Зміст

1 Метричні простори та інше

1.1 Означення метричних просторів

Definition 1.1.1 Задано X – множина та $\rho\colon X \to X \to \mathbb{R}$ – функція.
Функція ρ називається **метрикою**, якщо вона задовольняє таким властивостям:

$$1)\ \forall x, y \in X : \rho(x,y) \geq 0, \qquad \rho(x,y) = 0 \iff x = y$$
$$2)\ \forall x, y \in X : \rho(x,y) = \rho(y,x)$$
$$3)\ \forall x, y, z \in X : \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

Метрика описує **відстань** між елементами x, y.
Пара (X, ρ) з метрикою називається **метричним простором**.

Example 1.1.2 Розглянемо декілька прикладів:
1) $X = \mathbb{R}, \qquad \rho(x,y) = |x-y|$;
2) $X = \mathbb{R}^n$, можна задати дві метрики:
$\rho_1(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}, \qquad \rho_2(\vec{x},\vec{y}) = |x_1-y_1| + \cdots + |x_n-y_n|$;
3) $X = C([a,b]), \qquad \rho(f,g) = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)-g(t)|$.

Example 1.1.3 Окремо розгляну даний приклад. Нехай X – будь-яка множина, ми визначимо так звану **дискретну метрику** $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$. Тоді (X, d) задає **дикретний** метричний простір.

Definition 1.1.4 Задано (X, ρ) – метричний простір.
Пару $(Y, \tilde{\rho})$, де $Y \subset X$, назвемо **метричним підпростором** (X, ρ), якщо

$$\forall x, y \in Y : \tilde{\rho}(x,y) = \rho(x,y).$$

При цьому метрика $\tilde{\rho}$, кажуть, **індукована в** Y **метрикою** ρ.

Proposition 1.1.5 Задано (X, ρ) – метричний простір та $(Y, \tilde{\rho})$ – підпростір. Для функції $\tilde{\rho}$ всі три аксіоми зберігаються. Тобто $(Y, \tilde{\rho})$ залишається метричним простором.
Вправа: довести.

Example 1.1.6 Маємо $X = F([a,b])$ – множину обмежених функцій та $\rho(f,g) = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t)-g(t)|$.
Тоді в $Y = C([a,b])$ маємо метрику $\tilde{\rho}(f,g) = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)-g(t)| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t)-g(t)|$. Отже, $C([a,b])$ – метричний підпростір простору $F([a,b])$.

Definition 1.1.7 Задано L – лінійний простір над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$.
Задамо функцію $\|\cdot\| : L \to \mathbb{R}$, що називається **нормою**, якщо виконуються умови:

$$1)\ \forall x \in L : ||x|| \geq 0$$
$$2)\ \forall x \in L : \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ або } \mathbb{C} : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$
$$3)\ \forall x, y \in L : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Тоді пару $(L, \|\cdot\|)$ назвемо **нормованим простором**.

Corollary 1.1.8 Задано $(L, \|\cdot\|)$ – нормований простір. Тоді $\forall x, y \in L : \|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.
Вказівка: $\|x\| = \|x+y-x\|$ *та* $\|y\| = \|y+x-y\|$.

Proposition 1.1.9 Задано $(L, \|\cdot\|)$ – нормований простір. Тоді L з метрикою $\rho(x,y) = \|x-y\|$ утворює метричний простір.
Вправа: перевірити три аксіоми.

Corollary 1.1.10 У такому разі справедливі додаткові властивості для заданої метрики:
1) $\forall x, y, z \in L : \rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$ (інваріантність по відношенню до зсуву);
2) $\forall x, y \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ або $\mathbb{C} : \rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \rho(x,y)$ (однорідність).

Example 1.1.11 Зокрема дані простори будуть нормованими:
1) $\mathbb{R}, \qquad \|x\| = |x|$;

2) $\mathbb{R}^n$, $\quad \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ або навіть $\|\vec{x}\| = |x_1| + \dots + |x_n|$;
3) $\mathbb{C}([a,b])$, $\quad \|f\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$;
4) $L_p(X, \lambda)$, $\quad \|f\|_p = \left(\displaystyle\int_X |f|^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$.
Тому всі вони будуть автоматично метричними просторами із метрикою, що вище задана.

Example 1.1.12 Дискретний простір (X, d) – метричний, але не нормований.

Example 1.1.13 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідів простір. Ми можемо евклідів простір E перетворити в нормований простір $(E, \|\cdot\|)$ функцією $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.
Як наслідок, за твердженням вище, (E, ρ) - метричний простір з $\rho(x,y) = \|x - y\|$.

Example 1.1.14 Нехай $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$ – дійсна числова послідовність. Задамо простір $l_1 = \left\{ \vec{a} \mid \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$.
Задаються такі операції:
$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$
$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$
Неважко переконатися, що l_1 – лінійний простір над $\mathbb{R}$.
Важливе зауваження: $\vec{a} + \vec{b}, \alpha\vec{a} \in l_1$, тому що маємо $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжні, а тому збіжним буде $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$. Тобто операції замкнені.
Можна задати нормований простір функцією $\|\vec{a}\| = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. А тому це – метричний простір з $\rho(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} - \vec{b}\|$.

Узагальнення: $l_p = \left\{ \vec{a} \mid \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$, тут задається норма $\|\vec{a}\| = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Example 1.1.15 Тут ще є така множина: $l_\infty = \{\vec{a} \mid \vec{a}$ – обмежені$\}$. Задані такі самі операції, що вище. Задається норма $\|\vec{a}\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$. Отже, l_∞ – метричний простір.

1.2 Відкриті та замкнені множини. Збіжні послідовності

Definition 1.2.1 Задано (X, ρ) – метричний простір та $a \in X$.
Відкритою кулею радіусом r **з центром** a називають таку множину:

$$B(a; r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\}$$

Її ще називають r**-околом точки** a.
Замкненою кулею радіусом r **з центром** a називають таку множину:

$$B[a; r] = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\}$$

Example 1.2.2 Розглянемо декілька прикладів:
1) $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $\quad B(a; r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$;
2) $X = \mathbb{R}^2$, $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$, $\quad B(0; 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

Definition 1.2.3 Задано $A \subset X$ та $a \in A$.
Точка a називається **внутрішньою** для A, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : B(a; \varepsilon) \subset A.$$

Definition 1.2.4 Множина A називається **відкритою**, якщо кожна точка множини A – внутрішня.

Example 1.2.5 Розглянемо такі приклади:

1) Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|$ та множину $A = [0,1)$. Точка $a = \dfrac{1}{2}$ – внутрішня, оскільки $\exists \varepsilon = \dfrac{1}{4} : B\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right) \subset A$, тобто $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right) \subset [0,1)$. Водночас точка $a = 0$ – не внутрішня. Отже, A – не відркита, бо знайшли не внутрішню точку.

2) Маємо $X = [0,1], \rho(x,y) = |x-y|$ та множину $A = [0,1)$. У цьому випадку точка $a = 0$ уже внутрішня (в попередньому прикладі ми могли ε-околом вийти за межі нуля ліворуч, а тут вже ні). Тут A тепер відкрита.

3) Маємо $X = \{0,1,2\}$ – підпростір метричного простору $(\mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|)$. Задамо множину $A = \{0,1\}$. Тут кожна точка – внутрішня. Отже, A – відкрита.

Definition 1.2.6 Задано $A \subset X$ та $x_0 \in X$.
Точка x_0 називається **граничною** для A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : (B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

Інколи ще множину $B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\} = \mathring{B}(x_0; \varepsilon)$ називають **проколеним околом точки** x_0.

Definition 1.2.7 Множина A називається **замкненою**, якщо вона містить всі свої граничні точки.

Example 1.2.8 Розглянемо такі приклади:

1) Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|$ та множину $A = (0,1)$. Точки $x_0 \in \left\{\dfrac{1}{2}, 0, 1\right\}$ – граничні. Водночас точка $x_0 = \dfrac{3}{2}$ – не гранична. Отже, A – не замкнена, бо $x_0 = 1$ хоча й гранична для A, але $x_0 \notin A$.

2) Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|$. Задамо множину $A = \{0,1\}$. Тут жодна точка – не гранична. Тим не менш, A – замкнена. Бо нема жодної граничної точки в X для A, щоб порушити означення.

3) $X, \emptyset$ – замкнені в будь-якому метричному просторі.

Theorem 1.2.9 Задано (X, ρ), $A \subset X$.
Множина A – відкрита $\iff$ множина A^c – замкнена

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – відкрита.
!Припустимо, що A^c – не замкнена, тобто $\exists x_0 \in A : x_0$ – гранична для A^c, але $x_0 \notin A^c$. За умовою, оскільки $x_0 \in A$, то x_0 - внутрішня, тобто $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \subset A$. Отже, $B(x_0; \varepsilon) \cap A^c = \emptyset$ – суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A^c – замкнена. Тоді вона містить всі граничні точки. Тоді $\forall x_0 \in A : x_0$ – не гранична для A^c, тобто $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A^c = \emptyset \implies B(x_0; \varepsilon) \subset A$. Отже, x_0 – внутрішня для A, а тому A – відкрита. ■

Theorem 1.2.10 Задано (X, ρ) – метричний простір. Тоді справедливо наступне:
1) Нехай $U_\alpha \subset X$, $\alpha \in I$ – сім'я відкритих множин. Тоді $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ – відкрита множина;

2) Нехай $U_k \subset X, k = \overline{1,n}$ – сім'я відкритих множин. Тоді $\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ – відкрита множина;

3) $\emptyset, X$ – відкриті множини.

Proof.
Доведемо кожний пункт окремо:

1) Задано множину $U = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$. Зафіксуємо $a \in U$. Тоді $\exists \alpha_0 : a \in U_{\alpha_0} \implies a$ – внутрішня для U_{α_0} $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(a; \varepsilon) \subset U_{\alpha_0} \subset U$. Отже, U – відкрита.

2) Задано множину $U = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$. Зафіксуємо $a \in U$. Тоді $\forall k = \overline{1,n} : a \in U_k \Rightarrow a$ – внутрішня для $U_k \implies \exists \varepsilon_k > 0 : B(a; \varepsilon_k) \subset U_k$. Задамо $\varepsilon = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k \implies B(a; \varepsilon) \subset U$. Отже, U – відкрита.

3) $\emptyset$ – відкрита, бо нема внутрішніх точок, тому що там порожньо. Також X – відкрита, оскільки для $a \in X$, який б $\varepsilon > 0$ не обрав, $B(a;\varepsilon) \subset X$.

Всі твердження доведені. $\blacksquare$

Remark 1.2.11 Відповідь на питання, чому в другому лише скінченна кількість відкритих множин. Розглянемо $X = \mathbb{R}$ із метрикою $\rho(x,y) = |x-y|$. Задана сім'я відкритих множин $U_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$, причому $\forall n \geq 1$. Тоді зауважимо, що $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$, але така множина вже не є відкритою.

Corollary 1.2.12 Задано (X,ρ) – метричний простір. Тоді справедливо наступне:
1) Нехай $U_\alpha \subset X$, $\alpha \in I$ – сім'я замкнених множин. Тоді $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$ – замкнена множина;
2) Нехай $U_k \subset X, k = \overline{1,n}$ – сім'я замкнених множин. Тоді $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} U_k$ – замкнена множина;
3) $\emptyset, X$ – замкнені множини.
Вказівка: скористатися де Морганом та TODO: вставити референс.

Remark 1.2.13 Такі твердження не є правдивими:
A – не відкрита, а тому A – замкнена (наприклад, $[0,1)$ в $\mathbb{R}$);
A – відкрита, а тому A – не замкнена (наприклад, $\emptyset$ в $\mathbb{R}$).

Proposition 1.2.14 Задано (X,ρ) – метричний простір, $a \in X, r > 0$. Тоді відкритий окіл $B(a;r)$ – справді відкритий; замкнений окіл $B[a;r]$ – справді замкнений.

Proof.
(про $B(a;r)$). Задамо точку $b \in B(a;r)$. Нехай $\varepsilon = r - \rho(a,b) > 0$. Тоді якщо $x \in B(b;\varepsilon)$, то тоді $\rho(x,a) \leq \rho(x,b) + \rho(b,a) < \varepsilon + \rho(b,a) = r$. Отже, $B(a;r)$ – відкрита.

(про $B[a;r]$). Для цього достатньо довести, що $B^c[a;r] = \{x | \rho(a,x) > r\}$ – відкрита. Якщо задати $\varepsilon = \rho(a,b) - r$ для точки $b \in B(a;r)$, то аналогічними міркуваннями отримаємо, що $B^c[a;r]$ – відкрита. Отже, $B[a;r]$ - замкнена. $\blacksquare$

Definition 1.2.15 Задано (X,ρ) – метричний простір, послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset X$ та $x_0 \in X$. Дана послідовність називається **збіжною** до x_0, якщо

$$\rho(x_n, x_0) \to 0, n \to \infty$$

Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Theorem 1.2.16 Задано (X,ρ) – метричний простір, $A \subset X$ та $x_0 \in X$. Наступні твердження еквівалентні:
1) x_0 – гранична точка для A;
2) $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \cap A$ - нескінченна множина;
3) $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : x_n \neq x_0 : x_n \to x_0$.

Proof.
$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Дано: x_0 - гранична для A.
!Припустимо, що $\exists \varepsilon^* > 0 : B(x_0;\varepsilon) \cap A$ – скінченна множина, тобто маємо $x_1, \dots, x_n \in B(x_0;\varepsilon^*)$. Тоді $\rho(x_0,x_1) < \varepsilon^*, \dots, \rho(x_0,x_n)^* < \varepsilon$. Оберемо найменшу відстань та задамо $\varepsilon^*_{new} = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \rho(x_0, x_i)$. Створимо $B(x_0;\varepsilon^*_{new}) \subset B(x_0;\varepsilon)$. У новому шару жодна точка $x_1, \dots, x_n \in A$ більше сюди не потрапляє. Тоді $B((x_0;\varepsilon^*_{new}) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$ - таке неможливо через те, що x_0 – гранична точка. Суперечність!

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Дано: $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \cap A$ - нескінченна множина. Встановимо $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$. Тоді оскільки $\forall n \geq 1 : B\left(x_0; \dfrac{1}{n}\right) \cap A$ – нескінченна, то $\forall n \geq 1 : \exists x_n \in A : \rho(x_0, x_n) < \dfrac{1}{n}$. Якщо далі $n \to \infty$, тоді $\rho(x_0,x_n) \to 0$. Остаточно, $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \neq x_0 : x_n \to x_0$.

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Дано: $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \neq x_0 : x_n \to x_0$. Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \rho(x_0,x_n) < \varepsilon$. Або, інакше кажучи, $\forall \varepsilon > 0 : x_N \in B(x_0;\varepsilon) \cap A$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : (B(x_0;\varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$. $\blacksquare$

1.3 Замикання множин

Definition 1.3.1 Задано (X, ρ) – метричний простір, $A \subset X$ та A' - множина граничних точок A. **Замиканням** множини A називають таку множину

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Часто ще позначають замикання за $\mathrm{Cl}(A)$.

Example 1.3.2 Маємо $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ та множину $A = (0, 1)$. Тоді множина $A' = [0, 1]$. Замикання $\bar{A} = A \cup A' = [0, 1]$.

Remark 1.3.3 Розглянемо зараз сукупність замкнених множин $A \subset A_\alpha \subset X$. Перетин $B = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ – також замкнена, водночас $A\alpha \supset B \supset A$. Отже, B – найменша замкнена множина, що містить A.

Proposition 1.3.4 Задано $\bar{A}$ – замикання. Тоді спредливе наступне:
1) $\bar{A}$ – найменша замкнена множина, що містить A;
2) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \qquad \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
3) A – замкнена $\iff A = \bar{A}$.

Proof.
Доведемо кожне твердження окремо.

1) !Припустимо, що $\bar{A}$ не є найменшою замненою, що містить A, тобто $\exists B \subset \bar{A} : B \supset A$ – замкнена.
Зафіксуємо точку $x_0 \in \bar{A}$ – гранична, тоді $x_0 \in A' \cup A$.
Якщо $x_0 \in A'$, то тоді $x_0 \in B$, тому що B містить всі граничні т. A
Якщо $x_0 \in A$, то тоді $x_0 \in B$.
В обох випадках $\bar{A} \subset B$. Отже, $\bar{A} = B$. Суперечність!

2) $\overline{A \cup B} = (A \cup B)' \cup (A \cup B) \boxed{=}$
$x_0 \in (A \cup B)' \iff x_0$ – гранична точка $A \cup B \iff \forall \varepsilon > 0 :$
$B(x_0; \varepsilon) \cap (A \cup B) = (B(x_0; \varepsilon) \cap A) \cup (B(x_0; \varepsilon) \cap B) \neq \emptyset$(без т. x_0) $\iff$
$$\left[\begin{array}{l} x_0 \text{ – гранична для } A \\ x_0 \text{ – гранична для } B \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_0 \in A' \\ x_0 \in B' \end{array}\right. \iff x_0 \in A' \cup B'$$
Отже, $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
$\boxed{=} A' \cup B' \cup A \cup B = \bar{A} \cup \bar{B}$.
$\overline{A \cap B} = (A \cap B)' \cup (A \cap B) \boxed{\subset}$
$x_0 \in (A \cap B)' \iff x_0$ - гранична точка $A \cap B \iff \forall \varepsilon > 0 :$
$B(x_0; \varepsilon) \cap (A \cap B) = (B(x_0; \varepsilon) \cap A) \cap (B(x_0; \varepsilon) \cap B) \neq \emptyset$(без т. x_0) $\implies$
$$\begin{cases} x_0 \text{ – гранична для } A \\ x_0 \text{ – гранична для } B \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 \in A' \\ x_0 \in B' \end{cases} \iff x_0 \in A' \cap B'$$
Отже, $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$.
$\boxed{\subset} (A' \cap B') \cup (A \cap B) =$ (TODO: обміркувати)

3) Доведення в обидва боки.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A - замкнена. Тоді A містить всі свої граничні точки. Так само A' містить граничні точки A. Тому $A = \bar{A}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $A = \bar{A}$. Тобто A містить всі свої граничні точки. Отже, A - замкнена.

Всі твердження доведені. ■

Definition 1.3.5 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **щільною** в X, якщо

$$\bar{A} = X$$

Definition 1.3.6 Задано (X, ρ) – метричний простір.
Метричний простір називається **сепарабельним**, якщо

існує в даному просторі скінченна чи зліченна щільна підмножина.

Example 1.3.7 Розглянемо такі приклади:

1) $(\mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|)$ – сепарабельний, тому що $\mathbb{Q}$ – зліченна та щільна підмножина в $\mathbb{R}$.

2) Маємо простір $l_2 = \left\{ \vec{a} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$ – нормований простір. Розглянемо множину $l_2 O = \{\vec{a} \in l_2 \mid \text{скінченна кількість членів не нуль}\}$. Розглянемо $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots\} \in l_2$. Доведемо, що вона – гранична для $l_2 O$.
Задамо послідовність $\{\vec{a}_n, n \geq 1\} \subset l_2 O$, де кожний елемент задається таким чином:
$\vec{a}_n = \{a_1, \dots, a_n, 0, \dots\} \implies \rho(\vec{a}, \vec{a}_n) = \|\vec{a} - \vec{a}_n\| = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n^2 \to 0$, оскільки ряд збіжний, а тому хвіст ряду прямує до нуля. Отже, $\vec{a}_n \to \vec{a}$, тож $\vec{a}_n$ – гранична точка.
Тоді можна ствердити, що $l_2 O$ – щільна в l_2, або інакше $\overline{l_2 O} = l_2$. А оскільки $l_2 O \subset l_2$ та ще й нескінченна, то тоді l_2 – сепарабельний.

3) Простір $C([a,b])$ – сепарабельний.
Доведу пізніше, коли дізнаюсь про теорему Вейєрштрасса про наближення неперервної на відрізку функції многочленами.

4) А ось простір l_∞ - не сепарабельний.
Доведу пізніше.

5) Підпростір сепарабельного метричного простору - сепарабельний
Доведу пізніше.

1.4 Повнота

Definition 1.4.1 Задано (X, ρ) - метричний простір.
Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Remark 1.4.2 Це означення можна інакше переписати, більш коротким чином:

$$\rho(x_n, x_m) \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Proposition 1.4.3 Будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною.

Proof.
Маємо $\{x_n, n \geq 1\}$ – збіжна, тобто $\rho(x_n, x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. За нерівністю трикутника, маємо $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m)$. Якщо спрямувати одночасно $m.n \to \infty$, то тоді $\rho(x_n, x_m) \to 0$. Отже, $\{x_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна. ■

Remark 1.4.4 Проте не кожна фундаментальна послідовність – збіжна.

Example 1.4.5 Маємо $X = (0,1]$ – підпростір $\mathbb{R}$. Розглянемо послідовність $\left\{ x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}$, де $x_n \to 0$ при $n \to \infty$ – збіжна, проте $0 \notin X$. Тому така послідовність не має границі в X, але вона – фундаментальна за твердженням.

Definition 1.4.6 Метричний простір (X, ρ) називається **повним**, якщо

будь-яка фундаментальна послідовність має границю.

Example 1.4.7 Зокрема маємо наступне:
1) $X = \mathbb{R}$ – повний за критерієм Коші із матану;

2) $X = (0,1]$ – не повний, бо принаймні $\left\{ x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}$ – фундаментальна, проте не має границі.

Proposition 1.4.8 Задано (X, ρ) – повний метричний простір та (Y, ρ) – підпрострір.
(Y, ρ) – повний $\iff Y$ – замкнена в X.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: (Y, ρ) – повний.
!Припустимо, що Y – не замкнена, тобто існує $x_0 \in X \setminus Y$ – гранична точка для Y. Тоді існує послідовність $\{y_n\} \subset Y$, для якої $y_n \to x_0$ та $y_n \neq x_0$. Зауважимо, що $\{y_n\} \subset X$ збіжна саме в просторі X, тому саме в просторі X послідовність $\{y_n\} \subset X$ – фундаментальна. Проте зрозумло цілком, що $\{y_n\} \subset Y$ буде фундаментальною в просторі Y, проте в силу повноти (Y, ρ), матимемо збіжність саме в Y. Таким чином, $x_0 \in Y$ – суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: Y – замкнена в X. Візьмемо $\{y_n\} \subset Y \subset X$ – фундаментальна. Тоді в силу повноти X, вона – збіжна в просторі X. Скажімо, $y_n \to x_0$. Якщо точка $x_0 \in Y$, то тоді послідовність $\{y_n\}$ збіжна в Y. Інакше при $x_0 \in X \setminus Y$ зауважимо, що $y_n \neq x_0$, тому x_0 – гранична точка Y. У силу замкненості ми отримаємо $x_0 \in Y$ – послідовність $\{y_n\}$ знову збіжна в Y. ■

Definition 1.4.9 Повний нормований простір називається **банаховим**. Повний евклідів простір (відносно метрики, що породжена скалярним добутков) називається **гільбертовим**.

Proposition 1.4.10 Простір $C([a, b])$ зі стандартною нормою $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$ – банахів.

Proof.
Задамо фундаментальну послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ на множині $C([a, b])$. Тоді
$\forall t_0 \in [a, b] : |x_n(t_0) - x_m(t_0)| \leq \|x_n - x_m\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x_m(t)|$. Із цієї нерівності випливає, що $\forall t_0 \in [a.b] : \{x_n(t_0), n \geq 1\}$ – фундаментальна.
За критерієм Коші (із матану), вона – збіжна, тобто $x_n(t_0) \overset{n \to \infty}{\to} y(t_0)$. Щойно показали поточкову збіжність $\{x_n, n \geq 1\}$ до функції y. Доведемо, що вона збігається рівномірно (тобто за нормою).
$\{x_n, n \geq 1\}$ – фундаментальна, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n \geq N : \|x_n(t) - x_m(t)\| < \varepsilon$. Або $\forall t \in [a, b] : |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$. Зафіксуємо деякі $t \in [a, b]$ та $n \geq N$. А потім спрямуємо $m \to \infty$. Тоді $|x_n(t) - y(t)| < \varepsilon$. Це виконується $\forall t \in [a, b]$ та $n \geq N$, або це записується інакше:
$\forall n \geq N : \|x_n - y\| < \varepsilon$. Отже, $x_n \to y$. ■

Example 1.4.11 Задамо підпростір $C([0, 1])$ із нормою із $L_2([0, 1], \lambda_1)$, де λ_1 – міра Лебега. Доведемо, що в такому разі $C([0, 1])$ уже не буде банаховим.
Розглянемо таку функціональну послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset C([0, 1])$, що задається таким чином:

$$x_n(t) \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{nx}{2} - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Це набір функцій, де похила частина зі збільшенням n перетворюється в вертикальну лінію. Зауважимо, що якщо вязти поточкову границю, то отримаємо $x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$. При цьому

$$\|x_n - x\|_2^2 = \int_{[0,1]} |x_n - x|^2 \, d\lambda_1 = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^2 \, dt = \dots = \frac{1}{6n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отже, $\{x_n\}$ в просторі $C([0, 1])$ із нормою L_2 збігається до точки $x \notin C([0, 1])$, але при цьому буде граничною для $C([0, 1])$. Тобто $C([0, 1])$ не буде замкненим, тож $C([0, 1])$ – не повний, або не банахів.

Proposition 1.4.12 Евклідів простір l_2 – гільбертів.

Proof.
Задамо фундаментальну послідовність $\{\vec{x}_n, n \geq 1\}$ на множині l_2
Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall k \geq 1 : |x_n^k - x_m^k| < \varepsilon$$

Тоді послідовність $\{x_n^k, n \geq 1\}$ - фундаментальна - тому (за матаном) збіжна, $x_n^k \to y^k$
Доведемо, що $\vec{x}$ збігається до $\vec{y}$ за нормою

Маємо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall K \geq 1 : \sum\limits_{k=1}^{K} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2$

Спрямуємо $m \to \infty$, тоді $\sum_{k=1}^{K}(x_n^k - y^k)^2 < \varepsilon^2$

Звідки випливає збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty}(x_n^k - y^k)^2$ та його оцінка

$\sum_{k=1}^{\infty}(x_n^k - y^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \|\vec{x}_n - \vec{y}\| < \varepsilon$

Отже, $\vec{x}_n \to \vec{y}$ ■

Lemma 1.4.13 Задано $\{x_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна та $\{x_{n_k}, k \geq 1\}$ - збіжна. Тоді $\{x_n, n \geq 1\}$ - збіжна

Proof.

Маємо $a_{n_k} \to a$, $k \to \infty$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \rho(a_{n_k}, a) < \varepsilon$

Також відомо, що $\forall n, m \geq N : \rho(a_n, a_m) < \varepsilon$

Треба ще $n_k \geq N$. Тоді для $n \geq n_K$

$\rho(a_n, a) \leq \rho(a_n, a_{n_K}) + \rho(a_{n_K}, a) < 2\varepsilon$

Отже, $a_n \to a_0$ ■

Theorem 1.4.14 Критерій Кантора

Умова Кантора: для кожної послдовності $\{B[a_n; r_n], n \geq 1\}$ такої, що $B[a_1; r_1] \supset B[a_2; r_2] \supset \dots$ та $r_n \to 0$, перетин $\bigcap_{n=1}^{\infty} B[a_n; r_n] \neq \emptyset$ (це послідовність куль, що стягується).

(X, ρ) – повний $\iff$ виконується умова Кантора.

Перед доведенням треба зробити кілька зауважень.

I. Точка, що належить перетину, буде в цьому випадку єдиною.

!Припустимо, що це не так, тобто $\exists b^*, b^{**} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B[a_n; r_n]$. Тоді $\forall n \geq 1 : \begin{cases} \rho(a_n, b^*) \leq r_n \\ \rho(a_n, b^{**}) \leq r_n \end{cases}$.

$\implies \rho(b^*, b^{**}) \leq \rho(b^*, a_n) + \rho(a_n, b^{**}) \leq r_n + r_n = 2r_n$.

Спрямуємо $n \to \infty$, тоді $\rho(b^*, b^{**}) \leq 0 \implies \rho(b^*, b^{**}) = 0 \implies b^* = b^{**}$. Суперечність!

II. Покажемо, що $\{a_n, n \geq 1\}$ – послідовність центрів – фундаментальна.

За умовою, $r_n \to 0 \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : r_n < \varepsilon$. Достатньо взяти лише $r_N < \varepsilon$. Тоді $\forall n, m \geq N : a_m, a_n \in B[a_N, r_N] \implies \rho(a_m, a_N) < r_N$ та $\rho(a_n, a_N) < r_N$.

$\implies \rho(a_n, a_m) \leq \rho(a_n, a_N) + \rho(a_N, a_m) < 2r_N < 2\varepsilon$. Отже, $\{a_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна.

Proof.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: (X, ρ) - повний. Задамо послідовність куль $\{B[a_n; r_n], n \geq 1\}$, що стягується. Тоді послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ – фундаментальна. Оскільки X - повний, то тоді $\{a_n, n \geq 1\}$ – збіжна, тобто $a_n \to a_0$. Оскільки $B[a_n; r_n]$ – замкнені, то маємо, що $a_0 \in B_n$. Звідси $a_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: умова Кантора. Нехай $\{a_n, n \geq 1\}$ – фундаментальна послідовність. Нам достатньо буде у неї взяти збіжну підпослідовність. Нехай маємо $n_1 \in \mathbb{N}$, щоб $\forall n \geq n_1 : \rho(a_n, a_{n_1}) < \dfrac{1}{2}$.

Тоді $\exists n_2 > n_1 : \forall n \geq n_2 : \rho(a_n, a_{n_2}) < \dfrac{1}{4}$

$\vdots$

Тоді маємо послідовність $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ із властивістю $\forall n \geq n_k : \rho(a_n, a_{n_k}) < \dfrac{1}{2^k}$.

Маємо тоді кулі $B\left[a_{n_k}; \dfrac{1}{2^{k-1}}\right]$, що вкладені. Дійсно, $x \in B\left[a_{n_{k+1}}; \dfrac{1}{2^k}\right] \implies$

$\rho(a_{n_k}, x) \leq \rho(a_{n_k}, a_{n_{k+1}}) + \rho(a_{n_{k+1}}, x) \leq \dfrac{1}{2^{k-1}} \implies x \in B\left[a_{n_k}; \dfrac{1}{2^{k-1}}\right]$

Якщо a – спільна точка куль, то $a_{n_k} \to a$. ■

Definition 1.4.15 Задано (X, ρ) та $(Y, \tilde{\rho})$ – два різних метричних простори.
Відображення $f\colon X \to Y$ називається **ізометрією**, якщо

$$\forall x_1, x_2 \in X : \tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$$

Тобто суть ізометрії – це збереження відстаней.

Remark 1.4.16 Кожна ізометрія f – уже автоматично ін'єктивна.
Дійсно, припустимо, що $f(x_1) = f(x_2)$. За визначенням ізометрії, $\tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$. Отримаємо $\rho(x_1, x_2) = 0$, тобто $x_1 = x_2$.

Definition 1.4.17 Метричні простори $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ називаються **ізометричними**, якщо

$$\exists f\colon X \to Y \text{ – бієктивна ізометрія}$$

Example 1.4.18 Розглянемо $(\mathbb{R}, \tilde{\rho})$ та $\left(\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \rho\right)$ – два метричних простори. У цьому випадку ρ – стандартна метрика та $\tilde{\rho}(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Ці два простори – ізометричні.
Дійсно, між ними існує ізометрія $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, що є бієктивною.

Proposition 1.4.19 Задані $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два ізоморфні метричні простори.
(X, ρ) – повний $\iff$ $(Y, \tilde{\rho})$ – повний.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: (X, ρ) – повний. Нехай $\{y_n, n \geq 1\}$ – фундаментальна послідовність. Оскільки X, Y ізометричні, то існує бієкція $f\colon X \to Y$, що є ізометрією. Тож звідси $\exists! x_n \in X : f(x_n) = y_n$. Розглянемо послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ та зауважимо, що $\rho(x_n, x_m) = \tilde{\rho}(y_n, y_m) \to 0$ в силу фундаментальності. Отже, $\{x_n, n \geq 1\}$ – фундаментальна, тож збіжна за повнотою. Тобто $\rho(x_n, x) \to 0$. Позначимо $f(x) = y$. Звідси випливає, що $\tilde{\rho}(y_n, y) = \rho(x_n, x) \to 0$. Тобто $\{y_n, n \geq 1\}$ – збіжна.

$\boxed{\Leftarrow}$ *зеркальне доведення.* ■

Definition 1.4.20 Задані $(X, \|\cdot\|_1)$ та $(X, \|\cdot\|_2)$ – два нормовані простори. Ці два простори називаються **ізометричними**, якщо

$$\exists L\colon X \to Y \text{ – ізоморфізм між просторами} : \|Lx\|_2 = \|x\|_1$$

Remark 1.4.21 Ізоморфізм L – автоматично ізометрія, це випливає зі збереження норми. Саме тому слово 'ізометричні' в означенні вище виправдане.

Definition 1.4.22 Задано Y – повний метричний простір.
Він буде називатися **поповненням (completion)** метричного простору X, якщо

$$X \text{ – ізометричний підпростір } Y;$$
$$X \text{ – щільна в } Y.$$

Theorem 1.4.23 Для кожного метричного простору (X, ρ) існує поповнення. Причому це поповнення єдине з точністю до ізометрії.

Proof.
I. *Існування.*
Позначимо F за множина фундаментальних послідовностей $\{x_n\}$ в X. Стаціонарні послідовності є фундаментальними, тож звідси X можна сприймати як підмножину F.
Розглянемо функцію $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$, яка визначена на $F \times F$. Для коректності треба довести існування даної границі. Ми доведемо, що $\{\rho(x_n, y_n), n \geq 1\}$ – фундаментальна (це числова послідовність, тому цього буде достатньо).
Нам відомо, що $\{x_n\}, \{y_n\}$ фундаментальні, тобто $\exists N_1, N_2$, для яких $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon, \rho(y_n, y_m) < \varepsilon$ для всіх $n, m \geq N_1, m, n \geq N_2$. Тоді при $N = \max\{N_1, N_2\}$ справедлива оцінка:
$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(x_m, y_m) \leq (\rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)) - \rho(x_m, y_m) < 2\varepsilon.$
Отже, функція d визначена коректно. Вона майже метрика, оскільки (легко перевірити) виконуються всі властивості. На жаль, $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0 \;\not\Longrightarrow\; \{x_n\} = \{y_n\}$ (приклад буде нижче).

Створимо відношення еквівалентності $\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff d(\{x_n\},\{y_n\}) = 0$. Утвориться фактормножина $F/_\sim = \hat{F}$. Елементи з $\hat{F}$ позначатимемо за $\overline{\{x_n\}}$. Наша мета буде довести, що саме $\hat{F}$ буде поповненням X.
На фактормножині покладемо $\tilde{\rho}\left(\overline{\{x_n\}}, \overline{\{y_n\}}\right) = d(\{x_n\},\{y_n\})$. Варто пересвідчитися, що воно визначено коректно.
Нехай $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ та $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$. Тобто $d(\{x_n\},\{x'_n\}) = 0$ та $d(\{y_n\},\{y'_n\}) = 0$. Тоді
$d(\{x_n\},\{y_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,x'_n) + \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x'_n,y'_n) + \lim\limits_{n\to\infty} \rho(y'_n,y_n) = d(\{x'_n\},\{y'_n\})$.
Аналогічно отримаємо $d(\{x'_n\},\{y'_n\}) \le d(\{x_n\},\{y_n\})$. Отже, $d(\{x'_n\},\{y'_n\}) = d(\{x_n\},\{y_n\})$, тобто $\tilde{\rho}$ визначилося коректним чином.
Поставимо відображення $f\colon X \to \hat{F}$ таким чином: $f(x) = \overline{\{x\}}$. Це буде ізометрією, тому що
$\tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \tilde{\rho}(\overline{\{x_1\}}, \overline{\{x_2\}}) = d(\{x_1\},\{x_2\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_1,x_2) = \rho(x_1,x_2)$. Відображення f зобов'язане бути сюр'єктивним, оскільки повертається клас еквівалентності. Тобто f – бієктивна ізометрія, а тому $(X,\rho), (\hat{F},\tilde{\rho})$ – ізометричні.
Покажемо, що $(\hat{F},\tilde{\rho})$ – повний метричний простір. (TODO: обміркувати).

II. *Єдиність.*
Розглянемо два поповнення $(Y_1,\tilde{\rho}_1), (Y_2,\tilde{\rho}_2)$ простору (X,ρ). Тобто, за означенням, маємо $Y_1 \supset X_1 \sim X \sim X_2 \subset Y_2$, а також $\overline{X_1} = Y_1, \overline{X_2} = Y_2$. Під $\sim$ мається на увазі ізометричність. Із цього X_1 ізометричний до X_2, нехай g – відповідна ізометрія.
Побудуємо $f\colon Y_1 \to Y_2$ за таким правилом: для кожного $y \in Y_1$ беремо таку послідовність $\{x_n\} \subset X_1$, щоб $x_n \to y$ – тоді $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. Треба пересвідчитися, що визначення коректне. Дійсно, нехай $\{x_n\}, \{x'_n\}$ – такі дві послідовності, що $x_n \to y, x'_n \to y$. Тоді звідси вилпиває наступне:
$\tilde{\rho}_2(g(x_n), g(x'_n)) \overset{\text{ізометричність}}{=} \tilde{\rho}_1(x_n,x'_n) \le \tilde{\rho}_1(x_n,y) + \tilde{\rho}_2(y,x'_n) \to 0$ при $n \to \infty$.
Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x'_n)$, а тому значення функцій коректно визначено. (TODO: подумати над тим, чи правильно я все це розписав). ■

Example 1.4.24 Беремо стандартний метричний простір $\mathbb{R}$, послідовності $\{x_n\} = \{0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$ та $\{y_n\} = \{1,1,1,\dots\}$. Зауважимо, що $d(\{x_n\},\{y_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{0.00\dots01}_{n \text{ цифр}} = 0$. При цьому зрозуміло, що $\{x_n\} \ne \{y_n\}$.

1.5 Неперервні відображення

Definition 1.5.1 Задані $(X,\rho), (Y,\tilde{\rho})$ – два метричних простори.
Відображення $f\colon X \to Y$ називається **неперервним у точці** x_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X : \rho(x,x_0) < \delta \implies \tilde{\rho}(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Remark 1.5.2 Дане означення можна записати більш компактним чином. Маємо $f\colon X \to Y$.
f – неперервне в точці $x_0 \in X \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f(B(x_0;\delta)) \subset B(f(x_0);\varepsilon)$.

Proposition 1.5.3 Задані $(X,\rho), (Y,\tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f\colon X \to Y$.
f – неперервне в точці $x_0 \in X \iff \forall \{x_n\} \subset X : x_n \to x_0$ в $X \implies f(x_n) \to f(x_0)$ в Y.
Вправа: довести.

Theorem 1.5.4 Задані $(X,\rho), (Y,\tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f\colon X \to Y$.
f – неперервне (на множині X) $\iff \forall V$ – замкнена в $Y : f^{-1}(U)$ – замкнена в X.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: f – неперервне. Нехай V – замкнена в Y. Зафіксуємо $x_n \in f^{-1}(V)$ таким чином, що $x_n \to x_0$. Але за неперервністю, $f(x_n) \to f(x_0)$, та додатково $f(x_n) \in V$. Значить, за замкненістю V, точка $f(x_0) \in V \implies x_0 \in f^{-1}(V)$. Отже, $f^{-1}(V)$ – замкнена.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall V$ – замкнена в $Y : f^{-1}(U)$ – замкнена в X. Оберемо $x_n \to x_0$.
!Припустимо, що $f(x_n) \not\to f(x_0)$, тобто існує шар $B(f(x_0);\varepsilon)$, поза яким знаходиться підпослідовність $\{f(x_{n_k})\}$. Якщо V – замикання множини $\{f(x_{n_k})\}$, то звідси $x_{n_k} \in f^{-1}(V)$; $f(x_0) \notin V$. Тоді звідси $x_0 \notin f^{-1}(V)$, проте $x_{n_k} \to x_0$ та x_0 є граничною точкою для $f^{-1}(A)$. Суперечність! ■

Corollary 1.5.5 f – неперервне $\iff \forall U$ – відкрита в $Y : f^{-1}(U)$ – відкрита в X.
Вказівка: застосувати попередню теорему та рівність $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

Proposition 1.5.6 Задані X, Y, Z – метричні простори та $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$. Нехай f – неперервне в точці $x_0 \in X$ та g – неперервне в точці $f(x_0) \in Y$. Тоді $g \circ f$ – неперервне в точці $x_0 \in X$.
Вправа: довести.

Proposition 1.5.7 Задано (X, ρ) – метричний простір та зафіксуємо $x_0 \in X$. Тоді функція $f(x) = \rho(x, x_0)$, де $f\colon X \to \mathbb{R}$, – неперервна на X.

Proof.
Дійсно, нехай $y_0 \in X$. Припустимо, що $\{y_n\}$ така, що $y_n \to y_0$. Хочемо $f(y_n) \to f(y_0)$. Справді, $|f(y_n) - f(y_0)| = |\rho(y_n, x_0) - \rho(y_0, x_0)| \le |\rho(y_n, y_0)| \to 0$.
Для $\mathbb{R}$ береться стандартна метрика, якщо нічого іншого не вказується зазвичай. ■

Corollary 1.5.8 Задано $(L, \|\cdot\|)$ – нормований простір. Тоді норма $\|\cdot\|\colon L \to \mathbb{R}$ – неперервна.
Вказівка: оскільки $\rho(x, y) = \|x - y\|$, то звідси $\|x\| = \rho(x, 0)$.

Corollary 1.5.9 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідів простір. Тоді при фіксованому $x_0 \in E$ маємо (x, x_0) – неперервне відображення.

Proof.
Нехай $\{y_n\}$ задана так, що $y_n \to y_0$. Хочемо довести, що $(y_n, x_0) \to (y_0, x_0)$.
$|(y_n, x_0) - (y_0, x_0)| = |(y - y_0, x_0)| \le \sqrt{\|y - y_0\|}\sqrt{\|x_0\|} \to 0$, оскільки $\|\cdot\|$ – неперервне. ■

Definition 1.5.10 Задано (X, ρ) – метричний простір та $f\colon X \to X$.
Дане відображення називається **стиском**, якщо

$$\exists q \in (0,1) : \forall x, y \in X : \rho(f(x), f(y)) \le q \cdot \rho(x, y)$$

Remark 1.5.11 Стискаючі відображення – неперервні.
Вказівка: обрати $\delta = \dfrac{q}{\varepsilon}$ при всіх $\varepsilon > 0$.

Theorem 1.5.12 Теорема Банаха
Задано (X, ρ) – повний метричний просторі та $f\colon X \to X$ – стискаюче відображення. Тоді існує єдина точка нерухома точка, тобто $\exists! x \in X : f(x) = x$.

Proof.
I. *Існування.*
Нехай $x_0 \in X$ – довільна точка. Зробимо позначення: $x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$
Покажемо, що послідовність $\{x_n, n \ge 0\}$ – фундаментальна. Дійсно, для $m \le n$ маємо:
$\rho(x_m, x_n) = \rho(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) \le q \cdot \rho(x_{m-1}, x_{n-1}) \le \dots \le q^m \rho(x_0, x_{n-m})$.
$\rho(x_0, x_{n-m}) \le \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{n-m-1}, x_{n-m}) \le \rho(x_0, x_1)(1 + q + \dots + q^{n-m-1}) \le$
$\le \rho(x_0, x_1) \dfrac{1}{1 - q}$.
Разом отримаємо $\rho(x_m, x_n) \le \dfrac{q^m}{1 - q} \rho(x_0, x_1) \to 0, n, m \to \infty$.
Оскільки (X, ρ) – повний, то $\{x_n\}$ – збіжна, позначимо $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Зважаючи на неперервність стиска, отримаємо $f(a) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$. Тобто a – це наша шукана нерухома точка.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що f має дві різні нерухомі точки a, b. Буде суперечність! Дійсно,
$0 < \rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \le q \cdot \rho(a, b) < \rho(a, b)$. ■

Remark 1.5.13 Насправді, в теоремі Банаха достатньо вимагати, щоб саме $f^n \overset{\text{def.}}{=} \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ разів}}$ було стиском, а не відображення f.
Дійсно, за теоремою Банаха, f^n матиме єдину нерухому точку a, тобто $f^n(a) = a$. Тоді точка $f(a)$ буде теж нерухомою для f^n, оскільки $f^n(f(a)) = f(f^n(a)) = f(a)$. Але за єдиністю, $f(a) = a$ – дві нерухомі мають збігатися. Єдиність нерухомої точки для f доводиться неважко.

1.6 Компактність

Definition 1.6.1 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **компактом**, якщо

$$\forall \{x_n, n \geq 1\} \subset A : \exists \{x_{n_k}, k \geq 1\} : x_{n_k} \to x_0, k \to \infty, \text{ причому } x_0 \in A$$

Якщо прибрати умову $x_0 \in A$, то тоді A називається **передкомпактом**.

Proposition 1.6.2 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
A – компакт $\iff$ $\forall B \subset A$, де B – нескінченна множина, існує $x_0 \in A$ – гранична точка B.
Якщо прибрати умову $x_0 \in A$, то вже мова буде йти про передкомпакт.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – компакт. Нехай $B \subset A$ – нескінченна множина. Оберемо послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset B \subset A$, де всі вони між собою різні. Тоді за умовою компактності, існує підпослідовність $x_{n_k} \to x_0$, причому $x_0 \in A$. Зауважимо, що всі $x_{n_k} \neq x_0$, тож x_0 – гранична точка A.
Якби існували $k \in \mathbb{N}$, для яких $x_{n_k} = x_0$, то тоді ми би сформували підпослідовність $\{x_{n_{k_m}}\}$ без цих елементів, причому $x_{n_{k_m}} \to x_0$, а тепер $x_{n_{k_m}} \neq x_0$. Тож все одно x_0 залишається граничною точкою A.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall B \subset A$, де B – нескінченна множина, існує $x_0 \in A$ – гранична точка B. Отже, нехай $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$ – довільна послідовність. У нас є два варіанти:
I. Множина значень $\{x_n\}$ – скінченна. Тоді можна відокремити стаціонарну підпослідовність.
II. Множина значень $\{x_n\}$ – нескінченна, всі ці значення покладемо в множину $B \subset A$. Тоді за умовою, існує $x_0 \in A$ – гранична точка B. Отже, $B \cap B(x_0; \varepsilon)$ містить нескінченне число точок для всіх $\varepsilon > 0$. Зокрема:
$\varepsilon = 1 \implies B \cap B(x_0; 1)$ має нескінченну множину. Там існує елемент $y_1 \in B \cap B(x_0; 1)$, тобто це одне зі значень послідовності. Тобто $y_1 = x_{n_1}$.
$\varepsilon = \dfrac{1}{2} \implies B \cap B\left(x_0; \dfrac{1}{2}\right)$ має нескінченну множину. Там існує елемент $y_2 \in B \cap B\left(x_0; \dfrac{1}{2}\right)$, тобто це одне зі значень послідовності. Тобто $y_2 = x_{n_2}$. Причому можна обрати $x_{n_2} > x_{n_1}$. Якби так не було можливо, то $B \cap B\left(x_0; \dfrac{1}{2}\right)$ була б скінченною множиною, що не наше випадок.

$\vdots$

Побудували підпослідовність $\{x_{n_k}, k \geq 1\}$, причому $\rho(x_0, x_k) < \dfrac{1}{k}$. Тож при $k \to \infty$ матимемо $x_{n_k} \to x_0 \in A$. Отже, A – компакт.

Випадок передкомпакту повторюється майже все слово в слово. ■

Proposition 1.6.3 Задано (X, ρ) – компактний метричний простір. Тоді (X, ρ) – повний.

Proof.
Дійсно, нехай $\{x_n\} \subset X$ – фундаментальна. Оскільки X – компакт, то існує збіжна підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, де $x_{n_k} \to x, x \in X$. Ми вже знаємо, що тоді й сама послідовність $\{x_n\} \to x$ буде збіжною. Отже, (X, ρ) – повний метричний простір. ■

Definition 1.6.4 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **обмеженою**, якщо

$$\exists R > 0 : A \subset B(a; R)$$

Definition 1.6.5 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **цілком обмеженою**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists C_\varepsilon = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : A \subset \bigcup_{x \in C_\varepsilon} B(x; \varepsilon)$$

До речі, C_ε, для якої виконана $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_\varepsilon} B(x; \varepsilon)$, називається **скінченною ε-сіткою**.
Тобто A – цілком обмежена, коли вона має скінченну ε-сітку для всіх $\varepsilon > 0$.

Proposition 1.6.6 Задано (X, ρ) – метричний простір та A – цілком обмежена множина. Тоді A – обмежена.

Proof.
Для множини A існує 1-сітка, тобто $C_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$, для якої $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_1} B(x;1)$.
Зафіксуємо $y \in X$ та оберемо $R = 1 + \max\limits_{x \in C_1} \rho(x,y)$. Тоді хочемо довести, що $A \subset B(y;R)$.
Нехай $a \in A$, тоді вже $a \in B(x;1)$ при деякому $x \in C_1$, а також $\rho(a;x) < 1$. Звідси
$\rho(a;y) \leq \rho(a;x) + \rho(x;y) < 1 + \max\limits_{x \in C_1} \rho(x;y) = R$.
Отже, A – обмежена. ■

Remark 1.6.7 Не обов'язково вимагати, щоб A була цілком обмежена. Подивившись на це доведення, ми можемо лише вимагати, щоб A мала хоча б одну ε-сітку – тоді буде обмеженість A.

Theorem 1.6.8 Критерій Фреше-Хаусдорфа
Нехай (X, ρ) – повний метричний простір та $A \subset X$.
A – цілком обмежена $\iff$ A – передкомпакт.

Remark 1.6.9 Під час доведення $\boxed{\Leftarrow}$ нам не потрібна буде умова повноти метричного простору.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – цілком обмежена. Нехай $\{a_n, n \geq 1\} \subset A$ – довільна послідовність.
Оберемо 1-сітку C_1, де $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_1} B(x;1)$. В одному з цих шарів нескінченне число членів послідовності, той шар позначу за $B(y_1;1)$; маємо підпослідовність $\{a_{n_k}, k \geq 1\} \subset B(y_1;1)$.
Оберемо $\dfrac{1}{2}$-сітку $C_{\frac{1}{2}}$, де $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_{\frac{1}{2}}} B\left(x; \dfrac{1}{2}\right)$. В одному з цих шарів нескінченне число членів підпослідовності, той шар позначу за $B\left(y_2; \dfrac{1}{2}\right)$; маємо підпідпослідовність $\{a_{n_{k_m}}, k \geq 1\} \subset B\left(y_2; \dfrac{1}{2}\right)$.

$\vdots$

Отримали послідовність центрів $\{y_n, n \geq 1\}$, доведемо її фундаментальність.
$\rho(y_n, y_m) \leq \rho(y_n, a_*) + \rho(a_*, y_m) < \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \to 0$ при $n, m \to \infty$. У даному випадку ми підібрали елемент $a_* \in B\left(\dfrac{1}{n}; y_n\right) \cap B\left(\dfrac{1}{m}; y_m\right)$.
Тепер розглянемо підпослідовність $\{a_{n_p}, p \geq 1\}$, яка будується таким чином: беремо перший елемент з $\{a_{n_k}\}$ (це наше a_{n_1}), потім перший елемент з $\{a_{n_{k_m}}\}$ (це наше a_{n_2}), ... Доведемо, що $\{a_{n_p}, p \geq 1\}$ – фундаментальна. Дійсно,
$\rho(a_{n_p}, a_{n_t}) \leq \rho(a_{n_p}, y_p) + \rho(y_p, y_t) + \rho(y_t, a_{n_t}) < \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{t} + \rho(y_p, y_t) \to 0, t, p \to \infty$
Оскільки (X, ρ) – повний, то звідси $\{a_{n_p}, n \geq 1\}$ – збіжна підпослідовність. Довели, що A – передкомпакт.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A – передкомпакт.
!Припустимо, що A – це є цілком обмеженою. Тобто для деякого $\varepsilon > 0$ не існує ε-сітки. Нехай $x_1 \in A$. Тоді існує $x_2 \in A$, для якої $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ (інакше якби для кожної $x_2 \in A$ була б $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon$, то ми си знайшли ε-сітку $\{x_1\}$, що суперечить умові).
Далі існує $x_3 \in A$, для якої $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$ та $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$ (аналогічно якби для кожної $x_3 \in A$ ці два нерівності не виконувалися би, то ми би знайшли один з трьох ε-сіток: $\{x_1\}$ або $\{x_2\}$ або $\{x_1, x_2\}$).

$\vdots$

Побудували послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$, для якої справедлива $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ при всіх $n \neq m$. За умовою передкомпактності, існує $\{x_{n_k}, n \geq 1\}$, для якої $x_{n_k} \to x_0$. Водночас звідси ми отримаємо, що існують номери K_1, K_2, для яких $\rho(x_{n_{K_1}}, x_{n_{K_2}}) \leq \rho(x_{n_{K_1}}, x_0) + \rho(x_0, x_{n_{K_2}}) < \varepsilon$. Суперечність!
Отже, A все ж таки має бути цілком обмеженою. ■

Theorem 1.6.10 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
A – компакт $\iff$ для кожного відкритого покриття A можна виділити скінченне підпокриття.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – компакт.
!Припустимо, що існує відрките покриття $\{U_\alpha\}$ множини A, від якої не можна відокремити скінченне підпокриття. Оскільки A – компакт, то A – цілком обмежена. Значить, існує 1-сітка C_1 (причому можна підібрати так, щоб $C_1 \subset A$), для якої $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_1} B(x;1)$, або можна переписати як $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_1} A \cap B(x;1)$. Серед множин $A \cap B(x;1)$ існує одна з них, яка не покривається скінченним чином множинами $\{U_\alpha\}$. Дану множину позначу за A'.
Сама множина A' – також цілком обмежена, тож існує $\dfrac{1}{2}$-сітка $C_{\frac{1}{2}}$ (знову підберемо так, щоб $C_{\frac{1}{2}} \subset A'$), для якої виконано $A' \subset \bigcup\limits_{x \in C_{\frac{1}{2}}} A' \cap B\left(x; \dfrac{1}{2}\right)$. Знову ж таки, серед $A' \cap B\left(x; \dfrac{1}{2}\right)$ існує одна з них, що не покривається скінченним чином множинами $\{U_\alpha\}$. Дану множину позначу за A''.
$\vdots$
Продовжуючи процедуру, отримаємо набір куль $B_n = B\left(x_n; \dfrac{1}{n}\right)$, де центр $x_n \in B_{n-1} \cap A$. Позначимо $\overline{B_n \cap A} = K_n$ та зауважимо, що K_n – це замкнена куля в метричному підпросторі A, де $R = \dfrac{1}{2^n}$ та центр $y_n \in K_{n-1}$.
Подвоїмо радіуси кожної з цих куль. Тоді отримаємо послідовність вкладених куль, які стягуються. Оскільки A – компакт, то (A, ρ_A) – повний метричний простір, тож за теоремою Кантора, існує $a \in A$ – спільна точка цих куль. Зважаючи на покриття множини A, отримаємо $a \in U_{\alpha_0}$ при деякому α_0. Оскільки U_{α_0} – відкрита, то існує куля $B(z, \delta) \subset U_{\alpha_0}$. Ми можемо підібрати завжди такий $N \in \mathbb{N}$, щоб було виконано $\dfrac{1}{N} < \dfrac{\delta}{2}$, тоді звідси $K_n \subset B(z;\delta) \subset U_{\alpha_0}$. Таким чином, K_n була покрита лише однією множиною із $\{U_\alpha\}$, проте ми обирали такі кулі (на початку), які не допускали скінченне підпокриття. Суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: кожне покриття A має скінченне підпокриття.
!Припустимо, що A – не компакт, тобто існує послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$, що не має часткових границь. Тоді кожний відкритий окіл $U_a, a \in A$, містить скінченну кількість членів послідовності $\{x_n\}$ (якби існував окіл U_a із нескінченним числом членів послідовності, то a стала би граничною точкою, що неможливо). Набір $\{U_a, a \in A\}$ – відкрите покриття множини A. За умовою, існує скінченне підпокриття $\{U_{a_1}, \dots, U_{a_n}\}$ множини A, але тоді $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{a_i}$, де праворуч – скінченна множина; ліворуч – нескінченна в силу нескінченності послідовності $\{x_n\}$ – суперечність! ■

Corollary 1.6.11 Задано $(X,\rho), (Y,\tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f\colon X \to Y$ – неперервне відображення. Відомо, що X – компакт. Тоді $f(X)$ – компакт.

Proof.
Маємо $\{U_\alpha\}$ – відкрите покриття $f(X)$. Тоді $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ – відкрите покриття X, але за компактністю, можна виділити скінченне підпокриття $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_m)\}$, тоді звідси $\{U_1, \dots, U_m\}$ буде скінченним підпокриттям $f(X)$. ■

Corollary 1.6.12 Задано (X,ρ) – метричний простір та $f\colon X \to \mathbb{R}$ – числова неперервна функція. Відомо, що X – компакт. Тоді f – обмежена та досягає найбільшого та найменшого значень.

Theorem 1.6.13 Задано $(X,\rho), (Y,\tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f\colon X \to Y$ – неперервне, причому X – компакт. Тоді f – рівномірно неперервне.

Proof.
!Припустимо, що $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y \in X : \rho(x,y) < \delta$, але $\tilde{\rho}(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$.
Оберемо $\delta = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, тоді утвориться послідовність $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$. Оскільки X – компакт, то відокремимо збіжні підпослідовності $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$. Але оскільки $\rho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \dfrac{1}{n_k}$, то звідси випливає $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Із іншого боку, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k})$, оскільки виконана нерівність $\tilde{\rho}(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon$. Суперечність! ■

1.7 Теорема Стоуна-Ваєрштраса

Надалі будемо розглядати компактний метричний простір (X, ρ) та метричний простір $(C(X), \sigma)$ – простір неперервних функцій із метрикою $\sigma(f, g) = \max\limits_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|$. Причому даний метричний простір теж повний (це аналогічно доводиться).

Definition 1.7.1 Множина $A \subset C(X)$ називається **алгеброю**, якщо $\forall f, g \in A, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha f,\ f + g,\ f \cdot g \in A$$

Definition 1.7.2 Нехай $A \subset C(X)$ – алгебра.
Алгебра A **відділяє точки** множини X, якщо

$$\forall x, y \in X : x \neq y : \exists f \in A : f(x) \neq f(y)$$

Theorem 1.7.3 Теорема Стоуна-Ваєрштраса
Задано (X, ρ) – компактний метричний простір та $(C(X), \sigma)$ – простір неперервних дійсних функцій, заданий вище. Маємо $A \subset C(X)$. Про неї відомо, що
1) A – алгебра, яка віддаляє точки множини X;
2) функція f, яка визначена як $f(x) = 1, \forall x \in X$, належить A.
Тоді множина A скрізь щільна в $(C(X), \sigma)$.

Proof.
Ми хочемо довести, що $\bar{A} = C(X)$.
Нехай $f \in A$. Хочемо довести, що $|f| \in \bar{A}$. У курсі мат. аналізу ми доводили теорему Ваєрштраса про наближення функції многочленом. Зокрема для функції $g(t) = \sqrt{t}, t \in [0, 1]$ маємо, що $\forall \varepsilon > 0 : \exists P_\varepsilon$ – многочлен від $t : |\sqrt{t} - P_\varepsilon(t)| < \varepsilon$. Тоді $\forall x \in X$:
$\left| \dfrac{|f(x)|}{\|f\|} - P_\varepsilon \left(\dfrac{f^2(x)}{\|f\|^2} \right) \right| = \left| \sqrt{\dfrac{|f(x)|^2}{\|f\|^2}} - P_\varepsilon \left(\dfrac{f^2(x)}{\|f\|^2} \right) \right| < \varepsilon.$
Оскільки $f \in A$, то в силу алгебри $\dfrac{f^2}{\|f\|} \in A$. Оскільки P_ε – многочлен, то $P_\varepsilon \circ \dfrac{f^2}{\|f\|} \in A$. Ми знайшли $P_\varepsilon \circ \dfrac{f^2}{\|f\|^2} \in A$, для якої $\left\| \dfrac{|f|}{\|f\|} - P_\varepsilon \circ \dfrac{f^2}{\|f\|^2} \right\| < \varepsilon$. Отже, $\dfrac{|f|}{\|f\|}$ – гранична точка, тобто $\dfrac{|f|}{\|f\|} \in \bar{A}$.
Відомо знову з мат. аналізу, що для всіх $a, b \in \mathbb{R}$ ми маємо такі рівності:
$\max\{a, b\} = \dfrac{1}{2}(a + b + |a - b|) \qquad \min\{a, b\} = \dfrac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.
Значить, маючи $f, g \in A$ та маючи результат вище, отримаємо $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \bar{A}$.
Оберемо $x, y \in X$ так, що $x \neq y$. Тоді існує функція $g \in A$, для якої $g(x) \neq g(y)$. Далі покладемо нову функцію $f(z) = \alpha + \dfrac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}(g(z) - g(x)), z \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді звідси $f \in A$ (ми тут користуємося пунктом 2), щоб це показати), причому $f(x) = \alpha,\ f(y) = \beta$.
Отже, що ми довели щойно: $\forall x, y \in X : x \neq y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \exists f \in A : f(x) = \alpha,\ f(y) = \beta$.

Нехай $f \in C(X)$ та $\varepsilon > 0$. Зафіксуємо $x \in X$, для $z \in X$ покладемо $\alpha = f(x), \beta = f(z)$. Тоді за щойно доведеним, існує $h_z \in A$, для якої $h_z(x) = \alpha = f(x)$ та $h_z(z) = \beta = f(z)$.
Оскільки $h_z - f \in C(X)$, то за означенням, $\exists \delta_z > 0 : \forall y \in B(z, \delta_z) : h_z(y) - f(y) < \varepsilon$. Сім'я множин $\{B(z, \delta_z) \mid z \in X\}$ – відкрите покриття компактної множини X. Отже, ми можемо взяти скінченне підпокриття $\{B(z_k, \delta_{z_k}) \mid k = \overline{1, n}\}$.
Визначимо функцію $g_x(y) = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \{h_{z_k}(y))\}, y \in X$. Зауважимо, що по-перше, $g_x \in \bar{A}$; по-друге, $g_x(x) = f(x)$; по-третє, $\forall y \in X : g_x(y) - f(y) < \varepsilon$.
Оскільки $g_x - f \in C(X)$, то за означенням, $\exists \delta_x > 0 : \forall y \in B(x, \delta_x) : g_x(y) - f(y) > -\varepsilon$. Сім'я множин $\{B(x, \delta_x) \mid x \in X\}$ – відкрите покриття компактної множини X. Отже ми можемо взяти скінченне підпокриття $\{B(x_k, \delta_{x_k} \mid k = \overline{1, m}\}$.
Визначимо функцію $h(y) = \max\limits_{1 \leq k \leq m} g_{x_k}(y), y \in X$. Тоді $h \in \bar{A}$, причому також $\forall y \in X$:
$f(y) - \varepsilon \leq h(y) \leq f(y) + \varepsilon$. Для будь-якої функції $f \in C(X)$ ми знайшли $h \in A$, для якої $\|h - f\| < \varepsilon$.
Отже, $\bar{A} = C(X)$. ■

2 Початок функціонального аналізу

2.1 Обмежені та неперервні лінійні оператори

Definition 2.1.1 Задано $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ – нормовані простори.
Лінійний оператор $A\colon X \to Y$ називають **обмеженим**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall x \in X : \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$$

Надалі ми ці норми розрізняти не будемо, бо буде з контексту зрозуміло.

Remark 2.1.2 Маємо обмежений оператор A. Зауважимо, що множина всіх констант, які обмежують оператор, тобто множина $\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$, буде непорожньою (бо оператор обмежений) та обмеженою знизу числом 0. Значить, існує $\inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$.

Definition 2.1.3 Задано X, Y – нормовані простори.
operators **Нормою** лінійного оператора A називається величина

$$\|A\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$$

Remark 2.1.4 Зауважимо, що для всіх $x \in X$ виконується $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.
Дійсно, для кожного $\varepsilon > 0$ існує стала $C_\varepsilon > 0$, для якої $C_\varepsilon < \|A\| + \varepsilon$. Тож для всіх $x \in X$ справедлива нерівність $\|Ax\| \leq C_\varepsilon\|x\| < (\|A\| + \varepsilon)\|x\|$. Тому ця нерівність виконуватиметься також при $\varepsilon \to 0 + 0$. Таким чином, $\|A\| \in \{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$, тобто інфімум досягається.
Отже, норма $\|A\|$ – це найменше число, що обмежує лінійний оператор A.

Theorem 2.1.5 Задано X, Y – нормовані простори та $A\colon X \to Y$ – обмежений оператор. Тоді $\|A\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Proof.
Спочатку доведемо, що $\|A\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Уже відомо, що $\forall x \in X : \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, тоді звідси $\forall x \in X \setminus \{0\} : \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$, таким чином $\sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$. Залишилося довести, що строга нерівність не допускається.
!Припустимо, що $\sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} < \|A\|$, тобто існує $\varepsilon > 0$, для якого $\sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\| - \varepsilon$. Тоді звідси випливає, що $\forall x \in X \setminus \{0\} : \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| - \varepsilon \implies \forall x \in X : \|Ax\| \leq (\|A\| - \varepsilon)\|x\|$. Таким чином, $\|A\| - \varepsilon$ – це константа, яка обмежує оператор, тоді за означенням норми, $\|A\| - \varepsilon \geq \|A\|$ – суперечність!
Отже, ми довели рівність, тобто $\|A\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$. ■

Theorem 2.1.6 Задано X, Y – нормовані простори та $A\colon X \to Y$ – обмежений оператор. Тоді $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\| = 1} \|Ax\|$.

Proof.
Ми доведемо ось такий ланцюг нерівностей: $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \sup\limits_{\|x\| = 1} \|Ax\| \geq \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.
Оберемо такий $x \neq 0$, щоб $\|x\| \leq 1$. Тоді виконується нерівність $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \|Ax\|$. Таким чином, $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \sup\limits_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$.
Зрозуміло, що виконується нерівність $\sup\limits_{\|x\| = 1} \|Ax\| \leq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$.
Залишилося довести, що $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{\|x\| = 1} \|Ax\|$. Дана нерівність є наслідком того, що для кожного $x \neq 0$ число $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \right\|$ належить множині $\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$. ■

Example 2.1.7 Задано лінійний оператор $A\colon l_2 \to l_2$ таким чином: $A(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Довести, що A – обмежений оператор та знайду норму.
Згадаємо, що норма $\|(x_1, x_2, \dots\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots}$. Оцінимо оператор:
$\|A(x_1, x_2, \dots)\| = \|(x_2, x_3, \dots)\| = \sqrt{|x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} \leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} = 1 \cdot \|(x_1, x_2, \dots)\|$.
Отже, A – обмежений оператор, бо знайшли константу $C = 1$, що обмежує.
$\|A\| = \sup\limits_{\|(x_1,x_2,\dots)\|=1} \|A(x_1, x_2, \dots)\| = \sup\limits_{\|(x_1,x_2,\dots)\|=1} \|(x_2, x_3, \dots)\| = \sup\limits_{\|(x_1,x_2,\dots)\|=1} \sqrt{|x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} =$
$= \sup\limits_{\|(x_1,x_2,\dots)\|=1} \sqrt{1 - \|x_1\|^2} = 1.$

Example 2.1.8 Задано лінійний оператор $A\colon C([0, 1]) \to C([0, 1])$, таким чином: $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t \tau x(\tau)\, d\tau$.
Довести, що A – обмежений оператор та знайти норму.
Конкретно в цьому випадку розглядатиметься норма $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t \tau x(\tau)\, d\tau \right| \leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^t |\tau||x(\tau)|\, d\tau = \int_0^1 |\tau||x(\tau)|\, d\tau \leq \int_0^1 |\tau| \max_{\tau\in[0,1]} |x(\tau)|\, d\tau =$$
$$= \int_0^1 \tau \|x\|\, d\tau = \|x\| \frac{\tau^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\|x\|.$$

Отже, A – обмежений оператор. Залишилося знайти норму.
Оскільки $\|Ax\| \leq \dfrac{1}{2}\|x\|$, то звідси випливає $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \dfrac{1}{2}$. Із іншого боку, оберемо функцію $x(t) = 1$, для якої $\|x\| = 1$. Тоді отримаємо, що $\|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \left| \displaystyle\int_0^\tau \tau\, d\tau \right| = \max\limits_{t\in[0,1]} \dfrac{t^2}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Таким чином, отримаємо $\|A\| = \dfrac{1}{2}$.

Proposition 2.1.9 Задано X, Y – нормовані простори та $\dim X < \infty$ та $A\colon X \to Y$ – лінійний оператор. Тоді A – обмежений.
Внаслідок цього, всі оператори між скінченновимірними векторними просторами – обмежені.

Proof.
Дійсно, нехай $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис X, нехай на неї стоїть норма $\|x\|_2$, тоді маємо наступне:
$\|Ax\| = \|A(x_1e_1 + \dots + x_ne_n)\| = \|x_1Ae_1 + \dots + x_nAe_n\| \leq |x_1|\|Ae_1\| + \dots + |x_n|\|Ae_n\| \leq$
$\leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}\sqrt{\|Ae_1\|^2 + \dots + \|Ae_n\|^2} = C\|x\|_2$.
Якби була би інша норма $\|\cdot\|$, то вона еквівалентна $\|\cdot\|_2$, а тому обмеженість зберігається. ■

Theorem 2.1.10 Задано X, Y – нормовані простори та $A\colon X \to Y$ – лінійний оператор.
A – обмежений $\iff$ A – неперервний в точці 0.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – обмежений. Оберемо послідовність $\{x_n\} \subset X$ так, щоб $x_n \to 0$. Звідси отримаємо $\|Ax_n - A0\| = \|Ax_n\| \leq \|A\|\|x_n\| \to 0$. Отже, $Ax_n \to A0$ при $n \to \infty$, що підтверджує неперервність.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A – неперервний в точці 0.
!Припустимо, що A – необмежений оператор. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує точка $x_n \in X$, для якої $\|Ax_n\| > n\|x_n\|$ (ясно, що $x_n \neq 0$). Таким чином, $\dfrac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \left\| A\left(\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| > n$. Для зручності позначу $w_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|} \in X$, тобто ми вже маємо $\|Aw_n\| > n$. Оскільки відображення A – неперервне в нулі, то для послідовності $\left\{\dfrac{1}{n}w_n, n \geq 1\right\}$, для якої $\dfrac{1}{n}w_n \to 0$ виконується $A\dfrac{w_n}{n} \to A0 = 0$ – суперечність в силу нерівності! Бо в нас $\left\|A\dfrac{w_n}{n}\right\| > 1$. ■

Remark 2.1.11 Насправді, A – неперервний в точці 0 $\iff$ A – неперервний на X.
Сторона $\boxed{\Leftarrow}$ зрозуміла. По стороні $\boxed{\Rightarrow}$ маємо $x_0 \in X$ та припустимо, що $\{x_n\}$ – довільна послідовність, де $x_n \to x_0$. Тоді цілком зрозуміло, що $x_n - x_0 \to 0$, але за неперервністю в нулі, маємо $A(x_n - x_0) = Ax_n - Ax_0 \to A0 = 0$. Таким чином, $Ax_n \to Ax_0$.

Theorem 2.1.12 Множина $\mathcal{B}(X, Y)$ – множина всіх обмежених лінійних операторів – буде підпростором $\mathcal{L}(X, Y)$, а також буде нормованим простором із заданою нормою за означенням вище.

Proof.
Дійсно, нехай $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$, тобто вони обмежені. Хочемо довести, що $A+B, \alpha A \in \mathcal{B}(X, Y)$, тобто вони теж обмежені. Дійсно, справедливі наступні оцінки:
$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|$.
$\|(\alpha A)x\| = |\alpha|\|Ax\| \le |\alpha|\|A\|\|x\|$.
Отже, дійсно $A + B, \alpha A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Тепер доведемо, що вищезгадана норма лінійного обмеженого оператора – дійсно норма.
$\|A\| \ge 0$ – зрозуміло. Також якщо $\|A\| = 0$, то звідси $\|Ax\| \le \|A\|\|x\| = 0$, тобто $Ax = 0$, причому для всіх $x \in X$; або $A = O$. Навпаки, якщо $A = O$, тобто $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \{0\} = 0$.
Ми вже маємо оцінку $\|\alpha Ax\| \le |\alpha|\|A\|\|x\|$ при всіх $x \in X$, тому й при всіх x з умовою $\|x\| = 1$. Таким чином, $\|\alpha A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| \le |\alpha|\|A\|$. Із цієї оцінки випливає, що $\|A\| = \|\alpha^{-1}\alpha A\| \le |\alpha^{-1}|\|\alpha A\| \implies$ $\|\alpha A\| \ge |\alpha|\|A\|$. Таким чином, $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ (у тому числі при $\alpha = 0$).
Ми вже маємо оцінку $\|(A + B)x\| \le (\|A\| + \|B\|)\|x\|$ при всіх $x \in X$, тому й при всіх x з умовою $\|x\| = 1$. Таким чином, $\|A + B\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(A + B)x\| \le \|A\| + \|B\|$ – третя властивість норми. ■

Theorem 2.1.13 Простір $\mathcal{B}(X, Y)$ буде повним, якщо Y – повний.

Proof.
Нехай $\{A_n, n \ge 1\} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ – фундаментальна послідовність. Зауважимо, що $\{A_n x, n \ge 1\} \subset Y$ – фундаментальна також при всіх $x \in X$. Із фундаментальності $\{A_n\}$ маємо, що $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \ge N : \|A_n - A_m\| < \varepsilon$, але тоді $\forall x \in X : \|(A_n - A_m)x\| \le \|A_n - A_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$, звідси й випливає фундаментальність.
Тоді при кожному $x \in X$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = z_x$. Ми можемо визначити як раз новий оператор $A\colon X \to Y$, де $x \mapsto z_x$ (границя єдина, тому визначення адекватне). Залишилися три етапи доведення.
I. *Лінійність.* Дійсно, нехай $x, y \in X$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді маємо
$A(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} A_n x + \beta \lim\limits_{n\to\infty} A_n y = \alpha Ax + \beta Ay$.
II. *Обмеженість.* Оскільки $\{A_n\}$ – фундаментальна, то $\{A_n\}$ – обмежена: $\exists C > 0 : \forall n \ge 1 : \|A_n\| \le C$. Тоді в силу неперервності норми матимемо $\|Ax\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x\| \le C\|x\|$.
III. $A_n \to A$. Згадаємо нерівність $\|(A_n - A_m)x\| < \varepsilon\|x\|$ при всіх $x \in X$, при всіх $\varepsilon > 0$ та $n, m \ge N$. Спрямуємо $m \to \infty$, тоді отримаємо $\|(A_n - A)x\| \le \varepsilon\|x\|$, тому й $\|A_n - A\| \le \varepsilon < 2\varepsilon$. ■

2.2 Продовження неперервних операторів

Задані X, Y – нормовані простори, $X_0 \subset X$ та $A\colon X_0 \to Y$ – обмежений оператор. Питання полягає в тому, чи існує розширення $\tilde{A}\colon X \to Y$ таким чином, що $\tilde{A}|_{X_0} = A$. Причому нас буде цікавити таке розширення, що $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Remark 2.2.1 Просто якщо таке розширення допустиме, то звідси $\|\tilde{A}\| \ge \|A\|$. Дійсно,
$$\|\tilde{A}\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|\tilde{A}x\|}{\|x\|} \ge \sup_{x \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{\|\tilde{A}x\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Proposition 2.2.2 Задані X, Y – відповідно нормований та банахів простори та $X_0 \subset X$ – щільний підпростір. Тоді для кожного обмеженого оператору $A\colon X_0 \to Y$ існує єдиний розширений обмежений оператор $\tilde{A}\colon X \to Y$, для якого $\tilde{A}|_{X_0} = A$ та при цьому $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Proof.
Нехай є послідовність $\{x_n\} \subset X_0$, де $x_n \to x \in X$. Зауважимо, що тоді в цьому випадку $\{Ax_n\}$ – фундаментальна. У силу банаховості $\{Ax_n\}$ буде збіжним. Тож визначимо оператор $\tilde{A}x = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$.
I. $\tilde{A}$ *визначений коректно.*
Нехай є дві послідовності $\{x_n\}, \{y_n\}$, для яких $x_n \to x,\ y_n \to x$. Значить, тоді
$\|Ax_n - Ay_n\| = \|A(x_n - y_n)\| \le \|A\|\|x_n - y_n\| \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = \lim\limits_{n\to\infty} Ay_n$.

II. $\tilde{A}$ *розширює оператор* A.
Справді, нехай $x \in X_0$. Оберемо стаціонарну послідовність $\{x\} \subset X_0$, де $x \to x$. Тоді $\tilde{A}x = \lim\limits_{n\to\infty} Ax = Ax$. Отже, звідси $\tilde{A}|_{X_0} = A$.

III. $\tilde{A}$ *лінійний оператор.*
Нехай $x, y \in E$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді звідси
$A(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} A(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} Ay_n = \alpha Ax + \beta Ay.$

IV. $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.
Оберемо $X_0 \ni x_n \to x \in X$. Оскільки A – обмежений, то $\|Ax_n\| \leq \|A\|\|x_n\|$. Спрямовуючи $n \to \infty$, ми отримаємо $\|\tilde{A}x\| \leq \|A\|\|x\|$. Автоматично довели, що $\tilde{A}$ – обмежений оператор. Раз це виконується для всіх $x \in E$, то отримаємо $\|\tilde{A}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\tilde{A}x\| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|A\|\|x\| = \|A\|$. Тобто звідси $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$.
Зважаючи на зауваження вище, маємо $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

V. $\tilde{A}$ – *єдине розширення.*
!Припустимо, що існує інший оператор $\tilde{\tilde{A}}$, яке також є розширенням A з усіма умовами, що задані в твердженні. Маємо $x \in X$, тож існує послідовність $\{x_n\} \subset X_0, x_n \to x$. Тоді
$\tilde{\tilde{A}}x \overset{\tilde{\tilde{A}} \text{ – обмежений}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\tilde{A}}x_n = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n \overset{\text{def. } \tilde{A}}{=} \tilde{A}x$. Суперечність! ■

Theorem 2.2.3 Теорема Гана-Банаха
Задано E – нормований простір та $G \subset E$ – підпростір. Тоді для кожного обмеженого функціонала $l \colon G \to \mathbb{R}$ існує продовження $\tilde{l} \colon E \to \mathbb{R}$ так, що $\tilde{l}|_G = l$, $\|\tilde{l}\| = \|l\|$.

Proof.
1. Обмежимось випадком, коли E – дісний та сепарабельний простір.
I. *Доведемо, що l можна продовжити на деякий підпростір $E \supset F \supsetneq G$.*
Нехай G – підпростір E та $G \neq E$. Зафіксуємо $y \notin G$ та розглянемо підпростір $F = \operatorname{span}\{G \cup \{y\}\}$. Тобто кожний елемент $x \in F$ записується як $x = g + \lambda y$ при $g \in G, \lambda \in \mathbb{R}$. Визначимо оператор $\tilde{l}(x) = l(g) + \lambda c$, де $c = \tilde{l}(y)$. За побудовою, такий оператор – лінійний.
Тепер залишилося підібрати таке $c \in \mathbb{R}$, щоб виконувалося $\|\tilde{l}\| = \|l\|$ – тим самим ми й обмеженість доведемо автоматично. Але згідно зі зауваження, нам треба підібрати $c \in \mathbb{R}$, щоб $\|\tilde{l}\| \leq \|l\|$.
Обмежимося поки що $\lambda > 0$. Нехай зафіксовано $h_1, h_2 \in G$ та зауважимо, що справедлива нерівність:
$l(h_2) - l(h_1) = l(h_2 - h_1) \leq |l(h_2 - h_1)| \leq \|l\|\|h_2 - h_1\| = \|h\|\|(h_2+y)-(y+h_1)\| \leq \|l\|\|h_1+y\| + \|l\|\|h_2+y\|.$
Звідси випливає, що $-\|l\|\|h_1 + y\| - l(h_1) \leq \|l\|\|h_2 + y\| - l(h_2)$.
Оскільки це $\forall h_1, h_2 \in G$, то тоді $\sup\limits_{h_1 \in G}(-\|l\|\|h_1 + y\| - l(h_1)) \leq \inf\limits_{h_2 \in G}(\|l\|\|h_2 + y\| - l(h_2))$.
Для зручності супремум позначу за a_1 та інфімум за a_2. Оберемо число $c \in \mathbb{R}$ так, щоб $a_1 \leq c \leq a_2$.
Звідси справедлива така нерівність:
$\forall h \in G : -\|l\|\|h + y\| - l(h) \leq c \leq \|l\|\|h + y\| - l(h)$.
Тепер покладемо елемент $h = \lambda^{-1}g$ та домножимо обидві частини нерівності на λ. Оскільки ми домовилися $\lambda > 0$, то знаки нерівностей зберігаються. Коротше, отримаємо:
$-\|l\|\|g + \lambda y\| - l(g) \leq \lambda c \leq \|l\|\|g + \lambda y\| - l(g)$.
$-\|l\|\|g + \lambda y\| \leq l(g) + \lambda c \leq \|l\|\|g + \lambda y\|$.
$|\tilde{l}(x)| = |l(g) + \lambda c| \leq \|l\|\|g + \lambda y\| = \|l\|\|x\|$.
Власне, далі аналогічними міркуваннями (як в попередньому твердженні) отримаємо $\|\tilde{l}\| \leq \|l\|$.
Тепер що робити при $\lambda < 0$. Перепишемо $x = -(-g + (-\lambda)y)$. У нас тепер $-\lambda > 0$ та $-x = t = -g + (-\lambda)y$, звідси отримаємо
$|\tilde{l}(t)| \leq \|l\|\|t\| \implies |\tilde{l}(x)| \leq \|l\|\|x\|$.

II. *Тепер доведемо, що продовежння на нашому конкретному E існує.*
Оскільки E – сепарабельний, то існує (ми оберемо зліченну) множина $A = \{x_1, x_2, \dots\}$, яка є щільною підмножиною E. Також ми досі маємо $G \subset E$ – підпростір.
Позначимо $x_{n_1} \in A$ – перший з елементів, де $x_{n_1} \notin G$. За кроком I, існує l_1 – продовження l на $G_1 = \operatorname{span}\{G \cup \{x_{n_1}\}\}$.
Позначимо $x_{n_2} \in A$ – перший з елементів, де $x_{n_2} \notin G_1$. За кроком I, існує l_2 – продовження l_1 на $G_2 = \operatorname{span}\{G_1 \cup \{x_{n_2}\}\}$.
$\vdots$
Отримаємо ланцюг підпросторів $G \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots$ та набір функціоналів $l_1, l_2, \dots$, для яких:
$\forall n \geq 1 : \qquad l_n \colon G_n \to \mathbb{R}$ – обмежена; $\qquad l_n|_G = l; \qquad \|l_n\| = \|l\|$.

Покладемо множину $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, яка є лінійною. Визначимо функціонал $L_0\colon M \to \mathbb{R}$ таким чином:
$x \in M \implies x \in G_N \implies L_0(x) = l_N(x)$. Зрозуміло цілком, що L_0 – лінійний, а також $\|L_0\| = \|l\|$.
Оскільки $M \supset A$ та A всюди щільна, то M – всюди щільна. Отже, за попереднім твердженням, існує продовження $L\colon E \to \mathbb{R}$, для якого $\|L\| = \|L_0\| = \|l\|$.
Висновок: ми довели теорему Гана-Банаха для випадку, коли E – дійсний сепарабельний.

2. Тепер будемо доводити теорему для E – довільний дійсний нормований простір. Все ще $G \subset E$. Позначимо за l_p – продовження l зі збереженням норми на множині $P \supset G$. Таке продовження існує див (1. та I.). Позначимо X – множина всіх таких продовжень. На ній введемо відношення $\preceq$ таким чином:
$l_p \preceq l_q \iff P \subset Q$ та $l_Q(x) = l_P(x), \forall x \in P$.
Зрозуміло, що $\preceq$ задає відношення порядку, внаслідок чого X – частково впорядкована. Зафіксуємо $Y = \{l_{P_\alpha} \mid \alpha \in A\}$ – будь-яку лінійно впорядкувану підмножину X. Знайдемо верхню грань.
Для цього покладемо $P_* = \bigcup\limits_{\alpha \in A} P_\alpha$ та на множині P_* задамо функціонал l_* таким чином:
$x \in P_* \implies x \in P_{\alpha_0} \implies l_*(x) = l_{\alpha_0}(x)$.
Зрозуміло, що l_* – лінійний, причому $\|l_*\| = \|l\|$. На множині $\bar{P}_*$ продовжимо функціонал, як було в твердженні – отримаємо функціонал $l_{\bar{P}_*}$, причому $\|l_{\bar{P}_*}\| = \|l_*\| = \|l\|$. Даний функціонал $l_{\bar{P}_*}$ на $\bar{P}_*$ буде верхньою гранню Y. Отже, за лемою Цорна, існує максимальний елемент X. Це буде функціонал L, який визначений на E (у протилежному випадку його можна було би ще продовжити та він не був би максимальним елементом).
Висновок: ми довели теорему Гана-Банаха для випадку, коли E – дійсний (не обов'язково сепарабельний) нормований простір. ■

Насправді, на цьому теорема Гана-Банаха ще не закінчена. Ми можемо її довести на випадок, коли нормований простір E – комплексний. Спершу кілька деталей.
Нехайй E – комплексний лінійний нормований простір. Розглянемо одночасно $E_\mathbb{R}$ – асоційований з E дійсний нормований простір; тобто під час множення на скаляр ми допускаємо лише дійсні коефіцієнти. Зауважимо, що $E_\mathbb{R} = E$ як множини, утім не як простори.
Розглянемо довільний функціонал $l\colon E \to \mathbb{C}$. Раз $l(x) \in \mathbb{C}$, то для кожного $x \in E$ можна записати функціонал як $l(x) = m(x) + in(x)$. У цьому випадку $m(x) = \operatorname{Re} l(x),\ n(x) = \operatorname{Im} l(x)$.

Proposition 2.2.4 Нехай $l\colon E \to \mathbb{C}$ – лінійний та обмежений функціонал. Тоді $m, n\colon E_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задають лінійний обмежений функціонал.

Proof.
Нехай $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ та $x, y \in E$. Тоді ми отримаємо наступне:
$l(\alpha x + \beta y) = m(\alpha x + \beta y) + in(\alpha x + \beta y)$ (з одного боку)
$l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y) = \alpha(m(x) + in(x)) + \beta(m(y) + in(y)) = (\alpha m(x) + \beta m(y)) + i(\alpha n(x) + \beta n(y))$ (з іншого боку).
Знаючи, що комплексне число рівне тоді й лише тоді, коли дійсні та уявні частини збігаються, отримаємо
$m(\alpha x + \beta y) = \alpha m(x) + \beta m(y) \qquad n(\alpha x + \beta y) = \alpha n(x) + \beta n(y)$.
Отже, m, n – лінійний функціонали.
Обмеженість m (аналогічно з n) випливає з такго ланцюга нерівностей:
$|m(x)| \le |m(x) + in(x)| = |l(x)| \le \|l\|\|x\|$. ■

Proposition 2.2.5 $n(x) = -m(ix)$.
Іншими словами, ми можемо функціонал l відновити повністю, знаючи функціонал m.

Proof.
$m(ix) + in(ix) = l(ix) = il(x) = i(m(x) + in(x)) = -n(x) + im(x)$.
$\implies n(x) = -m(ix)$.
$l(x) = m(x) - im(ix)$. ■

Повернімось назад до теореми Гана-Банаха. Доб'ємо її на випадок, коли E – комплексний нормований простір.

Proof.
Маємо $E \supset G$ – два комплексних простори та $E_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{R}}$ – асоційовані простори. Маємо функціонал $l\colon G \to \mathbb{C}$, який визначається дійсним функціоналом $m\colon G_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. Оскільки це дійсний функціонал, ми можемо продовжити до $M\colon E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ зі збереженням норми.
Покладемо $L(x) = M(x) - iM(ix)$. Неважко буде довести, що L – комплексний лінійний функціонал. Залишилося довести, що $\|L\| = \|l\|$. Знову ж таки, достатньо довести $\|L\| \leq \|l\|$. Запишемо $L(x) = |L(x)|e^{i\varphi}$, де $\varphi = \arg L(x)$. Тоді
$|L(x)| = e^{-i\varphi}L(x) = L(e^{-i\varphi}x) = M(e^{-i\varphi}x) = |M(e^{-i\varphi}x)| \leq \|M\|\|e^{-i\varphi}x\| = \|m\|\|x\| \leq \|l\|\|x\|$.
Отже, $\|L\|$. Ми тут юзали той факт, що $L(y) = M(y)$ при $L(y) \in \mathbb{R}$. ■

Remark 2.2.6 Зауважимо, що якщо G – лінійна множина (але не підпростір), то теорема Гана-Банаха все одно виконується.
У цьому випадку $\bar{G}$ буде підпростором E. Функціонал l продовжується неперервним чином на $\tilde{G}$, а далі застосовується доведена теорема.

2.3 Деякі наслідки з теореми Гана-Банаха

Theorem 2.3.1 Нехай E – лінійний нормований простір та $G \subset E$ – підпростір. Тоді для будь-якого вектора $y \notin G$ існує функціонал l на E, для якого $\|l\| = 1,\ l(y) = \rho(y, G),\ l|_G = 0$.

Proof.
На підпросторі $F = \operatorname{span}\{G \cup \{y\}\}$ визначимо функціонал l_0 таким чином:
$l_0(g + \lambda y) = \lambda\rho(y, G)$.
Цілком зрозуміло, що l_0 – лінійний неперервний функціонал на F, також $l_0(y) = \rho(y, G)$, нарешті $l_0(g) = l_0(g + 0y) = 0$. Обчислимо $\|l_0\|$.
$\|l_0\| = \sup\left\{\dfrac{|l(g+\lambda y)|}{\|g + \lambda y\|} \mid g + \lambda y \in F\right\} = \sup\left\{\dfrac{|\lambda|\rho(y, G)}{|\lambda| \cdot \|\lambda^{-1}g + y\|} \mid g + \lambda y \in F\right\} =$
$= \rho(y, G)\sup\{\|g' - y\|^{-1} \mid g' \in G\} = \rho(y, G) \inf\limits_{g' \in G}\|g' - y\| = 1$, де елемент $g' = \lambda^{-1}g \in G$.
За теоремою Банаха, існує продовження l до E, причому $\|l\| = \|l_0\| = 1$. ■

Corollary 2.3.2 Для кожного $y \in E \setminus \{0\}$ існує функціонал на E, що $\|l\| = 1,\ l(y) = \|y\|$.
Вказівка: $G = \{0\}$.

Corollary 2.3.3 Лінійні непреревні функціонали розділяють точки нормованого простора E.
Іншими словами, $\forall x_1, y_2 \in E : x_1 \neq x_2 : \exists l$ – функціонал на $E : l(x_1) \neq l(x_2)$.
Вказівка: попередній наслідок, $y = x_1 - x_2 \neq 0$.

Definition 2.3.4 Задано E – нормований простір.
Підмножина $M \subset E$ називається **тотальною**, якщо

$$\overline{\operatorname{span} M} = E$$

Theorem 2.3.5 Нехай E – нормований простір та $M \subset E$.
M – тотально в $E \iff \forall x \in M : l(x) = 0 \implies \forall x \in E : l(x) = 0$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: M – тотальна множина. Нехай l – неперервний лінійний функціонал такий, що $\forall x \in M : l(x) = 0$. Оскільки функціонал лінійний, то $\forall x \in \operatorname{span} M : l(x) = 0$. Оскільки $\overline{\operatorname{span} M} = E$, то ми можемо неперервно продовжити l до E. Отримаємо $l(x) = 0, \forall x \in E$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: будь-який лінійно неперервний функціонал l на E такий, що $l(x) = 0, x \in M$ випливає $l(x) = 0, x \in E$.
!Припустимо, що M не є тотальною. Тобто $\overline{\operatorname{span} M} = G \neq E$, тобто існує вектор $y \in E \setminus G$. Внаслідок першої теореми даного підрозділу, існує функціонал l на E такий, що $\|l\| = 1,\ l|_G = 0$. Але з того, що $l|_G = 0$ випливає $l = 0$. Суперечність! ■

Proposition 2.3.6 Нехай E – нормований простір та l – лінійний неперервний функціонал з E. Тоді $\ker l$ – підпростір E. Більш того, $\ker l$ буде гіперпідпростором, тобто це означає, що $E = \operatorname{span}\{\ker l \cup \{y\}\}$ при $y \notin \ker l$.

Proof.
Те, що $\ker l$ підпростір, тут все зрозуміло.
Нехай $y \notin \ker l$. Тоді доведемо, що кожний елемент $x \in E$ записується як $x = g + \lambda y$, де $g \in \ker l, \lambda \in \mathbb{K}$. Покладемо $\lambda = \dfrac{l(x)}{l(y)}$ та розглянемо вектор $g = x - \lambda y$. Оскільки $l(g) = l(x) - \lambda l(y) = 0$, то звідси $g \in \ker l$. Отже, $x = g + \lambda y$ – шукане представлення. ■

Proposition 2.3.7 Зафіксуємо лінійний функціонал l на E. Покладемо множину $\Gamma_c = \{x \in E \mid l(x) = c\}$, що називається **гіперплощиною**. Позначимо $\Gamma_0 = \ker l$. Тоді існує такий вектор $z \in E$, що $\Gamma_c = \Gamma_0 + z \equiv \{g + z \mid g \in \Gamma_0\}$.

Proof.
Дійсно, зафіксуємо $z \in \Gamma_c$. Тоді для кожного $x \in \Gamma_c$ маємо $l(x - z) = l(x) - l(z) = 0$, тобто $g = x - z \in \Gamma_0 \implies x = g + z$. ■

Definition 2.3.8 Нехай E – дійсний нормований простір та $A \subset E$, точка $x_0 \in \partial A$. Також нехай l – лінійний неперервний функціонал на E.
Гіперплощина Γ_c називається **опорною гіперплощиною** множини A, що проходить через точку x_0, якщо

$$x_0 \in \Gamma_c$$

$$A \text{ лежить по одну сторону від гіперплощини } \Gamma_c \text{ (тобто } l(x) - c \text{ не міняє знак на } A\text{)}$$

Theorem 2.3.9 Зокрема маємо $A = B[r; 0]$ – замкнуту кулю, границя $\partial A = S_r(0)$.
Через будь-яку точку $x \in S_r(0)$ проходить опорна гіперплощина шара $B[r; 0]$.

Proof.
Для кожної точки $x_0 \in S_r(0)$ існує лінійний неперервний функціонал l на E, де $\|l\| = 1$, $l(x_0) = \|x_0\| = r$. Тоді гіперплощина Γ_r – наша шукана. Дійсно, $x_0 \in \Gamma_r$, бо $l(x_0) = r$.
$\forall x \in B[r; 0] : l(x) \leq |l(x)| \leq \|x\| \leq r$, тобто весь шар лежить по одну сторону від Γ_r. ■

2.4 Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у деяких банахових просторах

2.4.1 Базис Шаудера

Definition 2.4.1 Нехай E – банахів простір.
Послідовність $\{e_1, e_2, \dots\} \subset E$ називається **базисом Шаудера** простора E, якщо

$$\forall x \in E : \exists! x_k \in \mathbb{K} : x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

Proposition 2.4.2 Нехай E – банахів простір, що містить базис Шаудера. Тоді E – сепарабельний.

Proof.
Випадок дійсного нормованого простору.
Оберемо множину $A = \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \mid x_k \in \mathbb{Q} \right\}$.
Нехай $x \in E$, тоді за умовою, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ єдиним чином. Нехай задане $\varepsilon > 0$. Тоді на кожному з $\left(x_k - \dfrac{\varepsilon}{\|e_k\| 2^k}, x_k + \dfrac{\varepsilon}{\|e_k\| 2^k} \right)$ існує раціональне число $y_k \in \mathbb{Q}$. Оберемо $y \in A$ так, що $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$.
Позначимо $x^{(n)}, y^{(n)}$ за часткову суму ряда (перші n додаються). Тоді
$\|x^{(n)} - y^{(n)}\| = \left\| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) e_k \right\| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|(x_k - y_k) e_k\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \|e_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k}$.
Далі спрямовуємо $n \to \infty$. Тоді $x^{(n)} \to x, y^{(n)} \to y$. Після чого отримаємо $\|x - y\| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.
Отже, A скрізь щільна множина, ну тобто $\bar{A} = E$.

Випадок комплексного нормованого простору.

Оберемо множину $A = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \mid x_k = \alpha_k + i\beta_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q} \right\}$. Далі плюс-мінус аналогічно. ■

Remark 2.4.3 Якщо зробити *клік* сюди, то тут буде стаття про приклад сепарабельного банахового простору, який не містить базис Шаудера. Доведено П. Енфло. Власне, це означає, що зворотне твердження не працює.

Theorem 2.4.4 Простір l_p містить базис Шаудера. Причому цей базис матиме вигляд $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, де кожний $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{на } i\text{-ій позиції}}, 0, \dots)$.

Proof.
I. *Існування.*

Фіксуємо елемент $x \in l_p$, де $x = (x_1, x_2, \dots)$ та $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$. Покладемо елемент (що є частковою сумою) $s_n = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ та доведемо, що послідовність $\{s_n, n \geq 1\}$ – фундаментальна. При $n > m$

$$\|s_n - s_m\|_p = \|(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n, 0, \dots)\|_p = \left(\sum_{k=m+1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Фундаментальність $\{s_n\}$ випливає зі збіжності числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$. Оскільки l_p – повний простір, то $\{s_n\}$ – збіжний, тобто $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ збігається до деякого елемента. Зокрема доведемо, що $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = x$. Дійсно,

$$\|x - s_n\|_p = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_p = \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Знову зі збіжності числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ випливає бажане.

II. *Єдиність.*

!Припустимо, що $x = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$ – друге представлення. Тоді отримаємо $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) e_k = 0$. Звідси отримаємо $\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) e_k \right\| = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$. Єдина можливість тут – це $x_k = y_k$ при всіх $k \in \mathbb{N}$ – суперечність! ■

2.4.2 Простір, що спряжений до l_p

Theorem 2.4.5 Нехай $p, p' > 1$ таким чином, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тоді для будь-якого лінійного неперервного функціонала f на l_p існує елемент $(f_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{p'}$, такий, що $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k$ для всіх $x \in l_p$.

Proof.
Нехай $f \in (l_p)'$ (тобто лінійний неперервний функціонал). Тоді звідси отримаємо:

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \right) = f\left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) \overset{f(e_k) \overset{\text{покл.}}{=} f_k}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k.$$

Доведемо, що $(f_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{p'}$. Для цього підберемо елемент $y \in l_p$ ось таким чином, щоб $f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k f_k \overset{\text{був рівний}}{=} \sum_{k=1}^{n} |f_k|^{p'}$.

Можна для цього взяти елемент $y = \left(|f_1|^{p'-1}e^{-i\arg f_1}, \dots, |f_n|^{p'-1}e^{-i\arg f_n}, 0, 0, \dots\right)$. Оскільки f обмежений, то звідси $|f(y)| \leq \|f\|\|y\| = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} ||f_k|^{p'-1} \cdot e^{-i\arg f_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p}}$.
Маючи щойно отриману нерівність та рівність трошки вище, отримаємо
$\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{p'} \leq \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p}} \implies \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|f\|, \forall n \in \mathbb{N}$.
Остання оцінка стверджує, що ряд збіжний, внаслідок чого $(f_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{p'}$. ■

Theorem 2.4.6 І навпаки: для кожного $(f_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{p'}$ рівність $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k$ визначає лінійний та неперервний функціонал на l_p.

Proof.
Нехай $(f_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{p'}$. Завдяки нерівності Гьольдера, отримаємо:
$|f(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = c\|x\|_p < +\infty$.
Отже, f – обмежений та $\|f\| \leq c$. Як доводиться лінійність, цілком зрозуміло.

До речі, під час минулого доведення ми довели нерівність $c \leq \|f\|$. Маючи ще тут нерівність $c \leq \|f\|$, звідси випливатиме, що $\|f\| = c$, тобто $\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$. ■

Множину всіх лінійних та обмежених функціоналів на l_p позначатимемо за $(l_p)'$. Ці дві теореми стверджують, що $(l_p)' \cong l_{p'}$ ізометричним чином. Адже ми маємо $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k$, який задає ізоморфізм. (TODO: додумати).

2.4.3 Простір, що спряжений до l_1

Theorem 2.4.7 Простір $(l_1)' \cong l_\infty$ ізометричним чином. Ізоморфізм між ними встановлюється формулою $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k$.

Proof.
Нехай $(f_k)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$. Визначимо функціонал $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k$, який вже ясно, що лінійний. Залишилося довести обмеженість.
$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k\right| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|f\|_\infty \|x\|_1$.
Із цього всього ми встановили $l_\infty \subset (l_1)'$.
Нехай $f \in (l_1)'$, тобто лінійний та обмежений функціонал. Аналогічним чином отримаємо, що $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k$, де $f_k = f(e_k)$. Тепер хочемо $(f_k)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$. Дійсно це спрацює, бо
$\|f\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |f(e_k)| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f\|\|e_k\|_1 = \|f\| \sup\{1, 1, \dots\} = \|f\| < \infty$.
Причому ми також довели, що $\|f\| = \|f\|_\infty$. ■

2.4.4 Простори, що спряжені до l_∞

Remark 2.4.8 $(l_\infty)' \supsetneq l_1$.

Дійсно, нехай $(f_k)_{k=1}^{\infty} \in l_1$, тоді функціонал $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k,\ x \in l_\infty$ все одно лінійний, а обмеженість доводиться, завдяки оцінки

$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k x_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|.$

Отже, довели вкладення, при цьому ми ще довели $\|f\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$.

Якщо покласти такий $x \in l_\infty$, де $x_k = e^{-i \arg f_k}$, то взагалі отримаємо $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = \|f\|_1$.

Remark 2.4.9 Тепер чому це вкладення лише в одну сторону.
Розглянемо лінійну множину $C \subset l_\infty$, яка містить збіжні послідовності комплексних чисел. Визначимо $f(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$ для кожного $x = (x_1, x_2, \dots) \in C$. Цілком ясно, що це лінійний функціонал.
Обмеженість випливає з оцінки $|f(x)| = \left|\lim_{k\to\infty} x_k\right| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = \|x\|$.
Отже, $f \in C'$ (лінійний та неперервний функціонал), причому $\|f\| \leq 1$. Ми можемо продовжити функціонал f до функціонала $F \in (l_\infty)'$ зі збереженням норми, за теоремою Гана-Банаха. Функціонал F не можна записати як $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$. Представимо, що можна. Маємо послідовність $x \in C$, ліміт не зміниться при змінні скінченного числа членів, тобто $F(x) = f(x)$ залишиться таким самим. Проте із іншого боку, зміниться $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.

2.4.5 Простір, що спряжений до $L_p, 1 < p < \infty$.

Theorem 2.4.10 Нехайй $1 < p < \infty$ та $p' > 1$, причому $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Також задано $(X, \lambda, \mathcal{F})$ – вимірний простір, де λ – σ-скінченна міра. Простір $(L_p)' \cong L_{p'}$ ізометричним чином. Ізоморфізм $l\colon (L_p)' \to L_{p'}$ задається наступним чином:
$l(x) = \int_X h(q)x(q)\,d\lambda(q)$.
Доведення див. в pdf теорії міри.

2.4.6 Простір, що спряжений до $C(K)$

Припустимо, що K – метричний компакт та $\mathfrak{B}(K)$ – борельова σ-алгебра.

Definition 2.4.11 Заряд ω на вимірній множині $(K, \mathfrak{B}(K))$ назвемо **регулярним**, якщо

$$\omega_+, \omega_- \text{ – обидва регулярні}$$

Позначення: $W(K)$ – множина регулярних зарядів.

Remark 2.4.12 $W(K)$ буде векторним простором. Також якщо покласти $\|\omega\| = |\omega|(K)$, де $|\omega|$ – повна варіація заряда, то тоді ми отримаємо нормований простір. Причому $W(K)$ – банахів додатково.

Theorem 2.4.13 Теорема Маркова
$(C(K))' \cong W(K)$ ізометричним чином. Ізоморфізм $l\colon (C(K))' \to W(K)$ задається таким чином:
$l(x) = \int_K x(q)\,d\omega(q)$.
Без доведення. Наведу частинний випадок даної теореми.

Theorem 2.4.14 Теорема Ріса
Для кожного функціонала $l \in (C([0,1]))'$ існує фукнція g обмеженої варіації, для якої l можна представити через інтеграл Рімана-Стілт'єса таким чином:
$l(X) = \int_0^1 x(t)\,dg(t)$, причому $V(g; [0,1]) = \|l\|$.
Без доведення.

2.5 Вкладення нормованих просторів

Theorem 2.5.1 Нехай E – лінійний нормований простір. Тоді $E \subset E''$, під другою множиною мається на увазі друге спряження, тобто $E'' = (E')'$. При цьому $\|x\|_E = \|x\|_{E''}$.

Proof.
Для зручності елементи простору E позначимо через $x, y, \dots$; елементи простору E' – через $l, m, \dots$; елементри простору E'' – через $L, M, \dots$
Визначимо відображення φ ось так: кожному $x \in E$ поставимо в відповідність $\varphi(x) = L_x \in E''$. При цьому ми покладемо $L_x(l) = l(x)$ при всіх $l \in E'$.
Доведемо, що L_x – лінійний та неперервний функціонал. Нехай $l, m \in E', \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, тоді звідси $L_x(\lambda l + \mu m) = (\lambda l + \mu m)(x) = \lambda l(x) + \mu m(x) = \lambda L_x(l) + \mu L_x(m)$. Далі маємо
$|L_x(l)| = |l(x)| \leq \|l\| \cdot \|x\|$.
Отже, довели бажане, причому ми отримали оцінку $\|L_x\| \leq \|x\|$.
Тепер доведемо, що саме φ – лінійне відображення. Нехай $x, y \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, тоді ми хочемо довести рівність $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$, або що теж саме $L_{\lambda x + \mu y} = \lambda L_x + \mu L_y$. Така рівність має виконуватися для кожного функціонала $l \in E'$. Дійсно,
$L_{\lambda x + \mu y}(l) = l(\lambda x + \mu y) = \lambda l(x) + \mu l(y) = \lambda L_x(l) + \mu L_y(l) = (\lambda L_x + \mu L_y)(l)$.
Доведемо, що φ – ін'єктивне відображення. !Припустимо, що $x \in \ker\varphi$ та $x \neq 0$. Тоді за наслідком теореми Гана-Банаха, існує функціонал $l \in E'$, для якого $\|l\| = 1,\ l(x) = \|x\|$. Звідси $L_x(l) = l(x) = \|x\| \neq 0$, тобто $L_x \neq 0$. Це означає лише, що $x \notin \ker\varphi$ – суперечність!
Залишилося довести, що $\|x\| = \|L_x\|$. Точніше, залишилося $\|x\| \leq \|L_x\|$. При $x = 0$ все ясно. При $x \neq 0$, знову за наслідком Гана-Банаха, існує функціонал $l \in E'$, для якого $\|l\| = 1,\ l(x) = \|x\|$. Тоді $\|x\| = l(x) = L_x(l) \leq \|L_x\|\|l\| = \|L_x\|$.
Отже, $\varphi\colon E \to E''$ – лінійне та ін'єктивне відображення, що зберігає норму. Значить, E ізометрично ізоморфний $\operatorname{Im} E \subset E''$. Отже, кожний елемент $x \in E$ можемо ототожнити з його елементом $L_x \in E''$. Звідси отримаємо вкладення $E \subset E''$ та рівність $\|x\|_E = \|x\|_{E''}$. ■

Definition 2.5.2 Задано E – банахів простір.
Простір E називають **рефлексивним**, якщо

$$E'' = \varphi(E),$$

де $\varphi\colon E \to E''$, який задавали під час доведення теореми.

Example 2.5.3 Зокрема рефлексивними будуть такі простори: l_p та L_p при $1 < p < \infty$.
Також скінченновимірний простір E буде рефлексивним.

Example 2.5.4 Водночас нерефлексивними будуть такі простори: $l_1,\ l_\infty,\ L_1,\ L_\infty$ (останні два нерефлексивні при $\dim L_1 = \infty$, $\dim L_\infty = \infty$; $C(K)$ (буде нерефелексивним, якщо K нескінченна множина).

Theorem 2.5.5 Теорема Банаха-Штайнгауза
Задано E – банахів простір та $(l_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність функціоналів з E'. Припустимо, що $\forall x \in E$: $(l_n(x))_{n=1}^\infty$ – обмежена послідовність. Тоді $(\|l_n\|)_{n=1}^\infty$ (послідовність норм) – обмежена.
Дана теорема носить назву 'принцип рівномірної обмеженості'.

Proof.
Нехай $\forall x \in E : (l_n(x))_{n=1}^\infty$ – обмежена послідовність. Доведемо, що існує замкнений шар $B[a; r]$, де множина $\{l_n(x), x \in B[a; r]\}_{n=1}^\infty$ обмежена.
!Припустимо навпаки, що множина $\{l_n(x)\}_{n=1}^\infty$ не обмежена в жодному замкненому кулі (як наслідок, в жодному відкритому кулі).
Візьмемо довільну відкриту кулю $B(x_0; r_0)$, де ось ця множина $\{l_n(x), x \in B(x_0; r_0)\}_{n=1}^\infty$ не обмежена. Це, що знайдуться $x_1 \in B(x_0; r_0)$ та $n_1 \in \mathbb{N}$, для яких $|l_{n_1}(x_1)| > 1$. Оскільки l_{n_1} неперервний, то нерівність $|l_{n_1}(x)| > 1$ виконується в деякому околі $B(x_1; r_1)$ (?). За необхідністю, зменшимо радіус r_1 таким чином, щоб $B[x_1; r_1] \subset B(x_0; r_0)$, причому сам радіус $r_1 \overset{\text{зобов'язаний}}{\leq} \dfrac{r_0}{2}$ (дійсно, можна підібрати $r_1 = \dfrac{r_0 - \rho(x_0, x_1)}{2}$).
Ця множина $\{l_n(x), x \in B(x_1; x_1)\}$ теж не обмежена. Тоді знайдуться $x_2 \in B(x_1; x_1)$ та $n_2 > n_1$, для яких $|l_{n_2}(x_2)| > 2$. Аналогічно нерівність $|l_{n_2}(x)| > 2$ виконуватиметься в деякому замкненому

шарі $B[x_2; r_2] \subset B(x_1; r_1)$, причому $r_2 \overset{\text{зобов'язаний}}{\leq} \dfrac{r_0}{2^2}$.

$\vdots$

Продовжуючи процес, отримаємо послідовність замкнених шарів $B[x_0; r_0] \supset B[x_1; r_1] \supset \dots$, причому $r_k \to 0$, числа $n_1 < n_2 < \dots$ такі, що $|l_{n_k}(x)| > k$ при $x \in B[x_k; r_k]$. За теоремою Кантора, існує точка $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Звідси випливає, що $|l_{n_k}(x^*)| > k$ при всіх k – суперечність! Бо послідовність $(l_{n_k}(x^*))_{k=1}^{\infty}$ мала б бути обмеженою за початковими умовами.
Висновок: існує шар $B[a; r]$, де множина $\{l_n(x), x \in B[a; r]\}$ обмежена. Тобто $\exists c' > 0 : \forall x \in B[a; r], \forall n \in \mathbb{N} : |l_n(x)| \leq c'$. Досить буде довести, що множина $\{l_n(x), x \in B[0; 1]\}$ обмежена. Для кожного $x \in B[0; 1]$ покладемо $x' = rx + a$, тоді $x = \dfrac{1}{r}(x' - a)$. Оскільки $x' \in B[a; r]$, то $|l_n(x')| < c'$.
Звідси
$|l_n(x)| = \left| l_n\left(\dfrac{1}{r}(x' - a)\right)\right| = \dfrac{1}{r}|l_n(x') - l_n(a)| \leq \dfrac{1}{r}(|l_n(x')| + |l_n(a)|) \leq \dfrac{c' + c_a}{r} = c.$
Висновок: $\exists c > 0 : \forall x \in B[0; 1], \forall n \geq 1 : |l_n(x)| \leq c$. Проте умова $x \in B[0; 1]$ означає, що $\|x\| \leq 1$. Тобто нерівність $|l_n(x)| \leq c$ для всіх $\|x\| \leq 1$. Зокрема звідси $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} |l_n(x)| = \|l_n\| \leq c$. ■

Remark 2.5.6 Пояснення (?). Якби для кожного околу $B(x_1, r)$ (зокрема при $r = \dfrac{1}{n}$) існувала точка, де нерівність порушується, то ми би побудували послідовність, що прямує до x_1, при цьому ми би отримали $|l_{n_1}(x)| \leq 1$.

Remark 2.5.7 У теоремі Банаха-Штайнгауза умова того, що E – банахів, – суттєва.
Зокрема розглянемо простір c_0 – послідовності, що збігаються до нуля. Далі розглянемо підпростір $c_{00} \subset c_0$ – послідовності, де всі члени нулі, починаючи з деякого номера.

2.6 Про види збіжностей

Ми вже знаємо один тип збіжностей. Переформулюю ще раз означення, але доповню це одним словом в дужках.

Definition 2.6.1 Задано E – лінійний нормований простір.
Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ називається **(сильно) збіжною** до $x \in E$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$$

Позначення: $x_n \to x$.
Тобто сильна збіжність – це збіжність за нормою.

Definition 2.6.2 Нехай E – лінійний нормований простір.
Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ називається **слабко збіжною** до $x \in E$, якщо

$$\forall l \in E' : l(x_n) \to l(x)$$

Позначення: $x_n \overset{w}{\to} x$.

Proposition 2.6.3 Задано E – лінійний нормований простір та послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Тоді:
$x_n \to x \implies x_n \overset{w}{\to} x$.

Proof.
Дійсно, нехай $x_n \to x$, тобто звідси $\|x - x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Маючи це, отримаємо $\forall l \in E'$:
$|l(x_n) - l(x)| = |l(x_n - x)| \leq \|l\|\|x_n - x\| \to 0$. Таким чином, $x_n \overset{w}{\to} x$. ■

Якщо розглядати спряжений простір E', то крім сильної та слабкої збіжності існує ще один тип.

Definition 2.6.4 Нехай E – лінійний нормований простір.
Послідовність функціоналів $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$ називається **слабко* збіжною** до $l \in E'$, якщо

$$\forall x \in E : l_n(x) \to l(x)$$

Позначення: $l_n \overset{w^*}{\to} l$.

Proposition 2.6.5 Задано E – лінійний нормований простір та послідовність $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$. Тоді: $l_n \to l \implies l_n \overset{w}{\to} l \implies l_n \overset{w^*}{\to} l$.

Proof.
Імплікація $l_n \to l \implies l_n \overset{w}{\to} l$ була доведена вище. Залишилося $l_n \overset{w}{\to} l \implies l_n \overset{w^*}{\to} l$.
Нехай $l_n \overset{w}{\to} l$, тобто $\forall L \in E'' : L(l_n) \to L(l)$. Зафіксуємо елемент $x \in E$. Ми вже доводили, що $E \subset E''$, тобто $x \in E''$, де в цьому випадку $x = L_x$ такий, що $L_x(l) = l(x)$. Звідси
$l_n(x) = L_x(l_n) \to L_x(l) = l(x)$. Звідси випливає, що $l_n \overset{w^*}{\to} l$. ∎

Example 2.6.6 Зараз покажемо, чому в зворотний бік не працює.

$x_n \overset{w}{\to} x \not\Longrightarrow x_n \to x$.
Розглянемо простір l_p та зафіксуємо послідовність $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, де кожний e_j – елемент базиса Шаудера. Спочатку покажемо, що $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ слабко збігається. Зафіксуємо довільний функціонал $l \in (l_p)' = l_{p'}$, тобто $l = (l_1, l_2, \dots)$. Це означає, що $\sum_{j=1}^{\infty} |l_j|^{p'} < +\infty$, а тому за необхідною умовою, $|l_j|^{p'} \to 0 \implies l_j \to 0$. Із іншого боку, ми вже знаємо, що $l_j = l(e_j) \to 0 = l(0)$ при $j \to \infty$. Це як раз свідчить про те, що $e_j \overset{w}{\to} 0$.
Проте зауважимо, що $\|e_j - 0\| = \|e_j\| = 1 \not\to 0$. Це як раз означає, що $e_j \not\to 0$.

$f_n \overset{w^*}{\to} f \not\Longrightarrow f_n \overset{w}{\to} f$.
Розглянемо простір l_1 та зафіксуємо послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n =?$. Спочатку покажемо, що $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ слабко* збігається. Зафіксуємо довільний елемент $x \in c_0$. Значить, $x_j \to 0$ при $j \to \infty$. Оберемо $f_n = (-1)^n$. Тоді звідси $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_n^k(e_k)$. (TODO: не можу добити)

Proposition 2.6.7 Утім якщо E – рефлексивний лінійний нормований простір та $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$, тоді $l_n \overset{w}{\to} l \iff l_n \overset{w^*}{\to} l$.

Remark 2.6.8 Границя єдина за слабкою* збіжністю, слабкою збіжністю та сильною збіжністю.

Proposition 2.6.9 Задано E – банахів та послідовність $(l_n)_{n=1}^{\infty}$, яка слабко* збігається. Тоді $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ – обмежена.

Proof.
Дійсно, маємо $\forall x \in E : l_n(x) \to l(x)$, тобто числова послідовність $(l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ збігається, тоді обмежена. Значить, за теоремою Банаха-Штайнгауза, послідовність $(\|l_n\|)_{n=1}^{\infty}$ обмежена. ∎

Theorem 2.6.10 Задано E – банахів простір та $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$ – така послідовність, що $\forall x \in E$: $(l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна. Тоді $\exists l \in E' : l_n \overset{w^*}{\to} l$.

Proof.
Оскільки $\forall x \in E : (l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, то (як числова послідовність) вона збіжна. Визначимо функціонал $l(x) = \lim_{n \to \infty} l_n(x)$. Зважаючи на той факт, що l_n – лінійний, то l – лінійний в силу граничного переходу. Залишилося довести обмеженість.
При кожному $x \in E$ послідовність $(l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ (вже з'ясували) збіжна, тож обмежена. Але за теоремою Банаха-Штайнгауза, $\exists c > 0 : \forall n \geq 1 : \|l_n\| \leq c$. Значить, $\forall n \geq 1, \forall x \in E : |l_n(x)| \leq \|l\|\|x\| \leq c\|x\|$. Знову переходячи до границі, отримаємо $|l(x)| \leq c\|x\|$.
Отже, $\forall x \in E : l_n(x) \to l(x) \implies l_n \overset{w^*}{\to} l$. ∎

Theorem 2.6.11 Критерій слабкої* збіжності
Задано E – банахів та множина M – скрізь щільна в E. Нехай $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$.

$$l_n \overset{w^*}{\to} l \iff \begin{cases} \forall x \in M : l_n(x) \to l(x) \\ \exists c > 0 : \forall n \geq 1 : \|l_n\| \leq c \end{cases}.$$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $l_n \overset{w^*}{\to} l$. Тобто $\forall x \in E : l_n(x) \to l(x)$, зокрема $\forall x \in M$. Обмеженість норм $\|l_n\|$ автоматично виконується.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: ці дві умови. Ми хочемо $\forall y \in E : l_n(y) \to l(y)$.
При $x \in M$ маємо наступне:
$|l_n(y) - l(y)| \leq |l_n(y) - l_n(x)| + |l_n(x) - l(x)| + |l(x) - l(y)| \leq \|l_n\|\|y - x\| + |l_n(x) - l(x)| + \|l\|\|x - y\| \leq$
$\leq (c + \|l\|)\|x - y\| + |l_n(x) - l(x)|$.
Проте $\mathrm{Cl}(M) = E$, тож звідси $\forall y \in E : \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in M : \|x - y\| < \dfrac{\varepsilon}{2(c + \|l\|)}$. В силу першої умови, $\exists N : \forall n > N : |l_n(x) - l(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Значить, $|l_n(y) - l(y)| < \varepsilon$. ■

Remark 2.6.12 Судячи з доведення, в $\boxed{\Leftarrow}$ не обов'язково вимагати бути E повним. Також в формулюванні теореми досить вимагати, щоб M була тотальною в E.

Твердження, які потім вставлю в необхідне місце

Proof.
Достатньо довести, що всі норми еквівалентні до $\|\cdot\|_2$.

Нехай $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d\}$ – стандартний базис $\mathbb{R}^d$, тоді звідси $\vec{x} = \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{e}_i$.

$\left\| \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{e}_i \right\| \le \sum_{i=1}^{d} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \|e_i\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{d} |x_i| \|\vec{e}_i\| \right)^2} \overset{\text{К-Б}}{\le} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \|e_i\|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \|e_i\|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} =$
$\sqrt{\sum_{i=1}^{d} \|e_i\|^2} \|\vec{x}\|_2 = M \|\vec{x}\|_2$.
Зауважимо, що $M \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ та не залежить від $\vec{x}$. Отже, $\|\vec{x}\| \le M \|\vec{x}\|_2$.

Розглянемо тепер S – одинична сфера на $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. Відомо, що S – замкнена множина та обмежена. Тож за лемою Гейне-Бореля, S – компактна множина. Відомо, що відображення $\|\cdot\| \colon S \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ – неперервне відображення, тож вона досягає найменшого значення m для деякого $\vec{y} \in S$.
Припустимо $m = 0$, тоді звідси $\|\vec{y}\| = 0 \implies \vec{y} = \vec{0} \implies \vec{y} \notin S$ – неможливо. Отже, $m > 0$.
Значить, $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^d : \|\vec{y}\|_2 = 1 : \|y\| \ge m$. Треба довести те саме для інших векторів.
Якщо $\vec{x} = \vec{0}$, то це виконано. Тому $\vec{x} \ne \vec{0}$. Покладемо вектор $\vec{y} = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2}$, причому $\|\vec{y}\|_2 = 1$. Із цього випливає, що $\|\vec{y}\|_2 \le m \implies m\|\vec{x}\|_2 \le \|\vec{x}\|$.

Всі інші норми будуть еквівалентними в силу транзитивності. ■

Definition 2.6.13 Задано X, Y – нормовані простори.
Вони називаються **ізоморфними**, якщо існує бієктивний лінійний оператор $A \colon X \to Y$, для якого

$$\forall x \in X : \|Ax\|_Y = \|x\|_X$$

Водночас такий оператор A називають **ізоморфізмом**.
Позначення: $X \cong Y$