Зміст

1 Метричні простори та інше

1.1 Означення метричних просторів

Definition 1.1.1 Задано X – множина та $\rho\colon X \to X \to \mathbb{R}$ – функція.
Функція ρ називається **метрикою**, якщо вона задовольняє таким властивостям:

$$1)\ \forall x, y \in X : \rho(x,y) \geq 0, \qquad \rho(x,y) = 0 \iff x = y$$
$$2)\ \forall x, y \in X : \rho(x,y) = \rho(y,x)$$
$$3)\ \forall x, y, z \in X : \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

Метрика описує **відстань** між елементами x, y.
Пара (X, ρ) з метрикою називається **метричним простором**.

Example 1.1.2 Розглянемо декілька прикладів:
1) $X = \mathbb{R}$, $\qquad \rho(x,y) = |x-y|$;
2) $X = \mathbb{R}^n$, можна задати дві метрики:
$\rho_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$, $\qquad \rho_2(\vec{x},\vec{y}) = |x_1-y_1| + \dots + |x_n-y_n|$;
3) $X = C([a,b])$, $\qquad \rho(f,g) = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$.

Example 1.1.3 Окремо розгляну даний приклад. Нехай X – будь-яка множина, ми визначимо так звану **дискретну метрику** $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$. Тоді (X, d) задає **дикретний** метричний простір.

Example 1.1.4 Розглянемо $X = \mathbb{N}$ та функцію $\rho(m,n) = 1 + \dfrac{1}{m+n}$ при $m \neq n$, інакше $\rho(m,n) = 0$.
Доведемо, що ρ задає метрику.
1) $\rho(m,n) \geq 0$ – це зрозуміло, також $\rho(m,n) = 0 \iff m = n$ за визначенням функції;
2) $\rho(n,m) = 1 + \dfrac{1}{n+m} = 1 + \dfrac{1}{m+n} = \rho(m,n)$;
3) Тут ситуація менш приємна, ми хочемо $\rho(m,n) \leq \rho(m,k) + \rho(k,n)$. Спочатку розглянемо випадки, коли m, n, k попарно не рівні. Зауважимо, що справедлива нерівність при $m, n, k \in \mathbb{N}$:
$\dfrac{1}{m+n} \leq 1 + \dfrac{1}{m+k} + \dfrac{1}{k+n}$.
Якщо додати до обох частей нерівності 1, то ми отримаємо:
$\rho(m,n) = 1 + \dfrac{1}{m+n} \leq 1 + 1 + \dfrac{1}{m+k} + \dfrac{1}{k+n} = 1 + \dfrac{1}{m+k} + 1 + \dfrac{1}{k+n} = \rho(m,k) + \rho(k,n)$.
Отже, $(\mathbb{N}, \rho)$ задає метричний простір.

Definition 1.1.5 Задано (X, ρ) – метричний простір.
Пару $(Y, \tilde{\rho})$, де $Y \subset X$, назвемо **метричним підпростором** (X, ρ), якщо

$$\forall x, y \in Y : \tilde{\rho}(x,y) = \rho(x,y).$$

При цьому метрика $\tilde{\rho}$, кажуть, **індукована в Y метрикою** ρ.

Proposition 1.1.6 Задано (X, ρ) – метричний простір та $(Y, \tilde{\rho})$ – підпростір. Для функції $\tilde{\rho}$ всі три аксіоми зберігаються. Тобто $(Y, \tilde{\rho})$ залишається метричним простором.
Вправа: довести.

Example 1.1.7 Маємо $X = F([a,b])$ – множину обмежених функцій та $\rho(f,g) = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$.
Тоді в $Y = C([a,b])$ маємо метрику $\tilde{\rho}(f,g) = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$. Отже, $C([a,b])$ – метричний підпростір простору $F([a,b])$.

1.2 Відкриті та замкнені множини. Збіжні послідовності

Definition 1.2.1 Задано (X, ρ) – метричний простір та $a \in X$.
Відкритою кулею радіусом r з центром a називають таку множину:

$$B(a; r) = \{x \in X \mid \rho(a,x) < r\}$$

Її ще називають r**-околом точки** a.
Замкненою кулею радіусом r **з центром** a називають таку множину:

$$B[a;r] = \{x \in X \mid \rho(a,x) \leq r\}$$

Example 1.2.2 Розглянемо декілька прикладів:
1) $X = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x-y|$, $\qquad B(a;r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$;
2) $X = \mathbb{R}^2$, $\rho(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$, $\qquad B(0;1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$.

Definition 1.2.3 Задані (X,ρ) – метричний простір, $A \subset X$ та $a \in A$.
Точка a називається **внутрішньою** для A, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : B(a;\varepsilon) \subset A.$$

Definition 1.2.4 Задані (X,ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **відкритою**, якщо

кожна точка множини A – внутрішня.

Example 1.2.5 Розглянемо такі приклади:

1) Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|$ та множину $A = [0,1)$. Точка $a = \dfrac{1}{2}$ – внутрішня, оскільки $\exists \varepsilon = \dfrac{1}{4} : B\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right) \subset A$, тобто $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right) \subset [0,1)$. Водночас точка $a = 0$ – не внутрішня. Отже, A – не відркита, бо знайшли не внутрішню точку.

2) Маємо $X = [0,1], \rho(x,y) = |x-y|$ та множину $A = [0,1)$. У цьому випадку точка $a = 0$ уже внутрішня (в попередньому прикладі ми могли ε-околом вийти за межі нуля ліворуч, а тут вже ні). Тут A тепер відкрита.

3) Маємо $X = \{0,1,2\}$ – підпростір метричного простору $(\mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|)$. Задамо множину $A = \{0,1\}$. Тут кожна точка – внутрішня. Отже, A – відкрита.

Definition 1.2.6 Задані (X,ρ) – метричний простір, $A \subset X$ та $x_0 \in X$.
Точка x_0 називається **граничною** для A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : (B(x_0;\varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

Інколи ще множину $B(x_0;\varepsilon) \setminus \{x_0\} \overset{\text{позн.}}{=} \overset{\circ}{B}(x_0;\varepsilon)$ називають **проколеним околом точки** x_0.

Definition 1.2.7 Задані (X,ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **замкненою**, якщо

вона містить всі свої граничні точки

Example 1.2.8 Розглянемо такі приклади:

1) Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|$ та множину $A = (0,1)$. Точки $x_0 \in \left\{\dfrac{1}{2}, 0, 1\right\}$ – граничні. Водночас точка $x_0 = \dfrac{3}{2}$ – не гранична. Отже, A – не замкнена, бо $x_0 = 1$ хоча й гранична для A, але $x_0 \notin A$.

2) Маємо $X = \mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|$. Задамо множину $A = \{0,1\}$. Тут жодна точка – не гранична. Тим не менш, A – замкнена. Бо нема жодної граничної точки в X для A, щоб порушити означення.

3) $X, \emptyset$ – замкнені в будь-якому метричному просторі.

Theorem 1.2.9 Задані (X,ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A – відкрита $\iff$ множина A^c – замкнена

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – відкрита.
!Припустимо, що A^c – не замкнена, тобто $\exists x_0 \in A : x_0$ – гранична для A^c, але $x_0 \notin A^c$. За умовою, оскільки $x_0 \in A$, то x_0 - внутрішня, тобто $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \subset A$. Отже, $B(x_0;\varepsilon) \cap A^c = \emptyset$ – суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A^c – замкнена. Тоді вона містить всі граничні точки. Тоді $\forall x_0 \in A : x_0$ – не гранична для A^c, тобто $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0;\varepsilon) \cap A^c = \emptyset \implies B(x_0;\varepsilon) \subset A$. Отже, x_0 – внутрішня для A, а тому A – відкрита. ■

Example 1.2.10 Розглянемо дискретний метричний простір (X, d). Покажемо, що всі множини – відкриті.
Нехай $A \subset X$, розглянемо $a \in A$. Тоді існує окіл $B\left(a; \frac{1}{2}\right) = \left\{x \in X \mid \rho(x,a) < \frac{1}{2}\right\} = \{a\} \subset A$. Це виконується для всіх $a \in A$, тому A – відкрита.
Всі множини відкриті, а тому всі множини також замкнені.

Theorem 1.2.11 Задано (X, ρ) – метричний простір. Тоді справедливе наступне:
1) Нехай $\{U_\alpha \subset X,\ \alpha \in I\}$ – (довільна) сім'я відкритих множин. Тоді $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ – відкрита множина;
2) Нехай $\{U_k \subset X, k = \overline{1,n}\}$ – (скінченна) сім'я відкритих множин. Тоді $\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ – відкрита множина;
3) $\emptyset, X$ – відкриті множини.

Proof.
Доведемо кожний пункт окремо:

1) Задано множину $U = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$. Зафіксуємо $a \in U$. Тоді $\exists \alpha_0 : a \in U_{\alpha_0} \implies a$ – внутрішня для U_{α_0} $\implies \exists \varepsilon > 0 : B(a; \varepsilon) \subset U_{\alpha_0} \subset U$. Отже, U – відкрита.

2) Задано множину $U = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$. Зафіксуємо $a \in U$. Тоді $\forall k = \overline{1,n} : a \in U_k \implies a$ – внутрішня для $U_k \implies \exists \varepsilon_k > 0 : B(a; \varepsilon_k) \subset U_k$. Задамо $\varepsilon = \min\limits_{1 \le k \le n} \varepsilon_k \implies B(a; \varepsilon) \subset U$. Отже, U – відкрита.

3) $\emptyset$ – відкрита, бо нема внутрішніх точок, тому що там порожньо. Також X – відкрита, оскільки для $a \in X$, який б $\varepsilon > 0$ не обрав, $B(a; \varepsilon) \subset X$.

Всі твердження доведені. ■

Remark 1.2.12 Нижче буде наданий приклад, чому в другому твердженні лише скінченна кількість відкритих множин.

Example 1.2.13 Розглянемо $X = \mathbb{R}$ із метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$. Задана сім'я відкритих множин $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, причому $\forall n \ge 1$. Тоді зауважимо, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$, але така множина вже не є відкритою.

Corollary 1.2.14 Задано (X, ρ) – метричний простір. Тоді справедливо наступне:
1) Нехай $U_\alpha \subset X$, $\alpha \in I$ – сім'я замкнених множин. Тоді $\bigcap\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ – замкнена множина;
2) Нехай $U_k \subset X, k = \overline{1,n}$ – сім'я замкнених множин. Тоді $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k$ – замкнена множина;
3) $\emptyset, X$ – замкнені множини.
*Вказівка: скористатися де Морганом та **Th. 1.2.9**.*

Remark 1.2.15 Такі твердження НЕ є правдивими:
1) A – не відкрита, а тому A – замкнена (наприклад, $[0, 1)$ в $\mathbb{R}$);
2) A – відкрита, а тому A – не замкнена (наприклад, $\emptyset$ в $\mathbb{R}$).

Proposition 1.2.16 Задано (X, ρ) – метричний простір, $a \in X, r > 0$. Тоді відкритий окіл $B(a; r)$ – справді відкритий; замкнений окіл $B[a; r]$ – справді замкнений.

Proof.
(про $B(a; r)$). Задамо точку $b \in B(a; r)$. Нехай $\varepsilon = r - \rho(a, b) > 0$. Тоді якщо $x \in B(b; \varepsilon)$, то тоді $\rho(x, a) \le \rho(x, b) + \rho(b, a) < \varepsilon + \rho(b, a) = r$. Отже, $B(a; r)$ – відкрита.

(про $B[a; r]$). Для цього досить довести, що $B^c[a; r] = \{x | \rho(a, x) > r\}$ – відкрита. Якщо задати $\varepsilon = \rho(a, b) - r$ для точки $b \in B(a; r)$, то аналогічними міркуваннями отримаємо, що $B^c[a; r]$ – відкрита. Отже, $B[a; r]$ – замкнена. ■

Definition 1.2.17 Задано (X, ρ) – метричний простір, послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset X$ та $x_0 \in X$. Дана послідовність називається **збіжною** до x_0, якщо

$$\rho(x_n, x_0) \to 0, n \to \infty$$

Позначення: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Theorem 1.2.18 Задано (X, ρ) – метричний простір, $A \subset X$ та $x_0 \in X$. Наступні твердження еквівалентні:
1) x_0 – гранична точка для A;
2) $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A$ – нескінченна множина;
3) $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : \forall n \geq 1 : x_n \neq x_0 : x_n \to x_0$.

Proof.
$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Дано: x_0 – гранична для A.
!Припустимо, що $\exists \varepsilon^* > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A$ – скінченна множина, тобто маємо $x_1, \dots, x_n \in B(x_0; \varepsilon^*)$. Тоді $\rho(x_0, x_1) < \varepsilon^*, \dots, \rho(x_0, x_n)^* < \varepsilon$. Оберемо найменшу відстань та задамо $\varepsilon^*_{new} = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \rho(x_0, x_i)$. Створимо $B(x_0; \varepsilon^*_{new}) \subset B(x_0; \varepsilon)$. У новому шару жодна точка $x_1, \dots, x_n \in A$ більше сюди не потрапляє. Тоді $B((x_0; \varepsilon^*_{new}) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$ – таке неможливо через те, що x_0 – гранична точка. Суперечність!

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Дано: $\forall \varepsilon > 0 : B(x_0; \varepsilon) \cap A$ – нескінченна множина. Встановимо $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$. Тоді оскільки $\forall n \geq 1 : B\left(x_0; \dfrac{1}{n}\right) \cap A$ – нескінченна, то $\forall n \geq 1 : \exists x_n \in A : \rho(x_0, x_n) < \dfrac{1}{n}$. Якщо далі $n \to \infty$, тоді $\rho(x_0, x_n) \to 0$. Остаточно, $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \neq x_0 : x_n \to x_0$.

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Дано: $\exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \neq x_0 : x_n \to x_0$. Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : \rho(x_0, x_n) < \varepsilon$. Або, інакше кажучи, $\forall \varepsilon > 0 : x_N \in B(x_0; \varepsilon) \cap A$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 : (B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$. ■

Proposition 1.2.19 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
A – замкнена $\iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A : x_n \to x_0 \implies x_0 \in A$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – замкнена. Нехай $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ така, що $x_n \to x_0$.
!Припустимо, що $x_0 \notin A$, тобто $x_0 \in X \setminus A$. Зауважимо, що тоді x_0 має бути граничною точкою A. Оскільки A – замкнена, то звідси $x_0 \in A$ – суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A : x_n \to x_0 \implies x_0 \in A$.
Нехай a – гранична точка A. Тобто існує послідовність $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A : x_n \neq a : x_n \to a$. Але тоді звідси $a \in A$. Отже, A містить всі граничні точки, тому замкнена. ■

1.3 Замикання множин. Щільність та сепарабельність

Definition 1.3.1 Задано (X, ρ) – метричний простір, $A \subset X$ та A' – множина граничних точок A. **Замиканням** множини A називають таку множину

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Часто ще позначають замикання за $\mathrm{Cl}(A)$.

Example 1.3.2 Маємо $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ та множину $A = (0, 1)$. Тоді множина $A' = [0, 1]$. Замикання $\bar{A} = A \cup A' = [0, 1]$.

Remark 1.3.3 Розглянемо зараз сукупність замкнених множин $A \subset A_\alpha \subset X$. Перетин $B = \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ – також замкнена, водночас $A_\alpha \supset B \supset A$. Отже, B – найменша замкнена множина, що містить A.

Proposition 1.3.4 Задано (X, ρ) – метричний простір, $A, B \subset X$. Тоді справедливе наступне:
1) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;
2) $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$.

Proof.
Доведемо кожне твердження окремо.

1) $x_0 \in (A \cup B)' \iff x_0$ – гранична точка $A \cup B \iff \forall \varepsilon > 0:$
$\mathring{B}(x_0;\varepsilon) \cap (A \cup B) = (\mathring{B}(x_0;\varepsilon) \cap A) \cup (\mathring{B}(x_0;\varepsilon) \cap B) \neq \emptyset \iff \left[\begin{array}{l} x_0 \text{ – гранична для } A \\ x_0 \text{ – гранична для } B \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_0 \in A' \\ x_0 \in B' \end{array}\right. \iff$
$x_0 \in A' \cup B'$.
Отже, тим довели щойно, що $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

2) $x_0 \in (A \cap B)' \iff x_0$ – гранична точка $A \cap B \iff \forall \varepsilon > 0:$
$\mathring{B}(x_0;\varepsilon) \cap (A \cap B) = (\mathring{B}(x_0;\varepsilon) \cap A) \cap (\mathring{B}(x_0;\varepsilon) \cap B) \neq \emptyset \implies \begin{cases} x_0 \text{ – гранична для } A \\ x_0 \text{ – гранична для } B \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 \in A' \\ x_0 \in B' \end{cases} \iff$
$x_0 \in A' \cap B'$.
Отже, тим довели щойно, що $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$.

Всі твердження доведені. ■

Proposition 1.3.5 Задано (X,ρ) – метричний простір, $\bar{A}$ – замикання. Тоді спредливе наступне:
1) $\bar{A}$ – найменша замкнена множина, що містить A;
2) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\qquad \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
3) A – замкнена $\iff A = \bar{A}$.

Proof.
Доведемо кожне твердження окремо.

1) !Припустимо, що $\bar{A}$ не є найменшою замкненою, що містить A, тобто $\exists B \subset \bar{A} : B \supset A$ – замкнена.
Зафіксуємо точку $x_0 \in \bar{A}$ – гранична, тоді $x_0 \in A' \cup A$. Далі маємо два випадки:
якщо $x_0 \in A'$, то тоді $x_0 \in B$, тому що B містить всі граничні точци A;
якщо $x_0 \in A$, то тоді $x_0 \in B$.
В обох випадках $\bar{A} \subset B$. Отже, $\bar{A} = B$. Суперечність!

2) Маємо такі ланцюги рівностей та вкладень:
$\overline{A \cup B} = (A \cup B)' \cup (A \cup B) = A' \cup B' \cup A \cup B = \bar{A} \cup \bar{B}$.
$\overline{A \cap B} = (A \cap B)' \cup (A \cap B) \subset (A' \cap B') \cup (A \cap B) \subset (A \cup A') \cap (B \cup B') = \bar{A} \cap \bar{B}$.

3) Доведення в обидва боки.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – замкнена. Тоді A містить всі свої граничні точки. Так само A' містить граничні точки A. Тому $A = \bar{A}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $A = \bar{A}$. Тобто A містить всі свої граничні точки. Отже, A – замкнена.

Всі твердження доведені. ■

Example 1.3.6 У стандартному метричному просторі R Розглянемо множини $A = (0,1),\ B = (1,2)$.
Зауважимо, що $A \cap B = \emptyset$, тож звідси випливає $\overline{A \cap B} = \emptyset$. А з іншого боку, $\bar{A} = [0,1],\ \bar{B} = [1,2]$, а звідси $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$.
Таким чином, $\overline{A \cap B} \subsetneq \bar{A} \cap \bar{B}$.
Буквально так само $(A \cap B)' \subsetneq A' \cap B'$.

Remark 1.3.7 У загальному випадку $\overline{B(x;r)} \neq B[x;r]$.
Розглянемо дискретний простір (X,d), де множина X містить не менше двох елементів. Зауважимо, що $B(a;1) = \{a\}$ та $B[a;1] = X$. Ми вже знаємо, що там всі множини – відкрити (тому відповідно замкнені). Отже, $\overline{B(a;1)} = B(a;1) = \{a\} \neq X = B[a;1]$.

Definition 1.3.8 Задано (X,ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **щільною** в X, якщо

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 : \exists y \in A : \rho(x,y) < \varepsilon$$

Інколи ще бачу, щоб називали множину A **скрізь щільною**.

Proposition 1.3.9 Задано (X,ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A – скрізь щільна $\iff \bar{A} = X$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – скрізь щільна. Цілком зрозуміло, що $\bar{A} \subset X$, тому залишилося тільки в зворотний бік провести.
Нехай $x \in X$. тоді за умовою щільності, $\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon$. Якщо $x \in A$, автоматично $x \in \bar{A}$. Якщо $x \notin A$, то тоді там записано, що x – гранична точка A, тож все одно $x \in \bar{A}$.

Дано $\bar{A} = X$. Оберемо $x \in X$ та $\varepsilon > 0$. Якщо $x \in A$, то тоді можна взяти $y = x \in A$ і тоді $\rho(x, y) = 0 < \varepsilon$. Якщо $x \notin A$, то тоді x має бути просто граничною точкою A, але тоді $\exists y \in A : y \neq x : \rho(x, y) < \varepsilon$. Таким чином, A – скрізь щільна. ■

Proposition 1.3.10 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A – скрізь щільна $\iff \forall x \in X : \exists \{x_n, n \geq 1\} \subset A : x_n \to x, n \to \infty$.
Вправа: довести.

Definition 1.3.11 Задано (X, ρ) – метричний простір.
Метричний простір називається **сепарабельним**, якщо

існує в даному просторі скінченна чи зліченна щільна підмножина.

Example 1.3.12 Зокрема $(\mathbb{R}, \rho)$, де $\rho(x, y) = |x - y|$ – сепарабельний, оскільки $\mathbb{Q}$ – зліченна та скрізь щільна підмножина (див. курс матаналізу за 1 семестр).

Example 1.3.13 Простір $C([a, b])$ також сепарабельний.
Покладемо $A = \{Q \in \mathbb{Q}[x]$ – многочлени на $[a, b]\}$. Цілком ясно, що A – зліченна множина. Залишилося показати, що A – скрізь щільна.
Нехай $f \in C([a, b])$ та $\varepsilon > 0$. За теоремою Ваєрштраса про наближення функці, існує многочлен $P_\varepsilon \in \mathbb{R}[x]$, для якого $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$. Запишемо $P_\varepsilon(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$. Оскільки $\mathbb{Q}$ – скрізь щільна на $\mathbb{R}$, то ми можемо знайти $b_0, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Q}$ такі, що $|a_i - b_i| < \varepsilon$. Отримаємо многочлен $Q_\varepsilon \in \mathbb{Q}[x]$ вигляду $Q_\varepsilon(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k$. Тоді $\forall x \in [a, b]$ маємо наступне:
$|P_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon(x)| \leq |a_0 - b_0| + |a_1 - b_1||x| + \dots + |a_k - b_k||x^k| < \varepsilon M_0 + \varepsilon M_1 + \dots + \varepsilon M_k = M\varepsilon$.
У цьому випадку $M_i = \max\limits_{x \in [a,b]} |x^i|$, який існує, оскільки $x^i \in C([a, b])$. Отже, довели
$\sup\limits_{x \in [a,b]} |P_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon(x)| < \varepsilon$.
Використаємо тепер нерівність трикутника – отримаємо:
$\sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - Q_\varepsilon(x)| \leq \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P_\varepsilon(x)| + \sup\limits_{x \in [a,b]} |P_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon(x)| < 2\varepsilon$.

Theorem 1.3.14 Задано (X, ρ) – сепарабельний метричний простір та $Y \subset X$ – підпростір. Тоді (Y, ρ_Y) – також сепарабельний.

Proof.
Ми розглянемо випадок, коли $Y \subsetneq X$. Оберемо елемент $x \in X \setminus Y$. Оскільки (X, ρ) – сепарабельний, то маємо $Q = \{x_n, n \geq 1\}$ – зліченна та скрізь щільна в X.
Розглянемо такий набір елементів $R = \{y_{n,k}, n \geq 1, k \geq 1 : y_{n,k} \neq x\}$. Пояснюємо, як ми це сформували. Проходимося по всіх можливих парам натуральних числах (n, k). Якщо $B\left(x_n, \dfrac{1}{k}\right) \cap Y \neq \emptyset$, то звідти обираємо елемент $y_{n,k}$. Інакше елемент $y_{n,k} = x$.
Доведемо, що R – скрізь щільна множина в Y. Єдине варто пересвідчитися, що отримана множина $R \neq \emptyset$. Дійсно, нехай $y \in Y$ та $\varepsilon > 0$, ми оберемо таке $k \geq 1$, щоб $\dfrac{1}{k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Оскільки Q – скрізь щільна, то звідси $\exists x_n \in Q : \rho(y, x_n) < \dfrac{1}{k}$. Отже $B\left(\dfrac{1}{k}, x_n\right) \cap Y \neq \emptyset$ і там існує точка $y_{n,k}$, тож $R \neq \emptyset$.
Тепер ще раз беремо $\varepsilon > 0$ та елемент $y \in Y$. Тоді ми щойно знайшли елемент $y_{n,k}$, для якого
$\rho_Y(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k} < \varepsilon$.
Отже, ми довели скрізь щільність. Те, що R зліченна, тут цілком зрозуміло. ■

1.4 Повнота

Definition 1.4.1 Задано (X, ρ) – метричний простір.
Послідовність $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ називається **фундаментальною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Remark 1.4.2 Це означення можна інакше переписати, більш компактним чином:

$$\rho(x_n, x_m) \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Proposition 1.4.3 Будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною.

Proof.
Маємо $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – збіжна, тобто $\rho(x_n, x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. За нерівністю трикутника, маємо $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m)$. Якщо спрямувати одночасно $m.n \to \infty$, то тоді $\rho(x_n, x_m) \to 0$. Отже, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна. ■

Remark 1.4.4 Проте не кожна фундаментальна послідовність – збіжна.

Example 1.4.5 Маємо $X = (0, 1]$ – підпростір $\mathbb{R}$. Розглянемо послідовність $\left(x_n = \dfrac{1}{n}, n \geq 1\right)$, де $x_n \to 0$ при $n \to \infty$ – збіжна, проте $0 \notin X$. Тому така послідовність не має границі в X, але вона – фундаментальна за твердженням.

Definition 1.4.6 Метричний простір (X, ρ) називається **повним**, якщо

будь-яка фундаментальна послідовність має границю.

Example 1.4.7 Зокрема маємо наступне:
1) $X = \mathbb{R}$ – повний за критерієм Коші із матану;
2) $X = (0, 1]$ – не повний, бо принаймні $\left(x_n = \dfrac{1}{n}, n \geq 1\right)$ – фундаментальна, проте не має границі.

Example 1.4.8 Покажемо, що $(\mathbb{N}, \rho)$ – повний метричний простір, де $\rho(m, n) = 1 + \dfrac{1}{m+n}, m \neq n$.
Нехай $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ – фундаментальна послідовність. Тоді для $\varepsilon = 1$ маємо, що $\exists N : \forall n, m \geq N : \rho(x_m, x_n) < 1$. Зауважимо, що взагалі $\rho(k, l) \geq 1$ при $k \neq l$, тому для нерівності треба вимагати $x_m = x_n, \forall n, m \geq N$. Отже, ми отримали послідовність $(x_1, x_2, \dots, x_N, x_N, x_N, \dots)$ – стаціонарна, починаючи з деякого номеру, яка буде збіжною.

Proposition 1.4.9 Задано (X, ρ) – повний метричний простір та (Y, ρ) – підпрострір.
(Y, ρ) – повний $\iff$ Y – замкнена в X.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: (Y, ρ) – повний.
!Припустимо, що Y – не замкнена, тобто існує $x_0 \in X \setminus Y$ – гранична точка для Y. Тоді існує послідовність $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, для якої $y_n \to x_0$ та $y_n \neq x_0$. Зауважимо, що $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ збіжна саме в просторі X, тому саме в просторі X послідовність $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ – фундаментальна. Проте зрозумло цілком, що $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ буде фундаментальною в просторі Y, проте в силу повноти (Y, ρ), матимемо збіжність саме в Y. Таким чином, $x_0 \in Y$ – суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: Y – замкнена в X. Візьмемо $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y \subset X$ – фундаментальна. Тоді в силу повноти X, вона – збіжна в просторі X. Скажімо, $y_n \to x_0$. Якщо точка $x_0 \in Y$, то тоді послідовність $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збіжна в Y. Інакше при $x_0 \in X \setminus Y$ зауважимо, що $y_n \neq x_0$, тому x_0 – гранична точка Y. У силу замкненості ми отримаємо $x_0 \in Y$ – послідовність $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ знову збіжна в Y. ■

Lemma 1.4.10 Задано $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна та $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ – збіжна. Тоді $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – збіжна.

Proof.
Маємо $x_{n_k} \to x,\ k \to \infty$, тобто це означає $\forall \varepsilon > 0 : \exists K : \forall k \geq K : \rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$.
Також відомо, що $\exists N : \forall n, m \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Тоді $\forall n \geq N^* = \max\{N, K\}$ маємо
$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_{N^*}}) + \rho(x_{n_{N^*}}, x) < 2\varepsilon$.
Отже, $x_n \to x$. ■

Theorem 1.4.11 Критерій Кантора
Умова Кантора звучить так: для кожної послдовності $(B[a_n; r_n], n \geq 1)$ такої, що $B[a_1; r_1] \supset B[a_2; r_2] \supset \dots$ та $r_n \to 0$ (послідовність замкнених куль, що стягується), перетин $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B[a_n; r_n] \neq \emptyset$.
(X, ρ) – повний метричний простір $\iff$ виконується умова Кантора.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: (X, ρ) – повний. Задамо послідовність куль $(B[a_n; r_n], n \geq 1)$, що стягується.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність центрів – фундаментальна.
За умовою, $r_n \to 0$, тож $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : r_n < \varepsilon$. Досить взяти лише $r_N < \varepsilon$. Тоді $\forall n, m \geq N : a_m, a_n \in B[a_N, r_N] \implies \rho(a_m, a_N) < r_N$ та $\rho(a_n, a_N) < r_N$.
$\implies \rho(a_n, a_m) \leq \rho(a_n, a_N) + \rho(a_N, a_m) < 2r_N < 2\varepsilon$. Отже, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна.

Замкнені кулі, що стягуються, мають непорожній перетин.
Оскільки X – повний, то тоді $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – збіжна, тобто $a_n \to a_0$. Оскільки $B[a_n; r_n]$ – замкнені, то за **Prp. 1.2.19** маємо, що $a_0 \in B[a_n; r_n]$. Звідси $a_0 \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n[a_n; r_n]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: умова Кантора. Нехай $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна послідовність. Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \rho(a_n, a_m) < \varepsilon$.
При $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ маємо $n_1 \in \mathbb{N}$ таке, що $\forall n \geq n_1 : \rho(a_n, a_{n_1}) < \dfrac{1}{2}$.
При $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ маємо $n_2 > n_1$ таке, що $\forall n \geq n_2 : \rho(a_n, a_{n_2}) < \dfrac{1}{4}$.
$\vdots$
Тоді маємо підпослідовність $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ із властивістю $\forall n \geq n_k : \rho(a_n, a_{n_k}) < \dfrac{1}{2^k}$. Звідси випливає, що замкнені кулі $B\left[a_{n_k}; \dfrac{1}{2^{k-1}}\right]$ будуть вкладеними, тобто $B\left[a_{n_k}; \dfrac{1}{2^{k-1}}\right] \supset B\left[a_{n_{k+1}}; \dfrac{1}{2^k}\right], k \geq 1$.
Справді, беремо $x \in B\left[a_{n_{k+1}}; \dfrac{1}{2^k}\right]$, тобто $\rho\left(x, a_{n_{k+1}}\right) \leq \dfrac{1}{2^k}$. Через нерівність трикутника отримаємо $\rho\left(a_{n_k}, x\right) \leq \rho\left(a_{n_k}, a_{n_{k+1}}\right) + \rho\left(a_{n_{k+1}}, x\right) \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$, тому звідси $x \in B\left[a_{n_k}; \dfrac{1}{2^{k-1}}\right]$.
Далі всі радіуси $\dfrac{1}{2^{k-1}} \to 0$, тому за умовою Кантора існує точка $a \in B\left[a_{n_k}, \dfrac{1}{2^{k-1}}\right], \forall k \geq 1$. Тобто $\forall k \geq 1$ маємо $\rho\left(a_{n_k}, a\right) \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$, після спрямування $k \to \infty$ отримаємо $a_{n_k} \to a$. Значить, за **Lm. 1.4.10**, послідовність $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збіжна.
Висновок: метричний простір (X, ρ) – повний. ■

Remark 1.4.12 До речі, точка, що належить перетину замкнених кіль, буде єдиною.
!Припустимо, що це не так, тобто $\exists b^*, b^{**} \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B[a_n; r_n]$. Тоді $\forall n \geq 1 : \begin{cases} \rho(a_n, b^*) \leq r_n \\ \rho(a_n, b^{**}) \leq r_n \end{cases}$.
$\implies \rho(b^*, b^{**}) \leq \rho(b^*, a_n) + \rho(a_n, b^{**}) \leq r_n + r_n = 2r_n$.
Спрямуємо $n \to \infty$, тоді $\rho(b^*, b^{**}) \leq 0 \implies \rho(b^*, b^{**}) = 0 \implies b^* = b^{**}$. Суперечність!

Remark 1.4.13 Умова того, що $r_n \to 0$ в теоремі Кантора, є суттєвою.

Example 1.4.14 Розглянемо $(\mathbb{N}, \rho)$ – повний метричний простір, де $\rho(m, n) = 1 + \dfrac{1}{n+m}, m \neq n$.
Тепер оберемо ось такі замкнені кулі $B\left[n, 1 + \dfrac{1}{2n}\right]$. Зауважимо, що

$$B\left[n, 1 + \frac{1}{2n}\right] = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \rho(x, n) \leq 1 + \frac{1}{2n}\right\} = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{2n}\right\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n\} =$$
$$= \{n, n+1, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Аналогічно $B\left[1, 1 + \dfrac{1}{2}\right] = \mathbb{N}$.
Отже, маємо $B\left[1, 1 + \dfrac{1}{2}\right] \supset B\left[2, 1 + \dfrac{1}{4}\right] \supset B\left[3, 1 + \dfrac{1}{6}\right] \supset \dots$, при цьому $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B\left[n, 1 + \frac{1}{2n}\right] = \emptyset$.
У цьому випадку радіуси $1 + \dfrac{1}{2n} \not\to 0$, тому точки перетину нема.

1.5 Поповнення метричного простору та трошки про ізометрію

Definition 1.5.1 Задано (X,ρ) та $(Y,\tilde{\rho})$ – два різних метричних простори.
Відображення $f\colon X\to Y$ називається **ізометрією**, якщо

$$\forall x_1,x_2\in X : \tilde{\rho}(f(x_1),f(x_2))=\rho(x_1,x_2)$$

Тобто суть ізометрії – це збереження відстаней.

Remark 1.5.2 Кожна ізометрія f – уже автоматично ін'єктивна.
Дійсно, припустимо, що $f(x_1)=f(x_2)$. За визначенням ізометрії, $\tilde{\rho}(f(x_1),f(x_2))=\rho(x_1,x_2)$. Отримаємо $\rho(x_1,x_2)=0$, тобто $x_1=x_2$.

Definition 1.5.3 Метричні простори $(X,\rho),(Y,\tilde{\rho})$ називаються **ізометричними**, якщо

$$\exists f\colon X\to Y \text{ – бієктивна ізометрія}$$

Example 1.5.4 Розглянемо $(\mathbb{R},\tilde{\rho})$ та $\left(\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\rho\right)$ – два метричних простори. У цьому випадку ρ – стандартна метрика та $\tilde{\rho}(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$. Ці два простори – ізометричні.
Дійсно, між ними існує ізометрія $\operatorname{arctg}\colon\mathbb{R}\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, що є бієктивною.

Proposition 1.5.5 Задані $(X,\rho),(Y,\tilde{\rho})$ – два ізоморфні метричні простори.
(X,ρ) – повний $\iff$ $(Y,\tilde{\rho})$ – повний.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: (X,ρ) – повний. Нехай $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна послідовність. Оскільки X,Y ізометричні, то існує бієкція $f\colon X\to Y$, що є ізометрією. Тож звідси $\exists! x_n\in X : f(x_n)=y_n$. Розглянемо послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та зауважимо, що $\rho(x_n,x_m)=\tilde{\rho}(y_n,y_m)\to 0$ в силу фундаментальності. Отже, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальна, тож збіжна за повнотою. Тобто $\rho(x_n,x)\to 0$. Позначимо $f(x)=y$. Звідси випливає, що $\tilde{\rho}(y_n,y)=\rho(x_n,x)\to 0$. Тобто $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – збіжна.

$\boxed{\Leftarrow}$ *дзеркальне доведення.* ■

Definition 1.5.6 Задано Y – повний метричний простір.
Він буде називатися **поповненням (completion)** метричного простору X, якщо

$$X \text{ – ізометричний підпростір } Y;$$
$$X \text{ – щільна в } Y.$$

Theorem 1.5.7 Для кожного метричного простору (X,ρ) існує поповнення. Причому це поповнення єдине з точністю до ізометрії.

Proof.
I. *Існування.*
Позначимо F за множина фундаментальних послідовностей $\{x_n\}$ в X. Стаціонарні послідовності є фундаментальними, тож звідси X можна сприймати як підмножину F.
Розглянемо функцію $d(\{x_n\},\{y_n\})=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$, яка визначена на $F\times F$. Для коректності треба довести існування даної границі. Ми доведемо, що $\{\rho(x_n,y_n),n\geq 1\}$ – фундаментальна (це числова послідовність, тому цього буде достатньо).
Нам відомо, що $\{x_n\},\{y_n\}$ фундаментальні, тобто $\exists N_1,N_2$, для яких $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon,\rho(y_n,y_m)<\varepsilon$ для всіх $n,m\geq N_1, m,n\geq N_2$. Тоді при $N=\max\{N_1,N_2\}$ справедлива оцінка:
$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|\leq\rho(x_n,y_n)+\rho(x_m,y_m)\leq(\rho(x_n,x_m)+\rho(x_m,y_m)+\rho(y_m,y_n))-\rho(x_m,y_m)<2\varepsilon$.
Отже, функція d визначена коректно. Вона майже метрика, оскільки (легко перевірити) виконуються всі властивості. На жаль, $d(\{x_n\},\{y_n\})=0 \not\Longrightarrow \{x_n\}=\{y_n\}$ (приклад буде нижче).
Створимо відношення еквівалентності $\{x_n\}\sim\{y_n\}\iff d(\{x_n\},\{y_n\})=0$. Утвориться фактор-множина $F/_\sim=\hat{F}$. Елементи з $\hat{F}$ позначатимемо за $\overline{\{x_n\}}$. Наша мета буде довести, що саме $\hat{F}$ буде поповненням X.
На фактормножині покладемо $\tilde{\rho}\left(\overline{\{x_n\}},\overline{\{y_n\}}\right)=d(\{x_n\},\{y_n\})$. Варто пересвідчитися, що воно визначено коректно.
Нехай $\{x_n\}\sim\{x'_n\}$ та $\{y_n\}\sim\{y'_n\}$. Тобто $d(\{x_n\},\{x'_n\})=0$ та $d(\{y_n\},\{y'_n\})=0$. Тоді

$d(\{x_n\},\{y_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,x'_n) + \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x'_n,y'_n) + \lim\limits_{n\to\infty} \rho(y'_n,y_n) = d(\{x'_n\},\{y'_n\})$.
Аналогічно отримаємо $d(\{x'_n\},\{y'_n\}) \le d(\{x_n\},\{y_n\})$. Отже, $d(\{x'_n\},\{y'_n\}) = d(\{x_n\},\{y_n\})$, тобто $\tilde{\rho}$ визначилося коректним чином.
Поставимо відображення $f\colon X \to \hat{F}$ таким чином: $f(x) = \overline{\{x\}}$. Це буде ізометрією, тому що $\tilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) = \tilde{\rho}(\overline{\{x_1\}}, \overline{\{x_2\}}) = d(\{x_1\},\{x_2\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_1,x_2) = \rho(x_1,x_2)$. Відображення f зобов'язане бути сюр'єктивним, оскільки повертається клас еквівалентності. Тобто f – бієктивна ізометрія, а тому $(X,\rho),(\hat{F},\tilde{\rho})$ – ізометричні.
Покажемо, що $(\hat{F},\tilde{\rho})$ – повний метричний простір. (TODO: обміркувати).

II. *Єдиність.*
Розглянемо два поповнення $(Y_1,\tilde{\rho}_1),(Y_2,\tilde{\rho}_2)$ простору (X,ρ). Тобто, за означенням, маємо $Y_1 \supset X_1 \sim X \sim X_2 \subset Y_2$, а також $\overline{X_1} = Y_1, \overline{X_2} = Y_2$. Під $\sim$ мається на увазі ізометричність. Із цього X_1 ізометричний до X_2, нехай g – відповідна ізометрія.
Побудуємо $f\colon Y_1 \to Y_2$ за таким правилом: для кожного $y \in Y_1$ беремо таку послідовність $\{x_n\} \subset X_1$, щоб $x_n \to y$ – тоді $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. Треба пересвідчитися, що визначення коректне. Дійсно, нехай $\{x_n\},\{x'_n\}$ – такі дві послідовності, що $x_n \to y, x'_n \to y$. Тоді звідси вилпиває наступне:
$\tilde{\rho}_2(g(x_n),g(x'_n)) \overset{\text{ізометричність}}{=} \tilde{\rho}_1(x_n,x'_n) \le \tilde{\rho}_1(x_n,y) + \tilde{\rho}_2(y,x'_n) \to 0$ при $n\to\infty$.
Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x'_n)$, а тому значення функцій коректно визначено. (TODO: подумати над тим, чи правильно я все це розписав). ■

Example 1.5.8 Беремо стандартний метричний простір $\mathbb{R}$, послідовності $\{x_n\} = \{0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$ та $\{y_n\} = \{1,1,1,\dots\}$. Зауважимо, що $d(\{x_n\},\{y_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0.\underbrace{00\dots0}_{n \text{ цифр}}1 = 0$. При цьому зрозуміло, що $\{x_n\} \ne \{y_n\}$.

Definition 1.5.9 Повний нормований простір називається **банаховим**. Повний евклідів простір (відносно метрики, що породжена скалярним добутков) називається **гільбертовим**.

Proposition 1.5.10 Евклідів простір l_2 – гільбертів.

Proof.
Задамо фундаментальну послідовність $\{\vec{x}_n, n \ge 1\}$ на множині l_2
Тобто $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n,m \ge N : \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \varepsilon$
$\Rightarrow \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall k \ge 1 : |x_n^k - x_m^k| < \varepsilon$
Тоді послідовність $\{x_n^k, n \ge 1\}$ - фундаментальна - тому (за матаном) збіжна, $x_n^k \to y^k$
Доведемо, що $\vec{x}$ збігається до $\vec{y}$ за нормою
Маємо $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall K \ge 1 : \sum_{k=1}^{K} (x_n^k - x_m^k)^2 < \varepsilon^2$
Спрямуємо $m \to \infty$, тоді $\displaystyle\sum_{k=1}^{K} (x_n^k - y^k)^2 < \varepsilon^2$
Звідки випливає збіжність ряду $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - y^k)^2$ та його оцінка
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - y^k)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \|\vec{x}_n - \vec{y}\| < \varepsilon$
Отже, $\vec{x}_n \to \vec{y}$ ■

1.6 Неперервні відображення

Definition 1.6.1 Задані $(X,\rho),(Y,\tilde{\rho})$ – два метричних простори.
Відображення $f\colon X \to Y$ називається **неперервним у точці** x_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X : \rho(x,x_0) < \delta \implies \tilde{\rho}(f(x),f(y)) < \varepsilon$$

Remark 1.6.2 Дане означення можна записати більш компактним чином. Маємо $f\colon X \to Y$.
f – неперервне в точці $x_0 \in X \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f(B(x_0;\delta)) \subset B(f(x_0);\varepsilon)$.

Proposition 1.6.3 Задані $(X,\rho),(Y,\tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f\colon X\to Y$.
f – неперервне в точці $x_0\in X \iff \forall\{x_n\}\subset X : x_n\to x_0$ в $X \implies f(x_n)\to f(x_0)$ в Y.
Вправа: довести.

Theorem 1.6.4 Задані $(X,\rho),(Y,\tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f\colon X\to Y$.
f – неперервне (на множині X) $\iff \forall V$ – замкнена в $Y : f^{-1}(U)$ – замкнена в X.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: f – неперервне. Нехай V – замкнена в Y. Зафіксуємо $x_n\in f^{-1}(V)$ таким чином, що $x_n\to x_0$. Але за неперервністю, $f(x_n)\to f(x_0)$, та додатково $f(x_n)\in V$. Значить, за замкненістю V, точка $f(x_0)\in V \implies x_0\in f^{-1}(V)$. Отже, $f^{-1}(V)$ – замкнена.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall V$ – замкнена в $Y : f^{-1}(U)$ – замкнена в X. Оберемо $x_n\to x_0$.
!Припустимо, що $f(x_n)\not\to f(x_0)$, тобто існує шар $B(f(x_0);\varepsilon)$, поза яким знаходиться підпослідовність $\{f(x_{n_k})\}$. Якщо V – замикання множини $\{f(x_{n_k})\}$, то звідси $x_{n_k}\in f^{-1}(V)$; $f(x_0)\notin V$. Тоді звідси $x_0\notin f^{-1}(V)$, проте $x_{n_k}\to x_0$ та x_0 є граничною точкою для $f^{-1}(A)$. Суперечність! ■

Corollary 1.6.5 f – неперервне $\iff \forall U$ – відкрита в $Y : f^{-1}(U)$ – відкрита в X.
Вказівка: застосувати попередню теорему та рівність $f^{-1}(A^c)=(f^{-1}(A))^c$.

Proposition 1.6.6 Задані X,Y,Z – метричні простори та $f\colon X\to Y, g\colon Y\to Z$. Нехай f – неперервне в точці $x_0\in X$ та g – неперервне в точці $f(x_0)\in Y$. Тоді $g\circ f$ – неперервне в точці $x_0\in X$.
Вправа: довести.

Proposition 1.6.7 Задано (X,ρ) – метричний простір та зафіксуємо $x_0\in X$. Тоді функція $f(x)=\rho(x,x_0)$, де $f\colon X\to\mathbb{R}$, – неперервна на X.

Proof.
Дійсно, нехай $y_0\in X$. Припустимо, що $\{y_n\}$ така, що $y_n\to y_0$. Хочемо $f(y_n)\to f(y_0)$. Справді,
$|f(y_n)-f(y_0)|=|\rho(y_n,x_0)-\rho(y_0,x_0)|\le|\rho(y_n,y_0)|\to 0$.
Для $\mathbb{R}$ береться стандартна метрика, якщо нічого іншого не вказується зазвичай. ■

Corollary 1.6.8 Задано $(L,\|\cdot\|)$ – нормований простір. Тоді норма $\|\cdot\|\colon L\to\mathbb{R}$ – неперервна.
Вказівка: оскільки $\rho(x,y)=\|x-y\|$, то звідси $\|x\|=\rho(x,0)$.

Corollary 1.6.9 Задано $(E,(\cdot,\cdot))$ – евклідів простір. Тоді при фіксованому $x_0\in E$ маємо (x,x_0) – неперервне відображення.

Proof.
Нехай $\{y_n\}$ задана так, що $y_n\to y_0$. Хочемо довести, що $(y_n,x_0)\to(y_0,x_0)$.
$|(y_n,x_0)-(y_0,x_0)|=|(y-y_0,x_0)|\le\sqrt{\|y-y_0\|}\sqrt{\|x_0\|}\to 0$, оскільки $\|\cdot\|$ – неперервне. ■

Definition 1.6.10 Задано (X,ρ) – метричний простір та $f\colon X\to X$.
Дане відображення називається **стиском**, якщо

$$\exists q\in(0,1):\forall x,y\in X:\rho(f(x),f(y))\le q\cdot\rho(x,y)$$

Remark 1.6.11 Стискаючі відображення – неперервні.
Вказівка: обрати $\delta=\dfrac{q}{\varepsilon}$ *при всіх* $\varepsilon>0$.

Theorem 1.6.12 Теорема Банаха
Задано (X,ρ) – повний метричний просторі та $f\colon X\to X$ – стискаюче відображення. Тоді існує єдина точка нерухома точка, тобто $\exists! x\in X : f(x)=x$.

Proof.
I. *Існування.*
Нехай $x_0\in X$ – довільна точка. Зробимо позначення: $x_1=f(x_0),\ x_2=f(x_1),\ \dots,x_n=f(x_{n-1}),\dots$
Покажемо, що послідовність $\{x_n,n\ge 0\}$ – фундаментальна. Дійсно, для $m\le n$ маємо:
$\rho(x_m,x_n)=\rho(f(x_{m-1}),f(x_{n-1}))\le q\cdot\rho(x_{m-1},x_{n-1})\le\dots\le q^m\rho(x_0,x_{n-m})$.
$\rho(x_0,x_{n-m})\le\rho(x_0,x_1)+\rho(x_1,x_2)+\dots+\rho(x_{n-m-1},x_{n-m})\le\rho(x_0,x_1)(1+q+\dots+q^{n-m-1})\le$
$\le\rho(x_0,x_1)\dfrac{1}{1-q}$.

Разом отримаємо $\rho(x_m, x_n) \leq \dfrac{q^m}{1-q}\rho(x_0, x_1) \to 0, n, m \to \infty$.
Оскільки (X, ρ) – повний, то $\{x_n\}$ – збіжна, позначимо $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Зважаючи на неперервність стиска, отримаємо $f(a) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$. Тобто a – це наша шукана нерухома точка.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що f має дві різні нерухомі точки a, b. Буде суперечність! Дійсно,
$0 < \rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \leq q \cdot \rho(a, b) < \rho(a, b)$. ■

Remark 1.6.13 Насправді, в теоремі Банаха достатньо вимагати, щоб саме $f^n \overset{\text{def.}}{=} \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ разів}}$ було стиском, а не відображення f.
Дійсно, за теоремою Банаха, f^n матиме єдину нерухому точку a, тобто $f^n(a) = a$. Тоді точка $f(a)$ буде теж нерухомою для f^n, оскільки $f^n(f(a)) = f(f^n(a)) = f(a)$. Але за єдиністю, $f(a) = a$ – дві нерухомі мають збігатися. Єдиність нерухомої точки для f доводиться неважко.

1.7 Компактність

Definition 1.7.1 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **компактом**, якщо

$$\forall\{x_n, n \geq 1\} \subset A : \exists\{x_{n_k}, k \geq 1\} : x_{n_k} \to x_0, k \to \infty, \text{ причому } x_0 \in A$$

Якщо прибрати умову $x_0 \in A$, то тоді A називається **передкомпактом**.

Proposition 1.7.2 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
A – компакт $\iff \forall B \subset A$, де B – нескінченна множина, існує $x_0 \in A$ – гранична точка B.
Якщо прибрати умову $x_0 \in A$, то вже мова буде йти про передкомпакт.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – компакт. Нехай $B \subset A$ – нескінченна множина. Оберемо послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset B \subset A$, де всі вони між собою різні. Тоді за умовою компактності, існує підпослідовність $x_{n_k} \to x_0$, причому $x_0 \in A$. Зауважимо, що всі $x_{n_k} \neq x_0$, тож x_0 – гранична точка A.
Якби існували $k \in \mathbb{N}$, для яких $x_{n_k} = x_0$, то тоді ми би сформували підпослідовність $\{x_{n_{k_m}}\}$ без цих елементів, причому $x_{n_{k_m}} \to x_0$, а тепер $x_{n_{k_m}} \neq x_0$. Тож все одно x_0 залишається граничною точкою A.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall B \subset A$, де B – нескінченна множина, існує $x_0 \in A$ – гранична точка B. Отже, нехай $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$ – довільна послідовність. У нас є два варіанти:
I. Множина значень $\{x_n\}$ – скінченна. Тоді можна відокремити стаціонарну підпослідовність.
II. Множина значень $\{x_n\}$ – нескінченна, всі ці значення покладемо в множину $B \subset A$. Тоді за умовою, існує $x_0 \in A$ – гранична точка B. Отже, $B \cap B(x_0; \varepsilon)$ містить нескінченне число точок для всіх $\varepsilon > 0$. Зокрема:
$\varepsilon = 1 \implies B \cap B(x_0; 1)$ має нескінченну множину. Там існує елемент $y_1 \in B \cap B(x_0; 1)$, тобто це одне зі значень послідовності. Тобто $y_1 = x_{n_1}$.
$\varepsilon = \dfrac{1}{2} \implies B \cap B\left(x_0; \dfrac{1}{2}\right)$ має нескінченну множину. Там існує елемент $y_2 \in B \cap B\left(x_0; \dfrac{1}{2}\right)$, тобто це одне зі значень послідовності. Тобто $y_2 = x_{n_2}$. Причому можна обрати $x_{n_2} > x_{n_1}$. Якби так не було можливо, то $B \cap B\left(x_0; \dfrac{1}{2}\right)$ була б скінченною множиною, що не наше випадок.

$\vdots$

Побудували підпослідовність $\{x_{n_k}, k \geq 1\}$, причому $\rho(x_0, x_k) < \dfrac{1}{k}$. Тож при $k \to \infty$ матимемо $x_{n_k} \to x_0 \in A$. Отже, A – компакт.

Випадок передкомпакту повторюється майже все слово в слово. ■

Proposition 1.7.3 Задано (X, ρ) – компактний метричний простір. Тоді (X, ρ) – повний.

Proof.
Дійсно, нехай $\{x_n\} \subset X$ – фундаментальна. Оскільки X – компакт, то існує збіжна підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, де $x_{n_k} \to x, x \in X$. Ми вже знаємо, що тоді й сама послідовність $\{x_n\} \to x$ буде збіжною. Отже, (X, ρ) – повний метричний простір. ■

Definition 1.7.4 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **обмеженою**, якщо

$$\exists R > 0 : A \subset B(a; R)$$

Definition 1.7.5 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
Множина A називається **цілком обмеженою**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists C_\varepsilon = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : A \subset \bigcup_{x \in C_\varepsilon} B(x; \varepsilon)$$

До речі, C_ε, для якої виконана $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_\varepsilon} B(x; \varepsilon)$, називається **скінченною ε-сіткою**.
Тобто A – цілком обмежена, коли вона має скінченну ε-сітку для всіх $\varepsilon > 0$.

Proposition 1.7.6 Задано (X, ρ) – метричний простір та A – цілком обмежена множина. Тоді A – обмежена.

Proof.
Для множини A існує 1-сітка, тобто $C_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$, для якої $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_1} B(x; 1)$.
Зафіксуємо $y \in X$ та оберемо $R = 1 + \max\limits_{x \in C_1} \rho(x, y)$. Тоді хочемо довести, що $A \subset B(y; R)$.
Нехай $a \in A$, тоді вже $a \in B(x; 1)$ при деякому $x \in C_1$, а також $\rho(a; x) < 1$. Звідси
$\rho(a; y) \leq \rho(a; x) + \rho(x; y) < 1 + \max\limits_{x \in C_1} \rho(x; y) = R$.
Отже, A – обмежена. ■

Remark 1.7.7 Не обов'язково вимагати, щоб A була цілком обмежена. Подивившись на це доведення, ми можемо лише вимагати, щоб A мала хоча б одну ε-сітку – тоді буде обмеженість A.

Theorem 1.7.8 Критерій Фреше-Хаусдорфа
Нехай (X, ρ) – повний метричний простір та $A \subset X$.
A – цілком обмежена $\iff$ A – передкомпакт.

Remark 1.7.9 Під час доведення $\boxed{\Leftarrow}$ нам не потрібна буде умова повноти метричного простору.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – цілком обмежена. Нехай $\{a_n, n \geq 1\} \subset A$ – довільна послідовність.
Оберемо 1-сітку C_1, де $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_1} B(x; 1)$. В одному з цих шарів нескінченне число членів послідовності, той шар позначу за $B(y_1; 1)$; маємо підпослідовність $\{a_{n_k}, k \geq 1\} \subset B(y_1; 1)$.
Оберемо $\dfrac{1}{2}$-сітку $C_{\frac{1}{2}}$, де $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_{\frac{1}{2}}} B\left(x; \dfrac{1}{2}\right)$. В одному з цих шарів нескінченне число членів підпослідовності, той шар позначу за $B\left(y_2; \dfrac{1}{2}\right)$; маємо підпідпослідовність $\{a_{n_{k_m}}, k \geq 1\} \subset B\left(y_2; \dfrac{1}{2}\right)$.
$\vdots$
Отримали послідовність центрів $\{y_n, n \geq 1\}$, доведемо її фундаментальність.
$\rho(y_n, y_m) \leq \rho(y_n, a_*) + \rho(a_*, y_m) < \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \to 0$ при $n, m \to \infty$. У даному випадку ми підібрали елемент $a_* \in B\left(\dfrac{1}{n}; y_n\right) \cap B\left(\dfrac{1}{m}; y_m\right)$.
Тепер розглянемо підпослідовність $\{a_{n_p}, p \geq 1\}$, яка будується таким чином: беремо перший елемент з $\{a_{n_k}\}$ (це наше a_{n_1}), потім перший елемент з $\{a_{n_{k_m}}\}$ (це наше a_{n_2}), ... Доведемо, що $\{a_{n_p}, p \geq 1\}$ – фундаментальна. Дійсно,
$\rho(a_{n_p}, a_{n_t}) \leq \rho(a_{n_p}, y_p) + \rho(y_p, y_t) + \rho(y_t, a_{n_t}) < \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{t} + \rho(y_p, y_t) \to 0, t, p \to \infty$

Оскільки (X, ρ) – повний, то звідси $\{a_{n_p}, n \geq 1\}$ – збіжна підпослідовність. Довели, що A – передкомпакт.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A – передкомпакт.
!Припустимо, що A – це є цілком обмеженою. Тобто для деякого $\varepsilon > 0$ не існує ε-сітки. Нехай $x_1 \in A$. Тоді існує $x_2 \in A$, для якої $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ (інакше якби для кожної $x_2 \in A$ була б $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon$, то ми си знайшли ε-сітку $\{x_1\}$, що суперечить умові).
Далі існує $x_3 \in A$, для якої $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$ та $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$ (аналогічно якби для кожної $x_3 \in A$ ці два нерівності не виконувалися би, то ми би знайшли один з трьох ε-сіток: $\{x_1\}$ або $\{x_2\}$ або $\{x_1, x_2\}$).
$\vdots$
Побудували послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$, для якої справедлива $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ при всіх $n \neq m$. За умовою передкомпактності, існує $\{x_{n_k}, n \geq 1\}$, для якої $x_{n_k} \to x_0$. Водночас звідси ми отримаємо, що існують номери K_1, K_2, для яких $\rho(x_{n_{K_1}}, x_{n_{K_2}}) \leq \rho(x_{n_{K_1}}, x_0) + \rho(x_0, x_{n_{K_2}}) < \varepsilon$. Суперечність!
Отже, A все ж таки має бути цілком обмеженою. ■

Theorem 1.7.10 Задано (X, ρ) – метричний простір та $A \subset X$.
A – компакт $\iff$ для кожного відкритого покриття A можна виділити скінченне підпокриття.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – компакт.
!Припустимо, що існує відрките покриття $\{U_\alpha\}$ множини A, від якої не можна відокремити скінченне підпокриття. Оскільки A – компакт, то A – цілком обмежена. Значить, існує 1-сітка C_1 (причому можна підібрати так, щоб $C_1 \subset A$), для якої $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_1} B(x; 1)$, або можна переписати як $A \subset \bigcup\limits_{x \in C_1} A \cap B(x; 1)$. Серед множин $A \cap B(x; 1)$ існує одна з них, яка не покривається скінченним чином множинами $\{U_\alpha\}$. Дану множину позначу за A'.
Сама множина A' – також цілком обмежена, тож існує $\dfrac{1}{2}$-сітка $C_{\frac{1}{2}}$ (знову підберемо так, щоб $C_{\frac{1}{2}} \subset A'$), для якої виконано $A' \subset \bigcup\limits_{x \in C_{\frac{1}{2}}} A' \cap B\left(x; \dfrac{1}{2}\right)$. Знову ж таки, серед $A' \cap B\left(x; \dfrac{1}{2}\right)$ існує одна з них, що не покривається скінченним чином множинами $\{U_\alpha\}$. Дану множину позначу за A''.
$\vdots$
Продовжуючи процедуру, отримаємо набір куль $B_n = B\left(x_n; \dfrac{1}{n}\right)$, де центр $x_n \in B_{n-1} \cap A$. Позначимо $\overline{B_n \cap A} = K_n$ та зауважимо, що K_n – це замкнена куля в метричному підпросторі A, де $R = \dfrac{1}{2^n}$ та центр $y_n \in K_{n-1}$.
Подвоїмо радіуси кожної з цих куль. Тоді отримаємо послідовність вкладених куль, які стягуються. Оскільки A – компакт, то (A, ρ_A) – повний метричний простір, тож за теоремою Кантора, існує $a \in A$ – спільна точка цих куль. Зважаючи на покриття множини A, отримаємо $a \in U_{\alpha_0}$ при деякому α_0. Оскільки U_{α_0} – відкрита, то існує куля $B(z, \delta) \subset U_{\alpha_0}$. Ми можемо підібрати завжди такий $N \in \mathbb{N}$, щоб було виконано $\dfrac{1}{N} < \dfrac{\delta}{2}$, тоді звідси $K_n \subset B(z; \delta) \subset U_{\alpha_0}$. Таким чином, K_n була покрита лише однією множиною із $\{U_\alpha\}$, проте ми обирали такі кулі (на початку), які не допускали скінченне підпокриття. Суперечність!

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: кожне покриття A має скінченне підпокриття.
!Припустимо, що A – не компакт, тобто існує послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset A$, що не має часткових границь. Тоді кожний відкритий окіл $U_a, a \in A$, містить скінченну кількість членів послідовності $\{x_n\}$ (якби існував окіл U_a із нескінченним числом членів послідовності, то a стала би граничною точкою, що неможливо). Набір $\{U_a, a \in A\}$ – відкрите покриття множини A. За умовою, існує скінченне підпокриття $\{U_{a_1}, \dots, U_{a_n}\}$ множини A, але тоді $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{a_i}$, де праворуч – скінченна множина; ліворуч – нескінченна в силу нескінченності послідовності $\{x_n\}$ – суперечність! ■

Corollary 1.7.11 Задано $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f\colon X \to Y$ – неперервне відображення. Відомо, що X – компакт. Тоді $f(X)$ – компакт.

Proof.
Маємо $\{U_\alpha\}$ – відкрите покриття $f(X)$. Тоді $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ – відкрите покриття X, але за компактністю, можна виділити скінченне підпокриття $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_m)\}$, тоді звідси $\{U_1, \dots, U_m\}$ буде скінченним підпокриттям $f(X)$. ■

Corollary 1.7.12 Задано (X, ρ) – метричний простір та $f\colon X \to \mathbb{R}$ – числова неперервна функція. Відомо, що X – компакт. Тоді f – обмежена та досягає найбільшого та найменшого значень.

Theorem 1.7.13 Задано $(X, \rho), (Y, \tilde{\rho})$ – два метричних простори та $f\colon X \to Y$ – неперервне, причому X – компакт. Тоді f – рівномірно неперервне.

Proof.
!Припустимо, що $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y \in X : \rho(x, y) < \delta$, але $\tilde{\rho}(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$.
Оберемо $\delta = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, тоді утвориться послідовність $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$. Оскільки X – компакт, то відокремимо збіжні підпослідовності $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$. Але оскільки $\rho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \dfrac{1}{n_k}$, то звідси випливає $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Із іншого боку, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k})$, оскільки виконана нерівність $\tilde{\rho}(f(x_{n_k}), f(y_{n_k}) \geq \varepsilon$. Суперечність! ■

1.8 Теорема Стоуна-Ваєрштраса

Надалі будемо розглядати компактний метричний простір (X, ρ) та метричний простір $(C(X), \sigma)$ – простір неперервних функцій із метрикою $\sigma(f, g) = \max\limits_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|$. Причому даний метричний простір теж повний (це аналогічно доводиться).

Definition 1.8.1 Множина $A \subset C(X)$ називається **алгеброю**, якщо $\forall f, g \in A, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha f,\ f + g,\ f \cdot g \in A$$

Definition 1.8.2 Нехай $A \subset C(X)$ – алгебра.
Алгебра A **відділяє точки** множини X, якщо

$$\forall x, y \in X : x \neq y : \exists f \in A : f(x) \neq f(y)$$

Theorem 1.8.3 Теорема Стоуна-Ваєрштраса
Задано (X, ρ) – компактний метричний простір та $(C(X), \sigma)$ – простір неперервних дійсних функцій, заданий вище. Маємо $A \subset C(X)$. Про неї відомо, що
1) A – алгебра, яка віддаляє точки множини X;
2) функція f, яка визначена як $f(x) = 1, \forall x \in X$, належить A.
Тоді множина A скрізь щільна в $(C(X), \sigma)$.

Proof.
Ми хочемо довести, що $\bar{A} = C(X)$.
Нехай $f \in A$. Хочемо довести, що $|f| \in \bar{A}$. У курсі мат. аналізу ми доводили теорему Ваєрштраса про наближення функції многочленом. Зокрема для функції $g(t) = \sqrt{t}, t \in [0, 1]$ маємо, що $\forall \varepsilon > 0 : \exists P_\varepsilon$ – многочлен від $t : |\sqrt{t} - P_\varepsilon(t)| < \varepsilon$. Тоді $\forall x \in X :$
$\left| \dfrac{|f(x)|}{\|f\|} - P_\varepsilon\left(\dfrac{f^2(x)}{\|f\|^2}\right) \right| = \left| \sqrt{\dfrac{|f(x)|^2}{\|f\|^2}} - P_\varepsilon\left(\dfrac{f^2(x)}{\|f\|^2}\right) \right| < \varepsilon.$
Оскільки $f \in A$, то в силу алгебри $\dfrac{f^2}{\|f\|} \in A$. Оскільки P_ε – многочлен, то $P_\varepsilon \circ \dfrac{f^2}{\|f\|} \in A$. Ми знайшли $P_\varepsilon \circ \dfrac{f^2}{\|f\|^2} \in A$, для якої $\left\| \dfrac{|f|}{\|f\|} - P_\varepsilon \circ \dfrac{f^2}{\|f\|^2} \right\| < \varepsilon$. Отже, $\dfrac{|f|}{\|f\|}$ – гранична точка, тобто $\dfrac{|f|}{\|f\|} \in \bar{A}$.
Відомо знову з мат. аналізу, що для всіх $a, b \in \mathbb{R}$ ми маємо такі рівності:
$\max\{a, b\} = \dfrac{1}{2}(a + b + |a - b|) \qquad \min\{a, b\} = \dfrac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.
Значить, маючи $f, g \in A$ та маючи результат вище, отримаємо $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \bar{A}$.
Оберемо $x, y \in X$ так, що $x \neq y$. Тоді існує функція $g \in A$, для якої $g(x) \neq g(y)$. Далі покладемо нову функцію $f(z) = \alpha + \dfrac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}(g(z) - g(x)), z \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді звідси $f \in A$ (ми тут

користуємося пунктом 2), щоб це показати), причому $f(x) = \alpha,\ f(y) = \beta$.
Отже, що ми довели щойно: $\forall x, y \in X : x \neq y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \exists f \in A : f(x) = \alpha,\ f(y) = \beta$.

Нехай $f \in C(X)$ та $\varepsilon > 0$. Зафіксуємо $x \in X$, для $z \in X$ покладемо $\alpha = f(x), \beta = f(z)$. Тоді за щойно доведеним, існує $h_z \in A$, для якої $h_z(x) = \alpha = f(x)$ та $h_z(z) = \beta = f(z)$.
Оскільки $h_z - f \in C(X)$, то за означенням, $\exists \delta_z > 0 : \forall y \in B(z, \delta_z) : h_z(y) - f(y) < \varepsilon$. Сім'я множин $\{B(z, \delta_z) \mid z \in X\}$ – відкрите покриття компактної множини X. Отже, ми можемо взяти скінченне підпокриття $\{B(z_k, \delta_{z_k}) \mid k = \overline{1, n}\}$.
Визначимо функцію $g_x(y) = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \{h_{z_k}(y))\}, y \in X$. Зауважимо, що по-перше, $g_x \in \bar{A}$; по-друге, $g_x(x) = f(x)$; по-третє, $\forall y \in X : g_x(y) - f(y) < \varepsilon$.
Оскільки $g_x - f \in C(X)$, то за означенням, $\exists \delta_x > 0 : \forall y \in B(x, \delta_x) : g_x(y) - f(y) > -\varepsilon$. Сім'я множин $\{B(x, \delta_x) \mid x \in X\}$ – відкрите покриття компактної множини X. Отже ми можемо взяти скінченне підпокриття $\{B(x_k, \delta_{x_k} \mid k = \overline{1, m}\}$.
Визначимо функцію $h(y) = \max\limits_{1 \leq k \leq m} g_{x_k}(y), y \in X$. Тоді $h \in \bar{A}$, причому також $\forall y \in X :$
$f(y) - \varepsilon \leq h(y) \leq f(y) + \varepsilon$. Для будь-якої функції $f \in C(X)$ ми знайшли $h \in A$, для якої $\|h - f\| < \varepsilon$.
Отже, $\bar{A} = C(X)$. ∎

2 Початок функціонального аналізу

2.1 Лінійні нормовані простори

Definition 2.1.1 Задано L – лінійний простір над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$.
Задамо функцію $\|\cdot\|: L \to \mathbb{R}$, що називається **нормою**, якщо виконуються умови:

$$1)\ \forall x \in L : \|x\| \geq 0 \qquad \|x\| = 0 \iff x = 0$$
$$2)\ \forall x \in L : \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ або } \mathbb{C} : \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$$
$$3)\ \forall x, y \in L : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Тоді пару $(L, \|\cdot\|)$ назвемо **нормованим простором**.
Функцію $\|\cdot\|: L \to \mathbb{R}$ ще називають **переднормою**, якщо не виконується умова $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Proposition 2.1.2 Задано $(L, \|\cdot\|)$ – нормований простір. Тоді $\forall x, y \in L : \|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.
Вказівка: $\|x\| = \|x + y - x\|$ *та* $\|y\| = \|y + x - y\|$.

Proposition 2.1.3 Задано $(L, \|\cdot\|)$ – нормований простір. Тоді L з метрикою $\rho(x, y) = \|x - y\|$ утворює метричний простір (L, ρ).
Вправа: перевірити три аксіоми.

Corollary 2.1.4 У такому разі справедливі додаткові властивості для заданої метрики:
1) $\forall x, y, z \in L : \rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$ (інваріантність по відношенню до зсуву);
2) $\forall x, y \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ або $\mathbb{C} : \rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\rho(x, y)$ (однорідність).

Example 2.1.5 Зокрема дані простори будуть нормованими:
1) $\mathbb{R}$, $\quad \|x\| = |x|$;
2) $\mathbb{R}^n$, $\quad \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ або навіть $\|\vec{x}\| = |x_1| + \dots + |x_n|$;
3) $\mathbb{C}([a, b])$, $\quad \|f\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$;
4) $L_p(X, \lambda)$, $\quad \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$.
Тому всі вони будуть автоматично метричними просторами із метрикою, що вище задана.

Example 2.1.6 Дискретний простір (X, d) – метричний, але не нормований.

Definition 2.1.7 Задано $(L, \|\cdot\|)$ – лінійний нормований простір. Оскільки в неї запроваджена метрика, то можна щось казати про присутність чи відсутність повноти метричного простору.
Повний нормований простір називається **банаховим**.

Example 2.1.8 Зокрема нормований простір $C([a, b])$ зі стандартною нормою $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$ – банехів. Це випливає з курсу математичного аналізу 2 семестру.

Example 2.1.9 Задамо підпростір $C([0, 1])$ із нормою із $L_2([0, 1], \lambda_1)$, де λ_1 – міра Лебега. Доведемо, що в такому разі $C([0, 1])$ уже не буде банаховим.
Розглянемо таку функціональну послідовність $\{x_n, n \geq 1\} \subset C([0, 1])$, що задається таким чином:

$$x_n(t) \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{nx}{2} - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Це набір функцій, де похила частина зі збільшенням n перетворюється в вертикальну лінію. Зауважимо, що якщо взяти поточкову границю, то отримаємо $x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$. При цьому

$$\|x_n - x\|_2^2 = \int_{[0,1]} |x_n - x|^2 \, d\lambda_1 = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^2 \, dt = \dots = \frac{1}{6n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отже, $\{x_n\}$ в просторі $C([0, 1])$ із нормою L_2 збігається до точки $x \notin C([0, 1])$, але при цьому буде граничною для $C([0, 1])$. Тобто $C([0, 1])$ не буде замкненим, тож $C([0, 1])$ – не повний, або не банахів.

Definition 2.1.10 Задані $(X, \|\cdot\|_1)$ та $(X, \|\cdot\|_2)$ – два нормовані простори.
Ці два нормовані простори називаються **ізометричними**, якщо

$$\exists A\colon X \to Y \text{ – ізоморфізм між просторами} : \|Ax\|_2 = \|x\|_1$$

Remark 2.1.11 Ізоморфізм L – автоматично ізометрія, це випливає зі збережння норми. Саме тому слово "ізометричні" в означенні вище виправдане.

Remark 2.1.12 У метричному просторі був критерій Кантора, який я переформулюю під нормований простір.
$(L, \|\cdot\|)$ – банахів $\iff$ виконується умова Кантора (тобто будь-яка послідовність замкнених куль, що стягується, має непорожній перетин).
Так ось, в нормованому просторі не обов'язково вимагати умову $r_n \to 0$.

2.2 Обмежені та неперервні лінійні оператори

Definition 2.2.1 Задано $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ – нормовані простори.
Лінійний оператор $A\colon X \to Y$ називають **обмеженим**, якщо

$$\exists C > 0 : \forall x \in X : \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$$

Надалі ми ці норми розрізняти не будемо, бо буде з контексту зрозуміло.

Remark 2.2.2 Маємо обмежений оператор A. Зауважимо, що множина всіх констант, які обмежують оператор, тобто множина $\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$, буде непорожньою (бо оператор обмежений) та обмеженою знизу числом 0. Значить, існує $\inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$.

Definition 2.2.3 Задано X, Y – нормовані простори.
Нормою лінійного оператора A називається величина

$$\|A\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$$

Remark 2.2.4 Зауважимо, що для всіх $x \in X$ виконується $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.
Дійсно, для кожного $\varepsilon > 0$ існує стала $C_\varepsilon > 0$, для якої $C_\varepsilon < \|A\| + \varepsilon$. Тож для всіх $x \in X$ справедлива нерівність $\|Ax\| \leq C_\varepsilon\|x\| < (\|A\| + \varepsilon)\|x\|$. Тому ця нерівність виконуватиметься також при $\varepsilon \to 0+0$. Таким чином, $\|A\| \in \{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\| \leq C\|x\|\}$, тобто інфімум досягається.
Отже, норма $\|A\|$ – це найменше число, що обмежує лінійний оператор A.

Theorem 2.2.5 Задано X, Y – нормовані простори та $A\colon X \to Y$ – обмежений оператор. Тоді $\|A\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Proof.
Спочатку доведемо, що $\|A\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Уже відомо, що $\forall x \in X : \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, тоді звідси $\forall x \in X \setminus \{0\} : \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$, таким чином $\sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$. Залишилося довести, що строга нерівність не допускається.
!Припустимо, що $\sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} < \|A\|$, тобто існує $\varepsilon > 0$, для якого $\sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\| - \varepsilon$. Тоді звідси випливає, що $\forall x \in X \setminus \{0\} : \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| - \varepsilon \implies \forall x \in X : \|Ax\| \leq (\|A\| - \varepsilon)\|x\|$. Таким чином, $\|A\| - \varepsilon$ – це константа, яка обмежує оператор, тоді за означенням норми, $\|A\| - \varepsilon \geq \|A\|$ – суперечність!
Отже, ми довели рівність, тобто $\|A\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$. ■

Theorem 2.2.6 Задано X, Y – нормовані простори та $A\colon X \to Y$ – обмежений оператор. Тоді $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\| = 1} \|Ax\|$.

Proof.
Ми доведемо ось такий ланцюг нерівностей: $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \geq \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.
Оберемо такий $x \neq 0$, щоб $\|x\| \leq 1$. Тоді виконується нерівність $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \|Ax\|$. Таким чином, $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq \sup\limits_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\neq 0}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$.
Зрозуміло, що виконується нерівність $\sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$.
Залишилося довести, що $\sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Дана нерівність є наслідком того, що для кожного $x \neq 0$ число $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|$ належить множині $\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$. ■

Example 2.2.7 Задано лінійний оператор $A\colon l_2 \to l_2$ таким чином: $A(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Довести, що A – обмежений оператор та знайду норму.
Згадаємо, що норма $\|(x_1, x_2, \dots\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots}$. Оцінимо оператор:
$\|A(x_1, x_2, \dots)\| = \|(x_2, x_3, \dots)\| = \sqrt{|x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} \leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} = 1 \cdot \|(x_1, x_2, \dots)\|$.
Отже, A – обмежений оператор, бо знайшли константу $C = 1$, що обмежує.
$\|A\| = \sup\limits_{\|(x_1,x_2,\dots)\|=1} \|A(x_1, x_2, \dots)\| = \sup\limits_{\|(x_1,x_2,\dots)\|=1} \|(x_2, x_3, \dots)\| = \sup\limits_{\|(x_1,x_2,\dots)\|=1} \sqrt{|x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots} =$
$= \sup\limits_{\|(x_1,x_2,\dots)\|=1} \sqrt{1 - \|x_1\|^2} = 1$.

Example 2.2.8 Задано лінійний оператор $A\colon C([0,1]) \to C([0,1])$, таким чином: $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t \tau x(\tau)\,d\tau$.
Довести, що A – обмежений оператор та знайти норму.
Конкретно в цьому випадку розглядатиметься норма $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
$\|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \left|\displaystyle\int_0^t \tau x(\tau)\,d\tau\right| \leq \max\limits_{t\in[0,1]} \displaystyle\int_0^t |\tau||x(\tau)|\,d\tau = \int_0^1 |\tau||x(\tau)|\,d\tau \leq \int_0^1 |\tau| \max\limits_{\tau\in[0,1]} |x(\tau)|\,d\tau =$
$= \displaystyle\int_0^1 \tau\|x\|\,d\tau = \|x\| \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\|x\|$.
Отже, A – обмежений оператор. Залишилося знайти норму.
Оскільки $\|Ax\| \leq \dfrac{1}{2}\|x\|$, то звідси випливає $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \dfrac{1}{2}$. Із іншого боку, оберемо функцію $x(t) = 1$, для якої $\|x\| = 1$. Тоді отримаємо, що $\|Ax\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \left|\displaystyle\int_0^\tau \tau\,d\tau\right| = \max\limits_{t\in[0,1]} \dfrac{t^2}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Таким чином, отримаємо $\|A\| = \dfrac{1}{2}$.

Example 2.2.9 Покажемо, що оператор $A\colon C^1([0,1]) \to C^1([0,1])$, що заданий як $(Af)(t) = f'(t)$, буде необмеженим.
Оберемо послідовність $f_n = \sin(2\pi nt)$, причому $\|f_n\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |\sin(2\pi nt)| = 1$. Тоді звідси
$\|Af_n\| = \|2\pi nt\cos(2\pi nt)\| = 2\pi n\|\cos(2\pi nt)\| = 2\pi n \max\limits_{t\in[0,1]} |\cos(2\pi nt)| = 2\pi n \to +\infty$.

Proposition 2.2.10 Задано X, Y – нормовані простори та $\dim X < \infty$ та $A\colon X \to Y$ – лінійний оператор. Тоді A – обмежений.
Внаслідок цього, всі оператори між скінченновимірними векторними просторами – обмежені.

Proof.
Дійсно, нехай $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис X, нехай на неї стоїть норма $\|x\|_2$, тоді маємо наступне:
$\|Ax\| = \|A(x_1e_1 + \dots + x_ne_n)\| = \|x_1Ae_1 + \dots + x_nAe_n\| \leq |x_1|\|Ae_1\| + \dots + |x_n|\|Ae_n\| \leq$
$\leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}\sqrt{\|Ae_1\|^2 + \dots + \|Ae_n\|^2} = C\|x\|_2$.
Якби була би інша норма $\|\cdot\|$, то вона еквівалентна $\|\cdot\|_2$, а тому обмеженість зберігається. ■

Theorem 2.2.11 Задано X, Y – нормовані простори та $A\colon X \to Y$ – лінійний оператор.
A – обмежений $\iff$ A – неперервний в точці 0.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: A – обмежений. Оберемо послідовність $\{x_n\} \subset X$ так, щоб $x_n \to 0$. Звідси отримаємо $\|Ax_n - A0\| = \|Ax_n\| \leq \|A\|\|x_n\| \to 0$. Отже, $Ax_n \to A0$ при $n \to \infty$, що підтверджує неперервність.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: A – неперервний в точці 0.
!Припустимо, що A – необмежений оператор. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує точка $x_n \in X$, для якої $\|Ax_n\| > n\|x_n\|$ (ясно, що $x_n \neq 0$). Таким чином, $\dfrac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \left\|A\left(\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| > n$. Для зручності позначу $w_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|} \in X$, тобто ми вже маємо $\|Aw_n\| > n$. Оскільки відображення A – неперервне в нулі, то для послідовності $\left\{\dfrac{1}{n}w_n, n \geq 1\right\}$, для якої $\dfrac{1}{n}w_n \to 0$ виконується $A\dfrac{w_n}{n} \to A0 = 0$ – суперечність в силу нерівності! Бо в нас $\left\|A\dfrac{w_n}{n}\right\| > 1$. ■

Remark 2.2.12 Насправді, A – неперервний в точці $0 \iff A$ – неперервний на X.
Сторона $\boxed{\Leftarrow}$ зрозуміла. По стороні $\boxed{\Rightarrow}$ маємо $x_0 \in X$ та припустимо, що $\{x_n\}$ – довільна послідовність, де $x_n \to x_0$. Тоді цілком зрозуміло, що $x_n - x_0 \to 0$, але за неперервністю в нулі, маємо $A(x_n - x_0) = Ax_n - Ax_0 \to A0 = 0$. Таким чином, $Ax_n \to Ax_0$.

Theorem 2.2.13 Множина $\mathcal{B}(X,Y)$ – множина всіх обмежених лінійних операторів – буде підпростором $\mathcal{L}(X,Y)$, а також буде нормованим простором із заданою нормою за означенням вище.

Proof.
Дійсно, нехай $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$, тобто вони обмежені. Хочемо довести, що $A+B, \alpha A \in \mathcal{B}(X,Y)$, тобто вони теж обмежені. Дійсно, справедливі наступні оцінки:
$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|$.
$\|(\alpha A)x\| = |\alpha|\|Ax\| \leq |\alpha|\|A\|\|x\|$.
Отже, дійсно $A + B, \alpha A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Тепер доведемо, що вищезгадана норма лінійного обмеженого оператора – дійсно норма.
$\|A\| \geq 0$ – зрозуміло. Також якщо $\|A\| = 0$, то звідси $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| = 0$, тобто $Ax = 0$, причому для всіх $x \in X$; або $A = O$. Навпаки, якщо $A = O$, тобто $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \{0\} = 0$.
Ми вже маємо оцінку $\|\alpha Ax\| \leq |\alpha|\|A\|\|x\|$ при всіх $x \in X$, тому й при всіх x з умовою $\|x\| = 1$. Таким чином, $\|\alpha A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| \leq |\alpha|\|A\|$. Із цієї оцінки випливає, що $\|A\| = \|\alpha^{-1}\alpha A\| \leq |\alpha^{-1}|\|\alpha A\| \implies \|\alpha A\| \geq |\alpha|\|A\|$. Таким чином, $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ (у тому числі при $\alpha = 0$).
Ми вже маємо оцінку $\|(A+B)x\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$ при всіх $x \in X$, тому й при всіх x з умовою $\|x\| = 1$. Таким чином, $\|A + B\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| \leq \|A\| + \|B\|$ – третя властивість норми. ■

Theorem 2.2.14 Простір $\mathcal{B}(X,Y)$ буде повним, якщо Y – повний.

Proof.
Нехай $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ – фундаментальна послідовність. Зауважимо, що $\{A_n x, n \geq 1\} \subset Y$ – фундаментальна також при всіх $x \in X$. Із фундаментальності $\{A_n\}$ маємо, що $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m \geq N : \|A_n - A_m\| < \varepsilon$, але тоді $\forall x \in X : \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$, звідси й випливає фундаментальність.
Тоді при кожному $x \in X$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = z_x$. Ми можемо визначити як раз новий оператор $A \colon X \to Y$, де $x \mapsto z_x$ (границя єдина, тому визначення адекватне). Залишилися три етапи доведення.
I. *Лінійність.* Дійсно, нехай $x, y \in X$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді маємо
$A(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} A_n x + \beta \lim\limits_{n\to\infty} A_n y = \alpha Ax + \beta Ay$.
II. *Обмеженість.* Оскільки $\{A_n\}$ – фундаментальна, то $\{A_n\}$ – обмежена: $\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|A_n\| \leq C$. Тоді в силу неперервності норми матимемо $\|Ax\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq C\|x\|$.
III. $A_n \to A$. Згадаємо нерівність $\|(A_n - A_m)x\| < \varepsilon\|x\|$ при всіх $x \in X$, при всіх $\varepsilon > 0$ та $n, m \geq N$. Спрямуємо $m \to \infty$, тоді отримаємо $\|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon\|x\|$, тому й $\|A_n - A\| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$. ■

2.3 Продовження неперервних операторів

Задані X, Y – нормовані простори, $X_0 \subset X$ та $A\colon X_0 \to Y$ – обмежений оператор. Питання полягає в тому, чи існує розширення $\tilde{A}\colon X \to Y$ таким чином, що $\tilde{A}|_{X_0} = A$. Причому нас буде цікавити таке розширення, що $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Remark 2.3.1 Просто якщо таке розширення допустиме, то звідси $\|\tilde{A}\| \geq \|A\|$. Дійсно,
$\|\tilde{A}\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|\tilde{A}x\|}{\|x\|} \geq \sup\limits_{x \in X_0 \setminus \{0\}} \dfrac{\|\tilde{A}x\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \in X_0 \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$.

Proposition 2.3.2 Задані X, Y – відповідно нормований та банахів простори та $X_0 \subset X$ – щільний підпростір. Тоді для кожного обмеженого оператору $A\colon X_0 \to Y$ існує єдиний розширений обмежений оператор $\tilde{A}\colon X \to Y$, для якого $\tilde{A}|_{X_0} = A$ та при цьому $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Proof.
Нехай є послідовність $\{x_n\} \subset X_0$, де $x_n \to x \in X$. Зауважимо, що тоді в цьому випадку $\{Ax_n\}$ – фундаментальна. У силу банаховості $\{Ax_n\}$ буде збіжним. Тож визначимо оператор $\tilde{A}x = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$.
I. $\tilde{A}$ *визначений коректно.*
Нехай є дві послідовності $\{x_n\}, \{y_n\}$, для яких $x_n \to x,\ y_n \to x$. Значить, тоді
$\|Ax_n - Ay_n\| = \|A(x_n - y_n)\| \leq \|A\|\|x_n - y_n\| \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = \lim\limits_{n\to\infty} Ay_n$.

II. $\tilde{A}$ *розширює оператор* A.
Справді, нехай $x \in X_0$. Оберемо стаціонарну послідовність $\{x\} \subset X_0$, де $x \to x$. Тоді $\tilde{A}x = \lim\limits_{n\to\infty} Ax = Ax$. Отже, звідси $\tilde{A}|_{X_0} = A$.

III. $\tilde{A}$ *лінійний оператор.*
Нехай $x, y \in E$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді звідси
$A(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} A(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} Ay_n = \alpha Ax + \beta Ay$.

IV. $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.
Оберемо $X_0 \ni x_n \to x \in X$. Оскільки A – обмежений, то $\|Ax_n\| \leq \|A\|\|x_n\|$. Спрямовуючи $n \to \infty$, ми отримаємо $\|\tilde{A}x\| \leq \|A\|\|x\|$. Автоматично довели, що $\tilde{A}$ – обмежений оператор. Раз це виконується для всіх $x \in E$, то отримаємо $\|\tilde{A}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\tilde{A}x\| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|A\|\|x\| = \|A\|$. Тобто звідси $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$.
Зважаючи на зауваження вище, маємо $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

V. $\tilde{A}$ – *єдине розширення.*
!Припустимо, що існує інший оператор $\tilde{\tilde{A}}$, яке також є розширенням A з усіма умовами, що задані в твердженні. Маємо $x \in X$, тож існує послідовність $\{x_n\} \subset X_0, x_n \to x$. Тоді
$\tilde{\tilde{A}}x \overset{\tilde{\tilde{A}} \text{ – обмежений}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\tilde{A}}x_n = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n \overset{\text{def. } \tilde{A}}{=} \tilde{A}x$. Суперечність! ■

Theorem 2.3.3 Теорема Гана-Банаха
Задано E – нормований простір та $G \subset E$ – підпростір. Тоді для кожного обмеженого функціонала $l\colon G \to \mathbb{R}$ існує продовження $\tilde{l}\colon E \to \mathbb{R}$ так, що $\tilde{l}|_G = l,\ \|\tilde{l}\| = \|l\|$.

Proof.
1. Обмежимось випадком, коли E – дісний та сепарабельний простір.
I. *Доведемо, що* l *можна продовжити на деякий підпростір* $E \supset F \supsetneq G$.
Нехай G – підпростір E та $G \neq E$. Зафіксуємо $y \notin G$ та розглянемо підпростір $F = \operatorname{span}\{G \cup \{y\}\}$. Тобто кожний елемент $x \in F$ записується як $x = g + \lambda y$ при $g \in G, \lambda \in \mathbb{R}$. Визначимо оператор $\tilde{l}(x) = l(g) + \lambda c$, де $c = \tilde{l}(y)$. За побудовою, такий оператор – лінійний.
Тепер залишилося підібрати таке $c \in \mathbb{R}$, щоб виконувалося $\|\tilde{l}\| = \|l\|$ – тим самим ми й обмеженість доведемо автоматично. Але згідно зі зауваження, нам треба підібрати $c \in \mathbb{R}$, щоб $\|\tilde{l}\| \leq \|l\|$.
Обмежимося поки що $\lambda > 0$. Нехай зафіксовано $h_1, h_2 \in G$ та зауважимо, що справедлива нерівність:
$l(h_2) - l(h_1) = l(h_2 - h_1) \leq |l(h_2 - h_1)| \leq \|l\|\|h_2 - h_1\| = \|h\|\|(h_2 + y) - (y + h_1)\| \leq \|l\|\|h_1 + y\| + \|l\|\|h_2 + y\|$.
Звідси випливає, що $-\|l\|\|h_1 + y\| - l(h_1) \leq \|l\|\|h_2 + y\| - l(h_2)$.
Оскільки це $\forall h_1, h_2 \in G$, то тоді $\sup\limits_{h_1 \in G}(-\|l\|\|h_1 + y\| - l(h_1)) \leq \inf\limits_{h_2 \in G}(\|l\|\|h_2 + y\| - l(h_2))$.

Для зручності супремум позначу за a_1 та інфімум за a_2. Оберемо число $c \in \mathbb{R}$ так, щоб $a_1 \le c \le a_2$. Звідси справедлива така нерівність:
$\forall h \in G : -\|l\|\|h+y\| - l(h) \le c \le \|l\|\|h+y\| - l(h)$.
Тепер покладемо елемент $h = \lambda^{-1}g$ та домножимо обидві частини нерівності на λ. Оскільки ми домовилися $\lambda > 0$, то знаки нерівностей зберігаються. Коротше, отримаємо:
$-\|l\|\|g+\lambda y\| - l(g) \le \lambda c \le \|l\|\|g+\lambda y\| - l(g)$.
$-\|l\|\|g+\lambda y\| \le l(g) + \lambda c \le \|l\|\|g+\lambda y\|$.
$|\tilde{l}(x)| = |l(g) + \lambda c| \le \|l\|\|g+\lambda y\| = \|l\|\|x\|$.
Власне, далі аналогічними міркуваннями (як в попередньому твердженні) отримаємо $\|\tilde{l}\| \le \|l\|$.
Тепер що робити при $\lambda < 0$. Перепишемо $x = -(-g + (-\lambda)y)$. У нас тепер $-\lambda > 0$ та $-x = t = -g + (-\lambda)y$, звідси отримаємо
$|\tilde{l}(t)| \le \|l\|\|t\| \implies |\tilde{l}(x)| \le \|l\|\|x\|$.

II. *Тепер доведемо, що продовежння на нашому конкретному E існує.*
Оскільки E – сепарабельний, то існує (ми оберемо злiченну) множина $A = \{x_1, x_2, \dots\}$, яка є щільною підмножиною E. Також ми досі маємо $G \subset E$ – підпростір.
Позначимо $x_{n_1} \in A$ – перший з елементів, де $x_{n_1} \notin G$. За кроком I, існує l_1 – продовження l на $G_1 = \operatorname{span}\{G \cup \{x_{n_1}\}\}$.
Позначимо $x_{n_2} \in A$ – перший з елементів, де $x_{n_2} \notin G_1$. За кроком I, існує l_2 – продовження l_1 на $G_2 = \operatorname{span}\{G_1 \cup \{x_{n_2}\}\}$.
$\vdots$
Отримаємо ланцюг підпросторів $G \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots$ та набір функціоналів $l_1, l_2, \dots$, для яких:
$\forall n \ge 1 : \qquad l_n \colon G_n \to \mathbb{R}$ – обмежена; $\qquad l_n|_G = l; \qquad \|l_n\| = \|l\|$.
Покладемо множину $M = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, яка є лінійною. Визначимо функціонал $L_0 \colon M \to \mathbb{R}$ таким чином:
$x \in M \implies x \in G_N \implies L_0(x) = l_N(x)$. Зрозуміло цілком, що L_0 – лінійний, а також $\|L_0\| = \|l\|$.
Оскільки $M \supset A$ та A всюди щільна, то M – всюди щільна. Отже, за попереднім твердженням, існує продовження $L \colon E \to \mathbb{R}$, для якого $\|L\| = \|L_0\| = \|l\|$.
Висновок: ми довели теорему Гана-Банаха для випадку, коли E – дійсний сепарабельний.

2. Тепер будемо доводити теорему для E – довільний дійсний нормований простір. Все ще $G \subset E$. Позначимо за l_p – продовження l зі збереженням норми на множині $P \supset G$. Таке продовження існує див (1. та I.). Позначимо X – множина всіх таких продовжень. На ній введемо відношення $\preceq$ таким чином:
$l_p \preceq l_q \iff P \subset Q$ та $l_Q(x) = l_P(x), \forall x \in P$.
Зрозуміло, що $\preceq$ задає відношення порядку, внаслідок чого X – частково впорядкована. Зафіксуємо $Y = \{l_{P_\alpha} \mid \alpha \in A\}$ – будь-яку лінійно впорядкувану підмножину X. Знайдемо верхню грань.
Для цього покладемо $P_* = \displaystyle\bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha$ та на множині P_* задамо функціонал l_* таким чином:
$x \in P_* \implies x \in P_{\alpha_0} \implies l_*(x) = l_{\alpha_0}(x)$.
Зрозуміло, що l_* – лінійний, причому $\|l_*\| = \|l\|$. На множині $\bar{P}_*$ продовжимо функціонал, як було в твердженні – отримаємо функціонал $l_{\bar{P}_*}$, причому $\|l_{\bar{P}_*}\| = \|l_*\| = \|l\|$. Даний функціонал $l_{\bar{P}_*}$ на $\bar{P}_*$ буде верхньою гранню Y. Отже, за лемою Цорна, існує максимальний елемент X. Це буде функціонал L, який визначений на E (у протилежному випадку його можна було би ще продовжити та він не був би максимальним елементом).
Висновок: ми довели теорему Гана-Банаха для випадку, коли E – дійсний (не обов'язково сепарабельний) нормований простір. ■

Насправді, на цьому теорема Гана-Банаха ще не закінчена. Ми можемо її довести на випадок, коли нормований простір E – комплексний. Спершу кілька деталей.
Нехайй E – комплексний лінійний нормований простір. Розглянемо одночасно $E_\mathbb{R}$ – асоційований з E дійсний нормований простір; тобто під час множення на скаляр ми допускаємо лише дійсні коефіцієнти. Зауважимо, що $E_\mathbb{R} = E$ як множини, утім не як простори.
Розглянемо довільний функціонал $l \colon E \to \mathbb{C}$. Раз $l(x) \in \mathbb{C}$, то для кожного $x \in E$ можна записати функціонал як $l(x) = m(x) + in(x)$. У цьому випадку $m(x) = \operatorname{Re} l(x),\ n(x) = \operatorname{Im} l(x)$.

Proposition 2.3.4 Нехай $l \colon E \to \mathbb{C}$ – лінійний та обмежений функціонал. Тоді $m, n \colon E_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задають лінійний обмежений функціонал.

Proof.
Нехай $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ та $x, y \in E$. Тоді ми отримаємо наступне:
$l(\alpha x + \beta y) = m(\alpha x + \beta y) + in(\alpha x + \beta y)$ (з одного боку)
$l(\alpha x+\beta y) = \alpha l(x)+\beta l(y) = \alpha(m(x)+in(x))+\beta(m(y)+in(y)) = (\alpha m(x)+\beta m(y))+i(\alpha n(x)+\beta n(y))$ (з іншого боку).
Знаючи, що комплексне число рівне тоді й лише тоді, коли дійсні та уявні частини збігаються, отримаємо
$m(\alpha x + \beta y) = \alpha m(x) + \beta m(y) \qquad n(\alpha x + \beta y) = \alpha n(x) + \beta n(y)$.
Отже, m, n – лінійний функціонали.
Обмеженість m (аналогічно з n) випливає з такго ланцюга нерівностей:
$|m(x)| \leq |m(x) + in(x)| = |l(x)| \leq \|l\|\|x\|$. ■

Proposition 2.3.5 $n(x) = -m(ix)$.
Іншими словами, ми можемо функціонал l відновити повністю, знаючи функціонал m.

Proof.
$m(ix) + in(ix) = l(ix) = il(x) = i(m(x) + in(x)) = -n(x) + im(x)$.
$\implies n(x) = -m(ix)$.
$l(x) = m(x) - im(ix)$. ■

Повернімось назад до теореми Гана-Банаха. Доб'ємо її на випадок, коли E – комплексний нормований простір.

Proof.
Маємо $E \supset G$ – два комплексних простори та $E_\mathbb{R}, G_\mathbb{R}$ – асоційовані простори. Маємо функціонал $l \colon G \to \mathbb{C}$, який визначається дійсним функціоналом $m \colon G_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Оскільки це дійсний функціонал, ми можемо продовжити до $M \colon E_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зі збереженням норми.
Покладемо $L(x) = M(x) - iM(ix)$. Неважко буде довести, що L – комплексний лінійний функціонал. Залишилося довести, що $\|L\| = \|l\|$. Знову ж таки, достатньо довести $\|L\| \leq \|l\|$. Запишемо $L(x) = |L(x)|e^{i\varphi}$, де $\varphi = \arg L(x)$. Тоді
$|L(x)| = e^{-i\varphi}L(x) = L(e^{-i\varphi}x) = M(e^{-i\varphi}x) = |M(e^{-i\varphi}x)| \leq \|M\|\|e^{-i\varphi}x\| = \|m\|\|x\| \leq \|l\|\|x\|$.
Отже, $\|L\|$. Ми тут юзали той факт, що $L(y) = M(y)$ при $L(y) \in \mathbb{R}$. ■

Remark 2.3.6 Зауважимо, що якщо G – лінійна множина (але не підпростір), то теорема Гана-Банаха все одно виконується.
У цьому випадку $\bar{G}$ буде підпростором E. Функціонал l продовжується неперервним чином на $\tilde{G}$, а далі застосовується доведена теорема.

2.4 Деякі наслідки з теореми Гана-Банаха

Theorem 2.4.1 Нехай E – лінійний нормований простір та $G \subset E$ – підпростір. Тоді для будь-якого вектора $y \notin G$ існує функціонал l на E, для якого $\|l\| = 1,\ l(y) = \rho(y, G),\ l|_G = 0$.

Proof.
На підпросторі $F = \operatorname{span}\{G \cup \{y\}\}$ визначимо функціонал l_0 таким чином:
$l_0(g + \lambda y) = \lambda\rho(y, G)$.
Цілком зрозуміло, що l_0 – лінійний неперервний функціонал на F, також $l_0(y) = \rho(y, G)$, нарешті $l_0(g) = l_0(g + 0y) = 0$. Обчислимо $\|l_0\|$.
$\|l_0\| = \sup\left\{\dfrac{|l(g+\lambda y)|}{\|g+\lambda y\|} \mid g + \lambda y \in F\right\} = \sup\left\{\dfrac{|\lambda|\rho(y,G)}{|\lambda| \cdot \|\lambda^{-1}g + y\|} \mid g + \lambda y \in F\right\} =$
$= \rho(y, G)\sup\{\|g' - y\|^{-1} \mid g' \in G\} = \rho(y, G) \inf\limits_{g' \in G} \|g' - y\| = 1$, де елемент $g' = \lambda^{-1}g \in G$.
За теоремою Банаха, існує продовження l до E, причому $\|l\| = \|l_0\| = 1$. ■

Corollary 2.4.2 Для кожного $y \in E \setminus \{0\}$ існує функціонал на E, що $\|l\| = 1,\ l(y) = \|y\|$.
Вказівка: $G = \{0\}$.

Corollary 2.4.3 Лінійні неперевні функціонали розділяють точки нормованого простора E.
Іншими словами, $\forall x_1, y_2 \in E : x_1 \neq x_2 : \exists l$ – функціонал на $E : l(x_1) \neq l(x_2)$.
Вказівка: попередній наслідок, $y = x_1 - x_2 \neq 0$.

Definition 2.4.4 Задано E – нормований простір.
Підмножина $M \subset E$ називається **тотальною**, якщо

$$\overline{\operatorname{span} M} = E$$

Theorem 2.4.5 Нехай E – нормований простір та $M \subset E$.
M – тотально в $E \iff \forall x \in M : l(x) = 0 \implies \forall x \in E : l(x) = 0$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: M – тотальна множина. Нехай l – неперервний лінійний функціонал такий, що $\forall x \in M$: $l(x) = 0$. Оскільки функціонал лінійний, то $\forall x \in \operatorname{span} M : l(x) = 0$. Оскільки $\overline{\operatorname{span} M} = E$, то ми можемо неперервно продовжити l до E. Отримаємо $l(x) = 0, \forall x \in E$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: будь-який лінійно неперервний функціонал l на E такий, що $l(x) = 0, x \in M$ випливає $l(x) = 0, x \in E$.
!Припустимо, що M не є тотальною. Тобто $\overline{\operatorname{span} M} = G \neq E$, тобто існує вектор $y \in E \setminus G$. Внаслідок першої теореми даного підрозділу, існує функціонал l на E такий, що $\|l\| = 1,\ l|_G = 0$. Але з того, що $l|_G = 0$ випливає $l = 0$. Суперечність! ■

Proposition 2.4.6 Нехай E – нормований простір та l – лінійний неперервний функціонал з E. Тоді $\ker l$ – підпростір E. Більш того, $\ker l$ буде гіперпідпростором, тобто це означає, що $E = \operatorname{span}\{\ker l \cup \{y\}\}$ при $y \notin \ker l$.

Proof.
Те, що $\ker l$ підпростір, тут все зрозуміло.
Нехай $y \notin \ker l$. Тоді доведемо, що кожний елемент $x \in E$ записується як $x = g + \lambda y$, де $g \in \ker l, \lambda \in \mathbb{K}$. Покладемо $\lambda = \dfrac{l(x)}{l(y)}$ та розглянемо вектор $g = x - \lambda y$. Оскільки $l(g) = l(x) - \lambda l(y) = 0$, то звідси $g \in \ker l$. Отже, $x = g + \lambda y$ – шукане представлення. ■

Proposition 2.4.7 Зафіксуємо лінійний функціонал l на E. Покладемо множину $\Gamma_c = \{x \in E \mid l(x) = c\}$, що називається **гіперплощиною**. Позначимо $\Gamma_0 = \ker l$. Тоді існує такий вектор $z \in E$, що $\Gamma_c = \Gamma_0 + z \equiv \{g + z \mid g \in \Gamma_0\}$.

Proof.
Дійсно, зафіксуємо $z \in \Gamma_c$. Тоді для кожного $x \in \Gamma_c$ маємо $l(x - z) = l(x) - l(z) = 0$, тобто $g = x - z \in \Gamma_0 \implies x = g + z$. ■

Definition 2.4.8 Нехай E – дійсний нормований простір та $A \subset E$, точка $x_0 \in \partial A$. Також нехай l – лінійний неперервний функціонал на E.
Гіперплощина Γ_c називається **опорною гіперплощиною** множини A, що проходить через точку x_0, якщо

$$x_0 \in \Gamma_c$$
$$A \text{ лежить по одну сторону від гіперплощини } \Gamma_c \text{ (тобто } l(x) - c \text{ не міняє знак на } A)$$

Theorem 2.4.9 Зокрема маємо $A = B[r; 0]$ – замкнуту кулю, границя $\partial A = S_r(0)$.
Через будь-яку точку $x \in S_r(0)$ проходить опорна гіперплощина шара $B[r; 0]$.

Proof.
Для кожної точки $x_0 \in S_r(0)$ існує лінійний неперервний функціонал l на E, де $\|l\| = 1,\ l(x_0) = \|x_0\| = r$. Тоді гіперплощина Γ_r – наша шукана. Дійсно, $x_0 \in \Gamma_r$, бо $l(x_0) = r$.
$\forall x \in B[r; 0] : l(x) \leq |l(x)| \leq \|x\| \leq r$, тобто весь шар лежить по одну сторону від Γ_r. ■

2.5 Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у деяких банахових просторах

2.5.1 Базис Шаудера

Definition 2.5.1 Нехай E – банахів простір.
Послідовність $\{e_1, e_2, \dots\} \subset E$ називається **базисом Шаудера** простору E, якщо

$$\forall x \in E : \exists! x_k \in \mathbb{K} : x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

Proposition 2.5.2 Нехай E – банахів простір, що містить базис Шаудера. Тоді E – сепарабельний.

Proof.
Випадок дійсного нормованого простору.
Оберемо множину $A = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \mid x_k \in \mathbb{Q} \right\}$.

Нехай $x \in E$, тоді за умовою, $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ єдиним чином. Нехай задане $\varepsilon > 0$. Тоді на кожному з $\left(x_k - \frac{\varepsilon}{\|e_k\| 2^k}, x_k + \frac{\varepsilon}{\|e_k\| 2^k} \right)$ існує раціональне число $y_k \in \mathbb{Q}$. Оберемо $y \in A$ так, що $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$.
Позначимо $x^{(n)}, y^{(n)}$ за часткову суму ряда (перші n додаються). Тоді
$\|x^{(n)} - y^{(n)}\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|(x_k - y_k) e_k\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \|e_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Далі спрямовуємо $n \to \infty$. Тоді $x^{(n)} \to x, y^{(n)} \to y$. Після чого отримаємо $\|x - y\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.

Отже, A скрізь щільна множина, ну тобто $\bar{A} = E$.

Випадок комплексного нормованого простору.
Оберемо множину $A = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \mid x_k = \alpha_k + i\beta_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q} \right\}$. Далі плюс-мінус аналогічно. ■

Remark 2.5.3 Якщо зробити *клік* сюди, то тут буде стаття про приклад сепарабельного банахового простору, який не містить базис Шаудера. Доведено П. Енфло. Власне, це означає, що зворотне твердження не працює.

Theorem 2.5.4 Простір l_p містить базис Шаудера. Причому цей базис матиме вигляд $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, де кожний $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{на } i\text{-ій позиції}}, 0, \dots)$.

Proof.
I. *Існування.*

Фіксуємо елемент $x \in l_p$, де $x = (x_1, x_2, \dots)$ та $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$. Покладемо елемент (що є частковою сумою) $s_n = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ та доведемо, що послідовність $\{s_n, n \geq 1\}$ – фундаментальна. При $n > m$

$$\|s_n - s_m\|_p = \|(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n, 0, \dots)\|_p = \left(\sum_{k=m+1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Фундаментальність $\{s_n\}$ випливає зі збіжності числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$. Оскільки l_p – повний простір, то $\{s_n\}$ – збіжний, тобто $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ збігається до деякого елемента. Зокрема доведемо, що $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = x$. Дійсно,

$$\|x - s_n\|_p = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_p = \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Знову зі збіжності числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ випливає бажане.

II. *Єдиність.*

!Припустимо, що $x = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$ – друге представлення. Тоді отримаємо $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) e_k = 0$.

Звідси отримаємо $\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)e_k\right\| = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$. Єдина можливість тут – це $x_k = y_k$ при всіх $k\in\mathbb{N}$ – суперечність! ■

2.5.2 Простір, що спряжений до l_p

Theorem 2.5.5 Нехай $p, p' > 1$ таким чином, що $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. Тоді для будь-якого лінійного неперервного функціонала f на l_p існує елемент $(f_k)_{k=1}^{\infty}\in l_{p'}$, такий, що $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k$ для всіх $x\in l_p$.

Proof.
Нехай $f\in(l_p)'$ (тобто лінійний неперервний функціонал). Тоді звідси отримаємо:
$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k e_k\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k e_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty}x_k f(e_k) \overset{f(e_k)\overset{\text{покл.}}{=}f_k}{=} \sum_{k=1}^{\infty}f_k x_k.$$
Доведемо, що $(f_k)_{k=1}^{\infty}\in l_{p'}$. Для цього підберемо елемент $y\in l_p$ ось таким чином, щоб
$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty}y_k f_k \overset{\text{був рівний}}{=} \sum_{k=1}^{n}|f_k|^{p'}.$$
Можна для цього взяти елемент $y = \left(|f_1|^{p'-1}e^{-i\arg f_1},\dots,|f_n|^{p'-1}e^{-i\arg f_n},0,0,\dots\right)$. Оскільки f обмежений, то звідси $|f(y)|\le\|f\|\|y\| = \|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}||f_k|^{p'-1}\cdot e^{-i\arg f_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p}}$.
Маючи щойно отриману нерівність та рівність трошки вище, отримаємо
$$\sum_{k=1}^{n}|f_k|^{p'}\le\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p}} \implies \left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\le\|f\|, \forall n\in\mathbb{N}.$$
Остання оцінка стверджує, що ряд збіжний, внаслідок чого $(f_k)_{k=1}^{\infty}\in l_{p'}$. ■

Theorem 2.5.6 І навпаки: для кожного $(f_k)_{k=1}^{\infty}\in l_{p'}$ рівність $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}f_k x_k$ визначає лінійний та неперервний функціонал на l_p.

Proof.
Нехай $(f_k)_{k=1}^{\infty}\in l_{p'}$. Завдяки нерівності Гьольдера, отримаємо:
$$|f(x)|\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = c\|x\|_p < +\infty.$$
Отже, f – обмежений та $\|f\|\le c$. Як доводиться лінійність, цілком зрозуміло.

До речі, під час минулого доведення ми довели нерівність $c\le\|f\|$. Маючи ще тут нерівність $c\le\|f\|$, звідси випливатиме, що $\|f\| = c$, тобто $\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$. ■

Множину всіх лінійних та обмежених функціоналів на l_p позначатимемо за $(l_p)'$. Ці дві теореми стверджують, що $(l_p)'\cong l_{p'}$ ізометричним чином. Адже ми маємо $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}f_k x_k$, який задає ізоморфізм. (TODO: додумати).

2.5.3 Простір, що спряжений до l_1

Theorem 2.5.7 Простір $(l_1)'\cong l_\infty$ ізометричним чином. Ізоморфізм між ними встановлюється формулою $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}f_k x_k$.

Proof.
Нехай $(f_k)_{k=1}^\infty \in l_\infty$. Визначимо функціонал $f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k x_k$, який вже ясно, що лінійний. Залишилося довести обмеженість.
$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^\infty f_k x_k \right| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k| \sum_{k=1}^\infty |x_k| = \|f\|_\infty \|x\|_1$.
Із цього всього ми встановили $l_\infty \subset (l_1)'$.
Нехай $f \in (l_1)'$, тобто лінійний та обмежений функціонал. Аналогічним чином отримаємо, що $f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k x_k$, де $f_k = f(e_k)$. Тепер хочемо $(f_k)_{k=1}^\infty \in l_\infty$. Дійсно це спрацює, бо
$\|f\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f(e_k)| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \|f\| \|e_k\|_1 = \|f\| \sup\{1, 1, \dots\} = \|f\| < \infty$.
Причому ми також довели, що $\|f\| = \|f\|_\infty$. ■

2.5.4 Простори, що спряжені до l_∞

Remark 2.5.8 $(l_\infty)' \supsetneq l_1$.
Дійсно, нехай $(f_k)_{k=1}^\infty \in l_1$, тоді функціонал $f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k x_k,\ x \in l_\infty$ все одно лінійний, а обмеженість доводиться, завдяки оцінки
$|f(x)| \le \sum_{k=1}^\infty |f_k x_k| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \sum_{k=1}^\infty |f_k| = \|x\|_\infty \sum_{k=1}^\infty |f_k|$.
Отже, довели вкладення, при цьому ми ще довели $\|f\| \le \sum_{k=1}^\infty |f_k|$.
Якщо покласти такий $x \in l_\infty$, де $x_k = e^{-i \arg f_k}$, то взагалі отримаємо $f(x) = \sum_{k=1}^\infty |f_k| = \|f\|_1$.

Remark 2.5.9 Тепер чому це вкладення лише в одну сторону.
Розглянемо лінійну множину $C \subset l_\infty$, яка містить збіжні послідовності комплексних чисел. Визначимо $f(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$ для кожного $x = (x_1, x_2, \dots) \in C$. Цілком ясно, що це лінійний функціонал. Обмеженість вилпиває з оцінки $|f(x)| = \left| \lim_{k\to\infty} x_k \right| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = \|x\|$.
Отже, $f \in C'$ (лінійний та неперервний функціонал), причому $\|f\| \le 1$. Ми можемо продовжити функціонал f до функціонала $F \in (l_\infty)'$ зі збереженням норми, за теоремою Гана-Банаха. Функціонал F не можна записати як $F(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k f_k$. Представимо, що можна. Маємо послідовність $x \in C$, ліміт не зміниться при змінні скінченного числа членів, тобто $F(x) = f(x)$ залишиться таким самим. Проте із іншого боку, зміниться $F(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k f_k$.

2.5.5 Простір, що спряжений до $L_p, 1 < p < \infty$.

Theorem 2.5.10 Нехайй $1 < p < \infty$ та $p' > 1$, причому $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Також задано $(X, \lambda, \mathcal{F})$ – вимірний простір, де λ – σ-скінченна міра. Простір $(L_p)' \cong L_{p'}$ ізометричним чином. Ізоморфізм $l\colon (L_p)' \to L_{p'}$ задається наступним чином:
$l(x) = \int_X h(q) x(q)\, d\lambda(q)$.
Доведення див. в pdf теорії міри.

2.5.6 Простір, що спряжений до $C(K)$

Припустимо, що K – метричний компакт та $\mathfrak{B}(K)$ – борельова σ-алгебра.

Definition 2.5.11 Заряд ω на вимірній множині $(K, \mathfrak{B}(K))$ назвемо **регулярним**, якщо

$$\omega_+, \omega_- \text{ – обидва регулярні}$$

Позначення: $W(K)$ – множина регулярних зарядів.

Remark 2.5.12 $W(K)$ буде векторним простором. Також якщо покласти $\|\omega\| = |\omega|(K)$, де $|\omega|$ – повна варіація заряда, то тоді ми отримаємо нормований простір. Причому $W(K)$ – банахів додатково.

Theorem 2.5.13 Теорема Маркова
$(C(K))' \cong W(K)$ ізометричним чином. Ізоморфізм $l\colon (C(K))' \to W(K)$ задається таким чином:
$l(x) = \displaystyle\int_K x(q)\, d\omega(q)$.
Без доведення. Наведу частинний випадок даної теореми.

Theorem 2.5.14 Теорема Ріса
Для кожного функціонала $l \in (C([0,1]))'$ існує фукнція g обмеженої варіації, для якої l можна представити через інтеграл Рімана-Стілт'єса таким чином:
$l(X) = \displaystyle\int_0^1 x(t)\, dg(t)$, причому $V(g;[0,1]) = \|l\|$.
Без доведення.

2.6 Вкладення нормованих просторів

Theorem 2.6.1 Нехай E – лінійний нормований простір. Тоді $E \subset E''$, під другою множиною мається на увазі друге спряження, тобто $E'' = (E')'$. При цьому $\|x\|_E = \|x\|_{E''}$.

Proof.
Для зручності елементи простору E позначимо через $x, y, \dots$; елементи простору E' – через $l, m, \dots$; елементри простору E'' – через $L, M, \dots$
Визначимо відображення φ ось так: кожному $x \in E$ поставимо в відповідність $\varphi(x) = L_x \in E''$. При цьому ми покладемо $L_x(l) = l(x)$ при всіх $l \in E'$.
Доведемо, що L_x – лінійний та неперервний функціонал. Нехай $l, m \in E', \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, тоді звідси $L_x(\lambda l + \mu m) = (\lambda l + \mu m)(x) = \lambda l(x) + \mu m(x) = \lambda L_x(l) + \mu L_x(m)$. Далі маємо
$|L_x(l)| = |l(x)| \leq \|l\| \cdot \|x\|$.
Отже, довели бажане, причому ми отримали оцінку $\|L_x\| \leq \|x\|$.
Тепер доведемо, що саме φ – лінійне відображення. Нехай $x, y \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, тоді ми хочемо довести рівність $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$, або що теж саме $L_{\lambda x + \mu y} = \lambda L_x + \mu L_y$. Така рівність має виконуватися для кожного функціонала $l \in E'$. Дійсно,
$L_{\lambda x + \mu y}(l) = l(\lambda x + \mu y) = \lambda l(x) + \mu l(y) = \lambda L_x(l) + \mu L_y(l) = (\lambda L_x + \mu L_y)(l)$.
Доведемо, що φ – ін'єктивне відображення. !Припустимо, що $x \in \ker\varphi$ та $x \neq 0$. Тоді за наслідком теореми Гана-Банаха, існує функціонал $l \in E'$, для якого $\|l\| = 1,\ l(x) = \|x\|$. Звідси $L_x(l) = l(x) = \|x\| \neq 0$, тобто $L_x \neq 0$. Це означає лише, що $x \notin \ker\varphi$ – суперечність!
Залишилося довести, що $\|x\| = \|L_x\|$. Точніше, залишилося $\|x\| \leq \|L_x\|$. При $x = 0$ все ясно. При $x \neq 0$, знову за наслідком Гана-Банаха, існує функціонал $l \in E'$, для якого $\|l\| = 1,\ l(x) = \|x\|$. Тоді $\|x\| = l(x) = L_x(l) \leq \|L_x\|\|l\| = \|L_x\|$.
Отже, $\varphi\colon E \to E''$ – лінійне та ін'єктивне відображення, що зберігає норму. Значить, E ізометрично ізоморфний $\operatorname{Im} E \subset E''$. Отже, кожний елемент $x \in E$ можемо ототожнити з його елементом $L_x \in E''$. Звідси отримаємо вкладення $E \subset E''$ та рівність $\|x\|_E = \|x\|_{E''}$. ■

Definition 2.6.2 Задано E – банахів простір.
Простір E називають **рефлексивним**, якщо

$$E'' = \varphi(E),$$

де $\varphi\colon E \to E''$, який задавали під час доведення теореми.

Example 2.6.3 Зокрема рефлексивними будуть такі простори: l_p та L_p при $1 < p < \infty$.
Також скінченновимірний простір E буде рефлексивним.

Example 2.6.4 Водночас нерефлексивними будуть такі простори: $l_1,\ l_\infty,\ L_1,\ L_\infty$ (останні два нерефлексивні при $\dim L_1 = \infty$, $\dim L_\infty = \infty$; $C(K)$ (буде нерефелексивним, якщо K нескінченна множина).

Theorem 2.6.5 Теорема Банаха-Штайнгауза
Задано E – банахів простір та $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність функціоналів з E'. Припустимо, що $\forall x \in E$: $(l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ – обмежена послідовність. Тоді $(\|l_n\|)_{n=1}^{\infty}$ (послідовність норм) – обмежена.
Дана теорема носить назву 'принцип рівномірної обмеженості'.

Proof.
Нехай $\forall x \in E : (l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ – обмежена послідовність. Доведемо, що існує замкнений шар $B[a;r]$, де множина $\{l_n(x), x \in B[a;r]\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена.
!Припустимо навпаки, що множина $\{l_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежена в жодному замкненому кулі (як наслідок, в жодному відкритому кулі).
Візьмемо довільну відкриту кулю $B(x_0;r_0)$, де ось ця множина $\{l_n(x), x \in B(x_0;r_0)\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежена. Це, що знайдуться $x_1 \in B(x_0;r_0)$ та $n_1 \in \mathbb{N}$, для яких $|l_{n_1}(x_1)| > 1$. Оскільки l_{n_1} неперервний, то нерівність $|l_{n_1}(x)| > 1$ виконується в деякому околі $B(x_1;r_1)$ (?). За необхідністю, зменшимо радіус r_1 таким чином, щоб $B[x_1;r_1] \subset B(x_0;r_0)$, причому сам радіус $r_1 \overset{\text{зобов'язаний}}{\leq} \dfrac{r_0}{2}$ (дійсно, можна підібрати $r_1 = \dfrac{r_0 - \rho(x_0,x_1)}{2}$).
Ця множина $\{l_n(x), x \in B(x_1;x_1)\}$ теж не обмежена. Тоді знайдуться $x_2 \in B(x_1;x_1)$ та $n_2 > n_1$, для яких $|l_{n_2}(x_2)| > 2$. Аналогічно нерівність $|l_{n_2}(x)| > 2$ виконуватиметься в деякому замкненому шарі $B[x_2;r_2] \subset B(x_1;r_1)$, причому $r_2 \overset{\text{зобов'язаний}}{\leq} \dfrac{r_0}{2^2}$.

$\vdots$

Продовжуючи процес, отримаємо послідовність замкнених шарів $B[x_0;r_0] \supset B[x_1;r_1] \supset \dots$, причому $r_k \to 0$, числа $n_1 < n_2 < \dots$ такі, що $|l_{n_k}(x)| > k$ при $x \in B[x_k;r_k]$. За теоремою Кантора, існує точка $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Звідси випливає, що $|l_{n_k}(x^*)| > k$ при всіх k – суперечність! Бо послідовність $(l_{n_k}(x^*))_{k=1}^{\infty}$ мала б бути обмеженою за початковими умовами.
Висновок: існує шар $B[a;r]$, де множина $\{l_n(x), x \in B[a;r]\}$ обмежена. Тобто $\exists c' > 0 : \forall x \in B[a;r], \forall n \in \mathbb{N} : |l_n(x)| \leq c'$. Досить буде довести, що множина $\{l_n(x), x \in B[0;1]\}$ обмежена. Для кожного $x \in B[0;1]$ покладемо $x' = rx + a$, тоді $x = \dfrac{1}{r}(x' - a)$. Оскільки $x' \in B[a;r]$, то $|l_n(x')| < c'$.
Звідси
$|l_n(x)| = \left| l_n\left(\dfrac{1}{r}(x'-a)\right)\right| = \dfrac{1}{r}|l_n(x') - l_n(a)| \leq \dfrac{1}{r}(|l_n(x')| + |l_n(a)|) \leq \dfrac{c' + c_a}{r} = c.$
Висновок: $\exists c > 0 : \forall x \in B[0;1], \forall n \geq 1 : |l_n(x)| \leq c$. Проте умова $x \in B[0;1]$ означає, що $\|x\| \leq 1$. Тобто нерівність $|l_n(x)| \leq c$ для всіх $\|x\| \leq 1$. Зокрема звідси $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} |l_n(x)| = \|l_n\| \leq c$. ■

Remark 2.6.6 Пояснення (?). Якби для кожного околу $B(x_1, r)$ (зокрема при $r = \dfrac{1}{n}$) існувала точка, де нерівність порушується, то ми би побудували послідовність, що прямує до x_1, при цьому ми би отримали $|l_{n_1}(x)| \leq 1$.

Remark 2.6.7 У теоремі Банаха-Штайнгауза умова того, що E – банахів, – суттєва.
Зокрема розглянемо простір c_0 – послідовності, що збігаються до нуля. Далі розглянемо підпростір $c_{00} \subset c_0$ – послідовності, де всі члени нулі, починаючи з деякого номера.

2.7 Про види збіжностей

Ми вже знаємо один тип збіжностей. Переформулюю ще раз означення, але доповню це одним словом в дужках.

Definition 2.7.1 Задано E – лінійний нормований простір.
Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ називається **(сильно) збіжною** до $x \in E$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$$

Позначення: $x_n \to x$.
Тобто сильна збіжність – це збіжність за нормою.

Definition 2.7.2 Нехай E – лінійний нормований простір.
Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ називається **слабко збіжною** до $x \in E$, якщо

$$\forall l \in E' : l(x_n) \to l(x)$$

Позначення: $x_n \overset{w}{\to} x$.

Proposition 2.7.3 Задано E – лінійний нормований простір та послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Тоді:
$x_n \to x \implies x_n \overset{w}{\to} x$.

Proof.
Дійсно, нехай $x_n \to x$, тобто звідси $\|x - x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Маючи це, отримаємо $\forall l \in E'$:
$|l(x_n) - l(x)| = |l(x_n - x)| \leq \|l\| \|x_n - x\| \to 0$. Таким чином, $x_n \overset{w}{\to} x$. ■

Якщо розглядати спряжений простір E', то крім сильної та слабкої збіжності існує ще один тип.

Definition 2.7.4 Нехай E – лінійний нормований простір.
Послідовність функціоналів $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$ називається **слабко* збіжною** до $l \in E'$, якщо

$$\forall x \in E : l_n(x) \to l(x)$$

Позначення: $l_n \overset{w^*}{\to} l$.

Proposition 2.7.5 Задано E – лінійний нормований простір та послідовність $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$. Тоді:
$l_n \to l \implies l_n \overset{w}{\to} l \implies l_n \overset{w^*}{\to} l$.

Proof.
Імплікація $l_n \to l \implies l_n \overset{w}{\to} l$ була доведена вище. Залишилося $l_n \overset{w}{\to} l \implies l_n \overset{w^*}{\to} l$.
Нехай $l_n \overset{w}{\to} l$, тобто $\forall L \in E'' : L(l_n) \to L(l)$. Зафіксуємо елемент $x \in E$. Ми вже доводили, що $E \subset E''$, тобто $x \in E''$, де в цьому випадку $x = L_x$ такий, що $L_x(l) = l(x)$. Звідси
$l_n(x) = L_x(l_n) \to L_x(l) = l(x)$. Звідси випливає, що $l_n \overset{w^*}{\to} l$. ■

Example 2.7.6 Зараз покажемо, чому в зворотний бік не працює.

$x_n \overset{w}{\to} x \not\Longrightarrow x_n \to x$.
Розглянемо простір l_p та зафіксуємо послідовність $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, де кожний e_j – елемент базиса Шаудера.
Спочатку покажемо, що $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ слабко збігається. Зафіксуємо довільний функціонал $l \in (l_p)' = l_{p'}$, тобто $l = (l_1, l_2, \dots)$. Це означає, що $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |l_j|^{p'} < +\infty$, а тому за необхідною умовою, $|l_j|^{p'} \to 0 \implies l_j \to 0$. Із іншого боку, ми вже знаємо, що $l_j = l(e_j) \to 0 = l(0)$ при $j \to \infty$. Це як раз свідчить про те, що $e_j \overset{w}{\to} 0$.
Проте зауважимо, що $\|e_j - 0\| = \|e_j\| = 1 \not\to 0$. Це як раз означає, що $e_j \not\to 0$.

$f_n \overset{w^*}{\to} f \not\Longrightarrow f_n \overset{w}{\to} f$.
Розглянемо простір l_1 та зафіксуємо послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n =?$. Спочатку покажемо, що $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ слабко* збігається. Зафіксуємо довільний елемент $x \in c_0$. Значить, $x_j \to 0$ при $j \to \infty$. Оберемо $f_n = (-1)^n$. Тоді звідси $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k f_n^k(e_k)$. (TODO: не можу добити)

Proposition 2.7.7 Утім якщо E – рефлексивний лінійний нормований простір та $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$, тоді $l_n \overset{w}{\to} l \iff l_n \overset{w^*}{\to} l$.

Remark 2.7.8 Границя єдина за слабкою* збіжністю, слабкою збіжністю та сильною збіжністю.

Proposition 2.7.9 Задано E – банахів та послідовність $(l_n)_{n=1}^{\infty}$, яка слабко* збігається. Тоді $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ – обмежена.

Proof.
Дійсно, маємо $\forall x \in E : l_n(x) \to l(x)$, тобто числова послідовність $(l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ збігається, тоді обмежена. Значить, за теоремою Банаха-Штайнгауза, послідовність $(\|l_n\|)_{n=1}^{\infty}$ обмежена. ■

Theorem 2.7.10 Задано E – банахів простір та $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$ – така послідовність, що $\forall x \in E$: $(l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна. Тоді $\exists l \in E' : l_n \overset{w^*}{\to} l$.

Proof.
Оскільки $\forall x \in E : (l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, то (як числова послідовність) вона збіжна. Визначимо функціонал $l(x) = \lim\limits_{n\to\infty} l_n(x)$. Зважаючи на той факт, що l_n – лінійний, то l – лінійний в силу граничного переходу. Залишилося довести обмеженість.
При кожному $x \in E$ послідовність $(l_n(x))_{n=1}^{\infty}$ (вже з'ясували) збіжна, тож обмежена. Але за теоремою Банаха-Штайнгауза, $\exists c > 0 : \forall n \geq 1 : \|l_n\| \leq c$. Значить, $\forall n \geq 1, \forall x \in E : |l_n(x)| \leq \|l\|\|x\| \leq c\|x\|$. Знову переходячи до границі, отримаємо $|l(x)| \leq c\|x\|$.
Отже, $\forall x \in E : l_n(x) \to l(x) \implies l_n \overset{w^*}{\to} l$. ■

Theorem 2.7.11 Критерій слабкої* збіжності
Задано E – банахів та множина M – скрізь щільна в E. Нехай $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$.
$l_n \overset{w^*}{\to} l \iff \begin{cases} \forall x \in M : l_n(x) \to l(x) \\ \exists c > 0 : \forall n \geq 1 : \|l_n\| \leq c \end{cases}$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: $l_n \overset{w^*}{\to} l$. Тобто $\forall x \in E : l_n(x) \to l(x)$, зокрема $\forall x \in M$. Обмеженість норм $\|l_n\|$ автоматично виконується.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: ці дві умови. Ми хочемо $\forall y \in E : l_n(y) \to l(y)$.
При $x \in M$ маємо наступне:
$|l_n(y) - l(y)| \leq |l_n(y) - l_n(x)| + |l_n(x) - l(x)| + |l(x) - l(y)| \leq \|l_n\|\|y - x\| + |l_n(x) - l(x)| + \|l\|\|x - y\| \leq$
$\leq (c + \|l\|)\|x - y\| + |l_n(x) - l(x)|$.
Проте $\mathrm{Cl}(M) = E$, тож звідси $\forall y \in E : \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in M : \|x - y\| < \dfrac{\varepsilon}{2(c + \|l\|)}$. В силу першої умови, $\exists N : \forall n > N : |l_n(x) - l(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Значить, $|l_n(y) - l(y)| < \varepsilon$. ■

Remark 2.7.12 Судячи з доведення, в $\boxed{\Leftarrow}$ не обов'язково вимагати бути E повним. Також в формулюванні теореми досить вимагати, щоб M була тотальною в E.

3 Гілбертові простори

3.1 Основні означення

Definition 3.1.1 Передгілбертовим простором називають лінійний простір H над $\mathbb{C}$, на якому задано білінійний функціонал $(\cdot,\cdot)\colon H \times H \to \mathbb{C}$, для якого виконуються такі властивості:

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall x \in H : (x,x) \geq 0 \\ 2) & (x,x) = 0 \iff x = 0 \\ 3) & \forall x,y \in H : (x,y) = \overline{(y,x)} \end{array}$$

Такий функціонал називають **скалярним добутком**. Якщо прибрати умову $(x,x) = 0 \iff x = 0$, то тоді такий функціонал ще називають **квазіскалярним добутком**.

Theorem 3.1.2 Нерівність Коші-Буняковського
Задано H – передгілбертів простір. Тоді $\forall x,y \in E : |(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$.
Було доведено, див. pdf з лінійної алгебри. Щоправда, там в умові теореми вимагалася скінченність векторного простору, але під час доведення це ми не використовували.

Remark 3.1.3 Нерівність Коші-Буняковсього справедлива й для квазіскалярного добутку.

Remark 3.1.4 $\|(x,y)\|^2 = (x,x)(y,y) \iff y = \alpha x$ при $\alpha \in \mathbb{C}$.

Proposition 3.1.5 Задано H – передгілбертів простір. Тоді H – лінійний нормований простір, причому норма задається як $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Remark 3.1.6 Якби був квазіскалярний добуток, то ми би задали вже лише напівнорму.

Proof.
1) $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \geq 0$ – зрозуміло. Також $\|x\| = \sqrt{(x,x)} = 0 \iff (x,x) = 0 \iff x = 0$.
2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}(x,x)} = \sqrt{\lambda^2(x,x)} = |\lambda|\|x\|$.
3) $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2 \leq$
$\leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \overset{\text{нер-ть К-Б}}{\leq} \|x\|^2 + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.
$\implies \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ■

Definition 3.1.7 Нехай H – банахів передгілбертів простір.
Тоді даний простір H ще називають **гілбертовим**.

Proposition 3.1.8 Задано H – передгілбертів простір. Тоді $(\cdot,\cdot)\colon H \times H \to \mathbb{R}$ – неперервне.

Proof.
Дійсно, нехай $x_n \to x_0$ та $y_n \to y_0$. Вони будуть збігатися за нормою (у нас H – нормований), тобто $(\|x_n\|), (\|y_n\|)$ – збіжні послідовності, тому обмежені. Тоді
$|(x_n,y_n) - (x_0,y_0)| \leq |(x_n,y_n) - (x_0,y_n)| + |(x_0,y_n) - (x_0,y_0)| = |(x_n - x_0, y_n)| + |(x_0, y_n - y_0)| \leq$
$\leq \|x_n - x_0\|\|y_n\| + \|x_0\|\|y_n - y_0\| \leq \|x_n - x_0\|M + \|x_0\|\|y_n - y_0\| \to 0$ (число M обмежує $(\|y_n\|)$).
Отже, $(x,y) \to (x_0,y_0)$ при $x \to x_0, y \to y_0$. ■

3.2 Факторизація квазіскалярного добутку

Задано H – векторний простір зі квазіскалярним добутком $(\cdot,\cdot)$. Позначимо $L = \{x \in E : (x,x) = 0\}$.

Lemma 3.2.1 $\forall x \in L, \forall y \in E : (x,y) = 0$.
Випливає з нерівності Коші-Буняковсього.

Lemma 3.2.2 L – підпростір векторного простору E.

Як було в лінійній алгебрі, встановимо відношення еквівалентності $x \sim y \iff x - y \in L$ на векторному просторі E. Ми вже знаємо, що $E/_L$ буде векторним простором, де задаються операції так:
$(x_1 + L) + (x_2 + L) = (x_1 + x_2) + L$;
$\lambda(x + L) = \lambda x + L$.
Тепер уведемо білінійний функціонал ось таким чином: $(x_1 + L, x_2 + L)_{E/_L} \overset{\text{def.}}{=} (x_1, x_2)_E$. Доведемо, що це буде задавати скалярний добуток на $E/_L$.

Спочатку доведемо коректність означення. Дійсно, нехай $x_1 + L = y_1 + L$ та $x_2 + L = y_2 + L$. Тоді звідси $x_1 - y_1 \in L$ та $x_2 - y_2 \in L$. Зауважимо, що
$(x_1, x_2)_E - (y_1, y_2)_E = (x_1, x_2)_E - (y_1, x_2)_E + (y_1, x_2)_E - (y_1, y_2)_E = (x_1 - y_1, x_2)_E + (y_1, x_2 - y_2)_E = 0$.
Отже, $(x_1, x_2)_E = (y_1, y_2)_E \implies (x_1 + L, x_2 + L)_{E/_L} = (y_1 + L, y_2 + L)_{E/_L}$.
Щодо властивостей скалярного добутку. Це вже точно квазіскалярний. Тобто залишилося довести, що $(x + L, x + L)_{E/_L} = 0 \iff x + L = L$.
$(x + L, x + L)_{E/_L} = 0 \implies (x, x)_E = 0 \implies x \in L \implies x + L = L$.

3.3 Ортогональне доповнення

Definition 3.3.1 Задано H – гілбертів простір.
Вектори $x, y \in H$ будуть називатися **ортогональними**, якщо

$$(x, y) = 0$$

Позначення: $x \perp y$.

Definition 3.3.2 Задано H – гілбертів простір та $G \subset H$.
Ортогональним доповненням підмножини G називають таку множину:

$$G^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in G : (x, y) = 0\}$$

Proposition 3.3.3 Задано H – гілбертів простір та $G \subset H$. Тоді $G^\perp$ – підпростір.

Proof.
Нехай $x_1, x_2 \in G^\perp$, тобто звідси $\forall y \in G : (x_1, y) = 0,\ (x_2, y) = 0$. Звідси випливає, що $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y) = 0$, а тому отримали $\lambda_1 x_1 + \lambda x_2 \in G^\perp$. ■

Уже якось доводилося, що в унітарних просторах E та підпросторі $L \subset E$ кожний вектор розбивається на суму проєктивного та ортогонального вектора. Спробуємо показати, що це можливо також в гілбертових просторах. Це робиться окремо, бо там ми доводили для скінченновимірного випадку.

Theorem 3.3.4 Нехай H – гілбертів простір та $G \subset H$. Тоді для кожного $x \in H$ існує єдиний $y \in G$ такий, що $x - y \in G^\perp$.

Proof.
I. *Існування.*
Якщо $x \in G$, то кладемо вектор $y = x$.
Нехай $x \in H \setminus G$. Визначимо відстань $d = \rho(x, G) \overset{\text{def.}}{=} \inf\limits_{y \in G} \|x - y\|$. Оскільки $x \notin G$, то звідси $d > 0$.
Відокремимо послідовність $(y_n)_{n=1}^\infty$ таку, що $d_n \overset{\text{позн}}{=} \|x - y_n\| \to d$.
Для кожного вектора $h \in G$ та скаляра $\lambda \in \mathbb{C}$ ми розглянемо вектор $y_n + \lambda h \in G$. Зрозуміло, що $\|x - (y_n + \lambda h)\| \geq d$, але спробуємо ще оцінити дану норму.
$\|x - (y_n + \lambda h)\|^2 = (x - y_n - \lambda h, x - y_n - \lambda h) = (x - y_n, x - y_n) + (x - y_n, -\lambda h) + (-\lambda h, x - y_n) + (-\lambda h, -\lambda h) = \|x - y_n\|^2 + |\lambda|^2 \|h\|^2 - \lambda (h, x - y_n) - \bar{\lambda} (x - y_n, h)$.
Ми оберемо $\lambda = \dfrac{(x - y_n, h)}{\|h\|^2}$. Тоді отримаємо:
$\|x - (y_n + \lambda h)\|^2 = \dfrac{(x - y_n, h)^2}{\|h\|^2} - \dfrac{(h, x - y_n)(x - y_n, h)}{\|h\|^2} - \dfrac{(h, x - y_n)(x - y_n, h)}{\|h\|^2} + \|x - y_n\|^2 =$
$= d_n^2 - \dfrac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2}$.
Таким чином, отримали $d_n^2 - \dfrac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2} \geq d^2$. Внаслідок чого $|(x - y_n, h)|^2 \leq \|h\|^2 (d_n^2 - d^2)$.
Далі, $|(y_m - y_n, h)| = |(x - y_n, h) - (x - y_m, h)| \leq |(x - y_n, h)| + |(x - y_m, h)| \leq \|h\| \sqrt{d_n^2 - d^2} \sqrt{d_m^2 - d^2}$.
Оберемо вектор $h = y_m - y_n$, тоді отримаємо наступне:
$\|y_m - y_n\|^2 \leq \|y_m - y_n\| \sqrt{d_n^2 - d^2} \sqrt{d_m^2 - d^2}$.
$\|y_m - y_n\| \leq \sqrt{d_n^2 - d^2} \sqrt{d_m^2 - d^2} \to 0$.
Таким чином, послідовність $(y_n)_{n=1}^\infty$ фундаментальна, а в силу повноти збіжна. Тобто $y_n \to y \in G$.
Маючи нерівність $|(x - y_n, h)|^2 \leq \|h\|^2 (d_n^2 - d^2)$, при $n \to \infty$ отримаємо $(x - y, h) = 0$ для всіх $h \in G$.
Це означає, що $x - y \in G^\perp$.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що існує ще один вектор $y' \in G$ так, щоб $x - y' \in G^{\perp}$. Тоді
$(y - y', h) = (x - y', h) - (x - y, h) = 0, \forall h \in H \implies y = y'$ – суперечність! $\blacksquare$

Отже, нехай $x \in H$. За щойно доведеною теоремою, $\exists! x_1 \in H$ такий, що $x_2 \overset{\text{позн.}}{=} x - x_1 \in G^{\perp}$. Власне, ми отримали однозначний розклад $x = x_1 + x_2$, де вектори $x_1 \in G, x_2 \in G^{\perp}$.
Перший вектор називається **ортогональною проєкцією**, позначають $x_1 = \mathrm{pr}_G\, x$.
Другий вектор називається **ортогональним складником**, позначають $x_2 = \mathrm{ort}_G\, x$.
Отже, кожний вектор $x \in H$ має єдиний розклад в $x = \mathrm{pr}_G\, x + \mathrm{ort}_G\, x$.

3.4 Простір, спряжений до гілбертого

Theorem 3.4.1 Теорема Ріса
Нехай H – гілбертів. Тоді для будь-якого $l \in H'$ існує єдиний вектор $u \in H$ такий, що $\forall x \in H$: $l(x) = (x, u)$.

Proof.
I. *Існування.*
Якщо $l \equiv 0$, то існує вектор $u = 0$ – все ясно.
Нехай $l \in H'$, де функціонал ненулевий. Розглянемо $G = \ker l$. Існує елемент $y \notin G$ такий, що $\forall x \in H : x = g + \lambda y$ (це виконано за **Prp. 2.4.6**). Можна переписати елемент $x = g' + \lambda(y - \mathrm{pr}_G\, y)$.
Візьмемо вектор $e = y - \mathrm{pr}_G\, y$. Звідси $e \in G^{\perp}$. Отже, маємо $x = g' + \lambda e$, де можна вважати $\|e\| = 1$.
Тоді розпишемо функціонал та скалярний добуток:
$l(x) = l(g' + \lambda e) = 0 + \lambda l(e)$ (у нас дійсно $g' \in G = \ker l$, бо $g' = g + \lambda\, \mathrm{pr}_G\, y$).
$(x, e) = (g' + \lambda e, e) = \lambda \|e\|^2 = \lambda$.
$l(x) = l(e)(x, e) = (x, \overline{l(e)} e) \implies u = \overline{l(e)} e$.
Отриманий елемент $u = \overline{l(e)} e$ – шуканий вектор, що задовольняє рівності $l(x) = (x, u)$.

II. *Єдиність.*
!Припустимо, що існує ще один вектор $u' \in H$, для якого $l(x) = (x, u')$. Звідси випливає, що $\forall x \in H : (x, u - u') = 0 \implies u = u'$ – суперечність! $\blacksquare$

Corollary 3.4.2 $H' = H$.
При цьому коли $H \ni u \leftrightarrow l \in H'$ ми маємо $\|u\| = \|l\|$.

Proof.
Якщо $l \in H'$, то за теоремою Ріса йому ставиться в відповідність єдиний $u \in H$, де $l(x) = (x, u)$.
Для кожного $u \in H$ розглянемо $l(x) = (x, u)$. Зрозуміло, що це лінійний функціонал, а обмеженість випливає з нерівності Коші-Буняковського $|l(x)| = |(x, u)| \leq \|x\| \|u\|$. У силу обмеженості ми маємо $\|l\| \leq \|u\|$. При $x = u$ маємо $l(u) = (u, u) = \|u\|^2$, тобто $\|l\| = \|u\|$. $\blacksquare$

Corollary 3.4.3 Нехай H – гілбертів простір та $G \subset H$.
G – тотальна в $H \iff \forall h \in H : h \perp G \implies h = 0$.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: G – тотально в H. Нехай $h \in H$ такий, що $h \perp G$. Звідси випливає, що $\forall y \in G : (h, y) = 0$.
Зафіксуємо функціонал $l(y) = \overline{(h, y)}$. Тоді маємо $\forall y \in G : l(y) = 0 \implies \forall y \in H : l(y) = 0$, тобто звідси $\forall y \in H : (h, y) = 0$. Значить, обов'язково $h = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall h \in H : h \perp G \implies h = 0$.
Нехай l – лінійний та неперервний функціонал такий, що $\forall y \in G : l(y) = 0$. За теоремою Ріса, даний функціонал $l(y) = (y, u)$ при деякому $u \in H$. Але $\forall y \in G : (y, u) = 0$, тобто звідси $u \perp G \implies u = 0$.
Значить, $\forall y \in H : l(y) = (y, 0) = 0$. Отже, G – тотальна в H. $\blacksquare$

Proposition 3.4.4 Задано H – гілбертів простір та $G \subset H$. Тоді $(G^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{span}(G)}$.
Зокрема якщо G – підпростір H, то $(G^{\perp})^{\perp} = G$.

Proof.
Спочатку треба довести, що $G \subset (G^{\perp})^{\perp}$, але тут (в принципі) ясно.
Нехай $h \in (G^{\perp})^{\perp}$ такий, що $h \perp G$. Тобто $h \in G^{\perp}$. Але тоді звідси $(h, h) = 0 \implies h = 0$. Отже, G – тотальна в $(G^{\perp})^{\perp}$. $\blacksquare$

3.5 Ортонормовані системи та базиси

Definition 3.5.1 Система $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ називається **ортонормованою**, якщо

$$(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta},$$

де δ – дельта-символ Кронекера.

Example 3.5.2 У просторі l_2 система, що є базисом Шаудера, – ортонормована.

Lemma 3.5.3 Нехай $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ – ортонормована система.
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ – збіжний ряд $\iff \sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$.

Proof.
$\left\| \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i e_i \right\| = \left\| \sum\limits_{i=m+1}^{n} c_i e_i \right\| = \left(\sum\limits_{i=m+1}^{n} c_i e_i, \sum\limits_{k=m+1}^{n} c_k e_k \right) = \sum\limits_{i=m+1}^{n} \sum\limits_{k=m+1}^{n} c_i \overline{c_k} (e_i, e_k) = \sum\limits_{i=m+1}^{n} |c_i|^2.$
Це ми припускали всюди, що $n > m$. ■

Theorem 3.5.4 Нерівність Бесселя

Нехай $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ – ортонормована система. Тоді $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$ збігається, причому $\|x\|^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2$.

Remark 3.5.5 До речі, коефіцієнти (x, e_i) називаються **коефіцієнтами Фур'є**. По сути, ми зробили розклад Фур'є в загального випадку та отримали додатково нерівність Бесселя.

Proof.
$0 \leq \left\| x - \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right\|^2 = \left(x - \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i,\ x - \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right) =$
$= (x, x) - \left(x, \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i, x \right) + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i, \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right) =$
$= \|x\|^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{(x, e_i)} (x, e_i) - \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i)(e_i, x) + \sum\limits_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2.$
Отже, $\|x\|^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2$. До того, ж за лемою, оскільки цей ряд збіжний за цією нерівністю, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$ збіжний при всіх $x \in H$. ■

3.6 Ортнормовані базиси

Lemma 3.6.1 Нехай $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ – ортонормована система та $G = \overline{\operatorname{span}\{e_i, i = 1, 2, \dots\}} \subset H$. Тоді $\forall x \in H : \operatorname{pr}_G x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$.

Proof.
Ми хочемо довести, що $\forall x \in H : x - \sum\limits_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i \in G^\perp$. Таким чином, у силу єдиності, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i \in G^\perp = \operatorname{pr}_G x$. Але за тим, чому дорівнює простір G, нам буде досить довести це лише для всіх e_i (TODO: ?).
$\left(x, \sum\limits_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i,\ e_k \right) = (x, e_k) - \sum\limits_{i=1}^{\infty} (x, x_i)(e_i, e_k) = (x, e_k) - (x, e_k) = 0.$ ■

Definition 3.6.2 Система $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ називається **ортонормованим базисом**, якщо

$$(e_i)_{i=1}^{\infty} \text{ – ортонормована система}$$
$$\overline{\operatorname{span}\{e_i, i = 1, 2, \dots\}} = H$$

Оскільки $\mathrm{pr}_H x = x$, то звідси $\forall x \in H$ маємо розклад $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x, e_i)x_i$.

Також для будь-якого $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(y, e_i)e_i$ скалярний добуток $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x, e_i)\overline{(y, e_i)}$.

Ба більше, $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\|(x, e_i\|^2$ – так звана **рівність Парсеваля**.

Theorem 3.6.3 Нехай $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ – ортонормована система.
$(e_i)_{i=1}^{\infty}$ – ортонормований базис $\iff$ $\forall x \in H$ спраедлива рівність Парсеваля.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *Щойно довели.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\|(x, e_i)\|^2$. При доведенні нерівності Бесселя ми отримали рівність $\left\|x - \sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{j=1}^{n}\|(x, e_i)\|^2$. Отже, при $n \to \infty$ отримаємо $\sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i \to x$. Отже, $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ – ортонормований базис. ■

3.7 Ортогоналізація системи векторів

Theorem 3.7.1 Нехай $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ – деяка система векторів та $G = \overline{\mathrm{span}\{f_j\}}$. Тоді існує ортонормована система $(e_j)_{j=1}^{n(\infty)}$ (яка може бути скінченною чи зліченною) така, що $\overline{\mathrm{span}\{e_j\}} = G$.

Proof.
Візьмемо $e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|}$. Він породжує $G_1 = \overline{\mathrm{span}\{e_1\}} = \mathrm{span}\{e_1\}$. Якщо $G_1 = G$, то теорема доведена.
Інакше виберемо перший вектор із послідовності (f_j) (оберемо f_{j_2} такий, що $f_{j_2} \notin G_1$. Візьмемо $e_2 = \dfrac{\mathrm{ort}_{G_1} f_{j_2}}{\|\mathrm{ort}_{G_1} f_{j_2}\|}$, при цьому $e_2 \perp e_1$. (TODO: тверезо обдумати). Беремо $G_2 = \overline{\mathrm{span}\{e_1, e_2\}} = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$. Якщо $G_2 = G_1$, то теорема доведена.
Інакше виберемо перший вектор із послідовності (f_j) (оберемо f_{j_3} такий, що $f_{j_3} \notin G_2$.
$\vdots$ ■

Corollary 3.7.2 Нехай H – сепарабельний. Тоді існує скінченний (або зліченний) ортонормований базис.

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Дано: H – сепарабельний. Нехай (f_j) – щільна множина в H. Застосуємо ортогоналізацію. Тоді існує ортонормований базис (e_j).

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: існує скінченний чи зліченний ортонормований базис. Тоді H автоматично сепарабельний. Треба розглянути сукупність векторів $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i e_i,\ e_i \in \mathbb{Q}$. ■

Theorem 3.7.3 Нехай H – сепарабельний, нескінченновимірний гілбертовий простір. Тоді $H \cong l_2$. (ну якщо скінченний, то $H \cong \mathbb{C}^n$))

Proof.
Маємо H – сепарабельний, тобто існує зліченний ортонормований базис (e_j). Задамо ізоморфізм $H \ni x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i e_i \mapsto (x_1, x_2, \dots) \in l_2$. Остання послідовність справді лежить в l_2, завдяки рівності Парсеваля. При цьому $(x, y)_H = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} = (x, y)_{l_2}$. (TODO: деталізувати). ■

Твердження, які потім вставлю в необхідне місце

Proof.
Достатньо довести, що всі норми еквівалентні до $\|\cdot\|_2$.

Нехай $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d\}$ – стандартний базис $\mathbb{R}^d$, тоді звідси $\vec{x} = \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{e}_i$.

$\left\| \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{e}_i \right\| \le \sum_{i=1}^{d} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \|e_i\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{d} |x_i| \|\vec{e}_i\| \right)^2} \overset{\text{К-Б}}{\le} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \|e_i\|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \|e_i\|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \|e_i\|^2} \|\vec{x}\|_2 = M\|\vec{x}\|_2$.

Зауважимо, що $M \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ та не залежить від $\vec{x}$. Отже, $\|\vec{x}\| \le M\|\vec{x}\|_2$.

Розглянемо тепер S – одинична сфера на $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. Відомо, що S – замкнена множина та обмежена. Тож за лемою Гейне-Бореля, S – компактна множина. Відомо, що відображення $\|\cdot\| \colon S \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ – неперервне відображення, тож вона досягає найменшого значення m для деякого $\vec{y} \in S$.
Припустимо $m = 0$, тоді звідси $\|\vec{y}\| = 0 \implies \vec{y} = \vec{0} \implies \vec{y} \notin S$ – неможливо. Отже, $m > 0$.
Значить, $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^d : \|\vec{y}\|_2 = 1 : \|y\| \ge m$. Треба довести те саме для інших векторів.
Якщо $\vec{x} = \vec{0}$, то це виконано. Тому $\vec{x} \ne \vec{0}$. Покладемо вектор $\vec{y} = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2}$, причому $\|\vec{y}\|_2 = 1$. Із цього випливає, що $\|\vec{y}\|_2 \le m \implies m\|\vec{x}\|_2 \le \|\vec{x}\|$.

Всі інші норми будуть еквівалентними в силу транзитивності. ■

Definition 3.7.4 Задано X, Y – нормовані простори.
Вони називаються **ізоморфними**, якщо існує бієктивний лінійний оператор $A \colon X \to Y$, для якого

$$\forall x \in X : \|Ax\|_Y = \|x\|_X$$

Водночас такий оператор A називають **ізоморфізмом**.
Позначення: $X \cong Y$