq U(f, \tau'')$. ■

Definition 2.2.6 Верхнім та нижнім інтегралом Дарбу будемо називати такі вирази:

$$I^*(f) = \inf_{\tau} U(f, \tau) \quad I_*(f) = \sup_{\tau} L(f, \tau)$$

Remark 2.2.7 Справедлива така нерівність: $I_*(f) \leq I^*(f)$.

Впливає з щойно доведеної леми.

Proposition 2.2.8 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – обмежена. Тоді

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} L(f, \tau) = I_*(f) \quad \lim_{|\tau| \rightarrow 0} U(f, \tau) = I^*(f).$$

Proof.

Маємо $I_*(f) = \sup_{\tau} L(f, \tau)$, тоді звідси

$$\forall \tau : L(f, \tau) \leq I_*(f)$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau_\varepsilon : L(f, \tau_\varepsilon) > I_*(f) - \varepsilon.$$

Встановимо $\delta = \frac{|\tau_\varepsilon|}{2}$. Тоді $\forall \tau : |\tau| \leq |\tau_\varepsilon| < \delta \implies I_*(f) - \varepsilon < L(f, \tau_\varepsilon) \leq L(f, \tau) \leq I_*(f) < I_*(f) + \varepsilon$.

Тобто звідси отримали, що $|L(f, \tau) - I_*(f)| < \varepsilon$, що й доводить рівність $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} L(f, \tau) = I_*(f)$. ■

Аналогічні міркування для другої рівності.

2.3 Існування інтеграла

Theorem 2.3.1 Необхідна умова інтегрованості

Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді f – обмежена на $[a, b]$.

Proof.

Оскільки $f \in \mathcal{R}([a, b])$, то звідси $\exists I \in \mathbb{R}$, для якого виконано:

$$\text{для } \varepsilon = 1 : \exists \delta : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies \forall \xi : |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < 1 \implies |\sigma(f, \tau, \xi)| < |I| + 1.$$

Припустимо, що f – не обмежена зверху, тоді $\exists k_0 = \overline{1, n} : f$ – необмежена на $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$. Тобто $\forall M > 0 : \exists x \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}] : f(x) > M$. Якщо встановити $M = j$, то знайдеться послідовність $\{x_j, j \geq 1\} = \{\xi_{k_0}^{(j)}, j \geq 1\}$, для якої $f(\xi_{k_0}^{(j)}) \rightarrow +\infty$.

Розглянемо послідовність відмічених точок $\{\xi_j, j \geq 1\}$, де $\xi_j = \{\xi_1, \dots, \xi_{k_0-1}, \xi_{k_0}^{(j)}, \xi_{k_0+1}, \dots, \xi_n\}$. А далі розглянемо послідовність інтегральних сум $\{\sigma_j, j \geq 1\} = \{\sigma(f, \tau, \xi_j), j \geq 1\}$. Тоді

$$\sigma_j = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{k_0-1})\Delta x_{k_0-1} + f(\xi_{k_0}^{(j)})\Delta x_{k_0} + f(\xi_{k_0+1})\Delta x_{k_0+1} + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n \rightarrow +\infty.$$

Проте ми ж мали, що $\forall \xi_j : |\sigma(f, \tau, \xi_j)| \leq 1 + |I|$. Суперечність! ■

Remark 2.3.2 Взагалі-то кажучи, в іноземних підручниках під час введення означення інтегралу Рімана одразу вважають f обмеженою на $[a, b]$. Не знаю, чому вони це роблять.

Theorem 2.3.3 Перший критерій інтегрованості

Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff f \text{ – обмежена на } [a, b] \text{ та } I_*(f) = I^*(f).$$

Proof.

\Rightarrow Дано: $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді f уже обмежена та $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$.

Оскільки $\forall \xi : \sigma(f, \tau, \xi) < I + \varepsilon$, то зокрема $\sup_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi) = U(f, \tau) \leq I + \varepsilon$.

Оскільки $\forall \xi : \sigma(f, \tau, \xi) > I - \varepsilon$, то зокрема $\inf_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi) = L(f, \tau) \geq I - \varepsilon$.

Додатково

$$I^*(f) = \inf_{\tau} U(f, \tau) \leq U(f, \tau) \leq I + \varepsilon$$

$$I_*(f) = \sup_{\tau} L(f, \tau) \geq L(f, \tau) \geq I - \varepsilon.$$

Остаточно $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq I + \varepsilon - I + \varepsilon = 2\varepsilon$, виконано $\forall \varepsilon > 0 \implies I^*(f) = I_*(f)$.

\Leftarrow Дано: f – обмежена на $[a, b]$ та $I^*(f) = I_*(f) \stackrel{\text{позн.}}{=} I$.

Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді за критерієм супремуму та інфімуму, $\exists \tau_\varepsilon^1, \tau_\varepsilon^2 : \begin{matrix} L(f, \tau_\varepsilon^1) > I - \varepsilon \\ U(f, \tau_\varepsilon^2) < I + \varepsilon \end{matrix}$.

Встановимо $\delta = |\tau_\varepsilon^1 \cup \tau_\varepsilon^2|$. Тоді $\forall (\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies I - \varepsilon < L(f, \tau_\varepsilon^1) \leq L(f, \tau) \leq \sigma(f, \tau, \xi) \leq U(f, \tau) \leq U(f, \tau_\varepsilon^2) < I + \varepsilon \implies |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$.
Таким чином, $f \in \mathcal{R}([a, b])$. ■

Example 2.3.4 Задано $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ – функція Діріхле. Доведемо, що $\mathfrak{D} \notin \mathcal{R}([a, b])$.

Задамо довільне розбиття $\tau = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$. Розглянемо якийсь відрізок $[x_{k-1}, x_k]$. Якщо обидва числа раціональні, то знайдеться ірраціональне. Якщо обидва числа ірраціональні, то знайдеться раціональне. А тому в будь-якому випадку $M_k = 1$ та $m_k = 0$.

Отже $U(\mathfrak{D}, \tau) = b - a$, $L(\mathfrak{D}, \tau) = 0$.

Нарешті, $I_*(\mathfrak{D}) = b - a$ та $I^*(\mathfrak{D}) = 0$, оскільки ми отримаємо величину, що відносно не залежить від розбиття. За критерієм, $I_*(\mathfrak{D}) \neq I^*(\mathfrak{D}) \implies \mathfrak{D} \notin \mathcal{R}([a, b])$.

Remark 2.3.5 Один з прикладів, коли із обмеженості функції не випливає її інтегрованість.

Corollary 2.3.6 Якщо функція $f \in \mathcal{R}([a, b])$ та $I = \int_a^b f(x) dx$ – його відповідний інтеграл, то справедлива нерівність: $L(f, \tau) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, \tau)$.

Theorem 2.3.7 Другий критерій інтегрованості

Задано функцію $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff f$ – обмежена на $[a, b]$ та $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau : U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$.

Proof.

\Rightarrow Дано: $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді f – обмежена та $I_*(f) = I^*(f)$. За критеріями \sup, \inf , маємо:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau_1, \tau_2 : L(f, \tau_1) > I - \varepsilon \quad U(f, \tau_2) < I + \varepsilon$.

Отже, $U(f, \tau) - L(f, \tau) < 2\varepsilon$ для $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$.

\Leftarrow Дано: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau : U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$.

Тоді $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$. Отже, $I^*(f) = I_*(f) \implies f \in \mathcal{R}([a, b])$. ■

Remark 2.3.8 Можна інакше переписати: $f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff \lim_{|\tau| \rightarrow 0} (U(f, \tau) - L(f, \tau)) = 0$.

2.4 Класи інтегрованих функцій

Theorem 2.4.1 Задано функцію $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ та $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Proof.

Нехай $\varepsilon > 0$ задано.

$f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \exists \tau_1 : U(f, \tau_1) - L(f, \tau_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$g \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \exists \tau_2 : U(g, \tau_2) - L(g, \tau_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тоді $\exists \tau = \tau_1 \cup \tau_2 :$

$$U(f, \tau) - L(f, \tau) \leq U(f, \tau_1) - L(f, \tau_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(g, \tau) - L(g, \tau) \leq U(g, \tau_2) - L(g, \tau_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies U(f + g, \tau) - L(f + g, \tau) \leq U(f, \tau) + U(g, \tau) - L(f, \tau) - L(g, \tau) < \varepsilon.$$

Таким чином, ми отримали, що $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$.

Доведення того факту, що $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$, буде аналогічним.

Вказівка: $\sup \alpha f(x) = \alpha \sup f(x), \alpha > 0 \quad \sup \alpha f(x) = \alpha \inf f(x), \alpha \leq 0$. ■

Theorem 2.4.2 Функція $f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff \forall c \in (a, b) : f \in \mathcal{R}([a, c])$ та $f \in \mathcal{R}([c, b])$.

Proof.

\Rightarrow Дано: $f \in \mathcal{R}([a, b])$, тобто $\forall \varepsilon : \exists \tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} : U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$.

Зафіксуємо точку $c \in (a, b)$, у нас виникне два випадки:

I. $c \in \tau \implies c = x_k, k = \overline{1, n-1}$.

Тоді маємо розбиття $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, де $\tau_1 = \{x_0, \dots, c\}$, $\tau_2 = \{c, \dots, x_n\}$. Таким чином,
 $U(f, \tau_1) - L(f, \tau_1) = U(f, \tau_1) + U(f, \tau_2) - L(f, \tau_1) - L(f, \tau_2) - U(f, \tau_2) + L(f, \tau_2) =$
 $= U(f, \tau) - L(f, \tau) - (U(f, \tau_2) - L(f, \tau_2)) \leq U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon.$
 $U(f, \tau_2) - L(f, \tau_2) < \varepsilon$ аналогічними міркуваннями.
 Отже, $f \in \mathcal{R}([a, c])$ та $f \in \mathcal{R}([c, b])$.

II. $c \notin \tau \implies c \neq x_k, k = \overline{1, n-1}$.

Отримаємо підрозбиття $\tau' = \tau \cup \{c\}$. А для підрозбиття $U(f, \tau') - L(f, \tau') \leq U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$.
 А ось тут ми повертаємось до пункту I, розглядаючи випадок, що $c \in \tau'$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Зрозуміло. ■

Theorem 2.4.3 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – монотонна. Тоді $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Proof.

Розглянемо випадок, коли f – нестрого зростає на $[a, b]$.

Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді розглянемо таке розбиття τ , щоб $|\tau| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Тоді маємо:

$$U(f, \tau) - L(f, \tau) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k \leq |\tau| \sum_{k=1}^n (f(x_{k+1}) - f(x_k)) =$$

$$= |\tau| (f(x_n) - f(x_0)) = |\tau| (f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Отже, $f \in \mathcal{R}([a, b])$. ■

Theorem 2.4.4 Задано функцію $f \in C([a, b])$. Тоді $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Proof.

$f \in C([a, b]) \implies f \in C_{\text{unif}}([a, b])$, тож $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$.

Оберемо таке розбиття τ , щоб $|\tau| < \delta$.

Також $f \in C([a, b]) \implies f \in C([x_{k-1}, x_k]) \implies \exists f'(x'_k) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \exists f''(x''_k) = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.

Позначмо $m_k = f(x'_k)$, $M_k = f(x''_k)$. Оскільки $|\tau| < \delta$, то звідси $|x'_k - x''_k| \leq |x_{k-1} - x_k| \leq |\tau| < \delta \implies$
 $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b - a}$.

Отже, $U(f, \tau) - L(f, \tau) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon$. А тому й $f \in \mathcal{R}([a, b])$. ■

Theorem 2.4.5 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – обмежена та неперервна всюду, окрім в точках c_1, c_2, \dots, c_m . Тоді $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Proof.

Обмежимося випадком, що $f \in C([a, b] \setminus \{c_1\})$. А далі просто за MI.

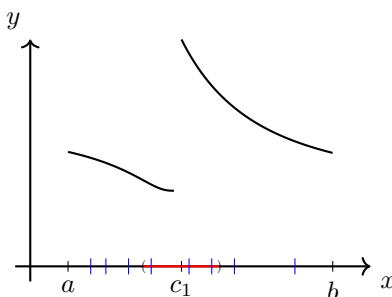
Функція f – обмежена, тоді $\exists C > 0 : \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq C$.

Заздалегідь нехай $\varepsilon > 0$. Розглянемо множину $D = [a, b] \setminus (c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1)$, де $\delta_1 > 0$. Потім вкажу, чому воно дорівнює. Також позначу $(c_1 - \delta, c_1 + \delta) = V$.

Оскільки $f \in C([a, b] \setminus \{c_1\})$, то $f \in C(D)$, тоді за Кантором,

$\exists \delta_2 : \forall x', x'' : |x' - x''| < \delta_2 \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}$.

Встановимо $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, а далі візьмемо таке розбиття τ , щоб $|\tau| < \delta$.



$$U(f, \tau) - L(f, \tau) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k: [x_{k-1}, x_k] \cap V = \emptyset} (M_k - m_k) \Delta x_k + \sum_{k: [x_{k-1}, x_k] \cap V \neq \emptyset} (M_k - m_k) \Delta x_k \quad \boxed{<} \quad \varepsilon$$

Перша сума – там, де відрізки не потрапили цілком в окіл точки c_1 . В силу другої теореми Ваєрштрасса та теореми Кантора (аналогічні міркування з попередньої теореми), $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Друга сума – там, де відрізки потрапили в окіл точки c_1 . В силу обмеженості функції f маємо, що $M_k - m_k \leq 2C$. Також зауважимо, що $\sum_{k: [x_{k-1}, x_k] \cap V \neq \emptyset} \Delta x_k \leq 2\delta_1 + 2|\tau| < \delta_1 + 2\delta \leq 4\delta_1$.

Тому що червоний інтервал має довжину $2\delta_1$ та є два відрізка, частина якої всередині та інша поза неї. Кожний з двох цих відрізків не перевищує $|\tau|$, а тому й δ .

$$\boxed{<} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) + 2C \cdot 4\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2} + 8C\delta_1 = \varepsilon.$$

От тепер я надам $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{16C}$, але це можна було зробити з самого початку.

Таким чином, $f \in \mathcal{R}([a, b])$. ■

Example 2.4.6 Розглянемо декілька прикладів:

1. $f(x) = \operatorname{sgn} x \in \mathcal{R}([a, b])$, бо $|f(x)| \leq 1$ та всюди неперервна, окрім точки $x = 0$, коли $0 \in [a, b]$.
2. $g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \in \mathcal{R}([-1, 1])$, бо $|g(x)| \leq 1$ та всюди неперервна, окрім точки $x = 0$.

Theorem 2.4.7 Задано функцію $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді $f \cdot g \in \mathcal{R}([a, b])$.

Proof.

Маємо $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. По-перше, тоді вони обмежені, тобто $\exists C_1, C_2 : \forall x : |f(x)| \leq C_1, |g(x)| \leq C_2$.

По друге, тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau_1, \tau_2 : U(f, \tau_1) - L(f, \tau_1) < \frac{\varepsilon}{2C_1}, U(g, \tau_2) - L(g, \tau_2) < \frac{\varepsilon}{2C_2}$.

Нам буде необхідна ось така оцінка:

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq C_1 \sup |g(x) - g(y)| + C_2 \sup |f(x) - f(y)|.$$

Це виконано $\forall x, y \in [a, b]$. Тоді підберемо такі точки x, y , щоб ліворуч був отриманий \sup :

$$\sup |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq C_1 \sup |g(x) - g(y)| + C_2 \sup |f(x) - f(y)|.$$

Перепишемо цю рівність інакше:

$$\sup f(x)g(x) - \inf f(x)g(x) \leq C_1(\sup g(x) - \inf g(x)) + C_2(\sup f(x) - \inf f(x)).$$

А далі встановимо $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, тоді маємо:

$$\begin{aligned} U(f \cdot g, \tau) - L(f \cdot g, \tau) &= \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)g(x) \cdot \Delta x - \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)g(x) \cdot \Delta x = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)g(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)g(x) \right) \Delta x_k \leq C_1(U(f, \tau) - L(f, \tau)) + C_2(U(g, \tau) - L(g, \tau)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином, $f \cdot g \in \mathcal{R}([a, b])$. ■

Corollary 2.4.8 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$.

Вказівка: $|f(x)| = f(x) \cdot \operatorname{sgn} f(x)$.

2.5 Властивості інтегралів

Theorem 2.5.1 Лінійність

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

Друге буде аналогічно доводитися. Лише наведу доведення першої рівності.

Proof.

Це є продовженням доведення **Th. 2.4.1**.

$$\text{Оскільки } f + g \in \mathcal{R}, \text{ то звідси маємо } I^*(f + g) = I_*(f + g) = \int_a^b f(x) + g(x) dx.$$

$$L(f, \tau) + L(g, \tau) \leq L(f + g, \tau) \leq \int_a^b f(x) + g(x) dx \leq U(f + g, \tau) \leq U(f, \tau) + U(g, \tau) < L(f, \tau) + L(g, \tau) + \varepsilon.$$

$$L(f, \tau) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, \tau)$$

Але ми також знаємо такі нерівності:

$$L(g, \tau) \leq \int_a^b g(x) dx \leq U(g, \tau)$$

$$L(f, \tau) + L(g, \tau) \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq U(f, \tau) + U(g, \tau) < L(f, \tau) + L(g, \tau) + \varepsilon.$$

$$-\varepsilon < \int_a^b f(x) + g(x) dx - \left(\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \right) < \varepsilon, \text{ виконано } \forall \varepsilon > 0.$$

$$\text{Отже, } \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad \blacksquare$$

Theorem 2.5.2 Адитивність

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Proof.

Це є продовженням доведення **Th. 2.4.2.**

$$L(f, \tau) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, \tau) < L(f, \tau) + \varepsilon$$

$$L(f, \tau_1) \leq \int_a^c f(x) dx \leq U(f, \tau_1) < L(f, \tau_1) + \varepsilon$$

$$L(f, \tau_2) \leq \int_c^b f(x) dx \leq U(f, \tau_2) < L(f, \tau_2) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \left(\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right) \right| < 2\varepsilon, \text{ виконано } \forall \varepsilon > 0.$$

$$\text{Отже, } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Theorem 2.5.3 Задано $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Відомо, що $\forall x \in [a, b] : f(x) \geq 0$. Тоді $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Proof.

Оскільки $f \in \mathcal{R}([a, b])$, то тоді $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f(x) dx$. Значить, маємо такий ланцюг:

$$\int_a^b f(x) dx = I^*(f) \geq U(f, \tau) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \geq 0. \quad \blacksquare$$

Corollary 2.5.4 Задані $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Якщо $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Вказівка: розглянути функцію $h(x) = g(x) - f(x)$.

$$\text{Corollary 2.5.5} \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Вказівка: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

Theorem 2.5.6 І теорема про середнє

Задані функції $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, причому g має однаковий знак на $[a, b]$. Позначу $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$,

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x). \text{ Тоді } \exists c \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x) dx = c \int_a^b g(x) dx.$$

Proof.

Розглянемо випадок $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Справедлива нерівність:

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Якщо $\int_a^b g(x) dx = 0$, то звідси $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$, а число $c \in [m, M]$ обираємо довільне.

Якщо $\int_a^b g(x) dx > 0$, то поділимо нерівність на цю штуку:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

Тоді позначимо $c = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$. Звідси $\int_a^b f(x)g(x) dx = c \int_a^b g(x) dx$. ■

Corollary 2.5.7 Якщо додатково вимагати функцію $f \in C([a, b])$, то тоді

$$\exists \xi \in (a, b) : \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Proof.

$f \in C([a, b])$, то за Бользано-Коші, $\exists \xi \in [a, b] : c = f(\xi)$. Ну а далі попередня теорема. ■

2.6 Інтеграл як функція верхньої межі

Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Будемо розглядати ось таку функцію $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Remark 2.6.1 Додатково існує певна домовленість з інтегралами, щоб було простіше жити:

$$\begin{aligned} \int_a^a f(t) dt &= 0 \\ \int_b^a f(t) dt &= - \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

Theorem 2.6.2 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді $g \in C([a, b])$.

Proof.

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \left| \int_a^{x_1} f(t) dt - \int_a^{x_2} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \right| \leq$$

Оскільки $f \in \mathcal{R}([a, b])$, то звідси f – обмежена на $[a, b]$, тобто $\exists M \geq 0 : \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$.

$$\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} M dt \right| = M|x_2 - x_1| < M\delta = M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Отже, нехай $\varepsilon > 0$. Тоді існує $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, для якого $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$.

Отже, $g \in C_{\text{unif}}([a, b]) \implies g \in C([a, b])$. ■

Theorem 2.6.3 Задано функцію $f \in C([a, b])$. Тоді $g \in C'([a, b])$, причому $g'(x) = f(x)$.

Proof.

Будемо доводити, що $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f(x)$.

$$\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

$$f(x) = \frac{f(x)}{\Delta x} \Delta x = \frac{f(x)}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} dt = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(x) dt.$$

Тоді маємо таку оцінку:

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} - f(x) \right| &= \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_x^{x+\Delta x} f(x) dt \right| = \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) - f(x) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)| dt \right| \leq \end{aligned}$$

Оскільки $f \in C([a, b])$, то звідси $f \in C_{\text{unif}}([a, b])$, а тому

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Фіксуємо таке δ , щоб $|\Delta x| < \delta$.
Тоді $\forall t \in [x, x + \Delta x]$ або $[x + \Delta x, x] : |t - x| < |\Delta x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

$$\boxed{<} \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} \varepsilon dt \right| = \frac{|x + \Delta x - x|}{|\Delta x|} \varepsilon = \varepsilon.$$

Остаточно $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \Delta x : |\Delta x| < \delta \implies \left| \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} - f(x) \right| < \varepsilon$. Отже, $g'(x) = f(x)$. ■

Corollary 2.6.4 Функція $g(x) = F(x)$. Тобто функція $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ є первісною функції $f(x)$, якщо $f \in C([a, b])$.

Отже, будь-яка неперервна функція f має первісну $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ на $[a, b]$.

Theorem 2.6.5 Формула Ньютона-Ляйбніца

Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, b])$, яка має первісну Φ . Тоді $\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \stackrel{\text{позн.}}{=} \Phi(x) \Big|_a^b$.

Proof.

Якщо $f \in C([a, b])$, то це є прямим наслідком. Дійсно, за умовою, f має первісну Φ . Але водночас за наслідком, f має первісну F , причому $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Тоді $\Phi(x) = F(x) + C$.

$$\begin{cases} \Phi(a) = C \\ \Phi(b) = \int_a^b f(t) dt + C \end{cases} \implies \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

У загальному вигляді доведення відрізняється.

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Встановимо будь-яке розбиття $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, щоб $|\tau| < \delta$. Зауважимо, що

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (\Phi(x_1) - \Phi(x_0)) + (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) + \dots + (\Phi(x_n) - \Phi(x_{n-1})).$$

Оскільки Φ – первісна, тобто вона диференційована, тоді неперервна як наслідок. Можемо застосувати до кожної дужки теорему Лагранжа:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(\xi_1)\Delta x_1 + \Phi'(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + \Phi'(\xi_n)\Delta x_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Причому $\xi_k \in (x_k, x_{k-1})$.

Отже, $\Phi(b) - \Phi(a) = \sigma(f, \tau, \xi')$, де $\xi' = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Таким чином, для нашого розбиття ξ' виконано $|\sigma(f, \tau, \xi') - I| = |\Phi(b) - \Phi(a) - I| < \varepsilon$. А це виконано $\forall \varepsilon > 0$.

Отже, $I = \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$. ■

Example 2.6.6 Функція $x^2 \in \mathcal{R}([0, 1])$ в силу монотонності та має первісну $\frac{x^3}{3}$.

$$\text{Тоді } \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Example 2.6.7 Приклад, де формула Ньютона-Ляйбніца не працює

Запишу для початку первісну $F(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Неважко показати, що

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

На жаль, функція f – необмежена в точці $x_0 = 0$, а тому $f \notin \mathcal{R}([a, b])$, якщо $0 \in [a, b]$. Тим не менш, f має первісну F . Проте формула Ньютона-Ляйбніца не працює.

Remark 2.6.8 Отже, f має первісну F на $[a, b] \not\Rightarrow f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Example 2.6.9 Існує навіть функція $f(x) = \operatorname{sgn} x$, де $f \in \mathcal{R}([-1, 1])$, проте не має первісної саме на $[-1, 1]$. Спробуємо обчислити інтеграл іншим чином.

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx = \int_{-1}^0 \operatorname{sgn} x dx + \int_0^1 \operatorname{sgn} x dx.$$

Розглянемо $g_1(t) = \int_{-1}^t \operatorname{sgn} x \, dx$, де $t \in [-1, 0]$. Оскільки $\operatorname{sgn} \in \mathcal{R}([-1, 0])$, то звідси $g_1 \in C([-1, 0])$, зокрема:

$$g_1(0) = \int_{-1}^0 \operatorname{sgn} x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{\varepsilon} \operatorname{sgn} x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{\varepsilon} (-1) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-x) \Big|_{-1}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon - 1) = -1.$$

Аналогічно якщо розглянути функцію $g_2(t) = \int_t^1 \operatorname{sgn} x \, dx$, де $t \in [0, 1]$, то можна отримати, що (пишу уже неформально):

$$g_2(0) = \int_0^1 \operatorname{sgn} x \, dx = \int_0^1 1 \, dx = x \Big|_0^1 = 1.$$

$$\text{Остаточно отримали } \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \, dx = -1 + 1 = 0.$$

Remark 2.6.10 Отже, $f \in \mathcal{R}([a, b]) \not\Rightarrow f$ має первісну F на $[a, b]$.

А тепер запишемо теорему, якої не вистачає попередньому підрозділу.

Theorem 2.6.11 II теорема про середнє

Задані функції $f \in \mathcal{R}([a, b])$ та g – монотонна. Тоді $\exists c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = g(a) \int_a^c f(x) \, dx + g(b) \int_c^b f(x) \, dx.$$

Додатково ми доводимо цією формулою, що $f \cdot g \in \mathcal{R}([a, b])$.

Доведення другої теореми про середнє більш важке. Треба навести корисні леми.

Lemma 2.6.12 Тотожність Абеля

Встановимо $A_k = \sum_{p=1}^k a_p$ та $A_0 = 0$. Тоді виконується рівність:

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = (A_n b_n - A_{m-1} b_m) - \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k).$$

Знадобиться ця тотожність ще кілька разів у інших розділах.

Proof.

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^n A_k b_k - \sum_{k=m}^n A_{k-1} b_k = (A_n b_n - A_{m-1} b_m) + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=m+1}^n A_{k-1} b_k \quad \square$$

У другій сумі лічильник замінюємо $k \rightarrow k-1$.

$$\square (A_n b_n - A_{m-1} b_m) + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1} = (A_n b_n - A_{m-1} b_m) - \sum_{k=m}^{n+1} A_k (b_{k+1} - b_k). \quad \blacksquare$$

Remark 2.6.13 Тотожність Абеля дуже схожа на формулу інтегрування частинами, де в якості $u \rightarrow b_k \Rightarrow du \rightarrow (b_{k+1} - b_k)$, а також $dv \rightarrow a_k \Rightarrow v \rightarrow A_k$.

Lemma 2.6.14 Задані функції $f \in \mathcal{R}([a, b])$ та g – не зростає на $[a, b]$ та $g \geq 0$. Тоді $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) \, dx.$$

Proof.

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x) \, dx = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \, dx + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(x_{k-1})) \, dx.$$

Розберемося з другою сумою:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(x_{k-1})) \, dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)| |g(x) - g(x_{k-1})| \, dx \stackrel{f \in \mathcal{R} \Rightarrow f \text{ - обм.}}{\leq} \\ & \leq C \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(x) - g(x_{k-1})| \, dx \leq C \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sup_{x, y \in [x_{k-1}, x_k]} |g(x) - g(y)| \, dx = \\ & = C \sum_{k=1}^n \sup_{x, y \in [x_{k-1}, x_k]} |g(x) - g(y)| \Delta x_k = C \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) \right) \Delta x = C(U(g, \tau) - L(g, \tau)) \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} \\ & \xrightarrow{g \text{ - не зростає} \Rightarrow g \in \mathcal{R}} 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(x_{k-1})) dx \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} 0 \implies \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Залишилось з'ясувати, що приховує перша сума.

Позначимо $F(t) = \int_a^t f(x) dx$. Оскільки $f \in \mathcal{R}([a, b])$, то $F \in C([a, b]) \implies$ вона приймає найбільше, найменше значення. Тоді

$$\sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1})(F(x_k) - F(x_{k-1})) \quad \square$$

А далі застосуємо тотожність Абеля при $a_k = F(x_k) - F(x_{k-1})$, $b_k = g(x_{k-1})$.

$$\square F(x_n)g(x_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = F(x_n)g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)(g(x_{k-1}) - g(x_k)).$$

Звідси отримаємо таку нерівність:

$$\begin{aligned} mg(a) &= mg(x_{n-1}) + m \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k-1}) - g(x_k)) \leq \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \leq \\ &\leq Mg(x_{n-1}) + M \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k-1}) - g(x_k)) = Mg(a), \text{ де } m = \min_{t \in [a, b]} F(t), M = \max_{t \in [a, b]} F(t). \end{aligned}$$

Якщо $|\tau| \rightarrow 0$, то звідси випливає, що $mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq Mg(a)$.

Випадок $g(a) = 0$ ясно. А далі поділимо тепер на $g(a)$ – отримаємо:

$$m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \implies \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx = F(\xi), \text{ де } \xi \in [a, b] \text{ із теореми Больцано-Коші.}$$

$$\text{Остаточно, } \int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Lemma 2.6.15 Задані функції $f \in \mathcal{R}([a, b])$ та g – не спадає на $[a, b]$ та $g \geq 0$. Тоді $\exists \xi \in [a, b]$: $\int_a^b f(x)g(x) dx = g(b) \int_\xi^b f(x) dx$.

Або аналогічно, або можна звести до попередньої лему.

Використовуючи першу лему, ми доводимо нашу теорему для неспадної функції. А другою лемою доводимо теорему для незростаючої.

Вказівка: розглянути $G(x) = g(b) - g(x)$, якщо g – не спадна. Для незростаючої аналогічно.

2.7 Обчислення визначених інтегралів

2.7.1 Заміна змінної

Theorem 2.7.1 Задано функцію $f \in C([a, b])$. Також задано функцію $\varphi \in C'([\alpha, \beta])$, причому $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тоді $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$.

Proof.

Оскільки $f \in C([a, b])$, то вона має первісну F , за формулою Ньютона-Ляйбніца,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Але оскільки φ – диференційована функція, то звідси функція $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ має первісну $F \circ \varphi$. Нарешті, оскільки $f \circ \varphi \cdot \varphi' \in C([\alpha, \beta])$, то ми можемо застосувати формулу Ньютона-Ляйбніца.

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

Example 2.7.2 Обчислити $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Якщо обчислювати невизначений інтеграл, то напрошується заміна:

$x = \sin t$, тоді звідси $dx = \cos t dt$.

$$\text{Виникне } \int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt.$$

Тепер виникає питання, чи буде це працювати в визначеному інтегралі.

Маємо $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, для якої $f \in C([-1, 1])$. Також маємо $\varphi(t) = \sin t$, додатково

$$\varphi(\alpha) = 0 \implies \sin \alpha = 0 \implies \alpha = 0$$

$$\varphi(\beta) = 1 \implies \sin \beta = 1 \implies \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Відомо, що $\varphi \in C' \left(\left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right)$. Тоді заміна змінної працює та

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2.7.2 Інтегрування частинами

Theorem 2.7.3 Задані функції u, v – диференційовані на $[a, b]$, причому $u', v' \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

Proof.

Оскільки існують u', v' , то звідси $u, v \in C([a, b]) \implies u, v \in \mathcal{R}([a, b])$.

Розглянемо функцію $h(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x) \in \mathcal{R}([a, b])$. Вона має первісну $H(x) = u(x)v(x)$.

Тоді за формулою Ньютона-Ляйбніца, маємо:

$$\int_a^b h(x) dx = H(b) - H(a) = u(b)v(b) - u(a)v(a) = u(x)v(x) \Big|_a^b$$

$$\text{З іншого боку, } \int_a^b h(x) dx = \int_a^b u(x)v'(x) dx + \int_a^b v(x)u'(x) dx = \int_a^b u(x)v'(x) dx + \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

$$\text{Отже, } \int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx. \quad \blacksquare$$

Example 2.7.4 Обчислити $\int_1^2 \ln x dx$.

Маємо $u = \ln x$, тоді $du = \frac{1}{x} dx$ Далі $dv = dx$, тоді $v = x$.

Важливо, що $u' = \frac{1}{x}$ та $v' = 1$ – всі інтегровані, тобто $u', v' \in \mathcal{R}([1, 2])$. Тому інтегруємо частинами.

$$\int_1^2 \ln x dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1.$$

Example 2.7.5 Важливий

Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \stackrel{\text{позн.}}{=} I_n$.

Розглянемо окремо випадок $n = 0$ та $n = 1$.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Якщо $n \geq 2$, то ми будемо інтегрувати частинами, якщо переписати $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx$.

$$u = \sin^{n-1} x \implies du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$$

$$dv = \sin x dx \implies v = -\cos x.$$

$$\begin{aligned} I_n &= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx = \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned}$$

Таким чином, отримали: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

$$\text{Якщо } n = 2k, \text{ то } I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Якщо } n = 2k+1, \text{ то } I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$\text{Остаточно, } I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

На цьому ще не все. Зауважимо, що оскільки $-1 \leq \sin x \leq 1$, то тоді $\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$,

а звідси випливає, що $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$ (після інтегрування).

Тоді отримаємо оцінку $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$. За теоремою про двох поліцаїв, маємо

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$. Якщо цю границю розписати отримаємо результат:

Theorem 2.7.6 Формула Волліса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot (2n-1)}.$$

2.8 Застосування визначеного інтеграла

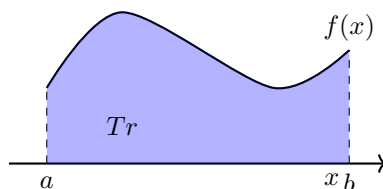
2.8.1 Площа криволінійної трапеції

Що таке взагалі **площа**, я буду вважати відомою штукою. Також відомо для мене буде площа прямокутника, що суттєво важливо.

Definition 2.8.1 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ так, щоб $f(x) \geq 0$ та обмежена.

Криволінійною трапецією називають таку множину:

$$\text{Tr}(f, [a, b]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$$

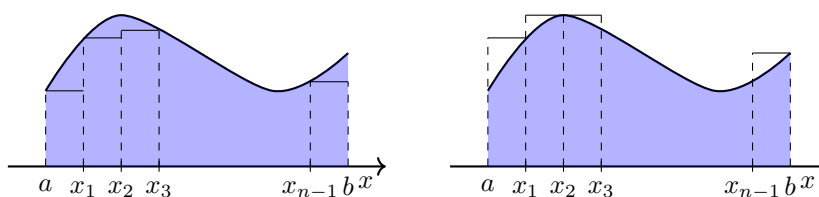


Задамо тепер деяке розбиття $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Через ці точки проведемо вертикальну пряму.

Тоді наша площа криволінійної трапеції $S(\text{Tr}(f, [a, b])) = \sum_{k=1}^n S(\text{Tr}(f, [x_{k-1}, x_k]))$.

На кожному відрізку $[x_{k-1}, x_k]$ ми:

- впишемо прямокутник P'_k , висота якої дорівнює $\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$;
- опишемо прямокутник P''_k , висота якої дорівнює $\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.



Сума площ вписаних прямокутників дорівнює $\sum_{k=1}^n \Delta x_k \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = S(P')$.

Сума площ описаних прямокутників дорівнює $\sum_{k=1}^n \Delta x_k \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = S(P'')$.

Definition 2.8.2 Задано криволінійну трапецію $\text{Tr}(f, [a, b])$.

Внутрішньою площею криволінійної трапеції $\text{Tr}(f, [a, b])$ називають число:

$$S_*(\text{Tr}) = \sup_{\tau} S(P')$$

Зовнішньою площею криволінійної трапеції $\text{Tr}(f, [a, b])$ називають число:

$$S^*(\text{Tr}) = \inf_{\tau} S(P'')$$

Definition 2.8.3 Криволінійна трапеція називається **квадрованою**, якщо

$$S_*(\text{Tr}) = S^*(\text{Tr}) = S$$

Число S називається **площею** криволінійної трапеції. (означення працює не лише для криволінійної трапеції).

Theorem 2.8.4 Задано функцію $f \in C([a, b])$ та $f(x) \geq 0$. Задамо криволінійну трапецію $\text{Tr}(f, [a, b])$.

Тоді вона є квадрованою та $S(\text{Tr}) = \int_a^b f(x) dx$.

Proof.

Оскільки $f \in C([a, b])$, то $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Звідси $S_*(\text{Tr}) = I_*(f) = I^*(f) = S^*(\text{Tr})$. Тобто Tr - квадрована.

Автоматично звідси $S(\text{Tr}) = \int_a^b f(x) dx$. ■

Theorem 2.8.5 Задані функції $f, g \in C([a, b])$, причому $f(x) \geq g(x)$. Задамо фігуру

$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y \in [f(x), g(x)]\}$. Тоді вона є квадрованою та $S(G) = \int_a^b f(x) - g(x) dx$.

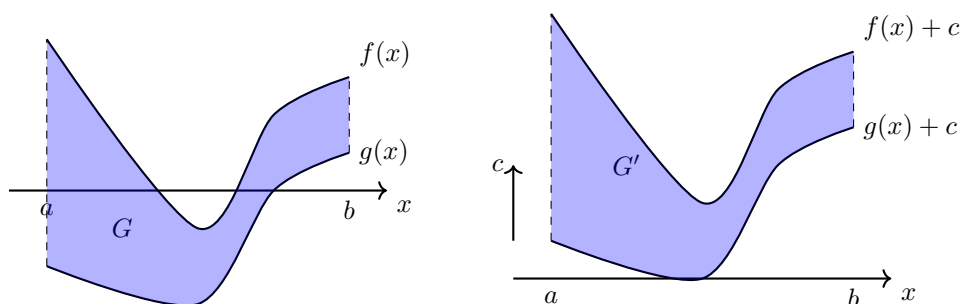
Proof.

Оскільки $g \in C([a, b])$, то вона приймає найменше значення.

Якщо від'ємне, то перемістимо фігуру G на число $c = |\inf_{x \in [a, b]} g(x)|$ догори. Отримаємо фігуру

$G' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [f(x) + c, g(x) + c]\}$.

Якщо додатне, то тоді $G' = G$ (тут все зрозуміло).



Зауважимо, що $S(G') = S(\text{Tr}(f + c, [a, b])) - S(\text{Tr}(g + c, [a, b]))$

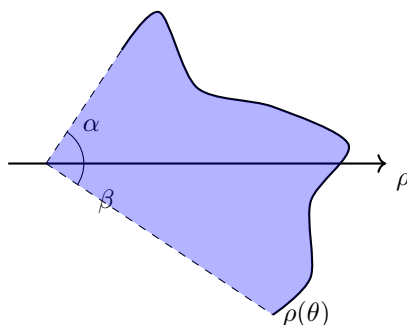
Отже, $S(G) = S(G') = \int_a^b f(x) + c dx - \int_a^b g(x) + c dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx$. ■

2.8.2 Площа криволінійного сектора

Definition 2.8.6 Задано функцію $\rho: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$.

Криволінійним сектором називають таку множину:

$$\text{Sec}(\rho, [\alpha, \beta]) = \{(\theta, \rho) : \theta \in [\alpha, \beta] : \rho \in [0, \rho(\theta)]\}$$



Задамо тепер деяке розбиття $\tau = \{\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \beta\}$. Через ці кути проведемо $\rho(\theta_k)$. Тоді площа нашого криволінійного сектора $S(\text{Sec}(\rho, [\alpha, \beta])) = \sum_{k=1}^n S(\text{Sec}(\rho, [\theta_{k-1}, \theta_k]))$.

На кожному відрізку $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ ми:

- впишемо сектор Q'_k , радіус якої дорівнює $\inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta)$;

- опишемо сектор Q''_k , радіус якої дорівнює $\sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta)$.

Тут має бути рисунок, але не шарю, як це зробити.

Сума площ вписаних секторів $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \Delta \theta_k \left(\inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta) \right)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \Delta \theta_k \inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \frac{1}{2} \rho^2(\theta) = L \left(\frac{1}{2} \rho^2, \tau \right)$.

Сума площ описаних секторів $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \Delta \theta_k \left(\sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta) \right)^2 = \sum_{k=1}^n \Delta \theta_k \sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \frac{1}{2} \rho^2(\theta) = U \left(\frac{1}{2} \rho^2, \tau \right)$.

Theorem 2.8.7 Задано функцію $\rho \in C([\alpha, \beta])$. Задамо криволінійний сектор $\text{Sec}(\rho, [\alpha, \beta])$. Тоді він є квадрованим та $S(\text{Sec}) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$.

Proof.

Оскільки $\rho \in C([\alpha, \beta])$, то $\rho \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$, а тому $\frac{1}{2} \rho^2 \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$. Звідси $S_*(\text{Sec}) = I_* \left(\frac{1}{2} \rho^2 \right) = I^* \left(\frac{1}{2} \rho^2 \right) = S^*(\text{Sec})$. Тобто Sec – квадрована.

Автоматично звідси $S(\text{Sec}) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$. ■

2.8.3 Крива, яка спрямовується

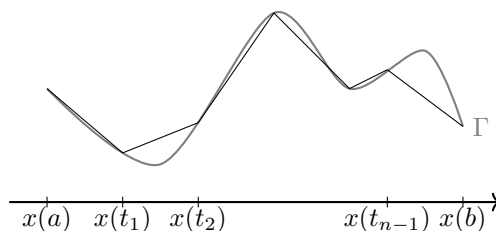
Definition 2.8.8 Задано функції $x, y \in C([a, b])$.

Неперервною кривою на площині називають таку множину:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]\}$$

Нехай $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ – деяке розбиття відрізка $[a, b]$. Встановимо Γ_{τ} – ломана, що отримана в результаті сполучення кожної пари сусідніх точок $(x(t_{k-1}), y(t_{k-1}))$ та $(x(t_k), y(t_k))$.

Довжина ломаної $L(\Gamma_{\tau}) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$.



Definition 2.8.9 Криву називають **такою, що спрямовується**, якщо існує таке число $L \in \mathbb{R}$, для якого виконана умова:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies |L(\Gamma_{\tau}) - L| < \varepsilon$$

Число L називають **довжиною** кривої Γ .

Позначення: $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} L(\Gamma_{\tau}) = L$.

Theorem 2.8.10 Задано функції $x, y \in C'([a, b])$. Тоді крива Γ буде такою, що спрямовується, а

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Proof.

Задамо розбиття τ , маємо довжину ломаної $L(\Gamma_\tau) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$.

За умовою теореми, можемо застосувати теорему Лагранжа, тоді

$$\exists \xi_k \in (t_{k-1}, t_k) : x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = x'(\xi_k)\Delta t_k.$$

$$\exists \eta_k \in (t_{k-1}, t_k) : y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}) = y'(\eta_k)\Delta t_k.$$

$$\text{Тоді } L(\Gamma_\tau) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \Delta t_k.$$

Розпишемо цю формулу інакшим чином:

$$L(\Gamma_\tau) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \Delta t_k + \sum_{k=1}^n (\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2}) \Delta t_k =$$

$$= \sigma \left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \tau, \xi \right) + r_\tau. \text{ Тоді:}$$

$$|L(\Gamma_\tau) - \sigma \left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \tau, \xi \right)| = |r_\tau| \leq \sum_{k=1}^n |y'(\eta_k) - y'(\xi_k)| \Delta t_k < \varepsilon \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \varepsilon(b-a).$$

Значить, крива Γ є такою, що спрямовується, а також довжина $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$. ■

Theorem 2.8.11 Задано функцію $f \in C'([a, b])$. Задамо криву $\Gamma = \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)\}$. Тоді

вона буде спрямованою, а $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Proof.

Функцію f можна параметризувати: $x = x(t), y = y(t)$.

Нехай в $x(t_1) = a, x(t_2) = b$.

$$L(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} x'(t) dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad \blacksquare$$

Theorem 2.8.12 Задано функцію $\rho \in C'([\alpha, \beta])$. Задамо криву $\Gamma = \{(\theta, r) : \theta \in [\alpha, \beta], r = \rho(\theta)\}$.

Тоді вона буде спрямованою, а $L(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$.

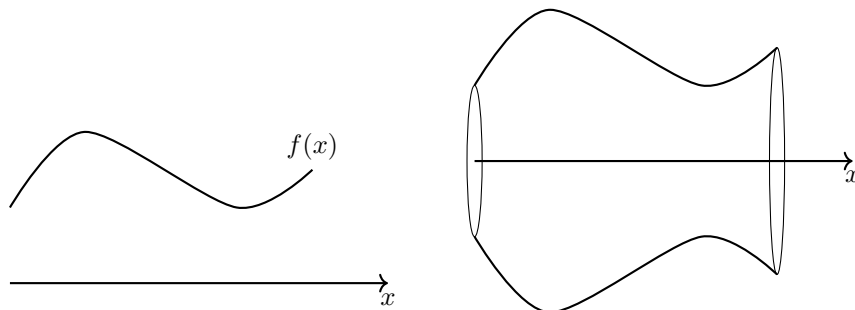
Вказівка: $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$.

Remark 2.8.13 Є такий об'єкт, як крива Коха – приклад кривої, що не можна спрямувати. Тим не менш, вона має площу.

2.8.4 Об'єм тіла обертання

Задано функцію $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ так, щоб $f(x) \geq 0$ та обмежена. Розглянемо криволінійну трапецію $\text{Tr}(f, [a, b])$.

Ми отримаємо тіло G , що було отримано в результаті обертання трапеції Tr відносно осі OX .



Ми також вписували та описували прямокутники. Якщо їх обернути навколо OX , то кожна з них стане циліндром радіуса відповідно $\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.

Сума об'ємів вписаних циліндрів дорівнює $\sum_{k=1}^n \pi \left(\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right)^2 \Delta x_k = V(G').$

Сума об'ємів описаних циліндрів дорівнює $\sum_{k=1}^n \pi \left(\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right)^2 \Delta x_k = V(G'').$

Definition 2.8.14 Внутрішнім об'ємом тіла G називають число:

$$V_*(G) = \sup_{\tau} V(G')$$

Зовнішнім об'ємом тіла G називають число:

$$V^*(G) = \inf_{\tau} V(G'')$$

Definition 2.8.15 Тіло G називають **кубованою**, якщо

$$V_*(G) = V^*(G) = V$$

Число V називають **об'ємом** тіла G .

Theorem 2.8.16 Задано функцію $f \in C([a, b])$ така, що $f(x) \geq 0$. Тоді G є кубованою та

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Вказівка: $(\sup f(x))^2 = \sup f^2(x)$.

Опціональна вставка

Коли читав конспект Чаповського, мені потрапило ось таке означення інтегрованої функції за Ріманом.

Theorem 2.8.17 $f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \tau_\varepsilon : \forall \tau - \text{підрозбиття } \tau_\varepsilon : \forall \xi : |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$

Proof.

\Rightarrow Дано: $f \in \mathcal{R}([a, b])$, тобто за стандартним означенням, $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \tau : |\tau| < \delta : \forall \xi : |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$ Ми можемо обрати розбиття τ_ε таке, що $|\tau| < \delta.$ Тоді для кожного підрозбиття τ розбиття τ_ε ми маємо $|\tau| \leq |\tau_\varepsilon| < \delta,$ а тому $|\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$

\Leftarrow Дано: $\varepsilon > 0 : \exists \tau_\varepsilon : \forall \tau - \text{підрозбиття } \tau_\varepsilon : \forall \xi : |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$

Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Уже маємо розбиття τ_ε за умовою задачі. Оберемо довільне розбиття τ , щоб $|\tau| < \delta$ (яке саме δ взяти, буде згодом). Розглянемо $\tilde{\tau} = \tau \cup \tau_\varepsilon - \text{підрозбиття } \tau \text{ та } \tau_\varepsilon.$ Звідси тоді $|\sigma(f, \tilde{\tau}, \xi) - I| < \varepsilon.$

$$|\sigma(f, \tau, \xi) - I| \leq |\sigma(f, \tau, \xi) - \sigma(f, \tilde{\tau}, \tilde{\xi})| + |\sigma(f, \tilde{\tau}, \tilde{\xi}) - I|.$$

Нам залишилося оцінити вираз $|\sigma(f, \tau, \xi) - \sigma(f, \tilde{\tau}, \tilde{\xi})|.$ Припустимо, що $\tilde{\tau}$ має на одну точку розбиття більшу за τ (якщо більше, то індуктивно робимо). Ми беремо будь-який набір точок ξ розбиття τ , а також $\tilde{\xi} - \text{такий же набір точок, як } \xi, \text{ але з додатковою точкою (і це для розбиття } \tilde{\tau}).$ Тепер детальніше розпишемо:

$$\sigma(f, \tau, \xi) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{k_0})\Delta x_{k_0} + \dots + f(\xi_m)\Delta x_m;$$

$$\sigma(f, \tilde{\tau}, \tilde{\xi}) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{\text{new}})(x_{k_0} - y) + f(\xi_{k_0})(y - x_{k_0-1}) + \dots + f(\xi_m)\Delta x_m.$$

$$\implies |\sigma(f, \tau, \xi) - \sigma(f, \tilde{\tau}, \tilde{\xi})| = |f(\xi_{k_0}) - f(\xi_{\text{new}})||x_{k_0} - y| \leq 2L \cdot |\tilde{\tau}| \leq 2L \cdot |\tau| < \varepsilon.$$

У такому разі необхідно обрати $\delta = \frac{\varepsilon}{2L},$ де число $L = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$

Отже, $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < 2\varepsilon.$ ■

Remark 2.8.18 Якби працювало друге означення інтегрованості за Ріманом, із цього би також випливала обмеженість (доведення тупо таке саме). Тому я легітимно користувався фактом обмеженості функції.

На даному етапі нам буде достатньо інструментарію, щоб довести даний результат:

Theorem. $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Нижчеописане доведення було придумано математиком Айвеном Нівеном.

Proof.

!Припустимо, що $\pi \in \mathbb{Q}$, тобто розпишемо $\pi = \frac{a}{b}$. Не втрачаючи загальності, вваємо $a, b \in \mathbb{N}$.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ та розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$. Також для зручності позначимо $F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$ – вона визначена коректно, бо функція f , зрозуміло, диференційована. Доведення буде в кілька етапів.

I. $F(0) + F(\pi) \in \mathbb{Z}$.

Розпишемо функцію f в більш розгорнутому вигляді через біном-Ньютона – маємо наступне:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^k b^k a^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k b^k a^{n-k}}{n!} x^{n+k} = \sum_{k=0}^n \frac{c_{n+k}}{n!} x^{n+k} = \\ &= \frac{c_0}{n!} + \frac{c_1}{n!} x + \dots + \frac{c_n}{n!} x^n + \frac{c_{n+1}}{n!} x^{n+1} + \dots + \frac{c_{2n}}{n!} x^{2n}. \end{aligned}$$

У цьому випадку $c_m = 0$ при $m < n$, а в іншому випадку $c_m \in \mathbb{Z}$. Значить, звідси

$$f^{(m)}(0) = 0 \text{ при } m < n \quad f^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!} c_m \text{ при } n \leq m \leq 2n. \text{ Причому } f^{(m)} \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, ми отримаємо $F(0) \in \mathbb{Z}$.

Зауважимо, що $f(\pi - x) = f(x)$, тому звідси $f^{(m)}(\pi - x) = (-1)^m f^{(m)}(x)$. Зокрема при $x = \pi$ маємо $(-1)^m f^{(m)}(\pi) = f^{(m)}(0)$. Таким чином, отримаємо $F(\pi) \in \mathbb{Z}$ (насправді, $F(\pi) = F(0)$).

II. $\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = F(0) + F(\pi).$

Продиференціюємо функцію F двічі та зауважимо, що $f^{(2n+2)} \equiv 0$. Після цього можна зауважити таке співвідношення:

$$F''(x) + F(x) = f(x).$$

Дана рівність дозволяє сказати нам, що $f(x) \sin x = (F'(x) \sin x - F(x) \cos x)'$. Тоді

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = F'(x) \sin x - F(x) \cos x \Big|_0^\pi = F(0) + F(\pi).$$

Можна було просто підставити $f = F'' + F$ та ручками пошукати невизначений інтеграл, якщо важко побачити.

III. $0 < F(0) + F(\pi) < 1$.

Зауважимо, що при $x \in (0, \pi)$ маємо $f(x) > 0$. Також нам відомо, що $0 < \sin x < 1$. Таким чином, звідси $\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx > 0$, а це означає, що $F(0) + F(\pi) \in \mathbb{N}$.

Із іншого боку, при $x \in [0, \pi]$ ми матимемо $0 \leq x(a-bx) \leq \pi a$. Також нам відомо, що $0 \leq \sin x \leq 1$.

Таким чином, звідси $\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx \leq \pi \frac{(\pi a)^n}{n!}$. Нам відомо, що $\pi \cdot \frac{(\pi a)^n}{n!} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тому знайдеться таке натуральне число $n \in \mathbb{N}$, щоб $F(0) + F(\pi) < 1$.

Нарешті, прийшли до суперечності! ■

3 Невласні інтеграли

3.1 Основні означення

Розглянемо два основні випадки:

I. Задано таку функцію $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ таким чином, що $\forall A \in [a, +\infty) : f \in \mathcal{R}([a, A])$.

Definition 3.1.1 Невласним інтегралом I роду називають такий вираз:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Remark 3.1.2 Аналогічно визначається для $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$, для яких $\forall B \in (-\infty, b] : f \in \mathcal{R}([B, b])$.

II. Задано таку функцію $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ таким чином, що $\forall B \in [a, b) : f \in \mathcal{R}([a, B])$, причому функція необмежена навколо точки b .

Definition 3.1.3 Невласним інтегралом II роду називають такий вираз:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow b-0} \int_a^B f(x) dx$$

Дане означення можна переписати інакше, якщо покласти $B = b - \varepsilon$, причому тепер $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$.

Remark 3.1.4 Аналогічно визначається для $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, для яких $\forall A \in (a, b] : f \in \mathcal{R}([A, b])$, причому функція необмежена навколо точки a .

Definition 3.1.5 Якщо границя існує, то невластний інтеграл (I або II роду) називається **збіжним**. Інакше – **розбіжним**.

Надалі якщо я буду позначати $\int_a^\omega f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x) dx$ (де верхня межа – це саме ω), то під цим я матиму на увазі або невластний інтеграл I роду при $\omega = +\infty$, або невластний II другого роду при $\omega = b$. Залежно від роду інтеграла під $A \rightarrow \omega$ матиметься на увазі або $A \rightarrow +\infty$, або $A \rightarrow b-0$.

Example 3.1.6 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} \equiv$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln A = +\infty \text{ при } \alpha = 1$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (A^{1-\alpha} - 1) = +\infty \text{ при } \alpha < 1$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha-1} \text{ при } \alpha > 1$$

Таким чином, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ – збіжний при $\alpha > 1$ та розбіжний при $\alpha \leq 1$.

Example 3.1.7 $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} \equiv$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = -\infty \text{ при } \alpha = 1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha} \text{ при } \alpha < 1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right) = +\infty \text{ при } \alpha > 1.$$

Таким чином, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ – збіжний при $\alpha < 1$ та розбіжний при $\alpha \geq 1$.

3.2 Властивості

Lemma 3.2.1 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді невластний інтеграл повністю збігається з визначеним інтегралом.

Proof.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow b-0} (F(A) - f(a)) \stackrel{(*)}{=} F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

(*) Оскільки $f \in \mathcal{R}([a, b])$, то тоді первісна $F \in C([a, b])$, а тому рівність справедлива. ■

Theorem 3.2.2 Лінійність

Задані функції $f, g \in \mathcal{R}([a, A])$, $\forall A \in [a, \omega)$, причому $\int_a^\omega f(x) dx, \int_a^\omega g(x) dx$ – збіжні. Тоді $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^\omega \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx \text{ – збіжний та при цьому } \int_a^\omega \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx = \alpha_1 \int_a^\omega f(x) dx + \alpha_2 \int_a^\omega g(x) dx.$$

Proof.

$$\begin{aligned} \int_a^\omega \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx &= \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \left(\alpha_1 \int_a^A f(x) dx + \alpha_2 \int_a^A g(x) dx \right) = \\ &= \alpha_1 \int_a^\omega f(x) dx + \alpha_2 \int_a^\omega g(x) dx. \end{aligned}$$

Example 3.2.3 Обчислити $\int_0^{+\infty} 2e^{-x} + \frac{1}{1+x^2} dx$.

Маємо $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$, тобто цей інтеграл – збіжний.

Маємо $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, тобто цей інтеграл – збіжний.

Тоді $\int_0^{+\infty} 2e^{-x} + \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 + \frac{\pi}{2}$ – також збіжний.

Example 3.2.4 Обчислити $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} dx$.

Маємо $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ – збіжний, але $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ – розбіжний.

Отже, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} dx$ просто зобов'язаний бути розбіжним.

Theorem 3.2.5 Адитивність

Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, A])$, $\forall A \in [a, \omega)$.

$\int_a^\omega f(x) dx$ – збіжний $\iff \forall c \in (a, \omega) : \int_c^\omega f(x) dx$ – збіжний.

$\int_a^\omega f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\omega f(x) dx$, незалежно від збіжності.

Proof.

\Rightarrow Дано: $\int_a^\omega f(x) dx$ – збіжний.

Розглянемо $\int_a^A f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^A f(x) dx \implies \int_c^A f(x) dx = \int_a^A f(x) dx - \int_a^c f(x) dx$. Тоді

$$\lim_{A \rightarrow \omega} \int_c^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \left(\int_a^A f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right).$$

$\int_c^\omega f(x) dx = \int_a^\omega f(x) dx - \int_a^c f(x) dx$, тобто наш інтеграл – збіжний, причому

$$\int_a^\omega f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\omega f(x) dx.$$

\Leftarrow Аналогічні міркування. ■

Theorem 3.2.6 Формула заміни змінної

Задано функцію $f \in C([a, \omega))$. Також задано функцію $\varphi \in C'([\alpha, \gamma))$, причому $a = \varphi(\alpha)$, $\lim_{\beta \rightarrow \gamma} \varphi(\beta) \stackrel{\text{або}}{=} \omega$

$\varphi(\gamma) = \omega$, де $\gamma = \begin{cases} b \\ +\infty \end{cases}$. Додатково вимагаємо $\varphi' > 0$ всюди. Тоді

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma)} f(x) dx.$$

Для рівності треба існування хоча б однієї границі.

Proof.

Зафіксуємо $\beta \in [\alpha, \gamma)$. Можна застосувати формулу заміни змінної для функції $\varphi \in C'([\alpha, \beta])$ та $f \in C([\varphi(\alpha), \varphi(\beta)])$.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

Тепер маємо $\beta \rightarrow \gamma$. Оскільки φ - неперервна та строго зростає, то тоді існує φ^{-1} . Таким чином, $\lim_{\beta \rightarrow \gamma} \varphi(\beta) = \omega \iff \lim_{u \rightarrow \omega} \varphi^{-1}(u) = \gamma$. Завдяки цьому, ми можемо довести існування одного інтеграла з існування іншого. ■

Theorem 3.2.7 Формула інтегрування частинами

Задані функції u, v - диференційовані на $[a, \omega)$, причому $\forall A \in [a, \omega) : u', v' \in \mathcal{R}([a, A])$. Тоді

$$\int_a^{\omega} u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^{\omega} - \int_a^{\omega} v(x) u'(x) dx.$$

Тут в позначенні $u(x) v(x) \Big|_a^{\omega} \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{A \rightarrow \omega} u(x) v(x) \Big|_a^A$.

Для рівності треба існування хоча б двох скінченних границь.

Proof.

Дійсно, $\int_a^A u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^A - \int_a^A v(x) u'(x) dx$. А далі вже $A \rightarrow \omega$. ■

Example 3.2.8 Обчислити $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

Якщо обчислювати невизначений інтеграл, то напрошується заміна:

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, тоді звідси $dx = \frac{1}{2}(1 + t^2) dx$.

Виникне $\int \frac{dx}{2 + \cos x} = \int \frac{1}{2 + \cos(2 \operatorname{arctg} t)} \frac{2}{1 + t^2} dt$.

Тепер виникає питання, чи буде ця заміна працювати.

Маємо $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$, для якої $f \in C([0, \pi])$. Також маємо $\varphi(t) = \operatorname{arctg} t$, додатково

$\varphi(\alpha) = 0 \implies \operatorname{arctg} \alpha = 0 \implies \alpha = 0$

$\varphi(\beta) = \pi \implies \operatorname{arctg} \beta = \pi \implies \beta = +\infty$.

Відомо, що $\varphi \in C'([0, +\infty))$ та φ - строго зростає. Тоді заміна змінної працює та

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1 + t^2} \frac{1}{2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{3 + t^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{2 dt}{3 + t^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^A =$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{A}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

До речі, початковий інтеграл був визначеним, а за допомогою заміни, ми перейшли до невластних інтегралів.

Example 3.2.9 Обчислити $\int_0^1 \ln x dx$.

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx \boxed{=}$$

Інтегруємо частинами: $u = \ln x$, $dv = dx$.

$$\boxed{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(x \ln x \Big|_{0+\varepsilon}^1 - x \Big|_{0+\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{-\frac{1}{\varepsilon}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon - 1) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1 = -1.$$

Remark 3.2.10 Завдяки теоремі про заміні змінної, ми можемо перейти із невласного інтеграла II роду в невласний інтеграл I роду.

Заміна: $x = b - \frac{1}{t}$. Бачимо, що зростає, неперервно-диференційована, а також

$$x = a \implies t = \frac{1}{b-a}$$

$$x = b \implies t \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Отже, } \int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt = \int_c^{+\infty} g(t) dt - \text{отримали інтеграл I роду.}$$

Тобто всі вищезгадані теореми та твердження можна було би розглядати лише для інтегралів I роду, але я залишу вже як є й там, й під цим зауваженням.

3.3 Дослідження на збіжність/розбіжність

Theorem 3.3.1 Критерій Коші

Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, A])$, $\forall A \in [a, \omega)$.

$$\int_a^\omega f(x) dx - \text{збіжний} \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \left[\begin{array}{l} \delta, \text{якщо } \omega = b \\ \Delta, \text{якщо } \omega = +\infty \end{array} : \forall \left[\begin{array}{l} A_1, A_2 \in (b - \delta, b), \text{якщо } \omega = b \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty), \text{якщо } \omega = +\infty \end{array} \implies \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon. \right.$$

Proof.

$$\text{Позначимо } \int_a^t f(x) dx = F(t).$$

$$\int_a^\omega f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} F(A) - \text{збіжний} \xLeftrightarrow{\text{критерій Коші для ліміта}} \forall \varepsilon > 0 : \exists \left[\begin{array}{l} \delta, \text{якщо } \omega = b \\ \Delta, \text{якщо } \omega = +\infty \end{array} : \right.$$

$$\forall \left[\begin{array}{l} A_1, A_2 \in (b - \delta, b), \text{якщо } \omega = b \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty), \text{якщо } \omega = +\infty \end{array} \implies |F(A_1) - F(A_2)| = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Example 3.3.2 Довести, що $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$ – розбіжний.

Розглянемо точки $A_1^k = 2k\pi$ та $A_2^k = (2k+1)\pi$. Ми обрали такі точки, щоб $\forall x \in (A_1^k, A_2^k) : \sin x \geq 0$.

$$\text{Тоді } \left| \int_{A_1^k}^{A_2^k} x \sin x dx \right| = \int_{A_1^k}^{A_2^k} x \sin x dx \stackrel{\text{I теор. про середнє}}{=} \xi \int_{A_1^k}^{A_2^k} \sin x dx = \xi (\cos A_1^k - \cos A_2^k) = 2\xi \stackrel{\xi \in (A_1^k, A_2^k)}{\geq} 2A_1^k > 1.$$

Отже, існує $\varepsilon = 1$, для якого, який б $\Delta > 0$ не взяв, знайдуться $A_1^k, A_2^k > \Delta$ при $k = [\Delta] + 1$, щоб $\left| \int_{A_1^k}^{A_2^k} x \sin x dx \right| \geq \varepsilon$. За критерієм Коші, $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$ – розбіжний.

3.3.1 Дослідження для додатних функцій

Тобто в цьому підпідрозділі розглядаються функції $f(x), g(x) \geq 0$ на всьому області визначення.

Theorem 3.3.3 Ознака порівняння в нерівностях

Задані функції $f, g \in \mathcal{R}([a, A]) : \forall A \in [a, \omega)$ – додатні. Відомо, що $\forall x \in [a, \omega) : f(x) \leq g(x)$. Тоді

- 1) Якщо $\int_a^\omega g(x) dx$ – збіжний, то $\int_a^\omega f(x) dx$ – збіжний;
- 2) Якщо $\int_a^\omega f(x) dx$ – розбіжний, то $\int_a^\omega g(x) dx$ – розбіжний.

Proof.

$$\text{Маємо функції } F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad G(t) = \int_a^t g(x) dx.$$

Зафіксуємо такі t_1, t_2 , що $a < t_1 < t_2 < \omega$. Тоді

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x) dx = \int_a^{t_1} f(x) dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \geq \int_a^{t_1} f(x) dx = F(t_1).$$

Таким чином, F – неспадна функція. Аналогічно G – неспадна функція.

1) Нехай відомо, що $\int_a^\omega g(x) dx$ – збіжний, отже,

$$\int_a^\omega g(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} G(A) \stackrel{G - \text{неспадна}}{=} \sup_{t \in [a, \omega)} G(t).$$

Оскільки $\forall x \in [a, \omega) : f(x) \leq g(x)$, то тоді $F(t) \leq G(t)$. А отже, $F(t) \leq \sup_{t \in [a, \omega)} G(t)$.

Через те, що $F(t)$ – обмежена та неспадна, то $\exists \lim_{A \rightarrow \omega} F(A) = \int_a^\omega f(x) dx$ – збіжний.

2) А тепер нехай відомо, що $\int_a^\omega f(x) dx$ – розбіжний.

Якщо припустити, що інтеграл $\int_a^\omega g(x) dx$ – збіжний, то за п. 1), інтеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ – збіжний, що суперечить!

Таким чином, $\int_a^\omega g(x) dx$ – розбіжний. ■

Example 3.3.4 Дослідити на збіжність $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$

Маємо $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}$. Відомо, що $\cos^2 x \leq 1$. Встановимо функцію $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Тоді $\forall x \in (0, 1] : f(x) \leq g(x)$. Відомо, що $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ – збіжний. Отже, за ознакою порівняння, п. 1), $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$ – збіжний.

Theorem 3.3.5 Ознака порівняння в границях

Задані функції $f, g \in \mathcal{R}([a, A]) : \forall A \in [a, \omega)$ – строго додатні. Відомо, що $\exists \lim_{x \rightarrow \omega-0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Тоді

- 1) Якщо $L \neq 0, \neq \infty$, то обидва $\int_a^\omega f(x) dx, \int_a^\omega g(x) dx$ – збіжні або розбіжні;
- 2) Якщо $L = 0$, то зі збіжності $\int_a^\omega g(x) dx$ випливає збіжність $\int_a^\omega f(x) dx$.

Proof.

1) Розглянемо $L \neq 0$, але оскільки $f, g > 0$, то $L > 0$.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = L \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists c \in [a, \omega) : \forall x \geq c : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon.$$

$$\text{Розглянемо } \varepsilon = \frac{L}{2}, \text{ тоді } \frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2} \Rightarrow \frac{L}{2} g(x) < f(x) < \frac{3L}{2} g(x).$$

Якщо $\int_c^\omega g(x) dx$ – збіжний, то $\int_c^\omega \frac{3L}{2} g(x) dx$ – збіжний, то $\int_c^\omega f(x) dx$ – збіжний. Отже, $\int_a^\omega f(x) dx$ – збіжний.

Якщо $\int_c^\omega f(x) dx$ – збіжний, то $\int_c^\omega \frac{L}{2} g(x) dx$ – збіжний, то $\int_c^\omega g(x) dx$ – збіжний. Отже, $\int_a^\omega f(x) dx$ – збіжний.

Це все за арифметичними властивостями збіжності, попередньою ознакою порівняння, п.1). та теоремою про збіжність в адитивності.

Тож $\int_a^\omega f(x) dx, \int_a^\omega g(x) dx$ – одночасно збіжні.

Аналогічно можна довести однакову розбіжність, якщо починати нерівність зліва.

2) Розглянемо $L = 0$, то $\exists \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists c \in [a, \omega) : \forall x \geq c : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon$.

Розглянемо $\varepsilon = 1$, то тоді $f(x) < g(x), \forall x \geq c$, а це вже посилання на попередню теорему. ■

Example 3.3.6 Дослідити на збіжність $\int_0^1 \frac{\arctg x}{x^{\frac{1}{5}}} dx$.

Маємо функцію $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{1}{5}}}$. Візьмемо функцію $g(x) = \frac{1}{x^{-\frac{4}{5}}}$. Тоді $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{1}{5}}}}{\frac{1}{x^{-\frac{4}{5}}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

А тепер оскільки $\int_0^1 \frac{1}{x^{-\frac{4}{5}}} dx$ – розбіжний, то за ознакою порівняння в лімітах, п. 1), $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{1}{5}}} dx$ – розбіжний.

3.3.2 Дослідження для знакодовільних функцій

Definition 3.3.7 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a; A]), \forall A \in [a, \omega)$.

$\int_a^\omega f(x) dx$ називається **абсолютно збіжним**, якщо

$$\int_a^\omega |f(x)| dx \text{ збіжний.}$$

$\int_a^\omega f(x) dx$ називається **умовно збіжним**, якщо

$$\int_a^\omega |f(x)| dx \text{ – розбіжний, але при цьому } \int_a^\omega f(x) dx \text{ – збіжний.}$$

Proposition 3.3.8 Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a; A]), \forall A \in [a, \omega)$.

Відомо, що $\int_a^\omega f(x) dx$ – абсолютно збіжний. Тоді $\int_a^\omega f(x) dx$ – збіжний.

Proof.

$$\int_a^\omega |f(x)| dx \text{ збіжний. За критерієм Коші, } \forall \varepsilon > 0 : \exists \begin{cases} \delta, \text{ якщо } \omega = b \\ \Delta, \text{ якщо } \omega = +\infty \end{cases} : \forall \begin{cases} A_1, A_2 \in (b - \delta, b), \text{ якщо } \omega = b \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty), \text{ якщо } \omega = +\infty \end{cases} \implies \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon \implies \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon.$$

Тоді за критерієм Коші, $\int_a^\omega f(x) dx$ – збіжний. ■

Theorem 3.3.9 Ознака Діріхле

Задані функції $f, g \in \mathcal{R}([a, A]), \forall A \in [a, \omega)$. Відомо, що:

- 1) $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ – обмежена на $[a, \omega)$;
- 2) $g(x)$ – монотонна та нескінченно мала при $x \rightarrow \omega$.

Тоді $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$ – збіжний.

Remark 3.3.10 Взагалі-то кажучи, можна не вимагати, щоб $g \in \mathcal{R}([a, A])$, тому що вона монотонна.

Proof.

Будемо доводити за критерієм Коші про збіжність. Нехай $\varepsilon > 0$.

Оскільки $F(x)$ – обмежена, то звідси $\exists C > 0 : \forall x \in [a, \omega) : |F(x)| \leq C$.

Також g – н.м. при $x \rightarrow \omega$, то звідси $\exists \begin{cases} \delta \\ \Delta \end{cases} : \forall x \in [a, \omega) : \begin{cases} x \in (b - \delta, b) \\ x \in (\Delta, +\infty) \end{cases} \implies |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4C}$.

Тоді в критерії Коші $\exists \begin{cases} \delta \\ \Delta \end{cases} : \forall A_1, A_2 \in [a, \omega) : \begin{cases} A_1, A_2 \in (b - \delta, b) \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty) \end{cases}$

$$\implies \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x) dx \right| \leq$$

Оскільки g – монотонна на $[A_1, A_2]$ та $f \in \mathcal{R}([A_1, A_2])$, то тоді застосуємо другу теорему про середнє

$$\exists \xi \in (A_1, A_2) : \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x) dx = g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx.$$

$$\leq \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx \right| + \left| g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx \right| \leq$$

Оскільки $\left| \int_a^{A_1} f(x) dx \right| \leq C$ та $\left| \int_a^\xi f(x) dx \right| \leq C$, то звідси

$$\left| \int_{A_1}^\xi f(x) dx \right| = \left| \int_a^\xi f(x) dx - \int_a^{A_1} f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^\xi f(x) dx \right| + \left| \int_a^{A_1} f(x) dx \right| \leq 2C.$$

Аналогічними міркуваннями $\left| \int_\xi^{A_2} f(x) dx \right| \leq 2C$.

$$\leq 2Cg(A_1) + 2Cg(A_2) < 2C \frac{\varepsilon}{4C} + 2C \frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon.$$

Отже, за критерієм Коші, $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$ – збіжний. ■

Theorem 3.3.11 Ознака Абеля

Задані функції $f, g \in \mathcal{R}([a, A]), \forall A \in [a, \omega)$. Відомо, що:

- 1) $\int_a^\omega f(x) dx$ – збіжний;
- 2) $g(x)$ – монотонна та обмежена на $[a, \omega)$.

Тоді $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$ – збіжний.

Remark 3.3.12 Різниця між Діріхле полягає в тому, що вимоги до 1) ми посилюємо, а вимоги до 2) ми послаблюємо. Ця теорема, насправді, є прямим наслідком, проте відокремити її можна як теорему.

Proof.

$\int_a^\omega f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \omega} \int_a^x f(t) dt$, тоді вона обмежена. П. 1) уже маємо.

g – монотонна та обмежена, тому $\exists \lim_{x \rightarrow \omega} g(x) = L$. Далі розглянемо функцію $h(x) = g(x) - L$, яка також монотонна, але вже н.м. при $x \rightarrow \omega$. П. 2) уже маємо для $h(x)$.

Тоді $\int_a^\omega f(x)h(x) dx$ – збіжний. Отже,

$$\int_a^\omega f(x)g(x) dx = \lim_{x \rightarrow \omega} \int_a^x f(t)g(t) dt = \lim_{x \rightarrow \omega} \int_a^x f(t)h(t) + Lf(t) dt = \int_a^\omega f(x)h(x) dx + L \int_a^\omega f(x) dx -$$

збіжний. ■

Example 3.3.13 Інтеграл Діріхле

Дослідимо на збіжність $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Маємо $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

До речі, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, тож $x = 0$ – усувна точка, тобто вона не є особливою точкою. Тому $\forall A \in [0, +\infty) : \frac{\sin x}{x} \in \mathcal{R}([0, A])$.

Перевіримо умови Діріхле.

$$\left| \int_0^A f(x) dx \right| = \left| \int_0^A \sin x dx \right| = | -\cos A + \cos 0 | \leq 2, \text{ виконано } \forall A \geq 0 - \text{ встановимо } M = 2. \text{ Тоді}$$

обмежена.
 $g(x) = \frac{1}{x}$ – монотонна, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Таким чином, за ознакою Діріхле, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ – збіжний.

Дослідимо тепер на абсолютну збіжність.

Припустимо, що це, дійсно, абсолютно збіжний інтеграл, тобто $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx -$

збіжний. Зауважимо, що $|\sin x| \geq \sin^2 x$. Тоді за ознакою порівняння в нерівностях, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$

– збіжний. Тому збіжними будуть два інтеграли:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos^2 x}{x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1 + \cos 2x}{2x} dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} dx$$

Звідси $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ та $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} dx$ – збіжні. Проте за еталоном, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ НЕ є збіжним.
 Суперечність!
 Висновок: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ – умовно збіжний.

3.4 Особливі випадки

I. Задано функцію $f \in \mathcal{R}([a, b])$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

причому $c \in \mathbb{R}$ – довільне число.

Збіжним буде даний інтеграл, якщо інтеграли в правій частині всі збіжні. У протилежному випадку – розбіжний.

Example 3.4.1 Обчислити $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

Спочатку $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \arctg(x + 1) + C$.

Оберемо точку 0 із проміжка $(-\infty, +\infty)$. Отримаємо два інтеграли:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \arctg(x + 1) \Big|_{-\infty}^0 = \arctg 1 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \arctg(x + 1) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctg 1.$$

Таким чином, два інтеграли збіжні, а тому збіжним буде перший інтеграл, причому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \pi.$$

II. Задано функцію $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$, $\forall \alpha, \beta \in (a, b)$, причому функція необмежена навколо точки a, b . Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

причому $c \in (a, b)$ – довільне число.

Збіжним буде даний інтеграл, якщо інтеграли в правій частині всі збіжні. У протилежному випадку – розбіжний.

Example 3.4.2 Обчислити $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Оберемо точку 0 із проміжка $(-1, 1)$. Отримаємо два інтеграли:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, два інтеграли збіжні, а тому збіжним буде перший інтеграл, причому

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

III. Задано функцію $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$, $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b] \setminus \{c\}$, причому функція необмежена навколо точки c . Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Збіжним буде даний інтеграл, якщо інтеграли в правій частині всі збіжні. У протилежному випадку – розбіжний.

IV. Задано функцію $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta]), \forall [\alpha, \beta] \subset (a, +\infty)$, причому функція необмежена навколо точки a . Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

причому $c \in \mathbb{R}$ – довільне число.

Збіжним буде даний інтеграл, якщо інтеграли в правій частині всі збіжні. У протилежному випадку – розбіжний. Тут аналогічно можна розглянути випадок із нескінченності до точки необмеженості.

Example 3.4.3 Дослідити на збіжність $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)}$.

Маємо комбінований інтеграл, що розіб'ється ось так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x(x-9)} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x-9)} + \int_0^1 \frac{dx}{x(x-9)} + \int_1^9 \frac{dx}{x(x-9)} + \int_9^{10} \frac{dx}{x(x-9)} + \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)}.$$

Для збіжності треба, щоб абсолютно всі інтеграли з цього доданку збігались. Але $\int_0^1 \frac{dx}{x(x-9)}$ розбіжний – це легко показати.

Отже, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)}$ – розбіжний.

3.5 Невласний інтеграл в сенсі головного значення по Коші

Definition 3.5.1 Головним значенням невластного інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ називається ось це:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x) dx$$

Definition 3.5.2 Головним значенням невластного інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, де функція f необмежена в точці $c \in (a, b)$, називається ось це:

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

Remark 3.5.3 Якщо один із двох інтегралів збігається, то тоді й v.p. інтеграл теж буде збігатись. В зворотному це невірно.

Example 3.5.4 Контрприклад

Маємо $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ – розбіжний (там виникне еталон).

Але v.p. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln \varepsilon) = 0$ – збіжний.

Маємо $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ – розбіжний.

Але v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \right) = 0$ – збіжний.

Example 3.5.5 Обчислити v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)}$.

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \frac{dx}{x(x-9)} = \lim_{A \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x(x-9)} + \int_{\varepsilon}^{9-\varepsilon} \frac{dx}{x(x-9)} + \int_{9+\varepsilon}^A \frac{dx}{x(x-9)} \right) \quad \boxed{=}$$

Одразу скажу, що $\int \frac{dx}{x(x-9)} = \frac{1}{9} \ln |9-x| - \frac{1}{9} \ln |x|$ (ще плюс стала, але це не сильно треба).

$$\boxed{=} \frac{1}{9} \lim_{A \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((\ln |9+\varepsilon| - \ln |\varepsilon| - \ln |9+A| + \ln |A|) + (\ln |\varepsilon| - \ln |9-\varepsilon| - \ln |9-\varepsilon| + \ln |\varepsilon|) +$$

$$\begin{aligned}
& + (\ln |9 - A| - \ln |A| - \ln |\varepsilon| + \ln |9 + \varepsilon|) = \\
& = \frac{1}{9} \lim_{A \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 \ln |9 + \varepsilon| - 2 \ln |9 - \varepsilon| - \ln |9 + A| + \ln |9 - A|) = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln |9 - A| - \ln |9 + A|) = \\
& = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{9 - A}{9 + A} \right| = 0.
\end{aligned}$$

4 Ряди

Definition 4.0.1 Рядом називають формальну нескінченну суму нескінченної послідовності чисел $\{a_n, n \geq 1\}$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Частковою сумою даного ряду називають суму перших k членів:

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

В такому випадку в нас виникає послідовність часткових сум $\{S_k, k \geq 1\}$.

Якщо така послідовність часткових сум є збіжною, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають **збіжним** та **сумма** цього ряду дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$$

Інакше – **розбіжним**.

Example 4.0.2 Знайдемо суму: $1 + q + q^2 + \dots$

Розглянемо часткову суму $S_k = 1 + q + \dots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$ – сума геометричної прогресії.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1 - q}, & |q| < 1 \\ \infty, & |q| > 1 \end{cases}$$

При $q = 1$ маємо: $1 + 1 + 1 + \dots$, тобто $S_k = k \implies \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty$.

Підсумуємо:

- сума є збіжною при $|q| < 1$ та $1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}$;

- сума є розбіжною при $|q| \geq 1$.

4.1 Первинний аналіз збіжності та арифметика рядів

Proposition 4.1.1 Необхідна ознака збіжності ряду

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Proof.

Зафіксуємо часткові суми: $S_{k+1} = \sum_{n=1}^{k+1} a_n$ $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$.

Оскільки ряд є збіжним, то звідси

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S. \text{ Тоді } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{k+1} - S_k) = S - S = 0. \quad \blacksquare$$

Example 4.1.2 Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$

Оскільки $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$, то за необхідною ознакою збіжності, маємо, що ряд – розбіжний.

Theorem 4.1.3 Критерій Коші

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon$.

Proof.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний $\iff \exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ - збіжна границя $\xLeftrightarrow{\text{критерій Коші}}$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : |S_{k+p} - S_k| = \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Example 4.1.4 Важливий

Розглянемо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонічний ряд. Доведемо, що даний ряд - розбіжний, використовуючи

критерій Коші, тобто $\exists \varepsilon > 0 : \forall K : \exists k_1, k_2 \geq K : \left| \sum_{n=k_1}^{k_2} \frac{1}{n} \right| \geq \varepsilon$

Дійсно, якщо $\varepsilon = 0.5$, $k_1 = K$, $k_2 = 2K$, то отримаємо $\left| \sum_{n=K}^{2K} \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \dots + \frac{1}{2K} > K \frac{1}{2K} = 0.5$.

Отже, цей ряд - розбіжний.

Один з прикладів, що підтверджує, що необхідна умова збіжності не є достатньою.

Remark 4.1.5 Коли ми виводили константу Ойлера-Маскероні $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$.

Позначимо $H_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$ - часткова сума гармонічного ряду. Тоді $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n)$. Ця границя

дозволяє показати нам, що $H_n \sim \gamma + \ln n$ при $n \rightarrow \infty$. Дійсно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{\gamma + \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{H_n - \ln n}{\gamma + \ln n} + \frac{\ln n}{\gamma + \ln n} \right) = 0 + 1 = 1.$$

Це дозволяє приблизно обчислити значення часткової суми гармонічного ряду. Зокрема $H_{10^6} \approx \gamma + \ln 10^6 \approx 14.392 \dots$. Тут можна зауважити, що гармонічний ряд надзвичайно повільно росте, але все одно прямує до нескінченності (тобто розбіжний, як ми зазначили).

Proposition 4.1.6 Задані $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжні. Тоді збіжними будуть й наступні ряди:

- 1) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Proof.

Доведемо друге. Перший пункт аналогічно. Зафіксуємо часткові суми:

$$2) S_k(a) = \sum_{n=1}^k a_n, S_k(b) = \sum_{n=1}^k b_n.$$

$$\text{Тоді } S_k(a) + S_k(b) = \sum_{n=1}^k (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^k a_n + \sum_{n=1}^k b_n.$$

Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжні, то $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(a) = S(a)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(b) = S(b)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k(a) + S_k(b)) = S(a) + S(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad \blacksquare$$

Definition 4.1.7 Хвостом (або остачею) ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають ряд $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, де $m \in \mathbb{N}$.

Тобто ми відкидаємо перші $m - 1$ доданків та сумуємо, починаючи з m .

Proposition 4.1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний $\iff \sum_{n=m}^{\infty} a_n$ - збіжний, причому $\forall m \in \mathbb{N}$.

Proof.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збіжний} \xLeftrightarrow{\text{критерій Коші}} \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \iff \\ \iff \exists K' = \max\{K, m\} : \forall k \geq K' : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \iff \sum_{n=m}^{\infty} a_n - \text{збіжний}. \quad \blacksquare$$

4.2 Знакододатні ряди

Тобто розглядаємо зараз лише ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, такі, що $\forall n \geq 1 : a_n \geq 0$.

Proposition 4.2.1 $\{S_k, k \geq 1\}$ – монотонно неспадна послідовність.

Proof.

$$\forall k \geq 1 : S_{k-1} - S_k = a_{k+1} \geq 0 \Rightarrow S_k \leq S_{k+1}. \quad \blacksquare$$

Proposition 4.2.2 Якщо $\{S_k, k \geq 1\}$ – обмежена, то тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

Proof.

Щойно дізнались що послідовність часткових сум монотонна. До того ж, вона є обмеженою за умовою. Отже, $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$, тобто $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний. ■

Theorem 4.2.3 Ознака порівняння в нерівностях

Задані $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ таким чином, що $\forall n \geq 1 : a_n \leq b_n$. Тоді:

- 1) якщо $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжний, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний теж;
- 2) якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – розбіжний, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – розбіжний теж.

Proof.

Оскільки $\forall n \geq 1 : a_n \leq b_n$, то тоді $\sum_{n=1}^k a_n \leq \sum_{n=1}^k b_n$, де $k \in \mathbb{N}$.

- 1) Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжний ряд, тоді $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k b_n = \tilde{S}$.

Отже, в нашій нерівності, якщо $k \rightarrow \infty$, то маємо $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \tilde{S}$.

Отже, існує границя, а тому $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

- 2) Це є оберненим твердженням до 1). ■

Example 4.2.4 Важливий

Розглянемо далі $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – ряд Діріхле. Дослідимо на збіжність.

Нехай $\alpha < 1$, тоді $\forall n \geq 1 : \frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$.

За ознакою порівняння та минулим прикладом, отримаємо, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – розбіжний.

Нехай $\alpha > 1$, тоді отримаємо таку оцінку:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} \right) + \dots \leq$$

$$\leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \dots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}}.$$

Наш ряд – обмежений, а послідовність часткових сум – монотонна. Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – збіжний.

Підсумуємо: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{розбіжний, } \alpha \leq 1 \\ \text{збіжний, } \alpha > 1 \end{cases}.$

До речі, на основі цього прикладу ми можемо визначити так звану ζ -функцію Рімана таким чином:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

У силу того, коли даний ряд збіжний, ми вимагаємо $s > 1$.

Theorem 4.2.5 Ознака порівняння в границях

Задані $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, тут члени строго додатні. Відомо, що $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$. Тоді:

1) Якщо $l \neq 0$ та $l \neq \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжні або розбіжні одночасно;

2) Якщо $l = 0$, то зі збіжності $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Remark 4.2.6 До речі, $l \geq 0$, оскільки всі члени – додатні.

Proof.

1) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon$.

Оберемо $\varepsilon = \frac{l}{2}$, тоді $\frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2} \Rightarrow \frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3l}{2} b_n, \forall n \geq N$.

Припустимо, що $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ – збіжний, тоді збіжним буде $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{3l}{2} b_n$, а отже, за попередньою теоремою,

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ – збіжний. Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

Якщо $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ – збіжний, тоді збіжним буде $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{l}{2} b_n$, а отже $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ – збіжний. Тому $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжний.

Аналогічними міркуваннями доводиться розбіжність.

Тобто $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжні або розбіжні одночасно.

2) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l = 0$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon$

Оберемо $\varepsilon = 1$, тоді $\forall n \geq N : a_n < b_n$. Тоді виконується попередня теорема, один з двох пунктів. ■

Example 4.2.7 Дослідити на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{1+n^2}$.

Маємо $a_n = \frac{\arctg n}{1+n^2}$. Встановимо $b_n = \frac{1}{n^2}$. Обчислимо границю їхніх відношень:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \arctg n}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg n}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

А оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – збіжний, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{1+n^2}$ – збіжний.

Theorem 4.2.8 Ознака д'Аламбера

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – строго додатний. Тоді:

- 1) Якщо $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд – збіжний;
 2) Якщо $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд – розбіжний.

Proof.

1) Маємо $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, тоді $\forall \varepsilon > 0$, зокрема для $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$, проміжок $(q+\varepsilon, +\infty)$ має скінченну

кількість членів послідовності $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$, тобто $\exists N : \forall n \geq N : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = \frac{1+q}{2}$.

Звідси випливає, що $a_{n+1} < \frac{1+q}{2} a_n$.

$$\Rightarrow a_{N+1} < \frac{1+q}{2} a_N$$

$$\Rightarrow a_{N+2} < \frac{1+q}{2} a_{N+1} < \left(\frac{1+q}{2} \right)^2 a_N$$

\vdots

$$\Rightarrow \forall k \geq 1 : a_{N+k} < \left(\frac{1+q}{2} \right)^k a_N$$

$$\text{Розглянемо ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2} \right)^k a_N = a_N \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2} \right)^k$$

Вираз під сумою буде менше за 1, цей ряд – геометрична прогресія, збіжний.

Тоді $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ – збіжний, отже, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

2) Маємо $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, тоді $\forall \varepsilon > 0$, зокрема для $\varepsilon = \frac{q-1}{2}$, проміжок $(-\infty, q-\varepsilon)$ має скінченну

кількість членів послідовності $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$, тобто $\exists N : \forall n \geq N : \frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon = \frac{1+q}{2}$.

Аналогічними міркуваннями отримаємо $\forall k \geq 1 : a_{N+k} > \left(\frac{q+1}{2} \right)^k a_N$.

$$\text{Розглянемо ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q+1}{2} \right)^k a_N = a_N \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q+1}{2} \right)^k$$

А тут геометрична прогресія при виразі, що більше одиниці – розбіжний.

Тоді $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ – розбіжний, отже, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – розбіжний. ■

Corollary 4.2.9 Ознака д'Аламбера (стандартний вигляд)

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – строго додатний. Нехай $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тоді:

- 1) Якщо $q < 1$, то ряд – збіжний;
 2) Якщо $q > 1$, то ряд – розбіжний;
 3) Якщо $q = 1$, то відповіді нема.

Proof.

Якщо $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то автоматично $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $\exists \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Ну а далі чисто за попередньою теоремою.

3) А тепер в чому проблема при $q = 1$. Розглянемо обидва ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Використаємо

для обох ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot n = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 = 1.$$

Результат – однаковий, проте один ряд – розбіжний, а інший – збіжний. Тож $q = 1$ не дає відповіді, шукаємо інші методи. ■

Example 4.2.10 Дослідити на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$.

$$a_n = \frac{3^n(n!)^2}{(2n)!} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{3}{4} < 1.$$

Отже, наш ряд – збіжний за д’Аламбером.

Theorem 4.2.11 Радикальна ознака Коші

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – додатний. Нехай $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тоді:

- 1) Якщо $q < 1$, то ряд – збіжний;
- 2) Якщо $q > 1$, то ряд – розбіжний;
- 3) Якщо $q = 1$, то відповіді нема.

Proof.

1) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, тобто $\forall \varepsilon > 0$: проміжок $(q + \varepsilon, +\infty)$ має скінченну кількість елементів, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \implies a_n < (q + \varepsilon)^n$.

Оберемо $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тоді маємо: $a_n < \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$.

Розглянемо ряд $\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ – геометрична прогресія, вираз в сумі менше за одиниці – збіжний.

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ – збіжний, а тому $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

2) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, тобто $\exists \{n(p)\sqrt[n(p)]{a_{n(p)}}, p \geq 1\} : \lim_{p \rightarrow \infty} n(p)\sqrt[n(p)]{a_{n(p)}} = q$ – така підпоследовність, що містить цю границю $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists P : \forall p \geq P : \left| n(p)\sqrt[n(p)]{a_{n(p)}} - q \right| < \varepsilon$.

Оберемо $\varepsilon = \frac{q-1}{2}$, тоді $a_{n(p)} > \left(\frac{q+1}{2}\right)^{n(p)}$. Тоді $\lim_{p \rightarrow \infty} a_{n(p)} \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^{n(p)} = \infty$.

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Це означає, що необхідна умова збіжності не виконується – розбіжний.

3) Для $q = 1$ треба розглянути такі самі ряди як при доведенні ознаки д’Аламбера. ■

Example 4.2.12 Дослідити на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

$$a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} \quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Отже, наш ряд – збіжний за Коші.

Theorem 4.2.13 Інтегральна ознака Коші

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – додатний. Встановимо функцію $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, яка під такими умовами:

- 1) $\forall n \geq 1 : a_n = f(n)$;
- 2) f не зростає на $[1, +\infty)$.

Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ збіжні або розбіжні одночасно.

Proof.

Оскільки $f(x)$ спадає, то $\forall k \geq 1 : \forall x \in [k, k+1] :$

$$a_k \geq f(x) \geq a_{k+1}.$$

$$a_k = \int_k^{k+1} a_k dx \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq \int_k^{k+1} a_{k+1} dx = a_{k+1}.$$

Просумуємо ці нерівності від $k = 1$ до $k = M$, отримаємо:

$$\sum_{k=1}^M a_k \geq \int_1^{M+1} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^M a_{k+1}.$$

Нехай $\sum_{k=1}^M$ – збіжний. Тоді якщо $M \rightarrow \infty$, то отримаємо, що $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ приймає скінченне значення, а тому збіжний.

Нехай $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ – збіжний. Тоді $\sum_{k=1}^M a_{k+1}$ – обмежений. А оскільки він додатний, то звідси, збіжний.

Випадок розбіжності доводиться від супротивного. ■

Example 4.2.14 Дослідити на збіжність $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

Маємо функцію $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$. Зрозуміло, що f спадає на $[2, +\infty)$, бо $x, \ln^2 x$ там зростають.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2} - \text{збіжний.}$$

Отже, наш ряд – збіжний за Коші інтегральним.

Theorem 4.2.15 Ознака Раабе

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – строго додатний. Нехай $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q$. Тоді:

- 1) Якщо $q < 1$, то ряд – розбіжний;
- 2) Якщо $q > 1$, то ряд – збіжний;
- 3) Якщо $q = 1$, то відповіді нема.

Proof.

Маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q$, тобто можна сказати $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - q = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Або $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \rightarrow \infty$.

Одночасно ми розглянемо $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$, тоді звідси $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \rightarrow \infty$.

1) $q > 1$, тоді ми зможемо знайти $\alpha \in (1, q)$. Звідси

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{q - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) > 0, \text{ починаючи з деякого номеру.}$$

Тоді $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{b_{n+1}} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Оскільки $\alpha > 1$, то тоді $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжний. А із цієї нерівності

впливає, що $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

2) $q < 1$, то тоді ми зможемо знайти $\alpha \in (q, 1)$. А далі всі процедури аналогічні.

3) Розглянути ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний та $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ – збіжний за інтегральною ознакою Коші.

Обидві дають одиничну границю. ■

Example 4.2.16 Дослідити на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^{2022}$.

$a_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^{2022}$. Тоді маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^{2022} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^{2022} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2022}{2n+1} + o\left(\frac{1}{2n+1}\right) - 1}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2022n}{2n+1} = 1011 > 1.$$

Таким чином, заданий ряд – збіжний за Раабе.

4.3 Знакозмінні ряди

Definition 4.3.1 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Definition 4.3.2 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **умовно збіжним**, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний, але $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – не збіжний.

Proposition 4.3.3 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – абсолютно збіжний. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

Proof.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ – абсолютно збіжний} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ – збіжний} \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \\ \left| \sum_{n=k}^{k+p} |a_n| \right| < \varepsilon &\implies \left| \sum_{n=k}^{k+p} a_n \right| \leq \left| \sum_{n=k}^{k+p} |a_n| \right| < \varepsilon \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ – збіжний.} \end{aligned}$$

Theorem 4.3.4 Ознака Ляйбніца

Задано ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, де $a_n \geq 0$ – **знакозмінний ряд**. Відомо, що:

- 1) $\{a_n, n \geq 1\}$ – монотонно спадає;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Тоді заданий ряд – збіжний.

Proof.

Розглянемо послідовність часткових сум $\{S_{2k}, k \geq 1\}$. Отримаємо наступне:

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \geq 0.$$

$$S_{2k} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(a_{2k-2} - a_{2k-1})}_{\geq 0} - a_{2k} \leq a_1.$$

Тобто $0 \leq S_{2k} \leq a_1$ – обмежена послідовність.

Також $S_{2(k+1)} = S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \geq S_{2k}$ – монотонна. Таким чином, $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S$.

Розглянемо ще одну послідовність часткових сум $\{S_{2k+1}, k \geq 1\}$. Зрозуміло, що $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$
 $\implies \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} + \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = S + 0 = S$.

Остаточно, маємо, що послідовність $\{S_m, m \geq 1\}$ – збіжна, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ – збіжний. ■

Corollary 4.3.5 $\forall k \geq 1 : |S - S_k| \leq a_{k+1}$.

Proof.

Розглянемо хвіст ряду $S - S_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. А також розглянемо $\tilde{S}_m = \sum_{n=k+1}^m (-1)^{n+1} a_n$. Тоді

$$\tilde{S}_m = S_m - S_k = (-1)^{k+1} (a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+4} - a_{k+5}) - \dots - \left[\begin{array}{c} (a_{m-1} - a_m), k \text{ } \dot{2} \\ a_m, k \dot{2} \end{array} \right]$$

$$\implies |\tilde{S}_m| = \left| a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+4} - a_{k+5}) - \dots - \left[\begin{array}{c} (a_{m-1} - a_m), k \text{ } \dot{2} \\ a_m, k \dot{2} \end{array} \right] \right| =$$

$$= a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+4} - a_{k+5}) - \dots - \left[\begin{array}{c} (a_{m-1} - a_m), k \text{ } \dot{2} \\ a_m, k \dot{2} \end{array} \right] \leq a_{k+1}$$

$$\implies |S - S_k| = \lim_{m \rightarrow \infty} |\tilde{S}_m| \leq a_{k+1}. \quad \blacksquare$$

Example 4.3.6 Обчислити суму $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ з точністю до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Зрозуміло, що $a_n = \frac{1}{n!} \geq 0$, монотонно спадає та н.м. Отже, виконуються ознаки Ляйбніца, а тому й отриманий наслідок.

$$|S - S_k| \leq a_{k+1} < \varepsilon \implies \frac{1}{(k+1)!} < \frac{1}{10^5} \implies (k+1)! > 100000.$$

Достатньо взяти нам $k = 8$. Тому ми отримаємо:

$$S \approx S_8 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} = \frac{-3641}{5760}.$$

Theorem 4.3.7 Ознаки Діріхле та Абеля

Задано ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Нехай виконано один з двох блоків умов:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^k a_n - \text{обмежена.} \\ \{b_n, n \geq 1\} - \text{монотонна та н.м.} \\ \text{ознака Діріхле} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збіжний.} \\ \{b_n, n \geq 1\} - \text{монотонна та обмежена.} \\ \text{ознака Абеля} \end{array} \right.$$

Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ - збіжний.

Proof.

Спочатку почнемо з ознаки Діріхле. Припустимо b_n спадає. Застосуємо критерій Коші.

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n b_n \right| = \left| A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1} - \sum_{n=k+1}^{k+p-1} A_n (b_{n+1} - b_n) \right| = \left| A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1} + \sum_{n=k+1}^{k+p-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \right| \leq$$

$$|A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1}| + \sum_{n=k+1}^{k+p-1} |A_n| |b_{n+1} - b_n| \leq$$

За умовою, $A_k = \sum_{n=1}^k a_n$ - обмежена, тобто $\exists C > 0 : \forall k \geq 1 : |A_k| \leq C$.

Також b_n - н.м., тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : |b_k| < \varepsilon$.

Тоді $|A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1}| \leq |A_{k+p}| |b_{k+p}| + |A_k| |b_{k+1}| < 2C\varepsilon$.

Також $\sum_{n=k+1}^{k+p-1} |A_n| |b_{n+1} - b_n| \leq C \sum_{n=k+1}^{k+p-1} (b_n - b_{n+1}) = C(b_{k+1} - b_{k+p}) \leq C b_{k+1} < C\varepsilon$

$\leq 3C\varepsilon$. Виконано $\forall \varepsilon > 0$ та $\forall k \geq K : \forall p \geq 1$. Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ - збіжний.

Далі доводимо ознаку Абеля. Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний, то тоді обмежений. Оскільки $\{b_n\}$ монотонна та обмежена, то $b_n \rightarrow B$. Якщо розглянути $c_n = b_n - B$, то маємо $\{c_n, n \geq 1\}$ - монотонна та н.м.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ - збіжний за Діріхле. А далі ясно, що $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ - збіжний. ■

Example 4.3.8 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Будемо для цього використовувати ознаку Діріхле, встановимо $a_n = \sin n, b_n = \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \sin n &= \sum_{n=1}^k \frac{\sin(1 \cdot n) \sin \frac{1}{2}}{\sin \frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \sum_{n=1}^k \left(\cos \left(n - \frac{1}{2} \right) - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \left(\cos \frac{1}{2} - \cos \frac{3}{2} + \cos \frac{3}{2} - \cos \frac{5}{2} + \dots + \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \left(\cos \frac{1}{2} - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\frac{\sin \frac{k+1}{2} \sin \frac{k}{2}}{\sin \frac{1}{2}}.$$

Таким чином, $\left| \sum_{n=1}^k \sin n \right| = \left| \frac{\sin \frac{k+1}{2} \sin \frac{k}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^k \sin n$ – обмежена.

Зрозуміло, що $\frac{1}{n}$ монотонна та н.м.

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ – збіжний.

Example 4.3.9 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} e^{-n}$.

Будемо для цього використовувати ознаку Абеля, встановимо $a_n = \frac{\sin n}{n}, b_n = e^{-n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ – збіжний за попереднім прикладом.

e^{-n} – монотонна, оскільки $e^{-n-1} - e^{-n} = e^{-n}(e^{-1} - 1) < 0$.

e^{-n} – обмежена, оскільки $0 < e^{-n} < e$.

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} e^{-n}$ – збіжний.

4.4 Трошки детально про абсолютно збіжні ряди

Для кожного числа $a \in \mathbb{R}$ визначимо додатну та від’ємну частину числа:

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases} \quad a^- = \begin{cases} 0, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

Маємо кілька зауважень. Перше з них – це $0 \leq a^+ \leq |a|$ та $0 \leq a^- \leq |a|$. Більш того, $a = a^+ - a^-$. Нарешті, $|a| = a^+ + a^-$.

Тепер ми можемо розділити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на додатну частину $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ та на від’ємну частину $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Proposition 4.4.1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний абсолютно $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ – обидва збіжні (як невід’ємні ряди). Більш того, в такому випадку матимемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Proof.

Для доведення в обидві сторони треба зауважити, що справедлива рівність:

$$0 \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n| = \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n^+ + \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n^-$$

А з даної рівності безпосередньо випливають дві нерівності:

$$0 \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n^+ \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n|$$

$$0 \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n^- \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n|.$$

Ми таким чином доведемо твердження в обидві сторони.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n^+ - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |a_n| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n^+ + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

■

Definition 4.4.2 Заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Перестановкою даного ряду назвемо ряд $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$, для якого виконана така умова:

$$\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} - \text{бієкція} : b_m = a_{f(m)}$$

Example 4.4.3 Наприклад маємо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$. Ми переставимо члени так, що спочатку йдуть парні члени, а згодом непарні – отримаємо новий ряд $\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + 1 + \frac{1}{3} + \dots$.

Формально кажучи, ми встановили бієкцію $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ таким чином: $b_1 = a_2, b_2 = a_4, \dots$ та для деяких індексів $b_{m_1} = a_1, b_{m_2} = a_3, \dots$.

Remark 4.4.4 Оскільки f – бієкція, то замість рівності $b_m = a_{f(m)}$ можна написати $a_m = b_{f^{-1}(m)}$.

Theorem 4.4.5 Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – абсолютно збіжний. Тоді кожна перестановка даного ряду збігається туди ж.

Proof.

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – абсолютно збіжний. Доведення розіб'ємо на два випадки:

I. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – невід'ємний ряд.

Зафіксуємо перестановочний ряд $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$, у цьому випадку $b_m = a_{f(m)}$ та $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – бієкція.

Нехай $\varepsilon > 0$. За умовою збіжності, існує $N \in \mathbb{N}$, для якого $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^N a_k < \varepsilon$.

Хочеться підібрати такий номер $M \in \mathbb{N}$, щоб члени a_1, a_2, \dots, a_N містилися серед членів b_1, b_2, \dots, b_M . Зауважимо, що $a_1 = b_{f^{-1}(1)}, \dots, a_N = b_{f^{-1}(N)}$, так можемо записати через бієкцію f . Позначимо $f^{-1}(1) = m_1, \dots, f^{-1}(N) = m_N$, а згодом зафіксуємо наше $M = \max\{m_1, \dots, m_N\}$. Тоді в нас буде картина, яку ми бажали:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_N\} = \{b_{m_1}, b_{m_2}, \dots, b_{m_N}\} \subset \{b_1, b_2, \dots, b_M\}.$$

У результаті такого вкладення (в силу невід'ємності членів) маємо $\sum_{k=1}^N a_k \leq \sum_{j=1}^M b_j$.

Нехай маємо $m > M$, тоді звідси $\sum_{k=1}^N a_k \leq \sum_{j=1}^m b_j \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Маючи додатково нерівність вище,

отримаємо оцінку $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{j=1}^m b_j < \varepsilon$. Залишилося спрямувати $m \rightarrow \infty$ – отримаємо оцінку

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{j=1}^{\infty} b_j \leq \varepsilon < 2\varepsilon. \text{ Оскільки це виконано при всіх } \varepsilon > 0, \text{ то тоді } \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

II. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – довільний ряд.

Зафіксуємо перестановочний ряд $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$. Тоді $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^+, \sum_{m=1}^{\infty} b_m^-$ – перестановочні ряди для $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Оскільки ці ряди невід'ємні, то для них маємо $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{m=1}^{\infty} b_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Отже, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$

також буде абсолютно збіжним рядом, при цьому

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=1}^{\infty} b_m^+ - \sum_{m=1}^{\infty} b_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad \blacksquare$$

Example 4.4.6 Обчислити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Цілком зрозуміло, що це збіжний ряд, (за д'Аламбером), причому абсолютно. Отже, ми можемо переставляти члени ряду, оскільки від цього сума не зміниться за теоремою вище.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \right) + \dots = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2^3} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2. \end{aligned}$$

4.5 Трошки про умовно збіжні ряди

Theorem 4.5.1 Теорема Рімана

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – умовно збіжний. Тоді для довільного $M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ буде існувати перестановка даного ряду, яка буде збіжною до числа M .

Proof.

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – умовно збіжний. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ та $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$ (тобто обидва ряди розбіжні).

Дійсно, якби обидва ряди були збіжними, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ став би абсолютно збіжним (неможливо). Якби лише один з рядів був розбіжним, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, тобто був би розбіжним (неможливо).

Нехай заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ так, щоб $a_n \neq 0$ (якщо знайдеться елемент $a_{n_0} = 0$, то члени ряду перенумеруємо).

Тепер фіксуємо довільне число $M \geq 0$.

Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$, то тоді послідовність часткових сум додатних членів – необмежена, тобто $\exists k_1 \geq 1$ (оберу найменше можливе) : $a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_{k_1}^+ > M$.

Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$, то тоді послідовність часткових сум від'ємних членів – необмежена, тобто $\exists m_1 \geq 1$ (оберемо найменше можливе) : $a_1^- + a_2^- + \dots + a_{m_1}^- > a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+ - M$. Тобто звідси отримаємо $a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+ - a_1^- - \dots - a_{m_1}^- < M$.

Опишу словесно, що ми зробили. Ми взяли перші k_1 додатних членів нашого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, допоки сума не перевищить M ; а потім взяли перші m_1 від'ємних членів нашого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, допоки сума не стане меншою за M .

Далі робимо ту саму процедуру. Ми оберемо перші k_2 додатних членів ряду $\sum_{n=k_1+1}^{\infty} a_n$, допоки сума не перевищить M ; а потім оберемо перші m_2 від'ємних членів ряду $\sum_{n=m_1+1}^{\infty} a_n$, допоки сума не стане меншою за M .

⋮

У нас виникне ряд $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = (a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+) - (a_1^- + \dots + a_{m_1}^-) + (a_{k_1+1}^+ + \dots + a_{k_2}^+) - (a_{m_1+1}^- + \dots + a_{m_2}^-) + \dots$

– це перестановочний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Позначимо $\sum_{j=1}^q b_j = S_q$ – часткова сума.

Оберемо S_q такий, що останній член ряду – це $a_{k_i}^+$. По-перше, $S_q > M$ за конструкцією; по-друге, оскільки $a_{k_i}^+$ має індекс k_i – найменший можливий індекс, де $S_q > M$ – то звідси $S_{q-1} \leq M \implies S_q \leq M + a_{k_i}^+$. Ці дві отримані нерівності гарантують нам оцінку $M < S_q \leq M + a_{k_i}^+ \implies 0 < S_q - M \leq a_{k_i}^+$. Оберемо S_q такий, що останній член ряду – це $a_{m_j}^-$. Аналогічними міркуваннями доведемо, що $-a_{m_j}^- < S_q - M \leq 0$.

Оберемо довільне S_q . Зауважимо, що $S_q^{\text{до останнього від'ємного}} \leq S_q \leq S_q^{\text{до останнього додатного}}$. Значить, звідси

$$-a_{m_{i-1}}^- < S_q - M < a_{k_i}^+.$$

Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то за необхідною умовою, $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Значить, $a_n^+ \rightarrow 0$, $a_n^- \rightarrow 0$ як

підпоследовності $\{a_n\}$. Внаслідок у нерівності $-a_{m_{i-1}}^- < S_q - M < a_{k_i}^+$ спрямуємо $q \rightarrow \infty$, тоді звідси $i \rightarrow \infty$, внаслідок чого $a_{m_{i-1}}^-, a_{k_i}^+ \rightarrow 0$ як відповідні підпоследовності $\{a_n^+\}, \{a_n^-\}$. Значить,

$$\text{залишилося } \lim_{q \rightarrow \infty} S_q = \sum_{j=1}^{\infty} b_j = M.$$

Тепер фіксуємо довільне число $M < 0$. Насправді, вся ця процедура абсолютно аналогічна. Тільки ми там спочатку брали додатні числа, потім від'ємні – а в цьому випадку робиться навпаки.

Випадок $M = +\infty$.

Для числа $1 + a_1^- > 0$ буде існувати $k_1 \in \mathbb{N}$, для якого $a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+ > 1 + a_1^-$.

Для числа $2 + a_2^- + a_1^- > 0$ буде існувати $k_2 \in \mathbb{N}$, для якого $a_1^+ + \dots + a_{k_2}^+ > 2 + a_1^- + a_2^-$. Іншими словами, $(a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+) - a_1^- + (a_{k_1+1}^+ + \dots + a_{k_2}^+) - a_2^- > 2 + a_2^-$.

\vdots

У нас виникне ряд $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = (a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+) - a_1^- + (a_{k_1+1}^+ + \dots + a_{k_2}^+) - a_2^- + \dots$ – це перестановочний

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Зауважимо, що всі часткові суми перестановочного ряду $S_q \geq i + a_i^-$, тому при $i \rightarrow \infty$

$$\text{ми отримаємо } \lim_{q \rightarrow \infty} S_q = \sum_{j=1}^{\infty} b_j = +\infty = M.$$

Випадок $M = -\infty$ аналогічний.

Доведення не найкомпактніше, але намагався розписати більше для кращого прояснення. ■

Example 4.5.2 Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Неважко показати, що цей ряд збіжний умовно.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = ?$$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln(2n) \right) - \left(1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) + \ln 2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

У цьому випадку γ – константа Ойлера-Маскерони (див. попередній пдф).

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow \ln 2.$$

Таким чином, звідси $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. Тобто ми довели, що

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2.$$

Тепер переставимо доданки ряду та обчислимо ось таку суму:

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = ? \\
S_{3n} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n-1} = \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \\
&\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-2} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-2} - \ln(4n-2) \right) + \ln(4n-2) - \\
&- \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \ln(2n-1) \right) - \frac{1}{2} \ln(2n-1) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) - \frac{1}{2} \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\
&\rightarrow \gamma - \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{2} \gamma + \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2. \\
S_{3n+1} &= S_{3n} + \frac{1}{4n+1} \rightarrow \frac{3}{2} \ln 2 \quad S_{3n+2} = S_{3n+1} + \frac{1}{4n+3} \rightarrow \frac{3}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

Таким чином, після перестановки отримаємо нове значення:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2.$$

4.6 Добуток Коші

Definition 4.6.1 Задано $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ — два ряди.

Добутком Коші називають ось такий ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \stackrel{\text{позн.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j,$$

де кожний член c_k визначається ось таким чином:

$$c_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l}$$

Example 4.6.2 Задано два ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Зауважимо, що ці два ряди збіжні за

Ляйбніцом, проте добуток Коші, тобто $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ буде розбіжним. Дійсно, маємо

$$\begin{aligned}
c_k &= \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^l}{\sqrt{l+1}} \frac{(-1)^{k-l}}{\sqrt{k-l+1}} = (-1)^k \sum_{l=0}^k \frac{1}{\sqrt{l+1} \sqrt{k-l+1}} \\
|c_k| &= \sum_{l=0}^k \frac{1}{\sqrt{l+1} \sqrt{k-l+1}} \stackrel{\text{нер-ть Коші}}{\geq} \sum_{l=0}^k \frac{2}{(l+1) + (k-l+1)} = \frac{2(k+1)}{k+2}.
\end{aligned}$$

Тоді через цю оцінку матимемо, що $c_k \not\rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Порушується необхідна ознака збіжності, тому добуток Коші буде розбіжним.

Тобто добуток двох збіжних рядів не обов'язково може давати збіжний ряд.

Example 4.6.3 Задамо два ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, де $a_n = \{2, 2, 2^2, 2^3, \dots\}$ та $b_n = \{-1, 1, 1, \dots\}$.

Цілком зрозуміло, що кожний такий ряд розбіжний, однак добуток Коші — збіжний. Дійсно, $c_0 = -2$ та решта $c_n = 0$.

Theorem 4.6.4 Задано $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ — два збіжні ряди, причому збігаються абсолютно.

Тоді $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{j=0}^{\infty} b_j = ab$, тобто збіжний, причому теж абсолютно.

Proof.

Спочатку доведемо збіжність $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$. Маємо таку оцінку:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^k |c_n| &= |a_0 b_0| + |a_1 b_0 + a_1 b_0| + \dots + |a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k| \leq \\ &\leq \sum_{i+j \leq k} |a_i| |b_j| = (|a_0| + |a_1| + \dots + |a_k|)(|b_0| + |b_1| + \dots + |b_k|) = \sum_{n=0}^k |a_n| \sum_{n=0}^k |b_n|. \end{aligned}$$

Оскільки ряди $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ та $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ збіжні, то всі часткові суми обмежені – разом з цим обмеженою буде $\sum_{n=0}^k |c_n|$, послідовність часткових сум. Послідовність часткових сум зростає для невід’ємних рядів. Отже, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ збігається абсолютно.

Тепер конкретно хочемо довести, що $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab$. Перш за все, оскільки цей ряд збігається абсолютно, то ми можемо переставити члени ряду – від цього сума не зміниться. Значить, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n =$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + \dots + a_0 b_n) &\stackrel{\text{переставимо}}{=} \sum_{i,j \geq 0} a_i b_j. \text{ Зауважимо, що} \\ (a_0 + a_1 + \dots + a_n)(b_0 + b_1 + \dots + b_n) &= \sum_{i+j \leq n} a_i b_j = S_n, \end{aligned}$$

де $\{S_n, N \geq 0\}$ – підпослідовність послідовності всіх часткових сум ряду $\sum_{i,j \geq 0} a_i b_j$. Причому $S_n \rightarrow ab$. Але оскільки наш ряд збіжний, то послідовність всіх часткових сум збіжний, зокрема й будь-яка підпослідовність (яка прямує до ab). Тому послідовність всіх часткових сум має прямувати до ab , тобто $\sum_{i,j \geq 0} a_i b_j = ab$. ■

Theorem 4.6.5 Теорема Мертенса

Задані $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ – два збіжні ряди, один з рядів збіжний абсолютно. Тоді $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{j=0}^{\infty} b_j = ab$ – збіжний абсолютно.

Proof.

Позначимо A_N, B_N, C_N – відповідні часткові суми ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ та добутку Коші. За умовою,

$A_N \rightarrow A$, $B_N \rightarrow B$; припускаємо, що A_N збігається абсолютним чином. Розглянемо часткову суму C_N детальніше:

$$\begin{aligned} C_N &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_N + \dots + a_N b_0) = \\ &= a_0(b_0 + b_1 + \dots + b_N) + a_1(b_0 + \dots + b_{N-1}) + \dots + a_N b_0 = a_0 B_N + a_1 B_{N-1} + \dots + a_N b_0. \end{aligned}$$

Позначимо хвіст ряду $\beta_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$ – отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} C_N &= a_0(B - \beta_N) + a_1(B - \beta_{N-1}) + \dots + a_N(B - \beta_0) = \\ &= B(a_0 + a_1 + \dots + a_N) - a_0 \beta_N - a_1 \beta_{N-1} - \dots - a_N \beta_0 = BA_N - \gamma_N, \text{ де} \\ \gamma_N &= a_0 \beta_N + \dots + a_N \beta_0. \end{aligned}$$

Для того, щоб $C_N \rightarrow BA$ при $N \rightarrow \infty$, нам треба довести, що $\gamma_N \rightarrow 0$.

Перш за все, за умовою, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ збіжний, тоді звідси $\exists M : \forall k \geq 1 : \sum_{n=1}^k |a_n| \leq M$.

Ще до цього, за умовою, $\beta_N \rightarrow 0$ як хвіст, тоді $\exists M_1 : \forall N \geq 1 : |\beta_N| \leq M_1$.

Ми отримали константи M, M_1 , із ними будемо далі працювати. Далі нехай $\varepsilon > 0$.

Оскільки $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ збіжний, то звідси $\exists m : \forall n \geq m : \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$.

Оскільки $\beta_N \rightarrow 0$, то звідси $\exists N_1 : \forall N \geq N_1 - m : |\beta_N| < \frac{\varepsilon}{2M}$.
 $|\gamma_N| = |a_0\beta_N + \dots + a_m\beta_{N-m} + a_{m+1}\beta_{N-(m+1)} + \dots + a_N\beta_0| \leq$
 $\leq (|a_0\beta_N| + \dots + |a_m\beta_{N-m}|) + (|a_{m+1}\beta_{N-(m+1)}| + \dots + |a_N\beta_0|) <$
 $< \left(|a_0|\frac{\varepsilon}{2M} + \dots + |a_m|\frac{\varepsilon}{2M}\right) + (|a_{m+1}|M_1 + \dots + |a_N|M_1) =$
 $= \frac{\varepsilon}{2M}(|a_0| + \dots + |a_m|) + M_1(|a_{m+1}| + \dots + |a_N|) < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + M_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_1} = \varepsilon.$ ■

4.7 Нескінченні добутки

Думаю, на основні контенту даного пункту буде цілком зрозуміло скоро, чому я вирішив не відокремлювати йому окремий розділ.

Definition 4.7.1 Нескінченим добутком називають добуток нескінченної послідовності ненульових чисел $\{a_n, n \geq 1\}$:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

Частковим добутком даного добутку називають добуток перших k членів:

$$P_k = \prod_{n=1}^k a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$$

У такому випадку в нас виникає послідовність часткових добутків $\{P_k, k \geq 1\}$.

Якщо така послідовність часткових добутків є збіжною, то ряд $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ називають **збіжним** та **добуток** цього ряду дорівнює

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^k a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P \neq 0$$

Якщо сам $P = 0$, то кажуть, що добуток **розбіжний дл нуля**. Інакше – просто **розбіжним**.

Proposition 4.7.2 Необхідна ознака збіжності добутку

Задано $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний. Тоді $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1$.

Proof.

Дійсно, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-1} a_k}{a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{P}{P} = 1$.

Оскільки в числовій послідовності в нас ненульові члени, то всі переходи легітимні. ■

Remark 4.7.3 Навпаки дане твердження не працює.

Example 4.7.4 Розглянемо добуток $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Зауважимо, що вираз під добутком $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Однак даний добуток – розбіжний.

Дійсно, розглянемо частковий добуток $\prod_{n=1}^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=1}^k \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{k+1}{k} = k+1$.

Отримаємо, що в такому разі $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$. Отже, даний добуток – розбіжний.

Example 4.7.5 Доведемо, що $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{2^n}$ збіжний.

Розглянемо частковий добуток $P_k = \cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2^2} \dots \cos \frac{1}{2^k}$. Помножимо та поділимо на $\sin \frac{1}{2^k}$, тож отримаємо:

$$P_k = \cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2^2} \dots \cos \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{\sin \frac{1}{2^k}} = \cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2^2} \dots \cos \frac{1}{2^{k-2}} \frac{1}{4} \sin \frac{1}{2^{k-2}} \frac{1}{\sin \frac{1}{2^k}} = \dots$$

$$= \frac{1}{2^k} \frac{\sin 1}{\sin \frac{1}{2^k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sin 1.$$

Example 4.7.6 Доведемо, що $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)$ збіжний.

$$P_k = \prod_{n=2}^k \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) = \prod_{n=2}^k \frac{n^2}{n^2 - 1} = \prod_{n=2}^k \frac{n}{n-1} \prod_{n=2}^k \frac{n}{n+1} = k \cdot \frac{2}{k+1} \rightarrow 2.$$

Theorem 4.7.7 Критерій збіжності добутку

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збіжний} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n - \text{збіжний. (тут припускається, що всі члени } a_n > 0).$$

$$\text{При цьому маємо } \prod_{n=1}^{\infty} a_n = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n}.$$

На цьому етапі можна пояснити, чому добуток розбіжний в нулі. Просто тому що ряд буде розбіжним.

Proof.

$$\text{Розглянемо часткову суму } S_k = \sum_{n=1}^k \ln a_n = \ln \prod_{n=1}^k a_n = \ln P_k. \text{ Тобто звідси } P_k = e^{S_k}.$$

$$\Rightarrow \text{Дано: } \prod_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збіжний, тобто } P_k \rightarrow P \in \mathbb{R} \implies S_k \rightarrow \ln P.$$

$$\Leftarrow \text{Дано: } \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n - \text{збіжний, тобто } S_k \rightarrow S \in \mathbb{R} \implies P_k \rightarrow e^S. \quad \blacksquare$$

Theorem 4.7.8 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) - \text{збіжний} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збіжний}$ (тут вимагається $a_n \geq 0$).

Proof.

$$\Rightarrow \text{Дано: } \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) - \text{збіжний. Тоді за критерієм, } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) \text{ має бути збіжним. Значить,}$$

$$\ln(1 + a_k) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \text{ але тоді } a_k = e^{\ln(1+a_k)} - 1 \rightarrow 0. \text{ Значить, } \ln(1 + a_k) \sim a_k, \text{ тож ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

– збіжний.

$$\Leftarrow \text{майже аналогічно.} \quad \blacksquare$$

Example 4.7.9 Зокрема $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ збіжний, оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний.

Remark 4.7.10 Теорема має місце і тоді, коли $-1 < u_n \leq 0$.

Theorem 4.7.11 Припустимо, що $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ – збіжні. Тоді $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) - \text{збіжний}$.

Proof.

$$\text{Нам достатньо буде довести, що збіжним буде ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n).$$

$$\text{Зауважимо, що } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \ln(1 + a_n)) \text{ збіжний, тому що } a_n - \ln(1 + a_n) \sim \frac{1}{2} a_n^2 \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ (за рахунок}$$

$$\text{того, що } a_n \rightarrow 0), \text{ при цьому } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ збіжний. Отже, } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) \text{ збіжний за рахунок збіжності}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad \blacksquare$$

Definition 4.7.12 Добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n - \text{абсолютно збіжний.}$$

Remark 4.7.13 Для абсолютно збіжного добутка можлива будь-яка перестановка множників без зміни значення добутка.

5 Функціональні ряди

5.1 Функціональні послідовності

Definition 5.1.1 Функціональною послідовністю назвемо числову послідовність,

$$\{f_n(x), n \geq 1\},$$

що визначена при всіх $x \in A$. Усі функції визначені саме на множині A .

Definition 5.1.2 Функція $f(x)$, що задана теж на множині A , називається **поточною границею** функціональної послідовності $\{f_n(x), n \geq 1\}$, якщо

$$\forall x \in A : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Оскільки границя числової послідовності єдина, то ми можемо створити як раз ту саму функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, де кожному $x \in A$ ставиться у відповідність число $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (ми припускаємо збіжність). Цілком ясно, що така функція єдина.

Example 5.1.3 Розглянемо функціональну послідовність $\left\{f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, n \geq 1\right\}$ на $[0, 5]$.

$$\text{Тоді } f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} = \frac{x}{\frac{1}{n} + 1 + \frac{x}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = f(x).$$

Definition 5.1.4 Функція $f(x)$ називається **рівномірною границею** функціональної послідовності $\{f_n(x), n \geq 1\}$ на множині A , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Позначення: $f_n(x) \xrightarrow{r} f(x), n \rightarrow \infty$.

Corollary 5.1.5 Часто пишуть ось таке еквівалентне означення:

$$f(x) - \text{рівномірна границя послідовності } \{f_n(x), n \geq 1\} \text{ на } A \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Дійсно, $\forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, тому ці два означення еквівалентні.

Proposition 5.1.6 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ – послідовність на A . Відомо, що $\{f_n\}$ рівномірно збігається до функції f на A . Тоді $\{f_n\}$ збігається поточно до f на A .

Proof.

За умовою, $f_n \xrightarrow{r} f$ на множині $A \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Нехай $x \in A$ та $\varepsilon > 0$. Тоді за умовою, існує N , для якого $\forall n \geq N$ виконується $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Це й означає, що $\forall x \in A : f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$. ■

Corollary 5.1.7 Рівномірно збіжна послідовність має єдину рівномірну границю.

Remark 5.1.8 Отже, єдиний кандидат на рівномірну збіжність послідовність $\{f_n, n \geq 1\}$ – це сама функція f , що була отримана в результаті поточної збіжності.

Example 5.1.9 Розглянемо функціональну послідовність $\left\{f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, n \geq 1\right\}$ на $[0, 5]$.

$$\text{Маємо } f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} = \frac{x}{\frac{1}{n} + 1 + \frac{x}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = f(x).$$

Отримана функція $f(x) = x$ – це єдиний можливий кандидат, до якого (можливо) прямує функціональна послідовність $\{f_n, n \geq 1\}$ рівномірно. Перевіримо це.

$$\sup_{x \in [0, 5]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 5]} \frac{x + x^2}{1 + n + x} \stackrel{=}{=}$$

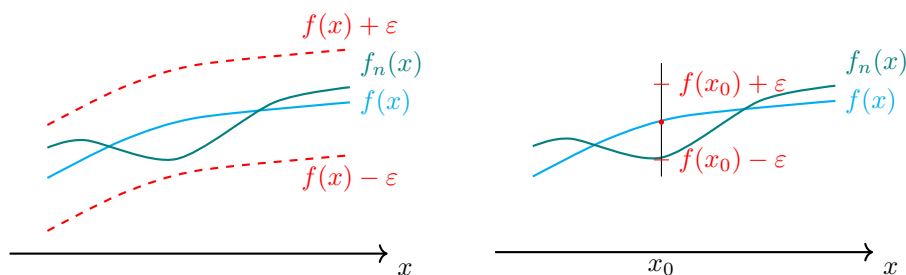
Розглянемо функцію $h(x) = \frac{x + x^2}{1 + n + x}$ на $[0, 5]$. Знайдемо похідну:

$$h'(x) = \frac{(1+2x)(1+n+x) - x - x^2}{(1+n+x)^2} = \frac{1+n+2x+2nx+x^2}{(1+n+x)^2} > 0.$$

Отже, h – строго монотонно зростає. Тому найбільше значення досягається при $x = 5$.

$$\stackrel{=}{=} \frac{5+25}{1+n+5} = \frac{30}{6+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Таким чином, $f_n(x) \xrightarrow{r} f(x), n \rightarrow \infty$ на множині $[0, 5]$.



Ліворуч – рівномірна збіжність. Праворуч – поточкова збіжність.

Тепер найголовніше питання, а для чого власне нам потрібна рівномірна збіжність, чому не достатньо поточної збіжності. Одну з відповідей на це питання дає такий приклад.

Example 5.1.10 Розглянемо функціональну послідовність $\{f_n(x) = x^n, n \geq 1\}$ на множині $[0, 1]$.

Маємо $f_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} = f(x)$.

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} \begin{cases} 0, & x = 1 \\ x^n, & x \in [0, 1) \end{cases} = 1.$$

В загальному випадку, $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \not\rightarrow 0$, а тому можемо сказати, що $f_n(x) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

Найголовніше з цього прикладу, що $f_n \in C([0, 1])$, проте $f \notin C([0, 1])$, а хотілося би. Саме тому нам потрібні рівномірні збіжності.

Але перед цим надамо деякі нові позначення та певні критерії для зручності. Тому, хто знайомий вже з поняттями нормованих просторів, буде трошки зручніше. Якщо не знаєте, що це, то не переймайтеся за це.

Proposition 5.1.11 Задані функції f, g на множині A . Позначимо $\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$. Тоді справе-
дливо наступне:

- 1) $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \iff f \equiv 0$;
- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$;
- 3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Ці три властивості означають, що вираз $\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$ є так званою **нормою** функції.

Proof.

Дійсно, доведемо кожну властивість окремо:

1) $\|f\| \geq 0$ цілком зрозуміло, оскільки під супремумом стоїть невід'ємна функція $|f|$. Далі $\|f\| = 0 \implies \sup_{x \in A} |f(x)| = 0 \implies 0 \leq |f(x)| \leq 0 \implies f(x) = 0, \forall x \in A$.

2) $\|\lambda f\| = \sup_{x \in A} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in A} |f(x)| = |\lambda| \|f\|$.

3) $\|f + g\| = \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in A} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup_{x \in A} |f(x)| + \sup_{x \in A} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$.

Всі властивості доведені. Хотілося би також відокремити таку властивість: $\|f\| - \|g\| \leq \|f - g\|$.

Вказівка: $\|f\| = \|f - g + g\|$, $\|g\| = \|g - f + f\|$ та 3). ■

Remark 5.1.12 Тепер рівномірну збіжність до функції можна переписати компактніше:

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \iff \|f_n - f\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Theorem 5.1.13 Критерій Коші

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \text{ на } A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Proof.

⇒ Дано: $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, $n \rightarrow \infty$ на A .

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \|f_n - f\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty &\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \\ &\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\|f_m - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f_n - f_m\| = \|f_n - f + f - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\| < \varepsilon.$$

☞ Дано: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$

Якщо зафіксувати точку $x_0 \in A$, то отримаємо фундаментальну послідовність $\{f_n(x_0), n \geq 1\}$. Фундаментальна послідовність збіжна, тоді $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$

Якщо спрямувати $m \rightarrow \infty$, то маємо, що $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Оскільки це може бути $\forall x_0 \in A$, то тоді $\|f_n - f\| < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty$ на A . ■

Theorem 5.1.14 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ – послідовність на множині A та $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty.$

Відомо, що $\forall n \geq 1 : \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = c_n$, де $x_0 \in \mathbb{R}$ – гранична точка A . Тоді послідовність $\{c_n, n \geq 1\}$ – збіжна, а також $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$

Коротше кажучи, в цьому випадку $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$, тобто можна змінювати границі місцями.

Proof.

Оскільки $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty$, то за критерієм Коші, $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$ Якщо спрямувати $x \rightarrow x_0$, то отримаємо, що $|c_n - c_m| \leq \varepsilon < 2\varepsilon.$ Тоді за критерієм Коші, $\{c_n, n \geq 1\}$ – збіжна, тобто $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c.$ Залишилось довести, що $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c.$

Оскільки $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty$, тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n, m \geq N_1 : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Оскільки $c_n \rightarrow c, n \rightarrow \infty$, то тоді для такого самого $\varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n \geq N_2 : |c_n - c| < \varepsilon.$

Зафіксуємо $N = \max\{N_1, N_2\}.$ Тоді $\lim_{x \rightarrow x_0} f_N(x) = c_N \Rightarrow \exists \delta : \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - c_N| < \varepsilon.$

$\Rightarrow |f(x) - c| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - c_N + c_N - c| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - c_N| + |c_N - c| < 3\varepsilon.$

Остаточно, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$ ■

Corollary 5.1.15 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ – послідовність на множині A та $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty.$

Відомо, що $\forall n \geq 1 : f_n(x) \in C(A).$ Тоді $f(x) \in C(A)$, а також $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$

Theorem 5.1.16 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ – послідовність на множині $[a, b]$ та $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty.$

Відомо, що $\forall n \geq 1 : f_n(x) \in \mathcal{R}([a, b]).$ Тоді $f(x) \in \mathcal{R}([a, b]),$ а також $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$

Коротше кажучи, в цьому випадку $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$, тобто можна границю виносити поза межами інтеграла.

Proof.

Маємо $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$

Зокрема $\forall x \in [a, b] : |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \Rightarrow f_N(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$

Тоді $\forall k = 1, \dots, n$ виконуються нерівності:

$$m_k(f) \geq f_N(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \geq m_k(f_N) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

$$M_k(f) \leq f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq M_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Звідси випливає, що $M_k(f) - m_k(f) \leq M_k(f_N) - m_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$

Оскільки $f_N \in \mathcal{R}([a, b]),$ то $\exists \tau : U(f_N, \tau) - L(f_N, \tau) < \frac{\varepsilon}{2}.$ Тоді

$$\begin{aligned} U(f, \tau) - L(f, \tau) &= \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f)) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \left(M_k(f_N) - m_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) \Delta x_k = \\ &= (U(f_N, \tau) - L(f_N, \tau)) + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a, b]). \end{aligned}$$

Для доведення рівності зробимо таку оцінку та прямування:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b f_n(x) - f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \|f - f_n\| dx =$$

$$= \|f - f_n\|(b - a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{Отже, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Theorem 5.1.17 Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ – послідовність на множині $[a, b]$. Відомо, що:

- 1) $\exists x_0 \in [a, b] : \{f_n(x_0), n \geq 1\}$ – збіжна послідовність;
- 2) $\forall n \geq 1 : f_n$ – диференційована на $[a, b]$;
- 3) $\{f'_n, n \geq 1\}$ – рівномірно збіжна послідовність на $[a, b]$.

Тоді $\{f_n, n \geq 1\}$ – рівномірно збіжна послідовність на $[a, b]$. Звідси можна визначити функцію $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, тоді f – диференційована на $[a, b]$, а також $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

Коротше кажучи, у цьому випадку $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

Proof.

$\{f'_n\}$ рівномірно збіжна на $[a, b] \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n, m \geq N_1 : \forall x \in [a, b] : |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon$.

$\{f_n(x_0)\}$ збіжна $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n, m \geq N : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$.

Позначимо $\varphi_{n,m}(x) = f_n(x) - f_m(x)$. Тоді ми маємо такі нерівності:

$$|\varphi'_{n,m}(x)| < \varepsilon \quad |\varphi_{n,m}(x_0)| < \varepsilon.$$

Фіксуємо деяку точку $x \in [a, b]$, а також $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді $\forall n, m \geq N$ і за теоремою Лагранжа:

$$\varphi_{n,m}(x) - \varphi_{n,m}(x_0) = \varphi'_{n,m}(\xi)(x - x_0), \text{ причому } \xi \in (x, x_0) \text{ або } (x_0, x).$$

$$\implies |f_n(x) - f_m(x)| = |\varphi_{n,m}(x)| = |\varphi_{n,m}(x) - \varphi_{n,m}(x_0) + \varphi_{n,m}(x_0)| \leq |\varphi_{n,m}(x_0)| + |\varphi'_{n,m}(\xi)||x - x_0| < \varepsilon + (b - a)\varepsilon = (b - a + 1)\varepsilon.$$

Таким чином, ми довели критерієм Коші, що $\{f_n\}$ рівномірно збіжна на $[a, b]$. Зокрема звідси визначаємо функцію (як в теоремі) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Далі беремо будь-яку точку $x_{00} \in [a, b]$. Покажемо, що f в цій точці диференційована.

$$\text{Маємо } f'_n(x_{00}) = \lim_{x \rightarrow x_{00}} \frac{f_n(x) - f_n(x_{00})}{x - x_{00}}. \text{ Позначимо } \psi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_{00})}{x - x_{00}}, \psi(x) = \frac{f(x) - f(x_{00})}{x - x_{00}}.$$

$$|\psi_n(x) - \psi(x)| = \frac{1}{|x - x_{00}|} |f_n(x) - f_n(x_{00}) - f(x) + f(x_{00})| = \frac{1}{|x - x_{00}|} |\varphi_{n,\infty}(x) - \varphi_{n,\infty}(x_{00})| =$$

$$\stackrel{=}{=} \frac{1}{|x - x_{00}|} |\varphi'_{n,\infty}(\xi)||x - x_{00}| = |\varphi'_{n,\infty}(\xi)| \stackrel{<}{=} \varepsilon.$$

Рівність $\stackrel{=}{=}$ за Лагранжем, причому $\xi \in (x, x_{00})$ або (x_{00}, x) ; $\stackrel{<}{=}$ за пунктом 3) теореми.

Тоді $\psi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \psi(x)$, $n \rightarrow \infty$ на $[a, b] \setminus \{x_{00}\}$. А оскільки $\psi_n \in C([a, b] \setminus \{x_{00}\})$, то звідси

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x). \quad \blacksquare$$

Theorem 5.1.18 Теорема Діні

Задано $\{f_n(x), n \geq 1\}$ – монотонна послідовність на множині $[a, b]$, причому $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Відомо, що $\forall n \geq 1 : f_n \in C([a, b])$ та $f \in C([a, b])$. Тоді $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, $n \rightarrow \infty$ на $[a, b]$.

Proof.

Ми припустимо, що $\{f_n(x), n \geq 1\}$ монотонно зростає, бо для спадної майже аналогічно. Оскільки також $f_n(x) \rightarrow f(x)$, то звідси в силу монотонності $f_n(x) \leq f(x)$.

Тепер розглянемо функцію $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$. За умовою, $r_n \in C([a, b])$, далі $\{r_n(x), n \geq 1\}$ монотонно спадає, а також $r_n(x) \rightarrow 0$. Зараз необхідно довести, що $r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Нехай $x_0 \in [a, b]$, тоді $r_n(x_0) \rightarrow 0 \implies \forall x \in [a, b] : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : r_N(x_0) < \varepsilon$. $r_N \in C([a, b])$, зокрема неперервна в точці x_0 , тому $\exists \delta : \forall x \in [a, b] : |x - x_0| < \delta \implies |r_N(x) - r_N(x_0)| < \varepsilon$. Звідси та з попередньої нерівності випливає, що $r_N(x) < 2\varepsilon$, і це виконано в $U_\delta(x_0) \cap [a, b]$.

Відрізок $[a, b]$ можна покрити скінченною кількістю інтервалів за лемою Гайне-Бореля, тобто в нашому випадку знайдуться точки $x_1, \dots, x_k \in [a, b]$, для яких знайдуться номери N_1, \dots, N_k , а також околи, які покривають відрізок.

Встановимо $N = \max\{N_1, \dots, N_k\}$. Якщо взяти довільне $y \in [a, b]$, то знайдеться окіл точки $x_i, i = \overline{1, k}$, де справедлива нерівність $r_N(y) < \varepsilon$. Не забуваємо, що в нас спадна послідовність.

Отже, $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall y \in [a, b] : r_n(y) < r_N(y) < \varepsilon$.

Таким чином, $r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, що приводить до результату теореми Діні. \blacksquare

5.2 Функціональні ряди

Definition 5.2.1 Функціональним рядом називають суму членів функціональної послідовності $\{a_n(x), n \geq 1\}$:

$$a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

Частковою сумою даного ряду називають суму перших k функцій:

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_k(x)$$

У такому випадку в нас виникає функціональна послідовність часткових сум $\{S_k(x), k \geq 1\}$. Якщо така послідовність збігається в точці x_0 , то ряд є **збіжним** в точці x_0 та **сума** цього ряду дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x_0) = S(x_0)$$

Інакше – **розбіжним**.

Definition 5.2.2 Множина B , де $\forall x \in B$ ряд збігається, називається **областю збіжності**. Аналогічно визначається **область абсолютної збіжності** та **область умовної збіжності**.

Example 5.2.3 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Для початку перевіримо на абсолютну збіжність, для цього ми досліджуємо $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right|$. Засто-

суємо ознаку д'Аламбера в цьому випадку:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}(1+x^{2n})|}{|(1+x^{2n+2})x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n+2}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n+2}} + 1} \right| = \frac{1}{|x|} \text{ при } |x| > 1. \\ &= |x| \text{ при } |x| < 1. \\ &= 1 \text{ при } |x| = 1. \end{aligned}$$

Отже, при $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ в перших двох випадках, тобто при $|x| \neq 1$. Це означає збіжність.

При $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ ознака д'Аламбера відповіді не дає, тож треба додатково дослідити.

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+1} = +\infty \Rightarrow \text{розбіжний.}$$

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+1} - \text{розбіжний, бо } \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2}, \text{ тобто необхідна умова збіжності порушена.}$$

Таким чином, область абсолютної збіжності $B_{\text{abs}} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; область умовної збіжності $B_{\text{cond}} = \emptyset$.

Definition 5.2.4 Якщо послідовність часткових сум $\{S_k(x), k \geq 1\}$ збігається рівномірно на множині A , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ називають **рівномірно збіжним** на A .

Theorem 5.2.5 Критерій Коші

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \text{рівномірно збіжний на множині } A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left\| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right\| < \varepsilon.$$

Впливає з критерію Коші рівновірної збіжності функціональних послідовностей.

Corollary 5.2.6 Необхідна умова рівномірної збіжності

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ – рівномірно збіжний на A . Тоді $a_k(x) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ на A .

Вказівка: критерій Коші при $p = 1$.

Theorem 5.2.7 Мажорантна ознака Ваєрштрасса

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ – ряд на множині A . Відомо, що виконується наступне:

1) $\exists \{c_n, n \geq 1\} : \forall n \geq 1 : \forall x \in A : |a_n(x)| \leq c_n$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ – збіжний. Його ще називають **мажорантним рядом**.

Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збігається рівномірно на множині A .

Proof.

За критерієм Коші, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ – збіжний $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} c_n \right| < \varepsilon$.

Тоді $\forall x \in A : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} c_n < \varepsilon$.

Тому за критерієм Коші, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ – рівномірно збіжний на множині A . ■

Example 5.2.8 Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Оскільки $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, причому це виконано завжди, а мажорантний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – збіжний, то за

ознакою Ваєрштрасса, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ – збіжний рівномірно на \mathbb{R} .

Theorem 5.2.9 Ознаки Діріхле та Абеля

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ – ряд на множині A . Нехай виконаний один з двох блок умов:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^k a_n(x) - \text{рівномірно обмежена на } A \\ \{b_n(x), n \geq 1\} - \text{монотонна та } b_n(x) \xrightarrow{+} 0 \text{ на } A \\ \text{ознаки Діріхле} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \text{збіжний рівномірно на } A \\ \{b_n(x), n \geq 1\} - \text{монотонна та рівномірно обмежена на } A \\ \text{ознаки Абеля} \end{array} \right|$$

Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ – збіжний рівномірно на множині A .

Доводиться так само, як було в числових рядах.

Example 5.2.10 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, якщо $0 < \alpha \leq 1$.

Аналогічними міркуваннями як в Ех. ??? (TODO: лікування) ми можемо отримати таку формулу:

$$\sum_{n=1}^k \sin nx = \frac{\sin \left(\frac{k+1}{2} x \right)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} \text{ за умовою, що } \sin \frac{x}{2} \neq 0 \implies x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Тоді $\left| \sum_{n=1}^k \sin nx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{C}$, за умовою, що розглядається область $[a, b] \subset (2\pi m, 2\pi(m+1))$.

Ну й також $\frac{1}{n^\alpha}$ – монотонна та рівномірно н.м. (тому що від x не залежить) на $[a, b]$.

Таким чином, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ збігається рівномірно в будь-якому відрізку $[a, b] \subset (2\pi m, 2\pi(m+1))$.

Розглянемо тепер відрізок $[0, \delta]$, де $\delta > 0$, та покажемо критерієм Коші, що ряд розбіжний.

Дійсно, $\exists \varepsilon > 0 : \forall K : \exists k > K : \exists p = 2k \geq 1 : \exists x = \frac{1}{k} \in [0, \delta] :$

$$\left| \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{\sin \frac{n}{k}}{n^\alpha} \right| \geq \left| \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{\sin 1}{n^\alpha} \right| = \sin 1 \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sin 1 \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{(2k)^\alpha} \geq \sin 1 \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{2k} = \frac{\sin 1}{2} = \varepsilon.$$

5.3 Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів

Theorem 5.3.1 Задано $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ – рівномірно збіжний на A . Відомо, що $\forall n \geq 1 : \exists \lim_{x \rightarrow x_0} a_n(x) = c_n$,

де $x_0 \in \mathbb{R}$ – гранична точка A . Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ – збіжний, а також $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Proof.

Із умови теореми випливає, що $\forall k \geq 1 : \lim_{x \rightarrow x_0} S_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^k a_n(x) = \sum_{n=1}^k c_n$. Оскільки ряд – рівномірно збіжний, то тоді $\{S_k(x), k \geq 1\}$ – рівномірно збіжна. Тоді за (TODO: лінкування),
 $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$. ■

Corollary 5.3.2 Задано $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ – рівномірно збіжний на A . Відомо, що $\forall n \geq 1 : a_n(x) \in C(A)$. Тоді $S(x) \in C(A)$.

Example 5.3.3 Довести, що $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Спочатку треба довести рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ в деякому лівому околі точки $x = 1$. Застосуємо ознаку Абеля при $a_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $b_n(x) = x^n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ – збіжна за ознакою Ляйбніца, а оскільки вона не залежить від x , то тому ще й рівномірно в околі точки $x = 1$.

x^n – зрозуміло, монотонна та монотонно обмежена, оскільки $|x^n| \leq 1$.

Таким чином, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ – рівномірно обмежена в лівому околі точки $x = 1$.

А далі $\frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \in C$, а отже, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \in C$, в тому числі в точці $x = 1$.

Таким чином, $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \stackrel{\text{насправді}}{=} \ln 2$.

Theorem 5.3.4 Задано $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ – рівномірно збіжний на $[a, b]$. Відомо, що $a_n(x) \in \mathcal{R}([a, b])$,

причому $\forall n \geq 1$. Тоді $S(x) \in \mathcal{R}([a, b])$, а також

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n(x) dx \right).$$

Proof.

Із умови теореми випливає, що $\forall k \geq 1 : S_k(x) = \sum_{n=1}^k a_n(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ як сума інтегрованих функцій.

Оскільки ряд – рівномірно збіжний, то тоді $\{S_k(x), k \geq 1\}$ – рівномірно збіжна. Тоді за (TODO: лінкування), $S(x) \in \mathcal{R}([a, b])$. Доведемо тепер тотожність:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \int_a^b \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n(x) \right) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \left(\sum_{n=1}^k a_n(x) \right) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left(\int_a^b a_n(x) dx \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n(x) dx \right).$$

■

Example 5.3.5 Довести, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ для всіх $x \in (-1, 1]$.

Розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$. Аналогічними міркуваннями (як в попередньому прикладі) ми можемо довести, що ряд збіжний рівномірно на $(-1, 1]$. Покладемо деяке число $x > 0$. Оскільки $(-1)^n t^n \in \mathcal{R}([0, x])$, то звідси $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \in \mathcal{R}([0, x])$. Таким чином,

$$\text{з одного боку, } \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n;$$

$$\text{із іншого боку, } \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x).$$

Остаточно отримали, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ для всіх $x \in (-1, 1]$.

Theorem 5.3.6 Задано $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$. Відомо, що виконується наступне:

- 1) $\exists x_0 \in [a, b] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ – збіжний;
- 2) $\forall n \geq 1 : a_n(x)$ – диференційовані на $[a, b]$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ – рівномірно збіжний на $[a, b]$.

Тоді $S(x)$ – збіжний рівномірно, $S(x)$ – диференційована на $[a, b]$, а також $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$.

Proof.

Маємо, $\{S_k(x), k \geq 1\}$, де $S_k(x) = \sum_{n=1}^k a_n(x)$. Зауважимо, що виконується наступне:

- 1) $\forall n \geq 1 : a_n$ – диференційовані на $[a, b]$, а тому $\forall k \geq 1 : S_k$ – також диференційована на $[a, b]$.
- 2) Відомо, що $\exists x_0 \in [a, b] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ – збіжний, тобто послідовність $\{S_k(x_0), k \geq 1\}$ – збіжна.
- 3) Маємо $S'_k(x) = \sum_{n=1}^k a'_n(x)$, про яку відомо, що $S'_k(x) \xrightarrow{\rightarrow} S'(x), k \rightarrow \infty$.

Тоді за (TODO: лінування), $S_k(x) \xrightarrow{\rightarrow} S(x), k \rightarrow \infty$, а також

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)' = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n(x) \right)' = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x).$$

■

Example 5.3.7 Знайдемо похідну ряду $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}$ на відрізку $(-1, 1]$.

Треба пересвідчитись, що можна це робити диференціювання:

- 1) $(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}$ – всі диференційовані;
- 2) Якщо $x = 1$, то ряд $S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ – збіжний за ознакою Ляйбніца.
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}$ – рівномірно збіжний за Абелем.

$$\text{Отже, } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n} \implies x S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x).$$

Остаточно $S'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, додатково $S'(0) = 0$.

5.4 Степеневі ряди

Definition 5.4.1 Степеневим рядом називаємо ми такий функціональний ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

де $\{a_n, n \geq 0\}$ – довільна числова послідовність.

Theorem 5.4.2 Теорема Коші-Адамара

Задано $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ – степеневий ряд. Нехай $\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$ – **радіус збіжності**. Тоді ряд:

при $|x - x_0| < R$ – збіжний абсолютно;

при $|x - x_0| > R$ – розбіжний;

при $|x - x_0| = R$ – відповіді нема.

Proof.

Скористаємось радикальною ознакою Коші для нашого ряду:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ (перша рівність випливає з нерівностей про часткові границі, дивись pdf з мат. аналізу першої частини). Тоді:

При $q < 1$, тобто $|x - x_0| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$ – збіжний абсолютно;

При $q > 1$, тобто $|x - x_0| > \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$ – розбіжний;

При $q = 1$ – нема відповіді. ■

Corollary 5.4.3 Наслідок із ознаки д'Аламбера

Задано $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ – степеневий ряд. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$ – **радіус збіжності**. Тоді ряд:

при $|x - x_0| < R$ – збіжний абсолютно;

при $|x - x_0| > R$ – розбіжний;

при $|x - x_0| = R$ – відповіді нема.

Proof.

Скористаємось ознакою д'Аламбера для нашого ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q.$$

Тоді:

При $q < 1$, тобто $|x - x_0| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$ – збіжний абсолютно;

При $q > 1$, тобто $|x - x_0| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$ – розбіжний;

При $q = 1$ – нема відповіді. ■

Example 5.4.4 Знайдемо область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{2^n(n+1)}$.

Маємо $a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$, тоді $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)}{n+1} = 2$.

Отже, при $|x - 7| < 2 \implies x \in (5, 9)$ ряд збіжний абсолютно. Також при $|x - 7| > 2 \implies x \in (-\infty, 5) \cup (9, +\infty)$ ряд розбіжний.

А ось в точках $x = 5, x = 9$ треба додатково обстежити.

При $x = 9$ маємо $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ – розбіжний.

При $x = 5$ маємо $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ – збіжний за Ляйбніцем, але умовно.

Отже, область збіжності $B = [5, 9)$.

Theorem 5.4.5 Теорема Абеля

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ – рівномірно збіжний на будь-якому відрізку, що міститься в області збіжності.

Proof.

Зафіксуємо довільний відрізок $[a, b]$. Будемо розглядати декілька випадків.

1. $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.

Зафіксуємо число $M = \max\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\}$. Звідси $\forall x \in [a, b] : |x - x_0| < M < R$, а тому $|a_n(x - x_0)^n| < |a_n|M^n$.

Розглянемо мажорантний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n M^n$. Застосуємо ознаку Коші:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| M^n} = M \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < R \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Отже, цей ряд – збіжний. Тоді за ознакою Вейерштраса, степеневий ряд – збіжний рівномірно на $[a, b]$.

В принципі, на цьому можна закінчити доведення. Але припустимо, що окрім $(x_0 - R, x_0 + R)$ у нас існують крайові точки, де теж збіжність відбувається. Ось тут варто окремо розглянути, що буде відбуватися.

2. $[a, b] \subset [x_0, x_0 + R]$.

Розпишемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n$.

Розглянемо випадок, коли ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ – збіжний. Збіжність ряду проведемо за ознакою Абеля:

$$g_n(x) = \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n$$

Домовились, що $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ – збіжний, причому рівномірно, оскільки не залежить від x .

Послідовність $\left\{g_n(x) = \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n, n \geq 1\right\}$ – рівномірно обмежена, оскільки

$$\forall x \in [a, b] \subset [x_0, x_0 + R] : |x - x_0| \leq R \Rightarrow \forall n \geq 1 : \left|\frac{x - x_0}{R}\right|^n \leq 1.$$

А також послідовність є монотонною, тому що $\frac{x - x_0}{R} < 1$.

Отже, за Абелем, ряд – рівномірно збіжний на $[a, b]$.

Аналогічно, коли $[a, b] \subset [x_0 - R, x_0]$ за умовою, що $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ – збіжний.

3. $[a, b] \subset [x_0 - R, x_0 + R]$.

Тоді відрізок $[a, b]$ розбивається на $[a, x_*] \cup [x_*, b]$. На цих відрізках ряд збіжний рівномірно за 2. ■

Example 5.4.6 Зокрема ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{2^n(n+1)}$ збіжний рівномірно в будь-якому відрізку із області збіжності $[5, 9)$, у тому числі в тому відрізку, що містить точку $x = 5$.

А тепер ми позначимо степеневий ряд $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Theorem 5.4.7 $S \in C$ в області збіжності.

Proof.

Візьмемо якусь точку $x_* \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Зафіксуємо деякий відрізок $[a, b] \ni x_*$. На відрізку $[a, b]$ ряд – збіжний рівномірно за теоремою Абеля, члени ряду – неперервні функції. Отже, $S(x) \in C([a, b]) \implies S(x) \in C(\{x_*\})$.

Оскільки точка x_* була довільною, то одразу $S(x) \in C((x_0 - R, x_0 + R))$. ■

Theorem 5.4.8 $S \in \mathcal{R}$ в області збіжності, а також $\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$.

Причому радіус збіжності нового степеневого ряду зберігається.

Proof.

На відрізку $[x_0, x_*]$ або $[x_*, x_0]$, де $x_* \in (x_0 - R, x_0 + R)$, степеневий ряд збігається рівномірно за Абелем. Тому $S \in \mathcal{R}([x_0, x_*])$ або $[x_*, x_0]$. Тотожність випливає з цієї ж теореми. Тепер перевіримо, що радіус збіжності дійсно такий самий. За Коші-Адамара,

$$R_{\text{new}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{n+1} \right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|} = 1 \cdot R = R. \quad \blacksquare$$

Theorem 5.4.9 S – диференційований в області збіжності, а також $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x - x_0)^{n-1}$. Причому радіус збіжності нового степеневого ряду зберігається.

Proof.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x - x_0)^{n-1}$. Радіус збіжності збігається, оскільки

$$R_{\text{new}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Візьмемо якусь точку $x_* \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Нехай відрізок $[a, b] \ni x_*$. На відрізку $[a, b]$ ряд – збіжний рівномірно за теоремою Абеля. Використаємо далі умови для диференціювання:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ – збіжний принаймні в одній точці;
- 2) Всі члени ряду – диференційовані функції;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* (x - x_0)^n$ – рівномірно збіжний на $[a, b]$ за Абелем.

Отже, $S(x)$ – диференційований на $[a, b]$, зокрема і в точці x_* . Оскільки точка x_* була довільною, то одразу $S(x)$ – диференційований в $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Тому дійсно, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$. ■

Corollary 5.4.10 $S \in C^\infty$ в області збіжності.

5.5 Ряди Тейлора

Definition 5.5.1 Функцію f називають **аналітичною** в точці $x_0 \in \mathbb{R}$, якщо в околі точки x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Тобто в околі точки x_0 функцію f можна подати в вигляді степеневого ряду.

Example 5.5.2 Функція $f(x) = \ln(1+x)$ – аналітична на $(-1, 1]$, оскільки $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

Оскільки степеневий ряд – нескінченно-диференційований, то $f \in C^\infty$. У такому випадку можемо знайти коефіцієнти:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 \\ f'(x_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \Big|_{x=x_0} = a_1 \\ f''(x_0) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \Big|_{x=x_0} = 2a_2 \end{aligned}$$

⋮

Продовжуючи пошук коефіцієнтів, аналітична функція задається степеневим рядом вигляду нижче, який ще називають **рядом Тейлора**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Remark 5.5.3 Із цього випливає, що аналітична функція задає степеневий ряд рядом Тейлора однозначно.

Remark 5.5.4 Якщо $x_0 = 0$, то ряд Тейлора зазвичай це називають **рядом Маклорена**.

Remark 5.5.5 f – аналітична $\implies f \in C^\infty$. У зворотному випадку не завжди працює.

Example 5.5.6 Зокрема $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Функція $f \in C^\infty(0 - R, 0 + R)$, але $f^{(n)}(0) = 0$,

причому $\forall n \geq 1$. Якщо допустити розклад функції в ряд Тейлора, то отримаємо $f(x) \equiv 0$, що суперечить початковим умовам.

Theorem 5.5.7 Теорема Тейлора

Задано функцію f та точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Відомо, що виконується наступне:

1) $f \in C^{(\infty)}((x_0 - R, x_0 + R))$;

2) $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \geq 1 : \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : |f^{(n)}(x)| \leq M^n$.

Тоді f – аналітична в точці x_0 , тобто $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ функція розкладеться в ряд Тейлора

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$, причому рівномірно збіжний на $(x_0 - R, x_0 + R)$ (при $R = +\infty$ ряд рівномірно збіжний на множині \mathbb{R}).

Proof.

Розкладемо функцію в ряд Тейлора за остачею Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}.$$

Тоді маємо, що

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| = \left| \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1} \right| \leq \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} R^{k+1}.$$

Розглянемо тепер ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} R^{k+1}$. За ознакою д'Аламбера, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{MR}{k+2} = 0 < 1$.

Цей ряд є збіжним. Отже, за необхідною ознакою збіжності, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} R^{k+1} = 0$.

Звідси випливає, що

$$\sup_{x \in (x_0 - R, x_0 + R)} \left| f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} R^{k+1} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Отримали $\sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$

Таким чином, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ – збіжний рівномірно на $(x_0 - R, x_0 + R)$. ■

Example 5.5.8 Маємо функцію $\cos x$. Розглянемо деяку точку $x_0 = 0$, встановимо $R = +\infty$.

$\exists M = 1 : \forall n \geq 1 : \forall x \in \mathbb{R} : |f^{(n)}(x)| = \left| \cos \left(x + \frac{\pi n}{2} \right) \right| \leq 1$.

Таким чином, ми можемо розкласти $\cos x$ в ряд Тейлора – отримаємо такий вигляд:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, x \in \mathbb{R}.$$

Аналогічними міркуваннями отримаємо розклади інших відомих функцій.

Основні розклади

$$\begin{array}{lcl}
 1. e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; & x \in \mathbb{R} & \\
 2. \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}; & x \in \mathbb{R} & \\
 3. \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}; & x \in \mathbb{R} & \\
 4. \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k; & & |x| < 1 \\
 5. \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k; & & x \in (-1, 1] \\
 6. (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k; & & |x| < 1
 \end{array}$$

Всі інші функції зазвичай розкладаються вже за основними розкладами цих функцій.

Example 5.5.9 Розкласти функцію $f(x) = \ln(1 + 2x - 8x^2)$ в ряд Тейлора.

Зауважимо, що $\ln(1 + 2x - 8x^2) = \ln(1 - 2x)(1 + 4x) = \ln(1 - 2x) + \ln(1 + 4x)$.

$$\ln(1 - 2x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-2x)^k = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k \text{ за умовою } |2x| < 1.$$

$$\ln(1 + 4x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (4x)^k = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k} x^k \text{ за умовою } |4x| < 1.$$

$$\text{Остаточно } f(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^k + (-4)^k}{k} \right) x^k \text{ за умовою } |x| < \frac{1}{4}.$$

6 Інтеграл Рімана-Стільтєса

6.1 Коротко про монотонні функції

Будемо розглядати функції $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ переважно неспадні. Для інших буде аналогічно.

Lemma 6.1.1 Маємо функцію $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ – монотонна. Нехай $x_0 \in (a, b)$, але є точкою розриву. Тоді x_0 обов'язково розрив I роду виду стрибка.

Proof.

Розглянемо випадок неспадної функції f . Ми вже знаємо $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ (див. теорему в 1 семестрі), проте треба пересвідчитися, що вони скінченні.

!Припустимо, що $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = +\infty$. Оберемо точку $y < x_0$, тоді за монотонністю $f(y) < f(x_0)$.

Якщо $f(y) > 0$, то існує окіл $(x_0 - \delta, x_0)$, для якого $f(x) > f(y) > f(x_0)$. Якщо $f(y) < 0 \implies f(x_0) > 0$, то тоді все одно існує (можливо, інший) окіл $(x_0 - \delta, x_0)$, де $f(x) > f(x_0)$. У двох випадках суперечність!

Отже, наша точка x_0 – точно точка розриву першого роду. Залишилися довести, що це саме стрибок.

!Припустимо, що ці дві границі рівні, тобто $d = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. У силу розривності $f(x_0) \neq d$. Оберемо

$\varepsilon = f(x_0) - d$ або $\varepsilon = d - f(x_0)$. Тоді існуватиме окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, для якого $|f(x) - d| < \varepsilon$. У залежності від ситуації ми отримаємо або $f(x) < f(x_0)$, або $f(x) > f(x_0)$. При деяких точка околу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ нерівність неможлива в силу монотонності – суперечність!

Отже, x_0 – стрибок. ■

Definition 6.1.2 Стрибок функції функції f в точці $x_0 \in [a, b]$ назвемо величину

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

Lemma 6.1.3 Нехай x_1, \dots, x_n – різні точки з $[a, b]$. Тоді $\sum_{k=1}^n (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) \leq f(b) - f(a)$.

Тут функція f – неспадна на $[a, b]$. Можна аналогічно написати лему для незростаючих функцій.

Proof.

Припустимо, що точки $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Зауважимо, що виконуються нерівності:

$$f(a) \leq f(x_1 - 0), \quad f(x_n + 0) \leq f(b)$$

$$f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \leq f(x_k - 0) \leq f(x_k + 0) \leq f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right), \quad \forall k = \overline{2, n-1}.$$

Це все за рахунок граничних переходів та неспадності функції. Маючи дану оцінку, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) \leq \\ & \leq \sum_{k=2}^{n-1} \left(f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) - f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1 - 0) + f(x_n + 0) - f\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right) = \\ & f(x_n + 0) - f(x_1 - 0) \leq f(b) - f(a). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Lemma 6.1.4 Множина точок розриву монотонної функції не більш, ніж зліченна.

Proof.

Точки розриву монотонної функції можуть бути лише стрибками. Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді кількість точок, які мають стрибок не менший за ε , скінченна.

!Припустимо, що кількість таких точок нескінченна. Оберемо якісь точки x_1, \dots, x_n , що мають стрибок не менший за ε . За попередньою лемою, $f(b) - f(a) \geq \sum_{k=1}^n (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) \geq n\varepsilon \implies$

$$n \leq \frac{f(b) - f(a)}{\varepsilon}. \quad \text{Суперечність!}$$

Отже, число точок, в яких стрибок не менше за ε , скінченне. Нехай A_k – множина точок із стрибками не меншим за $\frac{1}{k}$. Тоді $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ – множина всіх точок розриву функції f на $[a, b]$, де A точно не більше, ніж зліченна. ■

Corollary 6.1.5 $\sum_{k=1}^{\infty} (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) \leq f(b) - f(a)$, де кожна x_k – точка стрибок функції f .
У разі якщо $f \in C([a, b])$, то тоді ліва частина вважається, що дорівнює нулю.

Definition 6.1.6 Нехай $\{x_k, k \geq 1\}$ – множина всіх точок стрибка монотонної функції f на $[a, b]$. Функція f називається **функцією стрибків**, якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) = f(b) - f(a)$$

Example 6.1.7 Розглянемо функцію $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, що визначена таким чином:

$$f(0) = 0 \quad f(x) = \sum_{n: q_n < x} \frac{1}{2^n}, \quad q_n \in \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Це приклад функції стрибків. По-перше, цілком ясно, що функція f строго зростає на $[0, 1]$. По-друге, $f(q_n + 0) - f(q_n - 0) = \frac{1}{2^n}$; чому стрибок приймає таке значення, буде з наступного абзацу.

По-третє, $\sum_{n=1}^{\infty} (f(r_n + 0) - f(r_n - 0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 = f(1) - f(0)$.

Нехай $x > q$, розглянемо суму $f(x) = \sum_{n: q_n < q} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} + \sum_{n: q < q_n < x} \frac{1}{2^n}$, де число m відповідає нумерації

раціонального числа q . Треба довести, що $\sum_{n: q < q_n < x} \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow q + 0$. Припустимо, що $x_k \rightarrow q$

при $x_k > q$, причому монотонним чином (цього досить). Тоді маємо таке вкладення:

$$\mathbb{N} \supset \{n : q < q_n < x_k\} \supset \{n : q < q_n < x_{k+1}\}.$$

Отже, звідси випливає, що $\min\{n : q < q_n < x_k\} \stackrel{\text{позн.}}{=} m_k \rightarrow +\infty$. Утім зауважимо, що

$$\sum_{n: q < q_n < x_k} \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{m_k}} + \frac{1}{2^{m_k+1}} + \dots = \frac{1}{2^{m_k-1}} \rightarrow 0.$$

Значить, отримали $f(q + 0) = \sum_{n: q_n < q} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}$. Аналогічним чином можемо довести, що $f(q - 0) =$

$$\sum_{n: q_n < q} \frac{1}{2^n}. \text{ Таким чином, } f(q + 0) - f(q - 0) = \frac{1}{2^m}.$$

Theorem 6.1.8 Задано функцію f – неспадна на $[a, b]$. Тоді $f(x) = g(x) + h(x)$, де функція g – функція стрибків, яка має стрибки в тих же точках і тієї ж величини, що й функція f ; функція h – неспадна та неперервна.

Proof.

Нехай $\{x_n, n \geq 1\}$ – всі точки стрибка f . Покладемо функцію g таким чином:

$$g(a) = 0, \quad g(x) = \sum_{n: x_n < x} (f(x_n + 0) - f(x_n - 0)) + f(x) - f(x - 0).$$

Доведемо, що g – неспадна. Дійсно, розглянемо $x'' > x'$ із $[a, b]$. Розпишемо різницю

$$g(x'') - g(x') = \sum_{n: x' \leq x < x''} (f(x_n + 0) - f(x_n - 0)) + f(x'') - f(x'' - 0) - f(x') + f(x' - 0).$$

Якщо точка x' сама є стрибком, то тоді можна із цієї суми відокремити $f(x' + 0) - f(x' - 0)$. Отримаємо $g(x'') - g(x') = f(x' + 0) - f(x') + \sum_{n: x' < x_n < x''} (f(x_n + 0) - f(x_n - 0)) + f(x'') - f(x'' - 0)$.

Якщо точка x' не є стрибком, то тоді замість $n : x' \leq x < x''$ можна написати $n : x' < x < x''$ під сумою, а штуку $f(x' - 0)$ замінюємо $f(x' + 0)$. Отримаємо, що $g(x'') - g(x')$ буде таким самим.

Отже, $g(x'') - g(x') = f(x' + 0) - f(x') + \sum_{n: x' < x_n < x''} (f(x_n + 0) - f(x_n - 0)) + f(x'') - f(x'' - 0)$.

Зрозуміло, що $f(x' + 0) - f(x') \geq 0$, $f(x'') - f(x'' - 0) \geq 0$, а також сума стрибків невід'ємне число. Разом ми отримаємо $g(x'') - g(x') \geq 0 \implies g(x'') \geq g(x')$.

Визначимо функцію $h(x) = f(x) - g(x)$.

Спочатку доведемо, що h – теж неспадна. Нехай знову $x'' > x'$ із $[a, b]$. Якщо повернутися до $g(x'') - g(x')$, то ця штука схожа на суму всіх стрибків функції f на відрізку $[x', x'']$. Значить, за **Сrl. 6.1.5**, ми отримаємо оцінку $g(x'') - g(x') \leq f(x'') - f(x')$. Тоді звідси матимемо $f(x') - g(x') = h(x') \leq h(x'') = f(x'') - g(x'')$.

Нарешті, доведемо, що h – неперервна. Оберемо точку $x' \in [a, b]$ (у цій точці доводимо неперервність) та довільну точку $x'' \in [a, b]$, щоб $x'' \geq x'$. Справедлива нерівність $g(x'') - g(x') \geq f(x' + 0) - f(x')$. Також мали нерівність $g(x'') - g(x') \leq f(x'') - f(x')$. Спрямуємо $x'' \rightarrow x' + 0$ – отримаємо, що $g(x' + 0) - g(x') = f(x' + 0) - f(x') \implies h(x') = h(x' + 0)$. Аналогічно можна довести $h(x') = h(x' - 0)$. ■

Remark 6.1.9 Мені більше подобається ось такий початок доведення, щоб приблизно зрозуміти, чому саме таку функцію g ми підбирали.

Нехай $\{x_n, n \geq 1\}$ – всі точки стрибка f . Побудуємо таку функцію g , яка буде функцією стрибків, де стрибки в тих же точках та цієї самої величини, що й в f . Тобто ми хочемо $\sum_{k=1}^{\infty} (g(x_k + 0) - g(x_k - 0)) = g(b) - g(a)$, причому також $g(x_k + 0) - g(x_k - 0) = f(x_k + 0) - f(x_k - 0)$. Для зручності покладемо $g(a) = 0$. Матимемо $g(b) = \sum_{k=1}^{\infty} (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) \stackrel{\text{або}}{=} \sum_{k: x_k < b} (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) + f(b) - f(b - 0)$.

Далі ми можемо цю штуку визначити для кожної $x \in (a, b]$ – тоді отримаємо функцію із теореми.

6.2 Функції обмеженої варіації

Definition 6.2.1 Функція $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається **функцією обмеженої варіації** на $[a, b]$, якщо

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \tau - \text{розбиття } [a, b] : \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq L$$

Варіацією функції f на $[a, b]$ називається величина:

$$V(f, [a, b]) = \sup_{\tau} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

Позначення: $BV([a, b])$ – множина всіх функцій з обмеженою варіацією на $[a, b]$.

Remark 6.2.2 Якщо f не має обмеженої варіації на $[a, b]$, то кладемо $V(f, [a, b]) = +\infty$.

Proposition 6.2.3 Нехай f – монотонна на $[a, b]$. Тоді $f \in BV([a, b])$, а його варіація $V(f, [a, b]) = |f(b) - f(a)|$.

Proof.

Розглянемо неспадну функцію f . Оберемо довільне розбиття τ відрізка $[a, b]$. Тоді

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

Отже, дійсно $f \in BV([a, b])$. ■

Proposition 6.2.4 Задано $f \in BV([a, b])$. Тоді f – обмежена на $[a, b]$.

Proof.

Нехай $x \in (a, b]$. Тоді справедлива така оцінка:

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq |f(a)| + V(f, [a, b]).$$

Отже, $\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq |f(a)| + V(f, [a, b])$, тобто f – обмежена на $[a, b]$. ■

Remark 6.2.5 Зворотнє твердження не виконується.

Example 6.2.6 Розглянемо цікаву функцію f на $[0, 1]$, що визначається таким чином:

$$f(0) = 0 \quad f\left(\frac{1}{2k-1}\right) = 0 \quad f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k}.$$

На відрізку $\left[\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right]$, $\left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}\right]$ функція f – пряма лінія.

Така функція має необмежену варіацію. Дійсно, розглянемо розбиття відрізка $[0, 1]$ ось таке: $\tau_n =$

$\left\{0, \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Розпишемо варіацію:

$$\left|f\left(\frac{1}{2n+1}\right) - f(0)\right| + \left|f\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right| + \left|f\left(\frac{1}{2n-1}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| + \dots + \left|f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| =$$

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1$. Зауважимо, що ця варіація – це часткова сума гармонічного ряду, яка розбіжна.

Тож в будь-якому разі $V(f, [0, 1]) = +\infty$.

При цьому слід зазначити, що функцію $f \in C([0, 1])$.

Отже, f обмежена сама на $[0, 1]$, проте має необмежену варіацію.

Proposition 6.2.7 Задано функцію $f \in BV([a, b])$. Тоді $V(f, [a, b]) \geq 0$. Більш того, що $|f(b) - f(a)| \leq V(f, [a, b])$.

Proposition 6.2.8 Задано функцію $f \in BV([a, b])$. Тоді $\forall c \in \mathbb{R} : cv \in BV([a, b])$.

Proposition 6.2.9 Задані функції $f, g \in BV([a, b])$. Тоді $f + g \in BV([a, b])$.

Proposition 6.2.10 Задані функції $f, g \in BV([a, b])$. Тоді $f \cdot g \in BV([a, b])$.

Proposition 6.2.11 Задані функції $f, g \in BV([a, b])$. Тоді $\frac{f}{g} \in BV([a, b])$ за умовою, що g повністю

$$\text{в } \exists \alpha > 0 : \forall x \in [a, b] : g(x) \geq \frac{1}{\alpha}.$$

Все це доводити не буду, оскільки цілком прості в доведенні, якщо на досвіді. Утім наступне твердження все ж таки доведу.

Proposition 6.2.12 $f \in BV([a, b]) \iff f \in BV([a, c]), f \in BV([c, b])$ при $a < c < b$.

Більш того, $V(f, [a, b]) = V(f, [a, c]) + V(f, [c, b])$.

Proof.

\Rightarrow Дано: $f \in BV([a, b])$. Нехай τ_1 – розбиття $[a, c]$ та τ_2 – розбиття $[c, b]$. Позначимо $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, що є, насправді, розбиттям відрізка $[a, b]$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n_1} |f(x_k^1) - f(x_{k-1}^1)| + \sum_{k=1}^{n_2} |f(x_k^2) - f(x_{k-1}^2)| \leq V(f, [a, b]).$$

Із цієї нерівності випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n_1} |f(x_k^1) - f(x_{k-1}^1)| \leq V(f, [a, b]).$$

$k=1$

$$\sum_{k=1}^{n_2} |f(x_k^2) - f(x_{k-1}^2)| \leq V(f, [a, b]).$$

Отже, ми довели двома нерівностями, що $f \in BV([a, c])$, $f \in BV([c, b])$. Крім того, із першої нерівності отримаємо $V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]) \leq V(f, [a, b])$.

⇐ Дано: $f \in BV([a, c])$, $f \in BV([c, b])$ при $a < c < b$. Нехай τ – розбиття відрізка $[a, b]$. Оберемо точку $c \in (x_{k_0-1}, x_{k_0})$. Тоді

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k - f(x_{k-1}))| = \sum_{k=1}^{k_0-1} |f(x_k - f(x_{k-1}))| + |f(x_{k_0}) - f(c) + f(c) - f(x_{k_0-1})| + \sum_{k=k_0+1}^n |f(x_k - f(x_{k-1}))| \leq V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]).$$

Якби $c \in \tau$, тобто $c = x_{k_0}$, то було би ще простіше, розписувати не буду.

Отже, $f \in BV(f, [a, b])$. Крім того, отримали $V(f, [a, b]) \leq V(f, [a, c]) + V(f, [c, b])$.

Дві отримані нерівності під кінець дають рівність $V(f, [a, b]) = V(f, [a, c]) + V(f, [c, b])$. ■

Theorem 6.2.13 Теорема Жордана

$f \in BV([a, b]) \iff f$ записується як різниця монотонно неспадних функцій на $[a, b]$.

Proof.

⇒ Дано: $f \in BV([a, b])$. Визначимо наступні функції:

$$g(a) = 0 \quad g(x) = V(f, [a, x]), \quad x \in [a, b];$$

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

g – монотонно не спадає, оскільки при $x'' > x'$ маємо оцінку:

$$g(x'') = V(f, [a, x'']) = V(f, [a, x']) + V(f, [x', x'']) \geq V(f, [a, x']) = g(x').$$

h – монотонно не спадає, оскільки при $x'' > x'$ маємо оцінку:

$$h(x'') - h(x') = g(x'') - f(x'') - g(x') + f(x') = V(f, [x', x'']) - (f(x'') - f(x')) \geq 0.$$

Отже, $f(x) = g(x) - h(x)$, причому g, h – монотонно неспадні.

⇐ Дано: $f(x) = g(x) - h(x)$, причому g, h – монотонно неспадні. Тоді автоматично $g, h \in BV([a, b])$. Звідси за лінійністю $f \in BV([a, b])$. ■

6.3 Деякі додаткові твердження з функціями обмеженими варіаціями

Proposition 6.3.1 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняє умові Ліпшиця. Тоді $f \in BV([a, b])$.

Proof.

Дійсно, маємо $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ для деякого $L \geq 0$ та для всіх $x, y \in [a, b]$. Тоді для будь-якого розбиття τ відрізка $[a, b]$ маємо

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n L|x_k - x_{k-1}| = L(b - a) \implies f \in BV([a, b]).$$

Theorem 6.3.2 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ таким чином, що $f' \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді $f \in BV([a, b])$, причому $V(f, [a, b]) = \int_a^b |f'(x)| dx$.

Proof.

Оберемо будь-яке розбиття τ відрізка $[a, b]$. Тоді маємо:

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(t) dt \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(t)| dt = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Отже, дійсно $f \in BV([a, b])$. Причому якщо подивитися на цю суму, то з іншого боку,

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |f'(\xi_k)| \Delta x_k = \sigma(f', \tau, \xi_k).$$

Нехай задане $\varepsilon > 0$. Тоді можна підібрати розбиття τ , щоб $V(f, [a, b]) - \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \varepsilon$.

Тоді, маючи у відомості умову $f' \in \mathcal{R}([a, b])$, маємо

$$V(f, [a, b]) - \int_a^b |f'(x)| dx = V(f, [a, b]) - \sigma(f', \tau, \xi_k) + \sigma(f', \tau, \xi_k) - \int_a^b |f'(x)| dx < 2\varepsilon.$$

Значить, довели рівність $V(f, [a, b]) = \int_a^b |f'(x)| dx$. ■

Corollary 6.3.3 Задана функція $\varphi \in \mathcal{R}([a, b])$ та $f(x) = \int_a^x \varphi(u) du$. Тоді $V(f, [a, b]) = \int_a^b |\varphi(u)| du$.

6.4 Інтеграл Стілтєса

6.4.1 Означення за Ріманом

Definition 6.4.1 Маємо τ – розбиття відрізка $[a, b]$ та ξ – обрані точки. Нехай задані функції $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ та $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – монотонно неспадна.

Інтегральною сумою Рімана-Стілтєса функції f для нашого розбиття τ , відмічених точок ξ та монотонної функції α називають число:

$$\sigma(f, \tau, \xi, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$$

Функція f називається **інтегрованою за Ріманом-Стілтєсом** відносно α на $[a, b]$, якщо існує таке число $I \in \mathbb{R}$, для якого виконана умова:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies |\sigma(\tau, \xi, f, \alpha) - I| < \varepsilon$$

Число I називають **інтегралом Рімана-Стілтєса** відносно α .

$$I = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

Позначення: $I = \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sigma(f, \tau, \xi, \alpha)$.

Множина інтегрованих функцій за Ріманом-Стілтєсом відносно α позначається так: $\mathcal{RS}([a, b], \alpha)$.

6.4.2 Означення за Дарбу

Definition 6.4.2 Маємо τ – розбиття відрізка $[a, b]$. Нехай задані функції $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – обмежена та $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – монотонно неспадна.

Верхньою та нижньою сумою Дарбу-Стілтєса називають такі суми:

$$U(f, \alpha, \tau) = \sum_{k=1}^n M_k(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) \quad L(f, \alpha, \tau) = \sum_{k=1}^n m_k(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$$

Позначені $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.

Remark 6.4.3 Із означення випливає, що $L(f, \alpha, \tau) \leq \sigma(f, \alpha, \tau, \xi) \leq U(f, \alpha, \tau)$.

Lemma 6.4.4 Задані функції $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – обмежена, α – неспадна та будь-яке розбиття τ . Тоді маємо $L(f, \alpha, \tau) = \inf_{\xi} \sigma(f, \alpha, \tau, \xi)$ $U(f, \alpha, \tau) = \sup_{\xi} \sigma(f, \alpha, \tau, \xi)$.

Аналогічне доведення.

Lemma 6.4.5 Задані функції $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – обмежена, α – неспадна та розбиття τ . Також задамо підрозбиття τ' . Тоді $U(f, \alpha, \tau) \geq U(f, \alpha, \tau')$, а також $L(f, \alpha, \tau) \leq L(f, \alpha, \tau')$.

Аналогічне доведення.

Lemma 6.4.6 Задані функції $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – обмежена, α – неспадна. Візьмемо будь-які розбиття τ', τ'' . Тоді $L(f, \alpha, \tau') \leq U(f, \alpha, \tau'')$.

Аналогічне доведення.

Definition 6.4.7 Верхнім/нижнім інтегралом Дарбу-Стілтєса називають такі вирази:

$$I^*(f, \alpha) = \inf_{\tau} U(f, \alpha, \tau) \quad I_*(f, \alpha) = \sup_{\tau} L(f, \alpha, \tau)$$

Remark 6.4.8 Справедлива така нерівність: $I_*(f, \alpha) \leq I^*(f, \alpha)$.

Proposition 6.4.9 Задані функції $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – обмежена та α – неспадна. Тоді $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} L(f, \alpha, \tau) = I_*(f, \alpha)$ $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} U(f, \alpha, \tau) = I^*(f, \alpha)$.

6.5 Існування інтеграла

Theorem 6.5.1 Необхідна умова інтегрованості

Задано функцію $f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha)$. Тоді f – обмежена на $[a, b]$.

Theorem 6.5.2 Перший критерій інтегрованості

Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha) \iff f$ – обмежена на $[a, b]$ та $I_*(f, \alpha) = I^*(f, \alpha)$.

Corollary 6.5.3 Якщо функція $f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha)$ та $I = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$ – його відповідний інтеграл, то справедлива нерівність:

$$L(f, \alpha, \tau) \leq \int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq U(f, \alpha, \tau).$$

Theorem 6.5.4 Другий критерій інтегрованості

Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha) \iff f$ – обмежена на $[a, b]$ та $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau : U(f, \alpha, \tau) - L(f, \alpha, \tau) < \varepsilon$.

Remark 6.5.5 Коротко кажучи, $f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha) \iff \lim_{|\tau| \rightarrow 0} (U(f, \alpha, \tau) - L(f, \alpha, \tau)) = 0$.

6.6 Класи інтегрованих функцій

Theorem 6.6.1 Задані функції $f, g \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha)$. Тоді $f + g \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha)$.

Theorem 6.6.2 Задано функцію $f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha)$. Тоді $\alpha f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Theorem 6.6.3 $f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha) \iff \forall c \in (a, b) : f \in \mathcal{RS}([a, c], \alpha), f \in \mathcal{RS}([c, b], \alpha)$.

Theorem 6.6.4 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – монотонна. Тоді $f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha)$ за умовою, що α додатково $\in C([a, b])$.

Proof.

Розглянемо випадок, коли f – нестрого зростає на $[a, b]$.

Нехай $\varepsilon > 0$. За теоремою Кантора $\exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \implies |\alpha(x_1) - \alpha(x_2)| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Оберемо розбиття τ відрізка $[a, b]$ таким чином, щоб $|\tau| < \delta$. Тоді

$$U(f, \alpha, \tau) - L(f, \alpha, \tau) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \varepsilon.$$

Отже, $f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha)$. ■

Theorem 6.6.5 Задано функцію $f \in C([a, b])$. Тоді $f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha)$.

6.7 Властивості інтегралів

Theorem 6.7.1 Лінійність

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) d\alpha(x) = \alpha \int_a^b f(x) d\alpha(x) + \beta \int_a^b g(x) d\alpha(x).$$

Theorem 6.7.2 Адитивність

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x).$$

Theorem 6.7.3 Задано $f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha)$. Відомо, що $f \geq 0$. Тоді $\int_a^b f(x) d\alpha(x) \geq 0$.

Corollary 6.7.4 Задані $f, g \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha)$. Відомо, що $f \leq g$. Тоді $\int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq \int_a^b g(x) d\alpha(x)$.

Corollary 6.7.5 $\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| d\alpha(x)$

Theorem 6.7.6 Задано $f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha_1), f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha_2)$. Тоді $f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha_1 + \alpha_2)$.

$$\int_a^b f(x) d(\alpha_1(x) + \alpha_2(x)) = \int_a^b f(x) d\alpha_1(x) + \int_a^b f(x) d\alpha_2(x).$$

6.8 Інтеграл відносно функції обмеженої варіації

Задано функцію $\alpha \in BV([a, b])$. За теоремою Жордана, $\alpha = \beta - \gamma$, де кожна β, γ – неспадні на $[a, b]$. Якщо розписати суму Рімана-Дарбу, то там буде різниця двох сум. Тому буде природно визначити таким чином інтеграл:

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) d\beta(x) - \int_a^b f(x) d\gamma(x)$$

Інтеграл $f \in \mathcal{RS}([a, b], \alpha)$ в цьому випадку, якщо $f \in \mathcal{RS}([a, b], \beta) \cap \mathcal{RS}([a, b], \gamma)$.

Proposition 6.8.1 Інтеграл не залежить від розкладу функції (у теоремі Жордана розклад не єдиний).

Proof.

Маємо $\alpha = \beta - \gamma$ та припустимо ще $\alpha = \tilde{\beta} - \tilde{\gamma}$. Звідси отримаємо $\beta + \tilde{\gamma} = \tilde{\beta} + \gamma$, а тому

$$\int_a^b f(x) d(\beta(x) + \tilde{\gamma}(x)) = \int_a^b f(x) d(\tilde{\beta}(x) + \gamma(x)).$$

$$\int_a^b f(x) d\beta(x) - \int_a^b f(x) d\gamma(x) = \int_a^b f(x) d\tilde{\beta}(x) - \int_a^b f(x) d\tilde{\gamma}(x). \quad \blacksquare$$

6.9 Обчислення інтеграла Стілтєса

Theorem 6.9.1 Задані функції $f \in \mathcal{R}([a, b])$ та $\alpha \in C([a, b])$, диференційована всюди, крім скінченного числа точок $[a, b]$, причому $\alpha' \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx$.

Remark 6.9.2 Застереження: оскільки $\alpha' \in \mathcal{R}([a, b])$, то звідси $\alpha \in BV([a, b])$ за **Th. 6.3.2**. Тому тут все нормально.

Proof.

Нехай $\varepsilon > 0$. За умовою теореми, $\alpha' f \in \mathcal{R}([a, b])$, його інтеграл позначу за I . Тоді існує $\delta > 0$, де $\forall(\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies |\sigma(f\alpha', \tau, \xi) - I| < \varepsilon$. Ми хочемо довести, що $|\sigma(f, \alpha, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Зауважимо, що } \sigma(f, \alpha, \tau, \xi) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\alpha'(\eta_k)\Delta x_k = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\alpha'(\eta_k) - \alpha'(\xi_k))\Delta x_k + \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\alpha'(\xi_k)\Delta x_k \text{ при } \eta_k \in (x_{k-1}, x_k). \end{aligned}$$

$$\text{Звідси } |\sigma(f, \alpha, \tau, \xi) - I| \leq |\sigma(f\alpha', \tau, \xi) - I| + \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\alpha'(\eta_k) - \alpha'(\xi_k))\Delta x_k \right|.$$

Оскільки $f \in \mathcal{R}([a, b])$, то f – обмежена числом $M > 0$. Нам ще буде потрібна умова $\alpha' \in \mathcal{R}([a, b])$,

$$\text{що дозволить нам отримати оцінку } |\sigma(\alpha', \tau, \xi) - \sigma(\alpha', \tau, \eta)| = \left| \sum_{k=1}^n (\alpha'(\eta_k) - \alpha'(\xi_k))\Delta x_k \right| < \varepsilon.$$

Разом отримаємо $|\sigma(f, \alpha, \tau, \xi) - I| \leq \varepsilon + M\varepsilon$. ■

Lemma 6.9.3 Задано функцію $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна в точці $c \in [a, b]$. Також $\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(c-0), & x < c \\ \alpha(c), & x = c, \\ \alpha(c+0), & x > c \end{cases}$

причому в нас $\alpha(c-0) \leq \alpha(c) \leq \alpha(c+0)$. Тоді $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = f(c)(\alpha(c+0) - \alpha(c-0))$.

Proof.

Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки f неперервна в точці c , то існує $\delta > 0$, для якого $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) : |f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Тепер оберемо будь-яке розбиття τ таким чином, що $|\tau| < \delta$; відмітимо точками ξ . У нас може виникнути один із двох випадків:

I. $c \in (x_{k-1}, x_k)$. Звідси $\sigma(f, \alpha, \tau, \xi) = f(\xi_k)(\alpha(c+0) - \alpha(c-0))$. Після цього отримаємо $|\sigma(f, \alpha, \tau, \xi) - f(c)(\alpha(c+0) - \alpha(c-0))| = (\alpha(c+0) - \alpha(c-0))|f(\xi_k) - f(c)| < (\alpha(c+0) - \alpha(c-0))\varepsilon$.

II. $c = x_k$. Звідси $\sigma(f, \alpha, \tau, \xi) = f(\xi_k)(\alpha(c) - \alpha(c-0)) + f(\xi_{k+1})(\alpha(c+0) - \alpha(c))$. Після цього $|\sigma(f, \alpha, \tau, \xi) - f(c)(\alpha(c+0) - \alpha(c-0))| \leq$

$$|f(\xi_k)(\alpha(c) - \alpha(c-0)) - f(c)(\alpha(c) - \alpha(c-0))| + |f(\xi_{k+1})(\alpha(c+0) - \alpha(c)) - f(c)(\alpha(c+0) - \alpha(c))| < (\alpha(c) - \alpha(c-0))\varepsilon + (\alpha(c+0) - \alpha(c))\varepsilon = (\alpha(c+0) - \alpha(c-0))\varepsilon.$$

У двох випадках довели, що $f(c)(\alpha(c+0) - \alpha(c-0)) = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$. ■

Lemma 6.9.4 Задано функцію $f \in C([a, b])$ та $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ постійна на інтервалах (z_k, z_{k+1}) , де точки $a = z_1 < z_2 < \dots < z_m = b$. Тоді $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^m f(z_k)(\alpha(z_k+0) - \alpha(z_k-0))$.

Theorem 6.9.5 Задано функцію $f \in C([a, b])$ та α на $[a, b]$ неперервна, крім скінченного числа точок z_1, \dots, z_m – точок розриву першого роду. Нехай α' існує за винятком скінченного числа точок, причому $\alpha' \in \mathcal{R}([a, b])$. Тоді $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx + \sum_{k=1}^m f(z_k)(\alpha(z_k+0) - \alpha(z_k-0))$.

Example 6.9.6 Обчислити $\int_0^2 2^x d(x \operatorname{sgn} \cos \pi x)$.

Маємо функцію $f(x) = 2^x$, яка точно неперервна на $[0, 2]$.

Маємо функцію $\alpha(x) = x \operatorname{sgn}(\cos \pi x) = \begin{cases} x, & \cos \pi x > 0 \\ 0, & \cos \pi x = 0, \\ -x, & \cos \pi x < 0 \end{cases}$. Зауважимо, що $\cos \pi x > 0 \iff x \in$

$\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right]$. Отже, можна записати функцію $\alpha(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right] \\ 0, & x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\} \\ -x, & x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$. Цілоком зро-

зуміло, що така функція неперервна, крім $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$. Знайдемо похідну:

$$\alpha'(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right] \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{cases}.$$

Зауважимо, що $\alpha' \in \mathcal{R}([a, b])$, оскільки неперервна, крім скін-

$$\begin{aligned} \int_0^2 2^x d(x \operatorname{sgn} \cos \pi x) &= \int_0^2 2^x \alpha'(x) dx + f\left(\frac{1}{2}\right) \left(\alpha\left(\frac{1}{2}+0\right) - \alpha\left(\frac{1}{2}-0\right)\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) \left(\alpha\left(\frac{3}{2}+0\right) - \alpha\left(\frac{3}{2}-0\right)\right). \\ \int_0^2 2^x \alpha'(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2^x dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 2^x dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 2^x dx = \ln 2(2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{5}{2}} + 3). \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \int_0^2 2^x d(x \operatorname{sgn} \cos \pi x) = (2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{5}{2}} + 3) \ln 2 - 2^{\frac{1}{2}} + 3 \cdot 2^{\frac{3}{2}}.$$

6.10 Граничний перехід в інтегралі Стільтєса

Theorem 6.10.1 Теорема Хеллі

Задано функцію $f \in C([a, b])$, а також функції α, α_n – неспадні на $[a, b]$. Припустимо, що $\alpha_n(x) \rightarrow \alpha(x)$ для всіх точок $x \in [a, b]$, де функція α неперервна; а також $\alpha_n(a) \rightarrow \alpha(a)$; $\alpha_n(b) \rightarrow \alpha(b)$. Тоді

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) d\alpha_n(x).$$

(TODO: довести)

7 Вступ до \mathbb{R}^m (багатовимірний математичний аналіз)

На даному етапі допускається, що читач володіє матеріалом лінійної алгебри. Знати треба вже наступне: векторні простори та суміжні поняття, лінійні оператори, евклідові простори, нормовані простори. Буде корисно також знати якусь теорію метричних просторів, але це не обов'язково, бо все одно я буду проходитися з нуля.

7.1 Про простір \mathbb{R}^m

Definition 7.1.1 Простір \mathbb{R}^m містить об'єкти, що називаються **арифметичними векторами**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

де кожний елемент $x_j \in \mathbb{R}$. Ці елементи x_i ще називають **координатами**.

Візьмемо довільні вектори $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$. Ми можемо створити операції **додавання** та **множення на скаляр** таким чином:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix} \quad \alpha \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Також позначимо $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – це буде так званий нульовий вектор.

Proposition 7.1.2 Виконуються ось такі властивості $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^m, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- 1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$;
- 2) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$;
- 3) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$;
- 4) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$;
- 5) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$;
- 6) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$;
- 7) $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$;
- 8) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Ці вісім пунктів свідчать про те, що \mathbb{R}^m утворює лінійний простір.

Вправа: довести.

Надалі ми ще будемо використовувати **скалярний добуток**, що визначається таким чином:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m$$

Proposition 7.1.3 Виконуються ось такі властивості $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^m, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

- 1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;
- 2) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$;
- 3) $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y})$;
- 4) $(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$.

Ці чотири властивості свідчать про те, що (\vec{x}, \vec{y}) дійсно задає скалярний добуток. При цьому в такому разі простір \mathbb{R}^m буде вже евклідовим.

Вправа: довести.

Далі визначимо ще **норму** вектора ось таким чином:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$$

Ця штука, насправді, є узагальненням такого поняття як довжина вектора.

Theorem 7.1.4 Нерівність Коші-Буняковського

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

Можна подивитися доведення в pdf лінійної алгебри.

Proposition 7.1.5 Виконуються ось такі властивості $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$1) \|\vec{x}\| \geq 0 \quad \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0};$$

$$2) \forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|;$$

$$3) \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Отже, заданий $\|\vec{x}\|$ утворює норму. Відповідно, \mathbb{R}^m буде нормованим простором.

Вправа: довести.

Також нас ще цікавить **відстань** між двома векторами. Обчислити це можна таким чином:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| \stackrel{\text{якщо розписати}}{=} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}$$

Буквально так само ми рахували відстань між точками в одновимірному випадку.

Proposition 7.1.6 Виконуються такі властивості $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^m$:

$$1) d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0;$$

$$2) d(\vec{y}, \vec{x}) = d(\vec{x}, \vec{y});$$

$$3) d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y}).$$

Ці три властивості дають підстави нам казати, що $d(\vec{x}, \vec{y})$ задає відстань між двома об'єктами. У такому разі простір \mathbb{R}^m називають метричним.

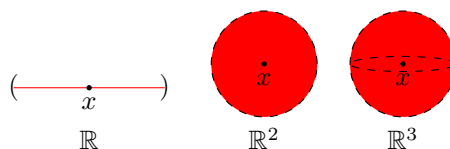
Вправа: довести.

7.2 Топологія та принцип аналізу в \mathbb{R}^m

Означення будуть абсолютно аналогічними, просто тепер буде випадок з векторами.

Definition 7.2.1 ε -околом точки \vec{x} будемо називати таку множину:

$$U_\varepsilon(\vec{x}) = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon\}$$



Її ще також називають **відкритим шаром** з радіусом ε в центрі точки \vec{x} та позначають як $B(\vec{x}, \varepsilon)$. Але про це можна детально побачити в розділі про метричні простори.

Definition 7.2.2 Задамо множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та елемент $\vec{a} \in A$.

Точку \vec{a} називають **внутрішньою**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{a}) \subset A$$

А множина A називається **відкритою**, якщо кожна її точка – внутрішня.

Definition 7.2.3 Задамо множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та елемент $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$.

Точку \vec{a} називають **граничною** множини A , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{a} : \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{a})$$

А множина A називається **замкнутою**, якщо вона містить всі граничні точки.

Definition 7.2.4 Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та точка $\vec{x} \in A$.

Точка \vec{x} називається **ізолюваною**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A = \{\vec{x}\}$$

Також решта тверджень будуть схожі на ті твердження, що були при топології \mathbb{R} . Доведення теж аналогічні, тому доводити я повторно не буду, просто залишу формулювання.

Proposition 7.2.5 Якщо $\{A_\lambda\}$ – сім'я відкритих підмножин, то $\bigcup_\lambda A_\lambda$ – відкрита.

Proposition 7.2.6 Якщо $\{A_\lambda\}$ – скінченна сім'я відкритих підмножин, то $\bigcap_\lambda A_\lambda$ – відкрита.

Proposition 7.2.7 \vec{a} – гранична точка $A \subset \mathbb{R}^m \iff \forall \varepsilon > 0 : A \cap U_\varepsilon(\vec{a})$ – нескінченна множина.

Proposition 7.2.8 A – відкрита множина $\iff A^c$ – замкнена множина.

Proposition 7.2.9 Точка $\vec{x} \in A$ – ізольована $\iff \vec{x}$ – не гранична для A .

Proposition 7.2.10 \mathbb{R}^m, \emptyset – одночасно відкриті та замкнені множини.

Proposition 7.2.11 Відкритий шар $B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$ є дійсно відкритим. Замкнений шар $B[\vec{a}, r] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}$ є дійсно замкненим.

Proof.

Нехай $\vec{x} \in B(\vec{a}, r) \implies \|\vec{x} - \vec{a}\| < r$. Встановимо $\varepsilon = r - \|\vec{x} - \vec{a}\|$.

Тоді $\vec{y} \in U_\varepsilon(\vec{x}) \implies \|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon \implies \|\vec{y} - \vec{a}\| = \|\vec{y} - \vec{x} + \vec{x} - \vec{a}\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon + \|\vec{x} - \vec{a}\| = \varepsilon \implies \vec{y} \in B(\vec{a}, r)$.

Отже, $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset B(\vec{a}, r)$, так для кожної точки $\vec{x} \in B(\vec{a}, r)$. А тому множина $B(\vec{a}, r)$ – відкрита.

$B[\vec{a}, r] = \mathbb{R}^m \setminus B(\vec{a}, r) = \mathbb{R}^m \cap B^c(\vec{a}, r)$ – обидві множини є замкненими. Тому перетин замкнена. ■

Definition 7.2.12 Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$.

Вона називається **обмеженою**, якщо

$$\exists R > 0 : \forall \vec{x} \in A : \|\vec{x}\| \leq R$$

Або інакше це можна записати таким чином:

$$\exists R > 0 : A \subset U_R(\vec{0})$$

Example 7.2.13 Зокрема одинична сфера $S^{m-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x}\| = 1\}$ буде обмеженою. Досить важлива множина, бо з нею ми будемо неодноразово працювати.

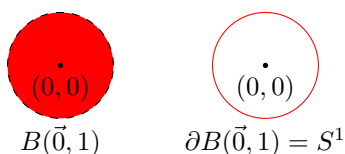
Зараз буде нове поняття, яке не було бажання вводити в мат. аналізі в \mathbb{R} .

Definition 7.2.14 Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$.

Межею множини A називають множину точок, в кожному околі яких є точки з A та з A^c . Тобто це можна записати так:

$$\partial A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A \neq \emptyset \text{ та } U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A^c \neq \emptyset\}$$

Example 7.2.15 Зокрема розглянемо відкриту двовимірну кулю $B(\vec{0}, 1)$. Зауважимо, що $\partial B(\vec{0}, 1) = S^1$ – одинична сфера (тобто коло в нашому випадку).



Перше червоне – це відкрита куля. Друге червоне – його межа.

Також специфічні приклади. Маємо $\partial \emptyset = \emptyset$, а також $\partial \mathbb{R}^m = \emptyset$ (тут тіпа безмежна множина).

Example 7.2.16 Якщо повернутися до одновимірного випадку, то $\partial(a, b) = \partial[a, b] = \partial[a, b) = \partial(a, b] = \{a, b\}$. У нас тут межа містить точки, які ніяк не зв'язуються на числовій прямій, тому ми й не розглядали межі.

Proposition 7.2.17 Маємо $A \subset \mathbb{R}^m$. Тоді межа ∂A – замкнена множина.

Proof.

Нехай \vec{x} – гранична точка ∂A ; тоді треба довести, що $\vec{x} \in \partial A$.

Для кожного $\varepsilon > 0$, за умовою, існує $\vec{y} \in \partial A$, $\vec{y} \neq \vec{x}$, для якого $\|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon$. Оскільки $\vec{y} \in \partial A$, то тоді існують $\vec{z}_1 \in A$, $\vec{z}_2 \in A^c$, які не збігаються з точкою \vec{y} і для яких $\|\vec{y} - \vec{z}_1\| < \varepsilon$, $\|\vec{y} - \vec{z}_2\| < \varepsilon$. Маючи нерівність трикутників для норми, маємо $\|\vec{x} - \vec{z}_1\| < 2\varepsilon$, $\|\vec{x} - \vec{z}_2\| < 2\varepsilon$. Оскільки це виконується для всіх $\varepsilon > 0$, то звідси доводимо $\vec{x} \in \partial A$. ■

Corollary 7.2.18 S^m – одинична сфера – замкнена множина.

7.3 Границя послідовності

Definition 7.3.1 Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ називається **границею** послідовності векторів $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| < \varepsilon$$

Позначення: $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$.

Theorem 7.3.2 Для послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a} \iff$

\iff для всіх координат послідовності $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ існують $\lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)} = a_j, j = \overline{1, m}$.

Proof.

\Rightarrow Дано: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| < \varepsilon$.

У нас границя визначається вектором $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$. Тоді $\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2}$

$$\implies \forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)} - a_j| = \sqrt{(a_j^{(n)} - a_j)^2} < \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2} < \varepsilon.$$

Отже, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)} = a_j$.

\Leftarrow Дано: $\forall j = \overline{1, m} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)} = a_j$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |a_j^{(n)} - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.

$$\implies \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$$

Отже, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$. ■

Definition 7.3.3 Послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| < \varepsilon$$

Theorem 7.3.4 Критерій Коші

$\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – збіжна $\iff \{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – фундаментальна.

Proof.

\Rightarrow Дано: $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – збіжна, тобто $\forall j = \overline{1, m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ – збіжні. Тоді всі вони – фундаментальні за критерієм Коші матаналіза \mathbb{R} , тобто

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_j : \forall n, k \geq N_j : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

$$\implies \exists N = \max\{N_1, \dots, N_m\} : \forall n, k \geq N :$$

$$\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1^{(k)})^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m^{(k)})^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$$

Отже, наша послідовність – фундаментальна.

\Leftarrow Дано: $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – фундаментальна, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| < \varepsilon$.

Тоді $\forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \varepsilon$ (зрозуміло), тобто $\forall j = \overline{1, m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ – фундаментальні.

Отже, вони всі збіжні, а тому $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – збіжна. ■

Definition 7.3.5 Послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається **обмеженою**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$$

Definition 7.3.6 Підпоследовність послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається послідовність $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$, де $\{n_l, l \geq 1\}$ – строго зростаюча послідовність в \mathbb{N} .

Theorem 7.3.7 Теорема Больzano-Ваєрштраса

Будь-яка обмежена послідовність векторів має збіжну підпоследовність векторів.

Proof.

Маємо обмежену послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$, тобто $\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$.

Тоді кожна координата є обмеженою, оскільки $\forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)}| \leq \sqrt{|a_1^{(n)}|^2 + \dots + |a_m^{(n)}|^2} \leq C$.

Тобто всі послідовності $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ – обмежені.

Розглянемо $\{a_1^{(n)}, n \geq 1\}$ – обмежена. Тоді існує збіжна підпоследовність $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$ (теорема Больzano-Ваєрштраса в мат.аналізі \mathbb{R}).

Розглянемо підпоследовність $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$. Вона також є обмеженою, тому всі координатні послідовності – обмежені.

Розглянемо $\{a_2^{(n_l)}, l \geq 1\}$ – обмежена. Тоді існує збіжна підпідпоследовність $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$. Оскільки підпоследовність $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$ – збіжна, то збіжною буде й підпідпоследовність $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$.

Розглянемо підпідпоследовність $\{\vec{a}^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ – за аналогічними міркуваннями, теж обмежена.

Розглянемо підпідпоследовність $\{a_3^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ – обмежена. Тоді існує збіжна підпідпідпоследовність $\{a_3^{(n_{l_{k_p})}}, p \geq 1\}$. Оскільки підпідпоследовності $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$, $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ – збіжні, то збіжними будуть підпідпідпоследовності $\{a_1^{(n_{l_{k_p})}}, p \geq 1\}$, $\{a_2^{(n_{l_{k_p})}}, p \geq 1\}$.

⋮

Після m кроків отримаємо підпоследовність $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$, у якій всі координатні послідовності є збіжними. Тоді $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$ – збіжна. ■

Proposition 7.3.8 Задані дві послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$, $\{\vec{b}^{(n)}, n \geq 1\}$, такі, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}^{(n)} = \vec{b}$.

Тоді:

- 1) $\forall c \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} c\vec{a}^{(n)} = c \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}^{(n)} + \vec{b}^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}^{(n)}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}^{(n)} \right)$.

Proof.

1), 2) випливає з властивостей границь в \mathbb{R} , якщо розглянути покоординатну збіжність.

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^{(n)}b_1^{(n)} + \dots + a_m^{(n)}b_m^{(n)}) = a_1b_1 + \dots + a_mb_m = (\vec{a}, \vec{b}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}^{(n)} \right).$$

Всі властивості доведені. ■

Example 7.3.9 Розглянемо $\vec{x}^{(n)} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \frac{n-1}{n} \quad \frac{2n^2-1}{n^2} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^T$ – послідовність векторів в \mathbb{R}^4 . Обчислимо її границю. Ми можемо обчислити покоординатно, згідно з теоріями:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{n^2} = 2.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_4^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\text{Таким чином, } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \frac{n-1}{n} \quad \frac{2n^2-1}{n^2} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^T = (0 \quad 1 \quad 2 \quad e)^T.$$

Theorem 7.3.10 Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$.

$\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ гранична точка для $A \iff \exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$

Proof.

\Rightarrow Дано: \vec{x}^0 – гранична точка для A , тобто $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ – нескінченна.

Зафіксуємо $\varepsilon = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \frac{1}{n}$. Тоді $\forall j = \overline{1, m} : |x_j^{(n)} - x_j^0| < \frac{1}{n}$.

За теоремою про 2 поліцаїв, отримаємо: $\forall j = \overline{1, m} : x_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_j^0$. Із покоординатної збіжності випливає, що $\vec{x}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{x}^0$ для послідовності $\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\}$.

\Leftarrow Дано: $\exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$. Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \forall n \geq N : \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ – тобто нескінченна $\Rightarrow \vec{x}^0$ – гранична точка. ■

Example 7.3.11 Зокрема одинична сфера $S^m = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x}\| = 1\}$ буде замкнутою.

Нехай $\vec{\xi} \in S^m$, хочемо показати, що буде вона граничною. Розглянемо послідовність $\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset S^m$ таким чином:

$$x_1^{(n)} = \xi_1 + \frac{1}{n}, \text{ починаючи з деякого номера при } \xi_1 \neq 1 \quad x_1^{(n)} = \xi_1 - \frac{1}{n} \text{ при } \xi_1 = 1$$

$$x_2^{(n)} = \xi_2$$

\vdots

$$x_{m-1}^{(n)} = \xi_{m-1}$$

$$x_m^{(n)} = \sqrt{1 - \left(x_1^{(n)}\right)^2 - \dots - \left(x_{m-1}^{(n)}\right)^2}.$$

Зауважимо, що $\forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{\xi}$, а також $\vec{x}^{(n)} \rightarrow \vec{\xi}$ при $n \rightarrow \infty$.

Тепер розглянемо $\vec{\xi} \notin S^m$, тобто звідси $\begin{cases} \|\xi\| < 1 \\ \|\xi\| > 1 \end{cases}$.

Припустимо, що $\vec{\xi}$ – гранична точка для S^m . Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{x} \in S^m : \vec{x} \neq \vec{\xi} : \|\vec{x} - \vec{\xi}\| < \varepsilon$.

У випадку $\|\xi\| > 1$ ми маємо $1 < \|\xi\| = \|\vec{\xi} - \vec{x} + \vec{x}\| \leq \|\vec{\xi} - \vec{x}\| + \|\vec{x}\| < 1 + \varepsilon$.

Оскільки виконано $\forall \varepsilon > 0$, то звідси $\|\xi\| = 1$, що неможливо.

У випадку $\|\xi\| < 1$ ми маємо $\varepsilon > \|\vec{x} - \vec{\xi}\| \geq \|\|\vec{x}\| - \|\xi\|\| = |1 - \|\xi\|| = 1 - \|\xi\| > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1 - \|\xi\| > 0$.

Оскільки виконано $\forall \varepsilon > 0$, то звідси $\|\xi\| = 1$, що неможливо.

У двох випадках отримали суперечність!

Таким чином, ми довели, що S^m – замкнена множина.

7.4 Функція від декількох змінних. Границя функції

Ми будемо розглядати функції вигляду $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^m$. Тобто ця функція має аргумент \vec{x} , а повертає деяке дійсне число $f(\vec{x})$. Проте оскільки $\vec{x} = (x_1 \dots x_m)^T$ складається з m дійсних чисел, то ми можемо функцію сприймати як $f(x_1, \dots, x_m)$, тобто це функція з m аргументами.

Example 7.4.1 Розглянемо такі приклади:

1) Маємо функцію $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, що задана як $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$;

2) Маємо функцію $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, що задана як $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m) = x_1 x_2^2 \dots x_m^m$.

Definition 7.4.2 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка для A .

Число a називається **границею функції** $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$ **в точці** \vec{x}^0 , якщо

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - a| < \varepsilon - \text{def. Коші} \\ \forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}^{(n)}) = a - \text{def. Гайне} \end{aligned}$$

Позначення: $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) = a$.

Theorem 7.4.3 Означення Коші \iff Означення Гайне.

Доведення аналогічне як в матані \mathbb{R} .

Proposition 7.4.4 Арифметичні властивості

Задані функції $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка для A . Відомо, що $\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) = a, \exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} g(\vec{x}) =$

b . Тоді:

1) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} cf(\vec{x}) = ca, \forall c \in \mathbb{R}$;

- 2) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = a + b$;
 3) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x})g(\vec{x}) = ab$;
 4) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{a}{b}$ при $b \neq 0$.

Всі вони випливають із арифметичних послідовностей та означення Гайне.

Theorem 7.4.5 Критерій Коші

Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка для A .

$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A : \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \varepsilon$.

Доведення аналогічне як в матані \mathbb{R} .

Example 7.4.6 Обчислити $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \left(\frac{y}{x} + \cos(xy) \right)$. Можна позначати це інакше: $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow \pi}} \left(\frac{y}{x} + \cos(xy) \right)$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \left(\frac{y}{x} + \cos(xy) \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \frac{y}{x} + \lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \cos(xy) = \frac{\pi}{1} + \cos \pi = \pi - 1.$$

Example 7.4.7 Покажемо, що не існує границі $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Для доведення скористаємось означенням Гайне. Візьмемо дві послідовності:

$\{(x_n, y_n), n \geq 1\}$ так, щоб $y_n = x_n$, а також $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$. Тоді $\frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{2x_n^2}{2x_n^2} \rightarrow 1$.

$\{(x_n, y_n), n \geq 1\}$ так, щоб $y_n = -x_n$, а також $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$. Тоді $\frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{-2x_n^2}{2x_n^2} \rightarrow -1$.

Можна конкретизувати, сказати $x_n = \frac{1}{n}$, а можна цього не робити, напевно. У будь-якому випадку, ми показали, що не існує границі.

Тобто ми прямували до точки $(0, 0)$ з двох сторін: вздовж прямої $y = x$ та $y = -x$.

Theorem 7.4.8 Границя в полярних координатах

Задано функцію $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Припустимо, що $f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = F_1(\rho)F_2(\varphi)$, причому $\lim_{\rho \rightarrow 0} F_1(\rho) = 0$

та $F_2(\varphi)$ – обмежена. Тоді $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

Proof.

Маємо $\lim_{\rho \rightarrow 0} F_1(\rho) = 0 \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \rho : |\rho| < \delta \implies |F_1(\rho)| < \varepsilon$.

Також F_2 – обмежена, тобто $\exists M > 0 : \forall \varphi : |F_2(\varphi)| < M$.

Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді існує таке $\delta > 0$, що $\forall (x, y)$, якщо $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2} = |\rho| < \delta$, то звідси $|f(x, y)| = |f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)| = |F_1(\rho)| |F_2(\varphi)| < M\varepsilon$.

Таким чином, дійсно, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. ■

Example 7.4.9 Обчислити $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$.

Маємо $x = \rho \cos \varphi$ та $y = \rho \sin \varphi$. Тоді функція $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\rho^2} = \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$.

Ми змогли розбити на функції $F_1(\rho) = \rho^2 \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ та $F_2(\varphi) = \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$ – обмежена, бо $|F_2(\varphi)| \leq 1$.

Таким чином, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = 0$.

Remark 7.4.10 Якщо так станеться, що для двох різних кутів θ при $\rho \rightarrow 0$ ми отримаємо два різних ліміта, то тоді $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Definition 7.4.11 Число $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ називається **повторною границею**, якщо

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = g(y)$$

Аналогічно визначається $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$.

Останнє дається для загального знання, таке ми точно використовувати не будемо. Тут надто багато плутанини з ними.

Example 7.4.12 Маємо функцію $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$.

Якщо шукати $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$, то вона не існує, тому що при фіксованому x ми маємо порахувати границю від $\sin \frac{1}{y}$, якого не існує. Також не існує $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ за аналогічними міркуваннями.

Проте! Подвійна границя $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0$. Дійсно,

$$\left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq \left| x \sin \frac{1}{y} \right| + \left| y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon.$$

Остання оцінка отримана в силу $\|(x, y)\| < \delta$, кладемо $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ – границя доведена.

Example 7.4.13 Маємо функцію $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Проте! Подвійної границі $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не існує. Дійсно, якщо $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$, то тоді

$$f(x, y) = \frac{\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

Для різного напрямку кривої отримаємо різні границі, а тому не існує. Цим активно зловживати не будемо.

Remark 7.4.14 Окремо можуть виникнути границі вигляду $\lim_{(x, y) \rightarrow (\infty, \infty)} f(x, y)$. У такому разі необхідні уточнення, що мається увазі під цим лімітом. Або дивитись на контекст задачі.

Example 7.4.15 Маємо $\lim_{(x, y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$. У даному контексті мається на увазі, що x, y робимо скільки завгодно великими одночасно.

$$\text{Маємо ось таку оцінку: } 0 \leq (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = \frac{x^2 + y^2}{e^{x+y}} \leq \frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}.$$

Оскільки $x > 0, y > 0$ в силу характеру прямування, то ця нерівність справедлива. Цілком зрозуміло, що при $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$ одночасно маємо $x + y \rightarrow +\infty$, а тому $\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}} \rightarrow 0, x + y \rightarrow +\infty$.

Таким чином, $\lim_{(x, y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = 0$.

7.5 Неперервність функції

Definition 7.5.1 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – гранична точка.

Функція f називається **неперервною в точці \vec{x}^0** , якщо $\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0)$. В будь-якій ізольованій точці \vec{x}^0 функція f також неперервна.

Функція f називається **неперервною на множині A** , якщо в $\forall \vec{x} \in A: f$ – неперервна.

Remark 7.5.2 Можна було спочатку дати означення через ε - δ мову, а згодом прийти до еквівалентного означення, як ми це робили в мат. аналізі \mathbb{R} , однак буде все аналогічно.

Proposition 7.5.3 Задані функції $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – гранична точка. Відомо, що f, g – неперервні в точці \vec{x}^0 . Тоді:

- 1) cf – неперервна в точці $\vec{x}^0, \forall c \in \mathbb{R}$;
- 2) $f + g$ – неперервна в точці \vec{x}^0 ;
- 3) fg – неперервна в точці \vec{x}^0 ;
- 4) $\frac{f}{g}$ – неперервна в точці \vec{x}^0 , якщо $g(\vec{x}^0) \neq 0$.

Впливають з властивостей границь функцій та неперервності.

Theorem 7.5.4 Наступні функції є неперервними на своїй множині A :

- 1) $f(\vec{x}) = \text{const}$ – константа, $A = \mathbb{R}^m$;
- 2) $f(\vec{x}) = x_j, j = \overline{1, m}$ – координата, $A = \mathbb{R}^m$;
- 3) $P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n_1 \\ 0 \leq k_2 \leq n_2 \\ \vdots \\ 0 \leq k_m \leq n_m}} a_{k_1 k_2 \dots k_m} \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$ – многочлен від m змінних, $A = \mathbb{R}^m$;

4) $R(x_1, \dots, x_m) = \frac{P(x_1, \dots, x_m)}{Q(x_1, \dots, x_m)}$ – раціональна функція від m змінних, $A = \mathbb{R}^m \setminus \{\vec{x} : Q(\vec{x}) = 0\}$.

1) Все зрозуміло.

2) $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)| = |x_j - x_j^0| < \varepsilon$, тому встановлюється $\delta = \varepsilon$.

3) Безпосередньо випливає з (TODO: лінкування) як сума та добуток функцій 1), 2).

4) Безпосередньо випливає з (TODO: лінкування) як частка двох функцій 3).

Example 7.5.5 Доведемо, що функція $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ неперервна на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Для цього покажемо, що $\sqrt{x^2 + y^2}$ – неперервна в деякій точці $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Дійсно,

$$|\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}| = \frac{|x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2|}{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \leq \frac{|x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \rightarrow 0 \text{ при } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

Ми вже знаємо, що $f(x, y) = x^2 + y^2$ – неперервна в точці (x_0, y_0) , а тому $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (x^2 + y^2) = x_0^2 + y_0^2$,

тож вище все правильно. Отже, $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$.

А це й доводить неперервність функції f в будь-якій точці $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Example 7.5.6 Взагалі-то кажучи, про точки розриву в матані \mathbb{R}^m ніхто не розповідає, бо не сильно це й треба, але хай буде даний приклад. Дослідити на розривність функцію $f(x, y) = \frac{x + y}{x^3 + y^3}$.

Точки, де відбувається розрив – це точки $x = -y$. Тобто маємо $(x, y) = (a, -a)$, $a \in \mathbb{R}$ – точка розриву.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, -a)} \frac{x + y}{x^3 + y^3} = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, -a)} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} = \begin{cases} \frac{1}{3a^2}, & a \neq 0 \\ \infty, & a = 0 \end{cases}.$$

Отже, маємо $(0, 0)$ – точка нескінченного розриву та $(a, -a)$, $a \neq 0$ – точка усуненого розриву.

Theorem 7.5.7 Теорема Варштраса 1, 2

Задано множину A – замкнена та обмежена; функція $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна на A . Тоді:

1. f – обмежена на A ;

$$2. \exists \begin{cases} \vec{x}^* \in A \\ \vec{x}_* \in A \end{cases} : \begin{cases} f(\vec{x}^*) = \max_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}_*) = \min_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \end{cases}.$$

Доведення аналогічне як в матані \mathbb{R} .

Definition 7.5.8 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Функція f називається **рівномірно неперервною** на множині A , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A : \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \varepsilon$$

Theorem 7.5.9 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ – рівномірно неперервна на A . Тоді вона є неперервною на A .

Доведення аналогічне як в матані \mathbb{R} .

Theorem 7.5.10 Теорема Кантора

Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та A – замкнена, обмежена. Відомо, що f – неперервна на A . Тоді вона є рівномірно неперервною на A .

Доведення аналогічне як в матані \mathbb{R} .

7.6 Символіка Ландау

Definition 7.6.1 Задані функції $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}$ – гранична точка A .

Функція f називається **О-великою** від функції g в точці \vec{x}^0 , якщо

$$\exists L > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies |f(\vec{x})| \leq L|g(\vec{x})|$$

Позначення: $f(\vec{x}) = O(g(\vec{x})), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0$.

Функція f називається **о-малою** від функції g в точці \vec{x}^0 , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies |f(\vec{x})| < \varepsilon |g(\vec{x})|$$

Позначення: $f(\vec{x}) = o(g(\vec{x})), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0$.

Всі властивості символік Ландау для функції від однієї змінної переходять на функцію від декількох змінних в силу аналогічності доведення.

Example 7.6.2 Зокрема $xy = o(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ при $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$. Дійсно,

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right| \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2}} = |y| \rightarrow 0 \text{ при } (x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0). \text{ Отже, } \lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0.$$

7.7 Границя та неперервність векторнозначної функції кількох змінних, символіка Ландау

Ми будемо розглядати вектор-функції кількох (або однієї) змінної вигляду $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}^m$.

Тобто тепер $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) \end{pmatrix}$.

Example 7.7.1 Маємо деяку функцію $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, що задана таким чином:

$$\begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}. \text{ Або зазвичай це пишуть так: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Definition 7.7.2 Задано функцію $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A . Вектор \vec{b} називається **границею вектор-функції $\vec{f}(\vec{x})$ в точці \vec{x}^0** , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon - \text{def. Коші}$$

$$\forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x}^{(n)}) = \vec{b} - \text{def. Гайне}$$

Позначення: $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$.

Theorem 7.7.3 Означення Коші \iff Означення Гайне

Все абсолютно аналогічно.

Proposition 7.7.4 Задано функцію $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A .

$$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{u} \iff \forall j = \overline{1, k} : \exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f_j(\vec{x}) = u_j.$$

Впливає із означення Гайне та покоординатної збіжності.

Proposition 7.7.5 Арифметичні властивості

Задані функції $\vec{f}, \vec{g}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A . Відомо, що

$$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{u}, \exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{v}. \text{ Тоді:}$$

- 1) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} c\vec{f}(\vec{x}) = c\vec{u}, \forall c \in \mathbb{R};$
- 2) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})) = \vec{u} + \vec{v};$
- 3) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})) = (\vec{u}, \vec{v}).$

Всі вони впливають із векторних послідовностей та означення Гайне.

Remark 7.7.6 У випадку векторної функції $\vec{a}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}$, оскільки прямування йде за дійсною множиною, то ми можемо визначити **границю зліва та справа** даної функції. Тут все зрозуміло, як виглядатиме означення.

Example 7.7.7 Знайти границю $\lim_{t \rightarrow 0+0} \begin{pmatrix} \frac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T$.

За одним твердженням, ми можемо покоординатно шукати границі:

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\sin 2t}{t} = 2 \quad \lim_{t \rightarrow 0+0} t^t = 1.$$

$$\text{Отже, } \lim_{t \rightarrow 0+0} \begin{pmatrix} \frac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T = (2 \quad 1)^T.$$

Definition 7.7.8 Задана функція $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка.

Функція \vec{f} називається **неперервною в точці \vec{x}^0** , якщо $\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}^0)$.

Remark 7.7.9 Аналогічно сума неперервних функцій - неперервна; множення на скаляр - все одно неперервна. До речі, також скалярний добуток неперервний функцій - теж неперервна.

Remark 7.7.10 Ще тут виконується теорема Ваєрштраса 1, 2 для таких функцій.

Theorem 7.7.11 Задані множини $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^k$

Задані функції $\vec{f}: A \rightarrow B$ - неперервна в точці $\vec{x}^0, \vec{g}: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ - неперервна в точці $\vec{f}(\vec{x}^0)$.

Тоді функція $h: A \rightarrow \mathbb{R}^n : h(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$ - неперервна в точці \vec{x}_0 .

Доведення аналогічне як в матані \mathbb{R} .

Definition 7.7.12 Задані функції $\vec{f}, \vec{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка A . Функція \vec{f} називається **О-великою** від функції \vec{g} в точці \vec{x}^0 , якщо

$$\exists L > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x})\| \leq L \|\vec{g}(\vec{x})\|$$

Позначення: $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{O}(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0$.

Функція \vec{f} називається **о-малою** від функції \vec{g} в точці \vec{x}^0 , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x})\| < \varepsilon \|\vec{g}(\vec{x})\|$$

Позначення: $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{o}(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0$.

Corollary 7.7.13 $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{o}(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0 \iff \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \frac{\|\vec{f}(\vec{x})\|}{\|\vec{g}(\vec{x})\|} = 0$.

7.8 Крива в \mathbb{R}^m

Definition 7.8.1 Кривою в \mathbb{R}^m називають множину значень вектор-функції: $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, причому \vec{r} - неперервна на $[a, b]$:

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$$

Definition 7.8.2 Крива Γ називається **простою**, якщо

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \implies t_1 = t_2 \text{ або } \{t_1, t_2\} = \{a, b\}$$

Крива Γ називається **замкненою**, якщо $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Просту та замкнену криву називають **жордановою**.

8 Диференційованість

8.1 Для функції із багатьма змінними

Definition 8.1.1 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Функція f називається **диференційованою** в точці \vec{x}^0 , якщо

$$\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R} : f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1 \Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + o(\|\Delta \vec{x}\|)_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}}$$

Тобто диференційованість означає, що поверхня навколо точки \vec{x} дуже схожа на площину, що проходить через точку \vec{x} .

Example 8.1.2 Розглянемо функцію $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$ на \mathbb{R} . Вона є диференційованою в будь-якій точці (x_0, y_0) . Дійсно, розпишемо різницю:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 - x_0 y_0 - y_0^2) = \\ &= x_0^2 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 - x_0 y_0 - x_0 \Delta y - y_0 \Delta x - \Delta x \Delta y - y_0^2 - 2y_0 \Delta y - \Delta y^2 - x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2 = \\ &= (2x_0 - y_0) \Delta x + (-x_0 - 2y_0) \Delta y + (\Delta x^2 - \Delta x \Delta y - \Delta y^2). \end{aligned}$$

Залишилось довести, що $\Delta x^2 - \Delta x \Delta y - \Delta y^2 = o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)$ при $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Дійсно,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x^2 - \Delta x \Delta y - \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi}{\rho} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho (\cos^2 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (2x_0 - y_0) \Delta x + (-x_0 - 2y_0) \Delta y + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)}.$$

Proposition 8.1.3 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що функція f – диференційована в точці \vec{x}^0 . Тоді f – неперервна в точці \vec{x}^0 .

Proof.

$$f \text{ – диференційована в точці } \vec{x}^0, \text{ тобто } f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1 \Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + o(\|\Delta \vec{x}\|)_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}}.$$

Або можна це записати інакше:

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1(x_1 - x_1^0) + \dots + L_m(x_m - x_m^0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|) \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)) \stackrel{=}{=} 0$$

Всі дужки прямують по координатно до нуля, o -маленьке також, в силу н.м.

$$\stackrel{=}{=} 0 \implies f \text{ – неперервна в точці } \vec{x}^0. \quad \blacksquare$$

Definition 8.1.4 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.

Частинною похідною функції f за змінною x_j в точці \vec{x}^0 називають величину:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j}$$

Якщо уважно придивитись на означення, то, насправді, ми просто підставили $x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0$ та отримали функцію $g(x_j) = f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0)$ – функція від одного аргументу x_j – та обчислили похідну цієї функції в точці x_j^0 . Отже,

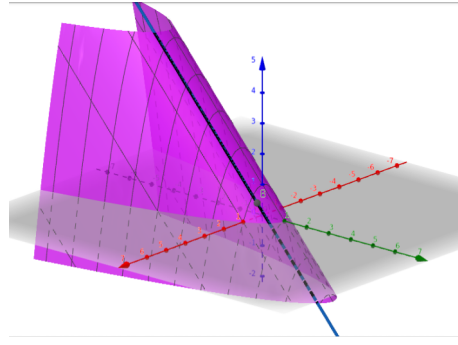
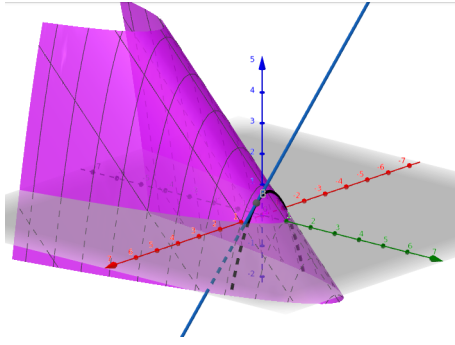
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = g'(x_j^0)$$

Example 8.1.5 Маємо функцію $f(x, y) = 1 - x^2 - y$. Знайдемо всі її частинні похідні.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

Сенс $\frac{\partial f}{\partial x}$ – знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь

OX . Аналогічно $\frac{\partial f}{\partial y}$ – знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь OY .



Таких дотичних прямих існують безліч, але про це згодом.

Proposition 8.1.6 Необхідна умова диференційованості

Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Тоді вона має частинні похідні в точці \vec{x}^0 , причому $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = L_j$.

Proof.

f – диференційована в точці \vec{x}^0 , тоді $\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R}$:

$$f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1 \Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + o(\|\Delta \vec{x}\|), \Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}.$$

У окремому випадку, встановити можна $\Delta \vec{x} = (0 \dots \Delta x_j \dots 0)^T$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) &= \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j} \stackrel{f \text{ -- диференційована}}{=} \\ &= \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{L_1 \cdot 0 + \dots + L_j \Delta x_j + \dots + L_m \cdot 0 + o(|\Delta x_j|)}{\Delta x_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{L_j \Delta x_j + o(\Delta x_j)}{\Delta x_j} = L_j. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remark 8.1.7 У зворотному напрямку це не завжди вірно.

Example 8.1.8 Маємо функцію $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Розглянемо її в околі точки $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

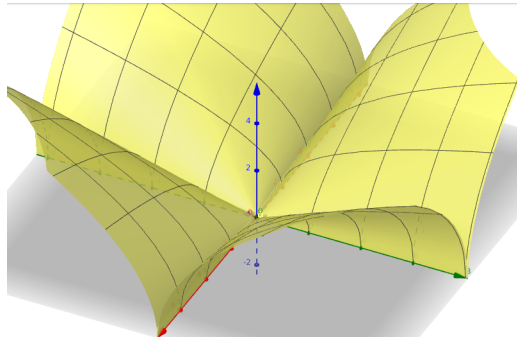
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Тобто в точці (x_0, y_0) функція має частинні похідні. Проте виявляється, що в (x_0, y_0) вона не диференційована. Дійсно,

$$f(\Delta x, \Delta y) = 0\Delta x + 0\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \text{ тобто}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \stackrel{\text{полярна заміна}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{|\cos \varphi \sin \varphi|} - \text{не існує, тому рівність вище не вірна.}$$



Можливо виникне питання, а чи існують інші числа $(L_1, L_2) \neq (0, 0)$. Ні. Це впливає з необхідної умови диференційованості.

Виникає тоді інше питання, а коли ми можемо гарантувати диференційованість через існування частинних похідних.

Theorem 8.1.9 Достатня умова диференційованості

Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\bar{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що в деякому околі точки \bar{x}^0 існують всі частинні похідні, які неперервні в точці \bar{x}^0 . Тоді f – диференційована в точці \bar{x}^0 .

Ми будемо доводити при $m = 2$. Для більших аргументів – аналогічно, але більш технічна справа.

Proof.

Отже, дано $f(x, y)$ та в околі точки (x_0, y_0) існують частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$, які неперервні в (x_0, y_0) . Розглянемо приріст аргументу $\Delta x, \Delta y$ так, щоб ми були всередині околу точки (x_0, y_0) . Нехай $\Delta x > 0, \Delta y > 0$, для інших все аналогічно.

$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \quad \square$
Позначу $h(t) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + t), t \in [0, \Delta y]$. Тоді $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = h(\Delta y) - h(0)$.

Функція h – диференційована на $[0, \Delta y]$, оскільки існує $\frac{\partial f}{\partial y}$, яка неперервна. Тому $h \in C([0, \Delta y])$, а

значить, за теоремою Лагранжа,

$$h(\Delta y) - h(0) = h'(c_1)\Delta y, c_1 \in (0, y)$$

$$h'(t) = f'_t(x_0 + \Delta x, y_0 + t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + t)$$

$$\implies h(\Delta y) - h(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y.$$

Аналогічно розглянемо функцію $g(s) = f(x_0 + s, y_0), s \in [0, \Delta x]$. Тоді

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = g(\Delta x) - g(0) \stackrel{\text{Th. Лагранжа}}{=} g'(c_2)\Delta x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x, c_2 \in (0, \Delta x).$$

Повертаємось до нашої рівності.

$$\square \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x.$$

Залишилось довести, що виконується наступна рівність:

$$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) = o(\|(\Delta x, \Delta y)\|).$$

$$\begin{aligned} & (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) = \\ & = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) = \\ & = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \Delta y. \end{aligned}$$

Якщо $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, то звідси $c_1 \rightarrow 0, c_2 \rightarrow 0$ та за умовою того, що частинні похідні є неперервними, маємо:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \stackrel{\text{позн}}{=} \alpha \rightarrow 0 \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \stackrel{\text{позн}}{=} \beta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Далі, використовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо таке:

$$\left| \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \left| \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \rightarrow 0 \implies \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0.$$

Остаточно отримуємо:

$$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) = o(\|(\Delta x, \Delta y)\|).$$

Тобто звідси f – диференційована в точці (x_0, y_0) . ■

Definition 8.1.10 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\bar{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.

Похідною функції f в точці \bar{x}^0 називається ковектор

$$f'(\bar{x}^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) (\bar{x}^0)$$

Таким чином, ми можемо визначити лінійний функціонал по $\Delta \vec{x}$ ось так:

$$f'(\bar{x}^0)\Delta \vec{x} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}^0)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\bar{x}^0)\Delta x_m.$$

Тоді означення диференційованої функції f переписеться в такому вигляді:
 $f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$.

Proposition 8.1.11 Задані функції $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що f, g – диференційовані в точці \vec{x}^0 . Тоді:

- 1) αf – диференційована в точці \vec{x}^0 , $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, похідна $(\alpha f)'(\vec{x}^0) = \alpha f'(\vec{x}^0)$;
- 2) $f + g$ – диференційована в точці \vec{x}^0 , похідна $(f + g)'(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)$;
- 3) fg – диференційована в точці \vec{x}^0 , похідна $(fg)'(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) + f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)$.

Proof.

Доведемо кожну (ну окей, майже кожну) властивість.

1) *Зрозуміло.*

$$2) (f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) + g(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})) - (f(\vec{x}^0) + g(\vec{x}^0)) = (f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0)) + (g(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - g(\vec{x}^0)) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|) + g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|) = (f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}.$$

$$3) f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})g(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) = (f(\vec{x}^0) + f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)) \cdot (g(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) \stackrel{=}{=} \\ \text{Після розкриття дужок ми залишимо лише доданки } (f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} \text{ та } (g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x}.$$

Ось чому:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|) &= o(\|\Delta\vec{x}\|) & g(\vec{x}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|) &= o(\|\Delta\vec{x}\|) \\ (f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}) \cdot (g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}) &= o(\|\Delta\vec{x}\|), \text{ тому що, розписавши, побачимо } \Delta x_i \Delta x_j = o(\|\Delta\vec{x}\|). \\ (f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x})o(\|\Delta\vec{x}\|) &= o(\|\Delta\vec{x}\|) & (g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x})o(\|\Delta\vec{x}\|) &= o(\|\Delta\vec{x}\|), \\ \text{тому що, розписавши, побачимо } \Delta x_j o(\|\Delta\vec{x}\|) &= o(\|\Delta\vec{x}\|). \\ (o(\|\Delta\vec{x}\|))^2 &= o(\|\Delta\vec{x}\|) \end{aligned}$$

Повертаємось до рівності:

$$\stackrel{=}{=} (f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} + (g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|).$$

Майже всі властивості доведені. ■

Definition 8.1.12 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.

Диференціалом функції $f(x)$ в точці \vec{x}^0 називається такий вираз:

$$df(\vec{x}^0, \Delta\vec{x}) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}$$

Частіше позначають ще диференціал в точці ось так: $df_{\vec{x}^0}$.

Remark 8.1.13 Якщо згадати лінійну алгебру, то $df_{\vec{x}^0}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – це, насправді, лінійний функціонал, де в нас записується ковектор $f'(\vec{x}^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0) \right)$. І ми маємо:

$$df_{\vec{x}^0}(\Delta\vec{x}) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}.$$

Як й раніше, аргумент $\Delta\vec{x}$ опускають, а також позначають $\Delta\vec{x} = \vec{dx}$, тобто $\Delta x_1 = dx_1, \dots, \Delta x_m = dx_m$. Тоді маємо інший вигляд:

$$df(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \vec{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{x}^0) dx_m$$

Example 8.1.14 Маємо функцію $f(x, y) = 1 - x^2 - y$. Ми вже знайшли $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -1$, вони є неперервними в будь-якій точці. Отже, f – диференційована будь-де. Знадемо тепер диференціал функції. Це дуже просто:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (-2x) dx - dy \stackrel{\text{або}}{=} \begin{pmatrix} -2x & -1 \end{pmatrix} \vec{dr}.$$

8.2 Для векторнозначних функцій

Definition 8.2.1 Задано функцію $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.

Вектор-функція \vec{f} називається **диференційованою** в точці \vec{x}^0 , якщо

$$\exists M \in \text{Mat}(m \times k) : \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)_{\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}}$$

Зараз дізнаємось, що це за матриця $M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix}$ під час доведення твердження.

Proposition 8.2.2 Задано функцію $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
 \vec{f} – диференційована в точці $\vec{x}^0 \iff f_1, \dots, f_k$ – диференційовані в точці \vec{x}^0 .

Proof.

\Rightarrow Дано: \vec{f} – диференційована в \vec{x}^0 , тобто $\exists M \in \text{Mat}(m \times k) : \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)$.
 $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(\|\Delta\vec{x}\|) \\ \vdots \\ o(\|\Delta\vec{x}\|) \end{pmatrix}$$

Із цієї рівності випливає, що $\forall j = \overline{1, k}$:

$$f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f_j(\vec{x}^0) = M_{j1}\Delta x_1 + \dots + M_{jm}\Delta x_m + o(\|\Delta\vec{x}\|).$$

$$\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$$

Це означає, що f_j – диференційована в точці \vec{x}^0 . Тоді звідси випливає, що:

$$M_{j1} = \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\vec{x}^0), \dots, M_{jm} = \frac{\partial f_j}{\partial x_m}(\vec{x}^0).$$

В результаті отримаємо ось такий вигляд матриці:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_k \end{pmatrix}(\vec{x}^0) = J(x) = \vec{f}'(\vec{x}^0) \text{ – це називається матрицею Якобі.}$$

Матриця Якобі описує **похідну** вектор-функції \vec{f} в точці \vec{x}^0 , тобто \vec{f}' – це лінійний оператор. А якщо матриця буде квадратною, то ми можемо обчислити $\det \vec{f}'(\vec{x}^0)$ – це називається **якобіаном**.

\Leftarrow Дано: f_1, \dots, f_k – диференційовані в точці \vec{x}^0 . Хочемо довести, що
 $\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) - M\Delta\vec{x} = o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$, але це є правда, тому що $\forall j = \overline{1, k} : f_j$ – диференційована $\implies f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f_j(\vec{x}^0) - f'_j(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} = o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$ – виконана покоординатна рівність. ■

Proposition 8.2.3 Задано функцію $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що вектор-функція \vec{f} – диференційована в точці \vec{x}^0 . Тоді \vec{f} – неперервна в точці \vec{x}^0 .

Proof.

Дійсно, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (M(\vec{x} - \vec{x}^0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|)) = \vec{0}$, оскільки виконується покоординатна границя. ■

Proposition 8.2.4 Задані функції $\vec{f}, \vec{g}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що \vec{f}, \vec{g} – диференційовані в точці \vec{x}^0 . Тоді $\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}$ – диференційована в точці \vec{x}^0 , похідна $(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})'(\vec{x}^0) = \alpha\vec{f}'(\vec{x}^0) + \beta\vec{g}'(\vec{x}^0)$.

Впливає з арифметики матриці. Тут цілком зрозуміло.

Example 8.2.5 Важливий

Маємо вектор-функцію $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}$. Знайдемо її похідну та якобіан.

$$\vec{f}'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \det \vec{f}'(\vec{x}^0) = \cos \varphi \rho \cos \varphi + \sin \varphi \rho \sin \varphi = \rho.$$

Ще знадобиться, коли будемо шукати подвійні інтеграли.

Proposition 8.2.6 Задані функції $\vec{f}: A \rightarrow B$ та $\vec{g}: B \rightarrow \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$. Відомо, що \vec{f} – диференційована в точці \vec{x}^0 та \vec{g} – диференційована в точці \vec{y}^0 . Тоді $\vec{g} \circ \vec{f}$ – диференційована в точці \vec{x}^0 , похідна $(\vec{g} \circ \vec{f})'(\vec{x}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)$.

Lemma 8.2.7 Задано матрицю $A \in \text{Mat}(m \times k)$. Тоді $\exists C \geq 0 : \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^m : \|A\vec{h}\| \leq C\|\vec{h}\|$.

Proof.

$$\text{Дійсно, } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{h} = \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + \dots + a_{1m}h_m \\ \vdots \\ a_{k1}h_1 + \dots + a_{km}h_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|A\vec{h}\| = \sqrt{(a_{11}h_1 + \dots + a_{1m}h_m)^2 + \dots + (a_{k1}h_1 + \dots + a_{km}h_m)^2} \stackrel{\text{К-Б}}{\leq}$$

$$\leq \sqrt{(a_{11}^2 + \dots + a_{1m}^2)(h_1^2 + \dots + h_m^2) + \dots + (a_{k1}^2 + \dots + a_{km}^2)(h_1^2 + \dots + h_m^2)} =$$

$$= \|\vec{h}\| \sqrt{(a_{11}^2 + \dots + a_{1m}^2) + \dots + (a_{k1}^2 + \dots + a_{km}^2)} = C\|\vec{h}\|. \quad \blacksquare$$

Тепер безпосередньо доведення твердження.

Proof.

$$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0)) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0) + \vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0)) =$$

$$= \vec{g}(\vec{y}^0 + \Delta\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\Delta\vec{y} + o(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|) \quad \square$$

Залишилось довести, що $\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$, якщо $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$, тобто

$$\lim_{\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{\|\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} = 0.$$

$$\frac{\|\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} \leq \frac{\|\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\| + \|\vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} \stackrel{\text{Lm.}}{\leq} C \frac{\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)}{\|\Delta\vec{x}\|} + \frac{\vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)}{\|\Delta\vec{x}\|} =$$

$$= C \frac{\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)}{\|\Delta\vec{x}\|} + \frac{\vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)}{\|\Delta\vec{y}\|} \frac{\|\Delta\vec{y}\|}{\|\Delta\vec{x}\|}.$$

Якщо $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$, то перший доданок прямує до нуля, а другий буде прямувати до нуля, якщо $\frac{\|\Delta\vec{y}\|}{\|\Delta\vec{x}\|}$

буде обмеженою. Зараз це й покажемо:

$$\frac{\|\Delta\vec{y}\|}{\|\Delta\vec{x}\|} = \frac{\|\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} \leq \frac{\|\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x}\| + \|\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} \stackrel{\text{Lm.}}{\leq} C^* + \frac{\|\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|}$$

Якщо $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$, то отримаємо обмеженість.

Отже, остаточно, $\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$, якщо $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$, а значить

$$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) \text{ при } \Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}. \quad \blacksquare$$

Corollary 8.2.8 Задано функцію $\vec{f}: A \rightarrow B$ та $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$.

Відомо, що \vec{f} — диференційована в точці \vec{x}^0 та g — диференційована в точці \vec{y}^0 .

Тоді $\frac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(\vec{y}^0) \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(\vec{y}^0) \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_n}(\vec{y}^0) \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$, виконано $\forall j = \overline{1, m}$.

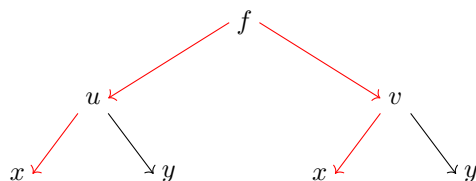
Тут $h(\vec{x}) = g(\vec{f}(\vec{x}))$.

Example 8.2.9 Маємо функцію $f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$. Знайдемо частинні похідні за x, y .

Позначимо $u(x, y) = xy, v(x, y) = \frac{x}{y}$. Тоді маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{-x}{y^2}.$$



Схематично, як шукати $\frac{\partial f}{\partial x}$.

8.3 Похідна за напрямком. Градієнт

Definition 8.3.1 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ — внутрішня точка. А також задано вектор \vec{l} , такий, що $\|\vec{l}\| = 1$. Його ще називають **напрямком**.

Похідною функції f за напрямком \vec{l} в точці \vec{x}^0 називають величину

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t}$$

Як вже було зазначено, дотичних прямих буває дуже багато, тому ми й задаємо напрямок.

Remark 8.3.2 Якщо всі координати вектора \vec{l} будуть нулевими, окрім $l_j = 1$, то $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$.

Theorem 8.3.3 Задано функцію f – диференційована в точці $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Тоді $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \vec{l} = \frac{\partial f}{\partial x_1}l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}l_m$.

Proof.

f – диференційована в точці \vec{x}^0 , тобто $f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}tl_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}tl_m + o(\|t\vec{l}\|)$. Тому

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}tl_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}tl_m + o(\|t\vec{l}\|)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}l_m. \quad \blacksquare$$

Example 8.3.4 Маємо функцію $f(x, y) = 1 - x^2 - y$. Знайти похідну за напрямком $\vec{l} = (0.6, 0.8)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = -0.6 \cdot 2x - 0.8 \cdot 1 = -1.2x - 0.8.$$

Definition 8.3.5 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.

Градiєнтом функції f в точці \vec{x}^0 називають такий вектор

$$\text{grad } f(\vec{x}^0) \stackrel{\text{або}}{=} \nabla f(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}(\vec{x}^0)$$

Похідну функції f за напрямком \vec{l} в точці \vec{x}^0 можна записати інакше: $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = (\text{grad } f(\vec{x}^0), \vec{l})$.

Example 8.3.6 Зокрема для функції $f(x, y) = 1 - x^2 - y$ маємо, що $\text{grad } f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2x \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\text{grad } f(\vec{x}^0)$ описує, який треба взяти напрямок руху в точці \vec{x}^0 , щоб ріст функції був найбільшим. Цей факт підтвердить наступне твердження:

Proposition 8.3.7 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0)$ приймає:

- max значення $\iff \vec{l} \uparrow \uparrow \text{grad } f(\vec{x}^0)$;
- min значення $\iff \vec{l} \uparrow \downarrow \text{grad } f(\vec{x}^0)$.

Proof.

Дійсно, $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = (\text{grad } f(\vec{x}^0), \vec{l}) = \|\text{grad } f(\vec{x}^0)\| \|\vec{l}\| \cos \alpha = \|\text{grad } f(\vec{x}^0)\| \cos \alpha$:

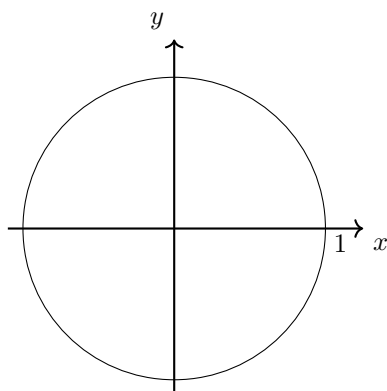
- max $\iff \alpha = 0$;
- min $\iff \alpha = \pi$.

■

8.4 Неявно задані функції

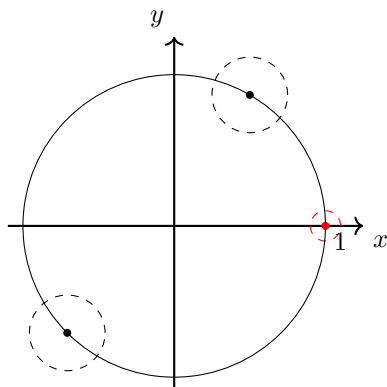
Remark 8.4.1 Приклад для розуміння

Задано рівняння кола на площині \mathbb{R}^2 – один з прикладів неявної функції:
 $x^2 + y^2 - 1 = 0$.



Зрозуміло, що це – не графік функції однієї змінної. Просто тому що (майже) кожному значенню x тут ставиться у відповідність два значення y . Проте якщо розглядати деякий малий окіл точки (x_0, y_0) , то ми отримаємо деякий шматок малюнку, що й буде графіком функції. Зокрема в нашому випадку або $y = \sqrt{1 - x^2}$, або $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Проте існують певні точки, де цього зробити не можна – точки $(1, 0)$, $(-1, 0)$. Як би ми не зменшували окіл цієї точки, там існують ікси, які ставлять у відповідність два ігрика. Я цю точку позначив червоним кольором.



Саме тому з'явилась мотивація створити теорему, де через рівняння $F(x, y) = 0$ ми можемо отримати $y = f(x)$ в деякому околі точки (x_0, y_0) під деякими важливими умовами.

Важливо розуміти, що функція існує, проте явну формулу отримати не завжди вийде. Зокрема маємо неявну функцію $y^5 + y^3 + y + x = 0$. Щоб знати $y = f(x)$, треба розв'язати рівняння п'ятого степеня, проте корені цього многочлена не можна виразити через формулу. І тим не менш, під деякими умовами, ми можемо знати функцію $y = f(x)$, просто без формули.

Theorem 8.4.2 Задано неявну функцію F – неперервно-диференційована в околі точки (x_0, y_0) . Відомо, що виконуються такі умови:

- 1) $F(x_0, y_0) = 0$;
- 2) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тоді існує єдина функція f – неперервно-диференційована в меншому околі точки x_0 , причому

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x), \text{ а також } f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\big|_{(x, f(x))}}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\big|_{(x, f(x))}}.$$

Додатково, якщо $F \in C^{(m)}$, то $f \in C^{(m)}$.

Без доведення.

Example 8.4.3 Зокрема для $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ маємо, що вона – неперервна,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \text{диференційована.}$$

Причому $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \iff y \neq 0$.

Тому за попередньою теоремою, дійсно, існує функція $y = f(x)$, але найголовніше: $f'(x) = -\frac{x}{y}$.

Theorem 8.4.4 Задано неявну вектор-функцію \vec{F} – неперервно-диференційована в околі точки $(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \in \mathbb{R}^{m+k}$. Відомо, що виконуються такі умови:

- 1) $\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = \vec{0}$;
- 2) $\exists (\vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0))^{-1}$ – оборотна матриця похідних за \vec{y} .

Тоді існує єдина вектор-функція \vec{f} – неперервно-диференційована в меншому околі точки \vec{x}^0 , причому $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \iff \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, а також $\vec{f}'(\vec{x}) = -(\vec{F}'_y(\vec{x}, \vec{y}))^{-1} \cdot \vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y}) \Big|_{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))}$.

Без доведення.

Example 8.4.5 Задано вектор-функцію \vec{F} таким чином:
$$\begin{cases} x^2 + y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 = F_1(x, y_1, y_2) = 0 \\ x + y_1 + y_2 - 2 = F_2(x, y_1, y_2) = 0 \end{cases}$$

Маємо $\det \vec{F}'_y(x, y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2y_1 + y_2 \neq 0 \iff y_2 \neq -2y_1$, а

тому й $x \neq 2 + y_2$.

Тоді враховуючи обмеження, існує вектор-функція $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$, але тепер знайдемо похідну. Маємо:

$$\vec{F}'_y = \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies (\vec{F}'_y)^{-1} = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'_x = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}' = -(\vec{F}'_y)^{-1} \vec{F}'_x = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 2x + y_2 \\ -2x + 2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x + y_2}{2y_1 + y_2} \\ \frac{-2x + 2y_1}{2y_1 + y_2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

Тут записано матрицю Якобі для функції \vec{F} . Червоним виділено \vec{F}'_y , а синім виділено \vec{F}'_x .

8.5 Обернені функції

Theorem 8.5.1 Задано вектор-функцію $\vec{g}: U(\vec{y}^0) \rightarrow U(\vec{x}^0)$, де $\vec{x}^0 = \vec{g}(\vec{y}^0)$, де $U(\vec{x}^0), U(\vec{y}^0) \subset \mathbb{R}^n$. Відомо, що виконуються такі умови:

- 1) \vec{g} – неперервно-диференційована;
- 2) $\exists (\vec{g}'(\vec{y}^0))^{-1}$.

Тоді існує вектор-функція $\vec{f}: U(\vec{x}^0) \rightarrow U(\vec{y}^0)$, причому:

- 1) \vec{f} – неперервно-диференційована;
- 2) $\vec{f}'(\vec{x}) = (\vec{g}'(\vec{f}(\vec{x})))^{-1}$.

Proof.

Розглянемо функцію $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} - \vec{g}(\vec{y})$. Про неї відомо, що:

- 1) $\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = \vec{0}$, просто тому що $\vec{x}^0 = \vec{g}(\vec{y}^0)$;
- 2) $\exists (\vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0))^{-1}$, тому що зауважимо, що $\vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = -\vec{g}'(\vec{y}^0)$, а для такої матриці оборотна матриця існує за умовою.

Отже, $\exists f$, для якого $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{g}(\vec{y}) \iff \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.

Нарешті, $\vec{f}'(\vec{x}) = -(\vec{F}'_y(\vec{x}, \vec{y}))^{-1} \vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{g}'(\vec{y}))^{-1}$.

У цьому випадку $\vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbb{I}$, де \mathbb{I} – одинична матриця. ■

Example 8.5.2 Задано функцію $\vec{g}: A \rightarrow \mathbb{R}^2$, де множина $A = \{(x, y) : 0 < y < x\}$.

$$\vec{g}(x, y) \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ xy \end{pmatrix}.$$

Спробуємо знайти обернену функцію.

Зрозуміло, що \vec{g} – неперервно-диференційована. Доведемо, що $\exists(\vec{g}'(x, y))^{-1}$.

$$\vec{g}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \implies \det \vec{g}'(x, y) = x - y \neq 0, \text{ оскільки } 0 < x < y.$$

Тоді існує обернена вектор-функція $\vec{f} = \vec{g}^{-1}$. Спробуємо її знайти:

$$\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$$

$$\frac{v}{y} + y = u \implies y^2 - uy + v = 0 \implies y = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2} \implies x = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4v}}{2}.$$

І все це за умовою, що $u^2 - 4v > 0$ та $u, v > 0$. Отже, $\vec{g}^{-1}(u, v) = \begin{pmatrix} g_1^{-1}(u, v) \\ g_2^{-1}(u, v) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u + \sqrt{u^2 - 4v} \\ u - \sqrt{u^2 - 4v} \end{pmatrix}$.

8.6 Геометричне та алгебраїчне застосування

8.6.1 Дотична площина, нормальна пряма поверхні

Задамо функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A \subset \mathbb{R}^2$ – внутрішня точка. Встановимо таку поверхню:

$$\Pi = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$$

Відомо, що площина в \mathbb{R}^3 , що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) , $z_0 = f(x_0, y_0)$, задається рівнянням:

$$z = z_0 + K_1(x - x_0) + K_2(y - y_0), \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Definition 8.6.1 Дотичною площиною до поверхні Π в точці (x_0, y_0) називається площина в \mathbb{R}^3 , що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) , для якої виконана рівність

$$z - f(x, y) = o(\|(x - x_0, y - y_0)\|), (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

Theorem 8.6.2 Поверхня Π має дотичну площину в точці $(x_0, y_0) \iff f$ – диференційована в точці (x_0, y_0) . Причому $K_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $K_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Доведення аналогічне, як в матані \mathbb{R} .

Отже, дотична площина для диференційованої функції f задається таким рівнянням:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Definition 8.6.3 Нормальною прямою до поверхні Π в точці (x_0, y_0) називається пряма в просторі, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) та перпендикулярна дотичній площині.

Вектор нормалі дотичної площини $\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$. Це буде напрямленим вектором для нормалі. Тоді нормальна пряма задається таким рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Example 8.6.4 Задамо функцію $f(x) = x^2 + y^2$. Знайдемо дотичну площину та нормальну пряму в точці $(1, -1)$.

$$f(1, -1) = 2.$$

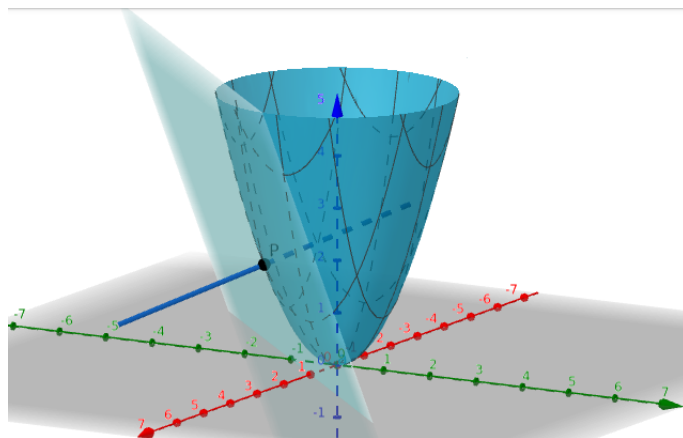
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 2x \Big|_{(1, -1)} = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 2y \Big|_{(1, -1)} = -2.$$

Всі частинні похідні в околі точки $(1, -1)$ неперервні, а тому диференційовані. Отже, можемо отримати дотичну:

$$z - 2 = 2(x - 1) - 2(y + 1) \implies 2x - 2y - z = 2;$$

та нормаль:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 2}{-1}.$$



8.6.2 Дотична пряма, нормальна площина кривої

Definition 8.6.5 Крива в просторі \mathbb{R}^3 задається таким рівнянням

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in (a, b)$$

Відомо, що пряма в просторі \mathbb{R}^3 , що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) , $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, задається таким рівнянням:

$$\begin{cases} x = (t - t_0)l_1 + x_0 \\ y = (t - t_0)l_2 + y_0 \\ z = (t - t_0)l_3 + z_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Definition 8.6.6 Дотичною прямою до кривої $\vec{x} = \vec{x}(t)$ називається пряма в просторі, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) , для якої виконана рівність

$$\begin{cases} x(t) - (x_0 + l_1(t - t_0)) = o(|t - t_0|) \\ y(t) - (y_0 + l_2(t - t_0)) = o(|t - t_0|) \\ z(t) - (z_0 + l_3(t - t_0)) = o(|t - t_0|) \end{cases}, t \rightarrow t_0$$

Theorem 8.6.7 Пряма $\begin{cases} x = (t - t_0)l_1 + x_0 \\ y = (t - t_0)l_2 + y_0 \\ z = (t - t_0)l_3 + z_0 \end{cases}$ - дотична до кривої $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \iff$ крива - диференційована в точці t_0 , а також $l_1 = x'(t_0)$, $l_2 = y'(t_0)$, $l_3 = z'(t_0)$.

Відносно зрозуміло.

Отже, дотична пряма задається рівнянням:

$$\begin{cases} x = (t - t_0)x'(t_0) + x_0 \\ y = (t - t_0)y'(t_0) + y_0 \\ z = (t - t_0)z'(t_0) + z_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Напрявлений вектор прямої $\vec{l} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. Тоді це буде нормальним вектором для нормальної площини. Нормальна площина задається таким рівнянням:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

Example 8.6.8 Маємо криву $\begin{cases} x = 2 \sin t \\ y = 2 \cos t \\ z = -\sin 2t \end{cases}$, де параметр $t \in [0, 2\pi]$. Знайдемо дотичну пряму та нормальну площину в $t_0 = \frac{5\pi}{6}$. Тобто в точці $\left(-1, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

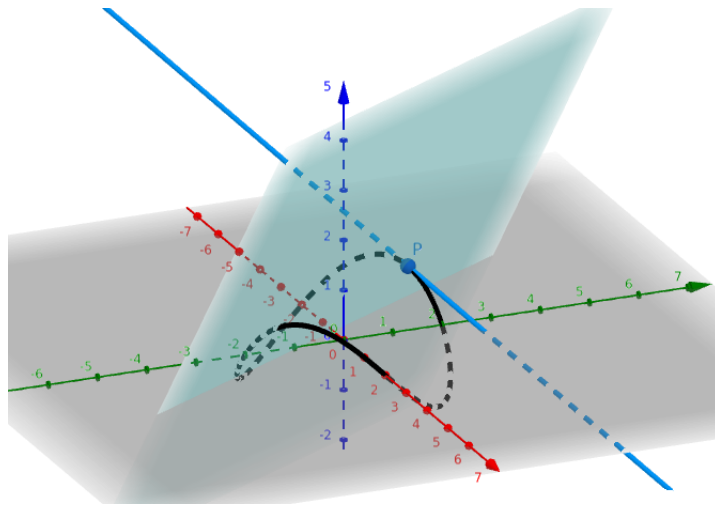
$$\begin{cases} x'(t_0) = 2 \cos t \Big|_{t=t_0} = \sqrt{3} \\ y'(t_0) = -2 \sin t \Big|_{t=t_0} = 1 \\ z'(t_0) = -2 \cos 2t \Big|_{t=t_0} = -1 \end{cases}.$$

Таким чином, маємо дотичну пряму:

$$\frac{x+1}{\sqrt{3}} = \frac{y-\sqrt{3}}{1} = \frac{z-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1};$$

та нормальну площину:

$$\sqrt{3}(x+1) + (y-\sqrt{3}) - \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$



8.6.3 Приблизне обчислення

Маємо f – диференційована в точці \vec{x}^0 , тобто

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)(x_n - x_n^0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|) \text{ при } \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0.$$

Якщо \vec{x}_0 близький до \vec{x} , тобто $\|\vec{x} - \vec{x}^0\| \ll 1$, то тоді

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)(x_n - x_n^0).$$

Example 8.6.9 Приблизно обчислити $\sqrt{(2.03)^2 + 5e^{0.02}}$.

Розглянемо функцію $z = \sqrt{x^2 + 5e^y}$. У нашому випадку $(x_0, y_0) = (2, 0)$ та $(x, y) = (2.03, 0.02)$.

Оскільки $\|(x - x_0, y - y_0)\| = \|(0.03, 0.02)\| \ll 1$, то можемо застосувати формулу:

$$z \approx z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \text{ Маємо:}$$

$$z_0 = \sqrt{2^2 + 5e^0} = 3 \quad \frac{\partial z}{\partial x}(2, 0) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5e^y}} \Big|_{(2,0)} = \frac{2}{3} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(2, 0) = \frac{5e^y}{2\sqrt{x^2 + 5e^y}} \Big|_{(2,0)} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Отже, } z = \sqrt{(2.03)^2 + 5e^{0.02}} \approx 3 + \frac{2}{3} \cdot 0.03 + \frac{5}{6} \cdot 0.02 = \frac{101}{30}.$$

8.7 Диференціювання та похідні старших порядків

Definition 8.7.1 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Також f – диференційована в точці \vec{x}^0 .

Частинними похідними другого роду від функції f в точці \vec{x}^0 називається вираз:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}^0) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}^0)$$

Example 8.7.2 Знайдемо всі частинні похідні другого порядку функції $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2 \implies \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y \implies \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16xy \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2 \end{cases}.$$

Можемо зауважити, що $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Проте в загальному випадку це не так.

Example 8.7.3 Приклад Шварца

Розглянемо функцію $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Зосередимось лише на знаходженні

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0). \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} -x \frac{y^4 - x^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\Delta x} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\Delta y} = -1 \end{aligned}$$

Таким чином, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Theorem 8.7.4 Теорема Шварца

Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x})$ в околі точки \vec{x}^0 та є неперервними в точці \vec{x}^0 . Тоді $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$.

Ми будемо доводити при $m = 2$. Для більших аргументів – аналогічно, але більш технічна справа.

Proof.

Отже, дано $f(x, y)$ та в околі точки (x_0, y_0) існують частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ які неперервні в (x_0, y_0) .

Розглянемо вираз $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$.

Покладемо функцію $k(s) = f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0)$, $s \in [x_0, x_0 + \Delta x]$. Тоді $\Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0)$.

$$k'(s) = (f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0))'_s = \frac{\partial f}{\partial s}(s, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial s}(s, y_0).$$

Оскільки нам відомі другі частинні похідні, то зрозуміло, що в нас існує $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, причому в тому самому околі точки (x_0, y_0) . Тобто звідси k - диференційована на $[x_0, x_0 + \Delta x]$, тоді за теоремою Лагранжа, $\exists \xi_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x) : \Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0) = k'(\xi_1)\Delta x = \left(\frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0) \right) \Delta x$.

Покладемо функцію $m(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t)$, $t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$. Тоді $\Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x$.

$$m'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t) \right)'_t = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, t).$$

Похідна дійсно існує за умовою теореми, тобто m - диференційована на $[y_0, y_0 + \Delta y]$, тоді за теоремою

$$\text{Лагранжа, } \exists \eta_1 \in (y_0, y_0 + \Delta y) : \Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x = m'(\eta_1)\Delta y \Delta x = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1)\Delta y \Delta x.$$

Повернімось до виразу $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$, ми розглянемо її з іншої сторони.

Покладемо функцію $p(t) = f(x_0 + \Delta x, t) - f(x_0, t)$, $t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$. Тоді $\Delta = p(y_0 + \Delta y) - p(y_0)$.

А далі я буду просто продовжувати рівність, міркування аналогічні, що пов'язані зі застосуванням теореми Лагранжа двічі:

$$\Delta = p(y_0 + \Delta y) - p(y_0) = p'(\eta_2)\Delta y = (f(x_0 + \Delta x, t) - f(x_0, t))'_t(\eta_2)\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x_0 + \Delta x, \eta_2) - \frac{\partial f}{\partial t}(x_0, \eta_2) \right) \Delta y \equiv$$

Покладемо функцію $q(s) = \frac{\partial f}{\partial t}(s, \eta_2)$. А далі аналогічно.

$$\equiv (q(x_0 + \Delta x) - q(x_0))\Delta y = q'(\xi_2)\Delta x\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, \eta_2) \right)'_s(\xi_2)\Delta x\Delta y = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(\xi_2, \eta_2)\Delta x\Delta y.$$

Зауважу, що $\eta_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$, $\xi_2 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$.

$$\text{Отримали таку рівність: } \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1)\Delta y\Delta x = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(\xi_2, \eta_2)\Delta x\Delta y \implies \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(\xi_2, \eta_2).$$

Нарешті, за умовою задачі, другі частинні похідні є неперервними в точці (x_0, y_0) , тому далі одночасно прямуємо $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0 \implies \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. Оскільки $\xi_1, \xi_2 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$, $\eta_1, \eta_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$, то звідси $\xi_1, \xi_2 \rightarrow x_0$ та $\eta_1, \eta_2 \rightarrow y_0$.

Остаточно отримаємо $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ (літери s, t я замінив на x, y , результат не зміниться). ■

Definition 8.7.5 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.

Функція f називається **двічі диференційованою** в точці \vec{x}^0 , якщо всі частинні похідні існують в околі точки \vec{x}^0 та диференційовані в точці \vec{x}^0 .

Example 8.7.6 Маємо функцію $z = x^2 + 2y^2 - 5xy$. З'ясуємо, чи буде ця функція двічі диференційованою.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 5y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 5x$$

Усі отримані частинні похідні існують в будь-якому околі деякої точки.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -5$$

Отримані частинні похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за **Th.4.1.8.**,

$$\text{функція } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ - диференційована. } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -5 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$$

Отримані частинні похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за **Th.4.1.8.**,

$$\text{функція } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ - диференційована.}$$

Отже, за означенням, z - двічі диференційована функція. (TODO: лікування)

Proposition 8.7.7 Функція f двічі диференційована в точці $\vec{x}^0 \iff \text{grad } f$ - диференційований в точці \vec{x}^0 .

Proof.

Дійсно, f - двічі диференційована в точці $\vec{x}^0 \iff \forall j = \overline{1, m} : \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}$ - диференційована в точці

$$\vec{x}^0 \iff \text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} \text{ - як вектор-функція - диференційована в точці } \vec{x}^0. \quad \blacksquare$$

Розпишемо диференційованість вектор-функції $\text{grad } f$ в точці \vec{x}^0 за означенням:

$$\text{grad } f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - \text{grad } f(\vec{x}^0) = M\Delta \vec{x} + \vec{o}(\|\Delta \vec{x}\|), \Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}.$$

$$\text{Звідси ми маємо, що } M = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = H(\vec{x}^0) = f''(\vec{x}^0) - \text{це називається матрицею Гесе.}$$

Матриця Гесе описує **другу похідну** функції f в точці \vec{x}^0 та одночасно **похідну** вектор-функції $\text{grad } f$ в точці \vec{x}^0 . Дана матриця – квадратна, тож ми можемо обчислити $\det f''(\vec{x}^0)$ – це називається **гесіаном**.

Definition 8.7.8 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Також f - диференційована в точці \vec{x}^0 .

Другим диференціалом функції f називають вираз:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = d(df(\vec{x}^0))$$

З'ясуємо, як цей вираз можна по-інакшому записати. Маємо:

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1\right) + \cdots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) = \\ &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \cdots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_m\right) dx_1 + \cdots + \\ &\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_m\right) dx_m = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} dx_m dx_1\right) + \cdots + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} dx_1 dx_m + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} dx_m^2\right) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j. \end{aligned}$$

Отже, маємо іншу формулу для другого диференціалу в точці \vec{x}^0 :

$$d^2 f(\vec{x}^0) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0) dx_i dx_j$$

Якщо придивитись, то $d^2 f(\vec{x}^0)$ виглядає як квадратична форма.

Example 8.7.9 Знайдемо другий диференціал функції $z = x^3 + 2y^2 - 5xy$.

Ми вже шукали другі частинні похідні $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -5$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$. Таким чином,

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = 6x dx^2 - 10 dx dy + 4 dy^2.$$

Definition 8.7.10 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Також f - k разів диференційована в точці \vec{x}^0 .

Частинними похідним $k+1$ -го порядку в точці \vec{x}^0 називають похідну:

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} \right) (\vec{x}^0) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} (\vec{x}^0)$$

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_k + j_{k+1} = k + 1$$

Remark 8.7.11 Що таке **похідна** k -го порядку, визначати не буду, бо ще рано. Необхідно щось про тензори знати.

Definition 8.7.12 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Також f - k разів диференційована в точці \vec{x}^0 .

$k+1$ -**им диференціалом** функції f називають вираз:

$$d^{k+1} f(\vec{x}^0) = d(d^k f(\vec{x}^0))$$

Якщо дуже сильно постаратись, то за індукцією можна довести таку формулу диференціала k -го порядку:

$$d^k f(\vec{x}^0) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(\vec{x}^0) \cdot dx_{j_1} \dots dx_{j_k}$$

Definition 8.7.13 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Функція f називається **k -разів диференційованою** в точці \vec{x}^0 , якщо всі частинні похідні $(k-1)$ -го порядку існують в околі точки \vec{x}^0 та всі вони диференційовані в точці \vec{x}^0 .

Позначення: $C^k(A)$ – множина k разів неперервно-диференційованих функцій.

8.8 Формула Тейлора

Зробимо певні позначення:

$$[\vec{x}^0, \vec{x}] = \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in [0, 1]\}$$

$$(\vec{x}^0, \vec{x}) = \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in (0, 1)\}$$

Theorem 8.8.1 Теорема Тейлора (у формі Лагранжа)

Задано функцію f – диференційована n разів на $[\vec{x}^0, \vec{x}]$ та $(n+1)$ -ий раз диференційована на (\vec{x}^0, \vec{x}) . Тоді $\exists \xi \in (\vec{x}^0, \vec{x})$ або (\vec{x}, \vec{x}^0) , для якого

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \frac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!}.$$

Proof.

Розглянемо функцію $p(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$, тут $t \in [0, 1]$ – функція від однієї змінної.

Знайдемо похідні від цієї функції:

$$\begin{aligned} p'(t) &= f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))'_t = (f(x_1 + t(x_1 - x_1^0), \dots, x_m + t(x_m - x_m^0)))'_t = (f(u_1, \dots, u_m))'_t = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u_1} (x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} (x_m - x_m^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial u_m} \right) \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_m - x_m^0 \end{pmatrix} = \\ &= df(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)). \\ p''(t) &= [f'(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0)]'_t \stackrel{\text{аналогічно}}{=} d^2 f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \\ &\vdots \\ p^{(k)}(t) &= d^k f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)). \end{aligned}$$

Коротше, наша функція n разів диференційована на $[0, 1]$ та має $(n+1)$ похідну на $(0, 1)$. Тому ми можемо розкласти формулу Тейлора як функцію з однією змінною. $\exists \xi \in (0, 1)$:

$$p(1) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}(1-0) + \frac{p''(0)}{2!}(1-0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + \frac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}.$$

А далі підставляємо все, що маємо:

$$\begin{aligned} p(0) &= f(\vec{x}^0) \\ p'(0) &= df(\vec{x}^0) \\ p''(0) &= d^2 f(\vec{x}^0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$p^{(n+1)}(\xi) = d^{n+1} f(\vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0))$$

$$\text{Отже, } f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \frac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!}, \text{ де } \xi = \vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0) \in (\vec{x}^0, \vec{x}). \blacksquare$$

Theorem 8.8.2 Теорема Тейлора (у формі Пеано)

Задано функцію f – диференційована n разів в точці \vec{x}^0 . Тоді

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \frac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0.$$

Без доведення. Але певні плани доведення наведу.

Позначимо функцію $g(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \left(f(\vec{x}^0) + \frac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \frac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} \right)$. Наша мета показати, що $g(\vec{x}) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n)$.

Як і раніше, тут треба показати, що g та всі його частинні похідні до порядку включно n в точці \vec{x}^0 будуть нулями.

А далі вже показуємо, що $g(\vec{x}) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n)$.

Example 8.8.3 Розкласти функцію $f(x, y) = e^{x+y}$ відносно точки $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Заздалегідь зауважимо, що $\frac{\partial^s f}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2}}(1, -1) = e^{x+y}|_{(1, -1)} = 1$, де $s_1 + s_2 = s$.

$$\begin{aligned}
f(1, -1) &= 1 \\
f'(1, -1)(\vec{x} - \vec{x}^0) &= (x - 1) + (y + 1) \\
f''(1, -1)(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 &= (x - 1)^2 + 2(x - 1)(y + 1) + (y + 1)^2 \\
f'''(1, -1)(\vec{x} - \vec{x}^0)^3 &= (x - 1)^3 + 3(x - 1)^2(y + 1) + 3(x - 1)(y + 1)^2 + (y + 1)^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Таким чином, ми можемо це записати ось так:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= 1 + \left[\frac{(x-1)}{1!} + \frac{(y+1)}{1!} \right] + \left[\frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)(y+1)}{2!} + \frac{(y+1)^2}{2!} \right] + \dots + \\
&+ \left[\frac{(x-1)^n}{n!} + \frac{C_n^2(x-1)^{n-1}(y+1)}{n!} + \dots + \frac{(y+1)^n}{n!} \right] + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^k \frac{C_p^k}{k!} (x-1)^{k-p} (y+1)^p + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}\right), (x, y) \rightarrow (1, -1).
\end{aligned}$$

Remark 8.8.4 Можна формулу Тейлора записати в якості ряду Тейлора за певними умовами, але я цього робити не буду.

8.9 Локальні екстремуми

Definition 8.9.1 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.

Точка \vec{x}^0 називається точкою:

- **локального максимуму**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \geq f(\vec{x})$;
- **локального мінімуму**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \leq f(\vec{x})$.

для строгих екстремумів нерівність строга та існують околиці $U_\varepsilon(\vec{x}^0) \setminus \{\vec{x}^0\}$.

Theorem 8.9.2 Необхідна умова локального екстремуму

Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня. Відомо, що \vec{x}^0 – локальний екстремум. Тоді $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = 0, \forall j = \overline{1, m}$.

Proof.

Розглянемо функцію $h(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$ – функція від однієї змінної, така, що x_1^0 – локальний екстремум. Для інших змінних аналогічно. Більш того, $h'(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$.

Таким чином, за необхідною умовою локального екстремуму матану в \mathbb{R} ,

$$h'(x_1) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = 0. \quad \blacksquare$$

Remark 8.9.3 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = 0, \forall j = \overline{1, m} \iff df(\vec{x}^0) \equiv 0$.

\Rightarrow Зрозуміло.

\Leftarrow Підставити в диференціал $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = (1, 0, \dots, 0)$, щоб отримати $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) = 0$.

Definition 8.9.4 Точка \vec{x}^0 називається **стаціонарною** для функції f , якщо всі частинні похідні в заданній точці нулеві.

Proposition 8.9.5 Інше означення критичної точки

Точка \vec{x}^0 – стаціонарна $\iff df_{\vec{x}^0}$ – не сюр'єктивне.

Proof.

\Rightarrow Зрозуміло.

\Leftarrow Дано: $df_{\vec{x}^0}$ – не сюр'єктивне. Взагалі, будь-який функціонал уже автоматично сюр'єктивний. Тоді звідси $df_{\vec{x}^0} \equiv 0$ – єдиний варіант. Отже, звідси всі частинні похідні нулеві, а тому \vec{x}^0 – стаціонарна. \blacksquare

Theorem 8.9.6 Достатня умова локального екстремуму

Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, таку, що f – двічі неперервно-диференційована в околиці точки $\vec{x}^0 \in A$ – стаціонарна та внутрішня точка.

1) Нехай $d^2 f(\vec{x}^0)$ – строго додатноозначена. Тоді \vec{x}^0 – строгий локальний мінімум;

- 2) Нехай $d^2 f(\vec{x}^0)$ – строго від’ємноозначена. Тоді \vec{x}^0 – строгий локальний максимум;
 3) Нехай $d^2 f(\vec{x}^0)$ – знакозмінна. Тоді \vec{x}^0 – не локальний екстремум.

Proof.

1) Нехай $d^2 f(\vec{x}^0)$ – додатно визначена.

Оскільки функція f – двічі диференційована в точці \vec{x}^0 , то тоді за теоремою Тейлора в формі Пеано,

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \frac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^2), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0.$$

Позначу $\rho = \|\vec{x} - \vec{x}^0\|$, а також $\xi_k = \frac{x_k - x_k^0}{\rho}$, $k = \overline{1, m}$. Можна зауважити, що $\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 = 1$.

Оскільки \vec{x}^0 – стаціонарна, то звідси $df(\vec{x}^0) \equiv 0$, бо всі частинні похідні нулі. Таким чином,

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2} d^2 f(\vec{x}^0) + o(\rho^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0) (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + o(\rho^2) = \frac{1}{2} \rho^2 \left(\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0) \xi_i \xi_j + o(1) \right).$$

Розглянемо функцію $F(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0) \xi_i \xi_j$, що визначена на одиничній сфері

$S^m = \{\vec{\xi} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{\xi}\| = 1\}$, а ця множина – замкнена та обмежена. Також відомо, що $F \in C(S^m)$ як многочлен, а тому вона досягає мінімуму. Проте F – додатно визначена, а отже $\min F > 0$.

Рівність $f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2} \rho^2 (F(\xi_1, \dots, \xi_m) + o(1))$, $\rho \rightarrow 0$ переписеться таким чином:

$$\exists \delta : \forall \rho < \delta \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > \frac{1}{4} \rho^2 \min F > 0, \text{ остаточно}$$

$$\exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > 0.$$

Тобто, знайшли окіл, де $\forall \vec{x} : f(\vec{x}^0) < f(\vec{x})$, а тому \vec{x}^0 – строгий локальний мінімум.

2) Все аналогічно.

3) А тепер припустимо, що $d^2 f(\vec{x}^0)$ – знако-невизначена. Ми розглядаємо функцію лише в деякому околі $U_{\delta_0}(\vec{x}^0)$ через диференційованість. Тоді $\exists \vec{\Delta x} : d^2 f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}) > 0$. Ми окіл ще звужимо до $U_{\delta=\|\vec{\Delta x}\|}(\vec{x}^0)$. Там будемо шукати точку в вигляді $\vec{x}^t = \vec{x}^0 + t\vec{\Delta x}$, де $t > 0$ – довільне. Тоді за Тейлором,

$$f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2} d^2 f(\vec{x}^0, t\vec{\Delta x}) + o(\|\vec{x}^t - \vec{x}^0\|), \text{ де } \vec{x}^t \rightarrow \vec{x}^0.$$

$$f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2} t^2 d^2 f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}) + o(t^2 \|\vec{\Delta x}\|^2) = \frac{t^2}{2} \left(d^2 f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}) + o(1) \right), \text{ де } t \rightarrow 0.$$

Якщо більш детально це розписати $o(1)$, а згодом обрати $\varepsilon = \frac{1}{2} d^2 f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x})$, то отримаємо, що

$$\exists \delta^* : \forall t : t < \delta^* \implies f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) > 0.$$

Якщо так станеться, що $U_{\delta^*}(\vec{x}^0)$ буде більшим за $U_{\delta=\|\vec{\Delta x}\|}(\vec{x}^0)$, то тоді буде ми можемо взяти точку $\vec{x}^0 + \vec{\Delta x}$, для якої $f(\vec{x}^0 + \vec{\Delta x}) - f(\vec{x}^0) > 0$.

Також буде $\exists \vec{\Delta x}' : d^2 f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}') < 0$ в силу невизначеності знака. І там абсолютно аналогічно.

Остаточно, $\forall U_\delta$,

- якщо U_δ більший за U_{δ_0} , то вже автоматично виконано;

- інакше знайдуться точки по цим крокам.

Отже, \vec{x}^0 – не екстремум. ■

Example 8.9.7 Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.

Спочатку шукаємо критичні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 36 = 0 \end{cases} \implies (x, y) \in \{(3, 2), (-3, -2), (2, 3), (-2, -3)\}.$$

Далі знайдемо другий диференціал:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

$$d^2 f = 6(x dx^2 + 2y dx dy + x dy^2).$$

Для кожної критичної точки подивимось на цей диференціал.

$$\text{І. } d^2 f(3, 2) = 6(3 dx^2 + 4 dx dy + 3 dy^2).$$

Диференціал $d^2 f(3, 2)$ можна розглядати як квадратичну форму $(d^2 f(3, 2))(dx, dy)$. Даній квадратичній формі відповідає матриця $H = 6 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$ (див. лінійну алгебру). До речі, дана матриця - це в точності матриця Гесе.

Застосуємо критерій Сільвестра. Маємо $\Delta_1^H = 18 > 0$ та $\Delta_2^H = \det \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} = 6(3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 30 > 0$. Отже, за цим критерієм, маємо $d^2 f(3, 2)$ - додатноозначена. Отже, $(3, 2)$ - локальний мінімум.

II. $d^2 f(-3, -2)$ - аналогічними міркуваннями доводимо, що $(-3, -2)$ - локальний максимум.

III. $d^2 f(2, 3) = 12(dx^2 + 3 dx dy + dy^2)$.

Знову запишемо матрицю $H = 6 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Зауважимо, що матриця має власні числа $-1, 5$. Вони різного знаку, що приводить до висновку: $d^2 f(2, 3)$ - знакозмінна. Отже, $(2, 3)$ - не екстремум.

IV. $d^2 f(-2, -3)$ - аналогічними міркуваннями доводимо, що $(-2, -3)$ - не екстремум.

Example 8.9.8 Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x, y) = x^2 + y^4$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0 \end{cases} \implies (0, 0) - \text{єдина критична точка.}$$

$$d^2 f = 2 dx^2 + 12 y^2 dy^2$$

$d^2 f(0, 0) = 2 dx^2 \geq 0$ - дана квадратична форма невід'ємноозначена, тому що при $(dx, dy) = (0, 0.1)$ маємо $d^2 f(0, 0) = 0$. Тож скористатися достатньою умовою ми не можемо.

Однак можна зауважити, що $f(0, 0) \leq f(x, y)$, причому $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, зокрема в будь-якій точці околу $(0, 0)$. Таким чином, $(0, 0)$ - локальний мінімум.

Example 8.9.9 Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x, y) = x^2 - y^4$.

Тут також $(0, 0)$ - єдина критична точка, тут також $d^2 f(0, 0) = 2 dx^2 \geq 0$ - невід'ємноозначена квадратична форма.

Проте цього разу $(0, 0)$ не буде локальним екстремумом. Дійсно, для кожного околу $U_\delta(0, 0)$ знайдуться точки $(x_1, y_1) = \left(\frac{\delta}{2}, 0\right)$ та $(x_2, y_2) = \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$, причому ці дві точки в середині околу, для яких:

$$f(x_1, y_1) = \frac{\delta^2}{4} > 0 = f(0, 0) \quad f(x_2, y_2) = -\frac{\delta^4}{16} < 0 = f(0, 0).$$

8.10 Умовні локальні екстремуми

Definition 8.10.1 Задано функцію $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ - відкрита множина. Задано також функції $g_1, \dots, g_m: A \rightarrow \mathbb{R}$. Розглянемо множину $\Gamma_{g_1, \dots, g_m} = \{\vec{x} \in G : g_1(\vec{x}) = \dots = g_m(\vec{x}) = 0\}$.

Точка $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1, \dots, g_m}$ називається **умовним локальним максимумом (мінімумом)**, якщо вона є локальним максимумом (мінімумом) функцій $\tilde{f}: \Gamma_{g_1, \dots, g_m} \rightarrow \mathbb{R}$, де $\tilde{f} \equiv f$.

Definition 8.10.2 Рівняння вигляду

$$\begin{aligned} g_1(\vec{x}) &= 0, \\ &\vdots \\ g_m(\vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

називається **рівняннями зв'язку**.

Example 8.10.3 Зокрема маємо функцію $f(x, y) = x^2 - y^2$ та функцію $g(x, y) = y = 0$.

Маємо тоді $\tilde{f}(x, y) = f(x, 0) = x^2$, звідси $x = 0$ - точка локального мінімуму функції \tilde{f} .

Отже, $x = 0$ - точка умовного локального мінімуму функції f .

Definition 8.10.4 Задані функції $g_1, \dots, g_m: A \rightarrow \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^p$ - відкрита множина. Всі функції неперервно диференційовані на A .

Вони називаються **функціонально незалежними** в точці $\vec{x}^0 \in A$, якщо

$$\{g'_1(\vec{x}^0), \dots, g'_m(\vec{x}^0)\} - \text{лінійно незалежна}$$

Example 8.10.5 Зокрема $\{g_1, g_2\}$, де $g_1(x, y) = x$, $g_2(x, y) = y$ – функціонально незалежні. Дійсно, $g'_1(x, y) = (1, 0)$ та $g'_2(x, y) = (0, 1)$ в кожній точці. Ці похідна – лінійно незалежні.

Definition 8.10.6 Задані функції $f, g_1, \dots, g_m: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – відкрита множина. **Функцією Лагранжа** назовемо таку функцію:

$$F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \lambda_1 g_1(\vec{x}) - \dots - \lambda_m g_m(\vec{x}),$$

де $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

Theorem 8.10.7 Необхідна умова умовного локального екстремуму

Задані функції $f, g_1, \dots, g_m: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – відкрита множина. Всі функції – неперервно диференційовані на A .

Відомо, що $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1, \dots, g_m}$ – умовний локальний екстремум функції f , а також $\{g_1, \dots, g_m\}$ – функціонально незалежні в \vec{x}^0 .

Тоді існують $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$: \vec{x}^0 – стаціонарна точка функції Лагранжа.

Ми будемо доводити при $n = 2, m = 1$. Для більших аргументів – аналогічно, але більш технічна справа.

Proof.

Нехай $f(x, y, z)$ має локальний екстремум $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma_g$ з рівнянням $g(x, y, z) = 0$.

У силу функціональної незалежності за умовою в точці, маємо $g'(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$, тобто всі частинні похідні ненулеві. Тоді за теоремою про неявну функцію, існує $\varphi: U(x_0, y_0) \rightarrow U(z_0)$, де $\varphi(x_0, y_0) = z_0$

$\forall (x, y) \in U(x_0, y_0): g(x, y, \varphi(x, y)) = \tilde{g}(x, y) = 0$.

Тоді маємо функцію $\tilde{f}(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$ – функція 2-х змінних, де (x_0, y_0) – точка локального екстремуму. Звідси випливає, що $d\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$

$$d\tilde{f}(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Також оскільки $\tilde{g}(x, y) \equiv 0$, то звідси маємо:

$$d\tilde{g}(x_0, y_0) = dg(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Останню рівність домножимо на λ , яка відніметься з першим рівнянням.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right)(x_0, y_0, z_0) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}\right)(x_0, y_0, z_0) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \lambda \frac{\partial g}{\partial z}\right)(x_0, y_0, z_0) d\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Оскільки $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ в силу функціональної незалежності, то ми оберемо такий λ , щоб

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0. \text{ Отримаємо:}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right)(x_0, y_0, z_0) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}\right)(x_0, y_0, z_0) dy = 0.$$

І ця рівність виконується для всіх $\Delta x, \Delta y$. Отже,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Маючи ці рівності отримаємо:

$$\begin{aligned} dF_{\lambda}(x_0, y_0, z_0) &= d(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0) = \\ &= \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) dz = 0. \end{aligned}$$

Це виконано для всіх $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Отже, (x_0, y_0, z_0) – стаціонарна точка F_{λ} . ■

Theorem 8.10.8 Достатня умова умовного локального екстремуму

Задані функції $f, g_1, \dots, g_m: A \rightarrow \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – відкрита множина. Всі функції – двічі неперервно диференційовані на A .

Відомо, що $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1, \dots, g_m}$ – стаціонарна точка функції Лагранжа для деякого $\vec{\lambda}$. Нехай $\{g_1, \dots, g_m\}$ – функціонально незалежні в точці \vec{x}^0 . Розглянемо множину $\Gamma_{g_1, \dots, g_m}^*(\vec{x}^0) = \{\Delta \vec{x} \in \mathbb{R}^{n+m} : dg_1(\vec{x}^0) = \dots = dg_m(\vec{x}^0) = 0\}$.

- 1) Нехай $d^2 F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$ – строго додатноозначена на $\Gamma_{g_1, \dots, g_m}^*(\vec{x}^0)$. Тоді \vec{x}^0 – умовний локальний мінімум;
- 2) Нехай $d^2 F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$ – строго від'ємноозначена на $\Gamma_{g_1, \dots, g_m}^*(\vec{x}^0)$. Тоді \vec{x}^0 – умовний локальний максимум;

3) Нехай $d^2 F_{\tilde{\lambda}}(\tilde{x}^0)$ – знаконеозначена на $\Gamma_{g_1, \dots, g_m}^*(\tilde{x}^0)$. Тоді \tilde{x}^0 – не умовний локальний екстремум.

Ми будемо доводити при $n = 2, m = 1$. Для більших аргументів – аналогічно, але більш технічна справа.

Proof.

Нехай рівняння зв'язку лише $g(x, y, z) = 0$. Функція Лагранжа $F_{\lambda}(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$.

За умовою, (x_0, y_0, z_0) – стаціонарна точка F_{λ} для деякого λ .

g – функціонально незалежна в (x_0, y_0, z_0) , тож $g'(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$. Ми тут припустимо, що $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тоді за теоремою про неявну функцію, існує $\varphi: U(x_0, y_0) \rightarrow U(z_0)$, для якого

$$\varphi(x_0, y_0) = z_0$$

$$\forall (x, y) \in U(x_0, y_0) : g(x, y, \varphi(x, y)) = \tilde{g}(x, y) = 0.$$

Причому сама функція φ також двічі неперервно-диференційована.

Розглянемо функцію $\tilde{f}: U(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$, що визначена як $\tilde{f}(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$.

Покажемо, що (x_0, y_0) – стаціонарна точка функції \tilde{f} .

$$d\tilde{f}(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d\varphi(x_0, y_0).$$

$$\begin{aligned} dF_{\lambda}(x_0, y_0, z_0) &= d(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) dz = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) dz. \end{aligned}$$

Але в силу стаціонарної точки маємо $dF_{\lambda}(x_0, y_0, z_0) = 0$. Зокрема для $dz = d\varphi(x_0, y_0)$ маємо рівність нуля.

Оскільки $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, то звідси $dg(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in U, \forall (\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$.

$$dg(x, y, \varphi(x, y)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y)) dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y)) dy + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y)) d\varphi(x, y).$$

Зокрема, підставляючи $(x, y) = (x_0, y_0)$, отримаємо:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Домножимо це рівняння на λ та додамо його до рівняння $dF_{\lambda}(x_0, y_0, z_0) = 0$. Отримаємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Але це теж саме, що $d\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$, що доводить: (x_0, y_0) – стаціонарна точка \tilde{f} .

Тепер для визначення характеру точки (x_0, y_0) функції \tilde{f} ми обчислимо другий диференціал. Якщо все обережно зробити, отримаємо:

$$d^2 \tilde{f}(x_0, y_0) = d^2 f(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d^2 \varphi(x_0, y_0).$$

Аналогічним чином для $\tilde{g}(x, y)$ маємо:

$$d^2 \tilde{g}(x_0, y_0) = d^2 g(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d^2 \varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Попереднє рівняння віднімемо на останнє, помножене на λ – отримаємо:

$$d^2 \tilde{f}(x_0, y_0) = d^2(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \right)(x_0, y_0, z_0) d^2 \varphi(x_0, y_0).$$

$$d^2 \tilde{f}(x_0, y_0) = d^2 F_{\lambda}(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \frac{\partial F_{\lambda}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d^2 \varphi(x_0, y_0).$$

Але (x_0, y_0, z_0) – критична функція F_{λ} , а тому

$$d^2 \tilde{f}(x_0, y_0) = d^2 F_{\lambda}(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)}.$$

Більш детально треба пояснити, що дає умова $\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)$. Ми вже знаємо, що $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \forall (x, y)$, а тому

$dg(x, y, \varphi(x, y))(x_0, y_0) = 0$, але звідси ж, враховуючи умову, отримаємо

$$dg(x, y, \varphi(x, y))(x_0, y_0) = dg(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

А це означає, що $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \in \Gamma_g^*(x_0, y_0, z_0)$.

Остаточно $d^2 \tilde{f}(x_0, y_0) = d^2 F_{\lambda}(x_0, y_0, z_0)|_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \in \Gamma_g^*(x_0, y_0, z_0)}$.

А далі все цілком зрозуміло.

1) $d^2 F_{\lambda}(x_0, y_0, z_0) > 0 \implies d^2 \tilde{f}(x_0, y_0) > 0 \implies (x_0, y_0)$ – локальний мінімум $\tilde{f} \implies (x_0, y_0, z_0)$ – умовний локальний мінімум f ;

2) аналогічно;

3) аналогічно. ■

Example 8.10.9 Дослідити функцію $f(x, y, z) = xyz$ на умовний локальний екстремум за умовою $(x, y, z) = 3$.

У цьому випадку $g(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$. Запишемо функцію Лагранжа:

$$L_\lambda(x, y, z) = xyz - \lambda(x + y + z - 3).$$

Знайдемо всі критичні точки L_λ , що лежать на множині Γ_g :

$$\begin{cases} \frac{\partial L_\lambda}{\partial x} = yz - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial y} = xz - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial z} = xy - \lambda = 0 \\ g(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Якщо розв'язати систему рівнянь, отримаємо наступні розв'язки (x, y, z) :

$$M_0(1, 1, 1), M_1(3, 0, 0), M_2(0, 3, 0), M_3(0, 0, 3).$$

А також відповідні λ будуть наступні:

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0.$$

Дослідимо тепер $d^2 L_\lambda$ для кожної точки з відповідним λ .

$$\begin{aligned} d^2 L_\lambda &= \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial z^2} dz^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial z \partial x} dz dx \right) = \\ &= 2(z dx dy + x dy dz + y dx dz). \end{aligned}$$

Із рівняння зв'язку маємо, що $d(x + y + z) = d(3) = 0 = dx + dy + dz \implies dz = -dx - dy$.

Підставимо це в $d^2 L_\lambda$:

$$d^2 L_\lambda = 2(-y dx^2 + (z - x - y) dx dy - x dy^2).$$

I. $M_0(1, 1, 1)$ та $\lambda_0 = 1$.

$d^2 L_{\lambda_0}(M_0) = 2(-dx^2 - dx dy - dy^2) = -2 \left(\left(dx + \frac{1}{2} dy \right)^2 + \frac{3}{4} dy^2 \right) < 0$. Тобто маємо від'ємноозначену квадратичну форму. Отже, $M_0(1, 1, 1)$ – умовний локальний максимум.

II. $M_1(3, 0, 0)$ та $\lambda_1 = 0$.

$d^2 L_{\lambda_1}(M_1) = 2(-3 dx dy - 3 dy^2) = -6(dx + dy) dy$. Тобто маємо знаконеозначену квадратичну форму. Отже, $M_1(3, 0, 0)$ – не умовний локальний екстремум.

III. $M_2(0, 3, 0)$ та $\lambda_2 = 0$ – аналогічно не умовний локальний екстремум.

IV. $M_3(0, 0, 3)$ та $\lambda_3 = 0$ – аналогічно не умовний локальний екстремум.