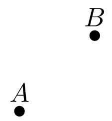
Зміст

1 Найпростіші геометричні фігури, їхні властивості

1.1 Точки та прямі

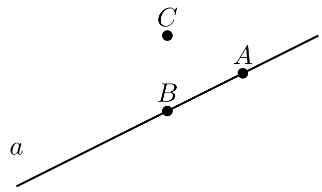
Будуть три поняття, яким зазвичай не дають означення. Але малюнок дає представлення, що це. Нижче представлені так звані **точки**. Їх ще називають найпростішою геометричною фігурою, що не можна розбити на частини.
Позначення: $A, B, C, \ldots$



На наступному малюнку побудована **пряма**. Такий геометричний об'єкт матиме такі властивості.

Axiom 1 Через будь-які дві точки можна провести єдину пряму. Та яку б пряму ми не провели, існують точки, що належать цій прямій, та існують точки, що не належать цій прямій.

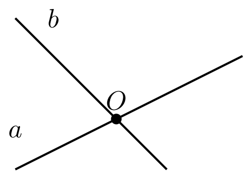
Позначення: $a, b, \ldots$



В цьому малюнку маємо пряму a або ще називають пряму AB, яка проведена через точки A,B.

Точку, яка належить прямій, позначатимемо так: $A \in a, B \in a$.
Точку, яка належить прямій, позначатимемо так: $C \notin a$.

Definition 1.1.1 Дві прямі (кажуть) **перетинаються**, якщо вони мають спільну точку.



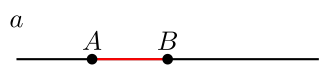
Прямі a, b мають спільну точку O. Отже, a, b перетинаються.

Theorem 1.1.2 Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають лише одну спільну точку.

Proof.
Задано дві прямі a, b, що перетинаються в спільній точці O_1.
!Припустимо, що O_2 – ще одна спільна точка. Але тоді через ці дві точки O_1, O_2 проведені дві різні прямі (і саме a, b), коли за властивістю прямої, лише єдина пряма можлива. Суперечність!
(малюнку не буде, бо неможливо таку ситуацію уявити.) ■

1.2 Відрізок, довжина

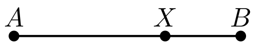
Definition 1.2.1 Задана пряма a, що проходить через т. A, B.
Відрізком назвемо частину прямої, що обмежена двома точками, які називають **кінцями**.
Позначення: AB



Червоним маємо відрізок AB, де точки A, B – два кінця.

Зрозуміло, що для кожних двох точок буде існувати єдиний відрізок, оскільки між ними існує єдина пряма.

Definition 1.2.2 Задан відрізок AB.
Точку X назвемо **внутрішньою**, якщо вона лежить між кінцями відрізка.



Точка X є внутрішньою відрізка AB.

Ще кажуть, що точка X **розділяє** відрізок AB. Також кажуть, що точки A, B **лежать по різні сторони** від точки X. Також кажуть, що точки A, X **лежать по одну сторону** від точки B.

Таким чином, відрізок AB містить всі точки, що лежать між A, B, а також самі т. A, B.

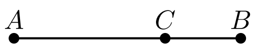
До прямої дамо ще одну таку властивість. Вона про взаємне розташування точок на прямій.

Axiom 2 Серед трьох точок, що лежать на одній прямій, лише одна з них лежить між двома точками.

Для того щоб виміряти **довжину** відрізка, треба буде задати **відрізки одиничної довжини**.
Зазвичай це: 1см, 1м, 1дм.
Наприклад, вимірюють довжину відрізку, завдяки лінійці. Там відрізок одиничної довжини 1см.
На відрізку має бути така властиість:

Axiom 3 Кожен відрізок має довжину більше нуля. Якщо точка C – внутіршня точка відрізка AB, то довжину відрізка AB можна знати таким чином:

$$AB = AC + CB$$

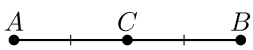


Example 1.2.3 Нехай відомо, що точки A, B, C лежать на одній прямій. Також відомо, що $AB = 4.3$см, $AC = 7.5$см, $BC = 3.2$см.
Уже відомо, що точно серед цих точок лише одна лежить між іншими.
Якщо A лежить між B, C, то тоді $BC = BA + AC$, але тоді $3.2 = 4.3 + 7.5$, що хибно.
Якщо C лежить між A, B, то тоді $AB = AC + CB$, але тоді $4.3 = 7.5 + 3.2$, що хибно.
Єдиний варіант тоді залишається – це коли точка B лежить між A, C.

Definition 1.2.4 **Відстанню** між точками A, B називають довжину відрізка AB.
Якщо ці точки збігаються, то відстань $= 0$.

Definition 1.2.5 **Серединою** відрізка AB називають таку внутрішню точку C, що

$$AC = CB$$

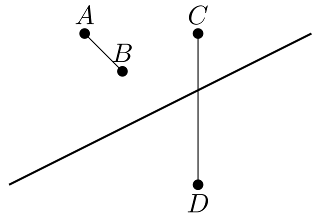


Двома міні палками позначають, що ці відрізки рівні за довжиною.

1.3 Півплощина

Площину можна сприймати як стіл нескінченної довжини, де малюються всі геометричні фігури.
Якщо намалювати пряму (яка нескінченна), то планується, щоб вона мала таку властивість:

Axiom 4 Пряма розбиває площину на дві півплощини.



На малюнку точки A, B, C лежать на одній півплощині. Водночас точки C, D лежать на різних півплощинах. Відрізок AB не перетинає пряму, тому що A, B лежать на одній півплощині. Відрізок CD водночас перетинає пряму, оскільки C, D лежать на різних півплощинах.

1.4 Промінь, кут, вимірювання кутів

Definition 1.4.1 Задано пряму AB. Позначимо деяку точку O.
Променем або **півпрямою** називають частину прямої, всі точки яких лежать по одну сторону з точкою O. Точка O називається **початком** променя.

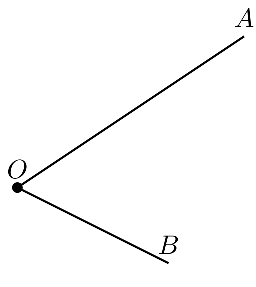
На першому малюнку два промені: OA та OB. На другому один промінь: OA або OB (можна один з двох варіантів назвати).

Definition 1.4.2 Два промені називаються **доповняльними**, якщо вони мають спільний початок і лежать на одній прямій.

У попередньому малюнку, першому, промені AO, OB - доповняльні. Тому що спільний початок O та, об'єднавши, отримаємо пряму AB.

Example 1.4.3 Задано відрізок AB та точка C, що лежить на відрізку. Серед півпроменів AB, AC, CA, CB назвати ці, що збігаються, та ці, що доповняльні.
Точка C лежить між A, B. Отже, точка A уже не може лежати між B, C. Отже, B, C лежать по одну сторону від точки A. Тому промені AB, AC збігаються.
Оскільки точка C лежить між A, B, то тоді A, B лежать по різні сторони від C. Також якщо об'єднати CA, CB, то ми отримаємо пряму AB. Отже, CA, CB – доповняльні.

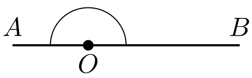
Definition 1.4.4 Задано два промені зі спільним початком O.
Кутом будемо називати фігуру, що утворена двома променями.
Позначення: $\angle BOA$, $\angle AOB$ або $\angle O$.



Промені OA, OB назвемо **сторонами кута**, а точку O назвемо **вершиною кута**.

Кут можна розглядати або всередині двох променів, або зовні. Зазвичай розглядається перший варіант.

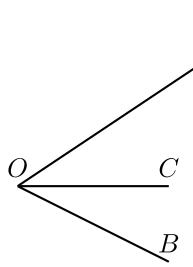
Definition 1.4.5 Кут назвемо **розгорнутим**, якщо сторони кутів – доповняльні промені.



Для того щоб виміряти **міру** кута, це можна зробити за допомогою транспортира, що повертає значення в градусах. Є ще так звані мінути (не хвилини), що дорівнюють $\frac{1}{60}$ градуса.

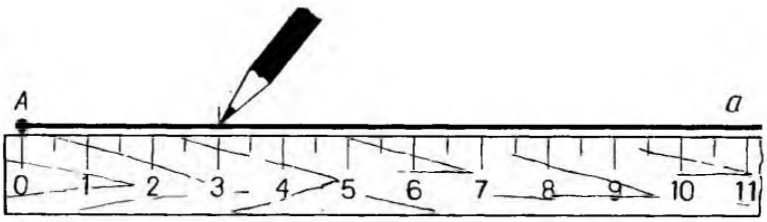
Axiom 5 Кожен кут має градусну міру більше нуля. Розгорнутий кут дорівнює $180°$. Якщо в $\angle AOB$ є промінь OC, що проходить між сторонами OA, OB, то градусну міру $\angle AOB$ можна записати таким чином:

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$$



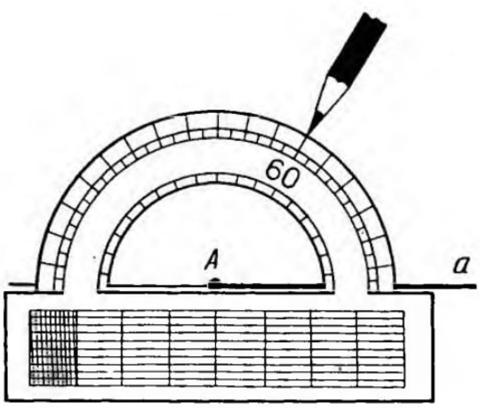
1.5 Відкладення відрізків та кутів

Axiom 6 На кожну півпряму від початкової точки можна відкласти лише один відрізок заданої довжини.



Маємо якусь пряму a та точку відліку A. Від неї ми можемо відкласти єдиний відрізок довжини 3см. Це зазвичай робиться за допомогою лінійки.

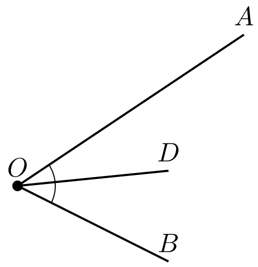
Axiom 7 Від кожній півпрямій в задану півплощину можна відкласти лише один кут із заданою градусною мірою, менший за $180°$.



Маємо якусь півпряму a, що починається з точки A. Півпряма розбиває площину на дві частини. На одну з півплощи можна відкласти єдиний кут градусної міри $60°$. Це зазвичай робиться за допомогою транспортира.

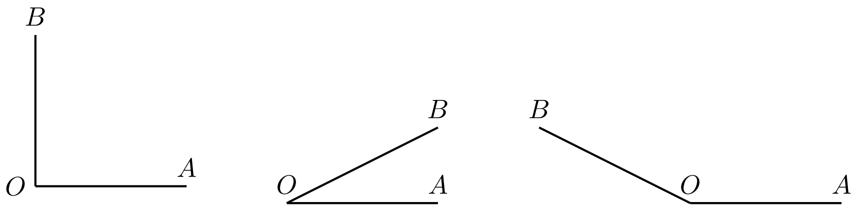
1.6 Основні види кутів

Definition 1.6.1 Бісектрисою кута називають промінь з початком у вершині кута, що ділить цей кут на два рівних кути.



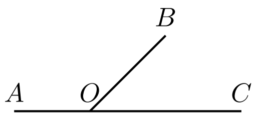
OD - бісектриса кута AOB. Звідси маємо $\angle AOD = \angle BOD$.

Definition 1.6.2 Задано кут $\angle AOB$. Кут називається:
- **прямим**, якщо $\angle AOB = 90°$;
- **гострим**, якщо $\angle AOB < 90°$;
- **тупим**, якщо $\angle AOB > 90°$.



1.7 Суміжні та вертикальні кути

Definition 1.7.1 Два кути називають **суміжними**, якщо одна сторона спільна, а також два інших промені є доповняльними.

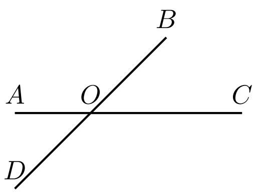


Тут кути $\angle AOB, \angle COB$ – суміжні, оскільки OB спільна сторона та AO, OC – доповняльні.

Theorem 1.7.2 Сума суміжних кутів $= 180°$.

Proof.
Повернімось до малюнку. Хочемо: $\angle AOB + \angle COB = 180°$.
Ці кути – суміжні. Отже, OA, OB – доповняльні. А тому $\angle AOC = 180°$, бо він – розгорнутий.
А також $\angle AOC = \angle AOB + \angle COB$. Остаточно, $\angle AOB + \angle COB = 180°$. ∎

Definition 1.7.3 Два кути називають **вертикальними**, якщо сторони одного кута – доповняльні промени других сторін.



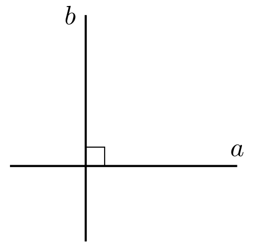
Тут кути $\angle AOD, \angle COB$ - вертикальні, бо сторони AO, OD – доповняльні до OC, OB.

Theorem 1.7.4 Вертикальні кути рівні.

Proof.
Повернімось до малюнку. Хочемо: $\angle AOD = \angle COB$.
$\angle AOD, \angle AOB$ – суміжні, а тому $\angle AOD + \angle AOB = 180^\circ \implies \angle AOB = 180^\circ - \angle AOD$.
$\angle AOB, \angle BOC$ – суміжні, а тому $\angle AOB + \angle COB = 180^\circ$
$\implies \angle COB = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - (180^\circ - \angle AOD) = \angle AOD$. ■

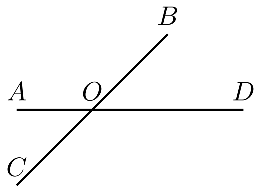
1.8 Перпендикулярні прямі

Definition 1.8.1 Задані прямі a, b.
Дві прямі називають **перпендикулярними**, якщо при їхньому перетині утвориться прямий кут.
Позначення: $a \perp b$.



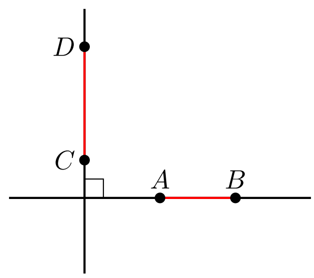
Якщо один кут прямий, то тоді суміжний та вертикальний кути – також прямі.

Definition 1.8.2 **Кутом між прямими** AD, BC будемо називати величину гострого кута, що утворився в результаті перетину.



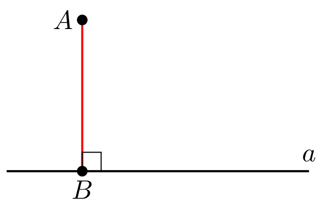
Тобто $\angle AOC$ або $\angle BOD$ – кут між прямими AD, BC
.

Definition 1.8.3 Задані відрізки AB, CD.
Вони називаються **перпендикулярними**, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.



Можна також розглядати перпендикулярність двох променів, променя та відрізка, прямої та променя, відрізка та прямої.

Definition 1.8.4 Задана пряма a та перпендикуляр AB, причому $B \in a$.
Тоді точка B називається **основою перпендикуляра**. Довжина AB називається **відстанню** від т. A до прямої a.



Можна довжину AB ще називати відстанню від т. A до променя BR, якщо $BR \in a$; або відстанюю від т. A до відрізка SG, якщо $SG \in a$.

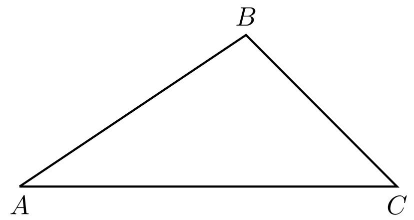
Theorem 1.8.5 Через кожну точку прямої можна провести єдину пряму, що перпендикулярна до даної.

Proof.
Нехай є пряма AB, на якій я позначу точку M. Відкладемо від променя MB кут CMB, який буде прямим. Отже, $CM \perp AB$.
!Припустимо, що існує ще одна пряма, якась пряма DM, що перпендикулярна AB. Нехай точка D лежить у тій самій півплощині відносно прямої AB, що й точка C. Отримали прямий кут, який відкладений також від прямої AB. Але від неї в заданій півплощині можна відкласти лише єдиний кут – суперечність! ■

2 Трикутники

2.1 Основні означення. Висота, медіана, бісектриса

Definition 2.1.1 Задано три точки A, B, C, що не лежать на одній прямій З'єднаємо ці точки відрізками AB, BC, CA.
Утворена геометрична фігура називається **трикутником**.
Позначення: $\triangle ABC$.



Точки трикутника називаються **вершинами**, а відрізки трикутника називаються **сторонами**.

Кут BAC (наприклад) ще називають **кутом трикутника при вершині** A.

Definition 2.1.2 Задано трикутник $\triangle ABC$.
Периметром трикутника назвемо таку величину:

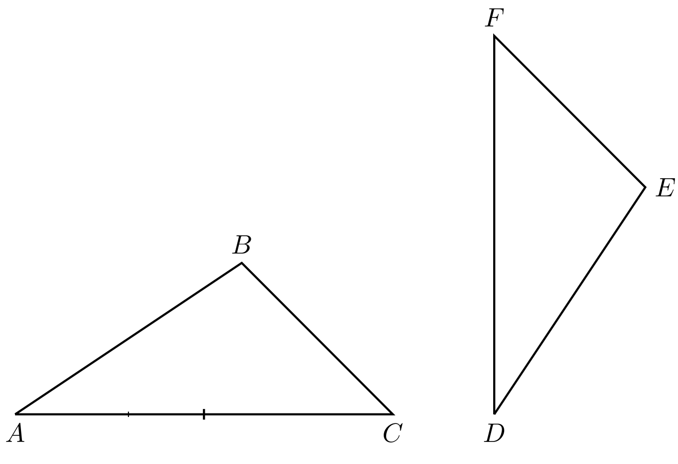
$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + CA$$

Тобто периметром трикутника називають суму всіх сторін трикутника.

Definition 2.1.3 Два трикутника $\triangle ABC$ та $\triangle DEF$ називаються **рівними**, якщо відповідні сторони та відповідні кути рівні. При цьому відповідні кути мають лежати проти відповідних сторін. Тобто:

$$\begin{array}{ccc} \angle A = \angle D & \angle B = \angle E & \angle C = \angle F \\ AB = DE & BC = EF & CA = FD \end{array}$$

Позначення: $\triangle ABC = \triangle DEF$.

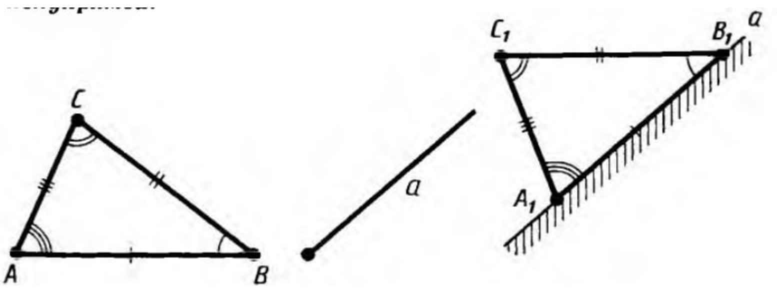


(TODO: доробити малюнок).

2.1.1 Існування трикутника, що рівний заданому

Нехай маємо $\triangle ABC$ та промінь a. Перемістимо $\triangle ABC$ таким чином, щоб вершина A сумістилася з початком променя, вершина B потрапила на промінь a, вершина C потрапила в задану півплощину відносно променя a та його продовження.
Вершини нового трикутника позначимо A_1, B_1, C_1.
$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

Axiom 8 Який б не був трикутник, існує рівний йому трикутник в заданому розташуванні відносно заданій півпрямій.

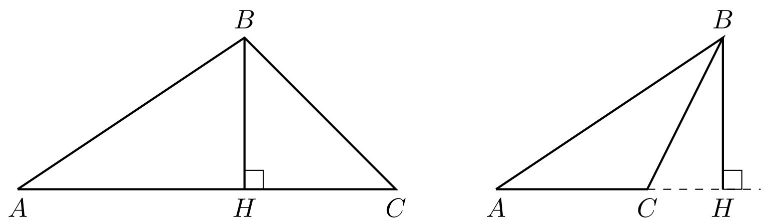


Theorem 2.1.4 Через точку, що не належить прямій, можна провести іншу єдину пряму, що перпендикулярна першій прямій.

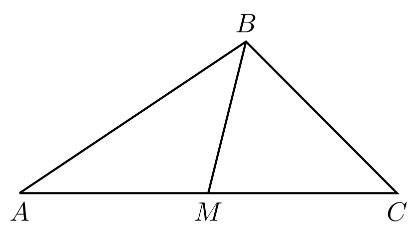
Proof.
Розглянемо пряму MN та точку $O \notin MN$. Покажемо, що ми можемо провести пряму через т. O, що перпендикулярна MN.
Для початку ми створимо кут $\angle OMN$. А далі відкладемо від променя MN єдиний кут O_1MN так, щоб $\angle OMN = \angle O_1MN$. Причому точку O_1 ми оберемо так, щоб $OM = O_1M$.
Проведемо пряму OO_1, яка перетинається з прямою MN. Позначу точкою перетину точку A. Лишилось довести, що $\angle MAO = 90°$.
Маємо $\triangle OMA$ та промінь MA. Тоді за **Axiom**, можна знайти рівний трикутний $\triangle O_2MA = \triangle O_1MA$. Із рівності отримаємо, що $\angle AMO_1 = \angle AMO_2$, а тому точка O_2 належить куту $\angle AMO_1$. Також із рівності отримаємо, що $MO_1 = MO_2$, тоді $MO_2 = MO$. Таким чином, точка O_1 співпадає з точкою O_2, а тому звідси $\triangle O_1MA, \triangle O_2MA$ збігаються. Оскільки $\triangle O_1AM = \triangle OAM$, то тоді $\angle MAO_1 = \angle MAO$, причому ці кути суміжні. Отже, $\alpha MAO = 90°$. Все, довели.

!Припустимо, що через т. $O \notin MN$ можна провести другу пряму, що перпендикулярна MN. (TODO). ■

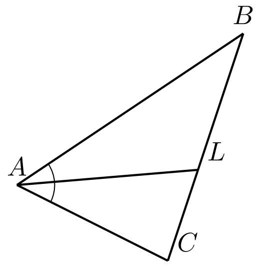
Definition 2.1.5 **Висотою** трикутника називають перпендикуляр, що опущений із вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону



Definition 2.1.6 **Медіаною** трикутника називають відрізок, що сполучає вершину трикутника з серединою протилежної сторони.



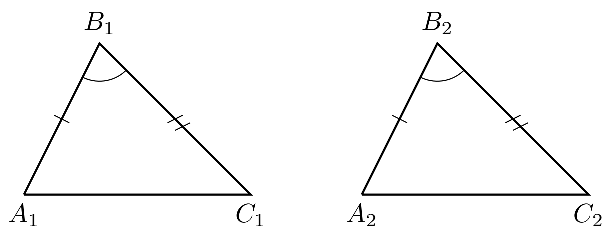
Definition 2.1.7 **Бісектрисою** трикутника називають бісектрису трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.



2.2 Ознаки рівності трикутників

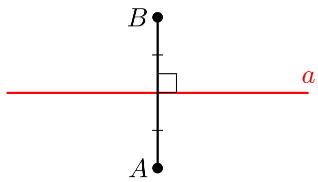
Theorem 2.2.1 Перша ознака
Нехай дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнює відповідно двом сторонам та куту між ними другого трикутника. Тоді ці трикутники рівні.

Proof.
Задані $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$. Нехай буде $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$.



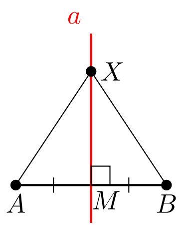
Оскільки $\angle B_1 = \angle B_2$, то ми накладемо промені $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle A_2B_2C_2$ таким чином, щоб B_1A_1 сумістився з B_2A_2 та B_1C_1 сумістився з B_2C_2.
Оскільки $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$, то тоді сторони теж сумістяться. Отже, трикутники повністю сумістяться $\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$. ■

Definition 2.2.2 Серединним перпендикуляром відрізка називають пряму, що перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину.



Theorem 2.2.3 Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців його відрізка.

Proof.
Задано пряму a - серединний перпендикуляр відрізка AB. Оберемо будь-яку точку $X \in a$. Хочемо довести, що $AX = BX$.

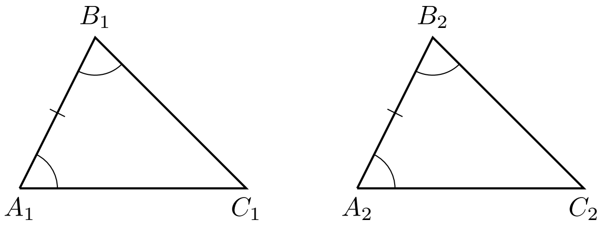


Із точки X проведемо AX та BX. На малюнку будуть $\triangle AMX$ та ΔBMX. Про них відомо, що $AM = MB$, існує спільна сторона MX та $\angle AMX = \angle BMX$. Отже, за першою ознакою, $\triangle AMX =$

$\triangle BMX$.
Остаточно, $AX = BX$. ■

Theorem 2.2.4 Друга ознака
Нехай сторона та прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють стороні та прилеглим до неї кутам другого трикутника. Тоді ці трикутники рівні.

Proof.
Задані $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$. Нехай буде $A_1B_1 = A_2B_2, \quad \angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$.

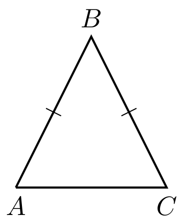


Оскільки $A_1B_1 = A_2B_2$, то накладемо $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle A_2B_2C_2$ таким чином, щоб C_1, C_2 лежали на одній півплощині відносно A_2B_2. Оскільки $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$, то звідси промені B_1C_1, B_2C_2 співпадають та промені A_1C_1, A_2C_2 співпадають. Отже, точка C_1 суміститься з C_2.
Таким чином, трикутники повністю сумістяться, а тому $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$. ■

Ще сюди повернемось

2.3 Рівнобедрені трикутники

Definition 2.3.1 Рівнобедреним трикутником називають трикутник з двома однаковими сторонами.



Сторони AB, BC називають **бічними сторонами**. Сторону AC називають **основою**.
Точку B називають **вершиною рівнобедреного трикутника** .

Definition 2.3.2 Рівностороннім трикутником назвемо трикутник з всіма рівними сторонами.

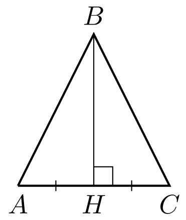
Theorem 2.3.3 Властивості
1. Кути при основі рівні;
2. Бісектриса, що проведена до основи, є медіаною та висотою.
Вказівка: із точки вершини провести бісектрису.

Corollary 2.3.4 Наслідок з властивостей
1. Проти рівних сторін лежать рівні кути;
2. Бісектриса, висота, медіана, що проведені з вершини, збігаються;
3. У рівностороннього трикутника всі кути рівні $60°$;
4. У рівностороннього трикутника бісектриса, висота, медіана, що проведени з однієї з трьох вершин, збігаються.

Definition 2.3.5 Різностороннім трикутником назвемо трикутник, де всі довжини сторін різні.

Theorem 2.3.6 Ознака рівнобедреного трикутника 1
Якщо медіана трикутника є висотою, то даний трикутник - рівнобедрений.

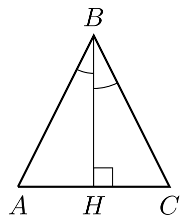
Proof.
Задано $\triangle ABC$ та BH - медіана та висота одночасно.



Із умови задачі ми маємо, що BH - серединний перпендикуляр відрізка AC. Тоді за **Th. 2.2.3.**, $AB = AC$. Отже, $\triangle ABC$ - рівнобедрений. ∎

Theorem 2.3.7 Ознака рівнобедреного трикутника 2
Якщо бісектриса трикутниика є висотою, то даний трикутник - рівнобедрений.

Proof.
Задано $\triangle ABC$ та BH - бісектриса та висота одночасно.



Із умови задачі ми маємо, що $\angle ABH = \angle CBH$, $\angle AHB = \angle CHB$ та спільна сторона BH. Отже, за II ознаком рівності, $\triangle AHB = \triangle CHB$, а тому $AB = BC$. Отже, $\triangle ABC$ - рівнобедрений. ∎

Theorem 2.3.8 Ознака рівнобедреного трикутника 3
Якщо в трикутнику два кути рівні, то даний трикутник - рівнобедрений.

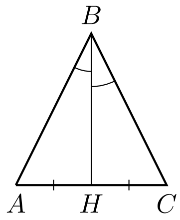
Proof.
Задано $\triangle ABC$ та $\angle A = \angle C$.
Проведемо серединний перпендикуляр a відрізка AC. Хочеться довести, що a проходить через т. B, щоб скористатись **Th. 2.3.6.**
!Припустимо, що a НЕ проходить через т. B. Позначимо точку перетину сторони AB як M, а центр відрізка AC як H.
Через точку C проведемо пряму CM. Тоді за **Th. 2.2.3**, $AM = MC$. Отже, $\triangle AMC$ - рівнобедрений. Тоді за наслідком, $\angle MAC = \angle MCA$. Нам також відомо, що $\angle C = \angle A = \angle MAC$, тому основна властивість кутів не виконується. Суперечність!
До речі, a може перетинати BC, а не AB, але аналогічно можна отримати суперечність.
Отже, a проходить через B, а тому a - висота й медіана $\triangle ABC$ одночасно. Отже, $\triangle ABC$ - рівнобедрений. ∎

Corollary 2.3.9 У трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони.

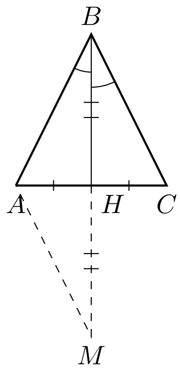
Corollary 2.3.10 Якщо в трикутнику всі кути рівні, то даний трикутник - рівносторонній.

Theorem 2.3.11 Ознака рівності трикутника 4
Якщо медіана трикутника є бісектрисою, то даний трикутник - рівнобедрений.

Proof.
Задано $\triangle ABC$ та BH - медіана та бісектриса одночасно.



BH уявимо як промінь. На ній позначимо точку M таким чином, щоб $BH = HM$. А далі проведемо пряму MA. Буде щось ось таке:



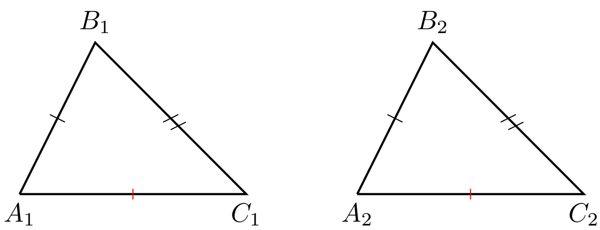
Маємо $BH = BM$ та $AH = HC$. А ще $\angle AHM = \angle CHB$ як вертикальні кути. Отже, за I ознакою рівності, $\triangle AHM = \triangle CHB$.

Тоді $AM = BC$, а також $\angle AMH = \angle HBC \overset{BM\text{- бісектриса}}{=} \angle ABH$. Якщо подивитись на $\triangle MAB$, то маємо, що $\angle AMB = \angle ABM$. Звідси $\triangle MAB$ - рівнобедрений за ознакою, а тому $AM = AB$.
$AM = BC, AM = AB \implies AB = BC$. Отже, $\triangle ABC$ - рівнобедрений. ■

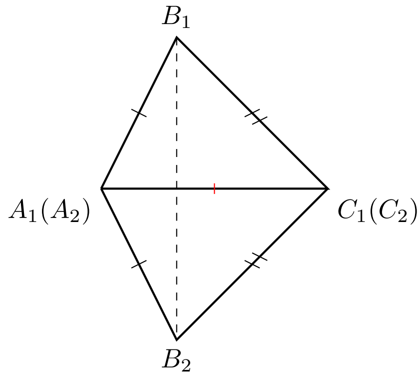
Повернімось до ознак рівності трикутника

Theorem 2.3.12 Третя ознака
Нехай три сторони одного трикутника дорівнюють трьом сторонам другого трикутника. Тоді ці трикутники рівні.

Proof.
Задано $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$. Нехай $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$, $C_1A_1 = C_2A_2$.

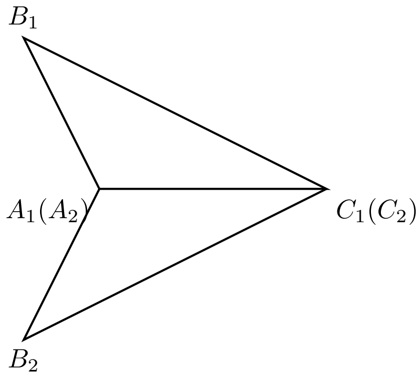


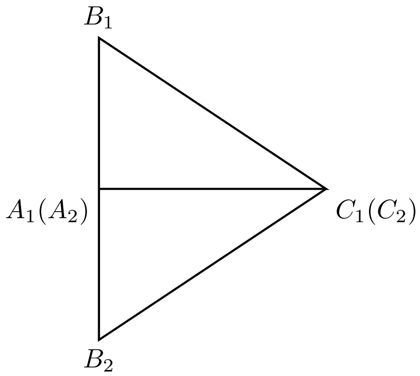
Оскільки $A_1C_1 = A_2C_2$, то ми можемо їх накласти. Зробимо це таким чином:



А далі проведемо B_1B_2. Матимемо два рівнобедрений трикутника: $\triangle B_2A_1B_1$ та $\triangle B_2C_1B_1$. У них кути при основі рівні, тобто $\angle A_1B_2B_1 = \angle A_1B_1B_2$ та $\angle B_2B_1C_1 = \angle B_1B_2C_1$.
Тому $\angle B_1 = \angle A_1B_1B_2 + \angle B_2B_1C_1 = \angle A_1B_2B_1 + \angle B_1B_2C_1 = \angle B_2$.
Отже, за I ознакою рівності, $\triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

Це ми розглянули випадок з гострокутними трикутниками. Якщо трикутники будуть прямокутними та тупокутними, то під час накладання двох трикутників картина вже буде іншою:

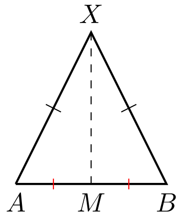




Але доведення аналогічні першому випадку. ■

Theorem 2.3.13 Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то ця точка належить серединном перпендикуляру відрізка.

Proof.
Задано точку X та відрізок AB. Відомо, що $XA = XB$.
На відрізку AB оберемо середину M. А далі проведемо XM. Тоді $\triangle AXM = \triangle BXM$ за III ознакою.
Тоді $\angle XMA = \angle XMB$, а ще вони - суміжні, тому $\angle XMA = 90°$.
Таким чином, $XM \perp AB$, тому X належить серединному перпендикуляру.

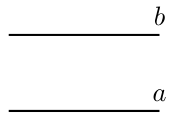


■

3 Паралельні прямі та знову про трикутники

3.1 Паралельні прямі

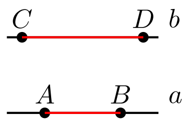
Definition 3.1.1 Задано прямі a, b.
Ці прямі називаються **паралельними**, якщо вони не перетинаються.
Позначення: $a \parallel b$.



Для паралельних прямих існує властивість:

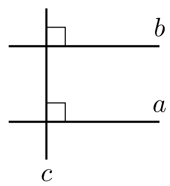
Axiom 9 Через точку, що не належить прямій, можна провести єдину пряму, паралельна заданій прямій.

Definition 3.1.2 Задані відрізки AB, CD.
Вони називаються **паралельними**, якщо вони лежать на паралельних прямих.



Theorem 3.1.3 Ознака паралельності
Дві прямі, що перпендикулярні третій прямій, паралельні.

Proof.
Задані відрізки a, b, c. Відомо, що $a \perp c, b \perp c$.



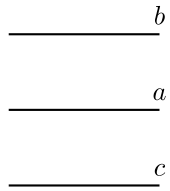
!Припустимо, що $a \not\parallel b$, тобто вони перетинаються в т. M. Тоді через т. M, що не належить прямій c, проходять дві прямі, що перпендикулярні: це a та b. Але відомо, що така пряма - єдина. Суперечність!
Таким чином, $a \parallel b$. ■

Corollary 3.1.4 Через точку, що не належить прямій, можна провести іншу єдину пряму, що паралельна першій прямій.

Proof.
Маємо пряму a та т. $M \notin a$. Відомо, що через т. M ми можемо провести пряму $b \perp a$. А також через цю ж т. M прямій b ми можемо провести пряму $c \perp b$.
Таким чином, ми отримали, що $a \parallel c$, а точка $M \in c$.
Єдиність прямої буде відповідати аксіома нижче. ■

Theorem 3.1.5 Якщо перші дві прямі паралельні третій, то перші дві прямі паралельні між собою.

Proof.
Задано $a \parallel c$, $b \parallel c$.



!Припустимо, що $a \nparallel b$, тоді вони перетинаються в т. M. Тоді через т. M, що не належить прямій c, проходять дві прямі, що паралельні c. Суперечність!
Таким чином, $a \parallel b$. ■

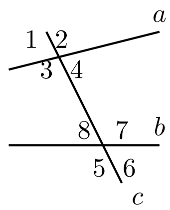
3.2 Ознаки та властивості паралельних прямих

Lemma 3.2.1 Якщо пряма перетинає першу пряму, що паралельна другій, то вона перетинає другу пряму.

Proof.
Задано $a \parallel b$ та c, що перетинає a.
!Припустимо, що c не перетинає b, тоді $c \parallel b$. Оскільки ще $a \parallel b$, то тоді $a \parallel c$. Суперечність! ■

Це я для того, щоб наступне означення було завжди коректним.

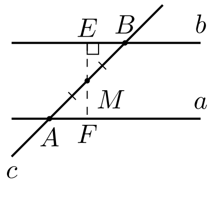
Definition 3.2.2 Задано прямі a, b. Також нехай пряма c перетинає прямі a, b. (перетин прямих a з b зараз не цікавить).
Тоді пряму c в цьому випадку називають **січною** прямих a, b.



Таким чином, у нашому випадку виникнуть вісім кутів.
Кути $3, 8$ та кути $4, 7$ називають **односторонніми**.
Кути $3, 7$ та кути $4, 8$ називають **різносторонними**.
Кути $1, 8$; кути $7, 2$; кути $4, 6$ та кути $3, 5$ називають **відповідними**.

Theorem 3.2.3 Якщо різносторонні кути, що утворені при петеині двох прямих січною, рівні, то ці прямі паралельні.

Proof.
Задані прямі a, b та січна c цих прямих. Відомо, що $\angle B = \angle A$.



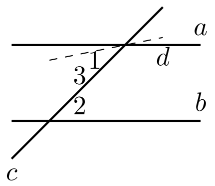
Якщо $c \perp a, c \perp b$, то автоматично $a \parallel b$. Тому ми розглядаємо інший випадок.
Позначу A, B - точку перетину c з прямимим a, b. На відрізку AB можна позначити M - середину відрізка. А з т. M можна провести перпендикуляр ME до прямої b. Також c перетинає a в т. F.
Отримали два трикутника: $\triangle EMB, \triangle FMA$, які рівні за II ознакою, бо $\angle MAF = \angle EBM$ як різносторонні, $\angle AMF = \angle EMB$ як вертикальні, та $AM = MB$.
Таким чином, звідси $\angle BEM = \angle MFA = 90°$. Тому мало того, що $c \perp b$, так ще $c \perp a$, а тому звідси $a \parallel b$. ■

Theorem 3.2.4 Якщо сума односторонніх кутів, що утворені при перетині двох прямих січною, дорівнює $180°$, то ці прямі паралельні.
Доведення зрозуміле.

Theorem 3.2.5 Якщо відповідні кути, що утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то ці прямі паралельні.
Доведення зрозуміле.

Theorem 3.2.6 Якщо дві прямі, що перетинаються січною, паралельні, то утворені різносторонні кути рівні.

Proof.
Задано $a \parallel b$ та січна c. Маємо $\angle 1, \angle 2$ - пара різносторонніх кутів.



!Припустимо, що $\angle 1 \neq \angle 2$. Проведемо пряму d через т. перетину з прямими a, c таким чином, щоб $\angle 3 = \angle 2$, де $\angle 2, \angle 3$ - пара різносторонніх кутів прямих d, b та січній c. Таким чином, $d \parallel b$, а тому через одну точку проходять дві прямі, a, d, що паралельні b. Суперечність!
Таким чином, $\angle 1 = \angle 2$. ■

Theorem 3.2.7 Якщо дві прямі, що перетинаються січною, паралельні, то сума двох утворених односторонніх кутів дорівнює $180°$.
Доведення зрозуміле.

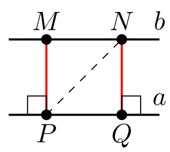
Theorem 3.2.8 Якщо дві прямі, що перетинаються січною, паралельні, то утворені відповідні кути рівні.
Доведення зрозуміле.

Corollary 3.2.9 Якщо пряма перпендикулярна до одній з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна до другої.

Перед тим як навести означення відстані між паралельними прямими, необхідно довести одну лему.

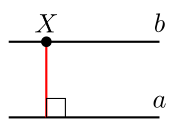
Lemma 3.2.10 Всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої.

Proof.
Задано $a \parallel b$ та відмічени точки $M, N \in a$. Далі провели перпендикуляр з т. M та т. N на пряму b.



Ми розглянемо $\triangle MPN$ та $\triangle PQN$. Вони рівні за II ознакою, бо PN - спільна сторона, $\angle MPN = \angle PNQ$ як різносторонні та $\angle PNQ = \angle MPN = \angle NPQ$ як різносторонні.
Отже, $MP = NQ$. ■

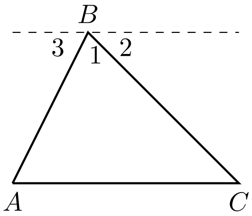
Definition 3.2.11 **Відстанню між двома паралельними прямими** називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.



3.3 Сума кутів трикутників, нерівність трикутника

Theorem 3.3.1 Сума кутів трикутника $= 180°$.

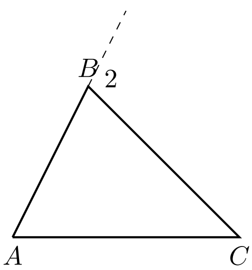
Proof.
Задано $\triangle ABC$.
Проведемо через т. B пряму, що паралельна відрізку AC. Тоді $\angle A = \angle 2$, $\angle C = \angle 3$ як різносторонні кути; $\angle B = \angle 1$. А також $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.
Таким чином, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.



■

Corollary 3.3.2 Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.

Definition 3.3.3 **Зовнішнім кутом** трикутника називають кут, що суміжний з кутом цього трикутника.



$\angle 2$ - один з прикладів зовнішнього кута.

Theorem 3.3.4 Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, що не суміжні з ним.
Зрозуміло.

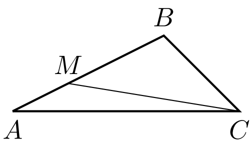
Corollary 3.3.5 Зовнішній кут трикутника більший за кожний з кутів трикутника, що не суміжні з ним.

Theorem 3.3.6 Нерівність трикутника
Кожна сторона трикутника менша за суму двох інших сторін.

Proof.
Поки без доведення, бо щось важко. ■

Theorem 3.3.7 У трикутнику проти більшої сторони лежить менший кут, і навпаки.

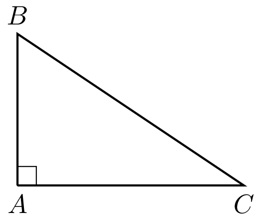
Proof.
Задано $\triangle ABC$. Відомо, що $AB > BC$.
Тоді на стороні AB можна знайти точку M, щоб $BM = MC$. Ми отримали рівнобедрений $\triangle MBC$.
Також ми маємо, що $\angle CMB$ - зовнішній кут $\triangle AMC$, а тому за **Crl. 3.3.5.**, $\angle CMB > \angle A$.
Далі $\angle C = \angle ACM + \angle CMB > \angle CMB < \angle A$.



Тепер нехай навпаки відомо, що $\angle C > \angle A$.
Тоді $\angle C$ можна розбити на суму двох кутів таким чином: $\angle C = \angle ACM + \angle CMB$, причому $\angle ACM = \angle A$. Отримаємо рівнобедрений $\triangle AMC$, з якого візьмемо $AM = MC$.
Ну а далі $AB = AM + MB = MC + MB \overset{\text{нер-ть трикутника}}{>} BC$. ■

3.4 Прямокутні трикутники

Definition 3.4.1 Прямокутним трикутником називають трикутник, якщо один з кутів - прямий.



Сторона, що напроти прямого кута, називають **гіпотенузою**. А решта - **катети**.

Theorem 3.4.2 Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника дорінюють відповідно гіпотенузі та катету другого прямокутного трикутника, то ці трикутники рівні.
Вказівка: накласти два катетами так, щоб утворився новий трикутник.

Інші ознаки рівності записувати не буду, бо вони максимально зрозумілі.

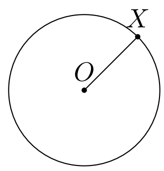
4 Коло та круг

4.1 Геометричне місце точок

Definition 4.1.1 Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, що мають певну властивість.

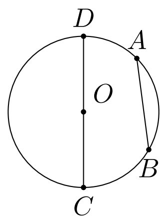
Щоб якусь множину точок назвати ГМТ, треба довести дві взаємно обернені теореми:
- кожна точка заданої множини має задану властивість;
- якщо точка має задану властивість, то вона належить даній множині.
(TODO)

Definition 4.1.2 Колом називають ГМТ, відстані від яких до заданої точки дорівнює заданому додатному числу.
Задану точку називають **центром кола**.
Відрізок, що сполучає точку кола з центром, називають **радіусом** кола.



Тут точка O – центр кола. Також OX – радіус кола.

Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають **хордою**.
Хорда, що проходить через центр кола, називають **діаметром**.



Тут AB – хорда та CD – діаметр.

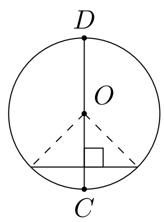
Remark 4.1.3 Діаметр кола вдвічі більший за його радіус.

Definition 4.1.4 Кругом називають ГМТ, відстані від яких до заданої точки не більші за дане додатному числу.

4.2 Властивості кола

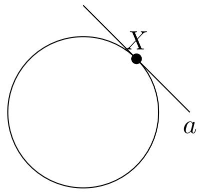
Theorem 4.2.1 Діаметр, що перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл. І навпаки: діаметр кола, що ділить хорду навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.

Proof.
Із центра кола треба провести радіуси таким чином. А далі все ясно в обох випадках.



■

Definition 4.2.2 Пряма, яка має з колом лише одну спільну точку, називають **дотичною** до кола.

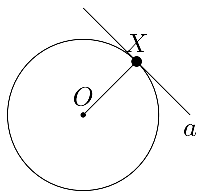


Тут пряма a – дотична.

Якщо відрізок належить прямій a, то кажуть, що відрізок **дотикається до кола**.

Theorem 4.2.3 Дотична до кола перпендикулярна радіусу, проведеного в точку дотику. І навпаки: якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіусу, що проведена до цієї точки, то ця пряма є дотичною.

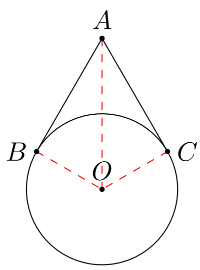
Proof.
Задано дотичну a, точка X – точка дотику. До цій точці проведемо радіус.
!Припустимо, що $OX \not\perp a$. Тоді з точки O опустимо перпендикуляр на пряму a. Точка, куди упав перпендикуляр, позначимо за M, причому M не співпадає з X.
Там утвориться прямокутний $\triangle OMK$, де $\angle M = 90^\circ > \angle X$, тоді звідси $OX > OM$. Суперечність! Тому що OM – це радіус плюс ще деякий відрізок.
Таким чином, $OX \perp a$.



А тепер нехай задано пряму a, точка $X \in a$ – точка кола. До цій точці проведемо радіус.
!Припустимо, що $X' \in a$ – теж точка кола, тобто ми цим кажемо, що a – НЕ дотична. Утвориться $\triangle XOX'$, де OX, OX' – радіуси. Але $\angle X = 90^\circ > \angle X' \implies OX > OX'$. Суперечність!
Таким чином, X – точка дотику, а точка a – дотична. ∎

Corollary 4.2.4 Якщо відстань від центра кола до дякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма – дотична.

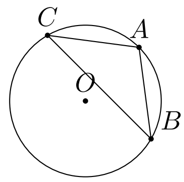
Example 4.2.5 Довести, що коли через дану точку до кола проведені дві дотичні, то відрізки дотичних, що сполучають дану точку з точками дотику, рівні.



Маємо дотичні AB, AC, які провели через одну точку A. Хочемо довести, що $AB = AC$.
Проведемо AO та радіуси BO, CO. Утворяться два прямокутні трикутники (тому що $BO \perp AB$ та $OC \perp AC$ за властивістю дотичної), причому $\triangle BOA = \triangle COA$ за катетом та гіпотенузою ($BO = OC$ як радіуси кола та AO – спільна гіпотенуза). Зокрема звідси $AB = AC$.

4.3 Описане та вписане кола трикутника

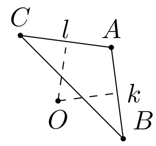
Definition 4.3.1 Коло називають **описаним** навколо трикутника, якщо коло проходить через всі вершини трикутника.



Remark 4.3.2 Центр описаного кола є рівновіддаленою від всіх вершин трикутника.

Theorem 4.3.3 Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Proof.
Задано $\triangle ABC$. Нам досить буде довести, що існує точка O, яка рівновіддалена від A, B, C.
Проведемо серединні перпендикуляри k, l сторін AB, AC. Позначимо O – точка перетину k, l (причому ця точка не обов'язково знаходиться всередині!).
Точка $O \in k$, тоді за **Th. 2.2.3**, $OA = OB$. Аналогічно $O \in l$, тоді за **Th. 2.2.3**, $OA = OC$.
Таким чином, $OA = OB = OC$, тоді O рівновіддалена від вершин трикутника.

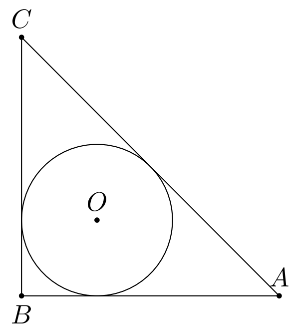


■

Corollary 4.3.4 Три серединних перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці.

Corollary 4.3.5 Центр кола, описаного навколо трикутника, - точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника.

Definition 4.3.6 Коло називають **вписаним** у трикутник, якщо коло дотикається всіх сторін трикутника.



Remark 4.3.7 Центр вписаного кола є рівновіддаленою від всіх сторін трикутника.

Theorem 4.3.8 У будь-який трикутник можна вписати коло.

Proof.
Задано $\triangle ABC$.
Проведемо бісектриси кута A, B. Позначимо O - точка перетину бісектрис. Через т. O проведемо перпендикуляри на AB, BC, AC Точки перетину перпендикулярів та сторін: M, N, P.
Точка $O \in$ бісектриса кута A, тоді $OM = OP$. Аналогічно $o \in$ бісектриса кута B, тоді $OM = ON$. (додати цю теорему).
Таким чином, $OM = OP = ON = r$, тоді O рівновіддалена від сторін трикутника. Звідси за **Crl 4.2.4**, ці сторони є дотичними, а точка O - центр точки вписаного кола. (TODO) ■

Corollary 4.3.9 Бісектриси трикутників перетинаються в одній точці.

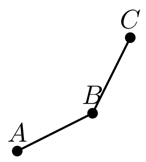
Corollary 4.3.10 Центр кола, вписаного в трикутник, - точка перетин бісектрис трикутника.

Remark 4.3.11 Із двох теорем випливає, що описати та вписати можна єдине коло. Просто тому що серединні перпендикуляри перетинаються в одній точці. Аналогічно з бісектрисами трикутника.

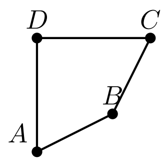
5 Чотирикутники

5.1 Вступ

Definition 5.1.1 Задані два відрізки AB,BC.
Точка B називається **сусідньою**, якщо вона є кінцем відрізка AB та BC.



Definition 5.1.2 Розглянемо точки A, B, C, D та побудуємо відрізки AB, BC, CD, DA. Причому сусідні відрізки не мають лежати на одній прямій, а також два несусідніх відрізки не мають спільних точок.
Утворена частина площини разом з відрізками називають **чотирикутником**.

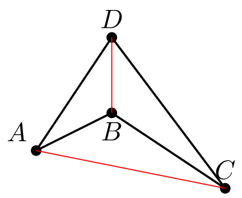


Чотирикутник $ABCD$.

Точки A, B, C, D називають **вершинами**. Відрізки AB, BC, CD, DA називають **сторонами**. Сторони, що мають сусідню точку, називають **сусідніми сторонами**. Інакше – **протилежними**. Вершини, які є кінцями однієї сторони, називають **сусідніми**. Інакше **протилежними**.

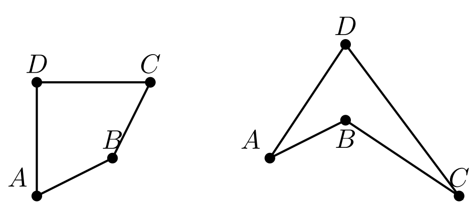
Definition 5.1.3 **Периметром чотирикутника** називають суму всіх сторін чотирикутника.

Definition 5.1.4 **Діагоналлю** називають відрізок, що сполучає несусідні вершини.



AC та BD – діагоналі чотирикутника $ABCD$.

Definition 5.1.5 Чотирикутник називається **опуклим**, якщо всі кути чотирикутника менші за розгорнутий. Інакше – **неопуклий**

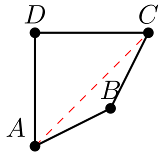


Ліворуч – опуклий. Праворуч – неопуклий (бо $\angle ABC > 180°$).

Theorem 5.1.6 Сума кутів чотирикутника дорівнює $360°$.
Вказівка: провести одну діагональ чотирикутника та розглянути утворені трикутники.

Corollary 5.1.7 У чотирикутнику лише один кут може бути більшим за розгорнутий.

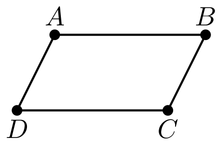
Example 5.1.8 Довести, що довжина будь-якої сторони чотирикутника менша від суми довжини трьох інших сторін.



Маємо чотирикутник $ABCD$. Наприклад, доведемо, що $AB < BC + CD + DA$.
Проведемо діагональ AC. Ми розбили на два трикутники, зокрема $\triangle ABC$ та $\triangle CAD$. У кожному трикутнику працює нерівність трикутника, зокрема маємо:
$AB < BC + AC \qquad AC < AD + DC$.
Поєднуючи дві нерівності, отримаємо $AB < BC + CD + DA$.

5.2 Паралелограм

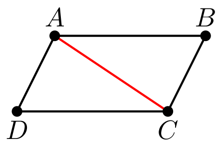
Definition 5.2.1 Паралелограмом називають чотирикутник, протилежні сторони яких паралельні.



Тут $AB \parallel CD$ та $AD \parallel BC$.

Theorem 5.2.2 Протилежні сторони рівні.

Proof.
Розглянемо паралелограм $ABCD$ та доведемо, що $AB = CD$ та $AD = BC$.
Для цього ми проведемо діагональ (наприклад AC).

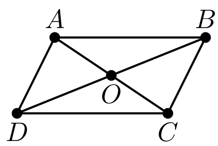


Оскільки $AB \parallel CD$, то варто зауважити, що $\angle DCA = \angle CAB$. Також оскільки $AD \parallel BC$, то звідси $\angle BCA = \angle DAC$. Нарешті, AC – спільна сторона. Ці три інформації дають нам те, що $\triangle ADC = \triangle CAB$ за II ознакою. Отже, ми отримали $AB = DC$, а також $AD = BC$. ■

Corollary 5.2.3 Протилежні кути рівні.
Крім рівності сторін із того трикутника, ми можемо отримати рівність кутів.

Theorem 5.2.4 Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

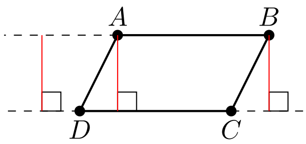
Proof.
Заданий паралелограм $ABCD$. Проведемо діагоналі AC, BD та позначимо O – точка перетину діагоналей.



Ми розглянемо $\triangle AOB$ та $\triangle DOC$. Маємо:
$\angle DCO = \angle BAO$ та $\angle CDO = \angle ABO$ – обидві пари кутів рівні як різносторонні. Також за щойно

доведеною теоремою, $DC = AB$. А тому $\triangle AOB = \triangle DOC$ за II ознакою.
Таким чином, $DO = OB$. Аналогічно доводиться, що $AO = OC$. ■

Definition 5.2.5 Висотою паралелограма називають перпендикуляр, що опущений з будь-якої точки прямої, що містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону.



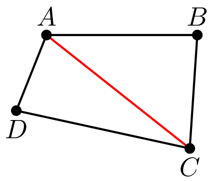
Червоним намальовані висоти.

Remark 5.2.6 Якщо згадати **Lm. 3.2.10.**, то можна з'ясувати, що ці висоти рівні.

5.3 Ознаки паралелограма

Theorem 5.3.1 Якщо в чотирикутники кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник – паралелограм

Proof.
Припустимо, що маємо чотирикутник $ABCD$, де $AB = DC$ та $AD = BC$.

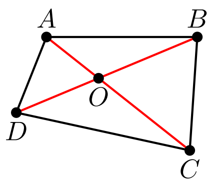


Схематично не схоже, що $AB = DC$ та $AD = BC$, але тим не менш.

Проведемо діагональ AC. Зауважимо, що $\triangle ACD = \triangle ACB$ за III ознакою (тому що $AB = CD$, $AD = BC$, AC – спільна). Отже, відповідні кути будуть рівними. Зокрема $\angle DAB = \angle ACB$ – пара різносторонніх кутів. Тоді за ознакою паралельності прямих, $AD \parallel BC$. Також $\angle CAB = \angle DCA$ – ще одна пара різносторонніх кутів. Знову за ознакою паралельності прямих, $DC \parallel AB$.
Отже, $ABCD$ – паралелограм (тому припущений на початку малюнок треба перемалювати). ■

Theorem 5.3.2 Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник – паралелограм.

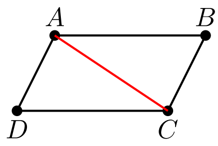
Proof.
Припустимо, що маємо чотирикутник $ABCD$, де $AO = OC$ та $BO = OD$.



Зауважимо, що $\triangle DOC = \triangle AOB$ за I ознакою рівності трикутників (тому що $AO = OC$, $BO = OB$, $\angle DOC = \angle AOB$ як вертикальні). Отже, зокрема $\angle DAC = \angle CAB$ – пара різносторонніх кутів.
Тоді за ознакою паралельності прямих, $AB \parallel DC$.
Аналогічним чином інша пара трикутників $\triangle AOD = \triangle BOC$, там же аналогічно доводиться, що $AD \parallel BC$.
Отже, $ABCD$ – паралелограм (знову тоді перемальовуємо рисунок). ■

Theorem 5.3.3 Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні та паралельні, то цей чотирикутник – паралелограм.

Proof.
Припустимо, що маємо чотирикутник $ABCD$, де $BC = AD$, а також $BC \parallel AD$.

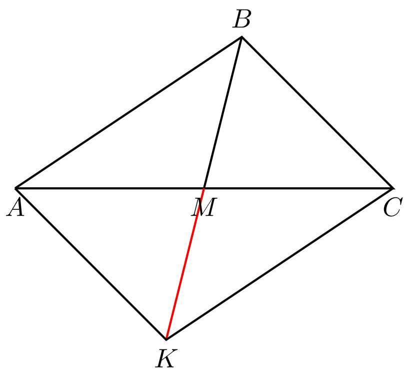


Проведемо діагональ AC. Зауважимо, що $\triangle ACB = \triangle ACD$ за I ознакою рівності трикутників (тому що $BC = AD$, AC – спільна сторона та $\angle BCA = \angle DAC$ як різносторонні кути при $BC \parallel AD$ та січній AC). Отже, ми довели $AB = CD$.
Оскільки в $ABCD$ дві протилежні сторони рівні, то $ABCD$ – паралелограм. ■

Theorem 5.3.4 Якщо в чотирикутнику кожні два протилежні кути рівні, то цей чотирикутник – паралелограм.

Proof.
Розглянемо чотирикутник $ABCD$ та припустимо, що $\angle A = \angle C$ та $\angle B = \angle D$. Тоді зауважимо, що $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Тобто $2\angle A + 2\angle B = 360°$, або ж $\angle A + \angle B = 180°$. Отже, сума односторонніх кутів $180°$, тому звідси $BC \parallel AD$, $AD \parallel Bc$.
Отже, $ABCD$ – паралелограм. ■

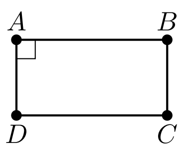
Example 5.3.5 Маємо трикутник $\triangle ABC$. На продовженні медіани BM за точку M відклали відрізок MK так, що $BM = MK$. Визначити, що за чотирикутник $ABCK$.



Отже, маємо чотирикутник $ABCD$. Зауважимо, що M – точка перетину діагоналей, яка ділить кожну з них навпіл. Тут $AM = MC$ (бо BM – медіана), а також $BM = MK$ за уvовою. Отже, $ABCD$ – паралелограм.

5.4 Прямокутник та ознаки прямокутників

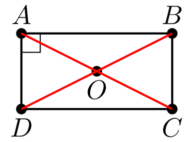
Definition 5.4.1 Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути – прямі.



Оскільки прямокутник – це теж паралелограм, то всі властивості паралелограма успадковуються на прямокутник. Крім того, тут будуть властивості, які притаманні не всім паралелограмам.

Theorem 5.4.2 Діагоналі прямокутника рівні.

Proof.
Маємо прямокутник $ABCD$. Проведемо діагоналі AC, BD.



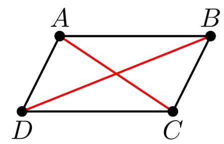
Далі розглянемо два прямокутні трикутники $\triangle ADC$ та $\triangle BCD$. Вони будуть рівними за двома катетами; одна пара катетів $AD = BC$ (прямокутник – паралелограм, а там протилежні сторони рівні), а катет BC спільний. Оскільки $\triangle ADC = \triangle BCD$, то зокрема $AC = BD$. ■

Theorem 5.4.3 Якщо один з кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм – прямокутник.

Proof.
Дійсно, маємо паралелограм $ABCD$ та припустимо $\angle A = 90°$. Тоді протилежний кут $\angle C = 90°$. Оскільки також $\angle B = \angle D$ та сума кутів чотирикутника $360°$, то ми отримаємо $\angle B = \angle D = 90°$. Отже, паралелограм $ABCD$ стане прямокутником. ■

Theorem 5.4.4 Якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм – прямокутник.

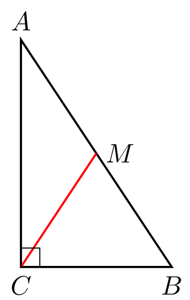
Proof.
Маємо паралелограм $ABCD$, у якого діагоналі $AC = BD$.



Зауважимо, що $\triangle ACD = \triangle BDC$ за III ознакою рівності ($AD = BC$ як протилежні, $AC = BD$ за умовою, DC спільна). Зокрема звідси кути $\angle D = \angle C$, але тоді всі чотири кути паралелограма рівні. Звідси отримаємо $4\angle C = 360° \implies \angle C = 90°$. Один з кутів прямий.
Отже, за попередньою теоремою, $ABCD$ – прямокутник. ■

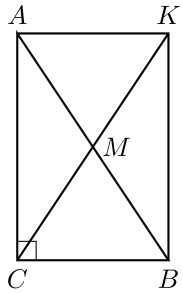
Example 5.4.5 Довести, що чотирикутник, всі кути якого прямі, буде прямокутником.
Спочатку доведемо, що чотирикутник буде паралелограмом, тому що протилежні кути рівні.
Тепер, у паралелограма якщо один з кутів прямий, то він стає автоматично прямокутником.

Example 5.4.6 Довести, що в прямокутному трикутнику медіана, яка проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.



Хочемо довести, що $CM = \dfrac{1}{2}AB$.

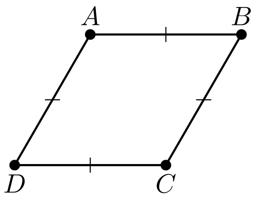
Ми можемо продовжити медіану, як це було зроблено на **Ex. 5.3.5**. Утворений чотирикутник $CAKB$ (як ми знаємо вже) буде паралелограмом.



Крім того, $CAKB$ стане прямокутником, оскільки існує один прямий кут. У прямокутника діагоналі рівні, зокрема $AB = CK$. Точка M ділить кожну діагональ на дві рівні частини. Зокрема $CM = MK = \frac{1}{2}AB$.

5.5 Ромб

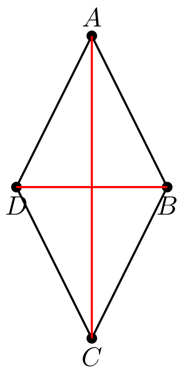
Definition 5.5.1 **Ромбом** називають паралелограм, у якого всі сторони – рівні.



Оскільки ромб – це теж паралелограм, то всі властивості паралелограма успадковуються на ромб. Крім того, тут будуть властивості, які притаманні не всім паралелограмам.

Theorem 5.5.2 Діагоналі ромбу перпендикулярні та є бісектрисами його кутів.

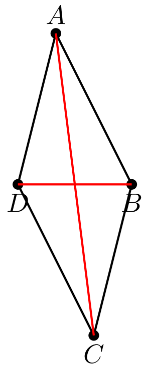
Proof.
Маємо ромб $ABCD$. Проведемо діагоналі AC, BD.



Зауважимо, що $\triangle ADC$ буде рівнобедреним, оскільки $AD = DC$. При цьому із точки D падає на сторону AC медіана, оскільки точка перетину діагоналей ділить діагоналі навпіл в паралелограмі. Але в рівнобедреному трикутнику медіана, що падає на основу, – бісектриса та висота водночас. Отже, діагональ $DB \perp AC$ та DB – бісектриса його кутів.
Аналогічно можна показати, що AC – бісектриса його кутів, якщо розглянути $\triangle DAB$. ■

Theorem 5.5.3 Якщо діагоналі паралелограму перпендикулярні, то цей паралелограм – ромб.

Proof.
Розглянемо паралелограм $ABCD$. Проведемо діагоналі AC, BD.



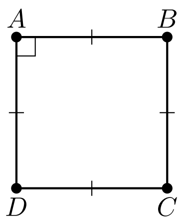
Припустимо, що діагоналі $AC \perp BD$. Розглянемо $\triangle ADC$. У цьому випадку із вершини D на сторону AC ми провели висоту та медіану одночасно. Значить, $\triangle ADC$ має бути рівнобедреним, а тому $AD = DC$. Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то $BC = AD = DC = AB$. Отже, $ABCD$ – ромб. ■

Theorem 5.5.4 Якщо діагоналі паралелограму є бісектрисами, то цей паралелограм – ромб.
Доведення аналогічне до попередньої (тільки цього разу в $\triangle ADC$ в нас буде бісектриса та медіана одночасно, а далі буквально те саме).

Example 5.5.5 Довести, що чотирикутник, усі сторони якого рівні, буде ромбом.
Чотирикутник стане автомативно паралелограмом, бо кожні дві протилежні сторони рівні.
Тоді паралелограм стане ромбом за означенням.

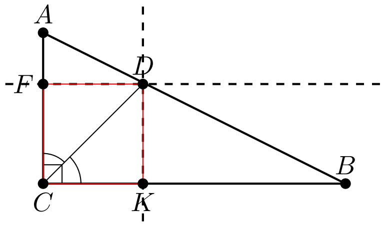
5.6 Квадрат

Definition 5.6.1 Квадратом називають паралелограм, у якого всі сторони та кути – рівні.



Remark 5.6.2 Тобто квадрат – це одночасно прямокутник та ромб.
Звідси випливає наступне. Щоб зрозуміти, чи буде паралелограм квадратом, треба скористатися одночасно ознаками ромба та прямокутника.

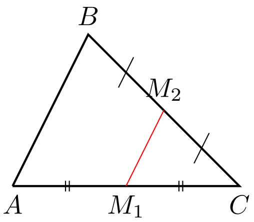
Example 5.6.3 У прямокутному трикутнику через точку перетину бісектриси прямого кута та гіпотенузи проведені прямі, що паралельні катетам. Довести, що утворений чотирикутник – квадрат.



Отже, ми хочемо довести, що $CFDK$ – квадрат.
Зауважимо, що $CFDK$ – паралелограм, за умовою задачі. Оскільки в нас існує один прямий кут $\angle C = 90°$, то цей паралелограм вже прямокутник. Діагональ CD є бісектрисою, так само FK буде бісектрисою (бо діагоналі прямокутника рівні). Отже, $CFDK$ буде й ромбом.
Значить, остаточно можна сказати, що $CFDK$ – квадрат.

5.7 Середня лінія трикутника

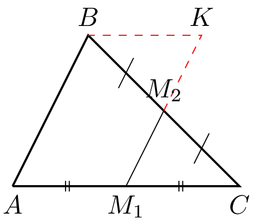
Definition 5.7.1 Середньою лінією трикутника називають відрізок, що сполучає середини двох його сторін.



Тут M_1M_2 відрізок, що є середньою лінією.

Theorem 5.7.2 Середня лінія трикутника, що сполучає середини перших двох сторін трикутника, паралельна третій стороні трикутника та дорівнює їй половині.

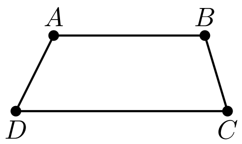
Proof.
Задано $\triangle ABC$ та M_1M_2 – середня лінія.
На прямій M_1M_2 позначимо точку K, щоб $M_1M_2 = M_1K$. І проведу відрізок KB.



Зауважимо, що $\triangle BM_2K = \triangle M_1M_2C$ за I ознакою рівності ($BM_2 = M_2C$ як середня лінія, $M_1M_2 = M_1K$ так обрали, $\angle BM_2K = \angle M_1M_2C$ як вертикальні). Значить, зокрема $\angle ACB = \angle CBK$ – пара різносторонніх кутів, тому $AC \parallel BK$. Також зауважимо, що $BK = M_1C = AM_1$. Протилежні сторони рівні, тому $ABKM_1$ – паралелограм. Зокрема звідси $AB \parallel M_1M_2 = \frac{1}{2}M_1K = \frac{1}{2}AB$. ■

5.8 Трапеція

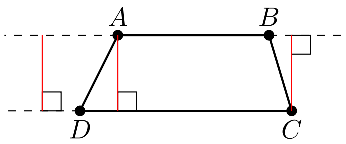
Definition 5.8.1 Трапецію називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а інші дві не паралельні.



Тут $AB \parallel CD$ та $AD \nparallel BC$.

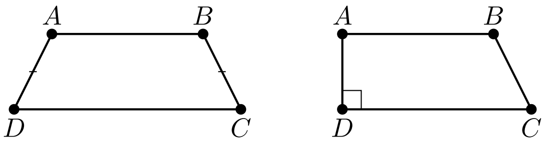
Сторони AB, CD називають **основами**. Сторони AD, BC називають **бічними сторонами**.
$\angle A, \angle B$ називають **кутами при основі** AB.

Definition 5.8.2 Висотою трапеції називають перпендикуляр, що опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, що містить другу основу.



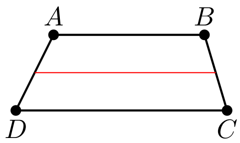
Червоним намальовані висоти.

Definition 5.8.3 Трапецію називають **рівнобічною**, якщо непаралельні сторони трапецій рівні. Трапецію називають **прямокутною**, якщо одна бічна сторона є висотою трапеції.



Ліворуч – рівнобічна трапеція. Праворуч – прямокутна трапеція.

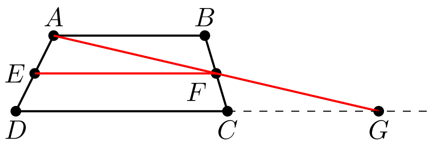
Definition 5.8.4 Середньою лінією трапеції називають відрізок, що сполучає середини їхніх бічних сторін.



Червона лінія – середня лінія.

Theorem 5.8.5 Середня лінія трапеція паралельна основам та дорівнює половині їхньої суми.

Proof.
Маємо трапецію $ABCD$. Спочатку проведемо середню лінію, яку позначу за EF. Після цього проведемо пряму, яка проходить через точку A та середину відрізка BC.



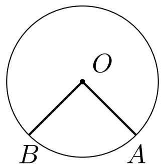
Доведемо, що в трикутнику $\triangle DAC$, лінію EF буде середньою. Точка E вже ділить AD навпіл, залишилося довести, що точка F ділить AG навпіл (тобто $AF = FG$). Це буде правдою, оскільки $\triangle ABF = \triangle CGF$ за II ознакою ($\angle AFB = \angle CFD$ як вертикальні; $\angle ABF = \angle FCG$ як різносторонні кути при паралельних прямих; $BF = FC$).

Отже, EF дійсно середня лінія $\triangle DAC$, звідси $EF = \dfrac{1}{2}DG$. Проте із рівності двох вищезгаданих трикутників випливає $AB = CG$. Таким чином, $DG = DC + CG = DC + AB$. Внаслідок чого отримаємо $EF = \dfrac{AB + CD}{2}$. Ну й також $EF \parallel DC \parallel AB$. ■

Theorem 5.8.6 Властивості рівнобічної трапеції
1) кути при кожній основі рівні;
2) діагоналі рівні;
3) висота трапеції, що проведена з вершини тупого кута, ділить основу трапецїх на два відрізки. Менший з них дорівнює половині різниці основ, а більший з них дорівнює половині суми основ.
Зрозуміло.

5.9 Центральні та вписані кути

Definition 5.9.1 Центральним кутом називають кут з вершиною в центрі кола.

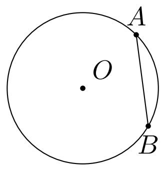


Тут $\angle AOB$ – центральний кут.

Ці точки ділять коло на дві **дуги**.
Також кажуть, що центральний кут AOB **спирається на дугу** AB.

Менша дуга AB має свою градусну міру і вважають її рівною за центральний кут.
Домовленність: градусна міра дуги всього кола дорівнює $360°$.
Тоді більше дуга AB дорівнює $360°$ мінус менша дуга AB.

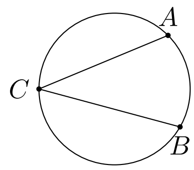
Ще прийнято казати, що хорда **стягує дугу**.



Тут хорда AB стягує дугу AB.

Взагалі, будь-яка хорда стягує дві дуги, сума яких $= 360°$.

Definition 5.9.2 **Вписаним кутом** називають кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають коло.

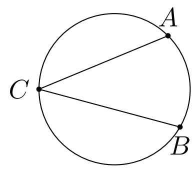


Тут $\angle ACB$ – вписаний кут.

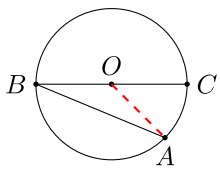
Також кажуть, що вписаний кут ACB **спирається на дугу** AB. Можна ще сказати, що вписаний кут ACB **спирається на хорду** AB.

Theorem 5.9.3 Градусна міра вписаного кута дорівнює половині градусної міри дуги, на яку він спирається.
Поки без доведення(TODO)

Proof.
Маємо коло та вписаний $\angle ABC$, який спираться на дугу AC. Хочем довести, що $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.
Центр кола ми позначимо за точку O. Доведення розіб'ємо на кілька випадків.

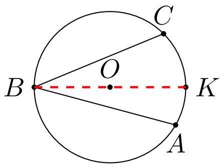


I. *Точка O належить одній зі сторін кута.*



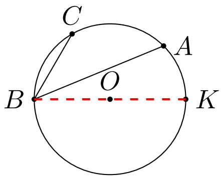
Проведемо радіус OA. Отримаємо рівнобедрений $\triangle AOB$. Маємо $\angle BOA = 180 - 2\angle ABC$. Отже, $\angle COA = \overset{\frown}{AC} = 2\angle ABC$.

II. *Точка O належить куту, але не належить жодній стороні.*



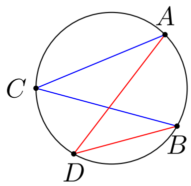
Проведемо діаметр BK. Зауважимо, що ми отримали два кути $\angle ABK$, $\angle KBC$, які були розглянуті в пункті I. Про них відомо, що $\angle ABK = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AK}$ та $\angle KBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{KC}$. Сумуючи їх, отримаємо $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.

III. *Точка O не належжить куту.*



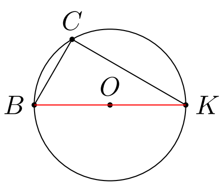
Проведемо діаметр BK. Зауважимо, що ми отримали два кути $\angle ABK$, $\angle KBC$, які були розглянуті в пункті I. Про них відомо, що $\angle ABK = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AK}$ та $\angle KBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{KC}$. Відніаючи їх, отримаємо $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$. ■

Corollary 5.9.4 Вписані кути, що опираються на одну дугу, рівні.



Червоний та синій кути рівні.

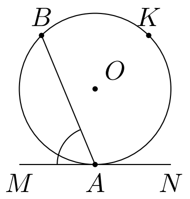
Corollary 5.9.5 Вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий.



Remark 5.9.6 Навпаки, до речі, теж: якщо вписаний кут – прямий, то він спирається на діаметр. !Якщо припустити, що вписаний прямий кут не спирається на діаметр, тобто центр кола O не належить стороні BK, то при проведенні радіусів BO, OK отримаємо трикутник, де один кут – розгорнутий, що суперечить!

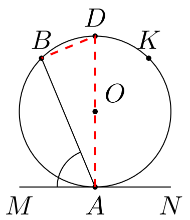
Proposition 5.9.7 Кут між хордою та дотичною дорівнює половині тієї дуги, куди дивиться кут.

Proof.
Припустимо маємо хорду AB та дотичну пряму MN. Задача: довести, що $\angle MAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ та $\angle NAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AKB}$.



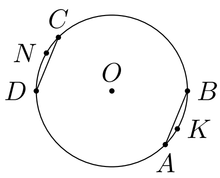
Нас цікавить зараз кут $\angle MAB$, а там пізніше знайдеться $\angle NAB$.

Проведемо діаметр AD. Значить, $\angle B = 90^\circ$, як кут, який спирається на діаметр. Зокрема звідси $\angle BDA + \angle BAD = 90^\circ$. Водночас $\angle MAB + \angle BAD = 90^\circ$, просто тому що дотична перпендикулярна діаметру. Звідси випливає, що $\angle MAB = \angle BDA = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.

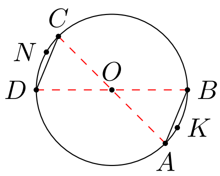


Тепер $\angle NAB = 180^\circ - \angle MAB = 180^\circ - \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 180^\circ - \dfrac{1}{2}\left(360^\circ - A\overset{\frown}{K}B\right) = \dfrac{1}{2}A\overset{\frown}{K}B.$ ■

Example 5.9.8 Маємо хорди AB, CD, причому $AB = CD$. Довести, що $A\overset{\frown}{K}B = C\overset{\frown}{N}D$.



Проведемо радіуси OA, OB, OC, OD. Утворені два трикутники $\triangle AOB = \triangle COD$ за III ознакою. Зокрема кути $\angle AOB = \angle COD$, а тому $A\overset{\frown}{K}B = C\overset{\frown}{N}D$.

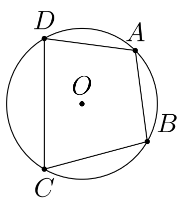


Не обов'язково, щоб тут (наприклад) AC був діаметром, так просто вийшло випадково.

Аналогічно можна довести, що якщо $A\overset{\frown}{K}B = C\overset{\frown}{N}D$, то звідси $AB = CD$.
Там тільки рівність трикутників уже буде через I ознаку.

5.10 Описане та вписане кола чотирикутника

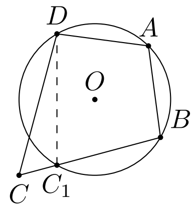
Definition 5.10.1 Коло називають **описаним** навколо чотирикутника, якщо коло проходить через всі вершини чотирикутника.



Theorem 5.10.2 У будь-який чотирикутник можна описати коло $\iff$ сума його протилежних кутів $= 180°$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: коло, що описане навколо чотирикутника.
$\angle A = \dfrac{1}{2}D\overset{\frown}{CB}$, а також $\angle C = \dfrac{1}{2}D\overset{\frown}{AB}$. Тоді
$\angle A + \angle C = \dfrac{1}{2}$дуга $DCB + \dfrac{1}{2}$дуга $DAB = \dfrac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.
Аналогічно доводиться, що $\angle B + \angle D = 180°$.

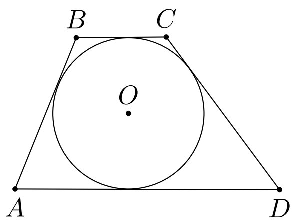
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: чотирикутник, де $\angle A + \angle C = 180°$ та $\angle B + \angle D = 180°$.
!Припустимо, що ми не можемо колом описати. Ми можемо описати коло навколо $\triangle ABD$. В нашому випадку C не належить колу, а тому можливі тут два випадки:
I. *Точка C лежить поза круга.*



Тоді пряма BC має точку перетину C_1 з колом. Тоді чотирикутник ABC_1D є описаним навколо кола, а тому за необхідною умовою, $\angle A + \angle DC_1B = 180°$. Одночасно $\angle A + \angle C = 180°$. Тому $\angle C = \angle DC_1B$. Водночас $\angle C + \angle CDC_1 = \angle DC_1B$. Суперечність!
Отже, цей випадок – неможливий.

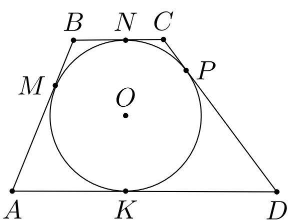
II. *Точка C лежить всередині круга.*
Аналогічними міркуваннями можна отримати суперечність!
Отже, навколо чотирикутника все ж таки можна описати коло. ■

Definition 5.10.3 Коло називають **вписаним** в чотирикутник, якщо коло дотикається всіх сторін чотирикутника.



Theorem 5.10.4 У будь-який чотирикутник можна вписати коло $\iff$ сума протилежних сторін рівні.

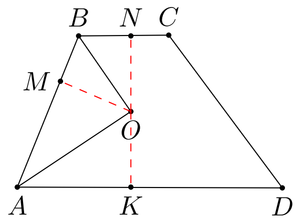
Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: коло, що вписане в чотирикутник. Позначимо точки дотику M, N, P, K як на малюнку.



Якщо скористатися результатом **Ex. 4.2.5**, то ми отримаємо, що $MB = BN$, $NC = CP$, $PD = DK$, $KA = AM$. Власне, тоді отримаємо $AB + CD = AD + BC$. Дійсно,

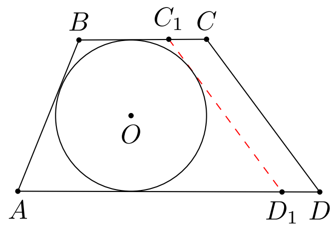
$AB + CD = (AM + MB) + (CP + PD) = (AM + PD) + (MB + CP) = (AK + KD) + (BN + NC) = AD + BC$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: чотирикутник, де $AB + CD = AD + BC$.
Спочатку проведемо бісектриси кутів $\angle A, \angle B$. Вони перетнуться в деякій точці O. Звідси випливатиме, що точка O рівновіддалена від сторін AB, BC, AD.



Тобто ці три червоні відрізочки рівні.

Наприклад, щоб довести $MO = ON$, треба розглянути прямокутні трикутники $\triangle MOB, \triangle BON$, які є рівними за гіпотенузою та гострим кутом. Аналогічно $MO = OK$ доводиться.
Отже, можна провести коло, що проходить через M, N, K. Тобто коло торкається AD, AB, BC. Треба довести ще, що воно торкається CD.
!Припустимо, що коло не торкається CD. У нас будуть два випадки.
I. *CD не має спільних точок з колом.*



Тобто ці три червоні відрізочки рівні.

Проведемо дотичну C_1D_1, причому таким чином, що $C_1D_1 \parallel CD$. Отримали чотирикутник ABC_1D_1, де вписане коло. Тому $AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1$ (1). Водночас $AB + CD = BC + AD$ (2) за дано.
Від рівняння (2) віднімемо (1) – отримаємо:
$CD - C_1D_1 = BC - BC_1 + AD - AD_1$.
Оскільки $BC - BC_1 = C_1C$ та $AD - AD_1 = D_1D$, то тоді отримаємо таку рівність:
$CD = CC_1 + DD_1 + C_1D_1$.
Суперечність! Тому що, насправді, $CD < CC_1 + DD_1 + C_1D_1$, за результатом **Ex. 5.1.8**.

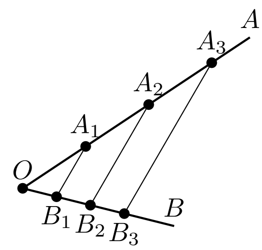
II. *CD має дві спільні точки з колом.*
Цілком аналогічними міркуваннями можна прийти до суперечності!
Отже, у чотирикутник можна вписати коло. ■

6 Подібність трикутників

6.1 Деякі додаткові теореми

Theorem 6.1.1 Теорема Фалеса
Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на одній стороні кута рівні відрізки, то вони також відтинають на другій стороні кута рівні відрізки.

Proof.
Задано $\angle AOB$ та прямі $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$, які між собою паралельні. Відомо, що $OA_1 = A_1A_2 = \ldots$. Хочемо довести, що $OB_1 = B_1B_2 = \ldots$



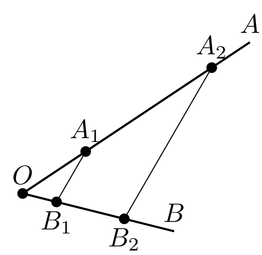
!Припустимо, що $OB_1 \neq B_1B_2$. Тоді в $\triangle OB_2A_2$ на стороні OB_2 точка B_1 не є центром відрізка. Нехай C_1 – центр відрізка OB_2. Проведемо середню лінію трикутника C_1A_1. Звідси випливає, що $C_1A_1 \parallel A_2B_2$. Але водночас $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, тобто через точку A_1 пройшли дві прямі, що паралельні іншій. Суперечність! Отже, $OB_1 = B_1B_2$.

!Припустимо, що $B_1B_2 \neq B_2B_3$. Тоді в трапеції $B_1A_1A_3B_3$ на стороні B_1B_3 точка B_2 не є центром відрізка. Нехай C_2 – центр відрізка B_1B_3. Проведемо середню лінію трапеції C_2A_2. Звідси випливає, що $C_2A_2 \parallel A_3B_3$. Але водночас $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, тобто через точку A_2 пройшли дві прямі, що паралельні іншій. Суперечність!
Отже, $B_1B_2 = B_2B_3$. Аналогічно доводиться, що $B_2B_3 = B_3B_4, B_3B_4 = B_4B_5, \ldots$. ■

Definition 6.1.2 Відношенням двох відрізків називають відношення їхніх довжин, виражених в одних й тих самих одиницях виміру.

Якщо $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A_1B_1}{C_1D_1}$, то кажуть, що AB та A_1B_1 **пропорційні** відповідно CD та C_1D_1.

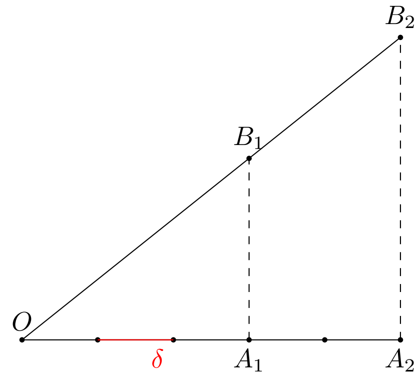
Theorem 6.1.3 Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, що утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, що утворилися на другій стороні кута.



Тобто теорема каже, що $\dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} = \ldots$
Доведення цієї теореми поза межами шкільної програми.

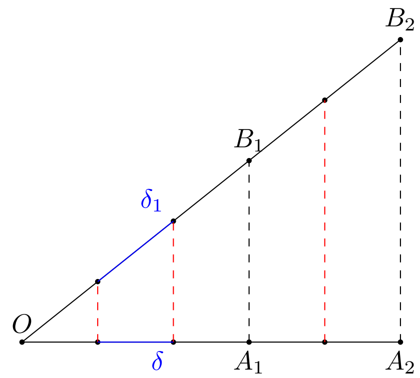
Proof.
Будемо доводити спочатку, що $\dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}$. Доведення розіб'ємо на дві частини.

I. *Випадок, коли для відрізків OA_1, A_1A_2 існує такий відрізок завдовжки δ, який укладається ціле число разів.*



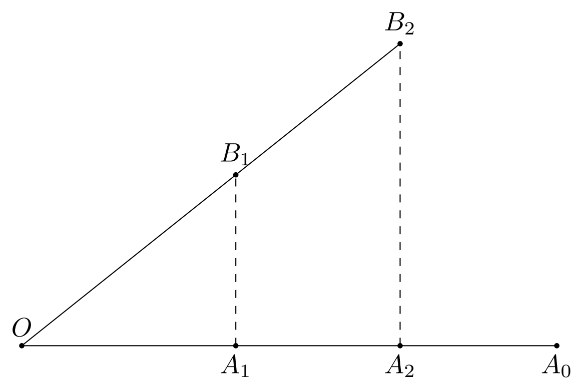
Наприклад, тут OA_1, A_1A_2 можна накласти відрізком довжини δ відповідно три та два рази.

Отже, маємо $OA_1 = m\delta$ та $A_1A_2 = n\delta$, де числа m, n – деякі натуральні.
Через утворені нові точки при накладанні OA_1, A_1A_2 проведемо прямі, що паралельні A_2B_2. За теоремою Фалеса ці прямі ділять відрізки OB_1, B_1B_2 відповідно на m, n рівних відрізків уже іншої довжини δ_1. Тобто $OB_1 = m\delta_1$ та $B_1B_2 = n\delta_1$.

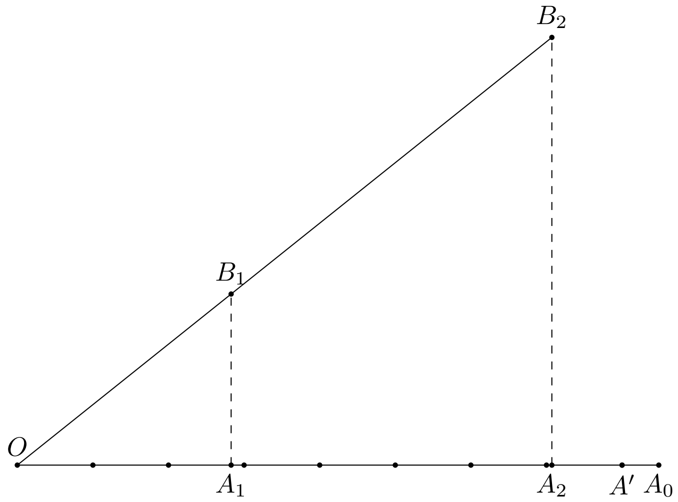


Маємо $\dfrac{OA_1}{A_1A_2} = \dfrac{m\delta}{n\delta} = \dfrac{m}{n}$, а також $\dfrac{OB_1}{B_1B_2} = \dfrac{m\delta_1}{n\delta_1} = \dfrac{m}{n}$. Звідси ми отримаємо $\dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}$.

II. *Випадок, коли для відрізків* OA_1, A_1A_2 *уже не існує такого відрізка.*
!Припустимо, що $\dfrac{OA_1}{OB_1} \neq \dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}$. Скажімо, нехай $\dfrac{OA_1}{A_1A_2} > \dfrac{OB_1}{B_1B_2}$. Розглянемо тоді відрізок $A_1A_0 = \dfrac{B_1B_2}{OB_1}OA_1$, причому за припущеною нерівністю $A_1A_0 > A_2A_1$.



Розділимо відрізок OA_1 на рівні частини довжини m таким чином, щоб $m < A_2A_0$. Далі накладемо ці відрізки довжиною m стільки разів, допоки остання точка не буде внутрішньою точка відрізка A_2A_0. Останню цю точку позначимо за A', яка існує, бо $m < A_2A_0$.



Далі через кожну утворену точку проведемо пряму, що паралельна B_1A_1. Ми прийшли до випадку I, коли для відрізків OA_1 та A_1A' існує відрізок, який укладається ціле число разів. Значить, $\dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{A_1A'}{B_1B'}$.

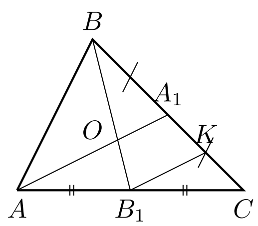
Але $A_1A_0 > A_1A'$, а також $B_1B' > B_1B_2$. Отримаємо тоді $\dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{A_1A'}{B_1B'} < \dfrac{A_1A_0}{B_1B_2}$. Значить, $A_1A_0 > \dfrac{B_1B_2}{OB_1}OA_1$, коли водночас $A_1A_0 = \dfrac{B_1B_2}{OB_1}OA_1$ – суперечність!

Інші дроби, наприклад, $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} = \dfrac{A_2A_3}{B_2B_3}$ можна отримати, міркуючи аналогічно. ■

Remark 6.1.4 Випадок II в теоремі точно може бути.
Наприклад, розглянемо відрізок $OA_1 = 2$ та $A_1A_2 = \sqrt{2}$. Якби існував відрізок завдовжки δ таким чином, що $OA_1 = m\delta$ та $A_1A_2 = n\delta$, то після ділення двох дожвин ми би отримали $\dfrac{OA_1}{A_1A_2} = \dfrac{m\delta}{n\delta}$.
Зокрема ми би отримали $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$. Проте оскільки $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, то ми прийшли до суперечності.

Theorem 6.1.5 Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини трикутника.

Proof.
Задано $\triangle ABC$. Маємо медіани AA_1, BB_1.

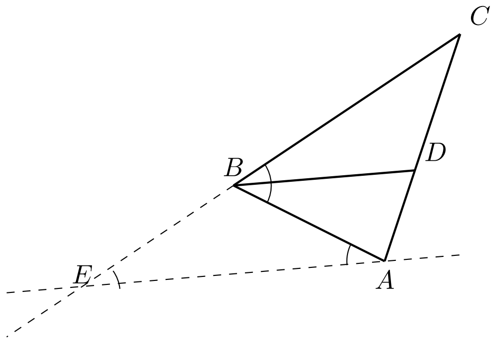


Через точку B_1 проведемо $B_1K \parallel AA_1$. Оскільки $AB_1 = B_1C$, то за теоремою Фалеса, $A_1K = KC$. Звідси $\dfrac{A_1C}{KC} = \dfrac{2}{1}$. Також оскільки $BA_1 = A_1C$, то звідси $\dfrac{BA_1}{A_1K} = \dfrac{A_1C}{A_1K} = \dfrac{2}{1}$.
Маємо $OA_1 \parallel B_1K$, тоді за попередньою теоремою, $\dfrac{BO}{OB_1} = \dfrac{BA}{A_1K} = \dfrac{2}{1}$.
Отже, AA_1, перетинаючи BB_1, ділить її у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини B. Можна аналогічно довести, що CC_1, перетинаючи BB_1, ділить її у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини B. Таким чином, медіани AA_1, BB_1, CC_1 проходять через одну точку O.

Можна тими же міркуваннями довести, що $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{2}{1}$ та $\dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{2}{1}$. ■

Theorem 6.1.6 Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.

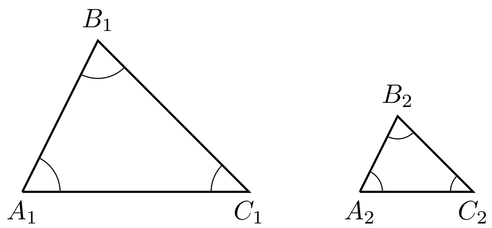
Proof.
Задано $\triangle ABC$ та бісектрису CD.
Точка L лежить на BC. У такому випадку кажуть, що BC та BA **прилягають до** CD та DA.



Проведемо через т. C пряму, що паралельна AL. За теоремою про пропорційні відрізки, оскільки $EA \parallel BD$, то $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{BE}{DA}$. Лишилось показати, що $BE = BA$.
І дійсно, $\triangle EBA$ - рівнобедрений трикутник, оскільки $\angle EAB = \angle ABD$ як різносторонні та $\angle AEB = \angle DBC$ як відповідні. Тому здвіси $EB = BA$.
Остаточно, $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{BA}{AD}$. А взагалі, простіше таким чином писати: $\dfrac{BC}{BA} = \dfrac{CD}{DA}$. ■

6.2 Подібні трикутники

Definition 6.2.1 Два трикутники називають **подібними**, якщо відповідні кути рівні, а сторони трикутника відповідно пропорційні іншим сторонам.



Тут $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$ та $\angle C_1 = \angle C_2$.
Також $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{B_1C_1}{B_2C_2} = \dfrac{A_1C_1}{A_2C_2} = k$.

Позначення: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.
Число k називають **коефіцієнтом подібності**.

Corollary 6.2.2 Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

Lemma 6.2.3 Пряма, що паралельна стороні трикутника та перетинає дві інші сторони, відтинає від даного трикутника йому подібний.
Зрозуміло.

Theorem 6.2.4 Перша ознака подібності
Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.
Зрозуміло.

Theorem 6.2.5 Друга ознака подбіності
Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника та кути, що утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

Proof.
Задані $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$. Відомо, що $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = k$, а також $\angle B = \angle B_1$.
Якщо $k = 1$, то це перетворюється на першу ознаку рівності трикутника.
Якщо $k > 1$, то тоді $AB > A_1B_1$ та $BC > B_1C_1$. На сторонах BA, BC позначимо точки A_2, C_2 таким чином, щоб $BA_2 = A_1B_1$ та $BC_2 = B_1C_1$. Тоді за умовою, $\dfrac{AB}{BA_2} = \dfrac{BC}{BC_2}$.
Лишилось довести, що $A_2C_2 \parallel AC$, щоб згодом скористатися лемою.
!Припустимо, що $A_2C_2 \nparallel AC$. Тоді на стороні BC позначимо таку точку M, щоб $A_2M \parallel AC$. Утворяться трикутники $\triangle ABC \sim \triangle A_2BM$ за лемою.
Звідси маємо $\dfrac{BA}{BA_2} = \dfrac{BC}{BM}$. Водночас $\dfrac{BA}{BA_2} = \dfrac{BC}{BC_2}$, тоді звідси $\dfrac{BC}{BM} = \dfrac{BC}{BC_2} \implies BM = BC_2$. Суперечність!
Таким чином, $A_2C_2 \parallel AC$, а тому за лемою, $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.
Якщо $k < 1$, то можна звести до випадку $k > 1$. ∎

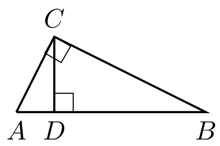
Theorem 6.2.6 Третя ознака подібності
Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Proof.
Задані $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$. Відомо, що $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{CA}{C_1A_1} = k$.
Якщо $k = 1$, то це перетворюється на третю ознаку рівності трикутника.
Якщо $k > 1$, то тоді $AB > A_1B_1$ та $BC > B_1C_1$. На сторонах BA, BC позначимо точки A_2, C_2 таким чином, щоб $BA_2 = A_1B_1$ та $BC_2 = B_1C_1$. Тоді за умовою, $\dfrac{AB}{BA_2} = \dfrac{BC}{BC_2}$. Водночас також $\angle B$ - спільний.
Звідси $\triangle ABC \sim \triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$. Остання рівність доводиться за III ознакою рівності.
Якщо $k < 1$, то можна звести до випадку $k > 1$. ∎

7 Розв'язування прямокутних трикутників

7.1 Метричні співвідношення

Definition 7.1.1 Задано $\triangle ABC$ - прямокутний. Проведемо висоту CD.
Відрізок AD називається **проєкцією** відрізка AC. Відрізок BD називається **проєкцією** відрізка BC.



Lemma 7.1.2 Висота прямокутного трикутника, що проведена на гіпотенузу, ділить трикутник на два подібних. Кожний з маленьких прямокутних трикутників також подібний до заданого прямокутного трикутника. *Зрозуміло.*

Тобто в нашому випадку, $\triangle ADC \sim \triangle BDC$ та $\triangle ADC \sim ACB$.

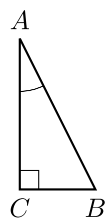
Theorem 7.1.3 Метричні співвідношення
$CD^2 = AD \cdot DB$ $\quad$ $CA^2 = AD \cdot AB$ $\quad$ $CB^2 = BD \cdot AB$.
Зрозуміло.

Theorem 7.1.4 Теорема Піфагора
У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.
Зрозуміло.

Тобто в нашому випадку, $AB^2 = AC^2 + CB^2$.
Звідси випливає, що гіпотенуза завжди більша за будь-який з катетів.

7.2 Тригонометричні функції

Definition 7.2.1 Катет, що лежить навпроти гострого кута, називають **протилежним**. Катет, що прилягається до цього гострого кута, називають **прилеглим**.



Тут CB - протилежний катет та AC - прилеглий катет.

Definition 7.2.2 Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.
Позначення: $\sin A = \dfrac{CB}{AB}$.

Definition 7.2.3 Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.
Позначення: $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$.

Definition 7.2.4 Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилежного катета.
Позначення: $\operatorname{tg} A = \dfrac{CB}{AC}$.

Remark 7.2.5 Оскільки гіпотенуза більша за будь-який катет, то звідси $\sin A < 1$ та $\cos A < 1$.

Remark 7.2.6 Якщо я хочу обчислити $\sin, \cos, \operatorname{tg}$ певного кута (наприклад $45°$), то достатньо взяти якийсь довільний прямокутний трикутник. Просто тому що ці тригонометричні функції не залежать від сторін.

Theorem 7.2.7 Основна тригонометрична тотожність
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, де α - деякий кут прямокутного трикутника.
Зрозуміло.

Theorem 7.2.8 Взаємозв'язки між тригонометричними функціями
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad\quad$ $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
Всюди α - деякий кут прямокутного трикутника.
Все зрозуміло.

Таблиця тригонометричних значень:

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

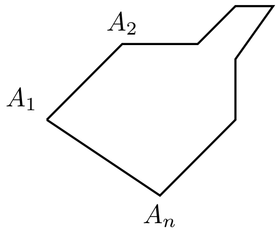
Все це можна знайти, взявши якийсь прямокутний трикутник.

Розв'язати прямокутний трикутник (як казав Мерзляк) - це знайти всі сторони та кути.

8 Многокутники

8.1 Вступ

Definition 8.1.1 Розглянемо точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ та побудуємо відрізки $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$. Причому сусідні відрізки не мають лежати на одній прямій, а також два несусідних відрізки не мають спільних точок.
Утворена частина площини разом з відрізками називають **Многокутниками**.



Всі решта терміни: вершини, сторони, сусідні сторони - все теж саме.

Definition 8.1.2 Периметром многокутника називають суму всіх його сторін.

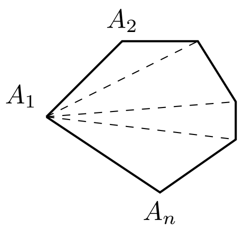
Definition 8.1.3 Діагоналлю називають відрізок, що сполучає несусідні вершини.

Definition 8.1.4 Многокутник називається **опуклим**, якщо всі його кути менші за розгорнутого. Інакше - **випуклий**.

Remark 8.1.5 Властивості опуклого многокутника
1. Трикутник завжди опуклий.
2. Опуклий многокутник розташований в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону.
3. Опуклий многокутник, відмінний від трикутника, містить всі його діагоналі.

Theorem 8.1.6 Сума кутів многокутника дорівнює $180°(n-2)$, де n - кількість вершин.

Proof.
Випадок $n = 3$ - трикутник, сума кутів $180°$ - уже доводили.
Розглянемо $n > 3$. Оберемо одну вершину та проведемо всі діагоналі, що виходять з обраної вершини. Отримаємо $n - 2$ трикутників. Сума всіх кутів цих трикутників дорівнює сумі кутів многокутника. Сума кутів кожного трикутника $= 180°$. А тому сума многокутника $= 180°(n-2)$.



■

Definition 8.1.7 Коло називають **описаним навкого многокутника**, якщо воно проходить через всі його вершини.

Definition 8.1.8 Коло називають **вписаним в многокутника**, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

(TODO)

8.2 Площа

Definition 8.2.1 Площею многокутника називають величину, яка має такі властивості:
1) рівні многокутники мають рівні площі;
2) якщо многокутник складено з кількох прямокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;
3) за одиницю виміру площі беруть одиничний квадрат, тобто квадрат зі стороною, яка дорівнює одиниці виміру довжини.
Позначення: S.

Lemma 8.2.2 Площа квадрат зі стороною $\dfrac{1}{n}$ одиниць, де $n \in \mathbb{N}$, дорівнює $\dfrac{1}{n}^2$ одиниць^2.

Proof.
Візьмемо квадрат одиничної сторони. Поділимо його на n^2 рівних квадратів зі сторонами $\dfrac{1}{n}$.
За властивістю площі 1), площі всіх цих отриманих квадратів рівні. За властивістю площі 2), площа квадрата дорівнює сумі площ цих маленьких квадратиків. за властивістю площі 3), площа квадрата одиничної довжини $= 1$.
Звідси випливає, що площа маленького квадрата $= \dfrac{1}{n^2}$. ■

Theorem 8.2.3 Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його сусідніх сторін.
Зрозуміло. Але якщо хоча б одна сторона є ірраціональним числом, то тут доведення поза межами.

Definition 8.2.4 Многокутники, що мають однакову площу, називають **рівновеликими**.

Theorem 8.2.5 Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, що проведена до цієї сторони.

Theorem 8.2.6 Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, що проведена до цієї сторони.

Corollary 8.2.7 Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів.

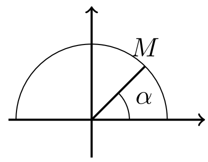
Corollary 8.2.8 Площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналів.

Theorem 8.2.9 Площа трапеції дорівнює добутку середньої лінії на висоту.

9 Знову розв'язування трикутників

9.1 Тригонометричні значення для кутів $[0°, 180°]$

Розглянемо півколо радіуса 1, з центром на початку координат. А також позначимо точку M, що належить колу.



Будемо говорити, що **кожному куту** $0° \leq \alpha \leq 180°$ **ставиться у відповідність точка** M півкола.
Якщо α - гострий кут, то ми отримаємо т. $M(x, y)$ на колі, через яку проведемо висоту на абсцису.
Отримаємо прямокутний трикутник, з якого випливає ось це:
$\sin\alpha = y$ $\qquad\qquad$ $\cos\alpha = x$.
Тому прийшли до такого означення:

Definition 9.1.1 Косинусом та синусом кута $\alpha \in [0°, 180°]$ називають відповідно абсцису та ординату точки M, що відповідає куту α.

Якщо α - тупий кут, то тепер $\cos\alpha$ буде від'ємним, бо абсциса від'ємна.

Всі формули, що були в тригонометрії, залищаються справедливими.

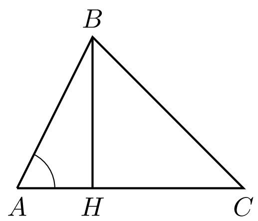
Можна довести, що
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ $\qquad\qquad$ $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.
Доведення є зрозумілим.

Definition 9.1.2 Тангенсом кута α називають відношення $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

9.2 Теорема косинусів

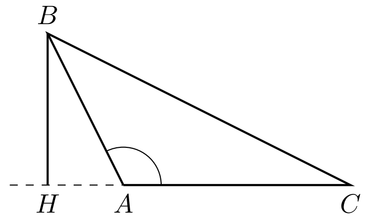
Theorem 9.2.1 Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними.

Proof.
Задано $\triangle ABC$. Ми доведемо, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.
Розглядається декілька випадків:
I. $\angle A$ - гострий.
Звідси випливає, що або $\angle B$, або $\angle C$ - гострий кут.
1) Нехай $\angle C$ - гострий. Тоді проведемо висоту BH.



Ну а далі доведення зрозуміле та чисто алгебраїчне.
2) Нехай $\angle B$ - гострий. Тоді проведемо висоту CH та все решта аналогічно.

II. $\angle A$ - тупий.
Звідси випливає, що $\angle B$ та $\angle C$ - гострі кути. Проведемо висоту BH.



Ну а далі доведення теж зрозуміле.

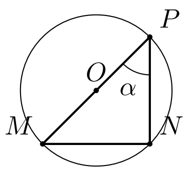
III. $\angle A$ - прямий.
Тоді $\cos A = 0$, а отримана формула - це теорема Піфагора. ■

Corollary 9.2.2 Нехай задано трикутник зі сторонами a, b, c, причому a - довжина найбільшої сторони.
Якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то трикутник - гострокутний.
Якщо $a^2 = b^2 + c^2$, то трикутник - прямокутний.
Якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то трикутник - тупокутний.

9.3 Теорема синусів

Lemma 9.3.1 Хорда кола дорівнює добутку діаметра на синус будь-якого вписаного кута, що спирається на цю хорду.

Proof.
Задамо деяку хорду кола MN. Проведемо діаметр MP. Позначимо кут α - кут, що опирається на хорду MN, а $MP = d$.



Оскільки $\angle MNP$ опирається на діаметр, то звідси $\angle MNP = 90°$. Таким чином, $MN = d \sin \alpha$.
Вписані кути, що спираються на MN, дорівнюють або α, або $180° - \alpha$. А оскільки $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$, то тоді формула вище досі справедлива.
Отже, $MN = d \sin \alpha$, де α - будь-який кут, що спирається на хорду. ■

Theorem 9.3.2 Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.
Випливає негайно з доведеної теореми.

Corollary 9.3.3 Радіус кола, описаного навколо трикутника, обчислюється формулою:
$R = \dfrac{a}{2 \sin \alpha}$,
де a - сторона трикутника та α - кут напроти сторони a.

Розв'язати трикутник (як казав Мерзляк) - це знайти всі сторони та кути.

9.4 Інші формули

Theorem 9.4.1 Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін і синуса кута між ними.
*Хід доведення як в **Th. 9.2.1**, але тепер шукаємо площу через відомі формули.*

Theorem 9.4.2 Формула Герона
Нехай a, b, c - сторони трикутника та p - півпериметр цього трикутника.
Тоді $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Proof.
Маємо $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, де γ - кут напроти сторони c.
$S^2 = \dfrac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma = \dfrac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2\gamma) = \dfrac{1}{4}a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)$.
За теоремою косинусів, $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma \implies \cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.
Підставимо в нашу формулу отриманий косинус - отримаємо багато алгебраїчної роботи, але в результаті отримаємо:
$S^2 = \dfrac{c-a+b}{2}\cdot\dfrac{c+a-b}{2}\cdot\dfrac{a+b-c}{2}\cdot\dfrac{a+b+c}{2} = (p-a)(p-b)(p-c)p.$ ■

Theorem 9.4.3 Нехай a, b, c - сторони трикутника та R - радіус описаного кола навколо трикутника. Тоді $S = \dfrac{abc}{4R}$.
Зрозуміло.

Theorem 9.4.4 Площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.
Вказівка: з'єднати вершини трикутника з центром вписаного кола, а потім провести радіуси в точки дотиків.

Corollary 9.4.5 Площа описаного многокутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.

Corollary 9.4.6 Площа паралелограма дорівнює добутку сусідніх сторін на синус кута між ними.

Corollary 9.4.7 Площа опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку діагоналей на сінус кута між ними.

10 Правильні многокутники

Definition 10.0.1 Многокутник називається **правильним**, якщо в нього всі сторони рівні та всі кути рівні.

Theorem 10.0.2 Правильний многокутник є опуклим.
Без доведеня.

Theorem 10.0.3 Будь-який многокутник є вписаним в коло та описаним навколо кола. Центри цих кіл збігаються.
(TODO)

10.1 Довжина кола. Площа кола

Впишемо правильні многокутники. Позначимо P_n - периметр n-кутника та C - довжина кола. Якщо $n \to \infty$, то можна зауважити, що $P_n \to C$.

Розглянемо два правильних n-кутника зі сторонами a_n, a'_n, що вписані навколо кола з радіусом R, R'.
$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin \dfrac{180^\circ}{n}$.
$P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin \dfrac{180^\circ}{n}$.
Тоді $\dfrac{P_n}{P'_n} = \dfrac{2R}{2R'}$. Але якщо $n \to \infty$, то тоді $P_n \to C, P'_n \to C'$.
Отже, $\dfrac{C}{C'} = \dfrac{2R}{2R'} \implies \dfrac{C}{2R} = \dfrac{C'}{2R'}$.
Тобто відношення довжини кола до діаметра є одним й тим самим числом.
Позначимо $\pi = \dfrac{C}{2R}$. Тоді отримали:

$$C = 2\pi R$$

Таким чином, ми зможемо отримати формулу довжини дуги кола з градусною мірою n°:

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$$

Тепер спробуємо знайти площу кола.
Якщо $n \to \infty$, то можна зауважити, що $S_n \to S$, де S_n - площа n-кутника та S - площа кола.

$S_n = n \cdot S_\triangle = \dfrac{1}{2} n \cdot a_n \cdot R \cdot \cos \dfrac{180^\circ}{n} = \dfrac{1}{2} P_n \cdot R \cos \dfrac{180^\circ}{n}$.
Тоді при $n \to \infty$ маємо, що $\cos \dfrac{180^\circ}{n} \to \cos 0^\circ = 1$, а також $P_n \to C$. Остаточно,
$S = \dfrac{1}{2} CR$. Якщо підставити формулу довжини кола, отримаємо формулу:

$$S = \pi R^2$$

Площу сектора, який містить дугу кола з градусною мірою n°, рахується таким чином:

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$$

Використані джерела

1. А.В. Погорєлов "Геометрия. Учебник для 7-11 классов общеобразовательных учреждений."