

Зміст

1	Метричні простори та інше	2
1.1	Означення метричних просторів	2
1.2	Відкриті та замкнені множини. Збіжні послідовності	3
1.3	Замикання множин	6
1.4	Повнота	7
1.5	Неперервні відображення	11
1.6	Компактність	12
1.7	Теорема Стоуна-Ваєрштраса	15
2	Початок функціонального аналізу	17
2.1	Обмежені та неперервні лінійні оператори	17
2.2	Продовження неперервних операторів	19

1 Метричні простори та інше

1.1 Означення метричних просторів

Definition 1.1.1 Задано X – множина та $\rho: X \rightarrow X \rightarrow \mathbb{R}$ – функція.

Функція ρ називається **метрикою**, якщо вона задовольняє таким властивостям:

- 1) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
- 2) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$
- 3) $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Метрика описує **відстань** між елементами x, y .

Пара (X, ρ) з метрикою називається **метричним простором**.

Example 1.1.2 Розглянемо декілька прикладів:

- 1) $X = \mathbb{R}, \quad \rho(x, y) = |x - y|;$
- 2) $X = \mathbb{R}^n$, можна задати дві метрики:
 $\rho_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}, \quad \rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|;$
- 3) $X = C([a, b]), \quad \rho(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|.$

Example 1.1.3 Окремо розгляну даний приклад. Нехай X – будь-яка множина, ми визначимо так

звану **дискретну метрику** $d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$. Тоді (X, d) задає **дискретний** метричний простір.

Definition 1.1.4 Задано (X, ρ) – метричний простір.

Пару $(Y, \tilde{\rho})$, де $Y \subset X$, назовемо **метричним підпростором** (X, ρ) , якщо

$$\forall x, y \in Y : \tilde{\rho}(x, y) = \rho(x, y).$$

При цьому метрика $\tilde{\rho}$, кажуть, **індукована в Y метрикою ρ** .

Proposition 1.1.5 Задано (X, ρ) – метричний простір та $(Y, \tilde{\rho})$ – підпростір. Для функції $\tilde{\rho}$ всі три аксіоми зберігаються. Тобто $(Y, \tilde{\rho})$ залишається метричним простором.

Вправа: довести.

Example 1.1.6 Маємо $X = F([a, b])$ – множину обмежених функцій та $\rho(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$.

Тоді в $Y = C([a, b])$ маємо метрику $\tilde{\rho}(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$. Отже, $C([a, b])$ – метричний підпростір простору $F([a, b])$.

Definition 1.1.7 Задано L – лінійний простір над \mathbb{R} або \mathbb{C} .

Задамо функцію $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$, що називається **нормою**, якщо виконуються умови:

- 1) $\forall x \in L : \|x\| \geq 0$
- 2) $\forall x \in L : \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ або } \mathbb{C} : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- 3) $\forall x, y \in L : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Тоді пару $(L, \|\cdot\|)$ назовемо **нормованим простором**.

Corollary 1.1.8 Задано $(L, \|\cdot\|)$ – нормований простір. Тоді $\forall x, y \in L : \|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.

Вказівка: $\|x\| = \|x + y - y\|$ та $\|y\| = \|y + x - x\|$.

Proposition 1.1.9 Задано $(L, \|\cdot\|)$ – нормований простір. Тоді L з метрикою $\rho(x, y) = \|x - y\|$ утворює метричний простір.

Вправа: перевірити три аксіоми.

Corollary 1.1.10 У такому разі справедливі додаткові властивості для заданої метрики:

- 1) $\forall x, y, z \in L : \rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$ (інваріантність по відношенню до зсуву);
- 2) $\forall x, y \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ або } \mathbb{C} : \rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \rho(x, y)$ (однорідність).

Example 1.1.11 Зокрема дані простори будуть нормованими:

- 1) $\mathbb{R}, \quad \|x\| = |x|;$

2) \mathbb{R}^n , $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ або навіть $\|\vec{x}\| = |x_1| + \dots + |x_n|$;

3) $\mathbb{C}([a, b])$, $\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$;

4) $L_p(X, \lambda)$, $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$.

Тому всі вони будуть автоматично метричними просторами із метрикою, що вище задана.

Example 1.1.12 Дискретний простір (X, d) – метричний, але не нормований.

Example 1.1.13 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідов простір. Ми можемо евклідов простір E перетворити в нормований простір $(E, \|\cdot\|)$ функцією $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Як наслідок, за твердженням вище, (E, ρ) – метричний простір з $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Example 1.1.14 Нехай $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$ – дійсна числова послідовність. Задамо простір $l_1 = \left\{ \vec{a} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$.

Задаються такі операції:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$$

Неважко переконатися, що l_1 – лінійний простір над \mathbb{R} .

Важливе зауваження: $\vec{a} + \vec{b}, \alpha \vec{a} \in l_1$, тому що маємо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжні, а тому збіжним буде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n. \text{ Тобто операції замкнені.}$$

Можна задати нормований простір функцією $\|\vec{a}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. А тому це – метричний простір з

$$\rho(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} - \vec{b}\|.$$

Узагальнення: $l_p = \left\{ \vec{a} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$, тут задається норма $\|\vec{a}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Example 1.1.15 Тут ще є така множина: $l_{\infty} = \{ \vec{a} \mid \vec{a} \text{ – обмежені} \}$. Задані такі самі операції, що вище. Задається норма $\|\vec{a}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$. Отже, l_{∞} – метричний простір.

1.2 Відкриті та замкнені множини. Збіжні послідовності

Definition 1.2.1 Задано (X, ρ) – метричний простір та $a \in X$.

Відкритою кулею радіусом r з центром a називають таку множину:

$$B(a; r) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\}$$

Її ще називають r -околом точки a .

Замкненою кулею радіусом r з центром a називають таку множину:

$$B[a; r] = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\}$$

Example 1.2.2 Розглянемо декілька прикладів:

1) $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $B(a; r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$;

2) $X = \mathbb{R}^2$, $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$, $B(0; 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

Definition 1.2.3 Задано $A \subset X$ та $a \in A$.

Точка a називається **внутрішньою** для A , якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : B(a; \varepsilon) \subset A.$$

Definition 1.2.4 Множина A називається **відкритою**, якщо кожна точка множини A – внутрішня.

Example 1.2.5 Розглянемо такі приклади:

1) Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$ та множину $A = [0, 1)$. Точка $a = \frac{1}{2}$ – внутрішня, оскільки $\exists \varepsilon = \frac{1}{4} : B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \subset A$, тобто $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \subset [0, 1)$. Водночас точка $a = 0$ – не внутрішня. Отже, A – не відкрита, бо знайшли не внутрішню точку.

2) Маємо $X = [0, 1], \rho(x, y) = |x - y|$ та множину $A = [0, 1)$. У цьому випадку точка $a = 0$ уже внутрішня (в попередньому прикладі ми могли ε -околом вийти за межі нуля ліворуч, а тут вже ні). Тут A тепер відкрита.

3) Маємо $X = \{0, 1, 2\}$ – підпростір метричного простору $(\mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|)$. Задамо множину $A = \{0, 1\}$. Тут кожна точка – внутрішня. Отже, A – відкрита.

Definition 1.2.6 Задано $A \subset X$ та $x_0 \in X$.

Точка x_0 називається **граничною** для A , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : (B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

Інколи ще множину $B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\} = \dot{B}(x_0; \varepsilon)$ називають **проколом околом точки** x_0 .

Definition 1.2.7 Множина A називається **замкнутою**, якщо вона містить всі свої граничні точки.

Example 1.2.8 Розглянемо такі приклади:

1) Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$ та множину $A = (0, 1)$. Точки $x_0 \in \left\{\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$ – граничні. Водночас точка $x_0 = \frac{3}{2}$ – не гранична. Отже, A – не замкнена, бо $x_0 = 1$ хоча й гранична для A , але $x_0 \notin A$.

2) Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$. Задамо множину $A = \{0, 1\}$. Тут жодна точка – не гранична. Тим не менш, A – замкнена. Бо нема жодної граничної точки в X для A , щоб порушити означення.

3) X, \emptyset – замкнені в будь-якому метричному просторі.

Theorem 1.2.9 Задано (X, ρ) , $A \subset X$.

Множина A – відкрита \iff множина A^c – замкнена

Proof.

\Rightarrow Дано: A – відкрита.

!Припустимо, що A^c – не замкнена, тобто $\exists x_0 \in A : x_0$ – гранична для A^c , але $x_0 \notin A^c$. За умовою, оскільки $x_0 \in A$, то x_0 – внутрішня, тобто $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \subset A$. Отже, $B(x_0; \varepsilon) \cap A^c = \emptyset$ – суперечність!

\Leftarrow Дано: A^c – замкнена. Тоді вона містить всі граничні точки. Тоді $\forall x_0 \in A : x_0$ – не гранична для A^c , тобто $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A^c = \emptyset \implies B(x_0; \varepsilon) \subset A$. Отже, x_0 – внутрішня для A , а тому A – відкрита. ■

Theorem 1.2.10 Задано (X, ρ) – метричний простір. Тоді справедливо наступне:

1) Нехай $U_\alpha \subset X$, $\alpha \in I$ – сім'я відкритих множин. Тоді $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ – відкрита множина;

2) Нехай $U_k \subset X$, $k = \overline{1, n}$ – сім'я відкритих множин. Тоді $\bigcap_{k=1}^n U_k$ – відкрита множина;

3) \emptyset, X – відкриті множини.

Proof.

Доведемо кожний пункт окремо:

1) Задано множину $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Зафіксуємо $a \in U$. Тоді $\exists \alpha_0 : a \in U_{\alpha_0} \implies a$ – внутрішня для U_{α_0}
 $\implies \exists \varepsilon > 0 : B(a; \varepsilon) \subset U_{\alpha_0} \subset U$. Отже, U – відкрита.

2) Задано множину $U = \bigcap_{k=1}^n U_k$. Зафіксуємо $a \in U$. Тоді $\forall k = \overline{1, n} : a \in U_k \implies a$ – внутрішня для U_k
 $\implies \exists \varepsilon_k > 0 : B(a; \varepsilon_k) \subset U_k$. Задамо $\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k \implies B(a; \varepsilon) \subset U$. Отже, U – відкрита.

3) \emptyset – відкрита, бо нема внутрішніх точок, тому що там порожньо. Також X – відкрита, оскільки для $a \in X$, який б $\varepsilon > 0$ не обрав, $B(a; \varepsilon) \subset X$.

Всі твердження доведені. ■

Remark 1.2.11 Відповідь на питання, чому в другому лише скінченна кількість відкритих множин. Розглянемо $X = \mathbb{R}$ із метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$. Задана сім'я відкритих множин $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$,

причому $\forall n \geq 1$. Тоді зауважимо, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$, але така множина вже не є відкритою.

Corollary 1.2.12 Задано (X, ρ) – метричний простір. Тоді справедливо наступне:

1) Нехай $U_\alpha \subset X$, $\alpha \in I$ – сім'я замкнених множин. Тоді $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$ – замкнена множина;

2) Нехай $U_k \subset X$, $k = \overline{1, n}$ – сім'я замкнених множин. Тоді $\bigcup_{k=1}^n U_k$ – замкнена множина;

3) \emptyset, X – замкнені множини.

Вказівка: скористатися де Морганом та TODO: вставити референс.

Remark 1.2.13 Такі твердження не є правдивими:

A – не відкрита, а тому A – замкнена (наприклад, $[0, 1)$ в \mathbb{R});

A – відкрита, а тому A – не замкнена (наприклад, \emptyset в \mathbb{R}).

Proposition 1.2.14 Задано (X, ρ) – метричний простір, $a \in X, r > 0$. Тоді відкритий окіл $B(a; r)$ – справді відкритий; замкнений окіл $B[a; r]$ – справді замкнений.

Proof.

(про $B(a; r)$). Задамо точку $b \in B(a; r)$. Нехай $\varepsilon = r - \rho(a, b) > 0$. Тоді якщо $x \in B(b; \varepsilon)$, то тоді $\rho(x, a) \leq \rho(x, b) + \rho(b, a) < \varepsilon + \rho(b, a) = r$. Отже, $B(a; r)$ – відкрита.

(про $B[a; r]$). Для цього достатньо довести, що $B^c[a; r] = \{x | \rho(a, x) > r\}$ – відкрита. Якщо задати $\varepsilon = \rho(a, b) - r$ для точки $b \in B(a; r)$, то аналогічними міркуваннями отримаємо, що $B^c[a; r]$ – відкрита. Отже, $B[a; r]$ – замкнена. ■

Definition 1.2.15 Задано (X, ρ) – метричний простір, послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset X$ та $x_0 \in X$. Дана послідовність називається **збіжною** до x_0 , якщо

$$\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Позначення: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Theorem 1.2.16 Задано (X, ρ) – метричний простір, $A \subset X$ та $x_0 \in X$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) x_0 – гранична точка для A ;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A$ – нескінченна множина;
- 3) $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : x_n \neq x_0 : x_n \rightarrow x_0$.

Proof.

1) \Rightarrow 2) Дано: x_0 – гранична для A .

!Припустимо, що $\exists \varepsilon^* > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A$ – скінченна множина, тобто маємо $x_1, \dots, x_n \in B(x_0; \varepsilon^*)$. Тоді $\rho(x_0, x_1) < \varepsilon^*, \dots, \rho(x_0, x_n) < \varepsilon^*$. Оберемо найменшу відстань та задамо $\varepsilon_{new}^* = \min_{1 \leq i \leq n} \rho(x_0, x_i)$.

Створимо $B(x_0; \varepsilon_{new}^*) \subset B(x_0; \varepsilon)$. У новому шару жодна точка $x_1, \dots, x_n \in A$ більше сюди не потрапляє. Тоді $B((x_0; \varepsilon_{new}^*) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$ – таке неможливо через те, що x_0 – гранична точка. Суперечність!

2) \Rightarrow 3) Дано: $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A$ – нескінченна множина. Встановимо $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Тоді оскільки $\forall n \geq 1 : B\left(x_0; \frac{1}{n}\right) \cap A$ – нескінченна, то $\forall n \geq 1 : \exists x_n \in A : \rho(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$. Якщо далі $n \rightarrow \infty$, тоді $\rho(x_0, x_n) \rightarrow 0$. Достатньо, $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \neq x_0 : x_n \rightarrow x_0$.

3) \Rightarrow 1) Дано: $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \neq x_0 : x_n \rightarrow x_0$. Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \rho(x_0, x_n) < \varepsilon$. Або, інакше кажучи, $\forall \varepsilon > 0 : x_N \in B(x_0; \varepsilon) \cap A$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : (B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$. ■

1.3 Замикання множин

Definition 1.3.1 Задано (X, ρ) – метричний простір, $A \subset X$ та A' – множина граничних точок A . Замиканням множини A називають таку множину

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Часто ще позначають замикання за $\text{Cl}(A)$.

Example 1.3.2 Маємо $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ та множину $A = (0, 1)$. Тоді множина $A' = [0, 1]$. Замикання $\bar{A} = A \cup A' = [0, 1]$.

Remark 1.3.3 Розглянемо зараз сукупність замкнених множин $A \subset A_\alpha \subset X$. Перетин $B = \bigcap_{\alpha} A_\alpha$ – також замкнена, водночас $A_\alpha \supset B \supset A$. Отже, B – найменша замкнена множина, що містить A .

Proposition 1.3.4 Задано \bar{A} – замикання. Тоді спредливе наступне:

- 1) \bar{A} – найменша замкнена множина, що містить A ;
- 2) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
- 3) A – замкнена $\iff A = \bar{A}$.

Proof.

Доведемо кожне твердження окремо.

1) !Припустимо, що \bar{A} не є найменшою замкнутою, що містить A , тобто $\exists B \subset \bar{A} : B \supset A$ – замкнена. Зафіксуємо точку $x_0 \in \bar{A}$ – гранична, тоді $x_0 \in A' \cup A$.

Якщо $x_0 \in A'$, то тоді $x_0 \in B$, тому що B містить всі граничні т. A

Якщо $x_0 \in A$, то тоді $x_0 \in B$.

В обох випадках $\bar{A} \subset B$. Отже, $\bar{A} = B$. Суперечність!

$$2) \overline{A \cup B} = (A \cup B)' \cup (A \cup B) \quad \boxed{=}$$

$x_0 \in (A \cup B)' \iff x_0$ – гранична точка $A \cup B \iff \forall \varepsilon > 0 :$

$$B(x_0; \varepsilon) \cap (A \cup B) = (B(x_0; \varepsilon) \cap A) \cup (B(x_0; \varepsilon) \cap B) \neq \emptyset \text{ (без т. } x_0) \iff$$

$$\begin{cases} x_0 \text{ – гранична для } A \\ x_0 \text{ – гранична для } B \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 \in A' \\ x_0 \in B' \end{cases} \iff x_0 \in A' \cup B'$$

Отже, $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

$$\boxed{=} A' \cup B' \cup A \cup B = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$$\overline{A \cap B} = (A \cap B)' \cup (A \cap B) \quad \boxed{\subset}$$

$x_0 \in (A \cap B)' \iff x_0$ – гранична точка $A \cap B \iff \forall \varepsilon > 0 :$

$$B(x_0; \varepsilon) \cap (A \cap B) = (B(x_0; \varepsilon) \cap A) \cap (B(x_0; \varepsilon) \cap B) \neq \emptyset \text{ (без т. } x_0) \implies$$

$$\begin{cases} x_0 \text{ – гранична для } A \\ x_0 \text{ – гранична для } B \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 \in A' \\ x_0 \in B' \end{cases} \iff x_0 \in A' \cap B'$$

Отже, $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$.

$$\boxed{\subset} (A' \cap B') \cup (A \cap B) = (\text{TODO: обміркувати})$$

3) Доведення в обидва боки.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – замкнена. Тоді A містить всі свої граничні точки. Так само A' містить граничні точки A . Тому $A = \bar{A}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $A = \bar{A}$. Тобто A містить всі свої граничні точки. Отже, A – замкнена.

Всі твердження доведені. ■

Definition 1.3.5 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$. Множина A називається **щільною** в X , якщо

$$\bar{A} = X$$

Definition 1.3.6 Задано (X, ρ) – метричний простір.

Метричний простір називається **сепарабельним**, якщо

існує в даному просторі скінченна чи зліченна щільна підмножина.

Example 1.3.7 Розглянемо такі приклади:

1) $(\mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|)$ – сепарабельний, тому що \mathbb{Q} – зліченна та щільна підмножина в \mathbb{R} .

2) Маємо простір $l_2 = \left\{ \vec{a} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$ – нормований простір. Розглянемо множину

$l_2 O = \{ \vec{a} \in l_2 \mid \text{скінченна кількість членів не нуль} \}$. Розглянемо $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots\} \in l_2$. Доведемо, що вона – гранична для $l_2 O$.

Задамо послідовність $\{\vec{a}_n, n \geq 1\} \subset l_2 O$, де кожний елемент задається таким чином:

$$\vec{a}_n = \{a_1, \dots, a_n, 0, \dots\} \implies \rho(\vec{a}, \vec{a}_n) = \|\vec{a} - \vec{a}_n\| = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n^2 \rightarrow 0, \text{ оскільки ряд збіжний, а тому хвіст}$$

ряду прямує до нуля. Отже, $\vec{a}_n \rightarrow \vec{a}$, тож \vec{a} – гранична точка.

Тоді можна ствердити, що $l_2 O$ – щільна в l_2 , або інакше $\overline{l_2 O} = l_2$. А оскільки $l_2 O \subset l_2$ та ще й нескінченна, то тоді l_2 – сепарабельний.

3) Простір $C([a, b])$ – сепарабельний.

Доведу пізніше, коли дізнаюсь про теорему Вейерштраса про наближення неперервної на відрізку функції многочленами.

4) А ось простір l_{∞} – не сепарабельний.

Доведу пізніше.

5) Підпростір сепарабельного метричного простору – сепарабельний

Доведу пізніше.

1.4 Повнота

Definition 1.4.1 Задано (X, ρ) – метричний простір.

Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Remark 1.4.2 Це означення можна інакше переписати, більш коротким чином:

$$\rho(x_n, x_m) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$$

Proposition 1.4.3 Будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною.

Proof.

Маємо $\{x_n, n \geq 1\}$ – збіжна, тобто $\rho(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. За нерівністю трикутника, маємо $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m)$. Якщо спрямувати одночасно $m, n \rightarrow \infty$, то тоді $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$. Отже, $\{x_n, n \geq 1\}$ – фундаментальна. ■

Remark 1.4.4 Проте не кожна фундаментальна послідовність – збіжна.

Example 1.4.5 Маємо $X = (0, 1]$ – підпростір \mathbb{R} . Розглянемо послідовність $\left\{ x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}$, де $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ – збіжна, проте $0 \notin X$. Тому така послідовність не має границі в X , але вона – фундаментальна за твердженням.

Definition 1.4.6 Метричний простір (X, ρ) називається **повним**, якщо

будь-яка фундаментальна послідовність має границю.

Example 1.4.7 Зокрема маємо наступне:

1) $X = \mathbb{R}$ – повний за критерієм Коші із матану;

2) $X = (0, 1]$ – не повний, бо принаймні $\left\{ x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}$ – фундаментальна, проте не має границі.

Proposition 1.4.8 Задано (X, ρ) – повний метричний простір та (Y, ρ) – підпростір.

(Y, ρ) – повний $\iff Y$ – замкнена в X .

Proof.

\Rightarrow Дано: (Y, ρ) – повний.

Припустимо, що Y – не замкнена, тобто існує $x_0 \in X \setminus Y$ – гранична точка для Y . Тоді існує послідовність $\{y_n\} \subset Y$, для якої $y_n \rightarrow x_0$ та $y_n \neq x_0$. Зауважимо, що $\{y_n\} \subset X$ збіжна саме в просторі X , тому саме в просторі X послідовність $\{y_n\} \subset X$ – фундаментальна. Проте зрозуміло цілком, що $\{y_n\} \subset Y$ буде фундаментальною в просторі Y , проте в силу повноти (Y, ρ) , матимемо збіжність саме в Y . Таким чином, $x_0 \in Y$ – суперечність!

\Leftarrow Дано: Y – замкнена в X . Візьмемо $\{y_n\} \subset Y \subset X$ – фундаментальна. Тоді в силу повноти X , вона – збіжна в просторі X . Скажімо, $y_n \rightarrow x_0$. Якщо точка $x_0 \in Y$, то тоді послідовність $\{y_n\}$ збіжна в Y . Інакше при $x_0 \in X \setminus Y$ зауважимо, що $y_n \neq x_0$, тому x_0 – гранична точка Y . У силу замкненості ми отримаємо $x_0 \in Y$ – послідовність $\{y_n\}$ знову збіжна в Y . ■

Definition 1.4.9 Повний нормований простір називається **банаховим**. Повний евклідів простір (відносно метрики, що породжена скалярним добутком) називається **гільбертовим**.

Proposition 1.4.10 Простір $C([a, b])$ зі стандартною нормою $\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$ – банахів.

Proof.

Задамо фундаментальну послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ на множині $C([a, b])$. Тоді

$\forall t_0 \in [a, b] : |x_n(t_0) - x_m(t_0)| \leq \|x_n - x_m\| = \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x_m(t)|$. Із цієї нерівності випливає, що

$\forall t_0 \in [a, b] : \{x_n(t_0), n \geq 1\}$ – фундаментальна.

За критерієм Коші (із матану), вона – збіжна, тобто $x_n(t_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(t_0)$. Щойно показали поточкову збіжність $\{x_n, n \geq 1\}$ до функції y . Доведемо, що вона збігається рівномірно (тобто за нормою).

$\{x_n, n \geq 1\}$ – фундаментальна, тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n \geq N : \|x_n(t) - x_m(t)\| < \varepsilon$. Або $\forall t \in [a, b] : |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$. Зафіксуємо деякі $t \in [a, b]$ та $n \geq N$. А потім спрямуємо $m \rightarrow \infty$. Тоді $|x_n(t) - y(t)| < \varepsilon$. Це виконується $\forall t \in [a, b]$ та $n \geq N$, або це записується інакше:

$\forall n \geq N : \|x_n - y\| < \varepsilon$. Отже, $x_n \rightarrow y$. ■

Example 1.4.11 Задамо підпростір $C([0, 1])$ із нормою із $L_2([0, 1], \lambda_1)$, де λ_1 – міра Лебега. Доведемо, що в такому разі $C([0, 1])$ уже не буде банаховим.

Розглянемо таку функціональну послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset C([0, 1])$, що задається таким чином:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{nx}{2} - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Це набір функцій, де похила частина зі збільшенням n перетворюється в вертикальну лінію. За-

уважимо, що якщо взяти поточкову границю, то отримаємо $x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$. При цьому

$$\|x_n - x\|_2^2 = \int_{[0, 1]} |x_n - x|^2 d\lambda_1 = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^2 dt = \dots = \frac{1}{6n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отже, $\{x_n\}$ в просторі $C([0, 1])$ із нормою L_2 збігається до точки $x \notin C([0, 1])$, але при цьому буде граничною для $C([0, 1])$. Тобто $C([0, 1])$ не буде замкненим, тож $C([0, 1])$ – не повний, або не банахів.

Proposition 1.4.12 Евклідів простір l_2 – гільбертів.

Proof.

Задамо фундаментальну послідовність $\{\vec{x}_n, n \geq 1\}$ на множині l_2

Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall k \geq 1 : |x_n^k - x_m^k| < \varepsilon$$

Тоді послідовність $\{x_n^k, n \geq 1\}$ – фундаментальна – тому (за матаном) збіжна, $x_n^k \rightarrow y^k$

Доведемо, що \vec{x} збігається до \vec{y} за нормою

$$\text{Маємо } \sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall K \geq 1 : \sum_{k=1}^K (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2$$

Спрямуємо $m \rightarrow \infty$, тоді $\sum_{k=1}^K (x_n^k - y^k)^2 < \varepsilon^2$

Звідки випливає збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - y^k)^2$ та його оцінка

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - y^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \|\vec{x}_n - \vec{y}\| < \varepsilon$$

Отже, $\vec{x}_n \rightarrow \vec{y}$ ■

Lemma 1.4.13 Задано $\{x_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна та $\{x_{n_k}, k \geq 1\}$ - збіжна. Тоді $\{x_n, n \geq 1\}$ - збіжна

Proof.

Маємо $a_{n_k} \rightarrow a, k \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \rho(a_{n_k}, a) < \varepsilon$$

Також відомо, що $\forall n, m \geq N : \rho(a_n, a_m) < \varepsilon$

Треба ще $n_k \geq N$. Тоді для $n \geq n_K$

$$\rho(a_n, a) \leq \rho(a_n, a_{n_K}) + \rho(a_{n_K}, a) < 2\varepsilon$$

Отже, $a_n \rightarrow a_0$ ■

Theorem 1.4.14 Критерій Кантора

Умова Кантора: для кожної послдовності $\{B[a_n; r_n], n \geq 1\}$ такої, що $B[a_1; r_1] \supset B[a_2; r_2] \supset \dots$ та $r_n \rightarrow 0$, перетин $\bigcap_{n=1}^{\infty} B[a_n; r_n] \neq \emptyset$ (це послідовність куль, що стягується).

(X, ρ) - повний \iff виконується умова Кантора.

Перед доведенням треба зробити кілька зауважень.

I. Точка, що належить перетину, буде в цьому випадку єдиною.

!Припустимо, що це не так, тобто $\exists b^*, b^{**} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B[a_n; r_n]$. Тоді $\forall n \geq 1 : \begin{cases} \rho(a_n, b^*) \leq r_n \\ \rho(a_n, b^{**}) \leq r_n \end{cases}$.

$$\implies \rho(b^*, b^{**}) \leq \rho(b^*, a_n) + \rho(a_n, b^{**}) \leq r_n + r_n = 2r_n.$$

Спрямуємо $n \rightarrow \infty$, тоді $\rho(b^*, b^{**}) \leq 0 \implies \rho(b^*, b^{**}) = 0 \implies b^* = b^{**}$. Суперечність!

II. Покажемо, що $\{a_n, n \geq 1\}$ - послідовність центрів - фундаментальна.

За умовою, $r_n \rightarrow 0 \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : r_n < \varepsilon$. Достатньо взяти лише $r_N < \varepsilon$. Тоді $\forall n, m \geq N : a_m, a_n \in B[a_N, r_N] \implies \rho(a_m, a_N) < r_N$ та $\rho(a_n, a_N) < r_N$.

$$\implies \rho(a_n, a_m) \leq \rho(a_n, a_N) + \rho(a_N, a_m) < 2r_N < 2\varepsilon. \text{ Отже, } \{a_n, n \geq 1\} - \text{фундаментальна.}$$

Proof.

\Rightarrow Дано: (X, ρ) - повний. Задано послідовність куль $\{B[a_n; r_n], n \geq 1\}$, що стягується. Тоді послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна. Оскільки X - повний, то тоді $\{a_n, n \geq 1\}$ - збіжна, тобто

$a_n \rightarrow a_0$. Оскільки $B[a_n; r_n]$ - замкнені, то маємо, що $a_0 \in B_n$. Звідси $a_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

\Leftarrow Дано: умова Кантора. Нехай $\{a_n, n \geq 1\}$ - фундаментальна послідовність. Нам достатньо буде у неї взяти збіжну підпослідовність. Нехай маємо $n_1 \in \mathbb{N}$, щоб $\forall n \geq n_1 : \rho(a_n, a_{n_1}) < \frac{1}{2}$.

$$\text{Тоді } \exists n_2 > n_1 : \forall n \geq n_2 : \rho(a_n, a_{n_2}) < \frac{1}{4}$$

\vdots

Тоді маємо послідовність $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ із властивістю $\forall n \geq n_k : \rho(a_n, a_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$.

Маємо тоді кулі $B\left[a_{n_k}; \frac{1}{2^{k-1}}\right]$, що вкладені. Дійсно, $x \in B\left[a_{n_{k+1}}; \frac{1}{2^k}\right] \implies$

$$\rho(a_{n_k}, x) \leq \rho(a_{n_k}, a_{n_{k+1}}) + \rho(a_{n_{k+1}}, x) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \implies x \in B\left[a_{n_k}; \frac{1}{2^{k-1}}\right]$$

Якщо a - спільна точка куль, то $a_{n_k} \rightarrow a$. ■

Definition 1.4.15 Задано (X, ρ) та $(Y, \tilde{\rho})$ – два різних метричних простори. Відображення $f: X \rightarrow Y$ називається **ізометрією**, якщо

$$\forall x_1, x_2 \in X : \tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$$

Тобто суть ізометрії – це збереження відстаней.

Remark 1.4.16 Кожна ізометрія f – уже автоматично ін'єктивна.

Дійсно, припустимо, що $f(x_1) = f(x_2)$. За визначенням ізометрії, $\tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$. Отримаємо $\rho(x_1, x_2) = 0$, тобто $x_1 = x_2$.

Definition 1.4.17 Метричні простори $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ називаються **ізометричними**, якщо

$$\exists f: X \rightarrow Y \text{ – бієктивна ізометрія}$$

Example 1.4.18 Розглянемо $(\mathbb{R}, \tilde{\rho})$ та $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \rho$ – два метричних простори. У цьому випадку ρ – стандартна метрика та $\tilde{\rho}(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$. Ці два простори – ізометричні. Дійсно, між ними існує ізометрія $\arctg: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, що є бієктивною.

Proposition 1.4.19 Задані $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два ізоморфні метричні простори. (X, ρ) – повний $\iff (Y, \tilde{\rho})$ – повний.

Proof.

\Rightarrow Дано: (X, ρ) – повний. Нехай $\{y_n, n \geq 1\}$ – фундаментальна послідовність. Оскільки X, Y ізометричні, то існує бієкція $f: X \rightarrow Y$, що є ізометрією. Тож звідси $\exists! x_n \in X : f(x_n) = y_n$. Розглянемо послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ та зауважимо, що $\rho(x_n, x_m) = \tilde{\rho}(y_n, y_m) \rightarrow 0$ в силу фундаментальності. Отже, $\{x_n, n \geq 1\}$ – фундаментальна, тож збіжна за повнотою. Тобто $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$. Позначимо $f(x) = y$. Звідси випливає, що $\tilde{\rho}(y_n, y) = \rho(x_n, x) \rightarrow 0$. Тобто $\{y_n, n \geq 1\}$ – збіжна.

\Leftarrow *зеркальне доведення.* ■

Definition 1.4.20 Задано Y – повний метричний простір.

Він буде називатися **поповненням (completion)** метричного простору X , якщо

$$\begin{aligned} X &\text{ – ізометричний підпростір } Y; \\ X &\text{ – щільна в } Y. \end{aligned}$$

Theorem 1.4.21 Для кожного метричного простору (X, ρ) існує поповнення. Причому це поповнення єдине з точністю до ізометрії.

Proof.

I. *Існування.*

Позначимо F за множина фундаментальних послідовностей $\{x_n\}$ в X . Стаціонарні послідовності є фундаментальними, тож звідси X можна сприймати як підмножину F .

Розглянемо функцію $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$, яка визначена на $F \times F$. Для коректності треба довести існування даної границі. Ми доведемо, що $\{\rho(x_n, y_n), n \geq 1\}$ – фундаментальна (це числова послідовність, тому цього буде достатньо).

Нам відомо, що $\{x_n\}, \{y_n\}$ фундаментальні, тобто $\exists N_1, N_2$, для яких $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon, \rho(y_n, y_m) < \varepsilon$ для всіх $n, m \geq N_1, m, n \geq N_2$. Тоді при $N = \max\{N_1, N_2\}$ справедлива оцінка:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(x_m, y_m) \leq (\rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)) - \rho(x_m, y_m) < 2\varepsilon.$$

Отже, функція d визначена коректно. Вона майже метрика, оскільки (легко перевірити) виконуються всі властивості. На жаль, $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0 \not\Rightarrow \{x_n\} = \{y_n\}$ (приклад буде нижче).

Створимо відношення еквівалентності $\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff d(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0$. Утвориться фактормножина $F/\sim = \hat{F}$. Елементи з \hat{F} позначатимемо за $\{\overline{x_n}\}$. Наша мета буде довести, що саме \hat{F} буде поповненням X .

На фактормножині покладемо $\tilde{\rho}(\{\overline{x_n}\}, \{\overline{y_n}\}) = d(\{x_n\}, \{y_n\})$. Варто пересвідчитися, що воно визначено коректно.

Нехай $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ та $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$. Тобто $d(\{x_n\}, \{x'_n\}) = 0$ та $d(\{y_n\}, \{y'_n\}) = 0$. Тоді $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x'_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y'_n, y_n) = d(\{x'_n\}, \{y'_n\})$.

Аналогічно отримаємо $d(\{x'_n\}, \{y'_n\}) \leq d(\{x_n\}, \{y_n\})$. Отже, $d(\{x'_n\}, \{y'_n\}) = d(\{x_n\}, \{y_n\})$, тобто $\tilde{\rho}$

визначилося коректним чином.

Поставимо відображення $f: X \rightarrow \hat{F}$ таким чином: $f(x) = \overline{\{x\}}$. Це буде ізометрією, тому що $\tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \tilde{\rho}(\{x_1\}, \{x_2\}) = d(\{x_1\}, \{x_2\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$. Відображення f зобов'язане бути сюр'єктивним, оскільки повертається клас еквівалентності. Тобто f – бієктивна ізометрія, а тому $(X, \rho), (\hat{F}, \tilde{\rho})$ – ізометричні.

Покажемо, що $(\hat{F}, \tilde{\rho})$ – повний метричний простір. (TODO: обміркувати).

II. Єдиність.

Розглянемо два поповнення $(Y_1, \tilde{\rho}_1), (Y_2, \tilde{\rho}_2)$ простору (X, ρ) . Тобто, за означенням, маємо $Y_1 \supset X_1 \sim X \sim X_2 \subset Y_2$, а також $\overline{X_1} = Y_1, \overline{X_2} = Y_2$. Під \sim мається на увазі ізометричність. Із цього X_1 ізометричний до X_2 , нехай g – відповідна ізометрія.

Побудуємо $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ за таким правилом: для кожного $y \in Y_1$ беремо таку послідовність $\{x_n\} \subset X_1$, щоб $x_n \rightarrow y$ – тоді $f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$. Треба пересвідчитися, що визначення коректне. Дійсно, нехай $\{x_n\}, \{x'_n\}$ – такі дві послідовності, що $x_n \rightarrow y, x'_n \rightarrow y$. Тоді звідси випливає наступне:

$$\tilde{\rho}_2(g(x_n), g(x'_n)) \stackrel{\text{ізометричність}}{=} \tilde{\rho}_1(x_n, x'_n) \leq \tilde{\rho}_1(x_n, y) + \tilde{\rho}_2(y, x'_n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким чином, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x'_n)$, а тому значення функцій коректно визначено. (TODO: подумати над тим, чи правильно я все це розписав). ■

Example 1.4.22 Беремо стандартний метричний простір \mathbb{R} , послідовності $\{x_n\} = \{0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$ та $\{y_n\} = \{1, 1, 1, \dots\}$. Зауважимо, що $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0.00 \dots 01 = 0$. При цьому зрозуміло, що $\{x_n\} \neq \{y_n\}$.

1.5 Неперервні відображення

Definition 1.5.1 Задані $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два метричних простори.

Відображення $f: X \rightarrow Y$ називається **неперервним у точці** x_0 , якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X : \rho(x, x_0) < \delta \implies \tilde{\rho}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Remark 1.5.2 Дане означення можна записати більш компактним чином. Маємо $f: X \rightarrow Y$.

f – неперервне в точці $x_0 \in X \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f(B(x_0; \delta)) \subset B(f(x_0); \varepsilon)$.

Proposition 1.5.3 Задані $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f: X \rightarrow Y$.

f – неперервне в точці $x_0 \in X \iff \forall \{x_n\} \subset X : x_n \rightarrow x_0 \text{ в } X \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0) \text{ в } Y$.

Вправа: довести.

Theorem 1.5.4 Задані $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f: X \rightarrow Y$.

f – неперервне (на множині X) $\iff \forall V$ – замкнена в $Y : f^{-1}(V)$ – замкнена в X .

Proof.

\Rightarrow Дано: f – неперервне. Нехай V – замкнена в Y . Зафіксуємо $x_n \in f^{-1}(V)$ таким чином, що $x_n \rightarrow x_0$. Але за неперервністю, $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, та додатково $f(x_n) \in V$. Значить, за замкненістю V , точка $f(x_0) \in V \implies x_0 \in f^{-1}(V)$. Отже, $f^{-1}(V)$ – замкнена.

\Leftarrow Дано: $\forall V$ – замкнена в $Y : f^{-1}(V)$ – замкнена в X . Оберемо $x_n \rightarrow x_0$.

Припустимо, що $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$, тобто існує шар $B(f(x_0); \varepsilon)$, поза яким знаходиться підпослідовність $\{f(x_{n_k})\}$. Якщо V – замикання множини $\{f(x_{n_k})\}$, то звідси $x_{n_k} \in f^{-1}(V)$; $f(x_0) \notin V$. Тоді звідси $x_0 \notin f^{-1}(V)$, проте $x_{n_k} \rightarrow x_0$ та x_0 є граничною точкою для $f^{-1}(V)$. Суперечність! ■

Corollary 1.5.5 f – неперервне $\iff \forall U$ – відкрита в $Y : f^{-1}(U)$ – відкрита в X .

Вказівка: застосувати попередню теорему та рівність $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

Proposition 1.5.6 Задані X, Y, Z – метричні простори та $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$. Нехай f – неперервне в точці $x_0 \in X$ та g – неперервне в точці $f(x_0) \in Y$. Тоді $g \circ f$ – неперервне в точці $x_0 \in X$.

Вправа: довести.

Proposition 1.5.7 Задано (X, ρ) – метричний простір та зафіксуємо $x_0 \in X$. Тоді функція $f(x) = \rho(x, x_0)$, де $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, – неперервна на X .

Proof.

Дійсно, нехай $y_0 \in X$. Припустимо, що $\{y_n\}$ така, що $y_n \rightarrow y_0$. Хочемо $f(y_n) \rightarrow f(y_0)$. Справді, $|f(y_n) - f(y_0)| = |\rho(y_n, x_0) - \rho(y_0, x_0)| \leq |\rho(y_n, y_0)| \rightarrow 0$.

Для \mathbb{R} береться стандартна метрика, якщо нічого іншого не вказується зазвичай. ■

Corollary 1.5.8 Задано $(L, \|\cdot\|)$ – нормований простір. Тоді норма $\|\cdot\|: L \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна.

Вказівка: оскільки $\rho(x, y) = \|x - y\|$, то звідси $\|x\| = \rho(x, 0)$.

Corollary 1.5.9 Задано $(E, (\cdot, \cdot))$ – евклідов простір. Тоді при фіксованому $x_0 \in E$ маємо (x, x_0) – неперервне відображення.

Proof.

Нехай $\{y_n\}$ задана так, що $y_n \rightarrow y_0$. Хочемо довести, що $(y_n, x_0) \rightarrow (y_0, x_0)$.

$|(y_n, x_0) - (y_0, x_0)| = |(y_n - y_0, x_0)| \leq \sqrt{\|y_n - y_0\|} \sqrt{\|x_0\|} \rightarrow 0$, оскільки $\|\cdot\|$ – неперервне. ■

Definition 1.5.10 Задано (X, ρ) – метричний простір та $f: X \rightarrow X$.

Дане відображення називається **стиском**, якщо

$$\exists q \in (0, 1) : \forall x, y \in X : \rho(f(x), f(y)) \leq q \cdot \rho(x, y)$$

Remark 1.5.11 Стискаючі відображення – неперервні.

Вказівка: обрати $\delta = \frac{q}{\varepsilon}$ при всіх $\varepsilon > 0$.

Theorem 1.5.12 Теорема Банаха

Задано (X, ρ) – повний метричний простір та $f: X \rightarrow X$ – стискаюче відображення. Тоді існує єдина точка нерухомої точки, тобто $\exists! x \in X : f(x) = x$.

Proof.

I. Існування.

Нехай $x_0 \in X$ – довільна точка. Зробимо позначення: $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_n = f(x_{n-1})$, ...

Покажемо, що послідовність $\{x_n, n \geq 0\}$ – фундаментальна. Дійсно, для $m \leq n$ маємо:

$$\rho(x_m, x_n) = \rho(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) \leq q \cdot \rho(x_{m-1}, x_{n-1}) \leq \dots \leq q^m \rho(x_0, x_{n-m}).$$

$$\begin{aligned} \rho(x_0, x_{n-m}) &\leq \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{n-m-1}, x_{n-m}) \leq \rho(x_0, x_1)(1 + q + \dots + q^{n-m-1}) \leq \\ &\leq \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1 - q}. \end{aligned}$$

$$\text{Разом отримаємо } \rho(x_m, x_n) \leq \frac{q^m}{1 - q} \rho(x_0, x_1) \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty.$$

Оскільки (X, ρ) – повний, то $\{x_n\}$ – збіжна, позначимо $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Зважаючи на неперервність

стиска, отримаємо $f(a) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$. Тобто a – це наша шукана нерухомої точки.

II. Єдиність.

Припустимо, що f має дві різні нерухомі точки a, b . Буде суперечність! Дійсно,

$$0 < \rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \leq q \cdot \rho(a, b) < \rho(a, b). \quad \blacksquare$$

Remark 1.5.13 Насправді, в теоремі Банаха достатньо вимагати, щоб саме $f^n \stackrel{\text{def.}}{=} f \circ \dots \circ f$ було

стиском, а не відображення f .

Дійсно, за теоремою Банаха, f^n матиме єдину нерухому точку a , тобто $f^n(a) = a$. Тоді точка $f(a)$ буде теж нерухомою для f^n , оскільки $f^n(f(a)) = f(f^n(a)) = f(a)$. Але за єдиністю, $f(a) = a$ – дві нерухомі мають збігатися. Єдиність нерухомої точки для f доводиться неважко.

1.6 Компактність

Definition 1.6.1 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.

Множина A називається **компактом**, якщо

$$\forall \{x_n, n \geq 1\} \subset A : \exists \{x_{n_k}, k \geq 1\} : x_{n_k} \rightarrow x_0, k \rightarrow \infty, \text{ причому } x_0 \in A$$

Якщо прибрати умову $x_0 \in A$, то тоді A називається **передкомпактом**.

Proposition 1.6.2 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.

A – компакт $\iff \forall B \subset A$, де B – нескінченна множина, існує $x_0 \in A$ – гранична точка B .

Якщо прибрати умову $x_0 \in A$, то вже мова буде йти про передкомпакт.

Proof.

\Rightarrow Дано: A – компакт. Нехай $B \subset A$ – нескінченна множина. Оберемо послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset B \subset A$, де всі вони між собою різні. Тоді за умовою компактності, існує підпослідовність $x_{n_k} \rightarrow x_0$, причому $x_0 \in A$. Зауважимо, що всі $x_{n_k} \neq x_0$, тож x_0 – гранична точка A .

Якби існували $k \in \mathbb{N}$, для яких $x_{n_k} = x_0$, то тоді ми би сформували підпослідовність $\{x_{n_{k_m}}\}$ без цих елементів, причому $x_{n_{k_m}} \rightarrow x_0$, а тепер $x_{n_{k_m}} \neq x_0$. Тож все одно x_0 залишається граничною точкою A .

\Leftarrow Дано: $\forall B \subset A$, де B – нескінченна множина, існує $x_0 \in A$ – гранична точка B . Отже, нехай $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$ – довільна послідовність. У нас є два варіанти:

I. Множина значень $\{x_n\}$ – скінченна. Тоді можна відокремити стаціонарну підпослідовність.

II. Множина значень $\{x_n\}$ – нескінченна, всі ці значення покладемо в множину $B \subset A$. Тоді за умовою, існує $x_0 \in A$ – гранична точка B . Отже, $B \cap B(x_0; \varepsilon)$ містить нескінченне число точок для всіх $\varepsilon > 0$. Зокрема:

$\varepsilon = 1 \implies B \cap B(x_0; 1)$ має нескінченну множину. Там існує елемент $y_1 \in B \cap B(x_0; 1)$, тобто це одне зі значень послідовності. Тобто $y_1 = x_{n_1}$.

$\varepsilon = \frac{1}{2} \implies B \cap B\left(x_0; \frac{1}{2}\right)$ має нескінченну множину. Там існує елемент $y_2 \in B \cap B\left(x_0; \frac{1}{2}\right)$, тобто це одне зі значень послідовності. Тобто $y_2 = x_{n_2}$. Причому можна обрати $x_{n_2} > x_{n_1}$. Якби так не було можливо, то $B \cap B\left(x_0; \frac{1}{2}\right)$ була б скінченною множиною, що не наше випадок.

\vdots

Побудували підпослідовність $\{x_{n_k}, k \geq 1\}$, причому $\rho(x_0, x_k) < \frac{1}{k}$. Тож при $k \rightarrow \infty$ матимемо $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in A$. Отже, A – компакт.

Випадок передкомпакту повторюється майже все слово в слово. ■

Proposition 1.6.3 Задано (X, ρ) – компактний метричний простір. Тоді (X, ρ) – повний.

Proof.

Дійсно, нехай $\{x_n\} \subset X$ – фундаментальна. Оскільки X – компакт, то існує збіжна підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, де $x_{n_k} \rightarrow x, x \in X$. Ми вже знаємо, що тоді й сама послідовність $\{x_n\} \rightarrow x$ буде збіжною. Отже, (X, ρ) – повний метричний простір. ■

Definition 1.6.4 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.

Множина A називається **обмеженою**, якщо

$$\exists R > 0 : A \subset B(a; R)$$

Definition 1.6.5 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.

Множина A називається **цілком обмеженою**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists C_\varepsilon = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : A \subset \bigcup_{x \in C_\varepsilon} B(x; \varepsilon)$$

До речі, C_ε , для якої виконана $A \subset \bigcup_{x \in C_\varepsilon} B(x; \varepsilon)$, називається **скінченною ε -сіткою**.

Тобто A – цілком обмежена, коли вона має скінченну ε -сітку для всіх $\varepsilon > 0$.

Proposition 1.6.6 Задано (X, ρ) – метричний простір та A – цілком обмежена множина. Тоді A – обмежена.

Proof.

Для множини A існує 1-сітка, тобто $C_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$, для якої $A \subset \bigcup_{x \in C_1} B(x; 1)$.

Зафіксуємо $y \in X$ та оберемо $R = 1 + \max_{x \in C_1} \rho(x, y)$. Тоді хочемо довести, що $A \subset B(y; R)$.

Нехай $a \in A$, тоді вже $a \in B(x; 1)$ при деякому $x \in C_1$, а також $\rho(a; x) < 1$. Звідси $\rho(a; y) \leq \rho(a; x) + \rho(x; y) < 1 + \max_{x \in C_1} \rho(x; y) = R$.

Отже, A – обмежена. ■

Remark 1.6.7 Не обов'язково вимагати, щоб A була цілком обмежена. Подивившись на це доведення, ми можемо лише вимагати, щоб A мала хоча б одну ε -сітку – тоді буде обмеженість A .

Theorem 1.6.8 Критерій Фреше-Хаусдорфа

Нехай (X, ρ) – повний метричний простір та $A \subset X$.

A – цілком обмежена $\iff A$ – передкомпакт.

Remark 1.6.9 Під час доведення \Leftarrow нам не потрібна буде умова повноти метричного простору.

Proof.

\Rightarrow Дано: A – цілком обмежена. Нехай $\{a_n, n \geq 1\} \subset A$ – довільна послідовність.

Оберемо 1-сітку C_1 , де $A \subset \bigcup_{x \in C_1} B(x; 1)$. В одному з цих шарів нескінченне число членів послідовності, той шар позначу за $B(y_1; 1)$; маємо підпослідовність $\{a_{n_k}, k \geq 1\} \subset B(y_1; 1)$.

Оберемо $\frac{1}{2}$ -сітку $C_{\frac{1}{2}}$, де $A \subset \bigcup_{x \in C_{\frac{1}{2}}} B\left(x; \frac{1}{2}\right)$. В одному з цих шарів нескінченне число членів підпослідовності, той шар позначу за $B\left(y_2; \frac{1}{2}\right)$; маємо підпідпослідовність $\{a_{n_{k_m}}, k \geq 1\} \subset B\left(y_2; \frac{1}{2}\right)$.

⋮

Отримали послідовність центрів $\{y_n, n \geq 1\}$, доведемо її фундаментальність.

$\rho(y_n, y_m) \leq \rho(y_n, a_*) + \rho(a_*, y_m) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. У даному випадку ми підібрали елемент $a_* \in B\left(\frac{1}{n}; y_n\right) \cap B\left(\frac{1}{m}; y_m\right)$.

Тепер розглянемо підпослідовність $\{a_{n_p}, p \geq 1\}$, яка будується таким чином: беремо перший елемент з $\{a_{n_k}\}$ (це наше a_{n_1}), потім перший елемент з $\{a_{n_{k_m}}\}$ (це наше a_{n_2}), ... Доведемо, що $\{a_{n_p}, p \geq 1\}$ – фундаментальна. Дійсно,

$\rho(a_{n_p}, a_{n_t}) \leq \rho(a_{n_p}, y_p) + \rho(y_p, y_t) + \rho(y_t, a_{n_t}) < \frac{1}{p} + \frac{1}{t} + \rho(y_p, y_t) \rightarrow 0, t, p \rightarrow \infty$

Оскільки (X, ρ) – повний, то звідси $\{a_{n_p}, p \geq 1\}$ – збіжна підпослідовність. Довели, що A – передкомпакт.

\Leftarrow Дано: A – передкомпакт.

Припустимо, що A – це є цілком обмеженою. Тобто для деякого $\varepsilon > 0$ не існує ε -сітки. Нехай $x_1 \in A$. Тоді існує $x_2 \in A$, для якої $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ (інакше якби для кожної $x_2 \in A$ була б $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon$, то ми би знайшли ε -сітку $\{x_1\}$, що суперечить умові).

Далі існує $x_3 \in A$, для якої $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$ та $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$ (аналогічно якби для кожної $x_3 \in A$ ці дві нерівності не виконувалися би, то ми би знайшли один з трьох ε -сіток: $\{x_1\}$ або $\{x_2\}$ або $\{x_1, x_2\}$).

⋮

Побудували послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$, для якої справедлива $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ при всіх $n \neq m$. За умовою передкомпактності, існує $\{x_{n_k}, n \geq 1\}$, для якої $x_{n_k} \rightarrow x_0$. Водночас звідси ми отримаємо, що існують номери K_1, K_2 , для яких $\rho(x_{n_{K_1}}, x_{n_{K_2}}) \leq \rho(x_{n_{K_1}}, x_0) + \rho(x_0, x_{n_{K_2}}) < \varepsilon$. Суперечність! Отже, A все ж таки має бути цілком обмеженою. ■

Theorem 1.6.10 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.

A – компакт \iff для кожного відкритого покриття A можна виділити скінченне підпокриття.

Proof.

\Rightarrow Дано: A – компакт.

Припустимо, що існує відкрите покриття $\{U_\alpha\}$ множини A , від якої не можна відокремити скінченне підпокриття. Оскільки A – компакт, то A – цілком обмежена. Значить, існує 1-сітка C_1 (причому можна підібрати так, щоб $C_1 \subset A$), для якої $A \subset \bigcup_{x \in C_1} B(x; 1)$, або можна переписати як

$A \subset \bigcup_{x \in C_1} A \cap B(x; 1)$. Серед множин $A \cap B(x; 1)$ існує одна з них, яка не покривається скінченним

чином множинами $\{U_\alpha\}$. Дану множину позначу за A' .

Сама множина A' – також цілком обмежена, тож існує $\frac{1}{2}$ -сітка $C_{\frac{1}{2}}$ (знову підберемо так, щоб $C_{\frac{1}{2}} \subset A'$), для якої виконано $A' \subset \bigcup_{x \in C_{\frac{1}{2}}} A' \cap B\left(x; \frac{1}{2}\right)$. Знову ж таки, серед $A' \cap B\left(x; \frac{1}{2}\right)$ існує одна

з них, що не покривається скінченим чином множинами $\{U_\alpha\}$. Дану множину позначу за A'' .

⋮

Продовжуючи процедуру, отримаємо набір куль $B_n = B\left(x_n; \frac{1}{n}\right)$, де центр $x_n \in B_{n-1} \cap A$. По-значимо $\overline{B_n} \cap A = K_n$ та зауважимо, що K_n – це замкнена куля в метричному підпросторі A , де $R = \frac{1}{2^n}$ та центр $y_n \in K_{n-1}$.

Подвоїмо радіуси кожної з цих куль. Тоді отримаємо послідовність вкладених куль, які стягуються. Оскільки A – компакт, то (A, ρ_A) – повний метричний простір, тож за теоремою Кантора, існує $a \in A$ – спільна точка цих куль. Зважаючи на покриття множини A , отримаємо $a \in U_{\alpha_0}$ при деякому α_0 . Оскільки U_{α_0} – відкрита, то існує куля $B(z, \delta) \subset U_{\alpha_0}$. Ми можемо підібрати завжди такий $N \in \mathbb{N}$, щоб було виконано $\frac{1}{N} < \frac{\delta}{2}$, тоді звідси $K_n \subset B(z, \delta) \subset U_{\alpha_0}$. Таким чином, K_n була покрита лише однією множиною із $\{U_\alpha\}$, проте ми обирали такі кулі (на початку), які не допускали скінченне підпокриття. Суперечність!

⊞ Дано: кожне покриття A має скінченне підпокриття.

!Припустимо, що A – не компакт, тобто існує послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$, що не має часткових границь. Тоді кожний відкритий окіл $U_a, a \in A$, містить скінченну кількість членів послідовності $\{x_n\}$ (якби існував окіл U_a із нескінченним числом членів послідовності, то a стала би граничною точкою, що неможливо). Набір $\{U_a, a \in A\}$ – відкрите покриття множини A . За умовою, існує скінченне підпокриття $\{U_{a_1}, \dots, U_{a_n}\}$ множини A , але тоді $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$, де праворуч – скінченна множина; ліворуч – нескінченна в силу нескінченності послідовності $\{x_n\}$ – суперечність! ■

Corollary 1.6.11 Задано $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f: X \rightarrow Y$ – неперервне відображення. Відомо, що X – компакт. Тоді $f(X)$ – компакт.

Proof.

Маємо $\{U_\alpha\}$ – відкрите покриття $f(X)$. Тоді $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ – відкрите покриття X , але за компактністю, можна виділити скінченне підпокриття $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_m)\}$, тоді звідси $\{U_1, \dots, U_m\}$ буде скінченим підпокриттям $f(X)$. ■

Corollary 1.6.12 Задано (X, ρ) – метричний простір та $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ – числова неперервна функція. Відомо, що X – компакт. Тоді f – обмежена та досягає найбільшого та найменшого значень.

Theorem 1.6.13 Задано $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f: X \rightarrow Y$ – неперервне, причому X – компакт. Тоді f – рівномірно неперервне.

Proof.

!Припустимо, що $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y \in X : \rho(x, y) < \delta$, але $\tilde{\rho}(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$.

Оберемо $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, тоді утвориться послідовність $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$. Оскільки X – компакт, то відокремимо збіжні підпослідовності $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$. Але оскільки $\rho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$, то звідси випливає $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$. Із іншого боку, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k})$, оскільки виконана нерівність $\tilde{\rho}(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon$. Суперечність! ■

1.7 Теорема Стоуна-Ваєрштраса

Надалі будемо розглядати компактний метричний простір (X, ρ) та метричний простір $(C(X), \sigma)$ – простір неперервних функцій із метрикою $\sigma(f, g) = \max_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|$. Причому даний метричний простір теж повний (це аналогічно доводиться).

Definition 1.7.1 Множина $A \subset C(X)$ називається **алгеброю**, якщо $\forall f, g \in A, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha f, f + g, f \cdot g \in A$$

Definition 1.7.2 Нехай $A \subset C(X)$ – алгебра.

Алгебра A **відділяє точки** множини X , якщо

$$\forall x, y \in X : x \neq y : \exists f \in A : f(x) \neq f(y)$$

Theorem 1.7.3 **Теорема Стоуна-Ваєрштраса**

Задано (X, ρ) – компактний метричний простір та $(C(X), \sigma)$ – простір неперервних дійсних функцій, заданий вище. Маємо $A \subset C(X)$. Про неї відомо, що

- 1) A – алгебра, яка відділяє точки множини X ;
 - 2) функція f , яка визначена як $f(x) = 1, \forall x \in X$, належить A .
- Тоді множина A скрізь щільна в $(C(X), \sigma)$.

Proof.

Ми хочемо довести, що $\bar{A} = C(X)$.

Нехай $f \in A$. Хочемо довести, що $|f| \in \bar{A}$. У курсі мат. аналізу ми доводили теорему Ваєрштраса про наближення функції многочленом. Зокрема для функції $g(t) = \sqrt{t}, t \in [0, 1]$ маємо, що $\forall \varepsilon > 0 : \exists P_\varepsilon$ – многочлен від $t : |\sqrt{t} - P_\varepsilon(t)| < \varepsilon$. Тоді $\forall x \in X$:

$$\left| \frac{|f(x)|}{\|f\|} - P_\varepsilon \left(\frac{f^2(x)}{\|f\|^2} \right) \right| = \left| \sqrt{\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2}} - P_\varepsilon \left(\frac{f^2(x)}{\|f\|^2} \right) \right| < \varepsilon.$$

Оскільки $f \in A$, то в силу алгебри $\frac{f^2}{\|f\|} \in A$. Оскільки P_ε – многочлен, то $P_\varepsilon \circ \frac{f^2}{\|f\|} \in A$. Ми знайшли

$$P_\varepsilon \circ \frac{f^2}{\|f\|^2} \in A, \text{ для якої } \left\| \frac{|f|}{\|f\|} - P_\varepsilon \circ \frac{f^2}{\|f\|^2} \right\| < \varepsilon. \text{ Отже, } \frac{|f|}{\|f\|} - \text{гранична точка, тобто } \frac{|f|}{\|f\|} \in \bar{A}.$$

Відомо знову з мат. аналізу, що для всіх $a, b \in \mathbb{R}$ ми маємо такі рівності:

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \quad \min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

Значить, маючи $f, g \in A$ та маючи результат вище, отримаємо $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \bar{A}$.

Оберемо $x, y \in X$ так, що $x \neq y$. Тоді існує функція $g \in A$, для якої $g(x) \neq g(y)$. Далі покладемо нову функцію $f(z) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}(g(z) - g(x)), z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді звідси $f \in A$ (ми тут користуємося пунктом 2), щоб це показати, причому $f(x) = \alpha, f(y) = \beta$.

Отже, що ми довели щойно: $\forall x, y \in X : x \neq y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \exists f \in A : f(x) = \alpha, f(y) = \beta$.

Нехай $f \in C(X)$ та $\varepsilon > 0$. Зафіксуємо $x \in X$, для $z \in X$ покладемо $\alpha = f(x), \beta = f(z)$. Тоді за щойно доведеним, існує $h_z \in A$, для якої $h_z(x) = \alpha = f(x)$ та $h_z(z) = \beta = f(z)$.

Оскільки $h_z - f \in C(X)$, то за означенням, $\exists \delta_z > 0 : \forall y \in B(z, \delta_z) : h_z(y) - f(y) < \varepsilon$. Сім'я множин $\{B(z, \delta_z) \mid z \in X\}$ – відкрите покриття компактної множини X . Отже, ми можемо взяти скінченне підпокриття $\{B(z_k, \delta_{z_k}) \mid k = \overline{1, n}\}$.

Визначимо функцію $g_x(y) = \min_{1 \leq k \leq n} \{h_{z_k}(y)\}, y \in X$. Зауважимо, що по-перше, $g_x \in \bar{A}$; по-друге, $g_x(x) = f(x)$; по-третє, $\forall y \in X : g_x(y) - f(y) < \varepsilon$.

Оскільки $g_x - f \in C(X)$, то за означенням, $\exists \delta_x > 0 : \forall y \in B(x, \delta_x) : g_x(y) - f(y) > -\varepsilon$. Сім'я множин $\{B(x, \delta_x) \mid x \in X\}$ – відкрите покриття компактної множини X . Отже ми можемо взяти скінченне підпокриття $\{B(x_k, \delta_{x_k}) \mid k = \overline{1, m}\}$.

Визначимо функцію $h(y) = \max_{1 \leq k \leq m} g_{x_k}(y), y \in X$. Тоді $h \in \bar{A}$, причому також $\forall y \in X :$

$f(y) - \varepsilon \leq h(y) \leq f(y) + \varepsilon$. Для будь-якої функції $f \in C(X)$ ми знайшли $h \in A$, для якої $\|h - f\| < \varepsilon$.
Отже, $\bar{A} = C(X)$. ■

2 Початок функціонального аналізу

2.1 Обмежені та неперервні лінійні оператори

Definition 2.1.1 Задано $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ – нормовані простори. Лінійний оператор $A: X \rightarrow Y$ називають **обмеженим**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall x \in X : \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$$

Надалі ми ці норми розрізняти не будемо, бо буде з контексту зрозуміло.

Remark 2.1.2 Маємо обмежений оператор A . Зауважимо, що множина всіх констант, які обмежують оператор, тобто множина $\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$, буде непорожньою (можна взяти $C = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} > 0$) та обмеженою знизу числом 0. Значить, існує $\inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$.

Definition 2.1.3 Задано X, Y – нормовані простори. operators **Нормою** лінійного оператора A називається величина

$$\|A\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$$

Remark 2.1.4 Зауважимо, що для всіх $x \in X$ виконується $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Дійсно, для кожного $\varepsilon > 0$ існує стала $C_\varepsilon > 0$, для якої $C_\varepsilon < \|A\| + \varepsilon$. Тож для всіх $x \in X$ справедлива нерівність $\|Ax\| \leq C_\varepsilon\|x\| < (\|A\| + \varepsilon)\|x\|$. Тому ця нерівність виконуватиметься також при $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$. Таким чином, $\|A\| \in \{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$, тобто інфімум досягається. Отже, норма $\|A\|$ – це найменше число, що обмежує лінійний оператор A .

Theorem 2.1.5 Задано X, Y – нормовані простори та $A: X \rightarrow Y$ – обмежений оператор. Тоді

$$\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Proof.

Спочатку доведемо, що $\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Уже відомо, що $\forall x \in X : \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, тоді звідси

$\forall x \in X \setminus \{0\} : \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$, таким чином $\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$. Залишилося довести, що строга нерівність не допускається.

Припустимо, що $\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \|A\|$, тобто існує $\varepsilon > 0$, для якого $\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\| - \varepsilon$. Тоді

звідси випливає, що $\forall x \in X \setminus \{0\} : \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| - \varepsilon \implies \forall x \in X : \|Ax\| \leq (\|A\| - \varepsilon)\|x\|$. Таким чином, $\|A\| - \varepsilon$ – це константа, яка обмежує оператор, тоді за означенням норми, $\|A\| - \varepsilon \geq \|A\|$ – суперечність!

Отже, ми довели рівність, тобто $\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. ■

Theorem 2.1.6 Задано X, Y – нормовані простори та $A: X \rightarrow Y$ – обмежений оператор. Тоді

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Proof.

Ми доведемо ось такий ланцюг нерівностей: $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Оберемо такий $x \neq 0$, щоб $\|x\| \leq 1$. Тоді виконується нерівність $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \|Ax\|$. Таким чином,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Зрозуміло, що виконується нерівність $\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$.

Залишилося довести, що $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Дана нерівність є наслідком того, що для кожного

$x \neq 0$ число $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|$ належить множині $\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$. ■

Example 2.1.7 Задано лінійний оператор $A: l_2 \rightarrow l_2$ таким чином: $A(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Довести, що A – обмежений оператор та знайду норму.

Згадаємо, що норма $\|(x_1, x_2, \dots)\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots}$. Оцінимо оператор:

$$\|A(x_1, x_2, \dots)\| = \|(x_2, x_3, \dots)\| = \sqrt{|x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} \leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} = 1 \cdot \|(x_1, x_2, \dots)\|.$$

Отже, A – обмежений оператор, бо знайшли константу $C = 1$, що обмежує.

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|(x_1, x_2, \dots)\|=1} \|A(x_1, x_2, \dots)\| = \sup_{\|(x_1, x_2, \dots)\|=1} \|(x_2, x_3, \dots)\| = \sup_{\|(x_1, x_2, \dots)\|=1} \sqrt{|x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} = \\ &= \sup_{\|(x_1, x_2, \dots)\|=1} \sqrt{1 - |x_1|^2} = 1. \end{aligned}$$

Example 2.1.8 Задано лінійний оператор $A: C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, таким чином: $(Ax)(t) = \int_0^t \tau x(\tau) d\tau$.

Довести, що A – обмежений оператор та знайти норму.

Конкретно в цьому випадку розглядатиметься норма $\|f\| = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t \tau x(\tau) d\tau \right| \leq \max_{t \in [0, 1]} \int_0^t |\tau| |x(\tau)| d\tau = \int_0^1 |\tau| |x(\tau)| d\tau \leq \int_0^1 |\tau| \max_{\tau \in [0, 1]} |x(\tau)| d\tau = \\ &= \int_0^1 \tau \|x\| d\tau = \|x\| \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \|x\|. \end{aligned}$$

Отже, A – обмежений оператор. Залишилося знайти норму.

Оскільки $\|Ax\| \leq \frac{1}{2} \|x\|$, то звідси випливає $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \frac{1}{2}$. Із іншого боку, оберемо функцію

$$x(t) = 1, \text{ для якої } \|x\| = 1. \text{ Тоді отримаємо, що } \|Ax\| = \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t \tau d\tau \right| = \max_{t \in [0, 1]} \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, отримаємо $\|A\| = \frac{1}{2}$.

Proposition 2.1.9 Задано X, Y – нормовані простори та $\dim X < \infty$ та $A: X \rightarrow Y$ – лінійний оператор. Тоді A – обмежений.

Внаслідок цього, всі оператори між скінченновимірними векторними просторами – обмежені.

Proof.

Дійсно, нехай $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис X , нехай на неї стоїть норма $\|x\|_2$, тоді маємо наступне:

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \|A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\| = \|x_1 A e_1 + \dots + x_n A e_n\| \leq |x_1| \|A e_1\| + \dots + |x_n| \|A e_n\| \leq \\ &\leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \sqrt{\|A e_1\|^2 + \dots + \|A e_n\|^2} = C \|x\|_2. \end{aligned}$$

Якби була би інша норма $\|\cdot\|$, то вона еквівалентна $\|\cdot\|_2$, а тому обмеженість зберігається. ■

Theorem 2.1.10 Задано X, Y – нормовані простори та $A: X \rightarrow Y$ – лінійний оператор.

A – обмежений $\iff A$ – неперервний в точці 0.

Proof.

\Rightarrow Дано: A – обмежений. Оберемо послідовність $\{x_n\} \subset X$ так, щоб $x_n \rightarrow 0$. Звідси отримаємо $\|Ax_n - A0\| = \|Ax_n\| \leq \|A\| \|x_n\| \rightarrow 0$. Отже, $Ax_n \rightarrow A0$ при $n \rightarrow \infty$, що підтверджує неперервність.

\Leftarrow Дано: A – неперервний в точці 0.

Припустимо, що A – необмежений оператор. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує точка $x_n \in X$, для якої

$$\|Ax_n\| > n \|x_n\| \text{ (ясно, що } x_n \neq 0 \text{)}. \text{ Таким чином, } \left\| \frac{Ax_n}{\|x_n\|} \right\| = \left\| A \left(\frac{x_n}{\|x_n\|} \right) \right\| > n. \text{ Для зручності позначу}$$

$$w_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \in X, \text{ тобто ми вже маємо } \|Aw_n\| > n. \text{ Оскільки відображення } A \text{ – неперервне в нулі, то}$$

для послідовності $\left\{ \frac{1}{n} w_n, n \geq 1 \right\}$, для якої $\frac{1}{n} w_n \rightarrow 0$ виконується $A \frac{w_n}{n} \rightarrow A0 = 0$ – суперечність в силу нерівності! Бо в нас $\left\| A \frac{w_n}{n} \right\| > 1$. ■

Remark 2.1.11 Насправді, A – неперервний в точці 0 $\iff A$ – неперервний на X .

Сторона \Leftarrow зрозуміла. По стороні \Rightarrow маємо $x_0 \in X$ та припустимо, що $\{x_n\}$ – довільна послідовність, де $x_n \rightarrow x_0$. Тоді цілком зрозуміло, що $x_n - x_0 \rightarrow 0$, але за неперервністю в нулі, маємо $A(x_n - x_0) = Ax_n - Ax_0 \rightarrow A0 = 0$. Таким чином, $Ax_n \rightarrow Ax_0$.

Theorem 2.1.12 Множина $\mathcal{B}(X, Y)$ – множина всіх обмежених лінійних операторів – буде підпростором $\mathcal{L}(X, Y)$, а також буде нормованим простором із заданою нормою за означенням вище.

Proof.

Дійсно, нехай $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$, тобто вони обмежені. Хочемо довести, що $A + B, \alpha A \in \mathcal{B}(X, Y)$, тобто вони теж обмежені. Дійсно, справедливі наступні оцінки:

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|.$$

$$\|(\alpha A)x\| = |\alpha|\|Ax\| \leq |\alpha|\|A\|\|x\|.$$

Отже, дійсно $A + B, \alpha A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Тепер доведемо, що вищезгадана норма лінійного обмеженого оператора – дійсно норма.

$\|A\| \geq 0$ – зрозуміло. Також якщо $\|A\| = 0$, то звідси $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| = 0$, тобто $Ax = 0$, причому для всіх $x \in X$; або $A = O$. Навпаки, якщо $A = O$, тобто $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \{0\} = 0$.

Ми вже маємо оцінку $\|\alpha Ax\| \leq |\alpha|\|A\|\|x\|$ при всіх $x \in X$, тому й при всіх x з умовою $\|x\| = 1$. Таким чином, $\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| \leq |\alpha|\|A\|$. Із цієї оцінки випливає, що $\|A\| = \|\alpha^{-1}\alpha A\| \leq |\alpha^{-1}|\|A\| \implies$

$$\|A\| \geq |\alpha|\|A\|. \text{ Таким чином, } \|A\| = |\alpha|\|A\| \text{ (у тому числі при } \alpha = 0).$$

Ми вже маємо оцінку $\|(A + B)x\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$ при всіх $x \in X$, тому й при всіх x з умовою $\|x\| = 1$. Таким чином, $\|A + B\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A + B)x\| \leq \|A\| + \|B\|$ – третя властивість норми. ■

Theorem 2.1.13 Простір $\mathcal{B}(X, Y)$ буде повним, якщо Y – повний.

Proof.

Нехай $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ – фундаментальна послідовність. Зауважимо, що $\{A_n x, n \geq 1\} \subset Y$ – фундаментальна також при всіх $x \in X$. Із фундаментальності $\{A_n\}$ маємо, що $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|A_n - A_m\| < \varepsilon$, але тоді $\forall x \in X : \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$, звідси й випливає фундаментальність.

Тоді при кожному $x \in X$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = z_x$. Ми можемо визначити як раз новий оператор $A : X \rightarrow Y$, де $x \mapsto z_x$ (границя єдина, тому визначення адекватне). Залишилися три етапи доведення.

I. *Лінійність.* Дійсно, нехай $x, y \in X$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді маємо

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} A_n y = \alpha Ax + \beta Ay.$$

II. *Обмеженість.* Оскільки $\{A_n\}$ – фундаментальна, то $\{A_n\}$ – обмежена: $\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|A_n\| \leq C$. Тоді в силу неперервності норми матимемо $\|Ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq C\|x\|$.

III. $A_n \rightarrow A$. Згадаємо нерівність $\|(A_n - A_m)x\| < \varepsilon\|x\|$ при всіх $x \in X$, при всіх $\varepsilon > 0$ та $n, m \geq N$. Спрямуємо $m \rightarrow \infty$, тоді отримаємо $\|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon\|x\|$, тому й $\|A_n - A\| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$. ■

2.2 Продовження неперервних операторів

Задані X, Y – нормовані простори, $X_0 \subset X$ та $A : X_0 \rightarrow Y$ – обмежений оператор. Питання полягає в тому, чи існує розширення $\tilde{A} : X \rightarrow Y$ таким чином, що $\tilde{A}|_{X_0} = A$. Причому нас буде цікавити таке розширення, що $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Remark 2.2.1 Просто якщо таке розширення допустиме, то звідси $\|\tilde{A}\| \geq \|A\|$. Дійсно,

$$\|\tilde{A}\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|\tilde{A}x\|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{\|\tilde{A}x\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Proposition 2.2.2 Задані X, Y – відповідно нормований та банахів простори та $X_0 \subset X$ – щільний підпростір. Тоді для кожного обмеженого оператора $A : X_0 \rightarrow Y$ існує єдиний розширений обмежений оператор $\tilde{A} : X \rightarrow Y$, для якого $\tilde{A}|_{X_0} = A$ та при цьому $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Proof.

Нехай $\{x_n\} \subset X_0$, де $x_n \rightarrow x \in X$. Зауважимо, що тоді в цьому випадку $\{Ax_n\}$ – фундаментальна. У силу банаховості $\{Ax_n\}$ буде збіжним. Тож визначимо оператор $\tilde{A}x = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$.

I. \tilde{A} визначений коректно.

Нехай $\{x_n\}, \{y_n\}$, для яких $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$. Значить, тоді

$$\|Ax_n - Ay_n\| = \|A(x_n - y_n)\| \leq \|A\|\|x_n - y_n\| \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ay_n.$$

II. \tilde{A} розширює оператор A .

Справді, нехай $x \in X_0$. Оберемо стаціонарну послідовність $\{x\} \subset X_0$, де $x \rightarrow x$. Тоді $\tilde{A}x = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax =$

Ax . Отже, звідси $\tilde{A}|_{X_0} = A$.

III. \tilde{A} лінійний оператор.

Нехай $x, y \in E$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді звідси

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} A x_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} A y_n = \alpha A x + \beta A y.$$

IV. $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Оберемо $X_0 \ni x_n \rightarrow x \in X$. Оскільки A – обмежений, то $\|A x_n\| \leq \|A\| \|x_n\|$. Спрямовуючи $n \rightarrow \infty$, ми отримаємо $\|A x\| \leq \|A\| \|x\|$. Автоматично довели, що A – обмежений оператор. Раз це виконується для всіх $x \in E$, то отримаємо $\|\tilde{A}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\tilde{A}x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A\| \|x\| = \|A\|$. Тобто звідси $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$.

Зважаючи на зауваження вище, маємо $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

V. \tilde{A} – єдине розширення.

Припустимо, що існує інший оператор $\tilde{\tilde{A}}$, яке також є розширенням A з усіма умовами, що задані в твердженні. Маємо $x \in X$, тож існує послідовність $\{x_n\} \subset X_0, x_n \rightarrow x$. Тоді

$$\tilde{\tilde{A}}x \stackrel{\tilde{\tilde{A}} \text{ – обмежений}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{A}}x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A x_n \stackrel{\text{def. } \tilde{A}}{=} \tilde{A}x. \text{ Суперечність!} \quad \blacksquare$$

Theorem 2.2.3 Теорема Гана-Банаха

Задано E – нормований простір та $G \subset E$ – підпростір. Тоді для кожного обмеженого функціонала $l: G \rightarrow \mathbb{R}$ існує продовження $\tilde{l}: E \rightarrow \mathbb{R}$ так, що $\tilde{l}|_G = l$, $\|\tilde{l}\| = \|l\|$.

Proof.

1. Обмежимося випадком, коли E – дійсний та сепарабельний простір.

I. Доведемо, що l можна продовжити на деякий підпростір $E \supset F \supsetneq G$.

Нехай G – підпростір E та $G \neq E$. Зафіксуємо $y \notin G$ та розглянемо підпростір $F = \text{span}\{G \cup \{y\}\}$. Тобто кожний елемент $x \in F$ записується як $x = g + \lambda y$ при $g \in G, \lambda \in \mathbb{R}$. Визначимо оператор $\tilde{l}(x) = l(g) + \lambda c$, де $c = \tilde{l}(y)$. За побудовою, такий оператор – лінійний.

Тепер залишилося підібрати таке $c \in \mathbb{R}$, щоб виконувалося $\|\tilde{l}\| = \|l\|$ – тим самим ми й обмеженість доведемо автоматично. Але згідно зі зауваження, нам треба підібрати $c \in \mathbb{R}$, щоб $\|\tilde{l}\| \leq \|l\|$.

Обмежимося поки що $\lambda > 0$. Нехай зафіксовано $h_1, h_2 \in G$ та зауважимо, що справедлива нерівність:

$$l(h_2) - l(h_1) = l(h_2 - h_1) \leq |l(h_2 - h_1)| \leq \|l\| \|h_2 - h_1\| = \|h\| \|(h_2 + y) - (y + h_1)\| \leq \|l\| \|h_1 + y\| + \|l\| \|h_2 + y\|.$$

Звідси випливає, що $-\|l\| \|h_1 + y\| - l(h_1) \leq \|l\| \|h_2 + y\| - l(h_2)$.

$$\text{Оскільки це } \forall h_1, h_2 \in G, \text{ то тоді } \sup_{h_1 \in G} (-\|l\| \|h_1 + y\| - l(h_1)) \leq \inf_{h_2 \in G} (\|l\| \|h_2 + y\| - l(h_2)).$$

Для зручності супремум позначу за a_1 та інфімум за a_2 . Оберемо число $c \in \mathbb{R}$ так, щоб $a_1 \leq c \leq a_2$.

Звідси справедлива така нерівність:

$$\forall h \in G: -\|l\| \|h + y\| - l(h) \leq c \leq \|l\| \|h + y\| - l(h).$$

Тепер покладемо елемент $h = \lambda^{-1}g$ та домножимо обидві частини нерівності на λ . Оскільки ми домовилися $\lambda > 0$, то знаки нерівностей зберігаються. Коротше, отримаємо:

$$-\|l\| \|g + \lambda y\| - l(g) \leq \lambda c \leq \|l\| \|g + \lambda y\| - l(g).$$

$$-\|l\| \|g + \lambda y\| \leq l(g) + \lambda c \leq \|l\| \|g + \lambda y\|.$$

$$|\tilde{l}(x)| = |l(g) + \lambda c| \leq \|l\| \|g + \lambda y\| = \|l\| \|x\|.$$

Власне, далі аналогічними міркуваннями (як в попередньому твердженні) отримаємо $\|\tilde{l}\| \leq \|l\|$.

Тепер що робити при $\lambda < 0$. Перепишемо $x = -(-g + (-\lambda)y)$. У нас тепер $-\lambda > 0$ та $-x = t = -g + (-\lambda)y$, звідси отримаємо

$$|\tilde{l}(t)| \leq \|l\| \|t\| \implies |\tilde{l}(x)| \leq \|l\| \|x\|.$$

II. Тепер доведемо, що продовження на нашому конкретному E існує.

Оскільки E – сепарабельний, то існує (ми оберемо зліченну) множина $A = \{x_1, x_2, \dots\}$, яка є щільною підмножиною E . Також ми досі маємо $G \subset E$ – підпростір.

Позначимо $x_{n_1} \in A$ – перший з елементів, де $x_{n_1} \notin G$. За кроком I, існує l_1 – продовження l на $G_1 = \text{span}\{G \cup \{x_{n_1}\}\}$.

Позначимо $x_{n_2} \in A$ – перший з елементів, де $x_{n_2} \notin G_1$. За кроком I, існує l_2 – продовження l_1 на $G_2 = \text{span}\{G_1 \cup \{x_{n_2}\}\}$.

\vdots

Отримаємо ланцюг підпросторів $G \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots$ та набір функціоналів l_1, l_2, \dots , для яких:

$$\forall n \geq 1: \quad l_n: G_n \rightarrow \mathbb{R} \text{ – обмежена;} \quad l_n|_G = l; \quad \|l_n\| = \|l\|.$$

Покладемо множину $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, яка є лінійною. Визначимо функціонал $L_0: M \rightarrow \mathbb{R}$ таким чином:
 $x \in M \implies x \in G_N \implies L_0(x) = l_N(x)$. Зрозуміло цілком, що L_0 – лінійний, а також $\|L_0\| = \|l\|$.
Оскільки $M \supset A$ та A всюди щільна, то M – всюди щільна. Отже, за попереднім твердженням, існує продовження $L: E \rightarrow \mathbb{R}$, для якого $\|L\| = \|L_0\| = \|l\|$.
Висновок: ми довели теорему Гана-Банаха для випадку, коли E – дійсний сепарабельний.

2. Тепер будемо доводити теорему для E – довільний дійсний нормований простір. Все ще $G \subset E$. Позначимо за l_p – продовження l зі збереженням норми на множині $P \supset G$. Таке продовження існує див (1. та I.). Позначимо X – множина всіх таких продовжень. На ній введемо відношення \preceq таким чином:

$$l_p \preceq l_q \iff P \subset Q \text{ та } l_q(x) = l_p(x), \forall x \in P.$$

Зрозуміло, що \preceq задає відношення порядку, внаслідок чого X – частково впорядкована. Зафіксуємо $Y = \{l_{P_\alpha} \mid \alpha \in A\}$ – будь-яку лінійно впорядковану підмножину X . Знайдемо верхню грань.

Для цього покладемо $P_* = \bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha$ та на множині P_* задамо функціонал l_* таким чином:

$$x \in P_* \implies x \in P_{\alpha_0} \implies l_*(x) = l_{\alpha_0}(x).$$

Зрозуміло, що l_* – лінійний, причому $\|l_*\| = \|l\|$. На множині \bar{P}_* продовжимо функціонал, як було в твердженні – отримаємо функціонал $l_{\bar{P}_*}$, причому $\|l_{\bar{P}_*}\| = \|l_*\| = \|l\|$. Даний функціонал $l_{\bar{P}_*}$ на \bar{P}_* буде верхньою гранню Y . Отже, за лемою Цорна, існує максимальний елемент X . Це буде функціонал L , який визначений на E (у протилежному випадку його можна було би ще продовжити та він не був би максимальним елементом).

Висновок: ми довели теорему Гана-Банаха для випадку, коли E – дійсний (не обов'язково сепарабельний) нормований простір. ■

Насправді, на цьому теорема Гана-Банаха ще не закінчена. Ми можемо її довести на випадок, коли нормований простір E – комплексний. Спершу кілька деталей.

Нехай E – комплексний лінійний нормований простір. Розглянемо одночасно $E_{\mathbb{R}}$ – асоційований з E дійсний нормований простір; тобто під час множення на скаляр ми допускаємо лише дійсні коефіцієнти. Зауважимо, що $E_{\mathbb{R}} = E$ як множини, утім не як простори.

Розглянемо довільний функціонал $l: E \rightarrow \mathbb{C}$. Раз $l(x) \in \mathbb{C}$, то для кожного $x \in E$ можна записати функціонал як $l(x) = m(x) + in(x)$. У цьому випадку $m(x) = \operatorname{Re} l(x)$, $n(x) = \operatorname{Im} l(x)$.

Proposition 2.2.4 Нехай $l: E \rightarrow \mathbb{C}$ – лінійний та обмежений функціонал. Тоді $m, n: E_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ задають лінійний обмежений функціонал.

Proof.

Нехай $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ та $x, y \in E$. Тоді ми отримаємо наступне:

$$l(\alpha x + \beta y) = m(\alpha x + \beta y) + in(\alpha x + \beta y) \quad (\text{з одного боку})$$

$$l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y) = \alpha(m(x) + in(x)) + \beta(m(y) + in(y)) = (\alpha m(x) + \beta m(y)) + i(\alpha n(x) + \beta n(y)) \quad (\text{з іншого боку}).$$

Знаючи, що комплексне число рівне тоді й лише тоді, коли дійсні та уявні частини збігаються, отримаємо

$$m(\alpha x + \beta y) = \alpha m(x) + \beta m(y) \quad n(\alpha x + \beta y) = \alpha n(x) + \beta n(y).$$

Отже, m, n – лінійний функціонали.

Обмеженість m (аналогічно з n) впливає з такою ланцюгом нерівностей:

$$|m(x)| \leq |m(x) + in(x)| = |l(x)| \leq \|l\| \|x\|. \quad \blacksquare$$

Proposition 2.2.5 $n(x) = -m(ix)$.

Іншими словами, ми можемо функціонал l відновити повністю, знаючи функціонал m .

Proof.

$$m(ix) + in(ix) = l(ix) = il(x) = i(m(x) + in(x)) = -n(x) + im(x).$$

$$\implies n(x) = -m(ix).$$

$$l(x) = m(x) - im(ix). \quad \blacksquare$$

Повернімось назад до теореми Гана-Банаха. Доб'ємо її на випадок, коли E – комплексний нормований простір.

Proof.

Маємо $E \supset G$ – два комплексних простори та $E_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{R}}$ – асоційовані простори. Маємо функціонал $l: G \rightarrow \mathbb{C}$, який визначається дійсним функціоналом $m: G_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$. Оскільки це дійсний функціонал, ми можемо продовжити до $M: E_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ зі збереженням норми.

Покладемо $L(x) = M(x) - iM(ix)$. Неважко буде довести, що L – комплексний лінійний функціонал. Залишилося довести, що $\|L\| = \|l\|$. Знову ж таки, достатньо довести $\|L\| \leq \|l\|$. Запишемо $L(x) = |L(x)|e^{i\varphi}$, де $\varphi = \arg L(x)$. Тоді

$$|L(x)| = e^{-i\varphi} L(x) = L(e^{-i\varphi} x) = M(e^{-i\varphi} x) = |M(e^{-i\varphi} x)| \leq \|M\| \|e^{-i\varphi} x\| = \|m\| \|x\| \leq \|l\| \|x\|.$$

Отже, $\|L\| \leq \|l\|$. Ми тут юзали той факт, що $L(y) = M(y)$ при $L(y) \in \mathbb{R}$. ■

Remark 2.2.6 Зауважимо, що якщо G – лінійна множина (але не підпростір), то теорема Гана-Банаха все одно виконується.

У цьому випадку \bar{G} буде підпростором E . Функціонал l продовжується неперервним чином на \bar{G} , а далі застосовується доведена теорема.

Твердження, які потім вставляю в необхідне місце

Proof.

Достатньо довести, що всі норми еквівалентні до $\|\cdot\|_2$.

Нехай $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d\}$ – стандартний базис \mathbb{R}^d , тоді звідси $\vec{x} = \sum_{i=1}^d x_i \vec{e}_i$.

$$\left\| \sum_{i=1}^d x_i \vec{e}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^d \|x_i \vec{e}_i\| = \sum_{i=1}^d |x_i| \|\vec{e}_i\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^d |x_i| \|\vec{e}_i\| \right)^2} \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^d \|e_i\|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^d |x_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d \|e_i\|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^d \|e_i\|^2} \|\vec{x}\|_2 = M \|\vec{x}\|_2.$$

Зауважимо, що $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ та не залежить від \vec{x} . Отже, $\|\vec{x}\| \leq M \|\vec{x}\|_2$.

Розглянемо тепер S – одинична сфера на $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. Відомо, що S – замкнена множина та обмежена. Тож за лемою Гейне-Бореля, S – компактна множина. Відомо, що відображення $\|\cdot\|: S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ – неперервне відображення, тож вона досягає найменшого значення m для деякого $\vec{y} \in S$.

Припустимо $m = 0$, тоді звідси $\|\vec{y}\| = 0 \implies \vec{y} = \vec{0} \implies \vec{y} \notin S$ – неможливо. Отже, $m > 0$.

Значить, $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^d: \|\vec{y}\|_2 = 1: \|\vec{y}\| \geq m$. Треба довести те саме для інших векторів.

Якщо $\vec{x} = \vec{0}$, то це виконано. Тому $\vec{x} \neq \vec{0}$. Покладемо вектор $\vec{y} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2}$, причому $\|\vec{y}\|_2 = 1$. Із цього випливає, що $\|\vec{y}\| \geq m \implies m \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|$.

Всі інші норми будуть еквівалентними в силу транзитивності. ■

Definition 2.2.7 Задано X, Y – нормовані простори.

Вони називаються **ізоморфними**, якщо існує бієктивний лінійний оператор $A: X \rightarrow Y$, для якого

$$\forall x \in X: \|Ax\|_Y = \|x\|_X$$

Водночас такий оператор A називають **ізоморфізмом**.

Позначення: $X \cong Y$