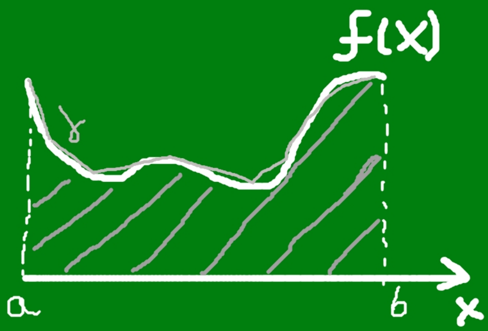
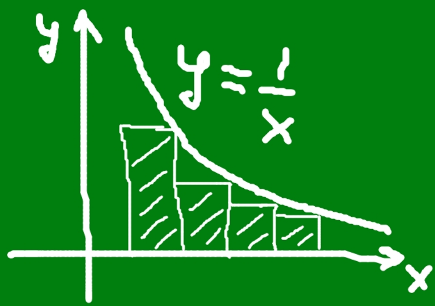
Real analysis II



$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

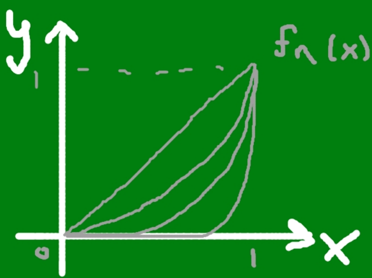


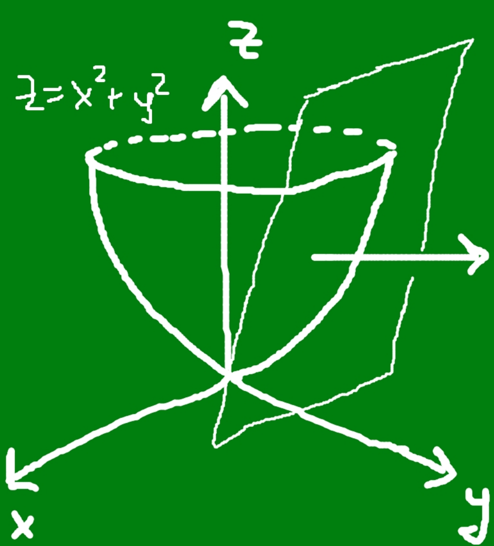
$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots = -\ln 2$$

$$-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots = -\frac{3}{2}\ln 2$$

$$\{ f_n(x) = x^n, n \geq 1 \}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$$





$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$$

Зміст

1 Ряди

Definition 1.0.1 **Рядом** називають формальну нескінченну суму нескінченної послідовності чисел $\{a_n, n \geq 1\}$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Частковою сумою даного ряда називають суму перших k членів:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

В такому випадку в нас виникає послідовність часткових сум $\{S_k, k \geq 1\}$.

Якщо така послідовність часткових сум є збіжною, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають **збіжним** та **сумма** цього ряду дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k = S$$

Інакше – **розбіжним**.

Example 1.0.2 Знайдемо суму: $1 + q + q^2 + \dots$

Розглянемо часткову суму $S_k = 1 + q + \dots + q^k = \dfrac{1-q^k}{1-q}$ – сума геометричної прогресії.

$\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1-q^k}{1-q} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{1-q}, |q| < 1 \\ \infty, |q| > 1 \end{array}\right.$.

При $q = 1$ маємо: $1 + 1 + 1 + \dots$, тобто $S_k = k \implies \lim\limits_{k\to\infty} S_k = \infty$.

Підсумуємо:

- сума є збіжною при $|q| < 1$ та $1 + q + q^2 + \dots = \dfrac{1}{1-q}$;
- сума є розбіжнрю при $|q| \geq 1$.

1.1 Первинний аналіз збіжності та арифметика рядів

Proposition 1.1.1 Необхідна ознака збіжності ряду

Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Proof.

Зафіксуємо часткові суми: $S_{k+1} = \sum\limits_{n=1}^{k+1} a_n \quad S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$.

Оскільки ряд є збіжним, то звідси

$\lim\limits_{k\to\infty} S_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} (S_{k+1} - S_k) = S - S = 0$. ■

Example 1.1.2 Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$

Оскільки $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$, то за необхідною ознакою збіжності, маємо, що ряд – розбіжний.

Theorem 1.1.3 Критерій Коші

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon$.

Proof.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ – збіжний} \iff \exists \lim_{k\to\infty} S_k \text{ - збіжна границя} \overset{\text{критерій Коші}}{\iff}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : |S_{k+p} - S_k| = \left|\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Example 1.1.4 Важливий

Розглянемо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – **гармонічний ряд**. Доведемо, що даний ряд – розбіжний, використовуючи критерій Коші, тобто $\exists \varepsilon > 0 : \forall K : \exists k_1, k_2 \geq K : \left|\sum_{n=k_1}^{k_2} \frac{1}{n}\right| \geq \varepsilon$

Дійсно, якщо $\varepsilon = 0.5$, $k_1 = K, k_2 = 2K$, то отримаємо $\left|\sum_{n=K}^{2K} \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \dots + \frac{1}{2K} > K\frac{1}{2K} = 0.5.$

Отже, цей ряд – розбіжний.

Один з прикладів, що підтверджує, що необхідна умова збіжності не є достатньою.

Remark 1.1.5 Колись ми виводили константу Ойлера-Маскероні $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$.

Позначимо $H_k = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n}$ – часткова сума гармонічного ряда. Тоді $\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n)$. Ця границя дозволяє показати нам, що $H_n \sim \gamma + \ln n$ при $n \to \infty$. Дійсно,

$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\gamma + \ln n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{H_n - \ln n}{\gamma + \ln n} + \frac{\ln n}{\gamma + \ln n}\right) = 0 + 1 = 1.$

Це дозволяє приблизно обчислити значення часткової суми гармонічного ряда. Зокрема $H_{10^6} \approx \gamma + \ln 10^6 \approx 14.392\dots$ Тут можна зауважити, що гармонічний ряд надзвичайно повільно росте, але все одно прямує до нескінченності (тобто розбіжний, як ми зазначили).

Proposition 1.1.6 Задані $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжні. Тоді збіжними будуть й наступні ряди:

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$;-

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Proof.

Доведу друге. Перший пункт аналогічно. Зафіксуємо часткові суми:

2) $S_k(a) = \sum_{n=1}^{k} a_n \quad , S_k(b) = \sum_{n=1}^{k} b_n$.

Тоді $S_k(a) + S_k(b) = \sum_{n=1}^{k}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{k} b_n$.

Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжні, то $\lim_{k\to\infty} S_k(a) = S(a), \quad \lim_{k\to\infty} S_k(b) = S(b)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{k\to\infty}(S_k(a) + S_k(b)) = S(a) + S(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad \blacksquare$$

Definition 1.1.7 Хвостом (або **остачею**) ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають ряд $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, де $m \in \mathbb{N}$.

Тобто ми відкидуємо перші $m-1$ доданків та сумуємо, починаючи з m.

Proposition 1.1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний $\iff \sum_{n=m}^{\infty} a_n$ – збіжний, причому $\forall m \in \mathbb{N}$.

Proof.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний $\overset{\text{критерій Коші}}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \iff$

$\iff \exists K' = \max\{K, m\} : \forall k \geq K' : \forall p \geq 1 : \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \iff \sum_{n=m}^{\infty} a_n$ – збіжний. ■

1.2 Знакододатні ряди

Тобто розглядаємо зараз лише ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, такі, що $\forall n \geq 1 : a_n \geq 0$.

Proposition 1.2.1 $\{S_k, k \geq 1\}$ – монотонно неспадна послідовність.

Proof.
$\forall k \geq 1 : S_{k-1} - S_k = a_{k+1} \geq 0 \Rightarrow S_k \leq S_{k+1}$. ■

Proposition 1.2.2 Якщо $\{S_k, k \geq 1\}$ – обмежена, то тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

Proof.
Щойно дізнались що послідовність часткових сум монотонна. До того ж, вона є обмеженою за умовою. Отже, $\exists \lim_{k\to\infty} S_k = S$, тобто $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний. ■

Theorem 1.2.3 Ознака порівняння в нерівностях
Задані $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ таким чином, що $\forall n \geq 1 : a_n \leq b_n$. Тоді:
1) якщо $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжний, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний теж;
2) якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – розбіжний, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – розбіжний теж.

Proof.
Оскільки $\forall n \geq 1 : a_n \leq b_n$, то тоді $\sum_{n=1}^{k} a_n \leq \sum_{n=1}^{k} b_n$, де $k \in \mathbb{N}$.

1) Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжний ряд, тоді $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} b_n = \tilde{S}$.

Отже, в нашій нерівності, якщо $k \to \infty$, то маємо $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \tilde{S}$.

Отже, існує границя, а тому $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.
2) Це є оберненим твердженням до 1). ■

Example 1.2.4 Важливий
Розглянемо далі $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ **- ряд Діріхлє**. Дослідимо на збіжність.
Нехай $\alpha < 1$, тоді $\forall n \geq 1 : \frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$.

За ознакою порівняння та минулим прикладом, отримаємо, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – розбіжний.

Нехай $\alpha > 1$, тоді отримаємо таку оцінку:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots \leq$$

$$\leq 1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\right)+\dots = 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\frac{1}{8^{\alpha-1}}+\dots = \frac{1}{1-\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}}.$$

Наш ряд – обмежений, а послідовність часткових сум – монотонна. Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ – збіжний.

Підсумуємо: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ - $\left[\begin{array}{l}\text{розбіжний}, \alpha \leq 1\\ \text{збіжний}, \alpha > 1\end{array}\right.$.

До речі, на основі цього прикладу ми можемо визначити так звану ζ-функцію Рімана таким чином:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

У силу того, коли даний ряд збіжний, ми вимагаємо $s>1$.

Theorem 1.2.5 Ознака порівняння в границях

Задані $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, тут члени строго додатні. Відомо, що $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$. Тоді:

1) Якщо $l \neq 0$ та $l \neq \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжні або розбіжні одночасно;

2) Якщо $l=0$, то зі збіжності $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Remark 1.2.6 До речі, $l \geq 0$, оскільки всі члени – додатні.

Proof.

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l\neq 0$, тобто $\forall \varepsilon>0: \exists N: \forall n \geq N: \left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon$.

Оберемо $\varepsilon=\frac{l}{2}$, тоді $\frac{l}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3l}{2} \Rightarrow \frac{l}{2}b_n<a_n<\frac{3l}{2}b_n, \forall n\geq N$.

Припустимо, що $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$ – збіжний, тоді збіжним буде $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{3l}{2}b_n$, а отже, за попередньою теоремою, $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ – збіжний. Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

Якщо $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ - збіжний, тоді збіжним буде $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{l}{2}b_n$, а отже $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$ – збіжний. Тому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжний.
Аналогічними міркуваннями доводиться розбіжність.
Тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжні або розбіжні одночасно.

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l=0$, тобто $\forall \varepsilon>0: \exists N: \forall n\geq N: \left|\frac{a_n}{b_n}\right|<\varepsilon$
Оберемо $\varepsilon=1$, тоді $\forall n \geq N: a_n<b_n$. Тоді виконується попередня теорема, один з двох пунктів. ■

Example 1.2.7 Дослідити на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$.

Маємо $a_n=\frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$. Встановимо $b_n=\frac{1}{n^2}$. Обчислимо границю їхніх відношень:
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\operatorname{arctg} n}{1+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{\pi}{2}$.

А оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – збіжний, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$ – збіжний.

Theorem 1.2.8 Ознака д'Аламбера

Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – строго додатний. Тоді:

1) Якщо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд – збіжний;
2) Якщо $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд – розбіжний.

Proof.
1) Маємо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, тоді $\forall \varepsilon > 0$, зокрема для $\varepsilon = \dfrac{1-q}{2}$, проміжок $(q+\varepsilon, +\infty)$ має скінченну кількість членів послідовності $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$, тобто $\exists N : \forall n \geq N : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = \dfrac{1+q}{2}$.
Звідси випливає, що $a_{n+1} < \dfrac{1+q}{2} a_n$.
$\implies a_{N+1} < \dfrac{1+q}{2} a_N$
$\implies a_{N+2} < \dfrac{1+q}{2} a_{N+1} < \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^2 a_N$
$\vdots$
$\implies \forall k \geq 1 : a_{N+k} < \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^k a_N$
Розглянемо ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^k a_N = a_N \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^k$
Вираз під сумою буде менше за 1, цей ряд – геометрична прогресія, збіжний.
Тоді $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ – збіжний, отже, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

2) Маємо $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, тоді $\forall \varepsilon > 0$, зокрема для $\varepsilon = \dfrac{q-1}{2}$, проміжок $(-\infty, q-\varepsilon)$ має скінченну кількість членів послідовності $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$, тобто $\exists N : \forall n \geq N : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon = \dfrac{1+q}{2}$.
Аналогічними міркуваннями отримаємо $\forall k \geq 1 : a_{N+k} > \left(\dfrac{q+1}{2}\right)^k a_N$.
Розглянемо ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^k a_N = a_N \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^k$
А тут геометрична прогресія при виразі, що більше одиниці – розбіжний.
Тоді $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ – розбіжний, отже, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - розбіжний. ■

Corollary 1.2.9 Ознака д'Аламбера (стандартний вигляд)
Задано $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – строго додатний. Нехай $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тоді:
1) Якщо $q < 1$, то ряд - збіжний;
2) Якщо $q > 1$, то ряд - розбіжний;
3) Якщо $q = 1$, то відповіді нема.

Proof.
Якщо $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то автоматично $\exists\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $\exists\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Ну а далі чисто за попередньою теоремою.

3) А тепер в чому проблема при $q = 1$. Розглянемо обидва ряди: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Використаємо для обох ознаку д'Аламбера:
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} \cdot n = 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 = 1$.
Результат – однаковий, проте один ряд – розбіжний, а інший – збіжний. Тож $q = 1$ не дає відповіді, шукаємо інші методи. ■

Example 1.2.10 Дослідити на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$.

$a_n = \dfrac{3^n (n!)^2}{(2n)!} \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{3}{4} < 1.$

Отже, наш ряд – збіжний за д'Аламбером.

Theorem 1.2.11 Радикальна ознака Коші

Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – додатний. Нехай $\exists \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тоді:

1) Якщо $q < 1$, то ряд - збіжний;
2) Якщо $q > 1$, то ряд - розбіжний;
3) Якщо $q = 1$, то відповіді нема.

Proof.

1) $\exists \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, тобто $\forall \varepsilon > 0$: проміжок $(q+\varepsilon, +\infty)$ має скінченну кількість елементів, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \implies a_n < (q+\varepsilon)^n$.

Оберемо $\varepsilon = \dfrac{1-q}{2}$. Тоді маємо: $a_n < \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^n$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^n$ – геометрична прогресія, вираз в сумі менше за одиниці – збіжний.

Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^n$ – збіжний, а тому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

2) $\exists \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, тобто $\exists \{ \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}}, p \geq 1\}$: $\lim\limits_{p\to\infty} \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}} = q$ – така підпослідовність, що містить цю границю $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists P : \forall p \geq P : \left| \sqrt[n(p)]{a_{n(p)}} - q \right| < \varepsilon$.

Оберемо $\varepsilon = \dfrac{q-1}{2}$, тоді $a_{n(p)} > \left(\dfrac{q+1}{2}\right)^{n(p)}$. Тоді $\lim\limits_{p\to\infty} a_{n(p)} \geq \lim\limits_{p\to\infty} \left(\dfrac{q+1}{2}\right)^{n(p)} = \infty$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Це означає, що необхідна умова збіжності не виконується – розбіжний.

3) Для $q = 1$ треба розглянути такі самі ряди як при доведенні ознаки д'Аламбера. ■

Example 1.2.12 Дослідити на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

$a_n = \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} \qquad \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}}{3} = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{e}{3} < 1.$

Отже, наш ряд – збіжний за Коші.

Theorem 1.2.13 Інтегральна ознака Коші

Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – додатний. Встановимо функцію $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, яка під такими умовами:

1) $\forall n \geq 1 : a_n = f(x)$;
2) f не зростає на $[1, +\infty)$.

Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжні або розбіжні одночасно.

Proof.

Оскільки $f(x)$ спадає, то $\forall k \geq 1 : \forall x \in [k, k+1]$:

$a_k \geq f(x) \geq a_{k+1}$.

$a_k = \displaystyle\int_k^{k+1} a_k\,dx \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq \int_k^{k+1} a_{k+1}\,dx = a_{k+1}.$

Просумуємо ці нерівності від $k = 1$ до $k = M$, отримаємо:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{M} a_k \geq \int_1^{M+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{M} a_{k+1}$.
Нехай $\displaystyle\sum_{k=1}^{M}$ – збіжний. Тоді якщо $M \to \infty$, то отримаємо, що $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ приймає скінченне значення, а тому збіжний.
Нехай $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ – збіжний. Тому $\displaystyle\sum_{k=1}^{M} a_{k+1}$ - обмежений. А оскільки він додатній, то звідси, збіжний.
Випадок розбіжності доводиться від супротивного. ■

Example 1.2.14 Дослідити на збіжність $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

Маємо функцію $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^2 x}$. Зрозуміло, що f спадає на $[2, +\infty)$, бо $x, \ln^2 x$ там зростають.
$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$ – збіжний.
Отже, наш ряд – збіжний за Коші інтегральним.

Theorem 1.2.15 Ознака Раабе
Задано $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - строго додатний. Нехай $\exists \displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$. Тоді:
1) Якщо $q < 1$, то ряд – розбіжний;
2) Якщо $q > 1$, то ряд – збіжний;
3) Якщо $q = 1$, то відповіді нема.

Proof.
Маємо $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$, тобто можна сказати $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - q = o(1)$ при $n \to \infty$.
Або $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{q}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$.
Одночасно ми розглянемо $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, тоді звідси $\dfrac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$.

1) $q > 1$, тоді ми зможемо знайти $\alpha \in (1, q)$. Звідси
$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{b_n}{b_{n+1}} = \dfrac{q - \alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$, починаючи з деякого номеру.
Тоді $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > \dfrac{b_n}{b_{n+1}} \implies \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Оскільки $\alpha > 1$, то тоді $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжний. А із цієї нерівності випливає, що $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

2) $q < 1$, то тоді ми зможемо знайти $\alpha \in (q, 1)$. А далі всі процедури аналогічні.

3) Розглянути ряди $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - розбіжний та $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ – збіжний за інтегральною ознакою Коші. Обидві дають одиничну границю. ■

Example 1.2.16 Дослідити на збіжність $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{2022}$.

$a_n = \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{2022}$. Тоді маємо:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{2022} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2022} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2022}{2n+1} + o\left(\frac{1}{2n+1}\right) - 1}{\frac{1}{n}}$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2022n}{2n+1} = 1011 > 1.$
Таким чином, заданий ряд – збіжний за Раабе.

1.3 Знакозмінні ряди

Definition 1.3.1 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Definition 1.3.2 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **умовно збіжним**, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний, але $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – не збіжний.

Proposition 1.3.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – абсолютно збіжний. Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

Proof.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – абсолютно збіжний $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - збіжний $\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \forall p \geq 1 :$
$\left|\sum\limits_{n=k}^{k+p} |a_n|\right| < \varepsilon \implies \left|\sum\limits_{n=k}^{k+p} a_n\right| \leq \left|\sum\limits_{n=k}^{k+p} |a_n|\right| < \varepsilon \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний. ■

Theorem 1.3.4 Ознака Ляйбніца
Задано ряд вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, де $a_n \geq 0$ – **знакозмінний ряд**. Відомо, що:
1) $\{a_n, n \geq 1\}$ – монотонно спадає;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Тоді заданий ряд – збіжний.

Proof.
Розглянемо послідовність часткових сум $\{S_{2k}, k \geq 1\}$. Отримаємо наступне:
$S_{2k} = \underset{\geq 0}{(a_1 - a_2)} + \underset{\geq 0}{(a_3 - a_4)} + \dots + \underset{\geq 0}{(a_{2k-1} - a_{2k})} \geq 0.$
$S_{2k} = a_1 - \underset{\geq 0}{(a_2 - a_3)} - \underset{\geq 0}{(a_4 - a_5)} - \dots - \underset{\geq 0}{(a_{2k-2} - a_{2k-1})} - a_{2k} \leq a_1.$
Тобто $0 \leq S_{2k} \leq a_1$ – обмежена послідовність.
Також $S_{2(k+1)} = S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \geq S_{2k}$ – монотонна. Таким чином, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = S$.
Розглянемо ще одну послідовність часткових сум $\{S_{2k+1}, k \geq 1\}$. Зрозуміло, що $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$ $\implies \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} + \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = S + 0 = S$.

Остаточно, маємо, що послідовність $\{S_m, m \geq 1\}$ - збіжна, тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ – збіжний. ■

Corollary 1.3.5 $\forall k \geq 1 : |S - S_k| \leq a_{k+1}$.

Proof.
Розглянемо хвіст ряду $S - S_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. А також розглянемо $\tilde{S_m} = \sum\limits_{n=k+1}^{m} (-1)^{n+1} a_n$. Тоді

$$\tilde{S_m} = S_m - S_k = (-1)^{k+1} \left(a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+1} - a_{k+5}) - \dots - -\left[\begin{array}{l} (a_{m-1} - a_m), k \not\vdots 2 \\ \quad a_m, k \vdots 2 \end{array}\right.\right.$$

$$\Rightarrow |\tilde{S_m}| = \left|a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+1} - a_{k+5}) - \dots - \left[\begin{array}{l} (a_{m-1} - a_m), k \not\vdots 2 \\ \quad a_m, k \vdots 2 \end{array}\right.\right. =$$

$$= a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+3}) - (a_{k+1} - a_{k+5}) - \dots - \left[\begin{array}{l} (a_{m-1} - a_m), k \not\vdots 2 \\ \quad a_m, k \vdots 2 \end{array}\right. \leq a_{k+1}$$

$\implies |S - S_k| = \lim\limits_{m\to\infty} |\tilde{S_m}| \leq a_{k+1}$. ■

Example 1.3.6 Обчислити суму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$ з точністю до $\varepsilon = 10^{-5}$.

Зрозуміло, що $a_n = \dfrac{1}{n!} \geq 0$, монотонно спадає та н.м. Отже, виконуються ознаки Лейбніца, а тому й отриманий наслідок.
$|S - S_k| \leq a_{k+1} < \varepsilon \implies \dfrac{1}{(k+1)!} < \dfrac{1}{10^5} \implies (k+1)! > 100000.$
Достатньо взяти нам $k = 8$. Тому ми отримаємо:
$S \approx S_8 = -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} - \dfrac{1}{5040} + \dfrac{1}{40320} = \dfrac{-3641}{5760}.$

Theorem 1.3.7 Ознаки Діріхлє та Абеля
Задано ряд вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Нехай виконано один з двох блок умов:

$\sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ – обмежена.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.
$\{b_n, n \geq 1\}$ – монотонна та н.м.	$\{b_n, n \geq 1\}$ – монотонна та обмежена.
ознака Діріхлє	*ознака Абеля*

Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ – збіжний.

Proof.
Спочатку почнемо з ознаки Діріхле. Припустимо b_n спадає. Застосуємо критерій Коші.
$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n b_n \right| = \left| A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1} - \sum_{n=k+1}^{k+p-1} A_n (b_{n+1} - b_n) \right| = \left| A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1} + \sum_{n=k+1}^{k+p-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \right| \leq$$
$$|A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1}| + \sum_{n=k+1}^{k+p-1} |A_n| |b_{n+1} - b_n| \boxed{<}$$
За умовою, $A_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ – обмежена, тобто $\exists C > 0 : \forall k \geq 1 : |A_k| \leq C$.
Також b_n – н.м., тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : |b_k| < \varepsilon$.
Тоді $|A_{k+p} b_{k+p} - A_k b_{k+1}| \leq |A_{k+p}| |b_{k+p}| + |A_k| |b_{k+1}| < 2C\varepsilon$.
Також $\sum\limits_{n=k+1}^{k+p-1} |A_n| |b_{n+1} - b_n| \leq C \sum\limits_{n=k+1}^{k+p-1} (b_n - b_{n+1}) = C(b_{k+1} - b_{k+p}) \leq C b_{k+1} < C\varepsilon$

$\boxed{<} 3C\varepsilon$. Виконано $\forall \varepsilon > 0$ та $\forall k \geq K : \forall p \geq 1$. Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ – збіжний.

Далі доводимо ознаку Абеля. Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний, то тоді обмежений. Оскільки $\{b_n\}$ монотонна та обмежена, то $b_n \to B$. Якщо розглянути $c_n = b_n - B$, то маємо $\{c_n, n \geq 1\}$ – монотонна та н.м.
Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ – збіжний за Діріхле. А далі ясно, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ – збіжний. ■

Example 1.3.8 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Будемо для цього використовувати ознаку Діріхле, встановимо $a_n = \sin n, b_n = \dfrac{1}{n}$.
$$\sum_{n=1}^{k} \sin n = \sum_{n=1}^{k} \frac{\sin(1 \cdot n) \sin \frac{1}{2}}{\sin \frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{k} \left(\cos\left(n - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \right) =$$
$$= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \left(\cos \frac{1}{2} - \cos \frac{3}{2} + \cos \frac{3}{2} - \cos \frac{5}{2} + \dots + \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \left(\cos \frac{1}{2} - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \right) =$$

$$\frac{\sin\dfrac{k+1}{2}\sin\dfrac{k}{2}}{\sin\dfrac{1}{2}}.$$

Таким чином, $\left|\sum\limits_{n=1}^{k}\sin n\right| = \left|\dfrac{\sin\dfrac{k+1}{2}\sin\dfrac{k}{2}}{\sin\dfrac{1}{2}}\right| \leq \dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{2}} \implies \sum\limits_{n=1}^{k}\sin n$ – обмежена.

Зрозуміло, що $\dfrac{1}{n}$ монотонна та н.м.

Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}$ – збіжний.

Example 1.3.9 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}e^{-n}$.

Будемо для цього використовувати ознаку Абеля, встановимо $a_n = \dfrac{\sin n}{n}, b_n = e^{-n}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}$ – збіжний за попереднім прикладом.

e^{-n} – монотонна, оскільки $e^{-n-1} - e^{-n} = e^{-n}(e^{-1}-1) < 0$.

e^{-n} – обмежена, оскільки $0 < e^{-n} < e$.

Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}e^{-n}$ – збіжний.

1.4 Трошки детально про абсолютно збіжні ряди

Для кожного числа $a \in \mathbb{R}$ визначимо додатну та від'ємну частину числа:

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} 0, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

Маємо кілька зауважень. Перше з них – це $0 \leq a^+ \leq |a|$ та $0 \leq a^- \leq |a|$. Більш того, $a = a^+ - a^-$. Нарешті, $|a| = a^+ + a^-$.

Тепер ми можемо розділити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на додатну частину $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ та на від'ємну частину $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Proposition 1.4.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний абсолютно $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ – обидва збіжні (як невід'ємні ряди). Більш того, в такому випадку матимемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Proof.

Для доведення в обидві сторони треба зауважити, що справедлива рівність:

$$0 \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n| = \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n^+ + \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n^-$$

А з даної рівності безпосередньо випливають дві нерівності:

$$0 \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n^+ \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n|$$

$$0 \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n^- \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n|.$$

Ми таким чином доведемо твердження в обидві сторони.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n^+ - \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} |a_n| = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n^+ + \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$ ■

Definition 1.4.2 Заданий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Перестановкою даного ряду назвемо ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$, для якого виконана така умова:

$$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ – бієкція} : b_m = a_{f(m)}$$

Example 1.4.3 Наприклад маємо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ Ми переставимо члени так, що спочатку йдуть парні члени, а згодом непарні – отримаємо новий ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + 1 + \frac{1}{3} + \dots$

Формально кажучи, ми встановили бієкцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таким чином: $b_1 = a_2, b_2 = a_4, \dots$ та для деяких індексів $b_{m_1} = a_1, b_{m_2} = a_3, \dots$

Theorem 1.4.4 Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – абсолютно збіжний. Тоді кожна перестановка даного ряду збігається туди ж.

Proof.

Задано $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – абсолютно збіжний. Доведення розіб'ємо на два випадки:

I. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – невід'ємний ряд.

Зафіксуємо перестановочний ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$, у цьому випадку $b_m = a_{f(m)}$ та $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – бієкція.

Нехай $\varepsilon > 0$. За умовою збіжності, існує $N \in \mathbb{N}$, для якого $0 \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - \sum\limits_{k=1}^{N} a_k < \varepsilon$.

Зауважимо, що оскільки f – бієкція, то тоді можемо підібрати $M = \max\{m \in \mathbb{N} : 1 \le f(m) \le N\}$, для якого $\{1, \dots, N\} \subset f^{-1}(\{1, \dots, M\})$. Таке вкладення означає наступне: члени $a_1, \dots, a_N$ включені серед членів $b_1, \dots, b_M$. Із урахуванням цього та того факту, що всі члени ряда невід'ємні, маємо $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k \le \sum\limits_{j=1}^{M} b_j$.

Нехай маємо $m > M$, тоді звідси $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k \le \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Маючи додатково нерівність вище, отримаємо оцінку $0 \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - \sum\limits_{j=1}^{m} b_j < \varepsilon$. Залишилося спрямувати $m \to \infty$ – отримаємо оцінку $0 \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j \le \varepsilon < 2\varepsilon$. Оскільки це виконано при всіх $\varepsilon > 0$, то тоді $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

II. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – довільний ряд.

Зафіксуємо перестановочний ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$. Тоді $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m^+, \sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m^-$ – перестановочні ряди для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Оскільки ці ряди невід'ємні, то для них маємо $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m^+ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m^- = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Отже, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ також буде абсолютно збіжним рядом, при цьому

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=1}^{\infty} b_m^+ - \sum_{m=1}^{\infty} b_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad \blacksquare$$

Example 1.4.5 Обчислити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Цілком зрозуміло, що це збіжний ряд, (за д'Аламбером), причому абсолютно. Отже, ми можемо переставляти члени ряду, оскільки від цього сума не зміниться за теоремою вище.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots =$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \quad &+ \frac{1}{2^3} + \dots \\ + \frac{1}{2^2} \quad &+ \frac{1}{2^3} + \dots \\ &+ \frac{1}{2^3} + \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

1.5 Трошки про умовно збіжні ряди

Theorem 1.5.1 Теорема Рімана

Задано $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – умовно збіжний. Тоді для довільного $M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ буде існувати перестановка даного ряду, яка буде збіжною до числа M.

Proof.

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – умовно збіжний. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ та $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$ (тобто обидва ряди розбіжні).

Дійсно, якби обидва ряди були збіжними, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ став би абсолютно збіжним (неможливо). Якби лише один з рядів був розбіжним, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, тобто був би розбіжним (неможливо).

Нехай заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ так, щоб $a_n \neq 0$ (якщо знайдеться елемент $a_{n_0} = 0$, то члени ряду перенумеруємо).

Тепер фіксуємо довільне число $M \geq 0$.

Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$, то тоді послідовність часткових сум додатних членів – необмежена, тобто $\exists k_1 \geq 1$ (оберу найменше можливе) : $a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_{k_1}^+ > M$.

Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$, то тоді послідовність часткових сум від'ємних членів – необмежена, тобто $\exists m_1 \geq 1$ (оберемо найменше можливе) : $a_1^- + a_2^- + \dots + a_{m_1}^- > a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+ - M$. Тобто звідси отримаємо $a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+ - a_1^- - \dots - a_{m_1}^- < M$.

Опишу словесно, що ми зробили. Ми взяли перші k_1 додатних членів нашого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, допоки сума не перевисить M; а потім взяли перші m_1 від'ємних членів нашого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, допоки сума не стане меншою за M.

Далі робимо ту саму процедуру. Ми оберемо перші k_2 додатних членів ряду $\sum_{n=k_1+1}^{\infty} a_n$, допоки сума не перевисить M; а потім оберемо перші m_2 від'ємних членів ряду $\sum_{n=m_1+1}^{\infty} a_n$, допоки сума не стане меншою за M.

$\vdots$

У нас виникне ряд $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = (a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+) - (a_1^- + \dots + a_{m_1}^-) + (a_{k_1+1}^+ + \dots + a_{k_2}^+) - (a_{m_1+1}^- + \dots + a_{m_2}^-) + \dots$

– це перестановочний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Позначимо $\sum_{j=1}^{q} b_j = S_q$ – часткова сума.
Оберемо S_q такий, що останній член ряду – це $a_{k_i}^+$. По-перше, $S_q > M$ за конструкцією; по-друге, оскільки $a_{k_i}^+$ має індекс k_i – найменший можливий індекс, де $S_q > M$ – то звідси $S_{q-1} \leq M \implies S_q \leq M + a_{k_i}^+$. Ці дві отримані нерівності гарантують нам оцінку $M < S_q \leq M + a_{k_i}^+ \implies 0 < S_q - M \leq a_{k_i}^+$.
Оберемо S_q такий, що останній член ряду – це $a_{m_j}^-$. Аналогічними міркуваннями доведемо, що $-a_{m_j}^- < S_q - M \leq 0$.
Оберемо довільне S_q. Зауважимо, що $S_q^{\text{до останнього від'ємного}} \leq S_q \leq S_q^{\text{до останнього додатного}}$. Значить, звідси
$-a_{m_{i-1}}^+ < S_q - M < a_{k_i}^+$.
Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то за необхідною умовою, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Значить, $a_n^+ \to 0$, $a_n^- \to 0$ як підпослідовності $\{a_n\}$. Внаслідок у нерівності $-a_{m_{i-1}}^- < S_q - M < a_{k_i}^+$ спрямуємо $q \to \infty$, тоді звідси $i \to \infty$, внаслідок чого $a_{m_{i-1}}^-, a_{k_i}^+ \to 0$ як відповідні підпослідовності $\{a_n^+\}, \{a_n^-\}$. Значить, залишилося $\lim_{q \to \infty} S_q = \sum_{j=1}^{\infty} b_j = M$.

Тепер фіксуємо довільне число $M < 0$. Насправді, вся ця процедура абсолютно аналогічна. Тільки ми там спочатку брали додатні числа, потім від'ємні – а в цьому випадку робиться навпаки.

Випадок $M = +\infty$.
Для числа $1 + a_1^- > 0$ буде існувати $k_1 \in \mathbb{N}$, для якого $a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+ > 1 + a_1^-$.
Для числа $2 + a_2^- + a_1^- > 0$ буде існувати $k_2 \in \mathbb{N}$, для якого $a_1^+ + \dots + a_{k_2}^+ > 2 + a_1^- + a_2^-$. Іншими словами, $(a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+) - a_1^- + (a_{k+1}^+ + \dots + a_{k_2}^+) > 2 + a_2^-$.
$\vdots$
У нас виникне ряд $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = (a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+) - a_1^- + (a_{k_1+1}^+ + \dots + a_{k_2}^+) - a_2^- + \dots$ – це перестановочний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Зауважимо, що всі часткові суми перестановочного ряду $S_q \geq i + a_i^-$, тому при $i \to \infty$ ми отримаємо $\lim_{q \to \infty} S_q = \sum_{j=1}^{\infty} = +\infty = M$.

Випадок $M = -\infty$ аналогічний.
Доведення не найкомпактніше, але намагався розписати більше для кращого прояснення. ■

Example 1.5.2 Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Неважко показати, що цей ряд збіжний умовно.
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = ?$
$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) =$
$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln(2n)\right) - \left(1 + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln 2 \overset{n\to\infty}{\to} \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2$.
У цьому випадку γ – константа Ойлера-Маскероні (див. попередній пдф).
$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln 2$.
Таким чином, звідси $\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. Тобто ми довели, що
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2$.
Тепер переставимо доданки ряду та обчислимо ось таку суму:
$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = ?$

$S_{3n} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n-1} =$
$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) =$
$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-2}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) =$
$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-2} - \ln(4n-2)\right) + \ln(4n-2) -$
$- \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \ln(2n-1)\right) - \frac{1}{2}\ln(2n-1) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) - \frac{1}{2}\ln n \overset{n\to\infty}{\to}$
$\to \gamma - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2.$
$S_{3n+1} = S_{3n} + \frac{1}{4n+1} \to \frac{3}{2}\ln 2 \qquad S_{3n+2} = S_{3n+1} + \frac{1}{4n+3} \to \frac{3}{2}\ln 2.$
Таким чином, після перестановки отримаємо нове значення:
$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2}\ln 2.$

1.6 Добуток Коші

Definition 1.6.1 Задано $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ – два ряди.
Добутком Коші називають ось такий ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \overset{\text{позн.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j,$$

де кожний член c_k визначається ось таким чином:

$$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$$

Example 1.6.2 Задано два ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Зауважимо, що ці два ряди збіжні за Ляйбніцом, проте добуток Коші, тобто $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ буде розбіжним. Дійсно, маємо
$c_k = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{\sqrt{l+1}} \frac{(-1)^{k-l}}{\sqrt{k-l+1}} = (-1)^k \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{l+1}\sqrt{k-l+1}}$
$|c_k| = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{l+1}\sqrt{k-l+1}} \overset{\text{нер-ть Коші}}{\geq} \sum_{l=0}^{k} \frac{2}{(l+1)+(k-l+1)} = \frac{2(k+1)}{k+2}.$
Тоді через цю оцінку матимемо, що $c_k \not\to 0$ при $k \to \infty$. Порушується необхідна ознака збіжності, тому добуток Коші буде розбіжним.
Тобто добуток двох збіжних рядів не обов'язково може давати збіжний ряд.

Example 1.6.3 Задамо два ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, де $a_n = \{2, 2, 2^2, 2^3, \dots\}$ та $b_n = \{-1, 1, 1, \dots\}$. Цілком зрозуміло, що кожний такий ряд розбіжний, однак добуток Коші – збіжний. Дійсно, $c_0 = -2$ та решта $c_n = 0$.

Theorem 1.6.4 Задано $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ – два збіжні ряди, причому збігаються абсолютно. Тоді $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{j=0}^{\infty} b_j = ab$, тобто збіжний, причому теж абсолютно.

Proof.
Спочатку доведемо збіжність $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$. Маємо таку оцінку:

$$\sum_{n=0}^{k} |c_n| = |a_0 b_0| + |a_1 b_0 + a_1 b_0| + \dots + |a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k| \leq$$
$$\leq \sum_{i+j \leq k} |a_i||b_j| = (|a_0| + |a_1| + \dots + |a_k|)(|b_0| + |b_1| + \dots + |b_k|) = \sum_{n=0}^{k} |a_k| \sum_{n=0}^{k} |b_k|.$$

Оскільки ряди $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ та $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ збіжні, то всі часткові суми обмежені – разом з цим обмеженою буде $\sum_{n=0}^{k} |c_n|$, послідовність часткових сум. Послідовність часткових сум зростає для невід'ємних рядів. Отже, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ збігається абсолютно.

Тепер конкретно хочемо довести, що $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab$. Перш за все, оскільки цей ряд збігається абсолютно, то ми можемо переставити члени ряду – від цього сума не зміниться. Значить, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + \dots + a_0 b_n) \overset{\text{переставимо}}{=} \sum_{i,j \geq 0} a_i b_j$. Зауважимо, що
$(a_0 + a_1 + \dots + a_n)(b_0 + b_1 + \dots + b_n) = \sum_{i+j \leq N} a_i b_j = S_N$,
де $\{S_N, N \geq 0\}$ – підпослідовність послідовності всіх часткових сум ряду $\sum_{i,j \geq 0} a_i b_j$. Причому $S_n \to ab$. Але оскільки наш ряд збіжний, то послідовність всіх часткових сум збіжний, зокрема й будь-яка підпослідовність (яка прямує до ab). Тому послідовність всіх часткових сум має прямувати до ab, тобтто $\sum_{i,j \geq 0} a_i b_j = ab$. ■

Theorem 1.6.5 Теорема Мертенса
Задані $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ – два збіжні ряди, один з рядів збіжний абсолютно. Тоді $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{j=0}^{\infty} b_j = ab$ – збіжний абсолютно.

Proof.
Позначимо A_N, B_N, C_N – відповідні часткові суми ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ та добутку Коші. За умовою, $A_N \to A,\ B_N \to B$; припускаємо, що A_N збігається абсолютним чином. Розглянемо часткову суму C_N детальніше:
$C_N = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_N + \dots + a_N b_0) =$
$= a_0(b_0 + b_1 + \dots + b_N) + a_1(b_0 + \dots + b_{N-1}) + \dots + a_N b_0 = a_0 B_N + a_1 B_{N-1} + \dots + a_N b_0.$

Позначимо хвіст ряду $\beta_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$ – отримаємо наступне:
$C_N = a_0(B - \beta_N) + a_1(B - \beta_{N-1}) + \dots + a_N(B - \beta_0) =$
$= B(a_0 + a_1 + \dots + a_N) - a_0 \beta_N - a_1 \beta_{N-1} - \dots - a_N \beta_0 = BA_N - \gamma_N$, де
$\gamma_N = a_0 \beta_N + \dots + a_N \beta_0$.
Для того, щоб $C_N \to BA$ при $N \to \infty$, нам треба довести, що $\gamma_N \to 0$.
Перш за все, за умовою, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ збіжний, тоді звідси $\exists M : \forall k \geq 1 : \sum_{n=1}^{k} |a_n| \leq M$.
Ще до цього, за умовою, $\beta_N \to 0$ як хвіст, тоді $\exists M_1 : \forall N \geq 1 : |\beta_N| \leq M_1$.
Ми отримали константи M, M_1, із ними будемо далі працювати. Далі нехай $\varepsilon > 0$.
Оскільки $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ збіжний, то звідси $\exists m : \forall n \geq m : \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$.
Оскільки $\beta_N \to 0$, то звідси $\exists N_1 : \forall N \geq N_1 - m : |\beta_N| < \frac{\varepsilon}{2M}$.
$|\gamma_N| = |a_0 \beta_N + \dots + a_m \beta_{N-m} + a_{m+1} \beta_{N-(m+1)} + \dots + a_N \beta_0| \leq$

$\leq (|a_0\beta_N| + \dots + |a_m\beta_{N-m}|) + (|a_{m+1}\beta_{N-(m+1)} + \dots + a_N\beta_0| <$
$< \left(|a_0|\dfrac{\varepsilon}{2M} + \dots + |a_m|\dfrac{\varepsilon}{2M}\right) + (|a_{m+1}|M_1 + \dots + |a_N|M_1) =$
$= \dfrac{\varepsilon}{2M}(|a_0| + \dots + |a_m|) + M_1(|a_{m+1}| + \dots + |a_N|) < \dfrac{\varepsilon}{2M} \cdot M + M_1 \cdot \dfrac{\varepsilon}{2M_1} = \varepsilon.$ ∎

1.7 Нескінченні добутки

Думаю, на основні контенту даного пункту буде цілком зрозуміло скоро, чому я вирішив не відокремлювати йому окремий розділ.

Definition 1.7.1 Нескінченним добутком називають добуток нескінченної послідовності ненульових чисел $\{a_n, n \geq 1\}$:

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

Частковим добутком даного добутку називають добуток перших k членів:

$$P_k = \prod_{n=1}^{k} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$$

У такому випадку в нас виникає послідовність часткових добутків $\{P_k, k \geq 1\}$.

Якщо така послідовність часткових добутків є збіжною, то ряд $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ називають **збіжним** та **добуток** цього ряду дорівнює

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} a_n = \lim_{k\to\infty} P_k = P \neq 0$$

Якщо сам $P = 0$, то кажуть, що добуток **розбіжий дл нуля**. Інакше – просто **розбіжним**.

Proposition 1.7.2 Необхідна ознака збіжності добутку

Задано $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний. Тоді $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 1$.

Proof.

Дійсно, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{a_1 \dots a_{k-1}a_k}{a_1 \dots a_{k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{P}{P} = 1.$

Оскільки в числовій послідовності в нас ненульові члени, то всі переходи легітимні. ∎

Remark 1.7.3 Навпаки дане твердження не працює.

Example 1.7.4 Розглянемо добуток $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Зауважимо, що вираз під добутком $1 + \dfrac{1}{k} \to 1$ при $k \to \infty$. Однак даний добуток – розбіжний.

Дійсно, розглянемо частковий добуток $\displaystyle\prod_{n=1}^{k}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=1}^{k} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\dots\frac{k+1}{k} = k+1.$

Отримаємо, що в такому разі $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$. Отже, даний добуток – розбіжний.

Example 1.7.5 Доведемо, що $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{2^n}$ збіжний.

Розглянемо частковий добуток $P_k = \cos\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{2^2}\dots\cos\dfrac{1}{2^k}$. Помножимо та поділимо на $\sin\dfrac{1}{2^k}$, тож отримаємо:

$P_k = \cos\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{2^2}\dots\cos\dfrac{1}{2^{k-1}}\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{2^{k-1}}\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{2^k}} = \cos\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{2^2}\dots\cos\dfrac{1}{2^{k-2}}\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{1}{2^{k-2}}\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{2^k}} = \dots$

$= \dfrac{1}{2^k}\dfrac{\sin 1}{\sin\dfrac{1}{2^k}} \xrightarrow{k\to\infty} \sin 1.$

Example 1.7.6 Доведемо, що $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)$ збіжний.

$P_k = \prod_{n=2}^{k}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right) = \prod_{n=2}^{k}\frac{n^2}{n^2-1} = \prod_{n=2}^{k}\frac{n}{n-1}\prod_{n=2}^{k}\frac{n}{n+1} = k\cdot\frac{2}{k+1} \to 2.$

Theorem 1.7.7 Критерій збіжності добутку

$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln a_n$ – збіжний. (тут припускається, що всі члени $a_n > 0$).

При цьому маємо $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = e^{\sum_{n=1}^{\infty}\ln a_n}$.

На цьому етапі можна пояснити, чому добуток розбіжний в нулі. Просто тому що ряд буде розбіжним.

Proof.

Розглянемо часткову суму $S_k = \sum_{n=1}^{k}\ln a_n = \ln\prod_{n=1}^{k} a_n = \ln P_k$. Тобто звідси $P_k = e^{S_k}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний, тобто $P_k \to P \in \mathbb{R} \implies S_k \to \ln P$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний, тобто $S_k \to S \in \mathbb{R} \implies P_k \to e^S$. ■

Theorem 1.7.8 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ – збіжний $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний (тут вимагається $a_n \geq 0$).

Proof.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ – збіжний. Тоді за критерієм, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ має бути збіжним. Значить, $\ln(1+a_k) \to 0$ при $k\to\infty$, але тоді $a_k = e^{\ln(1+a_k)}-1 \to 0$. Значить, $\ln(1+a_k) \sim a_k$, тож ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний.

$\boxed{\Leftarrow}$ майже аналогічно. ■

Example 1.7.9 Зокрема $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ збіжний, оскільки $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збіжний.

Remark 1.7.10 Теорема має місце і тоді, коли $-1 < u_n \leq 0$.

Theorem 1.7.11 Припустимо, що $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ – збіжні. Тоді $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ – збіжний.

Proof.

Нам достатньо буде довести, що збіжним буде ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$.

Зауважимо, що $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\ln(1+a_n))$ збіжний, тому що $a_n-\ln(1+a_n) \sim \frac{1}{2}a_n^2$ при $n\to\infty$, (за рахунок того, що $a_n \to 0$), при цьому $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ збіжний. Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ збіжний за рахунок збіжності $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

Definition 1.7.12 Добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln a_n \text{ – абсолютно збіжний.}$$

Remark 1.7.13 Для абсолютно збіжного добутка можлива будь-яка перестановка множників без зміни значення добутка.

2 Вступ до $\mathbb{R}^m$ (багатовимірний математичний аналіз)

На даному етапі допускається, що читач володіє матеріалом лінійної алгебри. Знати треба вже наступне: векторні простори та суміжні поняття, лінійні оператори, евклідові простори, нормовані простори. Буде корисно також знати якусь теорію метричних просторів, але це не обов'язково, бо все одно я буду проходитися з нуля.

2.1 Про простір $\mathbb{R}^m$

Definition 2.1.1 Простір $\mathbb{R}^m$ містить об'єкти, що називаються **арифметичними векторами**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

де кожний елемент $x_j \in \mathbb{R}$. Ці елементи x_i ще називають **координатами**.

Візьмемо довільні вектори $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$. Ми можемо створити операції **додавання** та **множення на скаляр** таким чином:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_m + y_n \end{pmatrix} \qquad \alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Також позначимо $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – це буде так званий нульовий вектор.

Proposition 2.1.2 Виконуються ось такі влстивості $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^m,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$;
2) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$;
3) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$;
4) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$;
5) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$;
6) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$;
7) $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$;
8) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Ці вісім пунктів свідчать про те, що $\mathbb{R}^m$ утворює лінійний простір.
Вправа: довести.

Надалі ми ще будемо використовувати **скалярний добуток**, що визначається таким чином:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_my_m$$

Proposition 2.1.3 Виконуються ось такі властивості $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^m,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$:
1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;
2) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0, \qquad (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$;
3) $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y})$;
4) $(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$.

Ці чотири властивості свідчать про те, що $(\vec{x}, \vec{y})$ дійсно задає скалярний добуток. При цьому в такому разі простір $\mathbb{R}^m$ буде вже евклідовим.
Вправа: довести.

Далі визначимо ще **норму** вектора ось таким чином:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$$

Ця штука, насправді, є узагальненнням такого поняття як довжина вектора.

Theorem 2.1.4 Нерівність Коші-Буняковського
$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$.
Можна подивитися доведення в pdf лінійної алгебри.

Proposition 2.1.5 Виконуються ось такі властивості $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$:
1) $\|\vec{x}\| \geq 0 \qquad \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$;
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha \vec{x}\| = \alpha \|\vec{x}\|$;
3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.
Отже, заданий $\|\vec{x}\|$ утвроює норму. Відповідно, $\mathbb{R}^m$ буде нормованим простором.
Вправа: довести.

Також нас ще цікавить **відстань** між двома векторами. Обчислити це можна таким чином:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| \overset{\text{якщо розписати}}{=} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}$$

Буквально так само ми рахували відстань між точками в одновимірному випадку.

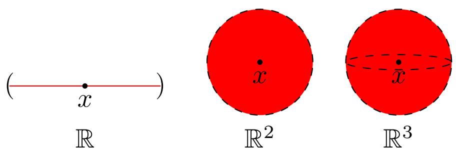
Proposition 2.1.6 Виконуються такі властивості $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^m$:
1) $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$;
2) $d(\vec{y}, \vec{x}) = d(\vec{x}, \vec{x})$;
3) $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$.
Ці три властивості дають підстави нам казати, що $d(\vec{x}, \vec{y})$ задає відстань між двома об'єктами. У такому разі простір $\mathbb{R}^m$ називають метричним.
Вправа: довести.

2.2 Топологія та принцип аналіза в $\mathbb{R}^m$

Означеня будуть абсолютно аналогічними, просто тепер буде випадок з векторами.

Definition 2.2.1 **ε-околом** точки $\vec{x}$ будемо називати таку множину:

$$U_\varepsilon(\vec{x}) = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon\}$$



Її ще також називають **відкритим шаром** з радіусом ε в центрі точки $\vec{x}$ та позначають як $B(\vec{x}, \varepsilon)$. Але про це можна детально побачити в розділі про метричні простори.

Definition 2.2.2 Задамо множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та елемент $\vec{a} \in A$.
Точку $\vec{a}$ називають **внутрішньою**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{a}) \subset A$$

А множина A називається **відкритою**, якщо кожна її точка – внутрішня.

Definition 2.2.3 Задамо множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та елемент $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$.
Точку $\vec{a}$ називають **граничною** множини A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{a} : \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{a})$$

А множина A називається **замкненою**, якщо вона містить всі граничні точки.

Definition 2.2.4 Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та точка $\vec{x} \in A$.
Точка $\vec{x}$ називається **ізольованою**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A = \{\vec{x}\}$$

Також решта тверджень будуть схожі на ті твердження, що були при топології $\mathbb{R}$. Доведення теж аналогічні, тому доводити я повторно не буду, просто залишу формулювання.

Proposition 2.2.5 Якщо $\{A_\lambda\}$ – сім'я відкритих підмножин, то $\bigcup\limits_{\lambda} A_\lambda$ – відкрита.

Proposition 2.2.6 Якщо $\{A_\lambda\}$ – скінченна сім'я відкритих підмножин, то $\bigcap\limits_{\lambda} A_\lambda$ – відкрита.

Proposition 2.2.7 $\vec{a}$ – гранична точка $A \subset \mathbb{R}^m \iff \forall \varepsilon > 0 : A \cap U_\varepsilon(\vec{a})$ – нескінченна множина.

Proposition 2.2.8 A – відкрита множина $\iff A^c$ – замкнена множина.

Proposition 2.2.9 Точка $\vec{x} \in A$ – ізольована $\iff \vec{x}$ – не гранична для A.

Proposition 2.2.10 $\mathbb{R}^m, \emptyset$ – одночасно відкриті та замкнені множини.

Proposition 2.2.11 Відкритий шар $B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$ є дійсно відкритим. Замкнений шар $B[\vec{a}, r] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| \le r\}$ є дійсно замкненим.

Proof.
Нехай $\vec{x} \in B(\vec{a}, r) \implies \|\vec{x} - \vec{a}\| < r$. Встановимо $\varepsilon = r - \|\vec{x} - \vec{a}\|$.
Тоді $\vec{y} \in U_\varepsilon(\vec{x}) \implies \|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon \implies \|\vec{y} - \vec{a}\| = \|\vec{y} - \vec{x} + \vec{x} - \vec{a}\| \le \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon + \|\vec{x} - \vec{a}\| = \varepsilon \implies \vec{y} \in B(\vec{a}, r)$.
Отже, $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset B(\vec{a}, r)$, так для кожної точки $\vec{x} \in B(\vec{a}, r)$. А тому множина $B(\vec{a}, r)$ – відкрита.

$B[\vec{a}, r] = \mathbb{R}^m \setminus B(\vec{a}, r) = \mathbb{R}^m \cap B^c(\vec{a}, r)$ - обидві множини є замкненими. Тому перетин замкнена. ■

Definition 2.2.12 Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$.
Вона називається **обмеженою**, якщо

$$\exists R > 0 : \forall \vec{x} \in A : \|\vec{x}\| \le R$$

Або інакше це можна записати таким чином:

$$\exists R > 0 : A \subset U_R(\vec{0})$$

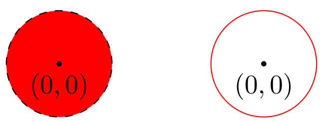
Example 2.2.13 Зокрема одинична сфера $S^{m-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x}\| = 1\}$ буде обмеженою. Досить важлива множина, бо з нею ми будемо неодноразово працювати.

Зараз буде нове поняття, яке не було бажання вводити в мат. аналізі в $\mathbb{R}$.

Definition 2.2.14 Задамо множину $A \subset \mathbb{R}^m$.
Межею множини A називають множину точок, в кожному околі яких є точки з A та з A^c. Тобто це можна записати так:

$$\partial A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A \neq \emptyset \text{ та } U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A^c \neq \emptyset\}$$

Example 2.2.15 Зокрема розглянемо відкриту двовимірну кулю $B(\vec{0}, 1)$. Зауважимо, що $\partial B(\vec{0}, 1) = S^1$ – одинична сфера (тобто коло в нашому випадку).



$B(\vec{0}, 1)$ $\qquad$ $\partial B(\vec{0}, 1) = S^1$

Перше червоне – це відкрита куля. Друге червоне – його межа.

Також специфічні приклади. Маємо $\partial \emptyset = \emptyset$, а також $\partial \mathbb{R}^m = \emptyset$ (тут тіпа безмежна множина).

Example 2.2.16 Якщо повернутися до одновимірного випадку, то $\partial(a, b) = \partial(a, b] = \partial[a, b) = \partial[a, b] = \{a, b\}$. У нас тут межа містить точки, які ніяк не зв'язуються на числовій прямій, тому ми й не розглядали межі.

Proposition 2.2.17 Маємо $A \subset \mathbb{R}^m$. Тоді межа ∂A – замкнена множина.

Proof.
Нехай $\vec{x}$ – гранична точка ∂A; тоді треба довести, що $\vec{x} \in \partial A$.
Для кожного $\varepsilon > 0$, за умовою, існує $\vec{y} \in \partial A, \vec{y} \neq \vec{x}$, для якого $\|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon$. Оскільки $\vec{y} \in \partial A$, то тоді існують $\vec{z}_1 \in A, \vec{z}_2 \in A^c$, які не збігаються з точкою $\vec{y}$ і для яких $\|y - \vec{z}_1\| < \varepsilon,\ \|y - \vec{z}_2\| < \varepsilon$. Маючи нерівність трикутників для норми, маємо $\|\vec{x} - \vec{z}_1\| < 2\varepsilon, \|\vec{x} - \vec{z}_2\| < 2\varepsilon$. Оскільки це виконується для всіх $\varepsilon > 0$, то звідси доводимо $\vec{x} \in \partial A$. ■

Corollary 2.2.18 S^m – одинична сфера – замкнена множина.

2.3 Границя послідовності

Definition 2.3.1 Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ називається **границею** послідовності векторів $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| < \varepsilon$$

Позначення: $\lim\limits_{n \to \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$.

Theorem 2.3.2 Для послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ існує $\lim\limits_{n \to \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a} \iff$
$\iff$ для всіх координат послідовності $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ існують $\lim\limits_{n \to \infty} a_j^{(n)} = a_j, j = \overline{1, m}$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| < \varepsilon$.

У нас границя визначається вектором $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$. Тоді $\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_1^{(m)} - a_m)^2}$

$\implies \forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)} - a_j| = \sqrt{(a_j^{(n)} - a_j)^2} < \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_1^{(m)} - a_m)^2} < \varepsilon$.
Отже, $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_j^{(n)} = a_j$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall j = \overline{1, m} : \exists \lim\limits_{n \to \infty} a_j^{(n)} = a_j$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |a_j^{(n)} - a_j| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.
$\implies \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \dfrac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$.
Отже, $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$. ■

Definition 2.3.3 Послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| < \varepsilon$$

Theorem 2.3.4 Критерій Коші
$\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – збіжна $\iff$ $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – фундаментальна.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – збіжна, тобто $\forall j = \overline{1, m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ – збіжні. Тоді всі вони – фундаментальні за критерієм Коші мат.аналіза $\mathbb{R}$, тобто
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_j : \forall n, k \geq N_j : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.
$\implies \exists N = \max\{N_1, \dots, N_m\} : \forall n, k \geq N :$
$\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1^{(k)})^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m^{(k)})^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \dfrac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$.
Отже, наша послідовність – фундаментальна.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – фундаментальна, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| < \varepsilon$.
Тоді $\forall j = \overline{1, m} : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \varepsilon$ (зрозуміло), тобто $\forall j = \overline{1, m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ – фундаментальні.
Отже, вони всі збіжні, а тому $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – збіжна. ■

Definition 2.3.5 Послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається **обмеженою**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$$

Definition 2.3.6 Підпослідовність послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається послідовність $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$, де $\{n_l, l \geq 1\}$ – строго зростаюча послідовність в $\mathbb{N}$.

Theorem 2.3.7 Теорема Бользано-Ваєрштрасса
Будь-яка обмежена послідовність векторів має збіжну підпослідовність векторів.

Proof.
Маємо обмежену послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$, тобто $\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$.
Тоді кожна координата є обмеженою, оскільки $\forall j = \overline{1,m} : |a_j^{(n)}| \leq \sqrt{\left|a_1^{(n)}\right|^2 + \dots + \left|a_m^{(n)}\right|^2} \leq C$.
Тобто всі послідовності $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ – обмежені.
Розглянемо $\{a_1^{(n)}, n \geq 1\}$ – обмежена. Тоді існує збіжна підпослідовність $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$ (теорема Бользано-Ваєрштраса в мат.аналізі $\mathbb{R}$).
Розглянемо підпослідовність $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$. Вона також є обмеженою, тому всі координатні послідовності – обмежені.
Розглянемо $\{a_2^{(n_l)}, l \geq 1\}$ – обмежена. Тоді існує збіжна підпідпослідовність $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$. Оскільки підпослідовність $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$ – збіжна, то збіжною буде й підпідпослідовність $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$.
Розглянемо підпідпослідовність $\{\vec{a}^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ – за аналогічними міркуваннями, теж обмежена.
Розглянемо підпідпослідовність $\{a_3^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ – обмежена. Тоді існує збіжна підпідпідпослідовність $\{a_3^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$. Оскільки підпідпослідовності $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$, $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ – збіжні, то збіжними будуть підпідпідпослідовності $\{a_1^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$, $\{a_2^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$.
$\vdots$
Після m кроків отримаємо підпослідовність $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$, у якій всі координатні послідовності є збіжними. Тоді $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$ – збіжна. ■

Proposition 2.3.8 Задані дві послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}, \{\vec{b}^{(n)}, n \geq 1\}$, такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)} = \vec{b}$.
Тоді:
1) $\forall c \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} c\vec{a}^{(n)} = c \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)} + \vec{b}^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} + \lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}, \lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)}\right)$.

Proof.
1),2) *випливає з властивостей границь в* $\mathbb{R}$, *якщо розглянути покоординатну збіжність.*

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_1^{(n)} b_1^{(n)} + \dots + a_m^{(n)} b_m^{(n)}) = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m = (\vec{a}, \vec{b}) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}, \lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)}\right)$.
Всі властивості доведені. ■

Example 2.3.9 Розглянемо $\vec{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \dfrac{n-1}{n} & \dfrac{2n^2-1}{n^2} & \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}^T$ – послідовність векторів в $\mathbb{R}^4$. Обчислимо її границю. Ми можемо обчислити покоординатно, згідно з теоріями:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_2^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1.$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_3^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-1}{n^2} = 2.$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_4^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e.$
Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \dfrac{n-1}{n} & \dfrac{2n^2-1}{n^2} & \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & e \end{pmatrix}^T.$

Theorem 2.3.10 Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$.
$\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ гранична точка для $A \iff \exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\vec{x}^0$ – гранична точка для A, тобто $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ – нескінченна.
Зафіксуємо $\varepsilon = \dfrac{1}{n} \implies \forall \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \dfrac{1}{n}$. Тоді $\forall j = \overline{1,m} : |x_j^{(n)} - x_j^0| < \dfrac{1}{n}$.
За теоремою про 2 поліцаїв, отримаємо: $\forall j = \overline{1,m} : x_j^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_j^0$. Із покоординатної збіжності випливає, що $\vec{x}^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}^0$ для послідовності $\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\exists \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$. Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \varepsilon$.
$\implies \forall n \geq N : \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ – тобто нескінченна $\implies \vec{x}^0$ – гранична точка. ■

Example 2.3.11 Зокрема одинична сфера $S^m = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x}\| = 1\}$ буде замкненою.
Нехай $\vec{\xi} \in S^m$, хочемо показати, що буде вона граничною. Розглянемо послідовність $\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset S^m$ таким чином:
$x_1^{(n)} = \xi_1 + \dfrac{1}{n}$, починаючи з деякого номера при $\xi_1 \neq 1$ $\qquad x_1^{(n)} = \xi_1 - \dfrac{1}{n}$ при $\xi_1 = 1$
$x_2^{(n)} = \xi_2$
$\vdots$
$x_{m-1}^{(n)} = \xi_{m-1}$
$x_m^{(n)} = \sqrt{1 - \left(x_1^{(n)}\right)^2 - \dots - \left(x_{m-1}^{(n)}\right)^2}$.
Зауважимо, що $\forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{\xi}$, а також $\vec{x}^{(n)} \to \vec{\xi}$ при $n \to \infty$.
Тепер розглянемо $\vec{\xi} \notin S^m$, тобто звідси $\left[\begin{array}{l}\|\xi\| < 1 \\ \|\xi\| > 1\end{array}\right.$.
!Припустимо, що $\vec{\xi}$ – гранична точка для S^m. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{x} \in S^m : \vec{x} \neq \vec{\xi} : \|\vec{x} - \vec{\xi}\| < \varepsilon$.
У випадку $\|\vec{\xi}\| > 1$ ми маємо $1 < \|\vec{\xi}\| = \|\vec{\xi} - \vec{x} + \vec{x}\| \leq \|\vec{\xi} - \vec{x}\| + \|\vec{x}\| < 1 + \varepsilon$.
Оскільки виконано $\forall \varepsilon > 0$, то звідси $\|\vec{\xi}\| = 1$, що неможливо.
У випадку $\|\vec{\xi}\| < 1$ ми маємо $\varepsilon > \|\vec{x} - \vec{\xi}\| \geq |\|\vec{x}\| - \|\vec{\xi}\|| = |1 - \|\vec{\xi}\|| = 1 - \|\vec{\xi}\| > 0 \implies \varepsilon > 1 - \|\vec{\xi}\| > 0$.
Оскільки виконано $\forall \varepsilon > 0$, то звідси $\|\vec{\xi}\| = 1$, що неможливо.
У двох випадках отримали суперечність!
Таким чином, ми довели, що S^m – закмнена множина.

2.4 Функція від декількох змінних. Границя функції

Ми будемо розглядати функції вигляду $f\colon A \to \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^m$. Тобто ця функція має аргумент $\vec{x}$, а повертає деяке дійсне число $f(\vec{x})$. Проте оскільки $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix}^T$ складається з m дійсних чисел, то ми можемо функцію сприймати як $f(x_1, \dots, x_m)$, тобто це функція з m аргументами.

Example 2.4.1 Розглянемо такі приклади:
1) Маємо функцію $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\} \to \mathbb{R}$, що задана як $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;
2) Маємо функцію $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, що задана як $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m) = x_1 x_2^2 \dots x_m^m$.

Definition 2.4.2 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка для A.
Число a називається **границею функції** $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$ **в точці** $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - a| < \varepsilon \text{ - def. Коші}$$
$$\forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\vec{x}^{(n)}) = a \text{ - def. Гейне}$$

Позначення: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = a$.

Theorem 2.4.3 Означення Коші $\iff$ Означення Гейне.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Proposition 2.4.4 Арифметичні властивості
Задані функції $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка для A. Відомо, що $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = a, \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} g(\vec{x}) = b$. Тоді:
1) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} cf(\vec{x}) = ca, \forall c \in \mathbb{R}$;

2) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} (f(\vec{x})+g(\vec{x})) = a+b$;
3) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x})g(\vec{x}) = ab$;
4) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \dfrac{a}{b}$ при $b \neq 0$.
Всі вони випливають із арифметичних послідовностей та означення Гейне.

Theorem 2.4.5 Критерій Коші
Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка для A.
$\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \vec{x_1}, \vec{x_2} \in A : \|\vec{x_1} - \vec{x_2}\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2})| < \varepsilon$.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Example 2.4.6 Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)} \left(\dfrac{y}{x} + \cos(xy)\right)$. Можна позначати це інакше: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to\pi}} \left(\dfrac{y}{x} + \cos(xy)\right)$.

$$\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \left(\frac{y}{x} + \cos(xy)\right) = \lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{y}{x} + \lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \cos(xy) = \frac{\pi}{1} + \cos\pi = \pi - 1.$$

Example 2.4.7 Покажемо, що не існує границі $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.
Для доведення скористаємось означенням Гейне. Візьмемо дві послідовності:
$\{(x_n,y_n), n \geq 1\}$ так, щоб $y_n = x_n$, а також $(x_n,y_n) \to (0,0)$. Тоді $\dfrac{2x_ny_n}{x_n^2+y_n^2} = \dfrac{2x_n^2}{2x_n^2} \to 1$.
$\{(x_n,y_n), n \geq 1\}$ так, щоб $y_n = -x_n$, а також $(x_n,y_n) \to (0,0)$. Тоді $\dfrac{2x_ny_n}{x_n^2+y_n^2} = \dfrac{-2x_n^2}{2x_n^2} \to -1$.
Можна конкретизувати, сказати $x_n = \dfrac{1}{n}$, а можна цього не робити, напевно. У будь-якому випадку, ми показали, що не існує границі.
Тобто ми прямували до точки $(0,0)$ з двох сторін: вздовж прямої $y = x$ та $y = -x$.

Theorem 2.4.8 Границя в полярних координатах
Задано функцію $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Припустимо, що $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = F_1(\rho)F_2(\varphi)$, причому $\lim\limits_{\rho\to 0} F_1(\rho) = 0$ та $F_2(\varphi)$ – обмежена. Тоді $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Proof.
Маємо $\lim\limits_{\rho\to 0} F_1(\rho) = 0 \implies \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta : \forall\rho : |\rho| < \delta \implies |F_1(\rho)| < \varepsilon$.
Також F_2 – обмежена, тобто $\exists M > 0 : \forall\varphi : |F_2(\varphi)| < M$.
Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді існує таке $\delta > 0$, що $\forall (x,y)$, якщо $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2} = |\rho| < \delta$, то звідси $|f(x,y)| = |f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)| = |F_1(\rho)||F_2(\varphi)| < M\varepsilon$.
Таким чином, дійсно, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. ■

Example 2.4.9 Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.
Маємо $x = \rho\cos\varphi$ та $y = \rho\sin\varphi$. Тоді функція $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2} = \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$.
Ми змогли розбити на функції $F_1(\rho) = \rho^2 \xrightarrow{\rho\to 0} 0$ та $F_2(\varphi) = \cos^2\varphi\sin^2\varphi$ – обмежена, бо $|F_2(\varphi)| \leq 1$.
Таким чином, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 0$.

Remark 2.4.10 Якщо так станеться, що для двох різних кутів θ при $\rho \to 0$ ми отримаємо два різних ліміта, то тоді $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Definition 2.4.11 Число $L = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ називається **повторною границею**, якщо

$$\exists \lim_{y\to y_0} f(x,y) = g(y)$$

Аналогічно визначається $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

Останнє дається для загального знання, таке ми точно використовувати не будемо. Тут надто багато плутанини з ними.

Example 2.4.12 Маємо функцію $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}$.
Якщо шукати $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, то вона не існує, тому що при фіксованому x ми маємо порахувати границю від $\sin\dfrac{1}{y}$, якого не існує. Також не існує $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ за аналогічними міркуваннями.
Проте! Подвійна границя $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Дійсно,
$\left|x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}\right| \le \left|x\sin\dfrac{1}{y}\right| + \left|y\sin\dfrac{1}{x}\right| \le |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon$.
Остання оцінка отримана в силу $\|(x,y)\| < \delta$, кладемо $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ – границя доведена.

Example 2.4.13 Маємо функцію $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \qquad \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$.
Проте! Подвійної границі $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує. Дійсно, якщо $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$, то тоді
$f(x,y) = \dfrac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2} = \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi$.
Для різного напрямку кривої отримаємо різні границі, а тому не існує. Цим активно зловживати не будемо.

Remark 2.4.14 Окремо можуть виникнути границі вигляду $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y)$. У такому разі необхідні уточнення, що мається увазі під цим лімітом. Або дивитись на контекст задачі.

Example 2.4.15 Маємо $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$. У даному контексті мається на увазі, що x, y робимо скільки завгодно великими одночасно.
Маємо ось таку оцінку: $0 \le (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = \dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}} \le \dfrac{(x+y)^2}{e^{x+y}}$.
Оскільки $x > 0, y > 0$ в силу характеру прямування, то ця нерівність справедлива. Цілком зрозуміло, що при $x \to +\infty, y \to +\infty$ одночасно маємо $x + y \to +\infty$, а тому $\dfrac{(x+y)^2}{e^{x+y}} \to 0, x+y \to +\infty$.
Таким чином, $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)} = 0$.

2.5 Неперервність функції

Definition 2.5.1 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – гранична точка.
Функція f називається **неперервною в точці** $\vec{x}^0$, якщо $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0)$. В будь-якій ізольованій точці $\vec{x}^0$ функція f також неперервна.
Функція f називається **неперервною на множині** A, якщо в $\forall \vec{x} \in A : f$ – неперервна.

Remark 2.5.2 Можна було спочатку дати означення через ε-δ мову, а згодом прийти до еквівалентного означення, як ми це робили в мат. аналізі $\mathbb{R}$, однак буде все аналогічно.

Proposition 2.5.3 Задані функції $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – гранична точка. Відомо, що f, g – неперервні в точці $\vec{x}^0$. Тоді:
1) cf - неперервна в точці $\vec{x}^0, \forall c \in \mathbb{R}$;
2) $f + g$ - неперервна в точці $\vec{x}^0$;
3) fg - неперервна в точці $\vec{x}^0$;
4) $\dfrac{f}{g}$ - неперервна в точці $\vec{x}^0$, якщо $g(\vec{x}^0) \ne 0$.
Випливають з властивостей границь функцій та неперервності.

Theorem 2.5.4 Наступні функції є неперервними на своїй множині A:
1) $f(\vec{x}) = const$ – константа, $A = \mathbb{R}^m$;
2) $f(\vec{x}) = x_j, j = \overline{1,m}$ – координата, $A = \mathbb{R}^m$;
3) $P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum\limits_{\substack{0\le k_1\le n_1\\ 0\le k_2\le n_2\\ \dots\\ 0\le k_m\le n_m}} a_{k_1k_2\dots k_m}\cdot x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_m^{k_m}$ – многочлен від m змінних, $A = \mathbb{R}^m$;

4) $R(x_1, \ldots, x_m) = \dfrac{P(x_1, \ldots, x_m)}{Q(x_1, \ldots, x_m)}$ – раціональна функція від m змінних, $A = \mathbb{R}^m \setminus \{\vec{x} : Q(\vec{x}) = 0\}$.

1) Все зрозуміло.

2) $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)| = |x_j - x_j^0| < \varepsilon$, *тому встановлюється* $\delta = \varepsilon$.

3) Безпосередньо випливає з (TODO: лінкування) як сума та добуток функцій 1),2).

4) Безпосередньо випливає з (TODO: лінкування) як частка двох функцій 3).

Example 2.5.5 Доведемо, що функція $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ неперервна на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Для цього покажемо, що $\sqrt{x^2 + y^2}$ – неперервна в деякій точці $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Дійсно,
$|\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}| = \dfrac{|x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2|}{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \leq \dfrac{|x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \to 0$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$.
Ми вже знаємо, що $f(x, y) = x^2 + y^2$ – неперервна в точці (x_0, y_0), а тому $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0}(x^2+y^2) = x_0^2 + y_0^2$, тож вище все правильно. Отже, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$.
А це й доводить неперервність функції f в будь-якій точці $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Example 2.5.6 Взагалі-то кажучи, про точки розриву в матані $\mathbb{R}^m$ ніхто не розповідає, бо не сильно це й треба, але хай буде даний приклад. Дослідити на розривність функцію $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^3 + y^3}$.
Точки, де відбувається розрив – це точки $x = -y$. Тобто маємо $(x, y) = (a, -a), a \in \mathbb{R}$ – точка розриву.

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{x + y}{x^3 + y^3} = \lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{3a^2}, & a \neq 0 \\ \infty, & a = 0 \end{cases}.$$

Отже, маємо $(0, 0)$ – точка нескінченного розриву та $(a, -a), a \neq 0$ – точка усуненого розриву.

Theorem 2.5.7 Теорема Варштраса 1, 2
Задано множину A – замкнена та обмежена; функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ – неперервна на A. Тоді:

1. f – обмежена на A;
2. $\exists \left[\begin{matrix} \vec{x}^* \in A \\ \vec{x}_* \in A \end{matrix}\right. : \left[\begin{matrix} f(\vec{x}^*) = \max\limits_{\vec{x}\in A} f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}_*) = \min\limits_{\vec{x}\in A} f(\vec{x}) \end{matrix}\right.$.

Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Definition 2.5.8 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$.
Функція f називається **рівномірно неперервною** на множині A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x_1}, \vec{x_2} \in A : \|\vec{x_1} - \vec{x_2}\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2})| < \varepsilon$$

Theorem 2.5.9 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ – рівномірно неперервна на A. Тоді вона є неперервною на A.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Theorem 2.5.10 Теорема Кантора
Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та A – замкнена, обмежена. Відомо, що f – неперевна на A. Тоді вона є рівномірно неперервною на A.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

2.6 Символіка Ландау

Definition 2.6.1 Задані функції $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}$ – гранична точка A.
Функція f називається **O-великою** від функції g в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists L > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies |f(\vec{x})| \leq L|g(\vec{x})|$$

Позначення: $f(\vec{x}) = O(g(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0$.
Функція f називається **о-малою** від функції g в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies |f(\vec{x})| < \varepsilon |g(\vec{x})|$$

Позначення: $f(\vec{x}) = o(g(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0$.

Всі властивості символік Ландау для функції від однієї змінної переходять на функцію від декількох змінних в силу аналогічності доведення.

Example 2.6.2 Зокрема $xy = o(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ при $(x,y,z) \to (0,0,0)$. Дійсно, $\left| \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right| \leq \dfrac{|x||y|}{\sqrt{x^2}} = |y| \to 0$ при $(x,y,z) \to (0,0,0)$. Отже, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$.

2.7 Границя та неперервність векторнозначної функції кількох змінних, символіка Ландау

Ми будемо розглядати вектор-функції кількох (або однієї) змінної вигляду $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}^m$.

Тобто тепер $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) \end{pmatrix}$.

Example 2.7.1 Маємо деяку функцію $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, що задана таким чином:
$\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$. Або зазвичай це пишуть так: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$.

Definition 2.7.2 Задано функцію $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A.
Вектор $\vec{b}$ називається **границею вектор-функції** $\vec{f}(\vec{x})$ **в точці** $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : ||\vec{x} - \vec{x}^0|| < \delta \Rightarrow ||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}|| < \varepsilon \text{ - def. Коші}$$
$$\forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \vec{f}(\vec{x}^{(n)}) = \vec{b} \text{ - def. Гейне}$$

Позначення: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$.

Theorem 2.7.3 Означення Коші $\iff$ Означення Гейне
Все аболютно аналогічно.

Proposition 2.7.4 Задано функцію $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A.
$\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{u} \iff \forall j = \overline{1,k} : \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f_j(\vec{x}) = u_j$.
Випливає із означення Гейне та покоординатної збіжності.

Proposition 2.7.5 Арифметичні властивості
Задані функції $\vec{f}, \vec{g} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка для A. Відомо, що
$\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{u}, \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{v}$. Тоді:
1) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} c\vec{f}(\vec{x}) = c\vec{u}, \forall c \in \mathbb{R}$;
2) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(t)) = \vec{u} + \vec{v}$;
3) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} (\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})) = (\vec{u}, \vec{v})$.
Всі вони випливають із векторних послідовностей та означення Гейне.

Remark 2.7.6 У випадку векторної функції $\vec{a} : A \to \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}$, оскільки прямування йде за дійсною множиною, то ми можемо визначти **границю зліва та справа** даної функції. Тут все зрозуміло, як виглядатиме означення.

Example 2.7.7 Знайти границю $\lim\limits_{t\to 0+0} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T$.
За одним твердженням, ми можемо покоординатно шукати границі:
$\lim\limits_{t\to 0+0} \dfrac{\sin 2t}{t} = 2 \qquad \lim\limits_{t\to 0+0} t^t = 1$.
Отже, $\lim\limits_{t\to 0+0} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Definition 2.7.8 Задана функція $f : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ - гранична точка.
Функція $\vec{f}$ називається **неперервною в точці** $\vec{x}^0$, якщо $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}^0)$.

Remark 2.7.9 Аналогічно сума неперервних функцій - неперервна; множення на скаляр - все одно неперервна. До речі, також скалярний добуток неперервний функцій - теж неперервна.

Remark 2.7.10 Ще тут виконується теорема Вейєрштраса 1, 2 для таких функцій.

Theorem 2.7.11 Задані множини $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^k$
Задані функції $\vec{f} : A \to B$ - неперервна в точці $\vec{x}^0$, $\vec{g} : B \to \mathbb{R}^n$ - неперервна в точці $\vec{f}(\vec{x}^0)$.
Тоді функція $h : A \to \mathbb{R}^n : h(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$ - неперервна в точці $\vec{x_0}$.
Доведення аналогічне як в матані $\mathbb{R}$.

Definition 2.7.12 Задані функції $\vec{f}, \vec{g} : A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ - гранична точка A.
Функція $\vec{f}$ називається **О-великою** від функції $\vec{g}$ в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists L > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x})\| \leq L\|\vec{g}(\vec{x})\|$$

Позначення: $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{O}(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0$.
Функція $\vec{f}$ називається **о-малою** від функції $\vec{g}$ в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x})\| < \varepsilon\|\vec{g}(\vec{x})\|$$

Позначення: $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{o}(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0$.

Corollary 2.7.13 $\vec{f}(\vec{x}) = o(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0 \iff \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}^0} \dfrac{\|\vec{f}(\vec{x})\|}{\|\vec{g}(\vec{x})\|} = 0$.

2.8 Крива в $\mathbb{R}^m$

Definition 2.8.1 **Кривою** в $\mathbb{R}^m$ називають множину значень вектор-функції: $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, причому $\vec{r}$ - неперервна на $[a, b]$:

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$$

Definition 2.8.2 Крива Γ називається **простою**, якщо

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \implies t_1 = t_2 \text{ або } \{t_1, t_2\} = \{a, b\}$$

Крива Γ називається **замкненою**, якщо $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
Просту та замкнену криву називають **жордановою**.

3 Диференційованість

3.1 Для функції із багатьма змінними

Definition 3.1.1 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
Функція f називається **диференційованою** в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R} : f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{o(||\Delta\vec{x}||)}$$

Тобто диференційованість означає, що поверхня навколо точки $\vec{x}$ дуже схожа на площину, що проходить через точку $\vec{x}$.

Example 3.1.2 Розглянемо функцію $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$ на $\mathbb{R}$. Вона є диференційованою в будь-якій точці (x_0, y_0). Дійсно, розпишемо різницю:
$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 - x_0y_0 - y_0^2) =$
$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0y_0 - x_0\Delta y - y_0\Delta x - \Delta x\Delta y - y_0^2 - 2y_0\Delta y - \Delta y^2 - x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2 =$
$= (2x_0 - y_0)\Delta x + (-x_0 - 2y_0)\Delta y + (\Delta x^2 - \Delta x\Delta y - \Delta y^2)$.
Залишилось довести, що $\Delta x^2 - \Delta x\Delta y - \Delta y^2 = o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Дійсно,
$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta x^2 - \Delta x\Delta y - \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin\varphi\cos\varphi - \rho^2\sin^2\varphi}{\rho} =$
$= \lim\limits_{\rho\to 0} \rho(\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi) = 0$.
Отже, $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (2x_0 - y_0)\Delta x + (-x_0 - 2y_0)\Delta y + \underset{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}{o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)}$.

Proposition 3.1.3 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що функція f – диференційована в точці $\vec{x}^0$. Тоді f – неперервна в точці $\vec{x}^0$.

Proof.
f – диференційована в точці $\vec{x}^0$, тобто $f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{o(||\Delta\vec{x}||)}$.
Або можна це записати інакше:
$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1(x_1 - x_1^0) + \dots + L_m(x_m - x_m^0) + \underset{\vec{x}\to\vec{x}^0}{o(||\vec{x} - \vec{x}^0||)} \implies \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0}(f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)) \boxed{=}$
Всі дужки прямують покоординатно до нуля, o-маленьке також, в силу н.м.
$\boxed{=} 0 \implies f$ – неперервна в точці $\vec{x}^0$. ■

Definition 3.1.4 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
Частинною похідною функції f за змінною x_j в точці $\vec{x}^0$ називають величину:

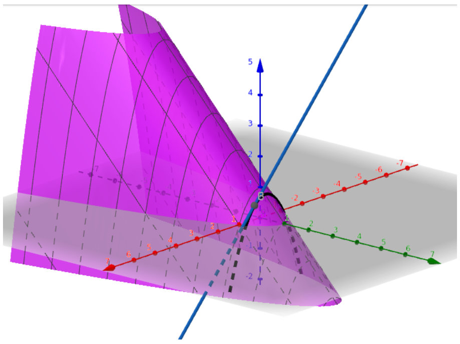
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim_{\Delta x_j\to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j}$$

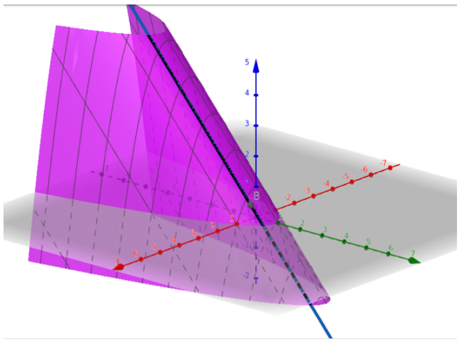
Якщо уважно придивитись на означення, то, насправді, ми просто підставили $x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0$ та отримали функцію $g(x_j) = f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0)$ – функція від одного агрументу x_j – та обчислили похідну цієї функції в точці x_j^0. Отже,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = g'(x_j^0)$$

Example 3.1.5 Маємо функцію $f(x, y) = 1 - x^2 - y$. Знайдемо всі її частинні похідні.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$

Сенс $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ – знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь OX. Аналогічно $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ – знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь OY.





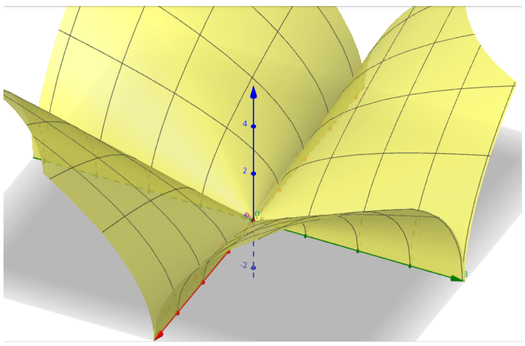
Таких дотичних прямих існують безліч, але про це згодом.

Proposition 3.1.6 Необхідна умова диференційовності
Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0 \in A$ - внутрішня точка. Тоді вона має частинні похідні в точці $\vec{x}^0$, причому $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = L_j$.

Proof.
f - диференційована в точці $\vec{x}^0$, тоді $\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R}:$
$f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1 \Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$.
У окремому випадку, встановити можна $\Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \Delta x_j & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$.
Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \dfrac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j} \overset{f \text{ – диференційована}}{=}$
$= \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \dfrac{L_1 \cdot 0 + \dots + L_j \Delta x_j + \dots + L_m \cdot 0 + o(|\Delta x_j|)}{\Delta x_j} = \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \dfrac{L_j \Delta x_j + o(\Delta x_j)}{\Delta x_j} = L_j$. ■

Remark 3.1.7 У зворотному напрямку це не завжди вірно.

Example 3.1.8 Маємо функцію $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Розглянемо її в околі точки $(x_0, y_0) = (0,0)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0$.
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\sqrt{|0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0$.
Тобто в точці (x_0, y_0) функція має частинні похідні. Проте виявляється, що в (x_0, y_0) вона не диференційована. Дійсно,
$f(\Delta x, \Delta y) = 0\Delta x + 0\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$, тобто
$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \overset{\text{полярна заміна}}{=} \lim\limits_{\rho \to 0} \sqrt{|\cos\varphi \sin\varphi|}$ – не існує, тому рівність вище не вірна.



Можливо виникне питання, а чи існують інші числа $(L_1, L_2) \neq (0,0)$. Ні. Це випливає з необхідної умови диференційованості.

Виникає тоді інше питання, а коли ми можемо гарантувати диференційованість через існування частинних похідних.

Theorem 3.1.9 Достатня умова диференційованості
Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що в деякому околі точки $\vec{x}^0$ існують всі частинні похідні, які неперервні в точці $\vec{x}^0$. Тоді f – диференційована в точці $\vec{x}^0$.

Ми будемо доводити при $m = 2$. Для більших аргументів – аналогічно, але більш технічна справа.

Proof.
Отже, дано $f(x, y)$ та в околі точці (x_0, y_0) існують частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, які неперервні в (x_0, y_0). Розглянемо приріст аргументу $\Delta x, \Delta y$ так, щоб ми були всередині околу точці (x_0, y_0). Нехай $\Delta x > 0, \Delta y > 0$, для інших все аналогічно.
$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \boxed{=}$
Позначу $h(t) = f(x_0+\Delta x, y_0+t), t \in [0, \Delta y]$. Тоді $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) = h(\Delta y) - h(0)$.
Функція h – диференційована на $[0, \Delta y]$, оскільки існує $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, яка неперервна. Тому $h \in C([0, \Delta y])$, а значить, за теоремою Лагранжа,
$h(\Delta y) - h(0) = h'(c_1)\Delta y, c_1 \in (0, y)$
$h'(t) = f'_t(x_0+\Delta x, y_0+t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+t)$
$\implies h(\Delta y) - h(0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1)\Delta y.$

Аналогічно розглянемо функцію $g(s) = f(x_0+s, y_0), s \in [0, \Delta x]$. Тоді
$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = g(\Delta x) - g(0) \overset{\text{Th. Лагранжа}}{=} g'(c_2)\Delta x = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0)\Delta x, c_2 \in (0, \Delta x).$
Повертаємось до нашої рівності.

$\boxed{=} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1)\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0)\Delta x.$
Залишилось довести, що виконується наступна рівність:
$$(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\right) = \underset{\Delta x\to 0\ \ \Delta y\to 0}{o}(\|(\Delta x, \Delta y)\|).$$
$$(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0)\Delta x\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\Delta y.$$
Якщо $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, то звідси $c_1 \to 0, c_2 \to 0$ та за умовою того, що частинні похідні є неперервними, маємо:
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \overset{\text{позн}}{=} \alpha \to 0$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \overset{\text{позн}}{=} \beta \to 0$$
Далі, використовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо таке:
$$\left|\frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \overset{\text{К-Б}}{\leq} \left|\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \to 0 \implies \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0, \Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$$
Остаточно отримуємо:
$$(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\right) = \underset{\Delta x\to 0\ \ \Delta y\to 0}{o}(\|(\Delta x, \Delta y)\|).$$
Тобто звідси f – диференційована в точці (x_0, y_0). ■

Definition 3.1.10 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
Похідною функції f в точці $\vec{x}^0$ називається ковектор
$$f'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} (\vec{x}^0)$$
Таким чином, ми можемо визначити лінійний функціонал по $\Delta\vec{x}$ ось так:
$f'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)\Delta x_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{x}^0)\Delta x_m.$

Тоді означення диференційованої функції f перепишеться в такому вигляді:
$f(\vec{x}^0+\Delta\vec{x})-f(\vec{x}^0)=f'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x}+o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x}\to\vec{0}$.

Proposition 3.1.11 Задані функції $f, g\colon A\to\mathbb{R}$ та $\vec{x}^0\in A$ – внутрішня точка. Відомо, що f, g – диференційовані в точці $\vec{x}^0$. Тоді:
1) αf – диференційована в точці $\vec{x}^0$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, похідна $(\alpha f)'(\vec{x}^0)=\alpha f'(\vec{x}^0)$;
2) $f+g$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$, похідна $(f+g)'(\vec{x}^0)=f'(\vec{x}^0)+g'(\vec{x}^0)$;
3) fg – диференційована в точці $\vec{x}^0$, похідна $(fg)'(\vec{x}^0)=f'(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0)+f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)$.

Proof.
Доведемо кожну (ну окей, майже кожну) властивість.

1) *Зрозуміло.*

2) $(f(\vec{x}^0+\Delta\vec{x})+g(\vec{x}^0+\Delta\vec{x}))-(f(\vec{x}^0)+g(\vec{x}^0))=(f(\vec{x}^0+\Delta\vec{x})-f(\vec{x}^0))+(g(\vec{x}^0+\Delta\vec{x})-g(\vec{x}^0))=$
$=f'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x}+o(\|\Delta\vec{x}\|)+g'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x}+o(\|\Delta\vec{x}\|)=(f'(\vec{x}^0)+g'(\vec{x}^0))\cdot\Delta\vec{x}+o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x}\to\vec{0}$.

3) $f(\vec{x}^0+\Delta\vec{x})g(\vec{x}^0+\Delta\vec{x})-f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0)=$
$=(f(\vec{x}^0)+f'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x}+o(\|\Delta\vec{x}\|))\cdot(g(\vec{x}^0)+g'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x}+o(\|\Delta\vec{x}\|))-f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0)\boxed{=}$
Після розкриття дужок ми залишимо лише доданки $(f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0))\cdot\Delta\vec{x}$ та $(g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0))\cdot\Delta\vec{x}$.
Ось чому:
$f(\vec{x}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|)=o(\|\Delta\vec{x}\|)$ $\qquad g(\vec{x}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|)=o(\|\Delta\vec{x}\|)$
$(f'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x})\cdot(g'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x})=o(\|\Delta\vec{x}\|)$, тому що, розписавши, побачимо $\Delta x_i\Delta x_j=o(\|\Delta\vec{x}\|)$.
$(f'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x})o(\|\Delta\vec{x}\|)=o(\|\Delta\vec{x}\|)$ $\qquad (g'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x})o(\|\Delta\vec{x}\|)=o(\|\Delta\vec{x}\|)$,
тому що, розписавши, побачимо $\Delta x_j o(\|\Delta\vec{x}\|)=o(\|\Delta\vec{x}\|)$.
$(o(\|\Delta\vec{x}\|))^2=o(\|\Delta\vec{x}\|)$
Повертаємось до рівності:
$\boxed{=}(f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0))\cdot\Delta\vec{x}+(g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0))\cdot\Delta\vec{x}+o(\|\Delta\vec{x}\|)$.

Майже всі властивості доведені. ■

Definition 3.1.12 Задано функцію $f\colon A\to\mathbb{R}$ та $\vec{x}^0\in A$ – внутрішня точка.
Диференціалом функції $f(x)$ в точці $\vec{x}^0$ називається такий вираз:

$$df(\vec{x}^0,\Delta\vec{x})=f'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x}$$

Частіше позначають ще диференціал в точці ось так: $df_{\vec{x}^0}$.

Remark 3.1.13 Якщо згадати лінійну алгебру, то $df_{\vec{x}^0}\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ – це, насправді, лінійний функціонал, де в нас записується ковектор $f'(\vec{x}^0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)\end{pmatrix}$. І ми маємо:
$df_{\vec{x}^0}(\Delta\vec{x})=f'(\vec{x}^0)\cdot\Delta\vec{x}$.

Як й раніше, аргумент $\Delta\vec{x}$ опускають, а також позначають $\Delta\vec{x}=\vec{dx}$, тобто $\Delta x_1=dx_1,\dots,\Delta x_m=dx_m$. Тоді маємо інший вигляд:

$$df(\vec{x}^0)=f'(\vec{x}^0)\cdot\vec{dx}=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)\,dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{x}^0)\,dx_m$$

Example 3.1.14 Маємо функцію $f(x,y)=1-x^2-y$. Ми вже знайшли $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-1$, вони є неперервними в будь-якій точці. Отже, f – диференційована будь-де. Знадемо тепер диференціал функції. Це дуже просто:
$df(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy=(-2x)\,dx-\,dy\overset{\text{або}}{=}\begin{pmatrix}-2x & -1\end{pmatrix}\vec{dr}$.

3.2 Для векторнозначних функцій

Definition 3.2.1 Задано функцію $\vec{f}\colon A\to\mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0\in A$ – внутрішня точка.
Вектор-функція $\vec{f}$ називається **диференційованою** в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists M\in\mathrm{Mat}(m\times k):\vec{f}(\vec{x}^0+\Delta\vec{x})-\vec{f}(\vec{x}^0)=M\Delta\vec{x}+\underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{\vec{o}(||\Delta\vec{x}||)}$$

Зараз дізнаємось, що це за матриця $M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix}$ під час доведення твердження.

Proposition 3.2.2 Задано функцію $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
$\vec{f}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0 \iff f_1, \dots, f_k$ – диференційовані в точці $\vec{x}^0$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\vec{f}$ – диференційована в $\vec{x}^0$, тобто $\exists M \in \mathrm{Mat}(m \times k) : \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \underset{\Delta\vec{x} \to \vec{0}}{\vec{o}(||\Delta\vec{x}||)}$.

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(||\Delta\vec{x}||) \\ \vdots \\ \vec{o}(||\Delta\vec{x}||) \end{pmatrix}$$

Із цієї рівності випливає, що $\forall j = \overline{1,k}$:
$f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f_j(\vec{x}^0) = M_{j1}\Delta x_1 + \dots + M_{jm}\Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x} \to 0}{o(||\Delta\vec{x}||)}$.
Це означає, що f_j – диференційована в точці $\vec{x}^0$. Тоді звідси випливає, що:
$M_{j1} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}(\vec{x}^0), \dots, M_{jm} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_m}(\vec{x}^0)$.
В результаті отримаємо ось такий вигляд матриці:

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_k \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = J(x) = \vec{f}'(\vec{x}^0)$$ – це називається **матрицею Якобі**.

Матриця Якобі описує **похідну** вектор-функції $\vec{f}$ в точці $\vec{x}^0$, тобто $\vec{f}'$ – це лінійний оператор. А якщо матриця буде квадратною, то ми можемо обчислити $\det \vec{f}'(\vec{x}^0)$ – це називається **якобіаном**.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $f_1, \dots, f_k$ – диференційовані в точці $\vec{x}^0$. Хочемо довести, що
$\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}^0) - \vec{f}(\vec{x}^0) - M\Delta\vec{x} = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$, але це є правда, тому що $\forall j = \overline{1,k} : f_j$ – диференційована $\implies f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}^0) - f_j(\vec{x}^0) - f'_j(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} = o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$ – виконана покоординатна рівність. ■

Proposition 3.2.3 Задано функцію $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що вектор-функція $\vec{f}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$. Тоді $\vec{f}$ – неперервна в точці $\vec{x}^0$.

Proof.
Дійсно, $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}^0} \left(M(\vec{x} - \vec{x}^0) + \vec{o}(||\vec{x} - \vec{x}^0||) \right) = \vec{0}$, оскільки виконується покоординатна границя. ■

Proposition 3.2.4 Задані функції $\vec{f}, \vec{g}\colon A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що $\vec{f}, \vec{g}$ - диференційовані в точці $\vec{x}^0$. Тоді $\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$, похідна
$(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})'(\vec{x}^0) = \alpha\vec{f}'(\vec{x}^0) + \beta\vec{g}'(\vec{x}^0)$.
Випливає з арифметики матриці. Тут цілком зрозуміло.

Example 3.2.5 Важливий
Маємо вектор-функцію $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}$. Знайдемо її похідну та якобіан.

$$\vec{f}'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \det \vec{f}'(\vec{x}^0) = \cos\varphi\rho\cos\varphi + \sin\varphi\rho\sin\varphi = \rho.$$

Ще знадобиться, коли будемо шукати подвійні інтеграли.

Proposition 3.2.6 Задані функції $\vec{f}\colon A \to B$ та $\vec{g}\colon B \to \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$. Відомо, що $\vec{f}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$ та $\vec{g}$ – диференційована в точці $\vec{y}^0$. Тоді $\vec{g} \circ \vec{f}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$, похідна $(\vec{g} \circ \vec{f})'(\vec{x}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)$.

Lemma 3.2.7 Задано матрицю $A \in \mathrm{Mat}(m \times k)$. Тоді $\exists C \geq 0 : \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^m : \|A\vec{h}\| \leq C\|\vec{h}\|$.

Proof.

Дійсно, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \implies A\vec{h} = \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + \dots + a_{1m}h_m \\ \vdots \\ a_{k1}h_1 + \dots + a_{km}h_m \end{pmatrix}$

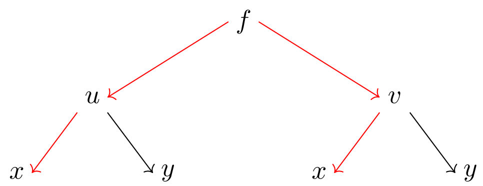
$\implies \|A\vec{h}\| = \sqrt{(a_{11}h_1 + \dots + a_{1m}h_m)^2 + \dots + (a_{k1}h_1 + \dots + a_{km}h_m)^2} \overset{\text{К-Б}}{\leq}$
$\leq \sqrt{(a_{11}^2 + \dots + a_{1m}^2)(h_1^2 + \dots + h_m^2) + \dots + (a_{k1}^2 + \dots + a_{km}^2)(h_1^2 + \dots + h_m^2)} =$
$= \|\vec{h}\|\sqrt{(a_{11}^2 + \dots + a_{1m}^2) + \dots + (a_{k1}^2 + \dots + a_{km}^2)} = C\|\vec{h}\|.$ ■

Тепер безпосередньо доведення твердження.

Proof.
$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0)) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0) + \vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}^0)) =$
$= \vec{g}(\vec{y}^0 + \Delta\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\Delta\vec{y} + o(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\boxed{=}$
Залишилось довести, що $\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$, якщо $\Delta\vec{x} \to \vec{0}$, тобто
$\lim\limits_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \dfrac{\|\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\|}{\|\Delta x\|} = 0.$
$\dfrac{\|\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\|}{\|\Delta x\|} \leq \dfrac{\|\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\| + \|\vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)\|}{\|\Delta x\|} \overset{\text{Lm.}}{\leq} C\dfrac{\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)}{\|\Delta\vec{x}\|} + \dfrac{\vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)}{\|\Delta\vec{x}\|} =$
$= C\dfrac{\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)}{\|\Delta\vec{x}\|} + \dfrac{\vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|)}{\|\Delta\vec{y}\|}\dfrac{\|\Delta\vec{y}\|}{\|\Delta\vec{x}\|}.$
Якщо $\Delta\vec{x} \to \vec{0}$, то перший доданок прямує до нуля, а другий буде прямувати до нуля, якщо $\dfrac{\|\Delta\vec{y}\|}{\|\Delta\vec{x}\|}$ буде обмеженою. Зараз це й покажемо:
$\dfrac{\|\Delta\vec{y}\|}{\|\Delta\vec{x}\|} = \dfrac{\|\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} \leq \dfrac{\|\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x}\| + \|\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|} \overset{\text{Lm.}}{\leq} C^* + \dfrac{\|\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)\|}{\|\Delta\vec{x}\|}$
Якщо $\Delta\vec{x} \to \vec{0}$, то отримаємо обмеженість.
Отже, остаточно, $\vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|) + \vec{o}(\|\Delta\vec{y}\|) = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$, якщо $\Delta\vec{x} \to \vec{0}$, а значить
$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|)$ при $\Delta\vec{x} \to \vec{0}$. ■

Corollary 3.2.8 Задано функцію $\vec{f}\colon A \to B$ та $g\colon B \to \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n$.
Відомо, що $\vec{f}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$ та g – диференційована в точці $\vec{y}^0$.
Тоді $\dfrac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial g}{\partial y_1}(\vec{y}^0)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \dfrac{\partial g}{\partial y_2}(\vec{y}^0)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \dots + \dfrac{\partial g}{\partial y_n}(\vec{y}^0)\dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$, виконано $\forall j = \overline{1, m}$.
Тут $h(\vec{x}) = g(\vec{f}(\vec{x}))$.

Example 3.2.9 Маємо функцію $f\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$. Знайдемо частинні похідні за x, y.
Позначимо $u(x, y) = xy$, $v(x, y) = \dfrac{x}{y}$. Тоді маємо:
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{1}{y}$
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot x + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{-x}{y^2}.$



Схематично, як шукати $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

3.3 Похідна за напрямком. Градієнт

Definition 3.3.1 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. А також задано вектор $\vec{l}$, такий, що $\|\vec{l}\| = 1$. Його ще називають **напрямком**.

Похідною функції f за напрямком $\vec{l}$ в точці $\vec{x}^0$ називають величину

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t}$$

Як вже було зазначено, дотичних прямих буває дуже багато, тому ми й задаємо напрямок.

Remark 3.3.2 Якщо всі координати вектора $\vec{l}$ будуть нулевими, окрім $l_j = 1$, то $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$.

Theorem 3.3.3 Задано функцію f – диференційована в точці $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \vec{l} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} l_m$.

Proof.
f – диференційована в точці $\vec{x}^0$, тобто $f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} t l_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} t l_m + o(\|t\vec{l}\|)$. Тому

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} t l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} t l_m + o(\|t\vec{l}\|)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} l_m. \quad \blacksquare$$

Example 3.3.4 Маємо функцію $f(x, y) = 1 - x^2 - y$. Знайти похідну за напрямком $\vec{l} = (0.6, 0.8)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$.
$\implies \dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = -0.6 \cdot 2x - 0.8 \cdot 1 = -1.2x - 0.8$.

Definition 3.3.5 Задано функцію $f \colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
Градієнтом функції f в точці $\vec{x}^0$ називають такий вектор

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}^0) \overset{\text{або}}{=} \boldsymbol{\nabla} f(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} (\vec{x}^0)$$

Похідну функції $\vec{f}$ за напрямком $\vec{l}$ в точці $\vec{x}^0$ можна записати інакше: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \left(\operatorname{grad} f(\vec{x}^0), \vec{l}\right)$.

Example 3.3.6 Зокрема для функції $f(x, y) = 1 - x^2 - y$ маємо, що $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2x \\ -1 \end{pmatrix}$.

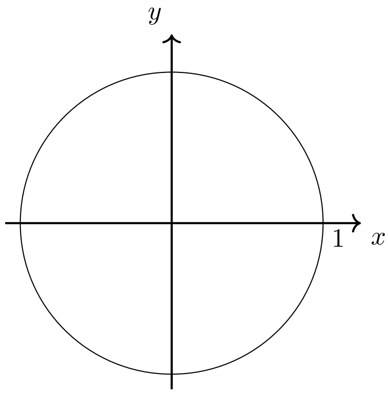
$\operatorname{grad} f(\vec{x}^0)$ описує, який треба взяти напрямок руху в точці $\vec{x}^0$, щоб ріст функції був найбільшим. Цей факт підтвердить наступне твердження:

Proposition 3.3.7 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0)$ приймає:
- max значення $\iff \vec{l} \uparrow\uparrow \operatorname{grad} \vec{f}(\vec{x}^0)$;
- min значення $\iff \vec{l} \uparrow\downarrow \operatorname{grad} \vec{f}(\vec{x}^0)$.

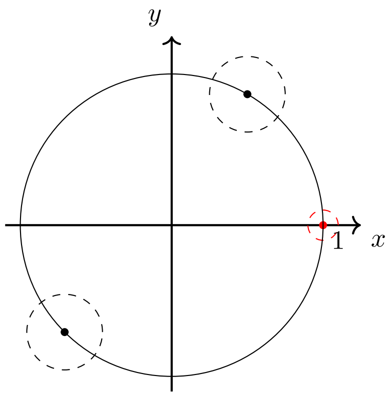
Proof.
Дійсно, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \left(\operatorname{grad} f(\vec{x}^0), \vec{l}\right) = \|\operatorname{grad} f(\vec{x}^0)\| \|\vec{l}\| \cos\alpha = \|\operatorname{grad} f(\vec{x}^0)\| \cos\alpha$:
- max $\iff \alpha = 0$;
- min $\iff \alpha = \pi$. $\blacksquare$

3.4 Неявно задані функції

Remark 3.4.1 Приклад для розуміння
Задано рівняння кола на площині $\mathbb{R}^2$ – один з прикладів неявної функції:
$x^2 + y^2 - 1 = 0$.



Зрозуміло, що це – не графік функції однієї змінної. Просто тому що (майже) кожному значенню x тут ставиться у відповідність два значення y. Проте якщо розглядати деякий малий окіл точки (x_0, y_0), то ми отримаємо деякий шматок малюнку, що й буде графіком функції. Зокрема в нашому випадку або $y = \sqrt{1-x^2}$, або $y = -\sqrt{1-x^2}$.
Проте існують певні точки, де цього зробити не можна – точки $(1, 0), (-1, 0)$. Як би ми не зменшували окіл цієї точки, там існують ікси, які ставлять у відповідність два ігрика. Я цю точку позначил червоним кольором.



Саме тому з'явилась мотивацію створити теорему, де через рівняння $F(x, y) = 0$ ми можемо отримати $y = f(x)$ в деякому околі точки (x_0, y_0) під деякими важливими умовами.

Важливо розуміти, що функція існує, проте явну формулу отримати не завжди вийде. Зокрема маємо неявну функцію $y^5 + y^3 + y + x = 0$. Щоб знати $y = f(x)$, треба розв'язати рівняння п'ятого степеня, проте корені цього многочлена не можна виразити через формулу. І тим не менш, під деякими умовами, ми можемо знати функцію $y = f(x)$, просто без формули.

Theorem 3.4.2 Задано неявну функцію F – неперервно-диференційована в околі точки (x_0, y_0). Відомо, що виконуються такі умови:
1) $F(x_0, y_0) = 0$;
2) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
Тоді існує єдина функція f – неперервно-диференційована в меншому околі точки x_0, причому
$F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$, а також $f'(x) = -\dfrac{\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)\right|_{(x, f(x))}}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right|_{(x, f(x))}}$.

Додатково, якщо $F \in C^{(m)}$, то $f \in C^{(m)}$.
Без доведення.

Example 3.4.3 Зокрема для $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ маємо, що вона – неперервна,
$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$ – диференційована.

Причому $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \iff y \neq 0$.

Тому за попередньою теоремою, дійсно, існує функція $y = f(x)$, але найголовніше: $f'(x) = -\dfrac{x}{y}$.

Theorem 3.4.4 Задано неявну вектор-функцію $\vec{F}$ – неперервно-диференційована в околі точки $(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \in \mathbb{R}^{m+k}$. Відомо, що виконуються такі умови:
1) $\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = \vec{0}$;
2) $\exists \left(\vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0)\right)^{-1}$ – оборотна матриця похідних за $\vec{y}$.
Тоді існує єдина вектор-функція $\vec{f}$ – неперервно-диференційована в меншому околі точки $\vec{x}^0$, причому $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \iff \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, а також $\vec{f}'(\vec{x}) = -(\vec{F}'_y(\vec{x}, \vec{y}))^{-1} \cdot \vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y})\Big|_{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))}$.
Без доведення.

Example 3.4.5 Задано вектор-функцію $\vec{F}$ таким чином: $\begin{cases} x^2 + y_1^2 - \dfrac{1}{2} y_2^2 = F_1(x, y_1, y_2) = 0 \\ x + y_1 + y_2 - 2 = F_2(x, y_1, y_2) = 0 \end{cases}$.

Маємо $\det \vec{F}'_y(x, y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2y_1 + y_2 \neq 0 \iff y_2 \neq -2y_1$, а тому й $x \neq 2 + y_2$.
Тоді враховуючи обмеження, існує вектор-функція $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$, але тепер знайдемо похідну. Маємо:
$\vec{F}'_y = \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies (\vec{F}'_y)^{-1} = \dfrac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix}$
$\vec{F}'_x = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{f}' = -(\vec{F}'_y)^{-1} \vec{F}'_x = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 2x + y_2 \\ -2x + 2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x + y_2}{2y_1 + y_2} \\ \dfrac{-2x + 2y_1}{2y_1 + y_2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

Тут записано матрицю Якобі для функції $\vec{F}$. Червоним виділено $\vec{F}'_y$, а синім виділено $\vec{F}'_x$.

3.5 Обернені функції

Theorem 3.5.1 Задано вектор-функцію $\vec{g} \colon U(\vec{y}^0) \to U(\vec{x}^0)$, де $\vec{x}^0 = \vec{g}(\vec{y}^0)$, де $U(\vec{x}^0), U(\vec{y}^0) \subset \mathbb{R}^n$. Відомо, що виконуються такі умови:
1) $\vec{g}$ – неперервно-диференційована;
2) $\exists (\vec{g}'(\vec{y}^0))^{-1}$.
Тоді існує вектор-функція $\vec{f} \colon U(\vec{x}^0) \to U(\vec{y}^0)$, причому:
1) $\vec{f}$ – неперервно-диференційована;
2) $\vec{f}'(\vec{x}) = (\vec{g}'(\vec{f}(\vec{x})))^{-1}$.

Proof.
Розглянемо функцію $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} - \vec{g}(\vec{y})$. Про неї відомо, що:
1) $\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = \vec{0}$, просто тому що $\vec{x}^0 = \vec{g}(\vec{y}^0)$;
2) $\exists (\vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0))^{-1}$, тому що зауважимо, що $\vec{F}'_y(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = -\vec{g}'(\vec{y}^0)$, а для такої матриці оборотна матриця існує за умовою.
Отже, $\exists! f$, для якого $F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{g}(\vec{y}) \iff \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.
Нарешті, $\vec{f}'(\vec{x}) = -(\vec{F}'_y(\vec{x}, \vec{y}))^{-1} \vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{g}'(\vec{y}))^{-1}$.
У цьому випадку $\vec{F}'_x(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbb{I}$, де $\mathbb{I}$ – одинична матриця. ■

Example 3.5.2 Задано функцію $\vec{g}\colon A \to \mathbb{R}^2$, де множина $A = \{(x,y) : 0 < y < x\}$.
$\vec{g}(x,y) \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ xy \end{pmatrix}$.
Спробуємо знайти обернену функцію.
Зрозуміло, що $\vec{g}$ – неперервно-диференційована. Доведемо, що $\exists (\vec{g}'(x,y))^{-1}$.
$\vec{g}'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \implies \det \vec{g}'(x,y) = x - y \neq 0$, оскільки $0 < x < y$.
Тоді існує обернена вектор-функція $\vec{f} = \vec{g}^{-1}$. Спробуємо її знайти:
$\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$
$\dfrac{v}{y} + y = u \implies y^2 - uy + v = 0 \implies y = \dfrac{u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2} \implies x = \dfrac{u + \sqrt{u^2-4v}}{2}$.
І все це за умовою, що $u^2 - 4v > 0$ та $u, v > 0$. Отже, $\vec{g}^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} g_1^{-1}(u,v) \\ g_2^{-1}(u,v) \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} u + \sqrt{u^2-4v} \\ u - \sqrt{u^2 - 4v} \end{pmatrix}$.

3.6 Геометричне та алгебраїчне застосування

3.6.1 Дотична площина, нормальна пряма поверхні

Задамо функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A \subset \mathbb{R}^2$ – внутрішня точка. Встановимо таку поверхню:

$$\Pi = \{(x,y,z) : z = f(x,y)\}$$

Відомо, що площина в $\mathbb{R}^3$, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$, задається рівнянням:

$$z = z_0 + K_1(x - x_0) + K_2(y - y_0), \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Definition 3.6.1 Дотичною площиною до поверхні Π в точці (x_0, y_0) називається площина в $\mathbb{R}^3$, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0), для якої виконана рівність

$$z - f(x,y) = o(\|(x - x_0, y - y_0)\|), (x,y) \to (x_0, y_0)$$

Theorem 3.6.2 Поверхня Π має дотичну площину в точці $(x_0, y_0) \iff f$ – диференційована в точці (x_0, y_0). Причому $K_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), K_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
Доведення аналогічне, як в матані $\mathbb{R}$.

Отже, дотична площина для диференційованої функції f задається таким рівнянням:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

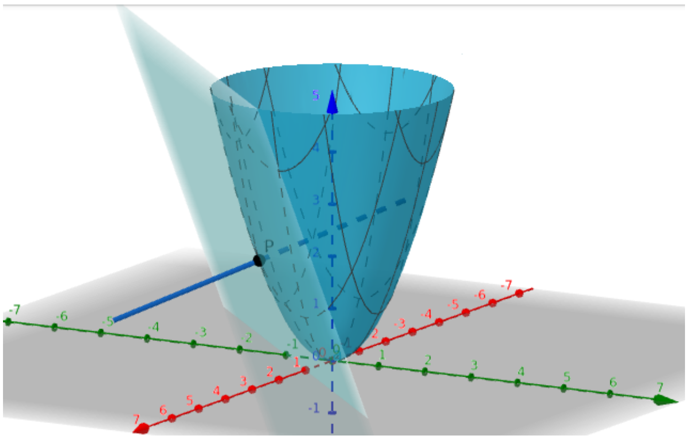
Definition 3.6.3 Нормальною прямою до поверхні Π в точці (x_0, y_0) називається пряма в просторі, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) та перпендикулярна дотичній площині.

Вектор нормалі дотичної площини $\vec{N} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$. Це буде напрямленим вектором для нормалі. Тоді нормальна пряма задається таким рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Example 3.6.4 Задамо функцію $f(x) = x^2 + y^2$. Знайдемо дотичну площину та нормальну пряму в точці $(1, -1)$.
$f(1, -1) = 2$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 2x\Big|_{(1,-1)} = 2 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 2y\Big|_{(1,-1)} = -2$.
Всі частинні похідні в околі точки $(1, -1)$ неперервні, а тому диференційовані. Отже, можемо отримати дотичну:

$z-2=2(x-1)-2(y+1) \implies 2x-2y-z=2$;
та нормаль:
$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$.



3.6.2 Дотична пряма, нормальна площина кривої

Definition 3.6.5 Крива в просторі $\mathbb{R}^3$ задається таким рівнянням

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \qquad t\in(a,b) \\ z=z(t) \end{cases}$$

Відомо, що пряма в просторі $\mathbb{R}^3$, що проходить через точку (x_0,y_0,z_0), $x_0=x(t_0), y_0=y(t_0), z=z(t_0)$, задається таким рівнянням:

$$\begin{cases} x=(t-t_0)l_1+x_0 \\ y=(t-t_0)l_2+y_0 \qquad ,t\in\mathbb{R} \\ z=(t-t_0)l_3+z_0 \end{cases}$$

Definition 3.6.6 Дотичною прямою до кривої $\vec{x}=\vec{x}(t)$ називається пряма в просторі, що проходить через точку (x_0,y_0,z_0), для якої виконана рівність

$$\begin{cases} x(t)-(x_0+l_1(t-t_0))=o(|t-t_0|) \\ y(t)-(y_0+l_2(t-t_0))=o(|t-t_0|) \qquad ,t\to t_0 \\ z(t)-(z_0+l_3(t-t_0))=o(|t-t_0|) \end{cases}$$

Theorem 3.6.7 Пряма $\begin{cases} x=(t-t_0)l_1+x_0 \\ y=(t-t_0)l_2+y_0 \\ z=(t-t_0)l_3+z_0 \end{cases}$ - дотична до кривої $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ $\iff$ крива – диференційована в точці t_0, а також $l_1=x'(t_0), l_2=y'(t_0), l_3=z'(t_0)$.
Відносно зрозуміло.

Отже, дотична пряма задається рівнянням:

$$\begin{cases} x=(t-t_0)x'(t_0)+x_0 \\ y=(t-t_0)y'(t_0)+y_0 \qquad ,t\in\mathbb{R} \\ z=(t-t_0)z'(t_0)+z_0 \end{cases}$$

Напрямлений вектор прямої $\vec{l}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$. Тоді це буде нормальним вектором для нормальної плоіщини. Нормальна площина задається таким рівнянням:

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

Example 3.6.8 Маємо криву $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 2\cos t \\ z = -\sin 2t \end{cases}$, де параметр $t \in [0, 2\pi]$. Знайдемо дотичну пряму та нормальну площину в $t_0 = \dfrac{5\pi}{6}$. Тобто в точці $\left(-1, \sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

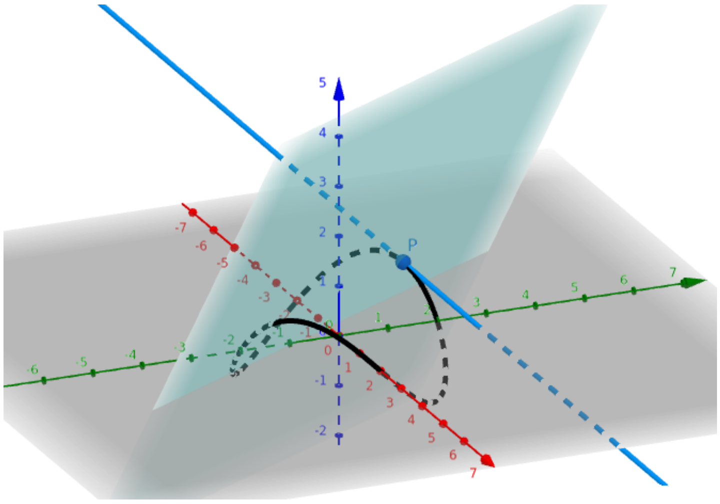
$$\begin{cases} x'(t_0) = 2\cos t\Big|_{t=t_0} = \sqrt{3} \\ y'(t_0) = -2\sin t\Big|_{t=t_0} = 1 \\ z'(t_0) = -2\cos 2t\Big|_{t=t_0} = -1 \end{cases}.$$

Таким чином, маємо дотичну пряму:

$$\frac{x+1}{\sqrt{3}} = \frac{y-\sqrt{3}}{1} = \frac{z - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-1};$$

та нормальну площину:

$$\sqrt{3}(x+1) + (y - \sqrt{3}) - \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$



3.6.3 Приблизне обчислення

Маємо f – диференційована в точці $\vec{x}^0$, тобто

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)(x_n - x_n^0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|) \text{ при } \vec{x} \to \vec{x}^0.$$

Якщо $\vec{x}_0$ близький до $\vec{x}$, тобто $\|\vec{x} - \vec{x}^0\| \ll 1$, то тоді

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0)(x_n - x_n^0).$$

Example 3.6.9 Приблизно обчислити $\sqrt{(2.03)^2 + 5e^{0.02}}$.

Розглянемо функцію $z = \sqrt{x^2 + 5e^y}$. У нашому випадку $(x_0, y_0) = (2, 0)$ та $(x, y) = (2.03, 0.02)$.

Оскільки $\|(x - x_0, y - y_0)\| = \|(0.03, 0.02)\| \ll 1$, то можемо застосувати формулу:

$z \approx z_0 + \dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$. Маємо:

$$z_0 = \sqrt{2^2 + 5e^0} = 3 \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(2,0) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5e^y}}\Big|_{(0,2)} = \frac{2}{3} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(2,0) = \frac{5e^y}{2\sqrt{x^2 + 5e^y}}\Big|_{(0,2)} = \frac{5}{6}.$$

Отже, $z = \sqrt{(2.03)^2 + 5e^{0.02}} \approx 3 + \dfrac{2}{3} \cdot 0.03 + \dfrac{5}{6} \cdot 0.02 = \dfrac{101}{30}$.

3.7 Диференціювання та похідні старших порядків

Definition 3.7.1 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Також f – диференційована в точці $\vec{x}^0$.

Частинними похідними другого роду від функції f в точці $\vec{x}^0$ називається вираз:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}^0)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}^0)$$

Example 3.7.2 Знайдемо всі частинні похідні другого порядку функції $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2 \implies \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y \implies \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16xy \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2 \end{cases}.$$

Можемо зауважити, що $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Проте в загальному випадку це не так.

Example 3.7.3 Приклад Шварца

Розглянемо функцію $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Зосередимось лише на знаходженні $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\dfrac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} -x\dfrac{y^4 - x^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = -1$$

Таким чином, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Theorem 3.7.4 Теорема Шварца

Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x})$ в околі точки $\vec{x}^0$ та є неперервними в точці $\vec{x}^0$. Тоді $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$.

Ми будемо доводити при $m = 2$. Для більших аргументів – аналогічно, але більш технічна справа.

Proof.

Отже, дано $f(x,y)$ та в околі точки (x_0, y_0) існують частинні похідні другого порядку $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ які неперервні в (x_0, y_0).

Розглянемо вираз $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$.

Покладемо функцію $k(s) = f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0), s \in [x_0, x_0 + \Delta x]$. Тоді $\Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0)$.

$k'(s) = (f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0))'_s = \dfrac{\partial f}{\partial s}(s, y_0 + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial s}(s, y_0)$.

Оскільки нам відомі другі частинні похідні, то зрозуміло, що в нас існує $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$, причому в тому самому околі точки (x_0, y_0). Тобто звідси k - диференційована на $[x_0, x_0 + \Delta x]$, тоді за теоремою Лагранжа, $\exists \xi_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x) : \Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0) = k'(\xi_1)\Delta x = \left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0 + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0)\right)\Delta x$.

Покладемо функцію $m(t) = \dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t), t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$. Тоді $\Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x$.

$m'(t) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t)\right)'_t = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, t)$.

Похідна дійсно існує за умовою теореми, тобто m - диференційована на $[y_0, y_0 + \Delta y]$, тоді за теоремою Лагранжа, $\exists \eta_1 \in (y_0, y_0 + \Delta y) : \Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x = m'(\eta_1)\Delta y \Delta x = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1)\Delta y \Delta x$.

Повернімось до виразу $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$, ми розглянемо її з іншої сторони.

Покладемо функцію $p(t) = f(x_0 + \Delta x, t) - f(x_0, t), t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$. Тоді $\Delta = p(y_0 + \Delta y) - p(y_0)$.

А далі я буду просто продовжувати рівність, міркування аналогічні, що пов'язані зі застосуванням теореми Лагранжа двічі:

$\Delta = p(y_0+\Delta y)-p(y_0) = p'(\eta_2)\Delta y = (f(x_0+\Delta x,t)-f(x_0,t))'_t(\eta_2)\Delta y = \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0+\Delta x,\eta_2) - \dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0,\eta_2)\right)\Delta y \boxed{=}$

Покладемо функцію $q(s) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(s,\eta_2)$. А далі аналогічно.

$\boxed{=}(q(x_0+\Delta x) - q(x_0))\Delta y = q'(\xi_2)\Delta x\Delta y = \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}(s,\eta_2)\right)'_s(\xi_2)\Delta x\Delta y = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(\xi_2,\eta_2)\Delta x\Delta y.$

Зауважу, що $\eta_2 \in (y_0, y_0+\Delta y), \xi_2 \in (x_0, x_0+\Delta x)$.

Отримали таку рівність: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(\xi_1,\eta_1)\Delta y\Delta x = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(\xi_2,\eta_2)\Delta x\Delta y \implies \dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(\xi_1,\eta_1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(\xi_2,\eta_2)$.

Нарешті, за умовою задачі, другі частинні похідні є неперервними в точці (x_0,y_0), тому далі одночасно прямуємо $x \to x_0, y \to y_0 \implies \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Оскільки $\xi_1,\xi_2 \in (x_0, x_0+\Delta x)$ $\eta_1,\eta_2 \in (y_0, y_0+\Delta y)$, то звідси $\xi_1,\xi_2 \to x_0$ та $\eta_1,\eta_2 \to y_0$.

Остаточно отримаємо $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$ (літери s,t я замінив на x,y, результат не зміниться). ■

Definition 3.7.5 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
Функція f називається **двічі диференційованою** в точці $\vec{x}^0$, якщо всі частинні похідні існують в околі точки $\vec{x}^0$ та диференційовані в точці $\vec{x}^0$.

Example 3.7.6 Маємо функцію $z = x^2+2y^2-5xy$. З'ясуємо, чи буде ця функція двічі диференційованою.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 5y \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y - 5x$

Усі отримані частинні похідні існують в будь-якому околі деякої точки.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -5$

Отримані частинні похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за **Th.4.1.8.**, функція $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ - диференційована. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -5 \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$

Отримані частинні похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за **Th.4.1.8.**, функція $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ - диференційована.

Отже, за означенням, z - двічі диференційована функція. (TODO: лінкування)

Proposition 3.7.7 Функція f двічі диференційована в точці $\vec{x}^0 \iff \mathrm{grad} f$ – диференційований в точці $\vec{x}^0$.

Proof.

Дійсно, f – двічі диференційована в точці $\vec{x}^0 \iff \forall j = \overline{1,m} : \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0 \iff \mathrm{grad} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}$ – як вектор-функція – диференційована в точці $\vec{x}^0$. ■

Розпишемо диференційованість вектор-функції $\mathrm{grad}\, f$ в точці $\vec{x}^0$ за означенням:
$\mathrm{grad}\, f(\vec{x}^0+\Delta\vec{x}) - \mathrm{grad}\, f(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$.

Звідси ми маємо, що $M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_m}^2} \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = H(\vec{x}^0) = f''(\vec{x}^0)$$ – це називається **матрицею Гесе**.

Матриця Гесе описує **другу похідну** функції f в точці $\vec{x}^0$ та одночасно **похідну** вектор-функції $\operatorname{grad} f$ в точці $\vec{x}^0$. Дана матриця – квадратна, тож ми можемо обчислити $\det f''(\vec{x}^0)$ – це називається **гесіаном**.

Definition 3.7.8 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Також f - диференційована в точці $\vec{x}^0$.
Другим диференціалом функції f називають вираз:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = d(df(\vec{x}^0))$$

З'ясуємо, як цей вираз можна по-інакшому записати. Маємо:
$d^2 f = d\,(df) = d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m}\,dx_m\right) = d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1\right) + \dots + d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\,dx_m\right) =$
$= d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_m = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_m\right) dx_1 + \dots +$
$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_1 + \dots + \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_m\right) dx_m =$
$= \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\,dx_1^2 + \dots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}\,dx_m\,dx_1\right) + \dots + \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}\,dx_1\,dx_m + \dots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_m}^2}\,dx_m^2\right) = \sum_{i,j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,dx_i\,dx_j.$
Отже, маємо іншу формулу для другого диференціалу в точці $\vec{x}^0$:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\,dx_i\,dx_j$$

Якщо придивитись, то $d^2 f(\vec{x}^0)$ виглядає як квадратична форма.

Example 3.7.9 Знайдемо другий диференціал функції $z = x^3 + 2y^2 - 5xy$.
Ми вже шукали другі частинні похідні $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -5 \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$. Таким чином,
$d^2 z = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 = 6x\,dx^2 - 10\,dx\,dy + 4\,dy^2.$

Definition 3.7.10 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Також f - k разів диференційована в точці $\vec{x}^0$.
Частинними похідним $k+1$-го порядку в точці $\vec{x}^0$ називають похідну:

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}\right)(\vec{x}^0) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(\vec{x}^0)$$
$$j_1 + j_2 + \dots + j_k + j_{k+1} = k+1$$

Remark 3.7.11 Що таке **похідна** k-го порядку, визначати не буду, бо ще рано. Необхідно щось про тензори знати.

Definition 3.7.12 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Також f - k разів диференційована в точці $\vec{x}^0$.
$k+1$**-им диференціалом** функції f називають вираз:

$$d^{k+1} f(\vec{x}^0) = d(d^k f(\vec{x}^0))$$

Якщо дуже сильно постаратись, то за індукцією можна довести таку формулу диференціала k-го порядку:

$$d^k f(\vec{x}^0) = \sum_{j_1, \dots, j_k = 1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(\vec{x}^0) \cdot dx_{j_1} \dots dx_{j_k}$$

Definition 3.7.13 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
Функція f називається **k-разів диференційованою** в точці $\vec{x}^0$, якщо всі частинні похідні $(k-1)$-го порядку існують в околі точки $\vec{x}^0$ та всі вони диференційовані в точці $\vec{x}^0$.

Позначення: $C^k(A)$ – множина k разів неперервно-диференційованих функцій.

3.8 Формула Тейлора

Зробимо певні позначення:

$$[\vec{x}^0, \vec{x}] = \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in [0,1]\}$$
$$(\vec{x}^0, \vec{x}) = \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in (0,1)\}$$

Theorem 3.8.1 Теорема Тейлора (у формі Лагранжа)
Задано функцію f - диференційована n разів на $[\vec{x}^0, \vec{x}]$ та $(n+1)$-ий раз диференційована на $(\vec{x}^0, \vec{x})$. Тоді $\exists \vec{\xi} \in (\vec{x}^0, \vec{x})$ або $(\vec{x}, \vec{x}^0)$, для якого
$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \dfrac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + \dfrac{d^{n+1} f(\vec{\xi})}{(n+1)!}$.

Proof.
Розглянемо функцію $p(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$, тут $t \in [0,1]$ - функція від однієї змінної.
Знайдемо похідні від цієї функції:
$p'(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))'_t = (f(x_1 + t(x_1 - x_1^0), \dots, x_m + t(x_m - x_m^0)))'_t = (f(u_1, \dots, u_m))'_t =$
$= \dfrac{\partial f}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial u_m}\dfrac{\partial u_m}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial u_1}(x_1 - x_1^0) + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial u_m}(x_m - x_m^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial u_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_m - x_m^0 \end{pmatrix} =$
$= df(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$.
$p''(t) = [f'(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0)]'_t \overset{\text{аналогічно}}{=} d^2 f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$
$\vdots$
$p^{(k)}(t) = d^k f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$.
Коротше, наша функція n разів диференційована на $[0,1]$ та має $(n+1)$ похідну на $(0,1)$. Тому ми можемо розкласти формулу Тейлора як функцію з однією змінною. $\exists \xi \in (0,1)$:
$p(1) = p(0) + \dfrac{p'(0)}{1!}(1-0) + \dfrac{p''(0)}{2!}(1-0)^2 + \dots + \dfrac{p^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + \dfrac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}$.
А далі підставляємо все, що маємо:
$p(0) = f(\vec{x}^0)$
$p'(0) = df(\vec{x}^0)$
$p''(0) = d^2 f(\vec{x}^0)$
$\vdots$
$p^{(n+1)}(\xi) = d^{n+1} f(\vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0))$
Отже, $f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \dfrac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + \dfrac{d^{n+1} f(\vec{\xi})}{(n+1)!}$, де $\vec{\xi} = \vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0) \in (\vec{x}^0, \vec{x})$. $\blacksquare$

Theorem 3.8.2 Теорема Тейлора (у формі Пеано)
Задано функцію f – диференційована n разів в точці $\vec{x}^0$. Тоді
$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \dfrac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n), \vec{x} \to \vec{x}^0$.

Без доведення. Але певні плани доведення наведу.
Позначимо функцію $g(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \left(f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \dfrac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} \right)$. Наша мета показати, що $g(\vec{x}) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n)$.
Як і раніше, тут треба показати, що g та всі його частинні похідні до порядка включно n в точці $\vec{x}^0$ будуть нулями.
А далі вже показуємо, що $g(\vec{x}) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n)$.

Example 3.8.3 Розкласти функцію $f(x,y) = e^{x+y}$ відносно точки $(x_0, y_0) = (1, -1)$.
Заздалегідь зауважимо, що $\dfrac{\partial^s f}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2}}(1,-1) = e^{x+y}|_{(1,-1)} = 1$, де $s_1 + s_2 = s$.

$f(1,-1) = 1$
$f'(1,-1)(\vec{x}-\vec{x}^0) = (x-1)+(y+1)$
$f''(1,-1)(\vec{x}-\vec{x}^0)^2 = (x-1)^2+2(x-1)(y+1)+(y+1)^2$
$f'''(1,-1)(\vec{x}-\vec{x}^0)^3 = (x-1)^3+3(x-1)^2(y+1)+3(x-1)(y+1)^2+(y+1)^3$
$\vdots$
Таким чином, ми можемо це записати ось так:

$$f(x,y) = 1 + \left[\frac{(x-1)}{1!}+\frac{(y+1)}{1!}\right] + \left[\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{2(x-1)(y+1)}{2!}+\frac{(y+1)^2}{2!}\right] + \dots +$$
$$+\left[\frac{(x-1)^n}{n!}+\frac{C_n^2(x-1)^{n-1}(y+1)}{n!}+\dots+\frac{(y+1)^n}{n!}\right] + o\left(\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^n\sum_{p=0}^k \frac{C_p^k}{k!}(x-1)^{k-p}(y+1)^p + o\left(\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}^n\right), (x,y)\to(1,-1).$$

Remark 3.8.4 Можна формулу Тейлора записати в якості ряда Тейлора за певними умовами, але я цього робити не буду.

3.9 Локальні екстремуми

Definition 3.9.1 Задано функцію $f\colon A\to\mathbb{R}$ та $\vec{x}^0\in A$ – внутрішня точка.
Точка $\vec{x}^0$ називається точкою:
- **локального максимуму**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x}\in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0)\geq f(\vec{x})$;
- **локального мінімуму**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x}\in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0)\leq f(\vec{x})$.
для строгих екстремумів нерівність строга та існують околи $U_\varepsilon(\vec{x}^0)\setminus\{\vec{x}^0\}$.

Theorem 3.9.2 Необхідна умова локального екстремуму
Задано функцію $f\colon A\to\mathbb{R}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0\in A$ – внутрішня. Відомо, що $\vec{x}^0$ – локальний екстремум. Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)=0, \forall j=\overline{1,m}$.

Proof.
Розглянемо функцію $h(x_1)=f(x_1,x_2^0,\dots,x_m^0)$ – функція від однієї змінної, така, що x_1^0 – локальний екстремум. Для інших змінних аналогічно. Більш того, $h'(x_1)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2^0,\dots,x_m^0)$.
Таким чином, за необхідною умовою локального екстремуму матана в $\mathbb{R}$,
$h'(x_1)=0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)=0.$ ■

Remark 3.9.3 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)=0, \forall j=\overline{1,m} \iff df(\vec{x}^0)\equiv 0$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Зрозуміло.
$\boxed{\Leftarrow}$ Підставити в диференціал $(dx_1,dx_2,\dots,dx_n)=(1,0,\dots,0)$, щоб отримати $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)=0$.

Definition 3.9.4 Точка $\vec{x}^0$ називається **стаціонарною** для функції f, якщо всі частинні похідні в заданній точці нулеві.

Proposition 3.9.5 Інше означення критичної точки
Точка $\vec{x}^0$ – стаціонарна $\iff df_{\vec{x}^0}$ – не сюр'єктивне.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *Зрозуміло.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $df_{\vec{x}^0}$ – не сюр'єктивне. Взагалі, будь-який функціонал уже автоматично сюр'єктивний. Тоді звідси $df_{\vec{x}^0}\equiv 0$ – єдиний варіант. Отже, звідси всі частинні похідні нулеві, а тому $\vec{x}^0$ – стаціонарна. ■

Theorem 3.9.6 Достатня умова локального екстремуму
Задано функцію $f\colon A\to\mathbb{R}$, таку, що f – двічі неперервно-диференційована в околі точки $\vec{x}^0\in A$ – стаціонарна та внутрішня точка.
1) Нехай $d^2f(\vec{x}^0)$ – строго додатноозначена. Тоді $\vec{x}^0$ – строгий локальний мінімум;

2) Нехай $d^2f(\vec{x}^0)$ – строго від'ємноозначена. Тоді $\vec{x}^0$ – строгий локальний максимум;
3) Нехай $d^2f(\vec{x}^0)$ – знакозмінна. Тоді $\vec{x}^0$ – не локальний екстремум.

Proof.
1) Нехай $d^2f(\vec{x}^0)$ – додатно визначена.
Оскільки функція f – двічі диференційована в точці $\vec{x}^0$, то тоді за теоремою Тейлора в формі Пеано,
$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2f(\vec{x}^0)}{2!} + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^2), \vec{x} \to \vec{x}^0$.
Позначу $\rho = \|\vec{x} - \vec{x}^0\|$, а також $\xi_k = \dfrac{x_k - x_k^0}{\rho}, k = \overline{1,m}$. Можна зауважити, що $\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 = 1$.
Оскільки $\vec{x}^0$ – стаціонарна, то звідси $df(\vec{x}^0) \equiv 0$, бо всі частинні похідні нулі. Таким чином,
$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{1}{2}d^2f(\vec{x}^0) + o(\rho^2) = \dfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + o(\rho^2) = \dfrac{1}{2}\rho^2\left(\sum_{i,j=1}^m \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\xi_i\xi_j + o(1)\right)$.
Розглянемо функцію $F(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum_{i,j=1}^m \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\xi_i\xi_j$, що визначена на одиничній сфері
$S^m = \{\vec{\xi} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{\xi}\| = 1\}$, а ця множина – замкнена та обмежена. Також відомо, що $F \in C(S^m)$ як многочлен, а тому вона досягає мінімуму. Проте F - додатно визначена, а отже $\min F > 0$.
Рівність $f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{1}{2}\rho^2(F(\xi_1, \dots, \xi_m) + o(1)), \rho \to 0$ перепишеться таким чином:
$\exists \delta : \forall \rho < \delta \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > \dfrac{1}{4}\rho^2 \min F > 0$, остаточно
$\exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > 0$.
Тобто, знайшли окіл, де $\forall \vec{x} : f(\vec{x}^0) < f(\vec{x})$, а тому $\vec{x}^0$ - строгий локальний мінімум.

2) Все аналогічно.

3) А тепер припустимо, що $d^2f(\vec{x}^0)$ - знако-невизначена. Ми розглядаємо функцію лише в деякому околі $U_{\delta_0}(\vec{x}^0)$ через диференційованість. Тоді $\exists \vec{\Delta x} : d^2f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}) > 0$. Ми окіл ще звужимо до $U_{\delta = \|\vec{\Delta x}\|}(\vec{x}^0)$. Там будемо шукати точку в вигляді $\vec{x}^t = \vec{x}^0 + t\vec{\Delta x}$, де $t > 0$ – довільне. Тоді за Тейлором,
$f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{1}{2}d^2f(\vec{x}^0, t\vec{\Delta x}) + o(\|\vec{x}^t - \vec{x}^0\|)$, де $\vec{x}^t \to \vec{x}^0$.
$f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{1}{2}t^2d^2f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}) + o(t^2\|\vec{\Delta x}\|^2) = \dfrac{t^2}{2}\left(d^2f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}) + o(1)\right)$, де $t \to 0$.
Якщо більш детально це розписати $o(1)$, а згодом обрати $\varepsilon = \dfrac{1}{2}d^2f(\vec{x}^0, \Delta\vec{x})$, то отримаємо, що
$\exists \delta^* : \forall t : t < \delta^* \implies f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) > 0$.
Якщо так станеться, що $U_{\delta^*}(\vec{x}^0)$ буде більшим за $U_{\delta = \|\vec{\Delta x}\|}(\vec{x}^0)$, то тоді буде ми можемо взяти точку $\vec{x}^0 + \vec{\Delta x}$, для якої $f(\vec{x}^0 + \vec{\Delta x}) - f(\vec{x}^0) > 0$.
Також буде $\exists \vec{\Delta x}' : d^2f(\vec{x}^0, \vec{\Delta x}') < 0$ в силу невизначеності знака. І там абсолютно аналогічно.
Остаточно, $\forall U_\delta$,
- якщо U_δ більший за U_{δ_0}, то вже автоматично виконано;
- інакше знайдуться точки по цим крокам.
Отже, $\vec{x}^0$ - не екстремум. ■

Example 3.9.7 Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.
Спочатку шукаємо критичні точки:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 36 = 0 \end{cases} \implies (x, y) \in \{(3, 2), (-3, -2), (2, 3), (-2, -3)\}.$$
Далі знайдемо другий диференціал:
$d^2f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2$.
$d^2f = 6(x\,dx^2 + 2y\,dx\,dy + x\,dy^2)$.
Для кожної критичної точки подивимось на цей диференціал.
I. $d^2f(3, 2) = 6(3\,dx^2 + 4\,dx\,dy + 3\,dy^2)$.

Диференціал $d^2f(3,2)$ можна розглядати як квадратичну форму $(d^2f(3,2))(dx,dy)$. Даній квадратичній формі відповідає матриця $H = 6\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$ (див. лінійну алгебру). До речі, дана матриця - це в точності матриця Гесе.
Застосуємо критерій Сільвестра. Маємо $\Delta_1^H = 18 > 0$ та $\Delta_2^H = \det\begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} = 6(3\cdot 3 - 2\cdot 2) = 30 > 0$.
Отже, за цим критерієм, маємо $d^2f(3,2)$ - додатноозначена. Отже, $(3,2)$ - локальний мінімум.

II. $d^2f(-3,-2)$ - аналогічними міркуваннями доводимо, що $(-3,-2)$ - локальний максимум.

III. $d^2f(2,3) = 12(dx^2 + 3\,dx\,dy + dy^2)$.
Знову запишемо матрицею $H = 6\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Зауважимо, що матриця має власні числа $-1, 5$. Вони різного знаку, що приводить до висновку: $d^2f(2,3)$ - знакозмінна. Отже, $(2,3)$ - не екстремум.

IV. $d^2f(-2,-3)$ - аналогічними міркуваннями доводимо, що $(-2,-3)$ - не екстремум.

Example 3.9.8 Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x,y) = x^2 + y^4$.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0 \end{cases} \implies (0,0) \text{ – єдина критична точка.}$$
$d^2f = 2\,dx^2 + 12y^2\,dy^2$
$d^2f(0,0) = 2\,dx^2 \geq 0$ – дана квадратична форма невід'ємноозначена, тому що при $(dx,dy) = (0, 0.1)$ маємо $d^2f(0,0) = 0$. Тож скористатися достатньою умовою ми не можемо.
Однак можна зауважити, що $f(0,0) \leq f(x,y)$, причому $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, зокрема в будь-якій точці окола $(0,0)$. Таким чином, $(0,0)$ - локальний мінімум.

Example 3.9.9 Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x,y) = x^2 - y^4$.
Тут також $(0,0)$ – єдина критична точка, тут також $d^2f(0,0) = 2\,dx^2 \geq 0$ - невід'ємноозначена квадратична форма.
Проте цього разу $(0,0)$ не буде локальним екстремумом. Дійсно, для кожного околу $U_\delta(0,0)$ знайдуться точки $(x_1,y_1) = \left(\dfrac{\delta}{2}, 0\right)$ та $(x_2,y_2) = \left(0, \dfrac{\delta}{2}\right)$, причому ці дві точки в середині околу, для яких:
$f(x_1,y_1) = \dfrac{\delta^2}{4} > 0 = f(0,0)$ $\qquad$ $f(x_2,y_2) = -\dfrac{\delta^4}{16} < 0 = f(0,0)$.

3.10 Умовні локальні екстремуми

Definition 3.10.1 Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – відкрита множина. Задано також функції $g_1, \dots, g_m\colon A \to \mathbb{R}$. Розглянемо множину $\Gamma_{g_1,\dots,g_m} = \{\vec{x} \in G : g_1(\vec{x}) = \dots = g_m(\vec{x}) = 0\}$.
Точка $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1,\dots,g_m}$ називається **умовним локальним максимумом (мінімумом)**, якщо вона є локальним максимумом (мінімумом) функції $\tilde{f}\colon \Gamma_{g_1,\dots,g_m} \to \mathbb{R}$, де $\tilde{f} \equiv f$.

Definition 3.10.2 Рівняння вигляду
$$g_1(\vec{x}) = 0,$$
$$\vdots$$
$$g_m(\vec{x}) = 0$$
називається **рівняннями зв'язку**.

Example 3.10.3 Зокрема маємо функцію $f(x,y) = x^2 - y^2$ та функцію $g(x,y) = y = 0$.
Маємо тоді $\tilde{f}(x,y) = f(x,0) = x^2$, звідси $x = 0$ – точка локального мінімуму функції $\tilde{f}$.
Отже, $x = 0$ – точка умовного локального мінімуму функції f.

Definition 3.10.4 Задані функції $g_1, \dots, g_m\colon A \to \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^p$ - відкрита множина. Всі функції неперервно диференційовані на A.
Вони називаються **функціонально незалежними** в точці $\vec{x}^0 \in A$, якщо
$$\{g_1'(\vec{x}^0), \dots, g_m'(\vec{x}^0)\} \text{ – лінійно незалежна}$$

Example 3.10.5 Зокрема $\{g_1, g_2\}$, де $g_1(x,y) = x, g_2(x,y) = y$ – функціонально незалежні. Дійсно, $g_1'(x,y) = (1,0)$ та $g_2'(x,y) = (0,1)$ в кожній точці. Ці похідна – лінійно незалежні.

Definition 3.10.6 Задані функції $f, g_1, \dots, g_m \colon A \to \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ - відкрита множина. **Функцією Лагранжа** назвемо таку функцію:

$$F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \lambda_1 g_1(\vec{x}) - \dots - \lambda_m g_m(\vec{x}),$$

де $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

Theorem 3.10.7 Необхідна умова умовного локального екстремуму
Задані функції $f, g_1, \dots, g_m \colon A \to \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ - відкрита множина. Всі функції – неперервно диференційовані на A.
Відомо, що $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1,\dots,g_m}$ – умовний локальний екстремум функції f, а також $\{g_1, \dots, g_m\}$ – функціонально незалежні в $\vec{x}^0$.
Тоді існують $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} : \vec{x}^0$ - стаціонарна точка функції Лагранжа.

Ми будемо доводити при $n = 2, m = 1$. Для більших аргументів – аналогічно, але більш технічна справа.

Proof.
Нехай $f(x,y,z)$ має локальний екстремум $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma_g$ з рівнянням $g(x,y,z) = 0$.
У силу функціональної незалежності за умовою в точці, маємо $g'(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$, тобто всі частинні похідні ненулеві. Тоді за теоремою про неявну функцію, існує $\varphi : U(x_0, y_0) \to U(z_0)$, де
$\varphi(x_0, y_0) = z_0$
$\forall (x,y) \in U(x_0,y_0) : g(x,y,\varphi(x,y)) = \tilde{g}(x,y) = 0$.
Тоді маємо функцію $\tilde{f}(x,y) = f(x,y,\varphi(x,y))$ – функція 2-х змінних, де (x_0, y_0) – точка локального екстремуму. Звідси випливає, що $d\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$
$d\tilde{f}(x_0,y_0) = df(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,d\varphi(x_0,y_0) = 0.$
Також оскільки $\tilde{g}(x,y) \equiv 0$, то звідси маємо:
$d\tilde{g}(x_0,y_0) = dg(x_0,y_0) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,dy + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,d\varphi(x_0,y_0) = 0.$
Останню рівність домножимо на λ, яка відніметься з першим рівнянням.
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)(x_0,y_0,z_0)\,dx + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)(x_0,y_0,z_0)\,dy + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z} - \lambda\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)(x_0,y_0,z_0)\,d\varphi(x_0,y_0) = 0.$
Оскільки $\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ в силу функціональної незалежності, то ми оберемо такий λ, щоб $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) - \lambda\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0$. Отримаємо:
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)(x_0,y_0,z_0)\,dx + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)(x_0,y_0,z_0)\,dy = 0.$
І ця рівність виконується для всіх $\Delta x, \Delta y$. Отже,
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) - \lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = 0$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) - \lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = 0.$
Маючи ці рівності отримаємо:
$dF_\lambda(x_0,y_0,z_0) = d(f - \lambda g)(x_0,y_0,z_0) =$
$= \dfrac{\partial(f-\lambda g)}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,dx + \dfrac{\partial(f-\lambda g)}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,dy + \dfrac{\partial(f-\lambda g)}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,dz = 0.$
Це виконано для всіх $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Отже, (x_0,y_0,z_0) – стаціонарна точка F_λ. ■

Theorem 3.10.8 Достатня умова умовного локального екстремуму
Задані функції $f, g_1, \dots, g_m \colon A \to \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ - відкрита множина. Всі функції - двічі неперервно диференційовані на A.
Відомо, що $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1,\dots,g_m}$ – стаціонарна точка функції Лагранжа для деякого $\vec{\lambda}$. Нехай $\{g_1, \dots, g_m\}$ – функціонально незалежні в точці $\vec{x}^0$. Розглянемо множину $\Gamma^*_{g_1,\dots,g_m}(\vec{x}^0) = \{\vec{\Delta x} \in \mathbb{R}^{n+m} : dg_1(\vec{x}^0) = \dots = dg_m(\vec{x}^0) = 0\}$.
1) Нехай $d^2F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$ – строго додатноозначена на $\Gamma^*_{g_1,\dots,g_m}(\vec{x}^0)$. Тоді $\vec{x}^0$ – умовний локальний мінімум;
2) Нехай $d^2F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$ – строго від'ємноозначена на $\Gamma^*_{g_1,\dots,g_m}(\vec{x}^0)$. Тоді $\vec{x}^0$ – умовний локальний максимум;

3) Нехай $d^2F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$ – знаконеозначена на $\Gamma^*_{g_1,\dots,g_m}(\vec{x}^0)$. Тоді $\vec{x}^0$ – не умовний локальний екстремум.

Ми будемо доводити при $n = 2, m = 1$. Для більших аргументів – аналогічно, але більш технічна справа.

Proof.
Нехай рівняння зв'язку лише $g(x, y, z) = 0$. Функція Лагранжа $F_\lambda(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$.
За умовою, (x_0, y_0, z_0) – стаціонарна точка F_λ для деякого λ.
g – функціонально незалежна в (x_0, y_0, z_0), тож $g'(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$. Ми тут припустимо, що $\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тоді за теоремою про неявну функцію, існує $\varphi\colon U(x_0, y_0) \to U(z_0)$, для якого
$\varphi(x_0, y_0) = z_0$
$\forall (x, y) \in U(x_0, y_0) : g(x, y, \varphi(x, y)) = \tilde{g}(x, y) = 0.$
Причому сама функція φ також двічі неперервно-диференційована.
Розглянемо функцію $\tilde{f}\colon U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$, що визначена як $\tilde{f}(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$.
Покажемо, що (x_0, y_0) – стаціонарна точка функції $\tilde{f}$.

$$d\tilde{f}(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\,d\varphi(x_0, y_0).$$

$$dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = d(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial (f - \lambda g)}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\,dx + \frac{\partial (f - \lambda g)}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\,dy + \frac{\partial (f - \lambda g)}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\,dz =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right) dz.$$

Але в силу стаціонарної точки маємо $dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = 0$. Зокрема для $dz = d\varphi(x_0, y_0)$ маємо рівність нуля.
Оскільки $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, то звідси $dg(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in U, \forall (\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$.

$$dg(x, y, \varphi(x, y)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))\,dy + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))\,d\varphi(x, y).$$

Зокрема, підставляючи $(x, y) = (x_0, y_0)$, отримаємо:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\,dy + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\,d\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Домножимо це рівняння на λ та додамо його до рівняння $dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = 0$. Отримаємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\,d\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Але це теж саме, що $d\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$, що доводить: (x_0, y_0) – стаціонарна точка $\tilde{f}$.

Тепер для визначення характеру точки (x_0, y_0) функції $\tilde{f}$ ми обчислимо другий диференціал. Якщо все обережно зробити, отримаємо:

$$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2 f(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\,d^2\varphi(x_0, y_0).$$

Аналогічним чином для $\tilde{g}(x, y)$ маємо:

$$d^2\tilde{g}(x_0, y_0) = d^2 g(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\,d^2\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Попереднє рівняння віднімемо на останнє, помножене на λ – отримаємо:

$$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \lambda \frac{\partial g}{\partial z}\right)(x_0, y_0, z_0)d^2\varphi(x_0, y_0).$$

$$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2F_\lambda(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)d^2\varphi(x_0, y_0).$$

Але (x_0, y_0, z_0) - кртична функція F_λ, а тому
$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2F_\lambda(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)}$.
Більш детально треба пояснити, що дає умова $\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)$. Ми вже знаємо, що $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \forall (x, y)$, а тому
$dg(x, y, \varphi(x, y))(x_0, y_0) = 0$, але звідси ж, враховуючи умову, отримаємо
$dg(x, y, \varphi(x, y))(x_0, y_0) = dg(x_0, y_0, z_0) = 0$.
А це означає, що $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \in \Gamma^*_g(x_0, y_0, z_0)$.
Остаточно $d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2F_\lambda(x_0, y_0, z_0)|_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \in \Gamma^*_g(x_0, y_0, z_0)}$.
А далі все цілком зрозуміло.
1) $d^2F_\lambda(x_0, y_0, z_0) > 0 \implies d^2\tilde{f}(x_0, y_0) > 0 \implies (x_0, y_0)$ – локальний мінімум $\tilde{f} \implies (x_0, y_0, z_0)$ - умовний локальний мінімум f;
2) аналогічно;
3) аналогічно. ■

Example 3.10.9 Дослідити функцію $f(x, y, z) = xyz$ на умовний локальний екстремум за умовою $(x, y, z) = 3$.
У цьому випадку $g(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$. Запишемо функцію Лагранжа:
$L_\lambda(x, y, z) = xyz - \lambda(x + y + z - 3)$.
Знайдемо всі критичні точки L_λ, що лежать на множині Γ_g:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial x} = yz - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial y} = xz - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial z} = xy - \lambda = 0 \\ g(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Якщо розв'язати систему рівнянь, отримаємо наступні розв'язки (x, y, z):
$M_0(1, 1, 1), M_1(3, 0, 0), M_2(0, 3, 0), M_3(0, 0, 3)$.
А також відповідні λ будуть наступні:
$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$.
Дослідимо тепер d^2L_λ для кожної точки з відповідним λ.

$$d^2L_\lambda = \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial z^2}\,dz^2 + 2\left(\frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y \partial z}\,dy\,dz + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial z \partial x}\,dz\,dx\right) =$$
$$= 2(z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dx\,dz).$$

Із рівняння зв'язку маємо, що $d(x + y + z) = d(3) = 0 = dx + dy + dz \implies dz = -dx - dy$.
Підставимо це в d^2L_λ:
$d^2L_\lambda = 2(-ydx^2 + (z - x - y)\,dx\,dy - x\,dy^2)$.

I. $M_0(1, 1, 1)$ та $\lambda_0 = 1$.
$d^2L_{\lambda_0}(M_0) = 2(-dx^2 - dx\,dy - dy^2) = -2\left(\left(dx + \frac{1}{2}\,dy\right)^2 + \frac{3}{4}\,dy^2\right) < 0$. Тобто маємо від'ємноозначену квадратичну форму. Отже, $M_0(1, 1, 1)$ – умовний локальний максимум.

II. $M_1(3, 0, 0)$ та $\lambda_1 = 0$.
$d^2L_{\lambda_1}(M_1) = 2(-3\,dx\,dy - 3\,dy^2) = -6(dx + dy)\,dy$. Тобто маємо знаконеозначену квадратичну форму. Отже,$M_1(3, 0, 0)$ – не умовний локальний екстремум.

III. $M_2(0, 3, 0)$ та $\lambda_2 = 0$ – аналогічно не умовний локальний екстремум.
IV. $M_3(0, 0, 3)$ та $\lambda_3 = 0$ – аналогічно не умовний локальний екстремум.