Зміст

1 Топологічні простори

1.1 Топологія

Definition 1.1.1 Задано X – деяка множина.
Клас τ, що містить підмножини X, називається **топологією**, якщо:

$$X, \emptyset \in \tau$$
$$\forall \{U_\alpha \in \tau\} : \bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$$
$$\forall U, V \in \tau : U \cap V \in \tau$$

Пару (X, τ) називатимемо **топологічним простором**.

Definition 1.1.2 Задано (X, τ) – топологічний простір.
Множина U називається **відкритою**, якщо

$$U \in \tau$$

Множина V називається **замкненою**, якщо

$$X \setminus V \in \tau$$

Example 1.1.3 Зокрема будь-який метричний простір (X, ρ) задає топологію
$\tau_\rho = \{$всі відкриті множини в $(X, \rho)\}$. Тому що там виконуються твердження: $X, \emptyset$ – відрkиті, будь-яке об'єднання сім'ї відкритих – відкрита, будь-який перетин двох відкритих – відкрита.

Example 1.1.4 Розглянемо множину X та $\tau = 2^X$. Тоді вона також задає топологію.
(X, τ), де $\tau = 2^X$, ще називають **дискретною топологією**.

Example 1.1.5 Розглянемо множину X та $\tau = \{\emptyset, X\}$. Тоді вона також задає топологію.
(X, τ), де $\tau = \{\emptyset, X\}$, ще називають **недискретною топологією**.

Example 1.1.6 Маємо $X = \mathbb{R}$ та розглянемо $\tau = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \emptyset$ або $U = \mathbb{R} \setminus S, S \subset \mathbb{R}$ – деяка скінченна$\}$.
Вона утворює топологію, а називається вона **топологія Заріского.**
Дійсно, $\emptyset \in \tau$, а також $X \in \tau$, тому що $X = \mathbb{R} \setminus \emptyset$.
Нехай $\{U_\alpha \in \tau\}$ – сім'я, поки нехай всі такі, що $U_\alpha = \mathbb{R} \setminus S_\alpha$ для декяої $\{S_\alpha\}$ сім'ї скінченних підмножин. Тоді звідси $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = \mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_\alpha S_\alpha$. Зрозуміло цілком, що $\bigcap\limits_\alpha S_\alpha$ буде скінченною, тож $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha \in \tau$.
Якщо існує принаймні одна множина U_α, де $U_\alpha = \emptyset$, то тоді прибираємо їх – повертаємось до першого випадку.
Нехай $U_1, U_2 \in \tau$, тобто $U_1 = \mathbb{R} \setminus S_1$ та $U_2 = \mathbb{R} \setminus S_2$, де множини S_1, S_2 – скінченні. Тоді $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R} \setminus (S_1 \cup S_2)$, де $S_1 \cup S_2$, зрозуміло, скінченна. Тож $U_1 \cap U_2 \in \tau$. Якщо серед них $U_i = \emptyset$, то тоді все зрозуміло.

Definition 1.1.7 Задано (X, τ) та (X, τ') – два топологічних простори.
τ' називається **сильнішою за** τ, якщо

$$\tau' \supset \tau$$

τ' називається **слабшою за** τ, якщо

$$\tau' \subset \tau$$

Example 1.1.8 Якщо є множина X, то дискретна топологія є найсильнішою серед всіх інших топології; а недискретна топологія є найслабшою серед всіх інших топологій.

Definition 1.1.9 Задано (X, τ) – топологічний простір та $x \in X$.
Відкритим околом точки x назвемо таку відкриту множину U, де

$$U \ni x$$

Околом точки x назвемо таку множину V, що містить відкритий окіл точки x, тобто

$$\exists U \text{ – відкритий окіл точки } x : V \supset U$$

Example 1.1.10 Розглянемо $\mathbb{R}$ зі стандартною метрикою. Тоді $(-\varepsilon, \varepsilon)$ буде відкритим околом точки 0, тому що даний інтервал відкритий та містить 0.
Водночас $[-\varepsilon, \varepsilon], (-\varepsilon, \varepsilon], [-\varepsilon, \varepsilon)$ будуть околами точки 0, тому що всі вони містять відкритий окіл точки 0 (наприклад) $(\varepsilon, \varepsilon)$.

Remark 1.1.11 Відкритий окіл точки x – також окіл точки x.
Дійсно, нехай U – відкритий окіл x. Тоді $\exists U$ – відкритий окіл точки $x : U \supset U$. Тобто за означенням, U – просто окіл точки x.

Definition 1.1.12 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.
Точка x називається **внутрішньою для** A, якщо

$$\exists V \text{ – окіл точки } x : V \subset A$$

Proposition 1.1.13 Задано (X, τ) – топологічний простір.
U – відкрита $\iff \forall x \in U : x$ – внутрішня точка для U.
Це те саме звичне означення відкритої множини, яку ми давали в метричному просторі.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: U – відкрита. Тоді якщо $x \in U$, то тоді U – відкритий окіл точки x, причому $U \subset U$. Тобто x – внутрішня точка для U.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall x \in U : x$ – внутрішня точка для U. Тобто це означає, що $\exists V_x$ – окіл точки $x : V_x \subset U$. Оскільки V_x – окіл точки x, то тоді $\exists U_x$ – відкритий окіл точки $x : U_x \subset V_x \subset U$.
Зауважимо, що $U = \bigcup_{x \in U} U_x$. Оскільки $\{U_x, x \in U\}$ – сім'я відкритих множин, то в силу означення топології, U буде відкритою як об'єднання. ■

1.2 Зв'язок з метричними просторами

Definition 1.2.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.
Топологічний простір називається **метризуючим**, якщо

$$\exists \rho \text{ – метрика на множині } X : \tau_\rho = \tau$$

Інакше кажучи, метрика ρ **індукує ту саму топологію**, що була на початку.

Example 1.2.2 Зокрема дискретний топологічний простір (X, τ) буде метризуючим. Тому що існує метрика $d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ – дискретна метрика. У цьому випадку (із теорії метричних просторів) будь-яка підмножина X буде відкритою. Значить, $\tau_d = \tau$.

Example 1.2.3 Але недискретний топологічний простір (X, τ) не буде метризуючим при $\#X \geq 2$.
!Припустимо, що існує метрика ρ, яка індукує ту саму топологію. Зауважимо, що існує відкритий окіл $\emptyset \subsetneq B(x; r) \subsetneq X$ при деякому $r > 0$. Якби було навпаки, тобто $\forall r > 0$ було б $B(x; r) = X$, то звідси $\bigcap_{r \geq 0} B(x; r) = X = \{x\}$, проте у нас X містить більше одного елементу.
Таким чином, знайшли $B(x; r) \neq X, B(x; r) \neq \emptyset$ – ще одна відкрита множина, але $B(x; r) \notin \tau$ – суперечність!

Remark 1.2.4 Один й той самий топологічний простір можна метризувати двома різними метриками (тобто нема ін'єктивності переходу з метричного в топологічний простори).

Example 1.2.5 Маємо $(\mathbb{Z}, \tau)$ – дискретний топологічний простір, яка метризується метрикою d. Розглянемо іншу метрику $\rho(m, n) = |m - n|$ на $\mathbb{Z}$. Зауважимо, що тоді кожна множина – відкрита. І дійсно, $B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \left\{y \in \mathbb{Z} : |x - y| < \frac{1}{2}\right\} = \{x\}$ – будь-яка одноточкова множина відкрита. Тому якщо брати довільні об'єднання, то тоді вони будуть відкритими.

Remark 1.2.6 Не кожний топологічний простір може бути метризуючим (тобто нема сюр'єктивності переходу з метричного в топологічний простори).
Дійсно, ми довели, що недискретний топологічний простір не може бути метризуючим.

Definition 1.2.7 Задані (X, ρ) та (X, ρ') – два метричних простори.
Метрики називаються **топологічно еквівалентнтими**, якщо

$$\tau_\rho = \tau_{\rho'}$$

Тобто вони індукують одну й ту саму топологію.
Позначення: $\rho \overset{\tau}{\sim} \rho'$.

Definition 1.2.8 Задані (X, ρ) та (X, ρ') – два метричних простори.
Метрики називаються **Ліпшицево еквівалентнтими**, якщо

$$\exists C, c > 0 : \forall x, y \in X : c\rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq C\rho(x, y)$$

Позначення: $\rho \overset{\text{Lipsch}}{\sim} \rho'$.

Remark 1.2.9 Зрозуміло, що два означення задають відношення еквівалентності.

Proposition 1.2.10 Задані (X, ρ) та (X, ρ') – два метричних простори. Відомо, що $\rho \overset{\text{Lipsch}}{\sim} \rho'$. Тоді $\rho \overset{\tau}{\sim} \rho'$.

Proof.
Нам треба доввести, що $\tau_\rho = \tau_{\rho'}$. Це теж саме, що довести, що
U – відкрита в $(X, \rho) \iff U$ – відкрита в (X, ρ').
Нехай U – відкрита в (X, ρ). Нехай $x \in U$, тоді за умовою, $\exists B_\rho(x; r) \subset U$. За умовою твердження, існують константи $c, C > 0$, для яких $c\rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq C\rho(x, y)$. Із цієї нерівності випливає $\rho'(x, y) \leq C\rho(x, y)$, а з неї випливає, що $B_{\rho'}(x, cr) \subset B_\rho(x, r)$. І дійсно,
$y \in B_{\rho'}(x, cr) \implies \rho'(x, y) \leq cr \implies \rho(x, y) \leq \dfrac{1}{c}\rho'(x, y) \leq r \implies y \in B_\rho(x, r)$.
Отже, $B_{\rho'}(x, cr) \subset U$, тобто знайшли такий окіл, а тому x – внутрішня точка U відносно (X, ρ'). Оскільки це для довільної точки, то U – відкрита в (X, ρ').
Нехай U – відкрита в (X, ρ'), то тоді аналогічно доводиться. Просто цього разу в нерівності $c\rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq C\rho(x, y)$ використовується права частина нерівності. ■

Remark 1.2.11 Якщо $\rho \overset{\tau}{\sim} \rho'$, то не обов'язково $\rho \overset{\text{Lipsch}}{\sim} \rho'$.

Example 1.2.12 Зокрема маємо $(\mathbb{Z}, d)$ та $(\mathbb{Z}, \rho)$ – два метричних простори. Тут d – дискретна метрика та ρ задається як $\rho(m, n) = |m - n|$. Із **Ex. 1.2.5**, вони генерують одну й ту саму топологію, тобто $\tau_d = \tau_\rho$. А це означає, що $d \overset{\tau}{\sim} \rho$.
При цьому ми маємо $d \overset{\text{Lipsch}}{\not\sim} \rho$. Дійсно, нехай $C > 0$. Можна підібрати $x = 2[C] + 1, y = [C]$, причому тут $x, y \in \mathbb{Z}$, для яких $\rho(x, y) > Cd(x, y)$.

1.3 Конструкція топології за базою

Definition 1.3.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.
Клас $\mathcal{B}$ підмножин X назвемо **базою топології** τ, якщо

$$\forall U \in \tau : U = \bigcup_{V \in \tilde{\mathcal{B}}} V, \ \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$$

Тобто $\mathcal{B}$ – база, якщо кожна відкрита множина записується як об'єднання множин з класу $\mathcal{B}$.

Remark 1.3.2 Всі множини з класу $\mathcal{B}$ – відкриті автоматично, тобто $\mathcal{B} \subset \tau$, просто тому що їх можна сприймати як об'єднання з одного елементу.

Example 1.3.3 Зокрема маємо метричний простір (X, ρ), де індукується топологія τ_ρ. Тоді для неї база $\mathcal{B} = \{B(x; r) \mid x \in X, r > 0\}$ – набір всіх відкритих куль. Дійсно, нехай U – відкрита множина, тоді $\forall x \in U : x$ – внутрішня, а тому $\exists B(x; r_x) \subset U$. Тоді звідси $U = \bigcup\limits_{x \in X} B(x; r_x)$.

Example 1.3.4 Якщо (X, τ_{discr}) – дискретна топологія, то тоді $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ – база. Дійсно, кожна підмножина $U = \bigcup\limits_{x \in U} \{x\}$, ну й U уже апріорі відкрита.

Proposition 1.3.5 Задано (X, τ) – топологічний простір та $\mathcal{B}$ – база топології. Тоді:
1) $X = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}} U$ – тобто X записуємо як об'єдананння всіх множин із бази;
2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : B_1 \cap B_2 = \bigcup\limits_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U$, де $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ – тобто перетин елементів з бази записуються як об'єднання з цієї самої бази.

Proof.
Дійсно, оскільки $\mathcal{B}$ – база топології, то кожна відкрита множина – це об'єдання множин із бази.
1) Зокрема X – відкрита, тому $X = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}} U$.
2) Нехай $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Вони вдвох – відкриті (див. зауваження). Значить, $B_1 \cap B_2$ є відкритою множиною, а тому $B_1 \cap B_2 = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}} U$.
Довели. ■

Definition 1.3.6 Нехай задано множину X (просто множина без топології).
Клас $\mathcal{B}$ підмножин X назвемо **базою множини** X, якщо

$$1)\ X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$$
$$2)\ \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : B_1 \cap B_2 = \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U, \text{ де } \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$$

Якщо (X, τ) – топологія та $\mathcal{B}$ – база топології, то $\mathcal{B}$ – база множини (щойно вище довели).
Виявляється, що якщо в нас є множина X, для якої ми хочемо згенерувати топологію, то нам потрібно створити базу $\mathcal{B}$ множини X.

Proposition 1.3.7 Конструкція топології за базою
Задано X – множину та $\mathcal{B}$ – база цієї множини. Створимо $\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup\limits_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U \mid \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B} \right\}$ – тобто клас, що складається з усіх можливих об'єднань елементів з бази. Тоді $(X, \tau_{\mathcal{B}})$ утворює топологічний простір.
Ми $\tau_{\mathcal{B}}$ називаємо **топологією, що породжена базою** $\mathcal{B}$. Причому це єдина така топологія, де $\mathcal{B}$ – база топології.

Proof.
Маємо $\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup\limits_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U \mid \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B} \right\}$, перевіримо всі пункти для топології.
1) $\emptyset \in \tau_{\mathcal{B}}$, тому що можна записати $\emptyset = \bigcup\limits_{U \in \emptyset} U$, де $\emptyset \subset \mathcal{B}$. Також $X \in \tau_{\mathcal{B}}$, тому що $\mathcal{B}$ – база множини X, а значить, $X = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}} U$;
2) Нехай $\{U_\alpha \mid U_\alpha \in \tau_{\mathcal{B}}\}$ – сім'я відкритих множин. Тобто $U_\alpha = \bigcup\limits_{\mathcal{B}_\alpha} U$, де $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{B}$. Тоді звідси $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = \bigcup\limits_{\bigcup_\alpha B_\alpha} U$, причому $\bigcup\limits_\alpha \mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{B}$. Отже, $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha \in \tau_{\mathcal{B}}$;
3) Нехай $U_1, U_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$. Тобто звідси $U_1 = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}_1} U$ та $U_2 = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}_2} U$, де $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$. Значить, звідси $U_1 \cap U_2 = \bigcup\limits_{\substack{U \in \mathcal{B}_1 \\ V \in \mathcal{B}_2}} (U \cap V)$. Оскільки $U, V \in \mathcal{B}$, то в силу того, що $\mathcal{B}$ – база множини X, звідси $U \cap V = \bigcup\limits_{W \in \tilde{\mathcal{B}}_{U,V}} W$. Тоді $U_1 \cap U_2 = \bigcup\limits_{\substack{U \in \mathcal{B}_1 \\ V \in \mathcal{B}_2}} \bigcup\limits_{W \in \tilde{\mathcal{B}}_{U,V}} W = \bigcup\limits_{W \in \tilde{\tilde{\mathcal{B}}}} W$. Детально треба уточнити, що кожний $\tilde{\mathcal{B}}_{U,V} \subset \mathcal{B}$, тоді $\bigcup\limits_{\substack{U \in \mathcal{B}_1 \\ V \in \mathcal{B}_2}} \tilde{\mathcal{B}}_{U,V} \overset{\text{позн.}}{=} \tilde{\tilde{\mathcal{B}}} \subset \mathcal{B}$. Висновок: $U_1 \cap U_2$ записали як об'єднання множин з бази $\mathcal{B}$, тож $U_1 \cap U_2 \in \tau_{\mathcal{B}}$.

Із цих пунктів випливає, що $\tau_{\mathcal{B}}$ – дійсно топологія.

Також з цього випливає, що $\mathcal{B}$ – не просто база множини X, а ще й база топології $\tau_{\mathcal{B}}$.
Припустимо, що існує τ' – якась інша топологія на X, яка має базу топології $\mathcal{B}$. Нам треба довести, що $\tau' = \tau_{\mathcal{B}}$.
Нехай $U \in \tau'$, тоді звідси за означенням бази топології, $U = \bigcup\limits_{V \in \tilde{\mathcal{B}}} V$, де $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$. Але в силу того, як ми визначали $\tau_{\mathcal{B}}$, випливає, що $U \in \tau_{\mathcal{B}}$.
Нехай $U \in \tau_{\mathcal{B}}$, тоді звідси за побудовою, $U = \bigcup\limits_{V \in \tilde{\mathcal{B}}} V$, але тоді $V \in \tau'$ – відкрита множина як об'єднання однієї множини з бази. За означенням топології, $U \in \tau'$.
Власне, з цього випливає, що $\tau_{\mathcal{B}} = \tau'$. ■

Remark 1.3.8 Не хочеться це вставляти як окреме твердження, але є ось така еквівалентність:
$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : B_1 \cap B_2 = \bigcup\limits_{U \in \tilde{\mathcal{B}}} U$, де $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B} \iff \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : \forall x \in B_1 \cap B_2 : \exists W \in \mathcal{B} : x \in W \subset B_1 \cap B_2$.
Зазвичай саме праву частину використовують в якості другої умови бази множини та в твердженні про конструкцію топології за базою. Тим не менш, цю еквівалетність доведу.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: ліва частина. Нехай $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, тоді звідси $B_1 \cap B_2 = \bigcup\limits_{W \in \tilde{\mathcal{B}}} W$. Оберемо точку $x \in B_1 \cap B_2$, тоді звідси $x \in W_0$, де $W_0 \in \mathcal{B}$. Отже, ми знашли $W_0 \in \mathcal{B}$, для якої $x \in W_0 \subset B_1 \cap B_2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: права частина. Нехай $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, тоді $\forall x \in B_1 \cap B_2 : \exists W_x \in \mathcal{B} : x \in W_x \subset B_1 \cap B_2$. Зауважимо, що звідси $B_1 \cap B_2 = \bigcup\limits_{x \in B_1 \cap B_2} W_x$, причому ми об'єднуємо елементи з $\mathcal{B}$. ■

Proposition 1.3.9 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – топологічні простіри та $\tilde{\mathcal{B}}$ – база топології $\tilde{\tau}$. Відомо, що $\forall U \in \tilde{\mathcal{B}} : f^{-1}(U) \in \tau$. Тоді $f \colon X \to Y$ – неперервне. (TODO: move to other subsection)

Remark 1.3.10 Тобто коли топологія побудована за базою, то для неперервності достатньо перевірити умову для елементів з бази, а не з усієї топології.

Proof.
Нехай U – відкрита множина в Y, тобто звідси $U = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{B}'} V$, де $\mathcal{B}' \subset \tilde{\mathcal{B}}$ за визначенням бази.
Тоді звідси $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{B}'} f^{-1}(V)$, де всі $f^{-1}(V)$ відкриті за умовою. Отже, $f^{-1}(U)$ – відкрита як об'єднання. Отже, $f \colon X \to Y$ – неперервне. ■

Definition 1.3.11 Задано (X, τ) – топологічний простір та $\mathcal{B}$ – його база.
Простір задовольняє **другу аксіому зліченності** (англ. **second-countable**), якщо

$\mathcal{B}$ має зліченне число множин.

Example 1.3.12 Зокрема $(\mathbb{R}, \tau)$ з евклідовою топологією буде second-countable.
Розглянемо $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Варто спочатку довести, що вона утворює базу стандартної топології. Дійсно, нехай $U \in \tau$. Її можемо в стандартній топології записати як $U = \bigcup\limits_{x \in U} (x - r, x + r)$.
Надалі вся увага на $(x - r, x + r) \overset{\text{позн.}}{=} (u, v)$. Слід зауважити, що тут $u, v \in \mathbb{R}$. Але відомо, що для u існує послідовність раціональних чисел $\{q_n, n \geq 1\}$ так, щоб $v \geq q_n \geq u$, а також $q_n \to u$. Аналогічно існує послідовність раціональних чисел $\{r_n, n \geq 1\}$ так, щоб $u \leq r_n \leq v$, а також $r_n \to v$.
Тоді запишемо $(u, v) = \bigcup\limits_{\substack{q_n, r_n \in \mathbb{Q} \\ q_n < r_n}} (q_n, r_n)$. Таким чином, отримали (u, v) як об'єднання множин з бази, тобто U записується як об'єднання множин з бази.
Висновок: $\mathcal{B}$ – база стандартної топології. Оскільки $\mathbb{Q}$ – зліченна множина, то кількість інтервалів (a, b) також буде зліченною, тому second-countable.

1.4 Конструкція топології за передбазою

Definition 1.4.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.
Клас $\mathcal{S}$ підмножин X назвемо **передбазою топології** τ, якщо

$$\mathcal{B} \overset{\text{def.}}{=} \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \mid S_i \in \mathcal{S} \right\} \text{ утворює базу топології } \tau.$$

Тобто звідси випливає, що кожна відкрита множина записується як об'єднання скінченних перетинів множин з $\mathcal{S}$.

Ми вже знаємо, що якщо є база $\mathcal{B}$, то тоді можна побудувати топологію. Тобто якщо ми хочемо, щоб $\mathcal{S}$ була передбазою, то треба спочатку утворити базу $\mathcal{B}$, а із бази вже утворити топологію.

Proposition 1.4.2 Задано (X, τ) – топологічний простір.
$\mathcal{S}$ – передбаза $X \iff \bigcup\limits_{U \in \mathcal{S}} U = X$ (тут об'єднання всіх множин із класа $\mathcal{S}$).

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\mathcal{S}$ – передбаза X, тоді $\mathcal{B} = \left\{ \bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i \mid S_i \in \mathcal{S} \right\}$ утвроює базу топології, тому й базу X. Значить, $\bigcup\limits_{V \in \mathcal{B}} V = X$. У цьому об'єднанні беруть участь множини $U \in \mathcal{S}$, а всі решта з об'єдання будуть перетинами з двох чи більше елементів $\mathcal{S}$. Таким чином, достатньо об'єднати $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{S}} U = X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{S}} U = X$. Нам треба показати, що $\mathcal{B} = \left\{ \bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i \mid S_i \in \mathcal{S} \right\}$ – база X. Дійсно,
$X = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{S}} U = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{B}} V = X$ (пояснення вище).
Нехай $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, тобто $B_1 = \bigcap\limits_{i=1}^{n_1} S_i$ та $B_2 = \bigcap\limits_{j=1}^{n_2} S_j$. Тоді звідси $B_1 \cap B_2 = \bigcap\limits_{i=1}^{n_1} S_i \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n_2} S_j = \bigcap\limits_{k=1}^{m} S_k$.
Отже, $\mathcal{B}$ – база множини X, а тому $\mathcal{S}$ – передбаза X. ■

Proposition 1.4.3 Задано (X, τ) – топологічний простір та $\mathcal{S}$ – передбаза топології. Тоді τ – найслабша топологія, що містить $\mathcal{S}$.

Proof.
Дано: $\mathcal{S}$ – передбаза топології. Для зручності позначу початкову топологію за $\tau_{\mathcal{S}}$.
Припустимо, що τ – слабша топологія, що містить $\mathcal{S}$, тобто $\tau \subset \tau_{\mathcal{S}}$. Залишилося довести, що $\tau_{\mathcal{S}} \subset \tau$.
Беремо $U \in \tau_{\mathcal{S}}$, тоді звідси $U = \bigcup \bigcap\limits_{\text{скінченний}} W$, де $W \in \mathcal{S}$. Зауважимо, що $W \in \tau$ також, бо τ містить $\mathcal{S}$. Таким чином, $\bigcap\limits_{\text{скінченний}} W \in \tau \implies U \in \tau$. ■

1.5 Збіжність в топологічному просторі

Definition 1.5.1 Задані (X, τ) – топологічний простір та послідовність $\{x_n \in X, n \geq 1\}$.
Послідовність **збігається до точки** $x \in X$, якщо

$$\forall U \text{ – відкритий окіл точки } x : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n \in U$$

Example 1.5.2 Розглянемо (X, τ_{disc}) – дискретний топологічний простір.
Послідовність $\{x_n \in X, n \geq 1\}$ збігається до точки $x \in X \iff \exists N : \forall n \geq N : x_n = x$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{x_n\}$ збігається до $x \in X$. Тоді для будь-якого відкритого околу точки x, зокрема для $\{x\}$ існує номер N, де $\forall n \geq N : x_n \in \{x\}$, тобто $x_n = x, \forall n \geq N$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\exists N : \forall n \geq N : x_n = x$. Нехай U – відкритий окіл точки x. У нас є номер N, де $\forall n \geq N : x \in U$, зокрема звідси $x_n \in U$, а тому звідси $\{x_n\}$ збігається до точки $x \in X$.

Example 1.5.3 Розглянемо $(X, \tau_{\text{indisc}})$ – недискретний топологічний простір. Тоді довільна послідовність $\{x_n \in X, n \geq 1\}$ збігається до будь-якої точки $x \in X$.
Дійсно, нехай U – відкритий окіл точки $x \in X$. У недискретному просторі лише $U = X$ буде відкритим околом точки x. А значить, існує номер $N = 1$, де $\forall n \geq N : x_n \in X$.

Для того, щоб позбутися такої аномалії, нам треба нова класифікація топологічних просторів. Але це буде трошки пізніше.

1.6 Неперервні відображення

Definition 1.6.1 Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори.
Відображення $f \colon X \to Y$ називається **неперервним**, якщо

$$\forall U \in \tilde{\tau} : f^{-1}(U) \in \tau$$

Простіше кажучи, ми маємо ось це:

$$\forall U \text{ – відкрита в } Y : f^{-1}(U) \text{ – відкрита в } X$$

Example 1.6.2 Задано неперервне відображення $f \colon X \to Y$, де $(X, \rho), (Y, \rho')$ – два метричних простори. Тоді звідси f – неперервне (в топологічному сенсі).

Example 1.6.3 Задано відображення $f \colon X \to Y$, де (X, τ_{discr}) – дискретний топологічний простір, а на Y стоїть довільна топологія. Тоді f – неперервне.
Справді, беремо U – відкриту множину в Y. Тоді прообраз $f^{-1}(U)$ буде відкритим в X, бо в дискретній топології всі множини – відкриті.

Example 1.6.4 Задано відображення $f \colon X \to Y$, де $(Y, \tau_{\text{indiscr}})$ – недискретний топологічний простір, а на X стоїть довільна топологія. Тоді f – неперервне.
Справді, оберемо $\emptyset, Y$ – єдині відкриті множини в Y. Тоді $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ та $f^{-1}(Y) = X$ – обидва відкриті в X.

Example 1.6.5 Задано відображення $\text{id} \colon X \to X$, тут відображення між (X, τ) та (X, τ'). Тоді
id – неперервне $\iff$ τ сильніша за τ'.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: id – неперервне. Тобто $\forall U \in \tau' : \text{id}^{-1}(U) = U \in \tau$. А це в точності $\tau' \subset \tau$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\tau' \subset \tau$. Тобто $\forall U \in \tau' : U \in \tau$, але при цьому $U = \text{id}^{-1}(U) \in \tau$. Отже, id – неперервне.

Proposition 1.6.6 Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори.
Відображення $f \colon X \to Y$ – неперервне $\iff$ $\forall U$ – замкнена в Y : $f^{-1}(U)$ – замкнена в X.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: f – неперервне. Оберемо U – замкнену в Y. За означенням, $X \setminus U$ – відкрита в Y, а тому за неперервністю, $f^{-1}(X \setminus U)$ – відкрита в X. Зауважимо, що $f^{-1}(X \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ – відкрита в X. Отже, $f^{-1}(U)$ – замкнена в X.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Цілком аналогічно доводиться.* ■

В принципі, часто про відображення кажуть просто про неперервність, не уточнюючи в якій точці. Але для такого сценарія означення теж є.

Definition 1.6.7 Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори.
Відображення $f \colon X \to Y$ називається **неперервним в точці** $x \in X$, якщо

$$\forall V \text{ – окіл точки } f(x) : \exists U \text{ – окіл точки } x : f(U) \subset V$$

Proposition 1.6.8 Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори.
Відображення $f \colon X \to Y$ – неперервне $\iff$ $\forall x \in X : f$ – неперервне в точці x.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: f – неперервне. Оберемо будь-яку точку $x \in X$. Нехай V – окіл точки $f(x)$. Тоді існує $\tilde{V}$ – відкритий окіл точки $f(x)$, де $V \supset \tilde{V}$. Значить, за неперервністю, $f^{-1}(\tilde{V})$ – відкритий окіл точки x. Також із $V \supset \tilde{V}$ випливає $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(\tilde{V})$. Таким чином, $f^{-1}(V)$ – окіл точки x. Нарешті, варто зауважити, що виконується $f(f^{-1}(V)) \subset V$.

Таким чином, f – неперервне в точці $x \in X$, причому довільній.

$\boxed{\Leftarrow}$ Данл: $\forall x \in X : f$ – неперервне в точці x. Нехай U – відкрита множина в Y. Хочемо показати, що $f^{-1}U$ – відкрита, тобто всі точки внутрішні.
Нехай $x \in f^{-1}U$, тобто $f(x) \in U$, тоді за означення неперервності в точці, існує окіл U_x точки x, де $f(U_x) \subset U \implies U_x \subset f^{-1}U$. Отже, x – внутрішня точка.
Таким чином, f – неперервне відображення. ■

Proposition 1.6.9 "Означення Гайне"
Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори та відображення $f\colon X \to Y$ – неперервне. Тоді виконується "означення Гейне", тобто: Нехай $\{x_n \in X, n \geq 1\}$ збігається до точки $x \in X$. Тоді $\{f(x_n) \in Y, n \geq 1\}$ збігається до точки $f(x) \in Y$.

Proof.
Нехай $\{x_n \in X, n \geq 1\}$ збігається до точки x. Оберемо U – відкритий окіл точки $f(x)$, тоді за неперервністю, $f^{-1}(U)$ – відкритий окіл точки x, а тому звідси за збіжністю, існує N, де $\forall n \geq N$: $x_n \in f^{-1}(U) \implies f(x_n) \in U$. ■

Remark 1.6.10 Якщо виконано означення Гайне, то з цього в загальному випадку неперервність НЕ випливає.

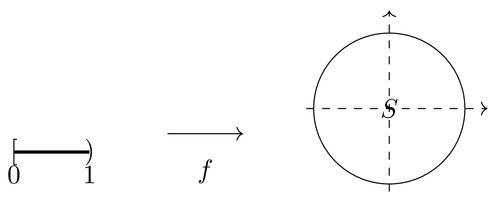
Proposition 1.6.11 Інші властивості
1. $\mathrm{id}\colon X \to X$ – неперервне відображення будь-якій топології τ;
2. Нехай $f\colon X \to Y$ та $g\colon Y \to Z$ – обидва неперервні. Тоді $g \circ f\colon X \to Z$ – неперервне.

1. *Вказівка:* $\mathrm{id}^{-1}(U) = U$.
2. *Вказівка:* $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

Remark 1.6.12 Нехай відображення $f\colon X \to Y$ бієктивне. Якщо f – неперервне, то не обов'язково (!), щоб f^{-1} було неперервним.

Example 1.6.13 Зокрема вже відомо, що $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ буде неперервним відображенням, якщо в першому $(\mathbb{R}, d)$ – дискретний метричний простір та в другому $(\mathbb{R}, \rho)$ – стандартний евклідів простір. Тут виконується неперервність, оскільки τ_{discr} – найсильніша топологія.
Утім відображення $\mathrm{id}^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ уже не буде неперервним. Тому що $[-1, 1]$ – відкрита множина відносно дискретної топології, але $\mathrm{id}^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1]$ – НЕ відкрита множина відносно евклідової топології.

Example 1.6.14 Більш геометричний приклад буде наступним. Маємо відображення $f\colon (0, 1] \to S$, де $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – одиничне коло (метрика буде стандартною всюду). Визначимо $f(t) = e^{2\pi i t}$. Зрозуміло, що це бієктивне відображення та є неперервним.



У цьому напрямку неперервність означає, що ми $(0, 1]$ деформували в коло S, просто об'єднавши тіпа края.

Але $f^{-1}\colon S \to (0, 1]$ уже не буде неперервним.
!Припустимо, що все-таки неперервне. Тоді оскільки $\left\{1 - \dfrac{1}{n}, n \geq 1\right\}$ збігається до 1, а тому $f\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \to f(1) = e^{2\pi i} = 1$. Утім в силу неперервності f^{-1} ми маємо $f^{-1}\left(f\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right) = 1 - \dfrac{1}{n} \to 1$, хоча $f^{-1}(1) = 0$. Суперечність!
Тут щоб із кола зробити палку, треба розірвати її в точці $z = 1$. Тому нема неперервності. Саме тому приходить новий розділ, де ми хочемо, щоб, деформувавши один об'єкт, отримали топологічно той самий об'єкт і навпаки.

1.7 Гомеоморфність топологічних просторів

Definition 1.7.1 Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори.
Відображення $f\colon X \to Y$ називається **гомеоморфізмом**, якщо

$$\begin{aligned} f &- \text{неперервне} \\ f &- \text{бієктивне} \\ f^{-1} &- \text{неперервне} \end{aligned}$$

Definition 1.7.2 Задані (X, τ) та $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори.
Вони будуть називатися **гомеоморфними**, якщо

$$\exists f\colon X \to Y - \text{гомеоморфізм}$$

Позначення: $X \cong Y$.

Remark 1.7.3 Топологічні простори, які є гомеоморфними, задають відношення еквівалентності.
$X \cong X$, оскільки $\mathrm{id}\colon X \to X$ (одна топологія) – гомеоморфізм.
$X \cong Y \iff Y \cong X$ просто за означенням гомеоморфізма.
$X \cong Y, Y \cong Z \implies X \cong Z$, тому що $g \circ f$ задає гомеоморфізм між ними. У цьому випадку $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ – гомеоморфізми.

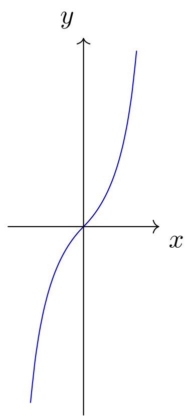
Example 1.7.4 Зокрема відрізок $[0,1] \cong [a,b]$, якщо встановити $f\colon [0,1] \to [a,b]$ як $f(t) = (1-t)a + tb$ – і це відображення буде гомеоморфізмом.
Дійсно, $f \in C([0,1])$ як лінійна функція. Далі знайдемо обернене відображення – воно дорівнює $f^{-1}(u) = \dfrac{u-a}{b-a}$, причому $f^{-1} \in C([a,b])$ знову як лінійна функція.

Example 1.7.5 Із цього прикладу можна отримати $[a,b] \cong [c,d]$, тому що
$[a,b] \cong [0,1]$ та $[0,1] \cong [c,d] \implies [a,b] \cong [c,d]$.

Аналогічно можна довести, що $(a,b) \cong (c,d), \quad (a,b] \cong (c,d] \cong [c,d) \cong [a,b)$.

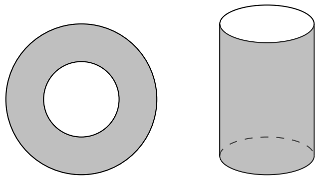
Example 1.7.6 За **Ex. 1.6.14**, ми отримали $(0,1] \ncong S$.

Example 1.7.7 Також маємо $(a,b) \cong \mathbb{R}$. Можна спочатку довести, що $(-1,1) \cong \mathbb{R}$, якщо задати $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ – це дійсно буде гомеоморфізмом.



А вже далі в силу транзитивності, ми отримаємо $(a,b) \cong \mathbb{R}$.

Example 1.7.8 Тепер розглянемо такі два об'єкти. Перший: кільце з внутрішнім радіусом 1 та зовнішнім радіусом 2, для зручності розташуємо центр на початку координат. Другий: циліндр без двох основ. Інтуїтивно вони будуть гомеоморфними, тому що:
циліндр отримаємо з кільця, якщо його кільце намагатися розтягнути вгору;
кільце отримаємо з циліндра, якщо його сплющити.



Строго можна довести гомеоморфність цих об'єктів, якщо задати відображення $(r\cos\theta, r\sin\theta) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta, r)$, що буде гомеоморфізмом. У цьому випадку $r \in [1,2]$ та $\phi \in [0, 2\pi]$.

Example 1.7.9 Ще важливий приклад, $[a,b] \ncong \mathbb{R}$.
!Припустимо, що все ж таки $[a,b] \cong \mathbb{R}$, тобто існує між ними гомеоморфізм $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Оскільки $f \in C([a,b])$, то звідси воно досягає найбільшого значення M та найменшого значення m. Тобто $f([a,b]) = [m,M]$. Але оскільки f – бієкція, то звідси $f([a,b]) = \mathbb{R}$. Але при цьому $[m,M] \neq \mathbb{R}$ – суперечність!

Example 1.7.10 Мабуть, в алгебраїчній топології буде доведено, що $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$.

1.8 Характеристики точок множин

Нам вже відоме означення внутрішньої точки. Ще раз нагадаю:

Definition 1.8.1 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.
Точка x називається **внутрішньою для** A, якщо

$$\exists V \text{ – окіл точки } x : V \subset A$$

Definition 1.8.2 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.
Точка $x \in X$ називається **граничною для** A, якщо

$$\forall V \text{ – окіл точки } x : V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Є ще різні види точок, але поки зосередимось на них.
У метричному просторі ми вводили поняття відкритих та замкнених множин як раз через внутрішні та граничні точки. У топологічному просторі ми означення відкритої множини звели до означення з використанням внутрішніх точок. Зробимо те саме для замкнених множин.

Proposition 1.8.3 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.
A – замкнена $\iff$ A містить всі граничні точки A.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – замкнена, тобто $X \setminus A$ – відкрита множина.
!Припустимо, що x – гранична точка A, але $x \notin A$. Тобто $x \in X \setminus A$. Водночас звідси x буде внутрішньою точкою $X \setminus A$, тобто існує V – окіл точки x, для якого $V \subset X \setminus A \implies V \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$.
Але для цього ж околу ми знаємо, що $V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ – суперечність!
Отже, обов'язково треба вимагати $x \in A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A містить всі свої граничні точки. Доведемо, що $X \setminus A$ відкрита.
Нехай $x \in X \setminus A$, тоді вона уже не є граничною точкою, тобто $\exists V$ – окіл точки $x : V \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$, зокрема звідси $V \subset X \setminus A$. Отже, x – внутрішня точка.
Тож звідси $X \setminus A$ – відкрита, тобто A – замкнена. ■

1.9 Замикання та внутрішність

Definition 1.9.1 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.
Замиканням множини A називають таку річ:

$$\operatorname{Cl} A = \bigcap_{\substack{V \text{ – замкнена} \\ V \supset A}} V$$

Тобто замиканням A називають перетин всіх замкнених множин, що містить A.
Альтернативне позначення: $\overline{A}$.

Proposition 1.9.2 $\operatorname{Cl} A$ – найменша замкнена множина, що містить A.

Proof.
Нескінченний перетин замкнених множин V – замкнений, тому $\operatorname{Cl} A$ – замкнена.
Усі замкнені множини $V \supset A$, тому звідси $\operatorname{Cl} A \supset A$.
Нехай існує замкнена множина $W \supset A$, але при цьому $W \subset \operatorname{Cl} A$. Тоді $\operatorname{Cl} A \subset W$, оскільки
$$\operatorname{Cl} A = \bigcap_{\substack{V \text{ – замкнена} \\ V \supset A}} V = W \cap \bigcap_{\substack{V \text{ – замкнена} \\ V \supset A \\ V \neq W}} V \subset W.$$
Отже, $W = \operatorname{Cl} A$, тобто нічого меншого за замикання нема. ■

Proposition 1.9.3 Властивості замикання
Задано (X, τ) – топологічний простір та $A, B \subset X$. Тоді
1) A – замкнена множина $\iff \operatorname{Cl} A = A$;
2) $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$;
3) $A \subset B \implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$.

Proof.
Доведемо кожну властивість.

1) Тут треба довести в обидві сторони.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – замкнена. Тоді $\operatorname{Cl} A \subset A$ (бо замикання – найменша замкнена). Із іншого боку, $\operatorname{Cl} A \supset A$. Отже, $\operatorname{Cl} A = A$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\operatorname{Cl} A = A$. Тоді автоматично A – замкнена (бо замикання – замкнена).

2) Оскільки $\operatorname{Cl} A$ – замкнена множина, то за попередньою властивістю, $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$.

3) Нехай $A \subset B$. Маємо наступне:
$$\operatorname{Cl} B = \bigcap_{\substack{V \text{ – замкнена} \\ V \supset B}} V \supset \bigcap_{\substack{V \text{ – замкнена} \\ V \supset B}} V \cap \bigcap_{\substack{V \text{ – замкнена} \\ V \supset A \\ V \not\supset B}} V = \bigcap_{\substack{V \text{ – замкнена} \\ V \supset A}} V = \operatorname{Cl} A.$$

Усі властивості доведені. ■

Proposition 1.9.4 Інше визначення замикання
$\operatorname{Cl} A = \{x \in X : \forall U \text{ – окіл точки } x : U \cap A \neq \emptyset\}$.

Proof.
Позначимо $V = \{x \in X : \forall U \text{ – окіл точки } x : U \cap A \neq \emptyset\}$. Хочемо довести, що $\operatorname{Cl} A = V$.
V – замкнена множина.
Ми будемо доводити, що $X \setminus V$ – відкрита множина. Нехай $x \in X \setminus V$, тобто існує U_x – такий окіл, де $U_x \cap A = \emptyset$. Стверджую, що $U_x \subset X \setminus V$. Дійсно, нехай $z \in U_x$. Ми знайшли окіл точки z так, що $U_x \cap A = \emptyset$, а тому вже $z \notin V \implies z \in X \setminus V$.
$V \supset A$.
Справді, нехай $x \in A$. Тоді $U \cap A \neq \emptyset$ для будь-якого окола $U \ni x$. Отже, $x \in V$.
V – найменша замкнена множина, що містить A.
Припустимо, що $K \supset A$ – замкнена множина, але $K \subset V$. Ми хочемо довести, що $K \supset V$, а краще доведемо $X \setminus K \subset X \setminus V$. Нехай $z \in X \setminus K$. Оскільки $K \supset A$, то звідси $A \cap (X \setminus K) = \emptyset$. Тому отримаємо $z \notin V \implies z \in X \setminus V$.
Отже, ми трьома етапами довели, що $V = \operatorname{Cl} A$. ■

Corollary 1.9.5 $\operatorname{Cl} A = A \cup \{\text{граничні точки } A\}$.

Proposition 1.9.6 Означення неперервного відображення через замикання
Задані (X, τ), $(Y, \tilde{\tau})$ – два топологічні простори та відображення $f \colon X \to Y$.
f – неперервне $\iff \forall A \subset X : f(\operatorname{Cl} A) \subset \operatorname{Cl} f(A)$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: f – неперервне. Нехай $A \subset X$. Оскільки $\operatorname{Cl} f(A)$ – замкнена множина в Y, то за неперервністю $f^{-1}(\operatorname{Cl} f(A))$ – замкнена. Причому $f^{-1}(\operatorname{Cl} f(A)) \supset f^{-1}(f(A)) \supset A$. Таким чином, $\operatorname{Cl} A \subset f^{-1}(\operatorname{Cl} f(A))$ (як найменша замкнена, що містить A). Отже, $f(\operatorname{Cl} A) \subset f(f^{-1}(\operatorname{Cl} f(A))) \subset \operatorname{Cl} f(A)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall A \subset X : f(\operatorname{Cl} A) \subset \operatorname{Cl} f(A)$. Оберемо V – замкнену множину на Y. Хочемо довести, що

$f^{-1}(V)$ – замкнена в X. Це теж саме, що довести рівність $\operatorname{Cl} f^{-1}(V) = f^{-1}(V)$.
У нас вже є $\operatorname{Cl} f^{-1}V \supset f^{-1}V$. Із іншого боку, оскільки $f^{-1}(V) \subset X$, то за дано $f(\operatorname{Cl} f^{-1}(V)) \subset \operatorname{Cl} f(f^{-1}(V)) \subset \operatorname{Cl} V \overset{V \text{ – замкнена}}{=} V$. Значить, $\operatorname{Cl} f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V)$. ■

Definition 1.9.7 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.
Внутрішністю множини A називають таку річ:

$$\operatorname{Int} A = \bigcup_{\substack{U \text{ – відкриті} \\ U \subset A}} U$$

Тобто внутрішністю A називають об'єднання всіх відкритих множин, що містяться в A.

Proposition 1.9.8 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$. Тоді
$\operatorname{Cl}(X \setminus A) = X \setminus \operatorname{Int} A$;
$\operatorname{Int}(X \setminus A) = X \setminus \operatorname{Cl} A$.
Випливає зі законів де Моргана.

Нижчі твердження можна довести, скориставшись рівністю $\operatorname{Int} A = X \setminus \operatorname{Cl}(X \setminus A)$.

Proposition 1.9.9 $\operatorname{Int} A$ – найбільша відкрита множина, що міститься в A.

Proposition 1.9.10 $\operatorname{Int} A = \{x \in X : \exists U \text{ – окіл точки } x : U \subset A\} = \{\text{внутрішні точки } A\}$.

1.10 Топологічний підпростір

Definition 1.10.1 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.
Топологією підпростору на A називають таку множину:

$$\tau_A = \{U \subset A \mid \exists W \in \tau : U = A \cap W\}$$

Пара (A, τ_A) називається **підпростором** топологічного простору (X, τ).
Якщо $U \in \tau_A$, то будемо казати, що U відкрита на A. Також якщо $A \setminus U \in \tau_A$ будемо казати, що U – замкнена на A.

Proposition 1.10.2 τ_A задає топологію та (A, τ_A) теж утворює топологічний простір.

Proof.
Треба перевірити всі три пунктів.
1) $\emptyset, A \in \tau_A$ зі зрозумілих причин;
2) Нехай $\{U_\alpha \in \tau_A\}$ – сім'я відкритих. Тобто $U_\alpha = A \cap W_\alpha$, де $\{W_\alpha \in \tau\}$ – сім'я відкритих в (X, τ). Тоді звідси $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = A \cap \bigcup\limits_\alpha W_\alpha$, де множина $\bigcup\limits_\alpha W_\alpha \in \tau$. Отже, $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha \in \tau_A$;
3) Нехай $U_1, U_2 \in \tau_A$, тобто $U_1 = A \cap W_1$ та $U_2 = A \cap W_2$ при $W_1, W_2 \in \tau$. Звідси маємо $U_1 \cap U_2 = A \cap (W_1 \cap W_2)$, де $W_1 \cap W_2 \in \tau$, але звідси $U_1 \cap U_2 \in \tau_A$.
Отже, дійсно τ_A – топологія. ■

Example 1.10.3 Зокрема в метричному просторі (X, ρ), якщо $A \subset X$, ми вже знаємо, що U – відкрита на $A \iff U = A \cap W$ для деякої W – відкритої в X. Тобто, по суті, індукований простір (A, ρ_A) індукує топологію підпростору τ_A.

Example 1.10.4 Маємо (X, τ_{discr}) – дискретний топологічний простір. Оберемо $A \subset X$, тоді підпростір (A, τ_A) – теж дискретний топологічний простір.
Ну дійсно, $U \subset A \subset X$, а будь-яка підмножина в дискретному просторі – відкрита.

Example 1.10.5 Маємо $(X, \tau_{\text{indiscr}})$ – дискретний топологічний простір. Оберемо $A \subset X$, тоді підпростір (A, τ_A) – теж дискретний топологічний простір.
Дійсно, нехай U – відкрита в A, тобто звідси $U = A \cap W$, де W – відкрита в X. Значить, або $W = \emptyset$, або $W = X$. Тоді звідси $U = A \cap X = A$ або $U = \emptyset$. Інших відкритих – нема.

Proposition 1.10.6 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.
V – замкнена на $A \iff \exists S$ – замкнена в $X : V = A \cap S$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: V – замкнена на A, тобто $A \setminus V$ – відкрита на A, а тому $A \setminus V = A \cap W$ при W – відкрита на X. Значить, звідси $V = A \setminus (A \setminus V) = A \setminus (A \cap W) = A \cap (X \setminus W)$. Позначимо $X \setminus W = S$, яка є замкненою в X. Звідси випливає, що $V = A \cap S$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Аналогічно.* ■

Proposition 1.10.7 Задано (X, τ) – топологічний простір та $U \subset A \subset X$. Відомо, що U – відкрита на A та A – відкрита на X. Тоді U – відкрита на X.
Аналогічно виконується, якщо всюди – замкнені множини.

Proof.
За умовою, U – відкрита на A, тобто звідси $U = A \cap W$; причому W – відкрита на X та A – відкрита на X за умовою. Отже, U – відкрита на X як перетин. ■

Remark 1.10.8 У цьому твердженні дуже важливо, щоб A була відкритою на X!

Example 1.10.9 Маємо $X = \mathbb{R}$ із евклідовою метрикою, $A = [0, +\infty)$ та $U = [0, 1)$.
У цьому випадку A не є відкритою на X – зрозуміло. Далі зауважимо, що U – відкрита на A, просто тому що $[0, 1) = [0, +\infty) \cap (1, +\infty)$, де $(1, +\infty)$ – відкрита на X. Але U – не відкрита на X.

(TODO: move to another subsection)

Remark 1.10.10 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$. Означення топології підпростору на A можна переписати по-інакшому. Для цього розглянемо вкладення $\imath_A \colon A \to X$, а далі зауважимо, що для кожної $W \subset X$ маємо $\imath_A^{-1}(W) = W \cap A$. Тоді звідси маємо:

$$\tau_A = \imath_A^{-1}(\tau)$$

Тоді τ_A ще інколи називають **індукованою топологією** на A.

Proposition 1.10.11 Задано (X, τ) – топологічний простір та A – підпростір. Тоді вкладення $\imath_A \colon A \to X$ неперервне.
Вказівка: $\imath_A^{-1}(W) = W \cap A$.

Remark 1.10.12 τ_A – найслабша на A топологія серед всіх інших, для якої $\imath$ – неперервне. Тому що τ_A визначено так, що лише $\imath_A^{-1}(W)$ – відкриті, більше нічого.

Proposition 1.10.13 Задано (X, τ) – топологічний простір та A – підпростір. Нехай $(Y, \tilde{\tau})$ – інший топологічний простір.
Відображення $f \colon Y \to A$ – неперервне $\iff$ $\imath \circ f \colon Y \to X$ – неперервне.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\imath \circ f"'] & A \arrow[d, "\imath"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $f \colon Y \to A$ – неперервне. Тоді автоматично $\imath \circ f \colon Y \to X$ буде неперервним як композиція неперервних.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\imath \circ f \colon Y \to X$ – неперервне. Оберемо U – відкриту на A, тобто $U = A \cap W$ при деякому W – відкрита на X. Розглянемо $f^{-1}(U) = f^{-1}(A \cap W) = f^{-1}(\imath^{-1}(W)) = (\imath \circ f)^{-1}(W)$. Але оскільки W – відкрита на X, то за умовою, $(\imath \circ f)^{-1}(W)$ – відкрита на Y. ■

Example 1.10.14 Зокрема на стандартних топологіях маємо відображення $f \colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ як $f(x) = \sin x$. Із мат. аналізу, воно є неперервним. Але за твердженням вище, $\imath \circ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, де мається $\imath \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, – неперервне теж відображення.
Тобто твердження каже, що властивість неперервності залишається, якщо збільшити чи зменшити область значень.

Proposition 1.10.15 Задано (X, τ) – топологічний простір та $f\colon X \to Y$ – неперервне. Тоді звуження $f\Big|_A\colon A \to Y$ – теж неперервне, де $A \subset X$.
Вказівка: $f\Big|_A = f \circ \imath$, *де* $\imath\colon A \to X$.

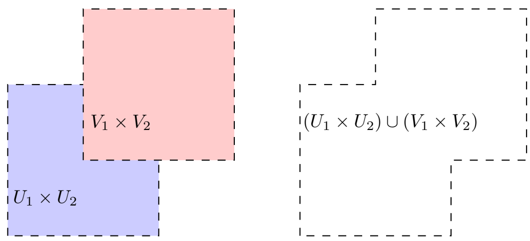
Example 1.10.16 Тобто маємо $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, що задано $f(x) = \sin x$, що неперервне. Тоді $f\Big|_{[-\pi,\pi]}\colon [-\pi, \pi] \to [-1, 1]$ – теж неперервне.

Example 1.10.17 Тепер маємо $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задається як $f(x) = \dfrac{1}{x}$. У цьому випадку $f\Big|_{(0,+\infty)}$ буде неперервним відображенням з мат. аналізу, але f – не є неперервним.

1.11 Добуток просторів

Нехай задані (X_1, τ_1) та (X_2, τ_2) – два топологічні простори. Хочеться задати топологію на $X_1 \times X_2$. Перше вгадування: чи буде множина $\{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$ утворювати топологію? Ні, цього недостатньо.

Example 1.11.1 Зокрема маємо $(\mathbb{R}, \tau_1)$ та $\mathbb{R}, \tau_2)$ – дві евклідові топології. Розглянемо множину $U_1 \times U_2 = (0, 2) \times (0, 2)$ та множину $V_1 \times V_2 = (1, 3) \times (1, 3)$. А далі треба подивитися на $(U_1 \times U_2) \cup (V_1 \times V_2)$ та зауважити наступне: це буде відкрита множина, але не потрапляє в нашу "топологію", тому що я не можу її записати як $W_1 \times W_2$.



Значить, треба трошки по-інакшому до цього підійти.

Розглянемо $\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$. Якщо вона ще не утворює топологію, то спробуємо показати, що це утворює базу множини $X_1 \times X_2$. Дійсно:
1) $X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$, навіть не обов'язково розписувати як об'єднання. Хоча можна це зробити, $X_1 \times X_2 = \displaystyle\bigcup_{U_1 \times U_2 \in \mathcal{B}} U_1 \times U_2$, і в це же об'єднання буде входити $X_1 \times X_2$, а тому рівність легітимна;
2) Нехай $U, V \in \mathcal{B}$, тобто $U = U_1 \times U_2$ та $V = V_1 \times V_2$, у цьому випадку U_1, V_1 – відкриті в X_1 та U_2, V_2 – відкриті в X_2. Тоді звідси зауважимо, що $U \cap V = (U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2)$. Оскільки $U_1 \cap V_1$ та $U_2 \cap V_2$ залишаються відкритими у себе, то звідси $U \cap V$ записали як добуток відкритих, тож $U \cap V \in \mathcal{B}$.
Таким чином, $\mathcal{B}$ – дійсно база $X_1 \times X_2$, а тому можна спородити топологію.

Definition 1.11.2 Задані (X_1, τ_1) та (X_2, τ_2) – два топологічні простори.
Добутком топологій τ_1, τ_2 назвемо топологію, яка породжена базою

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$$

Позначення: $\tau_1 \times \tau_2 \overset{\text{def.}}{=} \tau_{\mathcal{B}}$.
Це ще інколи називають **тіхоновською топологією**.

Proposition 1.11.3 Задані (X_1, τ_1) та (X_2, τ_2) – два топологічних простори. Наступні твердження еквівалентні:
1) U – відкрита на $X_1 \times X_2$;
2) $U = \displaystyle\bigcup_{\alpha} U_1^\alpha \times U_2^\alpha$ для деяких сімей $\{U_1^\alpha\}$ та $\{U_2^\alpha\}$ відкритих множин відповідно на X_1, X_2;
3) $\forall (x_1, x_2) \in U : \exists U_1, U_2$ – відповідно відкриті околи точки $x_1, x_2 : U_1 \times U_2 \subset U$.

Proof.
$\boxed{1) \Leftrightarrow 2)}$ *випливає з означення добутку топологій.*

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ *зрозуміло.*

$\boxed{2) \Leftarrow 3)}$ Дано: виконується 3), тоді для кожної точки $(x_1, x_2) \in U$ існують відкриті околи U_1^x, U_2^x, причому $U_1^x \times U_2^x \subset U$. Зауважимо, що $U = \bigcup\limits_{(x_1,x_2) \in U} U_1^x \times U_2^x$, тож 2) виконано. ■

Theorem 1.11.4 Задано $\mathbb{R}^n$ із евклідовою топологією. Тоді вона буде збігатися з добутком топології $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, де в $\mathbb{R}$ стоїть стандартна топологія.

Remark 1.11.5 Зауважимо, що топологія з евклідовою метрикою збігається з топологією, що породжена метрикою $d_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$. Це суттєво спростить доведення теореми.

Proof.
Тобто треба довести, що U – відкрита в $\mathbb{R}^n \iff U$ – відкрита в $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: U – відкрита в $\mathbb{R}^n$.
Нехай $(x_1, \dots, x_n) \in U$, тоді звідси існує окіл $B_{d_\infty}(\vec{x}, r) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r) \subset U$. Позначимо $U_i = (x_i - r, x_i + r)$ – отримали, що існують U_i – відкриті околи точок $x_i, i = \overline{1,n}$, для яких $U_1 \times \cdots \times U_n \subset U$. А тому звідси U – відкрита на $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: U – відкрита в $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.
Нехай $(x_1, \dots, x_n) \in U$, тоді існують відкриті околи U_i точок $x_i, i = \overline{1,n}$, для яких $U_1 \times \cdots \times U_n \subset U$. Оскільки U_i – відкриті околи, то існує $(x_i - r_i, x_i + r_i) \subset U_i$ при $r_i > 0$. Значить, $(x_1 - r_1, x_1 + r_1) \times \cdots \times (x_n - r_n, x_n + r_n) \subset U$. Покладемо $r = \min\limits_{i=\overline{1,n}} r_i$, тоді звідси $(x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r) \subset U$. Або, інакше кажучи, $B_{d_\infty}(\vec{x}, r) \subset U$. Тобто звідси U – відкрита на $\mathbb{R}^n$ відносно d_∞, а тому й відносно евклідової метрики. ■

Proposition 1.11.6 Задані (X_1, τ_1) та (X_2, τ_2) – два топологічних простори. Тоді відображення $\mathrm{pr}_1 \colon X_1 \times X_2 \to X_1$ та $\mathrm{pr}_2 \colon X_1 \times X_2 \to X_2$ – неперервні.

$$X_1 \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} X_1 \times X_2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} X_2$$

Proof.
Достатньо показати для pr_1, бо з pr_2 все симетрично.
Нехай U_1 – відкрита в X_1. Тоді звідси $\mathrm{pr}_1^{-1}(U_1) = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid x_1 \in U_1\} = U_1 \times X_2$ – відкрита як добуток двох відкритих. ■

Proposition 1.11.7 Задані (X_1, τ_1) та (X_2, τ_2) – два топологічних простори. Нехай (Z, σ) – також топологічний простір, встановимо відображення $f \colon Z \to X_1 \times X_2$ як $z \mapsto (f_1(z), f_2(z))$.
f – неперервне $\iff f_1, f_2$ – обидва неперервні (покоординатно).

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: f – неперервне. Зауважимо, що $f_1 = \mathrm{pr}_1 \circ f$ та $f_2 = \mathrm{pr}_2 \circ f$. Тоді f_1, f_2 – неперервні як композиція неперервних.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: f_1, f_2 – обидва неперервні.
Нехай $U \in \mathcal{B}$ – база топології $\tau_1 \times \tau_2$, тобто $U = U_1 \times U_2$, де U_1, U_2 – відкриті на X_1, X_2. Звідси $f^{-1}(U) = \{z \in Z \mid (f_1(z), f_2(z)) \in U_1 \times U_2\} = f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2)$. За умовою, маємо $f_1^{-1}(U_1), f_2^{-1}(U_2)$ – відкриті на Z. Тобто звідси випливає, що $f^{-1}(U)$ – відкрита на Z. ■

Proposition 1.11.8 Еквівалентний спосіб побудувати топологію
Задані (X_1, τ_1) та (X_2, τ_2) – два топологічних простори. Розглянемо такий клас:

$$\mathcal{S} = \left\{\mathrm{pr}_1^{-1}(U), U \in \tau_1\right\} \cup \left\{\mathrm{pr}_2^{-1}(V), V \in \tau_2\right\}$$

Тоді $\mathcal{S}$ утвроює передбазу множини $X_1 \times X_2$. У нас утвориться топологія для $X_1 \times X_2$ – і це буде та сама топологія, що була визначена через базу.

Proof.
Нам треба об'єднати всі елементи даного класу. Маємо
$\bigcup\limits_{U\in\tau_1} \mathrm{pr}_1^{-1}(U) \cup \bigcup\limits_{V\in\tau_2} \mathrm{pr}_2^{-1}(V) = \bigcup\limits_{U\in\tau_1} (U\times X_2) \cup \bigcup\limits_{V\in\tau_2} (X_1\times V) = \left(\left(\bigcup\limits_{U\in\tau_1} U\right) \times X_2\right) \cup \left(X_1 \times \left(\bigcup\limits_{V\in\tau_2} V\right)\right) =$
$= (X_1 \times X_2) \cup (X_1 \times X_2) = X_1 \times X_2$.
У передостанній рівності два об'єднання замінилися на X_1, X_2 відповідно, просто тому що це найбільші множини, які також відкриті.
Таким чином, у нас вже є топологія $\tau_{\mathcal{S}}$. Переконаємося, що це та сама топологія, що й $\tau_{\mathcal{B}}$.
$\tau_{\mathcal{S}} \subset \tau_{\mathcal{B}}$ – цілком зрозуміло.
$\tau_{\mathcal{B}} \subset \tau_{\mathcal{S}}$, просто лише варто зауважити, що $U \times V = \mathrm{pr}_1^{-1}(U) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(V)$. ■

Remark 1.11.9 Таким чином, $\tau_1 \times \tau_2$ – найслабша на $X_1 \times X_2$ топологія серед всіх інших, для якої проєкції – неперервні. Просто тому що вона породжена передбазою, а така топологія – найменша.

Узагальнення добутку топологій

Припустимо, що $\{(X_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in I\}$ – довільна сім'я топологічних просторів. Ми вже з'ясували, що набору множин $\prod\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$, де $U_\alpha \in \tau_\alpha$, недостатньо для формування топології. Однак ми можемо знову розглянути наступний клас:

$$\mathcal{B}_{\blacksquare} = \left\{\prod_{\alpha\in I} U_\alpha \mid U_\alpha \in \tau_\alpha\right\}$$

Це утворює базу множини $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$, тому ми знайшли топологію $\tau_{\mathcal{B}_\blacksquare}$ для множини $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$. Така топологія в зарубіжній літературі називається **box topology**.
На жаль, дане наївне узагальнення призводить до певних проблем.

Example 1.11.10 Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ таким чином: $f(x) = (x, x, x, \dots)$ Зауважимо, що множина $U = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^n}\right)$ – відкрита множина в сенсі box topology. Проте $f^{-1}(U) = \{0\}$ уже не буде відкритою, якщо розглядати стандартну топологію. Тобто ми вже маємо відображення f, яке не є неперервним.
При цьому подивимося на це відображення з іншої сторони, як на $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$, де кожний $f_i(x) = x$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Маючи стандартну топологію, ясно, що це неперервне відображення. Отже, у нас не виконується таке:
f – неперервне $\not\Longleftrightarrow$ f_i – неперервні (тобто покоординатна неперервність).

Цей приклад можна трактувати інакше: у нас "дуже багато" відкритих множин, які нам заважають жити. Аби працювала еквівалентність вище, ми трошки змінимо базу ось таким чином:

$$\mathcal{B} = \left\{\prod_{\alpha\in I} U_\alpha \mid U_\alpha \in \tau_\alpha, U_\alpha \neq X_\alpha \text{ лише скінченне число разів}\right\}$$

Даний клас також задаватиме базу топології за аналогічними міркуваннями. Тільки треба зазначити, що для $\prod\limits_{\alpha} X_\alpha$ справедливе обмеження. Також якщо для $U, V \in \mathcal{B}$ виконано обмеження, то для $U \cap V$ теж. Така топологія в зарубіжні літературі називається **product topology**.

Існує альтернативний спосіб побудувати саме product topology. Розглянемо клас

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha\in I} \left\{\mathrm{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid U_\alpha \in \tau_\alpha\right\}$$

Зауважимо, що $\mathcal{S}$ утврює передбазу множини $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$: аналогічним чином треба пооб'єднати всі елементи. Тоді в нас утвориться топологія $\tau_{\mathcal{S}}$, яка, насправді, збігається з product topology, тобто $\tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\mathcal{B}}$.

$\tau_{\mathcal{S}} \subset \tau_{\mathcal{B}}$. Дійсно, нехай $U \in \tau_{\mathcal{S}}$, тоді звідси $U = \bigcup \bigcap\limits_{\text{скінченний}} W$, де кожний $W \in \mathcal{S}$, тобто $W = \mathrm{pr}_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) = \prod\limits_{\substack{\alpha \in I \\ \text{на } \alpha_0 \text{ стоїть } U_{\alpha_0}}} X_\alpha$. Оскільки в нас скінченний перетин, то в нас буде скінченне число $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$. Тобто будуть W_{α_i}. Отримаємо, що $\bigcap W_{\alpha_i} = \prod\limits_{\substack{\alpha \in I \\ \text{на } \alpha_i,\, i=\overline{1,k} \text{ стоїть } U_{\alpha_i}}} X_\alpha \overset{\text{позн.}}{=} R$. Отримали елемент $R \in \mathcal{B}$, бо там виконані обмеження. Отже, $U = \bigcup R, R \in \mathcal{B}$, тобто $U \in \tau_{\mathcal{B}}$.
$\tau_{\mathcal{B}} \supset \tau_{\mathcal{S}}$. Дійсно, зауважимо, що $\prod\limits_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathrm{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ при $U_\alpha \neq X_\alpha$ лише при скінченній кількості. Із даного обмеження випливатиме, що перетин тут скінченний.

Remark 1.11.11 Box topology та product topology мають однаковий сенс при скінченній сім'ї топологічних просторів.

1.12 Фактортопологія

Тут є куча варіантів, як це визначати, тому розглянемо всі.

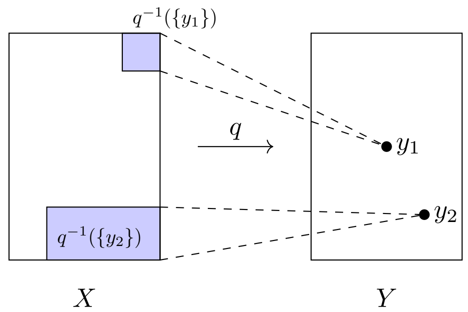
Definition 1.12.1 Задано (X, τ) – топологічний простір та $q\colon X \to Y$ – сюр'єктивне відображення. **Фактортопологію на** Y визначимо таким чином:

$$U \subset Y \text{ – відкрита на } Y \iff q^{-1}U \text{ – відкрита на } X$$

Позначення: $\tau/_\sim$ (скоро це позначення буде виправданим).

Remark 1.12.2 $\tau/_\sim$ дійсно задає топологію та $(Y, \tau_\sim)$ утворює топологічний простір. Це випливає з властивостей прообразів.

Оскільки q сюр'єктивне відображення, то для кожної $y \in Y$ знайдеться $x \in X$, щоб $y = q(x)$. По-інакшому це можна сказати як $q^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.



Також в силу сюр'єктивності ми маємо розбиття множини X. Тобто звідси отримали $X = \bigsqcup\limits_{y \in Y} q^{-1}(\{y\})$.

Навпаки, нехай множина X має розбиття, тобто $X = \bigsqcup\limits_{y} S_y$. Тоді можна визначити відображення q таким чином: якщо $y \in S_y$, то тоді $S_y \ni x \overset{q}{\mapsto} y$, причому це задає сюр'єктивне відображення.

Нехай знову є розбиття множини X, тоді вона має відношення еквівалентності $x_1 \sim x_2 \iff x_1, x_2$ лежать в одній множині розбиття.
А якщо є відношення еквівалентності на X, то зрозуміло, що відбувається розбиття класами еквівалентності $[x]$.

Коротше, у нас виникла така діаграма:

$$\begin{tikzcd}
q\colon X \to Y \text{ – сюр'єктивне} \arrow[r, bend left] & \text{розбиття } X \text{ по індексу } Y \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & \text{відношення еквівалентності по індексу } Y \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

Мораль така: ми можемо трьома різними способами задати фактортопологію: або через довільну сюр'єкцію, або через розбиття (досить рідко), або через відношення еквівалентності. Запишу інше означення:

Definition 1.12.3 Задано (X, τ) – топологічний простір та $\sim$ – відношення еквівалентності на X. **Факторторпологію на** $X/_\sim$ визначимо таким чином:

$$U \subset X/_\sim \text{ – відкрита на } X/_\sim \iff \pi^{-1}(U) \text{ – відкрита на } X,$$

де $\pi\colon X \to X/_\sim$ – факторвідображення (яке є сюр'єктивним).

Remark 1.12.4 Із означення випливає, що $\pi\colon X \to X/_\sim$ – неперервне.

Proposition 1.12.5 Задано (X, τ) – топологічний простір та $\sim$ – відношення еквівалентності на X.
$V \subset X/_\sim$ – замкнена на $X/_\sim \iff \pi^{-1}(V)$ – замкнена на X.
Вправа: довести.

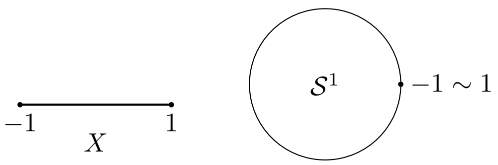
Proposition 1.12.6 Задано (X, τ) – топологічний простір та $\sim$ – відношення еквівалентності на X.
Також нехай (Y, σ) – інший топологічний простір та відображення $f\colon X/_\sim \to Y$.
f – неперервне $\iff f \circ \pi$ – неперервне.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *випливає з того, що f, π одночасно неперервні.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $f \circ \pi$ – неперервне. Нехай тепер U – відкрита в Y. За умовою, $(f \circ \pi)^{-1}(U)$ відкрита на X, але тоді $\pi^{-1} f^{-1}(U)$ відкрита на X. Значить, за означенням, $f^{-1}(U)$ – відкрита на $X/_\sim$. ■

Суть фактортопології полягає в тому, щоб створити новий топологічний простір шляхом "склеювання" точок. Не прикладі це стане зараз ясніше.

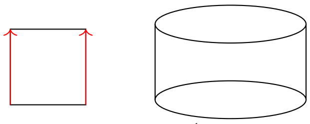
Example 1.12.7 Розглянемо відрізок $X = [-1, 1]$. Ми можемо задати на ній відношення еквівалентності таким чином: $-1 \sim 1$. Інтуїтивно кажучи, відношення еквівалентності "склеює" точки один з одним (тобто в цьому випадку $-1, 1$ будуть склеєними). У результаті маємо отримати коло:



Тобто, інтуїтивно кажучи, $X/_\sim \cong \mathcal{S}^1$, саме гомеоморфні.

Розглянемо функцію $f\colon X/_\sim \to \mathcal{S}^1$ ось таким чином: $f([t]) = (\sin \pi t, \cos \pi t)$. Нам треба довести, що f – гомеоморфізм.
f – коректно визначене. Коректність треба тільки перевірити для $[-1], [1]$. Все ок там:
$f([1]) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0) = (\cos(-\pi), \sin(-\pi)) = f([-1])$.
f – неперервне, оскільки композиція $f \circ \pi\colon X \to \mathcal{S}^1$, що задається як $(f \circ \pi)(t) = (\sin \pi t, \cos \pi t)$, буде неперервною функцією через покоординатну неперервність.
f – бієкція (мабуть, тут все зрозуміло чому).
Оскільки X – компактний простір та $\pi\colon X \to X/_\sim$ – сюр'єкція, то тоді $X/_\sim$ має бути також компактним. Оскільки $X/_\sim$ компактний, $\mathcal{S}^1$ – гаусдорфів (TODO: доводили?) та f – неперервна бієкція, то звідси (TODO: вставити твердження) f має бути гомеоморфізмом.

Example 1.12.8 Маємо квадрат $X = [0,1]\times[0,1]$. Задамо на ній відношення еквівалентності $(0,t) \sim (1,t)$ при $t \in [0,1]$. У результаті маємо таке "склеювання" – отримали циліндр:

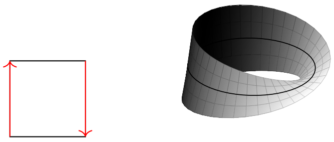


X $\qquad$ $\mathcal{S}^1 \times [0,1]$

Тобто, інтуїтивно кажучи, $X/_\sim \cong \mathcal{S}^1 \times [0,1]$.

Розглянемо функцію $f\colon X/_\sim \to \mathcal{S}^1\times[0,1]$ ось таким чином: $f([(s,t)]) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), t)$. Можна аналогічними міркуваннями довести, що це задаватиме гомеоморфізм.

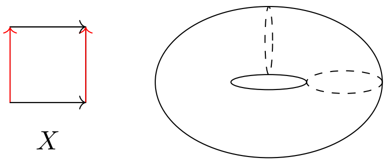
Example 1.12.9 Знову маємо квадрат $X = [0,1]\times[0,1]$. Тільки цього разу задамо інше відношення еквівалентності: $(0,t) \sim (1, 1-t)$ при $t \in [0,1]$. У результаті отримаємо так звану **стрічку Мьобіуса**.



X $\qquad$ $X/_\sim$

Цей приклад дуже специфічний, тому просто залишу ось так.

Example 1.12.10 Ще раз квадрат $X = [0,1]\times[0,1]$. Вчерговий раз інше відношення еквівалентності: $(0,t) \sim (1,t)$ при $t \in [0,1]$, а також $(s,0) \sim (s,1)$ при $s \in [0,1]$. Отримаємо тор.



X

Тобто, інтуїтивно кажучи, $X/_\sim \cong \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$.

(TODO: записати параметричне рівняння, яке задає тор).

Example 1.12.11 Задовбався вже, але знову маємо квадрат $X = [0,1]\times[0,1]$, тільки цього разу відношення еквівалентності таке: $(0,t) \sim (1,t)$ при $t \in [0,1]$, а також $(s,0) \sim (1-s,1)$ при $s \in [0,1]$. Отримаємо так звану **пляшку Кляйна**.
(TODO: вставити малюнок).

2 Компактні простори

2.1 Компактність

Definition 2.1.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.
Покриттям X назвемо сім'ю підмножин $\{U_i \mid i \in I\}$ множини X, для яких

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

Якщо множина індексів I скінченна, то покриття називається **скінченним**. Якщо всі множини в сім'ї відкриті, то покриття називається **відкритим**.

Definition 2.1.2 Задано (X, τ) – топологічний простір. Нехай $\{U_i \mid i \in I\}$ – покриття X.
Підпокриттям назвемо набір $\{U_i \mid i \in J\}$, де $J \subset I$, якщо це теж покриття.

Example 2.1.3 Зокрема множини $(n-1, n+1), n \in \mathbb{Z}$ утворюють відкрите покриття $\mathbb{R}$.

Definition 2.1.4 Задано (X, τ) – топологічний простір.
Даний простір назвемо **компактним**, якщо

$$\forall \{U_i \mid i \in I\} \text{ – відкрите} : \exists \{U_i \mid i \in J\}, J \subset I, J \text{ – скінченний індекс}$$

Тобто для будь-якого відкриттого покриття X існує скінченне підпокриття.

Example 2.1.5 $\mathbb{R}$ не є компактом.
Дійсно, оберемо відкрите покриття $\{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Якби існувало скінченне підпокриття $\{(n-1, n+1) \mid n \in J\}$, то тоді в $J \subset \mathbb{Z}$ є найбільший елемент $N \in \mathbb{Z}$. Тоді з цього випливає, що $N+1 \notin \bigcup\limits_{n \in J} (n-1, n+1)$. Але водночас $\bigcup\limits_{n \in J} (n-1, n+1) = \mathbb{R}$, тобто $N+1 \notin \mathbb{R}$ – це неможливо.
Висновок: знайшли покриття $\{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, яка не містить скінченне підпокриття.

Example 2.1.6 Недискретний топологічний простір $(X, \tau_{\text{indiscr}})$ – компактний.
Дійсно, оберемо будь-яке відкрите покриття $\{U_i \mid i \in I\}$, у нас $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = X$. Кожний $U_i = \emptyset$ або X.
Значить, існує множина $U_{i_0} = X$. Тоді $\{U_{i_0}\}$ формує скінченне підпокриття.

Example 2.1.7 Будь-який скінченний простір – компактний.
Маємо відкрите покриття $\{U_i \mid i \in I\}$, тобто $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = X$. Топологічний простір скінченний, тобто X – скінченний, тож $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Кожний $x_j \in U_{i_j}$. Тож існує скінченне підпокриття $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_j}\}$.

Example 2.1.8 Дискретний простір (X, τ_{discr}) – компактний $\iff$ це скінченний простір.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $(X, \tau_{\text{discr}}$ – компактний. Тобто для будь-якого відкритого покриття, зокрема для $\{\{x\} \mid x \in X\}$ існує скінченне підпокриття $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, звідси $X = \bigcup\limits_i \{x_i\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *див.* **Ex. 2.1.7**

Definition 2.1.9 Задано множину X та $A \subset X$.
Покриттям множини A назвемо сім'ю $\{W_i \mid i \in I\}$ підмножин X, для яких

$$A \subset \bigcup_{i \in I} W_i$$

$\{W_i \mid i \in J\}, J \subset I$ називаєтсья **підпокриттям**, якщо це теж покриття множини A.

Remark 2.1.10 Особливий випадок при $A = X$, із першим означенням збігається.

Definition 2.1.11 Задано (X, τ) – топлогічний простір та $A \subset X$.
Множина (!) A називається **компактом**, якщо

$$(A, \tau_A) \text{– компактний простір,}$$

тобто будь-яке відкрите покриття A підмножинами A має скінченне підпокриття.

Proposition 2.1.12 Задано (X, τ) – топологічний простір та $A \subset X$.
A – компактна $\iff$ будь-яке покриття A відкритими підмножинами X містить скінченне підпокриття.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – компактна, тобто (A, τ_A) – компактний простір. Нехай $\{W_i \subset X \mid i \in I\}$ – відкрите покриття множини A, тобто звідси $A \subset \bigcup_{i \in I} W_i$. Але звідси випливає, що $A \cap \bigcup_{i \in I} W_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap W_i) = A$. Отримали покриття $\{A \cap W_i \mid i \in I\}$ множини A підмножинами A. Оскільки (A, τ_A) – компактний, то звідси існує скінченне підпокриття $\{A \cap W_i \mid i \in J\}$, тобто звідси $\bigcup_{i \in J} (A \cap W_i) = A = A \cap \bigcup_{i \in J} (A \cap W_i)$.
Значить, звідси $A \subset \bigcup_{i \in J} W_i$. Тобто $\{W_i \subset X \mid i \in J\}$ – скінченне підпокриття.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: будь-яке покриття A відкритими підмножинами X містить скінченне підпокриття. Насправді, ідейно все те саме робиться. ■

Proposition 2.1.13 Властивість компактності зберігається при гомеоморфності.

Proof.
Тобто нехай існують два гомеоморфних простори $X \cong Y$ та припустимо, що X – компактний. Доведемо, що Y – компактний.
Нехай $\{U_i \mid i \in I\}$ – відкрите покриття Y. Позначимо гомеоморфізм за $f \colon X \to Y$. Зауважимо, що $\{f^{-1}(U_i) \mid i \in I\}$ – відкрите покриття множини X. Справді, $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$, а також в силу неперервності кожний $f^{-1}(U_i)$ буде відкритим. Оскільки X – компактний, то існує скінченне підпокриття $\{f^{-1}(U_i) \mid i = \overline{1,n}\}$, звідси $f^{-1}(Y) = X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)$, із цієї рівності отримаємо $Y = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Отже, знайшли скінченне підпокриття $\{U_i \mid i = \overline{1,n}\}$. ■

2.2 Компактність та підпростори

Example 2.2.1 Із курсу математичного аналізу, $[0,1]$ – компактний (лема Гайне-Бореля). Однак $(0,1) \subset [0,1]$ більше не є компактом, тому що відкрите покриття $\{(\varepsilon, 1) \mid \varepsilon > 0\}$ не містить скінченного підпокриття.

Тобто цей приклад показує, що треба додати певні обмеження, щоб підмножина була теж автоматично компактною.

Proposition 2.2.2 Задано (X, τ) – компактний простір та $A \subset X$ – замкнена. Тоді (A, τ_A) – компактний.

Proof.
Нехай $\{W_i \subset X \mid i \in I\}$ – відкрите покриття A, тобто $\bigcup_{i \in I} W_i \supset A$. Але ми знаємо, що A – замкнена, тобто $X \setminus A$ – відкрита. Зауважимо, що $(X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} W_i = X$. Тобто $\{X \setminus A\} \cup \{W_i \mid i \in I\}$ утворює відкрите покриття X. За компактністю, існує скінченне підпокриття $\{X \setminus A\} \cup \{W_i \mid i \in J\}$, тож звідси $(X \setminus A) \cup \bigcup_{j \in I} W_i = X$.
Із цього випливає, що $\bigcup_{j \in I} W_i \supset A$. Тобто знайшли скінченне підпокриття $\{W_i \subset X \mid i \in J\}$.
Висновок: A – компактна множина.

Окремо варто звернути увагу, коли із відкритого покриття $\{X \setminus A\} \cup \{W_i \mid i \in I\}$ може бути скінченне підпокриття $\{W_i \mid i \in K\}$. Тоді звідси $\bigcup_{i \in K} W_i = X \supset A$ – автоматично доводиться. ■

Коротше, будь-яка замкнена множина – компактна. Але не кожна компактна множина буде замкненою.

Example 2.2.3 Зокрема маємо $(X, \tau_{\text{indiscr}})$ – недискретний простір, оберемо $Y \subsetneq X$, утворимо знову недискретний простір (Y, τ_Y) за **Ex. 1.10.5**.
Зауважимо, що Y – компактна множина, тому що (Y, τ_Y) – компактний простір в силу недискретності. Але Y – НЕ замкнена множина, тобто $X \setminus Y$ – НЕ відкрита множина, тому що в $(X, \tau_{\text{indiscr}})$ лише $\emptyset, X$ – відкриті.

Утім можна зробити певні зміни, аби в зворотному напрямку це спрацювалю.

Proposition 2.2.4 Задано (X, τ) – гаусдорфів (уже не компактний) простір та A – компактна множина. Тоді A – замкнена.

Proof.
Ми хочемо зараз довести, що $X \setminus A$ – відкрита множина. Значить, нехай $x \in X \setminus A$. Оберемо також будь-який $a \in A$. У силу гаусдорфовості, існують околи U_a, V_a – відповідно відкриті околи точки x, a такі, що $U_a \cap V_a = \emptyset$. Зауважимо, що $\displaystyle\bigcup_{a \in A} V_a \supset A$. Маємо $\{V_a \subset X \mid a \in A\}$ – відкрите покриття, а за компактністю A, можна знайти скінченне підпокриття $\{V_a \subset X \mid a \in B\}$.
Зафіксуємо $U = \displaystyle\bigcap_{a \in B} U_a$, який є теж відкритим (в силу скінченного перетину) та околом точки x.
Доведемо, що $U \subset X \setminus A$.
Нехай $y \in A$, тобто $y \in V_b$ при деякому $b \in B$. Але відомо, що $V_b \cap U_b = \emptyset$, а тому $b \notin U_b \implies b \notin U$.
Висновок: $X \setminus A$ – відкрита, а тому A – замкнена. ■

Corollary 2.2.5 Задано (X, τ) – компактний та гаусдорфів простір.
A – компактна $\iff$ A – замкнена.

2.3 Компактність та добуток просторів

Theorem 2.3.1 Теорема Тіхонова (скінченний варіант)
Задані (X, τ_1) та (Y, τ_2) – компактні топологічні простори. Тоді $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ – теж компактний топологічний простір.

Proof.
Отже, нехай $\{S_i \mid i \in I\}$ – відкрите покриття $X \times Y$. Для кожного $(x, y) \in X \times Y$ можна обрати $S_i \ni (x, y)$, а звідси можна обрати відкриті $U_{x,y}, W_{x,y}$ – відповідно околи точки x, y, для яких $U_{x,y} \times W_{x,y} \subset S_i$. Сім'я множин $\{U_{x,y} \times W_{x,y} \mid x \in X, y \in Y\}$ – відкрите покриття $X \times Y$, бо
$\displaystyle\bigcup_{(x,y) \in X \times Y} (U_{x,y} \times W_{x,y}) = \bigcup_{x \in X} U_{x,y} \times \bigcup_{y \in y} W_{x,y} = X \times Y.$
Тому достатньо шукати скінченне підпокриття саме для цієї сім'ї.
Фіксуємо $x \in X$ та дослідимо множину $\{x\} \times Y \cong Y$. Оскільки Y – компакт та гомеоморфізм зберігає компактність, то існує скінченне підпокриття із покриття $\{U_{x,y} \times W_{x,y} \mid x \in X, y \in Y\}$, що містить $\{x\} \times Y$. Маємо вже $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n_x} U_{x_i,y} \times W_{x_i,y} \supset \{x\} \times Y$. Позначимо $U_x = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n_x} U_{x_i,y}$, що буде теж відкритою множиною. Тоді $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n_x} U_{x_i,y} \times W_{x_i,y} \supset U_x \times Y$ (ну дійсно, кожний $U_{x_i,y} \supset U_x$).
Сім'я $\{U_x \mid x \in X\}$ буде відкритим покриттям X. Просто тому що коли фіксували $x \in X$, то ми знаходили $x \in U_x$. Оскільки X – компакт, то існує скінченне підпокриття, тож $X = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j}$.
Зокрема звідси випливає, що $X \times Y = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} (U_{x_j} \times Y) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n_{x_j}} (U_{x_i,y} \times W_{x_i,y})$. Ми знайшли скінченне підпокриття для множини $X \times Y$. Зокрема знайшли скінченне підпокриття із $\{S_i \mid i \in I\}$. ■

Remark 2.3.2 Цілком зрозуміло, що теорема Тіхонова працює, коли в нас n штук компактних топологічний просторів.

Example 2.3.3 Зокрема звідси $[0, 1]^n$ буде компактною множиною, оскільки $[0, 1]$ – компактна.

2.4 Компактність та факторпростори

Lemma 2.4.1 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори та $f\colon X \to Y$ – неперервне. Якщо X – компактна, то тоді fX – компактна.

Proof.
Маємо $\{W_i \subset Y \mid i \in I\}$ – відкрите покриття fX. Візьмемо сім'ю прообразів $\{f^{-1}(W_i) \subset X \mid i \in I\}$.
Зауважимо:
$\bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(W_i) = f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i \in I} W_i\right) \supset f^{-1}f(X) = X.$
Отже, $\{f^{-1}(W_i) \subset X \mid i \in I\}$ – відкрите покриття X, але в силу компактності існує скінченне підпокриття $\{f^{-1}(W_i) \subset X \mid i \in J\}$. Залишилось показати, що $\{W_i \subset Y \mid i \in J\}$ (яке вже є скінченним) буде підпокриттям fX. І дійсно, ми маємо $X = \bigcup\limits_{i \in J} f^{-1}(W_i) = \bigcup\limits_{i \in J} W_i$. Але тоді

$fX = f\left(f^{-1} \bigcup\limits_{i \in J} W_i\right) \subset \bigcup\limits_{i \in J} W_i.$ ■

Corollary 2.4.2 Будь-який факторпростір – компактний простір.
Випливає з того, що $\pi\colon X \to X/_\sim$ – неперервне відображення.

Definition 2.4.3 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – два топологічних простори та $f\colon X \to Y$ – відображення.
f називається **відкритим**, якщо

$$\forall U \subset \text{ – відкрита в } X : fU \text{ – відкрита в } Y$$

f називається **замкненим**, якщо

$$\forall V \subset \text{ – замкнена в } X : fU \text{ – замкнена в } Y$$

Proposition 2.4.4 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – один компактний, а другий – гаусдорфів простори та $f\colon X \to Y$ – неперервне відображення. Тоді f – замкнене.

Proof.
Нехай V – замкнена на X, тоді V – компакт як множина. Значить, fV – компакт. У силу гаусдорфовості, fV – замкнена в Y. ■

Уже якось було, що неперервна бієкція не гарантує гомеоморфність між двома просторами. Але, додавши певні обмеження, можна саме так і ствердити:

Proposition 2.4.5 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – один компактний, а другий – гаусдорфів простори та $f\colon X \to Y$ – неперервна бієкція. Тоді f – гомеоморфізм.

Proof.
Нам треба лишень довести, що $f^{-1}\colon Y \to X$ буде неперервним відображенням.
Нехай V – замкнена в X та розглянемо $(f^{-1})^{-1}(V) \overset{f \text{ – бієкція}}{=} fV$. Нам уже відомо, що f – замкнене відображення, а тому fV має бути замкненою на Y. Тобто $(f^{-1})^{-1}(V)$ – замкнена на Y. ■

Example 2.4.6 Зокрема будь-які дві компактно-гаусдорфові простори будуть між собою гомеоморфними.

Proposition 2.4.7 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – один компактний, а другий – гаусдорфів простори та $f\colon X \to Y$ – неперервна сюр'єкція. Тоді $Y \cong X/_\sim$. Тут відношення еквівалентності $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$.

TODO: доробити!

3 Зв'язні простори

3.1 Зв'язність

Definition 3.1.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.
Ми назвемо простір **незв'язним**, якщо

$$\exists U, V \in \tau : U \neq \emptyset, V \neq \emptyset : X = U \sqcup V$$

У протилежному випадку ми будемо це називати **зв'язним**.

Example 3.1.2 Зокрема $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – незв'язнии, тому що існують відкриті непорожні та неперетинні $(-\infty, 0), (0, +\infty)$, які дають $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = X$.

Example 3.1.3 Простір $\mathbb{Q}$ (як підпростір $\mathbb{R}$) – незв'язний. Дійсно, нехай $U = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ та $V = (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ – два відкритих, непорожніх та неперетинних множин. Тоді $U \cap V = \mathbb{Q}$ (оскільки $\sqrt{2}$ ірраціональне).

Example 3.1.4 Будь-який (X, τ_{dicsr}) – дискретний топологічний простір – незв'язний, якщо $\#X \geq 2$. Оберемо $x \in X$, тоді $\{x\} \sqcup (X \setminus \{x\}) = X$.

Example 3.1.5 Будь-який $(X, \tau_{\text{indicsr}})$ – недискретний топологічний простір – зв'язний, якщо $X \neq \emptyset$. Розпишемо $X = U \sqcup V$, тут обидва відкриті. Але звідси вилпиває, що $U \in \{X, \emptyset\}$ та $V \in \{X, \emptyset\}$. Тобто дійсно, $U = \emptyset$ або $V = \emptyset$. Це означає, що порушується означення незв'язності.

Lemma 3.1.6 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – топологічних простори та $f \colon X \to Y$ – відображення. Нехай U, V – такі відкриті підмножини, що $U \sqcup V = X$.
f – неперервне $\iff f|_U,\ f|_V$ – неперервні.
Дану лему часто називають pasting lemma.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано f – неперервне. Тоді треба згадати, що $f|_U = f \circ \imath_U$ та $f|_V = f \circ \imath_V$. Вкладення вже неперервне, тобто звідси $f|_U, f|_V$ – неперервні як композиція.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $f|_U,\ f|_V$ – неперервні. Нехай W – відкрита в Y. Тоді
$f^{-1}(W) = \{x \in U \mid f(x) \in W\} \sqcup \{x \in V \mid f(x) \in W\} = (f|_U)^{-1}(W) \sqcup (f|_V)^{-1}(W)$.
За умовою, $(f|_U)^{-1}(W)$ – відкрита в U, але сама U – відкрита в X. Значить, $(f|_U)^{-1}(W)$ – відкрита в X. Аналогічним чином $(f|_V)^{-1}(W)$ – відкрита в U.
Разом отримаємо $f^{-1}(W)$ – відкрита в X. ■

Remark 3.1.7 Згідно з означенням, $\emptyset$ буде зв'язним. Бачив авторів, які не вважали дану множину ані зв'язною, ані незв'язною.

Proposition 3.1.8 Еквівалентні означення
Задано $(X, \tau), X \neq \emptyset$ – топологічний простір. Наступні еквівалентні:
1) (X, τ) – зв'язний;
2) єдині підмножини X, що є відкритими та замкненими одночасно, – це $\emptyset, X$;
3) будь-яке неперервне відображення $f \colon X \to D$, де D – дискрений простір, буде сталим.
4) будь-яке неперервне відображення $f \colon X \to \{y_1, y_2\}$, де $\{y_1, y_2\}$ – двоточковий дискретний простір, буде сталим.

Proof.
$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Дано: (X, τ) – зв'язний. Нехай U – замкнена та відкрита одночасно. Тобто $U,\ X \setminus U$ одночасно відкриті. При цьому вони неперетинні, непорожні, а тому звідси $U \sqcup (X \setminus U) = X$. У силу зв'язності єдина можлива опція – це бути $U = X$ або $U = \emptyset$.

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Дано: єдині підмножини X, що є відкритими та замкненими одночасно, – це $\emptyset, X$.
Розглянемо неперервне відображення $f \colon X \to D$, де D – дискретний. Оберемо $x \in X$, тоді $\{f(x)\}$ – відкрита й замкнена одночасно в D. У силу неперервності, $f^{-1}\{f(x)\}$ – відкрита та замкнена в X, тоді $f^{-1}\{f(x)\} = \emptyset$ або $f^{-1}\{f(x)\} = X$. Перша рівність неможлива, бо точка x там лежить. Значить, $f^{-1}\{f(x)\} = X$. Висновок: $f(y) = f(x), \forall y \in X$, тобто тут $f(x)$ грає роль константи.

$\boxed{3) \Rightarrow 4)}$ Дано: будь-яке неперервне відображення $f\colon X \to D$, де D – дискрений простір, буде сталим. Зокрема фіксуємо $D_{2 \text{ points}}$ – довільний двоточковий дискретний простір – закінчили.

$\boxed{4) \Rightarrow 1)}$ Дано: будь-яке неперервне відображення $f\colon X \to \{y_1, y_2\}$, де $\{y_1, y_2\}$ – двоточковий дискретний простір, буде сталим. Нехай U, V – відкриті підмножини так, щоб $U \sqcup V = X$. Визначимо відображення $g\colon X \to \{y_1, y_2\}$, що задано як $g(x) = \begin{cases} y_1, & x \in U \\ y_2, & x \in V \end{cases}$. Тоді $g|_U, g|_V$ неперервні (легко ручками перевірити), а звідси g – неперервне за лемою. Але оскільки g задовольняє умові 'дано', то звідси g приймає стале значення. Тобто $U = X, V = \emptyset$ або навпаки. ■

Lemma 3.1.9 Задано (X, τ) – топологічний простір. Нехай $A, B \subset X$ такі, що $A \subset B \subset \mathrm{Cl}(A)$. Також нехай A – зв'язна. Тоді B – також зв'язна.

Proof.
Нехай $f\colon B \to D$ – неперервне відображення до дискретного простору. Тоді $f|_A\colon A \to D$ також неперервне (композиція неперервних, бо $f|_A = f \circ \imath_A$). Тоді це стала функція, оскільки A – з'єднана область за умовою. Скажімо, $f|_A(a) = d, \forall a \in A$. Тепер, d та f – обидва неперервні функції з B в D (який є гаусдорфовим). Зауважимо, що A – щільна на B в силу $A \subset B \subset \mathrm{Cl}(A)$. Дійсно, якщо розглянути підпростір (B, τ_B), то B – замкнена та містить A, а тому $B \supset \mathrm{Cl}(A)$; отже, $B = \mathrm{Cl}(A)$. На щільній множині A виконано $f(a) = a$, а тому $f(b) = d$ на всій множині B.
Отже, $f\colon B \to D$ теж стале, тобто B – зв'язна. ■

Lemma 3.1.10 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – топологічні простори та $f\colon X \to Y$ – неперервне. Відомо, що X – зв'язний. Тоді $f(X)$ – також зв'язний.

Proof.
Спочатку розглянемо випадок, коли f – сюр'єктивне. У цьому випадку $f(X) = Y$. Маємо $U \sqcup V = Y$, де U, V – відкриті в Y, тоді $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ – неперетинні та відкриті в X, при цьому $f^{-1}(Y) = X = f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V)$. Оскільки X – зв'язний, то (наприклад) $f^{-1}(U) = \emptyset$, а за сюр'єктивністю, $U = \emptyset$.
Якщо $f\colon X \to Y$ – довільне, то тоді $g\colon X \to f(X)$, де $g \equiv f$, – сюр'єктивне, і там закінчили. ■

Proposition 3.1.11 Задані (X, τ_1) та (Y, τ_2) – два зв'язних топологічних простори. Тоді $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ – також зв'язний.

Proof.
Розглянемо неперервне відображення $f\colon X \times Y \to D$, де D – дискретний простір. Оберемо $(x, y), (x', y') \in X \times Y$. Зауважимо, що $\{x\} \times Y \cong Y$, тож звідси $\{x\} \times Y$ має бути зв'язною також. Значить, $f|_{\{x\} \times Y}$ буде сталою. Зокрема звідси $f(x, y) = f(x, y')$.
Аналогічним чином $X \times \{y'\} \cong X$, а там через зв'язність отримаємо $f(x', y') = f(x, y')$.
Разом отримали $f(x, y) = f(x', y')$, тобто f – стала. Отже, $X \times Y$ – зв'язна. ■

Example 3.1.12 Із курсу матана, $[a, b]$ – зв'язний. Але за твердженням, звідси випливає, що всі куби $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ будуть зв'язними в $\mathbb{R}^n$.

Lemma 3.1.13 Задано (X, τ) – топологічний простір та $(A_i, i \in I)$ – покриття X, причому всі A_i – зв'язні, та всі вони перетинаються між собою. Тоді X – зв'язна.

Proof.
Нехай $f\colon X \to D$ – неперервне відображення, де D – дискретний простір. Тоді неперервним буде $f|_{A_i}\colon A_i \to D$, але в силу зв'язності A_i, ми маємо $f|_{A_i} \equiv d_i$. Оберемо інше звуження $f|_{A_j}\colon A_j \to D$, тоді аналогічно $f|_{A_j} \equiv d_j$. Проте $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, тож звідси $d_i = d_j$. Таким чином, стала не залежить від $i \in I$, а тому f буде сталою на X. Отже, X – зв'язна. ■

3.2 Лінійна зв'язність

Definition 3.2.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.
Шляхом в X називають неперервне відображення $\gamma\colon [0, 1] \to X$. Ми називаємо γ **шляхом від** x **до** y, якщо $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.
Простір $X \neq \emptyset$ називається **лінійно зв'язним**, якщо

$$\forall x, y \in X : \exists \gamma \text{ – шлях від } x \text{ до } y$$

Lemma 3.2.2 Задано (X, τ) – топологічний простір. Нехай X – лінійно зв'язний. Тоді X – (просто) зв'язний.

Proof.
Нехай $f \colon X \to D$ – неперервне, де D – дискретний простір. Оберемо $x, y \in X$, тоді, за умовою, існує шлях $\gamma \colon [0,1] \to X$, причому $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Звідси відображення $f \circ \gamma \colon [0,1] \to D$ – також неперервне. Оскільки $[0,1]$ – зв'язна, то тоді $f \circ \gamma$ – стале відображення, зокрема $f(x) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(y)$. Отже, f – також стале, а тому X – зв'язний. $\blacksquare$

Example 3.2.3 Підмножина $X \subset \mathbb{R}^n$ називається **випуклою**, якщо $\forall x, y \in X, \forall t \in [0,1] : (1-t)x + ty \in X$. Тоді кожна випукла підмножина $\mathbb{R}^n$ буде лінійно зв'язною, оскільки $t \mapsto (1-t)x + ty$ визначає довільний шлях з x в y.
Отже, всі випуклі підмножини $\mathbb{R}^n$ – зв'язні.

Нехай задані шлях γ з x в y та шлях δ з y в z. Ми можемо їх об'єднати ці шляхи таким чином: визначаємо $\gamma * \delta \colon [0,1] \to X$, який задається ось так:

$$(\gamma * \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ \delta(2t-1), & t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Задане відображення досі залишається шляхом, тільки тепер з x в z.

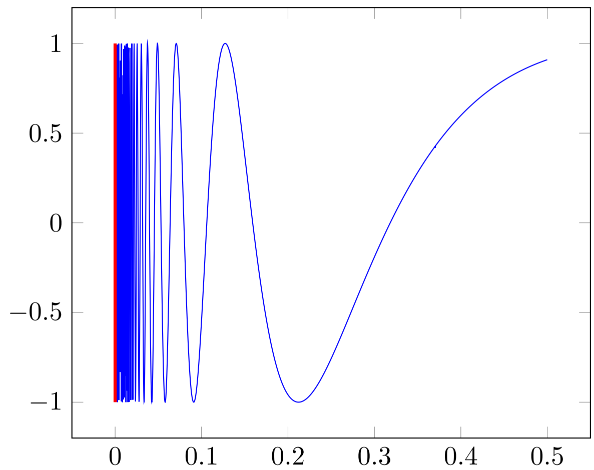
Example 3.2.4 Простір $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ буде лінійно зв'язним при $n \geq 2$.
Нехай $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Якщо пряма між x, y не проходить через 0, то тоді дана пряма визначає шлях з x в y.
Інакше ми можемо обрати точку $z \in X$, що не лежить на цій прямій (це можливо в силу умови $n \geq 2$). Пряма через x, z не проходить через 0, тому це – шлях з x в z. Аналогічно пряма через z, y не проходить через 0, тому це – шлях з z в y. Отже, можна об'єднати два шляхи – отримаємо шлях з x в y.

Lemma 3.2.5 Задано $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – топологічні простори та $f \colon X \to Y$ – неперервне. Тоді $\Gamma_f \cong X$, де $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ – графік функції (для дійснозначних функцій це був би справді графік).

Proof.
Визначимо такі функції:
$p \colon \Gamma_f \to X \qquad (x, y) \mapsto x$
$q \colon X \to \Gamma_f \qquad x \mapsto (x, f(x))$.
Зауважимо, що $p \circ q = \mathrm{id}_X$ та $q \circ p = \mathrm{id}_{\Gamma_f}$. Тож вони взаємно оборотні. Залишилося довести, що ці два відображення – неперервні.
Для p маємо $p = \mathrm{pr} \circ \imath$, де $\mathrm{pr} \colon X \times Y \to X$, $\imath \colon \Gamma_f \to X \times Y$. Оскільки ці два відображення неперервні, то композиція теж буде неперервною.
Для q ми розглянемо $\imath \circ q \colon X \to X \times Y$. Зауважимо, що $(\imath \circ q)(x) = (x, f(x)) = (\mathrm{id}_X(x), f(x))$ – обидві функції неперервні, тож $\imath \circ q$ – неперервне. За **Prp. 1.10.13**, q – неперервне. $\blacksquare$

Remark 3.2.6 Тепер, нарешті, можемо поговорити про те, що зворотне твердження не працює. Тобто зі зв'язності не випливає лінійна зв'язність в загальному випадку.

Example 3.2.7 Розглянемо підмножини $L = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$ та $C = \left\{ \left(x, \sin \dfrac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \right\}$.
Будемо зосереджені підпросторі $X = L \cup C$, яка називається **сіносуїдальною кривою тополога**.



I. X – *зв'язна.*
Спочатку зауважимо, що $C \cong (0,+\infty)$ за **Lm. 3.2.5** та $(0,+\infty)$ – зв'язна, тож сама C буде також зв'язною. Залишилося довести, що $\mathrm{Cl}(C) \supset X \supset C$ – і тоді вже X буде зв'язною за **Lm. 3.1.9**.
Нехай $(0,y) \in L$, тут $|y| \leq 1$. Оберемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді існує елемент $z > \dfrac{1}{\varepsilon}$, для якого $y = \sin z$. Покладемо $x = \dfrac{1}{z}$, тоді отримаємо $(x,y) \in C$, при цьому $\|(0,y),(x,y)\| = |x| < \varepsilon$. Таким чином, $(0,y) \in \mathrm{Cl}(C)$, що дає нам вкладення $\mathrm{Cl}(C) \supset L$. Проте оскільки $\mathrm{Cl}(C) \supset C$, то з цих двох вкладень випливає $\mathrm{Cl}(C) \supset X$. (насправді кажучи, $X = \mathrm{Cl}(C)$).

II. X – *не лінійно зв'язна.*
!Припустимо, що існує шлях γ із точки $(0,0)$ до точки $\left(\dfrac{1}{\pi}, 0\right)$. Маємо $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, де $t \in [0,1]$. Оскільки γ – неперервний, то γ_1, γ_2 – також неперервні. Але $[0,1]$ – компакт, тож γ_1, γ_2 – рівномірно неперервні, тож $\exists \delta > 0 : \forall t, t' \in [0,1] : |t - t'| < \delta \implies |\gamma_2(t) - \gamma_2(t')| < 2$.
Оберемо таке $N \in \mathbb{N}$, щоб $\dfrac{1}{N} < \delta$. Далі відрізок $[0,1]$ розіб'ємо на підвідрізки довжини $\dfrac{1}{N}$ рівномірним чином. Тобто $\left[0, \dfrac{1}{N}\right], \left[\dfrac{1}{N}, \dfrac{2}{N}\right], \dots, \left[\dfrac{N-1}{N}, 1\right]$. Оскільки γ_1 – шлях від 0 до $\dfrac{1}{\pi}$, то за теоремою Коші про середнє, існують $t_k \in [0,1]$, для яких $\gamma_1(t_k) = \dfrac{1}{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi}$. Тут в нас $k \geq 1$.
Оскільки кількість t_k нескінченна, то має знайтися інтервал $\left[\dfrac{i-1}{N}, \dfrac{i}{N}\right]$, який містить хоча б дві точки формату t_k. Тобто тут будуть точки $t_k, t_m \in \left[\dfrac{i-1}{N}, \dfrac{i}{n}\right]$, де припустимо $1 \leq k < m$. Звідси випливає, що $\dfrac{1}{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi} > \dfrac{1}{\left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi} > \dfrac{1}{\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi}$. Знову за теоремою Коші про середнє, знайдеться точка t між t_k та t_m, для якої $\gamma_1(t) = \dfrac{1}{\left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi}$. Але тоді
$|\gamma_2(t_k) - \gamma_2(t)| = |1 - (-1)| = 2$, при цьому $|t_k - t| \leq \dfrac{1}{N} < \delta$ – суперечність!

Тим не менш, існує критерій, для якого зв'язність та лінійна зв'язність – це однакові речі, просто треба додати дещо.

Proposition 3.2.8 Задано (X, τ) – топологічний простір.

$$X \text{ – лінійно зв'язний} \iff \begin{cases} X \text{ – зв'язний} \\ \text{кожна точка } X \text{ має хоча б один окіл, який є лінійно зв'язний} \end{cases}.$$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *Уже доводили, що із лінійної зв'язності випливає зв'язність. Друга умова виконується, бо*

кожна точка $x \in X$ містить окіл X, який є лінійно зв'язним.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\begin{cases} X \text{ – зв'язний} \\ \text{кожна точка } X \text{ має хоча б один окіл, який є зв'язний шляхом} \end{cases}$.

Зафіксуємо $x \in X$. Розглянемо множину $U = \{y \in X : \text{існує шлях між } x \text{ та } y\}$. Хочемо довести, що U є відкритою та замкненою одночасно: таким чином, оскільки X зв'язна, то $U = X$ (бо $x \in U$), а це буде означати, що між двома довільними точками знайдеться шлях; а тому X буде лінійно зв'язним.

Отже, нехай $y \in U$, тобто існує шлях між x та y. За умовою, для точки y можна взяти окіл W_y, який є лінійно зв'язним. Тоді для кожної точки $w \in W_y$ існує шлях між y та w_y. Якщо склеїти два шляхи, отримаємо шлях між x та w. Тож $w \in W_y$. Таким чином, $W_y \subset U \implies U$ – відкрита.

Тепер нехай $y \in X \setminus U$. За умовою, для точки y можна взяти окіл W_y, який є лінійно зв'язним. Значить, $W_y \subset X \setminus U$. Якщо припустити, що це не так, то знайдеться точка $w \in W_y \cap U$; значить, існує шлях між x, w та шлях між w, y – отримаємо шлях між x, y, але тоді $y \in U$ – суперечить умові. Отже, $X \setminus U$ – відкрита, тобто U – замкнена. ■

Lemma 3.2.9 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – топологічні простори та $f : X \to Y$ – неперервне. Відомо, що X – лінійно зв'язний. Тоді $f(X)$ – також лінійно зв'язний.

Proof.
Нехай $y, y' \in f(X)$. Тоді $y = f(x),\ y' = f(x')$ для $x, x' \in X$. Оскільки X – лінійно зв'язний, то існує шлях $\gamma : [0,1] \to X$ між x, x' в просторі X. Тоді $f \circ \gamma : [0,1] \to Y$ – шлях між y, y' в просторі Y. ■

Proposition 3.2.10 Задані (X, τ_1) та (Y, τ_2) – два лінійно зв'язних топологічних простори. Тоді $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ – також лінійно зв'язний.

Proof.
Нехай $(x, y), (x', y') \in X \times Y$. Оскільки X, Y – лінійно зв'язні, то існують шляхи: γ_1 між x, x' в X; γ_2 між y, y' в Y. Тож $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0,1] \to X \times Y$ задає шлях між $(x, y), (x', y')$ уже в $X \times Y$. ■

3.3 Компоненти зв'язності та лінійної зв'язності

Задано (X, τ) – непорожній топологічний простір. Задамо **відношення зв'язності**:

$$x \sim y \iff \exists C \subset X, C \text{ – зв'язна} : x, y \in C$$

Lemma 3.3.1 Відношення зв'язності задає відношення еквівалентності.

Proof.
I. Рефлексивність. Беремо $\{x\} \subset X$, що є зв'язною, тоді $x, x \in \{x\}$, тобто $x \sim x$.
II. Симетричність. Миттєво видно з означення.
III. Транзитивність. Маємо $x \sim y, y \sim z$, тобто існують множини $C, D \subset X$, що є зв'язними та $x, y \in C,\ y, z \in D$. Зауважимо, що $C \cup D \subset X$ буде також зв'язною, причому $x, z \in C \cup D$. Отже, $x \sim z$. ■

Клас еквівалентності називають **компонентом зв'язності** X.

Proposition 3.3.2 Задано (X, τ) – топологічний простір та відношення зв'язності. Тоді:
1) кожний компонент зв'язності множини X – зв'язний;
2) кожний компонент зв'язності множини X – максимальний серед інших зв'язних підпросторів;
3) найбільший зв'язний підпростір X – компонент зв'язності.
Отже, компоненти зв'язності топологічного простору – найбільші зв'язні підпростори.

Proof.
Доведемо кожний пункт окремо.

1) Нехай C – компонент зв'язності X. Оскільки це клас еквівалентності, то $C = [x]$. Оберемо довільний $y \in C$, тоді $x \sim y$, тобто існує зв'язна підмножина $D_y \subset X$, для якої $x, y \in D_y$. Зауважимо, що для всіх $y \in C$ ми маємо $D_y \subset C$, оскільки для кожного $z \in D_y$ ми маємо $z \sim x$, тобто $z \in C$. Значить, $C = \bigcup\limits_{y \in C} D_y$. Всі D_y зв'язні, тож об'єднання буде також зв'язним.

2) Нехай C – компонент зв'язності X.
Припустимо, що існує $D \subset X$ – такий зв'язний підпростір, що $D \supset C$. Тобто існує ще більша множина. Маємо $C = [x]$. Зауважимо, що $D \subset C$, адже при $z \in D$ маємо $x \in C \subset D$, тобто $x \sim z$ (за означенням $\sim$). Тобто $z \in C$. Таким чином, $D = C$.

3) Нехай C – найбільший зв'язний підпростір X. У нас точно $C \neq \emptyset$, тож оберемо точку $x \in C$. Для кожного $y \in C$ ми маємо $x \sim y$, бо $C \ni x, y$ та є зв'язним. Значить, $C \subset [x]$. Із іншого боку, $[x]$ – зв'язний за 1), тоді за максимальністю C, маємо $C = [x]$.

Усі пункти доведені. ■

Proposition 3.3.3 Задано (X, τ) – топологічний простір.
X – зв'язний $\iff$ X містить лише один компонент зв'язності.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: X – зв'язний. Тоді дана множина є компонентом зв'язності X. Дійсно, $X \subset X, X$ – зв'язна та $x, y \in X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: X має лише один компонент зв'язності. Даний компонент зв'язності дорівнює X. Кожний компонент зв'язності – зв'язний, тобто X – зв'язний. ■

Proposition 3.3.4 Задано (X, τ) – топологічний простір. Тоді кожний компонент зв'язності – замкнена множина.

Proof.
Нехай C – компонент зв'язності X. За **Lm. 3.1.9**, маємо $\mathrm{Cl}(C)$ – зв'язна множина та $\mathrm{Cl}(C) \supset C$. Оскільки C – максимальна зв'язна множина, то звідси $C = \mathrm{Cl}(C)$, що гарантує замкненість. ■

Example 3.3.5 Компонентами зв'язності $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ будуть $(-\infty, 0)$ та $(0, +\infty)$.

Definition 3.3.6 Задано (X, τ) – топологічний простір.
Простір називається **цілком незв'язним**, якщо

кожний компонент зв'язності – одноточкова множина.

Еквівалентно кажучи, якщо кожний зв'язний підпростір має рівно один елемент.

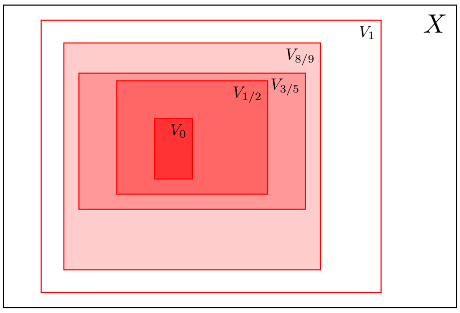
Example 3.3.7 Ми знаємо, що дискретний простір – зв'язний, тільки якщо це простір з однієї точки. Оскільки кожний підпростір дискретного простору – дискретний, то єдині зв'язні підпростори – ці, що з одним елементом. Отже, дискретний простір – цілком незв'язний.

Example 3.3.8 $\mathbb{Q}$ – цілком незв'язна множина (яка не є дискретною, бо $\{0\}$ не відкрита).
Нехай $x, y \in \mathbb{Q}$ при $x \neq y$, тоді звідси $x \not\sim y$. Дійсно, ми можемо обрати ірраціональне число $u \in \mathbb{R}$ між x, y, а потім якщо $C \subset \mathbb{Q}$ містить x, y, ми матимемо неперетинні непорожні відкриті підмножини $(-\infty, u) \cap C$ та $C \cap (u, +\infty)$, об'єднання якого дає C. Тоді C – незв'язна.

4 Лема Урисона та теорема Тітце

4.1 Корисні леми

Lemma 4.1.1 Задано (X, τ) – топологічний простір. Для всіх $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ задамо відкриті множини $V_r \subset X$, для яких виконується $\mathrm{Cl}(V_r) \subset V_{r'}$ при $r < r'$. Тоді існує неперервна функція $f \colon X \to [0,1]$, для якої $f(x) = 0, x \in V_0$ та $f(x) = 1, x \notin V_1$.



Схематична картина умови $\mathrm{Cl}(V_r) \subset V_{r'}$ при $r < r'$.

Proof.

Визначимо функцію $f \colon X \to [0,1]$ ось таким чином: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin V_1 \\ \inf_{x \in V_r}\{r\}, & x \in V_1 \end{cases}$.

Зауважимо, що в нашому випадку, що при $x \in V_0$ маємо $f(x) = 0$. Дійсно, оскільки $x \in V_0$, то звідси $x \in V_r, \forall r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, найменше можливе значення – це нуль. Тож звідси $f(x) = 0$.

Для доведення неперервності ми спочатку розглянемо сім'ю $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{a \in [0,1]} \{[0,a), (a,1]\}$. Вона буде утворювати передбазу топології $[0,1]$. Це випливає з того факту, що $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup\limits_{a,b \in \mathbb{R}} \{(-\infty, a), (b, +\infty)\}$ утворює передбазу топології $\mathbb{R}$, а також з того факту, що $[0,1]$ – топологічний підпростір $\mathbb{R}$.

Нам залишилося перевірти два прообрази для кожного $a \in [0,1]$.

$f^{-1}([0,a)) = \bigcup\limits_{r<a} V_r$.

Дійсно, маємо $x \in f^{-1}([0,a)) \iff f(x) < a \iff \inf\limits_{x \in V_r}\{r\} < a \iff x \in V_r$ для деякого $r < a$.

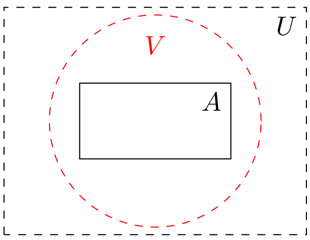
Ми отримали, що $f^{-1}([0,a))$ – відкрита як зліченне об'єднання відкритих.

$f^{-1}((a,1]) = \bigcup\limits_{r>a} (X \setminus \mathrm{Cl}(V_r))$.

Маємо $x \in f^{-1}((a,1]) \implies a < f(x) \le 1 \implies x \notin V_r$ для деякого $r > a$, але тоді $x \notin \mathrm{Cl}(V_{r'})$ для $r' < r$ (ми можемо знайти r' так, щоб $r' \in (a,r)$). Тобто $x \in X \setminus \mathrm{Cl}(V_{r'})$ при деякому $r' > a$.

Якщо $x \notin \mathrm{Cl}(V_r)$ при деякому $r > a$, то отримаємо $f(x) > a$. Адже якби $f(x) \le a$, то $x \in V_{r'}$ при $r' \le a < r$, але тоді $\mathrm{Cl}(V_{r'}) \subset V_r \subset \mathrm{Cl}(V_r)$. Таким чином, $f(x) > a \implies x \in f^{-1}((a,1])$. ■

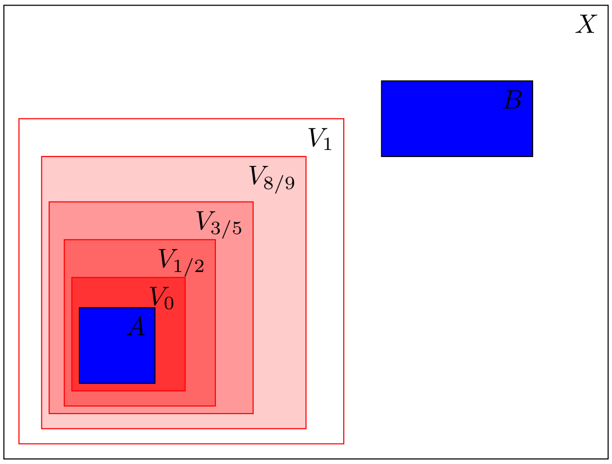
Lemma 4.1.2 Задано (X, τ) – нормальний топологічний простір. Припустимо, що A – замкнена та U – відкрита, де $A \subset U$. Тоді існує V – відкрита множина, для якої $A \subset V, \mathrm{Cl}(V) \subset U$.



Тобто між замкненою та відкритою множинах можна підібрати проміжну відкриту множину, яка містить замкнену, а замикання міститься в відкритій.

Proof.
Оберемо $A, X \setminus U$ – обидва замкнені множини. За нормальністю, існують відкриті множини V, W, що неперетинні, для яких $V \supset A, W \supset X \setminus U$. Тобто $V \supset A$ та $X \setminus W \subset U$. Із того, що V, W – неперетинні, тобто $V \cap W = \emptyset$, випливає $V \subset X \setminus W$. Маємо ланцюг $A \subset V \subset X \setminus W \subset U$. Оскільки $V \subset X \setminus W$, то тоді й $\mathrm{Cl}(V) \subset \mathrm{Cl}(X \setminus W) = X \setminus W$. Власне, звідси довели: $A \subset V, \mathrm{Cl}(V) \subset U$. ■

Theorem 4.1.3 Лема Урисона
Задано (X, τ) – нормальний топологічний простір та A, B – замкнені та неперетинні. Тоді існує неперервна функція $f\colon X \to [0,1]$, для якої $f(x) = 0, x \in A$ та $f(x) = 1, x \in B$.



Схематичний план доведення.

Proof.
Ідея доведення полягає в наступному: ми хочемо побудувати відкриті множини $V_r \subset X, r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, що задовольняє таким вимогам:
1) $A \subset V_0$;
2) $B \subset X \setminus V_1$;
3) $r < r' \implies \mathrm{Cl}(V_r) \subset V_{r'}$.
Оскільки $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ – зліченна множина, то ми маємо послідовність $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$ різних раціональних чисел. Не втрачаючи загальності, $r_1 = 1, r_2 = 0$, а всі решта $0 < r_n < 1$.
База індукції (їх будуть дві): треба побудувати $V_{r_1} = V_1$ та $V_{r_2} = V_0$. Покладемо $V_1 = X \setminus B$ – уже відкрита. Оскільки $A \subset X, V_1 \subset X$ – одна замкнена, інша відкрита, то за другою лемою, існує відкрита множина V_0, для якої $A \subset V_0$ та $\mathrm{Cl}(V_0) \subset V_1$. Уже маємо V_{r_1}, V_{r_2}, які задовольняють вимогам 1),2),3).
Для всіх інших V_{r_n} нам досить буде довести 3).
Припущення індукції: $V_{r_3}, \dots, V_{r_n}$ побудовані так, що задовольняють нашим умовам вище.
Крок індукції: побудуємо $V_{r_{n+1}}$. Із нашої послідовності $r_1, r_2, \dots, r_n$ оберемо два якнайближчих числа r_i, r_j, щоб $r_i < r_{n+1} < r_j$. Нам досить довести, що $\mathrm{Cl}(V_{r_i}) \subset V_{r_{n+1}}$, $\mathrm{Cl}(V_{r_{n+1}}) \subset V_{r_j}$.
Зауважимо, що $\mathrm{Cl}(V_{r_i})$ та V_{r_j} – відповідно замкнена та відкрита множини. Тоді за другою лемою, існує відкрита множина (яку як раз-таки позначимо й за $V_{r_{n+1}}$), для якої справджуються ці два вкладення.
МІ доведено.
Значить, за першою лемою, існує неперервна функція $f\colon X \to [0,1]$, для якої $f(x) = 0, x \in V_0$ та $f(x) = 1, x \notin V_1$. За умовами 1),2), отримаємо $f(x) = 0, x \in A$ та $f(x) = 1, x \in B$. ■

Remark 4.1.4 Справедливе й зворотне твердження. Маємо (X, τ) та A, B – довільні замкнені та неперетинні, для яких завжди існує неперервна функція $f\colon X \to [0,1]$, для якої $f(x) = 0, x \in A$ та $f(x) = 1, x \in B$. Тоді X – нормальний простір.

Proof.
Припустимо, що A, B – замкнені та неперетинні множини. Тоді існує $f\colon X \to [0,1]$, що неперервна та задовольняє іншим умовам. Зауважимо, що $A \subset f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ та $B \subset f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. Ці прообрази

відкриті в силу неперервності, а також неперетинні в силу неперетинностей цих інтервалів. Тобто ми довели означення нормальності. ■

Remark 4.1.5 Лему Урисона можна дещо узагальнити. Якщо маємо (X, τ) – нормальний простір та A, B – неперетинні замкнені, то ми можемо навіть підібрати функцію $g\colon X \to [a,b]$, для якої $f(x) = a, x \in A$ та $f(x) = b, x \in B$. Тобто не обов'язково на відрізку $[0,1]$, а на будь-якому.
Вказівка: $h\colon [0,1] \to [a,b],\ h(x) = a + (b-a)x$.

4.2 Простори з аксіомами $T_{3\frac{1}{2}}$

Пригадаємо, що ми переважно працювали з нормальними топологічними просторами (X, τ). Іншими словами, такий простір задовольняє аксіомі T_4 (або ще називають нормальним Гаусдорфовим). Щойно з'ясували, що (X, τ) задовольняє аксіомі $T_4 \iff$ існує функція $f\colon X \to [0,1]$, для якої $f(x) = 0, x \in A$ та $f(x) = 1, x \in B$.

Також в нас були регулярні простори (X, τ), тобто задовольняють аксіомі T_3. Виникає отримати таку саму еквівалентність:
(X, τ) задовольняє аксіомі $T_3 \overset{?}{\iff}$ існує функція $f\colon X \to [0,1]$, для якої $f(x) = 0, x \in A$ та $f(y) = 1$.
Насправді, виконується лише напрямок $\boxed{\Leftarrow}$.
Ми можемо добитися еквівалентності лише в просторі з новим аксіомом.

Definition 4.2.1 Задано (X, τ) – топологічний простір.
Він **задовольняє аксіомі** $T_{3\frac{1}{2}}$ (це ще називають **повним регулярним простором**), якщо

для кожної точки $x \in X$ та замкненої $x \notin A \subset X$ існує неперервна $f\colon X \to [0,1]$, для якої $f(x) = 1$ та $f|_A = 0$.

Такий простір ще називають **тіхоновським**.

Proposition 4.2.2 $T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3$.

Proof.
$T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}}$.
Нехай (X, τ) задовольняє T_4 (тобто нормальний простір). Оберемо довільну точку $x \in X$ та $A \not\ni x$ – замкнена множина. Маємо дві замкнені неперетинні множини $\{x\}, A$, тому за лемою Урисона, існує неперервна функція $f\colon X \to [0,1]$, для якої $f(x) = 1$ та $f|_A = 0$. Отже, (X, τ) задовольняє $T_{3\frac{1}{2}}$.

$T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3$.
Нехай (X, τ) задовольняє $T_{3\frac{1}{2}}$. Хочемо довести, що (X, τ) буде регулярним. Оберемо $x \in X$ та замкнену множину $A \not\ni x$. За умовою, існує неперервна функція $f\colon X \to [0,1]$, для якої $f(x) = 1$ та $f|_A = 0$. Аналогічно (як в зауваженні вище) маємо $A \subset f^{-1}\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right)\right) \overset{\text{позн.}}{=} U$ та $\{x\} \subset f^{-1}\left(\left(\dfrac{1}{2}, 1\right]\right) \overset{\text{позн.}}{=} V$. Знайшли неперетинні відкриті множини $U \supset A, V \supset \{x\}$. ■

4.3 Функціональна збіжність

Definition 4.3.1 Задані $(X, \tau), (Y, \tilde{\tau})$ – топологічні простори та $\{f_n, n \ge 1\},\ f_n\colon X \to Y$ – функціональна послідовність.
Послідовність $\{f_n\}$ **збігається поточково** до функції $f\colon X \to Y$, якщо

$$\forall x \in X : \{f_n(x)\} \subset Y \text{ збігається до } f(x).$$

Remark 4.3.2 Якщо $f_n \to f$ поточково та $f_n\colon X \to Y$ – неперервні, то не обов'язково $f\colon X \to Y$ буде неперервною. Тому для нас поточкова збіжність – проблематичне означення.
Контрприклад дивіться в мат. аналізі II.

Definition 4.3.3 Задані $(X, \tau), (Y, \rho)$ – топологічний та метричний простори та $\{f_n, n \ge 1\},\ f_n\colon X \to Y$ – функціональна послідовність.
Послідовність $\{f_n\}$ **збігається рівномірно** до функції $f\colon X \to Y$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N : \forall x \in X : \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Proposition 4.3.4 Задані $(X, \tau), (Y, \rho)$ – топологічний та метричний простори. Відомо, що $\{f_n\},\ f_n \colon X \to Y$ – збіжна рівномірно. Тоді $\{f_n\}$ – збіжна поточково.

Proof.
Нехай $x \in X$, також нехай $B(f(x), \varepsilon)$ – відкритий окіл $f(x)$. Тоді за нашим $\varepsilon > 0$ (в силу рівномірної збіжності) $\exists N : \forall n \geq N : \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, тобто звідси $f_n(x) \in B(f(x), \varepsilon)$. ■

Remark 4.3.5 Зворотне твердження не працює.
Контрприклад дивіться в мат. аналізі II.

Мабуть, перед важливою теоремою я наведу еквівалентне означення неперервності відображення $f \colon X \to Y$, коли саме Y – метричний та X – топологічний. Цього робити мені було не обов'язково, але це для мого власного сприйняття.

Proposition 4.3.6 Нехай $(X, \tau),\ (Y, \rho)$ – топологічний та метричний простори та $f \colon X \to Y$.
f – неперервний в точці $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists U_\varepsilon$ – окіл точки x_0: $\forall x \in U_\varepsilon : \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: f – неперервний в точці x_0. Нехай $\varepsilon > 0$. Зафіксуємо $B(f(x_0), \varepsilon)$ – відкрита куля. За означенням неперервності в точці (із топології), існує U_ε окіл точки x_0 так, що $f(U_\varepsilon) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. Зокрема якщо $x \in U_\varepsilon$, то звідси $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\varepsilon > 0 : \exists U_\varepsilon$ – окіл точки $x_0 : \forall x \in U_\varepsilon : \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Нехай V – окіл точки $f(x_0)$, тоді існує відкрита куля $B(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. Те, що нам дано, означає, що $\forall x \in U_\varepsilon : f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$. Тобто маємо ланцюг $f(U_\varepsilon) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. Отже, f – неперервний в точці x_0. ■

Theorem 4.3.7 Задані $(X, \tau), (Y, \rho)$ – топологічний та метричний простори. Відомо, що послідовність $\{f_n\},\ f_n \colon X \to Y$ – збіжна рівномірно до f та всі f_n – неперервні. Тоді f – неперервне.

Proof.
Нехай $\varepsilon > 0$. За умовою, рівномірної збіжності, $\exists N : \rho(f_N(x), f(x)) < \varepsilon$, причому $\forall x \in X$. Також саме f_N неперервне, тому $\exists U_N$ – окіл точки x_0 так, що $\forall x \in U_N : \rho(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon$. Тоді
$\rho(f(x), f(x_0)) \leq \rho(f(x), f_N(x)) + \rho(f_N(x), f_N(x_0)) + \rho(f_N(x_0), f(x_0)) < 3\varepsilon$ – виконано $\forall x \in U_N$.
Отже, f – неперервний в будь-якій точці $x_0 \in X$. ■

4.4 Теорема Тітце

Lemma 4.4.1 Задано (X, τ) – нормальний простір, $A \subset X$ – замкнена множина та $f \colon A \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, причому $\exists C > 0 : \forall x \in A : |f(x)| \leq C$. Тоді існує неперервна функція $g \colon X \to \mathbb{R}$, для якої $\forall x \in X : |g(x)| \leq \dfrac{1}{3}C$ та $\forall x \in A : |f(x) - g(x)| \leq \dfrac{2}{3}C$.

Proof.
Розглянемо прообрази $Y = f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{3}C, C\right]\right)$ та $Z = f^{-1}\left(\left[-C, -\dfrac{1}{3}C\right]\right)$. Обидві множини Y, Z – замкнені, оскільки в прообраз (неперервної функції) передаємо замкнені множини в $\mathbb{R}$. Також оскільки ці відрізки неперетинні, то Y, Z також неперетинні. Значить, за лемою Урисона (трошки в загальній формі) (TODO: вставити), існує функція $g \colon X \to \left[-\dfrac{1}{3}C, \dfrac{1}{3}C\right]$, де $g|_Y = \dfrac{1}{3}C$ та $g|_Z = -\dfrac{1}{3}C$.
Зважаючи на область значень, маємо $|g(x)| \leq \dfrac{1}{3}C$.
Залишилося довести, що $|f(x) - g(x)| \leq \dfrac{2}{3}C$. Розглянемо три випадки:
$x \in Y$, тоді $g(x) = \dfrac{1}{3}C$ та $\dfrac{1}{3}C \leq f(x) \leq C$, тож звідси $0 \leq f(x) - g(x) \leq \dfrac{2}{3}C$;
$x \in Z$, тоді $g(x) = -\dfrac{1}{3}C$ та $-C \leq f(x) \leq -\dfrac{1}{3}C$, тож звідси $-\dfrac{2}{3}C \leq f(x) - g(x) \leq 0$;
$x \notin Y \sqcup Z$, тоді $|f(x)| \leq \dfrac{1}{3}C$ та $|g(x)| \leq \dfrac{1}{3}C$, тож за нерівністю трикутника $|f(x) - g(x)| \leq \dfrac{2}{3}C$. ■

Theorem 4.4.2 Теорема Тітце
Задано (X, τ) – нормальний простір, $A \subset X$ – замкнена множина та $f \colon A \to [a, b]$ – неперервна функція. Тоді існує неперервна функція $\overline{f} \colon X \to [a, b]$ – розширення f, тобто $\overline{f}|_A = f$.

Proof.
За умовою, функція f повертає значення відрізка $[a,b]$, тому маємо $\forall x \in A : |f(x)| \leq C$. Ми стверджуємо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує неперервна функція $g_n \colon X \to \mathbb{R}$, що задовольняє таким умовам:

1) $\forall x \in X : |g_n(x)| \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} C$;

2) $\forall x \in A : \left| f(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k(x) \right| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n} C$.

База індукції: при $n = 1$ така функція g_1 існує за попередньою лемою.
Припущення індукції: уже побудовані функції $g_1, \dots, g_n$, що задовольняють вимогам вище.
Крок індукції: позначмио функцію $\varphi(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k(x)$. Маємо функцію $\varphi \colon A \to \mathbb{R}$, яка неперервна (як сума неперервних) та обмежена ось так: $\forall x \in A : |\varphi(x)| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n} C$. Звідси за лемою вище існує функція $g_{n+1} \colon X \to \mathbb{R}$, що неперервна та задовольняє оцінкам $|g_{n+1}(x)| \leq \dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n} C\right]$ та $|\varphi(x) - g_{n+1}(x)| = \left| f(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} g_k(x) \right| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} C$.
МІ доведено.

Тепер визначимо функцію $\overline{f}_\infty \colon X \to \mathbb{R}$ ось таким чином: $\overline{f}_\infty(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$. Дана функція визначена коректно (тобто ряд при кожному $x \in X$ збіжний в силу оцінки $|g_n(x)| \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} C$; навіть рівномірно збіжний ряд за мажорантою Ваєрштраса).

Доведемо, що дана функція буде неперервною. Для цього позначимо $\overline{f}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k(x)$; ці функції є неперервними як сума неперервних. Далі зазначимо, що $\overline{f}_n$ збігається рівномірно до $\overline{f}_\infty$ в силу рівномірної збіжності ряду. Отже, $\overline{f}_\infty$ буде точно неперервною.
Причому зазначимо, що $\forall x \in A : \overline{f}_\infty(x) = f(x)$. Справді, маємо оцінку:

$$\forall x \in A : \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n} C \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} f(x) = \overline{f}_\infty(x).$$

Утім все ж таки ми знайшли функцію $\overline{f}_\infty \colon X \to \mathbb{R}$, а нам потрібна функція $\overline{f} \colon X \to [a,b]$. Питань нема, визначимо її ось таким чином: $\overline{f}(x) = \begin{cases} \overline{f}_\infty(x), & x \in \overline{f}_\infty^{-1}([a,b]) \\ a, & x \in \overline{f}_\infty^{-1}((-\infty,a)) \\ b, & x \in \overline{f}_\infty^{-1}((b,+\infty)) \end{cases}$. Така функція буде неперервною (в принципі, зрозуміло), а також $\overline{f}|_A = f$. Дійсно, якщо $x \in A$, то тоді $f(x) = \overline{f}_\infty(x) \in [a,b]$, тобто $x \in \overline{f}_\infty^{-1}([a,b])$. Значить, $\overline{f}(x) = \overline{f}_\infty(x) = f(x)$. ■

Це ми довели лише теорему Тітце для функції, що приймають значення лише на деякому відрізку. Трошки розширимо клас функцій.

Theorem 4.4.3 Теорема Тітце (розширення)
Задано (X, τ) – нормальний простір, $A \subset X$ – замкнена множина та $f \colon A \to \mathbb{R}$ – неперервна функція. Тоді існує неперервна функція $\overline{f} \colon X \to \mathbb{R}$ – розширення f, тобто $\overline{f}|_A = f$.

Proof.
Ми будемо доводити розширення теореми для випадку, коли задана функція $f \colon A \to (-1,1)$. Оскільки маємо $(-1,1) \subset [-1,1]$, то за теоремою вище, існує функція $\overline{f} \colon X \to [-1,1]$ – неперервна та $\overline{f}_A = f$. На жаль, це ще не все, бо нам треба функція $\overline{g} \colon A \to (-1,1)$, у нас там проблемки в точках $\{-1,1\}$.
Проте якщо взяти множину $B = \overline{f}^{-1}(\{-1,1\})$, що буде замкненою та $A \cap B = \emptyset$, то за лемою Урисона існуватиме функція $\varphi \colon X \to [0,1]$, де $\varphi|_A = 1$ та $\varphi|_B = 0$. Тепер визначимо функцію $\overline{g}(x) = \overline{f}(x) \cdot \varphi(x)$. Функція $g \colon X \to (-1,1)$, неперервна як добуток та $\overline{g}|_A = f$.
Далі ми згадуємо той факт, що $(-1,1) \cong \mathbb{R}$ – отримаємо бажане. ■

Theorem 4.4.4 Нехай (X, τ) – топологічний простір, що задовольняє T_1. Нижче еквівалентні твердження:
1) X – нормальний простір;
2) Для кожних неперетинних замкнених множин $A, B \subset X$ існує неперервна функція $f \colon X \to [0,1]$, де $f|_A = 0$ та $f|_B = 1$;
3) Якщо $A \subset X$ замкнена та $f \colon A \to \mathbb{R}$ – неперервна, то тоді існує неперервна функція $\overline{f} \colon X \to \mathbb{R}$, для якої $\overline{f}|_A = f$.

Proof.
$\boxed{1) \iff 2)}$ та $\boxed{1) \implies 3)}$ ми вже довели.
$\boxed{3) \implies 1)}$. Нехай A, B – замкнені множини, що не перетинаються. (TODO: ?) ■

5 Теорема Урисона про метризацію

Theorem 5.0.1 Теорема Урисона про метризацію
Нехай (X, τ) – нормальний та second-countable простір. Тоді (X, τ) – метризуючий.

5.1 Вступ

Ми вже знаємо, що кожний метризуючий простір – топологічний. Але не навпаки. У будь-якому випадку виникає питання, коли можна сказати в зворотний бік. Відповідь на питання дає результат вище – та сама теорема Урисона.
Одразу зазначу, що якщо простір просто нормальний, то це не обов'язково метризуючий. Перед контрприкладом треба дати одну важливу теорему.

Theorem 5.1.1 Нехай (X, τ) – метризуючий та сепарабельний простір. Тоді X – second-countable.

Proof.
Нехай D – скрізь щільна підмножина X (уже метричного простору). Розглянемо сім'ю множин $\mathcal{B} = \{B(x; r) : x \in D, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$. Така множина точно зліченна. Залишилося довести, що $\mathcal{B}$ – база.
Нехай $B(x; r_1), B(y; r_2)$ – базові множини та $w \in B(x; r_1) \cap B(y; r_2)$. Наша задача знайти базову множину $B(z; R)$ так, що $w \in B(z; R) \subset B(x; r_1) \cap B(y; r_2)$.
Оскільки мноина $B(x; r_1) \cap B(y; r_2)$ залишається відкритою множиною, то існує відкрита куля $B(w; \varepsilon) \subset B(x; r_1) \cap B(y; r_2)$. Оскільки D – скрізь щільна множина, то ми можемо знайти такий елемент $w_n \in D$ так, що $w_n \in B\left(w, \dfrac{\varepsilon}{3}\right)$. На проміжку $\left(\dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ оберемо раціональне число $R \in \mathbb{Q}$ – наш майбутній радіус майбутнього кола. Звідси отримаємо $w \in B(w_n; R)$, бо $\rho(w, w_n) < \dfrac{\varepsilon}{3} < R$.
Зауважимо, що $B(w_n; R) \subset B(w; \varepsilon)$. Справді,
$u \in B(w_n; R) \implies \rho(u, w_n) < R \implies \rho(u, w) \le \rho(u, w_n) + \rho(w_n, w) < R + R < \varepsilon \implies u \in B(w; \varepsilon)$.
Значить, $w \in B(w_n; R) \subset B(w; \varepsilon) \subset B(x; r_1) \cap B(y; r_2)$.
Залишилося довести, що $X = \bigcup\limits_{\substack{x \in D \\ r \in \mathbb{Q}_{>0}}} B(x; r)$, але це буде неважко. ■

Example 5.1.2 Задамо на $\mathbb{R}$ іншу топологію, що породжується базою $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Це називають **lower limit topology** (або **прямою Зоргенфрі**) та часто таку топологію позначають за $\mathbb{R}_l$.
Зауважимо, що $(a, b]$ – відкрита та замкнена одночасно. Відповідь на друге:
$\mathbb{R} \setminus (a, b] = (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a - n, a) \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [b, b + n)$.

$\mathbb{R}_l$ – нормальний простір.
Дійсно, нехай A, B – замкнені підмножини, що неперетинні. Оскільки $\mathbb{R} \setminus A$ відкрита, то за базою $\mathbb{R} \setminus A = \bigcup [a, b)$, але тоді $A = \bigcap \mathbb{R} \setminus [a, b) \subset \bigcap\limits_{\text{скінченний}} \mathbb{R} \setminus [a, b)$ – в кінці скінченний перетин відкритих множин. Аналогічно $B = \bigcap \mathbb{R} \setminus [c, d) \subset \bigcap\limits_{\text{скінченний}} \mathbb{R} \setminus [c, d)$.
Єдине ми прагнемо, щоб ці скінченні перетини самі по собі не перетиналися. Такого добитися можна.
Нехай $x \in A$, тобто $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b)$ будь-який. Але тоді $x \notin B$, тобто $x \notin \mathbb{R} \setminus [c, d)$ деякому. Серед цих деяких оберемо скінченне число таких множин – побудуємо $\bigcap \mathbb{R} \setminus [c, d)$.
Нехай $x \in B$, аналогічним чином побудуємо $\bigcap \mathbb{R} \setminus [a, b)$.
Отже, для неперетинних замкнених A, B ми можемо знайти відкриті множини, що неперетинні та містять кожну зі замкнених.

$\mathbb{R}_l$ – не second countable.
За означенням бази, $\forall U$ – відкрита: $\forall x \in U : \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$.
Для всіх $x \in \mathbb{R}$ оберемо відкриті $[x, x + \varepsilon)$ для деякого $\varepsilon > 0$. Тобто $\forall x \in \mathbb{R} : \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset [x, x + \varepsilon)$. Зауважимо, що $\inf B_x = x$. Отже, для $x_1 \ne x_2$ ми маємо $B_{x_1} \ne B_{x_2}$. Інакше кажучи, відображення $x \mapsto B_x$ – ін'єктивний та $\mathcal{B}$ має бути незліченним.

$\mathbb{R}_l$ – *сепарабельний.*
Стверджуємо, що $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}_l$. Нехай $x \in \mathbb{R}_l$, тоді хочу $x \in \mathrm{Cl}(\mathbb{Q})$, тобто для кожного U_x – відкритого околу матимемо $U_x \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.
!Припустимо, що $U_x \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. Оскільки U_x – відкрита, то за базою існує $[a,b) \subset U_x$. Власне, тоді $[a,b) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. Тобто для кожного $z \in [a,b)$ не існує раціонального числа $q \in [a,b)$. Із іншого боку, на інтервалі (z,b) існує раціональне число $q \in (z,b)$, а тому $[a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ – суперечність!

Пригадаємо, що сепарабельний та метризуючий – автоматично second countable. Але в нас не second countable, тож звідси ми не можемо казати на метризуючніть.

Висновок: пряма Зоргенфрі – нормальний простір, який не метризуючий.
Довгий вступ закінчився. Тепер перейдемо до основного інструментарію, як пруфанути.

5.2 Вкладення та про метризуючі простори

Definition 5.2.1 Нехай (X,τ), $(Y,\tilde{\tau})$ – топологічні простори, $\imath\colon X \to Y$ – неперервне відображення. Відображення $\imath$ називається **вкладенням (embedding)**, якщо

$$X \cong \imath(X)$$

Приклад вкладень з диференціальної топології можна побачити тут: *клік* (на сторінку 14).

Lemma 5.2.2 Нехай (X,τ), $(Y,\tilde{\tau})$ – топологічні простори та $\jmath\colon X \to Y$ – вкладення. Відомо, що Y – метризуючий простір. Тоді X теж метризуючий.

Proof.
Справді, нехай ρ – метрика для Y. Зокрема ρ – метрика на $\imath(X)$ (на підпросторі). Значить, $\jmath(X)$ – метризуючий. Оскільки $X \cong \jmath(X)$, то звідси X – метризуючий (можна задати метрику $\tilde{\rho}(x,y) = \rho(\jmath(x),\jmath(y))$ для всіх $x,y \in X$). ■

Proposition 5.2.3 Задані $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – зліченна сім'я метризуючих просторів. Тоді $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ теж метризуючий.

Proof.
Нехай ρ_i – метрика X_i. Побудуємо нову функцію $\rho'_i(x,y) = \min\{\rho_i(x,y), 1\}$. У принципі, неважко буде переконатися, що ρ'_i задаватиме метрику.
Установимо нову функцію $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\rho'_i(x_i,y_i)$, де в цьому випадку $x = (x_1,x_2,\dots)$, $y = (y_1,y_2,\dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Дана функція буде задавати метрику (в принципі, ясно). Важливо підкреслити, що за рахунок оновлення метрики на X_i ми тепер матимемо завжди збіжний ряд, тому d цілком коректно визначена. Доведемо, що d породжує ту саму топологію. Тобто $\tau_{\text{prod}} = \tau_d$.
Нехай U – відкрита відносно метрики d. Хочемо довести, що U – відкрита в τ_{prod}.
Нехай $x \in U$. За умовою, $\exists B(x;r) \subset U$. Стверджується, що
$B\left(x_1; \frac{r}{2N}\right) \times \dots \times B\left(x_1; \frac{r}{2N}\right) \times X_{N+1} \times \dots \subset B(x;r) \subset U$. Ми оберемо такий N, щоб $\frac{1}{2^N} < \frac{r}{2}$.
Дійсно,
$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\rho'_i(x_i,y_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i}\rho'_i(x_i,y_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\rho'_i(x_i,y_i) \leq \sum_{i=1}^{N} \rho'_i(x_i,y_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} <$
$< \frac{r}{2N} \cdot N + \frac{1}{2^N} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$
Отже, довели, що U – відкрита в τ_{prod}.
Нехай U – відкрита в τ_{prod}. Хочемо довести, що U – відкрита в τ_d.
Нехай $x \in U$ (поки припустимо, що U – базова відкрита множина). Маємо $U = \prod_{i=1}^{\infty} U_i$, де $U_i \neq X_i$ лише для скінченного числа i. Нехай це будуть множини $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}$ – всі відкриті в X_{i_p}. Тоді для кожного існуватиме куля $B_{\rho'_{i_p}}(x_{i_p}, r_{i_p}) \subset U_{i_p}$ при $p = \overline{1,k}$. Ми тепер оберемо радіус $0 < r < 1$ так, що $r \leq \frac{r_{i_1}}{2^{i_1}}, \dots, r \leq \frac{r_{i_k}}{2^{i_k}}$.

Ми доведемо, що відкрита куля $B_d(x;r) \subset U$. Нехай $y \in B_d(x;r)$, тобто $d(x,y) < r$. Зауважимо, що $\dfrac{\rho'_{i_p}(x_{i_p}, y_{i_p})}{2^{i_p}} \le d(x,y) < r \le \dfrac{r_{i_p}}{2^{i_p}}$. Звідси випливає, що $\rho'_{i_p}(x_{i_p}, y_{i_p}) < r_{i_p}$. Отже, $y_{i_p} \in B_{\rho'_{i_p}}(x_{i_p}, r_{i_p}) \subset U_{i_p}$. Тому наша точка $y \in U$.
Якщо $U \in x$ – просто відкрита, тобто $U = \bigcup V$, де V – базова, то існує $V \ni x$, а далі за попереднім існує куля $B(x;r) \subset V \subset U$. ■

Remark 5.2.4 Зокрема ось така множина $[0,1]^{\aleph_0} \overset{\text{def.}}{=} \prod_{i \in \mathbb{N}} [0,1]$ буде метризуючим простором при метриці $d((t_i),(s_i)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} |t_i - s_i|$.

Definition 5.2.5 Нехай (X,τ) – топологічний простір та $\{f_i \colon X \to [0,1]\}_{i \in I}$ – сім'я неперервних функцій.
Така сім'я **відокремлює точки від замкнених множин**, якщо

$$\forall x_0 \in X : \forall A \subset X : A \text{ – замкнена та } x_0 \notin A : \exists f_j \in \{f_i\} : f_j(x_0) > 0,\ f_j|_A = 0$$

Lemma 5.2.6 Нехай (X,τ) – T_1-простір. Припустимо, що $\{f_i \colon X \to [0,1]\}_{i \in I}$ – сім'я функцій, що відокремлює точки від замкнених множин. Тоді відображення $f_\infty \colon X \to \prod_{i \in I} [0,1]$, що заданий як $f_\infty(x) = (f_i(x))_{i \in I}$, – вкладення.

Proof.
f_∞ – неперервне відображення.
Справді, зауважимо, що $\pi_j \circ f_\infty = f_j$, де $\pi_j \colon \prod_{i \in I} [0,1] \to [0,1]$ – проєкція на j-ту координату. Всі f_j неперервні за умовою, тому зокрема й f_∞.

f_∞ – ін'єкція.
Нехай $x, y \in X$ такі, що $x \ne y$. Хочемо довести, що $f_\infty(x) \ne f_\infty(y)$.
Оскільки ми в просторі T_1, то $\{y\}$ – замкнена множина. Значить, за означенням сім'ї функції, існуватиме $f_j \colon X \to [0,1]$ так, що $f_j|_{\{y\}} = 0$ та $f_j(x) > 0$. Власне, звідси $f_j(x) \ne f_j(y)$. Але тоді $f_\infty(x) \ne f_\infty(y)$, тому що щонайменше j-та координата вже не збігається.

$f_\infty(X) \cong \prod_{i \in I} [0,1]$.
Якщо звузити f_∞ до відображення $f_\infty \colon X \to f_\infty(X)$, то отримаємо бієкцію, неперервність залишається досі. Залишилося довести, що f_∞^{-1} – неперервне. На жаль, у явному вигляді не знайдемо функцію, але доведемо інакшим чином.
Нам буде досить довести, що якщо U – відкрита в X, то $f_\infty(U)$ – відкрита в $f_\infty(X)$.
Нехай $x \in U$ – відкрита. Нам треба знайти відкритий окіл V точки $f_\infty(x)$, щоб $V \subset f_\infty(U)$. Оскільки U – відкрита, то $X \setminus U$ замкнена. За сім'єю існує функція $f_j \colon X \to [0,1]$ так, що $f_j|_{X \setminus U} = 0$ та $f_j(x) > 0$. Визначимо множину $V = f_\infty(X) \cap \pi_j^{-1}((0,1])$. Зауважимо, що V – відкрита множина.
$V = \{f_\infty(x) \mid y \in X, \pi_j \circ f_\infty(y) > 0\} = \{f_\infty(y) \mid y \in X, f_j(y) > 0\} = \{f_\infty(y) \mid y \in U, f_j(y) > 0\} \implies V \subset f_\infty(U)$. ■

5.3 Доведення теореми Урисона про метризацію

Proof.
Нехай $\mathcal{B} = \{V_i\}_{i \in I}$ – зліченна база. Визначимо множину $S = \{(i,j) \mid \operatorname{Cl} V_i \subset V_j\}$ – так само зліченна множина. Нехай $(i,j) \in S$. У нас множини $X \setminus V_j, \operatorname{Cl} V_i$ – замкнені, тож за лемою Урисона, існує функція $f_{ij} \colon X \to [0,1]$ така, що $f|_{X \setminus V_j} = 0,\ f|_{\operatorname{Cl} V_i} = 1$.
Стверджуємо, що $\{f_{ij}\}_{(i,j) \in S}$ буде утворювати сім'ю функцій, яка відокремлює точки від замкнених множин. Дійсно, нехай $A \subset X$ – замкнена та $x_0 \notin A$. Значить, $X \setminus A$ – відкрита, а тому існує $V_j \in \mathcal{B}$ так, що $x_0 \in V_j \subset X \setminus A$. Оскільки $\{x_0\}$ – замкнена (ми в T_1) та V_j – відкрита, то існує відкрита множина $V_i \in \mathcal{B}$ так, що $x_0 \in V_i$ та $\operatorname{Cl} V_i \subset V_j$. Значить, $f_{ij}(x_0) = 1 > 0$ та $f_{ij}|_A = 0$ – довели бажане.
Застосуємо тоді лему про те, що тоді існує вкладення $X \hookrightarrow \prod_{(i,j) \in S} [0,1]$. Ми вже знаємо, що простір

$\prod_{(i,j)\in S} [0,1]$ – метризуючий (бо S – зліченна та $[0,1]$ – метризуючий). Власне, отримаємо тоді, що X – метризуючий. ■

5.4 Трохи додаткової інфи

Теорему Урисона можна дещо послабити. Замість нормального простору можна замінити на регулярний. Причина:

Proposition 5.4.1 Нехай (X,τ) – регулярний, second-countable топологічний простір. Тоді (X,τ) – нормальний.

Proof.
Нехай A, B – неперетинні замкнені множини.
Для кожної точки $x \in A$ множина $X \setminus B$ буде околом x, тому за регулярністю існує $U_x \in \mathcal{B}$ так, що $x \in U_x \subset \operatorname{Cl} U_x \subset X \setminus B$. Сім'я $\{U_x \mid x \in A\}$ буде зліченною (у нас second-countable простір), тому ми їх проіндексуємо, буде $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Тоді маємо $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ та $B \cap \operatorname{Cl} U_i = \emptyset$.

Для кожної точки $x \in B$ аналогічно поступимо та отримаємо сім'ю $\{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ так, що $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ та $A \cap \operatorname{Cl} V_i = \emptyset$.

Визначимо нові множини Y_i, Z_i таким чином: $Y_i = U_i \setminus \bigcup_{n=1}^{i} \operatorname{Cl} V_n$ та $Z_i = V_i \setminus \bigcup_{n=1}^{i} \operatorname{Cl} U_n$. Всі множини Y_i, Z_i будуть відкритими. Позначимо $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$ та $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$ – знову відкриті множини. Стверджуємо, що $U \cap V = \emptyset$, а також $U \supset A, V \supset B$ – таким чином, ми завершимо доведення нормальності.
!Припустимо $x \in U \cap V$, тоді $x \in Y_i \cap Z_j$ для деяких (i,j). Не втрачаючи загальності, $i \geq j$, тому $x \in Y_i = U_i \setminus \bigcup_{n=1}^{i} \operatorname{Cl} V_n \subset U_i \setminus \operatorname{Cl} V_j$, а також $x \in Z_j \subset V_i$ – суперечність! (при $i \leq j$ ситуація аналогічна). Значить, дійсно $U \cap V = \emptyset$.
$A \subset U$, тому що $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ та $A \cap \operatorname{Cl} V_j = \emptyset$. Аналогічно $B \subset V$. ■

Remark 5.4.2 Я тут скористався фактом, про який я не знав.
Якщо X – регулярний, то для кожної точки $x \in X$ та окола U_x існуватиме замкнений окіл $V_x \subset U_x$.
Дійсно, поки нехай $x \in X$ та U_x – відкритий окіл. Для $x \in X$ та замкненого $X \setminus U_x \not\ni x$ існуватимуть відкриті множини $Y \ni x,\ Z \supset X \setminus U_x$, причому $Y \cap Z = \emptyset$. Значить, $x \notin Z$, але $x \in X \setminus Z \subset U_x$.

Отже, кожний регулярний та second-countable топологічний простір – метризуючий.

Remark 5.4.3 Зворотне до теореми Урисона не працює. Тобто якщо X – метризуючий, то X – нормальний, але не обов'язково second-countable.
Зокрема (X, τ_{discr}) – дискретний простір (який метризуючий та нормальний), де X – незліченна множина. Але не second-countable.

Постає питання, яка теорема існує, щоб було пряме та зворотне твердження.

Theorem 5.4.4 Теорема Наґата-Смірнова про метризацію
Нехай (X,τ) – топологічний простір.
(X,τ) – метризуючий $\iff$ (X,τ) – регулярний та має базу, який зліченно локально скінченний.
Без доведення.

Definition 5.4.5 Нехай (X,τ) – топологічний простір.
Сім'я відкритих множин $\{U_i\}_{i\in I}$ називається **локально скінченним**, якщо

$$\forall x \in X : \exists V_x : V_x \cap U_i \neq \emptyset,\ \text{де } i \text{ – скінченна кількість}$$

Сім'я відкритих множин $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ називається **зліченно локально скінченним**, якщо

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n,\ \mathcal{U}_n \text{ – локально скінченний.}$$

6 Теорема Тіхонова в загальному вигляді

Theorem 6.0.1 Нехай $\{X_\lambda : \lambda \in I\}$ – сім'я компактних топологічних просторів. Тоді $\prod\limits_{\lambda \in I} X_\lambda$ – компактний (добуток в сенсі product topology, але не box topology).

Перед доведенням даної теореми треба буде повчити деякі речі.

6.1 Властивість скінченного перетину

Definition 6.1.1 Нехай (X, τ) – топологічний простір та $\mathcal{F}$ – набір підмножин X.
Набір $\mathcal{F}$ має властивість **скінченного перетину**, якщо

$$\forall \{F_1, \dots, F_n\} \subset \mathcal{F} : \bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$$

Тобто для кожного скінченного піднабору перетин непорожній.
Англійською кажуть, що $\mathcal{F}$ satisfies **finite intersection property** (скорочено **FIP**).

Theorem 6.1.2 (X, τ) – компактний $\iff$ для кожного $\mathcal{F}$ – набору замкнених підмножин X, що має властивість скінченного перетину – ми маємо $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: (X, τ) – компактний. Нехай $\mathcal{F}$ – набір замкнених підмножин X, що має властивість скінченного перетину.
!Припустимо, що $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$, це буде означати $\bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}} (X \setminus F) = X$. Отримали відкрите покриття $\{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$, проте в силу компактності X ми знайдемо скінченне підпокриття $\{X \setminus F_i \mid i = \overline{1, n}\}$, тож звідси $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (X \setminus F_i) = X \implies \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$. Із іншого боку, $\{F_1, \dots, F_n\} \subset \mathcal{F}$, що має властивість скінченного перетину – суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: для кожного $\mathcal{F}$ – набору замкнених підмножин X, що має властивість скінченного перетину – ми маємо $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Нехай маємо $\{U_i \mid i \in I\}$ – відкрите покриття X, тобто $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = X \implies \bigcap\limits_{i \in I} (X \setminus U_i) = \emptyset$. Ми маємо набір замкнених підмножин X, як-от $\{X \setminus U_i \mid i \in I\}$, але це не буде мати властивість скінченного перетину (просто тому що перетин цих множин порожній, а також за умовою дано). Отже, існує набір $\{X \setminus U_1, \dots, X \setminus U_n\}$, для яких $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (X \setminus U_i) = \emptyset \implies \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i = X$ – знайшли скінченне підпокриття $\{U_1, \dots, U_n\}$. ■

Definition 6.1.3 Нехай (X, τ) – топологічний простір та $\mathcal{C}$ – набір підмножин X, що має властивість скінченного перетину.
Набір $\mathcal{C}$ називається **максимальним, що має властивість скінченного перетину**, якщо

$$\forall \mathcal{A} \text{ – набір підмножин } X \text{, що має скінченний перетин} : \mathcal{A} \supset \mathcal{C} \implies \mathcal{A} = \mathcal{C}$$

Proposition 6.1.4 Для кожного набору підмножин $\mathcal{C}$, із властивістю скінченного перетину, існує максимальний набір $\mathcal{A}$, причому $\mathcal{A} \supset \mathcal{C}$.

Перед доведенням варто згадати лему Цорна. Там потрібна пара $(P, \leq)$, що формує частково впорядковану множину.
У контексті даного твердження в нас буде пара $(T, \subset)$. У цьому випадку T – це сім'я всіх наборів підмножин X з властивістю скінченного перетину, яка буде мітстити $\mathcal{C}$. У нас $T \neq \emptyset$, оскільки $\mathcal{C} \in T$.

Proof.
Отже, нехай A – лінійно впорядкована підмножина T. Хочемо довести, що A має верхню межу.

$\bigcup\limits_{\mathcal{F}\in A} \mathcal{F}$ *– верхня межа для* A.

Нам треба довести, що $\bigcup\limits_{\mathcal{F}\in A} \mathcal{F} \in T$, а що саме:

I. $\bigcup\limits_{\mathcal{F}\in A} \mathcal{F}$ *має властивість скінченного перетину.*

Дійсно, нехай взяли $F_1, \dots, F_n \in \bigcup\limits_{\mathcal{F}\in A} \mathcal{F}$, тоді існують набори $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$, для яких $F_1 \in \mathcal{F}_i, i = \overline{1,n}$. Множина A в нас лінійно впорядкована, тому серед цих $\mathcal{F}_i$ знайдеться найбільший набір, тобто $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_N$ для всіх $i = \overline{1,n}$ та деякого $N = \overline{1,n}$. Звідси $F_i \in \mathcal{F}_n$ для всіх $i = \overline{1,n}$, але оскільки $\mathcal{F}_N$ має властивість скінченного перетину, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$.

II. $\bigcup\limits_{\mathcal{F}\in A} \mathcal{F} \supset \mathcal{C}$.

Тут все зрозуміло, оскільки кожний $\mathcal{F} \in A \subset T$, а тому звідси $\mathcal{F} \supset \mathcal{C}$.

Нарешті, $\bigcup\limits_{\mathcal{F}\in A} \mathcal{F}$ обмежує множину зверху. Справді, для всіх $\tilde{\mathcal{F}} \in A$ ми маємо $\tilde{\mathcal{F}} \subset \bigcup\limits_{\mathcal{F}\in A} \mathcal{F}$.

Отже, $A \subset T$ містить верхню грань, а тому за лемою Цорна, T містить максимальний елемент. ■

6.2 Фільтри

Definition 6.2.1 Нехай (X, τ) – топологічний простір та $\mathcal{F}$ – набір підмножин X.
Набір $\mathcal{F}$ називається **фільтром**, якщо

$$\forall\{F_1, \dots, F_n\} \subset \mathcal{F} : \bigcap_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$$

$$\emptyset \notin \mathcal{F},\ X \in \mathcal{F}$$

$$B \subset A \subset X, B \in \mathcal{F} \implies A \in \mathcal{F}$$

Тобто фільтр означає, що всі скінченні перетини містяться в наборі, X міститься та $\emptyset$ не міститься в наборі, а також є замкненою згори (так текстово називається третя властивість, англійською це називають closed upwards).

Remark 6.2.2 Якщо $\mathcal{F}$ – фільтр, то він задовольняє властивості скінченного перетину.
Дійсно, беремо $\{F_1, \dots, F_n\} \subset \mathcal{F}$, тоді за першою властивістю, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$, а за другою властивістю, $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Тому автоматично $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$.

Theorem 6.2.3 Нехай (X, τ) – топологічний простір та $\mathcal{F}$ – максимальний набір підмножин X, що має властивість скінченного перетину. Тоді $\mathcal{F}$ – фільтр.

Proof.

Нехай $\{F_1, \dots, F_n\} \subset \mathcal{F}$, тоді за властивістю скінченного перетину $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$. Зауважимо, що набір $\left\{\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\right\} \cup \mathcal{F}$ теж буде задовольняти властивості скінченного перетину. У силу максимальності $\mathcal{F}$ ми будемо мати $\mathcal{F} = \left\{\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\right\} \cup \mathcal{F}$, внаслідок чого $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$.

Ясно, що $\emptyset \notin \mathcal{F}$, оскільки $\mathcal{F}$ має властивість скінченного перетину. Також $X \in \mathcal{F}$, оскільки $X \cap F = F \neq \emptyset$ для всіх $F \in \mathcal{F}$, тому набір $\mathcal{F} \cup \{X\}$ теж буде мати властивість скінченного перетину, а далі аналогічно за максимальністю отримаємо бажане.

Нехай тепер $B \subset A \subset X$ та $B \in \mathcal{F}$, тоді звідси $B \cap F \subset A \cap F \subset X \cap F = F$ для всіх $F \in \mathcal{F}$. За властивістю скінченного перетину $B \cap F, F \neq \emptyset$, а тому звідси $A \cap F \neq \emptyset$, а далі аналогічними міркуваннями (як було з $X \in \mathcal{F}$) отримаємо $A \in \mathcal{F}$. ■

Theorem 6.2.4 Нехай (X, τ) – топологічний простір та $\mathcal{F}$ – максимальний набір підмножин X, що має властивість скінченного перетину; також $A \subset X$.
$A \in \mathcal{F} \iff \forall F \in \mathcal{F} : A \cap F \neq \emptyset$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *Усе зрозуміло.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall F \in \mathcal{F} : A \cap F \neq \emptyset$. Нам залишилося довести, що $\{A\} \cup \mathcal{F}$ також має властивість скінченного перетину, а там вже отримаємо $A \in \mathcal{F}$.
Дійсно, якщо $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, то ми маємо $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$ в силу фільтра, тому $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$, внаслідок чого $\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \cap A \neq \emptyset$. ■

6.3 Доведення теореми Тіхонова

Proof.
Нехай $\mathcal{C}$ – набір замкнених підмножин $\prod_{\lambda \in I} X_\lambda$, що має властивість скінченного перетину. Хочемо довести, що $\bigcap_{U \in \mathcal{C}} U \neq \emptyset$, за іншим означення компактності.
Розширимо $\mathcal{C}$ до максимального набору $\mathcal{F}$ за **Prp. 6.1.4** (не забуваємо, що $\mathcal{F}$ є фільтром за **Th. 6.2.3**). У силу того, що $\mathcal{F} \supset \mathcal{C}$, то звідси зрозуміло цілком, що $\bigcap_{U \in \mathcal{C}} U \supset \bigcap_{U \in \mathcal{F}} U$. Насправді, ми маємо $\bigcap_{U \in \mathcal{C}} U \supset \bigcap_{U \in \mathcal{F}} \mathrm{Cl}(U)$. Отже, нам буде досить довести, що $\bigcap_{U \in \mathcal{F}} \mathrm{Cl}(U) \neq \emptyset$.
Позначимо $\mathcal{F}_\lambda = \{\pi_\lambda(U) : U \in \mathcal{F}\}$. Такий набір множин буде мати властивість скінченного перетину. Справді, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ (бо $\mathcal{F}$ має властивість скінченного перетину), а звідси $\pi_\lambda(U_1) \cap \pi_\lambda(U_2) \supset \pi_\lambda(U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$. Звідси випливає, що набір $\{\mathrm{Cl}(\pi_\lambda(U)) : U \in \mathcal{F}\}$ буде також мати властивість скінченного перетину (просто тому що $\mathrm{Cl}(\pi_\lambda(U)) \supset \pi_\lambda(U) \neq \emptyset$). Оскільки, за умовою, X_λ – компакт, то за **Th. 6.1.2** $\bigcap_{U \in \mathcal{F}} \mathrm{Cl}(\pi_\lambda(U)) \neq \emptyset$. Тож можемо обрати точку $x_\lambda \in \bigcap_{U \in \mathcal{F}} \mathrm{Cl}(\pi_\lambda(U))$.
Ми сформували точку $\prod_{\lambda \in I} X_\lambda \ni x = (x_\lambda : \lambda \in I)$. Залишилося довести, що $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{F}} \mathrm{Cl}(U)$.
Тут буде кілька етапів, щоб завершити доведення.
Спочатку оберемо $S = \pi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ – передбазову відкриту множину таким чином, щоб $S \ni x$. Ми доведемо, що $S \in \mathcal{F}$. Дійсно, за умовою, $x \in \pi_\lambda^{-1}(U_\lambda) \implies x_\lambda \in U_\lambda$. За вибором точок x_λ, ми маємо $x_\lambda \in \bigcap_{U \in \mathcal{F}} \mathrm{Cl}(\pi_\lambda(U))$. Значить, для всіх $U \in \mathcal{F}$ маємо $x \in \mathrm{Cl}(\pi_\lambda(U))$, а це означає, що для кожного відкритого околу V точки x маємо $V \cap \pi_\lambda(U) \neq \emptyset$ для всіх $U \in \mathcal{F}$. Зокрема U_λ – відкритий окіл x, таким чином $U_\lambda \cap \pi_\lambda(U) \neq \emptyset$ для всіх $U \in \mathcal{F} \implies \pi_\lambda^{-1}(U_\lambda) \cap U \neq \emptyset$ для всіх $U \in \mathcal{F}$, внаслідок чого $\pi_\lambda^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{F}$ за **Th. 6.2.4**.

Тепер оберемо B – базову відкриту множину таким чином, щоб $B \ni x$. Але оскільки $B = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$, маємо передбазові множини $S_i \ni x$, тоді всі $S_i \in \mathcal{F}$, зокрема $B \in \mathcal{F}$.
Тепер нащо ми доводили це? Тому що, взявши будь-яку базову відкриту множину $B \ni x$, отримаємо $B \in \mathcal{F} \implies B \cap U \neq \emptyset$ для всіх $U \in \mathcal{F}$. Візьмемо будь-який відкритий окіл V_x точки x, тоді звідси $V_x = \bigcup B$, де B – базові відкриті множини. Але тоді $V_x \cap U = \bigcup B \cap U \neq \emptyset$ для всіх $U \in \mathcal{F}$.
Отже, $x \in \mathrm{Cl}(U)$ для кожного $U \in \mathcal{F}$. ■

Remark 6.3.1 Міні-епілог. Виявляється, що ми не зможемо довести теорему Тіхонова без використання леми Цорна. Або можемо, але тоді будуть використані інші доволі специфічні теореми (наприклад, аксіома вибору). Якщо зробити *клік*, там в четвертому розділі можна про це зауваження прочитати детальніше.

7 Деякі топологічні твердження

Lemma 7.0.1 Лема трубки
Задані (X, τ), $(Y, \tilde{\tau})$ – топологічні простори, причому Y – компактний, $x_0 \in X$. Нехай N – відкрита в $X \times Y$ так, що $\{x_0\} \times Y \subset N$. Тоді існує відкритий окіл W точки x_0, для якого $\{x_0\} \times Y \subset W \times Y \subset N$.

Proof.
Оскільки N – відкритий в $X \times Y$, то звідси $N = \bigcup U \times W$, де U, W – відповідно відкриті множини X, Y. Оскільки $\{x_0\} \times Y$ – компакт (тому що $\{x_0\} \times Y \cong Y$ та Y – компакт), то існує скінченне підпокриття, тоді $\{x_0\} \times Y \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i \times W_i$. Надалі вважаємо, що $(U_i \cap W_i) \cap (\{x_0\} \times Y) \neq \emptyset$ (якщо такий $U_i \cap W_i$ існує, що не перетинається, то ми його можемо нафіг викинути зі скінченного набору, все одно формуватиме підпокриття).

Позначимо $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$, що є відкритим околом точки x_0 (за останнім зауваженням). Стверджуємо, що $W \times Y \subset N$. Припустимо, що $(x, y) \in W \times Y$. Нам вже відомо, що точка $(x_0, y) \in U_i \times W_i$, тому звідси $y \in V_i$. Також $x \in W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subset U_i$, внаслідок чого $(x, y) \in U_i \times W_i \subset N$. ■

Remark 7.0.2 Лему трубки можна було використати в теоремі Тіхонова, коли мали дві компактні множини.

Використані джерела

1. Tom Leinster, General Topology, 2014-2015
2. Micheal Pawliuk, The Tychonoff Theorem, 2011
3. Tychonoff's Theorem and Zorn's Lemma, 2021
4. 3 COUNTABILITY AND CONNECTEDNESS AXIOMS
5. MTH 427/527 Introduction to General Topology at the University at Buffalo