Зміст

1 Метричні простори та інше

1.1 Означення метричних просторів

Definition 1.1.1 Задано X – множина та $\rho\colon X \to X \to \mathbb{R}$ – функція.
Функція ρ називається **метрикою**, якщо вона задовольняє таким властивостям:

$$1)\ \forall x,y \in X: \rho(x,y) \geq 0, \qquad \rho(x,y) = 0 \iff x = y$$
$$2)\ \forall x,y \in X: \rho(x,y) = \rho(y,x)$$
$$3)\ \forall x,y,z \in X: \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

Метрика описує **відстань** між елементами x, y.
Пара (X, ρ) з метрикою називається **метричним простором**.

Example 1.1.2 Розглянемо декілька прикладів:
1) $X = \mathbb{R}, \qquad \rho(x,y) = |x-y|$;
2) $X = \mathbb{R}^n$, можна задати дві метрики:
$\rho_1(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}, \qquad \rho_2(\vec{x},\vec{y}) = |x_1-y_1| + \dots + |x_n-y_n|$;
3) $X = C([a,b]), \qquad \rho(f,g) = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$.

Example 1.1.3 Окремо розгляну даний приклад. Нехай X – будь-яка множина, ми визначимо так звану **дискретну метрику** $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$. Тоді (X, d) задає **дикретний** метричний простір.

Example 1.1.4 Розглянемо $X = \mathbb{N}$ та функцію $\rho(m,n) = 1 + \dfrac{1}{m+n}$ при $m \neq n$, інакше $\rho(m,n) = 0$.
Доведемо, що ρ задає метрику.
1) $\rho(m,n) \geq 0$ – це зрозуміло, також $\rho(m,n) = 0 \iff m = n$ за визначенням функції;
2) $\rho(n,m) = 1 + \dfrac{1}{n+m} = 1 + \dfrac{1}{m+n} = \rho(m,n)$;
3) Тут ситуація менш приємна, ми хочемо $\rho(m,n) \leq \rho(m,k) + \rho(k,n)$. Спочатку розглянемо випадки, коли m,n,k попарно не рівні. Зауважимо, що справедлива нерівність при $m,n,k \in \mathbb{N}$:
$\dfrac{1}{m+n} \leq 1 + \dfrac{1}{m+k} + \dfrac{1}{k+n}$.
Якщо додати до обох частей нерівності 1, то ми отримаємо:
$\rho(m,n) = 1 + \dfrac{1}{m+n} \leq 1 + 1 + \dfrac{1}{m+k} + \dfrac{1}{k+n} = 1 + \dfrac{1}{m+k} + 1 + \dfrac{1}{k+n} = \rho(m,k) + \rho(k,n)$.
Отже, $(\mathbb{N}, \rho)$ задає метричний простір.

Definition 1.1.5 Задано (X, ρ) – метричний простір.
Пару $(Y, \tilde{\rho})$, де $Y \subset X$, назвемо **метричним підпростором** (X, ρ), якщо

$$\forall x,y \in Y: \tilde{\rho}(x,y) = \rho(x,y).$$

При цьому метрика $\tilde{\rho}$, кажуть, **індукована в Y метрикою** ρ.

Proposition 1.1.6 Задано (X, ρ) – метричний простір та $(Y, \tilde{\rho})$ – підпростір. Для функції $\tilde{\rho}$ всі три аксіоми зберігаються. Тобто $(Y, \tilde{\rho})$ залишається метричним простором.
Вправа: довести.

Example 1.1.7 Маємо $X = F([a,b])$ – множину обмежених функцій та $\rho(f,g) = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$.
Тоді в $Y = C([a,b])$ маємо метрику $\tilde{\rho}(f,g) = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$. Отже, $C([a,b])$ – метричний підпростір простору $F([a,b])$.

1.2 Відкриті та замкнені множини. Збіжні послідовності

Definition 1.2.1 Задано (X, ρ) – метричний простір та $a \in X$.
Відкритою кулею радіусом r з центром a називають таку множину:

$$B(a; r) = \{x \in X \mid \rho(a,x) < r\}$$

Її ще називають r**-околом точки** a.
Замкненою кулею радіусом r **з центром** a називають таку множину:

$$B[a;r] = \{x \in X \mid \rho(a,x) \leq r\}$$

Example 1.2.2 Розглянемо декілька прикладів:
1) $X = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x-y|$, $\qquad B(a;r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$;
2) $X = \mathbb{R}^2$, $\rho(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$, $\qquad B(0;1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$.

Definition 1.2.3 Задані (X,ρ) – метричний простір, $A \subset X$ та $a \in A$.
Точка a називається **внутрішньою** для A, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : B(a;\varepsilon) \subset A.$$

Definition 1.2.4 Задані (X,ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **відкритою**, якщо

кожна точка множини A – внутрішня.

Example 1.2.5 Розглянемо такі приклади:

1) Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|$ та множину $A = [0,1)$. Точка $a = \dfrac{1}{2}$ – внутрішня, оскільки $\exists \varepsilon = \dfrac{1}{4} : B\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right) \subset A$, тобто $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right) \subset [0,1)$. Водночас точка $a = 0$ – не внутрішня. Отже, A – не відркита, бо знайшли не внутрішню точку.

2) Маємо $X = [0,1], \rho(x,y) = |x-y|$ та множину $A = [0,1)$. У цьому випадку точка $a = 0$ уже внутрішня (в попередньому прикладі ми могли ε-околом вийти за межі нуля ліворуч, а тут вже ні). Тут A тепер відкрита.

3) Маємо $X = \{0,1,2\}$ – підпростір метричного простору $(\mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|)$. Задамо множину $A = \{0,1\}$. Тут кожна точка – внутрішня. Отже, A – відкрита.

Definition 1.2.6 Задані (X,ρ) – метричний простір, $A \subset X$ та $x_0 \in X$.
Точка x_0 називається **граничною** для A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : (B(x_0;\varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

Інколи ще множину $B(x_0;\varepsilon) \setminus \{x_0\} \overset{\text{позн.}}{=} \mathring{B}(x_0;\varepsilon)$ називають **проколеним околом точки** x_0.

Definition 1.2.7 Задані (X,ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **замкненою**, якщо

вона містить всі свої граничні точки

Example 1.2.8 Розглянемо такі приклади:

1) Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|$ та множину $A = (0,1)$. Точки $x_0 \in \left\{\dfrac{1}{2}, 0, 1\right\}$ – граничні. Водночас точка $x_0 = \dfrac{3}{2}$ – не гранична. Отже, A – не замкнена, бо $x_0 = 1$ хоча й гранична для A, але $x_0 \notin A$.

2) Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|$. Задамо множину $A = \{0,1\}$. Тут жодна точка – не гранична. Тим не менш, A – замкнена. Бо нема жодної граничної точки в X для A, щоб порушити означення.

3) $X, \emptyset$ – замкнені в будь-якому метричному просторі.

Theorem 1.2.9 Задані (X,ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A – відкрита $\iff$ множина A^c – замкнена

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – відкрита.
!Припустимо, що A^c – не замкнена, тобто $\exists x_0 \in A : x_0$ – гранична для A^c, але $x_0 \notin A^c$. За умовою, оскільки $x_0 \in A$, то x_0 - внутрішня, тобто $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \subset A$. Отже, $B(x_0;\varepsilon) \cap A^c = \emptyset$ – суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A^c – замкнена. Тоді вона містить всі граничні точки. Тоді $\forall x_0 \in A : x_0$ – не гранична для A^c, тобто $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \cap A^c = \emptyset \implies B(x_0;\varepsilon) \subset A$. Отже, x_0 – внутрішня для A, а тому A – відкрита. ■

Example 1.2.10 Розглянемо дискретний метричний простір (X, d). Покажемо, що всі множини – відкриті.

Нехай $A \subset X$, розглянемо $a \in A$. Тоді існує окіл $B\left(a; \frac{1}{2}\right) = \left\{x \in X \mid \rho(x,a) < \frac{1}{2}\right\} = \{a\} \subset A$. Це виконується для всіх $a \in A$, тому A – відкрита.

Всі множини відкриті, а тому всі множини також замкнені.

Theorem 1.2.11 Задано (X, ρ) – метричний простір. Тоді справедливе наступне:

1) Нехай $\{U_\alpha \subset X,\ \alpha \in I\}$ – (довільна) сім'я відкритих множин. Тоді $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ – відкрита множина;

2) Нехай $\{U_k \subset X, k = \overline{1,n}\}$ – (скінченна) сім'я відкритих множин. Тоді $\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ – відкрита множина;

3) $\emptyset, X$ – відкриті множини.

Proof.

Доведемо кожний пункт окремо:

1) Задано множину $U = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$. Зафіксуємо $a \in U$. Тоді $\exists \alpha_0 : a \in U_{\alpha_0} \implies a$ – внутрішня для U_{α_0} $\implies \exists \varepsilon > 0 : B(a;\varepsilon) \subset U_{\alpha_0} \subset U$. Отже, U – відкрита.

2) Задано множину $U = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$. Зафіксуємо $a \in U$. Тоді $\forall k = \overline{1,n} : a \in U_k \implies a$ – внутрішня для $U_k \implies \exists \varepsilon_k > 0 : B(a;\varepsilon_k) \subset U_k$. Задамо $\varepsilon = \min\limits_{1 \le k \le n} \varepsilon_k \implies B(a;\varepsilon) \subset U$. Отже, U – відкрита.

3) $\emptyset$ – відкрита, бо нема внутрішніх точок, тому що там порожньо. Також X – відкрита, оскільки для $a \in X$, який б $\varepsilon > 0$ не обрав, $B(a;\varepsilon) \subset X$.

Всі твердження доведені. ■

Remark 1.2.12 Нижче буде наданий приклад, чому в другому твердженні лише скінченна кількість відкритих множин.

Example 1.2.13 Розглянемо $X = \mathbb{R}$ із метрикою $\rho(x,y) = |x - y|$. Задана сім'я відкритих множин $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, причому $\forall n \ge 1$. Тоді зауважимо, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$, але така множина вже не є відкритою.

Corollary 1.2.14 Задано (X, ρ) – метричний простір. Тоді справедливо наступне:

1) Нехай $U_\alpha \subset X$, $\alpha \in I$ – сім'я замкнених множин. Тоді $\bigcap\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ – замкнена множина;

2) Нехай $U_k \subset X, k = \overline{1,n}$ – сім'я замкнених множин. Тоді $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k$ – замкнена множина;

3) $\emptyset, X$ – замкнені множини.

*Вказівка: скористатися де Морганом та **Th. 1.2.9**.*

Remark 1.2.15 Такі твердження НЕ є правдивими:

1) A – не відкрита, а тому A – замкнена (наприклад, $[0,1)$ в $\mathbb{R}$);

2) A – відкрита, а тому A – не замкнена (наприклад, $\emptyset$ в $\mathbb{R}$).

Proposition 1.2.16 Задано (X, ρ) – метричний простір, $a \in X, r > 0$. Тоді відкритий окіл $B(a;r)$ – справді відкритий; замкнений окіл $B[a;r]$ – справді замкнений.

Proof.

(про $B(a;r)$). Задамо точку $b \in B(a;r)$. Нехай $\varepsilon = r - \rho(a,b) > 0$. Тоді якщо $x \in B(b;\varepsilon)$, то тоді $\rho(x,a) \le \rho(x,b) + \rho(b,a) < \varepsilon + \rho(b,a) = r$. Отже, $B(a;r)$ – відкрита.

(про $B[a;r]$). Для цього досить довести, що $B^c[a;r] = \{x|\rho(a,x) > r\}$ – відкрита. Якщо задати $\varepsilon = \rho(a,b) - r$ для точки $b \in B(a;r)$, то аналогічними міркуваннями отримаємо, що $B^c[a;r]$ – відкрита. Отже, $B[a;r]$ – замкнена. ■

Definition 1.2.17 Задано (X, ρ) – метричний простір, послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset X$ та $x_0 \in X$. Дана послідовність називається **збіжною** до x_0, якщо

$$\rho(x_n, x_0) \to 0, n \to \infty$$

Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Theorem 1.2.18 Задано (X, ρ) – метричний простір, $A \subset X$ та $x_0 \in X$. Наступні твердження еквівалентні:
1) x_0 – гранична точка для A;
2) $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A$ – нескінченна множина;
3) $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : x_n \neq x_0 : x_n \to x_0$.

Proof.
$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Дано: x_0 – гранична для A.
!Припустимо, що $\exists \varepsilon^* > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A$ – скінченна множина, тобто маємо $x_1, \dots, x_n \in B(x_0; \varepsilon^*)$. Тоді $\rho(x_0, x_1) < \varepsilon^*, \dots, \rho(x_0, x_n)^* < \varepsilon$. Оберемо найменшу відстань та задамо $\varepsilon^*_{new} = \min\limits_{1\leq i\leq n} \rho(x_0, x_i)$. Створимо $B(x_0; \varepsilon^*_{new}) \subset B(x_0; \varepsilon)$. У новому шару жодна точка $x_1, \dots, x_n \in A$ більше сюди не потрапляє. Тоді $B((x_0; \varepsilon^*_{new}) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$ – таке неможливо через те, що x_0 – гранична точка. Суперечність!

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Дано: $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A$ – нескінченна множина. Встановимо $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$. Тоді оскільки $\forall n \geq 1 : B\left(x_0; \dfrac{1}{n}\right) \cap A$ – нескінченна, то $\forall n \geq 1 : \exists x_n \in A : \rho(x_0, x_n) < \dfrac{1}{n}$. Якщо далі $n \to \infty$, тоді $\rho(x_0, x_n) \to 0$. Остаточно, $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \neq x_0 : x_n \to x_0$.

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Дано: $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \neq x_0 : x_n \to x_0$. Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \rho(x_0, x_n) < \varepsilon$. Або, інакше кажучи, $\forall \varepsilon > 0 : x_N \in B(x_0; \varepsilon) \cap A$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : (B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$. ■

Proposition 1.2.19 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
A – замкнена $\iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A : x_n \to x_0 \implies x_0 \in A$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – замкнена. Нехай $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ така, що $x_n \to x_0$.
!Припустимо, що $x_0 \notin A$, тобто $x_0 \in X \setminus A$. Зауважимо, що тоді x_0 має бути граничною точкою A. Оскільки A – замкнена, то звідси $x_0 \in A$ – суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A : x_n \to x_0 \implies x_0 \in A$.
Нехай a – гранична точка A. Тобто існує послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A : x_n \neq a : x_n \to a$. Але тоді звідси $a \in A$. Отже, A містить всі граничні точки, тому замкнена. ■

1.3 Замикання множин. Щільність та сепарабельність

Definition 1.3.1 Задано (X, ρ) – метричний простір, $A \subset X$ та A' – множина граничних точок A. **Замиканням** множини A називають таку множину

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Часто ще позначають замикання за $\mathrm{Cl}(A)$.

Example 1.3.2 Маємо $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ та множину $A = (0, 1)$. Тоді множина $A' = [0, 1]$. Замикання $\bar{A} = A \cup A' = [0, 1]$.

Remark 1.3.3 Розглянемо зараз сукупність замкнених множин $A \subset A_\alpha \subset X$. Перетин $B = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ – також замкнена, водночас $A_\alpha \supset B \supset A$. Отже, B – найменша замкнена множина, що містить A.

Proposition 1.3.4 Задано (X, ρ) – метричний простір, $A, B \subset X$. Тоді справедливе наступне:
1) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;
2) $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$.

Proof.
Доведемо кожне твердження окремо.

1) $x_0 \in (A \cup B)' \iff x_0$ – гранична точка $A \cup B \iff \forall \varepsilon > 0 :$
$\mathring{B}(x_0;\varepsilon) \cap (A \cup B) = (\mathring{B}(x_0;\varepsilon) \cap A) \cup (\mathring{B}(x_0;\varepsilon) \cap B) \neq \emptyset \iff \left[\begin{array}{l} x_0 \text{ – гранична для } A \\ x_0 \text{ – гранична для } B \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_0 \in A' \\ x_0 \in B' \end{array}\right. \iff$
$x_0 \in A' \cup B'$.
Отже, тим довели щойно, що $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

2) $x_0 \in (A \cap B)' \iff x_0$ – гранична точка $A \cap B \iff \forall \varepsilon > 0 :$
$\mathring{B}(x_0;\varepsilon) \cap (A \cap B) = (\mathring{B}(x_0;\varepsilon) \cap A) \cap (\mathring{B}(x_0;\varepsilon) \cap B) \neq \emptyset \implies \begin{cases} x_0 \text{ – гранична для } A \\ x_0 \text{ – гранична для } B \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 \in A' \\ x_0 \in B' \end{cases} \iff$
$x_0 \in A' \cap B'$.
Отже, тим довели щойно, що $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$.

Всі твердження доведені. ■

Proposition 1.3.5 Задано (X, ρ) – метричний простір, $\bar{A}$ – замикання. Тоді спредливе наступне:
1) $\bar{A}$ – найменша замкнена множина, що містить A;
2) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\qquad \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
3) A – замкнена $\iff A = \bar{A}$.

Proof.
Доведемо кожне твердження окремо.

1) !Припустимо, що $\bar{A}$ не є найменшою замкненою, що містить A, тобто $\exists B \subset \bar{A} : B \supset A$ – замкнена.
Зафіксуємо точку $x_0 \in \bar{A}$ – гранична, тоді $x_0 \in A' \cup A$. Далі маємо два випадки:
якщо $x_0 \in A'$, то тоді $x_0 \in B$, тому що B містить всі граничні точци A;
якщо $x_0 \in A$, то тоді $x_0 \in B$.
В обох випадках $\bar{A} \subset B$. Отже, $\bar{A} = B$. Суперечність!

2) Маємо такі ланцюги рівностей та вкладень:
$\overline{A \cup B} = (A \cup B)' \cup (A \cup B) = A' \cup B' \cup A \cup B = \bar{A} \cup \bar{B}$.
$\overline{A \cap B} = (A \cap B)' \cup (A \cap B) \subset (A' \cap B') \cup (A \cap B) \subset (A \cup A') \cap (B \cup B') = \bar{A} \cap \bar{B}$.

3) Доведення в обидва боки.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – замкнена. Тоді A містить всі свої граничні точки. Так само A' містить граничні точки A. Тому $A = \bar{A}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $A = \bar{A}$. Тобто A містить всі свої граничні точки. Отже, A – замкнена.

Всі твердження доведені. ■

Example 1.3.6 У стандартному метричному просторі R Розглянемо множини $A = (0,1)$, $B = (1,2)$.
Зауважимо, що $A \cap B = \emptyset$, тож звідси випливає $\overline{A \cap B} = \emptyset$. А з іншого боку, $\bar{A} = [0,1]$, $\bar{B} = [1,2]$, а звідси $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$.
Таким чином, $\overline{A \cap B} \subsetneq \bar{A} \cap \bar{B}$.
Буквально так само $(A \cap B)' \subsetneq A' \cap B'$.

Remark 1.3.7 У загальному випадку $\overline{B(x;r)} \neq B[x;r]$.
Розглянемо дискретний простір (X, d), де множина X містить не менше двох елементів. Зауважимо, що $B(a;1) = \{a\}$ та $B[a;1] = X$. Ми вже знаємо, що там всі множини – відкрити (тому відповідно замкнені). Отже, $\overline{B(a;1)} = B(a;1) = \{a\} \neq X = B[a;1]$.

Definition 1.3.8 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **щільною** в X, якщо

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 : \exists y \in A : \rho(x,y) < \varepsilon$$

Інколи ще бачу, щоб називали множину A **скрізь щільною**.

Proposition 1.3.9 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A – скрізь щільна $\iff \bar{A} = X$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – скрізь щільна. Цілком зрозуміло, що $\bar{A} \subset X$, тому залишилося тільки в зворотний бік провести.
Нехай $x \in X$. тоді за умовою щільності, $\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in A : \rho(x,y) < \varepsilon$. Якщо $x \in A$, автоматично $x \in \bar{A}$. Якщо $x \notin A$, то тоді там записано, що x – гранична точка A, тож все одно $x \in \bar{A}$.

Дано $\bar{A} = X$. Оберемо $x \in X$ та $\varepsilon > 0$. Якщо $x \in A$, то тоді можна взяти $y = x \in A$ і тоді $\rho(x,y) = 0 < \varepsilon$. Якщо $x \notin A$, то тоді x має бути просто граничною точкою A, але тоді $\exists y \in A : y \neq x : \rho(x,y) < \varepsilon$. Таким чином, A – скрізь щільна. ■

Proposition 1.3.10 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A – скрізь щільна $\iff \forall x \in X : \exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \to x, n \to \infty$.
Вправа: довести.

Definition 1.3.11 Задано (X, ρ) – метричний простір.
Метричний простір називається **сепарабельним**, якщо

існує в даному просторі скінченна чи зліченна щільна підмножина.

Example 1.3.12 Зокрема $(\mathbb{R}, \rho)$, де $\rho(x,y) = |x-y|$ – сепарабельний, оскільки $\mathbb{Q}$ – зліченна та скрізь щільна підмножина (див. курс матаналізу за 1 семестр).

Example 1.3.13 Простір $C([a,b])$ також сепарабельний.
Покладемо $A = \{Q \in \mathbb{Q}[x]$ – многочлени на $[a,b]\}$. Цілком ясно, що A – зліченна множина. Залишилося показати, що A – скрізь щільна.
Нехай $f \in C([a,b])$ та $\varepsilon > 0$. За теоремою Ваєрштраса про наближення функці, існує многочлен $P_\varepsilon \in \mathbb{R}[x]$, для якого $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$. Запишемо $P_\varepsilon(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$. Оскільки $\mathbb{Q}$ – скрізь щільна на $\mathbb{R}$, то ми можемо знайти $b_0, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Q}$ такі, що $|a_i - b_i| < \varepsilon$. Отримаємо многочлен $Q_\varepsilon \in \mathbb{Q}[x]$ вигляду $Q_\varepsilon(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k$. Тоді $\forall x \in [a,b]$ маємо наступне:
$|P_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon(x)| \leq |a_0 - b_0| + |a_1 - b_1||x| + \dots + |a_k - b_k||x^k| < \varepsilon M_0 + \varepsilon M_1 + \dots + \varepsilon M_k = M\varepsilon$.
У цьому випадку $M_i = \max\limits_{x \in [a,b]} |x^i|$, який існує, оскільки $x^i \in C([a,b])$. Отже, довели
$\sup\limits_{x \in [a,b]} |P_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon(x)| < \varepsilon$.
Використаємо тепер нерівність трикутника – отримаємо:
$\sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - Q_\varepsilon(x)| \leq \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P_\varepsilon(x)| + \sup\limits_{x \in [a,b]} |P_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon(x)| < 2\varepsilon$.

Theorem 1.3.14 Задано (X, ρ) – сепарабельний метричний простір та $Y \subset X$ – підпростір. Тоді (Y, ρ_Y) – також сепарабельний.

Proof.
Ми розглянемо випадок, коли $Y \subsetneq X$. Оберемо елемент $x \in X \setminus Y$. Оскільки (X, ρ) – сепарабельний, то маємо $Q = \{x_n, n \geq 1\}$ – зліченна та скрізь щільна в X.
Розглянемо такий набір елементів $R = \{y_{n,k}, n \geq 1, k \geq 1 : y_{n,k} \neq x\}$. Пояснюємо, як ми це сформували. Проходимося по всіх можливих парам натуральних числах (n,k). Якщо $B\left(x_n, \dfrac{1}{k}\right) \cap Y \neq \emptyset$, то звідти обираємо елемент $y_{n,k}$. Інакше елемент $y_{n,k} = x$.
Доведемо, що R – скрізь щільна множина в Y. Єдине варто пересвідчитися, що отримана множина $R \neq \emptyset$. Дійсно, нехай $y \in Y$ та $\varepsilon > 0$, ми оберемо таке $k \geq 1$, щоб $\dfrac{1}{k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Оскільки Q – скрізь щільна, то звідси $\exists x_n \in Q : \rho(y, x_n) < \dfrac{1}{k}$. Отже $B\left(\dfrac{1}{k}, x_n\right) \cap Y \neq \emptyset$ і там існує точка $y_{n,k}$, тож $R \neq \emptyset$.
Тепер ще раз беремо $\varepsilon > 0$ та елемент $y \in Y$. Тоді ми щойно знайшли елемент $y_{n,k}$, для якого $\rho_Y(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k} < \varepsilon$.
Отже, ми довели скрізь щільність. Те, що R зліченна, тут цілком зрозуміло. ■

1.4 Повнота

Definition 1.4.1 Задано (X, ρ) – метричний простір.
Послідовність $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Remark 1.4.2 Це означення можна інакше переписати, більш компактним чином:

$$\rho(x_n, x_m) \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Proposition 1.4.3 Будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною.

Proof.
Маємо $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – збіжна, тобто $\rho(x_n, x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. За нерівністю трикутника, маємо $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m)$. Якщо спрямувати одночасно $m.n \to \infty$, то тоді $\rho(x_n, x_m) \to 0$. Отже, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна. ■

Remark 1.4.4 Проте не кожна фундаментальна послідовність – збіжна.

Example 1.4.5 Маємо $X = (0, 1]$ – підпростір $\mathbb{R}$. Розглянемо послідовність $\left(x_n = \dfrac{1}{n}, n \geq 1\right)$, де $x_n \to 0$ при $n \to \infty$ – збіжна, проте $0 \notin X$. Тому така послідовність не має границі в X, але вона – фундаментальна за твердженням.

Definition 1.4.6 Метричний простір (X, ρ) називається **повним**, якщо

будь-яка фундаментальна послідовність має границю.

Example 1.4.7 Зокрема маємо наступне:
1) $X = \mathbb{R}$ – повний за критерієм Коші із матану;
2) $X = (0, 1]$ – не повний, бо принаймні $\left(x_n = \dfrac{1}{n}, n \geq 1\right)$ – фундаментальна, проте не має границі.

Example 1.4.8 Покажемо, що $(\mathbb{N}, \rho)$ – повний метричний простір, де $\rho(m, n) = 1 + \dfrac{1}{m+n}, m \neq n$.
Нехай $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ – фундаментальна послідовність. Тоді для $\varepsilon = 1$ маємо, що $\exists N : \forall n, m \geq N : \rho(x_m, x_n) < 1$. Зауважимо, що взагалі $\rho(k, l) \geq 1$ при $k \neq l$, тому для нерівності треба вимагати $x_m = x_n, \forall n, m \geq N$. Отже, ми отримали послідовність $(x_1, x_2, \dots, x_N, x_N, x_N, \dots)$ – стаціонарна, починаючи з деякого номеру, яка буде збіжною.

Proposition 1.4.9 Задано (X, ρ) – повний метричний простір та (Y, ρ) – підпрострір.
(Y, ρ) – повний $\iff$ Y – замкнена в X.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: (Y, ρ) – повний.
!Припустимо, що Y – не замкнена, тобто існує $x_0 \in X \setminus Y$ – гранична точка для Y. Тоді існує послідовність $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, для якої $y_n \to x_0$ та $y_n \neq x_0$. Зауважимо, що $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ збіжна саме в просторі X, тому саме в просторі X послідовність $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ – фундаментальна. Проте зрозумло цілком, що $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ буде фундаментальною в просторі Y, проте в силу повноти (Y, ρ), матимемо збіжність саме в Y. Таким чином, $x_0 \in Y$ – суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: Y – замкнена в X. Візьмемо $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y \subset X$ – фундаментальна. Тоді в силу повноти X, вона – збіжна в просторі X. Скажімо, $y_n \to x_0$. Якщо точка $x_0 \in Y$, то тоді послідовність $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збіжна в Y. Інакше при $x_0 \in X \setminus Y$ зауважимо, що $y_n \neq x_0$, тому x_0 – гранична точка Y. У силу замкненості ми отримаємо $x_0 \in Y$ – послідовність $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ знову збіжна в Y. ■

Lemma 1.4.10 Задано $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна та $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ – збіжна. Тоді $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – збіжна.

Proof.
Маємо $x_{n_k} \to x,\ k \to \infty$, тобто це означає $\forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$.
Також відомо, що $\exists N : \forall n, m \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Тоді $\forall n \geq N^* = \max\{N, K\}$ маємо
$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_{N^*}}) + \rho(x_{n_{N^*}}, x) < 2\varepsilon$.
Отже, $x_n \to x$. ■

Theorem 1.4.11 Критерій Кантора
Умова Кантора звучить так: для кожної послдовності $(B[a_n; r_n], n \geq 1)$ такої, що $B[a_1; r_1] \supset B[a_2; r_2] \supset \dots$ та $r_n \to 0$ (послідовність замкнених куль, що стягується), перетин $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B[a_n; r_n] \neq \emptyset$.
(X, ρ) – повний метричний простір $\iff$ виконується умова Кантора.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: (X, ρ) – повний. Задамо послідовність куль $(B[a_n; r_n], n \geq 1)$, що стягується.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність центрів – фундаментальна.
За умовою, $r_n \to 0$, тож $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : r_n < \varepsilon$. Досить взяти лише $r_N < \varepsilon$. Тоді $\forall n, m \geq N : a_m, a_n \in B[a_N, r_N] \implies \rho(a_m, a_N) < r_N$ та $\rho(a_n, a_N) < r_N$.
$\implies \rho(a_n, a_m) \leq \rho(a_n, a_N) + \rho(a_N, a_m) < 2r_N < 2\varepsilon$. Отже, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна.

Замкнені кулі, що стягуються, мають непорожній перетин.
Оскільки X – повний, то тоді $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – збіжна, тобто $a_n \to a_0$. Оскільки $B[a_n; r_n]$ – замкнені, то за **Prp. 1.2.19** маємо, що $a_0 \in B[a_n; r_n]$. Звідси $a_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n[a_n; r_n]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: умова Кантора. Нехай $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна послідовність. Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \rho(a_n, a_m) < \varepsilon$.
При $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ маємо $n_1 \in \mathbb{N}$ таке, що $\forall n \geq n_1 : \rho(a_n, a_{n_1}) < \dfrac{1}{2}$.
При $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ маємо $n_2 > n_1$ таке, що $\forall n \geq n_2 : \rho(a_n, a_{n_2}) < \dfrac{1}{4}$.
$\vdots$
Тоді маємо підпослідовність $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ із властивістю $\forall n \geq n_k : \rho(a_n, a_{n_k}) < \dfrac{1}{2^k}$. Звідси випливає, що замкнені кулі $B\left[a_{n_k}; \dfrac{1}{2^{k-1}}\right]$ будуть вкладеними, тобто $B\left[a_{n_k}; \dfrac{1}{2^{k-1}}\right] \supset B\left[a_{n_{k+1}}; \dfrac{1}{2^k}\right], k \geq 1$.
Справді, беремо $x \in B\left[a_{n_{k+1}}; \dfrac{1}{2^k}\right]$, тобто $\rho\left(x, a_{n_{k+1}}\right) \leq \dfrac{1}{2^k}$. Через нерівність трикутника отримаємо $\rho\left(a_{n_k}, x\right) \leq \rho\left(a_{n_k}, a_{n_{k+1}}\right) + \rho\left(a_{n_{k+1}}, x\right) \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$, тому звідси $x \in B\left[a_{n_k}; \dfrac{1}{2^{k-1}}\right]$.
Далі всі радіуси $\dfrac{1}{2^{k-1}} \to 0$, тому за умовою Кантора існує точка $a \in B\left[a_{n_k}, \dfrac{1}{2^{k-1}}\right], \forall k \geq 1$. Тобто $\forall k \geq 1$ маємо $\rho\left(a_{n_k}, a\right) \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$, після спрямування $k \to \infty$ отримаємо $a_{n_k} \to a$. Значить, за **Lm. 1.4.10**, послідовність $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збіжна.
Висновок: метричний простір (X, ρ) – повний. ■

Remark 1.4.12 До речі, точка, що належить перетину замкнених кіль, буде єдиною.
!Припустимо, що це не так, тобто $\exists b^*, b^{**} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B[a_n; r_n]$. Тоді $\forall n \geq 1 : \begin{cases} \rho(a_n, b^*) \leq r_n \\ \rho(a_n, b^{**}) \leq r_n \end{cases}$.
$\implies \rho(b^*, b^{**}) \leq \rho(b^*, a_n) + \rho(a_n, b^{**}) \leq r_n + r_n = 2r_n$.
Спрямуємо $n \to \infty$, тоді $\rho(b^*, b^{**}) \leq 0 \implies \rho(b^*, b^{**}) = 0 \implies b^* = b^{**}$. Суперечність!

Remark 1.4.13 Умова того, що $r_n \to 0$ в теоремі Кантора, є суттєвою.

Example 1.4.14 Розглянемо $(\mathbb{N}, \rho)$ – повний метричний простір, де $\rho(m, n) = 1 + \dfrac{1}{n+m}, m \neq n$.
Тепер оберемо ось такі замкнені кулі $B\left[n, 1 + \dfrac{1}{2n}\right]$. Зауважимо, що
$B\left[n, 1 + \dfrac{1}{2n}\right] = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \rho(x, n) \leq 1 + \dfrac{1}{2n}\right\} = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \dfrac{1}{x+n} \leq \dfrac{1}{2n}\right\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n\} =$
$= \{n, n+1, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n-1\}$.
Аналогічно $B\left[1, 1 + \dfrac{1}{2}\right] = \mathbb{N}$.
Отже, маємо $B\left[1, 1 + \dfrac{1}{2}\right] \supset B\left[2, 1 + \dfrac{1}{4}\right] \supset B\left[3, 1 + \dfrac{1}{6}\right] \supset \dots$, при цьому $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B\left[n, 1 + \dfrac{1}{2n}\right] = \emptyset$.
У цьому випадку радіуси $1 + \dfrac{1}{2n} \not\to 0$, тому точки перетину нема.

1.5 Поповнення метричного простору та трошки про ізометрію

Definition 1.5.1 Задано (X, ρ) та $(Y, \tilde{\rho})$ – два різних метричних простори.
Відображення $f\colon X \to Y$ називається **ізометрією**, якщо

$$\forall x_1, x_2 \in X : \tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$$

Тобто суть ізометрії – це збереження відстаней.

Remark 1.5.2 Кожна ізометрія f – уже автоматично ін'єктивна.
Дійсно, припустимо, що $f(x_1) = f(x_2)$. За визначенням ізометрії, $\tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$. Отримаємо $\rho(x_1, x_2) = 0$, тобто $x_1 = x_2$.

Definition 1.5.3 Метричні простори $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ називаються **ізометричними**, якщо

$$\exists f\colon X \to Y \text{ – бієктивна ізометрія}$$

Example 1.5.4 Розглянемо $(\mathbb{R}, \tilde{\rho})$ та $\left(\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \rho\right)$ – два метричних простори. У цьому випадку ρ – стандартна метрика та $\tilde{\rho}(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Ці два простори – ізометричні.
Дійсно, між ними існує ізометрія $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, що є бієктивною.

Proposition 1.5.5 Задані $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два ізоморфні метричні простори.
(X, ρ) – повний $\iff$ $(Y, \tilde{\rho})$ – повний.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: (X, ρ) – повний. Нехай $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна послідовність. Оскільки X, Y ізометричні, то існує бієкція $f\colon X \to Y$, що є ізометрією. Тож звідси $\exists! x_n \in X : f(x_n) = y_n$. Розглянемо послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та зауважимо, що $\rho(x_n, x_m) = \tilde{\rho}(y_n, y_m) \to 0$ в силу фундаментальності. Отже, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна, тож збіжна за повнотою. Тобто $\rho(x_n, x) \to 0$. Позначимо $f(x) = y$. Звідси випливає, що $\tilde{\rho}(y_n, y) = \rho(x_n, x) \to 0$. Тобто $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – збіжна.

$\boxed{\Leftarrow}$ *дзеркальне доведення.* ■

Definition 1.5.6 Задано Y – повний метричний простір.
Він буде називатися **поповненням (completion)** метричного простору X, якщо

$$X \text{ – ізометричний підпростір } Y;$$
$$X \text{ – щільна в } Y.$$

Theorem 1.5.7 Для кожного метричного простору (X, ρ) існує поповнення. Причому це поповнення єдине з точністю до ізометрії.

Proof.
I. *Існування.*
Позначимо F за множина фундаментальних послідовностей $\{x_n\}$ в X. Стаціонарні послідовності є фундаментальними, тож звідси X можна сприймати як підмножину F.
Розглянемо функцію $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$, яка визначена на $F \times F$. Для коректності треба довести існування даної границі. Ми доведемо, що $\{\rho(x_n, y_n), n \geq 1\}$ – фундаментальна (це числова послідовність, тому цього буде достатньо).
Нам відомо, що $\{x_n\}, \{y_n\}$ фундаментальні, тобто $\exists N_1, N_2$, для яких $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon, \rho(y_n, y_m) < \varepsilon$ для всіх $n, m \geq N_1, m, n \geq N_2$. Тоді при $N = \max\{N_1, N_2\}$ справедлива оцінка:
$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(x_m, y_m) \leq (\rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)) - \rho(x_m, y_m) < 2\varepsilon$.
Отже, функція d визначена коректно. Вона майже метрика, оскільки (легко перевірити) виконуються всі властивості. На жаль, $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0 \;\not\Rightarrow\; \{x_n\} = \{y_n\}$ (приклад буде нижче).
Створимо відношення еквівалентності $\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff d(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0$. Утвориться фактор-множина $F/_\sim = \hat{F}$. Елементи з $\hat{F}$ позначатимемо за $\overline{\{x_n\}}$. Наша мета буде довести, що саме $\hat{F}$ буде поповненням X.
На фактормножині покладемо $\tilde{\rho}\left(\overline{\{x_n\}}, \overline{\{y_n\}}\right) = d(\{x_n\}, \{y_n\})$. Варто пересвідчитися, що воно визначено коректно.
Нехай $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ та $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$. Тобто $d(\{x_n\}, \{x'_n\}) = 0$ та $d(\{y_n\}, \{y'_n\}) = 0$. Тоді

$d(\{x_n\},\{y_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,x'_n) + \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x'_n,y'_n) + \lim\limits_{n\to\infty} \rho(y'_n,y_n) = d(\{x'_n\},\{y'_n\})$.
Аналогічно отримаємо $d(\{x'_n\},\{y'_n\}) \le d(\{x_n\},\{y_n\})$. Отже, $d(\{x'_n\},\{y'_n\}) = d(\{x_n\},\{y_n\})$, тобто $\tilde{\rho}$ визначилося коректним чином.
Поставимо відображення $f\colon X \to \hat{F}$ таким чином: $f(x) = \overline{\{x\}}$. Це буде ізометрією, тому що $\tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \tilde{\rho}(\overline{\{x_1\}}, \overline{\{x_2\}}) = d(\{x_1\},\{x_2\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_1,x_2) = \rho(x_1,x_2)$. Відображення f зобов'язане бути сюр'єктивним, оскільки повертається клас еквівалентності. Тобто f – бієктивна ізометрія, а тому $(X,\rho),(\hat{F},\tilde{\rho})$ – ізометричні.
Покажемо, що $(\hat{F},\tilde{\rho})$ – повний метричний простір. (TODO: обміркувати).

II. *Єдиність.*
Розглянемо два поповнення $(Y_1,\tilde{\rho}_1),(Y_2,\tilde{\rho}_2)$ простору (X,ρ). Тобто, за означенням, маємо $Y_1 \supset X_1 \sim X \sim X_2 \subset Y_2$, а також $\overline{X_1} = Y_1, \overline{X_2} = Y_2$. Під $\sim$ мається на увазі ізометричність. Із цього X_1 ізометричний до X_2, нехай g – відповідна ізометрія.
Побудуємо $f\colon Y_1 \to Y_2$ за таким правилом: для кожного $y \in Y_1$ беремо таку послідовність $\{x_n\} \subset X_1$, щоб $x_n \to y$ – тоді $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. Треба пересвідчитися, що визначення коректне. Дійсно, нехай $\{x_n\},\{x'_n\}$ – такі дві послідовності, що $x_n \to y, x'_n \to y$. Тоді звідси випливає наступне:
$\tilde{\rho}_2(g(x_n),g(x'_n)) \overset{\text{ізометричність}}{=} \tilde{\rho}_1(x_n,x'_n) \le \tilde{\rho}_1(x_n,y) + \tilde{\rho}_2(y,x'_n) \to 0$ при $n \to \infty$.
Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x'_n)$, а тому значення функцій коректно визначено. (TODO: подумати над тим, чи правильно я все це розписав). ■

Example 1.5.8 Беремо стандартний метричний простір $\mathbb{R}$, послідовності $\{x_n\} = \{0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$ та $\{y_n\} = \{1,1,1,\dots\}$. Зауважимо, що $d(\{x_n\},\{y_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{0.00\dots01}_{n \text{ цифр}} = 0$. При цьому зрозуміло, що $\{x_n\} \ne \{y_n\}$.

Definition 1.5.9 Повний нормований простір називається **банаховим**. Повний евклідів простір (відносно метрики, що породжена скалярним добутков) називається **гільбертовим**.

Proposition 1.5.10 Евклідів простір l_2 – гільбертів.

Proof.
Задамо фундаментальну послідовність $\{\vec{x}_n, n \ge 1\}$ на множині l_2
Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n,m \ge N : \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \varepsilon$
$\Rightarrow \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall k \ge 1 : |x_n^k - x_m^k| < \varepsilon$
Тоді послідовність $\{x_n^k, n \ge 1\}$ - фундаментальна - тому (за матаном) збіжна, $x_n^k \to y^k$
Доведемо, що $\vec{x}$ збігається до $\vec{y}$ за нормою
Маємо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall K \ge 1 : \sum\limits_{k=1}^{K} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2$
Спрямуємо $m \to \infty$, тоді $\sum\limits_{k=1}^{K} (x_n^k - y^k)^2 < \varepsilon^2$
Звідки випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_n^k - y^k)^2$ та його оцінка
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_n^k - y^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \|\vec{x}_n - \vec{y}\| < \varepsilon$
Отже, $\vec{x}_n \to \vec{y}$ ■

1.6 Неперервні відображення

Definition 1.6.1 Задані $(X,\rho),(Y,\tilde{\rho})$ – два метричних простори.
Відображення $f\colon X \to Y$ називається **неперервним у точці** x_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X : \rho(x,x_0) < \delta \implies \tilde{\rho}(f(x),f(y)) < \varepsilon$$

Remark 1.6.2 Дане означення можна записати більш компактним чином. Маємо $f\colon X \to Y$.
f – неперервне в точці $x_0 \in X \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f(B(x_0;\delta)) \subset B(f(x_0);\varepsilon)$.

Proposition 1.6.3 Задані $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f\colon X \to Y$.
f – неперервне в точці $x_0 \in X \iff \forall \{x_n\} \subset X : x_n \to x_0$ в $X \implies f(x_n) \to f(x_0)$ в Y.
Вправа: довести.

Theorem 1.6.4 Задані $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f\colon X \to Y$.
f – неперервне (на множині X) $\iff \forall V$ – замкнена в $Y : f^{-1}(U)$ – замкнена в X.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: f – неперервне. Нехай V – замкнена в Y. Зафіксуємо $x_n \in f^{-1}(V)$ таким чином, що $x_n \to x_0$. Але за неперервністю, $f(x_n) \to f(x_0)$, та додатково $f(x_n) \in V$. Значить, за замкненістю V, точка $f(x_0) \in V \implies x_0 \in f^{-1}(V)$. Отже, $f^{-1}(V)$ – замкнена.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall V$ – замкнена в $Y : f^{-1}(U)$ – замкнена в X. Оберемо $x_n \to x_0$.
!Припустимо, що $f(x_n) \not\to f(x_0)$, тобто існує шар $B(f(x_0); \varepsilon)$, поза яким знаходиться підпослідовність $\{f(x_{n_k})\}$. Якщо V – замикання множини $\{f(x_{n_k})\}$, то звідси $x_{n_k} \in f^{-1}(V)$; $f(x_0) \notin V$. Тоді звідси $x_0 \notin f^{-1}(V)$, проте $x_{n_k} \to x_0$ та x_0 є граничною точкою для $f^{-1}(A)$. Суперечність! ■

Corollary 1.6.5 f – неперервне $\iff \forall U$ – відкрита в $Y : f^{-1}(U)$ – відкрита в X.
Вказівка: застосувати попередню теорему та рівність $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

Proposition 1.6.6 Задані X, Y, Z – метричні простори та $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$. Нехай f – неперервне в точці $x_0 \in X$ та g – неперервне в точці $f(x_0) \in Y$. Тоді $g \circ f$ – неперервне в точці $x_0 \in X$.
Вправа: довести.

Proposition 1.6.7 Задано (X, ρ) – метричний простір та зафіксуємо $x_0 \in X$. Тоді функція $f(x) = \rho(x, x_0)$, де $f\colon X \to \mathbb{R}$, – неперервна на X.

Proof.
Дійсно, нехай $y_0 \in X$. Припустимо, що $\{y_n\}$ така, що $y_n \to y_0$. Хочемо $f(y_n) \to f(y_0)$. Справді,
$|f(y_n) - f(y_0)| = |\rho(y_n, x_0) - \rho(y_0, x_0)| \leq |\rho(y_n, y_0)| \to 0$.
Для $\mathbb{R}$ *береться стандартна метрика, якщо нічого іншого не вказується зазвичай.* ■

Definition 1.6.8 Задано (X, ρ) – метричний простір та $f\colon X \to X$.
Дане відображення називається **стиском**, якщо

$$\exists q \in (0, 1) : \forall x, y \in X : \rho(f(x), f(y)) \leq q \cdot \rho(x, y)$$

Remark 1.6.9 Стискаючі відображення – неперервні.
Вказівка: обрати $\delta = \dfrac{q}{\varepsilon}$ *при всіх* $\varepsilon > 0$.

Theorem 1.6.10 Теорема Банаха
Задано (X, ρ) – повний метричний просторі та $f\colon X \to X$ – стискаюче відображення. Тоді існує єдина точка нерухома точка, тобто $\exists! x \in X : f(x) = x$.

Proof.
I. *Існування.*
Нехай $x_0 \in X$ – довільна точка. Зробимо позначення: $x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$
Покажемо, що послідовність $\{x_n, n \geq 0\}$ – фундаментальна. Дійсно, для $m \leq n$ маємо:
$\rho(x_m, x_n) = \rho(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) \leq q \cdot \rho(x_{m-1}, x_{n-1}) \leq \dots \leq q^m \rho(x_0, x_{n-m})$.
$\rho(x_0, x_{n-m}) \leq \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{n-m-1}, x_{n-m}) \leq \rho(x_0, x_1)(1 + q + \dots + q^{n-m-1}) \leq$
$\leq \rho(x_0, x_1) \dfrac{1}{1-q}$.
Разом отримаємо $\rho(x_m, x_n) \leq \dfrac{q^m}{1-q} \rho(x_0, x_1) \to 0, n, m \to \infty$.
Оскільки (X, ρ) – повний, то $\{x_n\}$ – збіжна, позначимо $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Зважаючи на неперервність стиска, отримаємо $f(a) = f\left(\lim\limits_{n \to \infty} x_n\right) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} = a$. Тобто a – це наша шукана нерухома точка.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що f має дві різні нерухомі точки a, b. Буде суперечність! Дійсно,
$0 < \rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \leq q \cdot \rho(a, b) < \rho(a, b)$. ■

Remark 1.6.11 Насправді, в теоремі Банаха досить вимагати, щоб саме $f^n \overset{\text{def.}}{=} \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ разів}}$ було стиском, а не відображення f.
Дійсно, за теоремою Банаха, f^n матиме єдину нерухому точку a, тобто $f^n(a) = a$. Тоді точка $f(a)$ буде теж нерухомою для f^n, оскільки $f^n(f(a)) = f(f^n(a)) = f(a)$. Але за єдиністю, $f(a) = a$ – дві нерухомі мають збігатися. Єдиність нерухомої точки для f доводиться неважко.

1.7 Компактність

Definition 1.7.1 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **компактом**, якщо

$$\forall \{x_n, n \geq 1\} \subset A : \exists \{x_{n_k}, k \geq 1\} : x_{n_k} \to x_0, k \to \infty, \text{ причому } x_0 \in A$$

Якщо прибрати умову $x_0 \in A$, то тоді A називається **передкомпактом**.

Proposition 1.7.2 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
A – компакт $\iff$ $\forall B \subset A$, де B – нескінченна множина, існує $x_0 \in A$ – гранична точка B.
Якщо прибрати умову $x_0 \in A$, то вже мова буде йти про передкомпакт.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – компакт. Нехай $B \subset A$ – нескінченна множина. Оберемо послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset B \subset A$, де всі вони між собою різні. Тоді за умовою компактності, існує підпослідовність $x_{n_k} \to x_0$, причому $x_0 \in A$. Зауважимо, що всі $x_{n_k} \neq x_0$, тож x_0 – гранична точка A.
Якби існували $k \in \mathbb{N}$, для яких $x_{n_k} = x_0$, то тоді ми би сформували підпослідовність $\{x_{n_{k_m}}\}$ без цих елементів, причому $x_{n_{k_m}} \to x_0$, а тепер $x_{n_{k_m}} \neq x_0$. Тож все одно x_0 залишається граничною точкою A.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall B \subset A$, де B – нескінченна множина, існує $x_0 \in A$ – гранична точка B. Отже, нехай $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$ – довільна послідовність. У нас є два варіанти:
I. Множина значень $\{x_n\}$ – скінченна. Тоді можна відокремити стаціонарну підпослідовність.
II. Множина значень $\{x_n\}$ – нескінченна, всі ці значення покладемо в множину $B \subset A$. Тоді за умовою, існує $x_0 \in A$ – гранична точка B. Отже, $B \cap B(x_0; \varepsilon)$ містить нескінченне число точок для всіх $\varepsilon > 0$. Зокрема:
$\varepsilon = 1 \implies B \cap B(x_0; 1)$ має нескінченну множину. Там існує елемент $y_1 \in B \cap B(x_0; 1)$, тобто це одне зі значень послідовності. Тобто $y_1 = x_{n_1}$.
$\varepsilon = \dfrac{1}{2} \implies B \cap B\left(x_0; \dfrac{1}{2}\right)$ має нескінченну множину. Там існує елемент $y_2 \in B \cap B\left(x_0; \dfrac{1}{2}\right)$, тобто це одне зі значень послідовності. Тобто $y_2 = x_{n_2}$. Причому можна обрати $x_{n_2} > x_{n_1}$. Якби так не було можливо, то $B \cap B\left(x_0; \dfrac{1}{2}\right)$ була б скінченною множиною, що не наше випадок.

$\vdots$

Побудували підпослідовність $\{x_{n_k}, k \geq 1\}$, причому $\rho(x_0, x_k) < \dfrac{1}{k}$. Тож при $k \to \infty$ матимемо $x_{n_k} \to x_0 \in A$. Отже, A – компакт.

Випадок передкомпакту повторюється майже все слово в слово. ■

Proposition 1.7.3 Задано (X, ρ) – компактний метричний простір. Тоді (X, ρ) – повний.

Proof.
Дійсно, нехай $\{x_n\} \subset X$ – фундаментальна. Оскільки X – компакт, то існує збіжна підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, де $x_{n_k} \to x, x \in X$. Ми вже знаємо, що тоді й сама послідовність $\{x_n\} \to x$ буде збіжною. Отже, (X, ρ) – повний метричний простір. ■

Definition 1.7.4 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **обмеженою**, якщо

$$\exists R > 0 : A \subset B(a; R)$$

Definition 1.7.5 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **цілком обмеженою**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists C_\varepsilon = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : A \subset \bigcup_{x \in C_\varepsilon} B(x; \varepsilon)$$

До речі, C_ε, для якої виконана $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_\varepsilon} B(x; \varepsilon)$, називається **скінченною ε-сіткою**.
Тобто A – цілком обмежена, коли вона має скінченну ε-сітку для всіх $\varepsilon > 0$.

Proposition 1.7.6 Задано (X, ρ) – метричний простір та A – цілком обмежена множина. Тоді A – обмежена.

Proof.
Для множини A існує 1-сітка, тобто $C_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$, для якої $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_1} B(x; 1)$.
Зафіксуємо $y \in X$ та оберемо $R = 1 + \max\limits_{x \in C_1} \rho(x, y)$. Тоді хочемо довести, що $A \subset B(y; R)$.
Нехай $a \in A$, тоді вже $a \in B(x; 1)$ при деякому $x \in C_1$, а також $\rho(a; x) < 1$. Звідси
$\rho(a; y) \leq \rho(a; x) + \rho(x; y) < 1 + \max\limits_{x \in C_1} \rho(x; y) = R$.
Отже, A – обмежена. ■

Remark 1.7.7 Не обов'язково вимагати, щоб A була цілком обмежена. Подивившись на це доведення, ми можемо лише вимагати, щоб A мала хоча б одну ε-сітку – тоді буде обмеженість A.

Theorem 1.7.8 Критерій Фреше-Хаусдорфа
Нехай (X, ρ) – повний метричний простір та $A \subset X$.
A – цілком обмежена $\iff$ A – передкомпакт.

Remark 1.7.9 Під час доведення $\boxed{\Leftarrow}$ нам не потрібна буде умова повноти метричного простору.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – цілком обмежена. Нехай $\{a_n, n \geq 1\} \subset A$ – довільна послідовність.
Оберемо 1-сітку C_1, де $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_1} B(x; 1)$. В одному з цих шарів нескінченне число членів послідовності, той шар позначу за $B(y_1; 1)$; маємо підпослідовність $\{a_{n_k}, k \geq 1\} \subset B(y_1; 1)$.
Оберемо $\dfrac{1}{2}$-сітку $C_{\frac{1}{2}}$, де $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_{\frac{1}{2}}} B\left(x; \dfrac{1}{2}\right)$. В одному з цих шарів нескінченне число членів підпослідовності, той шар позначу за $B\left(y_2; \dfrac{1}{2}\right)$; маємо підпідпослідовність $\{a_{n_{k_m}}, k \geq 1\} \subset B\left(y_2; \dfrac{1}{2}\right)$.

$\vdots$

Отримали послідовність центрів $\{y_n, n \geq 1\}$, доведемо її фундаментальність.
$\rho(y_n, y_m) \leq \rho(y_n, a_*) + \rho(a_*, y_m) < \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \to 0$ при $n, m \to \infty$. У даному випадку ми підібрали елемент $a_* \in B\left(\dfrac{1}{n}; y_n\right) \cap B\left(\dfrac{1}{m}; y_m\right)$.
Тепер розглянемо підпослідовність $\{a_{n_p}, p \geq 1\}$, яка будується таким чином: беремо перший елемент з $\{a_{n_k}\}$ (це наше a_{n_1}), потім перший елемент з $\{a_{n_{k_m}}\}$ (це наше a_{n_2}), ... Доведемо, що $\{a_{n_p}, p \geq 1\}$ – фундаментальна. Дійсно,
$\rho(a_{n_p}, a_{n_t}) \leq \rho(a_{n_p}, y_p) + \rho(y_p, y_t) + \rho(y_t, a_{n_t}) < \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{t} + \rho(y_p, y_t) \to 0, t, p \to \infty$
Оскільки (X, ρ) – повний, то звідси $\{a_{n_p}, n \geq 1\}$ – збіжна підпослідовність. Довели, що A – передкомпакт.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A – передкомпакт.
!Припустимо, що A – це є цілком обмеженою. Тобто для деякого $\varepsilon > 0$ не існує ε-сітки. Нехай $x_1 \in A$. Тоді існує $x_2 \in A$, для якої $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ (інакше якби для кожної $x_2 \in A$ була б $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon$, то ми си знайшли ε-сітку $\{x_1\}$, що суперечить умові).
Далі існує $x_3 \in A$, для якої $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$ та $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$ (аналогічно якби для кожної $x_3 \in A$ ці два нерівності не виконувалися би, то ми би знайшли один з трьох ε-сіток: $\{x_1\}$ або $\{x_2\}$ або $\{x_1, x_2\}$).

$\vdots$
Побудували послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$, для якої справедлива $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ при всіх $n \neq m$. За умовою передкомпактності, існує $\{x_{n_k}, n \geq 1\}$, для якої $x_{n_k} \to x_0$. Водночас звідси ми отримаємо, що існують номери K_1, K_2, для яких $\rho(x_{n_{K_1}}, x_{n_{K_2}}) \leq \rho(x_{n_{K_1}}, x_0) + \rho(x_0, x_{n_{K_2}}) < \varepsilon$. Суперечність! Отже, A все ж таки має бути цілком обмеженою. ■

Theorem 1.7.10 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
A – компакт $\iff$ для кожного відкритого покриття A можна виділити скінченне підпокриття.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – компакт.
!Припустимо, що існує відрките покриття $\{U_\alpha\}$ множини A, від якої не можна відокремити скінченне підпокриття. Оскільки A – компакт, то A – цілком обмежена. Значить, існує 1-сітка C_1 (причому можна підібрати так, щоб $C_1 \subset A$), для якої $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_1} B(x; 1)$, або можна переписати як $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_1} A \cap B(x; 1)$. Серед множин $A \cap B(x; 1)$ існує одна з них, яка не покривається скінченним чином множинами $\{U_\alpha\}$. Дану множину позначу за A'.
Сама множина A' – також цілком обмежена, тож існує $\dfrac{1}{2}$-сітка $C_{\frac{1}{2}}$ (знову підберемо так, щоб $C_{\frac{1}{2}} \subset A'$), для якої виконано $A' \subset \bigcup\limits_{x \in C_{\frac{1}{2}}} A' \cap B\left(x; \dfrac{1}{2}\right)$. Знову ж таки, серед $A' \cap B\left(x; \dfrac{1}{2}\right)$ існує одна з них, що не покривається скінченним чином множинами $\{U_\alpha\}$. Дану множину позначу за A''.
$\vdots$
Продовжуючи процедуру, отримаємо набір куль $B_n = B\left(x_n; \dfrac{1}{n}\right)$, де центр $x_n \in B_{n-1} \cap A$. Позначимо $\overline{B_n \cap A} = K_n$ та зауважимо, що K_n – це замкнена куля в метричному підпросторі A, де $R = \dfrac{1}{2^n}$ та центр $y_n \in K_{n-1}$.
Подвоїмо радіуси кожної з цих куль. Тоді отримаємо послідовність вкладених куль, які стягуються. Оскільки A – компакт, то (A, ρ_A) – повний метричний простір, тож за теоремою Кантора, існує $a \in A$ – спільна точка цих куль. Зважаючи на покриття множини A, отримаємо $a \in U_{\alpha_0}$ при деякому α_0. Оскільки U_{α_0} – відкрита, то існує куля $B(z, \delta) \subset U_{\alpha_0}$. Ми можемо підібрати завжди такий $N \in \mathbb{N}$, щоб було виконано $\dfrac{1}{N} < \dfrac{\delta}{2}$, тоді звідси $K_n \subset B(z; \delta) \subset U_{\alpha_0}$. Таким чином, K_n була покрита лише однією множиною із $\{U_\alpha\}$, проте ми обирали такі кулі (на початку), які не допускали скінченне підпокриття. Суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: кожне покриття A має скінченне підпокриття.
!Припустимо, що A – не компакт, тобто існує послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$, що не має часткових границь. Тоді кожний відкритий окіл $U_a, a \in A$, містить скінченну кількість членів послідовності $\{x_n\}$ (якби існував окіл U_a із нескінченним числом членів послідовності, то a стала би граничною точкою, що неможливо). Набір $\{U_a, a \in A\}$ – відкрите покриття множини A. За умовою, існує скінченне підпокриття $\{U_{a_1}, \dots, U_{a_n}\}$ множини A, але тоді $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{a_i}$, де праворуч – скінченна множина; ліворуч – нескінченна в силу нескінченності послідовності $\{x_n\}$ – суперечність! ■

Corollary 1.7.11 Задано $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f \colon X \to Y$ – неперервне відображення. Відомо, що X – компакт. Тоді $f(X)$ – компакт.

Proof.
Маємо $\{U_\alpha\}$ – відкрите покриття $f(X)$. Тоді $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ – відкрите покриття X, але за компактністю, можна виділити скінченне підпокриття $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_m)\}$, тоді звідси $\{U_1, \dots, U_m\}$ буде скінченним підпокриттям $f(X)$. ■

Corollary 1.7.12 Задано (X, ρ) – метричний простір та $f \colon X \to \mathbb{R}$ – числова неперервна функція. Відомо, що X – компакт. Тоді f – обмежена та досягає найбільшого та найменшого значень.

Theorem 1.7.13 Задано $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f \colon X \to Y$ – неперервне, причому X – компакт. Тоді f – рівномірно неперервне.

Proof.
!Припустимо, що $\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0 : \exists x, y \in X : \rho(x, y) < \delta$, але $\tilde{\rho}(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$.
Оберемо $\delta = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, тоді утвориться послідовність $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$. Оскільки X – компакт, то відокремимо збіжні підпослідовності $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$. Але оскільки $\rho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \dfrac{1}{n_k}$, то звідси випливає $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Із іншого боку, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k})$, оскільки виконана нерівність $\tilde{\rho}(f(x_{n_k}), f(y_{n_k}) \geq \varepsilon$. Суперечність! ■

1.8 Теорема Стоуна-Ваєрштраса

Надалі будемо розглядати компактний метричний простір (X, ρ) та метричний простір $(C(X), \sigma)$ – простір неперервних функцій із метрикою $\sigma(f, g) = \max\limits_{x\in X} \|f(x) - g(x)\|$. Причому даний метричний простір теж повний (це аналогічно доводиться).

Definition 1.8.1 Множина $A \subset C(X)$ називається **алгеброю**, якщо $\forall f, g \in A, \forall\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha f,\ f + g,\ f \cdot g \in A$$

Definition 1.8.2 Нехай $A \subset C(X)$ – алгебра.
Алгебра A **відділяє точки** множини X, якщо

$$\forall x, y \in X : x \neq y : \exists f \in A : f(x) \neq f(y)$$

Theorem 1.8.3 Теорема Стоуна-Ваєрштраса
Задано (X, ρ) – компактний метричний простір та $(C(X), \sigma)$ – простір неперервних дійсних функцій, заданий вище. Маємо $A \subset C(X)$. Про неї відомо, що
1) A – алгебра, яка віддаляє точки множини X;
2) функція f, яка визначена як $f(x) = 1, \forall x \in X$, належить A.
Тоді множина A скрізь щільна в $(C(X), \sigma)$.

Proof.
Ми хочемо довести, що $\bar{A} = C(X)$.
Нехай $f \in A$. Хочемо довести, що $|f| \in \bar{A}$. У курсі мат. аналізу ми доводили теорему Ваєрштраса про наближення функції многочленом. Зокрема для функції $g(t) = \sqrt{t}, t \in [0, 1]$ маємо, що $\forall\varepsilon > 0 : \exists P_\varepsilon$ – многочлен від $t : |\sqrt{t} - P_\varepsilon(t)| < \varepsilon$. Тоді $\forall x \in X$:
$$\left|\frac{|f(x)|}{\|f\|} - P_\varepsilon\left(\frac{f^2(x)}{\|f\|^2}\right)\right| = \left|\sqrt{\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2}} - P_\varepsilon\left(\frac{f^2(x)}{\|f\|^2}\right)\right| < \varepsilon.$$
Оскільки $f \in A$, то в силу алгебри $\dfrac{f^2}{\|f\|} \in A$. Оскільки P_ε – многочлен, то $P_\varepsilon \circ \dfrac{f^2}{\|f\|} \in A$. Ми знайшли $P_\varepsilon \circ \dfrac{f^2}{\|f\|^2} \in A$, для якої $\left\|\dfrac{|f|}{\|f\|} - P_\varepsilon \circ \dfrac{f^2}{\|f\|^2}\right\| < \varepsilon$. Отже, $\dfrac{|f|}{\|f\|}$ – гранична точка, тобто $\dfrac{|f|}{\|f\|} \in \bar{A}$.
Відомо знову з мат. аналізу, що для всіх $a, b \in \mathbb{R}$ ми маємо такі рівності:
$\max\{a, b\} = \dfrac{1}{2}(a + b + |a - b|) \qquad \min\{a, b\} = \dfrac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.
Значить, маючи $f, g \in A$ та маючи результат вище, отримаємо $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \bar{A}$.
Оберемо $x, y \in X$ так, що $x \neq y$. Тоді існує функція $g \in A$, для якої $g(x) \neq g(y)$. Далі покладемо нову функцію $f(z) = \alpha + \dfrac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}(g(z) - g(x)), z \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді звідси $f \in A$ (ми тут користуємося пунктом 2), щоб це показати), причому $f(x) = \alpha,\ f(y) = \beta$.
Отже, що ми довели щойно: $\forall x, y \in X : x \neq y, \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \exists f \in A : f(x) = \alpha,\ f(y) = \beta$.

Нехай $f \in C(X)$ та $\varepsilon > 0$. Зафіксуємо $x \in X$, для $z \in X$ покладемо $\alpha = f(x), \beta = f(z)$. Тоді за щойно доведеним, існує $h_z \in A$, для якої $h_z(x) = \alpha = f(x)$ та $h_z(z) = \beta = f(z)$.
Оскільки $h_z - f \in C(X)$, то за означенням, $\exists\delta_z > 0 : \forall y \in B(z, \delta_z) : h_z(y) - f(y) < \varepsilon$. Сім'я множин $\{B(z, \delta_z) \mid z \in X\}$ – відкрите покриття компактної множини X. Отже, ми можемо взяти скінченне підпокриття $\{B(z_k, \delta_{z_k}) \mid k = \overline{1, n}\}$.
Визначимо функцію $g_x(y) = \min\limits_{1\leq k\leq n}\{h_{z_k}(y))\}, y \in X$. Зауважимо, що по-перше, $g_x \in \bar{A}$; по-друге, $g_x(x) = f(x)$; по-третє, $\forall y \in X : g_x(y) - f(y) < \varepsilon$.

Оскільки $g_x - f \in C(X)$, то за означенням, $\exists \delta_x > 0 : \forall y \in B(x, \delta_x) : g_x(y) - f(y) > -\varepsilon$. Сім'я множин $\{B(x, \delta_x) \mid x \in X\}$ – відкрите покриття компактної множини X. Отже ми можемо взяти скінченне підпокриття $\{B(x_k, \delta_{x_k} \mid k = \overline{1, m}\}$.
Визначимо функцію $h(y) = \max\limits_{1 \le k \le m} g_{x_k}(y), y \in X$. Тоді $h \in \bar{A}$, причому також $\forall y \in X$:
$f(y) - \varepsilon \le h(y) \le f(y) + \varepsilon$. Для будь-якої функції $f \in C(X)$ ми знайшли $h \in A$, для якої $\|h - f\| < \varepsilon$.
Отже, $\bar{A} = C(X)$. ∎

1.9 Теорема Арцела-Асколі

Definition 1.9.1 Сім'я функції $\mathcal{F} \subset C(X)$ називається **рівномірно обмеженою**, якщо

$$\exists M > 0 : \forall x \in X, \forall f \in \mathcal{F} : |f(x)| \le M$$

Definition 1.9.2 Сім'я функції $\mathcal{F} \subset C(X)$ називається **одностайно неперервними**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall f \in \mathcal{F}, \forall x, y \in X : \rho(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Theorem 1.9.3 Теорема Арцела-Асколі
Задано X – компактний метричний простір. Нехай послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset C(X)$ рівномірно обмежена та одностайно неперервна. Тоді $\exists\, (f_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ – рівномірно збіжна підпослідовність.

Proof.
Оскільки X – компакт, то X – сепарабельний автоматично (TODO: подивитися, чи є таке твердження). Цю скрізь щільну зліченну множину позначу за $S = \{x_1, x_2, \dots\}$.
Розглянемо послідовність $(f_n(x_1))_{n=1}^{\infty}$, яка обмежена. Тоді за теоремою Бользано-Ваєрштраса, існує збіжна підпослідовність $(f_{1,n}(x_1))_{n=1}^{\infty}$.
Розглянемо послідовність $(f_{1,n}(x_2))_{n=1}^{\infty}$, яка обмежена. Аналогічно існує збіжна підпослідовність $(f_{2,n}(x_2))_{n=1}^{\infty}$.
$\vdots$
Тепер розглянемо діагональну послідовність $(f_{n,n})_{n=1}^{\infty}$. Зауважимо, що вона збігається в кожній точці $x \in S$. Дійсно, $(f_{n,n})_{n=1}^{\infty} \subset (f_{k,n})_{n=1}^{\infty}$, а остання послідовність збігається в точці x_k.

Для зручності цю послідовність перезпозначу за $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Доведемо, що вона рівномірно фундаментальна, внаслідок чого буде рівномірно збіжною. За одностайною неперервністю, $\exists \delta > 0 : \forall x, y, \forall n$: $\rho(x, y) < \delta \implies |g_n(x) - g_n(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Нехай $x \in X$ та $M > \dfrac{1}{\delta}$. Розглянемо $n, m > M$, тоді
$|g_n(x) - g_m(x)| \le |g_n(x) - g_n(s)| + |g_n(s) - g_m(s)| + |g_m(s) - g_m(x)| < 3 \cdot \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.
У цьому випадку $s \in S$ така точка, що $\rho(x, s) < \delta$. Ми можемо це знайти в силу скрізь щільності. (TODO: добити). ∎

2 Початок функціонального аналізу

2.1 Лінійні нормовані простори

Definition 2.1.1 Задано L – лінійний простір над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$.
Задамо функцію $\|\cdot\|\colon L\to\mathbb{R}$, що називається **нормою**, якщо виконуються умови:

$$1)\ \forall x\in L: \|x\|\geq 0 \qquad \|x\|=0 \iff x=0$$
$$2)\ \forall x\in L: \forall\alpha\in\mathbb{R} \text{ або } \mathbb{C}: \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$$
$$3)\ \forall x,y\in L: \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

Тоді пару $(L,\|\cdot\|)$ назвемо **нормованим простором**.
Функцію $\|\cdot\|\colon L\to\mathbb{R}$ ще називають **переднормою**, якщо всі умови виконуються, окрім умови $\|x\|=0 \iff x=0$.

Proposition 2.1.2 Задано $(L,\|\cdot\|)$ – нормований простір. Тоді $\forall x,y\in L: \|x-y\|\geq |\|x\|-\|y\||$.
Вказівка: $\|x\|=\|x+y-x\|$ *та* $\|y\|=\|y+x-y\|$.

Proposition 2.1.3 Задано $(L,\|\cdot\|)$ – нормований простір. Тоді L з метрикою $\rho(x,y)=\|x-y\|$ утворює метричний простір (L,ρ).
Вправа: перевірити три аксіоми.

Corollary 2.1.4 У такому разі справедливі додаткові властивості для заданої метрики:
1) $\forall x,y,z\in L: \rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)$ (інваріантність по відношенню до зсуву);
2) $\forall x,y\in L, \forall\alpha\in\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}: \rho(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|\rho(x,y)$ (однорідність).

Example 2.1.5 Зокрема дані простори будуть нормованими:

1)	$\mathbb{R}$,	$\|x\| = \|x\|$;
2)	$\mathbb{R}^n$,	$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ або навіть $\|\vec{x}\| = \|x_1\|+\dots+\|x_n\|$;
3)	$C([a,b])$	$\|f\| = \max\limits_{t\in[a,b]}\|f(t)\|$;
4)	$L_p(X,\lambda)$,	$\|f\|_p = \left(\int_X \|f\|^p\,d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$.

Тому всі вони будуть автоматично метричними просторами із метрикою, що вище задана.

Example 2.1.6 Дискретний простір (X,d) – метричний, але не нормований.

Definition 2.1.7 Задано $(L,\|\cdot\|)$ – лінійний нормований простір. Оскільки в неї запроваджена метрика, то можна щось казати про присутність чи відсутність повноти метричного простору.
Повний нормований простір називається **банаховим**.

Example 2.1.8 Зокрема нормований простір $C([a,b])$ зі стандартною нормою $\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$ – банехів. Це випливає з курсу математичного аналізу 2 семестру.

Example 2.1.9 Задамо підпростір $C([0,1])$ із нормою із $L_2([0,1],\lambda_1)$, де λ_1 – міра Лебега. Доведемо, що в такому разі $C([0,1])$ уже не буде банаховим.
Розглянемо таку функціональну послідовність $\{x_n, n\geq 1\}\subset C([0,1])$, що задається таким чином:
$$x_n(t)\begin{cases} 0, & 0\leq x\leq \frac{1}{2}-\frac{1}{n} \\ \frac{nx}{2}-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\leq x\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\leq x\leq 1\end{cases}.$$
Це набір функцій, де похила частина зі збільшенням n перетворюється в вертикальну лінію. Зауважимо, що якщо взяти поточкову границю, то отримаємо $x(t)=\begin{cases}0, & 0\leq x\leq\frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2}<x\leq 1\end{cases}$. При цьому
$$\|x_n-x\|_2^2=\int_{[0,1]}|x_n-x|^2\,d\lambda_1=\int_0^1|x_n(t)-x(t)|^2\,dt=\dots=\frac{1}{6n}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$
Отже, $\{x_n\}$ в просторі $C([0,1])$ із нормою L_2 збігається до точки $x\notin C([0,1])$, але при цьому буде граничною для $C([0,1])$. Тобто $C([0,1])$ не буде замкненим, тож $C([0,1])$ – не повний, або не банахів.

Proposition 2.1.10 Задано $(L, \|\cdot\|)$ – нормований простір. Тоді норма $\|\cdot\| \colon L \to \mathbb{R}$ – неперервна.
*Вказівка: оскільки $\rho(x,y) = \|x-y\|$, то звідси $\|x\| = \rho(x,0)$. Далі **Prp. 1.6.7**.*

Definition 2.1.11 Задані $(X, \|\cdot\|_1)$ та $(X, \|\cdot\|_2)$ – два нормовані простори.
Ці два нормовані простори називаються **ізометричними**, якщо

$$\exists A \colon X \to Y \text{ – ізоморфізм між просторами} : \|Ax\|_2 = \|x\|_1$$

Remark 2.1.12 Ізоморфізм L – автоматично ізометрія, це випливає зі збережння норми. Саме тому слово "ізометричні" в означенні вище виправдане.

Remark 2.1.13 У метричному просторі був критерій Кантора, який я переформулюю під нормований простір.
$(L, \|\cdot\|)$ – банахів $\iff$ виконується умова Кантора (тобто будь-яка послідовність замкнених куль, що стягується, має непорожній перетин).
Так ось, в нормованому просторі не обов'язково вимагати умову $r_n \to 0$.

Definition 2.1.14 Задано $(L, \|\cdot\|)$ – нормований простір та $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset L$.
Вираз $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} x_n$ називають **частковою сумою**. Припустимо, що послідовність часткових сум збігається – тоді границю позначають за ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, а сам ряд називають **збіжним**.

2.2 Коротко про топологічні векторні простори

Definition 2.2.1 Векторний простір E називається **топологічним**, якщо існує на ній така топологія, що

$$+ \colon E \times E \to E \text{ – неперервна операція;}$$
$$\cdot\lambda \colon \mathbb{R}(\mathbb{C}) \times E \to E \text{ – неперервна операція.}$$

На множині $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ розглядається стандартна топологія.

Тимчасово позначу два відображення по-нормальному, маємо $\mathrm{add} \colon E \times E \to E$ та $\mathrm{scalar} \colon \mathbb{R} \times E \to E$.

Theorem 2.2.2 Задано L – нормований простір. Тоді L – топологічний векторний простір.

Proof.
Оскільки L – нормований простір, то він метричний, а кожний метричний простір індукує топологію. Оберемо саму ту топологію $\tau_{\|\cdot\|}$ та доведемо, що на ній лінійні операції – неперервні.
Оберемо будь-яку точку $(x,y) \in L \times L$ та покажемо неперервність операції $+$ на неї.
Нехай $B(x+y; r)$ – окіл $x+y$. Хочемо довести, що існує окіл U точки (x,y), щоб виконувалось $+(U) \subset B(x+y;r)$. Маємо $z_1 + z_2 \in +(U)$, тоді хочемо $z_1 + z_2 \in B(x+y;r)$. Тобто потрібно $\|z_1 + z_2 - x - y\| \leq \|z_1 - x\| + \|z_2 - y\| < r$. Якщо розглядати точки $z_1 \in B\left(x; \dfrac{r}{2}\right)$ та $z_2 \in B\left(y; \dfrac{r}{2}\right)$, то отримаємо бажане. Можемо покласти $U = B\left(x; \dfrac{r}{2}\right) \times B\left(y; \dfrac{r}{2}\right)$.
Якщо взяти інший окіл V точки $x+y$, то ми можемо охопити кулею $B(x+y;r) \supset V$.
Отже, $+$ – неперервна операція.

Оберемо будь-яку точку $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times L$ та покажемо неперервність операції $\cdot\lambda$ на неї.
Нехай $B(\lambda x; r)$ – окіл точки λx. Хочемо довести, що існує окіл U точки (λ, x), щоб виконувалось $\cdot\lambda(U) \subset B(\lambda x; r)$. Маємо $\mu z \in \cdot\lambda(U)$, тоді хочемо $\mu z \in B(\lambda x; r)$. Тобто потрібно
$\|\lambda x - \mu z\| \leq |\lambda - \mu| \|x\| + |\mu| \|x - z\|$
(TODO: додумати) ■

2.3 Факторизація напівнорми

Задано L – простір із напівнормою $\|\cdot\|$. Позначимо $M = \{x \in L : \|x\| = 0\}$.

Lemma 2.3.1 M – підпростір векторного простору L.

Як було в лінійній алгебрі, встановимо відношення еквівалентності $x \sim y \iff x - y \in M$ на векторному просторі L. Ми вже знаємо, що $L/_M$ буде векторним простором, де задаються операції так:
$(x_1 + M) + (x_2 + M) = (x_1 + x_2) + M$;
$\lambda(x + M) = \lambda x + M$.

Тепер уведемо функцію $\| \cdot \|_{L/_M}$ ось таким чином: $\|x + M\|_{L/_M} \overset{\text{def.}}{=} \|x\|_L$. Доведемо, що це буде задавати норму на $L/_M$.
Спочатку доведемо коректність означення. Дійсно, нехай $x + M = y + M$. Тоді звідси $x - y \in M$. Зауважимо, що
$|\|x\|_L - \|y\|_L| \leq \|x - y\|_L = 0 \implies \|x\|_L = \|y\|_L \implies \|x + M\|_{L/_M} = \|y + M\|_{L/_M}$.
Щодо властивостей номри. Це вже точно напівнома. Тобто залишилося довести, що $\|x + M\|_{L/_M} = 0 \iff x + M = M$.
$\|x + M\|_{L/_M} = 0 \implies \|x\| = 0 \implies x \in M \implies x + M = M$.

Example 2.3.2 Маємо простір $C^1([a,b])$ із напівнормою $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$. Зауважимо, що лише функції $x(t) = const$ задовольняють умові $\|x\| = 0$. Тобто в нашому випадку підпростір $M = \{x \in C^1([a,b]) : \|x\| = 0\} = \{c \mid c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. Тоді звідси маємо факторпростір $C^1([a,b])/_{\mathbb{R}}$ – функції, що рівні з точністю до константи.

2.4 Обмежені та неперервні лінійні оператори

Definition 2.4.1 Задано $(X, \| \cdot \|_X), (Y, \| \cdot \|_Y)$ – нормовані простори.
Лінійний оператор $A \colon X \to Y$ називають **обмеженим**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall x \in X : \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$$

Надалі ми ці норми розрізняти не будемо, бо буде з контексту зрозуміло.

Remark 2.4.2 Маємо обмежений оператор A. Зауважимо, що множина всіх констант, які обмежують оператор, тобто множина $\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$, буде непорожньою (бо оператор обмежений) та обмеженою знизу числом 0. Значить, існує $\inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$.

Definition 2.4.3 Задано X, Y – нормовані простори.
Нормою лінійного оператора A називається величина

$$\|A\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$$

Remark 2.4.4 Зауважимо, що для всіх $x \in X$ виконується $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.
Дійсно, для кожного $\varepsilon > 0$ існує стала $C_\varepsilon > 0$, для якої $C_\varepsilon < \|A\| + \varepsilon$. Тож для всіх $x \in X$ справедлива нерівність $\|Ax\| \leq C_\varepsilon\|x\| < (\|A\| + \varepsilon)\|x\|$. Тому ця нерівність виконуватиметься також при $\varepsilon \to 0 + 0$. Таким чином, $\|A\| \in \{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$, тобто інфімум досягається.
Отже, норма $\|A\|$ – це найменше число, що обмежує лінійний оператор A.

Theorem 2.4.5 Задано X, Y – нормовані простори та $A \colon X \to Y$ – обмежений оператор. Тоді $\|A\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Proof.
Спочатку доведемо, що $\|A\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Уже відомо, що $\forall x \in X : \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, тоді звідси $\forall x \in X \setminus \{0\} : \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$, таким чином $\sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$. Залишилося довести, що строга нерівність не допускається.
!Припустимо, що $\sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} < \|A\|$, тобто існує $\varepsilon > 0$, для якого $\sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\| - \varepsilon$. Тоді звідси випливає, що $\forall x \in X \setminus \{0\} : \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| - \varepsilon \implies \forall x \in X : \|Ax\| \leq (\|A\| - \varepsilon)\|x\|$. Таким чином, $\|A\| - \varepsilon$ – це константа, яка обмежує оператор, тоді за означенням норми, $\|A\| - \varepsilon \geq \|A\|$ – суперечність!

Отже, ми довели рівність, тобто $\|A\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$. ■

Theorem 2.4.6 Задано X, Y – нормовані простори та $A\colon X \to Y$ – обмежений оператор. Тоді $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Proof.
Ми доведемо ось такий ланцюг нерівностей: $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \ge \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \ge \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.
Оберемо такий $x \neq 0$, щоб $\|x\| \le 1$. Тоді виконується нерівність $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \|Ax\|$. Таким чином, $\sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \le \sup\limits_{\substack{\|x\|\le 1\\ x\neq 0}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$.
Зрозуміло, що виконується нерівність $\sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \le \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$.
Залишилося довести, що $\sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Дана нерівність є наслідком того, що для кожного $x \neq 0$ число $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|$ належить множині $\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$. ■

Example 2.4.7 Задано лінійний оператор $A\colon l_2 \to l_2$ таким чином: $A(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Довести, що A – обмежений оператор та знайду норму.
Згадаємо, що норма $\|(x_1, x_2, \dots\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots}$. Оцінимо оператор:
$\|A(x_1, x_2, \dots)\| = \|(x_2, x_3, \dots)\| = \sqrt{|x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} \le \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} = 1 \cdot \|(x_1, x_2, \dots)\|$.
Отже, A – обмежений оператор, бо знайшли константу $C = 1$, що обмежує.
$\|A\| = \sup\limits_{\|(x_1,x_2,\dots)\|=1} \|A(x_1, x_2, \dots)\| = \sup\limits_{\|(x_1,x_2,\dots)\|=1} \|(x_2, x_3, \dots)\| = \sup\limits_{\|(x_1,x_2,\dots)\|=1} \sqrt{|x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} =$
$= \sup\limits_{\|(x_1,x_2,\dots)\|=1} \sqrt{1 - \|x_1\|^2} = 1$.

Example 2.4.8 Задано лінійний оператор $A\colon C([0,1]) \to C([0,1])$, таким чином: $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t \tau x(\tau)\,d\tau$.
Довести, що A – обмежений оператор та знайти норму.
Конкретно в цьому випадку розглядатиметься норма $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
$\|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \left| \displaystyle\int_0^t \tau x(\tau)\,d\tau \right| \le \max\limits_{t\in[0,1]} \displaystyle\int_0^t |\tau||x(\tau)|\,d\tau = \int_0^1 |\tau||x(\tau)|\,d\tau \le \int_0^1 |\tau| \max\limits_{\tau\in[0,1]} |x(\tau)|\,d\tau =$
$= \displaystyle\int_0^1 \tau\|x\|\,d\tau = \|x\| \frac{\tau^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\|x\|$.
Отже, A – обмежений оператор. Залишилося знайти норму.
Оскільки $\|Ax\| \le \dfrac{1}{2}\|x\|$, то звідси випливає $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \le \dfrac{1}{2}$. Із іншого боку, оберемо функцію $x(t) = 1$, для якої $\|x\| = 1$. Тоді отримаємо, що $\|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \left| \displaystyle\int_0^\tau \tau\,d\tau \right| = \max\limits_{t\in[0,1]} \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}$.
Таким чином, отримаємо $\|A\| = \dfrac{1}{2}$.

Example 2.4.9 Покажемо, що оператор $A\colon C^1([0,1]) \to C^1([0,1])$, що заданий як $(Af)(t) = f'(t)$, буде необмеженим.
Оберемо послідовність $f_n = \sin(2\pi nt)$, причому $\|f_n\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |\sin(2\pi nt)| = 1$. Тоді звідси
$\|Af_n\| = \|2\pi nt \cos(2\pi nt)\| = 2\pi n \|\cos(2\pi nt)\| = 2\pi n \max\limits_{t\in[0,1]} |\cos(2\pi nt)| = 2\pi n \to +\infty$.

Proposition 2.4.10 Задано X, Y – нормовані простори та $\dim X < \infty$ та $A\colon X \to Y$ – лінійний оператор. Тоді A – обмежений.
Внаслідок цього, всі оператори між скінченновимірними векторними просторами – обмежені.

Proof.
Дійсно, нехай $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис X, нехай на неї стоїть норма $\|x\|_2$, тоді маємо наступне:
$\|Ax\| = \|A(x_1e_1 + \dots + x_ne_n)\| = \|x_1Ae_1 + \dots + x_nAe_n\| \le |x_1|\|Ae_1\| + \dots + |x_n|\|Ae_n\| \le$
$\le \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}\sqrt{\|Ae_1\|^2 + \dots + \|Ae_n\|^2} = C\|x\|_2$.
Якби була би інша норма $\|\cdot\|$, то вона еквівалентна $\|\cdot\|_2$, а тому обмеженість зберігається. ■

Theorem 2.4.11 Задано X, Y – нормовані простори та $A\colon X \to Y$ – лінійний оператор.
A – обмежений $\iff$ A – неперервний в точці 0.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – обмежений. Оберемо послідовність $\{x_n\} \subset X$ так, щоб $x_n \to 0$. Звідси отримаємо $\|Ax_n - A0\| = \|Ax_n\| \le \|A\|\|x_n\| \to 0$. Отже, $Ax_n \to A0$ при $n \to \infty$, що підтверджує неперервність.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A – неперервний в точці 0.
!Припустимо, що A – необмежений оператор. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує точка $x_n \in X$, для якої $\|Ax_n\| > n\|x_n\|$ (ясно, що $x_n \neq 0$). Таким чином, $\dfrac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \left\| A\left(\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| > n$. Для зручності позначу $w_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|} \in X$, тобто ми вже маємо $\|Aw_n\| > n$. Оскільки відображення A – неперервне в нулі, то для послідовності $\left\{\dfrac{1}{n}w_n, n \ge 1\right\}$, для якої $\dfrac{1}{n}w_n \to 0$ виконується $A\dfrac{w_n}{n} \to A0 = 0$ – суперечність в силу нерівності! Бо в нас $\left\|A\dfrac{w_n}{n}\right\| > 1$. ■

Remark 2.4.12 Насправді, A – неперервний в точці 0 $\iff$ A – неперервний на X.
Сторона $\boxed{\Leftarrow}$ зрозуміла. По стороні $\boxed{\Rightarrow}$ маємо $x_0 \in X$ та припустимо, що $\{x_n\}$ – довільна послідовність, де $x_n \to x_0$. Тоді цілком зрозуміло, що $x_n - x_0 \to 0$, але за неперервністю в нулі, маємо $A(x_n - x_0) = Ax_n - Ax_0 \to A0 = 0$. Таким чином, $Ax_n \to Ax_0$.

Theorem 2.4.13 Множина $\mathcal{B}(X, Y)$ – множина всіх обмежених лінійних операторів – буде підпростором $\mathcal{L}(X, Y)$, а також буде нормованим простором із заданою нормою за означенням вище.

Proof.
Дійсно, нехай $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$, тобто вони обмежені. Хочемо довести, що $A+B, \alpha A \in \mathcal{B}(X, Y)$, тобто вони теж обмежені. Дійсно, справедливі наступні оцінки:
$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|$.
$\|(\alpha A)x\| = |\alpha|\|Ax\| \le |\alpha|\|A\|\|x\|$.
Отже, дійсно $A + B, \alpha A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Тепер доведемо, що вищезгадана норма лінійного обмеженого оператора – дійсно норма.
$\|A\| \ge 0$ – зрозуміло. Також якщо $\|A\| = 0$, то звідси $\|Ax\| \le \|A\|\|x\| = 0$, тобто $Ax = 0$, причому для всіх $x \in X$; або $A = O$. Навпаки, якщо $A = O$, тобто $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \{0\} = 0$.
Ми вже маємо оцінку $\|\alpha Ax\| \le |\alpha|\|A\|\|x\|$ при всіх $x \in X$, тому й при всіх x з умовою $\|x\| = 1$. Таким чином, $\|\alpha A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| \le |\alpha|\|A\|$. Із цієї оцінки випливає, що $\|A\| = \|\alpha^{-1}\alpha A\| \le |\alpha^{-1}|\|\alpha A\| \implies \|\alpha A\| \ge |\alpha|\|A\|$. Таким чином, $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ (у тому числі при $\alpha = 0$).
Ми вже маємо оцінку $\|(A+B)x\| \le (\|A\| + \|B\|)\|x\|$ при всіх $x \in X$, тому й при всіх x з умовою $\|x\| = 1$. Таким чином, $\|A + B\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| \le \|A\| + \|B\|$ – третя властивість норми. ■

Theorem 2.4.14 Простір $\mathcal{B}(X, Y)$ буде банаховим, якщо Y – банахів.

Proof.
Нехай $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}(X, Y)$ – фундаментальна послідовність.
Зауважимо, що $(A_n x)_{n=1}^\infty \subset Y$ – фундаментальна також при всіх $x \in X$. Дійсно, із фундаментальності $(A_n)_{n=1}^\infty$ маємо, що $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \ge N : \|A_n - A_m\| < \varepsilon$, але тоді $\forall x \in X : \|(A_n - A_m)x\| \le \|A_n - A_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$, звідси й випливає фундаментальність.
Тоді при кожному $x \in X$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = z_x$. Ми можемо визначити як раз новий оператор $A\colon X \to Y$, де $Ax = z_x$ (границя єдина, тому визначення адекватне). Залишилися три етапи.
I. *Лінійність.* Дійсно, нехай $x, y \in X$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді маємо
$A(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} A_n x + \beta \lim\limits_{n\to\infty} A_n y = \alpha Ax + \beta Ay$.
II. *Обмеженість.* Оскільки $(A_n)_{n=1}^\infty$ – фундаментальна, то $(A_n)_{n=1}^\infty$ – обмежена, тобто $\exists C > 0 : \forall n \ge 1 : \|A_n\| \le C$. Тоді в силу неперервності норми матимемо $\|Ax\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x\| \le C\|x\|$.
III. $A_n \to A$. Згадаємо нерівність $\|(A_n - A_m)x\| < \varepsilon\|x\|$ при всіх $x \in X$, при всіх $\varepsilon > 0$ та $n, m \ge N$. Спрямуємо $m \to \infty$, тоді отримаємо $\|(A_n - A)x\| \le \varepsilon\|x\|$, тому й $\|A_n - A\| \le \varepsilon < 2\varepsilon$. ■

Proposition 2.4.15 Нехай $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$. Тоді композиція $AB \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Proof.
Можна, звісно, було опиратися на композицію неперервних відображень. Але доведемо неперервність інакше.
$\|BAx\| \leq \|B\|\|Ax\| \leq \|B\|\|A\|\|x\|$.
Звідси, окрім обмеженості, ми довели оцінку $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$. ■

2.5 Продовження неперервних операторів

Задані X, Y – нормовані простори, $X_0 \subset X$ та $A \in \mathcal{B}(X_0, Y)$. Питання полягає в тому, чи існує розширення $\tilde{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ оператора A, тобто $\tilde{A}|_{X_0} = A$. Причому нас буде цікавити таке розширення, що $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Remark 2.5.1 Якщо таке розширення допустиме, то вже звідси $\|\tilde{A}\| \geq \|A\|$. Дійсно,
$\|\tilde{A}\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|\tilde{A}x\|}{\|x\|} \geq \sup\limits_{x \in X_0 \setminus \{0\}} \dfrac{\|\tilde{A}x\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \in X_0 \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$.

Proposition 2.5.2 Задані X, Y – відповідно нормований та банахів простори та $X_0 \subset X$ – щільний підпростір. Тоді для кожного $A \in \mathcal{B}(X_0, Y)$ існує єдиний розширений оператор $\tilde{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$, тобто $\tilde{A}|_{X_0} = A$ та при цьому $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.
Це твердежння описує так зване неперервне продовження оператора.

Proof.
Нехай є послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X_0$, де $x_n \to x \in X$. Зауважимо, що тоді в цьому випадку $(Ax_n)_{n=1}^\infty$ – фундаментальна. У силу банаховості $(Ax_n)_{n=1}^\infty$ буде збіжним. Тож визначимо оператор $\tilde{A}x = \lim\limits_{n \to \infty} Ax_n$.
I. *$\tilde{A}$ визначений коректно.*
Нехай є дві послідовності $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$, для яких $x_n \to x,\ y_n \to x$. Значить, тоді
$\|Ax_n - Ay_n\| = \|A(x_n - y_n)\| \leq \|A\|\|x_n - y_n\| \to 0 \implies \lim\limits_{n \to \infty} Ax_n = \lim\limits_{n \to \infty} Ay_n$.

II. *$\tilde{A}$ розширює оператор A.*
Справді, нехай $x \in X_0$. Оберемо стаціонарну послідовність $(x)_{n=1}^\infty \subset X_0$, де $x \to x$. Тоді $\tilde{A}x = \lim\limits_{n \to \infty} Ax = Ax$. Отже, звідси $\tilde{A}|_{X_0} = A$.

III. *$\tilde{A}$ лінійний оператор.*
Нехай $x, y \in E$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді звідси
$A(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n \to \infty} A(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim\limits_{n \to \infty} Ax_n + \beta \lim\limits_{n \to \infty} Ay_n = \alpha Ax + \beta Ay$.

IV. $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.
Оберемо $X_0 \ni x_n \to x \in X$. Оскільки A – обмежений, то $\|Ax_n\| \leq \|A\|\|x_n\|$. Спрямовуючи $n \to \infty$, ми отримаємо $\|\tilde{A}x\| \leq \|A\|\|x\|$. Автоматично довели, що $\tilde{A}$ – обмежений оператор. Раз це виконується для всіх $x \in E$, то отримаємо $\|\tilde{A}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\tilde{A}x\| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|A\|\|x\| = \|A\|$. Тобто звідси $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$.
Зважаючи на зауваження вище, маємо $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

V. *$\tilde{A}$ – едине розширення.*
!Припустимо, що існує інший оператор $\tilde{\tilde{A}}$, яке також є розширенням A з усіма умовами, що задані в твердженні. Маємо $x \in X$, тож існує послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X_0, x_n \to x$. Тоді
$\tilde{\tilde{A}}x \overset{\tilde{\tilde{A}} \text{ – обмежений}}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \tilde{\tilde{A}}x_n = \lim\limits_{n \to \infty} Ax_n \overset{\text{def. } \tilde{A}}{=} \tilde{A}x$. Суперечність! ■

Theorem 2.5.3 Теорема Гана-Банаха
Задано E – нормований простір та $G \subset E$ – підпростір. Тоді для кожного функціонала $l \in G'$ існує продовження $\tilde{l} \in E'$, тобто $\tilde{l}|_G = l$, причому $\|\tilde{l}\| = \|l\|$.

Proof.
1. Обмежимось випадком, коли E – дісний та сепарабельний простір.
I. *Доведемо, що l можна продовжити на деякий підпростір $E \supset F \supsetneq G$.*
Нехай G – підпростір E та $G \neq E$. Зафіксуємо $y \notin G$ та розглянемо підпростір $F = \text{span}\{G \cup \{y\}\}$.

Тобто кожний елемент $x \in F$ записується як $x = g + \lambda y$ при $g \in G, \lambda \in \mathbb{R}$. Визначимо оператор $\tilde{l}(x) = l(g) + \lambda c$, де $c = \tilde{l}(y)$. За побудовою, такий оператор – лінійний.
Тепер залишилося підібрати таке $c \in \mathbb{R}$, щоб виконувалося $\|\tilde{l}\| = \|l\|$ – тим самим ми й обмеженість доведемо автоматично. Але згідно зі зауваження, нам треба підібрати $c \in \mathbb{R}$, щоб $\|\tilde{l}\| \leq \|l\|$.
Обмежимося поки що $\lambda > 0$. Нехай зафіксовано $h_1, h_2 \in G$ та зауважимо, що справедлива нерівність:
$l(h_2) - l(h_1) = l(h_2 - h_1) \leq |l(h_2 - h_1)| \leq \|l\|\|h_2 - h_1\| = \|h\|\|(h_2 + y) - (y + h_1)\| \leq \|l\|\|h_1 + y\| + \|l\|\|h_2 + y\|$.
Звідси випливає, що $-\|l\|\|h_1 + y\| - l(h_1) \leq \|l\|\|h_2 + y\| - l(h_2)$.
Оскільки це $\forall h_1, h_2 \in G$, то тоді $\sup\limits_{h_1 \in G}(-\|l\|\|h_1 + y\| - l(h_1)) \leq \inf\limits_{h_2 \in G}(\|l\|\|h_2 + y\| - l(h_2))$.
Для зручності супремум позначу за a_1 та інфімум за a_2. Оберемо число $c \in \mathbb{R}$ так, щоб $a_1 \leq c \leq a_2$. Звідси справедлива така нерівність:
$\forall h \in G : -\|l\|\|h + y\| - l(h) \leq c \leq \|l\|\|h + y\| - l(h)$.
Тепер покладемо елемент $h = \lambda^{-1} g$ та домножимо обидві частини нерівності на λ. Оскільки ми домовилися $\lambda > 0$, то знаки нерівностей зберігаються. Коротше, отримаємо:
$-\|l\|\|g + \lambda y\| - l(g) \leq \lambda c \leq \|l\|\|g + \lambda y\| - l(g)$.
$-\|l\|\|g + \lambda y\| \leq l(g) + \lambda c \leq \|l\|\|g + \lambda y\|$.
$|\tilde{l}(x)| = |l(g) + \lambda c| \leq \|l\|\|g + \lambda y\| = \|l\|\|x\|$.
Власне, далі аналогічними міркуваннями (як в попередньому твердженні) отримаємо $\|\tilde{l}\| \leq \|l\|$.
Тепер що робити при $\lambda < 0$. Перепишемо $x = -(-g + (-\lambda)y)$. У нас тепер $-\lambda > 0$ та $-x = t = -g + (-\lambda)y$, звідси отримаємо
$|\tilde{l}(t)| \leq \|l\|\|t\| \implies |\tilde{l}(x)| \leq \|l\|\|x\|$.

II. *Тепер доведемо, що продовежння на нашому конкретному E існує.*
Оскільки E – сепарабельний, то існує (ми оберемо зліченну) множина $A = \{x_1, x_2, \dots\}$, яка є щільною підмножиною E. Також ми досі маємо $G \subset E$ – підпростір.
Позначимо $x_{n_1} \in A$ – перший з елементів, де $x_{n_1} \notin G$. За кроком I, існує l_1 – продовження l на $G_1 = \operatorname{span}\{G \cup \{x_{n_1}\}\}$.
Позначимо $x_{n_2} \in A$ – перший з елементів, де $x_{n_2} \notin G_1$. За кроком I, існує l_2 – продовження l_1 на $G_2 = \operatorname{span}\{G_1 \cup \{x_{n_2}\}\}$.
$\vdots$
Отримаємо ланцюг підпросторів $G \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots$ та набір функціоналів $l_1, l_2, \dots$, для яких:
$\forall n \geq 1: \qquad l_n \colon G_n \to \mathbb{R}$ – обмежена; $\qquad l_n|_G = l; \qquad \|l_n\| = \|l\|$.
Покладемо множину $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, яка є лінійною. Визначимо функціонал $L_0 \colon M \to \mathbb{R}$ таким чином:
$x \in M \implies x \in G_N \implies L_0(x) = l_N(x)$. Зрозуміло цілком, що L_0 – лінійний, а також $\|L_0\| = \|l\|$.
Оскільки $M \supset A$ та A всюди щільна, то M – всюди щільна. Отже, за попереднім твердженням, існує продовження $L \colon E \to \mathbb{R}$, для якого $\|L\| = \|L_0\| = \|l\|$.
Висновок: ми довели теорему Гана-Банаха для випадку, коли E – дійсний сепарабельний.

2. Тепер будемо доводити теорему для E – довільний дійсний нормований простір. Все ще $G \subset E$. Позначимо за l_p – продовження l зі збереженням норми на множині $P \supset G$. Таке продовження існує див (1. та I.). Позначимо X – множина всіх таких продовжень. На ній введемо відношення $\preceq$ таким чином:
$l_p \preceq l_q \iff P \subset Q$ та $l_Q(x) = l_P(x), \forall x \in P$.
Зрозуміло, що $\preceq$ задає відношення порядку, внаслідок чого X – частково впорядкована. Зафіксуємо $Y = \{l_{P_\alpha} \mid \alpha \in A\}$ – будь-яку лінійно впорядкувану підмножину X. Знайдемо верхню грань.
Для цього покладемо $P_* = \bigcup\limits_{\alpha \in A} P_\alpha$ та на множині P_* задамо функціонал l_* таким чином:
$x \in P_* \implies x \in P_{\alpha_0} \implies l_*(x) = l_{\alpha_0}(x)$.
Зрозуміло, що l_* – лінійний, причому $\|l_*\| = \|l\|$. На множині $\bar{P}_*$ продовжимо функціонал, як було в твердженні – отримаємо функціонал $l_{\bar{P}_*}$, причому $\|l_{\bar{P}_*}\| = \|l_*\| = \|l\|$. Даний функціонал $l_{\bar{P}_*}$ на $\bar{P}_*$ буде верхньою гранню Y. Отже, за лемою Цорна, існує максимальний елемент X. Це буде функціонал L, який визначений на E (у протилежному випадку його можна було би ще продовжити та він не був би максимальним елементом).
Висновок: ми довели теорему Гана-Банаха для випадку, коли E – дійсний (не обов'язково сепарабельний) нормований простір. ■

Насправді, на цьому теорема Гана-Банаха ще не закінчена. Ми можемо її довести на випадок, коли

нормований простір E – комплексний. Спершу кілька деталей.
Нехайй E – комплексний лінійний нормований простір. Розглянемо одночасно $E_{\mathbb{R}}$ – асоційований з E дійсний нормований простір; тобто під час множення на скаляр ми допускаємо лише дійсні коефіцієнти. Зауважимо, що $E_{\mathbb{R}} = E$ як множини, утім не як простори.
Розглянемо довільний функціонал $l\colon E \to \mathbb{C}$. Раз $l(x) \in \mathbb{C}$, то для кожного $x \in E$ можна записати функціонал як $l(x) = m(x) + in(x)$. У цьому випадку $m(x) = \operatorname{Re} l(x),\ n(x) = \operatorname{Im} l(x)$.

Proposition 2.5.4 Нехай $l\colon E \to \mathbb{C}$ – лінійний та обмежений функціонал. Тоді $m, n\colon E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ задають лінійний обмежений функціонал.

Proof.
Нехай $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ та $x, y \in E$. Тоді ми отримаємо наступне:
$l(\alpha x + \beta y) = m(\alpha x + \beta y) + in(\alpha x + \beta y)$ (з одного боку)
$l(\alpha x+\beta y) = \alpha l(x)+\beta l(y) = \alpha(m(x)+in(x))+\beta(m(y)+in(y)) = (\alpha m(x)+\beta m(y))+i(\alpha n(x)+\beta n(y))$ (з іншого боку).
Знаючи, що комплексне число рівне тоді й лише тоді, коли дійсні та уявні частини збігаються, отримаємо
$m(\alpha x + \beta y) = \alpha m(x) + \beta m(y) \qquad n(\alpha x + \beta y) = \alpha n(x) + \beta n(y)$.
Отже, m, n – лінійний функціонали.
Обмеженість m (аналогічно з n) випливає з такго ланцюга нерівностей:
$|m(x)| \leq |m(x) + in(x)| = |l(x)| \leq \|l\|\|x\|$. ■

Proposition 2.5.5 $n(x) = -m(ix)$.
Іншими словами, ми можемо функціонал l відновити повністю, знаючи функціонал m.

Proof.
$m(ix) + in(ix) = l(ix) = il(x) = i(m(x) + in(x)) = -n(x) + im(x)$.
$\implies n(x) = -m(ix)$.
$l(x) = m(x) - im(ix)$. ■

Повернімось назад до теореми Гана-Банаха. Доб'ємо її на випадок, коли E – комплексний нормований простір.

Proof.
Маємо $E \supset G$ – два комплексних простори та $E_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{R}}$ – асоційовані простори. Маємо функціонал $l\colon G \to \mathbb{C}$, який визначається дійсним функціоналом $m\colon G_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. Оскільки це дійсний функціонал, ми можемо продовжити до $M\colon E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ зі збереженням норми.
Покладемо $L(x) = M(x) - iM(ix)$. Неважко буде довести, що L – комплексний лінійний функціонал.
Залишилося довести, що $\|L\| = \|l\|$. Знову ж таки, достатньо довести $\|L\| \leq \|l\|$. Запишемо $L(x) = |L(x)|e^{i\varphi}$, де $\varphi = \arg L(x)$. Тоді
$|L(x)| = e^{-i\varphi}L(x) = L(e^{-i\varphi}x) = M(e^{-i\varphi}x) = |M(e^{-i\varphi}x)| \leq \|M\|\|e^{-i\varphi}x\| = \|m\|\|x\| \leq \|l\|\|x\|$.
Отже, $\|L\|$. Ми тут юзали той факт, що $L(y) = M(y)$ при $L(y) \in \mathbb{R}$. ■

Remark 2.5.6 Зауважимо, що якщо G – лінійна множина (але не підпростір), то теорема Гана-Банаха все одно виконується.
У цьому випадку $\bar{G}$ буде підпростором E. Функціонал l продовжується неперервним чином на $\tilde{G}$, а далі застосовується доведена теорема.

2.6 Деякі наслідки з теореми Гана-Банаха

Corollary 2.6.1 Нехай E – лінійний нормований простір та $G \subset E$ – підпростір. Тоді для будь-якого вектора $y \notin G$ існує функціонал $l \in E'$, для якого $\|l\| = 1,\ l(y) = \rho(y, G),\ l|_G = 0$.
Цей наслідок про існування функціоналу, що поводиться як обчислення відстані від елемента y до підпростору G. Ми можемо підібрати такий, щоб норма була 'нормальною'.

Proof.
На підпросторі $F = \operatorname{span}\{G \cup \{y\}\}$ визначимо функціонал l_0 таким чином:
$l_0(g + \lambda y) = \lambda \rho(y, G)$.
Цілком зрозуміло, що l_0 – лінійний неперервний функціонал на F, також $l_0(y) = \rho(y, G)$, нарешті $l_0(g) = l_0(g + 0y) = 0$. Обчислимо $\|l_0\|$.
$\|l_0\| = \sup\left\{ \dfrac{|l(g + \lambda y)|}{\|g + \lambda y\|} \mid g + \lambda y \in F \right\} = \sup\left\{ \dfrac{|\lambda|\rho(y, G)}{|\lambda| \cdot \|\lambda^{-1}g + y\|} \mid g + \lambda y \in F \right\} =$

$= \rho(y, G) \sup\{\|g' - y\|^{-1} \mid g' \in G\} = \rho(y, G) \inf\limits_{g' \in G} \|g' - y\| = 1$, де елемент $g' = \lambda^{-1} g \in G$.
За теоремою Банаха, існує продовження l до E, причому $\|l\| = \|l_0\| = 1$. ■

Corollary 2.6.2 Для кожного $y \in E \setminus \{0\}$ існує функціонал $l \in E'$, що $\|l\| = 1,\ l(y) = \|y\|$.
Цей наслідок про існування функціоналу, що поводиться як знаходження норми.
Вказівка: $G = \{0\}$ до попереднього наслідку.

Corollary 2.6.3 Лінійні неперевні функціонали розділяють точки нормованого простора E.
Іншими словами, $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 \neq x_2 : \exists l \in E' : l(x_1) \neq l(x_2)$.
Вказівка: попередній наслідок, $y = x_1 - x_2 \neq 0$.

Definition 2.6.4 Задано E – нормований простір.
Підмножина $M \subset E$ називається **тотальною**, якщо

$$\overline{\operatorname{span} M} = E$$

Іншими словами, лінійна оболонка $\operatorname{span} M$ скрізь щільна.

Theorem 2.6.5 Нехай E – нормований простір та $M \subset E$.
M – тотальна в $E \iff \forall l \in E' : l|_M \equiv 0 \implies l|_E \equiv 0$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: M – тотальна множина. Нехай $l \in E'$ такий, що $l|_M \equiv 0$. Оскільки функціонал лінійний, то $l|_{\operatorname{span} M} \equiv 0$. Оскільки M – тотальна, то $\operatorname{span} M \subset E$ буде щільною підмножиною, тож ми можемо неперервно продовжити l до E. Отримаємо $l|_E \equiv 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall l \in E' : l|_M \equiv 0 \implies l|_E \equiv 0$.
!Припустимо, що M не є тотальною. Тобто $\overline{\operatorname{span} M} \overset{\text{позн.}}{=} G \subsetneq E$, тобто існує вектор $y \in E \setminus G$. За першим наслідком, можна взяти функціонал $l \in E'$, що тіпа описує відстань, тобто $\|l\| = 1,\ l|_G = 0$. Але з того, що $l|_G \equiv 0 \implies l|_M \equiv 0$ випливає $l|_E \equiv 0$. Суперечність! ■

Proposition 2.6.6 Нехай E – нормований простір та l – лінійний неперервний функціонал з E. Тоді $\ker l$ – замкнений підпростір E. Навіть більше: $\ker l$ буде гіперпідпростором, тобто це означає, що $E = \operatorname{span}\{\ker l, y\}$ при $y \notin \ker l$.

Proof.
Те, що $\ker l$ підпростір, тут все зрозуміло. Якщо взяти $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \ker l$ таку, що $x_n \to x$, тоді маємо послідовність $(l(x_n) = 0)_{n=1}^{\infty}$ – стаціонарна послідовність, при цьому $0 = l(x_n) \to l(x)$, тому $x \in \ker l$.
Нехай $y \notin \ker l$. Тоді доведемо, що кожний елемент $x \in E$ записується як $x = g + \lambda y$, де $g \in \ker l, \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Покладемо $\lambda = \dfrac{l(x)}{l(y)}$ та розглянемо вектор $g = x - \lambda y$. Оскільки $l(g) = l(x) - \lambda l(y) = 0$, то звідси $g \in \ker l$. Отже, $x = g + \lambda y$ – шукане представлення. ■

2.7 Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у деяких банахових просторах

2.7.1 Базис Шаудера

Definition 2.7.1 Нехай E – банахів простір.
Послідовність $\{e_1, e_2, \dots\} \subset E$ називається **базисом Шаудера** простора E, якщо

$$\forall x \in E : \exists! x_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

Proposition 2.7.2 Нехай E – банахів простір, що містить базис Шаудера. Тоді E – сепарабельний.

Proof.
Випадок дійсного нормованого простору.
Оберемо множину $A = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k \mid x_k \in \mathbb{Q} \right\}$.

Нехай $x \in E$, тоді за умовою, $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ єдиним чином. Нехай задане $\varepsilon > 0$. Тоді на кожному з $\left(x_k - \frac{\varepsilon}{\|e_k\| 2^k}, x_k + \frac{\varepsilon}{\|e_k\| 2^k}\right)$ існує раціональне число $y_k \in \mathbb{Q}$. Оберемо $y \in A$ так, що $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$.
Позначимо $x^{(n)}, y^{(n)}$ за часткову суму ряда (перші n додаються). Тоді
$\|x^{(n)} - y^{(n)}\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|(x_k - y_k) e_k\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \|e_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k}$.
Далі спрямовуємо $n \to \infty$. Тоді $x^{(n)} \to x, y^{(n)} \to y$. Після чого отримаємо $\|x - y\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.
Отже, A скрізь щільна множина, ну тобто $\bar{A} = E$.

Випадок комплексного нормованого простору.
Оберемо множину $A = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \mid x_k = \alpha_k + i\beta_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q} \right\}$. Далі плюс-мінус аналогічно. ■

Remark 2.7.3 Якщо зробити *клік* сюди, то тут буде стаття про приклад сепарабельного банахового простору, який не містить базис Шаудера. Доведено П. Енфло. Власне, це означає, що зворотне твердження не працює.

Theorem 2.7.4 Простір l_p містить базис Шаудера. Причому цей базис матиме вигляд $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, де кожний $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{на } i\text{-ій позиції}}, 0, \dots)$.

Proof.
I. *Існування.*
Фіксуємо елемент $x \in l_p$, де $x = (x_1, x_2, \dots)$ та $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$. Покладемо елемент (що є частковою сумою) $s_n = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ та доведемо, що послідовність $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна. При $n > m$
$\|s_n - s_m\|_p = \|(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n, 0, \dots)\|_p = \left(\sum_{k=m+1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Фундаментальність $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ випливає зі збіжності числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$. Оскільки l_p – банахів, то $(l_p)_{n=1}^{\infty}$ – збіжний, тобто $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ збігається до деякого елемента. Зокрема доведемо, що $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = x$.
$\|x - s_n\|_p = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_p = \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.
Знову зі збіжності числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ випливає бажане.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що $x = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$ – друге представлення. Тоді отримаємо $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) e_k = 0$.
Звідси отримаємо $\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) e_k \right\| = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$. Єдина можливість тут – це $x_k = y_k$ при всіх $k \in \mathbb{N}$ – суперечність! ■

2.7.2 Простір, що спряжений до $l_p, 1 < p < \infty$

Theorem 2.7.5 Нехай $p, p' > 1$ таким чином, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тоді $(l_p)' \cong l_{p'}$ ізометричним чином. Часто пишуть просто $(l_p)' = l_{p'}$.

Lemma 2.7.6 Для будь-якого $f \in (l_p)'$ існує елемент $(f_k)_{k=1}^\infty \in l_{p'}$, такий, що $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k$ для всіх $x \in l_p$.

Proof.
Нехай $f \in (l_p)'$ (тобто лінійний неперервний функціонал). Тоді звідси отримаємо:
$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) \overset{f(e_k) \overset{\text{покл.}}{=} f_k}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k.$$
Доведемо, що $(f_k)_{k=1}^\infty \in l_{p'}$. Для цього підберемо елемент $y \in l_p$ ось таким чином, щоб
$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k f_k \overset{\text{був рівний}}{=} \sum_{k=1}^{n} |f_k|^{p'}.$$
Можна для цього взяти елемент $y = \left(|f_1|^{p'-1} e^{-i \arg f_1}, \dots, |f_n|^{p'-1} e^{-i \arg f_n}, 0, 0, \dots\right)$. Оскільки f обмежений, то звідси $|f(y)| \le \|f\| \|y\| = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} \left||f_k|^{p'-1} \cdot e^{-i \arg f_k}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p}}$.
Маючи щойно отриману нерівність та рівність трошки вище, отримаємо
$$\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{p'} \le \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p}} \implies \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \le \|f\|, \forall n \in \mathbb{N}.$$
Остання оцінка стверджує, що ряд збіжний, внаслідок чого $(f_k)_{k=1}^\infty \in l_{p'}$. ■

Lemma 2.7.7 Для кожного $(f_k)_{k=1}^\infty \in l_{p'}$ рівність $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k$ визначає лінійний та неперервний функціонал на l_p.

Proof.
Нехай $(f_k)_{k=1}^\infty \in l_{p'}$. Завдяки нерівності Гьольдера, отримаємо:
$$|f(x)| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} = c\|x\|_p < +\infty.$$
Отже, f – обмежений та $\|f\| \le c$. Як доводиться лінійність, цілком зрозуміло. ■

Під час доведення першої леми ми отримали нерівність $c \le \|f\|$. Маючи ще нерівність $c \ge \|f\|$ з другої леми, ми отримаємо $\|f\| = c$, тобто $\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$. Ліворуч мається на увазі норма від $f \in (l_p)'$, а праворуч норма $(f_k) \in l_{p'}$.

Короче, маємо $A\colon l_{p'} \to (l_p)'$, який задається таким чином: $A(f_k)_{k=1}^\infty(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$ (оператор A повертає функціонал, тому я тут написав аргумент (x)). Може, красивіше було б написати $A(f_k)_{k=1}^\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \_ \cdot f_k$, ще не знаю. Він є ізоморфізмом, оскільки існує $A^{-1}\colon (l_p)' \to l_{p'}$, що задається як $A^{-1} l = (l(e_1), l(e_2), \dots)$. Усі два оператори коректно визначені за теоремами вище. Також ми довели, що $\|l\| = \|Af\| = \|f\|$.

2.7.3 Простір, що спряжений до l_1

Theorem 2.7.8 $(l_1)' \cong l_\infty$ ізометричним чином. Часто пишуть просто $(l_1)' = l_\infty$.

Proof.
Нехай $(f_k)_{k=1}^\infty \in l_\infty$. Визначимо функціонал $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k$, який вже ясно, що лінійний. Залишилося довести обмеженість.
$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k\right| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|f\|_\infty \|x\|_1.$$
Із цього всього ми встановили $l_\infty \subset (l_1)'$.

Нехай $f \in (l_1)'$, тобто лінійний та обмежений функціонал. Аналогічним чином отримаємо, що $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k$, де $f_k = f(e_k)$. Тепер хочемо $(f_k)_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$. Дійсно це спрацює, бо
$\|f\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f(e_k)| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \|f\|\|e_k\|_1 = \|f\| \sup\{1, 1, \dots\} = \|f\| < \infty$.
Причому ми також довели, що $\|f\| = \|f\|_\infty$. ■

2.7.4 Простори, що спряжені до l_∞

Proposition 2.7.9 $(l_\infty)' \supsetneq l_1$.

Спочатку доведемо вкладення. Дійсно, нехай $(f_k)_{k=1}^{\infty} \in l_1$, тоді функціонал $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k,\ x \in l_\infty$ все одно лінійний, а обмеженість доводиться, завдяки оцінки
$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_k x_k| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$.
Отже, довели вкладення, при цьому ми ще довели $\|f\| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$.
Якщо покласти такий $x \in l_\infty$, де $x_k = e^{-i \arg f_k}$, то взагалі отримаємо $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = \|f\|_1$.

Час з'ясувати, чому не допускається рівність. Розглянемо лінійну множину $C \subset l_\infty$, яка містить збіжні послідовності комплексних чисел. Визначимо $f(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$ для кожного $x = (x_1, x_2, \dots) \in C$. Цілком ясно, що це лінійний функціонал. Обмеженість вилпиває з оцінки $|f(x)| = \left|\lim_{k\to\infty} x_k\right| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = \|x\|$.
Отже, $f \in C'$ (лінійний та неперервний функціонал), причому $\|f\| \le 1$. Ми можемо продовжити функціонал f до функціонала $F \in (l_\infty)'$ зі збереженням норми, за теоремою Гана-Банаха. Функціонал F не можна записати як $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$. Представимо, що можна. Маємо послідовність $x \in C$, ліміт не зміниться при зміні скінченного числа членів, тобто $F(x) = f(x)$ залишиться таким самим. Проте із іншого боку, зміниться $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.

2.7.5 Простір, що спряжений до $L_p, 1 < p < \infty$.

Theorem 2.7.10 Нехай $1 < p < \infty$ та $p' > 1$, причому $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Також задано $(X, \lambda, \mathcal{F})$ – вимірний простір, де λ – σ-скінченна міра. Простір $(L_p)' \cong L_{p'}$ ізометричним чином. Ізоморфізм $l\colon (L_p)' \to L_{p'}$ задається наступним чином:
$l(x) = \int_X h(q)x(q)\, d\lambda(q)$.
Доведення див. в pdf теорії міри.

2.7.6 Простір, що спряжений до $C(K)$

Припустимо, що K – метричний компакт та $\mathfrak{B}(K)$ – борельова σ-алгебра.

Definition 2.7.11 Заряд ω на вимірній множині $(K, \mathfrak{B}(K))$ назвемо **регулярним**, якщо

$$\omega_+, \omega_- \text{ – обидва регулярні}$$

Позначення: $W(K)$ – множина регулярних зарядів.

Remark 2.7.12 $W(K)$ буде векторним простором. Також якщо покласти $\|\omega\| = |\omega|(K)$, де $|\omega|$ – повна варіація заряда, то тоді ми отримаємо нормований простір. Причому $W(K)$ – банахів додатково.

Theorem 2.7.13 Теорема Маркова
$(C(K))' \cong W(K)$ ізометричним чином. Ізоморфізм $l\colon (C(K))' \to W(K)$ задається таким чином:
$l(x) = \displaystyle\int_K x(q)\, d\omega(q)$.
Без доведення. Наведу частинний випадок даної теореми.

Theorem 2.7.14 Теорема Ріса
Для кожного функціонала $l \in (C([0,1]))'$ існує фукнція g обмеженої варіації, для якої l можна представити через інтеграл Рімана-Стілт'єса таким чином:
$l(x) = \displaystyle\int_0^1 x(t)\, dg(t)$, причому $V(g;[0,1]) = \|l\|$.

Proof.
Нехай $l \in (C([0,1]))'$, визначений на підпросторі $M([0,1])$ – простір обмежених функцій. За теоремою Гана-Банаха, продовжимо до функціонала $L \in (M([0,1])'$.
Нехай $t \in [0,1]$, позначимо $u_t = \mathbb{1}_{[0,t]}$. Сама функція $u_t \in M([0,1])$, тому можна покласти $g(t) = L(u_t)$. Покажемо, що сама $g \in BV([0,1])$.
Оберемо розбиття π відрізкі $[0,1]$ та позначимо $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(g(t_i) - g(t_{i-1}))$. Тоді маємо:
$V_\pi(g,[0,1]) = \displaystyle\sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \varepsilon(Lu_{t_i} - Lu_{t_{i-1}}) = L\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\right) = L\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}\right)$.
Позначимо тимчасово за $z = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}\right)$. Вона може приймати значення $0, 1, -1$, тому звідси $\|z\| = 1$. Оскільки L – обмежений, то
$|V_\pi(g,[0,1])| = |Lz| \le \|L\|\|z\| = \|l\|$.
Ця нерівність свідчить про те, що $g \in BV([0,1])$, причому автоматично $V(g,[0,1]) \le \|l\|$.

Тепер доведемо рівність. Нехай $x \in C([0,1])$. Покладемо такі прості функції:
$x_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^n x\left(\frac{k-1}{n}\right)\left(u_{\frac{k}{n}}(t) - u_{\frac{k-1}{n}}(t)\right) = \sum_{k=1}^n x\left(\frac{k-1}{n}\right) \mathbb{1}_{\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]}(t)$.
$L(x_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^n x\left(\frac{k-1}{n}\right)\left(g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$.
Оскільки $x \in C([0,1])$, то $x \in \mathcal{RS}([0,1],g)$. Більш того, $(x_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність простих функцій, що збігається рівномірно до x. Отже, маючи це все, можна написати рівність:
$L(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} L(x_n) = \int_0^1 x(t)\, dg(t)$.
Проте $x \in C([0,1])$, тож звідси $L(x) = l(x) = \displaystyle\int_0^1 x(t)\, dg(t)$.
Нарешті, $|l(x)| = \left|\displaystyle\int_0^1 x(t)\, dg(t)\right| \le \left|\int_0^1 |x(t)|\, dg(t)\right| \le \|x\| V(g,[0,1])$. Таким чином, $\|l\| \le V(g,[0,1])$.
Знайшли варіацію $V(g,[0,1]) = \|l\|$. ■

Remark 2.7.15 Теорема працює, якщо розглянути довільний відрізок $[a,b]$.

2.8 Вкладення нормованих просторів

Theorem 2.8.1 Нехай E – лінійний нормований простір. Тоді $E \subset E''$, під другою множиною мається на увазі друге спряження, тобто $E'' = (E')'$. При цьому $\|x\|_E = \|x\|_{E''}$.

Proof.
Для зручності елементи простору E позначимо через $x, y, \dots$; елементи простору E' – через $l, m, \dots$; елементри простору E'' – через $L, M, \dots$
Визначимо відображення φ ось так: кожному $x \in E$ поставимо в відповідність $\varphi(x) = L_x \in E''$. При цьому ми покладемо $L_x(l) = l(x)$ при всіх $l \in E'$.
Доведемо, що L_x – лінійний та неперервний функціонал. Нехай $l, m \in E', \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, тоді звідси $L_x(\lambda l + \mu m) = (\lambda l + \mu m)(x) = \lambda l(x) + \mu m(x) = \lambda L_x(l) + \mu L_x(m)$. Далі маємо
$|L_x(l)| = |l(x)| \le \|l\| \cdot \|x\|$.
Отже, довели бажане, причому ми отримали оцінку $\|L_x\| \le \|x\|$.
Тепер доведемо, що саме φ – лінійне відображення. Нехай $x, y \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, тоді ми хочемо

довести рівність $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$, або що теж саме $L_{\lambda x+\mu y} = \lambda L_x + \mu L_y$. Така рівність має виконуватися для кожного функціонала $l \in E'$. Дійсно,
$L_{\lambda x+\mu y}(l) = l(\lambda x + \mu y) = \lambda l(x) + \mu l(y) = \lambda L_x(l) + \mu L_y(l) = (\lambda L_x + \mu L_y)(l)$.
Доведемо, що φ – ін'єктивне відображення. !Припустимо, що $x \in \ker\varphi$ та $x \neq 0$. Тоді за наслідком теореми Гана-Банаха, існує функціонал $l \in E'$, для якого $\|l\| = 1,\ l(x) = \|x\|$. Звідси $L_x(l) = l(x) = \|x\| \neq 0$, тобто $L_x \neq 0$. Це означає лише, що $x \notin \ker\varphi$ – суперечність!
Залишилося довести, що $\|x\| = \|L_x\|$. Точніше, залишилося $\|x\| \leq \|L_x\|$. При $x = 0$ все ясно. При $x \neq 0$, знову за наслідком Гана-Банаха, існує функціонал $l \in E'$, для якого $\|l\| = 1,\ l(x) = \|x\|$. Тоді $\|x\| = l(x) = L_x(l) \leq \|L_x\|\|l\| = \|L_x\|$.
Отже, $\varphi\colon E \to E''$ – лінійне та ін'єктивне відображення, що зберігає норму. Значить, E ізометрично ізоморфний $\operatorname{Im} E \subset E''$. Отже, кожний елемент $x \in E$ можемо ототожнити з його елементом $L_x \in E''$. Звідси отримаємо вкладення $E \subset E''$ та рівність $\|x\|_E = \|x\|_{E''}$. ■

Definition 2.8.2 Задано E – банахів простір.
Простір E називають **рефлексивним**, якщо

$$E'' = \varphi(E),$$

де $\varphi\colon E \to E''$, який задавали під час доведення теореми.

Example 2.8.3 Зокрема рефлексивними будуть такі простори: l_p та L_p при $1 < p < \infty$.
Також скінченновимірний простір E буде рефлексивним.

Example 2.8.4 Водночас нерефлексивними будуть такі простори: $l_1,\ l_\infty,\ L_1,\ L_\infty$ (останні два нерефлексивні при $\dim L_1 = \infty$, $\dim L_\infty = \infty$; $C(K)$ (буде нерефелексивним, якщо K нескінченна множина).

Theorem 2.8.5 Теорема Банаха-Штайнгауза
Задано E – банахів простір та $(l_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність функціоналів з E'. Припустимо, що $\forall x \in E : (l_n(x))_{n=1}^\infty$ – обмежена послідовність. Тоді $(\|l_n\|)_{n=1}^\infty$ (послідовність норм) – обмежена.
Дана теорема носить назву 'принцип рівномірної обмеженості'.

Proof.
Нехай $\forall x \in E : (l_n(x))_{n=1}^\infty$ – обмежена послідовність. Доведемо, що існує замкнений шар $B[a;r]$, де множина $\{l_n(x), x \in B[a;r]\}_{n=1}^\infty$ обмежена.
!Припустимо навпаки, що множина $\{l_n(x)\}_{n=1}^\infty$ не обмежена в жодному замкненому кулі (як наслідок, в жодному відкритому кулі).
Візьмемо довільну відкриту кулю $B(x_0;r_0)$, де ось ця множина $\{l_n(x), x \in B(x_0;r_0)\}_{n=1}^\infty$ не обмежена. Це, що знайдуться $x_1 \in B(x_0;r_0)$ та $n_1 \in \mathbb{N}$, для яких $|l_{n_1}(x_1)| > 1$. Оскільки l_{n_1} неперервний, то нерівність $|l_{n_1}(x)| > 1$ виконується в деякому околі $B(x_1;r_1)$ (?). За необхідністю, зменшимо радіус r_1 таким чином, щоб $B[x_1;r_1] \subset B(x_0;r_0)$, причому сам радіус $r_1 \overset{\text{зобов'язаний}}{\leq} \dfrac{r_0}{2}$ (дійсно, можна підібрати $r_1 = \dfrac{r_0 - \rho(x_0,x_1)}{2}$).
Ця множина $\{l_n(x), x \in B(x_1;x_1)\}$ теж не обмежена. Тоді знайдуться $x_2 \in B(x_1;x_1)$ та $n_2 > n_1$, для яких $|l_{n_2}(x_2)| > 2$. Аналогічно нерівність $|l_{n_2}(x)| > 2$ виконуватиметься в деякому замкненому шарі $B[x_2;r_2] \subset B(x_1;r_1)$, причому $r_2 \overset{\text{зобов'язаний}}{\leq} \dfrac{r_0}{2^2}$.

$\vdots$

Продовжуючи процес, отримаємо послідовність замкнених шарів $B[x_0;r_0] \supset B[x_1;r_1] \supset \dots$, причому $r_k \to 0$, числа $n_1 < n_2 < \dots$ такі, що $|l_{n_k}(x)| > k$ при $x \in B[x_k;r_k]$. За теоремою Кантора, існує точка $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Звідси випливає, що $|l_{n_k}(x^*)| > k$ при всіх k – суперечність! Бо послідовність $(l_{n_k}(x^*))_{k=1}^\infty$ мала б бути обмеженою за початковими умовами.
Висновок: існує шар $B[a;r]$, де множина $\{l_n(x), x \in B[a;r]\}$ обмежена. Тобто $\exists c' > 0 : \forall x \in B[a;r], \forall n \in \mathbb{N} : |l_n(x)| \leq c'$. Досить буде довести, що множина $\{l_n(x), x \in B[0;1]\}$ обмежена. Для кожного $x \in B[0;1]$ покладемо $x' = rx + a$, тоді $x = \dfrac{1}{r}(x' - a)$. Оскільки $x' \in B[a;r]$, то $|l_n(x')| < c'$.
Звідси
$|l_n(x)| = \left|l_n\left(\dfrac{1}{r}(x' - a)\right)\right| = \dfrac{1}{r}|l_n(x') - l_n(a)| \leq \dfrac{1}{r}(|l_n(x')| + |l_n(a)|) \leq \dfrac{c' + c_a}{r} = c.$
Висновок: $\exists c > 0 : \forall x \in B[0;1], \forall n \geq 1 : |l_n(x)| \leq c$. Проте умова $x \in B[0;1]$ означає, що $\|x\| \leq 1$. Тобто нерівність $|l_n(x)| \leq c$ для всіх $\|x\| \leq 1$. Зокрема звідси $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} |l_n(x)| = \|l_n\| \leq c$. ■

Remark 2.8.6 Пояснення (?). Якби для кожного околу $B(x_1, r)$ (зокрема при $r = \dfrac{1}{n}$) існувала точка, де нерівність порушується, то ми би побудували послідовність, що прямує до x_1, при цьому ми би отримали $|l_{n_1}(x)| \leq 1$.

Remark 2.8.7 У теоремі Банаха-Штайнгауза умова того, що E – банахів, – суттєва.
Зокрема розглянемо простір c_0 – послідовності, що збігаються до нуля. Далі розглянемо підпростір $c_{00} \subset c_0$ – послідовності, де всі члени нулі, починаючи з деякого номера.

Theorem 2.8.8 Теорема Банаха-Штайнгауза (для операторів)
Задано X, Y – банахів та просто лінійній нормований простір, а також $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(X, Y)$. Припустимо, що $\forall x \in X : (A_n x)_{n=1}^{\infty}$ – обмежена послідовність. Тоді $(\|A_n\|)_{n=1}^{\infty}$ (послідовність норм) – обмежена.
Доведеня теореми повністю повторюється.

2.9 Про види збіжностей

Ми вже знаємо один тип збіжностей. Переформулюю ще раз означення, але доповню це одним словом в дужках.

Definition 2.9.1 Задано E – лінійний нормований простір.
Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ називається **(сильно) збіжною** до $x \in E$, якщо

$$\lim_{n \to \infty} \|x - x_n\| = 0$$

Позначення: $x_n \to x$.
Тобто сильна збіжність – це збіжність за нормою.

Definition 2.9.2 Нехай E – лінійний нормований простір.
Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ називається **слабко збіжною** до $x \in E$, якщо

$$\forall l \in E' : l(x_n) \to l(x)$$

Позначення: $x_n \overset{w}{\to} x$.

Якщо розглянути спряжений простір E', то крім сильної та слабкої збіжності існує ще один тип.

Definition 2.9.3 Нехай E – лінійний нормований простір.
Послідовність функціоналів $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$ називається **слабко* збіжною** до $l \in E'$, якщо

$$\forall x \in E : l_n(x) \to l(x)$$

Позначення: $l_n \overset{w^*}{\to} l$.

Proposition 2.9.4 Задано E – лінійний нормований простір та послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Тоді:
$x_n \to x \implies x_n \overset{w}{\to} x$.

Proof.
Дійсно, нехай $x_n \to x$, тобто звідси $\|x - x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Маючи це, отримаємо $\forall l \in E'$:
$|l(x_n) - l(x)| = |l(x_n - x)| \leq \|l\| \|x_n - x\| \to 0$. Таким чином, $x_n \overset{w}{\to} x$. ■

Proposition 2.9.5 Задано E – лінійний нормований простір та послідовність $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$. Тоді:
$l_n \to l \implies l_n \overset{w}{\to} l \implies l_n \overset{w^*}{\to} l$.

Proof.
Імплікація $l_n \to l \implies l_n \overset{w}{\to} l$ була доведена вище. Залишилося $l_n \overset{w}{\to} l \implies l_n \overset{w^*}{\to} l$.
Нехай $l_n \overset{w}{\to} l$, тобто $\forall L \in E'' : L(l_n) \to L(l)$. Зафіксуємо елемент $x \in E$. Ми вже доводили, що $E \subset E''$, тобто $x \in E''$, де в цьому випадку $x = L_x$ такий, що $L_x(l) = l(x)$. Звідси
$l_n(x) = L_x(l_n) \to L_x(l) = l(x)$. Звідси випливає, що $l_n \overset{w^*}{\to} l$. ■

Example 2.9.6 Зараз покажемо, чому в зворотний бік не працює.

$x_n \overset{w}{\to} x \;\not\Longrightarrow\; x_n \to x.$
Розглянемо простір l_p та зафіксуємо послідовність $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, де кожний e_j – елемент базиса Шаудера. Спочатку покажемо, що $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ слабко збігається. Зафіксуємо довільний функціонал $l \in (l_p)' = l_{p'}$, тобто $l = (l_1, l_2, \dots)$. Це означає, що $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |l_j|^{p'} < +\infty$, а тому за необхідною умовою, $|l_j|^{p'} \to 0 \implies l_j \to 0$. Із іншого боку, ми вже знаємо, що $l_j = l(e_j) \to 0 = l(0)$ при $j \to \infty$. Це як раз свідчить про те, що $e_j \overset{w}{\to} 0$.
Проте зауважимо, що $\|e_j - 0\| = \|e_j\| = 1 \not\to 0$. Це як раз означає, що $e_j \not\to 0$.

$f_n \overset{w^*}{\to} f \;\not\Longrightarrow\; f_n \overset{w}{\to} f.$
Розглянемо простір l_1 та зафіксуємо послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n = ?$. Спочатку покажемо, що $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ слабко* збігається. Зафіксуємо довільний елемент $x \in c_0$. Значить, $x_j \to 0$ при $j \to \infty$. Оберемо $f_n = (-1)^n$. Тоді звідси $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k f_n^k(e_k)$. (TODO: не можу добити)

Proposition 2.9.7 Утім якщо E – рефлексивний лінійний нормований простір та $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$, тоді $l_n \overset{w}{\to} l \iff l_n \overset{w^*}{\to} l$.

Remark 2.9.8 Границя єдина за слабкою* збіжністю, слабкою збіжністю та сильною збіжністю.

Proposition 2.9.9 Задано E – банахів та послідовність $(l_n)_{n=1}^{\infty}$, яка слабко* збігається. Тоді $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ – обмежена.

Proof.
Дійсно, маємо $\forall x \in E : l_n(x) \to l(x)$, тобто числова послідовність $(l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ збігається, тоді обмежена. Значить, за теоремою Банаха-Штайнгауза, послідовність $(\|l_n\|)_{n=1}^{\infty}$ обмежена. ■

Theorem 2.9.10 Задано E – банахів простір та $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$ – така послідовність, що $\forall x \in E : (l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна. Тоді $\exists l \in E' : l_n \overset{w^*}{\to} l$.

Proof.
Оскільки $\forall x \in E : (l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, то (як числова послідовність) вона збіжна. Визначимо функціонал $l(x) = \lim\limits_{n\to\infty} l_n(x)$. Зважаючи на той факт, що l_n – лінійний, то l – лінійний в силу граничного переходу. Залишилося довести обмеженість.
При кожному $x \in E$ послідовність $(l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ (вже з'ясували) збіжна, тож обмежена. Але за теоремою Банаха-Штайнгауза, $\exists c > 0 : \forall n \geq 1 : \|l_n\| \leq c$. Значить, $\forall n \geq 1, \forall x \in E : |l_n(x)| \leq \|l\|\|x\| \leq c\|x\|$. Знову переходячи до границі, отримаємо $|l(x)| \leq c\|x\|$.
Отже, $\forall x \in E : l_n(x) \to l(x) \implies l_n \overset{w^*}{\to} l$. ■

Theorem 2.9.11 Критерій слабкої* збіжності
Задано E – банахів та множина M – скрізь щільна в E. Нехай $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$.

$$l_n \overset{w^*}{\to} l \iff \begin{cases} \forall x \in M : l_n(x) \to l(x) \\ \exists c > 0 : \forall n \geq 1 : \|l_n\| \leq c \end{cases}.$$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $l_n \overset{w^*}{\to} l$. Тобто $\forall x \in E : l_n(x) \to l(x)$, зокрема $\forall x \in M$. Обмеженість норм $\|l_n\|$ автоматично виконується.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: ці дві умови. Ми хочемо $\forall y \in E : l_n(y) \to l(y)$.
При $x \in M$ маємо наступне:
$|l_n(y) - l(y)| \leq |l_n(y) - l_n(x)| + |l_n(x) - l(x)| + |l(x) - l(y)| \leq \|l_n\|\|y - x\| + |l_n(x) - l(x)| + \|l\|\|x - y\| \leq$
$\leq (c + \|l\|)\|x - y\| + |l_n(x) - l(x)|$.
Проте $\mathrm{Cl}(M) = E$, тож звідси $\forall y \in E : \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in M : \|x - y\| < \dfrac{\varepsilon}{2(c + \|l\|)}$. В силу першої умови, $\exists N : \forall n > N : |l_n(x) - l(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Значить, $|l_n(y) - l(y)| < \varepsilon$. ■

Remark 2.9.12 Судячи з доведення, в $\boxed{\Leftarrow}$ не обов'язково вимагати бути E повним. Також в формулюванні теореми досить вимагати, щоб M була тотальною в E.

Example 2.9.13 На просторі $C([0,1])$ визначимо послідовність $l_n(x) = n \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x(t)\,dt$. Доведемо, що l_n слабо* збіжний.
Розглянемо спочатку простір многочленів на $[0,1]$ – щільна підмножина $C([0,1])$. Оберемо $x(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$. Тоді
$l_n(x) = n \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0\,dt = n\left(\frac{a_n}{n+1}t^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}t^n + \dots + a_0 t\right)\Big|_0^{\frac{1}{n}} \to a_0 = x(0).$
Позначимо новий функціонал $l(x) = x(0)$, який справді лінійний та обмежений. Тоді $l_n(x) \to l(x)$.
При цьому самі норми будуть обмеженими. Справді,
$|l_n(x)| = n\left|\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x(t)\,dt\right| \le n\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} |x(t)|\,dt \le \|x\| \implies \|l_n\| \le 1.$
Отже, за критерієм, $l_n \xrightarrow{w^*} l$.

2.10 Про види збіжностей в операторах

Definition 2.10.1 Задані X, Y – лінійні нормовані простори.
Послідовність операторів $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ називається **рівномірно збіжною** до A, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$$

Позначення: $A_n \rightrightarrows A$ при $n \to \infty$.

Definition 2.10.2 Задані X, Y – лінійні нормовані простори.
Послідовність операторів $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ називається **сильно збіжною** до A, якщо

$$\forall x \in X : \lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$$

Позначення: $A_n \xrightarrow{s} A$ при $n \to \infty$.

Definition 2.10.3 Задані X, Y – лінійні нормовані простори.
Послідовність операторів $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ називається **слабко збіжною** до A, якщо

$$\forall x \in X : A_n x \xrightarrow{w} Ax$$

Позначення: $A_n \xrightarrow{w} A$ при $n \to \infty$.

Proposition 2.10.4 Задані X, Y – лінійні нормовані простори та послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X,Y)$.
Тоді $A_n \rightrightarrows A \implies A_n \xrightarrow{s} A \implies A_n \xrightarrow{w} A$.

Proof.
Нехай $A_n \rightrightarrows A$. Зафіксуємо $x \in X$. Тоді
$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \le \|A_n - A\|\|x\| \to 0$ при $n \to \infty$.
Значить, ми отримали $A_n \xrightarrow{s} A$. Ще раз зафіксуємо $x \in X$. Тоді $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ збігається сильно до $Ax \in Y$. Із сильної збіжності випливає слабка збіжність (минулий розділ), тож $A_n x \xrightarrow{w} Ax$. Отже, $A_n \xrightarrow{w} A$. ■

Example 2.10.5 Зараз покажемо, чому в зворотні боки не працюють.

$A_n \xrightarrow{w} A \;\not\Longrightarrow\; A_n \xrightarrow{s} A$.
Перш за все ознайомимось з оператором $s\colon l_2 \to l_2$ – оператор зсуву, який працює таким чином: $(x_1, x_2, x_3, \dots) \overset{s}{\mapsto} (0, x_1, x_2, \dots)$. Оператор $s \in \mathcal{B}(l_2, l_2)$ (детально це доводити не буду, бо в цілому ясно). Тепер розглянемо послідовність операторів $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, що задані як $A_n = s^n$, тобто певна кількість зсуву. Зауважимо, що $A_n \xrightarrow{w} O$.
Дійсно, нехай $l \in (l_2)'$. Тоді звідси $l(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} l_k x_k$ для деякого елементу $(l_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$. Тоді зауважимо:

$$|l(A_nx)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} l_{n+k}x_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}|l_{n+k}x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|l_{n+k}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{m=n+1}^{\infty}|l_m|\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Тоді звідси $l(A_nx) \to 0 = l(0) = l(Ox)$ через хвіст ряду. Отже, звідси $A_n \xrightarrow{w} O$.
При цьому зауважимо, що $A_n \overset{s}{\not\to} O$. Дійсно,
$\|A_nx\| = \|(\underbrace{0,\dots,0}_{n \text{ штук}}, x_1, x_2, \dots)\| = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2$, якщо взяти $x = e_p, p > n$, то отримаємо $\|A_nx\| = 1$.

$A_n \xrightarrow{s} A \not\Longrightarrow A_n \rightrightarrows A$.
Розглянемо послідовність операторів $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(l_2, l_2)$, де кожний $A_nx = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Зауважимо, що $A_n \xrightarrow{s} I$ (тут I – одиничний оператор).
Дійсно, $\|A_nx - Ix\| = \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\| = \sum_{k=1}^{\infty}|x_{n+k}|^2 \to 0$.
При цьому зауважимо, що $A_n \not\rightrightarrows I$. Дійсно, ми маємо наступне:
$\|A_n - I\| = \sup_{\|x\|=1}\|(A_n - I)x\| \ge \|(A_n - I)e_j\| = \|e_j\| = 1$ (при $j > n$).

Theorem 2.10.6 Задані X, Y – банахові простори та $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ – така послідовність, що $\forall x \in X : (A_nx)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна. Тоді $\exists A \in \mathcal{B}(X, Y) : A_n \xrightarrow{s} A$.
Було шось схоже раніше. Доведення повторюється.

2.11 Обернені оператори

Definition 2.11.1 Бієктивний оператор $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ називається **оборотним**, якщо

$$\exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$$

Theorem 2.11.2 $A \in \mathcal{B}(X, Y)$, що бієктивний – оборотний $\iff \exists m > 0 : \forall x \in X : \|Ax\| \ge m\|x\|$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $A^{-1} \in \mathcal{B}(X, Y)$, тобто $\forall y \in Y : \|A^{-1}y\| \le \|A^{-1}\|\|y\|$. Оскільки A – бієкція, то $\exists! x \in X : y = Ax$. Значить, підставивши в нерівність, отримаємо $\|A^{-1}Ax\| = \|x\| \le \|A^{-1}\|\|Ax\|$. Якщо покласти $m = \|A^{-1}\|^{-1} > 0$, то отримаємо бажану нерівність $\|Ax\| \ge m\|x\|$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\exists m > 0 : \forall x \in X : \|Ax\| \ge m\|x\|$. Якщо взяти елемент $x \in \ker A$, то звідси $\|Ax\| = 0 \ge m\|x\|$, тож автоматично $x = 0$. Отже, існує оборотний оператор $A^{-1} \colon Y \to X$. Залишилося переконатися, що $A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. Ми маємо $x = A^{-1}y$, тоді звідси $\|AA^{-1}y\| = \|y\| \ge m\|A^{-1}y\|$, вналслідок чого $\|A^{-1}y\| \le m^{-1}\|y\|$. ■

Theorem 2.11.3 Задано X – банахів простір та $A \in \mathcal{B}(X, X)$, причому $\|A\| = q < 1$. Тоді оператор $I - A$ буде оборотним, а також $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots$ – тут збіжність рівномірна.

Proof.
Розглянемо послідовність $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, що задана як $S_n = I + A + \dots + A^n$. Доведемо, що вона фундаментальна в $\mathcal{B}(X, X)$.
$\|S_{n+p} - S_n\| = \|A^{n+1} + \dots + A^{n+p}\| \le \|A^{n+1}\| + \dots + \|A^{n+p}\| \le \|A\|^{n+1} + \dots + \|A\|^{n+p} < q^{n+1} + \dots + q^{n+p}$
$\le \dfrac{q^{n+1}}{1-q} \to 0$. Оскільки $q < 1$, то фундаментальність доводиться миттєво.
Оскільки простір X банахів, то звідси $\mathcal{B}(X, X)$ теж банахів, тому $S_n \rightrightarrows S \in \mathcal{B}(X, X)$. Залишилося довести, що $I - A$ – обернений оператор до S, тобто $(I - A)S = S(I - A) = I$. Спочатку зауважимо, що справедлива нерівність:
$\|(I - A)S_n - (I - A)S\| \le \|I - A\|\|S - S_n\| \to 0$.
Тому нам буде досить довести, що $(I - A)S_n \rightrightarrows I$.
$\|(I - A)S_n - I\| = \|I - A^{n+1} - I\| = \|A^{n+1}\| \le q^{n+1} \to 0$. ■

Remark 2.11.4 В умовах теореми, справедлива оцінка $\|(I - A)^{-1}\| \le (1 - \|A\|)^{-1}$.

Theorem 2.11.5 Задані X, Y – банахові простори та оператори $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$, причому оператор A – оборотний та B заданий так, що $\|B\| \le \|A^{-1}\|^{-1}$. Тоді оператор $A + B$ – оборотний.

Proof.
Розглянемо оператор $I + A^{-1}B\colon X \to X$. Зауважимо, що $\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\|\|B\| < 1$, тому $I + A^{-1}B$ оборотний за попередньою теоремою.
Зауважимо, що $A + B = A(I + A^{-1}B)$ – добуток двох оборотних операторів, тому сам оператор $A + B$ буде теж оборотним. ■

Theorem 2.11.6 Нехай X, Y – банахові та $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ – бієктивний. Тоді A – оборотний.
Тобто коли із банахового в увесь банахів простір йде оператор, то обернений уже точно існує. Без доведення поки що.

2.12 Спряжені оператори

Definition 2.12.1 Задані X, Y – нормовані простори та $A \in \mathcal{B}(X, Y)$.
Спряженим до A називають оператор $A^*\colon Y' \to X'$, що визначений так:

$$(A^*l)(x) = l(Ax),\ l \in Y',\ x \in X$$

(насправді, можна трохи послабити умови та попросити $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, але таке рідко буває.)

Remark 2.12.2 Дане означення оператора є коректним.
!Дійсно, припустимо, що існує $l \in Y'$, якому ставиться в відповідність два різні функціонали $m_1, m_2 \in X'$. Отже, має існувати $x \in X$, щоб $m_1(x) \neq m_2(x)$. Проте за визначенням, $(A^*l)(x) = m_1(x) = m_2(x)$ – суперечність!

Theorem 2.12.3 Задано $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Тоді $A^* \in \mathcal{B}(Y', X')$, при цьому маємо $\|A^*\| = \|A\|$.

Proof.
A^* – лінійний.
Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ та $l_1, l_2 \in E_2'$. Тоді для кожного $x \in E_1$ маємо
$(A^*(\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2))(x) = (\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2)(Ax) = \lambda_1 l_1(Ax) + \lambda_2 l_2(Ax) = \lambda_1(A^*l_1)(x) + \lambda_2(A^*l_2)(x)$.
$A^*(\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2) = \lambda_1 A^* l_1 + \lambda_2 A^* l_2$.
(ми довели, що якщо $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то тоді й $A^* \in \mathcal{L}(Y', X')$, але знову ж таки.)

A^* – обмежений.
$|(A^*l)(x)| = |l(Ax)| \leq \|l\|\|Ax\| \leq \|l\|\|A\|\|x\|$. Звідси й випливає нерівність $\|A^*l\| \leq \|A\|\|l\|$.

$\|A^*\| = \|A\|$.
Щойно ми довели, що $\|A^*\| \leq \|A\|$. Для зворотної нерівності зробимо наступне. Оберемо будь-який $x \in E_1$, позначимо $y = Ax$. Тоді за наслідком теореми Гана-Банаха, знайдеться $l \in E_2'$, для якого $\|l\| = 1$ та $l(y) = \|y\|$. Звідси $l(Ax) = \|Ax\|$, а тому $\|Ax\| = |l(Ax)| = |(A^*l)(x)| \leq \|A^*\|\|l\|\|x\| = \|A^*\|\|x\|$. Отже, для всіх $x \in E_1$ справедлива нерівність $\|Ax\| \leq \|A^*\|\|x\|$, зокрема $\|A\| \leq \|A^*\|$. ■

Theorem 2.12.4 Нехай $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ та $B \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Тоді $(BA)^* = A^*B^*$.

Proof.
Для кожного $l \in Z', x \in X$ маємо рівність $((BA)^*l)(x) = l(BAx) = l(B(Ax)) = (B^*l)(Ax)$. Функціонал $B^*l \in Y'$ позначимо за m. Тоді отримаємо $m(Ax) = (A^*m)(x)$. Отже,
$((BA)^*l)(x) = (A^*B^*l)(x)$. ■

Theorem 2.12.5 Нехай $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Тоді $(A^*)^* = A$ за умоовю, що X, Y – рефлексивні.

Proof.
Маємо $A^*\colon Y' \to X'$, беремо до нього спряжений $(A^*)^*\colon X'' \to Y''$, але в силу рефлексивності отримаємо $(A^*)^* \in \mathcal{B}(X, Y)$. У нас вже була відповідність між E, E'', що задається таким чином: $E \ni x \mapsto L_x \in E''$. Тоді для кожного $l \in Y'$ та $x \in X$ маємо
$((A^*)^*L_x)(l) = L_x(A^*l) = (A^*l)(x) = l(Ax) = (AL_x)(l)$. ■

3 Гілбертові простори

3.1 Основні означення

Definition 3.1.1 Передгілбертовим простором називають лінійний простір H над $\mathbb{C}$, на якому задано півторалінійний функціонал $(\cdot,\cdot)\colon H\times H\to\mathbb{C}$, для якого виконуються такі властивості:

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall x\in H: (x,x)\geq 0 \\ 2) & (x,x)=0 \iff x=0 \\ 3) & \forall x,y\in H: (x,y)=\overline{(y,x)} \end{array}$$

Такий функціонал називають **скалярним добутком**. Якщо прибрати умову $(x,x)=0 \iff x=0$, то тоді такий функціонал ще називають **квазіскалярним добутком**.

Remark 3.1.2 Насправді, можна не вимагати, що це півторалінійний функціонал. Ми можемо просто додати четверту умову, що цей функціонал лінійний лише за першим аргументом, тоді випливатиме антилінійність за другим аргументом – значить, буде півторалінійним.

Theorem 3.1.3 Нерівність Коші-Буняковського
Задано H – передгілбертів простір. Тоді $\forall x,y\in H: |(x,y)|^2\leq (x,x)(y,y)$.
Було доведено, див. pdf з лінійної алгебри. Щоправда, там в умові теореми вимагалася скінченність векторного простору, але під час доведення це ми не використовували.

Remark 3.1.4 Нерівність Коші-Буняковсього справедлива й для квазіскалярного добутку.

Remark 3.1.5 $\|(x,y)\|^2=(x,x)(y,y) \iff y=\alpha x$ при $\alpha\in\mathbb{C}$.

Proposition 3.1.6 Задано H – передгілбертів простір. Тоді H – лінійний нормований простір, причому норма задається як $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$.

Remark 3.1.7 Якби був квазіскалярний добуток, то ми би задали вже лише напівнорму.

Proof.
1) $\|x\|=\sqrt{(x,x)}\geq 0$ – зрозуміло. Також $\|x\|=\sqrt{(x,x)}=0 \iff (x,x)=0 \iff x=0$.
2) $\|\lambda x\|=\sqrt{(\lambda x,\lambda x)}=\sqrt{\lambda\bar{\lambda}(x,x)}=\sqrt{\lambda^2(x,x)}=|\lambda|\|x\|$.
3) $\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=\|x\|^2+2\operatorname{Re}(x,y)+\|y\|^2\leq$
$\leq \|x\|^2+2|(x,y)|+\|y\|^2 \overset{\text{нер-ть К-Б}}{\leq} \|x\|^2+2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}+\|y\|^2=\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$.
$\implies \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$. ■

Definition 3.1.8 Нехай H – банахів передгілбертів простір.
Тоді даний простір H ще називають **гілбертовим**.

Proposition 3.1.9 Задано H – передгілбертів простір. Тоді $(\cdot,\cdot)\colon H\times H\to\mathbb{R}$ – неперервне.

Proof.
Дійсно, нехай $x_n\to x_0$ та $y_n\to y_0$. Вони будуть збігатися за нормою (у нас H – нормований), тобто $(\|x_n\|),(\|y_n\|)$ – збіжні послідовності, тому обмежені. Тоді
$|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)|\leq|(x_n,y_n)-(x_0,y_n)|+|(x_0,y_n)-(x_0,y_0)|=|(x_n-x_0,y_n)|+|(x_0,y_n-y_0)|\leq$
$\leq\|x_n-x_0\|\|y_n\|+\|x_0\|\|y_n-y_0\|\leq\|x_n-x_0\|M+\|x_0\|\|y_n-y_0\|\to 0$ (число M обмежує $(\|y_n\|)$).
Отже, $(x,y)\to(x_0,y_0)$ при $x\to x_0, y\to y_0$. ■

3.2 Факторизація квазіскалярного добутку

Задано H – векторний простір зі квазіскалярним добутком $(\cdot,\cdot)$. Позначимо $L=\{x\in E:(x,x)=0\}$.

Lemma 3.2.1 $\forall x\in L,\forall y\in E:(x,y)=0$.
Випливає з нерівності Коші-Буняковсього.

Lemma 3.2.2 L – підпростір векторного простору E.

Як було в лінійній алгебрі, встановимо відношення еквівалентності $x\sim y \iff x-y\in L$ на векторному просторі E. Ми вже знаємо, що $E/_L$ буде векторним простором, де задаються операції так:

$(x_1 + L) + (x_2 + L) = (x_1 + x_2) + L$;
$\lambda(x + L) = \lambda x + L$.

Тепер уведемо білінійний функціонал ось таким чином: $(x_1 + L, x_2 + L)_{E/_L} \overset{\text{def.}}{=} (x_1, x_2)_E$. Доведемо, що це буде задавати скалярний добуток на $E/_L$.

Спочатку доведемо коректність означення. Дійсно, нехай $x_1 + L = y_1 + L$ та $x_2 + L = y_2 + L$. Тоді звідси $x_1 - y_1 \in L$ та $x_2 - y_2 \in L$. Зауважимо, що
$(x_1, x_2)_E - (y_1, y_2)_E = (x_1, x_2)_E - (y_1, x_2)_E + (y_1, x_2)_E - (y_1, y_2)_E = (x_1 - y_1, x_2)_E + (y_1, x_2 - y_2)_E = 0$.
Отже, $(x_1, x_2)_E = (y_1, y_2)_E \implies (x_1 + L, x_2 + L)_{E/_L} = (y_1 + L, y_2 + L)_{E/_L}$.

Щодо властивостей скалярного добутку. Це вже точно квазіскалярний. Тобто залишилося довести, що $(x + L, x + L)_{E/_L} = 0 \iff x + L = L$.
$(x + L, x + L)_{E/_L} = 0 \implies (x, x)_E = 0 \implies x \in L \implies x + L = L$.

3.3 Ортогональне доповнення

Definition 3.3.1 Задано H – гілбертів простір.
Вектори $x, y \in H$ будуть називатися **ортогональними**, якщо

$$(x, y) = 0$$

Позначення: $x \perp y$.

Я залишу еквівалентне означення, яке менж розповсюджене, проте корисне буде для деяких локальних міркувань. Одне з локальних міркувань – це майбутня лема (не теорема) Ріса.

Theorem 3.3.2 Задано H – гілбертів простір.
$x \perp y \iff \forall \lambda \in \mathbb{C} : \|x\| \leq \|x + \lambda y\|$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $x \perp y$, тоді $(x, y) = 0$, а звідси отримаємо
$\|x + \lambda y\|^2 = (x + \lambda y, x + \lambda y) = \|x\|^2 + \lambda(y, x) + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda^2 \|y\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2 \geq \|x\|^2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall \lambda \in \mathbb{C} : \|x\| \leq \|x + \lambda y\|$. Розпишемо ще раз нерівність:
$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 + \lambda(y, x) + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda^2 \|y\|^2$.
$2 \operatorname{Re} \lambda(y, x) + |\lambda|^2 \|y\|^2 \geq 0$.

Оскільки це виконується для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$, то зокрема й для $\lambda = \dfrac{-(x, y)}{\|y\|^2}$ при $y \neq 0$. Отримаємо:
$2 \operatorname{Re} \left(\dfrac{-(x, y)}{\|y\|^2} (y, x) \right) + \dfrac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2} \geq 0$
$-3|(x, y)|^2 \geq 0 \implies (x, y) = 0$. ■

Definition 3.3.3 Задано H – гілбертів простір та $G \subset H$.
Ортогональним доповненням підмножини G називають таку множину:

$$G^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in G : (x, y) = 0\}$$

Remark 3.3.4 Маючи вище теорему, ми можемо переписати ортогональне доповнення інакше:

$$G^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in G : \|x + y\| \geq \|x\|\}$$

Proposition 3.3.5 Задано H – гілбертів простір та $G \subset H$. Тоді $G^\perp$ – замкнений підпростір.

Proof.
Нехай $x_1, x_2 \in G^\perp$, тобто звідси $\forall y \in G : (x_1, y) = 0,\ (x_2, y) = 0$. Звідси випливає, що $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y) = 0$, а тому отримали $\lambda_1 x_1 + \lambda x_2 \in G^\perp$.
Тепер нехай $(x_n)_{n=1}^\infty \subset G^\perp$, де $x_n \to x$. Тепер маємо $(x_n, y) = 0$, але через неперервність, то при $n \to \infty$ отримаємо $(x, y) = 0$, тому $x \in G^\perp$. ■

Уже якось доводилося, що в унітарних просторах E та підпросторі $L \subset E$ кожний вектор розбивається на суму проєктивного та ортогонального вектора. Спробуємо показати, що це можливо також в довільних гілбертових просторах. Це робиться окремо, бо там ми доводили для скінченно вимірного випадку.

Theorem 3.3.6 Про існування проєкції на підпростір
Нехай H – гілбертів простір та $G \subset H$ – підпростір. Тоді для кожного $x \in H$ існує єдиний $y \in G$ такий, що $x - y \in G^\perp$.
По суті, ця теорема каже, що $G^\perp$ точно містить ненульовий вектор, коли $H \neq \{0\}$.

Proof.
I. *Існування.*
Якщо $x \in G$, то кладемо вектор $y = x$.
Нехай $x \in H \setminus G$. Визначимо відстань $d = \rho(x, G) \overset{\text{def.}}{=} \inf\limits_{y \in G} \|x - y\|$. Оскільки $x \notin G$, то звідси $d > 0$. Відокремимо послідовність $(y_n)_{n=1}^\infty$ таку, що $d_n \overset{\text{позн}}{=} \|x - y_n\| \to d$. Доведемо, що $(y_n)_{n=1}^\infty$ буде збіжною до деякого елемента y, який буде нашим шуканим. Для цього треба довести фундаментальність, зокрема довести $\|y_m - y_n\|^2 = (y_m - y_n, y_m - y_n) \to 0$. Натомість будемо оцінювати $|(y_m - y_n, h)|,\ h \in G$.
Для кожного вектора $h \in G$ та скаляра $\lambda \in \mathbb{C}$ ми розглянемо вектор $y_n + \lambda h \in G$. Зрозуміло, що $\|x - (y_n + \lambda h)\| \geq d$, але спробуємо ще оцінити дану норму.
$\|x - (y_n + \lambda h)\|^2 = (x - y_n - \lambda h, x - y_n - \lambda h) = (x - y_n, x - y_n) + (x - y_n, -\lambda h) + (-\lambda h, x - y_n) + (-\lambda h, -\lambda h) = \|x - y_n\|^2 + |\lambda|^2 \|h\|^2 - \lambda(h, x - y_n) - \bar{\lambda}(x - y_n, h)$.
Ми оберемо $\lambda = \dfrac{(x - y_n, h)}{\|h\|^2}$. Тоді отримаємо:
$\|x - (y_n + \lambda h)\|^2 = \dfrac{(x - y_n, h)^2}{\|h\|^2} - \dfrac{(h, x - y_n)(x - y_n, h)}{\|h\|^2} - \dfrac{(h, x - y_n)(x - y_n, h)}{\|h\|^2} + \|x - y_n\|^2 =$
$= d_n^2 - \dfrac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2}$.
Таким чином, отримали $d_n^2 - \dfrac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2} \geq d^2$. Внаслідок чого $|(x - y_n, h)|^2 \leq \|h\|^2 (d_n^2 - d^2)$.
Далі, $|(y_m - y_n, h)| = |(x - y_n, h) - (x - y_m, h)| \leq |(x - y_n, h)| + |(x - y_m, h)| \leq \|h\| \left(\sqrt{d_n^2 - d^2} + \sqrt{d_m^2 - d^2} \right)$.
Оберемо вектор $h = y_m - y_n$, тоді отримаємо наступне:
$\|y_m - y_n\|^2 \leq \|y_m - y_n\| \left(\sqrt{d_n^2 - d^2} + \sqrt{d_m^2 - d^2} \right)$.
$\|y_m - y_n\| \leq \sqrt{d_n^2 - d^2} + \sqrt{d_m^2 - d^2} \to 0$.
Таким чином, послідовність $(y_n)_{n=1}^\infty$ фундаментальна, а в силу повноти збіжна. Тобто $y_n \to y \in G$.
Маючи нерівність $|(x - y_n, h)|^2 \leq \|h\|^2 (d_n^2 - d^2)$, при $n \to \infty$ отримаємо $(x - y, h) = 0$ для всіх $h \in G$.
Це означає, що $x - y \in G^\perp$.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що існує ще один вектор $y' \in G$ так, щоб $x - y' \in G^\perp$. Тоді
$(y - y', h) = (x - y', h) - (x - y, h) = 0, \forall h \in G$. Зокрема якщо обрати $h = y - y'$, то тоді швидко отримаємо $y = y'$ – суперечність! ■

Отже, нехай $x \in H$. За щойно доведеною теоремою, $\exists! x_1 \in H$ такий, що $x_2 \overset{\text{позн.}}{=} x - x_1 \in G^\perp$. Власне, ми отримали однозначний розклад $x = x_1 + x_2$, де вектори $x_1 \in G, x_2 \in G^\perp$.
Перший вектор називається **ортогональною проєкцією**, позначають $x_1 = \operatorname{pr}_G x$.
Другий вектор називається **ортогональним складником**, позначають $x_2 = \operatorname{ort}_G x$.
Отже, кожний вектор $x \in H$ має єдиний розклад в $x = \operatorname{pr}_G x + \operatorname{ort}_G x$.

Власне, якщо H – гілбертів простір та $G \subset H$ – підпростір, то $H = G \oplus G^\perp$.

Proposition 3.3.7 Теорема Піфагора
$\|x\|^2 = \|\operatorname{pr}_G x\|^2 + \|\operatorname{ort}_G x\|^2$.
Вказівка: розписати $\|x\|^2$ та зауважити, що $(\operatorname{pr}_G x, \operatorname{ort}_G x) = 0$.

Remark 3.3.8 Буде корисним залишити таке зауваження. Якщо H – гілбертів простір та $G \subset H$ – замкнений підпростір, то тоді існує $G^\perp \neq \{0\}$. Внаслідок чого ми знайдемо вектор $y \notin G$, причому $\|y\| = 1$, для якого $\forall x \in G : \|x + y\| \geq 1$.

3.4 Простір, спряжений до гілбертового

Theorem 3.4.1 Теорема Ріса
Нехай H – гілбертів. Тоді для будь-якого $l \in H'$ існує єдиний вектор $u \in H$ такий, що $\forall x \in H$: $l(x) = (x, u)$.

Proof.
I. *Існування.*
Якщо $l \equiv 0$, то існує вектор $u = 0$ – все ясно.
Нехай $l \in H'$, де функціонал ненулевий. Розглянемо $G = \ker l$. Існує елемент $y \notin G$ такий, що $\forall x \in H : x = g + \lambda y$ (це виконано за **Prp. 2.6.6**). Можна переписати елемент
$x = g + \lambda(\operatorname{pr}_G y + \operatorname{ort}_G y) = (g + \lambda \operatorname{pr}_G y) + \lambda \operatorname{ort}_G y$.
Позначимо $g' = g + \lambda \operatorname{pr}_G y \in G$, а також $e = \dfrac{\operatorname{ort}_G y}{\|\operatorname{ort}_G y\|} \in G^\perp$. Отже, маємо $x = g' + \mu e$, де в цьому випадку $\|e\| = 1$. Тоді розпишемо функціонал та скалярний добуток:
$l(x) = l(g' + \mu e) = 0 + \mu l(e)$.
$(x, e) = (g' + \mu e, e) = \underline{\mu}\|e\|^2 = \mu$.
$l(x) = l(e)(x, e) = (x, \overline{l(e)}e) \implies u = \overline{l(e)}e$.
Отриманий елемент $u = \overline{l(e)}e$ – шуканий вектор, що задовольняє рівності $l(x) = (x, u)$.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що існує ще один вектор $u' \in H$, для якого $l(x) = (x, u')$. Звідси випливає, що $\forall x \in H : (x, u - u') = 0 \implies u = u'$ – суперечність! ■

Corollary 3.4.2 $H' = H$.
При цьому коли $H \ni u \leftrightarrow l \in H'$ ми маємо $\|u\| = \|l\|$.

Proof.
Якщо $l \in H'$, то за теоремою Ріса йому ставиться в відповідність єдиний $u \in H$, де $l(x) = (x, u)$.
Для кожного $u \in H$ розглянемо $l(x) = (x, u)$. Зрозуміло, що це лінійний функціонал, а обмеженість випливає з нерівності Коші-Буняковського $|l(x)| = |(x, u)| \leq \|x\|\|u\|$. У силу обмеженості ми маємо $\|l\| \leq \|u\|$. При $x = u$ маємо $l(u) = (u, u) = \|u\|^2$, тобто $\|l\| = \|u\|$. ■

Corollary 3.4.3 Нехай H – гілбертів простір та $G \subset H$.
G – тотальна в $H \iff \forall h \in H : h \perp G \implies h = 0$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: G – тотально в H. Нехай $h \in H$ такий, що $h \perp G$. Звідси випливає, що $\forall y \in G : (h, y) = 0$.
Зафіксуємо функціонал $l(y) = \overline{(h, y)}$. Тоді маємо $\forall y \in G : l(y) = 0 \implies \forall y \in H : l(y) = 0$, тобто звідси $\forall y \in H : (h, y) = 0$. Значить, обов'язково $h = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall h \in H : h \perp G \implies h = 0$.
Нехай l – лінійний та неперервний функціонал такий, що $\forall y \in G : l(y) = 0$. За теоремою Ріса, даний функціонал $l(y) = (y, u)$ при деякому $u \in H$. Але $\forall y \in G : (y, u) = 0$, тобто звідси $u \perp G \implies u = 0$.
Значить, $\forall y \in H : l(y) = (y, 0) = 0$. Отже, G – тотальна в H. ■

Proposition 3.4.4 Задано H – гілбертів простір та $G \subset H$. Тоді $(G^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}(G)}$.
Зокрема якщо G – підпростір H, то $(G^\perp)^\perp = G$.

Proof.
Спочатку треба довести, що $G \subset (G^\perp)^\perp$, але тут (в принципі) ясно.
Нехай $h \in (G^\perp)^\perp$ такий, що $h \perp G$. Тобто $h \in G^\perp$. Але тоді звідси $(h, h) = 0 \implies h = 0$. Отже, G – тотальна в $(G^\perp)^\perp$. ■

3.5 Ортонормовані системи та базиси

Definition 3.5.1 Система векторів $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ (поки не більш, ніж зліченні системи розглядатимемо) називається **ортонормованою**, якщо

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

де δ – дельта-символ Кронекера.

Example 3.5.2 У просторі l_2 система, яка є базисом Шаудера, – ортонормована.

Lemma 3.5.3 Нехай $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормована система векторів.
$\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ – збіжний ряд $\iff \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$.

Proof.
Щоб довести в обидві сторони, треба зауважити, що справедлива рівність:
$$\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i e_i - \sum_{i=1}^{m} c_i e_i\right\| = \left\|\sum_{i=m+1}^{n} c_i e_i\right\| = \left(\sum_{i=m+1}^{n} c_i e_i, \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k\right) = \sum_{i=m+1}^{n}\sum_{k=m+1}^{n} c_i \overline{c_k}(e_i, e_k) = \sum_{i=m+1}^{n} |c_i|^2.$$
Це ми припускали всюди, що $n > m$. ■

Theorem 3.5.4 Нерівність Бесселя

Нехай $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормована система. Тоді $\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$ збігається, причому $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2$.

Remark 3.5.5 До речі, коефіцієнти (x, e_i) називаються **коефіцієнтами Фур'є**, а сам ряд – **рядом Фур'є**. По суті, ми зробили розклад Фур'є в загального випадку та отримали додатково нерівність Бесселя.

Proof.
$$0 \leq \left\|x - \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i\right\|^2 = \left(x - \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i,\ x - \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i\right) =$$
$$= (x, x) - \left(x, \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i, x\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i, \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i\right) =$$
$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{(x, e_i)}(x, e_i) - \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)(e_i, x) + \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2.$$
Отже, $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2$. До того, ж за лемою, оскільки цей ряд збіжний за цією нерівністю, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$ збіжний при всіх $x \in H$. ■

Remark 3.5.6 Нехай $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормована система. Тоді вже відомо, що $\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$ – збіжний ряд, тому звідси за необхідною ознакою збіжності $(x, e_k) \to 0$ при $k \to \infty$, причому для всіх $x \in H$. Внаслідок чого ми отримаємо, що $e_n \xrightarrow{w} 0$. При цьому $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$, тому $e_n \not\to 0$ (не сильно збіжна).

Lemma 3.5.7 Нехай $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормована система та $G = \overline{\operatorname{span}\{e_i\}_{i=1}^{\infty}} \subset H$. Тоді $\forall x \in H$: $\operatorname{pr}_G x = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$.

Proof.
Ми хочемо довести, що $\forall x \in H : x - \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i \in G^{\perp}$. Таким чином, у силу єдиності, $\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i = \operatorname{pr}_G x$. Але за тим, чому дорівнює простір G, нам буде досить довести це лише для всіх e_k.
$$\left(x - \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i,\ e_k\right) = (x, e_k) - \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)(e_i, e_k) = (x, e_k) - (x, e_k) = 0.$$ ■

Definition 3.5.8 Задано H – гілбертів простір.
Система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ називається **ортонормованим базисом**, якщо

$$\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ – тотальна в } H \text{ ортонормована система.}$$

Оскільки $\operatorname{pr}_H x = x$, то звідси $\forall x \in H$ маємо однозначний розклад $x = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)x_i$. Також для будь-якого $y = \sum_{i=1}^{\infty}(y, e_i)e_i$ скалярний добуток $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)\overline{(y, e_i)}$. Зокрема окремо запишу це:

Theorem 3.5.9 Рівність Парсеваля

Нехай H – гілбертів простір та $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормований базис. Тоді $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2$.

Theorem 3.5.10 Нехай $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормована система.
$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормований базис $\iff$ $\forall x \in H$ спраедлива рівність Парсеваля.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *Щойно довели.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2$. При доведенні нерівності Бесселя ми отримали рівність $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(x, e_i)|^2$. Отже, при $n \to \infty$ отримаємо $\sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \to x$. Отже, $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормований базис. ■

3.6 Ортогоналізація системи векторів

Задано H – гілбертів простір та $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – якась зліченна система ненулевих векторів. Ми хочемо цю систему ортогоналізувати. Тобто ми побудується ортонормовану систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, щоб $\operatorname{span}\{e_n\} = \operatorname{span}\{u_n\}$.
Перед стартом відкинемо з даної системи кожний вектор, що линейно залежний від попередніх. У нас тоді буде система $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, причому все одно $\operatorname{span}\{v_n\} = \operatorname{span}\{u_n\}$, а сама система може бути як і скінченною, так і зліченною.
Маємо вектор $e_1' = v_1$. Його одразу нормалізуємо, тобто $e_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.
Маємо вектор $e_2' = v_2 - \lambda_{11} e_1$, де число λ_{11} можна знайти з умови $e_2' \perp e_1$. Ми вже таке робили в лінаді, тому, можливо, не повторятиму. Далі нормалізовуємо, буде $e_2 = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|}$
Маємо вектор $e_3 = v_3 - \lambda_{21} e_1 - \lambda_{22} e_2$, де числа $\lambda_{21},\ \lambda_{22}$ можна знайти з умов $e_3' \perp e_1,\ e_3' \perp e_2$. Робимо аналогічно, а далі нормалізовуємо, буде $e_3 = \dfrac{e_3'}{\|e_3'\|}$. $\vdots$
Отримаємо не більш ніж зліченну систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Зауважимо, що за побудовою $\operatorname{span}\{e_n\} = \operatorname{span}\{v_n\}$. Також кожний вектор із системи $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ записується в вигляді $v_{n+1} = e_{n+1}' + \lambda_{n1} e_1 + \dots + \lambda_{nn} e_n$, тобто звідси $v_{n+1} \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$, внаслідок чого $\operatorname{span}\{v_n\} \subset \operatorname{span}\{e_n\}$.
Остаточно, $\operatorname{span}\{u_n\} = \operatorname{span}\{e_n\}$ – ортогоналізували.

Corollary 3.6.1 Задано H – сепарабельний гілбертів простір. Тоді існує ортонормований базис.

Proof.
Оскільки H – сепарабельний, оберемо скрізь щільну підмножину $G = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Застосуємо вище описаний процес ортогоналізації – отримаємо ортонормовану систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, причому $\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}} = H$. За означенням, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормований базис. ■

Theorem 3.6.2 Задано H – сепарабельний нескінченний гілбертів простір. Тоді $H \cong l_2$ ізоморфним чином. (якщо H скінченний, то там $H \cong \mathbb{C}^n$).

Proof.
Саме тому я спочатку навів наслідок вище, щоб можна було грамотно розписати цю теорему. У нас H – сепарабельний, тому є ортонормований базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, звідси $\forall x \in H : x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.
Побудуємо оператор $A \colon H \to l_2$ ось таким чином: $Ax = (x_1, x_2, \dots)$, це числа x_i були взяті з розкладу елемента $x \in H$. Зауважимо, що $(x_1, x_2, \dots) \overset{\text{справді}}{\in} l_2$ (умовно можна пояснити це через рівність Парсеваля). Оператор A – лінійний, це ясно. Також A – бієкція, тому що кожному $(x_1, x_2, \dots) \in l_2$ існуватиме (при тому єдиний) елемент $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H$, а він буде потрапляти в H (за теоремою про нерівність Бесселя). Нарешті,

$(x,y)_H = \sum_{i=1}^{\infty} (x,e_i)\overline{(y,e_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} = (\{x_k\},\{y_k\})_{l_2}$.

$\|x\|_H = \sum_{k=1}^{\infty} |(x,e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|\{x_k\}|_{l_2}$. ■

Corollary 3.6.3 Усі сепарабельні нескінченні гілбертвоі простори між собою ізометричним чином ізоморфні.

3.7 Коротко про ортонормовану систему векторів довільної потужності

Definition 3.7.1 Система векторів $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ називається **ортонормованою**, якщо

$$(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases},$$

де δ – дельта-символ Кронекера.

Remark 3.7.2 Зрозуміло, що якщо в гілбертовому просторі існує незліченна ортонормована система, то тоді гілбертів простір не буде більше сепарабельним.

Lemma 3.7.3 Задано H – гілбертів простір та $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – незліченна ортонормована система. Розглянемо коефіцієнти Фур'є (x, e_α), тоді кількість ненулевих коефіцієнтів – не більш, ніж злічення.

Proof.
Розглянемо множину $I_n = \left\{ \alpha \in I \mid (x, e_\alpha) > \dfrac{1}{n} \right\}$. Такі множини будуть скінченними.

!Припустимо, що ні. Тоді можна взяти зліченну кількість $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$, для яких $(x, e_{\alpha_k}) > \dfrac{1}{n}$. Тоді з одного боку, $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_{\alpha_k})|^2 = \infty$, проте за нерівністю Бесселя, $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_{\alpha_k})|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$. Суперечність!

Тепер зауважимо, що $\{\alpha \in I \mid (x, e_\alpha) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, така множина не більш, ніж злічення. ■

Lemma 3.7.4 Нехай $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – ортонормована система та $G = \overline{\operatorname{span}\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}} \subset H$. Тоді $\forall x \in H$: $\operatorname{pr}_G x = \sum_{\alpha \in J} (x, e_\alpha) e_\alpha$. Сумуємо по множині J, де ненулеві коефіцієнти Фур'є.
Міркування аналогічні.

Definition 3.7.5 Задано H – гілбертів простір.
Система $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ називається **ортонормованим базисом**, якщо

$$\{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \text{ – тотальна в } H \text{ ортонормована система.}$$

Аналогічним чином тоді $x = \sum_{\alpha \in J} (x, e_\alpha) e_\alpha$. Сумуємо по множині J, де ненулеві коефіцієнти Фур'є.
Аналогічно працює рівність Парсеваля та скалярний добуток.

3.8 Про форми в гілбертових просторах

Із курсу лінійної алгебри вже знаємо, що така півторалінійна форма b. Також вводили таке поняття, як ермітові форми та квадратичні форми. У гілбертововму просторі поляризаційна тотожність все одно працює.

Definition 3.8.1 Півторалінійна форма $b \colon H \times H \to \mathbb{C}$ називається **обмеженою**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall x, y \in H : |b(x,y)| \leq C \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

Аналогічним чином ми визначимо **норму** форми таким чином:

$$\|b\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x, y \in H : |b(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|\}$$

Example 3.8.2 Зокрема, по-перше, скалярний добуток $b(x, y) = (x, y)$ сам по собі є півторалінійною ермітовою формою. По-друге, він – обмежений. Дійсно, це випливає з нерівності Коші-Буняковського:
$|b(x, y)| = |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} = 1 \cdot \|x\| \cdot \|y\|$.

Proposition 3.8.3 Задано $A \in \mathcal{B}(H)$. Тоді $b_A(x, y) = (Ax, y)$ задаватиме обмежену півторалінійну ермітову форму.
Вправа: довести.

Theorem 3.8.4 Нехай заданий b – обмежений півторалінійний функціонал. Тоді існує єдиний оператор $A \in \mathcal{B}(H)$, для якого $b(x, y) = (Ax, y)$.
Щось таке подібне було в лінійній алгебрі, проте я передоведу.

Proof.
Зафіксуємо $x \in H$, тоді зауважимо, що $f(y) = \overline{b(x, y)}$ буде обмеженим лінійним функціоналом на H. За теоремою Ріса, ми можемо знайти єдиний вектор $a_x \in H$, для якого $\overline{b(x, y)} = (y, a_x)$, або $b(x, y) = (a_x, y)$.
Таким чином, побудували відображення $A \colon H \to H$, що діє як $Ax = a_x$. Доведемо, що це той самий $A \in \mathcal{B}(H)$.
Нехай $x_1, x_2 \in H$ та $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Маємо наступне:
$(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y) = b(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 b(x_1, y) + \alpha_2 b(x_2, y) = \alpha_1 (Ax_1, y) + \alpha_2 (Ax_2, y) = (Ax_1 + Ax_2, y)$.
Оскільки ця рівність виконується для всіх $y \in H$, то звідси $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2$.
Ми вже знаємо, що $|(Ax, y)| = |(a_x, y)| = |b(x, y)| \leq c\|x\|\|y\|$. Якщо підставити $y = Ax$, то звідси випливатиме оцінка $\|Ax\| \leq c\|x\|$. Довели обмеженість.
Єдиність цілком зрозуміло. ■

Theorem 3.8.5 Нехай заданий b – обмежений півторалінійний функціонал. Уже відомо, що йому асоціюється єдиний оператор $A \in \mathcal{B}(H)$, де $b(x, y) = (Ax, y)$. Тоді $\|b\| = \|A\|$.

Proof.
Маємо $|b(x, y)| = |(Ax, y)| \leq \|Ax\|\|y\| \leq \|A\|\|x\|\|y\|$. Тобто $\|A\|$ – константа, що обмежує форму, тому за означенням норми форми, $\|b\| \leq \|A\|$.
Із іншого боку, $\|Ax\|^2 = |b(x, Ax)| \leq \|b\|\|x\|\|Ax\|$, внаслідок чого $\|Ax\| \leq \|b\|\|x\|$. Тобто $\|b\|$ – константа, що обмежує оператор, тому за означення норми оператора, $\|A\| \leq \|b\|$.
Отже, ці два міркування дають сказати нам $\|b\| = \|A\|$. ■

3.9 Про деякі типи операторів

3.9.1 Спряжений оператор (ще раз)

У гілбертовому просторі H' можна ототожнити з множиною H за теоремою Ріса. Також $l(x) = (x, l)$ звідти ж. Тепер розглянемо оператор $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Ми вже визначали спряжений оператор $A^* \in \mathcal{B}(H_2', H_1') = \mathcal{B}(H_2, H_1)$, що задається як $(A^*l)(x) = l(Ax)$.
Відомо, що $(A^*l)(x) = l(Ax) = (Ax, l)$. Із іншого боку, $(A^*l)(x) = (x, A^*l)$.
Таким чином, ми маємо еквівалентне означення в гілбертовому просторі:

Theorem 3.9.1 Оператор $A^* \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ – спряжений в $A \iff (Ax, l) = (x, A^*l), \forall x \in H_1, \forall l \in H_2$.

3.9.2 Самоспряжений оператор

Definition 3.9.2 Оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ називається **самоспряженим**, якщо

$$A = A^*$$

За отриманим результатом вище маємо чергове означення:

Theorem 3.9.3 Оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ – самоспряжений $\iff \forall (Ax, l) = (x, Al), \forall x, l \in H$.

Theorem 3.9.4 Будь-який оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ єдиним чином можна подати в вигляді $A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A$, де $\operatorname{Re} A, \operatorname{Im} A$ – самоспряжені оператори.
Уже в курсі ліналу доводили.

Theorem 3.9.5 $A \in \mathcal{B}(H)$ – самоспряжений $\iff$ b_A – ермітова форма $\iff$ $q_A(x) = b_A(x,x) \in \mathbb{R}$.

Proof.
Почну з першої еквівалетності.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $A \in \mathcal{B}(H)$ – самоспряжений. Тоді $b_A(x,y) = (Ax,y) = (x,Ay) = \overline{(Ay,x)} = \overline{b_A(y,x)}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: b_A – ермітова форма. Тоді $(Ax,y) = b_A(x,y) = \overline{b_A(y,x)} = \overline{(Ay,x)} = (x,Ay)$.

Тепер доведемо другу еквівалентність.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: b_A – ермітова форма. Тоді $b_A(x,x) = \overline{b_A(x,x)} \implies b_A(x,x) = q_A(x) \in \mathbb{R}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $q_A \in \mathbb{R}$. Використаємо поляризаційну тотожність:
$\underline{4b_A(x,y)} = \underline{q_A(x+y) - q_A(x-y) + i[q_A(x+iy) - q_A(x-iy)]}$.
$\overline{4b_A(y,x)} = \overline{q_A(y+x) - q_A(y-x) + i[q_A(y+ix) - q_A(y-ix)]} =$
$= \overline{q_A(y+x)} - \overline{q_A(y-x)} + \overline{iq_A(y+ix)} - \overline{iq_A(y-ix)} = q_A(y+x) - q_A(y-x) + \dfrac{1}{i}q_A(y+ix) - \dfrac{1}{i}q_A(y-ix)$
$= q_A(x+y) - q_A(x-y) + i[q_A(x+iy) - q_A(x-iy)]$.
Таким чином, $b_A(x,y) = \overline{b_A(y,x)}$, тобто b_A – ермітова. ■

3.9.3 Невід'ємні та напівобмежені оператори

Definition 3.9.6 Оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ називається **невід'ємним**, якщо

$$\forall x \in H : b_A(x,x) \geq 0$$

Позначення: $A \geq 0$.
Будемо казати, що $A \geq B$, якщо $A - B \geq 0$. Це задає відношення часткового порядку на $\mathcal{B}(H)$.

Definition 3.9.7 Оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ називається **напівобмеженим знизу** числом, якщо

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in H : b_A(x,x) \geq c\|x\|^2$$

Оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ називається **напівобмеженим зверху** числом, якщо

$$\exists d \in \mathbb{R} : \forall x \in H : b_A(x,x) \leq d\|x\|^2$$

Якщо переписати нерівність по-інакшому, то ми отримаємо, що
A – напівобмежений знизу числом $c \in \mathbb{R} \iff A \geq cI$;
A – напівобмежений зверху числом $d \in \mathbb{R} \iff A \leq dI$.

Remark 3.9.8 Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ – напівобмежений. Тоді A – самоспряжений.
Це випливає безпосередньо з означення напівобмежених операторів.

Remark 3.9.9 Нехай $A \in \mathcal{B}(H)$ – самоспряжений. Тоді A напівобмежений зверху числом $\|A\|$ та знизу числом $-\|A\|$. Просто тому що справедлива нерівність $|(Ax,x)| \leq \|A\|\|x\|^2$.

Proposition 3.9.10 Задано $A \in \mathcal{B}(H)$ – напівобмежений. Тоді A – оборотний.
TODO: доробити.

3.9.4 Проєктор

Definition 3.9.11 Задано H – гілбертів простір та $G \subset H$ – замкнений підпростір.
Проєктором в H **на** G назвемо оператор P_G, який діє таким чином:

$$P_g x = \operatorname{pr}_g x$$

Якщо $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортнормований базис, то $P_G x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$.

Theorem 3.9.12 Проєктор на G має такі властивості:
1) $P_G \in \mathcal{B}(H)$, причому $\|P_G\| = 1$ за умовою, що $G \neq \{0\}$;
2) P_G – ідемпотентний оператор;
3) P_G – самоспряжений оператор;
4) P_G – невід'ємний оператор.

Proof.
Доведемо кожну властивість окремо.

1) Маємо $x, y \in G$, треба довести $P_G(x+y) = P_G x + P_G y$, або теж саме $\operatorname{pr}_G(x+y) = \operatorname{pr}_G x + \operatorname{pr}_G y$. Оскільки $x, y \in H$, то для них існують єдині $\operatorname{pr}_G x, \operatorname{pr}_G y \in G$. Ми доведемо, що $(x+y) - (\operatorname{pr}_G x + \operatorname{pr}_G y) \in G^\perp$, тим самим за єдиністю проєкції отримаємо бажану рівність.
$(x + y - \operatorname{pr}_G x - \operatorname{pr}_G y, g) = (x - \operatorname{pr}_G x, g) + (y - \operatorname{pr}_G y, g) = 0 + 0 = 0$.
Отже, ми довели $P_G(x+y) = P_G(x) + P_G(y)$.
Десь аналогічним чином доводиться, що $P_G(\lambda x) = \lambda P_G(x)$.
Далі зауважимо, що $\|P_G x\|^2 = \|\operatorname{pr}_G x\|^2 = \|x\|^2 - \|\operatorname{ort}_G x\|^2 \leq 1 \cdot \|x\|^2$. Останнє повністю доводить той факт, що $P_G \in \mathcal{B}(H)$, причому тут $\|P_G\| \leq 1$. Якби був $G = \{0\}$, то ми би отримали $P_G = 0$. Інакше $\forall g \in G : P_G g = g$, внаслідок чого $\|P_G\| = 1$.

2) Треба довести, що $P_G^2 = P_G$. Маємо $x \in H$, тоді звідси
$P_G^2 x = P_G(P_G x) = P_G(\operatorname{pr}_G x) = \operatorname{pr}_G x = P_G x$.

3) $(P_G x, y) = (\operatorname{pr}_G x, \operatorname{pr}_G y + \operatorname{ort}_G y) = (\operatorname{pr}_G x, \operatorname{pr}_G y) = (\operatorname{pr}_G x, \operatorname{ort}_G y) = (\operatorname{pr}_G x, \operatorname{pr}_G y) = (\operatorname{pr}_G x, \operatorname{pr}_G y) = (\operatorname{ort}_G x, \operatorname{pr}_G y) = (\operatorname{pr}_G x + \operatorname{pr}_G x, \operatorname{pr}_G y) = (x, P_G y)$.

4) $(P_G x, x) = (\operatorname{pr}_G x, \operatorname{pr}_G x + \operatorname{ort}_G x) = \|P_G x\|^2 \geq 0$.

Всі властивості довели. ■

Theorem 3.9.13 Задано $A \in \mathcal{B}(H)$ – самоспряжений, ідемпотентний оператор. Тоді існує замкнений підпростір $G \subset H$, в якому оператор A поводить себе як проєктор на G, тобто $A = P_G$.

Proof.
Розглянемо множину $G = \{g \in H \mid Ag = g\}$, іншими словами множина $G = \ker(A - I)$. Оскільки A – ідемпотентний, то $\forall x \in H : Ax \in G$. Також зазначимо, що $P_G x \in G$. Тому нам досить довести, що $(Ax, g) = (P_G x, g), \forall g \in G$, а це гарантуватиме $Ax = P_G x$.
$(Ax, g) = (x, Ag) = (x, g) = (x, P_G g) = (P_G x, g)$. ■

3.9.5 Нормальні оператори

Definition 3.9.14 Оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ називається **нормальним**, якщо

$$A^* A = A A^*$$

Існує таке поняття як комутатор, в цьому випадку $[A, B] = AB - BA$. Значить, означення нормального оператора можна переписати ось так:

$$[A, A^*] = O$$

Theorem 3.9.15 $A \in \mathcal{B}(H)$ – нормальний $\iff [\operatorname{Re} A, \operatorname{Im} A] = O$.

Proof.
Нам досить буде розписати комутатор $[A, A^*]$, а там стане зрозуміло.
$[A, A^*] = AA^* - A^*A = (\operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A)(\operatorname{Re} A - i \operatorname{Im} A) - (\operatorname{Re} A - i \operatorname{Im} A)(\operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A) =$
$= \operatorname{Re}^2 A - i \operatorname{Re} A \operatorname{Im} A + i \operatorname{Im} A \operatorname{Re} A + \operatorname{Im}^2 A - \operatorname{Re}^2 A - i \operatorname{Re} A \operatorname{Im} A + i \operatorname{Im} A \operatorname{Re} A - \operatorname{Im}^2 A =$
$= -2i \operatorname{Re} A \operatorname{Im} A + 2i \operatorname{Im} A \operatorname{Re} A = -2i[\operatorname{Re} A, \operatorname{Im} A]$.
Отже, ми автоматично довели, що A – нормований $\iff [\operatorname{Re} A, \operatorname{Im} A] = O$. ■

3.10 Унітарні та ізометричні оператори

Definition 3.10.1 Лінійний оператор $U \colon H \to H$ називають **унітарним**, якщо

$$\forall x, y \in H : (Ux, Uy) = (x, y);$$
$$\operatorname{Im} U = H$$

Remark 3.10.2 Із означення випливає, що $\|Ux\| = \|x\|, \forall x \in H$, а тому звідси $U \in \mathcal{B}(H)$, $\|U\| = 1$.

Proposition 3.10.3 Якщо лінійний оператор зберігає норму, то він же зберігає скалярний добуток.
Випливає з поляризаційної тотожності.

Remark 3.10.4 Якщо $\dim H < \infty$, то тоді в означенні унітарного оператора досить вимагати збереження скалярного добутку (як це було в лінáлі).
Дійсно, маємо $\{e_1, \dots, e_n\}$ – ортонормований базис H. Тоді $(Ue_j, Ue_k) = (e_j, e_k) = \delta_{jk}$. Отже, $\{Ue_1, \dots, Ue_n\}$ – ортонормований базис H, причому
$x = \sum_{j=1}^{n} x_j U e_j = U\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)$.
Внаслідок чого $\operatorname{Im} U = H$.

Example 3.10.5 Розглянемо $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ – оператор в просторі l_2. Зауважимо, що $(Tx, Ty) = (x, y)$. Проте $\operatorname{Im} T \neq H$, оскільки вектор $(1, 0, 0, \dots) \perp \operatorname{Im} T$.

Theorem 3.10.6 Задано U – унітарний оператор. Тоді U – оборотний, причому $U^{-1} = U^*$, який теж є унітарним.

Proof.
Оскільки $\operatorname{Im} U = H$ та $\|Ux\| = \|x\|$, то ми доводимо оборотність. Доведемо, що U^{-1} – унітарний.
Покладемо $y = Ux$, тоді
$\|y\| = \|Ux\| = \|x\| = \|U^{-1}y\|$.
Тобто U^{-1} зберігає норму, а тому й скалярний добуток. Також зрозуміло, що $\operatorname{Im} U^{-1} = H$.
Рівність $U^{-1} = U^*$ випливає з такого ланцюга: $(x, U^*y) = (Ux, y) = (Ux, UU^{-1}y) = (x, U^{-1}y)$. ■

Proposition 3.10.7 Задано U – унітарний оператор. Тоді U – нормальний.

Proof.
$[U, U^*] = UU^* - U^*U = UU^{-1} - U^{-1}U = I - I = O$. ■

Definition 3.10.8 Лінійний оператор $V\colon H_1 \to H_2$ називається **ізометричним**, якщо

$$\forall x, y \in H : (Vx, Vy)_2 = (x, y)_1$$

Ця умова, як вже відомо, рівносильна умові $\|Vx\|_2 = \|x\|_1$.

3.11 Матричне представлення операторів у гілбертовому просторі

3.11.1 Лінійний оператор в сепарабельному просторі

Нехай H – нескінченний сепарабельний простір, тому є $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормований базис. Розглянемо оператор $A \in \mathcal{B}(H)$, який можна розкласти за базисом. Отримаємо наступне:
$(Ax, e_j) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (Ae_k, e_j) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k$.
Ми тут позначили $a_{jk} = (Ae_k, e_j)$. Визначені числа a_{jk} утворюють нескінченну матрицю $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$, елементами k-го стовпчика якого будуть координати вектора Ae_k.

Theorem 3.11.1 Будь-який оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ допускає матрице представлення в будь-якому ортонормованому базисі H.

Remark 3.11.2 Не кожній нескінченній матриці відповідає лінійний обмежений оператор в гілбертовому просторі (на відміну від скінченновимірних просторах).

Theorem 3.11.3 Нехай матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ задовольняє умові $\sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty$. Тоді матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ визначає оператор $A \in \mathcal{B}(H)$.

Proof.
За нерівністю Коші-Буняковського, отримаємо
$|(Ax, e_j)|^2 = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \|x\|^2, \qquad j \in \mathbb{N}$.
Просумовуючи це все за j, отримаємо

$\|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(Ax, e_j)|^2 \le \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \|x\|^2.$

Таким чином, $A \in \mathcal{B}(H)$, причому $\|A\| \le \left(\sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. ■

Remark 3.11.4 Зауважимо, що одинична матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$, де $a_{jk} = \delta_{jk}$, задає лінійний обмежений оператор $A = I \in \mathcal{B}(H)$. При цьому ця матриця не задовольняє умові теореми вище.
Тому дана достатня умова є доволі строгою, треба послабити.

Theorem 3.11.5 Матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ задає оператор $A \in \mathcal{B}(H) \iff$ справедливі такі умови:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k$ збіжний для всіх $j \in \mathbb{N}$; де числа x_k беруться з розкладу $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$;

2) $\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k \right|^2 < \infty$;

3) $\exists c > 0 : \forall x \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k \right|^2 \le c\|x\|^2$.

(TODO: добити).

3.12 Оператори Гілберта-Шмідта

Нехай H – сепарабельний гілбертів простір та $\{e_n\}$, $\{f_n\}$ – два ортонормовані базиси в H. Припустимо, що $A \in \mathcal{B}(H)$ задовольняє умові $\sum_{j,k=1}^{\infty} |(Af_k, e_j)|^2 < \infty$.

Дана величина ніяк не залежить від вибору пари базису. Дійсно, зауважимо, що $\|Ae_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(Ae_j, f_k)|$,

а тому ця величина вище $\sum_{j,k=1}^{\infty} |(Af_k, e_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|^2$. Тому неважливо, який базис буде другим.
Більш того, знаючи, що $(Ae_j, f_k) = (e_j, A^* f_k)$ можна аналогічно довести, що неважливо, який базис буде першим.
Отже, коректним буде ось таке означення:

Definition 3.12.1 Оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ називається **оператором Гілберта-Шмідта**, якщо для деякого (а тому й для кожного) ортонормованого базиса $\{e_n\}$ збігається ряд:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty$$

Позначення: $S_2(H)$ – набір всіх операторів Гілберта-Шмідта.
Абсолютною нормою (чи **нормою Гілберта-Шмідта**) оператора A називають величину

$$|A| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remark 3.12.2 $\emptyset \subsetneq S_2(H) \subsetneq \mathcal{B}(H)$.
Дійсно, розглянемо оператор $A \in \mathcal{B}(H)$, у якого лише скінченне число матричних елементів a_{jk}, для яких $a_{jk} \neq 0$. Тоді цілком зрозуміло, що такий $A \in S_2(H)$. Тобто $S_2(H) \neq \emptyset$.

Далі, $I \notin S_2(H)$, просто тому що $\sum_{j=1}^{\infty} \|Ie_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|^2 = \infty$.

Proposition 3.12.3 $S_2(H)$ – нормований простір із нормою $|A|$ – нормою Гілберта-Шмідта. Причому про саму норму Гілберта-Шмідта відомо, що $\forall A \in S_2(H) : \|A\| \le |A|$.

Proof.
Спочатку доведемо, що $S_2(H)$ буде підпростором. Дійсно, нехай $A, B \in S_2(H)$, тоді
$\sum_{j=1}^{\infty} \|(\lambda A + \mu B)\|e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|\lambda Ae_j + \mu Be_j\|^2 \le |\lambda|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|^2 + |\mu|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \|Be_j\|^2 < \infty$.
Отже, ми довели $\lambda A + \mu B \in S_2(H)$.

Тепер покажемо, що $|A| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ задаватиме норму. Дійсно,
1) $|A| \ge 0$ – все ясно. Тепер $|A| = 0 \iff \|Ae_j\|^2 = 0, \forall j \ge 1 \iff Ae_j = 0, \forall j \ge 1 \iff A = O$.
2) $|\lambda A| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|(\lambda A)e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda||A|$.
3) $|A+B| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|(A+B)e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \|Be_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|(Be_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$
$|A| + |B|$.
Всі властивості норми доведені.
Нехай $A \in S_2(H)$, тоді оцінимо даний оператор:
$\|Ax\| = \|A \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)e_k\| = \| \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)Ae_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)| \|Ae_k\| \overset{\text{н-ть Гьольдера}}{\le} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|Ae_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$
$\overset{\text{р-ть Парсеваля}}{=} \|x\||A|$.
Отже, ми довели, що $\|A\| \le |A|$. До речі, рівність виконується $\iff \operatorname{rank} A = 1$ (TODO: довести)
■

Proposition 3.12.4 $A \in S_2(H) \iff A^* \in S_2(H)$.
При цьому $|A| = |A^*|$.
Вправа: довести.

Все це можна повторити в випадку операторів $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, мені зараз лінь.

4 Компактні оператори

4.1 Спектр та резольвента оператора

Цей розділ про узагальнення поняття власних чисел та власних векторів операторів на нескінченний простір. На жаль, ці означення нам не підійдуть.

Example 4.1.1 Зокрема розглянемо оператор $A\colon L_2([0,1],\lambda) \to L_2([0,1],\lambda)$ таким чином: $(Af)(t) = t \cdot f(t)$. Якщо припустити, що μ – власне число, тоді існує ненульова функція $f \in L_2([0,1],\lambda)$, для якої $Af = \lambda f$, тобто звідси $tf(t) = \mu f(t) \pmod{\lambda}$. Але тоді ми можемо отримати в результаті $f = 0 \pmod{\lambda}$, що суперечить.
Отже, такий оператор не містить власні числа.

Definition 4.1.2 Нехай E – нормований простір та $A \in \mathcal{B}(E)$.
Число $\lambda \in \mathbb{C}$ називатимемо **регулярною точкою** оператор A, якщо

$$\exists (A - \lambda I)^{-1} \overset{\text{позн.}}{=} R_\lambda(A)$$

Існуючий оператор називають **резольвентою оператора A в точці λ**.
Позначення: $\rho(A)$ – множина всіх регулярних точок оператора A.

Definition 4.1.3 Нехай E – нормований простір та $A \in \mathcal{B}(E)$.
Спектром оператора A називають множину

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

По суті, спектр – це просто доповнення до множини всіх регулярних точок.

Example 4.1.4 Повертаючись до $A\colon L_2([0,1],\lambda) \to L_2([0,1],\lambda)$, що заданий як $(Af)(t) = t \cdot f(t)$, ми можемо довести, що $\sigma(A) = [0,1]$.

Remark 4.1.5 Можна трошки детально про це говорити. От нехай $A\colon E \to E$ – лінійний оператор (не обов'язково навіть обмежений), оберемо $\lambda \in \mathbb{C}$. Будемо розглядати оператор $A - \lambda I$, який розбиває на кілька випадків:

1) $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$, тоді існує ненульовий розв'язок x, для якого $(A - \lambda I)x = 0$. У цьому випадку справді λ називають власним числом. Множину всіх власних чисел позначають за $\sigma_{\text{т}}(A)$ – так званий **точковий спектр**.

Далі йде $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$, який розбиває на ще три випадки:

2) $\operatorname{Im}(A - \lambda I) \neq X$, але при цьому $\overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)} = X$. Тоді число λ потрапляє в сукупність $\sigma_{\text{н}}(A)$ – так званий **неперервний спектр**.

3) $\overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)} \neq X$. Тоді число λ потрапляє в сукупність $\sigma_{\text{з}}(A)$ – так званий **залишковий спектр**.

4) $\operatorname{Im}(A - \lambda I) = X$. Тоді оскільки одночасно $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$, то в нас буде існувати $(A - \lambda I)^{-1}$ – та сама резольвента оператора A в точці λ. Саме число λ потрапляє в сукупність $\rho(A)$ – множина **регулярних точок**.

Таким чином, ми розбили $\mathbb{C} = \sigma_{\text{т}}(A) \sqcup \sigma_{\text{н}}(A) \sqcup \sigma_{\text{з}}(A) \sqcup \rho(A)$. Якщо об'єднати перші три, то ми отримаємо **спектр** оператора A, тобто $\sigma(A) = \sigma_{\text{т}}(A) \sqcup \sigma_{\text{н}}(A) \sqcup \sigma_{\text{з}}(A)$. Таким чином, $\mathbb{C} = \sigma(A) \sqcup \rho(A)$.

Example 4.1.6 Зокрема маємо $A\colon l_2 \to l_2$, що задається як $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$.
Нехай $(A - \lambda I)x = 0$, тобто $(-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, x_2 - \lambda x_3, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$. Звідси випливатиме $\lambda x_1 = 0$. Якщо $\lambda = 0$, то отримаємо $x_1 = x_2 = \dots = 0$. Якщо $x_1 = 0$, то звідси $\lambda x_2 = 0$, тут аналогічно не можемо брати $\lambda \neq 0$, тож $x_2 = 0, \dots$
Коротше, не існує власних чисел, тобто маємо $\sigma_{\text{т}}(A) = \emptyset$.
Тепер розглянемо спряжений оператор $A^*\colon l_2 \to l_2$, що задається як $A^*(y_1, y_2, \dots) = (y_2, y_3, \dots)$. Ми знаємо, що в гілбертовому просторі $l_2 = \ker(A - \lambda I) \oplus \operatorname{Im}(A - \lambda I)^*$.

Theorem 4.1.7 Нехай E – нормований простір та $A \in \mathcal{B}(E)$. Тоді $\sigma(A)$ – замкнена множина та при цьому $\sigma(A) \subset B[0, \|A\|]$.

Proof.
Припустимо, що $\lambda \notin B[0, \|A\|]$, тобто це означає, що $|\lambda| < \|A\|$. Тоді звідси маємо:
$(A - \lambda I) = -\dfrac{1}{\lambda}\left(I - \dfrac{A}{\lambda}\right)$.
Оскільки $\left\|\dfrac{A}{\lambda}\right\| < 1$, то тоді існує $\left(I - \dfrac{A}{\lambda}\right)^{-1}$, внаслідок чого існуватиме $(A - \lambda I)^{-1}$. Тобто звідси $\lambda \in \rho(A) \implies \lambda \notin \sigma(A)$. Отже, довели щойно $\sigma(A) \subset B[0, \|A\|]$.
Для доведення замкнености $\sigma(A)$ досить довести відкритість $\rho(A)$. Нехай $\lambda_0 \in \rho(A)$, тоді існує резольвента $(A - \lambda_0 I)^{-1}$. Ми хочемо довести, що λ_0 буде внутрішньою точкою. Для цього розглянемо оператор $A - \lambda I = (A - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I$. Оператор $(A - \lambda_0 I)$ оборотний, а на другий оператор хочемо оцінку $\|(\lambda - \lambda_0)I\| \leq \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$. Якщо покласти $r = \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$, то тоді $|\lambda - \lambda_0| < r$. За **Th. 2.11.5**, оператор $A - \lambda I$ – оборотний, тобто $\lambda \in \rho(A)$. Довели $B(\lambda_0, r) \subset \rho(A)$. ■

Remark 4.1.8 При $\lambda \in B(\lambda_0, r)$ матимемо рівномірну обмеженість $\|(A - \lambda I)^{-1}\|$.

Proof.
Дійсно, трошечки розпишемо необхідне:
$A - \lambda I = (A - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I = (A - \lambda_0 I)\left(I - (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}\right)$.
Візьмемо оборотність з двох боків:
$(A - \lambda I)^{-1} = \left[I - (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}\right]^{-1}(A - \lambda_0 I)^{-1}$.
$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| \|(I - (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1})^{-1}\| \boxed{\leq}$
Тимчасово для зручності позначу $(\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1} = T$. Ми заздалегідь зауважимо, що $\|T\| = |\lambda - \lambda_0| \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| < r\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|$. Тепер зробимо оцінку
$\|(I - T)^{-1}\| = \|I + T + T^2 + \dots\| \leq \|I\| + \|T\| + \|T\|^2 + \dots = \dfrac{1}{1 - \|T\|} < \dfrac{1}{1 - r\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|}$.
$\boxed{\leq} \dfrac{\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|}{1 - r\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|}$. ■

Theorem 4.1.9 Тотожність Гілберта
Нехай E – нормований простір та $A \in \mathcal{B}(E)$. Також нехай $z_1, z_2 \in \rho(A)$. Тоді
$R_{z_1}(A) - R_{z_2}(A) = (z_1 - z_2)R_{z_1}(A)R_{z_2}(A)$.

Remark 4.1.10 Щоб легше було запам'ятати. Резольвенту $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ можна асоціювати з числом $\dfrac{1}{A - \lambda}$ (тут A, λ теж числа). Тоді якщо розписати різницю, то
$\dfrac{1}{A - z_1} - \dfrac{1}{A - z_2} = \dfrac{z_1 - z_2}{(A - z_1)(A - z_2)} = (z_1 - z_2)\dfrac{1}{A - z_1}\dfrac{1}{A - z_2}$.

Proof.
Розглянемо ось таку різницю:
$(A - z_2 I) - (A - z_1 I) = (z_1 - z_2)I$.
Домножимо ліворуч на $R_{z_1}(A)$ та праворуч на $R_{z_2}(A)$ – отримаємо:
$R_{z_1}(A)(A - z_2 I)R_{z_2}(A) - R_{z_1}(A)(A - z_1 I)R_{z_2}(A) = (z_1 - z_2)R_{z_1}(A)R_{z_2}(A)$.
Згадавши, що з себе представляє резольвента, отримаємо відповідну рівність:
$R_{z_1}(A) - R_{z_2}(A) = (z_1 - z_2)R_{z_1}(A)R_{z_2}(A)$. ■

Corollary 4.1.11 Резольвенти оператора A комутують між собою. Тобто $R_{z_1}(A)R_{z_2}(A) = R_{z_2}(A)R_{z_1}(A)$.

Theorem 4.1.12 Відображення $z \mapsto R_z(A)$ буде неперервним на $\rho(A)$.

Proof.
Дійсно, маємо $z_0 \in \rho(A)$. При $z \to z_0$ хочемо довести, що $R_z(A) \to R_{z_0}(A)$.
$\|R_z(A) - R_{z_0}(A)\| = |z - z_0| \|R_z(A)R_{z_0}(A)\| \leq |z - z_0|C^2 \to 0$.
Остання оцінка отрималася в результаті того, що в околі регулярної точки резольвенти рівномірно обмежені за першим зауваження. ■

Theorem 4.1.13 Нехай E – нормований простір та $A \in \mathcal{B}(E)$. Також нехай $z \in \rho(A)$. Тоді
$\exists \lim\limits_{n \to 0} \dfrac{R_{z+h}(A) - R_z(A)}{h} = R_z^2(A)$.
Тобто ця теорема каже про диференційованість резольвенти в регулярних точках.

Proof.
$\dfrac{R_{z+h}(A) - R_z(A)}{h} = \dfrac{1}{h}(z+h-z)R_{z+h}(A)R_z(A) \overset{R_z \text{ – неперервна}}{\to} R_z(A)R_z(A) = R_z^2(A).$ ∎

Corollary 4.1.14 Нехай E – нормований простір. Зафіксуємо будь-яку точку $x \in E$ та функціонал $l \in E'$. Розглянемо комплекснозначну функцію $f_{x,l}(z) = l(R_z(A)x)$ на $\rho(A)$. Тоді така функція – аналітична на $\rho(A)$.

Theorem 4.1.15 Нехай E – нормований простір та $A \in \mathcal{B}(E)$. Тоді $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Proof.
!Припустимо, що $\sigma(A) = \emptyset$, тобто звідси $\rho(A) = \mathbb{C}$, а тому функція $l(R_z(A)x)$ – аналітична на всій комплексній площині. Виникає бажання застосувати теорему Луівілля, але спочатку треба показати обмеженість.
Для цього треба рівномірна обмеженість $\|R_z(A)\|$. Маємо два випадки:
1) $z \in B[0, 2\|A\|]$.
У цьому випадку $\|R_z(A)\|$ – неперервна функція на $B[0, 2\|A\|]$, тому звідси $\exists c_1 : \forall z \in B[0, 2\|A\|] : \|R_z(A)\| \leq c_1$.

2) $z \notin B[0, 2\|A\|]$.
$\|R_z(A)\| = \|(A - zI)^{-1}\| = \dfrac{1}{|z|} \left\| \left(I - \dfrac{A}{z} \right)^{-1} \right\| \overset{\|\frac{A}{z}\| < \frac{1}{2}}{=} \left\| I + \dfrac{A}{z} + \dfrac{A^2}{z^2} + \dots \right\| \leq \dfrac{1}{|z|} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{|z|}\|A\|} \leq \dfrac{2}{|z|} \leq \dfrac{1}{\|A\|}$.
Отже, дійсно на $\mathbb{C}$ маємо рівномірну обмеженість $\|R_z(A)\|$. При цьому із того ланцюге нерівностей ми отримали $\|R_z(A)\| \to 0$ при $z \to \infty$.
Тепер покажемо обмеженість комплекснозначної функції:
$|f_{x,l}(z)| = |l(R_z(A)x)| \leq \|l\| \|R_z(A)x\| \leq \|l\| \|R_z(A)\| \|x\| \leq C\|l\| \|x\|$.
Отже, за теоремою Луівілля, $f_{x,l}(z) = C_{x,l}$ – стала функція. Тільки оскільки $|f_{x,l}(z)| \to 0$ при $z \to \infty$, то звідси $f_{x,l}(z) = 0$. Зокрема звідси отримаємо $R_z(A) = 0$. Тобто ми отримали оборотний оператор, який нульовий – суперечність! ∎

4.2 Компактні оператори

Definition 4.2.1 Задано E_1, E_2 – нормовані простори та $A \colon E_1 \to E_2$ – лінійний оператор (не обов'язково обмежений).
Оператор A називається **компактним** (інколи називають **цілком неперервним**), якщо

$$\forall M \subset E_1 \text{ – обмежена} : A(M) \text{ – передкомпакт.}$$

Коротше кажучи, якщо образ довільної обмеженої мноижин E_1 – передкомпакт.
Позначення: $\mathcal{K}(E_1, E_2)$ – множина всіх компактних операторів.

Proposition 4.2.2 Задано E_1, E_2 – нормовані простори.
$A \in \mathcal{K}(E_1, E_2) \iff A(B[0; 1])$ – передкомпакт.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *Миттєво з означення.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $A(B[0; 1])$ – передкомпакт. Нехай $M \subset E_1$ – деяка обмежена множина. Тоді існує відкрита куля $B(x; R) \supset M$. Доведемо, що $A(M)$ буде передкомпактом.
Нехай $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset A(M)$ – обмежена, кожний $y_n = Ax_n,\ x_n \in M$. Розглянемо послідовність $\left(\dfrac{y_n - Ax}{R} \right)_{n=1}^{\infty} \subset A(B[0; 1])$, яка буде також обмеженою. Тоді можна виділити збіжну підпослідовність $\left(\dfrac{y_{n_k} - Ax}{R} \right)_{k=1}^{\infty}$, зокрема збіжною буде підпослідовність $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. ∎

Proposition 4.2.3 $\mathcal{K}(E_1, E_2) \subset \mathcal{B}(E_1, E_2)$.
Іншими словами, всі компактні оператори – обмежені автоматично.

Proof.
Дійсно, нехай $A \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$, тоді $A(B[0;1])$ буде передкомпактом, яка автоматично обмежена. Нехай $x \in E_1$. Тоді зауважимо, що елемент $\dfrac{x}{\|x\|} \in B[0;1]$. Звідси випливає, що $\left|A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right| \leq C \implies \|Ax\| \leq C\|x\|$. Таким чином, $A \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$. ■

Example 4.2.4 У зворотному це не працює.
Дійсно, розглянемо одиничний оператор $I \in \mathcal{B}(E)$. Стверджується наступне:
$I \in \mathcal{K}(E) \iff \dim E < \infty$.

Але щоб мені це довести, треба відволіктися трошки та довести кілька тверджень.

Theorem 4.2.5 Лема Ріса
Задано E – нормований простір та $G \subsetneq E$ – замкнений підпростір. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : \exists y_\varepsilon \notin G, \|y_\varepsilon\| = 1 : \forall x \in G : \|y_\varepsilon - x\| > 1 - \varepsilon$.

Remark 4.2.6 Цю теорему ще наизвають теорему про існування майже ортогонального вектора. Ми обговорили цю ситуацію в частинному випадку нормованого простору, саме в гілбертовому просторі H та замкненому підпросторі $G \subset H$ (див. **Rm. 3.3.8**).
У загальному нормованому просторі E можуть не існувати такі вектори $y \notin G$, щоб $\|y - x\| \geq 1$, тобто можуть не існувати ортогональні вектори, так би мовити. Однак ми можемо скільки завгодно наблизитися до одиниці, тобто $\exists y_\varepsilon \notin G : \|y_\varepsilon\| = 1 : \|y_\varepsilon - x\| > 1 - \varepsilon$. Це й пояснює альтернативну назву "майже ортогональний".

Proof.
Оберемо елемент $z \notin G$. Позначимо $\delta = \rho(z, G)$, який в свою чергу $\delta > 0$. Якби $\delta = 0$, то за критерієм інфімуму ми би знайшли послідовність $(y_n)_{n=1}^\infty$, для якої $\|y_n - z\| < \dfrac{1}{n} \to 0$ – ми би отримали, що z – гранична G, де водночас $z \notin G$ – суперечить за рахунок замкненості G.
Звідси $\forall \eta > 0 : \exists x_\eta \in G : \delta \leq \|z - x_\eta\| < \delta + \eta$ за критерієм інфімуму.
Нехай $\varepsilon > 0$. Ми підкрутимо таке значення η, щоб $\dfrac{\eta}{\delta + \eta} = \varepsilon$. Доведемо, що $y_\varepsilon = \dfrac{z - x_\eta}{\|z - x_\eta\|}$ буде шуканим вектором. Цілком зрозуміло, що $y_\varepsilon \notin G$, $\|y_\varepsilon\| = 1$. Доведемо нерівність.
$\|y_\varepsilon - x\| = \left\|\dfrac{z - x_\eta}{\|z - x_\eta\|} - x\right\| = \dfrac{1}{\|z - x_\eta\|}\|z - (x_\eta + x\|z - x_\eta\|)\|$.
Зазначимо, що вектор $x_\eta + x\|z - x_\eta\| \in G$, тому звідси $\|z - (x_\eta + x\|z - x_\eta\|)\| \geq \rho(z, G) = \delta$. Повертаючись до ланцюга рівностей, отримаємо:
$\|y_\varepsilon - x\| \geq \dfrac{\delta}{\|z - x_\eta\|} > \dfrac{\delta}{\delta + \eta} = 1 - \dfrac{\eta}{\delta + \eta} = 1 - \varepsilon$. ■

Theorem 4.2.7 Задано E – нормований простір.
$\dim E < \infty \iff$ кожна підмножина E – передкомпактна.

Proof.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\dim E = \infty$. Ми хочемо довести, що замкнена куля $B[0;1]$ не буде компактом.
У якості x_1 оберемо будь-який вектор одиничної сфери та покладемо $G_1 = \operatorname{span}\{x_1\}$. За лемою Ріса, знайдеться вектор $x_2 = y_{\frac{1}{2}} \notin G_1$ такий, що $\|x_2\| = 1$ та $\forall x \in G_1 : \|x_2 - x\| > \dfrac{1}{2}$, зокрема звідси $\|x_2 - x_1\| > \dfrac{1}{2}$.
Покладемо $G_2 = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$. Тоді знову за лемою Ріса, знайдеться вектор $x_3 = y_{\frac{1}{2}}$ такий, що $\|x_3\| = 1$ та $\forall x \in G_2 : \|x_3 - x\| > \dfrac{1}{2}$. Зокрема $\|x_3 - x_1\| > \dfrac{1}{2}$, $\|x_3 - x_2\| > \dfrac{1}{2}$.
$\vdots$
У силу того, що $\dim E = \infty$, то цей процес буде продовжуватися. Побудуємо послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty \subset B[1;0]$ таку, що $\forall m, n \geq 1 : \|x_m - x_n\| > \dfrac{1}{2}$. Така обмежена послідовність не містить збіжної підпослідовності.

$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $\dim E < \infty$, тоді відомо, що $E \cong \mathbb{C}^n$. Будь-яка обмежена підмножина $\mathbb{R}^n$ – передкомпактна за Больцано-Ваєрштраса. ■

Повертаємося назад до розмов про компактні простори.

Proposition 4.2.8 Припустимо, що $\dim E_2 < \infty$. Тоді $\mathcal{K}(E_1, E_2) = \mathcal{B}(E_1, E_2)$.
Інакше кажучи, за додатковими умовами обмежений оператор може бути компактним.

Proof.
Вкладення $\mathcal{K}(E_1, E_2) \subset \mathcal{B}(E_1, E_2)$ в нас уже є. Треба тепер тільки зворотний бік.
Припустимо, що $A \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$. Оберемо довільну обмежену множину $M \subset E_1$. Тоді оскільки $\dim E_2 < \infty$, то $A(M) \subset E_2$ буде передкомпактною автоматично. Отже, $A \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$. ■

Example 4.2.9 Розглянемо оператор $A\colon C([0,1]) \to C([0,1])$, що задається як $(Af)(t) = \displaystyle\int_0^1 k(t,s)f(x)\,ds$, де функція $k(t,s) = a(t)b(s),\ a, t \in C([0,1])$. Покажемо, що це – компактний оператор.
Дійсно, $(Af)(t) = a(t) \displaystyle\int_0^1 b(s)f(s)\,ds = C \cdot a(t)$. Тобто звідси $\dim \operatorname{Im} A = 1$, що підтвердує компактність оператора.

4.3 Властивості компактного оператора

Theorem 4.3.1 Задано E – банахів простір. Розглянемо послідовність $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{K}(E)$, яка збігається за нормою (із $\mathcal{B}(E)$) до оператора A. Тоді $A \in \mathcal{K}(E)$.

Proof.
Фіксуємо обмежену послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty$ із E. Ми хочемо зі послідовності $(Ax_n)_{n=1}^\infty$ відокремити збіжну підпослідовність. Будемо діагональним методом доводити.
$A_1 \in \mathcal{K}(E)$, тому зі послідовності $(A_1 x_n)_{n=1}^\infty$ відокремимо збіжну підпослідовність $(A_1 x_{n_1})_{n=1}^\infty$.
$A_2 \in \mathcal{K}(E)$, тому зі послідовності $(A_2 x_{n_1})_{n=1}^\infty$ відокремимо збіжну підпослідовність $(A_2 x_{n_2})_{n=1}^\infty$.
$\vdots$
Розглянемо діагональну послідовність $(x_{nn})_{n=1}^\infty$. Нам треба довести, що саме підпослідовність $(Ax_{nn})_{n=1}^\infty$ буде фундаментальною, а внаслідок банаховості E – збіжною. Почнемо потроху оцінювати норму.
Перед цим треба зауважити, що $(A_k x_{nn})_{n=1}^\infty$ при всіх $k \in \mathbb{N}$ буде збіжною, просто тому що $(x_{nn})_{n=1}^\infty \subset (x_{n_k})_{n=1}^\infty$ та $(A_k x_{n_k})_{n=1}^\infty$ збіжна.
$\|Ax_{mm} - Ax_{nn}\| \le \|Ax_{mm} - A_k x_{mm}\| + \|A_k x_{mm} - A_k x_{nn}\| + \|A_k x_{nn} - A_k x_{mm}\| \overset{\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{B}(E)}{\le}$
$\le \|A - A_k\|(\|x_{mm}\| + \|x_{nn}\|) + \|A_k x_{nn} - A_k x_{mm}\| \boxed{<}$
Оскільки $(x_n)_{n=1}^\infty$ обмежена, то обмеженою буде $(x_{nn})_{n=1}^\infty$, а там звідси $\|x_{nn}\| \le c, \forall n \ge 1$.
Далі оскільки $(\|A_k\|)_{n=1}^\infty$ – збіжна, то існує такий номер k_0, для якого $\|A - A_{k_0}\| < \dfrac{\varepsilon}{3c}$. Також в силу збіжності $(A_{k_0} x_{nn})_{n=1}^\infty$ ми отримаємо, що $\exists N : \forall n, m \ge N : \|A_{k_0} x_{nn} - A_{k_0} x_{mm}\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
$\boxed{<} \dfrac{\varepsilon}{3c} \cdot 2c + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ ■

Theorem 4.3.2 $\mathcal{K}(E)$ – підпростір $\mathcal{B}(E)$ за умовою, що E – банахів.
(TODO: провести доведення)

Remark 4.3.3 Ці дві теореми працюють для операторів з $\mathcal{K}(E_1, E_2)$, тільки тут E_2 має бути банаховим.

Theorem 4.3.4 Нехай $A \in \mathcal{K}(E)$. Тоді $A^* \in \mathcal{K}(E')$.

Proof.
Нехай $(l_n)_{n=1}^\infty \subset E'$ – обмежена послідовність. Хочемо із $(A^* l_n)_{n=1}^\infty$ відокремити збіжну підпослідовність. Зауважимо наступне:
$\|A^* l_n\| = \sup\limits_{\|y\|=1} |(A^* l_n)(y)| = \sup\limits_{y \in \mathcal{S}(1;0)} |l_n(Ay)| = \sup\limits_{z \in A(S(1;0))} |l_n(z)|.$
Для доведення теореми нам досить буде встановити передкомпактність множини $\{l_n\}_{n=1}^\infty \subset C(\overline{AS(1;0)})$.
Перевіримо умови виконання теореми Арцела-Асколі.
$\forall n \ge 1 : |l_n(z)| \le \|l_n\| \|z\| \le c \cdot c_1$ – виконується рівномірна обмеженість.
$\forall n \ge 1 : |l_n(z_1) - l_n(z_2)| \le c\|z_1 - z_2\|$ – виконується умова одностайної неперервності.
Отже, існує збіжна підпослідовність $(l_{n_k})_{n=1}^\infty$, причому $\|l_{n_k} - l_{n_m}\| = \max\limits_{z \in \overline{AS(1;0)}} |l_{n_k}(z) - l_{n_m}(z)| \to 0$.
Внаслідок чого $\|A^* l_{n_k} - A^* l_{n_m}\| \to 0$. ■

4.4 Компактні оператори в сепарабельному гілбертовому просторі

Розглянемо H – сепарабельний гілбертів простір, оберемо базис $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$. Розглянемо оператор $A \in S_2(H)$, тобто $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty$. Позначимо $\mathbb{A}$ за матрицю оператора A.

Theorem 4.4.1 $S_2(H) \subsetneq \mathcal{K}(H)$.

Proof.
Розглянемо оператор P_j – проєктор на підпростір, породжений базисом $\{e_1, \dots, e_j\}$. Розглянемо послідовність операторів $A_j = P_j A$, їм відповідають матриці $\mathbb{A}_j$ – та сама матрица $\mathbb{A}$, тільки, починаючи з $j+1$ рядка, будуть одні нулі. Зауважимо також, що образ A_j буде скінченним, причому $A_j = P_j A \in \mathcal{B}(H)$ (як добуток обмежених), тому $A_j \in \mathcal{K}(H)$. Доведемо, що $\|A - A_j\| \to 0$ при $j \to \infty$.
Спочатку доведемо, що $|A - A_j| \to 0$ при $j \to \infty$ за нормою Гілберта-Шмідта.
$|A - A_j|^2 = \sum\limits_{k=j+1}^{\infty} \left(\sum\limits_{l=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 \right) \to 0$ при $j \to \infty$ як залишковий ряд. При цьому ми маємо $\|A\| \leq |A|$ (TODO: чому?), тоді звідси випливає, що $\|A - A_j\| \to 0$. Отже, за **Th. 4.3.1**, оператор $A \in \mathcal{K}(H)$.

Тепер розглянемо оператор A, яка має матрицю $\mathbb{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Зауважимо, що $A \in S_2(H) \iff \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2 < \infty$. Також маємо $A \in \mathcal{K}(H) \iff \lambda_j \to 0$. ■

Theorem 4.4.2 Нехай $A \in \mathcal{K}(H)$. Тоді існує послідовність операторів $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, для яких $A_n \to A$, причому $\dim \operatorname{Im} A_n < \infty$.

Proof.
Аналогічно розглянемо оператор P_j, як було вище, а також оператор $A_j = P_j A$. Доведемо, що $A_j \to A$, тобто ми хочемо $\|A - A_j\| = \|(I - P_j)A\| \to 0$.
!Припустимо, що $\|(I - P_j)A\| \not\to 0$, тобто існує $c > 0$, для якої $\|(I - P_j)A\| \geq c$, тобто іншими словами $\sup\limits_{\|x\|=1} \|(I - P_j)Ax\| \geq c$. Тоді можна відокремити послідовність $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ з $\|x_j\| = 1$, для яких $\|(I - P_j)Ax_j\| \geq \frac{c}{2}$. Для зручності позначимо $y_j = Ax_j$. Оскільки $A \in \mathcal{K}(H)$, то можна відокремити збіжну підпослідовність $(y_{j_k})_{k=1}^{\infty}$, де $y_{j_k} \to y$. Власне, звідси $\|(I - P_j)y\| \geq \frac{c}{2}$. Проте раніше доводили (TODO: ?), що $I - P_j \overset{s}{\to} O$ при $j \to \infty$, тобто $(I - P_j)y \to 0$ – суперечність! ■

4.5 Спектри в компактних операторах

Theorem 4.5.1 Альтернатива Фредгольма
Задано E – банахів простір, оператор $A \in \mathcal{K}(E)$ та $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тоді виконується рівно одна з умов:
1) λ – власне число A;
2) λ – регулярна точка A.

Перед доведення теореми треба навести корисну лему.

Lemma 4.5.2 Нехай $A \in \mathcal{K}(E)$ та λ – не власне число. Тоді існує $c > 0$ такий, що $\forall x \in E$: $\|(A - \lambda I)x\| \geq c\|x\|$.

Proof.
!Припустимо, що не виконується нерівність. Тоді для $\frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ існують точки $z_n \in E$, для яких $\|(A - \lambda I)z_n\| < \frac{1}{n}\|z_n\|$. Ми будемо розглядати точки $x_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$, тобто з одиничною нормою (там, де раптом $z_n = 0$, можна просто пропустити), звідси $\|(A - \lambda I)x_n\| < \frac{1}{n} \to 0$.
Позначимо точку $y_n = Ax_n$. Зауважимо, що оскільки $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ обмежена та $A \in \mathcal{K}(E)$, то тоді існує збіжна підпослідовність $y_{n_k} \to y$. Також справедлива така оцінка:
$|\lambda| \overset{\text{з одного боку}}{=} \|\lambda x_n\| \overset{\text{з іншого боку}}{=} \|(\lambda I - A)x_n + Ax_n\| \leq \|y_n\| + \|(A - \lambda I)x_n\|$.
$\implies \|y_n\| \geq |\lambda| - \|(A - \lambda I)x_n\|$.

Оскільки це виконано $\forall n \in \mathbb{N}$, то зокрема й для n_k, а далі при $k \to \infty$ отримаємо $\|y\| \geq |\lambda|$.
Утім із іншого боку, зараз доведемо, що $y = 0$. Дійсно, маємо
$0 \leq \|(A - \lambda I)y_{n_k}\| = \|(A - \lambda I)Ax_{n_k}\| = \|A(A - \lambda I)x_{n_k}\|$.
Якщо спрямувати $k \to \infty$, то ми отримаємо $0 \leq \|(A - \lambda I)y\| \leq 0$, що свідчить про $(A - \lambda I)y = 0$.
Отже, y – власне число оператора A – суперечність! ■

Повернімося до доведення альтернативи Фредгольма.

Proof.
Якщо λ – власне число, то закінчили доведення.
Тому нехай λ таким не є. За щойно доведеною лемою, $\|(A-\lambda I)x\| \geq c\|x\|$ при всіх $x \in E$ для деякого $c > 0$. Тоді звідси (TODO: ?) існує $(A-\lambda I)^{-1} \colon \operatorname{Im}(A-\lambda I) \to E$. За теоремою про замкнений графік, $\operatorname{Im}(A - \lambda I)$ буде замкненою множиною. Нам залишилося показати, що $\operatorname{Im}(A - \lambda I) = E$.
!Позначимо $\operatorname{Im}(A - \lambda I) = E_1$ та припустимо, що $E_1 \neq E$.
Розглянемо образ $(A-\lambda I)E_1 \overset{\text{позн.}}{=} E_2$. Слід зазначити, що $E_2 \neq E_1$ (адже якби $E_2 = E_1$, то оскільки $(A - \lambda I)^{-1} \colon E \to E_1$ – бієкція, то $E_1 = (A - \lambda I)E_1 = E$, що не наш випадок).
Розглянемо образ $(A - \lambda I)E_2 \overset{\text{позн.}}{=} E_3$. Слід зазначити, що $E_3 \neq E_2$ (аналогічно).
$\vdots$
Отримаємо ланцюг вкладень $E \supset E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ На кожному з цих вкладень застосуємо лему Ріса. Для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ будуть існувати точки $x_j \in E_j \setminus E_{j+1}$, причому $\|x_j\| = 1$, для яких $\forall y \in E_{j+1} : \|x_j + y\| > 1 - \dfrac{1}{2}$. Саме ці точки нам дадуть сказати, що $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ не містить збіжної підпослідовності. Справді, при $m > n$ маємо
$\|Ax_n-Ax_m\| = \|\lambda x_n+Ax_n-\lambda x_n-\lambda x_m-Ax_m+\lambda x_m\| = \|\lambda x_n+(A-\lambda I)x_n-\lambda x_m-(A-\lambda I)x_m\| \geq \lambda\cdot\dfrac{1}{2}$.
Пояснення до нерівності: $(A - \lambda I)x_n \in E_{n+1}$, далі $\lambda x_m \in E_m \subset E_{n+1}$ та $(A - \lambda I)x_m \in E_{m+1} \subset E_n$. Тобто останні три доданки – це елемент з E_{n+1}, а далі нерівність з леми Ріса.
Проте $A \in \mathcal{K}(E)$, тому $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ зобов'язана мати збіжну підпослідовність – суперечність! ■

Theorem 4.5.3 Задано E – банахів та $A \in \mathcal{K}(E)$. Тоді:
1) $\sigma(A)$ – не більш, ніж зліченна множина;
2) Якщо $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, то $\dim L_\lambda < \infty$ (тобто λ – власне число скінченної кратності);
3) Якщо $\dim E = \infty$, то $0 \in \sigma(A)$ – єдина гранична точка $\sigma(A)$.

Proof.
Нехай $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, тоді за альтернативою Фредгольма, λ – власне число A. Звузимо оператор $A|_{L_\lambda} \overset{\text{насправді}}{=} \lambda I$. Оскільки A компактний, то тоді обо'язково має бути $\dim L_\lambda < \infty$.

Оберемо $r > 0$ та покажемо, що існує скінченна кількість точок $\lambda_j \in \sigma(A)$, які лежать поза межами кола $B(0; r)$.
!Припустимо, що там нескінченна кількість точок. Ми можемо взяти різний набір $\lambda_j \in \sigma(A), j \geq 1$, для яких $|\lambda_j| \geq r$. Оскільки це власні числа, то $Ax_j = \lambda_j x_j$ для деяких $(x_j)_{j=1}^{\infty}$. Зауважимо, що будь-який скінченний набір $\{x_1, \dots, x_n\}$ буде лінійно незалежною. Адже, припустивши, що наступна $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ лінійно залежна, тобто $x_{n+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, то після дії оператора A отримаємо:
$$\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_{n+1} x_j = \lambda_{n+1} x_{n+1} \overset{\text{із одного боку}}{=} Ax_{n+1} \overset{\text{із іншого боку}}{=} \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j x_j.$$
$$\sum_{j=1}^{n} (c_j \lambda_{n+1} - c_j \lambda_j) x_j = 0 \implies c_j \lambda_{n+1} - c_j \lambda_j = 0 \implies c_j = 0 \implies x_{n+1} = 0 \text{ (не наш випадок).}$$
Позначимо $E_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}, n \geq 1$, тоді маємо вкладення $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$ За лемою Ріса, існують вектори $y_j \in E_j \setminus E_{j-1}$, причому $\|y_j\| = 1$ та $\forall y \in E_{j-1} : \|y_j + y\| \geq \dfrac{1}{2}$. Аналогічними міркуваннями (як у альтернтиві Фредгольма), отримаємо $\|Ax_n - Ax_m\| \geq \dfrac{r}{2}$, тоді не можна відокремити від $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ збіжну підпослідовність – суперечність, бо $A \in \mathcal{K}(E)$!
Отже, 1) довели (TODO: додумати). Якщо $\dim E = \infty$, ■

4.6 Спектральний радіус оператора

4.6.1 Степеневі ряди з операторними коефіцієнтами

Definition 4.6.1 Маємо E – банахів та $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(E)$, далі розглянемо **степеневий ряд з операторними коефіцієнтами**

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k A_k,\ z \in \mathbb{C}$$

Цей ряд буде **збіжним в точці** $z_0 \in \mathbb{C}$, якщо послідовність часткових сум збігається за нормою в $\mathcal{B}(E)$.

Lemma 4.6.2 Нехай для деякого $z_0 \neq 0$ послідовність $(z_0^n A_n)_{n=1}^{\infty}$ – обмежена. Тоді при $|z| < |z_0|$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} z^k A_k$ – збіжний.

Proof.
Маємо нерівність $\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} z^k A_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |z|^k \|A_k\|$. Значить, нам досить буде дослідити збіжність ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \|A_n\|$. Ми маємо $|z|^n \|A_n\| = \dfrac{|z|^n}{|z_0|^n} |z_0|^n \|A_n\| = q^n |z_0|^n \|A_n\| \leq cq^n$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} cq^n$ збіжний як геометрична прогресія, бо $q < 1$, звідси за ознакою порівняння збіжним буде $\sum_{n=0}^{\infty} \|z^n A_n\|$. ■

Lemma 4.6.3 Заданий степеневий ряд $\sum_{k=0}^{\infty} z^k A_k$. Тоді радіус збіжності повністю збігається з радіусом збіжності числового степененвого ряда $\sum_{k=0}^{\infty} z^n \|A_n\|$.

Proof.
Дійсно, розглянемо степеневий ряд $\sum_{k=0}^{\infty} z^n \|A_n\|$. Його радіус збіжності r можна визначити за ознакою Коші-Адамара.
Припустимо, що $0 < r < +\infty$. Тоді ми вже отримували нерівність $\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} z^k A_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |z|^k \|A_k\|$.
Тоді якщо $|z| < r$, то отримаємо збіжність $\sum_{k=0}^{\infty} z^k A_k$.

!Тепер припустимо, що $z_0 \in \mathbb{C}$ існує таке, що $|z_0| > r$ та при цьому в даній точці $\sum_{k=0}^{\infty} z_0^k A_k$ збіжний. Тоді звідси випливатиме обмеженість $(z_0^n A_n)_{n=1}^{\infty}$, тому за попередньою лемою, збіжним буде ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|z^n A_n\|$ при $r < |z| < |z_0|$. При цьому r – радіус збіжності числового степеневого ряда – суперечність!

Якщо $r = 0$ чи $r = +\infty$, то все цілком зрозуміло з нерівності. ■

Lemma 4.6.4 Нехай $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність невід'ємних чисел, що задовольняє умові $\alpha_{n+m} \leq \alpha_n \alpha_m$ для всіх $n, m \in \mathbb{N}$. Тоді $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} < \infty$.

Proof.
Спершу зауважимо, що $\left(\alpha_n^{\frac{1}{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ – обмежена. Дійсно, це випливатиме безпосередньо з ланцюга $\alpha_n \leq \alpha_1 \alpha_{n-1} \leq \alpha_1^2 \alpha_{n-2} \leq \cdots \leq \alpha_1^n$.
Зафіксуємо тепер $k \in \mathbb{N}$. Поділимо кожне n на k – отримаємо представлення $n = m_n k + l_n$ при остачі $0 \leq l_n < k$. Звідси випливатиме, що $\alpha_n \leq \alpha_k^{m_n} \alpha_{l_n}$ (при $l_n = 0$ може виникнути α_0, але покладемо

$\alpha_0 = 1$). Отже, звідси $\alpha_n^{\frac{1}{n}} \leq \alpha_k^{\frac{m_n}{n}} \alpha_{l_n}^{\frac{1}{n}} = \beta_n$.
Оскільки $\left(\alpha_n^{\frac{1}{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ обмежена, то існує $\varliminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{\frac{1}{n}} = \alpha$. Тобто можна відокремити підпослідовність $\left(\alpha_{n_j}^{\frac{1}{n_j}}\right)_{j=1}^{\infty}$, для якої $\lim\limits_{j\to\infty} \alpha_{n_j}^{\frac{1}{n_j}} = \alpha$. Дослідімо послідовність $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$.
$\dfrac{m_{n_j}}{n_j} = \dfrac{m_{n_j}}{m_{n_j}k + l_{n_j}} = \dfrac{1}{k + \dfrac{l_{n_j}}{m_{n_j}}} \to \dfrac{1}{k}$ при $j \to \infty$;

$\alpha_{l_{n_j}}^{\frac{1}{n_j}} \to 1$ (тут $\alpha_{l_{n_j}} \in \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$).
Отже, оскільки $\alpha_{n_j}^{\frac{1}{n_j}} \leq \beta_{n_j}$, то при $j \to \infty$ маємо $\alpha \leq \alpha_k^{\frac{1}{k}}, \forall k \in \mathbb{N}$, а тому відповідно $\alpha \leq \varliminf\limits_{k\to\infty} \alpha_k^{\frac{1}{k}}$, коротше $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{\frac{1}{n}} \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{\frac{1}{n}}$. Єдина така можливість набуття нерівності – це коли послідовність $\left(\alpha_n^{\frac{1}{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ збігається. ■

4.6.2 Спектральни радіус лінійного неперервного оператора

Definition 4.6.5 Маємо $A \in \mathcal{B}(E)$ та $\sigma(A)$ – спектр.
Спектральним радіусом оператора A назвемо число

$$\rho_A = \max_{z \in \sigma(A)} |z|$$

Theorem 4.6.6 Задано $A \in \mathcal{B}(E)$. Тоді $\rho_A = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

Proof.
Розглянемо послідовність $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, де кожний $\alpha_n = \|A^n\|$. Зауважимо, що $\alpha_{n+m} = \|A^{n+m}\| \leq \|A^n\|\|A^m\| = \alpha_n\alpha_m$, а тому за лемою вище існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Залишилося довести, що саме ця границя буде спектральним радіусом оператора A.
Розглянемо резольвенту $R_z(A) = (A - zI)^{-1}$. Зауважимо, що $\sigma(A) \subset \overline{B(\rho_A, 0)}$ (TODO: ?), тож звідси R_z – аналітична поза межами $\overline{B(\rho_A, 0)}$. Але тоді функція $f(\zeta) = R_{\frac{1}{\zeta}}$ буде аналітичною всередині шара $B\left(\dfrac{1}{\rho_A}, 0\right)$ (на межах є точки, де аналітичність порушується).
Представимо функцію f у вигляді степеневого ряду з операторними коефіцієнтами. При $|\zeta| \leq \|A^{-1}\|$ матимемо $f(\zeta) = (A - \zeta^{-1}I)^{-1} = -\zeta(I - \zeta A)^{-1} = -\zeta \sum\limits_{n=0}^{\infty} \zeta^n A^n$ – це було все зроблено за рахунок **Th. 2.11.3**. За другою лемою, радіусом збіжності в правій частині буде $\dfrac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}}$. Ба більше, функція $f(\zeta)$ аналітична всередині кола $B(\rho_A^{-1}, 0)$, тобто звідси $\rho_A^{-1} = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}}$. ■

4.7 Спектральний розклад для компактних самоспряжених операторів

Lemma 4.7.1 Нехай A – самоспряжений оператор. Тоді $\|A^n\| = \|A\|^n$.

Proof.
Спочатку доведемо рівність при $n = 2$. У одну сторону все ясно, тобто $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Для іншої сторони матимемо наступне:
$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^2x, x) \overset{\text{н-ть К-Б}}{\leq} \|A^2x\|\|x\|$.
Взявши sup за векторами x, для яких $\|x\| = 1$, отримаємо $\|A\|^2 \leq \|A^2\|$.
Отже, отримали $\|A^2\| = \|A\|^2$, а внаслідок чого $\left\|A^{2^n}\right\| = \|A\|^{2^n}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.
Для кожного числа $m \in \mathbb{N}$ буде $m \leq 2^m$. Якщо припустити, що $\|A^m\| < \|A\|^m$, то отримаємо $\|A\|^{2^m} = \left\|A^{2^m}\right\| \leq \|A^m\| \left\|A^{2^m - m}\right\| < \|A\|^m \|A\|^{2^m - m}$.
Така нерівність трошки суперечить, тому автоматично $\|A^m\| = \|A\|^m, \forall m \in \mathbb{N}$. ■

Remark 4.7.2 Зауважимо, що якщо $A \in \mathcal{K}(H)$ – самоспряжений, то $\rho_A = \|A\|$ (цілком ясно).

Theorem 4.7.3 Нехай $A \in \mathcal{K}(H)$ – самоспряжений. Тоді існує власне число λ, для якого $|\lambda| = \|A\|$.

Proof.
Дійсно, оскільки A – самоспряжений, то звідси $\|A^n\| = \|A\|^n$, але тоді звідси $\rho_A = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \|A\|$. ■

Нагадаю твердження, яке було в лінaлі, яке копіюється в нашому випадку.

Lemma 4.7.4 Нехай A – самоспряжений, тоді:
1) Всі власні числа оператора – дійсні;
2) Власні вектори, що відповідають різним власним числам, ортогональні між собою.

Lemma 4.7.5 Нехай G – інваріантний для $A \in \mathcal{B}(H)$. Тоді $G^\perp$ – інваріантний для A^*.

Proof.
Дійсно, нехай $y \in G^\perp$, для кожного $x \in G$ маємо $Ax \in G$, внаслідок чого $(Ax, y) = 0$. Із іншого боку, $0 = (Ax, y) = (x, A^*y) \implies A^*y \perp x, \forall x$. Це означатиме, що $A^*y \in G^\perp$. ■

Theorem 4.7.6 Нехай $A \in \mathcal{K}(H)$ – самоспряжений. Тоді $H = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda_k \in \sigma(A) \\ \lambda_k \neq 0}} H_{\lambda_k} \oplus H_0$.
У цьому випадку H_{λ_k} – власний підпростір та H_0 – ядро оператора A.

Proof.
Уже знаємо, що існує λ_1 таке, що $|\lambda_1| = \|A\|$. Уже відомо ще давно, що власний підпростір H_{λ_1} – інваріантний відносно A, звідси $H_{\lambda_1}^\perp \overset{\text{позн.}}{=} H_1$ – інваріантний відносно A.
Розглянемо оператор $A_1 = A|_{H_1}$. Якщо раптом $A_1 = O$, то закінчили доведення. У протилежному випадку існує λ_2 таке, що $|\lambda_2| = \|A_1\|$. Причому зауважимо, що $|\lambda_2| = \|A_1\| \leq \|A\| = |\lambda_1|$, а також $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Останнє якби було правдою, $\lambda_2 = \lambda_1$, то ми би мали вектор $x \in H_1$, для якого $Ax = \lambda_2 x = \lambda_1 x$, але тоді $x \in H_{\lambda_1}$, що неможливо. За лемою вище, власні підпростори $H_{\lambda_1}, H_{\lambda_2}$ ортогональні, тому покладемо $H_2 \overset{\text{позн.}}{=} (H_{\lambda_1} \oplus H_{\lambda_2})^T$, який досі залишається інваріантним.
Розглянемо оператор $A_2 = A|_{H_2}$. Якщо раптом $A_2 = O$, то закінчили доведення. Інакше
$\vdots$
Покладемо $H' = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda_k \in \sigma(A) \\ \lambda_k \neq 0}} H_{\lambda_k}$, який інваріантний. Покладемо $H_0 = (H')^\perp$ – теж інваріантний. Тоді звідси $H_0 = \ker A$.
!Якби це не так, то існував би вектор $x \in H_0 : Ax \neq 0$, тому $\|A|_{H_0}\| > 0$, внаслідок чого існувало би власне число $\lambda_0 \neq 0$, що суперечить! (бо ми всі перебрали вже). ■

Back to лінійна алгебра

У рамках цього розділу будемо розглядати скінченновимірні простори L, тобто $\dim L < \infty$. Нам уже відомо, що $L \cong \mathbb{R}^n$, а в даному просторі задається норма $\|\vec{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$.

Theorem 4.7.7 У кожному скінченновимірному просторі всі норми еквівалентні.

Proof.
Достатньо довести, що всі норми еквівалентні до $\|\cdot\|_2$.

Нехай $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d\}$ – стандартний базис $\mathbb{R}^d$, тоді звідси $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i \vec{e}_i$.

$\left\| \sum\limits_{i=1}^{d} x_i \vec{e}_i \right\| \leq \sum\limits_{i=1}^{d} \|x_i e_i\| = \sum\limits_{i=1}^{d} |x_i| \|e_i\| = \sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{d} |x_i| \|\vec{e}_i\| \right)^2} \overset{\text{К-Б}}{\leq} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} \|e_i\|^2} \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{d} |x_j|^2} \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} \|e_i\|^2} \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} \|e_i\|^2} \|\vec{x}\|_2 = M \|\vec{x}\|_2.$

Зауважимо, що $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ та не залежить від $\vec{x}$. Отже, $\|\vec{x}\| \leq M \|\vec{x}\|_2$.

Розглянемо тепер S – одинична сфера на $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. Відомо, що S – замкнена множина та обмежена. Тож за лемою Гейне-Бореля, S – компактна множина. Відомо, що відображення $\|\cdot\| \colon S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ – неперервне відображення, тож вона досягає найменшого значення m для деякого $\vec{y} \in S$.
Припустимо $m = 0$, тоді звідси $\|\vec{y}\| = 0 \implies \vec{y} = \vec{0} \implies \vec{y} \notin S$ – неможливо. Отже, $m > 0$.
Значить, $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^d : \|\vec{y}\|_2 = 1 : \|y\| \geq m$. Треба довести те саме для інших векторів.
Якщо $\vec{x} = \vec{0}$, то це виконано. Тому $\vec{x} \neq \vec{0}$. Покладемо вектор $\vec{y} = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2}$, причому $\|\vec{y}\|_2 = 1$. Із цього випливає, що $\|\vec{y}\|_2 \leq m \implies m\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|$.

Всі інші норми будуть еквівалентними в силу транзитивності. ■

Definition 4.7.8 Задано X, Y – нормовані простори.
Вони називаються **ізоморфними**, якщо існує бієктивний лінійний оператор $A \colon X \to Y$, для якого

$$\forall x \in X : \|Ax\|_Y = \|x\|_X$$

Водночас такий оператор A називають **ізоморфізмом**.
Позначення: $X \cong Y$