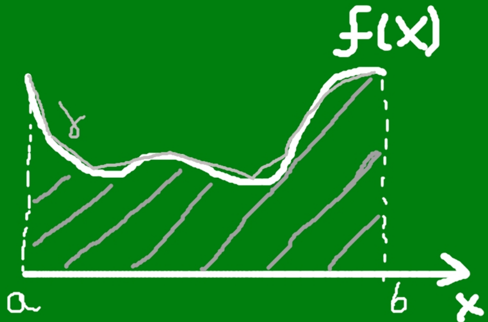
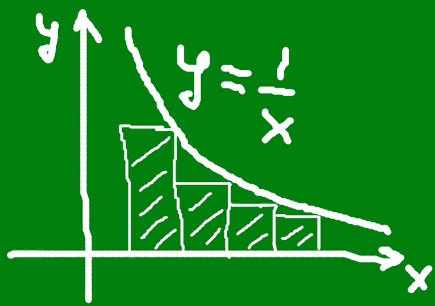
Real analysis II



$$S=\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$



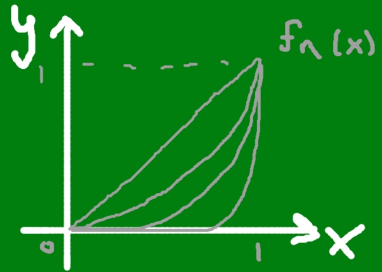
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

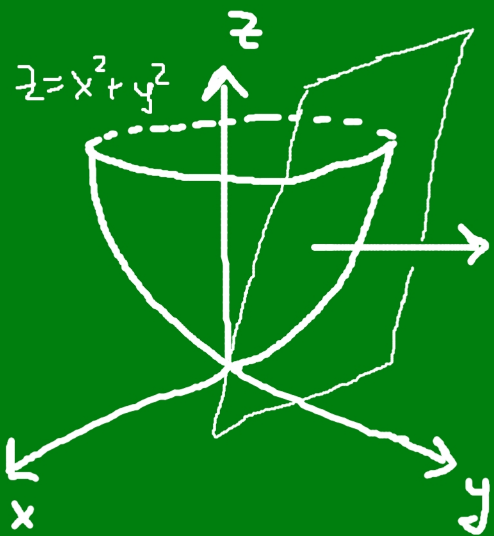
$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\dots=-\ln 2$$

$$-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\dots=-\frac{3}{2}\ln 2$$

$$\{f_n(x)=x^n,\ n\geq 1\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\frac{1}{1-x}$$





$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

Зміст

1 Інтеграли з параметром

1.1 Основні означення та властивості

Definition 1.1.1 Задана функція $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, така, що $\forall y\in[c,d]: f\in\mathcal{R}([a,b])$.
Інтегралом з параметром називають таку функцію $J\colon [c,d]\to\mathbb{R}$:

$$J(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

Remark 1.1.2 Зауважимо, що якщо додатково вимагати $f\in C([a,b]\times[c,d])$, то отримаємо $\forall y\in[c,d]: f\in C([a,b])$. Таким чином, $\forall y\in[c,d]: f\in\mathcal{R}([a,b])$, а тому функція $J(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ буде визначеною коректно.

Proposition 1.1.3 Про неперервність інтеграла з параметром
Задана функція $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, така, що $f\in C([a,b]\times[c,d])$. Тоді $J\in C([c,d])$.

Proof.
$f(x,y)\in C([a,b]\times[c,d]) \implies f(x,y)\in C_{\mathrm{unif}}([a,b]\times[c,d]) \implies$
$\forall\varepsilon>0:\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in[a,b]\times[c,d]:$
$\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta\Rightarrow|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Тоді $|J(y_1)-J(y_2)|=\left|\displaystyle\int_a^b f(x,y_1)\,dx-\int_a^b f(x,y_2)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\boxed{<}$
Якщо я оберу $(x,y_1),(x,y_2)$ так, що $\|(x,y_1)-(x,y_2)\|=\sqrt{(y_1-y_2)^2}=|y_1-y_2|<\delta$, то тоді $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
$\boxed{<}\displaystyle\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon$.
Збираючи пазл, отримаємо $J\in C_{\mathrm{unif}}([c,d]) \implies J\in C([c,d])$. ■

Proposition 1.1.4 Про диференційованість інтеграла з параметром
Задана функція $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, така, що $f\in C([a,b]\times[c,d])$. Відомо, що $\exists\dfrac{\partial f}{\partial y}\in C([a,b]\times[c,d])$.
Тоді J – диференційована на $[c,d]$, причому $J'(y)=\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.

Proof.
Диференційованість означає існування похідної, тобто необхідно довести її існування.
$\dfrac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y}=\dfrac{1}{\Delta y}\displaystyle\int_a^b f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\,dx\boxed{=}$
Згадаємо Ньютона-Ляйбніца та властивості інтеграла, розпишемо підінтегральний вираз ось так:
$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\displaystyle\int_y^{y+\Delta y}f'_y(x,t)\,dt=\int_y^{y+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt$
$\boxed{=}\dfrac{1}{\Delta y}\displaystyle\int_a^b\left(\int_y^{y+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right)dx$
Тепер зафіксуємо точку y_0 та розпишемо праву частину рівності, що ми доводимо:
$\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx=\int_a^b\frac{1}{\Delta y}\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt\right)dx=\frac{1}{\Delta y}\int_a^b\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt\right)dx$
Ну а тепер час доводити існування похідної:
$\left|\dfrac{J(y_0+\Delta y)-J(y_0)}{\Delta y}-\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dx\right|=\left|\frac{1}{\Delta y}\int_a^b\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right)dx-\frac{1}{\Delta y}\int_a^b\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt\right)dx\right|=$
$=\left|\dfrac{1}{\Delta y}\displaystyle\int_a^b\left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,dt\right)dx\right|\boxed{<}$
За умовою твердження, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\in C([a,b]\times[c,d]) \implies \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\in C_{\mathrm{unif}}([a,b]\times[c,d]) \implies$
$\forall\varepsilon>0:\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall(x,t),(x,y_0)\in[a,b]\times[c,d]:\|(x,t)-(x,y_0)\|<\delta\Rightarrow\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$

$\boxed{<} \int_a^b \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{1}{\Delta y} \frac{\varepsilon}{b-a} \, dt \, dx = \varepsilon$

Збираємо пазл – отримаємо, що: $\forall y_0 \in [c,d] : \exists \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{J(y_0+\Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \, dx = J'(y_0)$.
Отже, J – диференційована на $[c,d]$. ■

Proposition 1.1.5 Про інтегрованість інтеграла з параметром
Задана функція $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a,b] \times [c,d])$. Тоді $J \in \mathcal{R}([c,d])$, причому $\displaystyle\int_c^d \underbrace{\int_a^b f(x,y) \, dx}_{=J(y)} \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \, dy \, dx$.

Proof.
Розглянемо дві функції: $h(t) = \displaystyle\int_c^t \int_a^b f(x,y) \, dx \, dy \qquad g(t) = \int_a^b \int_c^t f(x,y) \, dy \, dx$.
У нашому випадку $t \in [c,d]$. Якщо $t = c$, то маємо $h(c) = g(c) = 0$. Ми хочемо зараз довести, що $g'(t) = h'(t)$, і тоді за наслідком теореми Лагранжа, $h(t) = g(t) + C$. Підставивши $t = c$, отримаємо $C = 0$, тому $h(t) = g(t)$, зокрема $h(d) = g(d)$ – бажана рівність.

Доведемо те, що хочемо. Зробимо позначення: $h(t) = \displaystyle\int_c^t J(y) \, dy, \qquad g(t) = \int_a^b F(x,t) \, dx$. У цьому випадку $F(x,t) = \displaystyle\int_c^t f(x,y) \, dy$
Перший – це інтеграл від верхньої межі, тому $h'(t) = J(t)$.
Покажемо, що другий інтеграл задовольняє умові **Prp. 1.1.4**, тоді можемо знайти похідну.
Спочатку доведемо, що підінтегральна функція $F \in C([a,b] \times [c,d])$ (нижче припускаю $t > t_0$).
$|F(x,t) - F(x_0,t_0)| = \left| \displaystyle\int_c^t f(x,y) \, dy - \int_c^{t_0} f(x_0,y) \, dy \right| = \left| \int_c^t f(x,y) - f(x_0,y) \, dy - \int_{t_0}^t f(x_0,y) \, dy \right| \leq$
$\leq \displaystyle\int_c^t |f(x,y) - f(x_0,y)| \, dy + \int_{t_0}^t |f(x_0,y)| \, dy$.
Оскільки $f \in C([a,b] \times [c,d])$, то вона обмежена, тож $\exists M > 0 : \forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d] : |f(x,y)| \leq M$.
Оберемо $\varepsilon > 0$. Оскільки $f \in C([a,b] \times [c,d])$, то $\exists \delta > 0 : \forall (x,y) : \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \implies |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$. Зокрема оберемо $y_0 = y$, тоді $\forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f(x,y) - f(x_0,y)| < \dfrac{\varepsilon}{d-c}$.
Отже, $|F(x,t) - F(x_0,t_0)| < (t-c)\dfrac{\varepsilon}{d-c} + (t-t_0)M \leq \varepsilon + \tilde{\delta} M$.
Оберемо $\tilde{\delta} = \min\left\{\delta, \dfrac{\varepsilon}{M}\right\}$. Тоді якщо обрати кожну точку (x,t) так, що $\|(x,t) - (x_0,t_0)\| < \tilde{\delta}$, отримаємо $|F(x,t) - F(x_0,t_0)| < 2\varepsilon$ (при $t < t_0$ все працюватиме).
Тепер зауважимо, що $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x,t) = f(x,t) \in C([a,b] \times [c,d])$.
Отже, дійсно, g можна продиференціювати за **Prp. 1.1.4**, отримаємо наступне:
$g'(t) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) \, dt = \int_a^b f(x,t) \, dx = J(t)$.
Разом ми довели, що хотіли, а саме $g'(t) = h'(t)$ для всіх $t \in [c,d]$. Завершили доведення. ■

Example 1.1.6 Обчислити $\lim\limits_{\alpha \to 0} \displaystyle\int_0^2 x^2 \cos \alpha x \, dx$.

Маємо $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^2 x^2 \cos \alpha x \, dx$. Розглянемо функцію $f(x,\alpha) = x^2 \cos \alpha x$ на $[0,2] \times [-1,1]$ (можна й менше взяти другу сторону, головне щоб навколо точки 0). Ця функція є неперервною, тоді $I(\alpha)$ неперервна, зокрема в точці $\alpha = 0$.
$\lim\limits_{\alpha \to 0} \displaystyle\int_0^2 x^2 \cos \alpha x \, dx = \lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha) = I(0) = \int_0^2 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} = \frac{8}{3}$.

Example 1.1.7 Знайти похідну функції $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^2 e^{\alpha x^2} \frac{dx}{x}$.

Позначу $f(x,\alpha) = \dfrac{e^{\alpha x^2}}{x}$. Знайдемо частинну похідну за другим аргументом: $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = \dfrac{x^2 e^{\alpha x^2}}{x} = x e^{\alpha x^2}$.
Зауважимо, що f та $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ неперервні на прямокутнику $[1,2] \times [-1,1]$, тому ми можемо диференціювати

функцію I, а також $I'(\alpha) = \int_1^2 xe^{\alpha x^2}\,dx$.
$I'(\alpha) = \frac{1}{2}\int_1^2 e^{\alpha x^2}\,dx^2 = \frac{1}{2\alpha}e^{\alpha x^2}\Big|_1^2 = \frac{e^{4\alpha}-e^{\alpha}}{2\alpha}$.

Example 1.1.8 Обчислити $\int_0^1 \frac{x^b - x^\alpha}{\ln x}\,dx$, якщо $a, b > 0$.
Зауважимо, що $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\,dy$. Тоді взагалі маємо обчислити $\int_0^1 \int_a^b x^y\,dy\,dx$.
Оскільки функція $f(x,y) = x^y$ є неперервною на прямокутнику $[0,1]\times[a,b]$, то звідси ми можемо змінити місцями порядок інтегрування, тобто
$\int_0^1\int_a^b x^y\,dy\,dx = \int_a^b\int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = \ln(y+1)\Big|_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1}$.

Зараз будуть більш специфічні приклади. Але на них простіше зрозуміти узагальнення теореми про неперервність та диференційованість.

Example 1.1.9 Знайти $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.
Інтуїтивно хочеться, щоб це дорівнювало $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Запишемо наш ліміт ось так:
$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\int_0^1\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} + \int_1^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} - \int_0^\alpha\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}\right)$.
Перший інтеграл, тобто $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$. Тому задля нашої інтуїції, треба довести, що останні два інтеграла дорівнюють нулю.
$\left|\int_0^\alpha \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}\right| \le \int_0^\alpha\left|\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}\right| \le \int_0^\alpha M\,dx = M\alpha \to 0$.
$\left|\int_1^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}\right| \le M(1+\alpha-1)\to 0$ аналогічними міркуваннями.
Тут $M = \max\limits_{x\in[0,2]\times[0,1]}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$, і це можна знайти через неперервність самої функції.
Отже, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

Отже, теорему про неперервність інтеграла з параметром можна узагальнити.

Theorem 1.1.10 Маємо $f\in C([a,b]\times[c,d])$ та $a(y), b(y)\in C([c,d])$, причому $a(y)\ge a$ та $b(y)\le b$. Тоді $J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \in C([c,d])$.

Proof.
$\lim\limits_{y\to y_0}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \lim\limits_{y\to y_0}\left(\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx \pm \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \pm \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx\right)$.
Знак $\pm$ залежить від взаємного розташування точок $a(y), b(y), a(y_0), b(y_0)$.
Перший інтеграл неперервний, за **Prp. 1.1.3**. Другий та третій інтеграли оцінюються за модулем так само, як це було на прикладі. Маємо права, бо f обмежується сталою M. Тоді там отримаємо, що ці інтеграли прямують до нуля. ■

Example 1.1.11 Знайти похідну функції $F(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha^2}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$, нехай $\alpha\ge 0$.
Інтуїтивно хочеться продиференціювати як інтеграл від межі та інтеграл від параметру.
Оскільки $\frac{\ln(1+\alpha x)}{x} = f(x,\alpha)$ неперервна функція, то вона має первісну H. Тоді за формулою Ньютона-Ляйбніца:

$F(\alpha) = H(x,\alpha)\Big|_{\alpha}^{\alpha^2} = H(\alpha^2,\alpha) - H(\alpha,\alpha) = H(u(\alpha),\alpha) - H(v(\alpha),\alpha)$, де $u(\alpha) = \alpha^2,\ v(\alpha) = \alpha$.

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \frac{\partial H}{\partial \alpha^2}(\alpha^2,\alpha)\frac{d\alpha^2}{d\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha^2,\alpha) - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha,\alpha)\frac{d\alpha}{d\alpha} - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha,\alpha) \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha^2}(\alpha^2,\alpha)\cdot 2\alpha - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha,\alpha)\cdot 1\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha^2,\alpha) - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha,\alpha)\right) \\ &= \big(f(\alpha^2,\alpha)\cdot 2\alpha - f(\alpha,\alpha)\cdot 1\big) + \big(f(\alpha^2,\alpha) - f(\alpha,\alpha)\big). \end{aligned}$$

Підставимо все, що маємо - отримаємо:
$F'(\alpha) = \dfrac{\ln\big(1+\alpha^3\big)}{\alpha^2}\cdot 2\alpha - \dfrac{\ln\big(1+\alpha^2\big)}{\alpha} + \dfrac{\ln\big(1+\alpha^3\big)}{\alpha^2} - \dfrac{\ln\big(1+\alpha^2\big)}{\alpha} = \dfrac{\ln\big(1+\alpha^3\big)}{\alpha}\left(2+\dfrac{1}{\alpha}\right) - 2\dfrac{\ln\big(1+\alpha^2\big)}{\alpha}.$

Для диференціювання існує більш загальна формула.

Theorem 1.1.12 Маємо $f, \dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a,b]\times[c,d])$, $a,b \in C([c,d])$, причому $a(y) \geq a$ та $b(y) \leq b$. Тоді $J(y) = \displaystyle\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$ буде диференційованою на $[c,d]$, причому
$J'(y) = f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y) + \displaystyle\int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$
Для її доведення можна скористатися формулою Ньютона-Ляйбніца.

1.2 Невласні інтеграли з параметром та ознаки збіжності

Definition 1.2.1 Задана функція $f\colon A\times B \to \mathbb{R}$, де $A,B \subset \mathbb{R}$, та $y_0 \in \mathbb{R}$ – гранична точка для B. Функція f **поточково збігається** до функції φ при $y \to y_0$, якщо

$$\forall x \in A : \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$$

Функція f **збігається рівномірно** до функції φ при $y \to y_0$ на множині A, якщо

$$\sup_{x\in A} |f(x,y) - \varphi(x)| \to 0, y \to y_0$$

Позначення: $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x), y \to y_0$.

Новий вигляд збіжності можна звести до збіжності функціональних послідовностей таким твердженням.

Proposition 1.2.2 $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x), y \to y_0$ на множині $A \iff \forall\{y_n, n\geq 1\} \subset B : \forall n \geq 1 : y_n \neq y_0 :$ $f(x,y_n)\rightrightarrows\varphi(x), n\to\infty$ на множині A.
Випливає з означення рівномірної збіжності.

Theorem 1.2.3 Критерій Коші

$f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x), y \to y_0$ на $A \iff \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall y_1,y_2 \in B, y_1,y_2 \neq y_0 : \begin{cases}|y_1-y_0| < \delta \\ |y_2-y_0| < \delta\end{cases} \implies$ $\sup\limits_{x\in A} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon.$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ *Вказівка: означення рівномірної границі та нерівність трикутника.*

$\boxed{\Leftarrow}$ Дано: $\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta : \forall y_1,y_2 \in B, y_1,y_2 \neq y_0 : \begin{cases}|y_1-y_0| < \delta \\ |y_2-y_0| < \delta\end{cases} \implies \sup\limits_{x\in A} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon.$
Візьмемо деяку послідовність $\{y_n, n \geq 1\}$, де $y_n \neq y_0, y_n \to y_0$. Тоді
$\exists N : \forall n,m \geq N : |y_n - y_0| < \delta, |y_m - y_0| < \delta$. За умовою, звідси $\sup\limits_{x\in A} |f(x,y_n) - f(x,y_m)| < \varepsilon$. За критерієм Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності, $f(x,y_n)$ є рівномірно збіжною на A. Отже, $f(x,y)$ - рівномірно збіжний на A за **Prp. 5.2.2. (TODO: лінкування)** ■

Тепер уже до суті цього підрозділу.

Definition 1.2.4 Задана функція $f\colon [a,\omega)\times A$, така, що $\forall y \in A : \forall c \in [a,\omega) : f \in \mathcal{R}([a,c])$. Також маємо збіжний невласний інтеграл із параметром $J(y) = \displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$, $\forall y \in A$.
Невласний інтеграл **збігається рівномірно** на множині A, якщо

$$\sup_{y\in A}\left|\int_a^\omega f(x,y)\,dx - \int_a^c f(x,y)\,dx\right| \overset{c\to\omega}{\rightrightarrows} 0$$

Remark 1.2.5 Воно якось схоже за рівномірну збіжність функції, але трошки не так. Тут розглядається взагалі-то рівномірна збіжність функції $g(x,y)$ до функції $g(y)$ ТА при цьому аргумент $x \to x_0$.

Theorem 1.2.6 Критерій Коші
$\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ – збіжний рівномірно на $A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists C : \forall c_1, c_2 \in (C,\omega) : \sup_{y\in A}\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$
Випливає з критерію Коші рівномірної збіжності функцій.

Theorem 1.2.7 Ознака Ваєрштраса
Задані функції $f\colon [a,\omega)\times A \to \mathbb{R}$, $g\colon [a,\omega) \to \mathbb{R}$ такі, що виконується наступне:
1) $\forall x \in [a,\omega) : \forall y \in A : |f(x,y)| \le g(x)$;
2) $\displaystyle\int_a^\omega g(x)\,dx$ – збіжний.
Тоді $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ – збіжний рівномірно на A.

Proof.
$\displaystyle\sup_{y\in A}\left|\int_c^\omega f(x,y)\,dx\right| \le \left|\int_c^\omega g(x)\,dx\right| \overset{c\to\omega}{\rightrightarrows} 0.$ ■

Example 1.2.8 Довести, що $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ рівномірно збіжний на множині $[1+\gamma,+\infty)$, якщо $\gamma > 0$.
Маємо функцію $f(x,\alpha) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Також відома оцінка $x^\alpha > x^{1+\gamma} \implies \dfrac{1}{x^\alpha} < \dfrac{1}{x^{1+\gamma}}$, виконано $\forall x \ge 1$.
Також $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\gamma}}$ – збіжний невласний інтеграл (еталон). Тому за ознакою Вейєрштрасса, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ рівномірно збіжний на множині $[1+\gamma,+\infty)$.

Example 1.2.9 Довести, що $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ не є рівномірно збіжним на множині $(1,+\infty)$.
Дійсно, $\displaystyle\sup_{\alpha>1}\left|\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\right| = \sup_{\alpha>1}\left(\frac{1}{c^{\alpha-1}}\frac{1}{1-\alpha}\right) = +\infty \not\to 0$ при $c \to +\infty$.

Theorem 1.2.10 Ознака Діріхле та Абеля
Задані функції $f,\ g\colon [a,\omega)\times A \to \mathbb{R}$ такі, що виконана одна з двох пар умов:

$\displaystyle\int_a^A f(x,y)\,dx$ – рівномірно обмежена на $[a,\omega)$.	$\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ – збіжний рівномірно на A.
g – монотонна на $[a,\omega)$ $(\forall y \in A)$ та $g(x,y) \rightrightarrows 0,\ x \to \omega$.	g – монотонна на $[a,\omega)$ $(\forall y \in A)$ та рівномірно обмежена на $[a,\omega)\times A$.
ознака Діріхле	*ознака Абеля*

Тоді $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,dx$ – рівномірно збіжний на A.
Доведення теореми Діріхле анаголігно доводиться, як це було в розділі про прості невласні інтеграли (TODO: лінкування). Так само із Діріхле випливає Абеля аналогічним чином.

Example 1.2.11 Довести, що $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}\,dx$ збіжний рівномірно на $[\alpha,+\infty)$, $\alpha > 0$.
Розглянемо функції $f(x,y) = \sin xy$ та $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.
$\displaystyle\int_0^A \sin xy\,dx = -\frac{1}{y}\cos xy\Big|_0^A = -\frac{1}{y}\cos Ay + \frac{1}{y}$. Ця штука – рівномірно обмежена на $[0,+\infty)$, тому що

$\frac{1}{y}|1 - \cos Ay| \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{\alpha}$, виконано $\forall A \in [0, +\infty)$.

$\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ ясно, що монотонна на $[0, +\infty)$ та рівномірно прямує до нуля при $x \to +\infty$.

Отже, за ознакою Діріхлє, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}\, dx$ - збіжний рівномірно на $[\alpha, +\infty)$.

Example 1.2.12 Довести, що $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1} \operatorname{arctg} xy\, dx$ збіжний рівномірно на $[\alpha, +\infty)$, $\alpha > 0$.

Розглянемо функції $f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}$ та $g(x, y) = \operatorname{arctg} xy$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1}$ – збіжний рівномірно за попереднім прикладом.

$\operatorname{arctg} xy$ – монотонна по x, а також $\forall x : \forall y : |\operatorname{arctg} xy| \le \frac{\pi}{2}$, тобто рівномірно обмежена.

Отже, за ознакою Абеля, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x}+1} \operatorname{arctg} xy\, dx$ – збіжний рівномірно на $[\alpha, +\infty)$.

Theorem 1.2.13 Ознака Діні

Задано функцію $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$. Також відомо, що $f \ge 0$ та $J(y) = \displaystyle\int_a^{\omega} f(x, y)\, dx \in C([c, d])$.
Тоді J – збіжний рівномірно на $[c, d]$.

Proof.

Доведення ознаки прямо випливає з теореми Діні про рівномірну збіжність функціонального ряда.
Для спрощення доведення розгляну випадок, коли $\omega = +\infty$.

Розглянемо функціональну послідовність $g_n(y) = \displaystyle\int_a^{a+n} f(x, y)\, dx$, які визначені на $[c, d]$. Зауважимо, що $g_n \in C([c, d])$ за **Prp. 1.1.3**. Далі, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(y) = \displaystyle\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = J(y) \in C([c, d])$. Нарешті, всі $g_n(y)$ неспадають в силу того, що $f \ge 0$.

Отже, за ознакою Діні для функціональної послідовності, g_n збігається рівномірно до J при $n \to \infty$.
Тоді звідси $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall y \in [c, d] : |g_N(y) - J(y)| < \varepsilon$. Тобто маємо $\left|\displaystyle\int_{a+N}^{+\infty} f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon$.

Оберемо $C = a + N$, тоді $\forall c > C$ та $\forall y \in [c, d]$ матимемо $\left|\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon$. Власне, це доводить рівномірну збіжність J на $[c, d]$. ■

1.3 Властивості невласного інтегралу

Proposition 1.3.1 Про неперервність невласного інтеграла з параметром

Задана функція $f\colon [a, \omega) \times [c, d] \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$. Також J – рівномірно збіжний на $[c, d]$. Тоді $J \in C([c, d])$.

Proof.

За означенням рівномірної збіжності, маємо $\sup\limits_{y\in[c,d]} \left|\displaystyle\int_{\xi}^{\omega} f(x, y)\, dx\right| \to 0,\ \xi \to \omega$. Іншими словами, $\forall \varepsilon > 0 : \exists \xi > a : \sup\limits_{y\in[c,d]} \left|\displaystyle\int_{\xi}^{\omega} f(x, y)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тепер оцінимо J:

$$|J(y_1) - J(y_2)| = \left|\int_a^{\omega} f(x, y_1)\, dx - \int_a^{\omega} f(x, y_2)\, dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^{\xi} f(x, y_1)\, dx - \int_a^{\xi} f(x, y_2)\, dx + \int_{\xi}^{\omega} f(x, y_1)\, dx - \int_{\xi}^{\omega} f(x, y_2)\, dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_a^{\xi} f(x, y_1) - f(x, y_2)\, dx\right| + \left|\int_{\xi}^{\omega} f(x, y_1)\, dx\right| + \left|\int_{\xi}^{\omega} f(x, y_2)\, dx\right| \boxed{<}$$

Перший модуль: $f \in C_{\text{unif}}([a, \xi] \times [c, d])$, тоді $\exists \delta : \forall y_1, y_2 : |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{\xi - a}$.

Другий модуль: $\sup\limits_{y\in[c,d]} \left|\displaystyle\int_{\xi}^{\omega} f(x, y)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \implies \forall y \in [c, d] : \left|\displaystyle\int_{\xi}^{\omega} f(x, y)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

$\boxed{<} \displaystyle\int_a^\xi \frac{\varepsilon}{\xi - a}\,dx + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$
Збираємо пазл та маємо $J \in C_{\text{unif}}([c,d]) \implies J \in C([c,d])$. ■

Proposition 1.3.2 Про інтегрованість невласного інтеграла з параметром
Задана функція $f \colon [a,\omega) \times [c,d] \to \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a,\omega) \times [c,d])$. Також J – рівномірно збіжний на $[c,d]$. Тоді $J \in \mathcal{R}([c,d])$, причому $\displaystyle\int_c^d \underbrace{\int_a^\omega f(x,y)\,dx}_{=J(y)}\,dy = \int_a^\omega \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$

Proof.
Розпишемо інтеграл $\displaystyle\int_c^d J(y)\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy + \int_c^d \int_b^\omega f(x,y)\,dx\,dy.$
Перший доданок – це визначений інтеграл, тому там виконується **Prp 3.1.4.** (TODO: лінкування), тобто
$\displaystyle\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$
Другий доданок уже цікавіше, його ми оцінимо:
$\displaystyle\left|\int_c^d \int_b^\omega f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \int_c^d \left|\int_b^\omega f(x,y)\,dx\right| dy \le \int_c^d \sup_{y\in[c,d]} \left|\int_b^\omega f(x,y)\,dx\right| dy =$
$\displaystyle= \sup_{y\in[c,d]} \left|\int_b^\omega f(x,y)\,dx\right| (d-c) \to 0, b \to \omega.$ Якщо $b \to \omega$, то тоді отримаємо
$\displaystyle\int_c^d J(y)\,dy = \int_a^\omega \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy + 0 = \int_a^\omega \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy.$ ■

Proposition 1.3.3 Про диференційованість невласного інтеграла з параметром
Задана функція $f \colon [a,\omega) \times [c,d] \to \mathbb{R}$, така, що виконані умови:
1) $\exists y_0 \in [c,d] : J(y_0)$ – збіжний;
2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a,\omega) \times [c,d])$;
3) $\displaystyle\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ – рівномірно збіжний.
Тоді J – збіжний, диференційований на $[c,d]$, при цьому $J'(y) = \displaystyle\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$

Proof.
Розглянемо функцію $I(y) = \displaystyle\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$. Оскільки $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ неперервна та I – рівномірно збіжний, то тоді за **Prp. 3.2.6.** (TODO: лінкування), $I \in \mathcal{R}([y,y_0])$.
$\displaystyle\int_{y_0}^y I(t)\,dt = \int_a^\omega \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\,dx = \int_a^\omega f(x,y) - f(x,y_0)\,dx = J(y) - J(y_0).$
Отже, $J(y) = \displaystyle\int_{y_0}^y I(t)\,dt - J(y_0)$ – збіжний $\forall y \in [c,d]$, як сума окремих збіжних доданків. Значить,
$J'(y) = I(y) - 0 = \displaystyle\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$ ■

Example 1.3.4 Обчислити $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x))}{\operatorname{tg} x}\,dx.$
Ми розглянемо функцію $J(y) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x))}{\operatorname{tg} x}\,dx$. Про неї відомо, що:
1) $\exists y_0 = 0 : J(0) = 0$, тобто звіжний;
2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x} \in C\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \times [-1,1]\right)$;
3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x}\,dx$ – збіжний рівномірно принаймні на $[-1,1]$ за мажорантною Ваєрштраса. Дійсно, $\dfrac{1}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x} \le 1, \forall y \in [-1,1]$.

Отже, ми можемо продиференціювати функцію $J(y)$ та отримати:
$J'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+y^2 \operatorname{tg}^2 x}\, dx \overset{t=\operatorname{tg} x}{=} \dots = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+y}$.
$J(y) = \int \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+y}\, dy = \dfrac{\pi}{2}\ln|1+y| + C$.
Оскільки $J(0) = 0$, то звідси $C = 0$. Наша мета була – це знайти $J(1)$. Таким чином,
$J(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x))}{\operatorname{tg} x}\, dx = \dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

Proposition 1.3.5 Про невласне інтегрування невласного інтеграла з параметром
Задана функція $f \in C([a,+\infty) \times [c,+\infty))$, причому $f \geq 0$. Також відомо, що $\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx \in C([c,+\infty))$, а також $\int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy \in C([a,+\infty))$. Тоді якщо $\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy$ – збіжний, то $\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy\, dx$ – збіжний. Навпаки теж. Нарешті,
$\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy\, dx$.

Proof.
Позначимо $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx$, про неї відомо, що $I \in C([c,+\infty))$, а також $\int_c^{+\infty} I(y)\, dy$ – збіжний.
Хочемо довести, що $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_a^R \int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy\, dx = \int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy$.
Відомо, що $\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy$ - збіжний, тобто
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta_1 : \forall d > c : d > \Delta_1 \implies \left|\int_d^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Також відомо, що $\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx$ – збіжний рівномірно за ознакою Діні, тоді
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta_2 : \forall R > a : R > \Delta_2 \implies \forall y \in [c,+\infty) : \left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\, dx\right| < \dfrac{\varepsilon}{2(d-c)}$.
Оберемо $\Delta = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$, фіксуємо довільне $d > \Delta$ та $R > \Delta$ таким чином, щоб $d > c, R > a$.
А далі для доведення ліміту зробимо оцінку:
$\left|\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy - \int_c^{+\infty}\int_a^{R} f(x,y)\, dx\, dy\right| = \left|\int_c^{+\infty}\int_R^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy\right| =$
$= \left|\int_c^{d}\int_R^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy + \int_d^{+\infty}\int_R^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy\right| \leq \left|\int_c^{d}\int_R^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy\right| + \left|\int_d^{+\infty}\int_R^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy\right| \leq$
$\leq \int_c^d \left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy\right| + \left|\int_d^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy\right| < \int_c^d \dfrac{\varepsilon}{2(d-c)} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Таким чином, дійсно, $\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy\, dx = \int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy$. ■

1.4 Інтеграл Діріхлє

Інтегралом Діріхле називають таку рівність, яку зараз доведу (про збіжність вже говорили) (TODO: лінкування)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Розглянемо функцію $J(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\dfrac{\sin x}{x}\, dx$, причому підінтегральну функцію ми довизначимо в точці 0. Тоді підінтегральна функція неперервна.
Перш за все $J(a)$ – рівномірно збіжний на $[0,+\infty)$, бо за ознакою Абеля, маємо:
$\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\, dx$ – збіжний рівномірно (доводили);

e^{-ax} – монотонна відносно x та рівномірно обмежена, бо $|e^{-ax}| \le 1$.
Із цього ми отримуємо, що $J \in C([0,+\infty))$, а тому $J(0) = \lim\limits_{a\to 0} J(a)$. Далі маємо наступне:
1) $\exists a_0 = 0 : J(0)$ – збіжний;
2) $\dfrac{\partial f}{\partial a} = -e^{-ax}\sin x \in C([0,+\infty)\times[0,+\infty))$;
3) $-\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x\, dx$ збіжний рівномірно на $[\gamma,+\infty)$, де $\gamma > 0$, за мажорантною Ваєрштраса.
Дійсно, $|e^{-ax}\sin x| \le e^{-\gamma x}$, а $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x}\, dx$ – збіжний.
Таким чином, $J'(a) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x\, dx = \dots = -\frac{1}{1+a^2}$.
$J(a) = -\operatorname{arctg} a + C$, причому ця рівність виконана $\forall a \in [\gamma,+\infty)$. Але водночас $J(0) = \lim\limits_{a\to 0} J(a) = C$.
Проте ще маємо, що $|J(a)| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\, dx\right| \le \displaystyle\int_0^{+\infty}\left|e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right| dx \overset{|\sin x|\le x}{\le} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}$.
А тому $J(a) \to 0$ при $a \to +\infty$. Звідси випливає, що $0 = -\dfrac{\pi}{2} + C \implies J(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Додатково дослідимо ось такий інтеграл та доведемо рівність:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a$$

Поки обмежимось $a > 0$, тоді
$F(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx \overset{ax=t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.
$F(-a) = -F(a) = -\dfrac{\pi}{2}$ та $F(0) = 0$ – тут відносно ясно.

1.5 Інтеграл Ойлера-Пуассона

Інтегралом Ойлера-Пуассона називають таку рівність, яку зараз доведу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Позначимо $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$. Зробимо заміну $x = at$. А потім помножимо обидві частини рівності на e^{-a^2}. Разом отримаємо рівність:
$Je^{-a^2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2} e^{-a^2t^2} a\, dt$.
А потім проінтегруємо обидві частини рівності по a на $[0,+\infty)$ – отримаємо:
$\displaystyle\int_0^{+\infty} Je^{-a^2}\, da = J\int_0^{+\infty} e^{-a^2}\, da = J^2$.
А з іншого боку, ми отримали:
$J^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-a^2} e^{-a^2t^2} a\, dt\, da \overset{?}{=} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-a^2} a\, da\, dt \overset{s=-a^2t^2-a^2}{=}$
$= \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2+1)} \int_{-\infty}^{0} e^s\, ds\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2+1)}\, dt = \frac{\pi}{4}$.
Отже, взявши квадратний корінь, отримаємо $J = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (ясно, що J – невід'ємне число).
Варто обґрунтувати рівняння зі знаком питання. Для цього перевіримо всі умови для невласного інтегрування невласного інтеграла. Функція $f(t,a) = ae^{-a^2(t^2+1)} \in C([0,+\infty)\times[0,+\infty))$, причому $f \ge 0$. Також
$\displaystyle\int_0^{+\infty} ae^{-a^2(t^2+1)}\, da = \frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1} \in C([0,+\infty))$ та $\displaystyle\int_0^{+\infty} ae^{-a^2(t^2+1)}\, dt = Je^{-a^2} \in C([0,+\infty))$ (неважко довести, шо J рівномірно збігається).
Нарешті, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ae^{-a^2(t^2+1)}\, da\, dt$ ми знайшли вище, який виявився збіжним. Отже, рівність '?' є справедливою.

1.6 Гамма-функція

Definition 1.6.1 Гамма-функцією називають таку функцію:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \qquad \alpha > 0$$

Lemma 1.6.2 При $\alpha > 0$ гамма-функція збіжна.

Proof.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка – це точка $x = 0$. Порівняємо з інтегралом $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ – збіжний при $\alpha > 0$. Маємо:

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1$. Отже, обидва збіжні, тому перший доданок – збіжний.

Розглянемо другий інтеграл. Особлива точка – це $x = \infty$. Порівняємо з інтегралом $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ – збіжний при $\alpha > 0$. Маємо:

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ за Лопіталем, } \alpha \geq 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-\alpha}e^{\frac{x}{2}}} = 0, \alpha < 1 \end{array}\right.$. Отже, обидва збіжні, тому другий доданок – збіжний.

Остаточно, $\Gamma(\alpha)$ – збіжний при $\alpha > 0$. ■

Lemma 1.6.3 $\Gamma \in C^\infty((0, +\infty))$.

Proof.
Коли будемо диференціювати n разів гамма-функцію, ми очікуватимемо таке:

$\displaystyle\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx.$

Спробуємо зараз довести, що $\Gamma^{(n)}$ – рівномірно збіжний на проміжку $[a, b] \subset (0, +\infty)$.

Маємо $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx.$

Розглянемо перший інтеграл. Використаємо мажоранту Ваєрштрасса:

$|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x| = x^{\alpha-1}e^{-x}(-1)^n\ln^n x \leq \left[\begin{array}{l} (-1)^n x^{b-1}e^{-x}\ln^n x \\ (-1)^n x^{a-1}e^{-x}\ln^n x \end{array}\right.$.

Ситуації тут можуть бути різними, але поведінка інтеграла не зміниться. Я буду на розгляд брати перший випадок. Тобто дослідимо $\displaystyle\int_0^1 x^{b-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ на збіжність. Відомо, що $\ln x = o(x^{-\varepsilon}), x \to 0$, де $\varepsilon > 0$. Тоді правилом Лопіталя можна довести, що $\ln^n x = o(x^{-\varepsilon}), x \to 0$.

Завдяки цьому, ми візьмемо $\displaystyle\int_0^1 x^{b-1}x^{-\varepsilon}e^{-x}\,dx$ – збіжний, допоки $b > \varepsilon$. Це доводили під час попередньої леми. А далі $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^{b-1}e^{-x}\ln^n x}{x^{b-1}x^{-\varepsilon}e^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^n x}{x^{-\varepsilon}} = 0.$

Отже, $\displaystyle\int_0^1 x^{b-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ – збіжний. І тому за мажорантною Вейєрштрасса, $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ - збіжний рівномірно на $[a, b]$.

Аналогічно доводиться, що $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ – збіжний рівномірно на $[a, b]$. Там та сама оцінка на мажоранту, а також треба використати $\ln x = o(x^\varepsilon), x \to +\infty$, де $\varepsilon > 0$.

Остаточно, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\,dx$ – збіжний рівномірно на $[a, b] \subset (0, +\infty)$, що й доводить той факт, що $\Gamma \in C^\infty((0, +\infty))$. ■

Theorem 1.6.4 $\forall \alpha > 0 : \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
Вказівка: $\Gamma(\alpha + 1)$ *інтегруємо частинами, взявши за* $u = x^\alpha,\ dv = e^{-x}\,dx$.

Corollary 1.6.5 $\Gamma(n + 1) = n!$ при $n \in \mathbb{N}$.

Proof.
Дійсно, за попередньою теоремою, маємо таку рівність:
$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1\Gamma(1)$.
Нарешті, обчислимо $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$. ■

Corollary 1.6.6 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+n\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

Proof.
Дійсно, за попередньою теоремою, маємо таку рівність:
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}+1\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\dots\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$
Нарешті, обчислимо $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx \overset{\text{Заміна: } t=\sqrt{x}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$. ■

Remark 1.6.7 До речі кажучи, завдяки функціональному рівнянню $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, ми можемо продовжити нашу функцію на $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
Якщо я хочу порахувати $\Gamma(-0.5)$, то для цього я просто визначаю його як $\Gamma(-0.5) = \dfrac{\Gamma(0.5)}{-0.5}$. Для цілих чисел я продовження не можу зробити, бо $\Gamma(-1) = \dfrac{\Gamma(0)}{-1}$, проте $\Gamma(0)$ тупо не визначена.

Графік гамма-функції

Proposition 1.6.8 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\Gamma(\alpha) = +\infty$.

Proof.
Маємо $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ для великих $\alpha > 0$. Оцінимо $\Gamma(\alpha)$.
$\Gamma(\alpha) > \displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx > \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}$.
Таким чином, $\Gamma(\alpha+1) > \dfrac{\alpha}{e} \to +\infty$ при $\alpha\to+\infty$. ■

Proposition 1.6.9 Гамма-функція опукла вниз на проміжку $(0,+\infty)$.

Proof.
Дійсно, $\Gamma''(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^2 x\,dx > 0$ при всіх $\alpha > 0$. ■

Proposition 1.6.10 $\Gamma'(1) = -\gamma$, де γ – константа Ойлера-Маскероні.

Proof.
$\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx \overset{\substack{\text{заміна:}\\ x=-\ln u}}{=} \int_0^1 \ln(-\ln u)\,du \boxed{=}$
Пригадаємо, що $\ln a = \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$. За допомогою цього ліміту, ми можемо отримати наступне:
$$\boxed{=}\int_0^1 \ln\left(\lim_{n\to\infty} n(1-\sqrt[n]{u})\right)du \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \ln n + \ln\big(1-\sqrt[n]{u}\big)\,du = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n + \int_0^1 \ln\big(1-\sqrt[n]{u}\big)\,du\right)\boxed{=}$$
Тепер згадаємо, що $\ln(1-t) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}$, тож звідси випливає наступне:
$$\int_0^1 \ln\big(1-\sqrt[n]{x}\big)\,du = -\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sqrt[n]{u})^k}{k}\,du = -\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u^{\frac{k}{n}}}{k}\,du = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{k(k+n)} =$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+n}\right) = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$
$$\boxed{=}\lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right) = -\gamma.$$

Окремо варто пояснити рівність $\overset{?}{=}$, щоб все було цілком строго. (TODO: додати) ■

Proposition 1.6.11 Гамма-функція логарифмічно опукла вниз на проміжку $(0,+\infty)$.

Proof.
Тобто хочемо довести, що $\ln\Gamma$ опукла вниз на $(0,+\infty)$. Маємо
$(\ln\Gamma)'' = \dfrac{1}{\Gamma^2}(\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2)$.
Також, за допомогою нерівності Коші-Буняковського, ми доведемо наступне:
$(\Gamma'(\alpha))^2 = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x\,dx\right)^2 = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(x^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(x^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\ln x\right)\right)^2 \leq$
$\leq \left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(x^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx\right)\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(x^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\ln x\right)^2 dx\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^2 x\,dx =$
$= \Gamma(\alpha)\Gamma''(\alpha)$.
Власне, це доводить, що $(\Gamma')^2 - \Gamma\Gamma'' \leq 0$, а тому звідси $(\ln\Gamma)'' > 0$, що доводить бажане. ■

1.7 Бета-функція

Definition 1.7.1 Бета-функцією називають таку функцію:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \qquad \alpha,\beta > 0$$

Lemma 1.7.2 При $\alpha,\beta > 0$ бета-функція збіжна.

Proof.
$\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$.

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка – це точка $x=0$. Порівняємо з інтегралом $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}\,dx$ – збіжний для $\alpha > 0$. Маємо
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}} = 1$. Отже, обидва збіжні, тому перший доданок – збіжний.
Розглянемо другий інтеграл. Проводимо заміну $1-x=t$, тоді маємо:
$-\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\,dt$ – це той самий перший доданок. І він вже буде збіжним, якщо $\beta > 0$.
Остаточно, $B(\alpha,\beta)$ – збіжний при $\alpha > 0, \beta > 0$. ■

Proposition 1.7.3 $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy$.
Вказівка: зробити заміну $x = \dfrac{y}{1+y}$.

Proposition 1.7.4 $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$.
Вказівка: $x = 1-t$.

Proposition 1.7.5 $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\alpha-1}{\beta+\alpha-1}B(\alpha-1,\beta)$ при $\alpha > 1$.
Вказівка: інтегруємо частинами, де $u = x^{\alpha-1}$ *та решта* dv.

Зауважимо, що $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha) = \dfrac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}B(\beta-1,\alpha) = \dfrac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta-1)$ при $\beta > 1$.
Ще зауважимо, що $B(\alpha,1) = \dfrac{1}{\alpha}$, якщо порахувати бета-функцію.
Використовуючи два зауваження, можемо отримати ось це:
$B(\alpha,n) = \dfrac{n-1}{\alpha+n-1}B(\alpha,n-1) = \dfrac{n-1}{\alpha+n-1}\dfrac{n-2}{\alpha+n-2}\cdots\dfrac{2}{\alpha+2}\dfrac{1}{\alpha+1}\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}$.
Зокрема при $\alpha = m$ ми отримаємо $B(m,n) = \dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$.

1.8 Зв'язок між гамма- та бета-функціями. Основна теорема гамма-функції

Proposition 1.8.1 $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha,n)$.

Proof.
$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \overset{x=\ln\frac{1}{u}}{=} \int_0^1 \ln^{\alpha-1}\frac{1}{u}\,du = \int_0^1 (-\ln u)^{\alpha-1}\,du = \int_0^1 \lim_{t\to 0}\left(\frac{1-u^t}{t}\right)^{\alpha-1} du =$
$= \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-u^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha-1} du \overset{\Gamma\in C((0,+\infty))}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^{\alpha-1}(1-u^{\frac{1}{n}})^{\alpha-1}\,du \overset{u=s^n}{=} \lim_{n\to\infty} n^\alpha \int_0^1 s^{n-1}(1-s)^{\alpha-1}\,ds =$
$= \lim_{n\to\infty} n^\alpha B(n,\alpha)$ ■

Theorem 1.8.2 Функціональне рівняння Ойлера
$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ при $0<\alpha<1$.
$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\alpha\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\alpha\right) = \dfrac{\pi}{\cos\pi\alpha}$ при $-\dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{1}{2}$.

Proof.
Використовучи **Prp 3.8.1.** (TODO: лінкування) отримаємо:
$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \dfrac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\dfrac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)} =$
$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-\alpha}\dfrac{1}{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\dots\left(1+\frac{\alpha}{n-1}\right)}\dfrac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha}{n-1}\right)} =$
$= \dfrac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)}$
В теорії рядів Фур'є (колись згодом) ми одержимо формулу:
$\sin(\pi\alpha) = \pi\alpha\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1-\dfrac{\alpha^2}{2^2}\right)\dots\left(1-\dfrac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right) \overset{\text{або}}{=} \pi\alpha\prod_{n=1}^\infty\left(1-\dfrac{\alpha^2}{n^2}\right)$.
Власне звідси отримаємо $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$.

Друга формула вказівка: заміна $\beta = \alpha + \dfrac{1}{2}$. ■

Theorem 1.8.3 Зв'язок між Γ та B
$B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Proof.
Розглянемо $\Gamma(\alpha+\beta)$ та проведемо заміну $x = y(t+1), dx = (t+1)\,dy$.
$\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}\,dx = (t+1)^{\alpha+\beta}\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}e^{-y(t+1)}\,dy$.
Отримаємо
$\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}e^{-y(t+1)}\,dy$
Помножимо обидві частини на $t^{\alpha-1}$ та проінтегруємо від 0 до $+\infty$ по t:
$\int_0^{+\infty}\dfrac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}t^{\alpha-1}e^{-y}e^{-yt}\,dy\,dt$
$\Gamma(\alpha+\beta)\cdot B(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} y^{\beta-1}e^{-y}\int_0^{+\infty} y^\alpha t^{\alpha-1}e^{-yt}\,dt\,dy$.
Внутрішній інтеграл при заміні $yt = x$ стане рівним $\Gamma(\alpha)$. Його виносимо з-під зовнішнього інтегралу, а сам інтеграв вже є $\Gamma(\beta)$. Тоді
$\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$.

А тепер час обґрунтувати обережно зміну порядку інтегрування: із $dy\,dt$ до $dt\,dy$.
Розглянемо функцію $f(t,y) = y^{\alpha+\beta-1}t^{\alpha-1}e^{-y(t+1)}$. Ми обмежимось лише випадком $\alpha>1,\beta>1$.
Зрозуміло, що $f\geq 0$, а також $f\in C([0,+\infty)\times[0,+\infty))$. В т. $(t,0),(0,y)$ все ок, тому що при наших α,β ми маємо $y^{\alpha+\beta-1}\to 0, t^{\alpha-1}\to 0$ при $y\to 0, t\to 0$.
$I(y)\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt = \Gamma(\alpha)y^{\beta-1}e^{-y}$ - це ми рахували вище. $F\in C([0,+\infty))$.

$J(t) = \int_0^{+\infty} f(t,y)\,dy = \Gamma(\alpha+\beta)\dfrac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha+\beta}}$ – теж вище було. $J \in C([0,+\infty))$.
Також $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt\,ds = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$, тобто це – збіжний інтеграл.
Отже, зміна порядку інтегралів є справедливою лише для $\alpha > 1, \beta > 1$, тобто
$B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ справедлива для $\alpha,\beta > 1$.

$B(\alpha-1,\beta-1) = \dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}B(\alpha,\beta-1) = \dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}\cdot\dfrac{\alpha+\beta-1}{\beta-1}B(\alpha,\beta)$, а тут уже $\alpha,\beta > 1$. Тоді
$B(\alpha-1,\beta-1) = \dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}\dfrac{\alpha+\beta-1}{\beta-1}B(\beta,\alpha) = \dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}\dfrac{\alpha+\beta-1}{\beta-1}\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} =$
$= \dfrac{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}\dfrac{\alpha+\beta-1}{\beta-1}\dfrac{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)(\beta-1)\Gamma(\beta-1)}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\Gamma(\alpha+\beta-2)} = \dfrac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha-1+\beta-1)}$.
Отже, ми довели нашу формулу зв'язка для всіх $\alpha > 0, \beta > 0$. ■

Theorem 1.8.4 Теорема Бора-Молерупа
Припустимо, що задана функція $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, що задовольняє умовам:
1) $f(1) = 1$;
2) $f(\alpha+1) = \alpha f(\alpha)$ при $\alpha > 0$;
3) f – логарифмично опукла вниз функція на $(0,+\infty)$.
Тоді функція $f \equiv \Gamma$, тобто є гамма-функцією.
Тобто гамма-функція – єдина можлива функція, яка задовольняє трьом властивостям вище.

Proof.
Із умов 1), 2) випливає, що $f(n) = (n-1)!$ при $n \in \mathbb{N}$. Отже, нам достатньо показати рівність $f(\alpha) = \Gamma(\alpha)$ лише при $\alpha \in (0,1]$.
Умова 3) каже, що $\ln f$ опукла вниз на $(0,+\infty)$. Це означає, що на інтервалі $[n-1,n+1]$ та точці $n+\alpha, \alpha \in (0,1], n \geq 2$ маємо наступну нерівність:
$\dfrac{\ln f(n-1) - \ln f(n)}{n-1-n} \leq \dfrac{\ln f(n+\alpha) - \ln f(n)}{n+\alpha-n} \leq \dfrac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{n+1-n}$.
Зауважимо, що $\ln f(n-1) - \ln f(n) = \ln\dfrac{1}{n-1} = -\ln(n-1)$, а також $\ln f(n+1) - \ln f(n) = \ln n$.
Зважаючи на знаменники, отримаємо такі нерівності:
$\ln(n-1) \leq \dfrac{\ln f(n+\alpha) - \ln(n-1)!}{\alpha} \leq \ln n$.
$\ln(n-1)^\alpha = \alpha\ln(n-1) \leq \ln f(n+\alpha) - \ln(n-1)! \leq \alpha\ln n = \ln n^\alpha$.
Далі проекспоненціюємо нерівності з обох сторін:
$(n-1)^\alpha \leq \dfrac{f(n+\alpha)}{(n-1)!} \leq n^\alpha$;
$(n-1)^\alpha(n-1)! \leq f(n+\alpha) \leq n^\alpha(n-1)!$.
За пунктом 2), отримаємо $f(n+\alpha) = (\alpha+n-1)\dots(\alpha+1)\alpha f(\alpha)$. Звідси випливає:
$\dfrac{(n-1)^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} \leq f(\alpha) \leq \dfrac{n^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}$
$\dfrac{(n-1)^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} \leq f(\alpha) \leq \dfrac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}\dfrac{\alpha+n}{n}$
Дана нерівність виконана для всіх $n \geq 2$ та $\alpha \in (0,1]$. Зокрема ми взяли фіксоване n, тому щойно отримана нерівність працюватиме й для $n+1$. Коротше, буде
$\dfrac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} \leq f(\alpha) \leq \dfrac{(n+1)^\alpha(n+1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n+1)}\dfrac{\alpha+n+1}{n+1}$.
Нас з цих двох нерівностей цікавитиме ланцюг з червоних нерівностей:
$f(\alpha) \leq \dfrac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}\dfrac{\alpha+n}{n} \leq \dfrac{\alpha+n}{n}f(\alpha)$.
$\dfrac{n}{\alpha+n}f(\alpha) \leq \dfrac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} \leq f(\alpha)$.
$\dfrac{n}{\alpha+n}f(\alpha) \leq n^\alpha B(\alpha,n)\dfrac{n}{\alpha+n} \leq f(\alpha)$.
Спрямуємо $n \to \infty$. Звідси отримаємо $f(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha,n)\dfrac{n}{\alpha+n}$. Проте якщо продовжити рівність, то можна зауважити, що $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha,n)\dfrac{n}{\alpha+n} = \Gamma(\alpha)$. ■

Remark 1.8.5 Можна було закінчити доведення інакше. Представимо собі, що ми не знаємо, що $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha, n)$. Ми в кінці для кожного $\alpha \in (0, 1]$ отримали $f(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha, n)$, а границя приймає єдине значення. Оскільки нам вже відомо, що Γ задовольняє 1),2),3), то ми би такими сами міркуваннями отримали $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha, n)$ (інший спосіб доведення цієї формули). Оскільки границя єдина, то $\Gamma(\alpha) = f(\alpha)$.