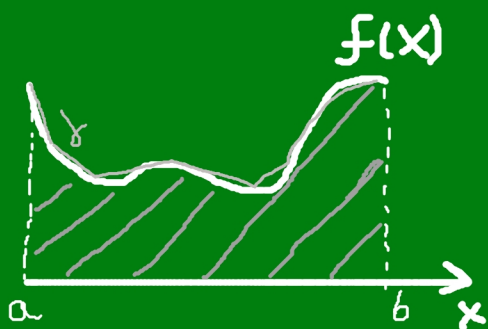
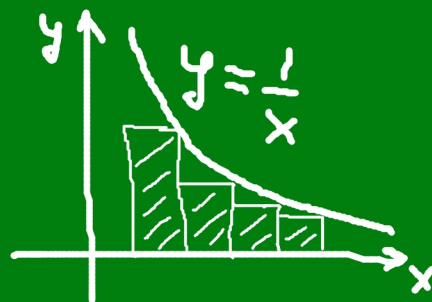


# Real analysis II



$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = +\infty$$

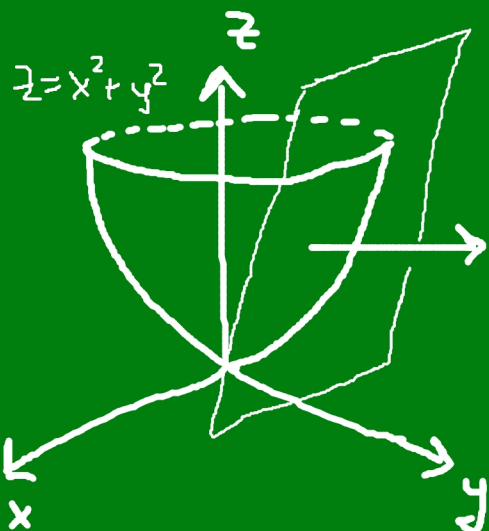
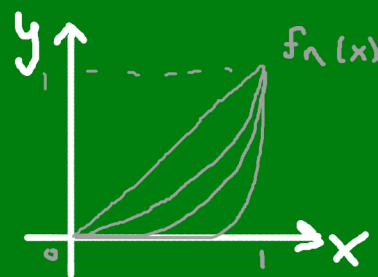


$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots = -\ln 2$$

$$-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots = -\frac{3}{2} \ln 2$$

$$\{f_n(x) = x^n, n \geq 1\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$$



$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

# Зміст

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Невизначений інтеграл</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1      | Первісна, основні означення невизначеного інтегралу . . . . .                                | 4         |
| 1.2      | Заміна змінної . . . . .   | 5         |
| 1.3      | Інтегрування частинами . . . . .   | 6         |
| 1.4      | Інтегрування дробово-раціональних функцій . . . . .  | 6         |
| 1.5      | Інтегрування тригонометричних функцій . . . . .  | 8         |
| 1.6      | Інтегрування ірраціональних виразів . . . . .  | 9         |
| 1.7      | Диференціальний біном . . . . .  | 10        |
| <b>2</b> | <b>Визначений інтеграл</b>   | <b>11</b> |
| 2.1      | Підхід Рімана . . . . .  | 11        |
| 2.2      | Суми Дарбу . . . . .   | 12        |
| 2.3      | Існування інтеграла . . . . .  | 14        |
| 2.4      | Класи інтегрованих функцій . . . . .   | 15        |
| 2.5      | Властивості інтегралів . . . . .   | 18        |
| 2.6      | Інтеграл як функція верхньої межі . . . . .  | 19        |
| 2.7      | Обчислення визначених інтегралів . . . . .   | 22        |
| 2.7.1    | Заміна змінної . . . . .   | 22        |
| 2.7.2    | Інтегрування частинами . . . . .   | 23        |
| 2.8      | Застосування визначеного інтеграла . . . . .   | 24        |
| 2.8.1    | Площа криволінійної трапеції . . . . .   | 24        |
| 2.8.2    | Площа криволінійного сектора . . . . .   | 26        |
| 2.8.3    | Крива, яка спрямовується . . . . .   | 26        |
| 2.8.4    | Об'єм тіла обертання . . . . .   | 28        |
| <b>3</b> | <b>Невласні інтеграли</b>  | <b>30</b> |
| 3.1      | Основні означення . . . . .  | 30        |
| 3.2      | Властивості . . . . .  | 30        |
| 3.3      | Дослідження на збіжність/розбіжність . . . . .   | 33        |
| 3.3.1    | Дослідження для додатних функцій . . . . .   | 33        |
| 3.3.2    | Дослідження для знакодівільних функцій . . . . .   | 35        |
| 3.4      | Особливі випадки . . . . .   | 37        |
| 3.5      | Невласний інтеграл в сенсі головного значення по Коші . . . . .                              | 38        |
| <b>4</b> | <b>Ряди</b>  | <b>40</b> |
| 4.1      | Первинний аналіз збіжності та арифметика рядів . . . . .                                     | 40        |
| 4.2      | Знакододатні ряди . . . . .  | 41        |
| 4.3      | Знакозмінні ряди . . . . .   | 46        |
| 4.4      | Трошки детально про абсолютно збіжні ряди . . . . .  | 49        |
| 4.5      | Трошки про умовно збіжні ряди . . . . .  | 50        |
| <b>5</b> | <b>Функціональні ряди</b>  | <b>53</b> |
| 5.1      | Функціональні послідовності . . . . .  | 53        |
| 5.2      | Функціональні ряди . . . . .   | 56        |
| 5.3      | Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів . . . . .                                | 59        |
| 5.4      | Степеневі ряди . . . . .   | 61        |
| 5.5      | Ряди Тейлора . . . . .   | 63        |
| <b>6</b> | <b>Вступ до <math>\mathbb{R}^m</math></b>  | <b>66</b> |
| 6.1      | Топологія та принцип аналізу в $\mathbb{R}^m$ . . . . .                                      | 66        |
| 6.2      | Границя послідовності . . . . .  | 67        |
| 6.3      | Функція від декількох змінних. Границя функції . . . . .                                     | 70        |
| 6.4      | Неперервність функції . . . . .  | 72        |
| 6.5      | Символіка Ландау . . . . .   | 73        |
| 6.6      | Границя та неперервність векторнозначної функції кількох змінних, символіка Ландау . . . . . | 74        |
| 6.7      | Крива в $\mathbb{R}^m$ . . . . .   | 75        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>7</b> | <b>Диференційованість</b>                                   | <b>76</b> |
| 7.1      | Для функції із багатьма змінними . . . . .                  | 76        |
| 7.2      | Для векторнозначних функцій . . . . .                       | 79        |
| 7.3      | Похідна за напрямком. Градієнт . . . . .                    | 81        |
| 7.4      | Неявно задані функції . . . . .                             | 82        |
| 7.5      | Обернені функції . . . . .                                  | 84        |
| 7.6      | Геометричне та алгебраїчне застосування . . . . .           | 85        |
|          | 7.6.1 Дотична площина, нормальна пряма поверхні . . . . .   | 85        |
|          | 7.6.2 Дотична пряма, нормальна площина кривої . . . . .     | 86        |
|          | 7.6.3 Приблизне обчислення . . . . .                        | 87        |
| 7.7      | Диференціювання та похідні старших порядків . . . . .       | 87        |
| 7.8      | Формула Тейлора . . . . .                                   | 91        |
| 7.9      | Локальні екстремуми . . . . .                               | 92        |
| 7.10     | Умовні локальні екстремуми . . . . .                        | 94        |
| <b>8</b> | <b>Інтеграли з параметром</b>                               | <b>98</b> |
| 8.1      | Основні означення та властивості . . . . .                  | 98        |
| 8.2      | Невласні інтеграли з параметром. Ознаки збіжності . . . . . | 101       |
| 8.3      | Властивості невластного інтегралу . . . . .                 | 102       |
| 8.4      | Інтеграл Діріхле . . . . .                                  | 105       |
| 8.5      | Інтеграл Ейлера-Пуассона . . . . .                          | 105       |
| 8.6      | Гамма-функція . . . . .                                     | 106       |
| 8.7      | Бета-функція . . . . .                                      | 107       |
| 8.8      | Зв'язок між $\Gamma$ та $B$ функціями . . . . .             | 108       |

# 1 Невизначений інтеграл

У рамках даного розділу розглядатимуться множини  $I, J$ , що будуть проміжками одного з типів:  $[a, b], (a, b), (a, b]$ , причому можливий нескінченний проміжок.

## 1.1 Первісна, основні означення невизначеного інтегралу

**Definition 1.1.1** Первісною для функції  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  називають функцію  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x)$$

**Example 1.1.2** Зокрема  $F(x) = x^2$  - первісна функції  $f(x) = 2x$  на  $I = \mathbb{R}$ .

**Example 1.1.3** Зокрема  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$  - первісна функції  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$  на  $I = \mathbb{R}$ .

**Proposition 1.1.4** Якщо  $F(x), \Phi(x)$  - первісні для  $f(x)$ , то  $\Phi(x) = F(x) + C$ .

*Випливає з наслідків теореми Лагранжа.*

**Remark 1.1.5** Не кожна функція може мати первісну. Зокрема  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  не має первісної на  $I = [-1, 1]$ .

Припустимо, що  $f$  має первісну  $F$ , тоді обов'язково  $F \in C((-1, 1))$ . Оберемо  $0 < x < 1$  та застосуємо теорему Лагранжа:

$$F(x) - F(0) = \operatorname{sgn} \xi \cdot (x - 0) = x, \text{ де } \xi \in (0, x). \text{ Таким чином, } \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1.$$

При  $x \rightarrow 0 + 0$  отримуємо  $F'(0 + 0) = 1$ , але водночас  $F'(0) = F'(0 + 0) = 0$ . Суперечність!

**Definition 1.1.6** Множину всіх первісних для функції  $f(x)$  називають **невизначеним інтегралом** функції  $f(x)$ .

Позначення:  $\int f(x) dx = \{F(x) : F'(x) = f(x)\}$ .

**Remark 1.1.7** Але враховуючи твердження вище, ми можемо записувати одну з первісних, тобто  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , де  $F$  - первісна функції  $f$ .

**Example 1.1.8**  $\int 2x dx = \{x^2 + C | C \in \mathbb{R}\}$ .

Оскільки є якась первісна, то можна записати як  $\int 2x dx = x^2 + C$ .

### Proposition 1.1.9 Властивості

1)  $\int f'(x) dx = f(x) + C$ ;

2)  $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$ ;

Далі задамо функції  $f, g$ , які мають відповідно первісні  $F, G$ . Тоді:

3)  $\alpha F$  - первісна для функції  $\alpha f$ , причому  $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$ ;

4)  $F + G$  - первісна для функції  $f + g$ , причому  $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ .

**Proof.**

1), 2) випливають з означення.

3) Якщо  $F$  - первісна функції  $f$ , то тоді  $\alpha F$  - первісна функції  $\alpha f$ , тому що  $(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$ .

Отже,  $\int \alpha f(x) dx = \alpha F(x) + C = \alpha (F(x) + C^*) = \alpha \int f(x) dx$ .

4) Якщо  $F, G$  - первісні відповідно функції  $f, g$ , то  $F + G$  - первісна функції  $f + g$ , тому що  $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ .

Отже,  $\int f(x) + g(x) dx = F(x) + G(x) + C = F(x) + C^* + G(x) + C^{**} = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ . ■

**Remark 1.1.10** Підінтегральний вираз  $f(x) dx$  варто розглядати як диференціал функції  $F(x)$ , тобто

$$\int f(x) dx = F(x) + C \iff d(F(x) + C) = f(x) dx$$

**Remark 1.1.11** Взагалі-то кажучи, символ  $\int f(x) dx$  можна також використовувати, щоб позначити як первісну функції  $f$ , якщо не можна записати  $F$  як функцію.

Зокрема  $\int e^{-x^2} dx$  - первісна функції  $e^{-x^2}$ , проте записати як функцію від змінної не можна.

### Таблиця первісних

| $f(x)$                            | $F(x)$  |
|-----------------------------------|---|
| 1                                 | $x$   |
| $x^\alpha$                        | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$ |
| $\frac{1}{x}$                     | $\ln  x $                                       |
| $\sin x$                          | $-\cos x$                                       |
| $\cos x$                          | $\sin x$  |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$              | $\operatorname{tg} x$                           |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$              | $-\operatorname{ctg} x$                         |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$          | $\arcsin x$                                     |
| $\frac{1}{1+x^2}$                 | $\operatorname{arctg} x$                        |
| $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$          | $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$                         |
| $e^x$                             | $e^x$   |
| $a^x$                             | $\frac{a^x}{\ln a}$                             |
| $\operatorname{sh} x$             | $\operatorname{ch} x$                           |
| $\operatorname{ch} x$             | $\operatorname{sh} x$                           |
| $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ | $\operatorname{th} x$                           |
| $\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ | $-\operatorname{cth} x$                         |

**Example 1.1.12** Обчислимо  $\int (x+2)^2 + \operatorname{tg}^2 x dx$ .

Робити будемо це, використовуючи таблицю первісних та властивості інтегралів.

$$\begin{aligned} \int (x+2)^2 + \operatorname{tg}^2 x dx &= \int x^2 + 4x + 4 + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \int x^2 dx + 4 \int x dx + 3 \int 1 dx + \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

## 1.2 Заміна змінної

**Theorem 1.2.1** Задано функцію  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , має первісну  $F$ ; функцію  $g: J \rightarrow I$  - диференційована. Тоді  $(f \circ g)g'$  має первісу  $F \circ g$  на  $J$ , причому

$$\int (f \circ g)(x)g'(x) dx = \int f(t) dt.$$

**Proof.**

Дійсно,  $F \circ g$  - первісна для  $(f \circ g)g'$ , оскільки  $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ .

Отже,  $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(g(x)) dg(x) = \int f(t) dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$ . ■

**Example 1.2.2** Обчислити  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

$\int \frac{1}{x \ln x} dx \equiv$  Проведемо заміну:  $\ln x = t$ . Тоді  $\frac{1}{x} dx = dt$   
 $\equiv \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |\ln x| + C$

### 1.3 Інтегрування частинами

**Theorem 1.3.1** Задані функції  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$  - обидва диференційовані. Відомо, що  $u'v$  має первісну.

Тоді  $uv'$  також має первісну, причому

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

**Proof.**

Ми знаємо, що  $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \implies u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u(x)v'(x)$ .

Функції  $(uv)'$ ,  $uv'$  мають первісну, одна дорівнює  $uv$ , а інша просто за умовою. Тоді  $(uv)' - uv' = uv'$  теж має первісну та дорівнює:

$$\int u(x)v'(x) dx = \int (u(x)v(x))' - u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Remark 1.3.2** Більш зручно записати таку формулу:  $\int u dv = uv - \int v du$ .

**Example 1.3.3** Обчислити  $\int x^2 e^x dx$ .

$$\int x^2 e^x dx \equiv$$

Робимо заміну  $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$   $e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$

$$\equiv x^2 e^x - \int 2x e^x dx \equiv$$

Знову заміну  $u = 2x \Rightarrow du = 2 dx$   $e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$

$$\equiv x^2 e^x - (2x e^x - \int 2e^x dx) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

### 1.4 Інтегрування дробово-раціональних функцій

Розглянемо  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , де  $P(x), Q(x)$  - многочлени з дійсними коефіцієнтами. Є два випадки:

I.  $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$

Тоді можемо поділити їх з остачею:  $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ .

$$\text{А тому } \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

,де  $S(x)$  - деякий многочлен, який можна проінтегрувати таблицею, а також  $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$ .

Зараз буде пункт, як такий випадок інтегрувати.

II.  $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$

За наслідком основної теореми алгебри, розкладемо  $Q(x)$  таким чином:

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}.$$

Причому дискримінант квадратних трьохчленів - від'ємний.

Тоді за теоремоюдесь із курсу ліналу, ми можемо  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  записати як суму простих дробів:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - a_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{m1}}{x - a_m} + \dots + \frac{A_{mk_m}}{(x - a_m)^{k_m}} +$$

$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + p_s x + q_s} + \dots + \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}}.$$

Коротше, залишається розглянути 4 вигляди інтегралу:

$$1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

$$3) \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx \equiv$$

$$\text{Знаменник розпишу як } x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}.$$

$$\text{Зробимо заміну: } x + \frac{p}{2} = t \Rightarrow dx = dt$$

$$\text{Також } Bx+C = Bt - B\frac{p}{2} + C.$$

$$\text{Перепозначення: } \frac{4q-p^2}{4} = a^2 > 0 \quad C - B\frac{p}{2} = M.$$

$$\equiv \int \frac{Bt+M}{t^2+a^2} dt = B \int \frac{t}{t^2+a^2} dt + M \int \frac{1}{t^2+a^2} dt \equiv$$

$$\int \frac{t}{t^2+a^2} dt = \frac{dt^2}{2(t^2+a^2)} = \frac{1}{2} \ln|t^2+a^2|$$

$$\int \frac{1}{t^2+a^2} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1+(\frac{t}{a})^2} dt = \frac{1}{a} \int \frac{d\frac{t}{a}}{1+(\frac{t}{a})^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$$

$$\equiv \frac{B}{2} \ln|t^2+a^2| + \frac{M}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

Ну а далі робимо зворотню заміну - інтеграл розв'язаний.

$$4) \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l} dx \equiv$$

Тут робимо ті самі заміни, що в 3)

$$\equiv \int \frac{Bt+M}{(t^2+a^2)^l} dt = B \int \frac{t}{(t^2+a^2)^l} dt + M \int \frac{1}{(t^2+a^2)^l} dt$$

Ну і тут я ланцюг рівностей зупиню, якщо перший інтеграл - ще ок, то другий - це дупа

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^l} dt = \int \frac{dt^2}{2(t^2+a^2)^l} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-l)s^{l-1}}$$

$$\int \frac{1}{(t^2+a^2)^l} dt \equiv \quad u = \frac{1}{(t^2+a^2)^l} \quad dv = dt$$

$$\equiv \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{l+1}} dt + \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l \left( \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^l} - a^2 \frac{dt}{(t^2+a^2)^{l+1}} \right)$$

$$\text{Позначимо за } I_l = \int \frac{t}{(t^2+a^2)^l} dt$$

Тоді маємо таке рівняння:

$$I_l = \frac{t}{(t^2+a^2)^l} + 2l \cdot I_l - 2la^2 \cdot I_{l+1}$$

Залишилось виразити  $I_{l+1}$  та розв'язати рівняння рекурсивно, причому  $I_1$  ми вже рахували.

$$1)+2)+3)+4) \implies \text{інтеграл } \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx - \text{розв'язаний.}$$

$$\textbf{Example 1.4.1} \quad \text{Обчислити } \int \frac{x^4}{1+x^3} dx$$

Оскільки  $\deg(x^4) > \deg(1+x^3)$ , то ми поділимо многочлени. Отримаємо:

$$\int \frac{x^4}{1+x^3} dx = \int x - \frac{x}{x^3+1} dx = x^2 - \int \frac{x}{x^3+1} dx.$$

Обчислимо другий інтеграл. Перед цим розкладемо дріб на суму простих дробів методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \equiv$$

$$A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 1 \\ A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{3}, B = \frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{=} -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3} \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

Таким чином, треба порахувати такий інтеграл:

$$\int \frac{x}{x^3+1} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx \boxed{=}$$

І розглянемо другий інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{4x+4}{(2x-1)^2+3} dx = \int \frac{4x-2}{(2x-1)^2+3} dx + \int \frac{6}{(2x-1)^2+3} dx = \\ &= \ln((2x-1)^2+3) + 6 \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \ln(4x^2-4x+4) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\boxed{=} -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln(4x^2-4x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

Разом отримаємо:

$$\int \frac{x^4}{1+x^3} dx = x^2 + \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \ln(4x^2-4x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

**Example 1.4.2** Обчислити  $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

Можна скористатися отриманою рекурентною формулою, а можна зробити ті самі кроки.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^1} dx &= \operatorname{arctg} x \\ \int \frac{1}{(x^2+1)^1} dx &\stackrel{u=\operatorname{arctg} x, dv=dx}{=} \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\ \Rightarrow \operatorname{arctg} x &= \frac{x}{x^2+1} + 2 \operatorname{arctg} x - 2 \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\ \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C \end{aligned}$$

## 1.5 Інтегрування тригонометричних функцій

I. Розглянемо  $\int \sin^k x \cos^m x dx$ , де  $k, m \in \mathbb{Z}$ . Маємо такі заміни:

1)  $k$  - непарне, тобто  $k = 2l + 1$ , тоді заміна:  $\cos x = t$ .

2)  $m$  - непарне, тобто  $m = 2l + 1$ , тоді заміна:  $\sin x = t$ .

3)  $k, m$  - парні, тобто  $k = 2l, m = 2n$ , тоді знижуємо степені формулами:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Всі ці заміни приведуть до інтегрування дробово-раціональних виразів.

**Example 1.5.1** Обчислити  $\int \cos^3 x dx$

Заміна:  $t = \sin x$ , випадок 2), тоді  $dt = \cos x dx$

$$\int \cos^3 x dx = \int (1-t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

II. Розглянемо  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , де  $R$  - дробово-раціональний вираз від  $\sin x, \cos x$ . Маємо таку заміну - її ще називають **універсальною тригонометричною підстановкою**:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Підставивши, ми отримуємо випадок інтегрування дробово-раціональних виразів.



**Example 1.5.2** Обчислити  $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$

Заміна:  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , випадок II. Тоді беремо решта заміни звідси, з нашого пункту.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 - 3 \cos x} &= \int \frac{1}{5 - 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2 dt}{5 + 5t^2 - 3 + 3t^2} = \int \frac{dt}{4t^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2t + C = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C \end{aligned}$$

Але універсальна підстановка не завжди може бути ефективною.

III. Проводжимо розглядати  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ . Нехай є кілька випадків:

- 1)  $R(-u, v) = -R(u, v)$ , тоді заміна:  $\cos x = t$ ;
- 2)  $R(u, -v) = -R(u, v)$ , тоді заміна:  $\sin x = t$ ;
- 3)  $R(-u, -v) = R(u, v)$ , тоді заміна:  $\operatorname{tg} x = t$  або  $\operatorname{ctg} x = t$ .

Без доведення. Важкі алгебраїчні перетворення.

**Example 1.5.3** Обчислити  $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$ .

Маємо  $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x}$ , зауважимо, що  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , тож беремо заміну  $t = \cos x$ . Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx &= \int \frac{1}{(2 + t)(1 - t^2)} dt = \dots = \frac{1}{3} \ln |t + 2| - \frac{1}{2} \ln |t + 1| + \frac{1}{6} \ln |t - 1| + C = \\ &= \frac{1}{3} \ln |\cos x + 2| - \frac{1}{2} \ln |\cos x + 1| + \frac{1}{6} \ln |\cos x - 1| + C. \end{aligned}$$

## 1.6 Інтегрування ірраціональних виразів

I. Розглянемо  $\int R \left( \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[k_n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$ , де  $R$  - дробово-раціональний вираз, причому  $ad - cb \neq 0$ .

Заміна:  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ , де число  $m = \operatorname{lcm}(k_1, \dots, k_n)$ .

Виразимо  $x$  з цього рівняння:

$$ax + b = t^m cx + t^m d \implies x = \frac{t^m d - b}{a - ct^m}$$

$$\text{А потім шукаємо } dx = \frac{mt^{m-1}(ad - bc)}{(a - ct)^2} dt.$$

Підставивши, ми отримуємо інтеграл дробово-раціонального виразу.

**Example 1.6.1** Обчислити  $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$

Заміна:  $t^2 = x + 1$ . Тоді  $x = t^2 - 1 \implies dx = 2t dt$

$$\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{t + 2}{t^4 - t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t + 2}{t^3 - 1} dt \quad \boxed{=}$$

обчислення цього інтегралу проводиться як в п. 4, тому я пропускаю цей момент

$$\boxed{=} - \ln(t^2 + t + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} + 2 \ln |t - 1| + C =$$

$$= - \ln(x + 2 + \sqrt{x+1}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{3}} + 2 \ln |\sqrt{x+1} - 1| + C$$

II. Розглянемо такі інтеграли:

$$1) \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

Заміна:  $x = a \sin t \implies dx = a \cos t dt$

$$2) \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

Заміна:  $x = a \operatorname{tg} t \implies dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$

$$3) \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

$$\text{Заміна: } x = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 t} \sin t dt$$

Усі заміни приведуть до інтегралу тригонометричних функцій.

**Example 1.6.2** Обчислити  $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

Заміна:  $x = 2 \sin t$ , випадок 1). Тоді  $dx = 2 \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4 - x^2} dx &= \int 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = \int 2(1 + \cos 2t) dt = 2t + \sin 2t + C = 2t + 2 \sin t \cos t + C = \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} + 2 \frac{x}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x \sqrt{4 - x^2}}{2} + C \end{aligned}$$

## 1.7 Диференціальний біном

Розглянемо  $\int x^m (ax^n + b)^p dx$ , де  $m, n, p \in \mathbb{Q}$ . Існують лише три випадки, як його розв'язати, для цього я наведу діаграму нижче, які застосовувати заміни.

Але для початку оскільки  $m, n, p \in \mathbb{Q}$ , то я запишу як дріб  $m = \frac{s_1}{q_1}$ ,  $n = \frac{s_2}{q_2}$ ,  $p = \frac{s_3}{q_3}$ .

$$\begin{array}{ccccc} p \in \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{ні}} & \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{ні}} & p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{ні}} \text{не обчислюється} \\ \downarrow \text{так} & & \downarrow \text{так} & & \downarrow \text{так} \\ x = t^{\text{lcm}(q_1, q_2)} & & ax^n + b = t^{q_3} & & a + bx^{-n} = t^{q_3} \end{array}$$

Заміни називають **підстановками Чебишова**, що приводять до інтегралу дробово-раціональних виразів. Якщо жодна з пунктів не спрацює, то інтеграл не може бути обчислений через елементарні функції (без доведення).

**Example 1.7.1** Обчислити  $\int \sqrt[3]{x - x^3} dx = \int x^{\frac{1}{3}} (1 - x^2)^{\frac{1}{3}} dx$

Тут у нас  $m = \frac{1}{3}$ ,  $n = 2$ ,  $p = \frac{1}{3}$

Спрацює 3), тому що  $p + \frac{m+1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = 1 \in \mathbb{Z}$

Заміна:  $-1 + x^{-2} = t^3$

$$-2x^{-3} dx = 3t^2 dt$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{x - x^3} dx &= \int x^{\frac{1}{3}} (1 - x^2)^{\frac{1}{3}} dx = \int (x^{-2} - 1)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} dx = \int t \cdot x \cdot \frac{3t^2 x^3 dt}{-2} = \int \frac{3t^3 dt}{-2(t^3 + 1)^2} = \\ &= \frac{3}{-2} \left( \int \frac{dt}{t^3 + 1} - \int \frac{dt}{(t^3 + 1)^2} \right) \quad \square \end{aligned}$$

обчислення цього інтегралу проводиться як в п. 4, тому я пропускаю цей момент

$$\begin{aligned} \square &= -\frac{\ln|t+1|}{2} + \frac{\ln(t^2-t+1)}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\ln|t+1|}{3} - \frac{\ln(t^2-t+1)}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \\ &\frac{t}{2t^3+2} + C = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{6} \ln|t+1| + \frac{1}{12} \ln(t^2-t+1) - \frac{\sqrt{3}}{6} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{t}{2t^3+2} + C$$

І підставляємо  $t = \sqrt[3]{x^{-2} + 1}$ .

## 2 Визначений інтеграл

### 2.1 Підхід Рімана

**Definition 2.1.1** Розбиттям множини  $[a, b]$  називають множину точок  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ , для яких

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

**Definition 2.1.2** Позначимо за  $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ . Тоді числом

$$|\tau| = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$$

називають діаметром (або дрібністю) розбиття  $\tau$ .

**Definition 2.1.3** Задані розбиття  $\tau, \tau'$  відрізка  $[a, b]$ . Якщо  $\tau \subset \tau'$ , то  $\tau'$  називають підрозбиттям розбиття  $\tau$ .

**Proposition 2.1.4** Задано  $\tau'$  - підрозбиття для  $\tau$ . Тоді  $|\tau'| \leq |\tau|$ .

**Proof.**

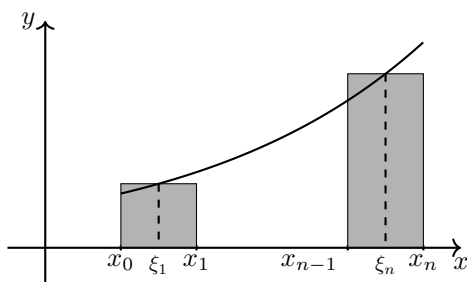
Дійсно, із розбиття ми можемо отримати підрозбиття шляхом додавання точок. Тоді деякі інтервали будуть ділитись на підінтервали через додавання точки. Відповідно діаметр зменшується. ■

**Definition 2.1.5** Задано  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  - розбиття відрізка  $[a, b]$ . Елементи множини  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  називають **відміченими точками**. Тут  $\xi_1 \in [x_0, x_1), \xi_2 \in [x_1, x_2), \dots, \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$ .

**Definition 2.1.6** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , розбиття  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  та відмічені точки  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ .

**Інтегральною сумою Рімана** функції  $f$  для нашого розбиття  $\tau$  та відмічених точок називають число:

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$



**Definition 2.1.7** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Функція  $f$  називається **інтегрованою за Ріманом** на  $[a, b]$ , якщо існує таке число  $I \in \mathbb{R}$ , для якого виконана умова:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall(\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies |\sigma(\tau, \xi, f) - I| < \varepsilon$$

Число  $I$  називають **інтегралом Рімана**.

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Позначення:  $I = \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sigma(f, \tau, \xi)$  (трошки нелегально, тому що не знаю, що таке границя за базою).

Множина інтегрованих функцій за Ріманом позначається так:  $\mathcal{R}([a, b])$ .

**Remark 2.1.8** Детально переформулюю частину означення: для кожного розбиття  $\tau$ , якщо вона є скільки завгодно малою, то тоді виконується нерівність для кожної множини обраних точок  $\xi$ . Також нотація  $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sigma(f, \tau, \xi)$  - це не границя функції  $\sigma$  в звичному вигляді, а трохи іншої специфікації границя.

**Example 2.1.9** Доведемо, що функція  $f(x) = 1 \in \mathcal{R}([a, b])$ , а також  $\int_a^b 1 dx = b - a$ .

Для початку зафіксуємо розбиття  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  та відмітимо точки  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ . Це аби знайти інтегральну суму:

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

$$\sigma(1, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a.$$

І ця інтегральна сума має це значенням при довільному розбитті. Якщо встановити  $I = b - a$ , то тоді:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall(\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies |\sigma(\tau, \xi, f) - I| = |b - a - (b - a)| = 0 < \varepsilon.$$

Отже,  $f(x) = 1 \in \mathcal{R}([a, b])$ , а інтеграл  $\int_a^b 1 dx = b - a$ .

**Theorem 2.1.10** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Число  $I$  - інтеграл Рімана  $\iff \forall(\tau_n, \xi_n) : |\tau_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \sigma(f, \tau_n, \xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$ .

Зрозуміло. Фактично, це можна вважати як означення 'за Гейне', але не зовсім. Проте схожі.

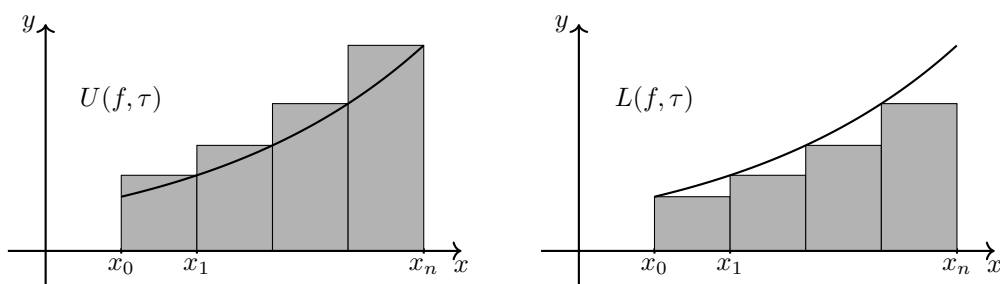
## 2.2 Суми Дарбу

**Definition 2.2.1** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - обмежена. Визначмо такі значення для розбиття  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ :

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad k = 1, \dots, n$$

Верхньою та нижньою сумою Дарбу називають такі суми:

$$U(f, \tau) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad L(f, \tau) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$



**Remark 2.2.2** Із означення випливає, що  $L(f, \tau) \leq \sigma(f, \tau, \xi) \leq U(f, \tau)$ , оскільки  $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$ .

**Lemma 2.2.3** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - обмежена та будь-яке розбиття  $\tau$ . Тоді маємо:

$$L(f, \tau) = \inf_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi) \quad U(f, \tau) = \sup_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi)$$

**Proof.**

Зафіксуємо розбиття  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , тоді  $f$  - обмежена на  $[x_{k-1}, x_k], \forall k$ .

А тепер візьмемо деякий набір точок  $\xi$ , тоді зрозуміло, що  $f(\xi_k) \leq M_k, \forall k \implies f(\xi_k) \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k$

Просумуємо всі рівняння, які тут в нас є - тоді отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \implies \sigma(f, \tau, \xi) \leq U(f, \tau)$$

А далі зафіксуємо  $\varepsilon > 0$ . Оскільки  $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ , то тоді  $\exists x_\varepsilon : f(x_\varepsilon) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$ .

І ось ці точки  $x_\varepsilon = \xi'_k$  - це буде мій набір точок, який існує. Тоді маємо

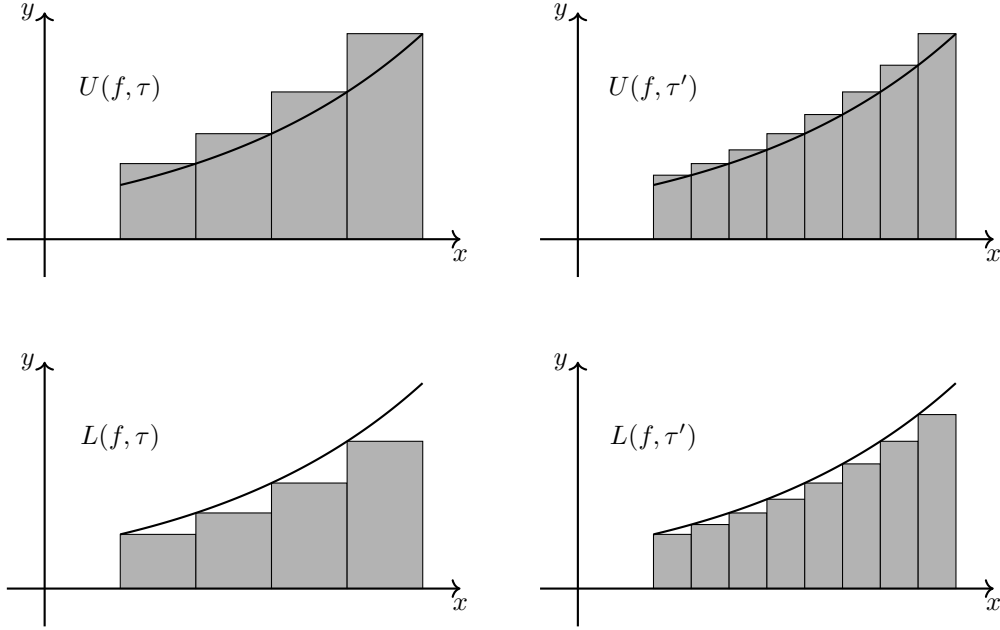
$$f(\xi'_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \implies f(\xi'_k) \Delta x_k > M_k \Delta x_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k$$

Аналогічно просумуємо всі рівняння - отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi'_k) \Delta x_k > \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k \implies S_{\tau, \xi'}(f) > U(f, \tau) - \varepsilon$$

Остаточно, ми отримали  $U(f, \tau) = \sup_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi)$ . Випадок  $L(f, \tau) = \inf_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi)$  аналогічний. ■

**Lemma 2.2.4** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - обмежена та розбиття  $\tau$ . Також задамо підрозбиття  $\tau'$ . Тоді  $U(f, \tau) \geq U(f, \tau')$ , а також  $L(f, \tau) \leq L(f, \tau')$ .



**Proof.**

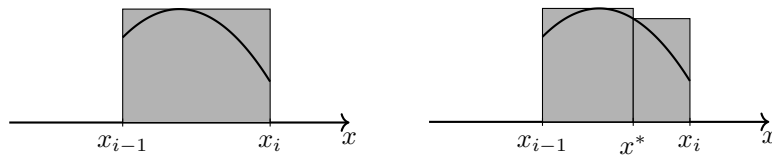
Достатньо розглянути підрозбиття  $\tau' = \tau \cup \{x^*\}$ , припустимо  $x^* \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тому що якщо в мене буде більше точок, то будемо поступово їх додавати.

$$U(f, \tau) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = M_i \Delta x_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n M_k \Delta x_k \geq$$

$$\text{Зауважимо, що } M_i \Delta x_i = M_i(x_i - x_{i-1}) = M_i(x_i - x^* + x^* - x_{i-1}) = M_i(x_i - x^*) + M_i(x^* - x_{i-1}) \geq$$

$$\tilde{M}(x_i - x^*) + \tilde{M}(x^* - x_{i-1})$$

$$\text{де } \tilde{M} = \sup_{x \in [x^*, x_i]} f(x) \quad \tilde{M} = \sup_{x \in [x_{i-1}, x^*]} f(x)$$



$$\geq \sum_{k=1, k \neq i}^n M_k \Delta x_k + \tilde{M}(x_i - x^*) + \tilde{M}(x^* - x_{i-1}) = U(f, \tau \cup \{x^*\}) = U(f, \tau').$$

Випадок  $L(f, \tau) \leq L(f, \tau')$  аналогічний. ■

**Lemma 2.2.5** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - обмежена. Візьмемо будь-які два розбиття  $\tau', \tau''$ . Тоді  $L(f, \tau') \leq U(f, \tau'')$ .

**Proof.**

Зафіксуємо  $\tau = \tau' \cup \tau''$  - це є підрозбиттям одночасно розбиття  $\tau'$  та розбиття  $\tau''$ . Тоді за попередньою лемою,

$$L(f, \tau') \leq L(f, \tau) \leq U(f, \tau) \leq U(f, \tau'').$$

■

**Definition 2.2.6** Верхнім/нижнім інтегралом Дарбу будемо називати такі вирази:

$$I^*(f) = \inf_{\tau} U(f, \tau) \quad I_*(f) = \sup_{\tau} L(f, \tau)$$

**Remark 2.2.7** Справедлива така нерівність:  $I_*(f) \leq I^*(f)$ .

Впливає з ційно доведеної леми.

**Proposition 2.2.8** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - обмежена. Тоді

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} L(f, \tau) = I_*(f) \quad \lim_{|\tau| \rightarrow 0} U(f, \tau) = I^*(f).$$

**Proof.**

Маємо  $I_*(f) = \sup_{\tau} L(f, \tau)$ , тоді звідси

$$\forall \tau : L(f, \tau) \leq I_*(f)$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau_\varepsilon : L(f, \tau_\varepsilon) > I_*(f) - \varepsilon.$$

Встановимо  $\delta = \frac{|\tau_\varepsilon|}{2}$ . Тоді  $\forall \tau : |\tau| \leq |\tau_\varepsilon| < \delta \implies I_*(f) - \varepsilon < L(f, \tau_\varepsilon) \leq L(f, \tau) \leq I_*(f) < I_*(f) + \varepsilon$ .

Тобто звідси отримали, що  $|L(f, \tau) - I_*(f)| < \varepsilon$ , що й доводить рівність  $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} L(f, \tau) = I_*(f)$ .

Аналогічні міркування для другої рівності.

■

## 2.3 Існування інтеграла

### Theorem 2.3.1 Необхідна умова інтегрованості

Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $f$  - обмежена на  $[a, b]$ .

**Proof.**

Оскільки  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , то звідси  $\exists I \in \mathbb{R}$ , для якого виконано:

$$\text{для } \varepsilon = 1 : \exists \delta : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies \forall \xi : |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < 1 \implies |\sigma(f, \tau, \xi)| < |I| + 1.$$

Припустимо, що  $f$  - не обмежена зверху, тоді  $\exists k_0 = \overline{1, n} : f$  - необмежена на  $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ . Тобто  $\forall M > 0 : \exists x \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}] : f(x) > M$ . Якщо встановити  $M = j$ , то знайдеться послідовність  $\{x_j, j \geq 1\} = \{\xi_{k_0}^{(j)}, j \geq 1\}$ , для якої  $f(\xi_{k_0}^{(j)}) \rightarrow +\infty$ .

Розглянемо послідовність відмічених точок  $\{\xi_j, j \geq 1\}$ , де  $\xi_j = \{\xi_1, \dots, \xi_{k_0-1}, \xi_{k_0}^{(j)}, \xi_{k_0+1}, \dots, \xi_n\}$ . А далі розглянемо послідовність інтегральних сум  $\{\sigma_j, j \geq 1\} = \{\sigma(f, \tau, \xi_j), j \geq 1\}$ . Тоді

$$\sigma_j = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{k_0-1})\Delta x_{k_0-1} + f(\xi_{k_0}^{(j)})\Delta x_{k_0} + f(\xi_{k_0+1})\Delta x_{k_0+1} + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n \rightarrow +\infty.$$

Проте ми ж мали, що  $\forall \xi_j : |\sigma(f, \tau, \xi_j)| \leq 1 + |I|$ . Суперечність! ■

**Remark 2.3.2** Взагалі-то кажучи, в іноземних підручниках під час введення означення інтегралу Рімана одразу вважають  $f$  - обмеженою на  $[a, b]$ .

### Theorem 2.3.3 Перший критерій інтегрованості

Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff f \text{ - обмежена на } [a, b] \text{ та } I_*(f) = I^*(f).$$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді автоматично  $f$  - обмежена та

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Оскільки  $\forall \xi : \sigma(f, \tau, \xi) < I + \varepsilon$ , то зокрема  $\sup_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi) = U(f, \tau) \leq I + \varepsilon$ .

Оскільки  $\forall \xi : \sigma(f, \tau, \xi) > I - \varepsilon$ , то зокрема  $\inf_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi) = L(f, \tau) \geq I - \varepsilon$ .

Додатково

$$I^*(f) = \inf_{\tau} U(f, \tau) \leq U(f, \tau) \leq I + \varepsilon$$

$$I_*(f) = \sup_{\tau} L(f, \tau) \geq L(f, \tau) \geq I - \varepsilon.$$

Остаточно  $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq I + \varepsilon - I + \varepsilon = 2\varepsilon$ , виконано  $\forall \varepsilon > 0 \implies I^*(f) = I_*(f)$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $f$  - обмежена на  $[a, b]$  та  $I^*(f) = I_*(f) \stackrel{\text{позн.}}{=} I$ .

Нехай  $\varepsilon > 0$ . Тоді за критерієм супремуму та інфімуму,  $\exists \tau_\varepsilon^1, \tau_\varepsilon^2 : \begin{matrix} L(f, \tau_\varepsilon^1) > I - \varepsilon \\ U(f, \tau_\varepsilon^2) < I + \varepsilon \end{matrix}$ .

Встановимо  $\delta = |\tau_\varepsilon^1 \cup \tau_\varepsilon^2|$ . Тоді  $\forall(\tau, \xi) : |\tau| < \delta \implies$

$$I - \varepsilon < L(f, \tau_\varepsilon^1) \leq L(f, \tau) \leq \sigma(f, \tau, \xi) \leq U(f, \tau) \leq U(f, \tau_\varepsilon^2) < I + \varepsilon \implies |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Таким чином,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . ■

**Example 2.3.4** Задано  $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  - функція Діріхле. З'ясуємо, чи  $\mathfrak{D} \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Задамо довільне розбиття  $\tau = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ . Розглянемо якийсь відрізок  $[x_{k-1}, x_k]$ . Якщо обидва числа раціональні, то знайдеться ірраціональне. Якщо обидва числа ірраціональні, то знайдеться раціональне. А тому в будь-якому випадку  $M_k = 1$  та  $m_k = 0$ .

Отже  $U(\mathfrak{D}, \tau) = b - a$ ,  $L(\mathfrak{D}, \tau) = 0$ .

Нарешті,  $I_*(\mathfrak{D}) = b - a$  та  $I^*(\mathfrak{D}) = 0$ , оскільки ми отримуємо величину, що відносно не залежить від розбиття. За критерієм,  $I_*(\mathfrak{D}) \neq I^*(\mathfrak{D}) \implies \mathfrak{D} \notin \mathcal{R}([a, b])$ .

**Remark 2.3.5** Один з прикладів, коли із обмеженості функції не випливає її інтегрованість.

**Corollary 2.3.6** Якщо функція  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  та  $I = \int_a^b f(x) dx$  - його відповідний інтеграл, то справедлива нерівність:

$$L(f, \tau) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, \tau).$$

### Theorem 2.3.7 Другий критерій інтегрованості

Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff f$  - обмежена на  $[a, b]$  та  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau : U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $f$  - обмежена та  $I_*(f) = I^*(f)$ . За критеріями  $\sup, \inf$ , маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau_1, \tau_2 : \begin{matrix} L(f, \tau_1) > I - \varepsilon \\ U(f, \tau_2) < I + \varepsilon \end{matrix}$$

Отже,  $U(f, \tau) - L(f, \tau) < 2\varepsilon$  для  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau : U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$ .

Тоді  $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$ . Отже,  $I^*(f) = I_*(f) \implies f \in \mathcal{R}([a, b])$ . ■

**Remark 2.3.8** Можна інакше переписати:  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff \lim_{|\tau| \rightarrow 0} (U(f, \tau) - L(f, \tau)) = 0$ .

## 2.4 Класи інтегрованих функцій

**Theorem 2.4.1** Задано функцію  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$

**Proof.**

Нехай  $\varepsilon > 0$  задано.

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \exists \tau_1 : U(f, \tau_1) - L(f, \tau_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$g \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \exists \tau_2 : U(g, \tau_2) - L(g, \tau_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$U(f, \tau) - L(f, \tau) \leq U(f, \tau_1) - L(f, \tau_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(g, \tau) - L(g, \tau) \leq U(g, \tau_2) - L(g, \tau_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies U(f + g, \tau) - L(f + g, \tau) \leq U(f, \tau) + U(g, \tau) - L(f, \tau) - L(g, \tau) < \varepsilon.$$

Таким чином, ми отримали, що  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . ■

**Theorem 2.4.2** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b]), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

*Доведення є аналогічним.*

*Вказівка:*  $\sup \alpha f(x) = \alpha \sup f(x), \alpha > 0$   $\sup \alpha f(x) = \alpha \inf f(x), \alpha \leq 0$ .

**Theorem 2.4.3** Функція  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff \forall c \in (a, b) : f \in \mathcal{R}([a, c])$  та  $f \in \mathcal{R}([c, b])$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , тобто  $\forall \varepsilon : \exists \tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} : U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$ .

Зафіксуємо точку  $c \in (a, b)$ , у нас виникне два випадки:

I.  $c \in \tau \Rightarrow c = x_k, k = \overline{1, n-1}$ .

Тоді маємо розбиття  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ , де  $\tau_1 = \{x_0, \dots, c\}, \tau_2 = \{c, \dots, x_n\}$ . Таким чином,

$$U(f, \tau_1) - L(f, \tau_1) = U(f, \tau_1) + U(f, \tau_2) - L(f, \tau_1) - L(f, \tau_2) - U(f, \tau_2) + L(f, \tau_2) = U(f, \tau) - L(f, \tau) - (U(f, \tau_2) - L(f, \tau_2)) \leq U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon.$$

$U(f, \tau_2) - L(f, \tau_2) < \varepsilon$  аналогічними міркуваннями.

Отже,  $f \in \mathcal{R}([a, c])$  та  $f \in \mathcal{R}([c, b])$ .

II.  $c \notin \tau \Rightarrow c \neq x_k, k = \overline{1, n-1}$ .

Отримаємо підрозбиття  $\tau' = \tau \cup \{c\}$ . А для підрозбиття  $U(f, \tau') - L(f, \tau') \leq U(f, \tau) - L(f, \tau) < \varepsilon$ .

А ось тут ми повертаємось до пункту I, розглядаючи випадок, що  $c \in \tau'$ .

$\Leftarrow$  Зрозуміло. ■

**Theorem 2.4.4** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - монотонна. Тоді  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**Proof.**

Розглянемо випадок, коли  $f$  - нестрого зростає на  $[a, b]$ .

Нехай  $\varepsilon > 0$ . Тоді розглянемо таке розбиття  $\tau$ , щоб  $|\tau| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ . Тоді маємо:

$$\begin{aligned} U(f, \tau) - L(f, \tau) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k \leq |\tau| \sum_{k=1}^n (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \\ &= |\tau| (f(x_n) - f(x_0)) = |\tau| (f(b) - f(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . ■

**Theorem 2.4.5** Задано функцію  $f \in C([a, b])$ . Тоді  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**Proof.**

$$f \in C([a, b]) \Rightarrow f \in C_{unif}([a, b]) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Оберемо таке розбиття  $\tau$ , щоб  $|\tau| < \delta$ .

$$\text{Також } f \in C([a, b]) \Rightarrow f \in C([x_{k-1}, x_k]) \Rightarrow \exists f'(x'_k) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \exists f''(x''_k) = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

$$\text{Позначмо } m_k = f(x'_k), M_k = f(x''_k). \text{ Оскільки } |\tau| < \delta, \text{ то звідси } |x'_k - x''_k| \leq |x_{k-1} - x_k| \leq |\tau| < \delta \Rightarrow M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

$$\text{Отже, } U(f, \tau) - L(f, \tau) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon. \text{ А тому й } f \in \mathcal{R}([a, b]). \quad \blacksquare$$

**Theorem 2.4.6** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - обмежена та неперервна всюду, окрім в точках  $c_1, c_2, \dots, c_m$ . Тоді  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**Proof.**

Обмежимося випадком, що  $f \in C([a, b] \setminus \{c_1\})$ . А далі просто за МІ.

Функція  $f$  - обмежена, тоді  $\exists C > 0 : \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq C$ .

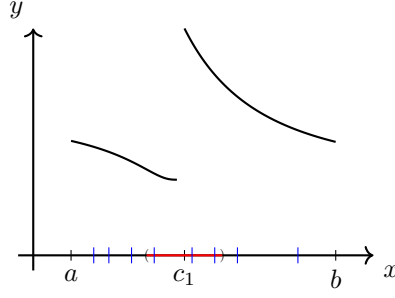
Заздалегідь нехай  $\varepsilon > 0$ . Розглянемо множину  $D = [a, b] \setminus (c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1)$ , де  $\delta_1 > 0$ . Потім вкажу, чому воно дорівнює. Також позначу  $(c_1 - \delta, c_1 + \delta) = V$ .

Оскільки  $f \in C([a, b] \setminus \{c_1\})$ , то  $f \in C(D)$ , тоді за Кантором,

$$\exists \delta_2 : \forall x', x'' : |x' - x''| < \delta_2 \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Встановимо  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , а далі візьмемо таке розбиття  $\tau$ , щоб  $|\tau| < \delta$ .





$$U(f, \tau) - L(f, \tau) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k: [x_{k-1}, x_k] \cap V = \emptyset} (M_k - m_k) \Delta x_k + \sum_{k: [x_{k-1}, x_k] \cap V \neq \emptyset} (M_k - m_k) \Delta x_k \quad \boxed{<} \quad$$

Перша сума - там, де відрізки не потрапили цілком в окіл т.  $c_1$ . В силу другої теореми Вейєрштрасса та теореми Кантора (аналогічні міркування з попередньої теореми),  $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ .

Друга сума - там, де відрізки потрапили в окіл т.  $c_1$ . В силу обмеженості функції  $f$  маємо, що  $M_k - m_k \leq 2C$ . Також зауважимо, що  $\sum_{k: [x_{k-1}, x_k] \cap V \neq \emptyset} \Delta x_k \leq 2\delta_1 + 2|\tau| < \delta_1 + 2\delta \leq 4\delta_1$ .

Тому що червоний інтервал має довжину  $2\delta_1$  та є два відрізки, частина якої всередині та інша поза неї. Кожний з двох цих відрізків не перевищує  $|\tau|$ , а тому й  $\delta$ .

$$\boxed{<} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + 2C \cdot 4\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2} + 8C\delta_1 = \varepsilon.$$

От тепер я надам  $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{16C}$ , але це можна було зробити з самого початку.

Таким чином,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . ■

**Example 2.4.7** Розглянемо декілька прикладів:

1.  $f(x) = \operatorname{sgn} x \in \mathcal{R}([a, b])$ , бо  $|f(x)| \leq 1$  та всюди неперервна, окрім т.  $x = 0$ , коли  $0 \in [a, b]$ .
2.  $g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \in \mathcal{R}([-1, 1])$ , бо  $|g(x)| \leq 1$  та всюди неперервна, окрім т.  $x = 0$ .

**Theorem 2.4.8** Задано функцію  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $f \cdot g \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**Proof.**

Оскільки  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ , то по-перше, вони обмежені, тобто

$$\exists C_1, C_2 : \forall x : |f(x)| \leq C_1, |g(x)| \leq C_2.$$

По друге,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \tau_1, \tau_2 :$

$$U(f, \tau_1) - L(f, \tau_1) < \frac{\varepsilon}{2C_1} \quad U(g, \tau_2) - L(g, \tau_2) < \frac{\varepsilon}{2C_2}.$$

Нам буде необхідна ось така оцінка:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq C_1 \sup |g(x) - g(y)| + C_2 \sup |f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

Це виконано  $\forall x, y \in [a, b]$ . Тоді підберемо такі точки  $x, y$ , щоб ліворуч був отриманий  $\sup$ :

$$\sup |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq C_1 \sup |g(x) - g(y)| + C_2 \sup |f(x) - f(y)|.$$

Перепишемо цю рівність інакше:

$$\sup f(x)g(x) - \inf f(x)g(x) \leq C_1(\sup g(x) - \inf g(x)) + C_2(\sup f(x) - \inf f(x)).$$

А далі встановимо  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ , тоді маємо:

$$\begin{aligned} U(f \cdot g, \tau) - L(f \cdot g, \tau) &= \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)g(x) \cdot \Delta x - \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)g(x) \cdot \Delta x = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)g(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)g(x) \right) \Delta x_k \leq C_1(U(f, \tau) - L(f, \tau)) + C_2(U(g, \tau) - L(g, \tau)) < \\ &\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином,  $f \cdot g \in \mathcal{R}([a, b])$ . ■

**Corollary 2.4.9** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ .

*Вказівка:*  $|f(x)| = f(x) \cdot \operatorname{sgn} f(x)$ .

## 2.5 Властивості інтегралів

### Theorem 2.5.1 Лінійність I

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

**Proof.**

Це є продовженням доведення **Th. 1.4.1.**

Оскільки  $f + g \in \mathcal{R}$ , то звідси маємо  $I^*(f + g) = I_*(f + g) = \int_a^b f(x) + g(x) dx$ .

$$L(f, \tau) + L(g, \tau) \leq L(f + g, \tau) \leq \int_a^b f(x) + g(x) dx \leq U(f + g, \tau) \leq U(f, \tau) + U(g, \tau) < L(f, \tau) + L(g, \tau) + \varepsilon.$$

$$L(f, \tau) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, \tau)$$

Але ми також знаємо такі нерівності:

$$L(g, \tau) \leq \int_a^b g(x) dx \leq U(g, \tau)$$

$$L(f, \tau) + L(g, \tau) \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq U(f, \tau) + U(g, \tau) < L(f, \tau) + L(g, \tau) + \varepsilon.$$

$$-\varepsilon < \int_a^b f(x) + g(x) dx - \left( \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \right) < \varepsilon, \text{ виконано } \forall \varepsilon > 0.$$

$$\text{Отже, } \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad \blacksquare$$

### Theorem 2.5.2 Лінійність II

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

*Зрозуміло.*

### Theorem 2.5.3 Адитивність

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Proof.**

Це є продовженням доведення **Th. 1.4.3.**

$$L(f, \tau) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, \tau) < L(f, \tau) + \varepsilon$$

$$L(f, \tau_1) \leq \int_a^c f(x) dx \leq U(f, \tau_1) < L(f, \tau_1) + \varepsilon$$

$$L(f, \tau_2) \leq \int_c^b f(x) dx \leq U(f, \tau_2) < L(f, \tau_2) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \left( \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right) \right| < 2\varepsilon, \text{ виконано } \forall \varepsilon > 0.$$

$$\text{Отже, } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Theorem 2.5.4** Задано  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Відомо, що  $\forall x \in [a, b] : f(x) \geq 0$ . Тоді  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**Proof.**

Оскільки  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , то тоді  $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f(x) dx$ .

$$\text{Тоді } \int_a^b f(x) dx = I^*(f) \geq U(f, \tau) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \geq 0. \quad \blacksquare$$

**Corollary 2.5.5** Задані  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ . Якщо  $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x)$ , то тоді

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

*Вказівка: розглянути функцію  $h(x) = g(x) - f(x)$ .*

**Corollary 2.5.6**  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$

*Вказівка:*  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$

**Theorem 2.5.7 I теорема про середнє**

Задані функції  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ , причому  $g$  має однаковий знак на  $[a, b]$ . Позначу  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x),$

$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$

Тоді  $\exists c \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x) dx = c \int_a^b g(x) dx.$

**Proof.**

Розглянемо випадок  $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ . Справедлива нерівність:

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \implies m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Якщо  $\int_a^b g(x) dx = 0$ , то звідси  $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ , а число  $c \in [m, M]$  обираємо довільне.

Якщо  $\int_a^b g(x) dx > 0$ , то поділимо нерівність на цю штуку:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M. \text{ Тоді позначимо } c = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$$

$$\text{Звідси } \int_a^b f(x)g(x) dx = c \int_a^b g(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Corollary 2.5.8** Якщо додатково вимагати функцію  $f \in C([a, b])$ , то тоді

$$\exists \xi \in (a, b) : \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

**Proof.**

$f \in C([a, b])$ , то за Больцано-Коші,  $\exists \xi \in [a, b] : c = f(\xi)$ . Ну а далі попередня теорема. ■

## 2.6 Інтеграл як функція верхньої межі

Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Будемо розглядати ось таку функцію  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

**Remark 2.6.1** Додатково існує певна домовленість з інтегралами, щоб було жити простіше:

$$\begin{aligned} \int_a^a f(t) dt &= 0 \\ \int_b^a f(t) dt &= - \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

**Theorem 2.6.2** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $g \in C([a, b])$ .

**Proof.**

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \left| \int_a^{x_1} f(t) dt - \int_a^{x_2} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \right| \leq$$

Оскільки  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , то звідси  $f$  - обмежена на  $[a, b]$ , тобто  $\exists M \geq 0 : \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M.$

$$\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} M dt \right| = M|x_2 - x_1| < M\delta = M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Отже, нехай  $\varepsilon > 0$ . Тоді існує  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ , для якого  $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon.$

Отже,  $g \in C_{unif}([a, b]) \implies g \in C([a, b]).$  ■

**Theorem 2.6.3** Задано функцію  $f \in C([a, b])$ . Тоді  $g \in C'([a, b])$ , причому  $g'(x) = f(x)$ .

**Proof.**

Будемо доводити, що  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f(x)$ .

$$\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left( \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

$$f(x) = \frac{f(x)}{\Delta x} \Delta x = \frac{f(x)}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} dt = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(x) dt.$$

Тоді маємо таку оцінку:

$$\left| \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} - f(x) \right| = \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_x^{x+\Delta x} f(x) dt \right| = \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) - f(x) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)| dt \right| \leq$$

Оскільки  $f \in C([a, b])$ , то звідси  $f \in C_{unif}([a, b])$ , а тому

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . Фіксуємо таке  $\delta$ , щоб  $|\Delta x| < \delta$ .

Тоді  $\forall t \in [x, x + \Delta x]$  або  $[x + \Delta x, x] : |t - x| < |\Delta x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon$ .

$$\leq \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_x^{x+\Delta x} \varepsilon dt \right| = \frac{|x + \Delta x - x|}{|\Delta x|} \varepsilon = \varepsilon.$$

Остаточно  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \Delta x : |\Delta x| < \delta \implies \left| \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} - f(x) \right| < \varepsilon$ . Отже,  $g'(x) = f(x)$ . ■

**Corollary 2.6.4** Функція  $g(x) = F(x)$ . Тобто функція  $g(x) = \int_a^x f(t) dt$  є первісною функції  $f(x)$ , якщо  $f \in C([a, b])$ .

Отже, будь-яка неперервна функція  $f$  має первісну  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  на  $[a, b]$ .

**Theorem 2.6.5 Формула Ньютона-Лейбніца**

Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , яка має первісну  $\Phi$ .

$$\text{Тоді } \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x) \Big|_a^b.$$

**Proof.**

Якщо  $f \in C([a, b])$ , то це є прямим наслідком. Дійсно, за умовою,  $f$  має первісну  $\Phi$ . Але водночас за наслідком,  $f$  має первісну  $F$ , причому  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Тоді  $\Phi(x) = F(x) + C$

$$\begin{cases} \Phi(a) = C \\ \Phi(b) = \int_a^b f(t) dt + C \end{cases} \implies \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

У загальному вигляді доведення відрізняється.

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Встановимо будь-яке розбиття  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , щоб  $|\tau| < \delta$ . Зауважимо, що

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (\Phi(x_1) - \Phi(x_0)) + (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) + \dots + (\Phi(x_n) - \Phi(x_{n-1})).$$

Оскільки  $\Phi$  - первісна, тобто вона диференційована, тоді неперервна як наслідок. Можемо застосувати до кожної дужки теорему Лагранжа:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(\xi_1)\Delta x_1 + \Phi'(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + \Phi'(\xi_n)\Delta x_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Причому  $\xi_k \in (x_k, x_{k-1})$ .

Отже,  $\Phi(b) - \Phi(a) = \sigma(f, \tau, \xi')$ , де  $\xi' = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ . Таким чином, для нашого розбиття  $\xi'$  виконано  $|\sigma(f, \tau, \xi') - I| = |\Phi(b) - \Phi(a) - I| < \varepsilon$ . А це виконано  $\forall \varepsilon > 0$ .

$$\text{Отже, } I = \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a). \quad \blacksquare$$

**Example 2.6.6** Функція  $x^2 \in \mathcal{R}([0, 1])$  в силу монотонності та має первісну  $\frac{x^3}{3}$ .

$$\text{Тоді } \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

**Example 2.6.7** Приклад, де формула Ньютона-Лейбніца не працює

Запишу для початку первісну  $F(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ . Неважко показати, що

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

На жаль, функція  $f$  - необмежена в т.  $x_0 = 0$ , а тому  $f \notin \mathcal{R}([a, b])$ , якщо  $0 \in [a, b]$ . Тим не менш,  $f$  має первісну  $F$ . Проте формула Ньютона-Лейбніца не працює.

**Remark 2.6.8** Отже,  $f$  має первісну  $F$  на  $[a, b] \not\Rightarrow f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**Example 2.6.9** Існує навіть функція  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ , де  $f \in \mathcal{R}([-1, 1])$ , проте не має первісної саме на  $[-1, 1]$ . Спробуємо обчислити інтеграл іншим чином.

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \, dx = \int_{-1}^0 \operatorname{sgn} x \, dx + \int_0^1 \operatorname{sgn} x \, dx.$$

Розглянемо  $g_1(t) = \int_{-1}^t \operatorname{sgn} x \, dx$ , де  $t \in [-1, 0]$ . Оскільки  $\operatorname{sgn} \in \mathcal{R}([-1, 0])$ , то звідси  $g_1 \in C([-1, 0])$ , зокрема:

$$g_1(0) = \int_{-1}^0 \operatorname{sgn} x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \operatorname{sgn} x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} (-1) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-x) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon - 1) = -1.$$

Аналогічно якщо розглянути функцію  $g_2(t) = \int_t^1 \operatorname{sgn} x \, dx$ , де  $t \in [0, 1]$ , то можна отримати, що (пишу уже неформально):

$$g_2(0) = \int_0^1 \operatorname{sgn} x \, dx = \int_0^1 1 \, dx = x \Big|_0^1 = 1.$$

Остаточно отримали  $\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \, dx = -1 + 1 = 0$ .

**Remark 2.6.10** Отже,  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \not\Rightarrow f$  має первісну  $F$  на  $[a, b]$ .

А тепер запишемо теорему, якої не вистачає попередньому підрозділу.

**Theorem 2.6.11** II теорема про середнє

Задані функції  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  та  $g$  - монотонна.

Тоді  $\exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x)g(x) \, dx = g(a) \int_a^c f(x) \, dx + g(b) \int_c^b f(x) \, dx$ .

Додатково ми доводимо цією формулою, що  $f \cdot g \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Перед цим ми розглянемо наступні три леми.

**Lemma 2.6.12** Тотожність Абеля

Встановимо  $A_k = \sum_{p=1}^k a_p$  та  $A_0 = 0$ . Тоді виконується рівність:

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = (A_n b_n - A_{m-1} b_m) - \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

**Proof.**

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^n A_k b_k - \sum_{k=m}^n A_{k-1} b_k = (A_n b_n - A_{m-1} b_m) + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=m+1}^n A_{k-1} b_k \quad \square$$

У другій сумі лічильник замінюємо  $k \rightarrow k-1$ .

$$\square (A_n b_n - A_{m-1} b_m) + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1} = (A_n b_n - A_{m-1} b_m) - \sum_{k=m}^{n+1} A_k (b_{k+1} - b_k) \quad \blacksquare$$

**Remark 2.6.13** Тотожність Абеля дуже схожа на формулу інтегрування частинами, де в якості  $u \rightarrow b_k \Rightarrow du \rightarrow (b_{k+1} - b_k)$ , а також  $dv \rightarrow a_k \Rightarrow v \rightarrow A_k$ .

**Lemma 2.6.14** Задані функції  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  та  $g$  - не зростає на  $[a, b]$  та  $g \geq 0$ .

Тоді  $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x) \, dx = g(a) \int_a^\xi f(x) \, dx$ .

**Proof.**

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x) dx = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(x_{k-1})) dx.$$

Розберемося з другою сумою:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(x_{k-1})) dx \right| &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)| |g(x) - g(x_{k-1})| dx \stackrel{f \in \mathcal{R} \Rightarrow f \text{ - обм.}}{\leq} \\ &\leq C \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(x) - g(x_{k-1})| dx \leq C \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sup_{x, y \in [x_{k-1}, x_k]} |g(x) - g(y)| dx = \\ &= C \sum_{k=1}^n \sup_{x, y \in [x_{k-1}, x_k]} |g(x) - g(y)| \Delta x_k = C \sum_{k=1}^n \left( \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) \right) \Delta x_k = C(U(g, \tau) - L(g, \tau)) \stackrel{|\tau| \rightarrow 0}{\rightarrow} \\ &\stackrel{g \text{ - не зростає} \Rightarrow g \in \mathcal{R}}{\rightarrow} 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(x_{k-1})) dx \stackrel{|\tau| \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \implies \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \stackrel{|\tau| \rightarrow 0}{\rightarrow} \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Лишилось з'ясувати, що приховує перша сума.

Позначимо  $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ . Оскільки  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , то  $F \in C([a, b]) \implies$  вона приймає найбільше, найменше значення. Тоді

$$\sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1})(F(x_k) - F(x_{k-1})) \quad [\equiv]$$

А далі застосуємо тотожність Абеля при  $a_k = F(x_k) - F(x_{k-1})$ ,  $b_k = g(x_{k-1})$ .

$$[\equiv] F(x_n)g(x_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = F(x_n)g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)(g(x_{k-1}) - g(x_k)).$$

Звідси отримаємо таку нерівність:

$$\begin{aligned} mg(a) &= mg(x_{n-1}) + m \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k-1}) - g(x_k)) \leq \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \leq \\ &\leq Mg(x_{n-1}) + M \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k-1}) - g(x_k)) = Mg(a), \text{ де } m = \min_{t \in [a, b]} F(t), M = \max_{t \in [a, b]} F(t). \end{aligned}$$

Якщо  $|\tau| \rightarrow 0$ , то звідси випливає, що  $mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq Mg(a)$ .

Випадок  $g(a) = 0$  ясно. А далі поділимо тепер на  $g(a)$  - отримаємо:

$$m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \implies \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx = F(\xi), \text{ де } \xi \in [a, b] \text{ із теореми Больцано-Коші.}$$

$$\text{Остаточно, } \int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Lemma 2.6.15** Задані функції  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  та  $g$  - не спадає на  $[a, b]$  та  $g \geq 0$ .

$$\text{Тоді } \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x) dx = g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

Або аналогічно, або можна звести до попередньої лему.

Використовуючи першу лему, ми доводимо нашу теорему для неспадної функції. А другою лемою доводимо теорему для незростаючої.

Вказівка: розглянути функцію  $G(x) = g(b) - g(x)$ , якщо  $g$  - не спадає. Для незростаючої аналогічно.

## 2.7 Обчислення визначених інтегралів

### 2.7.1 Заміна змінної

**Theorem 2.7.1** Задано функцію  $f \in C([a, b])$ . Також задано функцію  $\varphi \in C'([\alpha, \beta])$ , причому  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ . Тоді

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

**Proof.**

Оскільки  $f \in C([a, b])$ , то вона має первісну  $F$ , за формулою Ньютона-Лейбніца,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Але оскільки  $\varphi$  - диференційована функція, то звідси функція  $f \circ \varphi \cdot \varphi'$  має первісну  $F \circ \varphi$ . Нарешті, оскільки  $f \circ \varphi \cdot \varphi' \in C([\alpha, \beta])$ , то ми можемо застосувати формулу Ньютона-Лейбніца.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

**Example 2.7.2** Обчислити  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

Якщо обчислювати невизначений інтеграл, то напрошується заміна:

$x = \sin t$ , тоді звідси  $dx = \cos t dt$ .

$$\text{Виникне } \int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt.$$

Тепер виникає питання, чи буде це працювати в визначеному інтегралі.

Маємо  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ , для якої  $f \in C([-1, 1])$ . Також маємо  $\varphi(t) = \sin t$ , додатково

$$\varphi(\alpha) = 0 \implies \sin \alpha = 0 \implies \alpha = 0$$

$$\varphi(\beta) = 1 \implies \sin \beta = 1 \implies \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Відомо, що  $\varphi \in C' \left( \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \right)$ . Тоді заміна змінної працює та

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

## 2.7.2 Інтегрування частинами

**Theorem 2.7.3** Задані функції  $u, v$  - диференційовані на  $[a, b]$ , причому  $u', v' \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

**Proof.**

Оскільки існують  $u', v'$ , то звідси  $u, v \in C([a, b]) \implies u, v \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Розглянемо функцію  $h(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Вона має первісну  $H(x) = u(x)v(x)$ .

Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца, маємо:

$$\int_a^b h(x) dx = H(b) - H(a) = u(b)v(b) - u(a)v(a) = u(x)v(x) \Big|_a^b$$

$$\text{З іншого боку, } \int_a^b h(x) dx = \int_a^b u(x)v'(x) dx + \int_a^b v(x)u'(x) dx = \int_a^b u(x)v'(x) dx + \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

$$\text{Отже, } \int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Example 2.7.4** Обчислити  $\int_1^2 \ln x dx$ .

Маємо  $u = \ln x$ , тоді  $du = \frac{1}{x} dx$  Далі  $dv = dx$ , тоді  $v = x$ .

Важливо, що  $u' = \frac{1}{x}$  та  $v' = 1$  - всі інтегровані, тобто  $u', v' \in \mathcal{R}([1, 2])$ . Тому інтегруємо частинами.

$$\int_1^2 \ln x dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1.$$

**Example 2.7.5 Важливий**

Обчислити  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \stackrel{\text{позн.}}{=} I_n$ .

Розглянемо окремо випадок  $n = 0$  та  $n = 1$ .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Якщо  $n \geq 2$ , то ми будемо інтегрувати частинами, якщо переписати  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx$ .

$$u = \sin^{n-1} x \implies du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$$

$$dv = \sin x \, dx \implies v = -\cos x.$$

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx =$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

$$\text{Таким чином, отримали: } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

$$\text{Якщо } n = 2k, \text{ то } I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Якщо } n = 2k+1, \text{ то } I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$\text{Остаточно, } I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

На цьому ще не все. Зауважимо, що оскільки  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , то тоді  $\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$ , а звідси випливає, що  $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$ .

Тоді отримаємо оцінку  $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$ . За теоремою про двох поліцаїв, маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1. \text{ Якщо цю границю розписати отримаємо результат:}$$

**Theorem 2.7.6 Формула Валліса**

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot (2n-1)}.$$

## 2.8 Застосування визначеного інтеграла

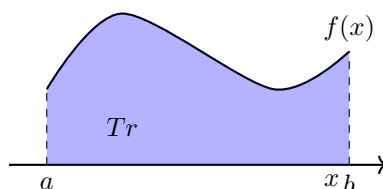
### 2.8.1 Площа криволінійної трапеції

Що таке взагалі **площа**, я буду вважати відомою штукою. Також відомо для мене буде площа прямокутника, що суттєво важливо.

**Definition 2.8.1** Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  так, щоб  $f(x) \geq 0$  та обмежена.

**Криволінійною трапецією** називають таку множину:

$$Tr(f, [a, b]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$$

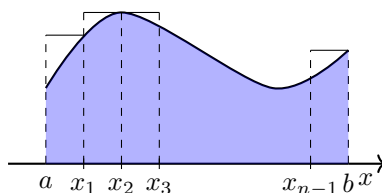
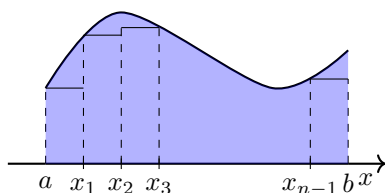


Задамо тепер деяке розбиття  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Через ці точки проведемо вертикальну пряму.

$$\text{Тоді наша площа криволінійної трапеції } S(Tr(f, [a, b])) = \sum_{k=1}^n S(Tr(f, [x_{k-1}, x_k])).$$

На кожному відрізку  $[x_{k-1}, x_k]$  ми:

- впишемо прямокутник  $P'_k$ , висота якої дорівнює  $\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ ;
- опишемо прямокутник  $P''_k$ , висота якої дорівнює  $\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ .





Сума площ вписаних прямокутників дорівнює  $\sum_{k=1}^n \Delta x_k \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = S(P')$ .

Сума площ описаних прямокутників дорівнює  $\sum_{k=1}^n \Delta x_k \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = S(P'')$ .

**Definition 2.8.2** Задано криволінійну трапецію  $Tr(f, [a, b])$ .

**Внутрішньою площею** криволінійної трапеції  $Tr(f, [a, b])$  називають число:

$$S_*(Tr) = \sup_{\tau} S(P')$$

**Зовнішньою площею** криволінійної трапеції  $Tr(f, [a, b])$  називають число:

$$S^*(Tr) = \inf_{\tau} S(P'')$$

**Definition 2.8.3** Криволінійна трапеція називається **квадрованою**, якщо

$$S_*(Tr) = S^*(Tr) = S$$

Число  $S$  називається **площею** криволінійної трапеції.  
(Означення працює не тільки для криволінійної трапеції).

**Theorem 2.8.4** Задано функцію  $f \in C([a, b])$  та  $f(x) \geq 0$ . Задано криволінійну трапецію  $Tr(f, [a, b])$ .

Тоді вона є квадрованою та  $S(Tr) = \int_a^b f(x) dx$ .

**Proof.**

Оскільки  $f \in C([a, b])$ , то  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Звідси  $S_*(Tr) = I_*(f) = I^*(f) = S^*(Tr)$ . Тобто  $Tr$  - квадрована.

Автоматично звідси  $S(Tr) = \int_a^b f(x) dx$ . ■

**Theorem 2.8.5** Задані функції  $f, g \in C([a, b])$ , причому  $f(x) \geq g(x)$ . Задано фігуру

$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [f(x), g(x)]\}$ . Тоді вона є квадрованою та  $S(G) = \int_a^b f(x) - g(x) dx$ .

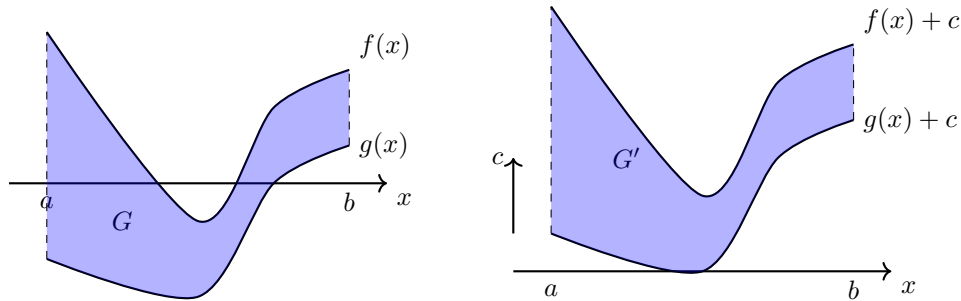
**Proof.**

Оскільки  $g \in C([a, b])$ , то вона приймає найменше значення.

Якщо від'ємне, то перемістимо фігуру  $G$  на число  $c = |\inf_{x \in [a, b]} g(x)|$  догори. Отримаємо фігуру

$G' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [f(x) + c, g(x) + c]\}$ .

Якщо додатне, то тоді  $G' = G$  (тут все зрозуміло).



Зауважимо, що  $S(G') = S(Tr(f + c, [a, b])) - S(Tr(g + c, [a, b]))$

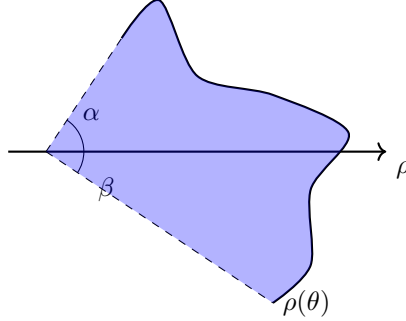
Отже,  $S(G) = S(G') = \int_a^b f(x) + c dx - \int_a^b g(x) + c dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx$ . ■

## 2.8.2 Площа криволінійного сектора

**Definition 2.8.6** Задано функцію  $\rho : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Криволінійним сектором** називають таку множину:

$$Sec(\rho, [\alpha, \beta]) = \{(\theta, \rho) : \theta \in [\alpha, \beta] : \rho \in [0, \rho(\theta)]\}$$



Задамо тепер деяке розбиття  $\tau = \{\alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \beta\}$ . Через ці кути проведемо  $\rho(\theta_k)$ . Тоді площа нашого криволінійного сектора  $S(Sec(\rho, [\alpha, \beta])) = \sum_{k=1}^n S(Sec(\rho, [\theta_{k-1}, \theta_k]))$ .

На кожному відрізку  $[\theta_{k-1}, \theta_k]$  ми:

- впишемо сектор  $Q'_k$ , радіус якої дорівнює  $\inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta)$ ;
- опишемо сектор  $Q''_k$ , радіус якої дорівнює  $\sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta)$ .

Тут має бути рисунок, але не шарю, як це зробити.

Сума площ вписаних секторів дорівнює  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \Delta \theta_k \left( \inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta) \right)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \Delta \theta_k \inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \frac{1}{2} \rho^2(\theta) = L\left(\frac{1}{2} \rho^2, \tau\right)$ .

Сума площ описаних секторів дорівнює  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \Delta \theta_k \left( \sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \rho(\theta) \right)^2 = \sum_{k=1}^n \Delta \theta_k \sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} \frac{1}{2} \rho^2(\theta) = U\left(\frac{1}{2} \rho^2, \tau\right)$ .

**Theorem 2.8.7** Задано функцію  $\rho \in C([\alpha, \beta])$ . Задамо криволінійний сектор  $Sec(\rho, [\alpha, \beta])$ . Тоді він є квадрованим та  $S(Sec) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$ .

**Proof.**

Оскільки  $\rho \in C([\alpha, \beta])$ , то  $\rho \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ , а тому  $\frac{1}{2} \rho^2 \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ . Звідси  $S_*(Sec) = I_*\left(\frac{1}{2} \rho^2\right) = I^*\left(\frac{1}{2} \rho^2\right) = S^*(Sec)$ . Тобто  $Sec$  - квадрована.

Автоматично звідси  $S(Sec) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$ . ■

## 2.8.3 Крива, яка спрямовується

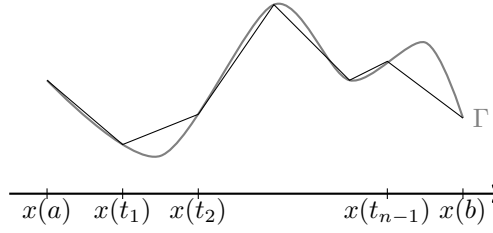
**Definition 2.8.8** Задано функції  $x, y \in C([a, b])$ .

**Неперервною кривою** на площині називають таку множину:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]\}$$

Нехай  $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  - деяке розбиття відрізка  $[a, b]$ . Встановимо  $\Gamma_{\tau}$  - ломана, що отримана в результаті сполучення кожної пари сусідніх точок  $(x(t_{k-1}), y(t_{k-1}))$  та  $(x(t_k), y(t_k))$ .

Довжина ломаної  $L(\Gamma_{\tau}) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$ .



**Definition 2.8.9** Криву називають **такою, що спрямовується**, якщо існує таке число  $L \in \mathbb{R}$ , для якого виконана умова:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \tau : |\tau| < \delta \implies |L(\Gamma_\tau) - L| < \varepsilon$$

Число  $L$  називають **довжиною** кривої  $\Gamma$ .

Позначення:  $\lim_{|\tau| \rightarrow 0} L(\Gamma_\tau) = L$  (знову нелегальне позначення).

**Theorem 2.8.10** Задано функції  $x, y \in C'([a, b])$ . Тоді крива  $\Gamma$  буде такою, що спрямовується, а

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

**Proof.**

Задамо розбиття  $\tau$ , маємо довжину ломаної  $L(\Gamma_\tau) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$ .

За умовою теореми, можемо застосувати теорему Лагранжа, тоді

$$\exists \xi_k \in (t_{k-1}, t_k) : x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = x'(\xi_k)\Delta t_k.$$

$$\exists \eta_k \in (t_{k-1}, t_k) : y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}) = y'(\eta_k)\Delta t_k.$$

$$\text{Тоді } L(\Gamma_\tau) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \Delta t_k.$$

Розпишемо цю формулу інакшим чином:

$$L(\Gamma_\tau) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \Delta t_k + \sum_{k=1}^n (\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2}) \Delta t_k =$$

$$= \sigma \left( \sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \tau, \xi \right) + r_\tau. \text{ Тоді:}$$

$$|L(\Gamma_\tau) - \sigma \left( \sqrt{(x')^2 + (y')^2}, \tau, \xi \right)| = |r_\tau| \leq \sum_{k=1}^n |y'(\eta_k) - y'(\xi_k)| \Delta t_k < \varepsilon \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \varepsilon(b - a).$$

Значить, крива  $\Gamma$  є такою, що спрямовується, а також довжина  $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ . ■

**Theorem 2.8.11** Задано функцію  $f \in C'([a, b])$ . Задамо криву  $\Gamma = \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)\}$ . Тоді

вона буде спрямованою, а  $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

**Proof.**

Функцію  $f$  можна параметризувати:  $x = x(t), y = y(t)$ .

Нехай в  $x(t_1) = a, x(t_2) = b$ .

$$L(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} x'(t) dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad \blacksquare$$

**Theorem 2.8.12** Задано функцію  $\rho \in C'([\alpha, \beta])$ . Задамо криву  $\Gamma = \{(\theta, r) : \theta \in [\alpha, \beta], r = \rho(\theta)\}$ .

Тоді вона буде спрямованою, а  $L(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$ .

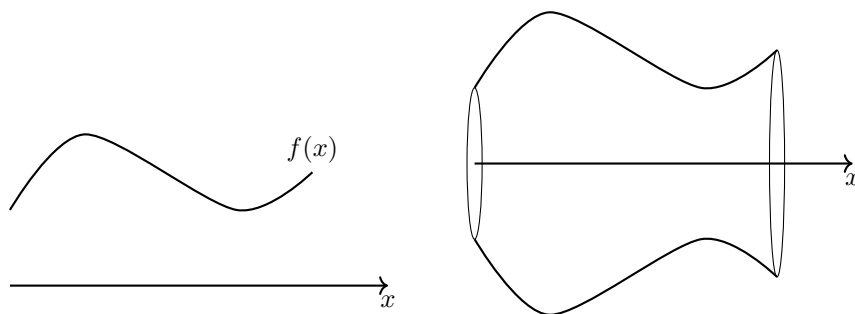
Вказівка:  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ .

**Remark 2.8.13** Є такий об'єкт, як крива Коха - приклад кривої, що не можна спрямувати. Тим не менш, вона має площу.

### 2.8.4 Об'єм тіла обертання

Задано функцію  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  так, щоб  $f(x) \geq 0$  та обмежена. Розглянемо криволінійну трапецію  $Tr(f, [a, b])$ .

Ми отримаємо тіло  $G$ , що було отримано в результаті обертання трапеції  $Tr$  відносно осі  $OX$ .



Ми також вписували/описували прямокутники. Якщо їх обернути навколо  $OX$ , то кожна з них стане циліндром радіуса відповідно  $\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ ,  $\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ .

Сума об'ємів вписаних циліндрів дорівнює  $\sum_{k=1}^n \pi \left( \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right)^2 \Delta x_k = V(G')$ .

Сума об'ємів описаних циліндрів дорівнює  $\sum_{k=1}^n \pi \left( \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right)^2 \Delta x_k = V(G'')$ .

**Definition 2.8.14** Внутрішнім об'ємом тіла  $G$  називають число:

$$V_*(G) = \sup_{\tau} V(G')$$

Зовнішнім об'ємом тіла  $G$  називають число:

$$V^*(G) = \inf_{\tau} V(G'')$$

**Definition 2.8.15** Тіло  $G$  називають **кубованою**, якщо

$$V_*(G) = V^*(G) = V$$

Число  $V$  називають **об'ємом** тіла  $G$ .

**Theorem 2.8.16** Задано функцію  $f \in C([a, b])$  така, що  $f(x) \geq 0$ . Тоді  $G$  є кубованою та

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

*Вказівка:*  $(\sup f(x))^2 = \sup f^2(x)$ .

На даному етапі нам буде достатньо інструментарію, щоб довести даний результат:

**Theorem.**  $\pi \notin \mathbb{Q}$ .

*Нижчеописане доведення було придумано математиком Айвеном Нівеном.*

**Proof.**

!Припустимо, що  $\pi \in \mathbb{Q}$ , тобто розпишемо  $\pi = \frac{a}{b}$ . Не втрачаючи загальності, вваємо  $a, b \in \mathbb{N}$ .

Зафіксуємо  $n \in \mathbb{N}$  та розглянемо функцію  $f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$ . Також для зручності позначимо  $F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$  – вона визначена коректно, бо функція  $f$ , зрозуміло, диференційована. Доведення буде в кілька етапів.

I.  $F(0) + F(\pi) \in \mathbb{Z}$ .

Розпишемо функцію  $f$  в більш розгорнутому вигляді через біном-Ньютона – маємо наступне:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^k b^k a^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k b^k a^{n-k}}{n!} x^{n+k} = \sum_{k=0}^n \frac{c_{n+k}}{n!} x^{n+k} = \\ &= \frac{c_0}{n!} + \frac{c_1}{n!} x + \dots + \frac{c_n}{n!} x^n + \frac{c_{n+1}}{n!} x^{n+1} + \dots + \frac{c_{2n}}{n!} x^{2n}. \end{aligned}$$

У цьому випадку  $c_m = 0$  при  $m < n$ , а в іншому випадку  $c_m \in \mathbb{Z}$ . Значить, звідси

$$f^{(m)}(0) = 0 \text{ при } m < n \quad f^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!} c_m \text{ при } n \leq m \leq 2n. \text{ Причому } f^{(m)} \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, ми отримаємо  $F(0) \in \mathbb{Z}$ .

Зауважимо, що  $f(\pi - x) = f(x)$ , тому звідси  $f^{(m)}(\pi - x) = (-1)^m f^{(m)}(x)$ . Зокрема при  $x = \pi$  маємо  $(-1)^m f^{(m)}(\pi) = f^{(m)}(0)$ . Таким чином, отримаємо  $F(\pi) \in \mathbb{Z}$  (насправді,  $F(\pi) = F(0)$ ).

II.  $\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = F(0) + F(\pi).$

Продиференціюємо функцію  $F$  двічі та зауважимо, що  $f^{(2n+2)} \equiv 0$ . Після цього можна зауважити таке співвідношення:

$$F''(x) + F(x) = f(x).$$

Дана рівність дозволяє сказати нам, що  $f(x) \sin x = (F'(x) \sin x - F(x) \cos x)'$ . Тоді

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = F'(x) \sin x - F(x) \cos x \Big|_0^\pi = F(0) + F(\pi).$$

Можна було просто підставити  $f = F'' + F$  та ручками пошукати невизначений інтеграл, якщо важко побачити.

III.  $0 < F(0) + F(\pi) < 1$ .

Зауважимо, що при  $x \in (0, \pi)$  маємо  $f(x) > 0$ . Також нам відомо, що  $0 < \sin x < 1$ . Таким чином, звідси  $\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx > 0$ , а це означає, що  $F(0) + F(\pi) \in \mathbb{N}$ .

Із іншого боку, при  $x \in [0, \pi]$  ми матимемо  $0 \leq x(a-bx) \leq \pi a$ . Також нам відомо, що  $0 \leq \sin x \leq 1$ .

Таким чином, звідси  $\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx \leq \pi \frac{(\pi a)^n}{n!}$ . Нам відомо, що  $\pi \cdot \frac{(\pi a)^n}{n!} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , тому знайдеться таке натуральне число  $n \in \mathbb{N}$ , щоб  $F(0) + F(\pi) < 1$ .

Нарешті, прийшли до суперечності! ■

## 3 Невласні інтеграли

### 3.1 Основні означення

Розглянемо два основні випадки:

I. Задано таку функцію  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\forall A \in [a, +\infty) : f \in \mathcal{R}([a, A])$ .

**Definition 3.1.1** Невласним інтегралом I роду називають такий вираз:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

**Remark 3.1.2** Аналогічно визначається для  $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

II. Задано таку функцію  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\forall A \in [a, b) : f \in \mathcal{R}([a, A])$ , причому функція необмежена навколо точки  $b$ .

**Definition 3.1.3** Невласним інтегралом II роду називають такий вираз:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A f(x) dx$$

Дане означення можна переписати інакше, якщо  $A = b - \varepsilon$ , причому тепер  $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ .

**Remark 3.1.4** Аналогічно визначається для  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 3.1.5** Якщо границя існує, то невластний інтеграл (I або II роду) називається **збіжним**. Інакше - **розбіжним**.

Надалі я буду позначати  $\omega = \begin{cases} b \\ +\infty \end{cases}$ . Також  $A \rightarrow \omega$  позначає  $A \rightarrow +\infty$  або  $A \rightarrow b - 0$ .

**Example 3.1.6**  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} \equiv$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln A = +\infty \text{ при } \alpha = 1$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (A^{1-\alpha} - 1) = +\infty \text{ при } \alpha < 1$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha-1} \text{ при } \alpha > 1$$

Таким чином,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  - збіжний при  $\alpha > 1$  та розбіжний при  $\alpha \leq 1$ .

**Example 3.1.7**  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} \equiv$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = -\infty \text{ при } \alpha = 1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha} \text{ при } \alpha < 1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1}{1-\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right) = +\infty \text{ при } \alpha > 1.$$

Таким чином,  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$  - збіжний при  $\alpha < 1$  та розбіжний при  $\alpha \geq 1$ .

### 3.2 Властивості

**Lemma 3.2.1** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді невластний інтеграл повністю збігається з визначеним інтегралом.

**Proof.**

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow b-0} (F(A) - f(a)) \stackrel{(*)}{=} F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

невласний визначений

(\*) Оскільки  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , то тоді первісна  $F \in C([a, b])$ , а тому рівність справедлива. ■

### Theorem 3.2.2 Лінійність

Задані функції  $f, g \in \mathcal{R}([a, A])$ ,  $\forall A \in [a, \omega)$ , причому  $\int_a^\omega f(x) dx, \int_a^\omega g(x) dx$  - збіжні. Тоді  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ :

$$\int_a^\omega \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx - \text{збіжний та}$$

$$\int_a^\omega \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx = \alpha_1 \int_a^\omega f(x) dx + \alpha_2 \int_a^\omega g(x) dx.$$

**Proof.**

$$\begin{aligned} \int_a^\omega \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx &= \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \left( \alpha_1 \int_a^A f(x) dx + \alpha_2 \int_a^A g(x) dx \right) = \\ &= \alpha_1 \int_a^\omega f(x) dx + \alpha_2 \int_a^\omega g(x) dx. \end{aligned}$$

■

**Example 3.2.3** Обчислити  $\int_0^{+\infty} 2e^{-x} + \frac{1}{1+x^2} dx$ .

Маємо  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$ , тобто цей інтеграл - збіжний.

Маємо  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ , тобто цей інтеграл - збіжний.

Тоді  $\int_0^{+\infty} 2e^{-x} + \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 + \frac{\pi}{2}$  - також збіжний.

**Example 3.2.4** Обчислити  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} dx$ .

Маємо  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  - збіжний, але  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  - розбіжний.

Отже,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} dx$  - розбіжний.

### Theorem 3.2.5 Адитивність

Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, A])$ ,  $\forall A \in [a, \omega)$ .

$\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний  $\iff \forall c \in (a, \omega) : \int_c^\omega f(x) dx$  - збіжний.

$\int_a^\omega f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\omega f(x) dx$ , незалежно від збіжності.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний.

Розглянемо  $\int_a^A f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^A f(x) dx \implies \int_c^A f(x) dx = \int_a^A f(x) dx - \int_a^c f(x) dx$ . Тоді

$$\lim_{A \rightarrow \omega} \int_c^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \left( \int_a^A f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right)$$

$\int_c^\omega f(x) dx = \int_a^\omega f(x) dx - \int_a^c f(x) dx$ , тобто наш інтеграл - збіжний, причому

$$\int_a^\omega f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\omega f(x) dx.$$

$\Leftarrow$  Аналогічні міркування. ■

### Theorem 3.2.6 Формула заміни змінної

Задано функцію  $f \in C'([a, \omega))$ . Також задано функцію  $\varphi \in C'([\alpha, \gamma))$ , причому  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $\lim_{\beta \rightarrow \gamma} \varphi(\beta) \stackrel{\text{або}}{=} \omega$

$\varphi(\gamma) = \omega$ , де  $\gamma = \begin{bmatrix} b \\ +\infty \end{bmatrix}$ . Додатково вимагаємо  $\varphi' > 0$  всюди. Тоді

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma)} f(x) dx.$$

Для рівності треба існування хоча б однієї границі.

**Proof.**

Зафіксуємо  $\beta \in [\alpha, \gamma)$ . Можна застосувати формулу заміни змінної для функції  $\varphi \in C'([\alpha, \beta])$  та  $f \in C([\varphi(\alpha), \varphi(\beta)])$ .

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

Тепер маємо  $\beta \rightarrow \gamma$ . Оскільки  $\varphi$  - неперервна та строго зростає, то тоді існує  $\varphi^{-1}$ . Таким чином,  $\lim_{\beta \rightarrow \gamma} \varphi(\beta) = \omega \iff \lim_{u \rightarrow \omega} \varphi^{-1}(u) = \gamma$ . Завдяки цьому, ми можемо довести існування одного інтеграла з існування іншого. ■

### Theorem 3.2.7 Формула інтегрування частинами

Задані функції  $u, v$  - диференційовані на  $[a, \omega)$ , причому  $\forall A \in [a, \omega) : u', v' \in \mathcal{R}([a, A])$ . Тоді

$$\int_a^{\omega} u(x)v'(x) dx = u(x)v(x)\Big|_a^{\omega} - \int_a^{\omega} v(x)u'(x) dx.$$

Тут в позначенні  $u(x)v(x)\Big|_a^{\omega} \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{A \rightarrow \omega} u(x)v(x)\Big|_a^A$ .

Для рівності треба існування хоча б двох скінченних границь.

**Proof.**

Дійсно,  $\int_a^A u(x)v'(x) dx = u(x)v(x)\Big|_a^A - \int_a^A v(x)u'(x) dx$ . А далі вже  $A \rightarrow \omega$ . ■

**Example 3.2.8** Обчислити  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}$ .

Якщо обчислювати невизначений інтеграл, то напрошується заміна:

$\text{tg } \frac{x}{2} = t$ , тоді звідси  $dt = \frac{1}{2}(1 + t^2) dx$ .

Виникне  $\int \frac{dx}{2 + \cos x} = \int \frac{1}{2 + \cos(2 \arctg t)} \frac{2}{1 + t^2} dt$ .

Тепер виникає питання, чи буде ця заміна працювати.

Маємо  $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$ , для якої  $f \in C([0, \pi])$ . Також маємо  $\varphi(t) = \arctg t$ , додатково

$\varphi(\alpha) = 0 \implies \arctg \alpha = 0 \implies \alpha = 0$

$\varphi(\beta) = \pi \implies \arctg \beta = \pi \implies \beta = +\infty$ .

Відомо, що  $\varphi \in C'([0, +\infty))$  та  $\varphi$  - строго зростає. Тоді заміна змінної працює та

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1 + t^2} \frac{1}{2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{3 + t^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{2 dt}{3 + t^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^A =$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{A}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Інтеграл - збіжний.

До речі, початковий інтеграл був визначеним, а за допомогою замін, ми перейшли на невластні інтеграли.

**Example 3.2.9** Обчислити  $\int_0^1 \ln x dx$ .

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx \quad \boxed{=}$$

Інтегруємо частинами:  $u = \ln x$ ,  $dv = dx$ .

$$\boxed{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( x \ln x \Big|_{0+\varepsilon}^1 - x \Big|_{0+\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{-\frac{1}{\varepsilon}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon - 1) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1 = -1.$$

Інтеграл - збіжний.



**Remark 3.2.10** Завдяки теоремі про заміні змінної, ми можемо перейти із невласного інтеграла II роду в невласний інтеграл I роду.

Заміна:  $x = b - \frac{1}{t}$ . Бачимо, що зростає, неперервно-диференційована, а також

$$x = a \implies t = \frac{1}{b-a}$$

$$x = b \implies t \rightarrow +\infty.$$

Отже,  $\int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt = \int_c^{+\infty} g(t) dt$  - отримали інтеграл I роду.

А тому, не втрачаючи загальності, всі теореми можна було б розглядати лише для I роду.

### 3.3 Дослідження на збіжність/розбіжність

#### Theorem 3.3.1 Критерій Коші

Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, A])$ ,  $\forall A \in [a, \omega)$ .

$$\int_a^\omega f(x) dx - \text{збіжний} \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \begin{cases} \delta, \text{якщо } \omega = b \\ \Delta, \text{якщо } \omega = +\infty \end{cases} : \forall \begin{cases} A_1, A_2 \in (b - \delta, b), \text{якщо } \omega = b \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty), \text{якщо } \omega = +\infty \end{cases} \implies \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

**Proof.**

Позначимо  $\int_a^t f(x) dx = F(t)$ .

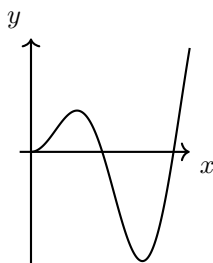
$$\int_a^\omega f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} F(A) - \text{збіжний} \stackrel{\text{критерій Коші для ліміта}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : \exists \begin{cases} \delta, \text{якщо } \omega = b \\ \Delta, \text{якщо } \omega = +\infty \end{cases} : \forall \begin{cases} A_1, A_2 \in (b - \delta, b), \text{якщо } \omega = b \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty), \text{якщо } \omega = +\infty \end{cases} \implies |F(A_1) - F(A_2)| = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Example 3.3.2** Довести, що  $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$  - розбіжний.

Розглянемо точки  $A_1^k = 2k\pi$  та  $A_2^k = (2k+1)\pi$ . Ми обрали такі точки, щоб  $\forall x \in (A_1^k, A_2^k) : \sin x \geq 0$ .

$$\left| \int_{A_1^k}^{A_2^k} x \sin x dx \right| = \int_{A_1^k}^{A_2^k} x \sin x dx \stackrel{\text{I теор. про середнє}}{=} \xi \int_{A_1^k}^{A_2^k} \sin x dx = \xi (\cos A_1^k - \cos A_2^k) = 2\xi \stackrel{\xi \in (A_1^k, A_2^k)}{\geq} 2A_1^k > 1.$$

Отже, існує  $\varepsilon = 1$ , для якого, який б  $\Delta > 0$  не взяв, знайдуться  $A_1^k, A_2^k > \Delta$  при  $k = [\Delta] + 1$ , щоб  $\left| \int_{A_1^k}^{A_2^k} x \sin x dx \right| \geq \varepsilon$ . За критерієм Коші,  $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$  - розбіжний.



Площа, коли  $\sin x \geq 0$ , стає набагато більшою, тому інтуїтивно має розбігатись.

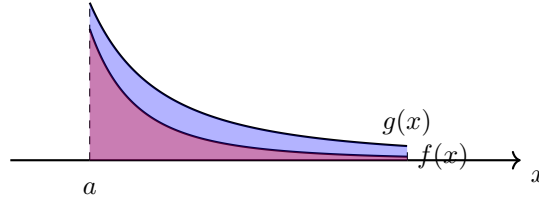
#### 3.3.1 Дослідження для додатних функцій

Тобто в цьому підпідрозділі розглядаються функції  $f(x), g(x) \geq 0$  на всьому області визначення.

#### Theorem 3.3.3 Ознака порівняння в нерівностях

Задані функції  $f, g \in \mathcal{R}([a, A]) : \forall A \in [a, \omega)$  - додатні. Відомо, що  $\forall x \in [a, \omega) : f(x) \leq g(x)$ . Тоді

- 1) Якщо  $\int_a^\omega g(x) dx$  - збіжний, то  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний;
- 2) Якщо  $\int_a^\omega f(x) dx$  - розбіжний, то  $\int_a^\omega g(x) dx$  - розбіжний.



Якщо площа більшої функції скінченна, то площа меншої функції тим паче.

**Proof.**

Маємо функції  $F(t) = \int_a^t f(x) dx$   $G(t) = \int_a^t g(x) dx$ .

Зафіксуємо такі  $t_1, t_2$ , що  $a < t_1 < t_2 < \omega$ . Тоді

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x) dx = \int_a^{t_1} f(x) dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \geq \int_a^{t_1} f(x) dx = F(t_1).$$

Таким чином,  $F$  - неспадна функція. Аналогічно  $G$  - неспадна функція.

- 1) Нехай відомо, що  $\int_a^\omega g(x) dx$  - збіжний, отже,

$$\int_a^\omega g(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} G(A) \stackrel{G - \text{неспадна}}{=} \sup_{t \in [a, \omega)} G(t).$$

Оскільки  $\forall x \in [a, \omega) : f(x) \leq g(x)$ , то тоді  $F(t) \leq G(t)$ . А отже,  $F(t) \leq \sup_{t \in [a, \omega)} G(t)$ .

Через те, що  $F(t)$  - обмежена та неспадна, то  $\exists \lim_{A \rightarrow \omega} F(A) = \int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний.

- 2) А тепер нехай відомо, що  $\int_a^\omega f(x) dx$  - розбіжний.

!Якщо припустити, що інтеграл  $\int_a^\omega g(x) dx$  - збіжний, то за п. 1), інтеграл  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний, що суперечить!

Таким чином,  $\int_a^\omega g(x) dx$  - розбіжний. ■

**Example 3.3.4** Дослідити на збіжність  $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$

Маємо  $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}$ . Відомо, що  $\cos^2 x \leq 1$ . Встановимо функцію  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

Тоді  $\forall x \in (0, 1] : f(x) \leq g(x)$ .

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  - збіжний (еталон). Отже, за ознакою порівняння, п. 1),  $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$  - збіжний.

**Theorem 3.3.5** Ознака порівняння в границях

Задані функції  $f, g \in \mathcal{R}([a, A]) : \forall A \in [a, \omega)$  - строго додатні. Відомо, що  $\exists \lim_{x \rightarrow \omega-0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ . Тоді

- 1) Якщо  $L \neq 0, \neq \infty$ , то обидва  $\int_a^\omega f(x) dx, \int_a^\omega g(x) dx$  - збіжні або розбіжні;
- 2) Якщо  $L = 0$ , то зі збіжності  $\int_a^\omega g(x) dx$  випливає збіжність  $\int_a^\omega f(x) dx$ .

**Proof.**

- 1) Розглянемо  $L \neq 0$ , але оскільки  $f, g > 0$ , то  $L > 0$ .

$$\exists \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = L \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists c \in [a, \omega) : \forall x \geq c : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon.$$

Розглянемо  $\varepsilon = \frac{L}{2}$ , тоді  $\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2} \Rightarrow \frac{L}{2}g(x) < f(x) < \frac{3L}{2}g(x)$ .

Якщо  $\int_c^\omega g(x) dx$  - збіжний, то  $\int_c^\omega \frac{3L}{2} g(x) dx$  - збіжний, то  $\int_c^\omega f(x) dx$  - збіжний. Отже,  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний.

Якщо  $\int_c^\omega f(x) dx$  - збіжний, то  $\int_c^\omega \frac{L}{2} g(x) dx$  - збіжний, то  $\int_c^\omega g(x) dx$  - збіжний. Отже,  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний.

Це все за арифметичними властивостями збіжності, попередньою ознакою порівняння, п.1). та теоремою про збіжність в адитивності.

Тож  $\int_a^\omega f(x) dx, \int_a^\omega g(x) dx$  - одночасно збіжні.

Аналогічно можна довести однакову розбіжність, якщо починати нерівність зліва.

2) Розглянемо  $L = 0$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists c \in [a, \omega) : \forall x \geq c : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon$ .

Розглянемо  $\varepsilon = 1$ , то тоді  $f(x) < g(x), \forall x \geq c$ , а це вже посилення на попередню теорему. ■

**Example 3.3.6** Дослідити на збіжність  $\int_0^1 \frac{\arctg x}{x^{\frac{1}{5}}} dx$

Маємо функцію  $f(x) = \frac{\arctg x}{x^{\frac{1}{5}}}$ . Візьмемо функцію  $g(x) = \frac{1}{x^{-\frac{4}{5}}}$ . Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arctg x}{x^{\frac{1}{5}}}}{\frac{1}{x^{-\frac{4}{5}}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1.$$

А тепер оскільки  $\int_0^1 \frac{1}{x^{-\frac{4}{5}}} dx$  - розбіжний (еталон), то за ознакою порівняння в лімітах, п. 1),  $\int_0^1 \frac{\arctg x}{x^{\frac{1}{5}}} dx$  - розбіжний.

### 3.3.2 Дослідження для знакодівільних функцій

**Definition 3.3.7** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a; A]), \forall A \in [a, \omega)$ .

$\int_a^\omega f(x) dx$  називається **абсолютно збіжним**, якщо  $\int_a^\omega |f(x)| dx$  - збіжний.

$\int_a^\omega f(x) dx$  називається **умовно збіжним**, якщо  $\int_a^\omega |f(x)| dx$  - розбіжний, але при цьому  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний.

**Proposition 3.3.8** Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a; A]), \forall A \in [a, \omega)$ .

Відомо, що  $\int_a^\omega f(x) dx$  - абсолютно збіжний. Тоді  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний.

**Proof.**

$$\int_a^\omega |f(x)| dx \text{ - збіжний. За критерієм Коші, } \forall \varepsilon > 0 : \exists \begin{cases} \delta, \text{ якщо } \omega = b \\ \Delta, \text{ якщо } \omega = +\infty \end{cases} : \forall \begin{cases} A_1, A_2 \in (b - \delta, b), \text{ якщо } \omega = b \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty), \text{ якщо } \omega = +\infty \end{cases} \implies$$

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon \implies \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$$

Тоді за критерієм Коші,  $\int_a^\omega f(x) dx$  - збіжний. ■

**Theorem 3.3.9 Ознака Діріхле**

Задані функції  $f, g \in \mathcal{R}([a, A]), \forall A \in [a, \omega)$ . Відомо, що:

1)  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  - обмежена на  $[a, \omega)$ ;

2)  $g(x)$  - монотонна та н.м. при  $x \rightarrow \omega$ .

Тоді  $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$  - збіжний.

**Remark 3.3.10** Взагалі-то кажучи, можна не вимагати, щоб  $g \in \mathcal{R}([a, A])$ , тому що вона монотонна.

**Proof.**

Будемо доводити за критерієм Коші про збіжність. Нехай  $\varepsilon > 0$ .

Оскільки  $F(x)$  - обмежена, то звідси  $\exists C > 0 : \forall x \in [a, \omega) : |F(x)| \leq C$ .

Також  $g$  - н.м. при  $x \rightarrow \omega$ , то звідси  $\exists \begin{bmatrix} \delta \\ \Delta \end{bmatrix} : \forall x \in [a, \omega) : \begin{bmatrix} x \in (b - \delta, b) \\ x \in (\Delta, +\infty) \end{bmatrix} \implies |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4C}$ .

Тоді в критерії Коші  $\exists \begin{bmatrix} \delta \\ \Delta \end{bmatrix} : \forall A_1, A_2 \in [a, \omega) : \begin{bmatrix} A_1, A_2 \in (b - \delta, b) \\ A_1, A_2 \in (\Delta, +\infty) \end{bmatrix}$

$$\implies \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x) dx \right| \leq$$

Оскільки  $g$  - монотонна на  $[A_1, A_2]$  та  $f \in \mathcal{R}([A_1, A_2])$ , то тоді застосуємо другу теорему про середнє

$$\exists \xi \in (A_1, A_2) : \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x) dx = g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx.$$

$$\leq \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx \right| + \left| g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx \right| \leq$$

Оскільки  $\left| \int_a^{A_1} f(x) dx \right| \leq C$  та  $\left| \int_a^{\xi} f(x) dx \right| \leq C$ , то звідси

$$\left| \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx \right| = \left| \int_a^{\xi} f(x) dx - \int_a^{A_1} f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^{\xi} f(x) dx \right| + \left| \int_a^{A_1} f(x) dx \right| \leq 2C.$$

Аналогічними міркуваннями  $\left| \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx \right| \leq 2C$ .

$$\leq 2Cg(A_1) + 2Cg(A_2) < 2C \frac{\varepsilon}{4C} + 2C \frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon.$$

Отже, за критерієм Коші,  $\int_a^{\omega} f(x)g(x) dx$  - збіжний. ■

**Theorem 3.3.11 Ознака Абеля**

Задані функції  $f, g \in \mathcal{R}([a, A])$ ,  $\forall A \in [a, \omega)$ . Відомо, що:

- 1)  $\int_a^{\omega} f(x) dx$  - збіжний;
- 2)  $g(x)$  - монотонна та обмежена на  $[a, \omega)$ .

Тоді  $\int_a^{\omega} f(x)g(x) dx$  - збіжний.

**Remark 3.3.12** Різниця між Діріхле полягає в тому, що вимоги до 1) ми посилюємо, а вимоги до 2) ми послаблюємо. Ця теорема, насправді, є прямим наслідком, проте відокремити її можна як теорему.

**Proof.**

$\int_a^{\omega} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \omega} \int_a^x f(t) dt$ , тоді вона обмежена. П. 1) уже маємо.

$g$  - монотонна та обмежена, тому  $\exists \lim_{x \rightarrow \omega} g(x) = L$ . Далі розглянемо функцію  $h(x) = g(x) - L$ , яка також монотонна, але вже н.м. при  $x \rightarrow \omega$ . П. 2) уже маємо для  $h(x)$ .

Тоді  $\int_a^{\omega} f(x)h(x) dx$  - збіжний. Отже,

$$\int_a^{\omega} f(x)g(x) dx = \lim_{x \rightarrow \omega} \int_a^x f(t)g(t) dt = \lim_{x \rightarrow \omega} \int_a^x f(t)h(t) + Lf(t) dt = \int_a^{\omega} f(x)h(x) dx + L \int_a^{\omega} f(x) dx -$$

збіжний. ■

**Example 3.3.13 Інтеграл Діріхле**

Дослідимо на збіжність  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

Маємо  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

До речі,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , тож  $x = 0$  - усувна точка, тобто вона не є особливою точкою. Тому  $\forall A \in [0, +\infty) : \frac{\sin x}{x} \in \mathcal{R}([0, A])$ .

Перевіримо умови Діріхле.

$$\left| \int_0^A f(x) dx \right| = \left| \int_0^A \sin x dx \right| = | -\cos A + \cos 0 | \leq 2, \text{ виконано } \forall A \geq 0 - \text{ встановимо } M = 2. \text{ Тоді}$$

обмежена.

$$g(x) = \frac{1}{x} - \text{монотонна, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Таким чином, за ознакою Діріхле,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  - збіжний.

Дослідимо тепер на абсолютну збіжність.

!Припустимо, що це, дійсно, абсолютно збіжний інтеграл, тобто  $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$  - збіжний.

Зауважимо, що  $|\sin x| \geq \sin^2 x$ . Тоді за ознакою порівняння в нерівностях,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$  - збіжний.

Тому збіжними будуть два інтеграли:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx &= \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos^2 x}{x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1 + \cos 2x}{2x} dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} dx \end{aligned}$$

Звідси  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$  та  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} dx$  - збіжні. Проте за еталоном,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$  НЕ є збіжним. Суперечність!

Висновок:  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  - умовно збіжний.

### 3.4 Особливі випадки

I. Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([a, b]), \forall a, b \in \mathbb{R}$ . Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

причому  $c \in \mathbb{R}$  - деяке число.

Збіжним буде даний інтеграл, якщо інтеграли в правій частині всі збіжні. У протилежному випадку - розбіжний.

**Example 3.4.1** Обчислити  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ .

Спочатку  $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \arctg(x + 1) + C$ .

Оберемо точку 0 із проміжка  $(-\infty, +\infty)$ . Отримаємо два інтеграли:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} &= \arctg(x + 1) \Big|_{-\infty}^0 = \arctg 1 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} &= \arctg(x + 1) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctg 1. \end{aligned}$$

Таким чином, два інтеграли збіжні, а тому збіжним буде перший інтеграл, причому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \pi.$$

II. Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta]), \forall \alpha, \beta \in (a, b)$ , причому функція необмежена навколо точки  $a, b$ . Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

причому  $c \in (a, b)$  - деяке число.

Збіжним буде даний інтеграл, якщо інтеграли в правій частині всі збіжні. У протилежному випадку - розбіжний.

**Example 3.4.2** Обчислити  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Оберемо точку 0 із проміжка  $(-1, 1)$ . Отримаємо два інтеграли:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, два інтеграли збіжні, а тому збіжним буде перший інтеграл, причому

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

III. Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ ,  $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b] \setminus \{c\}$ , причому функція необмежена навколо точки  $c$ . Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Збіжним буде даний інтеграл, якщо інтеграли в правій частині всі збіжні. У протилежному випадку - розбіжний.

IV. Задано функцію  $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ ,  $\forall [\alpha, \beta] \subset (a, +\infty)$ , причому функція необмежена навколо точки  $a$ . Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

причому  $c \in \mathbb{R}$  - деяке число.

Збіжним буде даний інтеграл, якщо інтеграли в правій частині всі збіжні. У протилежному випадку - розбіжний.

Тут аналогічно можна розглянути випадок із нескінченності до точки необмеженості.

**Example 3.4.3** Дослідити на збіжність  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)}$ .

Маємо комбінований інтеграл, що розіб'ється ось так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x(x-9)} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x-9)} + \int_0^1 \frac{dx}{x(x-9)} + \int_1^9 \frac{dx}{x(x-9)} + \int_9^{10} \frac{dx}{x(x-9)} + \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)}.$$

Для збіжності треба, щоб абсолютно всі інтеграли з цього доданку збігались. Але  $\int_0^1 \frac{dx}{x(x-9)}$  розбіжний - це легко показати.

Отже,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)}$  - розбіжний.

### 3.5 Невласний інтеграл в сенсі головного значення по Коші

**Definition 3.5.1** Головним значенням невластного інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  називається ось це:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x) dx$$

**Definition 3.5.2** Головним значенням невластного інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , де функція  $f$  необмежена в т.  $c \in (a, b)$ , називається ось це:

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

**Remark 3.5.3** Якщо один із двох інтегралів збігається, то тоді й v.p. інтеграл теж буде збігатись. В зворотному - невірно.

**Example 3.5.4 Контрприклад**

Маємо  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  - розбіжний (там виникне еталон)

Але v.p.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln \varepsilon) = 0$  - збіжний.

Маємо  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$  - розбіжний.

Але v.p.  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \right) = 0$  - збіжний.

**Example 3.5.5** Обчислити v.p.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)}$ .

v.p.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-9)} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x) dx$

## 4 Ряди

**Definition 4.0.1** Рядом називають формальну нескінченну суму нескінченної послідовності чисел  $\{a_n, n \geq 1\}$ :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**Частковою сумою** даного ряду називають суму перших  $k$  членів:

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

В такому випадку в нас виникає послідовність часткових сум  $\{S_k, k \geq 1\}$ .

Якщо така послідовність часткових сум є збіжною, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називають **збіжним** та **сумма** цього ряду дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$$

Інакше - **розбіжним**.

**Example 4.0.2** Знайдемо суму:  $1 + q + q^2 + \dots$

Розглянемо часткову суму  $S_k = 1 + q + \dots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$  - сума геом. прогресії.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1 - q}, & |q| < 1 \\ \infty, & |q| > 1 \end{cases}$$

При  $q = 1$  маємо:  $1 + 1 + 1 + \dots$ , тобто  $S_k = k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty$ .

Підсумуємо:

- сума є збіжною при  $|q| < 1$  та  $1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}$ ;

- сума є розбіжною при  $|q| \geq 1$ .

### 4.1 Первинний аналіз збіжності та арифметика рядів

**Proposition 4.1.1** Необхідна ознака збіжності ряду

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний. Тоді  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Proof.**

Зафіксуємо часткові суми:  $S_{k+1} = \sum_{n=1}^{k+1} a_n$   $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$ .

Оскільки ряд є збіжним, то звідси

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S. \text{ Тоді } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{k+1} - S_k) = S - S = 0. \quad \blacksquare$$

**Example 4.1.2** Розглянемо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$

Оскільки  $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ , то за необхідною ознакою збіжності, маємо, що ряд - розбіжний.

**Remark 4.1.3** Це лише - необхідна ознака, в жодному випадку не достатня. Якщо границя буде нулевою, то це не означає, що ряд збігається, потрібну інші дослідження.

**Theorem 4.1.4** Критерій Коші

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon$ .



**Proof.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збіжний} \iff \exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k - \text{збіжна границя} \xLeftrightarrow{\text{критерій Коші}}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : |S_{k+p} - S_k| = \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

#### Example 4.1.5 Важливий

Розглянемо  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  - **гармонічний ряд**. Доведемо, що даний ряд - розбіжний, використовуючи критерій Коші, тобто

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall K : \exists k_1, k_2 \geq K : \left| \sum_{n=k_1}^{k_2} \frac{1}{n} \right| \geq \varepsilon$$

Дійсно, якщо  $\varepsilon = 0.5$ ,  $k_1 = K$ ,  $k_2 = 2K$ , то отримаємо:

$$\left| \sum_{n=K}^{2K} \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \dots + \frac{1}{2K} > K \frac{1}{2K} = 0.5.$$

Отже, цей ряд - розбіжний.

Один з прикладів, що підтверджує, що необхідна умова збіжності не є достатньою.

**Proposition 4.1.6** Задані  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$   $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - збіжні. Тоді збіжними будуть й наступні ряди:

- 1)  $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ;
- 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Proof.**

Доведемо друге. Перший пункт аналогічно. Зафіксуємо часткові суми:

$$2) S_k(a) = \sum_{n=1}^k a_n, S_k(b) = \sum_{n=1}^k b_n.$$

$$\text{Тоді } S_k(a) + S_k(b) = \sum_{n=1}^k (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^k a_n + \sum_{n=1}^k b_n.$$

$$\text{Оскільки } \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{збіжні, то } \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(a) = S(a), \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(b) = S(b).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k(a) + S_k(b)) = S(a) + S(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad \blacksquare$$

**Definition 4.1.7** **Хвостом** (або **остачею**) ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називають ряд  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ , де  $m \in \mathbb{N}$ .

Тобто ми відкидаємо перші  $m - 1$  доданків та сумуємо, починаючи з  $m$ .

**Proposition 4.1.8**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний  $\iff \sum_{n=m}^{\infty} a_n$  - збіжний, причому  $\forall m \in \mathbb{N}$ .

**Proof.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збіжний} \xLeftrightarrow{\text{критерій Коші}} \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \iff$$

$$\iff \exists K' = \max\{K, m\} : \forall k \geq K' : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \iff \sum_{n=m}^{\infty} a_n - \text{збіжний}. \quad \blacksquare$$

## 4.2 Знакододатні ряди

Тобто розглядаємо зараз лише ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , такі, що  $\forall n \geq 1 : a_n \geq 0$ .

**Proposition 4.2.1**  $\{S_k, k \geq 1\}$  - монотонно неспадна послідовність.

**Proof.**

$$\forall k \geq 1 : S_{k-1} - S_k = a_{k+1} \geq 0 \Rightarrow S_k \leq S_{k+1}. \quad \blacksquare$$

**Proposition 4.2.2** Якщо  $\{S_k, k \geq 1\}$  - обмежена, то тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний.

**Proof.**

Щойно дізнались що послідовність часткових сум монотонна. До того ж, вона є обмеженою за умовою. Отже,  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$ , тобто  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний. ■

**Theorem 4.2.3** Ознака порівняння в нерівностях

Задані  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  таким чином, що  $\forall n \geq 1 : a_n \leq b_n$ . Тоді:

- 1) якщо  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - збіжний, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний теж.
- 2) якщо  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - розбіжний, то  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - розбіжний теж.

**Proof.**

Оскільки  $\forall n \geq 1 : a_n \leq b_n$ , то тоді  $\sum_{n=1}^k a_n \leq \sum_{n=1}^k b_n$ , де  $k \in \mathbb{N}$ .

- 1) Нехай  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - збіжний ряд, тоді  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k b_n = \tilde{S}$ .

Отже, в нашій нерівності, якщо  $k \rightarrow \infty$ , то маємо  $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \tilde{S}$ .

Отже, існує границя, а тому  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний.

- 2) Це є оберненим твердженням до 1).
- 

**Example 4.2.4** Важливий

Розглянемо далі  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  - ряд Діріхле. Дослідимо на збіжність.

Нехай  $\alpha < 1$ , тоді  $\forall n \geq 1 : \frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$ .

За ознакою порівняння та минулим прикладом, отримаємо, що  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  - розбіжний.

Нехай  $\alpha > 1$ , тоді отримаємо таку оцінку:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} &= 1 + \left( \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right) + \left( \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} \right) + \dots \leq \\ &\leq 1 + \left( \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} \right) + \left( \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} \right) + \dots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}}. \end{aligned}$$

Наш ряд - обмежений, а послідовність часткових сум - монотонна. Отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  - збіжний.

Підсумуємо:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{розбіжний, } \alpha \leq 1 \\ \text{збіжний, } \alpha > 1 \end{cases}$ .

**Theorem 4.2.5** Ознака порівняння в границях

Задані  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , тут члени строго додатні. Відомо, що  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ . Тоді:

1) Якщо  $l \neq 0$  та  $l \neq \infty$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збіжні або розбіжні одночасно;

2) Якщо  $l = 0$ , то зі збіжності  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  випливає збіжність  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Remark 4.2.6** До речі,  $l \geq 0$ , оскільки всі члени - додатні.

**Proof.**

1)  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon$ .

Оберемо  $\varepsilon = \frac{l}{2}$ , тоді  $\frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2} \Rightarrow \frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3l}{2} b_n, \forall n \geq N$ .

Припустимо, що  $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$  - збіжний, тоді збіжним буде  $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{3l}{2} b_n$ , а отже, за попередньою теоремою,

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  - збіжний. Отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний.

Якщо  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  - збіжний, тоді збіжним буде  $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{l}{2} b_n$ , а отже  $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$  - збіжний. Тому  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - збіжний.

Аналогічними міркуваннями доводиться розбіжність.

Тобто  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - збіжні або розбіжні одночасно.

2)  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l = 0$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon$

Оберемо  $\varepsilon = 1$ , тоді  $\forall n \geq N : a_n < b_n$ . Тоді виконується попередня теорема, один з двох пунктів. ■

**Example 4.2.7** Дослідити на збіжність  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{1+n^2}$ .

Маємо  $a_n = \frac{\arctg n}{1+n^2}$ . Встановимо  $b_n = \frac{1}{n^2}$ . Обчислимо границю їхніх відношень:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \arctg n}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg n}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

А оскільки  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  - збіжний, то  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{1+n^2}$  - збіжний.

**Theorem 4.2.8** Ознака Даламбера

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - строго додатний. Тоді:

1) Якщо  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , то ряд - збіжний;

2) Якщо  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , то ряд - розбіжний.

**Proof.**

1) Маємо  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ , тоді  $\forall \varepsilon > 0$ , зокрема для  $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ , проміжок  $(q+\varepsilon, +\infty)$  має скінченну

кількість членів послідовності  $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ , тобто  $\exists N : \forall n \geq N : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = \frac{1+q}{2}$ .

Звідси випливає, що  $a_{n+1} < \frac{1+q}{2} a_n$ .

$$\Rightarrow a_{N+1} < \frac{1+q}{2} a_N$$

$$\Rightarrow a_{N+2} < \frac{1+q}{2} a_{N+1} < \left( \frac{1+q}{2} \right)^2 a_N$$

⋮

$$\Rightarrow \forall k \geq 1 : a_{N+k} < \left( \frac{1+q}{2} \right)^k a_N$$

Розглянемо ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^k a_N = a_N \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^k$

Вираз під сумою буде менше за 1, цей ряд - геометрична прогресія, збіжний.

Тоді  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$  - збіжний, отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний.

2) Маємо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ , тоді  $\forall \varepsilon > 0$ , зокрема для  $\varepsilon = \frac{q-1}{2}$ , проміжок  $(-\infty, q-\varepsilon)$  має скінченну кількість членів послідовності  $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ , тобто  $\exists N : \forall n \geq N : \frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon = \frac{1+q}{2}$ .

Аналогічними міркуваннями отримаємо  $\forall k \geq 1 : a_{N+k} > \left(\frac{q+1}{2}\right)^k a_N$ .

Розглянемо ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^k a_N = a_N \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^k$

А тут геометрична прогресія при виразі, що більше одиниці - розбіжний.

Тоді  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$  - розбіжний, отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - розбіжний. ■

#### Corollary 4.2.9 Ознака Даламбера (стандартний вигляд)

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - строго додатний. Нехай  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . Тоді:

- 1) Якщо  $q < 1$ , то ряд - збіжний;
- 2) Якщо  $q > 1$ , то ряд - розбіжний;
- 3) Якщо  $q = 1$ , то відповіді нема.

#### Proof.

Якщо  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , то автоматично  $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ,  $\exists \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . Ну а далі чисто за попередньою теоремою.

3) А тепер в чому проблема при  $q = 1$ . Розглянемо обидва ряди:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Використаємо

для обох ознаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot n = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 = 1.$$

Результат - однаковий, проте один ряд - розбіжний, а інший - збіжний. Тож  $q = 1$  не дає відповіді, шукаємо інші методи. ■

**Example 4.2.10** Дослідити на збіжність  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$ .

$$a_n = \frac{3^n(n!)^2}{(2n)!} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{3}{4} < 1.$$

Отже, наш ряд - збіжний за Даламбером.

#### Theorem 4.2.11 Радикальна ознака Коші

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - додатний. Нехай  $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ . Тоді:

- 1) Якщо  $q < 1$ , то ряд - збіжний;
- 2) Якщо  $q > 1$ , то ряд - розбіжний;
- 3) Якщо  $q = 1$ , то відповіді нема.

#### Proof.

1)  $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0$  : проміжок  $(q+\varepsilon, +\infty)$  має скінченну кількість елементів, тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \implies a_n < (q + \varepsilon)^n$ .

Оберемо  $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ . Тоді маємо:  $a_n < \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ .

Розглянемо ряд  $\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$  - геометрична прогресія, вираз в сумі менше за одиниці - збіжний.

Отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$  - збіжний, а тому  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний.

2)  $\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$ , тобто  $\exists \{ \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}}, p \geq 1 \} : \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}} = q$  - така підпоследовність, що містить цю границю  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists P : \forall p \geq P : \left| \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}} - q \right| < \varepsilon$ .

Оберемо  $\varepsilon = \frac{q-1}{2}$ , тоді  $a_{n(p)} > \left(\frac{q+1}{2}\right)^{n(p)}$ . Тоді  $\lim_{p \rightarrow \infty} a_{n(p)} \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^{n(p)} = \infty$ .

Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . Це означає, що необхідна умова збіжності не виконується - розбіжний.

3) Для  $q = 1$  треба розглянути такі самі ряди як при доведенні ознаки Даламбера. ■

**Example 4.2.12** Дослідити на збіжність  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ .

$$a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} \quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Отже, наш ряд - збіжний за Коші.

#### Theorem 4.2.13 Інтегральна ознака Коші

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - додатний. Встановимо функцію  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , яка під такими умовами:

- 1)  $\forall n \geq 1 : a_n = f(x)$ ;
- 2)  $f$  не зростає на  $[1, +\infty)$ .

Тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  та  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  збіжні або розбіжні одночасно.

#### Proof.

Оскільки  $f(x)$  спадає, то  $\forall k \geq 1 : \forall x \in [k, k+1] :$

$$a_k \geq f(x) \geq a_{k+1}.$$

$$a_k = \int_k^{k+1} a_k dx \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq \int_k^{k+1} a_{k+1} dx = a_{k+1}.$$

Просумуємо ці нерівності від  $k = 1$  до  $k = M$ , отримаємо:

$$\sum_{k=1}^M a_k \geq \int_1^{M+1} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^M a_{k+1}.$$

Нехай  $\sum_{k=1}^M$  - збіжний. Тоді якщо  $M \rightarrow \infty$ , то отримаємо, що  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  приймає скінченне значення, а тому збіжний.

Нехай  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  - збіжний. Тому  $\sum_{k=1}^M a_{k+1}$  - обмежений. А оскільки він додатний, то звідси, збіжний.

Випадок розбіжності доводиться від супротивного. ■

**Example 4.2.14** Дослідити на збіжність  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ .

Маємо функцію  $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ . Зрозуміло, що  $f$  спадає на  $[2, +\infty)$ , бо  $x, \ln^2 x$  там зростають.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2} - \text{збіжний.}$$

Отже, наш ряд - збіжний за Коші інтегральним.

**Theorem 4.2.15 Ознака Раабе**

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - строго додатний. Нехай  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q$ . Тоді

- 1) Якщо  $q < 1$ , то ряд - розбіжний;
- 2) Якщо  $q > 1$ , то ряд - збіжний;
- 3) Якщо  $q = 1$ , то відповіді нема.

**Proof.**

Маємо  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q$ , тобто можна сказати  $n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - q = o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Або  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Одночасно ми розглянемо  $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ , тоді звідси  $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

1)  $q > 1$ , тоді ми зможемо знайти  $\alpha \in (1, q)$ . Звідси

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{q - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) > 0, \text{ починаючи з деякого номеру.}$$

Тоді  $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{b_{n+1}} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ . Оскільки  $\alpha > 1$ , то тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  - збіжний. А із цієї нерівності

випливає, що  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний.

2)  $q < 1$ , то тоді ми зможемо знайти  $\alpha \in (q, 1)$ . А далі всі процедури аналогічні.

3) Розглянути ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  - розбіжний та  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$  - збіжний за інтегральною ознакою Коші.

Обидві дають єдиничну границю. ■

**Example 4.2.16** Дослідити на збіжність  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^{2022}$ .

$a_n = \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^{2022}$ . Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \left( \frac{2n+2}{2n+1} \right)^{2022} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{1}{2n+1} \right)^{2022} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2022}{2n+1} + o\left(\frac{1}{2n+1}\right) - 1}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2022n}{2n+1} = 1011 > 1. \end{aligned}$$

Таким чином, заданий ряд - збіжний за Раабе.

**4.3 Знакозмінні ряди**

**Definition 4.3.1** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

**Definition 4.3.2** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називається **умовно збіжним**, якщо  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний, але  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  - не збіжний.

**Proposition 4.3.3**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - абсолютно збіжний. Тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний.

**Proof.**

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - абсолютно збіжний} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ - збіжний} \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \\ \left| \sum_{n=k}^{k+p} |a_n| \right| < \varepsilon &\implies \left| \sum_{n=k}^{k+p} a_n \right| \leq \left| \sum_{n=k}^{k+p} |a_n| \right| < \varepsilon \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - збіжний.} \end{aligned}$$

■

### Theorem 4.3.4 Ознака Лейбніца

Задано ряд вигляду  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ , де  $a_n \geq 0$  - **знакозмінний ряд**. Відомо, що:

- 1)  $\{a_n, n \geq 1\}$  - монотонно спадає;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Тоді заданий ряд - збіжний.

#### Proof.

Розглянемо послідовність часткових сум  $\{S_{2k}, k \geq 1\}$ . Отримаємо наступне:

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \geq 0.$$

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} \leq a_1.$$

Тобто  $0 \leq S_{2k} \leq a_1$  - обмежена послідовність.

Також  $S_{2(k+1)} = S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \geq S_{2k}$  - монотонна. Таким чином,  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S$ .

Розглянемо ще одну послідовність часткових сум  $\{S_{2k+1}, k \geq 1\}$ . Зрозуміло, що  $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$   
 $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} + \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = S + 0 = S$ .

Остаточно, маємо, що послідовність  $\{S_m, m \geq 1\}$  - збіжна, тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  - збіжний. ■

**Corollary 4.3.5**  $\forall k \geq 1 : |S - S_k| \leq a_{k+1}$ .

#### Proof.

Розглянемо хвіст ряду  $S - S_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ . А також розглянемо  $\tilde{S}_m = \sum_{n=k+1}^m (-1)^{n+1} a_n$ . Тоді

$$\tilde{S}_m = S_m - S_k = (-1)^{k+1} (a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+4} - a_{k+5}) - \dots - \left[ \begin{array}{l} (a_{m-1} - a_m), k \\ a_m, k \end{array} \right] 2$$

$$\Rightarrow |\tilde{S}_m| = \left| a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+4} - a_{k+5}) - \dots - \left[ \begin{array}{l} (a_{m-1} - a_m), k \\ a_m, k \end{array} \right] 2 \right| =$$

$$= a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+4} - a_{k+5}) - \dots - \left[ \begin{array}{l} (a_{m-1} - a_m), k \\ a_m, k \end{array} \right] 2 \leq a_{k+1}$$

$$\Rightarrow |S - S_k| = \lim_{m \rightarrow \infty} |\tilde{S}_m| \leq a_{k+1}. \quad \blacksquare$$

**Example 4.3.6** Обчислити суму  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$  з точністю до  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

Зрозуміло, що  $a_n = \frac{1}{n!} \geq 0$ , монотонно спадає та н.м. Отже, виконуються ознаки Лейбніца, а тому й отриманий наслідок.

$$|S - S_k| \leq a_{k+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{(k+1)!} < \frac{1}{10^5} \Rightarrow (k+1)! > 100000.$$

Достатньо взяти нам  $k = 8$ . Тому ми отримаємо:

$$S \approx S_8 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} = \frac{-3641}{5760}.$$

### Theorem 4.3.7 Ознаки Діріхле та Абеля

Задано ряд вигляду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ . Нехай виконано один з двох блоків умов:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^k a_n \text{ - обмежена.} \\ \{b_n, n \geq 1\} \text{ - монотонна та н.м.} \\ \text{ознака Діріхле} \end{array} \right| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - збіжний.} \\ \{b_n, n \geq 1\} \text{ - монотонна та обмежена.} \\ \text{ознака Абеля} \end{array}$$

Тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  - збіжний.

**Proof.**

Спочатку почнемо з ознаки Діріхле. Припустимо  $b_n$  спадає. Застосуємо критерій Коші для доведення.

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n b_n \right| = \left| A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1} - \sum_{n=k+1}^{k+p-1} A_n (b_{n+1} - b_n) \right| = \left| A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1} + \sum_{n=k+1}^{k+p-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \right| \leq$$

$$|A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1}| + \sum_{n=k+1}^{k+p-1} |A_n| |b_{n+1} - b_n| \leq$$

За умовою,  $A_k = \sum_{n=1}^k a_n$  - обмежена, тобто  $\exists C > 0 : \forall k \geq 1 : |A_k| \leq C$ .

Також  $b_n$  - н.м., тоді  $\forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : |b_k| < \varepsilon$ .

Тоді  $|A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1}| \leq |A_{k+p}| |b_{k+p}| + |A_k| |b_{k+1}| < 2C\varepsilon$ .

Також  $\sum_{n=k+1}^{k+p-1} |A_n| |b_{n+1} - b_n| \leq C \sum_{n=k+1}^{k+p-1} (b_n - b_{n+1}) = C(b_{k+1} - b_{k+p}) \leq C b_{k+1} < C\varepsilon$

$\leq 3C\varepsilon$ . Виконано  $\forall \varepsilon > 0$  та  $\forall k \geq K : \forall p \geq 1$ . Отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  - збіжний.

Далі доводимо ознаку Абеля. Оскільки  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний, то тоді обмежений. Оскільки  $\{b_n\}$  монотонна та обмежена, то  $b_n \rightarrow B$ . Якщо розглянути  $c_n = b_n - B$ , то маємо  $\{c_n, n \geq 1\}$  - монотонна та н.м.

Отже, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$  - збіжний за Діріхле. А далі ясно, що  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  - збіжний. ■

**Example 4.3.8** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ .

Будемо для цього використовувати ознаку Діріхле, встановимо  $a_n = \sin n, b_n = \frac{1}{n}$ .

$$\sum_{n=1}^k \sin n = \sum_{n=1}^k \frac{\sin(1 \cdot n) \sin \frac{1}{2}}{\sin \frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \sum_{n=1}^k \left( \cos \left( n - \frac{1}{2} \right) - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \left( \cos \frac{1}{2} - \cos \frac{3}{2} + \cos \frac{3}{2} - \cos \frac{5}{2} + \dots + \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \left( \cos \frac{1}{2} - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \right) =$$

$$\frac{\sin \frac{k+1}{2} \sin \frac{k}{2}}{\sin \frac{1}{2}}.$$

Таким чином,  $\left| \sum_{n=1}^k \sin n \right| = \left| \frac{\sin \frac{k+1}{2} \sin \frac{k}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^k \sin n$  - обмежена.

Зрозуміло, що  $\frac{1}{n}$  монотонна та н.м.

Отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$  - збіжний.

**Example 4.3.9** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} e^{-n}$ .

Будемо для цього використовувати ознаку Абеля, встановимо  $a_n = \frac{\sin n}{n}, b_n = e^{-n}$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$  - збіжний за попереднім прикладом.

$e^{-n}$  - монотонна, оскільки  $e^{-n-1} - e^{-n} = e^{-n}(e^{-1} - 1) < 0$ .



$e^{-n}$  - обмежена, оскільки  $0 < e^{-n} < e$ .

Отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} e^{-n}$  - збіжний.

## 4.4 Трошки детально про абсолютно збіжні ряди

Для кожного числа  $a \in \mathbb{R}$  визначимо додатну та від'ємну частину числа:

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases} \quad a^- = \begin{cases} 0, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

Маємо кілька зауважень. Перше з них - це  $0 \leq a^+ \leq |a|$  та  $0 \leq a^- \leq |a|$ . Більш того,  $a = a^+ - a^-$ . Нарешті,  $|a| = a^+ + a^-$ .

Тепер ми можемо розділити ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  на додатну частину  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  та на від'ємну частину  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ .

**Proposition 4.4.1**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - збіжний абсолютно  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  - обидва збіжні (як невід'ємні ряди). Більш того, в такому випадку матимемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

**Proof.**

Для доведення в обидві сторони треба зауважити, що справедлива рівність:

$$0 \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n| = \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n^+ + \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n^-$$

А з даної рівності безпосередньо випливають дві нерівності:

$$0 \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n^+ \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n|$$

$$0 \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n^- \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n|.$$

Ми таким чином доведемо твердження в обидві сторони.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n^+ - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-. \\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |a_n| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n^+ + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-. \end{aligned}$$

■

**Definition 4.4.2** Заданий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Перестановкою** даного ряду назвемо ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ , для якого виконана така умова:

$$\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ - бієкція : } b_m = a_{f(m)}$$

**Example 4.4.3** Наприклад маємо гармонічний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ . Ми

переставимо члени так, що спочатку йдуть парні члени, а згодом непарні - отримаємо новий ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + 1 + \frac{1}{3} + \dots$$

Формально кажучи, ми встановили бієкцію  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  таким чином:  $b_1 = a_2, b_2 = a_4, \dots$  та для деяких індексів  $b_{m_1} = a_1, b_{m_2} = a_3, \dots$

**Theorem 4.4.4** Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - абсолютно збіжний. Тоді кожна перестановка даного ряду збігається туди ж.

**Proof.**

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  – абсолютно збіжний. Доведення розіб'ємо на два випадки:

I.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  – невід'ємний ряд.

Зафіксуємо перестановочний ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ , у цьому випадку  $b_m = a_{f(m)}$  та  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  – бієкція.

Нехай  $\varepsilon > 0$ . За умовою збіжності, існує  $N \in \mathbb{N}$ , для якого  $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^N a_k < \varepsilon$ .

Зауважимо, що оскільки  $f$  – бієкція, то тоді можемо підібрати  $M = \max\{m \in \mathbb{N} : 1 \leq f(m) \leq N\}$ , для якого  $\{1, \dots, N\} \subset f^{-1}(\{1, \dots, M\})$ . Таке вкладення означає наступне: члени  $a_1, \dots, a_N$  включені серед членів  $b_1, \dots, b_M$ . Із урахуванням цього та того факту, що всі члени ряду невід'ємні,

$$\text{маємо } \sum_{k=1}^N a_k \leq \sum_{j=1}^M b_j.$$

Нехай маємо  $m > M$ , тоді звідси  $\sum_{k=1}^N a_k \leq \sum_{j=1}^m b_j \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Маючи додатково нерівність вище,

отримаємо оцінку  $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{j=1}^m b_j < \varepsilon$ . Залишилося спрямувати  $m \rightarrow \infty$  – отримаємо оцінку

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{j=1}^{\infty} b_j \leq \varepsilon < 2\varepsilon. \text{ Оскільки це виконано при всіх } \varepsilon > 0, \text{ то тоді } \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

II.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  – довільний ряд.

Зафіксуємо перестановочний ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ . Тоді  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^+$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^-$  – перестановочні ряди для  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ .

Оскільки ці ряди невід'ємні, то для них маємо  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ . Отже,  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$

також буде абсолютно збіжним рядом, при цьому

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=1}^{\infty} b_m^+ - \sum_{m=1}^{\infty} b_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad \blacksquare$$

**Example 4.4.5** Обчислити ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ .

Цілком зрозуміло, що це збіжний ряд, (за д'Аламбером), причому абсолютно. Отже, ми можемо переставляти члени ряду, оскільки від цього сума не зміниться за теоремою вище.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \left( \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \right) + \dots = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2^3} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2. \end{aligned}$$

## 4.5 Трошки про умовно збіжні ряди

### Theorem 4.5.1 Теорема Рімана

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  – умовно збіжний. Тоді для довільного  $M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  буде існувати перестановка

даного ряду, яка буде збіжною до числа  $M$ .

**Proof.**

Нехай  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  – умовно збіжний. Тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$  (тобто обидва ряди розбіжні).

Дійсно, якби обидва ряди були збіжними, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  став би абсолютно збіжним (неможливо). Якби

лише один з рядів був розбіжним, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ , тобто був би розбіжним (неможливо).

Нехай заданий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  так, щоб  $a_n \neq 0$  (якщо знайдеться елемент  $a_{n_0} = 0$ , то члени ряду перенумеруємо).

Тепер фіксуємо довільне число  $M \geq 0$ .

Оскільки  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ , то тоді послідовність часткових сум додатних членів – необмежена, тобто  $\exists k_1 \geq 1$  (оберу найменше можливе) :  $a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_{k_1}^+ > M$ .

Оскільки  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$ , то тоді послідовність часткових сум від’ємних членів – необмежена, тобто  $\exists m_1 \geq 1$  (оберемо найменше можливе) :  $a_1^- + a_2^- + \dots + a_{m_1}^- > a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+ - M$ . Тобто звідси отримаємо  $a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+ - a_1^- - \dots - a_{m_1}^- < M$ .

Опишу словесно, що ми зробили. Ми взяли перші  $k_1$  додатних членів нашого ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , допоки

сума не перевищить  $M$ ; а потім взяли перші  $m_1$  від’ємних членів нашого ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , допоки сума не стане меншою за  $M$ .

Далі робимо ту саму процедуру. Ми оберемо перші  $k_2$  додатних членів ряду  $\sum_{n=k_1+1}^{\infty} a_n$ , допоки сума

не перевищить  $M$ ; а потім оберемо перші  $m_2$  від’ємних членів ряду  $\sum_{n=m_1+1}^{\infty} a_n$ , допоки сума не стане меншою за  $M$ .

⋮

У нас виникне ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = (a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+) - (a_1^- + \dots + a_{m_1}^-) + (a_{k_1+1}^+ + \dots + a_{k_2}^+) - (a_{m_1+1}^- + \dots + a_{m_2}^-) + \dots$

– це перестановочний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Позначимо  $\sum_{j=1}^q b_j = S_q$  – часткова сума.

Оберемо  $S_q$  такий, що останній член ряду – це  $a_{k_i}^+$ . По-перше,  $S_q > M$  за конструкцією; по-друге, оскільки  $a_{k_i}^+$  має індекс  $k_i$  – найменший можливий індекс, де  $S_q > M$  – то звідси  $S_{q-1} \leq M \implies S_q \leq M + a_{k_i}^+$ . Ці дві отримані нерівності гарантують нам оцінку  $M < S_q \leq M + a_{k_i}^+ \implies 0 < S_q - M \leq a_{k_i}^+$ . Оберемо  $S_q$  такий, що останній член ряду – це  $a_{m_j}^-$ . Аналогічними міркуваннями доведемо, що  $-a_{m_j}^- < S_q - M \leq 0$ .

Оберемо довільне  $S_q$ . Зауважимо, що  $S_q^{\text{до останнього від’ємного}} \leq S_q \leq S_q^{\text{до останнього додатного}}$ . Значить, звідси

$$-a_{m_{i-1}}^- < S_q - M < a_{k_i}^+.$$

Оскільки  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , то за необхідною умовою,  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Значить,  $a_n^+ \rightarrow 0$ ,  $a_n^- \rightarrow 0$  як

підпослідовності  $\{a_n\}$ . Внаслідок у нерівності  $-a_{m_{i-1}}^- < S_q - M < a_{k_i}^+$  спрямуємо  $q \rightarrow \infty$ , тоді звідси  $i \rightarrow \infty$ , внаслідок чого  $a_{m_{i-1}}^-, a_{k_i}^+ \rightarrow 0$  як відповідні підпослідовності  $\{a_n^+\}, \{a_n^-\}$ . Значить,

залишилися  $\lim_{q \rightarrow \infty} S_q = \sum_{j=1}^{\infty} b_j = M$ .

Тепер фіксуємо довільне число  $M < 0$ . Насправді, вся ця процедура абсолютно аналогічна. Тільки ми там спочатку брали додатні числа, потім від'ємні – а в цьому випадку робиться навпаки.

Випадок  $M = +\infty$ .

Для числа  $1 + a_1^- > 0$  буде існувати  $k_1 \in \mathbb{N}$ , для якого  $a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+ > 1 + a_1^-$ .

Для числа  $2 + a_2^- + a_1^- > 0$  буде існувати  $k_2 \in \mathbb{N}$ , для якого  $a_1^+ + \dots + a_{k_2}^+ > 2 + a_1^- + a_2^-$ . Іншими словами,  $(a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+) - a_1^- + (a_{k_1+1}^+ + \dots + a_{k_2}^+) - a_2^- > 2 + a_2^-$ .

$\vdots$

У нас виникне ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = (a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+) - a_1^- + (a_{k_1+1}^+ + \dots + a_{k_2}^+) - a_2^- + \dots$  – це перестановочний

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Зауважимо, що всі часткові суми перестановочного ряду  $S_q \geq i + a_i^-$ , тому при  $i \rightarrow \infty$

ми отримаємо  $\lim_{q \rightarrow \infty} S_q = \sum_{j=1}^{\infty} = +\infty = M$ .

Випадок  $M = -\infty$  аналогічний.

Доведення не найкомпактніше, але намагався розписати більше для кращого прояснення. ■

**Example 4.5.2** Розглянемо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Неважко показати, що цей ряд збіжний умовно.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = ?$$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln(2n) \right) - \left( 1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) + \ln 2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

У цьому випадку  $\gamma$  – константа Ойлера-Маскероні (див. попередній пдф).

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow \ln 2.$$

Таким чином, звідси  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ . Тобто ми довели, що

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2.$$

Тепер переставимо доданки ряду та обчислимо ось таку суму:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = ?$$

$$\begin{aligned} S_{3n} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n-1} = \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-2} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-2} - \ln(4n-2) \right) + \ln(4n-2) - \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \ln(2n-1) \right) - \frac{1}{2} \ln(2n-1) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) - \frac{1}{2} \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &\rightarrow \gamma - \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{2} \gamma + \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

$$S_{3n+1} = S_{3n} + \frac{1}{4n+1} \rightarrow \frac{3}{2} \ln 2 \quad S_{3n+2} = S_{3n+1} + \frac{1}{4n+3} \rightarrow \frac{3}{2} \ln 2.$$

Таким чином, після перестановки отримаємо нове значення:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2.$$

## 5 Функціональні ряди

### 5.1 Функціональні послідовності

**Definition 5.1.1** Функціональною послідовністю назвемо послідовність  $\{f_n(x), n \geq 1\}$ , всі функції задані на одній множині  $A$ .

**Definition 5.1.2** Функція  $f(x)$ , що задана теж на множині  $A$ , називається **поточковою границею** функціональної послідовності  $\{f_n(x), n \geq 1\}$ , якщо

$$\forall x \in A : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

**Example 5.1.3** Розглянемо послідовність  $\left\{f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, n \geq 1\right\}$  на  $[0, 5]$ .

$$\text{Тоді } f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} = \frac{x}{\frac{1}{n} + 1 + \frac{x}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = f(x).$$

**Remark 5.1.4** Поточкова збіжність дала змогу створити нову функцію  $f(x)$ , збираючи всі точки  $x \in A$ . Додатково зазначу, що в кожній точці  $x \in A$  виникає числова послідовність, яка має єдину границю при збіжності - тому наша функція  $f(x)$  є єдиною такою.

**Definition 5.1.5** Функція  $f(x)$  називається **рівномірною границею** функціональної послідовності  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  на множині  $A$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Позначення:  $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty$ .

**Corollary 5.1.6**  $f(x)$  - рівномірна границя послідовності  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  на  $A \iff$

$$\iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Дійсно,  $\forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ .

**Proposition 5.1.7** Задано  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  - послідовність на  $A$ . Відомо, що  $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty$  на множині  $A$ . Тоді  $\forall x \in A : f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$ .

**Proof.**

За умовою,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \implies f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$ . ■

**Corollary 5.1.8** Рівномірно збіжна послідовність має єдину рівномірну границю.

**Remark 5.1.9** Таким чином, єдиний кандидат на рівномірну збіжність послідовність  $\{f_n, n \geq 1\}$  - це сама функція  $f$ , що була отримана в результаті поточної збіжності.

**Example 5.1.10** Розглянемо послідовність  $\left\{f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, n \geq 1\right\}$  на  $[0, 5]$ .

$$\text{Маємо } f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} = \frac{x}{\frac{1}{n} + 1 + \frac{x}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = f(x).$$

$$\text{Також } \sup_{x \in [0,5]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,5]} \frac{x+x^2}{1+n+x} \stackrel{=}{=}$$

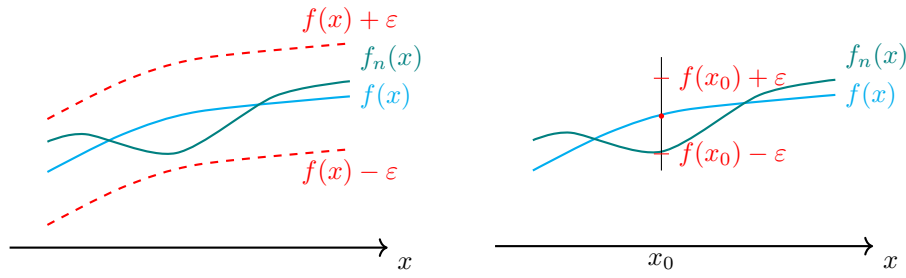
Розглянемо функцію  $h(x) = \frac{x+x^2}{1+n+x}$  на  $[0, 5]$ . Знайдемо похідну:

$$h'(x) = \frac{(1+2x)(1+n+x) - x - x^2}{(1+n+x)^2} = \frac{1+n+2x+2nx+x^2}{(1+n+x)^2} > 0.$$

Отже,  $h$  - строго монотонно зростає. Тому найбільше значення досягається при  $x = 5$ .

$$\stackrel{=}{=} \frac{5+25}{1+n+5} = \frac{30}{6+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Таким чином,  $f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \rightarrow \infty$ .



Ліворуч - рівномірна збіжність. Праворуч - поточкова збіжність.

Тепер найголовніше питання, а для чого власне нам потрібна рівномірна збіжність, чому не достатньо поточної збіжності. Одну з відповідей на це питання дає такий приклад.

**Example 5.1.11** Розглянемо послідовність  $\{f_n(x) = x^n, n \geq 1\}$  на множині  $[0, 1]$ . Тоді маємо:

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} = f(x).$$

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} \begin{cases} 0, & x = 1 \\ x^n, & x \in [0, 1) \end{cases} = 1.$$

В загальному випадку,  $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \not\rightarrow 0$ , а тому можемо сказати, що  $f_n(x) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ .

Найголовніше з цього прикладу, що  $f_n \in C([0, 1])$ , проте  $f \notin C([0, 1])$ , а хотілось би. Саме тому нам потрібні рівномірні збіжності.

Але перед цим надамо деякі нові поняття та певні критерії для зручності.

**Definition 5.1.12** Нормою функції  $f(x)$  на множині  $A$  назвемо таке число:

$$\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

**Proposition 5.1.13** Властивості

Задані функції  $f, g$  на множині  $A$ . Тоді справедливо наступне:

- 1)  $\|f\| \geq 0$ ;
- 2)  $\|f\| = 0 \iff f(x) = 0, \forall x \in A$ ;
- 3)  $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ;
- 4)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ;
- 5)  $|\|f\| - \|g\|| \leq \|f - g\|$ .

**Proof.**

1), 3) зрозуміло.

2)  $\|f\| = 0 \Rightarrow \sup_{x \in A} |f(x)| = 0 \Rightarrow 0 \leq |f(x)| \leq 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$ .

В зворотньому напрямку все зрозуміло.

4)  $\|f + g\| = \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in A} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup_{x \in A} |f(x)| + \sup_{x \in A} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$ .

5) Вказівка:  $\|f\| \leq \|f - g\| + \|g\|$  та  $\|g\| \leq \|g - f\| + \|f\|$ . ■

**Remark 5.1.14**  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \iff \|f_n - f\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Тепер буде нам набагато простіше розписувати, що таке рівномірна збіжність.

**Theorem 5.1.15** Критерій Коші

$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  на  $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  на  $A$

Тоді  $\|f_n - f\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \begin{aligned} \|f_n - f\| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \|f_m - f\| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$

$$\Rightarrow \|f_n - f_m\| = \|f_n - f + f - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\| < \varepsilon.$$

□ Дано:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$

Якщо зафіксувати точку  $x_0 \in A$ , то отримаємо фундаментальну послідовність  $\{f_n(x_0), n \geq 1\} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$

Якщо  $m \rightarrow \infty$ , то маємо, що  $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Оскільки це може бути  $\forall x_0 \in A$ , то тоді  $\|f_n - f\| < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x), n \rightarrow \infty$  на  $A.$  ■

**Theorem 5.1.16** Задано  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  - послідовність на множині  $A$  та  $f_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x), n \rightarrow \infty.$  Відомо, що  $\forall n \geq 1 : \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = c_n$ , де  $x_0 \in \mathbb{R}$  - гранична точка  $A$ . Тоді послідовність  $\{c_n, n \geq 1\}$  - збіжна, а також  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$

**Proof.**

Оскільки  $f_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x), n \rightarrow \infty$ , то за критерієм Коші,

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Якщо  $x \rightarrow x_0$ , то отримаємо, що  $|c_n - c_m| \leq \varepsilon < 2\varepsilon.$  Тоді за критерієм Коші,  $\{c_n, n \geq 1\}$  - збіжна, тобто  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c.$

Лишилось довести, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c.$

Оскільки  $f_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x), n \rightarrow \infty$ , тоді  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n, m \geq N_1 : \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Оскільки  $c_n \rightarrow c, n \rightarrow \infty$ , то тоді для такого самого  $\varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n \geq N_2 : |c_n - c| < \varepsilon.$

Зафіксуємо  $N = \max\{N_1, N_2\}.$  Тоді  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_N(x) = c_N \Rightarrow \exists \delta : \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$$|f_N(x) - c_N| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow |f(x) - c| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - c_N + c_N - c| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - c_N| + |c_N - c| < 3\varepsilon.$$

Остаточно,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$  ■

**Corollary 5.1.17** Задано  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  - послідовність на множині  $A$  та  $f_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x), n \rightarrow \infty.$

Відомо, що  $\forall n \geq 1 : f_n(x) \in C(A).$  Тоді  $f(x) \in C(A)$ , а також  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$

**Theorem 5.1.18** Задано  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  - послідовність на множині  $[a, b]$  та  $f_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x), n \rightarrow \infty.$

Відомо, що  $\forall n \geq 1 : f_n(x) \in \mathcal{R}([a, b]).$  Тоді  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b]),$  а також  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$

**Proof.**

Маємо  $f_n(x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x), n \rightarrow \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$

Зокрема  $\forall x \in [a, b] : |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \Rightarrow f_N(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$

Тоді  $\forall k = 1, \dots, n$  виконуються нерівності:

$$m_k(f) \geq f_N(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \geq m_k(f_N) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

$$M_k(f) \leq f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq M_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

$$\text{Звідси випливає, що } M_k(f) - m_k(f) \leq M_k(f_N) - m_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Оскільки  $f_N \in \mathcal{R}([a, b]),$  то  $\exists \tau : U(f_N, \tau) - L(f_N, \tau) < \frac{\varepsilon}{2}.$  Тоді

$$U(f, \tau) - L(f, \tau) = \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f)) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \left( M_k(f_N) - m_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) \Delta x_k =$$

$$= (U(f_N, \tau) - L(f_N, \tau)) + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \varepsilon \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a, b]).$$

Для доведення рівності зробимо таку оцінку та прямування:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b f_n(x) - f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \|f - f_n\| dx =$$

$$= \|f - f_n\| (b-a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{Отже, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Theorem 5.1.19** Задано  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  - послідовність на множині  $[a, b]$ . Відомо, що:

- 1)  $\exists x_0 \in [a, b] : \{f_n(x_0), n \geq 1\}$  - збіжна послідовність;
- 2)  $\forall n \geq 1 : f_n$  - диференційована на  $[a, b]$ ;
- 3)  $\{f'_n, n \geq 1\}$  - рівнобірно збіжна послідовність на  $[a, b]$ .

Тоді  $\{f_n, n \geq 1\}$  - рівномірно збіжна послідовність на  $[a, b]$ . Звідси можна визначити функцію  $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , тоді  $f$  - диференційована на  $[a, b]$ , а також  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .

**Proof.**

$\{f'_n\}$  рівномірно збіжна на  $[a, b] \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 : \forall n, m \geq N_1 : \forall x \in [a, b] : |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon$ .

$\{f_n(x_0)\}$  збіжна  $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N_2 : \forall n, m \geq N : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$ .

Позначимо  $\varphi_{n,m}(x) = f_n(x) - f_m(x)$ . Тоді ми маємо такі нерівності:

$$|\varphi'_{n,m}(x)| < \varepsilon \quad |\varphi_{n,m}(x_0)| < \varepsilon.$$

Фіксуємо деяку т.  $x \in [a, b]$ , а також  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Тоді  $\forall n, m \geq N$  і за теоремою Лагранжа:

$$\varphi_{n,m}(x) - \varphi_{n,m}(x_0) = \varphi'_{n,m}(\xi)(x - x_0), \text{ причому } \xi \in (x, x_0) \text{ або } (x_0, x).$$

$$\implies |f_n(x) - f_m(x)| = |\varphi_{n,m}(x)| = |\varphi_{n,m}(x) - \varphi_{n,m}(x_0) + \varphi_{n,m}(x_0)| \leq |\varphi_{n,m}(x_0)| + |\varphi'_{n,m}(\xi)||x - x_0| < \varepsilon + (b - a)\varepsilon = (b - a + 1)\varepsilon.$$

Таким чином, ми довели критерієм Коші, що  $\{f_n\}$  рівномірно збіжна на  $[a, b]$ . Зокрема звідси визначаємо функцію (як в теоремі)  $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Далі беремо будь-яку точку  $x_{00} \in [a, b]$ . Покажемо, що  $f$  в цій точці диференційована.

$$\text{Маємо } f'_n(x_{00}) = \lim_{x \rightarrow x_{00}} \frac{f_n(x) - f_n(x_{00})}{x - x_{00}}. \text{ Позначимо } \psi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_{00})}{x - x_{00}}, \psi(x) = \frac{f(x) - f(x_{00})}{x - x_{00}}.$$

$$|\psi_n(x) - \psi(x)| = \frac{1}{|x - x_{00}|} |f_n(x) - f_n(x_{00}) - f(x) + f(x_{00})| = \frac{1}{|x - x_{00}|} |\varphi_{n,\infty}(x) - \varphi_{n,\infty}(x_{00})| =$$

$$\stackrel{[=]}{=} \frac{1}{|x - x_{00}|} |\varphi'_{n,\infty}(\xi)||x - x_{00}| = |\varphi'_{n,\infty}(\xi)| \stackrel{[<]}{<} \varepsilon.$$

Рівність  $[=]$  за Лагранжем, причому  $\xi \in (x, x_{00})$  або  $(x_{00}, x)$ ;  $[<]$  за пунктом 3) теореми.

Тоді  $\psi_n(x) \xrightarrow{>} \psi(x), n \rightarrow \infty$  на  $[a, b] \setminus \{x_{00}\}$ . А оскільки  $\psi_n \in C([a, b] \setminus \{x_{00}\})$ , то звідси

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x). \quad \blacksquare$$

**Theorem 5.1.20** Теорема Діні

Задано  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  - монотонна послідовність на множині  $[a, b]$ , причому  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .

Відомо, що  $\forall n \geq 1 : f_n \in C([a, b])$  та  $f \in C([a, b])$ . Тоді  $f_n \xrightarrow{>} f, n \rightarrow \infty$  на  $[a, b]$ .

**Proof.**

Ми припустимо, що  $\{f_n(x), n \geq 1\}$  - монотонно зростає, бо для спадної майже аналогічно. Оскільки також  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , то звідси в силу монотонності  $f_n(x) \leq f(x)$ .

Тепер розглянемо функцію  $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$ . За умовою,  $r_n \in C([a, b])$ , далі  $\{r_n(x), n \geq 1\}$  - монотонно спадає, а також  $r_n(x) \rightarrow 0$ . Зараз необхідно довести, що  $r_n(x) \xrightarrow{>} 0$ .

Нехай  $x_0 \in [a, b]$ , тоді  $r_n(x_0) \rightarrow 0 \implies \forall \varepsilon \in [a, b] : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : r_N(x_0) < \varepsilon$ .  $r_N \in C([a, b])$ , зокрема неперервна в т.  $x_0$ , тому  $\exists \delta : \forall x \in [a, b] : |x - x_0| < \delta \implies |r_N(x) - r_N(x_0)| < \varepsilon$ . Звідси та з попередньої нерівності випливає, що  $r_N(x) < 2\varepsilon$ , і це виконано в  $U_\delta(x_0) \cap [a, b]$ .

Відрізок  $[a, b]$  можна покрити скінченною кількістю інтервалів за лемою Гейне-Бореля, тобто в нашому випадку знайдуться точки  $x_1, \dots, x_k \in [a, b]$ , для яких знайдуться номери  $N_1, \dots, N_k$ , а також околи, які покривають відрізок.

Встановимо  $N = \max\{N_1, \dots, N_k\}$ . Якщо взяти довільне  $y \in [a, b]$ , то знайдеться окіл т.  $x_i, i = \overline{1, k}$ , де справедлива нерівність  $r_N(y) < \varepsilon$ . Не забуваємо, що в нас спадна послідовність.

Отже,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \forall y \in [a, b] : r_n(y) < r_N(y) < \varepsilon$ .

Таким чином,  $r_n(x) \xrightarrow{>} 0$ , що призводить до результату теореми Діні. \blacksquare

## 5.2 Функціональні ряди

**Definition 5.2.1** Функціональним рядом називають суму членів функціональної послідовності  $\{a_n(x), n \geq 1\}$ :

$$a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$



**Частковою сумою** даного ряду називають суму перших  $k$  функцій:

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_k(x)$$

В такому випадку в нас виникає функціональна послідовність часткових сум  $\{S_k(x), k \geq 1\}$ . Якщо така послідовність збігається в т.  $x_0$ , то ряд є **збіжним** в т.  $x_0$  та **сума** цього ряду дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x_0) = S(x_0)$$

Інакше - **розбіжним**.

Якщо ряд збігається  $\forall x \in B$ , то  $B$  називають **областю збіжності**

Якщо ряд абсолютно збігається  $\forall x \in B$ , то  $B$  називають **областю абсолютної збіжності**

Якщо ряд умовно збігається  $\forall x \in B$ , то  $B$  називають **областю умовної збіжності**

**Example 5.2.2** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ .

Для початку перевіримо на абсолютну збіжність, для цього ми досліджуємо  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right|$ . Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}(1+x^{2n})|}{|(1+x^{2n+2})x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n+2}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n+2}} + 1} \right| = \frac{1}{|x|} \text{ при } |x| > 1. \\ &= |x| \text{ при } |x| < 1. \\ &= 1 \text{ при } |x| = 1. \end{aligned}$$

Отже, при  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  в перших двох випадках, тобто при  $|x| \neq 1$ . Це означає збіжність.

При  $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$  треба додатково дослідити.

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+1} = +\infty \Rightarrow \text{розбіжний.}$$

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+1} - \text{розбіжний, оскільки } \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2}.$$

Таким чином, область абсолютної збіжності  $B_{abs} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ; область умовної збіжності  $B_{cond} = \emptyset$ .

**Definition 5.2.3** Якщо послідовність часткових сум  $\{S_k(x), k \geq 1\}$  збігається рівномірно на множині  $A$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  називають **рівномірно збіжним** на  $A$ .

**Theorem 5.2.4 Критерій Коші**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \text{рівномірно збіжний на множині } A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left\| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right\| < \varepsilon.$$

Випливає з критерію Коші рівновірної збіжності функціональних послідовностей.

**Corollary 5.2.5 Необхідна умова рівномірної збіжності**

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  - рівномірно збіжний на  $A$ . Тоді  $a_k(x) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  на  $A$ .

Вказівка: критерій Коші при  $p = 1$ .

**Theorem 5.2.6 Мажорантна ознака Вейерштрасса**

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  - ряд на множині  $A$ . Відомо, що:

- 1)  $\exists \{c_n, n \geq 1\} : \forall n \geq 1 : \forall x \in A : |a_n(x)| \leq c_n$ ;  
 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  - збіжний. Його ще називають **мажорантним рядом**.

Тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  збігається рівномірно на множині  $A$ .

**Proof.**

За критерієм Коші,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  - збіжний  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} c_n \right| < \varepsilon$ .

Тоді  $\forall x \in A : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} c_n < \varepsilon$ .

Тому за критерієм Коші,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  - рівномірно збіжний на множині  $A$ . ■

**Example 5.2.7** Розглянемо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ .

Оскільки  $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ , причому це виконано завжди, а мажорантний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  - збіжний, то за

ознакою Вейерштрасса,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  - збіжний рівномірно на  $\mathbb{R}$ .

**Theorem 5.2.8** **Ознаки Діріхле та Абеля**

Задано  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  - ряд на множині  $A$ .

Нехай виконано один з двох блоків умов:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^k a_n(x) - \text{рівномірно обмежена на } A \\ \{b_n(x), n \geq 1\} - \text{монотонна та } b_n(x) \rightarrow 0 \text{ на } A \\ \text{ознаки Діріхле} \end{array} \right| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \text{збіжний рівномірно на } A \\ \{b_n(x), n \geq 1\} - \text{монотонна та рівномірно обмежена на } A \\ \text{ознаки Абеля} \end{array}$$

Тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  - збіжний рівномірно на множині  $A$ .

*Доводиться так само, як було в числових рядах.*

**Example 5.2.9** Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ , якщо  $0 < \alpha \leq 1$ .

Аналогічними міркуваннями як в **Ех. ???** ми можемо отримати таку формулу:

$$\sum_{n=1}^k \sin nx = \frac{\sin \left( \frac{k+1}{2} x \right)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} \text{ за умовою, що } \sin \frac{x}{2} \neq 0 \implies x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Тоді  $\left| \sum_{n=1}^k \sin nx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{C}$ , за умовою, що розглядається область  $[a, b] \subset (2\pi m, 2\pi(m+1))$ .

Ну й також  $\frac{1}{n^\alpha}$  - монотонна та рівномірно н.м. (тому що від  $x$  не залежить) на  $[a, b]$ .

Таким чином,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$  збігається рівномірно в будь-якому відрізку  $[a, b] \subset (2\pi m, 2\pi(m+1))$ .

Розглянемо тепер відрізок  $[0, \delta]$ , де  $\delta > 0$ , та покажемо критерієм Коші, що ряд розбіжний.

Дійсно,  $\exists \varepsilon > 0 : \forall K : \exists k > K : \exists p = 2k \geq 1 : \exists x = \frac{1}{k} \in [0, \delta] :$

$$\left| \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{\sin \frac{n}{k}}{n^\alpha} \right| \geq \left| \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{\sin 1}{n^\alpha} \right| = \sin 1 \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sin 1 \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{(2k)^\alpha} \geq \sin 1 \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{2k} =$$

$$\frac{\sin 1}{2} = \varepsilon.$$

### 5.3 Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів

**Theorem 5.3.1** Задано  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  - рівномірно збіжний на  $A$ .

Відомо, що  $\forall n \geq 1 : \exists \lim_{x \rightarrow x_0} a_n(x) = c_n$ , де  $x_0 \in \mathbb{R}$  - гранична точка  $A$ . Тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  - збіжний, а також

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

**Proof.**

Із умови теореми випливає, що  $\forall k \geq 1 : \lim_{x \rightarrow x_0} S_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^k a_n(x) = \sum_{n=1}^k c_n$ . Оскільки ряд - рівномірно збіжний, то тоді  $\{S_k(x), k \geq 1\}$  - рівномірно збіжна. Тоді за **Th.???**,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n. \quad \blacksquare$$

**Corollary 5.3.2** Задано  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  - рівномірно збіжний на  $A$ .

Відомо, що  $\forall n \geq 1 : a_n(x) \in C(A)$ . Тоді  $S(x) \in C(A)$ .

**Example 5.3.3** Довести, що  $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

Спочатку треба довести рівномірну збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$  в деякому лівому околі т.  $x = 1$ .

Застосуємо ознаку Абеля при  $a_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ,  $b_n(x) = x^n$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  - збіжна за ознакою Лейбніца, а оскільки вона не залежить від  $x$ , то тому ще й рівномірно в околі т.  $x = 1$ .

$x^n$  - зрозуміло, монотонна та монотонно обмежена, оскільки  $|x^n| \leq 1$ .

Таким чином,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$  - рівномірно обмежена в лівому околі т.  $x = 1$ .

А далі  $\frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \in C$ , а отже,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \in C$ , в тому числі в т.  $x = 1$ .

Таким чином,  $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

**Theorem 5.3.4** Задано  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  - рівномірно збіжний на  $[a, b]$ .

Відомо, що  $\forall n \geq 1 : a_n(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тоді  $S(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ , а також

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b a_n(x) dx \right).$$

**Proof.**

З умови теореми випливає, що  $\forall k \geq 1 : S_k(x) = \sum_{n=1}^k a_n(x) \in \mathcal{R}([a, b])$  як сума інтегрованих функцій.

Оскільки ряд - рівномірно збіжний, то тоді  $\{S_k(x), k \geq 1\}$  - рівномірно збіжна. Тоді за **Th. 10.1.?.**,  $S(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Доведемо тепер тотожність:

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \int_a^b \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n(x) \right) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \left( \sum_{n=1}^k a_n(x) \right) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left( \int_a^b a_n(x) dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b a_n(x) dx \right). \quad \blacksquare$$

**Example 5.3.5** Довести, що  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$  для всіх  $x \in (-1, 1]$ .

Розглянемо ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ . Аналогічними міркуваннями (як в попередньому прикладі) ми можемо довести, що ряд збіжний рівномірно на  $(-1, 1]$ . Покладемо деяке число  $x > 0$ . Оскільки  $(-1)^n t^n \in \mathcal{R}([0, x])$ , то звідси  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \in \mathcal{R}([0, x])$ . Таким чином,

$$\text{з одного боку, } \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n;$$

$$\text{із іншого боку, } \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x).$$

Остаточно отримали, що  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$  для всіх  $x \in (-1, 1]$ .

**Theorem 5.3.6** Задано  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ . Відомо, що:

- 1)  $\exists x_0 \in [a, b] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$  - збіжний;
- 2)  $\forall n \geq 1 : a_n(x)$  - диференційовані на  $[a, b]$ ;
- 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$  - рівномірно збіжний на  $[a, b]$ .

Тоді  $S(x)$  - збіжний рівномірно,  $S(x)$  - диференційована на  $[a, b]$ , а також  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ .

**Proof.**

Маємо,  $\{S_k(x), k \geq 1\}$ , де  $S_k(x) = \sum_{n=1}^k a_n(x)$ .

1)  $\forall n \geq 1 : a_n$  - диференційовані на  $[a, b]$ , а тому  $\forall k \geq 1 : S_k$  - також диференційована на  $[a, b]$ .

2) Відомо, що  $\exists x_0 \in [a, b] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$  - збіжний, тобто послідовність  $\{S_k(x_0), k \geq 1\}$  - збіжна.

3) Маємо  $S'_k(x) = \sum_{n=1}^k a'_n(x)$ , про яку відомо, що  $S'_k(x) \rightarrow S'(x), k \rightarrow \infty$ .

Тоді за **Th. ???**,  $S_k(x) \rightarrow S(x), k \rightarrow \infty$ , а також

$$S'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)' = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n(x) \right)' = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x). \quad \blacksquare$$

**Example 5.3.7** Знайдемо похідну ряду  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}$  на відрізку  $(-1, 1]$ .

Треба пересвідчитись, що можна це робити диференціювання:

- 1)  $(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}$  - всі диференційовані;
- 2) Якщо  $x = 1$ , то ряд  $S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  - збіжний за ознакою Лейбніца.
- 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}$  - рівномірно збіжний за Абеля.

$$\text{Отже, } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n} \implies x S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x).$$

Остаточно  $S'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ , додатково  $S'(0) = 0$ .

## 5.4 Степеневі ряди

**Definition 5.4.1** Степеневим рядом називаємо ми такий функціональний ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

де  $\{a_n, n \geq 0\}$  - числова послідовність.

**Theorem 5.4.2** Теорема Коші-Адамара

Задано  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  - степеневий ряд. Нехай  $\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$  - радіус збіжності. Тоді ряд:

при  $|x - x_0| < R$  - збіжний абсолютно;

при  $|x - x_0| > R$  - розбіжний;

при  $|x - x_0| = R$  - відповіді нема.

**Proof.**

Скористаємось радикальною ознакою Коші для нашого ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q.$$

Тоді:

При  $q < 1$ , тобто  $|x - x_0| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$  - збіжний абсолютно;

При  $q > 1$ , тобто  $|x - x_0| > \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$  - розбіжний;

При  $q = 1$  - нема відповіді. ■

**Corollary 5.4.3** Наслідок із ознаки Даламбера

Задано  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  - степеневий ряд. Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$  - радіус збіжності. Тоді ряд:

при  $|x - x_0| < R$  - збіжний абсолютно;

при  $|x - x_0| > R$  - розбіжний;

при  $|x - x_0| = R$  - відповіді нема.

**Proof.**

Скористаємось ознакою Даламбера для нашого ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q.$$

Тоді:

При  $q < 1$ , тобто  $|x - x_0| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$  - збіжний абсолютно;

При  $q > 1$ , тобто  $|x - x_0| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$  - розбіжний;

При  $q = 1$  - нема відповіді. ■

**Example 5.4.4** Знайдемо область збіжності ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{2^n(n+1)}$ .

Маємо  $a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$ , тоді  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)}{n+1} = 2$ .

Отже, при  $|x - 7| < 2 \implies x \in (5, 9)$  ряд збіжний абсолютно. Також при  $|x - 7| > 2 \implies x \in (-\infty, 5) \cup (9, +\infty)$  ряд розбіжний.

А ось в  $x = 5, x = 9$  треба додатково обстежити.

При  $x = 9$  маємо  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  - розбіжний.

При  $x = 5$  маємо  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$  - збіжний за Лейбніцем, але умовно.

Отже, область збіжності  $B = [5, 9)$ .

### Theorem 5.4.5 Теорема Абеля

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  - рівномірно збіжний на будь-якому відрізку із області збіжності.

#### Proof.

Зафіксуємо довільний відрізок  $[a, b]$ . Будемо розглядати декілька випадків.

1.  $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ .

Зафіксуємо число  $M = \max\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\}$ . Звідси  $\forall x \in [a, b] : |x - x_0| < M < R$ , а тому  $|a_n(x - x_0)^n| < |a_n|M^n$ .

Розглянемо мажорантний ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n M^n$ . Застосуємо ознаку Коші:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n M^n|} = M \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < R \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ . Отже, цей ряд - збіжний. Тоді за ознакою Вейерштрасса, степеневий ряд - збіжний рівномірно на  $[a, b]$ .

2.  $[a, b] \subset [x_0, x_0 + R]$ .

Розпишемо ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n$ .

Розглянемо випадок, коли ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  - збіжний. Збіжність степеневому ряду проведемо за ознакою Абеля:

$$g_n(x) = \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n$$

Домовились, що  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  - збіжний, причому рівномірно, оскільки не залежить від  $x$ .

Послідовність  $\left\{g_n(x) = \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n, n \geq 1\right\}$  - рівномірно обмежена, оскільки

$$\forall x \in [a, b] \subset [x_0, x_0 + R] : |x - x_0| \leq R \Rightarrow \forall n \geq 1 : \left|\frac{x - x_0}{R}\right|^n \leq 1.$$

А також послідовність є монотонною, тому що  $\frac{x - x_0}{R} < 1$ .

Отже, за Абелем, ряд - рівномірно збіжний на  $[a, b]$ .

Аналогічно, коли  $[a, b] \subset [x_0 - R, x_0]$  за умовою, що  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$  - збіжний.

3.  $[a, b] \subset [x_0 - R, x_0 + R]$ .

Тоді відрізок  $[a, b]$  розбивається на  $[a, x_*] \cup [x_*, b]$ .

На цих відрізках ряд збіжний рівномірно за п. 2. ■

**Example 5.4.6** Зокрема ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{2^n(n+1)}$  збіжний рівномірно в будь-якому відрізку із області збіжності  $[5, 9)$ , у тому числі в тому, що містить початок т.  $x = 5$ .

А тепер ми позначимо степеневий ряд  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ .

**Theorem 5.4.7**  $S \in C$  в області збіжності.

#### Proof.

Візьмемо якусь точку  $x_* \in (x_0 - R, x_0 + R)$ . Зафіксуємо деякий відрізок  $[a, b] \ni x_*$ . На відрізку  $[a, b]$  ряд - збіжний рівномірно за теоремою Абеля, члени ряду - неперервні функції. Отже,  $S(x) \in C([a, b]) \implies S(x) \in C(\{x_*\})$ .

Оскільки т.  $x_*$  була довільною, то одразу  $S(x) \in C((x_0 - R, x_0 + R))$ . ■

**Theorem 5.4.8**  $S \in \mathcal{R}$  в області збіжності, а також  $\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ .

Причому радіус збіжності нового степеневого ряду зберігається.

**Proof.**

На відрізку  $[x_0, x_*]$  або  $[x_*, x_0]$ , де  $x_* \in (x_0 - R, x_0 + R)$ , степеневий ряд збігається рівномірно за Абелем. Тому  $S \in \mathcal{R}([x_0, x_*])$  або  $[x_*, x_0]$ . Тотожність випливає з цього ж Th. Тепер перевіримо, що радіус збіжності дійсно такий самий. За Коші-Адамара,

$$R_{new} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{n+1} \right|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{|a_n|}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|}} = 1 \cdot R = R. \quad \blacksquare$$

**Theorem 5.4.9**  $S$  - диференційований в області збіжності, а також  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x - x_0)^{n-1}$ . Причому радіус збіжності нового степеневого ряду зберігається.

**Proof.**

Розглянемо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x - x_0)^{n-1}$ . Радіус збіжності збігається, оскільки

$$R_{new} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Візьмемо якусь точку  $x_* \in (x_0 - R, x_0 + R)$ . Нехай відрізок  $[a, b] \ni x_*$ . На відрізку  $[a, b]$  ряд - збіжний рівномірно за теоремою Абеля. Використаємо далі умови для диференціювання:

- 1)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  - збіжний принаймні в одній точці;
- 2) Всі члени ряду - диференційовані функції;
- 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* (x - x_0)^n$  - рівномірно збіжний на  $[a, b]$  за Абелем.

Отже,  $S(x)$  - диференційований на  $[a, b]$ , зокрема і в т.  $x_*$ . Оскільки т.  $x_*$  була довільною, то одразу  $S(x)$  - диференційований в  $(x_0 - R, x_0 + R)$ .

Тому дійсно,  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ . ■

**Corollary 5.4.10**  $S \in C^\infty$  в області збіжності.

## 5.5 Ряди Тейлора

**Definition 5.5.1** Функцію  $f$  називають **аналітичною** в т.  $x_0 \in \mathbb{R}$ , якщо в околі т.  $x_0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

**Example 5.5.2** Функція  $f(x) = \ln(1+x)$  - аналітична на  $(-1, 1]$ , оскільки  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ .

Оскільки степеневий ряд - нескінченно-диференційована, то  $f \in C^\infty$ . У такому випадку можемо знайти коефіцієнти:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 \\ f'(x_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \Big|_{x=x_0} = a_1 \\ f''(x_0) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \Big|_{x=x_0} = 2a_2 \end{aligned}$$

⋮

Таким чином, аналітична функція задається **рядом Тейлора**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

**Remark 5.5.3** Із цього випливає, що аналітична функція задає степеневий ряд рядом Тейлора однозначно.

**Remark 5.5.4** Якщо  $x_0 = 0$ , то ряд Тейлора зазвичай це називають **рядом Маклорена**.

**Remark 5.5.5**  $f$  - аналітична  $\implies f \in C^\infty$ . У зворотному випадку не завжди працює.

**Example 5.5.6** Зокрема  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

Функція  $f \in C^\infty(0 - R, 0 + R)$ , але  $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \geq 1$ .

Якщо допустити розклад функції в ряд Тейлора, то отримаємо  $f(x) \equiv 0$ , що суперечить початковим умовам.

### Theorem 5.5.7 Теорема Тейлора

Задано функцію  $f$  та точку  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Відомо, що

1)  $f \in C^{(\infty)}((x_0 - R, x_0 + R))$ ;

2)  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \geq 1 : \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : |f^{(n)}(x)| \leq M^n$ .

Тоді  $f$  - аналітична в т.  $x_0$ , тобто  $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$  функція розкладеться в ряд Тейлора

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ , причому рівномірно збіжний на  $(x_0 - R, x_0 + R)$  (при  $R = +\infty$  - на множині  $\mathbb{R}$ ).

### Proof.

Розкладемо функцію в ряд Тейлора за остачею Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}.$$

Тоді маємо, що

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| = \left| \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1} \right| \leq \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} R^{k+1}.$$

Розглянемо тепер ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} R^{k+1}$ . За ознакою Даламбера,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{MR}{k+2} = 0 < 1$ .

Цей ряд є збіжним. Отже, за необхідною ознакою збіжності,  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} R^{k+1} = 0$ .

Звідси випливає, що

$$\sup_{x \in (x_0 - R, x_0 + R)} \left| f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} R^{k+1} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Отримали  $\sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$

Таким чином,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$  - збіжний рівномірно на  $(x_0 - R, x_0 + R)$ . ■

**Example 5.5.8** Маємо функцію  $\cos x$ . Розглянемо деяку точку  $x_0 = 0$ , встановимо  $R = +\infty$ .

$\exists M = 1 : \forall n \geq 1 : \forall x \in \mathbb{R} : |f^{(n)}(x)| = \left| \cos \left( x + \frac{\pi n}{2} \right) \right| \leq 1$ .

Таким чином, ми можемо розкласти  $\cos x$  в ряд Тейлора - отримаємо такий вигляд:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, x \in \mathbb{R}.$$



## Основні розклади

$$\begin{array}{lcl}
 1. e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; & x \in \mathbb{R} & \\
 2. \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}; & x \in \mathbb{R} & \\
 3. \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}; & x \in \mathbb{R} & \\
 4. \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k; & & |x| < 1 \\
 5. \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k; & & x \in (-1, 1] \\
 6. (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k; & & |x| < 1
 \end{array}$$

Всі решта функцій зазвичай розкладаються вже за основними розкладами функцій.

**Example 5.5.9** Розкласти функцію  $f(x) = \ln(1 + 2x - 8x^2)$  в ряд Тейлора.

Зауважимо, що  $\ln(1 + 2x - 8x^2) = \ln(1 - 2x)(1 + 4x) = \ln(1 - 2x) + \ln(1 + 4x)$ .

$$\ln(1 - 2x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-2x)^k = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k \text{ за умовою } |2x| < 1.$$

$$\ln(1 + 4x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (4x)^k = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k} x^k \text{ за умовою } |4x| < 1.$$

$$\text{Остаточно } f(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2^k + (-4)^k}{k} \right) x^k \text{ за умовою } |x| < \frac{1}{4}.$$

## 6 Вступ до $\mathbb{R}^m$

Простір  $\mathbb{R}^m$  зберігає в собі **арифметичні вектори**  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ , причому  $\forall j = \overline{1, m} : x_j \in \mathbb{R}$ .

Візьмемо довільні вектори  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ . Ми можемо створити операції **додавання** та **множення на скаляр** таким чином:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix} \quad \alpha \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Із таким означенням операцій легко доводиться, що  $\mathbb{R}^m$  утворює лінійний простір.

Надалі ми ще будемо використовувати **скалярний добуток**, що визначається таким чином:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m$$

Таким чином,  $\mathbb{R}^m$  буде утворювати евклідов простір.

### 6.1 Топологія та принцип аналізу в $\mathbb{R}^m$

**Definition 6.1.1** Нормою на множині  $\mathbb{R}^m$  будемо називати тут таку величину:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$$

Фактично кажучи, норма - це узагальнення довжини від початку. В нашому випадку початок грає роль  $\vec{0}$ .

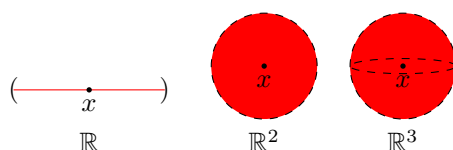
А ось відстань між двома векторами описується таким чином:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}$$

Решта означень будуть абсолютно аналогічними, просто тепер буде випадок з векторами.

**Definition 6.1.2**  $\varepsilon$ -околом точки  $\vec{x}$  будемо називати таку множину:

$$U_\varepsilon(\vec{x}) = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon\}$$



Її ще також називають **відкритим шаром** з радіусом  $\varepsilon$  в центрі т.  $\vec{x}$  та позначається як  $B(\vec{x}, \varepsilon)$ .

**Definition 6.1.3** Задамо множину  $A \subset \mathbb{R}^m$  та елемент  $\vec{a} \in A$ .

Точку  $\vec{a}$  називають **внутрішньою**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{a}) \subset A$$

А множина  $A$  називається **відкритою**, якщо кожна її точка - внутрішня.

**Definition 6.1.4** Задамо множину  $A \subset \mathbb{R}^m$  та елемент  $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ .

Точку  $\vec{a}$  називають **граничною** множини  $A$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{a} : \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{a})$$

А множина  $A$  називається **замкнутою**, якщо вона містить всі граничні точки.

**Definition 6.1.5** Задано множину  $A \subset \mathbb{R}^m$  та т.  $\vec{x} \in A$ .  
Точка  $\vec{x}$  називається **ізолюваною**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A = \{\vec{x}\}$$

Також решта тверджень будуть схожі на ті твердження, що були при топології  $\mathbb{R}$ . Тому доводити я повторно не буду, просто залишу як нагадування.

**Proposition 6.1.6** Якщо  $\{A_\lambda\}$  - сім'я злічених відкритих підмножин, то  $\bigcup_\lambda A_\lambda$  - відкрита.

**Proposition 6.1.7**  $\vec{a}$  - гранична точка  $A \subset \mathbb{R}^m \iff \forall \varepsilon > 0 : A \cap U_\varepsilon(\vec{a})$  - нескінченна множина.

**Proposition 6.1.8**  $A$  - відкрита множина  $\iff A^c$  - замкнена множина.

**Proposition 6.1.9** Якщо  $\{A_\lambda\}$  - сім'я злічених замкнених підмножин, то  $\bigcap_\lambda A_\lambda$  - замкнена.

**Proposition 6.1.10** Точка  $\vec{x} \in A$  - ізолювана  $\iff \vec{x}$  - не гранична для  $A$ .

**Proposition 6.1.11**  $\mathbb{R}^m, \emptyset$  - одночасно відкриті та замкнені множини.

**Proposition 6.1.12** Відкритий шар  $B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$  є дійсно відкритим.  
Замкнений шар  $B[\vec{a}, r] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}$  є дійсно замкненим.

**Proof.**

Нехай  $\vec{x} \in B(\vec{a}, r) \implies \|\vec{x} - \vec{a}\| < r$ . Встановимо  $\varepsilon = r - \|\vec{x} - \vec{a}\|$ .  
Тоді  $\vec{y} \in U_\varepsilon(\vec{x}) \implies \|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon \implies \|\vec{y} - \vec{a}\| = \|\vec{y} - \vec{x} + \vec{x} - \vec{a}\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon + \|\vec{x} - \vec{a}\| = \varepsilon \implies \vec{y} \in B(\vec{a}, r)$ .

Отже,  $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset B(\vec{a}, r)$ , так для кожної т.  $\vec{x} \in B(\vec{a}, r)$ . А тому множина  $B(\vec{a}, r)$  - відкрита.

$B[\vec{a}, r] = \mathbb{R}^m \setminus B(\vec{a}, r) = \mathbb{R}^m \cap B^c(\vec{a}, r)$  - обидві множини є замкненими. Тому перетин замкнена. ■

**Definition 6.1.13** Задано множину  $A \subset \mathbb{R}^m$ .  
Вона називається **обмеженою**, якщо

$$\exists R > 0 : \forall \vec{x} \in A : \|\vec{x}\| \leq R$$

Або інакше це можна записати таким чином:

$$\exists R > 0 : A \subset U_R(\vec{0})$$

**Example 6.1.14** Зокрема одинична сфера  $S^m = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x}\| = 1\}$  буде обмеженою.

## 6.2 Границя послідовності

**Definition 6.2.1** Вектор  $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$  називається **границею послідовності** векторів  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| < \varepsilon$$

Позначення:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$ .

**Theorem 6.2.2** Для послідовності  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a} \iff$   
 $\iff$  для всіх координат послідовності  $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$  існують  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)} = a_j, j = \overline{1, m}$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| < \varepsilon$ .

У нас границя визначається вектором  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ . Тоді  $\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2}$

$$\implies \forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)} - a_j| = \sqrt{(a_j^{(n)} - a_j)^2} < \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2} < \varepsilon.$$

Отже,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)} = a_j$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\forall j = \overline{1, m} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)} = a_j$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |a_j^{(n)} - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ .

$$\Rightarrow \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$$

Отже,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$ . ■

**Definition 6.2.3** Послідовність  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| < \varepsilon$$

**Theorem 6.2.4 Критерій Коші**

$\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  - збіжна  $\iff \{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  - фундаментальна.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  - збіжна, тобто  $\forall j = \overline{1, m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$  - збіжні.

Тоді всі вони - фундаментальні за критерієм Коші матана  $\mathbb{R}$ , тобто

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_j : \forall n, k \geq N_j : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

$$\Rightarrow \exists N = \max\{N_1, \dots, N_m\} : \forall n, k \geq N :$$

$$\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1^{(k)})^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m^{(k)})^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$$

Отже, наша послідовність - фундаментальна.

$\Leftarrow$  Дано:  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  - фундаментальна, тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| < \varepsilon$ .

Тоді  $\forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \varepsilon$  (зрозуміло), тобто  $\forall j = \overline{1, m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$  - фундаментальні.

Отже, вони всі - збіжні, а тому  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  - збіжна. ■

**Definition 6.2.5** Послідовність  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  називається **обмеженою**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$$

**Definition 6.2.6 Підпослідовність** послідовності  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$  називається послідовність  $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$ , де  $\{n_l, l \geq 1\}$  - строго зростаюча послідовність в  $\mathbb{N}$ .

**Theorem 6.2.7 Теорема Больцано-Вейєрштраса**

Будь-яка обмежена послідовність векторів має збіжну підпослідовність векторів.

**Proof.**

Маємо обмежену послідовність  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ , тобто  $\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$

Тоді кожна координата є обмеженою, оскільки  $\forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)}| \leq \sqrt{|a_1^{(n)}|^2 + \dots + |a_m^{(n)}|^2} \leq C$ .

Тобто всі послідовності  $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$  - обмежені.

Розглянемо  $\{a_1^{(n)}, n \geq 1\}$  - обмежена. Тоді існує збіжна підпослідовність  $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$ .

Розглянемо підпослідовність  $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$ . Вона також є обмеженою, тому всі координатні послідовності - обмежені.

Розглянемо  $\{a_2^{(n_l)}, l \geq 1\}$  - обмежена. Тоді існує збіжна підпослідовність  $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ .

Оскільки підпослідовність  $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$  - збіжна, то збіжною буде й підпослідовність  $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ .

Розглянемо підпослідовність  $\{\vec{a}^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$  - за аналогічними міркуваннями, теж обмежена.

Розглянемо підпослідовність  $\{a_3^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$  - обмежена. Тоді існує збіжна підпослідовність  $\{a_3^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$ .

Оскільки підпослідовності  $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ ,  $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$  - збіжні, то збіжними будуть підпослідовності  $\{a_1^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$ ,  $\{a_2^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$ .

⋮

Після  $m$  кроків отримаємо підпослідовність  $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$ , у якій всі координатні послідовності є збіжними. Тоді  $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$  - збіжна. ■

**Proposition 6.2.8** Задані дві послідовності  $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}, \{\vec{b}^{(n)}, n \geq 1\}$ , такі, що

$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}, \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}^{(n)} = \vec{b}$ . Тоді:

- 1)  $\forall c \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} c\vec{a}^{(n)} = c \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)}$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}^{(n)} + \vec{b}^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}^{(n)}$ ;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}^{(n)} \right)$ .

**Proof.**

1), 2) випливає з властивостей границь в  $\mathbb{R}$ , якщо розглянути покоординатну збіжність.

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^{(n)}b_1^{(n)} + \dots + a_m^{(n)}b_m^{(n)}) = a_1b_1 + \dots + a_mb_m = (\vec{a}, \vec{b}) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}^{(n)} \right).$$

■

**Example 6.2.9** Розглянемо  $\vec{x}^{(n)} = \left( \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \frac{n-1}{n} \quad \frac{2n^2-1}{n^2} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^T$  - послідовність

векторів в  $\mathbb{R}^4$ . Обчислимо її границю.

Ми можемо обчислити покоординатно, згідно з теоріями:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{n^2} = 2.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_4^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\text{Таким чином, } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \frac{n-1}{n} \quad \frac{2n^2-1}{n^2} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^T = (0 \quad 1 \quad 2 \quad e)^T.$$

**Theorem 6.2.10** Задано множину  $A \subset \mathbb{R}^m$ .

$\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$  гранична точка для  $A \iff \exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\vec{x}^0$  - гранична точка для  $A$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$  - нескінченна.

Зафіксуємо  $\varepsilon = \frac{1}{n} \implies \forall \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \frac{1}{n}$ . Тоді  $\forall j = \overline{1, m} : |x_j^{(n)} - x_j^0| < \frac{1}{n}$ .

За теоремою про 2 поліцаїв, отримаємо:  $\forall j = \overline{1, m} : x_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_j^0$ .

Із покоординатної збіжності випливає, що  $\vec{x}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{x}^0$  для послідовності  $\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\}$ .

$\Leftarrow$  Дано:  $\exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$ . Тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \varepsilon$

$\implies \forall n \geq N : \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$  - тобто нескінченна  $\implies \vec{x}^0$  - гранична точка. ■

**Example 6.2.11** Зокрема одинична сфера  $S^m = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x}\| = 1\}$  буде замкнутою.

Нехай  $\vec{\xi} \in S^m$ , хочемо показати, що буде вона граничною.

Розглянемо послідовність  $\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset S^m$  таким чином:

$$x_1^{(n)} = \xi_1 + \frac{1}{n}, \text{ починаючи з деякого номера при } \xi_1 \neq 1 \quad x_1^{(n)} = \xi_1 - \frac{1}{n} \text{ при } \xi_1 = 1$$

$$x_2^{(n)} = \xi_2$$

$\vdots$

$$x_{m-1}^{(n)} = \xi_{m-1}$$

$$x_m^{(n)} = \sqrt{1 - \left(x_1^{(n)}\right)^2 - \dots - \left(x_{m-1}^{(n)}\right)^2}.$$

Зауважимо, що  $\forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{\xi}$ , а також  $\vec{x}^{(n)} \rightarrow \vec{\xi}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Тепер розглянемо  $\vec{\xi} \notin S^m$ , тобто звідси  $\begin{cases} \|\xi\| < 1 \\ \|\xi\| > 1 \end{cases}$ .

!Припустимо, що  $\vec{\xi}$  - гранична точка для  $S^m$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{x} \in S^m : \vec{x} \neq \vec{\xi} : \|\vec{x} - \vec{\xi}\| < \varepsilon$ .

У випадку  $\|\vec{\xi}\| > 1$  ми маємо  $1 < \|\vec{\xi}\| = \|\vec{\xi} - \vec{x} + \vec{x}\| \leq \|\vec{\xi} - \vec{x}\| + \|\vec{x}\| < 1 + \varepsilon$ .

Оскільки виконано  $\forall \varepsilon > 0$ , то звідси  $\|\vec{\xi}\| = 1$ , що неможливо.

У випадку  $\|\vec{\xi}\| < 1$  ми маємо  $\varepsilon > \|\vec{x} - \vec{\xi}\| \geq \|\vec{x}\| - \|\vec{\xi}\| = |1 - \|\vec{\xi}\|| = 1 - \|\vec{\xi}\| > 0 \implies \varepsilon > 1 - \|\vec{\xi}\| > 0$ .

Оскільки виконано  $\forall \varepsilon > 0$ , то звідси  $\|\vec{\xi}\| = 1$ , що неможливо.

У двох випадках отримали суперечність!

Таким чином, ми довели, що  $S^m$  - замкнена множина.

### 6.3 Функція від декількох змінних. Границя функції

Ми будемо розглядати функції вигляду  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $A \subset \mathbb{R}^m$ . Тобто ця функція має  $m$  аргументів, а повертає деяке дійсне число.

**Example 6.3.1** Розглянемо такі приклади:

1. Маємо функцію  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , що задана як  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ;

2. Маємо функцію  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , що задана як  $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m) = x_1 x_2^2 \dots x_m^m$ .

**Definition 6.3.2** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$  - гранична точка для  $A$ .

Число  $a$  називається **границею функції**  $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$  в т.  $\vec{x}^0$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - a| < \varepsilon - \text{def. Коші}$$

$$\forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}^{(n)}) = a - \text{def. Гейне}$$

Позначення:  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) = a$ .

**Theorem 6.3.3** Означення Коші  $\iff$  Означення Гейне.

Доведення аналогічне як в матані  $\mathbb{R}$ .

#### Proposition 6.3.4 Арифметичні властивості

Задані функції  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$  - гранична точка для  $A$ . Відомо, що

$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) = a, \exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} g(\vec{x}) = b$ . Тоді:

- 1)  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} cf(\vec{x}) = ca, \forall c \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = a + b$ ;
- 3)  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x})g(\vec{x}) = ab$ ;
- 4)  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{a}{b}$  при  $b \neq 0$ .

Всі вони випливають із арифметичних послідовностей та означення Гейне.

#### Theorem 6.3.5 Критерій Коші

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$  - гранична точка для  $A$ .

$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A : \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \varepsilon$ .

Доведення аналогічне як в матані  $\mathbb{R}$ .

**Example 6.3.6** Обчислити  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \left( \frac{y}{x} + \cos(xy) \right)$ . Можна позначати це інакше:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow \pi}} \left( \frac{y}{x} + \cos(xy) \right)$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \left( \frac{y}{x} + \cos(xy) \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \frac{y}{x} + \lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \cos(xy) = \frac{\pi}{1} + \cos \pi = \pi - 1.$$

**Example 6.3.7** Покажемо, що не існує границі  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ .

Для доведення скористаємось означенням Гейне. Візьмемо дві послідовності:

$\{(x_n, y_n), n \geq 1\}$  так, щоб  $y_n = x_n$ , а також  $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ . Тоді  $\frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{2x_n^2}{2x_n^2} \rightarrow 1$ .

$\{(x_n, y_n), n \geq 1\}$  так, щоб  $y_n = -x_n$ , а також  $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ . Тоді  $\frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{-2x_n^2}{2x_n^2} \rightarrow -1$ .

Можна конкретизувати, сказати  $x_n = \frac{1}{n}$ , а можна цього не робити, напевно. У будь-якому випадку, ми показали, що не існує границі.

Тобто ми прямували до точки  $(0, 0)$  з двох сторін: вздовж прямої  $y = x$  та  $y = -x$ .

**Theorem 6.3.8 Границя в полярних координатах**

Задано функцію  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Припустимо, що  $f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = F_1(\rho)F_2(\varphi)$ , причому  $\lim_{\rho \rightarrow 0} F_1(\rho) = 0$  та  $F_2(\varphi)$  - обмежена. Тоді  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ .

**Proof.**

Маємо  $\lim_{\rho \rightarrow 0} F_1(\rho) = 0 \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \rho : |\rho| < \delta \implies |F_1(\rho)| < \varepsilon$ .

Також  $F_2$  - обмежена, тобто  $\exists M > 0 : \forall \varphi : |F_2(\varphi)| < M$ .

Нехай  $\varepsilon > 0$ . Тоді існує таке  $\delta > 0$ , що  $\forall (x,y)$ , якщо  $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2} = |\rho| < \delta$ , то звідси  $|f(x,y)| = |f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)| = |F_1(\rho)| |F_2(\varphi)| < M\varepsilon$ .

Таким чином, дійсно,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ . ■

**Example 6.3.9** Обчислити  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ .

Маємо  $x = \rho \cos \varphi$  та  $y = \rho \sin \varphi$ . Тоді функція  $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\rho^2} = \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$ .

Ми змогли розбити на функції  $F_1(\rho) = \rho^2 \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$  та  $F_2(\varphi) = \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$  - обмежена, бо  $|F_2(\varphi)| \leq 1$ .

Таким чином,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = 0$ .

**Remark 6.3.10** Якщо так станеться, що для двох різних кутів  $\theta$  при  $\rho \rightarrow 0$  ми отримаємо два різних ліміта, то тоді  $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ .

**Definition 6.3.11** Число  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$  називається **ітераційною границею**, якщо

$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = g(y)$ .

Аналогічно визначається  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$ .

Останнє дається для загального знання, таке ми точно використовувати не будемо. Тут надто багато плутанини з ними.

**Example 6.3.12** Маємо функцію  $f(x,y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$ .

Якщо шукати  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ , то вона не існує, тому що при фіксованому  $x$  ми маємо порахувати границю від  $\sin \frac{1}{y}$ , якого не існує. Також не існує  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$  за аналогічними міркуваннями.

Проте! Подвійна границя  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0$ . Дійсно,

$$\left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq \left| x \sin \frac{1}{y} \right| + \left| y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon.$$

Остання оцінка отримана в силу  $\|(x,y)\| < \delta$ , кладемо  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  - границя доведена.

**Example 6.3.13** Маємо функцію  $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Проте! Подвійної границі  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$  не існує. Дійсно, якщо  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ , то тоді

$$f(x,y) = \frac{\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

Для різного напрямку кривої отримаємо різні границі, а тому не існує. Цим активно зловживати не будемо.

**Remark 6.3.14** Окремо можуть виникнути границі вигляду  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} f(x,y)$ . У такому разі необхідні уточнення, що мається увазі під цим лімітом. Або дивитись на контекст задачі.

**Example 6.3.15** Маємо  $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$ . У даному контексті мається на увазі, що  $x, y$  робимо скільки завгодно великими одночасно.

Маємо ось таку оцінку:  $0 \leq (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = \frac{x^2 + y^2}{e^{x+y}} \leq \frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}$ .

Оскільки  $x > 0, y > 0$  в силу характеру прямування, то ця нерівність справедлива. Цілком зрозуміло, що при  $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$  одночасно маємо  $x + y \rightarrow +\infty$ , а тому  $\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}} \rightarrow 0, x + y \rightarrow +\infty$ .

Таким чином,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = 0$ .

## 6.4 Неперервність функції

**Definition 6.4.1** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - гранична точка.

Функція  $f$  називається **неперервною в т.  $\vec{x}^0$** , якщо  $\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0)$ . В будь-якій ізольованій точці  $\vec{x}^0$  функція  $f$  також неперервна.

Функція  $f$  називається **неперервною на множині  $A$** , якщо в  $\forall \vec{x} \in A : f$  - неперервна.

**Remark 6.4.2** Можна було спочатку дати означення через  $\varepsilon$ - $\delta$  мову, а згодом прийти до еквівалентного означення, як в мат. аналізі  $\mathbb{R}$ , однак тут все цілком аналогічно.

**Proposition 6.4.3** Задані функції  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - гранична точка. Відомо, що  $f, g$  - неперервні в т.  $\vec{x}^0$ . Тоді:

- 1)  $cf$  - неперервна в т.  $\vec{x}^0, \forall c \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $f + g$  - неперервна в т.  $\vec{x}^0$ ;
- 3)  $fg$  - неперервна в т.  $\vec{x}^0$ ;
- 4)  $\frac{f}{g}$  - неперервна в т.  $\vec{x}^0$ , якщо  $g(\vec{x}^0) \neq 0$ .

*Впливають з властивостей границь функцій та неперервності.*

**Theorem 6.4.4** Наступні функції є неперервними на своїй множині  $A$ :

- 1)  $f(\vec{x}) = \text{const}$  - константа,  $A = \mathbb{R}^m$ ;
- 2)  $f(\vec{x}) = x_j, j = \overline{1, m}$  - координата,  $A = \mathbb{R}^m$ ;
- 3)  $P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq n_1 \\ 0 \leq k_2 \leq n_2 \\ \dots \\ 0 \leq k_m \leq n_m}} a_{k_1 k_2 \dots k_m} \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$  - многочлен від  $m$  змінних,  $A = \mathbb{R}^m$ ;

- 4)  $R(x_1, \dots, x_m) = \frac{P(x_1, \dots, x_m)}{Q(x_1, \dots, x_m)}$  - раціональна функція від  $m$  змінних,  $A = \mathbb{R}^m \setminus \{\vec{x} : Q(\vec{x}) = 0\}$ .

**Proof.**

- 1) Все зрозуміло.

- 2)  $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)| = |x_j - x_j^0| < \varepsilon$ , тому встановлюється  $\delta = \varepsilon$ .

- 3) Безпосередньо впливає з **Prp. ?4.2.** як сума та добуток функцій 1), 2).

- 4) Безпосередньо впливає з **Prp ?4.2.** як частка двох функцій 3). ■

**Example 6.4.5** Доведемо, що функція  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  неперервна на  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Для цього покажемо, що  $\sqrt{x^2 + y^2}$  - неперервна в деякій точці  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Дійсно,

$$|\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}| = \frac{|x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2|}{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \leq \frac{|x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \rightarrow 0 \text{ при } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

Ми вже знаємо, що  $f(x, y) = x^2 + y^2$  - неперервна в т.  $(x_0, y_0)$ , а тому  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (x^2 + y^2) = x_0^2 + y_0^2$ , тож вище все правильно.

$$\text{Отже, } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

А це й доводить неперервність функції  $f$  в будь-якій точці  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

**Example 6.4.6** Дослідити на розривність функцію  $f(x, y) = \frac{x + y}{x^3 + y^3}$ .

Точки, де відбувається розрив - це точки  $x = -y$ . Тобто маємо  $(x, y) = (a, -a), a \in \mathbb{R}$  - точка



розриву.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,-a)} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,-a)} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = \begin{cases} \frac{1}{3a^2}, & a \neq 0 \\ \infty, & a = 0 \end{cases}.$$

Отже, маємо  $(0, 0)$  - точка нескінченного розриву та  $(a, -a), a \neq 0$  - точка усуненого розриву.

#### Theorem 6.4.7 Теорема Вейєрштраса 1, 2

Задано множину  $A$  - замкнена, обмежена та функція  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  - неперервна на  $A$ . Тоді:

1.  $f$  - обмежена на  $A$ ;
2.  $\exists \begin{cases} \vec{x}^* \in A \\ \vec{x}_* \in A \end{cases} : \begin{cases} f(\vec{x}^*) = \max_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}_*) = \min_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \end{cases}.$

Доведення аналогічне як в матані  $\mathbb{R}$ .

#### Definition 6.4.8 Задано функцію $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Функція  $f$  називається **рівномірно неперервною** на множині  $A$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A : \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \varepsilon$$

**Theorem 6.4.9** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  - рівномірно неперервна на  $A$ . Тоді вона є неперервною на  $A$ .

Доведення аналогічне як в матані  $\mathbb{R}$ .

#### Theorem 6.4.10 Теорема Кантора

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $A$  - замкнена, обмежена.

Відомо, що  $f$  - неперервна на  $A$ . Тоді вона є рівномірно неперервною на  $A$ .

Доведення аналогічне як в матані  $\mathbb{R}$ .

## 6.5 Символіка Ландау

**Definition 6.5.1** Задані функції  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}$  - гранична точка  $A$ .

Функція  $f$  називається **О-великою** від функції  $g$  в т.  $\vec{x}^0$ , якщо

$$\exists L > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies |f(\vec{x})| \leq L|g(\vec{x})|$$

Позначення:  $f(\vec{x}) = O(g(\vec{x})), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0$ .

Функція  $f$  називається **о-малою** від функції  $g$  в т.  $\vec{x}^0$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies |f(\vec{x})| < \varepsilon |g(\vec{x})|$$

Позначення:  $f(\vec{x}) = o(g(\vec{x})), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0$ .

Всі властивості символік Ландау для функції від однієї змінної переходять на функцію від декількох змінних в силу аналогічності доведення.

**Example 6.5.2** Зокрема  $xy = o(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$  при  $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$ . Дійсно,

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right| \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2}} = |y| \rightarrow 0 \text{ при } (x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0). \text{ Отже, } \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0.$$

## 6.6 Границя та неперервність векторнозначної функції кількох змінних, символіка Ландау

Ми будемо розглядати вектор-функції кількох (або однієї) змінної вигляду  $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ , де  $A \subset \mathbb{R}^m$ .

Тобто тепер  $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) \end{pmatrix}.$

**Example 6.6.1** Маємо деяку функцію  $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , що задана таким чином:

$$\begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}. \text{ Або зазвичай це пишуть так: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

**Definition 6.6.2** Задано функцію  $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$  - гранична точка для  $A$ . Вектор  $\vec{b}$  називається **границею вектор-функції  $\vec{f}(\vec{x})$  в т.  $\vec{x}^0$** , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon - \text{def. Коші}$$

$$\forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x}^{(n)}) = \vec{b} - \text{def. Гейне}$$

Позначення:  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}.$

**Theorem 6.6.3** Означення Коші  $\iff$  Означення Гейне

Все абсолютно аналогічно.

**Proposition 6.6.4** Задано функцію  $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$  - гранична точка для  $A$ .

$$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{u} \iff \forall j = \overline{1, k} : \exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f_j(\vec{x}) = u_j.$$

Впливає із означення Гейне та покоординатної збіжності.

**Proposition 6.6.5 Арифметичні властивості**

Задані функції  $\vec{f}, \vec{g}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$  - гранична точка для  $A$ . Відомо, що

$$\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{u}, \exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{v}. \text{ Тоді:}$$

- 1)  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} c\vec{f}(\vec{x}) = c\vec{u}, \forall c \in \mathbb{R};$
- 2)  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})) = \vec{u} + \vec{v};$
- 3)  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})) = (\vec{u}, \vec{v}).$

Всі вони впливають із векторних послідовностей та означення Гейне.

**Remark 6.6.6** У випадку векторної функції  $\vec{a}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ , де  $A \subset \mathbb{R}$ , оскільки прямування йде за дійсною множиною, то ми можемо визначити **границю зліва та справа** даної функції. Тут все зрозуміло, як виглядатиме означення.

**Example 6.6.7** Знайти границю  $\lim_{t \rightarrow 0+0} \begin{pmatrix} \frac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T.$

За одним твердженням, ми можемо покоординатно шукати границі:

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\sin 2t}{t} = 2 \quad \lim_{t \rightarrow 0+0} t^t = 1.$$

$$\text{Отже, } \lim_{t \rightarrow 0+0} \begin{pmatrix} \frac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T = (2 \quad 1)^T.$$

**Definition 6.6.8** Задана функція  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - гранична точка. Функція  $\vec{f}$  називається **неперервною в т.  $\vec{x}^0$** , якщо  $\exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}^0).$

**Remark 6.6.9** Аналогічно сума неперервних функцій - неперервна; множення на скаляр - все одно неперервна. До речі, також скалярний добуток неперервний функцій - теж неперервна.

**Remark 6.6.10** Ще тут виконується теорема Вейерштраса 1, 2 для таких функцій.

**Theorem 6.6.11** Задані множини  $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^k$

Задані функції  $\vec{f}: A \rightarrow B$  - неперервна в т.  $\vec{x}^0, \vec{g}: B \rightarrow \mathbb{R}^n$  - неперервна в т.  $\vec{f}(\vec{x}^0).$

Тоді функція  $h: A \rightarrow \mathbb{R}^n : h(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$  - неперервна в т.  $\vec{x}^0.$

Доведення аналогічне як в матані  $\mathbb{R}.$

**Definition 6.6.12** Задані функції  $\vec{f}, \vec{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$  - гранична точка  $A$ . Функція  $\vec{f}$  називається **О-великою** від функції  $\vec{g}$  в т.  $\vec{x}^0$ , якщо

$$\exists L > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x})\| \leq L \|\vec{g}(\vec{x})\|$$

Позначення:  $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{O}(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0$ .

Функція  $\vec{f}$  називається **о-малою** від функції  $\vec{g}$  в т.  $\vec{x}^0$ , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x})\| < \varepsilon \|\vec{g}(\vec{x})\|$$

Позначення:  $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{o}(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0$ .

**Corollary 6.6.13**  $\vec{f}(\vec{x}) = o(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0 \iff \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} \frac{\|\vec{f}(\vec{x})\|}{\|\vec{g}(\vec{x})\|} = 0$ .

## 6.7 Крива в $\mathbb{R}^m$

**Definition 6.7.1** Кривою в  $\mathbb{R}^m$  називають множину значень вектор-функції:  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , причому  $\vec{r}$  - неперервна на  $[a, b]$ :

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$$

**Definition 6.7.2** Крива  $\Gamma$  називається **простою**, якщо

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \implies t_1 = t_2 \text{ або } \{t_1, t_2\} = \{a, b\}$$

Крива  $\Gamma$  називається **замкнутою**, якщо  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ .

Просту та замкнену криву називають **жордановою**.

## 7 Диференційованість

### 7.1 Для функції із багатьма змінними

**Definition 7.1.1** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Функція  $f$  називається **диференційованою в т.  $\vec{x}^0$** , якщо

$$\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R} : f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m + o(\|\Delta\vec{x}\|)_{\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}}$$

Тобто диференційованість означає, що поверхня навколо т.  $\vec{x}$  дуже схожа на площину, що проходить через т.  $\vec{x}$ .

**Example 7.1.2** Розглянемо функцію  $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$  на  $\mathbb{R}$ . Вона є диференційованою в будь-якій точці  $(x_0, y_0)$ .

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 - x_0y_0 - y_0^2) = \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0y_0 - x_0\Delta y - y_0\Delta x - \Delta x\Delta y - y_0^2 - 2y_0\Delta y - \Delta y^2 - x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2 = \\ &= (2x_0 - y_0)\Delta x + (-x_0 - 2y_0)\Delta y + (\Delta x^2 - \Delta x\Delta y - \Delta y^2). \end{aligned}$$

Залишилось довести, що  $\Delta x^2 - \Delta x\Delta y - \Delta y^2 = o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)$  при  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ . Дійсно,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x^2 - \Delta x\Delta y - \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi}{\rho} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho(\cos^2 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (2x_0 - y_0)\Delta x + (-x_0 - 2y_0)\Delta y + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)}.$$

**Proposition 7.1.3** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Функція  $f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ . Тоді вона неперервна в т.  $\vec{x}^0$ .

**Proof.**

$$f - \text{диференційована в т. } \vec{x}^0, \text{ тобто } f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m + o(\|\Delta\vec{x}\|)_{\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}}.$$

Або можна це записати інакше:

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1(x_1 - x_1^0) + \dots + L_m(x_m - x_m^0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|) \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)) \stackrel{=}{=} 0$$

Всі дужки прямують по координатно до нуля,  $o$ -маленьке також, в силу н.м.

$$\stackrel{=}{=} 0 \implies f - \text{неперервна в т. } \vec{x}^0. \quad \blacksquare$$

**Definition 7.1.4** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

**Частинною похідною функції  $f$  за змінною  $x_j$  в т.  $\vec{x}^0$**  називають величину:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j}$$

Якщо уважно придивитись на означення, то, насправді, ми просто підставили  $x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0$  та отримали функцію  $g(x_j) = f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0)$  - функція від одного аргументу  $x_j$  - та обчислили похідну цієї функції в т.  $x_j^0$ . Отже,

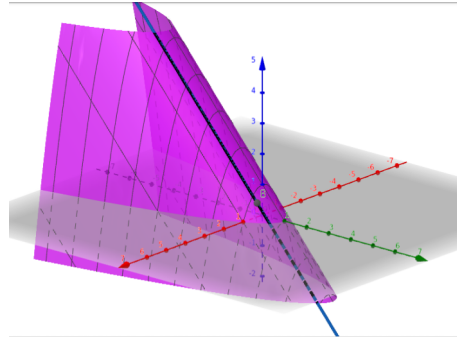
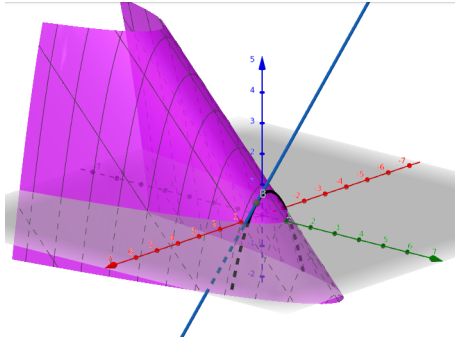
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = g'(x_j^0)$$

**Example 7.1.5** Маємо функцію  $f(x, y) = 1 - x^2 - y$ . Знайдемо всі її частинні похідні.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

Сенс  $\frac{\partial f}{\partial x}$  - знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь  $OX$ .

Аналогічно  $\frac{\partial f}{\partial y}$  - знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь  $OY$ .



Таких дотичних прямих існують безліч, але про це згодом.

### Proposition 7.1.6 Необхідна умова диференційованості

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішній точка. Тоді вона має частинні похідні в т.  $\vec{x}^0$ , причому  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = L_j$ .

**Proof.**

$f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , тоді  $\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R}$  :

$$f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1 \Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + o(\|\Delta \vec{x}\|), \Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}.$$

У окремому випадку, встановити можна  $\Delta \vec{x} = (0 \dots \Delta x_j \dots 0)^T$ .

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) &= \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j} \stackrel{f - \text{диф.}}{=} \\ &= \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{L_1 \cdot 0 + \dots + L_j \Delta x_j + \dots + L_m \cdot 0 + o(|\Delta x_j|)}{\Delta x_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{L_j \Delta x_j + o(\Delta x_j)}{\Delta x_j} = L_j. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Remark 7.1.7** У зворотному напрямку це не завжди вірно.

**Example 7.1.8** Маємо функцію  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ . Розглянемо цю функцію в околі т.  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

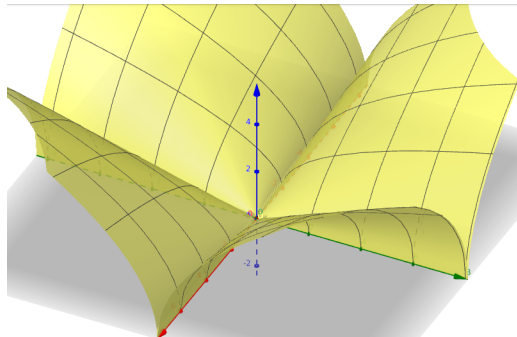
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Тобто в т.  $(x_0, y_0)$  функція має частинні похідні. Проте виявляється, що в  $(x_0, y_0)$  вона - не диференційована. Дійсно,

$$f(\Delta x, \Delta y) = 0\Delta x + 0\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \text{ тобто}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \stackrel{\text{полярна заміна}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{|\cos \varphi \sin \varphi|} - \text{ не існує, тому рівність вище не вірна.}$$



Можливо виникне питання, а чи існують інші числа  $(L_1, L_2) \neq (0, 0)$ . Ні. Це впливає з необхідної умови диференційованості.

Виникає тоді інше питання, а коли ми можемо гарантувати диференційованість через існування частинних похідних.

**Theorem 7.1.9 Достатня умова диференційованості**

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Відомо, що в деякому околі т.  $\vec{x}^0$  існують всі частинні похідні в околі т.  $\vec{x}^0$ , які неперервні в т.  $\vec{x}^0$ .  
Тоді  $f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ .

Ми будемо доводити при  $m = 2$ . Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа

**Proof.**

Отже, дано  $f(x, y)$  та в околі т.  $(x_0, y_0)$  існують частинні похідні  $\frac{\partial f}{\partial x}$  та  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , які неперервні в  $(x_0, y_0)$ .

Розглянемо приріст аргументу  $\Delta x, \Delta y$  так, щоб ми були всередині околу т.  $(x_0, y_0)$ . Нехай  $\Delta x > 0, \Delta y > 0$ , для інших все аналогічно.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \quad \square$$

Позначу  $h(t) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + t), t \in [0, \Delta y]$ . Тоді  $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = h(\Delta y) - h(0)$ .

$h$  - диференційована на  $[0, \Delta y]$ , оскільки існує  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , яка неперервна. А тому  $h \in C([0, \Delta y])$ . Тоді за

Лагранжом:

$$h(\Delta y) - h(0) = h'(c_1)\Delta y, c_1 \in (0, y)$$

$$h'(t) = f'_t(x_0 + \Delta x, y_0 + t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + t)$$

$$\implies h(\Delta y) - h(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y.$$

Аналогічно  $g(s) = f(x_0 + s, y_0), s \in [0, \Delta x]$ . Тоді  $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = g(\Delta x) - g(0) \stackrel{\text{Th. Лагранжа}}{=} g'(c_2)\Delta x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x, c_2 \in (0, \Delta x)$ .

$$= g'(c_2)\Delta x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x, c_2 \in (0, \Delta x).$$

Повертаємось до нашої рівності.

$$\square \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x$$

Залишилось довести, що

$$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) = o(\|(\Delta x, \Delta y)\|) \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta y \rightarrow 0$$

Маємо:

$$\begin{aligned} & (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) = \\ & = \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0)\Delta x \right) - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) = \\ & = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \Delta x + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \Delta y \end{aligned}$$

Якщо  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ , то звідси  $c_1 \rightarrow 0, c_2 \rightarrow 0$  та за умовою того, що частинні похідні є неперервними, маємо:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_2, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \stackrel{\text{позн}}{=} \alpha \rightarrow 0 \\ & \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0 + c_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \stackrel{\text{позн}}{=} \beta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Далі:

$$\left| \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \stackrel{\text{К-В}}{\leq} \left| \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \rightarrow 0 \implies \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0.$$

Остаточно отримуємо:

$$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \right) = o(\|(\Delta x, \Delta y)\|) \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta y \rightarrow 0$$

Тобто звідси  $f$  - диференційована в т.  $(x_0, y_0)$ . ■

**Definition 7.1.10** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

**Похідною функції  $f$  в т.  $\vec{x}^0$**  називається ковектор

$$f'(\vec{x}^0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) (\vec{x}^0)$$

Таким чином, ми можемо визначити лінійний функціонал по  $\Delta \vec{x}$  таким чином:

$$f'(\vec{x}^0)\Delta \vec{x} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{x}^0)\Delta x_m.$$

Тоді означення диференційованої функції  $f$  переписеться ось так:

$$f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0)\Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|), \Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}.$$

**Proposition 7.1.11** Задані функції  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Відомо, що  $f, g$  - диференційовані в т.  $\vec{x}^0$ . Тоді:

- 1)  $\alpha f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , похідна  $(\alpha f)'(\vec{x}^0) = \alpha f'(\vec{x}^0)$ ;
- 2)  $f + g$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , похідна  $(f + g)'(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)$ ;
- 3)  $fg$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , похідна  $(fg)'(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) + f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)$ .

**Proof.**

1) *Зрозуміло.*

$$2) (f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) + g(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x})) - (f(\vec{x}^0) + g(\vec{x}^0)) = (f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}^0)) + (g(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - g(\vec{x}^0)) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|) + g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|) = (f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|), \Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}.$$

$$3) f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x})g(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) = (f(\vec{x}^0) + f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|)) \cdot (g(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|)) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) \quad \square$$

Після розкриття дужок ми залишимо лише доданки  $(f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta \vec{x}$  та  $(g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta \vec{x}$ .

Ось чому:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}^0)o(\|\Delta \vec{x}\|) &= o(\|\Delta \vec{x}\|) & g(\vec{x}^0)o(\|\Delta \vec{x}\|) &= o(\|\Delta \vec{x}\|) \\ (f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x}) \cdot (g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x}) &= o(\|\Delta \vec{x}\|), \text{ тому що, розписавши, побачимо } \Delta x_i \Delta x_j = o(\|\Delta \vec{x}\|). \\ (f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x})o(\|\Delta \vec{x}\|) &= o(\|\Delta \vec{x}\|) & (g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x})o(\|\Delta \vec{x}\|) &= o(\|\Delta \vec{x}\|), \\ \text{тому що, розписавши, побачимо } \Delta x_j o(\|\Delta \vec{x}\|) &= o(\|\Delta \vec{x}\|). \\ (o(\|\Delta \vec{x}\|))^2 &= o(\|\Delta \vec{x}\|) \end{aligned}$$

Повертаємось до рівності:

$$\square (f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta \vec{x} + (g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|).$$

■

**Definition 7.1.12** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

**Диференціалом функції  $f(x)$  в т.  $\vec{x}^0$  називається такий вираз:**

$$df(\vec{x}^0, \Delta \vec{x}) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x}$$

Частіше позначають ще диференціал в точці ось так:  $df_{\vec{x}^0}$ .

**Remark 7.1.13** Якщо згадати лінійну алгебру, то  $df_{\vec{x}^0} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  - це, насправді, лінійний функціонал, де в нас записується ковектор  $f'(\vec{x}^0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0) \right)$ . І ми маємо:

$$df_{\vec{x}^0}(\Delta \vec{x}) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta \vec{x}.$$

Як й раніше, аргумент  $\Delta \vec{x}$  опускають, а також позначають  $\Delta \vec{x} = \vec{dx}$ , тобто  $\Delta x_1 = dx_1, \dots, \Delta x_m = dx_m$ . Тоді маємо інший вигляд:

$$df(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \vec{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{x}^0) dx_m$$

**Example 7.1.14** Маємо функцію  $f(x, y) = 1 - x^2 - y$ . Ми вже знайшли  $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ , вони є неперервними в будь-якій точці.

Отже,  $f$  - диференційована будь-де. Знадемо тепер диференціал функції. Це дуже просто:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (-2x) dx - dy \stackrel{\text{або}}{=} \begin{pmatrix} -2x & -1 \end{pmatrix} \vec{dr}.$$

## 7.2 Для векторнозначних функцій

**Definition 7.2.1** Задано функцію  $\vec{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Вектор-функція  $\vec{f}$  називається **диференційованою в т.  $\vec{x}^0$** , якщо

$$\exists M \in Mat(m \times k) : \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M \Delta \vec{x} + \vec{o}(\|\Delta \vec{x}\|)_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}}$$

Зараз дізнаємось, що це за матриця  $M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix}$  під час доведення твердження.

**Proposition 7.2.2** Задано функцію  $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.  
 $\vec{f}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0 \iff f_1, \dots, f_k$  - диференційовані в т.  $\vec{x}^0$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$  Дано:  $\vec{f}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , тобто  $\exists M \in Mat(m \times k) : \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)$ .  
 $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(\|\Delta\vec{x}\|) \\ \vdots \\ o(\|\Delta\vec{x}\|) \end{pmatrix}$$

Із цієї рівності випливає, що  $\forall j = \overline{1, k}$ :

$$f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f_j(\vec{x}^0) = M_{j1}\Delta x_1 + \dots + M_{jm}\Delta x_m + o(\|\Delta\vec{x}\|).$$

$$\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$$

Це означає, що  $f_j$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ . Тоді звідси випливає, що:

$$M_{j1} = \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\vec{x}^0), \dots, M_{jm} = \frac{\partial f_j}{\partial x_m}(\vec{x}^0).$$

В результаті отримаємо ось такий вигляд матриці:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_k \end{pmatrix}(\vec{x}^0) = J(x) = \vec{f}'(\vec{x}^0) - \text{матриця Якобі}$$

Матриця Якобі описує **похідну** вектор-функції  $\vec{f}$  в т.  $\vec{x}^0$ , тобто  $\vec{f}'$  - це лінійний оператор. А якщо матриця буде квадратною, то ми можемо обчислити  $\det \vec{f}'(\vec{x}^0)$  - **якобіан**.

$\Leftarrow$  Дано:  $f_1, \dots, f_k$  - диференційовані в т.  $\vec{x}^0$ . Хочемо довести, що

$\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) - M\Delta\vec{x} = o(\|\Delta\vec{x}\|)$ ,  $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$ , але це є правда, тому що:

$\forall j = \overline{1, k} : f_j$  - диференційована  $\implies f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f_j(\vec{x}^0) - f'_j(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} = o(\|\Delta\vec{x}\|)$ ,  $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$  - виконана покоординатна рівність. ■

**Proposition 7.2.3** Задано функцію  $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Відомо, що вектор-функція  $\vec{f}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ . Тоді вона неперервна в т.  $\vec{x}^0$ .

**Proof.**

Дійсно,  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} (M(\vec{x} - \vec{x}^0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|)) = 0$ , оскільки виконується покоординатна границя. ■

**Proposition 7.2.4** Задані функції  $\vec{f}, \vec{g}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Відомо, що  $\vec{f}, \vec{g}$  - диференційовані в т.  $\vec{x}^0$ .

Тоді  $\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , похідна  $(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})'(\vec{x}^0) = \alpha\vec{f}'(\vec{x}^0) + \beta\vec{g}'(\vec{x}^0)$ .

Впливає з арифметики матриці. Ну тут зрозуміло.

**Example 7.2.5 Важливий**

Маємо вектор-функцію  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}$ . Знайдемо її похідну та якобіан.

$$\vec{f}'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \det \vec{f}'(\vec{x}^0) = \cos \varphi \rho \cos \varphi + \sin \varphi \rho \sin \varphi = \rho.$$

Ще знадобиться, коли будемо шукати подвійні інтеграли.

**Proposition 7.2.6** Задані функції  $\vec{f}: A \rightarrow B$  та  $\vec{g}: B \rightarrow \mathbb{R}^k$ , де  $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$ .

Відомо, що  $\vec{f}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$  та  $\vec{g}$  - диференційована в т.  $\vec{y}^0$ .

Тоді  $\vec{g} \circ \vec{f}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , похідна  $(\vec{g} \circ \vec{f})'(\vec{x}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)$ .

**Lemma 7.2.7** Задано матрицю  $A \in Mat(m \times k)$ . Тоді  $\exists C \geq 0 : \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^m : \|A\vec{h}\| \leq C\|\vec{h}\|$ .



**Proof.**

$$\begin{aligned} \text{Дійсно, } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{h} = \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + \dots + a_{1m}h_m \\ \vdots \\ a_{k1}h_1 + \dots + a_{km}h_m \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \|A\vec{h}\| = \sqrt{(a_{11}h_1 + \dots + a_{1m}h_m)^2 + \dots + (a_{k1}h_1 + \dots + a_{km}h_m)^2} \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \\ \leq \sqrt{(a_{11}^2 + \dots + a_{1m}^2)(h_1^2 + \dots + h_m^2) + \dots + (a_{k1}^2 + \dots + a_{km}^2)(h_1^2 + \dots + h_m^2)} = \\ = \|\vec{h}\| \sqrt{(a_{11}^2 + \dots + a_{1m}^2) + \dots + (a_{k1}^2 + \dots + a_{km}^2)} = C\|\vec{h}\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Тепер безпосередньо доведення твердження.

**Proof.**

$$\begin{aligned} \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0) &= \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0)) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0) + \vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0)) = \\ &= \vec{g}(\vec{y}^0 + \Delta\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\Delta\vec{y} + o(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|) \quad \square \end{aligned}$$

Залишилось довести, що  $\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$ , якщо  $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$ , тобто

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{\|\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} &= 0. \\ \frac{\|\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} &\leq \frac{\|\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\| + \|\vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} \stackrel{\text{Lm.}}{\leq} C \frac{\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)}{\|\Delta\vec{x}\|} + \frac{\vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)}{\|\Delta\vec{x}\|} = \\ &= C \frac{\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)}{\|\Delta\vec{x}\|} + \frac{\vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)}{\|\Delta\vec{y}\|} \frac{\|\Delta\vec{y}\|}{\|\Delta\vec{x}\|}. \end{aligned}$$

Якщо  $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$ , то перший доданок прямує до нуля, а другий буде прямувати до нуля, якщо  $\frac{\|\Delta\vec{y}\|}{\|\Delta\vec{x}\|}$

буде обмеженою. Зараз це й покажемо:

$$\frac{\|\Delta\vec{y}\|}{\|\Delta\vec{x}\|} = \frac{\|\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} \leq \frac{\|\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x}\| + \|\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} \stackrel{\text{Lm.}}{\leq} C^* + \frac{\|\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|}$$

Якщо  $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$ , то отримаємо обмеженість.

Отже, остаточно,  $\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$ , якщо  $\Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$ , а значить

$$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) \text{ при } \Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}. \quad \blacksquare$$

**Corollary 7.2.8** Задано функцію  $\vec{f}: A \rightarrow B$  та  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$ .

Відомо, що  $\vec{f}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$  та  $g$  - диференційована в т.  $\vec{y}^0$ .

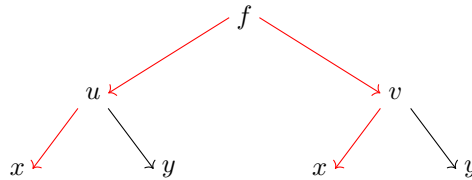
$$\text{Тоді } \frac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(\vec{y}^0) \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(\vec{y}^0) \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_n}(\vec{y}^0) \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(\vec{x}^0), \text{ виконано } \forall j = \overline{1, m}.$$

Тут  $h(\vec{x}) = g(\vec{f}(\vec{x}))$ .

**Example 7.2.9** Маємо функцію  $f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$ . Знайдемо частинні похідні за  $x, y$ .

Позначимо  $u(x, y) = xy, v(x, y) = \frac{x}{y}$ . Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{-x}{y^2}. \end{aligned}$$



Схематично, як шукати  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

### 7.3 Похідна за напрямком. Градієнт

**Definition 7.3.1** Задано функцію  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. А також задано вектор  $\vec{l}$ , такий, що  $\|\vec{l}\| = 1$ . Її ще називають **напрямком**.

Похідною функції  $f$  за напрямком  $\vec{l}$  в т.  $\vec{x}^0$  називають величину

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t}$$

Як вже було зазначено, дотичних прямих буває дуже багато, тому ми й задаємо напрямок.

**Remark 7.3.2** Якщо всі координати вектора  $\vec{l}$  будуть нулевими, окрім  $l_j = 1$ , то  $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$ .

**Theorem 7.3.3** Задано функцію  $f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Тоді  $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \vec{l} = \frac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} l_m$ .

**Proof.**

$f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , тобто  $f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} t l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} t l_m + o(\|t\vec{l}\|)$ . Тому

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} t l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} t l_m + o(\|t\vec{l}\|)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} l_m. \quad \blacksquare$$

**Example 7.3.4** Маємо функцію  $f(x, y) = 1 - x^2 - y$ . Знайти похідну за напрямком  $\vec{l} = (0.6, 0.8)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = -0.6 \cdot 2x - 0.8 \cdot 1 = -1.2x - 0.8.$$

**Definition 7.3.5** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Градiєнтом функції  $f$  в т.  $\vec{x}^0$  називають такий вектор

$$\text{grad } f(\vec{x}^0) \stackrel{\text{або}}{=} \nabla f(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}(\vec{x}^0)$$

Похідну функції  $f$  за напрямком  $\vec{l}$  в т.  $\vec{x}^0$  можна записати інакше:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = (\text{grad } f(\vec{x}^0), \vec{l}).$$

**Example 7.3.6** Зокрема для функції  $f(x, y) = 1 - x^2 - y$  маємо, що  $\text{grad } f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2x \\ -1 \end{pmatrix}$

$\text{grad } f(\vec{x}^0)$  описує, який треба взяти напрямок руху в т.  $\vec{x}^0$ , щоб ріст функції був найбільшим. Цей факт підтвердить наступне твердження:

**Proposition 7.3.7**  $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0)$  приймає:

- max значення  $\iff \vec{l} \uparrow \uparrow \text{grad } f(\vec{x}^0)$ ;
- min значення,  $\iff \vec{l} \uparrow \downarrow \text{grad } f(\vec{x}^0)$ .

**Proof.**

Дійсно,  $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = (\text{grad } f(\vec{x}^0), \vec{l}) = \|\text{grad } f(\vec{x}^0)\| \|\vec{l}\| \cos \alpha = \|\text{grad } f(\vec{x}^0)\| \cos \alpha$ :

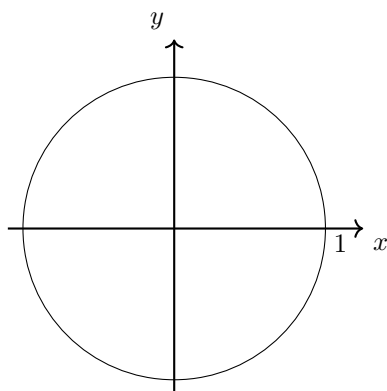
- max  $\iff \alpha = 0$ ;
- min  $\iff \alpha = \pi$ .

■

## 7.4 Неявно задані функції

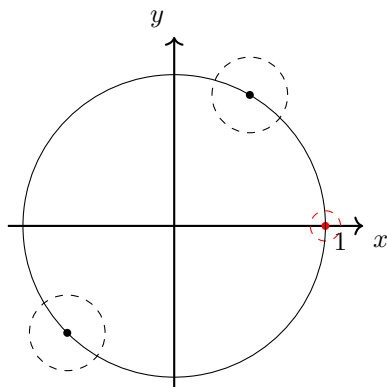
**Remark 7.4.1** Приклад для розуміння

Задано рівняння кола на площині  $\mathbb{R}^2$  - один з прикладів неявної функції:  
 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ .



Зрозуміло, що це - не графік функції однієї змінної. Просто тому що кожному значенню  $x$  тут ставиться у відповідність два значення  $y$ .

Проте якщо розглядати деякий малий окіл т.  $(x_0, y_0)$ , то ми отримаємо деякий шматок малюнку, що й буде графіком функції. Зокрема в нашому випадку або  $y = \sqrt{1 - x^2}$ , або  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ . Проте існують певні точки, де цього зробити не можна - точки  $(1, 0), (-1, 0)$ . Як би ми не зменшували окіл цієї точки, там завжди кожного іксу два ігрика були б. Цю точку позначил червоним кольором.



Саме тому з'явилась мотивація створити теорему, де через рівняння  $F(x, y) = 0$  ми можемо отримати  $y = f(x)$  в деякому околі т.  $(x_0, y_0)$  під деякими важливими умовами.

Важливо розуміти, що функція існує, проте явну формулу отримати не завжди вийде. Зокрема маємо неявну функцію  $y^5 + y^3 + y + x = 0$ . Щоб знати  $y = f(x)$ , треба розв'язати рівняння п'ятої степені, проте корені цього многочлена не можна виразити через формулу. І тим не менш, під деякими умовами, ми можемо знати функцію  $y = f(x)$ , просто без формули.

**Theorem 7.4.2** Задано неявну функцію  $F$  - неперервно-диференційована в околі т.  $(x_0, y_0)$ . Відомо, що виконуються такі умови:

- 1)  $F(x_0, y_0) = 0$ ;
- 2)  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тоді існує єдина функція  $f$  - неперервно-диференційована в меншому околі т.  $x_0$ , причому

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x), \text{ а також } f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\big|_{(x, f(x))}}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\big|_{(x, f(x))}}.$$

Додатково, якщо  $F \in C^{(m)}$ , то  $f \in C^{(m)}$ .

Без доведення.

**Example 7.4.3** Зокрема для  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  маємо, що вона - неперервна,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \text{ - диференційована.}$$

Причому  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \iff y \neq 0$ .

Тому за попередньою теоремою, дійсно, існує функція  $y = f(x)$ , але найголовніше:  $f'(x) = -\frac{x}{y}$ .

**Theorem 7.4.4** Задано неявну вектор-функцію  $\vec{F}$  - неперервно-диференційована в околі т.  $(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \in \mathbb{R}^{m+k}$ . Відомо, що виконуються такі умови:

- 1)  $\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = \vec{0}$ ;
- 2)  $\exists \left( \vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \right)^{-1}$  - оборотна матриця похідних за  $\vec{y}$ .

Тоді існує єдина вектор-функція  $\vec{f}$  - неперервно-диференційована в меншому околі т.  $\vec{x}^0$ , причому  $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \iff \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ , а також  $\vec{f}'(\vec{x}) = -(\vec{F}'_y(\vec{x}, \vec{y}))^{-1} \cdot \vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y}) \Big|_{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))}$ .

Без доведення.

**Example 7.4.5** Задано вектор-функцію  $\vec{F}$  таким чином: 
$$\begin{cases} x^2 + y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 = F_1(x, y_1, y_2) = 0 \\ x + y_1 + y_2 - 2 = F_2(x, y_1, y_2) = 0 \end{cases}$$

Маємо  $\det \vec{F}'_y(x, y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2y_1 + y_2 \neq 0 \iff y_2 \neq -2y_1$ , а

тому й  $x \neq 2 + y_2$ .

Тоді враховуючи обмеження, існує вектор-функція  $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$ , але тепер знайдемо похідну. Маємо:

$$\vec{F}'_y = \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies (\vec{F}'_y)^{-1} = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'_x = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}' = -(\vec{F}'_y)^{-1} \vec{F}'_x = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 2x + y_2 \\ -2x + 2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x + y_2}{2y_1 + y_2} \\ \frac{-2x + 2y_1}{2y_1 + y_2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

Тут записано матрицю Якобі для функції  $\vec{F}$ . Червоним виділено  $\vec{F}'_y$ , а синім виділено  $\vec{F}'_x$ .

## 7.5 Обернені функції

**Theorem 7.5.1** Задано вектор-функцію  $\vec{g} : U(\vec{y}^0) \rightarrow U(\vec{x}^0)$ , де  $\vec{x}^0 = \vec{g}(\vec{y}^0)$ , де  $U(\vec{x}^0), U(\vec{y}^0) \subset \mathbb{R}^n$ . Відомо, що виконуються такі умови:

- 1)  $\vec{g}$  - неперервно-диференційована;
- 2)  $\exists (\vec{g}'(\vec{y}^0))^{-1}$ .

Тоді існує вектор-функція  $\vec{f} : U(\vec{x}^0) \rightarrow U(\vec{y}^0)$ , причому:

- 1)  $\vec{f}$  - неперервно-диференційована;
- 2)  $\vec{f}'(\vec{x}) = (\vec{g}'(\vec{f}(\vec{x})))^{-1}$ .

**Proof.**

Розглянемо функцію  $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} - \vec{g}(\vec{y})$ . Про неї відомо, що:

- 1)  $\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = \vec{0}$ , просто тому що  $\vec{x}^0 = \vec{g}(\vec{y}^0)$ .
- 2)  $\exists (\vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0))^{-1}$ , тому що зауважимо, що  $\vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = -\vec{g}'(\vec{y}^0)$ , а для такої матриці оборотна матриця існує за умовою.

Отже,  $\exists f$ , для якого  $F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{g}(\vec{y}) \iff \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ .

Нарешті,  $\vec{f}'(\vec{x}) = -(\vec{F}'_y(\vec{x}, \vec{y}))^{-1} \vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{g}'(\vec{y}))^{-1}$ .

У цьому випадку  $\vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbb{I}$ , де  $\mathbb{I}$  - одинична матриця. ■

**Example 7.5.2** Задано функцію  $\vec{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ , де множина  $A = \{(x, y) : 0 < y < x\}$ .

$$\vec{g}(x, y) \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ xy \end{pmatrix}.$$

Спробуємо знайти обернену функцію.

Зрозуміло, що  $\vec{g}$  - неперервно-диференційована. Доведемо, що  $\exists(\vec{g}'(x, y))^{-1}$ .

$$\vec{g}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \implies \det \vec{g}'(x, y) = x - y \neq 0, \text{ оскільки } 0 < x < y.$$

Тоді існує обернена вектор-функція  $\vec{f} = \vec{g}^{-1}$ . Спробуємо її знайти:

$$\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$$

$$\frac{v}{y} + y = u \implies y^2 - uy + v = 0 \implies y = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2} \implies x = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4v}}{2}.$$

І все це за умовою, що  $u^2 - 4v > 0$  та  $u, v > 0$ . Отже,  $\vec{g}^{-1}(u, v) = \begin{pmatrix} g_1^{-1}(u, v) \\ g_2^{-1}(u, v) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u + \sqrt{u^2 - 4v} \\ u - \sqrt{u^2 - 4v} \end{pmatrix}$

## 7.6 Геометричне та алгебраїчне застосування

### 7.6.1 Дотична площина, нормальна пряма поверхні

Задамо функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A \subset \mathbb{R}^2$  - внутрішня точка. Встановимо таку поверхню:

$$\Pi = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$$

Відомо, що площина в  $\mathbb{R}^3$ , що проходить через т.  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $z_0 = f(x_0, y_0)$ , задається рівнянням:

$$z = z_0 + K_1(x - x_0) + K_2(y - y_0), \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

**Definition 7.6.1** Дотичною площиною до поверхні  $\Pi$  в т.  $(x_0, y_0)$  називається площина в  $\mathbb{R}^3$ , що проходить через т.  $(x_0, y_0, z_0)$ , для якої виконана рівність

$$z - f(x, y) = o(\|(x - x_0, y - y_0)\|), (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

**Theorem 7.6.2** Поверхня  $\Pi$  має дотичну площину в т.  $(x_0, y_0) \iff f$  - диференційована в т.  $(x_0, y_0)$ . Причому  $K_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $K_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

Доведення аналогічне, як в матані  $\mathbb{R}$ .

Отже, дотична площина для диференційованої функції  $f$  задається таким рівнянням:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

**Definition 7.6.3** Нормальною прямою до поверхні  $\Pi$  в т.  $(x_0, y_0)$  називається пряма в просторі, що проходить через т.  $(x_0, y_0, z_0)$  та перпендикулярна дотичній площині.

Вектор нормалі дотичної площини  $\vec{N} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$ . Це буде напрямленим вектором для нормалі. Тоді нормальна пряма задається таким рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

**Example 7.6.4** Задамо функцію  $f(x) = x^2 + y^2$ . Знайдемо дотичну площину та нормальну пряму в т.  $(1, -1)$ .

$$f(1, -1) = 2.$$

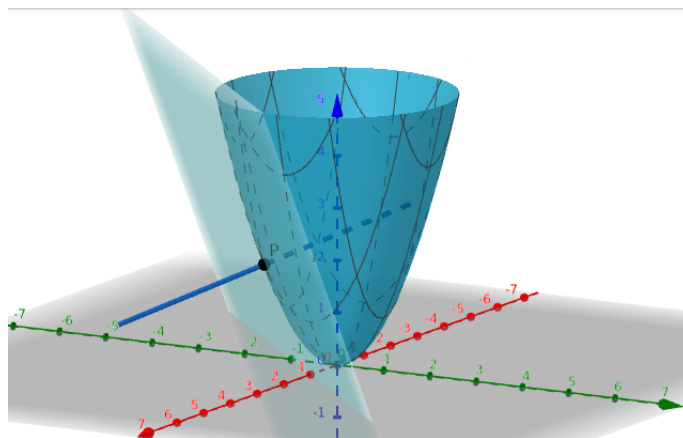
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 2x \Big|_{(1, -1)} = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 2y \Big|_{(1, -1)} = -2.$$

Всі частинні похідні в околі т.  $(1, -1)$  неперервні, а тому диференційовані. Отже, можемо отримати дотичну:

$$z - 2 = 2(x - 1) - 2(y + 1) \implies 2x - 2y - z = 2;$$

та нормаль:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 2}{-1}.$$



## 7.6.2 Дотична пряма, нормальна площина кривої

**Definition 7.6.5** Крива в просторі  $\mathbb{R}^3$  задається таким рівнянням

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in (a, b)$$

Відомо, що пряма в просторі  $\mathbb{R}^3$ , що проходить через т.  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $z_0 = z(t_0)$ , задається таким рівнянням:

$$\begin{cases} x = (t - t_0)l_1 + x_0 \\ y = (t - t_0)l_2 + y_0 \\ z = (t - t_0)l_3 + z_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**Definition 7.6.6** Дотичною прямою до кривої  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  називається пряма в просторі, що проходить через т.  $(x_0, y_0, z_0)$ , для якої виконана рівність

$$\begin{cases} x(t) - (x_0 + l_1(t - t_0)) = o(|t - t_0|) \\ y(t) - (y_0 + l_2(t - t_0)) = o(|t - t_0|) \\ z(t) - (z_0 + l_3(t - t_0)) = o(|t - t_0|) \end{cases}, t \rightarrow t_0$$

**Theorem 7.6.7** Пряма  $\begin{cases} x = (t - t_0)l_1 + x_0 \\ y = (t - t_0)l_2 + y_0 \\ z = (t - t_0)l_3 + z_0 \end{cases}$  - дотична до кривої  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \iff$  крива - дифе-

ренційована в т.  $t_0$ , а також  $l_1 = x'(t_0)$ ,  $l_2 = y'(t_0)$ ,  $l_3 = z'(t_0)$ .

*Відносно зрозуміло.*

Отже, дотична пряма задається рівнянням:

$$\begin{cases} x = (t - t_0)x'(t_0) + x_0 \\ y = (t - t_0)y'(t_0) + y_0 \\ z = (t - t_0)z'(t_0) + z_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Напрявлений вектор прямої  $\vec{l} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ . Тоді це буде нормальним вектором для нормальної площини. Нормальна площина задається таким рівнянням:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

**Example 7.6.8** Маємо криву  $\begin{cases} x = 2 \sin t \\ y = 2 \cos t \\ z = -\sin 2t \end{cases}$ , де параметр  $t \in [0, 2\pi]$ . Знайдемо дотичну пряму та нормальну площину в  $t_0 = \frac{5\pi}{6}$ . Тобто в т.  $\left(-1, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

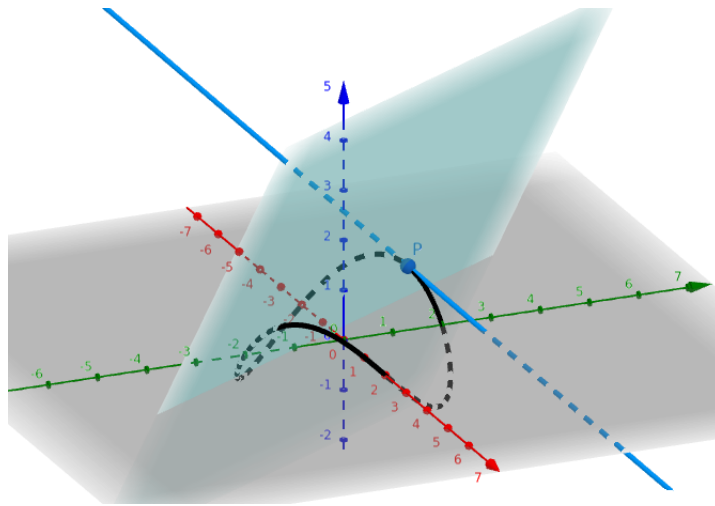
$$\begin{cases} x'(t_0) = 2 \cos t \Big|_{t=t_0} = \sqrt{3} \\ y'(t_0) = -2 \sin t \Big|_{t=t_0} = 1 \\ z'(t_0) = -2 \cos 2t \Big|_{t=t_0} = -1 \end{cases}.$$

Таким чином, маємо дотичну пряму:

$$\frac{x+1}{\sqrt{3}} = \frac{y-\sqrt{3}}{1} = \frac{z-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1};$$

та нормальну площину:

$$\sqrt{3}(x+1) + (y-\sqrt{3}) - \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$



### 7.6.3 Приблизне обчислення

Маємо  $f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , тобто

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)(x_n - x_n^0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|) \text{ при } \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0.$$

Якщо  $\vec{x}_0$  близький до  $\vec{x}$ , тобто  $\|\vec{x} - \vec{x}^0\| \ll 1$ , то тоді

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)(x_n - x_n^0).$$

**Example 7.6.9** Приблизно обчислити  $\sqrt{(2.03)^2 + 5e^{0.02}}$ .

Розглянемо функцію  $z = \sqrt{x^2 + 5e^y}$ . У нашому випадку  $(x_0, y_0) = (2, 0)$  та  $(x, y) = (2.03, 0.02)$ .

Оскільки  $\|(x - x_0, y - y_0)\| = \|(0.03, 0.02)\| \ll 1$ , то можемо застосувати формулу:

$$z \approx z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \text{ Маємо:}$$

$$z_0 = \sqrt{2^2 + 5e^0} = 3 \quad \frac{\partial z}{\partial x}(2, 0) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5e^y}} \Big|_{(2,0)} = \frac{2}{3} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(2, 0) = \frac{5e^y}{2\sqrt{x^2 + 5e^y}} \Big|_{(2,0)} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Отже, } z = \sqrt{(2.03)^2 + 5e^{0.02}} \approx 3 + \frac{2}{3} \cdot 0.03 + \frac{5}{6} \cdot 0.02 = \frac{101}{30}.$$

## 7.7 Диференціювання та похідні старших порядків

**Definition 7.7.1** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Також  $f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ .

**Частинними похідними другого роду** від функції  $f$  в т.  $\vec{x}^0$  називається вираз:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}^0) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}^0)$$

**Example 7.7.2** Знайдемо всі частинні похідні другого порядку функції  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2 \implies \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y \implies \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16xy \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2 \end{cases}.$$

Можемо зауважити, що  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . Проте в загальному випадку це не так.

**Example 7.7.3** Розглянемо функцію  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Зосередимось лише на

знаходженні  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} -x \frac{y^4 - x^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\Delta x} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\Delta y} = -1$$

Таким чином,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

**Theorem 7.7.4** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Відомо, що  $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}), \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x})$  в околі т.  $\vec{x}^0$  та є неперервними в т.  $\vec{x}^0$ .

Тоді  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ .

Деколи це називають це теоремою Шварца.

Ми будемо доводити при  $n = 2$ . Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа

**Proof.**

Отже, дано  $f(x, y)$  та в околі т.  $(x_0, y_0)$  існують частинні похідні другого порядку  $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  які неперервні в  $(x_0, y_0)$ .

Розглянемо вираз  $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$ .

Покладемо функцію  $k(s) = f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0), s \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ . Тоді  $\Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0)$ .

$$k'(s) = (f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0))'_s = \frac{\partial f}{\partial s}(s, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial s}(s, y_0).$$

Оскільки нам відомі другі частинні похідні, то зрозуміло, що в нас існує  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ , причому в тому самому околі т.  $(x_0, y_0)$ . Тобто звідси  $k$  - диференційована на  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ , тоді за теоремою Лагранжа,  $\exists \xi_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x) : \Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0) = k'(\xi_1)\Delta x = \left( \frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0) \right) \Delta x$ .

Покладемо функцію  $m(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t), t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$ . Тоді  $\Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x$ .

$$m'(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t) \right)'_t = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, t).$$

Похідна дійсно існує за умовою теореми, тобто  $m$  - диференційована на  $[y_0, y_0 + \Delta y]$ , тоді за теоремою Лагранжа,  $\exists \eta_1 \in (y_0, y_0 + \Delta y) : \Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x = m'(\eta_1)\Delta y \Delta x = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1)\Delta y \Delta x$ .

Повернімось до виразу  $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$ , ми розглянемо її з іншої сторони.

Покладемо функцію  $p(t) = f(x_0 + \Delta x, t) - f(x_0, t), t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$ . Тоді  $\Delta = p(y_0 + \Delta y) - p(y_0)$ .



А далі я буду просто продовжувати рівність, міркування аналогічні, що пов'язані зі застосуванням теореми Лагранжа двічі:

$$\Delta = p(y_0 + \Delta y) - p(y_0) = p'(\eta_2)\Delta y = (f(x_0 + \Delta x, t) - f(x_0, t))'_t(\eta_2)\Delta y = \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x_0 + \Delta x, \eta_2) - \frac{\partial f}{\partial t}(x_0, \eta_2) \right) \Delta y \quad \square$$

Покладемо функцію  $q(s) = \frac{\partial f}{\partial t}(s, \eta_2)$ . А далі аналогічно.

$$\square (q(x_0 + \Delta x) - q(x_0))\Delta y = q'(\xi_2)\Delta x\Delta y = \left( \frac{\partial f}{\partial t}(s, \eta_2) \right)'_s(\xi_2)\Delta x\Delta y = \frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(\xi_2, \eta_2)\Delta x\Delta y.$$

Зауважу, що  $\eta_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ ,  $\xi_2 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ .

$$\text{Отримали таку рівність: } \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(\xi_1, \eta_1)\Delta y\Delta x = \frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(\xi_2, \eta_2)\Delta x\Delta y \implies \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(\xi_1, \eta_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(\xi_2, \eta_2).$$

Нарешті, за умовою задачі, другі частинні похідні є неперервними в т.  $(x_0, y_0)$ , тому далі одночасно прямуємо  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0 \implies \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ . Оскільки  $\xi_1, \xi_2 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ ,  $\eta_1, \eta_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ , то звідси  $\xi_1, \xi_2 \rightarrow x_0$  та  $\eta_1, \eta_2 \rightarrow y_0$ .

Остаточно отримаємо  $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0, y_0)$  (літери  $s, t$  я замінив на  $x, y$ , результат не зміниться). ■

**Definition 7.7.5** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Функція  $f$  називається **двічі диференційованою в т.  $\vec{x}^0$** , якщо всі частинні похідні існують в околі т.  $\vec{x}^0$  та диференційовані в т.  $\vec{x}^0$ .

**Example 7.7.6** Маємо функцію  $z = x^2 + 2y^2 - 5xy$ . З'ясуємо, чи буде ця функція двічі диференційованою.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 5y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 5x$$

Усі отримані частинні похідні існують в будь-якому околі деякої точки.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -5$$

Отримані частинні похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за **Th.4.1.8.**,

$$\text{функція } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ - диференційована. } \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -5 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$$

Отримані частинні похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за **Th.4.1.8.**,

$$\text{функція } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ - диференційована.}$$

Отже, за означенням,  $z$  - двічі диференційована функція.

**Proposition 7.7.7** Функція  $f$  двічі диференційована в т.  $\vec{x}^0 \iff \text{grad } f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ .

**Proof.**

Дійсно,  $f$  - двічі диференційована в т.  $\vec{x}^0 \iff \forall j = \overline{1, m} : \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0 \iff$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} \text{ - як вектор-функція - диференційована в т. } \vec{x}^0. \quad \square$$

Розпишемо диференційованість вектор-функції  $\text{grad } f$  в т.  $\vec{x}^0$  за означенням:

$$\text{grad } f(\vec{x}^0 + \Delta \vec{x}) - \text{grad } f(\vec{x}^0) = M\Delta \vec{x} + o(\|\Delta \vec{x}\|), \Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}.$$

$$\text{Звідси ми маємо, що } M = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = H(\vec{x}^0) = f''(\vec{x}^0) \text{ - матриця Гесе}$$

Матриця Гесе описує **другу похідну** функції  $f$  в т.  $\vec{x}^0$  та одночасно **похідну** вектор-функції  $\text{grad } f$  в т.  $\vec{x}^0$ . Дана матриця - квадратна, тож ми можемо обчислити  $\det f''(\vec{x}^0)$  - **гесіан**.

**Definition 7.7.8** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Також  $f$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0$ .

**Другим диференціалом** функції  $f$  називають вираз:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = d(df(\vec{x}^0))$$

З'ясуємо, як цей вираз можна по-інакшому записати. Маємо:

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1\right) + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) = \\ &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_m\right) dx_1 + \dots + \\ &\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_m\right) dx_m = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} dx_m dx_1\right) + \dots + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} dx_1 dx_m + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} dx_m^2\right) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j. \end{aligned}$$

Отже, маємо іншу формулу для другого диференціалу в т.  $\vec{x}^0$ :

$$d^2 f(\vec{x}^0) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0) dx_i dx_j$$

Якщо придивитись, то  $d^2 f(\vec{x}^0)$  виглядає як квадратична форма.

**Example 7.7.9** Знайдемо другий диференціал функції  $z = x^3 + 2y^2 - 5xy$ .

Ми вже шукали другі частинні похідні  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$   $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -5$   $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$ . Таким чином,

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = 6x dx^2 - 10 dx dy + 4 dy^2.$$

**Definition 7.7.10** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Також  $f$  -  $k$  разів диференційована в т.  $\vec{x}^0$ .

**Частинними похідним**  $k+1$ -го порядку в т.  $\vec{x}^0$  називають похідну:

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}} \left( \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} \right) (\vec{x}^0) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} (\vec{x}^0)$$

$$j_1 + j_2 + \dots + j_k + j_{k+1} = k + 1$$

**Remark 7.7.11** Що таке **похідна**  $k$ -го порядку, визначати не буду, бо ще рано. Необхідно щось про тензори знати.

**Definition 7.7.12** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка. Також  $f$  -  $k$  разів диференційована в т.  $\vec{x}^0$ .

$k+1$ -**им диференціалом** функції  $f$  називають вираз:

$$d^{k+1} f(\vec{x}^0) = d(d^k f(\vec{x}^0))$$

Якщо дуже сильно постаратись, то за індукцією можна довести таку формулу диференціала  $k$ -го порядку:

$$d^k f(\vec{x}^0) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(\vec{x}^0) \cdot dx_{j_1} \dots dx_{j_k}$$

**Definition 7.7.13** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Функція  $f$  називається  **$k$ -разів диференційованою в т.  $\vec{x}^0$** , якщо всі частинні похідні  $(k-1)$ -го порядку існують в околі т.  $\vec{x}^0$  та всі вони диференційовані в т.  $\vec{x}^0$ .

Позначення:  $C^k(A)$  - множина  $k$  разів неперервно-диференційованих функцій.

## 7.8 Формула Тейлора

Зробимо певні позначення:

$$\begin{aligned} [\vec{x}^0, \vec{x}] &= \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in [0, 1]\} \\ (\vec{x}^0, \vec{x}) &= \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in (0, 1)\} \end{aligned}$$

### Theorem 7.8.1 Теорема Тейлора (у формі Лагранжа)

Задано функцію  $f$  - диференційована  $n$  разів на  $[\vec{x}^0, \vec{x}]$  та  $(n+1)$ -ий раз диференційована на  $(\vec{x}^0, \vec{x})$ . Тоді  $\exists \vec{\xi} \in (\vec{x}^0, \vec{x})$  або  $(\vec{x}, \vec{x}^0)$ , для якого

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \frac{d^2f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \frac{d^nf(\vec{x}^0)}{n!} + \frac{d^{n+1}f(\vec{\xi})}{(n+1)!}.$$

**Proof.**

Розглянемо функцію  $p(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$ , тут  $t \in [0, 1]$  - функція від однієї змінної.

Знайдемо похідні від цієї функції:

$$\begin{aligned} p'(t) &= f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))'_t = (f(x_1 + t(x_1 - x_1^0), \dots, x_m + t(x_m - x_m^0)))'_t = (f(u_1, \dots, u_m))'_t = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u_1} (x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} (x_m - x_m^0) = \left( \frac{\partial f}{\partial u_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial u_m} \right) \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_m - x_m^0 \end{pmatrix} = \\ &= df(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)). \\ p''(t) &= [f'(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0)]'_t \stackrel{\text{аналогічно}}{=} d^2f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \\ &\vdots \\ p^{(k)}(t) &= d^k f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)). \end{aligned}$$

Коротше, наша функція  $n$  разів диференційована на  $[0, 1]$  та має  $(n+1)$  похідну на  $(0, 1)$ . Тому ми можемо розкласти формулу Тейлора як функцію з однією змінною.  $\exists \xi \in (0, 1)$  :

$$p(1) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}(1-0) + \frac{p''(0)}{2!}(1-0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + \frac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}.$$

А далі підставляємо все, що маємо:

$$\begin{aligned} p(0) &= f(\vec{x}^0) \\ p'(0) &= df(\vec{x}^0) \\ p''(0) &= d^2f(\vec{x}^0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$p^{(n+1)}(\xi) = d^{n+1}f(\vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0))$$

$$\text{Отже, } f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \frac{d^2f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \frac{d^nf(\vec{x}^0)}{n!} + \frac{d^{n+1}f(\vec{\xi})}{(n+1)!}, \text{ де } \vec{\xi} = \vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0) \in (\vec{x}^0, \vec{x}). \blacksquare$$

### Theorem 7.8.2 Теорема Тейлора (у формі Пеано)

Задано функцію  $f$  - диференційована  $n$  разів в т.  $\vec{x}^0$ . Тоді

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \frac{d^2f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \frac{d^nf(\vec{x}^0)}{n!} + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0.$$

*Без доведення.* Але певні плани доведення наведу.

Позначимо функцію  $g(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \left( f(\vec{x}^0) + \frac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \frac{d^2f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \frac{d^nf(\vec{x}^0)}{n!} \right)$ . Наша мета показати, що  $g(\vec{x}) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n)$ .

Як і раніше, тут треба показати, що  $g$  та всі його частинні похідні до порядку включно  $n$  в т.  $\vec{x}^0$  будуть нулями.

А далі вже показуємо, що  $g(\vec{x}) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n)$ .

**Example 7.8.3** Розкласти функцію  $f(x, y) = e^{x+y}$  відносно т.  $(x_0, y_0) = (1, -1)$ .

Заздалегідь зауважимо, що  $\frac{\partial^s f}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2}}(1, -1) = e^{x+y}|_{(1, -1)} = 1$ , де  $s_1 + s_2 = s$ .

$$f(1, -1) = 1$$

$$f'(1, -1)(\vec{x} - \vec{x}^0) = (x - 1) + (y + 1)$$

$$f''(1, -1)(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 = (x - 1)^2 + 2(x - 1)(y + 1) + (y + 1)^2$$

$$f'''(1, -1)(\vec{x} - \vec{x}^0)^3 = (x - 1)^3 + 3(x - 1)^2(y + 1) + 3(x - 1)(y + 1)^2 + (y + 1)^3$$

$\vdots$

Таким чином, ми можемо це записати ось так:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + \left[ \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(y+1)}{1!} \right] + \left[ \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)(y+1)}{2!} + \frac{(y+1)^2}{2!} \right] + \dots + \\ &+ \left[ \frac{(x-1)^n}{n!} + \frac{C_n^2(x-1)^{n-1}(y+1)}{n!} + \dots + \frac{(y+1)^n}{n!} \right] + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^k \frac{C_p^k}{k!} (x-1)^{k-p} (y+1)^p + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}\right), (x, y) \rightarrow (1, -1). \end{aligned}$$

**Remark 7.8.4** Можна формулу Тейлора записати в якості ряду Тейлора за певними умовами, але я цього робити не буду.

## 7.9 Локальні екстремуми

**Definition 7.9.1** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня точка.

Точка  $\vec{x}^0$  називається точкою:

- **локального максимуму**, якщо  $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \geq f(\vec{x})$ ;

- **локального мінімуму**, якщо  $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \leq f(\vec{x})$ .

для строгих екстремумів нерівність строга та існують околиці  $U_\varepsilon(\vec{x}^0) \setminus \{\vec{x}^0\}$ .

**Theorem 7.9.2 Необхідна умова локального екстремуму**

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  - диференційована в т.  $\vec{x}^0 \in A$  - внутрішня.

Відомо, що  $\vec{x}^0$  - локальний екстремум. Тоді  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = 0, \forall j = \overline{1, m}$ .

**Proof.**

Розглянемо функцію  $h(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$  - функція від однієї змінної, така, що  $x_1^0$  - локальний екстремум. Для інших змінних аналогічно. Більш того,  $h'(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$ .

Таким чином, за необхідною умовою локального екстремуму матані 1 семестру,

$$h'(x_1) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = 0. \quad \blacksquare$$

**Remark 7.9.3**  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = 0, \forall j = \overline{1, m} \iff df(\vec{x}^0) \equiv 0$ .

$\Rightarrow$  Зрозуміло.

$\Leftarrow$  Підставити в диференціал  $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = (1, 0, \dots, 0)$ , щоб отримати  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) = 0$ .

**Definition 7.9.4** Точка  $\vec{x}^0$  називається **стаціонарною** для функції  $f$ , якщо всі частинні похідні в заданній точці нулеві.

**Proposition 7.9.5 Інше означення критичної точки**

Точка  $\vec{x}^0$  - стаціонарна  $\iff df_{\vec{x}^0}$  - не сюр'єктивне.

**Proof.**

$\Rightarrow$  Зрозуміло.

$\Leftarrow$  Дано:  $df_{\vec{x}^0}$  - не сюр'єктивне. Взагалі, будь-який функціонал уже автоматично сюр'єктивний. Тоді звідси  $df_{\vec{x}^0} \equiv 0$  - єдиний варіант. Отже, звідси всі частинні похідні нулеві, а тому  $\vec{x}^0$  - стаціонарна.  $\blacksquare$

**Theorem 7.9.6 Достатня умова локального екстремуму**

Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , таку, що  $f$  - двічі неперервно-диференційована в околі т.  $\vec{x}^0 \in A$  - стаціонарна та внутрішня точка.

- 1) Нехай  $d^2f(\vec{x}^0)$  - строго додатноозначена. Тоді  $\vec{x}^0$  - строгий локальний мінімум;
- 2) Нехай  $d^2f(\vec{x}^0)$  - строго від'ємноозначена. Тоді  $\vec{x}^0$  - строгий локальний максимум;
- 3) Нехай  $d^2f(\vec{x}^0)$  - знакозмінна. Тоді  $\vec{x}^0$  - не локальний екстремум.

**Proof.**

- 1) Нехай  $d^2f(\vec{x}^0)$  - додатно визначена.

Оскільки функція  $f$  - двічі диференційована в т.  $\vec{x}^0$ , то тоді за теоремою Тейлора в формі Пеано,

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \frac{d^2f(\vec{x}^0)}{2!} + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^2), \vec{x} \rightarrow \vec{x}^0.$$

Позначу  $\rho = \|\vec{x} - \vec{x}^0\|$ , а також  $\xi_k = \frac{x_k - x_k^0}{\rho}, k = \overline{1, m}$ . Можна зауважити, що  $\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 = 1$ .

Оскільки  $\vec{x}^0$  - стаціонарна, то звідси  $df(\vec{x}^0) \equiv 0$ , бо всі частинні похідні нулі. Таким чином,

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2}d^2f(\vec{x}^0) + o(\rho^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + o(\rho^2) = \frac{1}{2}\rho^2 \left( \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\xi_i\xi_j + o(1) \right).$$

Розглянемо функцію  $F(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\xi_i\xi_j$ , що визначена на одиничній сфері

$S^m = \{\vec{\xi} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{\xi}\| = 1\}$ , а ця множина - замкнена та обмежена. Також відомо, що  $F \in C(S^m)$  як многочлен, а тому вона досягає мінімуму. Проте  $F$  - додатно визначена, а отже  $\min F > 0$ .

Рівність  $f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2}\rho^2(F(\xi_1, \dots, \xi_m) + o(1))$ ,  $\rho \rightarrow 0$  перепишеться таким чином:

$$\exists \delta : \forall \rho < \delta \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > \frac{1}{4}\rho^2 \min F > 0, \text{ остаточно}$$

$$\exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > 0.$$

Тобто, знайшли окіл, де  $\forall \vec{x} : f(\vec{x}^0) < f(\vec{x})$ , а тому  $\vec{x}^0$  - строгий локальний мінімум.

2) Все аналогічно.

3) А тепер припустимо, що  $d^2f(\vec{x}^0)$  - знако-невизначена. Ми розглядаємо функцію лише в деякому околі  $U_{\delta_0}(\vec{x}^0)$  через диференційованість. Тоді  $\exists \vec{\Delta x} : d^2f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}) > 0$ . Ми окіл ще звужимо до  $U_{\delta=\|\vec{\Delta x}\|}(\vec{x}^0)$ . Там будемо шукати точку в вигляді  $\vec{x}^t = \vec{x}^0 + t\vec{\Delta x}$ , де  $t > 0$  - довільне. Тоді за Тейло-ром,

$$f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2}d^2f(\vec{x}^0, t\vec{\Delta x}) + o(\|\vec{x}^t - \vec{x}^0\|), \text{ де } \vec{x}^t \rightarrow \vec{x}^0.$$

$$f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2}t^2d^2f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}) + o(t^2\|\vec{\Delta x}\|^2) = \frac{t^2}{2}(d^2f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}) + o(1)), \text{ де } t \rightarrow 0.$$

Якщо більш детально це розписати  $o(1)$ , а згодом обрати  $\varepsilon = \frac{1}{2}d^2f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x})$ , то отримаємо, що

$$\exists \delta^* : \forall t : t < \delta^* \implies f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) > 0.$$

Якщо так станеться, що  $U_{\delta^*}(\vec{x}^0)$  буде більшим за  $U_{\delta=\|\vec{\Delta x}\|}(\vec{x}^0)$ , то тоді буде ми можемо взяти точку  $\vec{x}^0 + \vec{\Delta x}$ , для якої  $f(\vec{x}^0 + \vec{\Delta x}) - f(\vec{x}^0) > 0$ .

Також буде  $\exists \vec{\Delta x}' : d^2f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}') < 0$  в силу невизначеності знака. І там абсолютно аналогічно.

Остаточно,  $\forall U_\delta$ ,

- якщо  $U_\delta$  більший за  $U_{\delta_0}$ , то вже автоматично виконано;

- інакше знайдуться точки по цим крокам.

Отже,  $\vec{x}^0$  - не екстремум. ■

**Example 7.9.7** Дослідити на локальні екстремуми функцію  $f(x) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$ .

Спочатку шукаємо критичні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 36 = 0 \end{cases} \implies (x, y) \in \{(3, 2), (-3, -2), (2, 3), (-2, -3)\}.$$

Далі знайдемо другий диференціал:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

$$d^2f = 6(x dx^2 + 2y dx dy + x dy^2).$$

Для кожної критичної точки подивимось на цей диференціал.

$$\text{I. } d^2f(3, 2) = 6(3 dx^2 + 4 dx dy + 3 dy^2).$$

Диференціал  $d^2f(3, 2)$  можна розглядати як квадратичну форму  $(d^2f(3, 2))(dx, dy)$ . Даній квадратичній формі відповідає матриця  $H = 6 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$  (див. лінійну алгебру). До речі, дана матриця - це в точності матриця Гесе.

Застосуємо критерій Сільвестра. Маємо  $\Delta_1^H = 18 > 0$  та  $\Delta_2^H = \det \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} = 6(3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 30 > 0$ .

Отже, за цим критерієм, маємо  $d^2f(3, 2)$  - додатноозначена. Отже,  $(3, 2)$  - локальний мінімум.

II.  $d^2f(-3, -2)$  - аналогічними міркуваннями доводимо, що  $(-3, -2)$  - локальний максимум.

III.  $d^2f(2, 3) = 12(dx^2 + 3dx dy + dy^2)$ .

Знову запишемо матрицю  $H = 6 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Зауважимо, що матриця має власні числа  $-1, 5$ . Вони різного знаку, що приводить до висновку:  $d^2f(2, 3)$  - знакозмінна. Отже,  $(2, 3)$  - не екстремум.

IV.  $d^2f(-2, -3)$  - аналогічними міркуваннями доводимо, що  $(-2, -3)$  - не екстремум.

**Example 7.9.8** Дослідити на локальні екстремуми функцію  $f(x, y) = x^2 + y^4$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0 \end{cases} \implies (0, 0) - \text{єдина критична точка.}$$

$$d^2f = 2dx^2 + 12y^2 dy^2$$

$d^2f(0, 0) = 2dx^2 \geq 0$  - дана квадратична форма невід'ємноозначена, тому що при  $(dx, dy) = (0, 0.1)$  маємо  $d^2f(0, 0) = 0$ . Тож скористатися достатньою умовою ми не можемо.

Однак можна зауважити, що  $f(0, 0) \leq f(x, y)$ , причому  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , зокрема в будь-якій точці околу  $(0, 0)$ . Таким чином,  $(0, 0)$  - локальний мінімум.

**Example 7.9.9** Дослідити на локальні екстремуми функцію  $f(x, y) = x^2 - y^4$ .

Тут також  $(0, 0)$  - єдина критична точка, тут також  $d^2f(0, 0) = 2dx^2 \geq 0$  - невід'ємноозначена квадратична форма.

Проте цього разу  $(0, 0)$  не буде локальним екстремумом. Дійсно, для кожного околу  $U_\delta(0, 0)$  знайдуться точки  $(x_1, y_1) = \left(\frac{\delta}{2}, 0\right)$  та  $(x_2, y_2) = \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ , причому ці дві точки в середині околу, для яких:

$$f(x_1, y_1) = \frac{\delta^2}{4} > 0 = f(0, 0) \quad f(x_2, y_2) = -\frac{\delta^4}{16} < 0 = f(0, 0).$$

## 7.10 Умовні локальні екстремуми

**Definition 7.10.1** Задано функцію  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$  - відкрита множина. Задано також функції  $g_1, \dots, g_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Розглянемо множину  $\Gamma_{g_1, \dots, g_m} = \{\vec{x} \in G : g_1(\vec{x}) = \dots = g_m(\vec{x}) = 0\}$ .

Точка  $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1, \dots, g_m}$  називається **умовним локальним максимумом (мінімумом)**, якщо вона є локальним максимумом (мінімумом) функцій  $\tilde{f} : \Gamma_{g_1, \dots, g_m} \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $\tilde{f} \equiv f$ .

**Definition 7.10.2** Рівняння вигляду

$$g_1(\vec{x}) = 0,$$

$$\vdots$$

$$g_m(\vec{x}) = 0$$

називається **рівняннями зв'язку**.

**Example 7.10.3** Зокрема маємо функцію  $f(x, y) = x^2 - y^2$  та функцію  $g(x, y) = y = 0$ .

Маємо тоді  $\tilde{f}(x, y) = f(x, 0) = x^2$ , звідси  $x = 0$  - точка локального мінімуму функції  $\tilde{f}$ .

Отже,  $x = 0$  - точка умовного локального мінімуму функції  $f$ .

**Definition 7.10.4** Задані функції  $g_1, \dots, g_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $A \subset \mathbb{R}^p$  - відкрита множина. Всі функції неперервно диференційовані на  $A$ .

Вони називаються **функціонально незалежними** в точці  $\vec{x}^0 \in A$ , якщо

$$\{g'_1(\vec{x}^0), \dots, g'_m(\vec{x}^0)\} - \text{лінійно незалежна}$$

**Example 7.10.5** Зокрема  $\{g_1, g_2\}$ , де  $g_1(x, y) = x$ ,  $g_2(x, y) = y$  - функціонально незалежні.

Дійсно,  $g'_1(x, y) = (1, 0)$  та  $g'_2(x, y) = (0, 1)$  в кожній точці. Ці похідна - лінійно незалежні.

**Definition 7.10.6** Задані функції  $f, g_1, \dots, g_m : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$  - відкрита множина.

**Функцією Лагранжа** назовемо таку функцію:

$$F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \lambda_1 g_1(\vec{x}) - \dots - \lambda_m g_m(\vec{x}),$$

де  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$ .

**Theorem 7.10.7 Необхідна умова умовного локального екстремуму**

Задані функції  $f, g_1, \dots, g_m : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$  - відкрита множина. Всі функції - неперервно диференційовані на  $A$ .

Відомо, що  $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1, \dots, g_m}$  - умовний локальний екстремум функції  $f$ , а також  $\{g_1, \dots, g_m\}$  - функціонально незалежні в  $\vec{x}^0$ .

Тоді існують  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} : \vec{x}^0$  - стаціонарна точка функції Лагранжа.

*Ми будемо доводити при  $n = 2, m = 1$ . Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа*

**Proof.**

Нехай  $f(x, y, z)$  має локальний екстремум  $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma_g$  з рівнянням  $g(x, y, z) = 0$ .

У силу функціональної незалежності за умовою в точці, маємо  $g'(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ , тобто всі частинні похідні ненулеві. Тоді за теоремою про неявну функцію, існує  $\varphi : U(x_0, y_0) \rightarrow U(z_0)$ , де

$$\varphi(x_0, y_0) = z_0$$

$$\forall (x, y) \in U(x_0, y_0) : g(x, y, \varphi(x, y)) = \tilde{g}(x, y) = 0.$$

Тоді маємо функцію  $\tilde{f}(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$  - функція 2-х змінних, де  $(x_0, y_0)$  - точка локального екстремуму. Звідси випливає, що  $d\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$

$$d\tilde{f}(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Також оскільки  $\tilde{g}(x, y) \equiv 0$ , то звідси маємо:

$$d\tilde{g}(x_0, y_0) = dg(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Останню рівність домножимо на  $\lambda$ , яка відніметься з першим рівнянням.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right)(x_0, y_0, z_0) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}\right)(x_0, y_0, z_0) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \lambda \frac{\partial g}{\partial z}\right)(x_0, y_0, z_0) d\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Оскільки  $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  в силу функціональної незалежності, то ми оберемо такий  $\lambda$ , щоб

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0. \text{ Отримаємо:}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right)(x_0, y_0, z_0) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}\right)(x_0, y_0, z_0) dy = 0.$$

І ця рівність виконується для всіх  $\Delta x, \Delta y$ . Отже,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Маючи ці рівності отримаємо:

$$\begin{aligned} dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) &= d(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0) = \\ &= \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) dz = 0. \end{aligned}$$

Це виконано для всіх  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ . Отже,  $(x_0, y_0, z_0)$  - стаціонарна точка  $F_\lambda$ . ■

**Theorem 7.10.8 Достатня умова умовного локального екстремуму**

Задані функції  $f, g_1, \dots, g_m : A \rightarrow \mathbb{R}$  та  $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$  - відкрита множина. Всі функції - двічі неперервно диференційовані на  $A$ .

Відомо, що  $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1, \dots, g_m}$  - стаціонарна точка функції Лагранжа для деякого  $\vec{\lambda}$ . Нехай  $\{g_1, \dots, g_m\}$  - функціонально незалежні в т.  $\vec{x}^0$ . Розглянемо множину  $\Gamma_{g_1, \dots, g_m}^*(\vec{x}^0) = \{\vec{\Delta x} \in \mathbb{R}^{n+m} : dg_1(\vec{x}^0) = \dots = dg_m(\vec{x}^0) = 0\}$ .

1) Нехай  $d^2 F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$  - строго додатноозначена на  $\Gamma_{g_1, \dots, g_m}^*(\vec{x}^0)$ . Тоді  $\vec{x}^0$  - умовний локальний мінімум;

2) Нехай  $d^2 F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$  - строго від'ємноозначена на  $\Gamma_{g_1, \dots, g_m}^*(\vec{x}^0)$ . Тоді  $\vec{x}^0$  - умовний локальний максимум;

3) Нехай  $d^2 F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$  - знаконеозначена на  $\Gamma_{g_1, \dots, g_m}^*(\vec{x}^0)$ . Тоді  $\vec{x}^0$  - не умовний локальний екстремум.

*Ми будемо доводити при  $n = 2, m = 1$ . Для більших аргументів - аналогічно, але більш технічна справа*

**Proof.**

Нехай рівняння зв'язку лише  $g(x, y, z) = 0$ . Функція Лагранжа  $F_\lambda(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$ . За умовою,  $(x_0, y_0, z_0)$  - стаціонарна точка  $F_\lambda$  для деякого  $\lambda$ .

$g$  - функціонально незалежна в  $(x_0, y_0, z_0)$ , тож  $g'(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ . Ми тут припустимо, що  $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq$

0. Тоді за теоремою про неявну функцію, існує  $\varphi : U(x_0, y_0) \rightarrow U(z_0)$ , для якого

$$\varphi(x_0, y_0) = z_0$$

$$\forall (x, y) \in U(x_0, y_0) : g(x, y, \varphi(x, y)) = \tilde{g}(x, y) = 0.$$

Причому сама функція  $\varphi$  також двічі неперервно-диференційована.

Розглянемо функцію  $\tilde{f} : U(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ , що визначена як  $\tilde{f}(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$ .

Покажемо, що  $(x_0, y_0)$  - стаціонарна точка функції  $\tilde{f}$ .

$$d\tilde{f}(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d\varphi(x_0, y_0).$$

$$\begin{aligned} dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) &= d(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) dz = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \right) dy + \left( \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) dz. \end{aligned}$$

Але в силу стаціонарної точки маємо  $dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Зокрема для  $dz = d\varphi(x_0, y_0)$  маємо рівність нуля.

Оскільки  $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ , то звідси  $dg(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in U, \forall (\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$dg(x, y, \varphi(x, y)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y)) dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y)) dy + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y)) d\varphi(x, y).$$

Зокрема, підставляючи  $(x, y) = (x_0, y_0)$ , отримаємо:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Домножимо це рівняння на  $\lambda$  та додамо його до рівняння  $dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Отримаємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Але це теж саме, що  $d\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$ , що доводить:  $(x_0, y_0)$  - стаціонарна точка  $\tilde{f}$ .

Тепер для визначення характеру точки  $(x_0, y_0)$  функції  $\tilde{f}$  ми обчислимо другий диференціал. Якщо все обережно зробити, отримаємо:

$$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2f(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z=d\varphi(x_0, y_0)} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d^2\varphi(x_0, y_0).$$

Аналогічним чином для  $\tilde{g}(x, y)$  маємо:

$$d^2\tilde{g}(x_0, y_0) = d^2g(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z=d\varphi(x_0, y_0)} + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d^2\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Попереднє рівняння віднімемо на останнє, помножене на  $\lambda$  - отримаємо:

$$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z=d\varphi(x_0, y_0)} + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \right)(x_0, y_0, z_0) d^2\varphi(x_0, y_0).$$

$$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2F_\lambda(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z=d\varphi(x_0, y_0)} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) d^2\varphi(x_0, y_0).$$

Але  $(x_0, y_0, z_0)$  - критична функція  $F_\lambda$ , а тому

$$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2F_\lambda(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z=d\varphi(x_0, y_0)}.$$

Більш детально треба пояснити, що дає умова  $\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)$ . Ми вже знаємо, що  $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \forall (x, y)$ , а тому

$dg(x, y, \varphi(x, y))(x_0, y_0) = 0$ , але звідси ж, враховуючи умову, отримаємо

$$dg(x, y, \varphi(x, y))(x_0, y_0) = dg(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

А це означає, що  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \in \Gamma_g^*(x_0, y_0, z_0)$ .

Остаточно  $d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2F_\lambda(x_0, y_0, z_0)|_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \in \Gamma_g^*(x_0, y_0, z_0)}$ .

А далі все цілком зрозуміло.

1)  $d^2F_\lambda(x_0, y_0, z_0) > 0 \implies d^2\tilde{f}(x_0, y_0) > 0 \implies (x_0, y_0)$  - локальний мінімум  $\tilde{f} \implies (x_0, y_0, z_0)$  - умовний локальний мінімум  $f$ ;

2) аналогічно;

3) аналогічно. ■

**Example 7.10.9** Дослідити функцію  $f(x, y, z) = xyz$  на умовний локальний екстремум за умовою  $(x, y, z) = 3$ .

У цьому випадку  $g(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$ . Запишемо функцію Лагранжа:

$$L_\lambda(x, y, z) = xyz - \lambda(x + y + z - 3).$$

Знайдемо всі критичні точки  $L_\lambda$ , що лежать на множині  $\Gamma_g$ :



$$\begin{cases} \frac{\partial L_\lambda}{\partial x} = yz - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial y} = xz - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial z} = xy - \lambda = 0 \\ g(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Якщо розв'язати систему рівнянь, отримаємо наступні розв'язки  $(x, y, z)$ :

$M_0(1, 1, 1)$ ,  $M_1(3, 0, 0)$ ,  $M_2(0, 3, 0)$ ,  $M_3(0, 0, 3)$ .

А також відповідні  $\lambda$  будуть наступні:

$\lambda_0 = 1$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 0$ .

Дослідимо тепер  $d^2 L_\lambda$  для кожної точки з відповідним  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} d^2 L_\lambda &= \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial z^2} dz^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial z \partial x} dz dx \right) = \\ &= 2(z dx dy + x dy dz + y dx dz). \end{aligned}$$

Із рівняння зв'язку маємо, що  $d(x + y + z) = d(3) = 0 = dx + dy + dz \implies dz = -dx - dy$ .

Підставимо це в  $d^2 L_\lambda$ :

$$d^2 L_\lambda = 2(-y dx^2 + (z - x - y) dx dy - x dy^2).$$

I.  $M_0(1, 1, 1)$  та  $\lambda_0 = 1$ .

$$d^2 L_{\lambda_0}(M_0) = 2(-dx^2 - dx dy - dy^2) = -2 \left( \left( dx + \frac{1}{2} dy \right)^2 + \frac{3}{4} dy^2 \right) < 0. \text{ Тобто маємо від'ємноозначену квадратичну форму. Отже, } M_0(1, 1, 1) \text{ - умовний локальний максимум.}$$

II.  $M_1(3, 0, 0)$  та  $\lambda_1 = 0$ .

$$d^2 L_{\lambda_1}(M_1) = 2(-3 dx dy - 3 dy^2) = -6(dx + dy) dy. \text{ Тобто маємо знаконеозначену квадратичну форму. Отже, } M_1(3, 0, 0) \text{ - не умовний локальний екстремум.}$$

III.  $M_2(0, 3, 0)$  та  $\lambda_2 = 0$  - аналогічно не умовний локальний екстремум.

IV.  $M_3(0, 0, 3)$  та  $\lambda_3 = 0$  - аналогічно не умовний локальний екстремум.

## 8 Інтеграли з параметром

### 8.1 Основні означення та властивості

**Definition 8.1.1** Задано функцію  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , таку, що  $\forall y \in [c, d] : f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Інтегралом з параметром називають таку функцію  $J : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

#### Proposition 8.1.2 Неперервність

Задано функцію  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , таку що  $f \in C([a, b] \times [c, d])$ . Тоді  $J \in C([c, d])$ .

**Proof.**

Зауважимо, що  $f \in C([a, b] \times [c, d])$ . то звідси  $\forall y \in [c, d] : f \in C([a, b]) \implies f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Тобто функція  $J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  коректно визначена.

$$\begin{aligned} f(x, y) \in C([a, b] \times [c, d]) &\implies f(x, y) \in C_{unif}([a, b] \times [c, d]) \implies \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [a, b] \times [c, d] : \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } |J(y_1) - J(y_2)| = \left| \int_a^b f(x, y_1) dx - \int_a^b f(x, y_2) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y_1) - f(x, y_2)| dx < \varepsilon$$

Якщо я оберу  $(x, y_1), (x, y_2)$  так, що  $\|(x, y_1) - (x, y_2)\| = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2| < \delta$ , то тоді  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$

$$\varepsilon > 0 : \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon.$$

Збираючи пазл, отримаємо  $J \in C_{unif}([c, d]) \implies J \in C([c, d])$ . ■

#### Proposition 8.1.3 Диференційованість

Задано функцію  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , таку, що  $f \in C([a, b] \times [c, d])$ . Відомо, що  $\exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C([a, b] \times [c, d])$ .

Тоді  $J$  - диференційована на  $[c, d]$ , при цьому  $J'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ .

**Proof.**

Диференційованість означає існування похідної, тобто необхідно довести її існування.

$$\frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y} \int_a^b f(x, y + \Delta y) - f(x, y) dx \stackrel{=}{=}$$

Згадаємо Ньютона-Лейбніца та властивості інтеграла та розпишемо підінтегральний вираз таким чином:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \int_y^{y + \Delta y} f'_y(x, t) dt = \int_y^{y + \Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt$$

$$\stackrel{=}{=} \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left( \int_y^{y + \Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \right) dx$$

Тепер зафіксуємо т.  $y_0$  та розпишемо праву частину рівності, що ми доводимо:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx = \int_a^b \frac{1}{\Delta y} \left( \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dt \right) dx = \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left( \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dt \right) dx$$

Ну а тепер час доводити існування похідної:

$$\begin{aligned} \left| \frac{J(y_0 + \Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| &= \left| \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left( \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \right) dx - \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left( \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dt \right) dx \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left( \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dt \right) dx \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

За умовою твердження,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C([a, b] \times [c, d]) \implies \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C_{unif}([a, b] \times [c, d]) \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x, t), (x, y_0) \in [a, b] \times [c, d] : \|(x, t) - (x, y_0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\boxed{<} \int_a^b \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{1}{\Delta y} \frac{\varepsilon}{b-a} dt dx = \varepsilon$$

Знову збираємо пазл - отримуємо, що:  $\forall y_0 \in [c, d]$  :

$$\exists \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{J(y_0 + \Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx = J'(y_0). \text{ Отже, } J - \text{ диференційована на } [c, d]. \quad \blacksquare$$

### Proposition 8.1.4 Інтегрованість

Задано функцію  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , таку, що  $f \in C([a, b] \times [c, d])$ .

$$\text{Тоді } J \in \mathcal{R}([c, d]), \text{ а також } \underbrace{\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy}_{=J(y)} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

**Proof.**

Розглянемо дві функції:  $h(t) = \int_c^t \int_a^b f(x, y) dx dy$   $g(t) = \int_a^b \int_c^t f(x, y) dy dx$ . В нашому випадку  $t \in [c, d]$ . Якщо  $t = c$ , то маємо, що  $h(c) = g(c) = 0$ .

Необхідно знайти, чому дорівнює  $h'(t), g'(t)$ . Зробимо позначення:  $h(t) = \int_c^t J(y) dy$   $g(t) = \int_a^b F(x, t) dx$ .

Маємо два інтеграли з параметром  $t$ . Другий інтеграл задовольняє умові з **Prp 3.1.3**, тоді можемо знайти похідну. Дійсно,

$$F(x, t) \in C([a, b] \times [c, d]), \text{ тому що } |F(x, t) - F(x, t_0)| = \left| \int_c^t f(x, y) dy - \int_c^{t_0} f(x, y) dy \right| = \left| \int_c^t f(x, y) - f(x, t_0) dy - \int_{t_0}^t f(x, t_0) dy \right|, \text{ далі неважко оцінити.}$$

$$\text{А також } \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = f(x, t) \in C([a, b] \times [c, d]).$$

Перший - це інтеграл від верхньої межі, тому автоматично  $h'(t) = J(t)$ .

Другий рахується за попереднім твердженням, всі умови виконані для цього.

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx = \int_a^b f(x, t) dx = J(t).$$

Таким чином,  $\forall t \in [c, d] : h'(t) = g'(t) \implies h(t) = g(t) + C$ .

Але оскільки  $h(c) = g(c) = 0$ , то одразу  $C = 0 \implies h(t) = g(t)$ .

$$\text{Ну а тоді } h(d) = g(d) \implies \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \quad \blacksquare$$

**Example 8.1.5** Обчислити  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx$ .

Маємо  $I(\alpha) = \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx$ . Розглянемо функцію  $f(x, \alpha) = x^2 \cos \alpha x$  на  $[0, 2] \times [-1, 1]$  (можна й менше взяти другу сторону, головне щоб навколо т. 0). Ця функція є неперервною, тоді  $I(\alpha)$  неперервна, зокрема в т.  $\alpha = 0$ .

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha) = I(0) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

**Example 8.1.6** Знайти похідну функції  $I(\alpha) = \int_1^2 e^{\alpha x^2} \frac{dx}{x}$ .

Позначу  $f(x, \alpha) = \frac{e^{\alpha x^2}}{x}$ . Знайдемо частинну похідну за другим аргументом:  $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{x^2 e^{\alpha x^2}}{x} = x e^{\alpha x^2}$ . Зауважимо, що  $f$  та  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$  неперервні на прямокутнику  $[1, 2] \times [-1, 1]$ , тому ми можемо диференціювати функцію  $I$ , а також  $I'(\alpha) = \int_1^2 x e^{\alpha x^2} dx$ .

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2} \int_1^2 e^{\alpha x^2} dx^2 = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x^2} \Big|_1^2 = \frac{e^{4\alpha} - e^{\alpha}}{2\alpha}.$$

**Example 8.1.7** Обчислити  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ , якщо  $a, b > 0$ .

Зауважимо, що  $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$ . Тоді взагалі маємо обчислити  $\int_0^1 \int_a^b x^y dy dx$ .

Оскільки функція  $f(x, y) = x^y$  є неперервною на прямокутнику  $[0, 1] \times [a, b]$ , то звідси ми можемо поміняти місцями порядок інтегрування, тобто

$$\int_0^1 \int_a^b x^y dy dx = \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln(y+1) \Big|_a^b = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Зараз будуть більш специфічні приклади. Але на них простіше зрозуміти узагальнення теореми про неперервність та диференційованість.

**Example 8.1.8** Знайти  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$ .

Інтуїтивно хочеться, щоб це дорівнювало  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ . Наш ліміт тому запишемо так:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} + \int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} - \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \right).$$

Перший інтеграл, тобто  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ . Тому задля нашої інтуїції, треба довести, що останні два інтеграла дорівнюють нулю.

$$\left| \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \right| \leq \int_0^{\alpha} \left| \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \right| \leq \int_0^{\alpha} M dx = M\alpha \rightarrow 0.$$

$$\left| \int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \right| \leq M(1+\alpha-1) \rightarrow 0 \text{ аналогічними міркуваннями.}$$

Тут  $M = \max_{x \in [0,2] \times [0,1]} \frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ , і це можна знайти через неперервність самої функції.

$$\text{Отже, } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

**Remark 8.1.9** Теорему про неперервність інтеграла з параметром можна узагальнити.

Маємо  $f \in C([a, b] \times [c, d])$  та  $a(y), b(y) \in C([c, d])$ , причому  $a(y) \geq a$  та  $b(y) \leq b$ .

$$\text{Тоді } J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \in C([c, d]).$$

Доведення аналогічне тому, як попередній приклад розв'язувався.

**Example 8.1.10** Знайти похідну функції  $F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx$ , нехай  $\alpha \geq 0$ .

Інтуїтивно хочеться продиференціювати як інтеграл від межі та інтеграл від параметру.

Оскільки  $\frac{\ln(1+\alpha x)}{x} = f(x, \alpha)$  неперервна функція, то вона має первісну  $H$ . Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$F(\alpha) = H(x, \alpha) \Big|_{\alpha}^{\alpha^2} = H(\alpha^2, \alpha) - H(\alpha, \alpha).$$

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \frac{\partial H}{\partial \alpha^2}(\alpha^2, \alpha) \frac{d\alpha^2}{d\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha^2, \alpha) - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha, \alpha) \frac{d\alpha}{d\alpha} - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha, \alpha) = \\ &= \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha^2}(\alpha^2, \alpha) \cdot 2\alpha - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha, \alpha) \cdot 1 \right) + \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha^2, \alpha) - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha, \alpha) \right) = \\ &= (f(\alpha^2, \alpha) \cdot 2\alpha - f(\alpha, \alpha) \cdot 1) + (f(\alpha^2, \alpha) - f(\alpha, \alpha)). \end{aligned}$$

Підставимо все, що маємо - отримаємо:

$$F'(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^3)}{\alpha^2} \cdot 2\alpha - \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} + \frac{\ln(1+\alpha^3)}{\alpha^2} - \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} = \frac{\ln(1+\alpha^3)}{\alpha} \left( 2 + \frac{1}{\alpha} \right) - 2 \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}.$$

**Remark 8.1.11** Для диференціювання існує більш загальна формула, якщо досліджувати функцію

$J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$ . Вимагаємо  $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C([a, b] \times [c, d])$ ,  $a, b \in C([c, d])$ , причому  $a(y) \geq a$  та  $b(y) \leq b$ . Тоді маємо:

$$J'(y) = f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Для її доведення можна скористатися формулою Ньютона-Лейбніца.

## 8.2 Невласні інтеграли з параметром. Ознаки збіжності

**Definition 8.2.1** Задано функцію  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $A, B \subset \mathbb{R}$ , та  $y_0 \in \mathbb{R}$  - гранична точка для  $B$ . Функція  $f$  **поточково збігається** до функції  $\varphi$  при  $y \rightarrow y_0$ , якщо

$$\forall x \in A : \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

Функція  $f$  **збігається рівномірно** до функції  $\varphi$  при  $y \rightarrow y_0$  на множині  $A$ , якщо

$$\sup_{x \in A} |f(x, y) - \varphi(x)| \rightarrow 0, y \rightarrow y_0$$

Позначення:  $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$ .

Новий вигляд збіжності можна привести до збіжності функціональних послідовностей таким твердженням.

**Proposition 8.2.2**  $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$ ,  $y \rightarrow y_0$  на множині  $A \iff \forall \{y_n, n \geq 1\} \subset B : \forall n \geq 1 : y_n \neq y_0 : f(x, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(x)$  на множині  $A$ .

Впливає з означення рівномірної збіжності.

**Theorem 8.2.3 Критерій Коші**

$f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$ ,  $y \rightarrow y_0$  на  $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall y_1, y_2 \in B, y_1, y_2 \neq y_0 : \begin{cases} |y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta \end{cases} \implies \sup_{x \in A} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$

**Proof.**

$\Rightarrow$  Вказівка: означення рівномірної границі та нерівність трикутника.

$\Leftarrow$  Дано:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall y_1, y_2 \in B, y_1, y_2 \neq y_0 : \begin{cases} |y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta \end{cases} \implies \sup_{x \in A} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$

Візьмемо деяку послідовність  $\{y_n, n \geq 1\}$ , де  $y_n \neq y_0, y_n \rightarrow y_0$ . Тоді

$\exists N : \forall n, m \geq N : |y_n - y_0| < \delta, |y_m - y_0| < \delta$ . За умовою, звідси  $\sup_{x \in A} |f(x, y_n) - f(x, y_m)| < \varepsilon$ . За

критерієм Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності,  $f(x, y_n)$  є рівномірно збіжною на  $A$ . Отже,  $f(x, y)$  - рівномірно збіжний на  $A$  за **Prp. 5.2.2**. ■

Тепер уже до суті цього підрозділу.

**Definition 8.2.4** Задано функцію  $f : [a, \omega) \times A$ , таку, що  $\forall y \in A : \forall c \in [a, \omega) : f \in \mathcal{R}([a, c])$ . Також маємо збіжний невластний інтеграл із параметром  $J(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx, \forall y \in A$ .

Невластний інтеграл **збігається рівномірно** на множині  $A$ , якщо

$$\sup_{y \in A} \left| \int_a^\omega f(x, y) dx - \int_a^c f(x, y) dx \right| \xrightarrow{c \rightarrow \omega} 0$$

**Remark 8.2.5** Воно якось схоже за рівномірну збіжність функції, але трошки не так. Тут розглядається взагалі-то рівномірна збіжність функції  $g(x, y)$  до функції  $g(y)$  ТА при цьому аргумент  $x \rightarrow x_0$ .

**Theorem 8.2.6 Критерій Коші**

$\int_a^\omega f(x, y) dx$  - збіжний рівномірно на  $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists C : \forall c_1, c_2 \in (C, \omega) : \sup_{y \in A} \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$

Впливає з критерію Коші рівномірної збіжності функцій.

**Theorem 8.2.7 Ознака Вейєрштраса**

Задані функції  $f : [a, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}, g : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що

1)  $\forall x \in [a, \omega) : \forall y \in A : |f(x, y)| \leq g(x)$ ;

2)  $\int_a^\omega g(x) dx$  - збіжний.

Тоді  $\int_a^\omega f(x, y) dx$  - збіжний рівномірно на  $A$ .

**Proof.**

$$\sup_{y \in A} \left| \int_c^\omega f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_c^\omega g(x) dx \right| \xrightarrow{c \rightarrow \omega} 0. \quad \blacksquare$$

**Example 8.2.8** Довести, що  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  рівномірно збіжний на множині  $[1 + \gamma, +\infty)$ , якщо  $\gamma > 0$ .

Маємо функцію  $f(x, \alpha) = \frac{1}{x^\alpha}$ . Також відома оцінка  $x^\alpha > x^{1+\gamma} \implies \frac{1}{x^\alpha} < \frac{1}{x^{1+\gamma}}$ , виконано  $\forall x \geq 1$ .

Також  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\gamma}}$  - збіжний невластний інтеграл (еталон). Тому за ознакою Вейерштрасса,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  рівномірно збіжний на множині  $[1 + \gamma, +\infty)$ .

**Example 8.2.9** Довести, що  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  не є рівномірно збіжним на множині  $(1, +\infty)$ .

Дійсно,  $\sup_{\alpha > 1} \left| \int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \right| = \sup_{\alpha > 1} \left( \frac{1}{c^{\alpha-1}} \frac{1}{1-\alpha} \right) = +\infty \not\rightarrow 0$  при  $c \rightarrow +\infty$ .

**Theorem 8.2.10** **Ознака Діріхле та Абеля**

Задані функції  $f : [a, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [a, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що виконана одна з двох пар умов:

|   |  |
|---|--|
| $\int_a^A f(x, y) dx$ - рівномірно обмежена на $[a, \omega)$ .<br>$g$ - монотонна на $[a, \omega)$ та $g(x, y) \xrightarrow{x \rightarrow \omega} 0$ .<br><i>ознака Діріхле</i> | $\int_a^\omega f(x, y) dx$ - збіжний рівномірно на $A$ .<br>$g$ - монотонна на $[a, \omega)$ та рівномірно обмежена на $[a, \omega) \times A$ .<br><i>ознака Абеля</i> |
|---|--|

Тоді  $\int_a^\omega f(x, y)g(x, y) dx$  - рівномірно збіжний на  $A$ .

Поки без доведення.

**Example 8.2.11** Довести, що  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x} + 1} dx$  збіжний рівномірно на  $[\alpha, +\infty)$ ,  $\alpha > 0$ .

Розглянемо функції  $f(x, y) = \sin xy$  та  $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ .

$\int_0^A \sin xy dx = -\frac{1}{y} \cos xy \Big|_0^A = -\frac{1}{y} \cos Ay + \frac{1}{y}$ . Ця штука - рівномірно обмежена на  $[0, +\infty)$ , тому що  $\frac{1}{y} |1 - \cos Ay| \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\alpha}$ , виконано  $\forall A \in [0, +\infty)$ .

$\frac{1}{\sqrt{x} + 1}$  ясно, що монотонна на  $[0, +\infty)$  та рівномірно прямує до нуля при  $x \rightarrow +\infty$ .

Отже, за ознакою Діріхле,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x} + 1} dx$  - збіжний рівномірно на  $[\alpha, +\infty)$ .

**Example 8.2.12** Довести, що  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x} + 1} \operatorname{arctg} xy dx$  збіжний рівномірно на  $[\alpha, +\infty)$ ,  $\alpha > 0$ .

Розглянемо функції  $f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x} + 1}$  та  $g(x, y) = \operatorname{arctg} xy$ .

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x} + 1}$  - збіжний рівномірно, попередній приклад.

$\operatorname{arctg} xy$  - монотонна по  $x$ , а також  $\forall x : \forall y : |\operatorname{arctg} xy| \leq \frac{\pi}{2}$ , тобто рівномірно обмежена.

Отже, за ознакою Абеля,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x} + 1} \operatorname{arctg} xy dx$  - збіжний рівномірно на  $[\alpha, +\infty)$ .

**Theorem 8.2.13** **Ознака Діні**

Задано функцію  $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$ . Також відомо, що  $f \geq 0$  та  $J(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx \in C([c, d])$ .

Тоді  $J$  - збіжний рівномірно на  $[c, d]$ .

Впливає з ознаки Діні рівномірної збіжності функціонального ряду

**TODO:** додати ознаку Діні для цього випадку

### 8.3 Властивості невластного інтегралу

**Proposition 8.3.1** **Неперервність**

Задано функцію  $f : [a, \omega) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , таку, що  $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$ . Також  $J$  - рівномірно збіжний

на  $[c, d]$ . Тоді  $J \in C([c, d])$ .

**Proof.**

За означенням рівномірної збіжності, маємо, що  $\sup_{y \in [c, d]} \left| \int_{\xi}^{\omega} f(x, y) dx \right| \rightarrow 0, \xi \rightarrow \omega$

Тобто  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \xi > a : \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_{\xi}^{\omega} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Оцінимо  $J$ :

$$\begin{aligned} |J(y_1) - J(y_2)| &= \left| \int_a^{\omega} f(x, y_1) dx - \int_a^{\omega} f(x, y_2) dx \right| = \\ &= \left| \int_a^{\xi} f(x, y_1) dx - \int_a^{\xi} f(x, y_2) dx + \int_{\xi}^{\omega} f(x, y_1) dx - \int_{\xi}^{\omega} f(x, y_2) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^{\xi} f(x, y_1) - f(x, y_2) dx \right| + \left| \int_{\xi}^{\omega} f(x, y_1) dx \right| + \left| \int_{\xi}^{\omega} f(x, y_2) dx \right| \boxed{<} \end{aligned}$$

Перший модуль:  $f \in C_{unif}([a, \xi] \times [c, d])$

$$\Rightarrow \exists \delta : \forall y_1, y_2 : |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{\xi - a}$$

Другий модуль:  $\sup_{y \in [c, d]} \left| \int_{\xi}^{\omega} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \forall y \in [c, d] : \left| \int_{\xi}^{\omega} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\boxed{<} \int_a^{\xi} \frac{\varepsilon}{\xi - a} dx + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Збираємо пазл та маємо, що  $J \in C_{unif}([c, d]) \Rightarrow J \in C([c, d])$ . ■

### Proposition 8.3.2 Інтегрованість

Задана функція  $f : [a, \omega) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , така, що  $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$

Також  $J$  - рівномірно збіжний на  $[c, d]$ . Тоді  $J \in D([c, d])$  та

$$\int_c^d \int_a^{\omega} f(x, y) dx dy = \int_a^{\omega} \int_c^d f(x, y) dy dx = J(y)$$

**Proof.**

$$\text{Розглянемо } \int_c^d J(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy + \int_c^d \int_b^{\omega} f(x, y) dx dy$$

Перший доданок - це визначений інтеграл, тому там виконується **Prp 3.1.4.**, тобто

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Другий доданок - цікавіше

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d \int_b^{\omega} f(x, y) dx dy \right| &\leq \int_c^d \left| \int_b^{\omega} f(x, y) dx \right| dy \leq \int_c^d \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_b^{\omega} f(x, y) dx \right| dy = \\ &= \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_b^{\omega} f(x, y) dx \right| (d - c) \rightarrow 0, b \rightarrow \omega \end{aligned}$$

Якщо  $b \rightarrow \omega$ , то тоді отримаємо

$$\int_c^d J(y) dy = \int_a^{\omega} \int_c^d f(x, y) dx dy + 0 = \int_a^{\omega} \int_c^d f(x, y) dx dy. \quad \blacksquare$$

### Proposition 8.3.3 Диференційованість

Задана функція  $f : [a, \omega) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , така, що:

- 1)  $\exists y_0 \in [c, d] : J(y_0)$  - збіжний;
- 2)  $\frac{\partial f}{\partial y} \in C([a, \omega) \times [c, d])$ ;
- 3)  $\int_a^{\omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  - рівномірно збіжний.

Тоді  $J$  - збіжний, диференційована в  $[c, d]$ , при цьому  $J'(y) = \int_a^{\omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ .

**Proof.**

Розглянемо функцію  $I(y) = \int_a^{\omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  - неперервна за умовною рівномірною. Часткові похідні є неперервними також за умовою. Тоді за **Prp. 3.2.6.**,  $I \in \mathcal{R}([y, y_0])$

$$\int_{y_0}^y I(t) dt = \int_a^\omega \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt dx = \int_a^\omega f(x, y) - f(x, y_0) dx = J(y) - J(y_0)$$

$$\Rightarrow J(y) = \int_{y_0}^y I(t) dt - J(y_0) - \text{обидва збіжні. Тому сума - збіжна}$$

Отже,  $J$  - збіжний  $\forall y \in [c, d]$

$$\Rightarrow J'(y) = I(y) - 0 = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

■

**Example 8.3.4** Обчислити  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx$ .

Ми розглянемо функцію  $J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(y \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx$ . Про неї відомо, що:

1)  $\exists y_0 = 0 : J(0) = 0$ , тобто зв'язний;

2)  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x} \in C\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \times [-1, 1]\right)$ ;

3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x} dx$  - збіжний рівномірно принаймні на  $[-1, 1]$  за мажорантною Вейєрштраса.

Дійсно,  $\frac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x} \leq 1, \forall y \in [-1, 1]$ .

Отже, ми можемо продиференціювати функцію  $J(y)$  та отримати:

$$J'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x} dx \stackrel{t=\operatorname{tg} x}{=} \dots = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + y}.$$

$$J(y) = \int \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + y} dy = \frac{\pi}{2} \ln |1 + y| + C.$$

Оскільки  $J(0) = 0$ , то звідси  $C = 0$ . Наша мета була - знайти  $J(1)$ .

$$\text{Таким чином, } J(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

**Proposition 8.3.5** Невласне інтегрування невластного інтеграла

Задано функцію  $f \in C([a, +\infty) \times [c, +\infty))$ , причому  $f \geq 0$ . Також відомо, що  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \in$

$C([c, +\infty))$ , а також  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \in C([a, +\infty))$ .

Тоді якщо  $\int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy$  - збіжний, то  $\int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} f(x, y) dy dx$  - збіжний. Навпаки теж.

Нарешті,  
 $\int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} f(x, y) dy dx$ .

**Proof.**

Позначимо  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ , про неї відомо, що  $I \in C([c, +\infty))$ , а також  $\int_c^{+\infty} I(y) dy$  - збіжний.

Хочемо довести, що  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R \int_c^{+\infty} f(x, y) dy dx = \int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy$ .

Відомо, що  $\int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy$  - збіжний, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta_1 : \forall d > c : d > \Delta_1 \implies \left| \int_d^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Також відомо, що  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  - збіжний рівномірно за ознакою Діні, тоді

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta_2 : \forall R > a : R > \Delta_2 \implies \forall y \in [c, +\infty) : \left| \int_R^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2(d - c)}.$$

Оберемо  $\Delta = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$ , фіксуємо довільне  $d > \Delta$  та  $R > \Delta$  таким чином, щоб  $d > c, R > a$ .

А далі для доведення ліміту зробимо оцінку:

$$\left| \int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy - \int_c^{+\infty} \int_a^R f(x, y) dx dy \right| = \left| \int_c^{+\infty} \int_R^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| =$$



$$\begin{aligned}
&= \left| \int_c^d \int_R^{+\infty} f(x, y) dx dy + \int_d^{+\infty} \int_R^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| \leq \left| \int_c^d \int_R^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| + \left| \int_d^{+\infty} \int_R^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| \leq \\
&\leq \int_c^d \left| \int_R^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| + \left| \int_d^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| < \int_c^d \frac{\varepsilon}{2(d-c)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким чином, дійсно,  $\int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} f(x, y) dy dx = \int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy$ . ■

## 8.4 Інтеграл Діріхле

Інтегралом Діріхле називають таку рівність, яку зараз доведемо (про збіжність вже говорили)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Розглянемо функцію  $J(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ , причому підінтегральну функцію ви довізначимо в т. 0. Тоді підінтегральна функція неперервна.

Перш за все  $J(a)$  - рівномірно збіжний на  $[0, +\infty)$ , бо за ознакою Абеля,

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  - збіжний рівномірно (доводили);

$e^{-ax}$  - монотонна відносно  $x$  та рівномірно обмежена, бо  $|e^{-ax}| \leq 1$ .

Із цього ми отримуємо, що  $J \in C([0, +\infty))$ , а тому  $J(0) = \lim_{a \rightarrow 0} J(a)$ .

Далі маємо:

1)  $\exists a_0 = 0 : J(0)$  - збіжний;

2)  $\frac{\partial f}{\partial a} = -e^{-ax} \sin x \in C([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ .

3)  $-\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx$  збіжний рівномірно на  $[\gamma, +\infty)$ , де  $\gamma > 0$ , за мажорантною Вейерштраса.

Дійсно,  $|e^{-ax} \sin x| \leq e^{-\gamma x}$ , а  $\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} dx$  - збіжний.

Таким чином,  $J'(a) = -\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx = \dots = -\frac{1}{1+a^2}$ .

$\Rightarrow J(a) = -\operatorname{arctg} a + C$ , причому ця рівність виконана  $\forall a \in [\gamma, +\infty)$ . Але водночас  $J(0) = \lim_{a \rightarrow 0} J(a) = C$ .

Але ми ще маємо, що  $|J(a)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right| dx \stackrel{|\sin x| \leq x}{\leq} \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$ .

А тому  $J(a) \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow +\infty$ . Звідси випливає, що

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow J(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Додатково дослідимо ось такий інтеграл та доведемо рівність:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$$

Поки обмежимося  $a > 0$ , тоді

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx \stackrel{ax=t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$F(-a) = -F(a) = -\frac{\pi}{2}$  та  $F(0) = 0$  - тут відносно ясно.

## 8.5 Інтеграл Ейлера-Пуассона

Інтегралом Ейлера-Пуассона називають таку рівність, яку зараз доведемо

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Позначимо  $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ . Зробимо заміну  $x = at$ . А потім помножимо обидві частини рівності на  $e^{-a^2}$  Тоді;

$$J e^{-a^2} = \int_0^{+\infty} e^{-a^2} e^{-a^2 t^2} a dt.$$

А потім проінтегруємо обидві частини рівності по  $a$  на  $[0, +\infty)$  - отримаємо:

$$\int_0^{+\infty} J e^{-a^2} da = J \int_0^{+\infty} e^{-a^2} da = J^2.$$

А з іншого боку, ми отримали:

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2} e^{-a^2 t^2} a dt da \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2 - a^2} a da dt \stackrel{s=-a^2 t^2 - a^2}{=} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2 + 1)} \int_{-\infty}^0 e^s ds dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2 + 1)} dt = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Варто обґрунтувати рівняння зі знаком питання.

Функція  $f(t, a) = a e^{-a^2(t^2+1)} \in C([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ , причому  $f \geq 0$ .

Також  $\int_0^{+\infty} a e^{-a^2(t^2+1)} da = \frac{1}{2} \frac{1}{t^2 + 1} \in C([0, +\infty))$  та  $\int_0^{+\infty} a e^{-a^2(t^2+1)} dt = J e^{-a^2} \in C([0, +\infty))$  (неважко довести, що  $J$  рівномірно збігається).

Нарешті,  $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} a e^{-a^2(t^2+1)} da dt$  ми знайшли та виявився збіжним.

Отже, рівність ? є справедливим.

## 8.6 Гамма-функція

**Definition 8.6.1** Гамма-функцією називають таку функцію:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$$

**Lemma 8.6.2**  $\alpha > 0$  - область збіжності гамма-функції.

**Proof.**

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка - це  $x = 0$ .

Порівняємо з інтегралом  $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx$  - збіжний для  $\alpha > 0$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1$ . Отже, обидва збіжні, тому перший доданок - збіжний.

Розглянемо другий інтеграл. Особлива точка - це  $x = \infty$ .

Порівняємо з інтегралом  $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$  - збіжний для  $\alpha > 0$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \begin{cases} 0 \text{ за Лопітала, } \alpha \geq 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1-\alpha} e^{\frac{x}{2}}} = 0, \alpha < 1 \end{cases}$ . Отже, обидва збіжні, тому другий доданок - збіжний.

Остаточно,  $\Gamma(\alpha)$  - збіжний при  $\alpha > 0$ . ■

**Lemma 8.6.3**  $\Gamma \in C^\infty((0, +\infty))$

**Proof.**

Коли будемо диференціювати  $n$  разів  $\Gamma$ -функцію, ми очікуватимемо таке:

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x dx.$$

Спробуємо зараз довести, що  $\Gamma^{(n)}$  - рівномірно збіжний на проміжку  $[a, b] \subset (0, +\infty)$ .

$$\text{Маємо } \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x dx.$$

Розглянемо перший інтеграл. Використаємо мажорантну Вейерштрасса:

$$|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x| = x^{\alpha-1}e^{-x}(-1)^n \ln^n x \leq \begin{cases} (-1)^n x^{b-1}e^{-x}\ln^n x \\ (-1)^n x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x \end{cases}.$$

Ситуації тут можуть бути різними, але поведінка інтеграла не зміниться. Я буду на розгляд брати перший випадок.

Тобто дослідимо  $\int_0^1 x^{b-1}e^{-x}\ln^n x dx$  на збіжність. Відомо, що  $\ln x = o(x^{-\varepsilon}), x \rightarrow 0$ , де  $\varepsilon > 0$ . Тоді правилом Лопітала можна довести, що  $\ln^n x = o(x^{-\varepsilon}), x \rightarrow 0$ .

Завдяки цьому ми візьмемо  $\int_0^1 x^{b-1}x^{-\varepsilon}e^{-x} dx$  - збіжний, допоки  $b > \varepsilon$ . Це доводили під час попередньої леми.

А далі  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{b-1}e^{-x}\ln^n x}{x^{b-1}x^{-\varepsilon}e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^n x}{x^{-\varepsilon}} = 0$ .

Отже,  $\int_0^1 x^{b-1}e^{-x}\ln^n x dx$  - збіжний. І тому за мажорантною Вейєрштрасса,  $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x dx$  - збіжний рівномірно на  $[a, b]$ .

Аналогічно доводиться, що  $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x dx$  - збіжний рівномірно на  $[a, b]$ . Там та сама оцінка на мажоранту, а також треба використати  $\ln x = o(x^\varepsilon), x \rightarrow +\infty$ , де  $\varepsilon > 0$ .

Остаточно,  $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x dx$  - збіжний рівномірно на  $[a, b] \subset (0, +\infty)$ , що й доводить  $\Gamma \in C^\infty((0, +\infty))$ . ■

**Theorem 8.6.4**  $\forall \alpha > 0 : \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ .

*Вказівка: ліву частину інтегруємо частинами,  $u = x^\alpha, dv = e^{-x} dx$ .*

Особливий випадок при  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Таки чином, маємо результат:

**Corollary 8.6.5**  $\Gamma(n+1) = n!$

А далі перевіримо, чому дорівнює гамма-функція в т.  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x} dx \stackrel{\text{Заміна: } t=\sqrt{x}}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Далі скористаємось тотожністю  $\Gamma(\alpha+1) = \Gamma(\alpha)$ , щоб знайти  $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)$ . Отримаємо:

$$\text{Corollary 8.6.6 } \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$$

## 8.7 Бета-функція

**Definition 8.7.1** Бета-функцією називають таку функцію:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx, \alpha, \beta > 0$$

**Lemma 8.7.2**  $\alpha, \beta > 0$  - область збіжності бети-функції.

**Proof.**

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка - це  $x = 0$ .

Порівняємо з інтегралом  $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} dx$  - збіжний для  $\alpha > 0$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}} = 1$ . Отже, обидва збіжні, тому перший доданок - збіжний.

Розглянемо другий інтеграл. Проводимо заміну  $1-x = t$ , тоді маємо:

$-\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt$  - це той самий перший доданок. І він вже буде збіжним, якщо  $\beta > 0$ .  
Остаточно,  $B(\alpha, \beta)$  - збіжний при  $\alpha > 0, \beta > 0$ . ■

**Proposition 8.7.3**  $B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy$

*Вказівка:* зробити заміну  $x = \frac{y}{1+y}$ .

**Proposition 8.7.4**  $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$ .

*Вказівка:*  $x = 1 - t$ .

**Proposition 8.7.5**  $B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\beta+\alpha-1} B(\alpha-1, \beta)$  при  $\alpha > 1$ .

*Вказівка:*  $u = x^{\alpha-1}$ .

Зауважимо, що  $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1} B(\beta-1, \alpha) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta-1)$  при  $\beta > 1$ .

Ще зауважимо, що  $B(\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha}$ , якщо порахувати  $B$ -функцію.

Використовуючи два зауваження, можемо отримати ось це:

$$B(\alpha, n) = \frac{n-1}{\alpha+n-1} B(\alpha, n-1) = \frac{n-1}{\alpha+n-1} \frac{n-2}{\alpha+n-2} \cdots \frac{2}{\alpha+2} \frac{1}{\alpha+1} \frac{1}{\alpha} = \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}$$

Зокрема при  $\alpha = m$  ми отримаємо:

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

## 8.8 Зв'язок між $\Gamma$ та $B$ функціями

**Proposition 8.8.1**  $\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha B(\alpha, n)$ .

**Proof.**

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \stackrel{x=\ln \frac{1}{u}}{=} \int_0^1 \ln^{\alpha-1} \frac{1}{u} du = \int_0^1 (-\ln u)^{\alpha-1} du = \int_0^1 \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1-u^t}{t} \right)^{\alpha-1} du = \\ &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1-u^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} \right)^{\alpha-1} du \stackrel{\Gamma \in C((0, +\infty))}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n^{\alpha-1} (1-u^{\frac{1}{n}})^{\alpha-1} du \stackrel{u=s^n}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \int_0^1 s^{n-1} (1-s)^{\alpha-1} ds = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha B(n, \alpha) \end{aligned}$$

**Theorem 8.8.2** Функціональне рівняння Ейлера

$$\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \text{ при } 0 < \alpha < 1.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{\cos \pi \alpha} \text{ при } -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}.$$

**Proof.**

Використовуючи **Prp 3.8.1.**, отримаємо:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\alpha} \frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha) \dots (n-\alpha)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-\alpha} \frac{1}{\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{1}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right)} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{1}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha}{n-1}\right)} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)} \end{aligned}$$

В теорії рядів Фур'є (колись згодом) ми одержимо формулу:

$$\sin(\pi \alpha) = \pi \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right) \stackrel{\text{або}}{=} \pi \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right).$$

$$\text{Власне звідси отримуємо } \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

Друга формула вказівка: заміна  $\beta = \alpha + \frac{1}{2}$ . ■

**Theorem 8.8.3 Зв'язок між  $\Gamma$  та  $B$** 

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

**Proof.**

Розглянемо  $\Gamma(\alpha + \beta)$  та проведемо заміну  $x = y(t + 1)$ ,  $dx = (t + 1) dy$ .

$$\Gamma(\alpha + \beta) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1} e^{-x} dx = (t + 1)^{\alpha+\beta} \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-y(t+1)} dy.$$

Отримаємо

$$\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{(1 + t)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-y(t+1)} dy$$

Помножимо обидві частини на  $t^{\alpha-1}$  та проінтегруємо від 0 до  $+\infty$  по  $t$ :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1 + t)^{\alpha+\beta}} \Gamma(\alpha + \beta) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} t^{\alpha-1} e^{-y} e^{-yt} dy dt$$

$$\Gamma(\alpha + \beta) \cdot B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} y^{\beta-1} e^{-y} \int_0^{+\infty} y^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-yt} dt dy.$$

Внутрішній інтеграл при заміні  $yt = x$  стане рівним  $\Gamma(\alpha)$ . Його виносимо з-під зовнішнього інтегралу, а сам інтеграл вже є  $\Gamma(\beta)$ . Тоді

$$\Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta).$$

А тепер час обґрунтувати обережно зміну порядку інтегрування: із  $dy dt$  до  $dt dy$ .

Розглянемо функцію  $f(t, y) = y^{\alpha+\beta-1} t^{\alpha-1} e^{-y(t+1)}$ . Ми обмежимося лише випадком  $\alpha > 1, \beta > 1$ .

Зрозуміло, що  $f \geq 0$ , а також  $f \in C([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ . В т.  $(t, 0), (0, y)$  все ок, тому що при наших  $\alpha, \beta$  ми маємо  $y^{\alpha+\beta-1} \rightarrow 0, t^{\alpha-1} \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ .

$$I(y) = \int_0^{+\infty} f(t, y) dt = \Gamma(\alpha) y^{\beta-1} e^{-y} - \text{це ми рахували вище. } F \in C([0, +\infty)).$$

$$J(t) = \int_0^{+\infty} f(t, y) dy = \Gamma(\alpha + \beta) \frac{t^{\alpha-1}}{(t + 1)^{\alpha+\beta}} - \text{теж вище було. } J \in C([0, +\infty)).$$

$$\text{Також } \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t, y) dt ds = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta), \text{ тобто це - збіжний інтеграл.}$$

Отже, зміна порядку інтегралів є справедливою лише для  $\alpha > 1, \beta > 1$ , тобто

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \text{ справедлива для } \alpha, \beta > 1.$$

$$B(\alpha - 1, \beta - 1) = \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1} B(\alpha, \beta - 1) = \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1} \cdot \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta - 1} B(\alpha, \beta), \text{ а тут уже } \alpha, \beta > 1. \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned} B(\alpha - 1, \beta - 1) &= \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1} \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta - 1} B(\beta, \alpha) = \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1} \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta - 1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1} \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta - 1} \frac{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)(\beta - 1)\Gamma(\beta - 1)}{(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)\Gamma(\alpha + \beta - 2)} = \frac{\Gamma(\alpha - 1)\Gamma(\beta - 1)}{\Gamma(\alpha - 1 + \beta - 1)}. \end{aligned}$$

Отже, ми довели нашу формулу зв'язка для всіх  $\alpha > 0, \beta > 0$ . ■