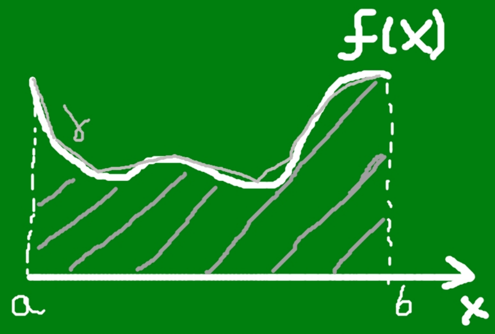
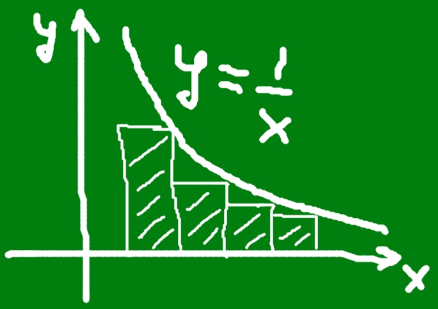
# Real analysis II



$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

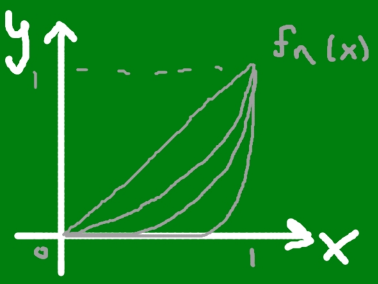


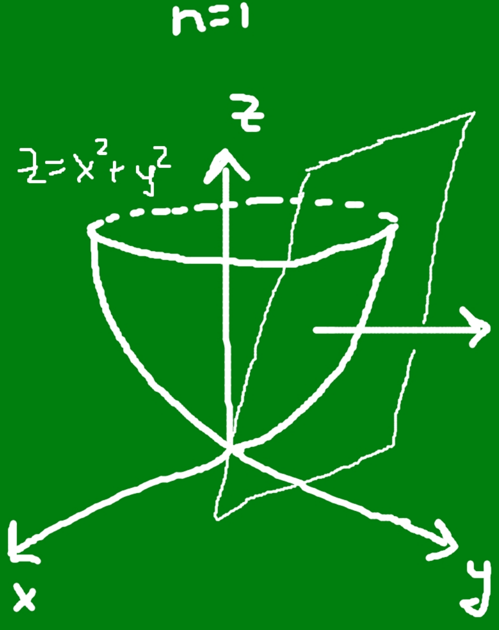
$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots = -\ln 2$$

$$-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots = -\frac{3}{2}\ln 2$$

$$\{ f_n(x) = x^n, n \geq 1 \}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$$





$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$$

# Зміст

# 1 Вступ до $\mathbb{R}^m$ (багатовимірний математичний аналіз)

На даному етапі допускається, що читач володіє матеріалом лінійної алгебри. Знати треба вже наступне: векторні простори та суміжні поняття, лінійні оператори, евклідові простори, нормовані простори. Буде корисно також знати якусь теорію метричних просторів, але це не обов'язково, бо все одно я буду проходитися з нуля.

## 1.1 Про простір $\mathbb{R}^m$

**Definition 1.1.1** Простір $\mathbb{R}^m$ містить об'єкти, що називаються **арифметичними векторами**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

де кожний елемент $x_j \in \mathbb{R}$. Ці елементи $x_j$ ще називають **координатами**.

Візьмемо довільні вектори $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$. Ми можемо створити операції **додавання** та **множення на скаляр** таким чином:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_m + y_n \end{pmatrix} \qquad \alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_m \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Також позначимо $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – це буде так званий нульовий вектор.

**Proposition 1.1.2** Виконуються ось такі влстивості $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^m,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$;
2) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$;
3) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$;
4) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$;
5) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$;
6) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$;
7) $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$;
8) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Ці вісім пунктів свідчать про те, що $\mathbb{R}^m$ утворює так званий лінійний простір.
*Вправа: довести.*

Надалі ми ще будемо використовувати **скалярний добуток**, що визначається таким чином:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m$$

**Proposition 1.1.3** Виконуються ось такі властивості $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^m,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$:
1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;
2) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0, \qquad (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$;
3) $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y})$;
4) $(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$.
Ці чотири властивості свідчать про те, що $(\vec{x}, \vec{y})$ дійсно задає скалярний добуток. При цьому в такому разі простір $\mathbb{R}^m$ буде вже називатися евклідовим.
*Вправа: довести.*

Далі визначимо ще **норму** вектора ось таким чином:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$$

Ця штука, насправді, є узагальненнням такого поняття як довжина вектора.

**Remark 1.1.4** $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$.

**Theorem 1.1.5 Нерівність Коші-Буняковського**
$|(\vec{x},\vec{y})|^2 \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$.
*Можна подивитися доведення в pdf лінійної алгебри.*

**Proposition 1.1.6** Виконуються ось такі властивості $\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^m,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$:
1) $\|\vec{x}\| \geq 0 \qquad \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$;
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha\vec{x}\| = \alpha\|\vec{x}\|$;
3) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.
Отже, заданий $\|\vec{x}\|$ утвроює норму. Відповідно, $\mathbb{R}^m$ буде нормованим простором.
*Вправа: довести.*

Також нас ще цікавить **відстань** між двома векторами. Обчислити це можна таким чином:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| \overset{\text{якщо розписати}}{=} \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_m-y_m)^2}$$

Буквально так само ми рахували відстань між точками в одновимірному випадку.

**Proposition 1.1.7** Виконуються такі властивості $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \mathbb{R}^m$:
1) $d(\vec{x},\vec{y}) \geq 0$;
2) $d(\vec{y},\vec{x}) = d(\vec{x},\vec{x})$;
3) $d(\vec{x},\vec{y}) \leq d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y})$.
Ці три властивості дають підстави нам казати, що $d(\vec{x},\vec{y})$ задає відстань між двома об'єктами. У такому разі простір $\mathbb{R}^m$ називають метричним.
*Вправа: довести.*

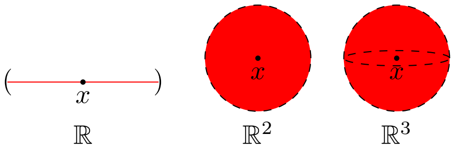
Висновок: $\mathbb{R}^m$ – лінійний, евклідів, нормований та метричний простір.

## 1.2 Топологія та принцип аналіза в $\mathbb{R}^m$

Означеня будуть абсолютно аналогічними, просто тепер буде випадок з векторами.

**Definition 1.2.1** **$\varepsilon$-околом** точки $\vec{x}$ будемо називати таку множину:

$$U_\varepsilon(\vec{x}) = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x}-\vec{a}\| < \varepsilon\}$$



Його ще також називають **відкритим шаром** з радіусом $\varepsilon$ в центрі точки $\vec{x}$ та позначають як $B(\vec{x},\varepsilon)$. Я вже буду користуватися старим позначенням, тобто $U_\varepsilon(\vec{x})$.

**Definition 1.2.2** Задамо множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та елемент $\vec{a} \in A$.
Точку $\vec{a}$ називають **внутрішньою**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{a}) \subset A$$

А множина $A$ називається **відкритою**, якщо кожна її точка – внутрішня.

**Definition 1.2.3** Задамо множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та елемент $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$.
Точку $\vec{a}$ називають **граничною** множини $A$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{a} : \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{a})$$

А множина $A$ називається **замкненою**, якщо вона містить всі граничні точки.

**Definition 1.2.4** Задано множину $A \subset \mathbb{R}^m$ та точка $\vec{x} \in A$.
Точка $\vec{x}$ називається **ізольованою**, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A = \{\vec{x}\}$$

Решта тверджень будуть схожі на ті твердження, що були при топології $\mathbb{R}$. Доведення теж аналогічні, тому доводити я повторно не буду, просто залишу формулювання.

**Proposition 1.2.5** Якщо $\{A_\lambda\}$ – сім'я відкритих підмножин, то $\bigcup\limits_{\lambda} A_\lambda$ – відкрита.

**Proposition 1.2.6** Якщо $\{A_\lambda\}$ – скінченна сім'я відкритих підмножин, то $\bigcap\limits_{\lambda} A_\lambda$ – відкрита.

**Proposition 1.2.7** $\vec{a}$ – гранична точка $A \subset \mathbb{R}^m \iff \forall \varepsilon > 0 : A \cap U_\varepsilon(\vec{a})$ – нескінченна множина.

**Proposition 1.2.8** $A$ – відкрита множина $\iff A^c$ – замкнена множина.

**Proposition 1.2.9** Точка $\vec{x} \in A$ – ізольована $\iff \vec{x}$ – не гранична для $A$.

**Proposition 1.2.10** $\mathbb{R}^m, \emptyset$ – одночасно відкриті та замкнені множини.

Ось наступне твердження необхідно проясянити.

**Proposition 1.2.11** Відкритий шар $B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x}-\vec{a}\| < r\}$ є дійсно відкритим. Замкнений шар $B[\vec{a}, r] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}$ є дійсно замкненим.

**Proof.**
Нехай $\vec{x} \in B(\vec{a}, r) \implies \|\vec{x} - \vec{a}\| < r$. Встановимо $\varepsilon = r - \|\vec{x} - \vec{a}\|$.
Тоді $\vec{y} \in U_\varepsilon(\vec{x}) \implies \|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon \implies \|\vec{y} - \vec{a}\| = \|\vec{y} - \vec{x} + \vec{x} - \vec{a}\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon + \|\vec{x} - \vec{a}\| = \varepsilon \implies \vec{y} \in B(\vec{a}, r)$.
Отже, $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset B(\vec{a}, r)$, так для кожної точки $\vec{x} \in B(\vec{a}, r)$. А тому множина $B(\vec{a}, r)$ – відкрита.

$B[\vec{a}, r] = \mathbb{R}^m \setminus B(\vec{a}, r) = \mathbb{R}^m \cap B^c(\vec{a}, r)$ – обидві множини є замкненими. Тому перетин замкнена. ■

**Definition 1.2.12** Задана множина $A \subset \mathbb{R}^m$.
Вона називається **обмеженою**, якщо

$$\exists R > 0 : \forall \vec{x} \in A : \|\vec{x}\| \leq R$$

Або інакше це можна записати таким чином:

$$\exists R > 0 : A \subset U_R(\vec{0})$$

**Example 1.2.13** Зокрема одинична сфера $\mathcal{S}^{m-1} \overset{\text{def.}}{=} \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x}\| = 1\}$ буде обмеженою. Досить важлива множина, бо з нею ми будемо неодноразово працювати.

Зараз буде нові поняття, яких не було бажання вводити в мат. аналізі в $\mathbb{R}$. Більшість з них були просто непотрібними, а зараз без них не обійдемося.

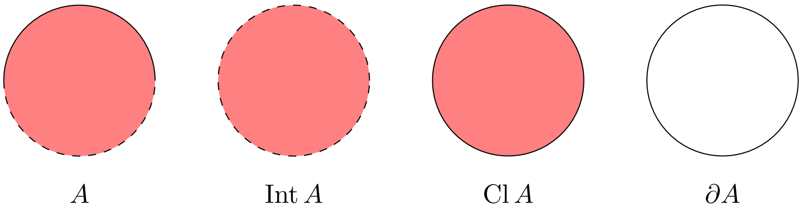
**Definition 1.2.14** Задана множина $A \subset \mathbb{R}^m$.
**Замиканням** множини $A$ називають ось таку множину, що містить $A$ та його граничні точки.
Позначення: $\operatorname{Cl} A$.
Часто ще замикання позначають за $\overline{A}$, але для мене це менш читабельно.

**Proposition 1.2.15** Задана множина $A \subset \mathbb{R}^m$. Тоді

**Definition 1.2.16** Задана множина $A \subset \mathbb{R}^m$.
**Внутрішністю** множини $A$ називають множину всіх внутрішніх точок $A$.
Позначення: $\operatorname{Int} A$.
Часто ще замикання позначають за $A^\circ$, але для мене це менш читабельно.

**Definition 1.2.17** Задамо множину $A \subset \mathbb{R}^m$.
**Межею** множини $A$ називають множину точок, в кожному околі яких є точки з $A$ та з $A^c$. Тобто це можна записати так:

$$\partial A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A \neq \emptyset \text{ та } U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A^c \neq \emptyset\}$$

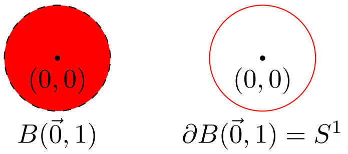


Приклад внутрішньості, замикання, межі деякої множини.

**Proposition 1.2.18** $\partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$.

**Proof.**
Нехай $\vec{x} \in \partial A$. Перше ми маємо $U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A \neq \emptyset$. Це як раз означатиме, що або $\vec{x} \in A$, або $\vec{x}$ – гранична точка $A$, тобто $\vec{x} \in \operatorname{Cl} A$. Друге ми маємо $U_\varepsilon(\vec{x}) \cap A^c \neq \emptyset$. Це буде означати, що $U_\varepsilon(\vec{x}) \not\subset A$, тобто $\vec{x}$ – не внутрішня точка $A$, тобто $\vec{x} \notin \operatorname{Int} A$. У результаті чого $\vec{x} \in \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$.
Якщо $\vec{x} \in \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$, то можна просто в зворотному порядку піти та отримати врешті-решт, що $\vec{x} \in \partial A$. ■

**Example 1.2.19** Зокрема розглянемо відкриту двовимірну кулю $B(\vec{0}, 1)$. Зауважимо, що $\partial B(\vec{0}, 1) = S^1$ – одинична сфера (тобто коло в нашому випадку).



Перше червоне – це відкрита куля. Друге червоне – його межа.

Також специфічні приклади. Маємо $\partial\emptyset = \emptyset$, а також $\partial\mathbb{R}^m = \emptyset$ (тут тіпа безмежна множина).

**Example 1.2.20** Якщо повернутися до одновимірного випадку, то $\partial(a, b) = \partial(a, b] = \partial[a, b) = \partial[a, b] = \{a, b\}$. У нас тут межа містить точки, які ніяк не зв'язуються на числовій прямій, тому ми й не розглядали межі.

**Proposition 1.2.21** Маємо $A \subset \mathbb{R}^m$. Тоді межа $\partial A$ – замкнена множина.

**Proof.**
Нехай $\vec{x}$ – гранична точка $\partial A$; тоді треба довести, що $\vec{x} \in \partial A$.
Для кожного $\varepsilon > 0$, за умовою, існує $\vec{y} \in \partial A, \vec{y} \neq \vec{x}$, для якого $\|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon$. Оскільки $\vec{y} \in \partial A$, то тоді існують $\vec{z}_1 \in A, \vec{z}_2 \in A^c$, які не збігаються з точкою $\vec{y}$ і для яких $\|y - \vec{z}_1\| < \varepsilon$, $\|y - \vec{z}_2\| < \varepsilon$. Маючи нерівність трикутників для норми, маємо $\|\vec{x} - \vec{z}_1\| < 2\varepsilon, \|\vec{x} - \vec{z}_2\| < 2\varepsilon$. Оскільки це виконується для всіх $\varepsilon > 0$, то звідси доводимо $\vec{x} \in \partial A$. ■

**Corollary 1.2.22** $S^m$ – одинична сфера – замкнена множина.

## 1.3 Границя послідовності

**Definition 1.3.1** Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ називається **границею** послідовності векторів $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| < \varepsilon$$

Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$.

**Theorem 1.3.2** Для послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a} \iff$
$\iff$ для всіх координат послідовності $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ існують $\lim\limits_{n\to\infty} a_j^{(n)} = a_j, j = \overline{1, m}$.

**Proof.**
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| < \varepsilon$.

У нас границя визначається вектором $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$. Тоді $\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_1^{(m)} - a_m)^2}$
$\implies \forall j = \overline{1,m} : |a_j^{(n)} - a_j| = \sqrt{(a_j^{(n)} - a_j)^2} < \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_1^{(m)} - a_m)^2} < \varepsilon$.
Отже, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_j^{(n)} = a_j$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall j = \overline{1,m} : \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_j^{(n)} = a_j$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |a_j^{(n)} - a_j| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.
$\implies \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m)^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \dfrac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$.
Отже, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$. ■

**Definition 1.3.3** Послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| < \varepsilon$$

**Theorem 1.3.4 Критерій Коші**
$\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – збіжна $\iff$ $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – фундаментальна.

**Proof.**
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – збіжна, тобто $\forall j = \overline{1,m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ – збіжні. Тоді всі вони – фундаментальні за критерієм Коші мат.аналіза $\mathbb{R}$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_j : \forall n, k \geq N_j : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.
$\implies \exists N = \max\{N_1, \dots, N_m\} : \forall n, k \geq N :$
$\|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| = \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1^{(k)})^2 + \dots + (a_m^{(n)} - a_m^{(k)})^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \dfrac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$.
Отже, наша послідовність – фундаментальна.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – фундаментальна, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, k \geq N : \|\vec{a}^{(n)} - \vec{a}^{(k)}\| < \varepsilon$.
Тоді $\forall j = \overline{1,m} : |a_j^{(n)} - a_j^{(k)}| < \varepsilon$ (зрозуміло), тобто $\forall j = \overline{1,m} : \{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ – фундаментальні.
Отже, вони всі збіжні, а тому $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ – збіжна. ■

**Definition 1.3.5** Послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається **обмеженою**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$$

**Definition 1.3.6** **Підпослідовність** послідовності $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$ називається послідовність

$$\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\},$$

де $\{n_l, l \geq 1\}$ – строго зростаюча послідовність в $\mathbb{N}$.

**Theorem 1.3.7 Теорема Бользано-Ваєрштрасса**
Будь-яка обмежена послідовність векторів має збіжну підпослідовність векторів.

**Proof.**
Маємо обмежену послідовність $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}$, тобто $\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|\vec{a}^{(n)}\| \leq C$.
Тоді кожна координата є обмеженою, оскільки $\forall j = \overline{1,m} : |a_j^{(n)}| \leq \sqrt{\left|a_1^{(n)}\right|^2 + \dots + \left|a_m^{(n)}\right|^2} \leq C$.
Тобто всі послідовності $\{a_j^{(n)}, n \geq 1\}$ – обмежені.
Розглянемо $\{a_1^{(n)}, n \geq 1\}$ – обмежена. Тоді існує збіжна підпослідовність $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$ (теорема Бользано-Ваєрштраса в мат.аналізі $\mathbb{R}$).
Розглянемо підпослідовність $\{\vec{a}^{(n_l)}, l \geq 1\}$. Вона також є обмеженою, тому всі координатні послідовності – обмежені.
Розглянемо $\{a_2^{(n_l)}, l \geq 1\}$ – обмежена. Тоді існує збіжна підпідпослідовність $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$. Оскільки підпослідовність $\{a_1^{(n_l)}, l \geq 1\}$ – збіжна, то збіжною буде й підпідпослідовність $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$.
Розглянемо підпідпослідовність $\{\vec{a}^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ – за аналогічними міркуваннями, теж обмежена.
Розглянемо підпідпослідовність $\{a_3^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ – обмежена. Тоді існує збіжна підпідпідпослідовність

$\{a_3^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$. Оскільки підпідпослідовності $\{a_1^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$, $\{a_2^{(n_{l_k})}, k \geq 1\}$ – збіжні, то збіжними будуть підпідпідпослідовності $\{a_1^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$, $\{a_2^{(n_{l_{k_p}})}, p \geq 1\}$.

$\vdots$

Після $m$ кроків отримаємо підпослідовність $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$, у якій всі координатні послідовності є збіжними. Тоді $\{\vec{a}^{(n_q)}, l \geq 1\}$ – збіжна. ■

**Proposition 1.3.8** Задані $\{\vec{a}^{(n)}, n \geq 1\}, \{\vec{b}^{(n)}, n \geq 1\}$, такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)} = \vec{b}$. Тоді:

1) $\forall c \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} c\vec{a}^{(n)} = c \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)} + \vec{b}^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)} + \lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}, \lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\vec{a}^{(n)}\| = \left\|\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}\right\|$.

**Proof.**
1),2) *випливає з властивостей границь в* $\mathbb{R}$*, якщо розглянути покоординатну збіжність.*

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_1^{(n)} b_1^{(n)} + \dots + a_m^{(n)} b_m^{(n)}) = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m = (\vec{a}, \vec{b}) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}, \lim\limits_{n\to\infty} \vec{b}^{(n)}\right)$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\vec{a}^{(n)}\| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(\vec{a}^{(n)}, \vec{a}^{(n)})} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{a}^{(n)}, \vec{a}^{(n)})} = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \|\vec{a}\| = \left\|\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}^{(n)}\right\|$.

Всі властивості доведені. ■

**Example 1.3.9** Розглянемо $\vec{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \dfrac{n-1}{n} & \dfrac{2n^2-1}{n^2} & \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}^T$ – послідовність векторів в $\mathbb{R}^4$. Обчислимо її границю. Ми можемо обчислити покоординатно, згідно з теоріями:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_2^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1.$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_3^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-1}{n^2} = 2.$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_4^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \dfrac{n-1}{n} & \dfrac{2n^2-1}{n^2} & \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & e \end{pmatrix}^T.$

**Theorem 1.3.10** Задана множина $A \subset \mathbb{R}^m$.
$\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка для $A \iff \exists\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$

**Proof.**
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\vec{x}^0$ – гранична точка для $A$, тобто $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ – нескінченна.
Зафіксуємо $\varepsilon = \dfrac{1}{n} \implies \forall \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \dfrac{1}{n}$. Тоді $\forall j = \overline{1, m} : |x_j^{(n)} - x_j^0| < \dfrac{1}{n}$.
За теоремою про 2 поліцаїв, отримаємо: $\forall j = \overline{1, m} : x_j^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_j^0$. Із покоординатної збіжності випливає, що $\vec{x}^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{x}^0$ для послідовності $\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\exists\{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0$. Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^0\| < \varepsilon$.
$\implies \forall n \geq N : \vec{x}^{(n)} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) \cap A$ – тобто нескінченна $\implies \vec{x}^0$ – гранична точка. ■

## 1.4 Функція від декількох змінних. Границя функції

Ми будемо розглядати функції вигляду $f \colon A \to \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^m$. Тобто ця функція має аргумент $\vec{x}$, а повертає деяке дійсне число $f(\vec{x})$. Проте оскільки $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix}^T$ складається з $m$ дійсних чисел, то ми можемо функцію сприймати як $f(x_1, \dots, x_m)$, тобто це функція з $m$ аргументами.

**Example 1.4.1** Розглянемо такі приклади:

1) Маємо функцію $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\} \to \mathbb{R}$, що задана як $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;
2) Маємо функцію $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, що задана як $f(\vec{x}) = f(x_1,\dots,x_m) = x_1x_2^2\dots x_m^m$.

**Definition 1.4.2** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка для $A$.
Число $a$ називається **границею функції** $f(\vec{x}) = f(x_1,\dots,x_m)$ **в точці** $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - a| < \varepsilon \qquad \text{означення Коші}$$

$$\forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\vec{x}^{(n)}) = a \qquad \text{означення Гайне}$$

Позначення: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = a$.

**Theorem 1.4.3** Означення Коші $\iff$ Означення Гайне.
*Доведення аналогічне як в матані* $\mathbb{R}$.

**Proposition 1.4.4 Арифметичні властивості**
Задані $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка $A$. Відомо, що $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = a, \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} g(\vec{x}) = b$.
Тоді:
1) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} cf(\vec{x}) = ca, \forall c \in \mathbb{R}$;
2) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = a + b$;
3) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x})g(\vec{x}) = ab$;
4) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \dfrac{a}{b}$ при $b \neq 0$.
*Всі вони випливають із арифметичних послідовностей та означення Гайне.*

**Theorem 1.4.5 Критерій Коші**
Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка для $A$.
$\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \vec{x_1}, \vec{x_2} \in A : \|\vec{x_1} - \vec{x_2}\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2})| < \varepsilon$.
*Доведення аналогічне як в матані* $\mathbb{R}$.

**Example 1.4.6** Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)} \left(\dfrac{y}{x} + \cos(xy)\right)$. Можна позначати це інакше: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to\pi}} \left(\dfrac{y}{x} + \cos(xy)\right)$.

$$\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \left(\frac{y}{x} + \cos(xy)\right) = \lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{y}{x} + \lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \cos(xy) = \frac{\pi}{1} + \cos\pi = \pi - 1.$$

**Example 1.4.7** Покажемо, що не існує границі $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.
Для доведення скористаємось означенням Гайне. Візьмемо дві послідовності:
$\{(x_n,y_n), n \geq 1\}$ так, щоб $y_n = x_n$, а також $(x_n,y_n) \to (0,0)$. Тоді $\dfrac{2x_ny_n}{x_n^2+y_n^2} = \dfrac{2x_n^2}{2x_n^2} \to 1$.
$\{(x_n,y_n), n \geq 1\}$ так, щоб $y_n = -x_n$, а також $(x_n,y_n) \to (0,0)$. Тоді $\dfrac{2x_ny_n}{x_n^2+y_n^2} = \dfrac{-2x_n^2}{2x_n^2} \to -1$.
Можна конкретизувати, сказати $x_n = \dfrac{1}{n}$, а можна цього не робити, напевно. У будь-якому випадку, ми показали, що не існує границі.
Тобто ми прямували до точки $(0,0)$ з двох сторін: вздовж прямої $y = x$ та $y = -x$.

**Theorem 1.4.8 Границя в полярних координатах**
Задана функція $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Припустимо, що $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = F_1(\rho)F_2(\varphi)$, причому $\lim\limits_{\rho\to0} F_1(\rho) = 0$ та $F_2(\varphi)$ – обмежена. Тоді $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

**Proof.**
Маємо $\lim\limits_{\rho\to0} F_1(\rho) = 0 \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall \rho : |\rho| < \delta \implies |F_1(\rho)| < \varepsilon$.
Також $F_2$ – обмежена, тобто $\exists M > 0 : \forall \varphi : |F_2(\varphi)| < M$.
Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді існує таке $\delta > 0$, що $\forall (x,y)$, якщо $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2} = |\rho| < \delta$, то звідси $|f(x,y)| = |f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)| = |F_1(\rho)||F_2(\varphi)| < M\varepsilon$.
Таким чином, дійсно, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. ■

**Example 1.4.9** Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

Маємо $x = \rho\cos\varphi$ та $y = \rho\sin\varphi$. Тоді функція $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2} = \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$.

Ми змогли розбити на функції $F_1(\rho) = \rho^2 \overset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$ та $F_2(\varphi) = \cos^2\varphi\sin^2\varphi$ – обмежена, бо $|F_2(\varphi)| \leq 1$.

Таким чином, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 0$.

**Remark 1.4.10** Якщо так станеться, що для двох різних кутів $\theta$ при $\rho \to 0$ ми отримаємо два різних ліміта, то тоді $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

**Remark 1.4.11** Щойно ми провели полярну заміну в двовимірному випадку: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$.

Можна те саме повторити для трьовимірного випадку, взявши заміну $\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$.

Або можемо психанути та узагальнити на $m$-вимірний випадок: $\begin{cases} x_1 = \rho\cos\varphi\sin\nu_1\ldots\sin\nu_{m-3}\sin\nu_{m-2} \\ x_2 = \rho\sin\varphi\sin\nu_1\ldots\sin\nu_{m-3}\sin\nu_{m-2} \\ x_3 = \rho\sin\nu_1\ldots\sin\nu_{m-3}\sin\nu_{m-2} \\ \vdots \\ x_{m-1} = \rho\sin\nu_{m-3}\sin\nu_{m-2} \\ x_m = \rho\cos\nu_{m-2} \end{cases}$.

**Definition 1.4.12** Число $L = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ називається **повторною границею**, якщо

$$\exists \lim_{y\to y_0} f(x,y) = g(y)$$

Аналогічно визначається $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

Останнє дається для загального знання, таке ми точно використовувати не будемо. Тут надто багато плутанини з ними. Також можна було це узагальнити для функцій більше за двох змінних, але я цього не буду робити.

**Example 1.4.13** Маємо функцію $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}$.

Якщо шукати $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, то вона не існує, тому що при фіксованому $x$ ми маємо порахувати границю від $\sin\dfrac{1}{y}$, якого не існує. Також не існує $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ за аналогічними міркуваннями.

Проте! Подвійна границя $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Дійсно,

$\left|x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq \left|x\sin\dfrac{1}{y}\right| + \left|y\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon$.

Остання оцінка отримана в силу $\|(x,y)\| < \delta$, кладемо $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ – границя доведена.

**Example 1.4.14** Маємо функцію $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \qquad \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0.$

Проте! Подвійної границі $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує. Дійсно, якщо $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$, то тоді $f(x,y) = \dfrac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2} = \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi$.

Для різного напрямку кривої отримаємо різні границі, а тому не існує.

**Remark 1.4.15** Окремо можуть виникнути границі вигляду $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y)$. У такому разі необхідні уточнення, що мається увазі під цим лімітом. Або дивитись на контекст задачі.

**Example 1.4.16** Маємо $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$. У даному контексті мається на увазі, що $x, y$ робимо скільки завгодно великими одночасно.
Маємо ось таку оцінку: $0 \leq (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = \dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}} \leq \dfrac{(x+y)^2}{e^{x+y}}$.
Оскільки $x > 0, y > 0$ в силу характеру прямування, то ця нерівність справедлива. Цілком зрозуміло, що при $x \to +\infty, y \to +\infty$ одночасно маємо $x+y \to +\infty$, а тому $\dfrac{(x+y)^2}{e^{x+y}} \to 0, x+y \to +\infty$.
Таким чином, $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = 0$.

## 1.5 Неперервність функції

**Definition 1.5.1** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – гранична точка.
Функція $f$ називається **неперервною в точці** $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists \lim_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0)$$

У будь-якій ізольованій точці $\vec{x}^0$ функція $f$ також неперервна.
Функція $f$ називається **неперервною на множині** $A$, якщо

$$\forall \vec{x} \in A : f \text{ – неперервна.}$$

Позначення: $C(A)$ – множина неперервних функцій на $A$.

**Remark 1.5.2** Можна було спочатку дати означення через $\varepsilon$-$\delta$ мову, а згодом прийти до еквівалентного означення, як ми це робили в мат. аналізі $\mathbb{R}$, однак буде все аналогічно. Тому я цього не роблю.

**Proposition 1.5.3** Задані функції $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – гранична точка. Відомо, що $f, g$ – неперервні в точці $\vec{x}^0$. Тоді:
1) $cf$ – неперервна в точці $\vec{x}^0, \forall c \in \mathbb{R}$;
2) $f+g$ – неперервна в точці $\vec{x}^0$;
3) $fg$ – неперервна в точці $\vec{x}^0$;
4) $\dfrac{f}{g}$ – неперервна в точці $\vec{x}^0$, якщо $g(\vec{x}^0) \neq 0$.
*Випливають з властивостей границь функцій та неперервності.*

**Theorem 1.5.4** Наступні функції є неперервними на своїй множині $A$:
1) $f(\vec{x}) = const$ – константа, $A = \mathbb{R}^m$;
2) $f(\vec{x}) = x_j, j = \overline{1,m}$ – координата, $A = \mathbb{R}^m$;
3) $P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum\limits_{\substack{0\leq k_1\leq n_1\\ 0\leq k_2\leq n_2\\ \dots\\ 0\leq k_m\leq n_m}} a_{k_1k_2\dots k_m} \cdot x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_m^{k_m}$ – многочлен від $m$ змінних, $A = \mathbb{R}^m$;
4) $R(x_1, \dots, x_m) = \dfrac{P(x_1, \dots, x_m)}{Q(x_1, \dots, x_m)}$ – раціональна функція від $m$ змінних, $A = \mathbb{R}^m \setminus \{\vec{x} : Q(\vec{x}) = 0\}$.

*1) Все зрозуміло.*

*2)* $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)| = |x_j - x_j^0| < \varepsilon$, *тому встановлюється* $\delta = \varepsilon$.

*3) Безпосередньо випливає з* ***Prp. 1.5.3*** *як сума та добуток функцій 1),2).*

*4) Безпосередньо випливає з* ***Prp. 1.5.3*** *як частка двох функцій 3).*

**Example 1.5.5** Доведемо, що функція $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ неперервна на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Для цього покажемо, що $\sqrt{x^2+y^2}$ – неперервна в деякій точці $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Дійсно,
$|\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x_0^2+y_0^2}| = \dfrac{|x^2+y^2-x_0^2-y_0^2|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \leq \dfrac{|x^2+y^2-x_0^2-y_0^2|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \to 0$ при $(x,y) \to (x_0, y_0)$.
Ми вже знаємо, що $f(x,y) = x^2+y^2$ – неперервна в точці $(x_0, y_0)$, а тому $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0} (x^2+y^2) = x_0^2+y_0^2$,

тож вище все правильно. Отже, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$.
А це й доводить неперервність функції $f$ в будь-якій точці $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

**Example 1.5.6** Взагалі-то кажучи, про точки розриву в матані $\mathbb{R}^m$ ніхто не розповідає, бо не сильно це й треба, але хай буде даний приклад. Дослідити на розривність функцію $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.
Точки, де відбувається розрив – це точки при $x = -y$. Тобто маємо $(x,y) = (a,-a), a \in \mathbb{R}$ – точка розриву.

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{3a^2}, & a \neq 0 \\ \infty, & a = 0 \end{cases}.$$

Отже, маємо $(0,0)$ – точка нескінченного розриву та $(a,-a), a \neq 0$ – точка усуненого розриву.

**Theorem 1.5.7 Теорема Ваєрштраса 1, 2**
Задана множина $A$ – замкнена та обмежена; функція $f \in C(A)$. Тоді:
1. $f$ – обмежена на $A$;
2. $f$ досягає найбільшого та найменшого значень, тобто $\exists \vec{x}^*, \vec{x}_* \in A : f(\vec{x}^*) = \max\limits_{\vec{x}\in A} f(\vec{x}),\ f(\vec{x}_*) = \min\limits_{\vec{x}\in A} f(\vec{x})$.
*Доведення аналогічне як в матані* $\mathbb{R}$.

**Definition 1.5.8** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$.
Функція $f$ називається **рівномірно неперервною** на множині $A$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x_1}, \vec{x_2} \in A : \|\vec{x_1} - \vec{x_2}\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2})| < \varepsilon.$$

Позначення: $C_{\text{unif}}(A)$ – множина рівномірно неперервних функцій на $A$.

**Theorem 1.5.9** Задана функція $f \in C_{\text{unif}}(A)$. Тоді $f \in C(A)$.
*Доведення аналогічне як в матані* $\mathbb{R}$.

**Theorem 1.5.10 Теорема Кантора**
Задана функція $f \in C(A)$ та $A$ – замкнена, обмежена. Тоді $f \in C_{\text{unif}}(A)$.
*Доведення аналогічне як в матані* $\mathbb{R}$.

## 1.6 Символіка Ландау

**Definition 1.6.1** Задані функції $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}$ – гранична точка $A$.
Функція $f$ називається **O-великою** від функції $g$ в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists L > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies |f(\vec{x})| \leq L|g(\vec{x})|$$

Позначення: $f(\vec{x}) = O(g(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0$.
Функція $f$ називається **o-малою** від функції $g$ в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies |f(\vec{x})| < \varepsilon|g(\vec{x})|$$

Позначення: $f(\vec{x}) = o(g(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0$.

Всі властивості символік Ландау для функції від однієї змінної переходять на функцію від декількох змінних в силу аналогічності доведення.

**Example 1.6.2** Зокрема $xy = o(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ при $(x,y,z) \to (0,0,0)$. Дійсно,
$\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| \leq \dfrac{|x||y|}{\sqrt{x^2}} = |y| \to 0$ при $(x,y,z) \to (0,0,0)$. Отже, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$.

## 1.7 Векторнозначні функції. Границя, неперервність, символіка Ландау функції

Ми будемо розглядати вектор-функції кількох (або однієї) змінної вигляду $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}^m$.
Тобто тепер $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) \end{pmatrix}$.

**Example 1.7.1** Маємо деяку функцію $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, що задана таким чином: $\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$. Або зазвичай це пишуть так: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$.

**Definition 1.7.2** Задана функція $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка для $A$.
Вектор $\vec{b}$ називається **границею вектор-функції $\vec{f}(\vec{x})$ в точці $\vec{x}^0$**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \vec{x} \in A : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \Rightarrow \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon \qquad \text{означення Коші}$$

$$\forall \{\vec{x}^{(n)}, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : \vec{x}^{(n)} \neq \vec{x}^0 : \lim_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \vec{f}(\vec{x}^{(n)}) = \vec{b} \qquad \text{означення Гайне}$$

Позначення: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$.

**Theorem 1.7.3** Означення Коші $\iff$ Означення Гайне.
*Все аболютно аналогічно.*

**Proposition 1.7.4** Задана функція $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка для $A$.
$\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{u} \iff \forall j = \overline{1,k} : \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f_j(\vec{x}) = u_j$.
*Випливає із означення Гайне та покоординатної збіжності.*

**Proposition 1.7.5 Арифметичні властивості**
Задані $\vec{f}, \vec{g}\colon A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка для $A$. Відомо, що $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{u}, \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{v}$.
Тоді:
1) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} c\vec{f}(\vec{x}) = c\vec{u}, \forall c \in \mathbb{R}$;
2) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(t)) = \vec{u} + \vec{v}$;
3) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} (\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})) = (\vec{u}, \vec{v})$;
4) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \|\vec{f}(\vec{x})\| = \|\vec{u}\|$.
*Всі вони випливають із векторних послідовностей та означення Гайне.*

**Theorem 1.7.6 Границя від композиції вектор-функції**
Задані функції $\vec{f}\colon A \to B, \vec{g}\colon B \to \mathbb{R}^p$ та композиція $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$. Нехай $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m, \vec{y}^0 \in \mathbb{R}^k$ – граничні точки $A, B$ відповідно та $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}^0$ та $\exists \lim\limits_{\vec{y}\to\vec{y}^0} \vec{g}(\vec{y}) = \vec{b}$. Тоді $\exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{h}(\vec{x}) = \vec{b}$.
*Доведення аналогічне, як в матані $\mathbb{R}$.*

**Remark 1.7.7** У випадку векторної функції $\vec{a}\colon A \to \mathbb{R}^k$, де $A \subset \mathbb{R}$, оскільки прямування йде за дійсною множиною, то ми можемо визначти **границю ліворуч та праворуч** даної функції. Думаю, буде зрозуміло, як це визначити.

**Example 1.7.8** Знайти границю $\lim\limits_{t\to 0+0} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T$.

За одним твердженням, ми можемо покоординатно шукати границі: $\lim\limits_{t\to 0+0} \dfrac{\sin 2t}{t} = 2, \quad \lim\limits_{t\to 0+0} t^t = 1$.
Отже, $\lim\limits_{t\to 0+0} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin 2t}{t} & t^t \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

**Definition 1.7.9** Задана функція $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ – гранична точка.
Функція $\vec{f}$ називається **неперервною в точці $\vec{x}^0$**, якщо

$$\exists \lim_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}^0).$$

Позначення: $C(A)$ – множина неперервних функцій на $A$.

**Remark 1.7.10** Аналогічно сума неперервних функцій – неперервна; множення на скаляр – неперервна. Також скалярний добуток неперервних функцій – неперервна; норма неперервних функцій – неперервна.

**Theorem 1.7.11** Задані множини $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^k$. Задані функції $\vec{f} \colon A \to B$ – неперервна в точці $\vec{x}^0$, $\vec{g} \colon B \to \mathbb{R}^n$ – неперервна в точці $\vec{f}(\vec{x}^0)$. Тоді функція $\vec{h} \colon A \to \mathbb{R}^n : \vec{h}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$ – неперервна в точці $\vec{x_0}$.
*Доведення аналогічне як в матані* $\mathbb{R}$.

**Definition 1.7.12** Задані функції $\vec{f}, \vec{g} \colon A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^m$ – гранична точка $A$.
Функція $\vec{f}$ називається **O-великою** від функції $\vec{g}$ в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists L > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x})\| \leq L\|\vec{g}(\vec{x})\|$$

Позначення: $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{O}(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0$.
Функція $\vec{f}$ називається **o-малою** від функції $\vec{g}$ в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \vec{x} \neq \vec{x}^0 : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies \|\vec{f}(\vec{x})\| < \varepsilon\|\vec{g}(\vec{x})\|$$

Позначення: $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{o}(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0$.

**Corollary 1.7.13** $\vec{f}(\vec{x}) = o(\vec{g}(\vec{x})), \vec{x} \to \vec{x}^0 \iff \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}^0} \dfrac{\|\vec{f}(\vec{x})\|}{\|\vec{g}(\vec{x})\|} = 0.$

# 2 Диференційованість

## 2.1 Для функції багатьох змінними

**Definition 2.1.1** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
Функція $f$ називається **диференційованою** в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R} : f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m \Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{o(||\Delta\vec{x}||)}$$

Тобто диференційованість означає, що поверхня навколо точки $\vec{x}^0$ дуже схожа на площину, що проходить через точку $\vec{x}^0$.

**Example 2.1.2** Розглянемо функцію $f(x,y) = x^2 - xy - y^2$ на $\mathbb{R}^2$. Вона є диференційованою в будь-якій точці $(x_0, y_0)$. Дійсно, розпишемо різницю:
$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = (x_0+\Delta x)^2 - (x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y) - (y_0+\Delta y)^2 - (x_0^2 - x_0y_0 - y_0^2) =$
$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0y_0 - x_0\Delta y - y_0\Delta x - \Delta x\Delta y - y_0^2 - 2y_0\Delta y - \Delta y^2 - x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2 =$
$= (2x_0 - y_0)\Delta x + (-x_0 - 2y_0)\Delta y + (\Delta x^2 - \Delta x\Delta y - \Delta y^2)$.
Залишилось довести, що $\Delta x^2 - \Delta x\Delta y - \Delta y^2 = o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. Дійсно,
$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta x^2 - \Delta x\Delta y - \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin\varphi\cos\varphi - \rho^2\sin^2\varphi}{\rho} =$
$= \lim\limits_{\rho\to 0} \rho(\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi) = 0$.
Отже, $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = (2x_0 - y_0)\Delta x + (-x_0 - 2y_0)\Delta y + \underset{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}{o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)}$.

**Proposition 2.1.3** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що функція $f$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$. Тоді $f$ – неперервна в точці $\vec{x}^0$.

**Proof.**
$f$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$, тобто $f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{o(||\Delta\vec{x}||)}$.
Або можна це записати інакше:
$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1(x_1 - x_1^0) + \dots + L_m(x_m - x_m^0) + \underset{\vec{x}\to\vec{x}^0}{o(||\vec{x} - \vec{x}^0||)} \implies \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} (f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)) \boxed{=}$
Всі дужки прямують покоординатно до нуля, $o$-маленьке також, в силу н.м.
$\boxed{=} 0 \implies f$ – неперервна в точці $\vec{x}^0$. ■

**Definition 2.1.4** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
**Частинною похідною функції $f$ за змінною** $x_j$ в точці $\vec{x}^0$ називають величину:

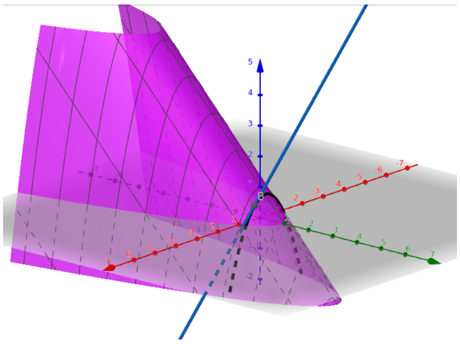
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j}$$

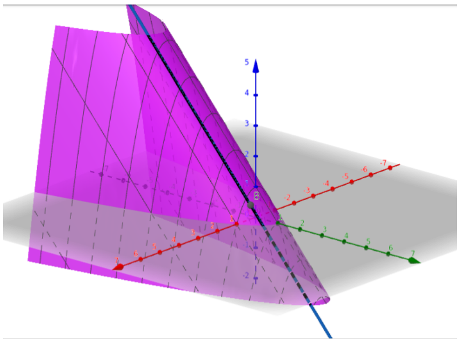
Якщо уважно придивитись на означення, то, насправді, ми просто підставили $x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0$ та отримали функцію $g(x_j) = f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0)$ – функція від одного агрументу $x_j$ – та обчислили похідну цієї функції в точці $x_j^0$. Отже,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = g'(x_j^0)$$

**Example 2.1.5** Маємо функцію $f(x,y) = 1 - x^2 - y$. Знайдемо всі її частинні похідні.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$

Сенс $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ – знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь $OX$. Аналогічно $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ – знайти дотичну прямої в певній точці, але ця дотична напрямлена туди саме, де й вісь $OY$.





Таких дотичних прямих існують безліч, але про це згодом.

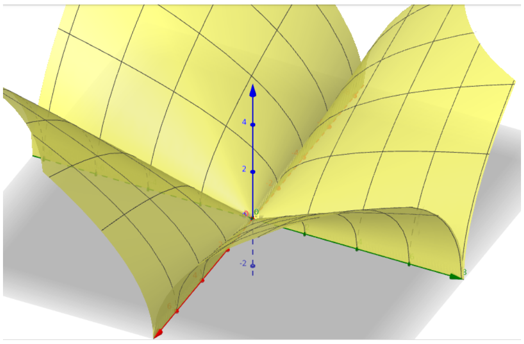
**Proposition 2.1.6 Необхнідна умова диференційованості**
Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Тоді вона має частинні похідні в точці $\vec{x}^0$, причому $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = L_j$.

**Proof.**
$f$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$, тоді $\exists L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R}:$
$f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L_1\Delta x_1 + \dots + L_m\Delta x_m + o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$.
У окремому випадку, встановити можна $\Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \Delta x_j & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$.
Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0) = \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \dfrac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_j} \overset{f\text{ – диференційована}}{=}$

$= \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \dfrac{L_1 \cdot 0 + \dots + L_j\Delta x_j + \dots + L_m \cdot 0 + o(|\Delta x_j|)}{\Delta x_j} = \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \dfrac{L_j\Delta x_j + o(\Delta x_j)}{\Delta x_j} = L_j$. ■

**Remark 2.1.7** У зворотному напрямку це не завжди вірно.

**Example 2.1.8** Маємо функцію $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Розглянемо її в околі точки $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0$.
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\sqrt{|0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0$.
Тобто в точці $(x_0, y_0)$ функція має частинні похідні. Проте виявляється, що в $(x_0, y_0)$ вона не диференційована. Дійсно,
$f(\Delta x, \Delta y) = 0\Delta x + 0\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$, тобто
$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \overset{\text{полярна заміна}}{=} \lim\limits_{\rho \to 0} \sqrt{|\cos\varphi \sin\varphi|}$ – не існує, тому рівність вище не вірна.



Можливо виникне питання, а чи існують інші числа $(L_1, L_2) \neq (0, 0)$. Ні. Це випливає з необхідної умови диференційованості.

Виникає тоді інше питання, а коли ми можемо гарантувати диференційованість через існування частинних похідних.

**Theorem 2.1.9 Достатня умова диференційованості**
Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A \subset \mathbb{R}^m$ – внутрішня точка. Відомо, що в деякому околі точки $\vec{x}^0$ існують всі частинні похідні, які неперервні в точці $\vec{x}^0$. Тоді $f$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$.

*Ми будемо доводити при $\mathbb{R}^2$. Для функцій в $\mathbb{R}^m$ – аналогічно, але більш технічна справа.*

**Proof.**
Отже, дано $f(x,y)$ та в околі точці $(x_0,y_0)$ існують частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, які неперервні в $(x_0,y_0)$. Розглянемо приріст аргументу $\Delta x, \Delta y$ так, щоб ми були всередині околу точці $(x_0,y_0)$. Нехай $\Delta x > 0, \Delta y > 0$, для інших все аналогічно.
$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) \boxed{=}$
Позначу $h(t) = f(x_0+\Delta x, y_0+t), t \in [0,\Delta y]$. Тоді $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) = h(\Delta y) - h(0)$.
Функція $h$ – диференційована на $[0,\Delta y]$, оскільки існує $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, яка неперервна. Тому $h \in C([0,\Delta y])$, а значить, за теоремою Лагранжа,
$h(\Delta y) - h(0) = h'(c_1)\Delta y, c_1 \in (0,y)$
$h'(t) = f'_t(x_0+\Delta x, y_0+t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+t)$
$\implies h(\Delta y) - h(0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1)\Delta y.$

Аналогічно розглянемо функцію $g(s) = f(x_0+s, y_0), s \in [0,\Delta x]$. Тоді
$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) = g(\Delta x) - g(0) \overset{\text{Th. Лагранжа}}{=} = g'(c_2)\Delta x = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0)\Delta x, c_2 \in (0,\Delta x).$
Повертаємось до нашої рівності.

$\boxed{=}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1)\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0)\Delta x.$
Залишилось довести, що виконується наступна рівність:
$(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right) = \underset{\Delta x\to 0 \quad \Delta y \to 0}{o}(||(\Delta x,\Delta y)||).$
$(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right) =$
$= \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1)\Delta y + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0)\Delta x\right) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right) =$
$= \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\Delta x + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\Delta y.$
Якщо $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, то звідси $c_1 \to 0, c_2 \to 0$ та за умовою того, що частинні похідні є неперервними, маємо:
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c_2, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) \overset{\text{позн}}{=} \alpha \to 0$
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+c_1) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \overset{\text{позн}}{=} \beta \to 0$
Далі, використовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо таке:
$\left|\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \overset{\text{К-Б}}{\leq} \left|\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| \to 0 \implies \dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0, \Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$
Остаточно отримуємо:
$(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right) = \underset{\Delta x\to 0 \quad \Delta y \to 0}{o}(||(\Delta x,\Delta y)||).$
Тобто звідси $f$ – диференційована в точці $(x_0,y_0)$. ■

**Definition 2.1.10** Задано функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
**Похідною функції** $f$ в точці $\vec{x}^0$ називається ковектор

$$f'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} (\vec{x}^0)$$

Таким чином, ми можемо визначити лінійний функціонал по $\Delta\vec{x}$ ось так:
$f'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)\Delta x_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{x}^0)\Delta x_m.$

Тоді означення диференційованої функції $f$ перепишеться в такому вигляді:
$f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0)\Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$.

**Remark 2.1.11** Для похідної функції $f$ в точці $\vec{x}^0$ можна зустріти ще позначення $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{x}}$ або $\dfrac{\partial f}{\partial(x_1, \dots, x_m)}$. Цими позначеннями я користуватися, мабуть, не буду.

**Proposition 2.1.12** Задані функції $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що $f, g$ – диференційовані в точці $\vec{x}^0$. Тоді:
1) $\alpha f$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, похідна $(\alpha f)'(\vec{x}^0) = \alpha f'(\vec{x}^0)$;
2) $f + g$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$, похідна $(f + g)'(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)$;
3) $fg$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$, похідна $(fg)'(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) + f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)$.

**Proof.**
Доведемо кожну (крім першого пункту) властивість.

1) *Зрозуміло.*

2) $(f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) + g(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})) - (f(\vec{x}^0) + g(\vec{x}^0)) = (f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0)) + (g(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - g(\vec{x}^0)) =$
$= f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|) + g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|) = (f'(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$.

3) $f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x})g(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0) =$
$= (f(\vec{x}^0) + f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)) \cdot (g(\vec{x}^0) + g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)) - f(\vec{x}^0)g(\vec{x}^0)\boxed{=}$
Після розкриття дужок ми залишимо лише доданки $(f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x}$ та $(g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x}$.
Ось чому:
$f(\vec{x}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|) \qquad g(\vec{x}^0)o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$
$(f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}) \cdot (g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$, тому що, розписавши, побачимо $\Delta x_i \Delta x_j = o(\|\Delta\vec{x}\|)$.
$(f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x})o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|) \qquad (g'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x})o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|) \qquad ,$
тому що, розписавши, побачимо $\Delta x_j o(\|\Delta\vec{x}\|) = o(\|\Delta\vec{x}\|)$.
$(o(\|\Delta\vec{x}\|))^2 = o(\|\Delta\vec{x}\|)$
Повертаємось до рівності:
$\boxed{=}(f(\vec{x}^0)g'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} + (g(\vec{x}^0)f'(\vec{x}^0)) \cdot \Delta\vec{x} + o(\|\Delta\vec{x}\|)$.

Майже всі властивості доведені. ■

**Definition 2.1.13** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
**Диференціалом функції** $f(x)$ в точці $\vec{x}^0$ називається такий вираз:

$$df(\vec{x}^0, \Delta\vec{x}) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}$$

Частіше позначають ще диференціал в точці ось так: $df_{\vec{x}^0}$.

**Remark 2.1.14** Якщо згадати лінійну алгебру, то $df_{\vec{x}^0}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – це, насправді, лінійний функціонал, де в нас записується ковектор $f'(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^0) \end{pmatrix}$. І ми маємо:
$df_{\vec{x}^0}(\Delta\vec{x}) = f'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x}$.

Як й раніше, аргумент $\Delta\vec{x}$ опускають, а також позначають $\Delta\vec{x} = \vec{dx}$, тобто $\Delta x_1 = dx_1, \dots, \Delta x_m = dx_m$. Тоді маємо інший вигляд:

$$df(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \vec{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)\, dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{x}^0)\, dx_m$$

**Example 2.1.15** Маємо функцію $f(x, y) = 1 - x^2 - y$. Ми вже знайшли $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$, вони є неперервними в будь-якій точці. Отже, $f$ – диференційована будь-де. Знадемо тепер диференціал функції. Це дуже просто:
$df(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\, dy = (-2x)\, dx - \, dy \overset{\text{або}}{=} \begin{pmatrix} -2x & -1 \end{pmatrix} \vec{dr}$.

## 2.2 Для векторнозначних функцій

**Definition 2.2.1** Задана функція $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
Вектор-функція $\vec{f}$ називається **диференційованою** в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\exists M \in \mathrm{Mat}_{m\times k}(\mathbb{R}) : \vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{\vec{o}(||\Delta\vec{x}||)}$$

Зараз дізнаємось, що це за матриця $M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix}$ під час доведення твердження.

**Proposition 2.2.2** Задана функція $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
$\vec{f}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0 \iff f_1, \dots, f_k$ – диференційовані в точці $\vec{x}^0$.

**Proof.**
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\vec{f}$ – диференційована в $\vec{x}^0$, тобто $\exists M \in \mathrm{Mat}_{m\times k}(\mathbb{R}) : \vec{f}(\vec{x}^0+\Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \underset{\Delta\vec{x}\to\vec{0}}{\vec{o}(||\Delta\vec{x}||)}$.

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^0) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(||\Delta\vec{x}||) \\ \vdots \\ \vec{o}(||\Delta\vec{x}||) \end{pmatrix}$$

Із цієї рівності випливає, що $\forall j = \overline{1,k}$ :
$f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - f_j(\vec{x}^0) = M_{j1}\Delta x_1 + \dots + M_{jm}\Delta x_m + \underset{\Delta\vec{x}\to 0}{o(||\Delta\vec{x}||)}$.
Це означає, що $f_j$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$. Тоді звідси випливає, що:
$M_{j1} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}(\vec{x}^0), \dots, M_{jm} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_m}(\vec{x}^0)$.
В результаті отримаємо ось такий вигляд матриці:

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_k' \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = J(\vec{x}^0) = \vec{f}'(\vec{x}^0)$$ – це називають **матрицею Якобі**.

Матриця Якобі описує **похідну** вектор-функції $\vec{f}$ в точці $\vec{x}^0$, тобто $\vec{f}'$ – це лінійний оператор. А якщо матриця буде квадратною, то ми можемо обчислити $\det \vec{f}'(\vec{x}^0)$ – це називається **якобіаном**.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $f_1, \dots, f_k$ – диференційовані в точці $\vec{x}^0$. Хочемо довести, що
$\vec{f}(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}^0) - \vec{f}(\vec{x}^0) - M\Delta\vec{x} = \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$, але це є правда, тому що $\forall j = \overline{1,k} : f_j$ – диференційована $\implies f_j(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}^0) - f_j(\vec{x}^0) - f_j'(\vec{x}^0) \cdot \Delta\vec{x} = o(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$ – виконана покоординатна рівність. ■

**Remark 2.2.3** Для матриці Якобі існують різні позначення: зазначені вже $J(\vec{x}^0)$, $\vec{f}'(\vec{x}^0)$, а також навіть $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{x}}(\vec{x}^0)$ або $\dfrac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(\vec{x}^0)$. Іноді користуватимусь цими позначеннями.

**Proposition 2.2.4** Задана функція $\vec{f}\colon A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що вектор-функція $\vec{f}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$. Тоді $\vec{f}$ – неперервна в точці $\vec{x}^0$.

**Proof.**
Дійсно, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} \big(M(\vec{x} - \vec{x}^0) + \vec{o}(||\vec{x} - \vec{x}^0||)\big) = \vec{0}$, оскільки виконується покоординатна границя. ■

**Proposition 2.2.5** Задані функції $\vec{f}, \vec{g}\colon A \to \mathbb{R}^k$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Відомо, що $\vec{f}, \vec{g}$ – диференційовані в точці $\vec{x}^0$. Тоді $\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$, похідна
$(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})'(\vec{x}^0) = \alpha\vec{f}'(\vec{x}^0) + \beta\vec{g}'(\vec{x}^0)$.
*Випливає з арифметики матриці. Тут цілком зрозуміло.*

**Example 2.2.6 Важливий**
Маємо вектор-функцію $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}$. Знайдемо її похідну та якобіан.

$$\vec f'(\vec x^0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}\qquad \det\vec f'(\vec x^0)=\cos\varphi\rho\cos\varphi+\sin\varphi\rho\sin\varphi=\rho.$$

Ще знадобиться, коли будемо шукати подвійні інтеграли.

**Proposition 2.2.7** Задані функції $\vec f\colon A\to B$ та $\vec g\colon B\to\mathbb{R}^k$, де $A\subset\mathbb{R}^m, B\subset\mathbb{R}^n$. Відомо, що $\vec f$ – диференційована в точці $\vec x^0$ та $\vec g$ – диференційована в точці $\vec y^0$. Тоді $\vec g\circ\vec f$ – диференційована в точці $\vec x^0$, похідна $(\vec g\circ\vec f)'(\vec x^0)=\vec g'(\vec y^0)\vec f'(\vec x^0)$.

**Lemma 2.2.8** Задана матриця $A\in\mathrm{Mat}_{m\times k}(\mathbb{R})$. Тоді $\exists C\geq 0:\forall\vec h\in\mathbb{R}^m:\|A\vec h\|\leq C\|\vec h\|$.

**Proof.**

Дійсно, $A=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k1} & \dots & a_{km}\end{pmatrix}\implies A\vec h=\begin{pmatrix}a_{11}h_1+\dots+a_{1m}h_m\\ \vdots\\ a_{k1}h_1+\dots+a_{km}h_m\end{pmatrix}$.

$\implies\|A\vec h\|=\sqrt{(a_{11}h_1+\dots+a_{1m}h_m)^2+\dots+(a_{k1}h_1+\dots+a_{km}h_m)^2}\overset{\text{К-Б}}{\leq}$

$\leq\sqrt{(a_{11}^2+\dots+a_{1m}^2)(h_1^2+\dots+h_m^2)+\dots+(a_{k1}^2+\dots+a_{km}^2)(h_1^2+\dots+h_m^2)}=$

$=\|\vec h\|\sqrt{(a_{11}^2+\dots+a_{1m}^2)+\dots+(a_{k1}^2+\dots+a_{km}^2)}=C\|\vec h\|$. ■

Тепер безпосередньо доведення твердження.

**Proof.**

$\vec g\circ\vec f(\vec x^0+\Delta\vec x)-\vec g\circ\vec f(\vec x^0)=\vec g(\vec f(\vec x^0+\Delta\vec x))-\vec g(\vec f(\vec x^0))=\vec g(\vec f(\vec x^0)+\vec f'(\vec x^0)\Delta\vec x+\vec o(\|\Delta\vec x\|))-\vec g(\vec f(\vec x^0))=$

$=\vec g(\vec y^0+\Delta\vec y)-\vec g(\vec y^0)=\vec g'(\vec y^0)\Delta\vec y+o(\|\Delta\vec y\|)=\vec g'(\vec y^0)\vec f'(\vec x^0)\Delta\vec x+\vec g'(\vec y^0)\vec o(\|\Delta\vec x\|)+\vec o(\|\Delta\vec y\|)\boxed{=}$

Залишилось довести, що $\vec g'(\vec y^0)\vec o(\|\Delta\vec x\|)+\vec o(\|\Delta\vec y\|)=\vec o(\|\Delta\vec x\|)$, якщо $\Delta\vec x\to\vec 0$, тобто

$\lim\limits_{\Delta\vec x\to\vec 0}\dfrac{\|\vec g'(\vec y^0)\vec o(\|\Delta\vec x\|)+\vec o(\|\Delta\vec y\|)\|}{\|\Delta x\|}=0.$

$\dfrac{\|\vec g'(\vec y^0)\vec o(\|\Delta\vec x\|)+\vec o(\|\Delta\vec y\|)\|}{\|\Delta x\|}\leq\dfrac{\|\vec g'(\vec y^0)\vec o(\|\Delta\vec x\|)\|+\|\vec o(\|\Delta\vec y\|)\|}{\|\Delta x\|}\overset{\textbf{Lm. 2.2.8}}{\leq}C\dfrac{\vec o(\|\Delta\vec x\|)}{\|\Delta\vec x\|}+\dfrac{\vec o(\|\Delta\vec y\|)}{\|\Delta\vec x\|}=$

$=C\dfrac{\vec o(\|\Delta\vec x\|)}{\|\Delta\vec x\|}+\dfrac{\vec o(\|\Delta\vec y\|)}{\|\Delta\vec y\|}\dfrac{\|\Delta\vec y\|}{\|\Delta\vec x\|}.$

Якщо $\Delta\vec x\to\vec 0$, то перший доданок прямує до нуля, а другий буде прямувати до нуля, якщо $\dfrac{\|\Delta\vec y\|}{\|\Delta\vec x\|}$ буде обмеженою. Зараз це й покажемо:

$\dfrac{\|\Delta\vec y\|}{\|\Delta\vec x\|}=\dfrac{\|\vec f'(\vec x^0)\Delta\vec x+\vec o(\|\Delta\vec x\|)\|}{\|\Delta\vec x\|}\leq\dfrac{\|\vec f'(\vec x^0)\Delta\vec x\|+\|\vec o(\|\Delta\vec x\|)\|}{\|\Delta\vec x\|}\overset{\textbf{Lm. 2.2.8}}{\leq}C^*+\dfrac{\|\vec o(\|\Delta\vec x\|)\|}{\|\Delta\vec x\|}.$

Якщо $\Delta\vec x\to\vec 0$, то отримаємо обмеженість.

Отже, остаточно, $\vec g'(\vec y^0)\vec o(\|\Delta\vec x\|)+\vec o(\|\Delta\vec y\|)=\vec o(\|\Delta\vec x\|)$, якщо $\Delta\vec x\to\vec 0$, а значить

$\vec g\circ\vec f(\vec x^0+\Delta\vec x)-\vec g\circ\vec f(\vec x^0)=\vec g'(\vec y^0)\vec f'(\vec x^0)\Delta\vec x+\vec o(\|\Delta\vec x\|)$ при $\Delta\vec x\to\vec 0$. ■

**Corollary 2.2.9** Задана функція $\vec f\colon A\to B$ та $g\colon B\to\mathbb{R}$, де $A\subset\mathbb{R}^m, B\subset\mathbb{R}^n$. Відомо, що $\vec f$ – диференційована в точці $\vec x^0$ та $g$ – диференційована в точці $\vec y^0$.

Тоді $\dfrac{\partial h}{\partial x_j}(\vec x^0)=\dfrac{\partial g}{\partial y_1}(\vec y^0)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec x^0)+\dfrac{\partial g}{\partial y_2}(\vec y^0)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(\vec x^0)+\dots+\dfrac{\partial g}{\partial y_n}(\vec y^0)\dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(\vec x^0)$, виконано $\forall j=\overline{1,m}$.

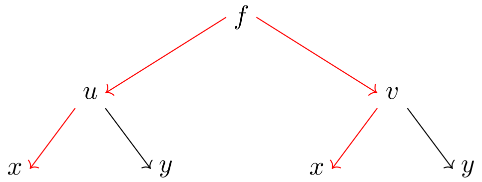
Тут $h(\vec x)=g(\vec f(\vec x))$.

**Example 2.2.10** Маємо функцію $f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$. Знайдемо частинні похідні за $x,y$.

Позначимо $u(x,y)=xy$, $v(x,y)=\dfrac{x}{y}$. Тоді маємо:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot y+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{1}{y}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot x+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{-x}{y^2}.$



Схематично, як шукати $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

## 2.3 Похідна за напрямком. Градієнт

**Definition 2.3.1** Задана функція $f \colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. А також задано вектор $\vec{l}$, такий, що $\|\vec{l}\| = 1$. Його ще називають **напрямком**.
**Похідною функції** $f$ **за напрямком** $\vec{l}$ в точці $\vec{x}^0$ називають величину

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t}$$

Як вже було зазначено, дотичних прямих буває дуже багато, тому ми й задаємо напрямок.

**Remark 2.3.2** Якщо всі координати вектора $\vec{l}$ будуть нулевими, окрім $l_j = 1$, то $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)$.

**Theorem 2.3.3** Задана функція $f$ – диференційована в точці $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = f'(\vec{x}^0) \cdot \vec{l} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} l_m$.

**Proof.**
$f$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$, тобто $f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} t l_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} t l_m + o(\|t\vec{l}\|)$. Тому

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}^0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1} t l_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} t l_m + o(\|t\vec{l}\|)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} l_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} l_m. \quad \blacksquare$$

**Example 2.3.4** Маємо функцію $f(x, y) = 1 - x^2 - y$. Знайти похідну за напрямком $\vec{l} = (0.6, 0.8)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1.$
$\implies \dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = -0.6 \cdot 2x - 0.8 \cdot 1 = -1.2x - 0.8.$

**Definition 2.3.5** Задана функція $f \colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
**Градієнтом функції** $f$ в точці $\vec{x}^0$ називають такий вектор:

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}^0) \overset{\text{або}}{=} \nabla f(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} (\vec{x}^0)$$

Похідну функції $\vec{f}$ за напрямком $\vec{l}$ в точці $\vec{x}^0$ можна записати інакше: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \left( \operatorname{grad} f(\vec{x}^0), \vec{l} \right)$.

**Example 2.3.6** Зокрема для функції $f(x, y) = 1 - x^2 - y$ маємо, що $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2x \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{grad} f(\vec{x}^0)$ описує, який треба взяти напрямок руху в точці $\vec{x}^0$, щоб приріст функції був найбільшим. Цей факт підтвердить наступне твердження:

**Proposition 2.3.7** $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0)$ приймає:
- max значення $\iff \vec{l} \uparrow\uparrow \operatorname{grad} \vec{f}(\vec{x}^0)$;
- min значення $\iff \vec{l} \uparrow\downarrow \operatorname{grad} \vec{f}(\vec{x}^0)$.

**Proof.**
Дійсно, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}^0) = \left(\operatorname{grad} f(\vec{x}^0), \vec{l}\right) = \|\operatorname{grad} f(\vec{x}^0)\|\|\vec{l}\|\cos\alpha = \|\operatorname{grad} f(\vec{x}^0)\|\cos\alpha$:
- max $\iff \alpha = 0$;
- min $\iff \alpha = \pi$. ■

## 2.4 Диференціювання та похідні старших порядків

**Definition 2.4.1** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Також $f$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$.
**Частинними похідними другого роду** від функції $f$ в точці $\vec{x}^0$ називають вираз:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}^0)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}^0)$$

**Example 2.4.2** Знайдемо всі частинні похідні другого порядку функції $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2 \implies \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y \implies \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16xy \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2 \end{cases}.$$

Можемо зауважити, що $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Проте в загальному випадку це не так.

**Example 2.4.3 Приклад Шварца**
Розглянемо функцію $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Зосередимось лише на знаходженні $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\dfrac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} -x\dfrac{y^4 - x^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = -1$$

Таким чином, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

**Theorem 2.4.4 Теорема Шварца**
Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A \subset \mathbb{R}^m$ – внутрішня точка. Відомо, що $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ в околі точки $\vec{x}^0$ та є неперервними в точці $\vec{x}^0$. Тоді $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$.

*Ми будемо доводити при $\mathbb{R}^m$. Для функцій в $\mathbb{R}^m$ – аналогічно, але більш технічна справа.*

**Proof.**
Отже, дано $f(x,y)$ та в околі точки $(x_0,y_0)$ існують частинні похідні другого порядку $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ які неперервні в $(x_0,y_0)$.
Розглянемо вираз $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$.
Покладемо функцію $k(s) = f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0), s \in [x_0, x_0 + \Delta x]$. Тоді $\Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0)$.
$k'(s) = (f(s, y_0 + \Delta y) - f(s, y_0))'_s = \dfrac{\partial f}{\partial s}(s, y_0 + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial s}(s, y_0)$.
Оскільки нам відомі другі частинні похідні, то зрозуміло, що в нас існує $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$, причому в тому самому околі точки $(x_0, y_0)$. Тобто звідси $k$ – диференційована на $[x_0, x_0 + \Delta x]$, тоді за теоремою Лагранжа, $\exists \xi_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x) : \Delta = k(x_0 + \Delta x) - k(x_0) = k'(\xi_1)\Delta x = \left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0 + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0)\right)\Delta x$.
Покладемо функцію $m(t) = \dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t), t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$. Тоді $\Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x$.

$m'(t) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t)\right)'_t = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, t)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, t).$
Похідна дійсно існує за умовою теореми, тобто $m$ – диференційована на $[y_0, y_0 + \Delta y]$, тоді за теоремою Лагранжа, $\exists \eta_1 \in (y_0, y_0 + \Delta y) : \Delta = (m(y_0 + \Delta y) - m(y_0))\Delta x = m'(\eta_1)\Delta y \Delta x = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1)\Delta y \Delta x.$

Повернімось до виразу $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$, ми розглянемо її з іншої сторони.
Покладемо функцію $p(t) = f(x_0 + \Delta x, t) - f(x_0, t), t \in [y_0, y_0 + \Delta y]$. Тоді $\Delta = p(y_0 + \Delta y) - p(y_0)$.
А далі я буду просто продовжувати рівність, міркування аналогічні, що пов'язані зі застосуванням теореми Лагранжа двічі:
$\Delta = p(y_0 + \Delta y) - p(y_0) = p'(\eta_2)\Delta y = (f(x_0 + \Delta x, t) - f(x_0, t))'_t(\eta_2)\Delta y = \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0 + \Delta x, \eta_2) - \dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0, \eta_2)\right)\Delta y \boxed{=}$
Покладемо функцію $q(s) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(s, \eta_2)$. А далі аналогічно.
$\boxed{=} (q(x_0 + \Delta x) - q(x_0))\Delta y = q'(\xi_2)\Delta x \Delta y = \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}(s, \eta_2)\right)'_s(\xi_2)\Delta x \Delta y = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(\xi_2, \eta_2)\Delta x \Delta y.$
Зауважу, що $\eta_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y), \xi_2 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$.

Отримали таку рівність: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1)\Delta y \Delta x = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(\xi_2, \eta_2)\Delta x \Delta y \implies \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\xi_1, \eta_1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(\xi_2, \eta_2).$
Нарешті, за умовою задачі, другі частинні похідні є неперервними в точці $(x_0, y_0)$, тому далі одночасно прямуємо $x \to x_0, y \to y_0 \implies \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Оскільки $\xi_1, \xi_2 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ $\eta_1, \eta_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$, то звідси $\xi_1, \xi_2 \to x_0$ та $\eta_1, \eta_2 \to y_0$.
Остаточно отримаємо $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ (літери $s, t$ я замінив на $x, y$, результат не зміниться). ■

**Theorem 2.4.5 Теорема Янґа**
Задана функція $f \colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A \subset \mathbb{R}^m$ – внутрішня точка. Відомо, що $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_j}, \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ в околі точки $\vec{x}^0$ та диференційовані в точці $\vec{x}^0$. Тоді $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$, причому $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$.

*Ми будемо доводити при $\mathbb{R}^m$. Для функцій в $\mathbb{R}^m$ – аналогічно, але більш технічна справа.*

**Proof.**
Початок такий самий, як в теоремі Шварца. Ми розглядаємо ту саму штуку $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$. Аналогічними міркуваннями ми отримаємо $\Delta = \left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0 + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0)\right)\Delta x$. Але тепер далі обробимо інакше. Розпишемо ось так:
$\Delta = \left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0 + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0)\right)\Delta x - \left(\dfrac{\partial f}{\partial s}(\xi_1, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0)\right)\Delta x.$
Оскільки $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ диференційована в точці $(x_0, y_0)$, то ми отримаємо таку рівність:
$\Delta = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(x_0, y_0)(\xi_1 - x_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x_0, y_0)\Delta y + o(\|(\xi_1 - x_0, \Delta y)\|)\right)\Delta x - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(x_0, y_0)(\xi_1 - x_0) + o(|\xi_1 - x_0|)\right)\Delta x$
$\Delta = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x_0, y_0)\Delta y \Delta x + o(\|(\xi_1 - x_0, \Delta y)\|)\Delta x + o(|\xi_1 - x_0|)\Delta x.$
Точно так само ми розписувати $\Delta = \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0 + \Delta x, \eta_2) - \dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0, \eta_2)\right)\Delta y$, а далі аналогічними міркуваннями отримаємо
$\Delta = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(x_0, y_0)\Delta y \Delta x + o(\|(\Delta x, \eta_2 - y_0)\|)\Delta y + o(|\eta_2 - y_0|)\Delta y.$
Разом отримаємо таку рівність:
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x_0, y_0)\Delta y \Delta x + o(\|(\xi_1 - x_0, \Delta y)\|)\Delta x + o(|\xi_1 - x_0|)\Delta x = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(x_0, y_0)\Delta y \Delta x + o(\|(\Delta x, \eta_2 - y_0)\|)\Delta y + o(|\eta_2 - y_0|)\Delta y.$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x_0, y_0)\Delta y \Delta x + o(\|\xi_1 - x_0, \Delta y)\|)\Delta x + o(\|(\Delta x, \eta_2 - y_0)\|)\Delta y = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y + o(|\eta_2 - y_0|)\Delta y +$

$o(|\xi_1 - x_0|)\Delta x$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x_0, y_0)\Delta y \Delta x + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x_0, y_0) + o(1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(x_0, y_0) + o(1)$, при цьому $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.
Таким чином, ми доводимо, що $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(x_0, y_0)$. ■

Зараз буде кілька прикладів, які дадуть додатковий опис цих теорем.

**Example 2.4.6** Маємо функцію $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (так, вона не залежить від $y$). Це приклад функції, що задовольняє теоремі Шварца, але не теоремі Янґа.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv 0 \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv 0$.
Коротше, в точці $(0, 0)$ мішані частинні похідні неперервні. Тому тут теорема Шварца працює.
Частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ в точці $(0, 0)$ уже не буде диференційованою. Тому тут теорема Янґа не працює.

**Example 2.4.7** Маємо функцію $f(x, y) = \begin{cases} x^3 y^3 \sin \dfrac{1}{xy}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$. Це приклад функції, що задовольняє теоремі Янґа, але не теоремі Шварца.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^3 \sin \dfrac{1}{xy} - xy^2 \cos \dfrac{1}{xy}$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 9x^2 y^2 \sin \dfrac{1}{xy} - 5xy \cos \dfrac{1}{xy} - \sin \dfrac{1}{xy}$.
Ця мішана частинна похідна вже не буде неперервною в точці $(0, 0)$ (в принципі, неважко довести). Тому тут теорема Шварца не працює.
Але зараз доведемо, що $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ буде диференційованою в точці $(0, 0)$. Тобто хочу, щоб $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)\Delta x + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.
Легко буде обчислити другі частинні похідні $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$. Залишилося лише довести, що $3\Delta x^2 \Delta y^3 \sin \dfrac{1}{\Delta x \Delta y} - \Delta x \Delta y^2 \cos \dfrac{1}{\Delta x \Delta y} = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$. Але, в принципі, це неважко, якщо перейти до полярної заміни $\Delta x = \rho \cos \varphi$, $\Delta y = \rho \sin \varphi$.
Аналогічно можна довести, що $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ буде диференційованою в точці $(0, 0)$. Тому тут теорема Янґа працює.

**Example 2.4.8** Маємо функцію $f(x, y) = \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} |y|^{\frac{3}{2}} \sin \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$. Це приклад функції, що не задовольняє ані теоремі Шварца, ані теоремі Янґа. При цьому (!) мішані частинні похідні збігаються.
Якщо акуратно порахувати, то отримаємо наступне:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(xy)\dfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} \sin \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{y} + \operatorname{sgn}(xy) x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} \cos \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}.$$
Зазначимо, що $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ уже не буде неперервною в точці $(0, 0)$ (цілком зрозуміло, як показати), значить не диференційована в $(0, 0)$. Тому тут теорема Янґа не працює.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \begin{cases} \pm \dfrac{9}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \sin \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{y} \pm \dfrac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \cos \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{y} \pm \dfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \sin \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{y} \pm x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \cos \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}.$$

(знаки + чи − в залежності від розкриття модулів, мені вже стало лінь точно підбирати).

Знаки не сильно ролі гратимуть. Все одно $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ не буде неперервною в точці $(0,0)$ (цілком неважко буде показати). Тому тут теорема Шварца не працює.

Тепер головний панчлайн: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$. Аналогічними кроками можна довести, що $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$. Тобто мішані частинні похідні існують та рівні.

Отже, теорема Шварца та теорема Янґа характеризують лише достатні умови рівності мішаних частинних похідних.

**Definition 2.4.9** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
Функція $f$ називається **двічі диференційованою** в точці $\vec{x}^0$, якщо

$$\text{всі частинні похідні існують в околі точки } \vec{x}^0 \text{ та диференційовані в точці } \vec{x}^0.$$

**Example 2.4.10** Маємо функцію $z = x^2 + 2y^2 - 5xy$. З'ясуємо, чи буде ця функція двічі диференційованою.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 5y \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y - 5x$

Усі отримані частинні похідні існують в будь-якому околі деякої точки.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -5 \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4.$

Отримані частинні похідні визначені та неперервні в будь-якій точці. Таким чином, за теоремою Шварца, функція $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – диференційована. Так само функція $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – диференційована.

Отже, за означенням, $z$ – двічі диференційована функція.

**Proposition 2.4.11** Функція $f$ двічі диференційована в точці $\vec{x}^0 \iff \mathrm{grad} f$ – диференційований в точці $\vec{x}^0$.

**Proof.**

Дійсно, $f$ – двічі диференційована в точці $\vec{x}^0 \iff \forall j = \overline{1,m} : \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0 \iff \mathrm{grad} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}$ – як вектор-функція – диференційована в точці $\vec{x}^0$. ■

Розпишемо диференційованість вектор-функції $\mathrm{grad}\, f$ в точці $\vec{x}^0$ за означенням:
$\mathrm{grad}\, f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) - \mathrm{grad}\, f(\vec{x}^0) = M\Delta\vec{x} + \vec{o}(\|\Delta\vec{x}\|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$.

Звідси ми маємо, що $M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \dots & \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right) & \dots & \dfrac{\partial}{\partial x_m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_m}^2} \end{pmatrix} (\vec{x}^0) = H(\vec{x}^0) = f''(\vec{x}^0)$ – це називають **матрицею Гесе**.

Матриця Гесе описує **другу похідну** функції $f$ в точці $\vec{x}^0$ та одночасно **похідну** вектор-функції $\mathrm{grad}\, f$ в точці $\vec{x}^0$. Дана матриця – квадратна, тож ми можемо обчислити $\det f''(\vec{x}^0)$ – це називають **гесіаном**.

**Definition 2.4.12** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Також $f$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$.

**Другим диференціалом** функції $f$ називають вираз:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = d(df(\vec{x}^0))$$

З'ясуємо, як цей вираз можна по-інакшому записати. Маємо:
$d^2 f = d\left(df\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\, dx_m\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1\right) + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\, dx_m\right) =$
$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_m\right) dx_1 + \dots +$
$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) dx_m\right) dx_m =$
$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\, dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}\, dx_m\, dx_1\right) + \dots + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}\, dx_1\, dx_m + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_m}^2}\, dx_m^2\right) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j.$
Отже, маємо іншу формулу для другого диференціалу в точці $\vec{x}^0$:

$$d^2 f(\vec{x}^0) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\, dx_i\, dx_j$$

Якщо придивитись, то $d^2 f(\vec{x}^0)$ виглядає як квадратична форма.

**Example 2.4.13** Знайдемо другий диференціал функції $z = x^3 + 2y^2 - 5xy$.
Ми вже шукали другі частинні похідні $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -5 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$. Таким чином,
$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2 = 6x\, dx^2 - 10\, dx\, dy + 4\, dy^2.$

**Definition 2.4.14** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Також $f$ - $k$ разів диференційована в точці $\vec{x}^0$.
**Частинними похідним** $k+1$-го порядку в точці $\vec{x}^0$ називають похідну:

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}\right)(\vec{x}^0) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(\vec{x}^0)$$
$$j_1 + j_2 + \dots + j_k + j_{k+1} = k+1$$

**Definition 2.4.15** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка. Також $f$ – $k$ разів диференційована в точці $\vec{x}^0$.
$k+1$**-им диференціалом** функції $f$ називають вираз:

$$d^{k+1} f(\vec{x}^0) = d(d^k f(\vec{x}^0))$$

Якщо дуже сильно постаратись, то за індукцією можна довести таку формулу диференціала $k$-го порядку:

$$d^k f(\vec{x}^0) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(\vec{x}^0) \cdot dx_{j_1} \dots dx_{j_k}$$

**Definition 2.4.16** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
Функція $f$ називається $k$**-разів диференційованою** в точці $\vec{x}^0$, якщо

всі частинні похідні $(k-1)$-го порядку існують в околі точки $\vec{x}^0$ та всі вони диференційовані в точці $\vec{x}^0$.

Позначення: $C^k(A)$ – множина $k$ разів неперервно-диференційованих функцій.

## 2.5 Формула Тейлора

Зробимо певні позначення:

$$[\vec{x}^0, \vec{x}] = \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in [0,1]\}$$
$$(\vec{x}^0, \vec{x}) = \{(1-t)\vec{x}^0 + t\vec{x} : t \in (0,1)\}$$

**Theorem 2.5.1 Теорема Тейлора (у формі Лагранжа)**
Задана функція $f$ – диференційована $n$ разів на $[\vec{x}^0, \vec{x}]$ та $(n+1)$-ий раз диференційована на $(\vec{x}^0, \vec{x})$.
Тоді $\exists \vec{\xi} \in (\vec{x}^0, \vec{x})$ або $(\vec{x}, \vec{x}^0)$, для якого
$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \frac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\vec{\xi})}{(n+1)!}.$

**Proof.**
Розглянемо функцію $p(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$, тут $t \in [0,1]$ - функція від однієї змінної.
Знайдемо похідні від цієї функції:

$$p'(t) = f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))'_t = (f(x_1 + t(x_1 - x_1^0), \dots, x_m + t(x_m - x_m^0)))'_t = (f(u_1, \dots, u_m))'_t =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u_1}(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(x_m - x_m^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial u_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_m - x_m^0 \end{pmatrix} =$$

$$= df(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)).$$

$$p''(t) = [f'(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0)]'_t \overset{\text{аналогічно}}{=} d^2 f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0))$$

$$\vdots$$

$$p^{(k)}(t) = d^k f(\vec{x}^0 + t(\vec{x} - \vec{x}^0)).$$

Коротше, наша функція $n$ разів диференційована на $[0,1]$ та має $(n+1)$ похідну на $(0,1)$. Тому ми можемо розкласти формулу Тейлора як функцію з однією змінною. $\exists \xi \in (0,1)$ :

$$p(1) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}(1-0) + \frac{p''(0)}{2!}(1-0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + \frac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}.$$

А далі підставляємо все, що маємо:

$$p(0) = f(\vec{x}^0)$$
$$p'(0) = df(\vec{x}^0)$$
$$p''(0) = d^2 f(\vec{x}^0)$$
$$\vdots$$
$$p^{(n+1)}(\xi) = d^{n+1} f(\vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0))$$

Отже, $f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \dfrac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + \dfrac{d^{n+1} f(\vec{\xi})}{(n+1)!}$, де $\vec{\xi} = \vec{x}^0 + \xi(\vec{x} - \vec{x}^0) \in (\vec{x}^0, \vec{x})$. ■

**Theorem 2.5.2 Теорема Тейлора (у формі Пеано)**
Задана функція $f$ – диференційована $n$ разів в точці $\vec{x}^0$. Тоді

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \frac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \frac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n), \vec{x} \to \vec{x}^0.$$

Для доведення саме теореми Тейлора у формі Пеано нам будуть потрібні певні леми.

**Lemma 2.5.3** Розглянемо функцію $g_m(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(\vec{x}^0)}{k!}$ (так би мовити це буде майбутня помилка). Припустимо, що $f$ задовольняє умові теореми Тейлора (у формі Пеано). Тоді $g_m$ та всі її частинні похідні до $n$-го порядку включно будуть нулевими в точці $\vec{x}^0$.

**Proof.**
Доведення проведемо за МІ за $n \geq 1$.
I. *База індукції.* При $n = 1$ маємо $g_1(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) - df(\vec{x}^0)$. Цілком зрозуміло, що $g_1(\vec{x}^0) = 0$. Частинні похідні $\dfrac{\partial g_1}{\partial x_k}(\vec{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}^0) - \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}^0) \cdot \dfrac{\partial(x_k - x_0)}{\partial x_k} = 0$.
II. *Припущення індукції.* Для фіксованого $n$ виконується лема.
III. *Крок індукції.* Доведемо для випадку $n+1$. Ми маємо функцію $g_{n+1}(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{d^k f(\vec{x}^0)}{k!}$. Знову тут зрозуміло, що $g_{n+1}(\vec{x}^0) = 0$, але тепер дослідимо частинні похідні. Спочатку буде частинна похідна першого порядку (не втрачаючи загальності, відносно $x_1$). Перед цим варто згадати, що $d^k f(\vec{x}^0) = \displaystyle\sum_{i_1 + \dots + i_m = k} \frac{k!}{i_1! \dots i_m!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}(\vec{x}^0)(x_1 - x_1^0)^{i_1} \dots (x_m - x_m^0)^{i_m}$. Тепер почнемо брати похідну:

$$\frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_1}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 + \dots + i_m = k} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}(\vec{x}^0) \frac{k!}{i_1! \dots i_m!}(x_1 - x_1^0)^{i_1} \dots (x_m - x_m^0)^{i_m}\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 + \dots + i_m = k} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}(\vec{x}^0) \frac{k!}{(i_1 - 1)! i_2! \dots i_m!}(x_1 - x_1^0)^{i_1 - 1}(x_2 - x_2^0)^{i_2} \dots (x_m - x_m^0)^{i_m} \boxed{=}$$

Можливо, варто зауважити. Якщо так станеться, що $i_1 = 0$, то тоді всередині вираз онулюється після взяття $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$. Не знаю, як тут більш строго розписати. Може, треба під сумою накласти умову

$i_1 \geq 1$, але не можу загромаджувати й так.
Тепер розглянемо вираз під сумою при $k = 1$. У нас виникне сумування по $i_1 + \dots + i_m = 1$. Єдина можливість – коли один з $i$ буде одиничним, а всі решта – нулеві. Якщо $i_2 = 1$ або $i_3 = 1$ або … або $i_m = 1$, тоді після взяття $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ отримаємо нуль. Водночас при $i_1 = 1$ після взяття $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ отримаємо лише $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0)$.
Нарешті, в другій сумі зробимо заміну індексів: $\tilde{i}_1 = i_1 - 1$, $\tilde{i}_2 = i_2, \dots, \tilde{i}_m = i_m$. Отримаємо:

$$\boxed{=}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \sum_{\tilde{i}_1 + \dots + \tilde{i}_m = k-1} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\tilde{i}_1 + 1} \dots \partial x_m^{\tilde{i}_m}}(\vec{x}^0) \frac{k!}{\tilde{i}_1! \dots \tilde{i}_m!}(x_1 - x_1^0)^{\tilde{i}_1} \dots (x_m - x_m^0)^{\tilde{i}_m} \boxed{\boxed{=}}$$

Тепер для зручності буду писати індекс $i_1$ замість $\tilde{i}_1$, … індекс $i_m$ замісить $\tilde{i}_m$.

$$\boxed{\boxed{=}}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i_1 + \dots + i_m = k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}(\vec{x}^0) \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \frac{(k-1)!}{i_1! \dots i_m!}(x_1 - x_1^0)^{i_1} \dots (x_m - x_m^0)^{i_m} \boxed{\boxed{\boxed{=}}}$$

Проведемо заміну індексації $k = l + 1$.

$$\boxed{\boxed{\boxed{=}}}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l!} \sum_{i_1 + \dots + i_m = l} \frac{\partial^{l}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (\vec{x}^0) \frac{l!}{i_1! \dots i_m!}(x_1 - x_1^0)^{i_1} \dots (x_m - x_m^0)^{i_m}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l!} d^l \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (\vec{x}^0).$$

Отже, $\dfrac{\partial g_{n+1}}{\partial x_1}(\vec{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) - \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l!} d^l \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (\vec{x}^0)$. Якщо перепозначити $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$, то отримаємо функцію $\dfrac{\partial g_{n+1}}{\partial x_1}(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}^0) - \displaystyle\sum_{l=1}^{n} d^l \varphi(\vec{x}^0)$. Знайомий тип функції, із формулювання нашої леми. За припущенням індукції, $\dfrac{\partial g_{n+1}}{\partial x_1}(\vec{x}) = 0$ та всі частинні похідні до $n$-го порядку включно нулеві в точці $\vec{x}^0$. Але тоді звідси всі частинні похідні функції $g_{n+1}$ до $n + 1$-го порядку включно нулеві в точці $\vec{x}^0$ (ми тільки брали частинну похідну за $x_1$, все буквально те саме для $x_2, \dots, x_m$).
МІ доведено. ■

**Lemma 2.5.4** Нехай функція $g$ задовольняє таким умовам:
1) $g$ – $n$ разів диференційована в точці $\vec{x}^0$;
2) $g$ та всі її частинні похідні до $n$-го порядку включно в точці $\vec{x}^0$ нулеві.
Тоді $g(\vec{x}) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^m)$ при $\vec{x} \to \vec{x}^0$.

**Proof.**
Знову доведення за індукцією за $n$.
I. *База індукції.* При $n = 1$ маємо, що $g$ – диференційована в точці $\vec{x}^0$, тобто $g(\vec{x}) - g(\vec{x}^0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{x}^0)\Delta x_j + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|)$. Проте за умовою, $g(\vec{x}^0) = 0$ та всі $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = 0$. Отже, звідси $g(\vec{x}) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|)$ при $\vec{x} \to \vec{x}^0$.
II. *Припущення індукції.* При деякому $n$ лема виконується.
III. *Крок індукції.* Доведемо при $n + 1$. У нас за умовою $g$ щонаменше диференційована в околі $\vec{x}^0$. Тоді можна розкласти формулою Тейлора у формі Лагранжа:
$g(\vec{x}) = g(\vec{x}^0) + dg(\vec{\xi})$ при $\vec{\xi} \in (\vec{x}^0, \vec{x})$ або $(\vec{x}, \vec{x}^0)$.
Детальніше розглянемо $dg(\vec{\xi}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{\xi})(x_j - x_j^0)$. Зазначимо, що функції $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}$ задовольняють умовам даної леми. Тоді за припущенням МІ, $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{\xi}) = o(\|\vec{\xi} - \vec{x}^0\|^m)$ при $\vec{\xi} \to \vec{x}^0$. Водночас $o(\|\vec{\xi} - \vec{x}^0\|^m) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^m)$ при $\vec{x} \to \vec{x}^0$ (це неважко доводиться). Звідси

$$g(\vec{x}) = g(\vec{x}^0) + \sum_{j=1}^{m}(x_j - x_j^0)o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^m) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^{m+1}).$$

МІ доведено. ■

А тепер фінальний акорд – це доведення теореми Тейлора в формі Пеано.

**Proof.**
Розглянемо функцію $g_m(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{d^k f(\vec{x}^0)}{k!}$. За першою лемою, $g_m$ та всі її частинні похідні до $n$-го порядку включно нулеві в точці $\vec{x}^0$. Ну й крім того, $g_m$ диференційована $n$ разів в точці $\vec{x}^0$ (як многочлен). Значить, $g_m(\vec{x}) = o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^m)$. Отже,
$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + \dots + \dfrac{d^n f(\vec{x}^0)}{n!} + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^n), \vec{x} \to \vec{x}^0.$ ■

**Example 2.5.5** Розкласти функцію $f(x,y) = e^{x+y}$ відносно точки $(x_0, y_0) = (1, -1)$.
Заздалегідь зауважимо, що $\dfrac{\partial^s f}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2}}(1,-1) = e^{x+y}|_{(1,-1)} = 1$, де $s_1 + s_2 = s$.
$f(1,-1) = 1$
$f'(1,-1)(\vec{x} - \vec{x}^0) = (x-1) + (y+1)$
$f''(1,-1)(\vec{x} - \vec{x}^0)^2 = (x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (y+1)^2$
$f'''(1,-1)(\vec{x} - \vec{x}^0)^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3$
$\vdots$
Таким чином, ми можемо це записати ось так:

$$f(x,y) = 1 + \left[\frac{(x-1)}{1!} + \frac{(y+1)}{1!}\right] + \left[\frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)(y+1)}{2!} + \frac{(y+1)^2}{2!}\right] + \dots +$$
$$+ \left[\frac{(x-1)^n}{n!} + \frac{C_n^2 (x-1)^{n-1}(y+1)}{n!} + \dots + \frac{(y+1)^n}{n!}\right] + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=0}^{k} \frac{C_p^k}{k!}(x-1)^{k-p}(y+1)^p + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}^{\,n}\right), (x,y) \to (1,-1).$$

**Remark 2.5.6** Можна формулу Тейлора записати в якості ряда Тейлора за певними умовами, але я цього робити не буду.

## 2.6 Локальні екстремуми

**Definition 2.6.1** Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ та $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня точка.
Точка $\vec{x}^0$ називається точкою:
- **локального максимуму**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \geq f(\vec{x})$;
- **локального мінімуму**, якщо $\exists U_\varepsilon(\vec{x}^0) : \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}^0) : f(\vec{x}^0) \leq f(\vec{x})$.

Для строгих екстремумів нерівність строга та існують околи $U_\varepsilon(\vec{x}^0) \setminus \{\vec{x}^0\}$.

**Theorem 2.6.2 Необхідна умова локального екстремуму**
Задана функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ – диференційована в точці $\vec{x}^0 \in A$ – внутрішня. Відомо, що $\vec{x}^0$ – локальний екстремум. Тоді $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = 0, \forall j = \overline{1,m}$.

**Proof.**
Розглянемо функцію $h(x_1) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$ – функція від однієї змінної, така, що $x_1^0$ – локальний екстремум. Для інших змінних аналогічно. Більш того, $h'(x_1) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$. Таким чином, за необхідною умовою локального екстремуму матана в $\mathbb{R}$, маємо $h'(x_1) = 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = 0$. ■

**Remark 2.6.3** $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) = 0, \forall j = \overline{1,m} \iff df(\vec{x}^0) \equiv 0$.
$\boxed{\Rightarrow}$ *Зрозуміло.*
$\boxed{\Leftarrow}$ *Вказівка: підставити в диференціал* $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = (1, 0, \dots, 0)$, *щоб було* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^0) = 0$.

**Definition 2.6.4** Точка $\vec{x}^0$ називається **стаціонарною** для функції $f$, якщо

всі частинні похідні в заданній точці нулеві.

**Proposition 2.6.5 Інше означення стаціонарної точки**
Точка $\vec{x}^0$ – стаціонарна $\iff$ $df_{\vec{x}^0}$ – не сюр'єктивне.

**Proof.**
$\boxed{\Rightarrow}$ *Зрозуміло.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $df_{\vec{x}^0}$ – не сюр'єктивне. Взагалі, будь-який функціонал уже автоматично сюр'єктивний. Тоді звідси $df_{\vec{x}^0} \equiv 0$ – єдиний варіант. Отже, звідси всі частинні похідні нулеві, а тому $\vec{x}^0$ – стаціонарна. ■

**Theorem 2.6.6 Достатня умова локального екстремуму**
Задана функція $f \colon A \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C^2$ в околі точки $\vec{x}^0 \in A$, де $\vec{x}^0$ – стаціонарна та внутрішня точка.
1) Нехай $d^2 f(\vec{x}^0)$ – строго додатноозначена. Тоді $\vec{x}^0$ – строгий локальний мінімум;
2) Нехай $d^2 f(\vec{x}^0)$ – строго від'ємноозначена. Тоді $\vec{x}^0$ – строгий локальний максимум;
3) Нехай $d^2 f(\vec{x}^0)$ – знакозмінна. Тоді $\vec{x}^0$ – не локальний екстремум.

**Proof.**
1) Нехай $d^2 f(\vec{x}^0)$ – додатноозначена. Оскільки функція $f$ – двічі диференційована в точці $\vec{x}^0$, то тоді за теоремою Тейлора в формі Пеано,
$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + \dfrac{df(\vec{x}^0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(\vec{x}^0)}{2!} + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^2), \vec{x} \to \vec{x}^0.$
Позначу $\rho = \|\vec{x} - \vec{x}^0\|$, а також $\xi_k = \dfrac{x_k - x_k^0}{\rho}, k = \overline{1, m}$. Можна зауважити, що $\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 = 1$.
Оскільки $\vec{x}^0$ – стаціонарна, то звідси $df(\vec{x}^0) \equiv 0$. Таким чином,

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2} d^2 f(\vec{x}^0) + o(\rho^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + o(\rho^2) = \frac{1}{2}\rho^2 \left( \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\xi_i \xi_j + o(1) \right).$$

Розглянемо функцію $F(\xi_1, \dots, \xi_m) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\xi_i \xi_j$, що визначена на одиничній сфері $\mathcal{S}^m$, а ця множина – замкнена та обмежена. Також відомо, що $F \in C(S^m)$ як многочлен, а тому вона досягає мінімуму. Проте $F$ – додатноозначена, а отже $\min F > 0$.
Рівність $f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{1}{2}\rho^2 (F(\xi_1, \dots, \xi_m) + o(1)), \rho \to 0$ перепишеться таким чином:
$\exists \delta : \forall \rho < \delta \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > \dfrac{1}{4}\rho^2 \min F > 0$, остаточно
$\exists \delta > 0 : \forall \vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \delta \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) > 0$.
Тобто, знайшли окіл, де $\forall \vec{x} : f(\vec{x}^0) < f(\vec{x})$, а тому $\vec{x}^0$ – строгий локальний мінімум.

2) *Все аналогічно.*

3) А тепер припустимо, що $d^2 f(\vec{x}^0)$ – знакозмінна. Ми розглядаємо функцію лише в деякому околі $U_{\delta_0}(\vec{x}^0)$ через диференційованість. Тоді $\exists \overrightarrow{\Delta x} : d^2 f(\vec{x}^0, \overrightarrow{\Delta x}) > 0$. Ми окіл ще звужимо до $U_{\delta = \|\overrightarrow{\Delta x}\|}(\vec{x}^0)$.
Там будемо шукати точку в вигляді $\vec{x}^t = \vec{x}^0 + t\overrightarrow{\Delta x}$, де $t > 0$ – довільне. Тоді за Тейлором,
$f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{1}{2} d^2 f(\vec{x}^0, t\overrightarrow{\Delta x}) + o(\|\vec{x}^t - \vec{x}^0\|)$, де $\vec{x}^t \to \vec{x}^0$.
$f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) = \dfrac{1}{2} t^2 d^2 f(\vec{x}^0, \overrightarrow{\Delta x}) + o(t^2 \|\overrightarrow{\Delta x}\|^2) = \dfrac{t^2}{2}\Big( d^2 f(\vec{x}^0, \overrightarrow{\Delta x}) + o(1) \Big)$, де $t \to 0$.
Якщо більш детально це розписати $o(1)$, а згодом обрати $\varepsilon = \dfrac{1}{2} d^2 f(\vec{x}^0, \Delta\vec{x})$, то отримаємо, що
$\exists \delta^* : \forall t : t < \delta^* \implies f(\vec{x}^t) - f(\vec{x}^0) > 0$.
Якщо так станеться, що $U_{\delta^*}(\vec{x}^0)$ буде більшим за $U_{\delta = \|\overrightarrow{\Delta x}\|}(\vec{x}^0)$, то тоді буде ми можемо взяти точку $\vec{x}^0 + \overrightarrow{\Delta x}$, для якої $f(\vec{x}^0 + \overrightarrow{\Delta x}) - f(\vec{x}^0) > 0$.
Також буде $\exists \overrightarrow{\Delta x'} : d^2 f(\vec{x}^0, \overrightarrow{\Delta x'}) < 0$ в силу невизначеності знака. І там абсолютно аналогічно.
Остаточно, $\forall U_\delta$,
- якщо $U_\delta$ більший за $U_{\delta_0}$, то вже автоматично виконано;
- інакше знайдуться точки по цим крокам.

Отже, $\vec{x}^0$ – не екстремум. ■

**Example 2.6.7** Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.
Спочатку шукаємо критичні точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 36 = 0 \end{cases} \implies (x, y) \in \{(3, 2), (-3, -2), (2, 3), (-2, -3)\}.$$

Далі знайдемо другий диференціал:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2.$$

$$d^2 f = 6(x\, dx^2 + 2y\, dx\, dy + x\, dy^2).$$

Для кожної критичної точки подивимось на цей диференціал.
I. $d^2 f(3, 2) = 6(3\, dx^2 + 4\, dx\, dy + 3\, dy^2)$.
Диференціал $d^2 f(3, 2)$ можна розглядати як квадратичну форму $(d^2 f(3, 2))(dx, dy)$. Даній квадратичній формі відповідає матриця $H = 6\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$ (див. лінійну алгебру). До речі, дана матриця – це в точності матриця Гесе. Застосуємо критерій Сільвестра. Маємо $\Delta_1^H = 18 > 0$ та $\Delta_2^H = \det \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} = 6(3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 30 > 0$. Отже, за цим критерієм, маємо $d^2 f(3, 2)$ – додатноозначена. Отже, $(3, 2)$ – локальний мінімум.

II. $d^2 f(-3, -2)$ – аналогічними міркуваннями доводимо, що $(-3, -2)$ – локальний максимум.

III. $d^2 f(2, 3) = 12(dx^2 + 3\, dx\, dy + dy^2)$.
Знову запишемо матрицею $H = 6\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Зауважимо, що матриця має власні числа $-1, 5$. Вони різного знаку, що приводить до висновку: $d^2 f(2, 3)$ – знакозмінна. Отже, $(2, 3)$ – не екстремум.

IV. $d^2 f(-2, -3)$ – аналогічними міркуваннями доводимо, що $(-2, -3)$ – не екстремум.

**Example 2.6.8** Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x, y) = x^2 + y^4$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0 \end{cases} \implies (0, 0) \text{ – єдина критична точка.}$$

$d^2 f = 2\, dx^2 + 12y^2\, dy^2$.
$d^2 f(0, 0) = 2\, dx^2 \geq 0$ – дана квадратична форма невід'ємноозначена, тому що при $(dx, dy) = (0, 0.1)$ маємо $d^2 f(0, 0) = 0$. Тож скористатися достатньою умовою ми не можемо.
Однак можна зауважити, що $f(0, 0) \leq f(x, y)$, причому $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, зокрема в будь-якій точці окола $(0, 0)$. Таким чином, $(0, 0)$ – локальний мінімум.

**Example 2.6.9** Дослідити на локальні екстремуми функцію $f(x, y) = x^2 - y^4$.
Тут також $(0, 0)$ – єдина критична точка, тут також $d^2 f(0, 0) = 2\, dx^2 \geq 0$ – невід'ємноозначена квадратична форма.
Проте цього разу $(0, 0)$ не буде локальним екстремумом. Дійсно, для кожного околу $U_\delta(0, 0)$ знайдуться точки $(x_1, y_1) = \left(\frac{\delta}{2}, 0\right)$ та $(x_2, y_2) = \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$, причому ці дві точки в середині околу, для яких:

$$f(x_1, y_1) = \frac{\delta^2}{4} > 0 = f(0, 0) \qquad f(x_2, y_2) = -\frac{\delta^4}{16} < 0 = f(0, 0).$$

## 2.7 Умовні локальні екстремуми

**Definition 2.7.1** Задана функція $f \colon A \to \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – відкрита множина. Задані також функції $g_1, \dots, g_m \colon A \to \mathbb{R}$. Розглянемо множину $\Gamma_{g_1, \dots, g_m} = \{\vec{x} \in G : g_1(\vec{x}) = \dots = g_m(\vec{x}) = 0\}$.
Точка $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1, \dots, g_m}$ називається **умовним локальним максимумом (мінімумом)**, якщо

$$\vec{x}^0 \text{ є локальним максимумом (мінімумом) функцій } \tilde{f} \colon \Gamma_{g_1, \dots, g_m} \to \mathbb{R}, \text{ де } \tilde{f} \equiv f.$$

**Definition 2.7.2** Рівняння вигляду

$$\begin{aligned} g_1(\vec{x}) &= 0, \\ &\vdots \\ g_m(\vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

називається **рівняннями зв'язку**.

**Example 2.7.3** Зокрема маємо функцію $f(x,y) = x^2 - y^2$ та функцію $g(x,y) = y = 0$. Маємо тоді $\tilde{f}(x,y) = f(x,0) = x^2$, звідси $x = 0$ – точка локального мінімуму функції $\tilde{f}$.
Отже, $x = 0$ – точка умовного локального мінімуму функції $f$.

**Definition 2.7.4** Задані функції $g_1, \dots, g_m \colon A \to \mathbb{R}$, де $A \subset \mathbb{R}^p$ – відкрита множина. Всі функції неперервно-диференційовані на $A$.
Функції $\{g_1, \dots, g_m\}$ називаються **функціонально незалежними** в точці $\vec{x}^0 \in A$, якщо

$$\{g_1'(\vec{x}^0), \dots, g_m'(\vec{x}^0)\} \text{ – лінійно незалежна}$$

**Example 2.7.5** Зокрема $\{g_1, g_2\}$, де $g_1(x,y) = x, g_2(x,y) = y$ – функціонально незалежні.
Дійсно, $g_1'(x,y) = (1,0)$ та $g_2'(x,y) = (0,1)$ в кожній точці. Ці похідні – лінійно незалежні.

**Definition 2.7.6** Задані функції $f, g_1, \dots, g_m \colon A \to \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ - відкрита множина.
**Функцією Лагранжа** назвемо таку функцію:

$$F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \lambda_1 g_1(\vec{x}) - \dots - \lambda_m g_m(\vec{x}),$$

де $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

**Theorem 2.7.7 Необхідна умова умовного локального екстремуму**
Задані функції $f, g_1, \dots, g_m \colon A \to \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – відкрита множина. Всі функції – неперервно-диференційовані на $A$. Відомо, що $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1,\dots,g_m}$ – умовний локальний екстремум функції $f$, а також $\{g_1, \dots, g_m\}$ – функціонально незалежні в $\vec{x}^0$. Тоді існують $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, для яких $\vec{x}^0$ – стаціонарна точка функції Лагранжа $F_{(\lambda_1,\dots,\lambda_m)^T}$.

*Ми будемо доводити при $n = 2, m = 1$. Для більших аргументів – аналогічно, але більш технічна справа.*

**Proof.**
Нехай $f(x,y,z)$ має локальний екстремум $(x_0,y_0,z_0) \in \Gamma_g$ з рівнянням $g(x,y,z) = 0$.
У силу функціональної незалежності за умовою в точці, маємо $g'(x_0,y_0,z_0) \neq \vec{0}$, тобто всі частинні похідні ненулеві. Тоді за теоремою про неявну функцію, існує $\varphi \colon U(x_0,y_0) \to U(z_0)$, де
$\varphi(x_0,y_0) = z_0$
$\forall (x,y) \in U(x_0,y_0) : g(x,y,\varphi(x,y)) = \tilde{g}(x,y) = 0$.
Тоді маємо функцію $\tilde{f}(x,y) = f(x,y,\varphi(x,y))$ – функція 2-х змінних, де $(x_0,y_0)$ – точка локального екстремуму. Звідси випливає, що $d\tilde{f}(x_0,y_0) = 0$
$d\tilde{f}(x_0,y_0) = df(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,d\varphi(x_0,y_0) = 0.$
Також оскільки $\tilde{g}(x,y) \equiv 0$, то звідси маємо:
$d\tilde{g}(x_0,y_0) = dg(x_0,y_0) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,dy + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,d\varphi(x_0,y_0) = 0.$
Останню рівність домножимо на $\lambda$, яка відніметься з першим рівнянням.
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}\right)(x_0,y_0,z_0)\,dx + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}\right)(x_0,y_0,z_0)\,dy + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z}\right)(x_0,y_0,z_0)\,d\varphi(x_0,y_0) = 0.$
Оскільки $\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ в силу функціональної незалежності, то ми оберемо такий $\lambda$, щоб $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0$. Отримаємо:
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}\right)(x_0,y_0,z_0)\,dx + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}\right)(x_0,y_0,z_0)\,dy = 0.$
І ця рівність виконується для всіх $\Delta x, \Delta y$. Отже,
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0.$
Маючи ці рівності отримаємо:
$dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = d(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0) =$
$= \dfrac{\partial(f-\lambda g)}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \dfrac{\partial(f-\lambda g)}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \dfrac{\partial(f-\lambda g)}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, dz = 0.$
Це виконано для всіх $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Отже, $(x_0, y_0, z_0)$ – стаціонарна точка $F_\lambda$. ■

**Theorem 2.7.8 Достатня умова умовного локального екстремуму**
Задані функції $f, g_1, \dots, g_m \colon A \to \mathbb{R}$ та $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – відкрита множина. Всі функції – двічі неперервно-диференційовані на $A$. Відомо, що $\vec{x}^0 \in \Gamma_{g_1,\dots,g_m}$ – стаціонарна точка функції Лагранжа для деякого $\vec{\lambda}$. Нехай $\{g_1, \dots, g_m\}$ – функціонально незалежні в точці $\vec{x}^0$. Розглянемо множину $\Gamma^*_{g_1,\dots,g_m}(\vec{x}^0) = \{\vec{\Delta x} \in \mathbb{R}^{n+m} : dg_1(\vec{x}^0) = \dots = dg_m(\vec{x}^0) = 0\}$.
1) Нехай $d^2F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$ – строго додатноозначена на $\Gamma^*_{g_1,\dots,g_m}(\vec{x}^0)$. Тоді $\vec{x}^0$ – умовний локальний мінімум;
2) Нехай $d^2F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$ – строго від'ємноозначена на $\Gamma^*_{g_1,\dots,g_m}(\vec{x}^0)$. Тоді $\vec{x}^0$ – умовний локальний максимум;
3) Нехай $d^2F_{\vec{\lambda}}(\vec{x}^0)$ – знаконеозначена на $\Gamma^*_{g_1,\dots,g_m}(\vec{x}^0)$. Тоді $\vec{x}^0$ – не умовний локальний екстремум.

*Ми будемо доводити при $n = 2, m = 1$. Для більших аргументів – аналогічно, але більш технічна справа.*

**Proof.**
Нехай рівняння зв'язку лише $g(x, y, z) = 0$. Функція Лагранжа $F_\lambda(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$.
За умовою, $(x_0, y_0, z_0)$ – стаціонарна точка $F_\lambda$ для деякого $\lambda$.
$g$ – функціонально незалежна в $(x_0, y_0, z_0)$, тож $g'(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$. Ми тут припустимо, що $\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тоді за теоремою про неявну функцію, існує $\varphi \colon U(x_0, y_0) \to U(z_0)$, для якого
$\varphi(x_0, y_0) = z_0$
$\forall (x, y) \in U(x_0, y_0) : g(x, y, \varphi(x, y)) = \tilde{g}(x, y) = 0.$
Причому сама функція $\varphi$ також двічі неперервно-диференційована.
Розглянемо функцію $\tilde{f} \colon U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$, що визначена як $\tilde{f}(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$.
Покажемо, що $(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $\tilde{f}$.
$d\tilde{f}(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, d\varphi(x_0, y_0).$
$dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = d(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{\partial(f-\lambda g)}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \dfrac{\partial(f-\lambda g)}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \dfrac{\partial(f-\lambda g)}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, dz =$
$= \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\right) dx + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\right) dy + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right) dz.$
Але в силу стаціонарної точки маємо $dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = 0$. Зокрема для $dz = d\varphi(x_0, y_0)$ маємо рівність нуля.
Оскільки $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, то звідси $dg(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in U, \forall (\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$.
$dg(x, y, \varphi(x, y)) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))\, dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))\, dy + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))\, d\varphi(x, y).$
Зокрема, підставляючи $(x, y) = (x_0, y_0)$, отримаємо:
$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, d\varphi(x_0, y_0) = 0.$
Домножимо це рівняння на $\lambda$ та додамо його до рівняння $dF_\lambda(x_0, y_0, z_0) = 0$. Отримаємо:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, d\varphi(x_0, y_0) = 0.$
Але це теж саме, що $d\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$, що доводить: $(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка $\tilde{f}$.

Тепер для визначення характеру точки $(x_0, y_0)$ функції $\tilde{f}$ ми обчислимо другий диференціал. Якщо все обережно зробити, отримаємо:
$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2 f(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, d^2\varphi(x_0, y_0).$
Аналогічним чином для $\tilde{g}(x, y)$ маємо:
$d^2\tilde{g}(x_0, y_0) = d^2 g(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, d^2\varphi(x_0, y_0) = 0.$
Попереднє рівняння віднімемо на останнє, помножене на $\lambda$ – отримаємо:
$d^2\tilde{f}(x_0, y_0) = d^2(f - \lambda g)(x_0, y_0, z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0, y_0)} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z}\right)(x_0, y_0, z_0) d^2\varphi(x_0, y_0).$

$d^2\tilde{f}(x_0,y_0) = d^2F_\lambda(x_0,y_0,z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0,y_0)} + \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)d^2\varphi(x_0,y_0)$.
Але $(x_0,y_0,z_0)$ - кртична функція $F_\lambda$, а тому
$d^2\tilde{f}(x_0,y_0) = d^2F_\lambda(x_0,y_0,z_0)|_{\Delta z = d\varphi(x_0,y_0)}$.
Більш детально треба пояснити, що дає умова $\Delta z = d\varphi(x_0,y_0)$. Ми вже знаємо, що $g(x,y,\varphi(x,y)) = 0, \forall (x,y)$, а тому
$dg(x,y,\varphi(x,y))(x_0,y_0) = 0$, але звідси ж, враховуючи умову, отримаємо
$dg(x,y,\varphi(x,y))(x_0,y_0) = dg(x_0,y_0,z_0) = 0$.
А це означає, що $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \in \Gamma_g^*(x_0,y_0,z_0)$.
Остаточно $d^2\tilde{f}(x_0,y_0) = d^2F_\lambda(x_0,y_0,z_0)|_{(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\in\Gamma_g^*(x_0,y_0,z_0)}$.
А далі все цілком зрозуміло.
1) $d^2F_\lambda(x_0,y_0,z_0) > 0 \implies d^2\tilde{f}(x_0,y_0) > 0 \implies (x_0,y_0)$ – локальний мінімум $\tilde{f} \implies (x_0,y_0,z_0)$ – умовний локальний мінімум $f$;
2) аналогічно;
3) аналогічно. ■

**Example 2.7.9** Дослідити функцію $f(x,y,z) = xyz$ на умовний локальний екстремум за умовою $x+y+z = 3$.
У цьому випадку $g(x,y,z) = x+y+z-3 = 0$. Запишемо функцію Лагранжа:
$L_\lambda(x,y,z) = xyz - \lambda(x+y+z-3)$.
Знайдемо всі критичні точки $L_\lambda$, що лежать на множині $\Gamma_g$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial x} = yz - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial y} = xz - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial z} = xy - \lambda = 0 \\ g(x,y,z) = x+y+z-3 = 0 \end{cases}.$$

Якщо розв'язати систему рівнянь, отримаємо наступні розв'язки $(x,y,z)$:
$M_0(1,1,1), M_1(3,0,0), M_2(0,3,0), M_3(0,0,3)$.
А також відповідні $\lambda$ будуть наступні:
$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$.
Дослідимо тепер $d^2L_\lambda$ для кожної точки з відповідним $\lambda$.
$d^2L_\lambda = \dfrac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^2}\,dx^2 + \dfrac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y^2}\,dy^2 + \dfrac{\partial^2 L_\lambda}{\partial z^2}\,dz^2 + 2\left(\dfrac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \dfrac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y \partial z}\,dy\,dz + \dfrac{\partial^2 L_\lambda}{\partial z \partial x}\,dz\,dx\right) =$
$= 2(z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dx\,dz)$.
Із рівняння зв'язку маємо, що $d(x+y+z) = d(3) = 0 = dx+dy+dz \implies dz = -dx-dy$.
Підставимо це в $d^2L_\lambda$:
$d^2L_\lambda = 2(-ydx^2 + (z-x-y)\,dx\,dy - x\,dy^2)$.

I. $M_0(1,1,1)$ та $\lambda_0 = 1$.
$d^2L_{\lambda_0}(M_0) = 2(-dx^2 - dx\,dy - dy^2) = -2\left(\left(dx + \dfrac{1}{2}dy\right)^2 + \dfrac{3}{4}dy^2\right) < 0$. Тобто маємо від'ємноозначену квадратичну форму. Отже, $M_0(1,1,1)$ – умовний локальний максимум.

II. $M_1(3,0,0)$ та $\lambda_1 = 0$.
$d^2L_{\lambda_1}(M_1) = 2(-3\,dx\,dy - 3\,dy^2) = -6(dx+dy)\,dy$. Тобто маємо знаконеозначену квадратичну форму. Отже,$M_1(3,0,0)$ – не умовний локальний екстремум.

III. $M_2(0,3,0)$ та $\lambda_2 = 0$ – аналогічно не умовний локальний екстремум.
IV. $M_3(0,0,3)$ та $\lambda_3 = 0$ – аналогічно не умовний локальний екстремум.

## 2.8 Теорема про існування оберненої функції

Спочатку трохи необхідних теорем, лем, тверджень, аби довести основний результат.

**Theorem 2.8.1 Теорема Лагранжа про середнє**
Задана функція $f\colon G \to \mathbb{R}$, де $G \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита та $f$ – диференційована. Оберемо точки $\vec{x}, \vec{y} \in G$ так, що $[\vec{x},\vec{y}] \subset G$. Тоді існує $\vec{\xi} \in (\vec{x},\vec{y})$, для якого $|f(\vec{y}) - f(\vec{x})| \le |\operatorname{grad} f(\vec{\xi})| \|\vec{y} - \vec{x}\|$.

**Proof.**
Дійсно, $f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = df(\vec{\xi})$ при $\xi \in (\vec{x}, \vec{y})$ за формулою Тейлора із залишком у формі Лагранжа. Із іншого боку, $df(\vec{\xi}) = \operatorname{grad} f(\vec{\xi})(\vec{y} - \vec{x})$. Отримаємо в результаті, що $|f(\vec{y}) - f(\vec{x})| \le |\operatorname{grad} f(\vec{\xi})| \|\vec{y} - \vec{x}\|$ за нерівністю Коші-Буняковського. ■

**Definition 2.8.2** Функція $\vec{f}\colon A \to A$ при $A \subset \mathbb{R}^n$ називається **стиском**, якщо

$$\exists q \in (0,1) : \forall \vec{x}, \vec{y} \in A : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \le q \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

**Remark 2.8.3** Стискаючі функції – неперервні.
*Вказівка: обрати* $\delta = \dfrac{q}{\varepsilon}$ *при всіх* $\varepsilon > 0$.

**Theorem 2.8.4** Задана $A \subset \mathbb{R}^n$ та $\vec{f}\colon A \to A$ – стискаюче відображення. Тоді існує єдина точка нерухома точка, тобто $\exists! \vec{x} \in A : f(\vec{x}) = \vec{x}$.

Якщо хтось вчив теорію метричних просторів, то може впізнати, що це теорема Банаха.

**Proof.**
I. *Існування.*
Нехай $\vec{x}_0 \in A$ – довільна точка. Зробимо позначення: $\vec{x}_1 = \vec{f}(\vec{x}_0),\ \vec{x}_2 = \vec{f}(\vec{x}_1),\ \dots, \vec{x}_n = \vec{f}(\vec{x}_{n-1}), \dots$
Покажемо, що послідовність $\{\vec{x}_n, n \ge 0\}$ – фундаментальна. Дійсно, для $m \le n$ маємо:
$\|\vec{x}_m - \vec{x}_n\| = \|\vec{f}(\vec{x}_{m-1}) - \vec{f}(\vec{x}_{n-1})\| \le q \cdot \|\vec{x}_{m-1} - \vec{x}_{n-1}\| \le \dots \le q^m \|\vec{x}_0 - \vec{x}_{n-m}\|$.
$\|\vec{x}_0 - \vec{x}_{n-m}\| \le \|\vec{x}_0 - \vec{x}_1\| + \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| + \dots + \|\vec{x}_{n-m-1} - \vec{x}_{n-m}\| \le \|\vec{x}_0 - \vec{x}_1\|(1 + q + \dots + q^{n-m-1}) \le$
$\le \|\vec{x}_0 - \vec{x}_1\| \dfrac{1}{1-q}$.
Разом отримаємо $\|\vec{x}_m - \vec{x}_n\| \le \dfrac{q^m}{1-q} \|\vec{x}_0 - \vec{x}_1\| \to 0, n, m \to \infty$.
Отже, $\{\vec{x}_n, n \ge 0\}$ – збіжна, позначимо $\vec{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n$. Зважаючи на неперервність стиска, отримаємо $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{f}\left(\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{f}(\vec{x}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_{n+1} = \vec{a}$. Тобто $\vec{a}$ – це наша шукана нерухома точка.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що $\vec{f}$ має дві різні нерухомі точки $\vec{a}, \vec{b}$. Буде суперечність! Дійсно,
$0 < \|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{f}(\vec{a}) - \vec{f}(\vec{b})\| \le q \cdot \|\vec{a} - \vec{b}\| < \|\vec{a} - \vec{b}\|$. ■

**Lemma 2.8.5** Маємо $\vec{g}\colon U_r(\vec{0}) \to \mathbb{R}^n$ таку, що $\vec{g}(\vec{0}) = \vec{0}$, а також $\|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{y})\| \le \dfrac{1}{2}\|\vec{x} - \vec{y}\|$ для всіх $\vec{x}, \vec{y} \in U_r(\vec{0})$. Тоді функція $\vec{f}\colon U_r(\vec{0}) \to \mathbb{R}^n$, що задається як $\vec{f}(x) = \vec{x} + \vec{g}(x)$, буде ін'єктивною. Крім того, $\vec{f}(U_r(\vec{0})) \supset U_{\frac{r}{2}}(\vec{0})$.

**Remark 2.8.6** Зазначимо, що $\vec{g}$ – стиск, тому неперервна, зокрема звідси $\vec{f}$ – неперервна.

**Proof.**
*$\vec{f}$ – ін'єктивна.*
Припустимо $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{y})$, тобто маємо $\vec{x} + \vec{g}(\vec{x}) = \vec{y} + \vec{g}(\vec{y})$. Звідси $\|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| \le \dfrac{1}{2}\|\vec{x} - \vec{y}\|$.
Єдина можливість, коли працюватиме нерівність, – це випадок $\vec{x} = \vec{y}$.

$\vec{f}(U_r(\vec{0})) \supset U_{\frac{r}{2}}(\vec{0})$.
Нехай $\vec{y} \in U_{\frac{r}{2}}(\vec{0})$. Ми хочемо довести, що $\vec{y} \in f(U_r(\vec{0}))$, тобто знайти точку $\vec{x} \in U_r(\vec{0})$, для якого $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$. Іншими словами, $\vec{x} = \vec{y} - \vec{g}(\vec{x})$.
Розглянемо функцію $\vec{F}\colon U_r(\vec{0}) \to U_r(\vec{0})$, що визначена як $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{g}(\vec{x})$. Зазначимо, що $\vec{F}(\vec{x}) \in U_r(\vec{0})$. Справді,
$\|\vec{F}(\vec{x})\| \le \|\vec{y}\| + \|\vec{g}(\vec{x})\| \le \dfrac{r}{2} + \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{0})\| \le \dfrac{r}{2} + \dfrac{1}{2}\|\vec{x} - \vec{0}\| < \dfrac{r}{2} + \dfrac{r}{2} = r$.
Крім того, $\vec{F}$ буде стиском, тому що $\|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{x}')\| = \|\vec{g}(\vec{x}') - \vec{g}(\vec{x})\| \le \dfrac{1}{2}\|\vec{x}' - \vec{x}\|$. Значить, за щойно доведеною, існує нерухома точка, тобто $\exists \vec{x} \in U_r(\vec{0}) : \vec{F}(\vec{x}) = \vec{x} \implies \vec{x} = \vec{y} - \vec{g}(\vec{x})$. ■

**Theorem 2.8.7 Теорема про існування оберненої функції**
Задана $E \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита множина та $\vec{f}\colon E \to \mathbb{R}^n$ – неперервно-диференційована функція. Припустимо, що $\vec{f}'(\vec{x}^0)$ – оборотна матриця. Тоді існують $U \subset E$ – відкритий окіл $\vec{x}^0$ та $V$ – відкритий окіл $\vec{f}(\vec{x}^0)$, для яких $\vec{f}\colon U \to V$ буде бієкцією. Зокрема існує $\vec{f}^{-1}$, причому $(\vec{f}^{-1})'(\vec{f}(\vec{x}^0)) = (\vec{f}'(\vec{x}^0))^{-1}$.

**Proof.**

I. *Випадок, коли* $\vec{x}^0 = \vec{0}$*, при цьому* $\vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{0}$*, а також* $\vec{f}'(\vec{x}^0) = I$ *– одинична матриця.*

Розглянемо функцію $\vec{g}\colon E \to \mathbb{R}^n$ ось таку: $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}) - \vec{x}$. Звідси маємо $\vec{g}(\vec{0}) = \vec{0}$, а також $\vec{g}'(\vec{0}) = \vec{0}$.

Зокрема маємо $\operatorname{grad} g_i(\vec{x}) = 0$ для всіх $i = \overline{1,n}$.

Оскільки $\vec{g}$ – неперервно-диференційована функція, то існує $U_r(\vec{0}) \subset E$, де для кожної $\vec{x} \in U_r(\vec{0})$ маємо $\| \operatorname{grad} g_i(\vec{x})\| \leq \dfrac{1}{2n^2}$ (чисто із означення неперервності).

Тепер оберемо $\vec{x}, \vec{y} \in U_r(\vec{0})$. За теоремою Лагранжа, $|g_i(\vec{x}) - g_i(\vec{y})| \leq \| \operatorname{grad} g(\vec{\xi_i}\| \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \dfrac{1}{2n^2}\|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Зокрема звідси $\|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{y})\| \leq \dfrac{1}{2n}\|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \dfrac{1}{2}\|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Ця нерівність каже, що $\vec{g}$ – стискаюче відображення. Отже, за щойно доведеною лемою, відображення $\vec{f} = \vec{g} + I$ – ін'єкція та $\vec{f}(U_r(\vec{0})) \supset U_{\frac{r}{2}}(\vec{0})$. Зокрема існуватиме $\vec{f}^{-1}\colon U_{\frac{r}{2}}(\vec{0}) \to U_r(\vec{0})$.

При $\vec{y} = \vec{0}$ матимемо $\|\vec{g}(\vec{x}\| \leq \dfrac{1}{2}\|\vec{x}\|$ для всіх $\vec{x} \in U_r(\vec{0})$. Зокрема, за нерівністю трикутника $\dfrac{1}{2}\|\vec{x}\| \leq \|\vec{f}(\vec{x}\| \leq \dfrac{3}{2}\|\vec{x}\|$.

Покладемо $V = U_{\frac{r}{2}}(\vec{0})$ та $U = \vec{f}^{-1}(U_r(\vec{0}))$. За побудовою, $\vec{f}\colon U \to V$ задає біекцію. Обидві множини $U, V$ – відкриті, оскільки $\vec{f}$ – неперервна. Залишилося довести, що $\vec{f}^{-1}\colon V \to U$ – диференційована в $\vec{0}$ та $(\vec{f}^{-1})'(\vec{0}) = (\vec{f}(\vec{0}))^{-1} = I^{-1} = I$.

Ми зараз маємо $\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{0}) = I \cdot (\vec{x} - \vec{0}) + \vec{o}(\vec{x})$ при $\vec{x} \to \vec{0}$. Ну або бути простішим, $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{o}(\vec{x})$ при $\vec{x} \to \vec{0}$. Ми хочемо довести, що $\vec{f}^{-1}(\vec{y}) - \vec{f}^{-1}(\vec{0}) = I(\vec{y} - \vec{0}) + \vec{o}(\vec{y})$ при $\vec{y} \to \vec{0}$. Знову простіше кажучи, $\vec{f}^{-1}(\vec{y}) = \vec{y} + \vec{o}(\vec{y})$ при $\vec{y} \to \vec{0}$.

Маємо $\vec{f}^{-1}(\vec{y}) - \vec{y} = \vec{x} - \vec{f}(\vec{x}) = -\vec{o}(\vec{x}) = \vec{o}(\vec{x}) = \vec{o}(\vec{y})$ при $\vec{y} \to \vec{0}$.

II. *Випадок, коли досі* $\vec{x}^0 = \vec{0}$*, при цьому* $\vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{0}$*, але похідна – довільна оборотна.*

Розглянемо функцію $\vec{u}(\vec{x}) = (\vec{f}'(\vec{x}^0))^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x})$. Маємо $\vec{u}(\vec{x}^0) = \vec{0}$, а також $\vec{u}'(\vec{x}^0) = I$. Оскільки ми довели пункт I, то для даної функції існуватимуть $U, V$ із умови теореми, для яких $\vec{u}\colon U \to V$ – біекція. Тоді функція $\vec{f}\colon U \to V$, яка задається як $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{x}^0) \cdot \vec{u}(\vec{x})$, буде теж біекцією. Зокрема зазначимо, що $(\vec{f}^{-1})'(\vec{0}) = \vec{f}'(\vec{x}^0) \cdot I$.

III. *Випадок, коли досі* $\vec{x}^0$ *– довільне та* $\vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{0}$*.*

Розглянемо функцію $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x} + \vec{x}^0)$. Зазначимо, що $\vec{u}(\vec{x}^0) = \vec{0}$, а також $\vec{u}'(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{x} + \vec{x}^0)$, при цьому $\vec{u}'(\vec{x}^0) = \vec{f}'(\vec{x}^0)$ – оборотна матриця. Тоді за пунктом II, функція $\vec{u}\colon U' \to V'$ – біекція. Зауважимо, що $\vec{f}^{-1}(\vec{y}) = \vec{u}^{-1}(\vec{y}) + \vec{x}^0$. Дійсно,

$\vec{f}^{-1}\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}^{-1}\vec{f}(\vec{x} - \vec{x}^0 + \vec{x}^0) = \vec{f}^{-1}\vec{u}(\vec{x} - \vec{x}^0) = \vec{u}^{-1}\vec{u}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \vec{x}^0 = \vec{x}$.

$\vec{f}\vec{f}^{-1}(\vec{y}) = \vec{f}(\vec{u}^{-1}(\vec{y}) + \vec{x}^0) = \vec{u}\vec{u}^{-1}(\vec{y}) = \vec{y}$.

Коротше, в нас $\vec{f}\colon U' + \vec{x}^0 \to V'$ – біекція. При цьому $(\vec{f}^{-1})'(\vec{f}(\vec{x}^0)) = (\vec{u}^{-1})'(\vec{f}(\vec{x}^0)) = (\vec{u}^{-1})(\vec{u}(\vec{0})) = (\vec{u}'(\vec{0})^{-1} = (\vec{f}'(\vec{x}^0))^{-1}$.

IV. *Випадок, коли* $\vec{x}^0$ *уже довільна точка.*

Розглянемо функцію $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0)$. Зауважимо, що $\vec{u}(\vec{x}^0) = \vec{0}$, вона задовольняє пункту III. Зазначимо, що $\vec{f}^{-1}(\vec{y}) = \vec{u}^{-1}(\vec{y} - \vec{f}(\vec{x}^0))$. У нас біекція $\vec{u}\colon U' \to V'$, а тепер біекція $\vec{f}\colon U' \to V' + \vec{f}(\vec{x}^0)$.

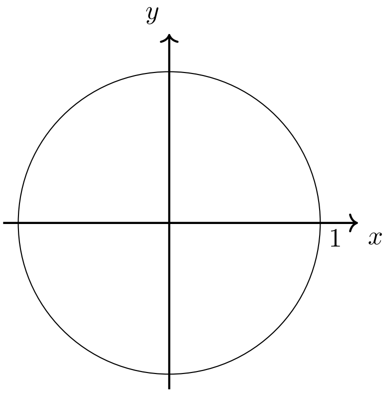
Нарешті,

$(\vec{f}^{-1})'(\vec{f}(\vec{x}^0)) = (\vec{u}^{-1})'(\vec{0}) = (\vec{u}'(\vec{0}))^{-1} =$ ■

## 2.9 Неявно задані функції

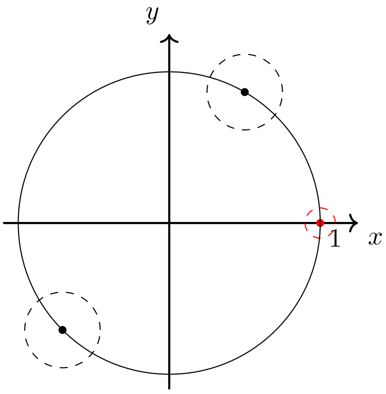
**Remark 2.9.1 Приклад для розуміння**

Задано рівняння кола на площині $\mathbb{R}^2$ – один з прикладів неявної функції: $x^2 + y^2 - 1 = 0$.



Зрозуміло, що це – не графік функції однієї змінної. Просто тому що (майже) кожному значенню $x$ тут ставиться у відповідність два значення $y$. Проте якщо розглядати деякий малий окіл точки $(x_0, y_0)$, то ми отримаємо деякий шматок малюнку, що й буде графіком функції. Зокрема в нашому випадку або $y = \sqrt{1-x^2}$, або $y = -\sqrt{1-x^2}$.

Проте існують певні точки, де цього зробити не можна – точки $(1,0), (-1,0)$. Як би ми не зменшували окіл цієї точки, там існують ікси, які ставлять у відповідність два ігрика. Я цю точку позначил червоним кольором.



Саме тому з'явилась мотивацію створити теорему, де через рівняння $F(x,y) = 0$ ми можемо отримати $y = f(x)$ в деякому околі точки $(x_0, y_0)$ під деякими важливими умовами.

Важливо розуміти, що функція існує, проте явну формулу отримати не завжди вийде. Зокрема маємо неявну функцію $y^5 + y^3 + y + x = 0$. Щоб знати $y = f(x)$, треба розв'язати рівняння п'ятого степеня, проте корені цього многочлена не можна виразити через формулу. І тим не менш, під деякими умовами, ми можемо знати функцію $y = f(x)$, просто без формули.

Я спочатку запишу теорему для двовимірного випадку, а далі почну поступово узагальнювати.

**Theorem 2.9.2 Теорема про неявну функцію (2D)**
Задана $E \subset \mathbb{R}^2$ – відкрита множину та $F \colon E \to \mathbb{R}$ – неперервно-диференційована функція. Припустимо, що $(x_0, y_0) \in E$ така, що $F(x_0, y_0) = 0$, а також $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді існує $U \subset \mathbb{R}$ – відкритий окіл точки $x_0$ та існує $V \subset E$ – відкритий окіл точки $y_0$, а також функція $f \colon U \to \mathbb{R}$, для якої $f(x_0) = y_0$. Більш того, $F(x,y) = 0 \iff y = f(x)$. Нарешті, похідна $\dfrac{df}{dx}(x_0) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$.

**Example 2.9.3** Зокрема для $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ маємо, що вона – неперервна,
$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$ – диференційована. Причому $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \iff y \neq 0$.
Тому за попередньою теоремою, дійсно, існує функція $y = f(x)$, але найголовніше: $f'(x) = -\dfrac{x}{y}$.

**Theorem 2.9.4 Теорема про неявну функцію**
Задано $E \subset \mathbb{R}^n$ – відкриту множину та $f\colon E \to \mathbb{R}$ – неперервно-диференційована функція. Припустимо, що $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in E$ така, що $f(\vec{y}) = 0$, а також $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{y}) \neq 0$. Тоді існує $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ – відкритий окіл точки $(y_1, \dots, y_{n-1})$ та існує $V \subset E$ – відкритий окіл точки $\vec{y}$, а також функція $g\colon U \to \mathbb{R}$, для якої $g(y_1, \dots, y_{n-1}) = y_n$. Більш того, $f(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Нарешті, похідна $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(y_1, \dots, y_{n-1}) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{y})}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{y})}$.

**Proof.**
Розглянемо функцію $\vec{F}\colon E \to \mathbb{R}^n$, що задається як $F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_n))$. Зрозуміло, що $\vec{F}$ – неперервно-диференційована, причому $\vec{F}(\vec{y}) = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$, а також його похідна

$$\vec{F}'(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{y}) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{y}) & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(\vec{y}) & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{y}) \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{y}) \neq 0$ за умовою задачі, то $\vec{F}'(\vec{y})$ – оборотна матриця. Ми можемо її знайти безпосередньо методом Гауса – отримаємо таку матрицю:

$$(\vec{F}'(\vec{y})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{y})}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{y})} & -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{y})}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{y})} & \dots & -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(\vec{y})}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{y})} & \dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{y})} \end{pmatrix}.$$

У нас спрацьовують всі умови, щоб застосувати теорему про існування оберненої функції для $\vec{F}$. Зокрема існують відкритий окіл $V \subset E$ точки $\vec{y}$, а також відкритй окіл $W$ точки $\vec{F}(\vec{y}) = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ для яких функція $\vec{F}\colon V \to W$ – бієкція. При цьому $\vec{F}^{-1}$ буде диференційованою в точці $(y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$. Позначимо $\vec{F}^{-1}(\vec{x}) = (h_1(\vec{x}), h_2(\vec{x}), \dots, h_n(\vec{x}))$ при $\vec{x} \in W$.
Із того, що $\vec{F}(\vec{F}^{-1}(\vec{x})) = \vec{x}$ випливає, що $h_1(\vec{x}) = x_1, \dots, h_{n-1}(\vec{x}) = x_{n-1}$, а також найголовніше тут $f(x_1, \dots, x_{n-1}, h_n(x_1, \dots, x_n)) = x_n$. Функція $h_n$ буде диференційована, бо $\vec{F}^{-1}$ є такою.
Покладемо $U = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) : (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in W\}$ – це буде відкритим околом точки $(y_1, \dots, y_{n-1})$.
Тепер визначимо функцію $g\colon U \to \mathbb{R}$ таким чином: $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = h_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Маємо, що $g$ – диференційована в точці $(y_1, \dots, y_{n-1})$. Перша частина теореми завершена.
Нехай $(x_1, \dots, x_n) \in V$ така, що $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Тоді $\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in W$. Зокрема звідси $(x_1, \dots, x_n) = \vec{F}^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$, а тому $x_n = h_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{n-1})$.
Якщо $(x_1, \dots, x_n) \in V$ така, що $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$, то приблизно в такому самому ключі доводиться, що $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
Отже, ми отримали $f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$ для всіх $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$. Оскільки $g$ – диференційована в $(y_1, \dots, y_{n-1})$ та $f$ – диференційована в $(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)$, то маємо $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{y}) + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{y})\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(y_1, \dots, y_{n-1}) = 0$. Отримали необхідну рівність. ■

**Theorem 2.9.5 Теорема про неявну вектор-функцію**
Задано $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$ – відкрита множина та $\vec{F}\colon E \to \mathbb{R}^k$ – неперервно-диференційована функція.

**Proof.**
Розглянемо функцію $\vec{g}\colon E \to \mathbb{R}^{n+k}$, що задається ось таким величезним чином:

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) \\ \vdots \\ g_n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) \\ g_{n+1}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) \\ \vdots \\ g_{n+k}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) \\ \vdots \\ F_k(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) \end{pmatrix}.$$

Функція $\vec{g}$ – неперервно-диференційована, причому $\vec{g}(\vec{x}^0,\vec{y}^0) = (\vec{x}^0,\vec{0})$. Напишемо матрицю Якобі:

$$\vec{g}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_k}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_k}{\partial y_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ \vec{F}'_{\vec{x}} & \vec{F}'_{\vec{y}} \end{pmatrix}.$$

За умовою теореми, матриця $\vec{F}'_{\vec{y}}$ буде оборотною в точці $(\vec{x}^0,\vec{y}^0)$, а тому звідси $\vec{g}'(\vec{x}^0,\vec{y}^0)$ буде оборотною матрицею, оскільки $\det \vec{g}' = \det I \cdot \det \vec{F}'_{\vec{y}} \neq 0$. Значить, спрацьовує теорема про існування оберненої функції $\vec{g}^{-1}$. Зокрема існують відкритий окіл $V \subset E$ точки $(\vec{x}^0,\vec{y}^0)$ та відкритий окіл $W$ точки $\vec{g}(\vec{x}^0,\vec{y}^0) = (\vec{x}^0,\vec{0})$, для яких функція $\vec{g}\colon V \to W$ – бієкція. При цьому $\vec{g}^{-1}$ буде диференційованою в точці $(\vec{x}^0,\vec{0})$.

Позначимо $\vec{g}^{-1}(\vec{y},\vec{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\vec{y},\vec{x}) \\ \vdots \\ h_{n+k}(\vec{y},\vec{x}) \end{pmatrix}$. Користуючись тим фактом, що $\vec{g} \circ \vec{g}^{-1}(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y})$, то тоді отримаємо $h_1(\vec{x},\vec{y}) = x_1, \dots, h_n(\vec{x},\vec{y}) = x_n$, а також $f_1(x_1,\dots,x_n,h_{n+1}(\vec{x},\vec{y}),\dots,h_{n+k}(\vec{x},\vec{y})) = y_1,\ \dots, f_k(x_1,\dots,x_n,h_{n+1}(\vec{x},\vec{y}),\dots,h_{n+k}(\vec{x},\vec{y})) = y_k$. Усі функції $h_i$ – диференційовані.

Покладемо $U = \{\vec{x} : (\vec{x},\vec{0}) \in W\}$ – це буде відкритим околом точки $\vec{x}^0$. Визначимо тепер функцію $\vec{f}\colon U \to \mathbb{R}^k$ ось таким чином: $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} h_{n+1}(\vec{x},\vec{0}) \\ \vdots \\ h_{n+k}(\vec{x},\vec{0}) \end{pmatrix}$. Ми знайшли шукану функцію, яка неперервно-диференційована.

Нехай $(\vec{x},\vec{y}) \in V$ така, що $\vec{F}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}$. Тоді $\vec{g}(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\vec{0}) \in W$. Зокрема звідси $(\vec{x},\vec{y}) = \vec{g}^{-1}(\vec{x},\vec{0})$, а тому $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x},\vec{0}) = \vec{f}(\vec{x})$.

Якщо $(\vec{x},\vec{y}) \in V$ така, що $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, то приблизно в такому самому ключі доводиться, що $\vec{F}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}$.

Отже, ми отримали $\vec{F}(\vec{x},\vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}$ для всіх $\vec{x} \in U$. ■

**Example 2.9.6** Задано вектор-функцію $\vec{F}$ таким чином: $\begin{cases} x^2 + y_1^2 - \dfrac{1}{2}y_2^2 = F_1(x,y_1,y_2) = 0 \\ x + y_1 + y_2 - 2 = F_2(x,y_1,y_2) = 0 \end{cases}$.

Маємо $\det \vec{F}'_y(x,y_1,y_2) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2y_1 + y_2 \neq 0 \iff y_2 \neq -2y_1$, а тому й $x \neq 2 + y_2$.

Тоді враховуючи обмеження, існує вектор-функція $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$, але тепер знайдемо похідну. Маємо:

$$\vec{F}'_y = \begin{pmatrix} 2y_1 & -y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies (\vec{F}'_y)^{-1} = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'_x = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}' = -(\vec{F}'_y)^{-1}\vec{F}'_x = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ -1 & 2y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2y_1 + y_2} \begin{pmatrix} 2x + y_2 \\ -2x + 2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x + y_2}{2y_1 + y_2} \\ \dfrac{-2x + 2y_1}{2y_1 + y_2} \end{pmatrix}.$$

$$\left(\boxed{\begin{matrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}\end{matrix}}\right)$$

Тут записано матрицю Якобі для функції $\vec{F}$. Червоним виділено $\vec{F}'_y$, а синім виділено $\vec{F}'_x$.

# 3 Інтеграли з параметром

## 3.1 Основні означення та властивості

**Definition 3.1.1** Задана функція $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, така, що $\forall y\in[c,d] : f\in\mathcal{R}([a,b])$.
**Інтегралом з параметром** називають таку функцію $J\colon [c,d]\to\mathbb{R}$:

$$J(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

**Remark 3.1.2** Зауважимо, що якщо додатково вимагати $f\in C([a,b]\times[c,d])$, то отримаємо $\forall y\in[c,d] : f\in C([a,b])$. Таким чином, $\forall y\in[c,d] : f\in\mathcal{R}([a,b])$, а тому функція $J(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ буде визначеною коректно.

**Proposition 3.1.3 Про неперервність інтеграла з параметром**
Задана функція $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, така, що $f\in C([a,b]\times[c,d])$. Тоді $J\in C([c,d])$.

**Proof.**
$f(x,y)\in C([a,b]\times[c,d]) \implies f(x,y)\in C_{\text{unif}}([a,b]\times[c,d]) \implies$
$\forall\varepsilon>0 : \exists\delta(\varepsilon)>0 : \forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in[a,b]\times[c,d] :$
$\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta\Rightarrow|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Тоді $|J(y_1)-J(y_2)|=\left|\displaystyle\int_a^b f(x,y_1)\,dx-\int_a^b f(x,y_2)\,dx\right|\le\displaystyle\int_a^b|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\boxed{<}$
Якщо я оберу $(x,y_1),(x,y_2)$ так, що $\|(x,y_1)-(x,y_2)\|=\sqrt{(y_1-y_2)^2}=|y_1-y_2|<\delta$, то тоді $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
$\boxed{<}\displaystyle\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon.$
Збираючи пазл, отримаємо $J\in C_{\text{unif}}([c,d]) \implies J\in C([c,d])$. ■

**Proposition 3.1.4 Про диференційованість інтеграла з параметром**
Задана функція $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, така, що $f\in C([a,b]\times[c,d])$. Відомо, що $\exists\dfrac{\partial f}{\partial y}\in C([a,b]\times[c,d])$.
Тоді $J$ – диференційована на $[c,d]$, причому $J'(y)=\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.

**Proof.**
Диференційованість означає існування похідної, тобто необхідно довести її існування.
$\dfrac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y}=\dfrac{1}{\Delta y}\displaystyle\int_a^b f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\,dx\boxed{=}$
Згадаємо Ньютона-Ляйбніца та властивості інтеграла, розпишемо підінтегральний вираз ось так:
$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\displaystyle\int_y^{y+\Delta y}f'_y(x,t)\,dt=\int_y^{y+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt$
$\boxed{=}\dfrac{1}{\Delta y}\displaystyle\int_a^b\left(\int_y^{y+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right)dx$
Тепер зафіксуємо точку $y_0$ та розпишемо праву частину рівності, що ми доводимо:
$\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx=\int_a^b\frac{1}{\Delta y}\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt\right)dx=\frac{1}{\Delta y}\int_a^b\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt\right)dx$
Ну а тепер час доводити існування похідної:
$\left|\dfrac{J(y_0+\Delta y)-J(y_0)}{\Delta y}-\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx\right|=\left|\dfrac{1}{\Delta y}\displaystyle\int_a^b\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right)dx-\frac{1}{\Delta y}\int_a^b\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt\right)dx\right|=$
$=\left|\dfrac{1}{\Delta y}\displaystyle\int_a^b\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt\right)dx\right|\boxed{<}$
За умовою твердження, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\in C([a,b]\times[c,d]) \implies \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\in C_{\text{unif}}([a,b]\times[c,d]) \implies$
$\forall\varepsilon>0 : \exists\delta(\varepsilon)>0 : \forall(x,t),(x,y_0)\in[a,b]\times[c,d] : \|(x,t)-(x,y_0)\|<\delta\Rightarrow\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$

$$\boxed{<} \int_a^b \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{1}{\Delta y}\frac{\varepsilon}{b-a}\,dt\,dx = \varepsilon$$

Збираємо пазл – отримаємо, що: $\forall y_0 \in [c,d] : \exists \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{J(y_0+\Delta y)-J(y_0)}{\Delta y} = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx = J'(y_0)$.
Отже, $J$ – диференційована на $[c,d]$. ■

**Proposition 3.1.5 Про інтегрованість інтеграла з параметром**
Задана функція $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a,b]\times[c,d])$. Тоді $J \in \mathcal{R}([c,d])$, причому

$$\int_c^d \underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{=J(y)}\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

**Proof.**
Розглянемо дві функції: $h(t) = \displaystyle\int_c^t \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \qquad g(t) = \int_a^b \int_c^t f(x,y)\,dy\,dx.$
У нашому випадку $t \in [c,d]$. Якщо $t = c$, то маємо $h(c) = g(c) = 0$. Ми хочемо зараз довести, що $g'(t) = h'(t)$, і тоді за наслідком теореми Лагранжа, $h(t) = g(t) + C$. Підставивши $t = c$, отримаємо $C = 0$, тому $h(t) = g(t)$, зокрема $h(d) = g(d)$ – бажана рівність.

Доведемо те, що хочемо. Зробимо позначення: $h(t) = \displaystyle\int_c^t J(y)\,dy, \qquad g(t) = \int_a^b F(x,t)\,dx$. У цьому випадку $F(x,t) = \displaystyle\int_c^t f(x,y)\,dy$
Перший – це інтеграл від верхньої межі, тому $h'(t) = J(t)$.
Покажемо, що другий інтеграл задовольняє умові **Prp. 3.1.4**, тоді можемо знайти похідну.
Спочатку доведемо, що підінтегральна функція $F \in C([a,b]\times[c,d])$ (нижче припускаю $t > t_0$).

$$|F(x,t)-F(x_0,t_0)| = \left|\int_c^t f(x,y)\,dy - \int_c^{t_0} f(x_0,y)\,dy\right| = \left|\int_c^t f(x,y) - f(x_0,y)\,dy - \int_{t_0}^t f(x_0,y)\,dy\right| \leq$$

$$\leq \int_c^t |f(x,y)-f(x_0,y)|\,dy + \int_{t_0}^t |f(x_0,y)|\,dy.$$

Оскільки $f \in C([a,b]\times[c,d])$, то вона обмежена, тож $\exists M > 0 : \forall (x,y) \in [a,b]\times[c,d] : |f(x,y)| \leq M$.
Оберемо $\varepsilon > 0$. Оскільки $f \in C([a,b]\times[c,d])$, то $\exists \delta > 0 : \forall (x,y) : \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \implies |f(x,y)-f(x_0,y_0)| < \varepsilon$. Зокрема оберемо $y_0 = y$, тоді $\forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f(x,y)-f(x_0,y)| < \dfrac{\varepsilon}{d-c}$.
Отже, $|F(x,t)-F(x_0,t_0)| < (t-c)\dfrac{\varepsilon}{d-c} + (t-t_0)M \leq \varepsilon + \tilde{\delta}M$.
Оберемо $\tilde{\delta} = \min\left\{\delta, \dfrac{\varepsilon}{M}\right\}$. Тоді якщо обрати кожну точку $(x,t)$ так, що $\|(x,t)-(x_0,t_0)\| < \tilde{\delta}$, отримаємо $|F(x,t)-F(x_0,t_0)| < 2\varepsilon$ (при $t < t_0$ все працюватиме).
Тепер зауважимо, що $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x,t) = f(x,t) \in C([a,b]\times[c,d])$.
Отже, дійсно, $g$ можна продиференціювати за **Prp. 3.1.4**, отримаємо наступне:
$g'(t) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dt = \int_a^b f(x,t)\,dx = J(t)$.
Разом ми довели, що хотіли, а саме $g'(t) = h'(t)$ для всіх $t \in [c,d]$. Завершили доведення. ■

**Example 3.1.6** Обчислити $\lim\limits_{\alpha\to 0} \displaystyle\int_0^2 x^2 \cos\alpha x\,dx$.

Маємо $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$. Розглянемо функцію $f(x,\alpha) = x^2\cos\alpha x$ на $[0,2]\times[-1,1]$ (можна й менше взяти другу сторону, головне щоб навколо точки 0). Ця функція є неперервною, тоді $I(\alpha)$ неперервна, зокрема в точці $\alpha = 0$.

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx = \lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = I(0) = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

**Example 3.1.7** Знайти похідну функції $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^2 e^{\alpha x^2}\frac{dx}{x}$.

Позначу $f(x,\alpha) = \dfrac{e^{\alpha x^2}}{x}$. Знайдемо частинну похідну за другим аргументом: $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = \dfrac{x^2 e^{\alpha x^2}}{x} = xe^{\alpha x^2}$.
Зауважимо, що $f$ та $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$ неперервні на прямокутнику $[1,2]\times[-1,1]$, тому ми можемо диференціювати

функцію $I$, а також $I'(\alpha) = \displaystyle\int_1^2 xe^{\alpha x^2}\,dx$.
$I'(\alpha) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^2 e^{\alpha x^2}\,dx^2 = \dfrac{1}{2\alpha}e^{\alpha x^2}\Big|_1^2 = \dfrac{e^{4\alpha}-e^{\alpha}}{2\alpha}$.

**Example 3.1.8** Обчислити $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^\alpha}{\ln x}\,dx$, якщо $a, b > 0$.
Зауважимо, що $\dfrac{x^b - x^a}{\ln x} = \displaystyle\int_a^b x^y\,dy$. Тоді взагалі маємо обчислити $\displaystyle\int_0^1\int_a^b x^y\,dy\,dx$.
Оскільки функція $f(x,y) = x^y$ є неперервною на прямокутнику $[0,1]\times[a,b]$, то звідси ми можемо змінити місцями порядок інтегрування, тобто
$$\int_0^1\int_a^b x^y\,dy\,dx = \int_a^b\int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1\,dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = \ln(y+1)\Big|_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Зараз будуть більш специфічні приклади. Але на них простіше зрозуміти узагальнення теореми про неперервність та диференційованість.

**Example 3.1.9** Знайти $\displaystyle\lim_{\alpha\to0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.
Інтуїтивно хочеться, щоб це дорівнювало $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$. Запишемо наш ліміт ось так:
$$\lim_{\alpha\to0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \lim_{\alpha\to0}\left(\int_0^1\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} + \int_1^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} - \int_0^\alpha\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}\right).$$
Перший інтеграл, тобто $\displaystyle\lim_{\alpha\to0}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$. Тому задля нашої інтуїції, треба довести, що останні два інтеграла дорівнюють нулю.
$$\left|\int_0^\alpha\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}\right| \le \int_0^\alpha\left|\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}\right| \le \int_0^\alpha M\,dx = M\alpha \to 0.$$
$\left|\displaystyle\int_1^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}\right| \le M(1+\alpha-1)\to 0$ аналогічними міркуваннями.
Тут $M = \displaystyle\max_{x\in[0,2]\times[0,1]}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$, і це можна знайти через неперервність самої функції.
Отже, $\displaystyle\lim_{\alpha\to0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

Отже, теорему про неперервність інтеграла з параметром можна узагальнити.

**Theorem 3.1.10** Маємо $f\in C([a,b]\times[c,d])$ та $a(y), b(y)\in C([c,d])$, причому $a(y)\ge a$ та $b(y)\le b$. Тоді $J(y) = \displaystyle\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \in C([c,d])$.

**Proof.**
$$\lim_{y\to y_0}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \lim_{y\to y_0}\left(\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx \pm \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \pm \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx\right).$$
Знак ± залежить від взаємного розташування точок $a(y), b(y), a(y_0), b(y_0)$.
Перший інтеграл неперервний, за **Prp. 3.1.3**. Другий та третій інтеграли оцінюються за модулем так само, як це було на прикладі. Маємо права, бо $f$ обмежується сталою $M$. Тоді там отримаємо, що ці інтеграли прямують до нуля. ■

**Example 3.1.11** Знайти похідну функції $F(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^{\alpha^2}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$, нехай $\alpha\ge0$.
Інтуїтивно хочеться продиференціювати як інтеграл від межі та інтеграл від параметру.
Оскільки $\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x} = f(x,\alpha)$ неперервна функція, то вона має первісну $H$. Тоді за формулою Ньютона-Ляйбніца:

$F(\alpha) = H(x,\alpha)\Big|_{\alpha}^{\alpha^2} = H(\alpha^2,\alpha) - H(\alpha,\alpha) = H(u(\alpha),\alpha) - H(v(\alpha),\alpha)$, де $u(\alpha) = \alpha^2,\ v(\alpha) = \alpha$.

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \frac{\partial H}{\partial \alpha^2}(\alpha^2,\alpha)\frac{d\alpha^2}{d\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha^2,\alpha) - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha,\alpha)\frac{d\alpha}{d\alpha} - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha,\alpha) \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha^2}(\alpha^2,\alpha)\cdot 2\alpha - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha,\alpha)\cdot 1\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha^2,\alpha) - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha,\alpha)\right) \\ &= \big(f(\alpha^2,\alpha)\cdot 2\alpha - f(\alpha,\alpha)\cdot 1\big) + \big(f(\alpha^2,\alpha) - f(\alpha,\alpha)\big). \end{aligned}$$

Підставимо все, що маємо - отримаємо:
$F'(\alpha) = \dfrac{\ln(1+\alpha^3)}{\alpha^2}\cdot 2\alpha - \dfrac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} + \dfrac{\ln(1+\alpha^3)}{\alpha^2} - \dfrac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} = \dfrac{\ln(1+\alpha^3)}{\alpha}\left(2+\dfrac{1}{\alpha}\right) - 2\dfrac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}.$

Для диференціювання існує більш загальна формула.

**Theorem 3.1.12** Маємо $f, \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a,b]\times[c,d])$, $a,b \in C([c,d])$, причому $a(y) \geq a$ та $b(y) \leq b$. Тоді $J(y) = \displaystyle\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$ буде диференційованою на $[c,d]$, причому
$J'(y) = f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y) + \displaystyle\int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$
*Для її доведення можна скористатися формулою Ньютона-Ляйбніца.*

## 3.2 Невласні інтеграли з параметром та ознаки збіжності

**Definition 3.2.1** Задана функція $f\colon A\times B \to \mathbb{R}$, де $A,B \subset \mathbb{R}$, та $y_0 \in \mathbb{R}$ – гранична точка для $B$. Функція $f$ **поточково збігається** до функції $\varphi$ при $y \to y_0$, якщо

$$\forall x \in A : \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$$

Функція $f$ **збігається рівномірно** до функції $\varphi$ при $y \to y_0$ на множині $A$, якщо

$$\sup_{x\in A} |f(x,y) - \varphi(x)| \to 0, y \to y_0$$

Позначення: $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x), y \to y_0$.

Новий вигляд збіжності можна звести до збіжності функціональних послідовностей таким твердженням.

**Proposition 3.2.2** $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x), y\to y_0$ на множині $A \iff \forall\{y_n, n\geq 1\} \subset B : \forall n \geq 1 : y_n \neq y_0 : f(x,y_n)\rightrightarrows\varphi(x), n\to\infty$ на множині $A$.
*Випливає з означення рівномірної збіжності.*

**Theorem 3.2.3 Критерій Коші**
$f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x), y \to y_0$ на $A \iff \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall y_1,y_2 \in B, y_1,y_2 \neq y_0 : \begin{cases}|y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta\end{cases} \implies \sup\limits_{x\in A}|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon.$

**Proof.**
$\boxed{\Rightarrow}$ *Вказівка: означення рівномірної границі та нерівність трикутника.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta : \forall y_1,y_2 \in B, y_1,y_2 \neq y_0 : \begin{cases}|y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta\end{cases} \implies \sup\limits_{x\in A}|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon.$
Візьмемо деяку послідовність $\{y_n, n \geq 1\}$, де $y_n \neq y_0, y_n \to y_0$. Тоді $\exists N : \forall n,m \geq N : |y_n - y_0| < \delta, |y_m - y_0| < \delta$ . За умовою, звідси $\sup\limits_{x\in A}|f(x,y_n) - f(x,y_m)| < \varepsilon$. За критерієм Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності, $f(x,y_n)$ є рівномірно збіжною на $A$. Отже, $f(x,y)$ - рівномірно збіжний на $A$ за **Prp. 5.2.2. (TODO: лінкування)** ■

Тепер уже до суті цього підрозділу.

**Definition 3.2.4** Задана функція $f\colon [a,\omega)\times A$, така, що $\forall y \in A : \forall c \in [a,\omega) : f \in \mathcal{R}([a,c])$. Також маємо збіжний невласний інтеграл із параметром $J(y) = \displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$, $\forall y \in A$.
Невласний інтеграл **збігається рівномірно** на множині $A$, якщо

$$\sup_{y\in A}\left|\int_a^\omega f(x,y)\,dx - \int_a^c f(x,y)\,dx\right| \overset{c\to\omega}{\rightrightarrows} 0$$

**Remark 3.2.5** Воно якось схоже за рівномірну збіжність функції, але трошки не так. Тут розглядається взагалі-то рівномірна збіжність функції $g(x,y)$ до функції $g(y)$ ТА при цьому аргумент $x\to x_0$.

**Theorem 3.2.6 Критерій Коші**
$\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ – збіжний рівномірно на $A$ $\iff$ $\forall \varepsilon>0 : \exists C : \forall c_1,c_2 \in (C,\omega) : \sup_{y\in A}\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$.
*Випливає з критерію Коші рівномірної збіжності функцій.*

**Theorem 3.2.7 Ознака Ваєрштраса**
Задані функції $f\colon [a,\omega)\times A\to\mathbb{R}$, $g\colon [a,\omega)\to\mathbb{R}$ такі, що виконується наступне:
1) $\forall x \in [a,\omega) : \forall y \in A : |f(x,y)| \le g(x)$;
2) $\displaystyle\int_a^\omega g(x)\,dx$ – збіжний.
Тоді $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ – збіжний рівномірно на $A$.

**Proof.**
$\displaystyle\sup_{y\in A}\left|\int_c^\omega f(x,y)\,dx\right| \le \left|\int_c^\omega g(x)\,dx\right| \overset{c\to\omega}{\rightrightarrows} 0.$ ■

**Example 3.2.8** Довести, що $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ рівномірно збіжний на множині $[1+\gamma,+\infty)$, якщо $\gamma>0$.
Маємо функцію $f(x,\alpha)=\dfrac{1}{x^\alpha}$. Також відома оцінка $x^\alpha > x^{1+\gamma} \implies \dfrac{1}{x^\alpha} < \dfrac{1}{x^{1+\gamma}}$, виконано $\forall x\ge 1$.
Також $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\gamma}}$ – збіжний невласний інтеграл (еталон). Тому за ознакою Ваєрштраса, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ рівномірно збіжний на множині $[1+\gamma,+\infty)$.

**Example 3.2.9** Довести, що $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ не є рівномірно збіжним на множині $(1,+\infty)$.
Дійсно, $\displaystyle\sup_{\alpha>1}\left|\int_c^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\right| = \sup_{\alpha>1}\left(\frac{1}{c^{\alpha-1}}\frac{1}{1-\alpha}\right) = +\infty \not\to 0$ при $c\to+\infty$.

**Theorem 3.2.10 Ознака Діріхле та Абеля**
Задані функції $f$, $g\colon [a,\omega)\times A\to\mathbb{R}$ такі, що виконана одна з двох пар умов:

| | |
|---|---|
| $\displaystyle\int_a^A f(x,y)\,dx$ – рівномірно обмежена на $[a,\omega)$.<br>$g$ – монотонна на $[a,\omega)$ ($\forall y\in A$) та<br>$g(x,y)\rightrightarrows 0$, $x\to\omega$.<br>*ознака Діріхле* | $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ – збіжний рівномірно на $A$.<br>$g$ – монотонна на $[a,\omega)$ ($\forall y\in A$) та<br>рівномірно обмежена на $[a,\omega)\times A$.<br>*ознака Абеля* |

Тоді $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,dx$ – рівномірно збіжний на $A$.
*Доведення теореми Діріхле анаголігно доводиться, як це було в розділі про прості невласні інтеграли (TODO: лінкування). Так само із Діріхле випливає Абеля аналогічним чином.*

**Example 3.2.11** Довести, що $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}\,dx$ збіжний рівномірно на $[\alpha,+\infty)$, $\alpha>0$.
Розглянемо функції $f(x,y)=\sin xy$ та $g(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.
$\displaystyle\int_0^A \sin xy\,dx = -\frac{1}{y}\cos xy\Big|_0^A = -\frac{1}{y}\cos Ay + \frac{1}{y}$. Ця штука – рівномірно обмежена на $[0,+\infty)$, тому що

$\dfrac{1}{y}|1-\cos Ay| \leq \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{\alpha}$, виконано $\forall A \in [0,+\infty)$.

$\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ ясно, що монотонна на $[0,+\infty)$ та рівномірно прямує до нуля при $x \to +\infty$.

Отже, за ознакою Діріхлє, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}\,dx$ - збіжний рівномірно на $[\alpha,+\infty)$.

**Example 3.2.12** Довести, що $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1} \operatorname{arctg} xy\,dx$ збіжний рівномірно на $[\alpha,+\infty)$, $\alpha > 0$.

Розглянемо функції $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}$ та $g(x,y) = \operatorname{arctg} xy$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}$ – збіжний рівномірно за попереднім прикладом.

$\operatorname{arctg} xy$ – монотонна по $x$, а також $\forall x : \forall y : |\operatorname{arctg} xy| \leq \dfrac{\pi}{2}$, тобто рівномірно обмежена.

Отже, за ознакою Абеля, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1} \operatorname{arctg} xy\,dx$ – збіжний рівномірно на $[\alpha,+\infty)$.

**Theorem 3.2.13 Ознака Діні**

Задано функцію $f \in C([a,\omega) \times [c,d])$. Також відомо, що $f \geq 0$ та $J(y) = \displaystyle\int_a^{\omega} f(x,y)\,dx \in C([c,d])$. Тоді $J$ – збіжний рівномірно на $[c,d]$.

**Proof.**

Доведення ознаки прямо випливає з теореми Діні про рівномірну збіжність функціонального ряда. Для спрощення доведення розгляну випадок, коли $\omega = +\infty$.

Розглянемо функціональну послідовність $g_n(y) = \displaystyle\int_a^{a+n} f(x,y)\,dx$, які визначені на $[c,d]$. Зауважимо, що $g_n \in C([c,d])$ за **Prp. 3.1.3**. Далі, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx = J(y) \in C([c,d])$. Нарешті, всі $g_n(y)$ неспадають в силу того, що $f \geq 0$.

Отже, за ознакою Діні для функціональної послідовності, $g_n$ збігається рівномірно до $J$ при $n \to \infty$.

Тоді звідси $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall y \in [c,d] : |g_N(y) - J(y)| < \varepsilon$. Тобто маємо $\left|\displaystyle\int_{a+N}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$.

Оберемо $C = a+N$, тоді $\forall c > C$ та $\forall y \in [c,d]$ матимемо $\left|\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$. Власне, це доводить рівномірну збіжність $J$ на $[c,d]$. ■

## 3.3 Властивості невласного інтегралу

**Proposition 3.3.1 Про неперервність невласного інтеграла з параметром**

Задана функція $f\colon [a,\omega) \times [c,d] \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a,\omega) \times [c,d])$. Також $J$ – рівномірно збіжний на $[c,d]$. Тоді $J \in C([c,d])$.

**Proof.**

За означенням рівномірної збіжності, маємо $\displaystyle\sup_{y\in[c,d]} \left|\int_{\xi}^{\omega} f(x,y)\,dx\right| \to 0,\ \xi \to \omega$. Іншими словами, $\forall \varepsilon > 0 : \exists \xi > a : \displaystyle\sup_{y\in[c,d]} \left|\int_{\xi}^{\omega} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тепер оцінимо $J$:

$$|J(y_1) - J(y_2)| = \left|\int_a^{\omega} f(x,y_1)\,dx - \int_a^{\omega} f(x,y_2)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^{\xi} f(x,y_1)\,dx - \int_a^{\xi} f(x,y_2)\,dx + \int_{\xi}^{\omega} f(x,y_1)\,dx - \int_{\xi}^{\omega} f(x,y_2)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_a^{\xi} f(x,y_1) - f(x,y_2)\,dx\right| + \left|\int_{\xi}^{\omega} f(x,y_1)\,dx\right| + \left|\int_{\xi}^{\omega} f(x,y_2)\,dx\right| \boxed{<}$$

Перший модуль: $f \in C_{\text{unif}}([a,\xi] \times [c,d])$, тоді $\exists \delta : \forall y_1, y_2 : |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{\xi - a}$.

Другий модуль: $\displaystyle\sup_{y\in[c,d]} \left|\int_{\xi}^{\omega} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \implies \forall y \in [c,d] : \left|\int_{\xi}^{\omega} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

$\boxed{<} \displaystyle\int_a^{\xi} \frac{\varepsilon}{\xi - a}\,dx + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$

Збираємо пазл та маємо $J \in C_{\text{unif}}([c,d]) \implies J \in C([c,d])$. ■

**Proposition 3.3.2 Про інтегрованість невласного інтеграла з параметром**
Задана функція $f\colon [a,\omega) \times [c,d] \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a,\omega)\times[c,d])$. Також $J$ – рівномірно збіжний на $[c,d]$. Тоді $J \in \mathcal{R}([c,d])$, причому $\displaystyle\int_c^d \underbrace{\int_a^{\omega} f(x,y)\,dx}_{=J(y)}\,dy = \int_a^{\omega}\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$.

**Proof.**
Розпишемо інтеграл $\displaystyle\int_c^d J(y)\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy + \int_c^d \int_b^{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$.
Перший доданок – це визначений інтеграл, тому там виконується **Prp 3.1.4.** (TODO: лінкування), тобто
$\displaystyle\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$
Другий доданок уже цікавіше, його ми оцінимо:
$\displaystyle\left|\int_c^d \int_b^{\omega} f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \int_c^d \left|\int_b^{\omega} f(x,y)\,dx\right| dy \le \int_c^d \sup_{y\in[c,d]} \left|\int_b^{\omega} f(x,y)\,dx\right| dy =$
$\displaystyle= \sup_{y\in[c,d]} \left|\int_b^{\omega} f(x,y)\,dx\right| (d-c) \to 0, b \to \omega$. Якщо $b \to \omega$, то тоді отримаємо
$\displaystyle\int_c^d J(y)\,dy = \int_a^{\omega}\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy + 0 = \int_a^{\omega}\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy.$ ■

**Proposition 3.3.3 Про диференційованість невласного інтеграла з параметром**
Задана функція $f\colon [a,\omega)\times[c,d] \to \mathbb{R}$, така, що виконані умови:
1) $\exists y_0 \in [c,d] : J(y_0)$ – збіжний;
2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a,\omega)\times[c,d])$;
3) $\displaystyle\int_a^{\omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ – рівномірно збіжний.

Тоді $J$ – збіжний, диференційований на $[c,d]$, при цьому $J'(y) = \displaystyle\int_a^{\omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.

**Proof.**
Розглянемо функцію $I(y) = \displaystyle\int_a^{\omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$. Оскільки $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ неперервна та $I$ – рівномірно збіжний, то тоді за **Prp. 3.2.6.** (TODO: лінкування), $I \in \mathcal{R}([y,y_0])$.
$\displaystyle\int_{y_0}^{y} I(t)\,dt = \int_a^{\omega}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\,dx = \int_a^{\omega} f(x,y) - f(x,y_0)\,dx = J(y) - J(y_0).$
Отже, $J(y) = \displaystyle\int_{y_0}^{y} I(t)\,dt - J(y_0)$ – збіжний $\forall y \in [c,d]$, як сума окремих збіжних доданків. Значить,
$J'(y) = I(y) - 0 = \displaystyle\int_a^{\omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$ ■

**Example 3.3.4** Обчислити $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x))}{\operatorname{tg} x}\,dx$.
Ми розглянемо функцію $J(y) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x))}{\operatorname{tg} x}\,dx$. Про неї відомо, що:
1) $\exists y_0 = 0 : J(0) = 0$, тобто звіжний;
2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x} \in C\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \times [-1,1]\right)$;
3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^2\operatorname{tg}^2 x}\,dx$ – збіжний рівномірно принаймні на $[-1,1]$ за мажорантною Ваєрштраса. Дійсно, $\dfrac{1}{1+y^2\operatorname{tg}^2 x} \le 1, \forall y \in [-1,1]$.

Отже, ми можемо продиференціювати функцію $J(y)$ та отримати:
$J'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^2\operatorname{tg}^2 x}\,dx \overset{t=\operatorname{tg}x}{=} \dots = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+y}$.
$J(y) = \int \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+y}\,dy = \frac{\pi}{2}\ln|1+y| + C$.
Оскільки $J(0)=0$, то звідси $C=0$. Наша мета була – це знайти $J(1)$. Таким чином,
$J(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x))}{\operatorname{tg}x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

**Proposition 3.3.5 Про невласне інтегрування невласного інтеграла з параметром**
Задана функція $f \in C([a,+\infty)\times[c,+\infty))$, причому $f \geq 0$. Також відомо, що $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \in C([c,+\infty))$, а також $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy \in C([a,+\infty))$. Тоді якщо $\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$ – збіжний, то $\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx$ – збіжний. Навпаки теж. Нарешті,
$\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx$.

**Proof.**
Позначимо $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$, про неї відомо, що $I \in C([c,+\infty))$, а також $\int_c^{+\infty} I(y)\,dy$ – збіжний.
Хочемо довести, що $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_a^R\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$.
Відомо, що $\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$ - збіжний, тобто
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta_1 : \forall d > c : d > \Delta_1 \implies \left|\int_d^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Також відомо, що $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – збіжний рівномірно за ознакою Діні, тоді
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta_2 : \forall R > a : R > \Delta_2 \implies \forall y \in [c,+\infty) : \left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}$.
Оберемо $\Delta = \max\{\Delta_1,\Delta_2\}$, фіксуємо довільне $d > \Delta$ та $R > \Delta$ таким чином, щоб $d > c, R > a$.
А далі для доведення ліміту зробимо оцінку:
$\left|\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy - \int_c^{+\infty}\int_a^{R} f(x,y)\,dx\,dy\right| = \left|\int_c^{+\infty}\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right| =$
$= \left|\int_c^{d}\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy + \int_d^{+\infty}\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right| \leq \left|\int_c^{d}\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right| + \left|\int_d^{+\infty}\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right| \leq$
$\leq \int_c^d\left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right| + \left|\int_d^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\right| < \int_c^d \frac{\varepsilon}{2(d-c)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Таким чином, дійсно, $\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$. ■

## 3.4 Інтеграл Діріхлє

Інтегралом Діріхлє називають таку рівність, яку зараз доведу (про збіжність вже говорили) (TODO: лінкування)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Розглянемо функцію $J(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx$, причому підінтегральну функцію ми довизначимо в точці 0. Тоді підінтегральна функція неперервна.
Перш за все $J(a)$ – рівномірно збіжний на $[0,+\infty)$, бо за ознакою Абеля, маємо:
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ – збіжний рівномірно (доводили);

$e^{-ax}$ – монотонна відносно $x$ та рівномірно обмежена, бо $|e^{-ax}| \leq 1$.
Із цього ми отримуємо, що $J \in C([0,+\infty))$, а тому $J(0) = \lim\limits_{a \to 0} J(a)$. Далі маємо наступне:

1) $\exists a_0 = 0 : J(0)$ – збіжний;
2) $\dfrac{\partial f}{\partial a} = -e^{-ax} \sin x \in C([0,+\infty) \times [0,+\infty))$;
3) $-\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x \, dx$ збіжний рівномірно на $[\gamma, +\infty)$, де $\gamma > 0$, за мажорантною Ваєрштраса. Дійсно, $|e^{-ax} \sin x| \leq e^{-\gamma x}$, а $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \, dx$ – збіжний.

Таким чином, $J'(a) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x \, dx = \dots = -\frac{1}{1+a^2}$.
$J(a) = -\operatorname{arctg} a + C$, причому ця рівність виконана $\forall a \in [\gamma, +\infty)$. Але водночас $J(0) = \lim\limits_{a \to 0} J(a) = C$.
Проте ще маємо, що $|J(a)| = \left| \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \, dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right| dx \overset{|\sin x| \leq x}{\leq} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a}$.
А тому $J(a) \to 0$ при $a \to +\infty$. Звідси випливає, що $0 = -\dfrac{\pi}{2} + C \implies J(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Додатково дослідимо ось такий інтеграл та доведемо рівність:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$$

Поки обмежимось $a > 0$, тоді
$F(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx \overset{ax=t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}$.
$F(-a) = -F(a) = -\dfrac{\pi}{2}$ та $F(0) = 0$ – тут відносно ясно.

## 3.5 Інтеграл Ойлера-Пуассона

Інтегралом Ойлера-Пуассона називають таку рівність, яку зараз доведу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Позначимо $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$. Зробимо заміну $x = at$. А потім помножимо обидві частини рівності на $e^{-a^2}$. Разом отримаємо рівність:
$Je^{-a^2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2} e^{-a^2 t^2} a \, dt$.
А потім проінтегруємо обидві частини рівності по $a$ на $[0,+\infty)$ – отримаємо:
$\displaystyle\int_0^{+\infty} Je^{-a^2} \, da = J \int_0^{+\infty} e^{-a^2} \, da = J^2$.
А з іншого боку, ми отримали:
$J^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2} e^{-a^2 t^2} a \, dt \, da \overset{?}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2 - a^2} a \, da \, dt \overset{s=-a^2 t^2 - a^2}{=}$
$= \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2+1)} \int_{-\infty}^{0} e^s \, ds \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2+1)} \, dt = \frac{\pi}{4}$.
Отже, взявши квадратний корінь, отримаємо $J = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (ясно, що $J$ – невід'ємне число).
Варто обґрунтувати рівняння зі знаком питання. Для цього перевіримо всі умови для невласного інтегрування невласного інтеграла. Функція $f(t,a) = ae^{-a^2(t^2+1)} \in C([0,+\infty) \times [0,+\infty))$, причому $f \geq 0$. Також
$\displaystyle\int_0^{+\infty} ae^{-a^2(t^2+1)} \, da = \frac{1}{2} \frac{1}{t^2+1} \in C([0,+\infty))$ та $\displaystyle\int_0^{+\infty} ae^{-a^2(t^2+1)} \, dt = Je^{-a^2} \in C([0,+\infty))$ (неважко довести, шо $J$ рівномірно збігається).
Нарешті, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ae^{-a^2(t^2+1)} \, da \, dt$ ми знайшли вище, який виявився збіжним. Отже, рівність '?' є справедливою.

## 3.6 Гамма-функція

**Definition 3.6.1** **Гамма-функцією** називають таку функцію:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \qquad \alpha > 0$$

**Lemma 3.6.2** При $\alpha > 0$ гамма-функція збіжна.

**Proof.**
$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка – це точка $x = 0$. Порівняємо з інтегралом $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ – збіжний при $\alpha > 0$. Маємо:
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1$. Отже, обидва збіжні, тому перший доданок – збіжний при $\alpha > 0$.

Розглянемо другий інтеграл. Особлива точка – це $x = \infty$. Порівняємо з інтегралом $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ – збіжний. Маємо:
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ за Лопіталем, } \alpha \geq 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-\alpha}e^{\frac{x}{2}}} = 0, \alpha < 1 \end{array}\right.$. Отже, обидва збіжні, тому другий доданок – збіжний при всіх $\alpha \in \mathbb{R}$ (у тому числі при $\alpha > 0$).
Остаточно, $\Gamma(\alpha)$ – збіжний при $\alpha > 0$. ■

**Lemma 3.6.3** $\Gamma \in C^\infty((0, +\infty))$.

**Proof.**
Коли будемо диференціювати $n$ разів гамма-функцію, ми очікуватимемо таке:
$\displaystyle\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx.$
Спробуємо зараз довести, що $\Gamma^{(n)}$ – рівномірно збіжний на проміжку $[a, b] \subset (0, +\infty)$.
Маємо $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx.$
Розглянемо перший інтеграл. Використаємо мажоранту Ваєрштрасса:
$|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x| = x^{\alpha-1}e^{-x}(-1)^n\ln^n x \leq \left[\begin{array}{l} (-1)^n x^{b-1}e^{-x}\ln^n x \\ (-1)^n x^{a-1}e^{-x}\ln^n x \end{array}\right.$.
Ситуації тут можуть бути різними, але поведінка інтеграла не зміниться. Я буду на розгляд брати перший випадок. Тобто дослідимо $\displaystyle\int_0^1 x^{b-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ на збіжність. Відомо, що $\ln x = o(x^{-\varepsilon}), x \to 0$, де $\varepsilon > 0$. Тоді правилом Лопіталя можна довести, що $\ln^n x = o(x^{-\varepsilon}), x \to 0$.
Завдяки цьому, ми візьмемо $\displaystyle\int_0^1 x^{b-1}x^{-\varepsilon}e^{-x}\,dx$ – збіжний, допоки $b > \varepsilon$. Це доводили під час попередньої леми. А далі $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^{b-1}e^{-x}\ln^n x}{x^{b-1}x^{-\varepsilon}e^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^n x}{x^{-\varepsilon}} = 0.$
Отже, $\displaystyle\int_0^1 x^{b-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ – збіжний. І тому за мажорантною Ваєрштрасса, $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ - збіжний рівномірно на $[a, b]$.
Аналогічно доводиться, що $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ – збіжний рівномірно на $[a, b]$. Там та сама оцінка на мажоранту, а також треба використати $\ln x = o(x^\varepsilon), x \to +\infty$, де $\varepsilon > 0$.
Остаточно, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ – збіжний рівномірно на $[a, b] \subset (0, +\infty)$, що й доводить той факт, що $\Gamma \in C^\infty((0, +\infty))$. ■

**Theorem 3.6.4** $\forall \alpha > 0 : \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
*Вказівка:* $\Gamma(\alpha + 1)$ *інтегруємо частинами, взявши за* $u = x^\alpha,\ dv = e^{-x}\,dx$.

**Corollary 3.6.5** $\Gamma(n + 1) = n!$ при $n \in \mathbb{N}$.

**Proof.**
Дійсно, за попередньою теоремою, маємо таку рівність:
$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1\Gamma(1)$.
Нарешті, обчислимо $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$. ■

**Corollary 3.6.6** $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+n\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

**Proof.**
Дійсно, за попередньою теоремою, маємо таку рівність:
$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}+1\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\dots\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$
$= \dfrac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
Нарешті, обчислимо $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx \overset{\text{Заміна: } t=\sqrt{x}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$. ■

**Remark 3.6.7** До речі кажучи, завдяки функціональному рівнянню $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, ми можемо продовжити нашу функцію на $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$.
Якщо я хочу порахувати $\Gamma(-0.5)$, то для цього я просто визначаю його як $\Gamma(-0.5) = \dfrac{\Gamma(0.5)}{-0.5}$. Для цілих чисел я продовження не можу зробити, бо $\Gamma(-1) = \dfrac{\Gamma(0)}{-1}$, проте $\Gamma(0)$ тупо не визначена. Якби $\Gamma(0)$ була визначена, то $\Gamma(1) = 0\cdot\Gamma(0) = 0$, але ми знаємо, що $\Gamma(1) = 1$ – тому визначити не можна.

## 3.7 Бета-функція

**Definition 3.7.1 Бета-функцією** називають таку функцію:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \qquad \alpha,\beta > 0$$

**Lemma 3.7.2** При $\alpha,\beta > 0$ бета-функція збіжна.

**Proof.**
$\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$.

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка – це точка $x = 0$. Порівняємо з інтегралом $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}\,dx$ – збіжний для $\alpha > 0$. Маємо
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}} = 1$. Отже, обидва збіжні, тому перший доданок – збіжний.
Розглянемо другий інтеграл. Проводимо заміну $1-x = t$, тоді маємо:
$-\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\,dt$ – це той самий перший доданок. І він вже буде збіжним, якщо $\beta > 0$.
Остаточно, $B(\alpha,\beta)$ – збіжний при $\alpha > 0, \beta > 0$. ■

**Lemma 3.7.3** $B \in C^\infty((0,+\infty)\times(0,+\infty))$.

**Proof.**
TODO: додати. ■

**Proposition 3.7.4** $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy$.
*Вказівка: зробити заміну* $x = \dfrac{y}{1+y}$.

**Proposition 3.7.5** $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$.
*Вказівка:* $x = 1-t$.

**Proposition 3.7.6** $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\alpha - 1}{\beta + \alpha - 1} B(\alpha - 1, \beta)$ при $\alpha > 1$.

*Вказівка: інтегруємо частинами, де* $u = x^{\alpha - 1}$ *та решта* $dv$.

Зауважимо, що $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha) = \dfrac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 1} B(\beta - 1, \alpha) = \dfrac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 1} B(\alpha, \beta - 1)$ при $\beta > 1$.

Ще зауважимо, що $B(\alpha, 1) = \dfrac{1}{\alpha}$, якщо порахувати бета-функцію.

Використовуючи два зауваження, можемо отримати ось це:

$$B(\alpha, n) = \frac{n-1}{\alpha + n - 1} B(\alpha, n-1) = \frac{n-1}{\alpha+n-1} \frac{n-2}{\alpha+n-2} \dots \frac{2}{\alpha+2} \frac{1}{\alpha+1} \frac{1}{\alpha} = \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}.$$

Зокрема при $\alpha = m$ ми отримаємо $B(m, n) = \dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$.

## 3.8 Основна теорема гамма-функції

**Proposition 3.8.1** Гамма-функція логарифмічно опукла вниз на проміжку $(0, +\infty)$.

**Proof.**

Тобто хочемо довести, що $\ln \Gamma$ опукла вниз на $(0, +\infty)$. Маємо $(\ln \Gamma)'' = \dfrac{1}{\Gamma^2}(\Gamma'' \Gamma - (\Gamma')^2)$.

Також, за допомогою нерівності Коші-Буняковського, ми доведемо наступне:

$$(\Gamma'(\alpha))^2 = \left( \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln x \, dx \right)^2 = \left( \int_0^{+\infty} \left( x^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \right) \left( x^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \ln x \right) dx \right)^2 \leq$$

$$\leq \left( \int_0^{+\infty} \left( x^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx \right) \left( \int_0^{+\infty} \left( x^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \ln x \right)^2 dx \right) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^2 x \, dx =$$

$$= \Gamma(\alpha) \Gamma''(\alpha).$$

Власне, це доводить, що $(\Gamma')^2 - \Gamma\Gamma'' \leq 0$, а тому звідси $(\ln \Gamma)'' > 0$, що доводить бажане. ■

**Theorem 3.8.2 Теорема Бора-Молерупа**

Припустимо, що задана функція $f \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, що задовольняє умовам:

1) $f(1) = 1$;
2) $f(\alpha + 1) = \alpha f(\alpha)$ при $\alpha > 0$;
3) $f$ – логарифмично опукла вниз функція на $(0, +\infty)$.

Тоді функція $f \equiv \Gamma$, тобто є гамма-функцією.

Тобто гамма-функція – єдина можлива функція, яка задовольняє трьом властивостям вище.

**Proof.**

Із умов 1), 2) випливає, що $f(n) = (n-1)!$ при $n \in \mathbb{N}$. Отже, нам достатньо показати рівність $f(\alpha) = \Gamma(\alpha)$ лише при $\alpha \in (0, 1]$.

Умова 3) каже, що $\ln f$ опукла вниз на $(0, +\infty)$. Це означає, що на інтервалі $[n-1, n+1]$ та точці $n + \alpha, \alpha \in (0, 1], n \geq 2$ маємо наступну нерівність:

$$\frac{\ln f(n-1) - \ln f(n)}{n - 1 - n} \leq \frac{\ln f(n+\alpha) - \ln f(n)}{n + \alpha - n} \leq \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{n + 1 - n}.$$

Зауважимо, що $\ln f(n-1) - \ln f(n) = \ln \dfrac{1}{n-1} = -\ln(n-1)$, а також $\ln f(n+1) - \ln f(n) = \ln n$.

Зважаючи на знаменники, отримаємо такі нерівності:

$$\ln(n-1) \leq \frac{\ln f(n+\alpha) - \ln(n-1)!}{\alpha} \leq \ln n.$$

$$\ln(n-1)^\alpha = \alpha \ln(n-1) \leq \ln f(n+\alpha) - \ln(n-1)! \leq \alpha \ln n = \ln n^\alpha.$$

Далі проекспоненціюємо нерівності з обох сторін:

$$(n-1)^\alpha \leq \frac{f(n+\alpha)}{(n-1)!} \leq n^\alpha;$$

$$(n-1)^\alpha (n-1)! \leq f(n+\alpha) \leq n^\alpha (n-1)!.$$

За пунктом 2), отримаємо $f(n+\alpha) = (\alpha + n - 1) \dots (\alpha + 1) \alpha f(\alpha)$. Звідси випливає:

$$\frac{(n-1)^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} \leq f(\alpha) \leq \frac{n^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}$$

$$\frac{(n-1)^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} \leq f(\alpha) \leq \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} \frac{\alpha+n}{n}$$

Дана нерівність виконана для всіх $n \geq 2$ та $\alpha \in (0, 1]$. Зокрема ми взяли фіксоване $n$, тому щойно отримана нерівність працюватиме й для $n+1$. Коротше, буде

$$\frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} \le f(\alpha) \le \frac{(n+1)^\alpha (n+1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n+1)} \frac{\alpha+n+1}{n+1}.$$

Нас з цих двох нерівностей цікавитиме ланцюг з червоних нерівностей:

$$f(\alpha) \le \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} \frac{\alpha+n}{n} \le \frac{\alpha+n}{n} f(\alpha).$$

$$\frac{n}{\alpha+n} f(\alpha) \le \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} \le f(\alpha).$$

$$\frac{n}{\alpha+n} f(\alpha) \le n^\alpha B(\alpha,n) \frac{n}{\alpha+n} \le f(\alpha).$$

Спрямуємо $n \to \infty$. Звідси отримаємо $f(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha,n) \dfrac{n}{\alpha+n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha,n)$. Оскільки нам вже відомо, що $\Gamma$ задовольняє 1),2),3), то ми би такими самими міркуваннями отримали $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha,n)$. Звідси отримали $f(\alpha) = \Gamma(\alpha)$. ■

## 3.9 Різні формули, що пов'язують гамма-функцію; зв'язки між гамма- та бета-функціями

**Proposition 3.9.1** $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha,n)$.

*При* $\alpha < 0$ *нецілих так некрасиво писати, тут краще* $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \dfrac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+(n-1))}$. *Хоча цей дріб збігається з бета-функцією, але бета-функція при* $\alpha < 0$ *не визначена.*

**Proof.**

Під час доведення теореми Бора-Молерупа ми отримали $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha,n)$ лише при $\alpha \in (0,1]$. Зараз покажемо, що ця формула справедлива для всіх $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\le 0}$.

Нехай $\beta \in (1,2]$ та зауважимо, що $n^\beta B(\beta,n) = n^\beta \dfrac{\beta-1}{\beta+n-1} B(\beta-1,n) = n^{\beta-1} B(\beta-1,n) \dfrac{n(\beta-1)}{\beta+n-1}$.

Якщо спрямувати $n \to \infty$, то буде $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\beta,n) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\beta-1} B(\beta-1,n) \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(\beta-1)}{\beta+n-1} = \Gamma(\beta)$.

Аналогічно робиться при $\beta \in (2,3]$ (що зводиться до $(1,2]$); а потім при $\beta \in (3,4]$ (що зводиться до $(2,3]$) тощо.

Нехай $\beta \in (-1,0)$ та зауважимо, $\dfrac{n^{\beta+1}(n-1)!}{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)} = \dfrac{n^\beta (n-1)!}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)} \dfrac{\beta n}{\beta+n}$. Значить, звідси $\dfrac{n^\beta(n-1)!}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)} = \dfrac{\beta+n}{\beta n} \dfrac{n^{\beta+1}(n-1)!}{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)}$. Якщо $n \to \infty$, то буде

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\beta(n-1)!}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)} = \Gamma(\beta+1)\dfrac{1}{\beta} = \Gamma(\beta)$. ■

**Theorem 3.9.2 Зображення Ваєрштраса**

$$\Gamma(\alpha) = e^{-\gamma\alpha} \frac{1}{\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{n}}}{1+\frac{\alpha}{n}}.$$

**Proof.**

Розглянемо $n^\alpha B(\alpha,n) = \dfrac{n^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} = \dfrac{1}{\alpha} \dfrac{e^{\alpha \ln n}}{\left(\frac{\alpha}{1}+1\right)\dots\left(\frac{\alpha}{n-1}+1\right)} =$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha \ln \alpha - \alpha - \frac{\alpha}{2} - \dots - \frac{\alpha}{n}} \frac{e^\alpha e^{\frac{\alpha}{2}} \dots e^{\frac{\alpha}{n}}}{\left(\frac{\alpha}{1}+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\dots\left(\frac{\alpha}{n+1}+1\right)} = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right)} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{\alpha}{k}}}{1+\frac{\alpha}{k}}.$$

Спрямуємо $n \to \infty$, тоді отримаємо наступне:

$\Gamma(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} e^{-\gamma\alpha} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{\alpha}{k}}}{1+\frac{\alpha}{k}}$, де $\gamma$ – константа Ойлера-Маскероні. ■

**Theorem 3.9.3 Формула подвоєння Лежандра**

$2^{\alpha-1}\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)$ лише при $\alpha > 0$.

**Proof.**

Позначимо функцію $f(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right) 2^{\alpha-1}$ при $\alpha > 0$. Вона задовольняє умові теореми

Бора-Молерупа. Перевіримо три пункти:

1) $f(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)2^{1-1} = 1;$

2) $f(\alpha+1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)2^{\alpha} = \alpha f(\alpha);$

3) $\ln f(\alpha) = -\ln\sqrt{\pi} + \ln\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \ln\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + (\alpha-1)\ln 2.$

Кожна з функцій (у тому числі константи) опуклі вниз, тому $\ln f(\alpha)$ також опукла вниз як сума. Значить задана функція $f(\alpha) = \Gamma(\alpha)$, що дає формулу Лежандра. ■

**Theorem 3.9.4 Функціональне рівняння Ойлера**

$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ лише при $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) = \frac{\pi}{\cos\pi\alpha}$ лише при $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\left(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right)$.

**Proof.**

Розглянемо функцію $\varphi(\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha$, яка визначена на $\alpha\notin\mathbb{Z}$. Наша мета: довести, що $\varphi(\alpha)\equiv\pi$.

По-перше, слід зазначити, що $\varphi$ має період 1, адже

$\varphi(\alpha+1) = \Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)\sin\pi(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)\frac{\Gamma(1-\alpha)}{-\alpha}.$

По-друге, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\varphi(\alpha) = \pi$. Справді, розпишемо функцію ось таким чином:

$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha = \Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\pi^{2k+1}\alpha^{2k}}{(2k+1)!}.$

Оскільки $\Gamma$ неперервна та ряд рівномірно збіжний, то звідси отримаємо:

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\varphi(\alpha) = \Gamma(1)\Gamma(1)\pi = \pi.$

Отже, ми можемо функцію $\varphi$ довизначити в точці $\alpha = 0$. У силу одиничної періодичності ми тоді можемо функцію $\varphi$ довизначити в усіх точках $\alpha\in\mathbb{Z}$.

Тепер по-третє, $\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ (працюємо уже з довизначеною функцією). Справді, $\Gamma(1+\alpha),\Gamma(1-\alpha)\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, а також степеневий ряд теж нескінченно диференційований, який визначений на $\mathbb{R}$.

По-четверте, функція $\varphi > 0$ на всьому $\mathbb{R}$, тому ми можемо визначити функцію $\psi(\alpha) = \ln\varphi(\alpha)$.

Перед цим зауважимо, що справджується рівність $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\varphi\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \pi\varphi(\alpha)$ при $0<\alpha<1$. Дійсно,

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\varphi\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\pi\frac{\alpha}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha+1}{2}\right)\sin\pi\frac{\alpha+1}{2} =$$

$$= \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sin\frac{\pi\alpha+\pi}{2} \overset{\text{формула Лежандра}}{=}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)}{2^{\alpha-1}}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\alpha)}{2^{1-\alpha-1}}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cos\frac{\pi\alpha}{2} = 2\pi\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cos\frac{\pi\alpha}{2} = \pi\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha = \pi\varphi(\alpha).$$

Оскільки $\varphi$ періодична з 1, то $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\varphi\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \pi\varphi(\alpha)$ виконана при $\alpha\in\mathbb{R}$.

Прологарифмуємо обидві частини рівності:

$\ln\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \ln\varphi\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \ln\pi + \ln\varphi(\alpha).$

Ми мали визначену функцію $\psi = \ln\varphi$, тож рівність перепишеться ось так:

$\psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \psi\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \ln\pi + \psi(\alpha).$

$\frac{1}{2}\psi'\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \psi'(\alpha).$

Відносно зрозуміло, що $\psi\in\mathcal{R}([0,1])$. Зауважимо, що на $[0,1]$ ми маємо $\psi'(\alpha) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{j=1}^{2^n}\psi'\left(\frac{\alpha+j-1}{2^n}\right)$.

При $n\to\infty$ в силу інтегрованості ми отримаємо $\psi'(\alpha) = \int_0^1 \psi'(u)\,du$. За формулою Ньютона-Ляйбніца, ми взагалі отримаємо $\psi'(\alpha) = \psi(1)-\psi(0) = \ln\varphi(1)-\ln\varphi(0) = 0$, тому що $\varphi(n) = \pi, n\in\mathbb{Z}$. Внаслідок чого $\psi'(\alpha) = 0, \forall\alpha\in[0,1]$, тоді $\psi(\alpha) = C$. Проте оскільки $\psi(1) = \ln\pi$, то тоді $C = \ln\pi$. Коротше, $\psi(\alpha) = \ln\pi$ при всіх $\alpha\in[0,1]$. Значить, $\varphi(\alpha) = \pi, \forall\alpha\in[0,1]$. У силу періодичності маємо

$\varphi(\alpha) = \pi, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Нарешті,
$\pi = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha \implies \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ при $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

У другій формулі просто дам вказівку: провести заміну $\beta = \alpha + \dfrac{1}{2}$. $\blacksquare$

**Theorem 3.9.5** $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

**Proof.**
Розглянемо функцію $f(\alpha) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$ при фіксованому $\beta > 0$. Вона задовольняє теоремі Бора-Молерупа. Дійсно,
1) $f(1) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} B(1,\beta)\Gamma(1+\beta) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\dfrac{1}{\beta}\beta\Gamma(\beta) = 1$;
2) $f(\alpha+1) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} B(\alpha+1,\beta)\Gamma(\alpha+1+\beta) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha,\beta)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta) = \alpha f(\alpha)$;
3) $f$ логарифмічно опулка вниз на $(0,+\infty)$, оскільки $\ln f(\alpha) = \ln\Gamma(\alpha+\beta) + \ln(\alpha,\beta) - \ln\Gamma(\beta)$ – опукла вниз як сума опуклих вниз функцій.
Таким чином, $\forall \alpha > 0$ виконується $f(\alpha) = \Gamma(\alpha)$, тобто $\dfrac{1}{\Gamma(\beta)} B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta) = \Gamma(\alpha)$. Всі ці міркування працюватимуть при всіх $\beta > 0$. $\blacksquare$

## 3.10 Графік гамма-функції

**Proposition 3.10.1** $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \Gamma(\alpha) = +\infty$.

**Proof.**
Маємо $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ для великих $\alpha > 0$. Оцінимо $\Gamma(\alpha)$.
$\Gamma(\alpha) > \displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx > \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}$.
Таким чином, $\Gamma(\alpha+1) > \dfrac{\alpha}{e} \to +\infty$ при $\alpha \to +\infty$. $\blacksquare$

**Proposition 3.10.2** $\lim\limits_{\alpha\to0+0} \Gamma(\alpha) = +\infty$.

**Proof.**
Дійсно, маємо $\Gamma(\alpha) > \displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \ge \frac{1}{e}\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx = \frac{x^\alpha}{\alpha e}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha e} \to +\infty$. $\blacksquare$

**Proposition 3.10.3** Гамма-функція опукла вниз на проміжку $(0,+\infty)$.

**Proof.**
Дійсно, $\Gamma''(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^2 x\,dx > 0$ при всіх $\alpha > 0$. $\blacksquare$

**Proposition 3.10.4** $\Gamma'(1) = -\gamma$, де $\gamma$ – константа Ойлера-Маскероні.

**Proof.**
$\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx \overset{\substack{\text{заміна:}\\ x=-\ln u}}{=} \int_0^1 \ln(-\ln u)\,du \boxed{=}$
Пригадаємо, що $\ln a = \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$. За допомогою цього ліміту, ми можемо отримати наступне:

$$\boxed{=} \int_0^1 \ln\left(\lim_{n\to\infty} n(1-\sqrt[n]{u})\right) du \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \ln n + \ln\big(1-\sqrt[n]{u}\big)\,du = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n + \int_0^1 \ln\big(1-\sqrt[n]{u}\big)\,du\right) \boxed{=}$$

Тепер згадаємо, що $\ln(1-t) = -\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{t^k}{k}$, тож звідси випливає наступне:

$$\int_0^1 \ln\big(1-\sqrt[n]{x}\big)\,du = -\int_0^1 \sum_{k=1}^\infty \frac{(\sqrt[n]{u})^k}{k}\,du = -\sum_{k=1}^\infty \int_0^1 \frac{u^{\frac{k}{n}}}{k}\,du = -\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}\frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \sum_{k=1}^\infty \frac{n}{k(k+n)} =$$

$$= -\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

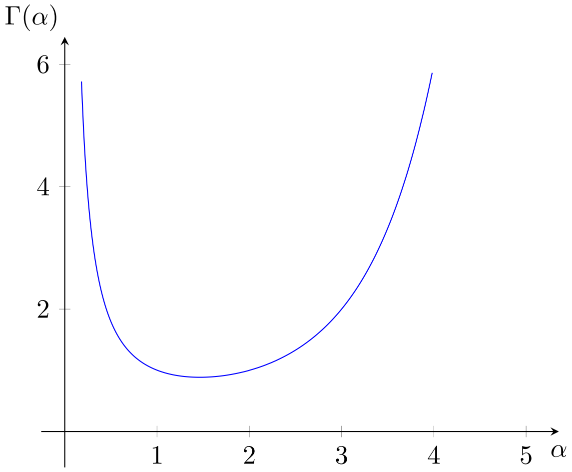
$$\boxed{=} \lim_{n\to\infty} \left(\ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right) = -\gamma.$$

Окремо варто пояснити рівність $\overset{?}{=}$, щоб все було цілком строго. (TODO: додати) ■

**Proposition 3.10.5** $\Gamma'(2) = 1 - \gamma$.

**Proof.**
Маємо рівняння $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, яке ми продиференціюємо.
$\Gamma'(\alpha + 1) = \Gamma(\alpha) + \alpha\Gamma'(\alpha)$.
Власне, звідси отримаємо $\Gamma'(2) = \Gamma(1) + \Gamma'(1) = 1 - \gamma$. ■

**Remark 3.10.6** Таким чином, буде простіше дослідити похідну. По-перше, оскільки $\Gamma'' \geq 0$, то тоді звідси $\Gamma'$ має бути неспадною на $(0, +\infty)$. По-друге, між $(1, 2)$ існує точка $\alpha_0$, яка буде точкою локального мінімуму. В силу неспадності похідної отримаємо, що на $(1, \alpha_0)$ гамма-функція спадатиме та на $(\alpha_0, +\infty)$ гамма-функція зростатиме.



Графік гамма-функції при $\alpha > 0$.