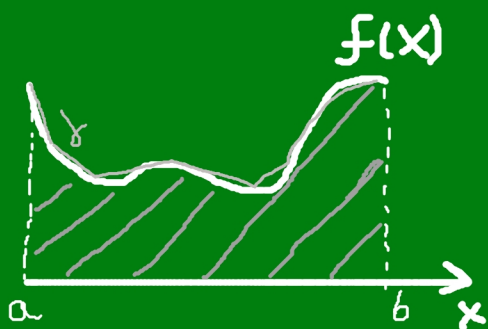
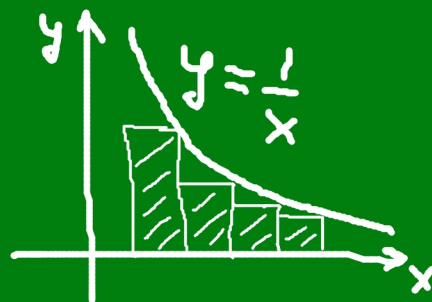


Real analysis II



$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = +\infty$$

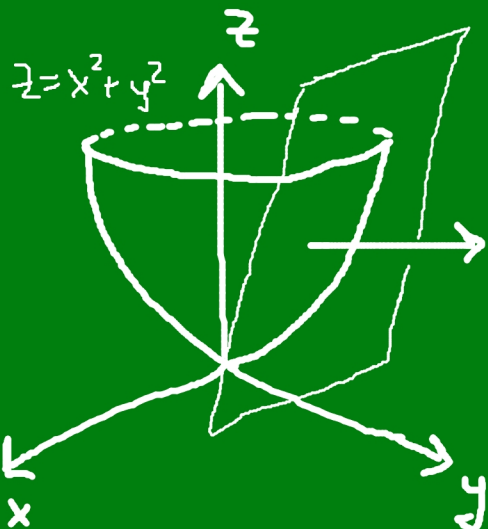
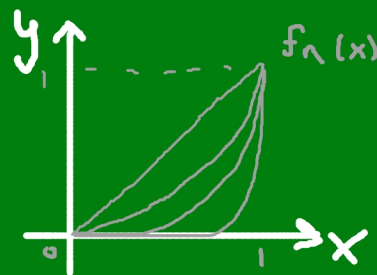


$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots = -\ln 2$$

$$-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots = -\frac{3}{2} \ln 2$$

$$\{f_n(x) = x^n, n \geq 1\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$$



$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Зміст

1	Інтеграл з параметром	3
1.1	Основні означення та властивості	3
1.2	Невласні інтеграл з параметром та ознаки збіжності	6
1.3	Властивості невластного інтегралу	8
1.4	Інтеграл Діріхле	10
1.5	Інтеграл Ойлера-Пуассона	11
1.6	Гамма-функція	12
1.7	Бета-функція	14
1.8	Зв'язок між гамма- та бета-функціями. Основна теорема гамма-функції	15

1 Інтеграли з параметром

1.1 Основні означення та властивості

Definition 1.1.1 Задана функція $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, така, що $\forall y \in [c, d] : f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Інтегралом з параметром називають таку функцію $J: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

Remark 1.1.2 Зауважимо, що якщо додатково вимагати $f \in C([a, b] \times [c, d])$, то отримаємо $\forall y \in [c, d] : f \in C([a, b])$. Таким чином, $\forall y \in [c, d] : f \in \mathcal{R}([a, b])$, а тому функція $J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ буде визначеною коректно.

Proposition 1.1.3 Про неперервність інтеграла з параметром

Задана функція $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a, b] \times [c, d])$. Тоді $J \in C([c, d])$.

Proof.

$$f(x, y) \in C([a, b] \times [c, d]) \implies f(x, y) \in C_{\text{unif}}([a, b] \times [c, d]) \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [a, b] \times [c, d] :$$

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

$$\text{Тоді } |J(y_1) - J(y_2)| = \left| \int_a^b f(x, y_1) dx - \int_a^b f(x, y_2) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y_1) - f(x, y_2)| dx < \varepsilon$$

Якщо я оберу $(x, y_1), (x, y_2)$ так, що $\|(x, y_1) - (x, y_2)\| = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2| < \delta$, то тоді

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

$$\int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon.$$

Збираючи пазл, отримаємо $J \in C_{\text{unif}}([c, d]) \implies J \in C([c, d])$. ■

Proposition 1.1.4 Про диференційованість інтеграла з параметром

Задана функція $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a, b] \times [c, d])$. Відомо, що $\exists \frac{\partial f}{\partial y} \in C([a, b] \times [c, d])$.

Тоді J – диференційована на $[c, d]$, причому $J'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$.

Proof.

Диференційованість означає існування похідної, тобто необхідно довести її існування.

$$\frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y} \int_a^b f(x, y + \Delta y) - f(x, y) dx \equiv$$

Задаємо Ньютона-Лейбніца та властивості інтеграла, розпишемо підінтегральний вираз ось так:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \int_y^{y+\Delta y} f'_y(x, t) dt = \int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt$$

$$\equiv \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left(\int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \right) dx$$

Тепер зафіксуємо точку y_0 та розпишемо праву частину рівності, що ми доводимо:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx = \int_a^b \frac{1}{\Delta y} \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dt \right) dx = \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dt \right) dx$$

Ну а тепер час доводити існування похідної:

$$\left| \frac{J(y_0 + \Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| = \left| \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \right) dx - \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dt \right) dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta y} \int_a^b \left(\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dt \right) dx \right| < \varepsilon$$

За умовою твердження, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C([a, b] \times [c, d]) \implies \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C_{\text{unif}}([a, b] \times [c, d]) \implies$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x, t), (x, y_0) \in [a, b] \times [c, d] : \|(x, t) - (x, y_0)\| < \delta \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

$$\boxed{<} \int_a^b \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{1}{\Delta y} \frac{\varepsilon}{b-a} dt dx = \varepsilon$$

Збираємо пазл – отримаємо, що: $\forall y_0 \in [c, d] : \exists \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{J(y_0 + \Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx = J'(y_0)$.

Отже, J – диференційована на $[c, d]$. ■

Proposition 1.1.5 Про інтегрованість інтеграла з параметром

Задана функція $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a, b] \times [c, d])$. Тоді $J \in \mathcal{R}([c, d])$, причому

$$\underbrace{\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy}_{=J(y)} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Proof.

Розглянемо дві функції: $h(t) = \int_c^t \int_a^b f(x, y) dx dy$ $g(t) = \int_a^b \int_c^t f(x, y) dy dx$.

У нашому випадку $t \in [c, d]$. Якщо $t = c$, то маємо $h(c) = g(c) = 0$. Ми хочемо зараз довести, що $g'(t) = h'(t)$, і тоді за наслідком теореми Лагранжа, $h(t) = g(t) + C$. Підставивши $t = c$, отримаємо $C = 0$, тому $h(t) = g(t)$, зокрема $h(d) = g(d)$ – бажана рівність.

Доведемо те, що хочемо. Зробимо позначення: $h(t) = \int_c^t J(y) dy$, $g(t) = \int_a^b F(x, t) dx$. У цьому

випадку $F(x, t) = \int_c^t f(x, y) dy$

Перший – це інтеграл від верхньої межі, тому $h'(t) = J(t)$.

Покажемо, що другий інтеграл задовольняє умові **Prp. 1.1.4**, тоді можемо знайти похідну.

Спочатку доведемо, що підінтегральна функція $F \in C([a, b] \times [c, d])$ (нижче припускаю $t > t_0$).

$$\begin{aligned} |F(x, t) - F(x_0, t_0)| &= \left| \int_c^t f(x, y) dy - \int_c^{t_0} f(x_0, y) dy \right| = \left| \int_c^t f(x, y) - f(x_0, y) dy - \int_{t_0}^t f(x_0, y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_c^t |f(x, y) - f(x_0, y)| dy + \int_{t_0}^t |f(x_0, y)| dy. \end{aligned}$$

Оскільки $f \in C([a, b] \times [c, d])$, то вона обмежена, тож $\exists M > 0 : \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d] : |f(x, y)| \leq M$.
Оберемо $\varepsilon > 0$. Оскільки $f \in C([a, b] \times [c, d])$, то $\exists \delta > 0 : \forall (x, y) : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. Зокрема оберемо $y_0 = y$, тоді $\forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c}$.

Отже, $|F(x, t) - F(x_0, t_0)| < (t - c) \frac{\varepsilon}{d - c} + (t - t_0)M \leq \varepsilon + \tilde{\delta}M$.

Оберемо $\tilde{\delta} = \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{M} \right\}$. Тоді якщо обрати кожну точку (x, t) так, що $\|(x, t) - (x_0, t_0)\| < \tilde{\delta}$, отримаємо $|F(x, t) - F(x_0, t_0)| < 2\varepsilon$ (при $t < t_0$ все працюватиме).

Тепер зауважимо, що $\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = f(x, t) \in C([a, b] \times [c, d])$.

Отже, дійсно, g можна продиференціювати за **Prp. 1.1.4**, отримаємо наступне:

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx = \int_a^b f(x, t) dx = J(t).$$

Разом ми довели, що хотіли, а саме $g'(t) = h'(t)$ для всіх $t \in [c, d]$. Завершили доведення. ■

Example 1.1.6 Обчислити $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx$.

Маємо $I(\alpha) = \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx$. Розглянемо функцію $f(x, \alpha) = x^2 \cos \alpha x$ на $[0, 2] \times [-1, 1]$ (можна й менше взяти другу сторону, головне щоб навколо точки 0). Ця функція є неперервною, тоді $I(\alpha)$ неперервна, зокрема в точці $\alpha = 0$.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha) = I(0) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

Example 1.1.7 Знайти похідну функції $I(\alpha) = \int_1^2 e^{\alpha x^2} \frac{dx}{x}$.

Позначу $f(x, \alpha) = \frac{e^{\alpha x^2}}{x}$. Знайдемо частинну похідну за другим аргументом: $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{x^2 e^{\alpha x^2}}{x} = x e^{\alpha x^2}$.
Зауважимо, що f та $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ неперервні на прямокутнику $[1, 2] \times [-1, 1]$, тому ми можемо диференціювати

функцію I , а також $I'(\alpha) = \int_1^2 x e^{\alpha x^2} dx$.

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2} \int_1^2 e^{\alpha x^2} dx^2 = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x^2} \Big|_1^2 = \frac{e^{4\alpha} - e^{\alpha}}{2\alpha}.$$

Example 1.1.8 Обчислити $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, якщо $a, b > 0$.

Зауважимо, що $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$. Тоді взагалі маємо обчислити $\int_0^1 \int_a^b x^y dy dx$.

Оскільки функція $f(x, y) = x^y$ є неперервною на прямокутнику $[0, 1] \times [a, b]$, то звідси ми можемо змінити місцями порядок інтегрування, тобто

$$\int_0^1 \int_a^b x^y dy dx = \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln(y+1) \Big|_a^b = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Зараз будуть більш специфічні приклади. Але на них простіше зрозуміти узагальнення теореми про неперервність та диференційованість.

Example 1.1.9 Знайти $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.

Інтуїтивно хочеться, щоб це дорівнювало $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Запишемо наш ліміт ось так:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} + \int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} - \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \right).$$

Перший інтеграл, тобто $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Тому задля нашої інтуїції, треба довести, що останні два інтеграла дорівнюють нулю.

$$\left| \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \right| \leq \int_0^{\alpha} \left| \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \right| \leq \int_0^{\alpha} M dx = M\alpha \rightarrow 0.$$

$$\left| \int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \right| \leq M(1+\alpha-1) \rightarrow 0 \text{ аналогічними міркуваннями.}$$

Тут $M = \max_{x \in [0,2] \times [0,1]} \frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$, і це можна знайти через неперервність самої функції.

$$\text{Отже, } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, теорему про неперервність інтеграла з параметром можна узагальнити.

Theorem 1.1.10 Маємо $f \in C([a, b] \times [c, d])$ та $a(y), b(y) \in C([c, d])$, причому $a(y) \geq a$ та $b(y) \leq b$.

Тоді $J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \in C([c, d])$.

Proof.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y) dx \pm \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y) dx \pm \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x, y) dx \right).$$

Знак \pm залежить від взаємного розташування точок $a(y), b(y), a(y_0), b(y_0)$.

Перший інтеграл неперервний, за **Prp. 1.1.3**. Другий та третій інтеграли оцінюються за модулем так само, як це було на прикладі. Маємо права, бо f обмежується сталою M . Тоді там отримаємо, що ці інтеграли прямують до нуля. ■

Example 1.1.11 Знайти похідну функції $F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx$, нехай $\alpha \geq 0$.

Інтуїтивно хочеться продиференціювати як інтеграл від межі та інтеграл від параметру.

Оскільки $\frac{\ln(1+\alpha x)}{x} = f(x, \alpha)$ неперервна функція, то вона має первісну H . Тоді за формулою Ньютона-Ляйбніца:

$$F(\alpha) = H(x, \alpha) \Big|_{\alpha}^{\alpha^2} = H(\alpha^2, \alpha) - H(\alpha, \alpha) = H(u(\alpha), \alpha) - H(v(\alpha), \alpha), \text{ де } u(\alpha) = \alpha^2, v(\alpha) = \alpha.$$

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \frac{\partial H}{\partial \alpha^2}(\alpha^2, \alpha) \frac{d\alpha^2}{d\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha^2, \alpha) - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha, \alpha) \frac{d\alpha}{d\alpha} - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha, \alpha) \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha^2}(\alpha^2, \alpha) \cdot 2\alpha - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha, \alpha) \cdot 1 \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha^2, \alpha) - \frac{\partial H}{\partial \alpha}(\alpha, \alpha) \right) \\ &= (f(\alpha^2, \alpha) \cdot 2\alpha - f(\alpha, \alpha) \cdot 1) + (f(\alpha^2, \alpha) - f(\alpha, \alpha)). \end{aligned}$$

Підставимо все, що маємо - отримаємо:

$$F'(\alpha) = \frac{\ln(1 + \alpha^3)}{\alpha^2} \cdot 2\alpha - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} + \frac{\ln(1 + \alpha^3)}{\alpha^2} - \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha} = \frac{\ln(1 + \alpha^3)}{\alpha} \left(2 + \frac{1}{\alpha} \right) - 2 \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{\alpha}.$$

Для диференціювання існує більш загальна формула.

Theorem 1.1.12 Маємо $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C([a, b] \times [c, d])$, $a, b \in C([c, d])$, причому $a(y) \geq a$ та $b(y) \leq b$. Тоді

$$J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \text{ буде диференційованою на } [c, d], \text{ причому}$$

$$J'(y) = f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Для її доведення можна скористатися формулою Ньютона-Лейбніца.

1.2 Невласні інтеграли з параметром та ознаки збіжності

Definition 1.2.1 Задана функція $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, де $A, B \subset \mathbb{R}$, та $y_0 \in \mathbb{R}$ - гранична точка для B . Функція f **поточково збігається** до функції φ при $y \rightarrow y_0$, якщо

$$\forall x \in A : \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

Функція f **збігається рівномірно** до функції φ при $y \rightarrow y_0$ на множині A , якщо

$$\sup_{x \in A} |f(x, y) - \varphi(x)| \rightarrow 0, y \rightarrow y_0$$

Позначення: $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$.

Новий вигляд збіжності можна звести до збіжності функціональних послідовностей таким твердженням.

Proposition 1.2.2 $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x)$, $y \rightarrow y_0$ на множині $A \iff \forall \{y_n, n \geq 1\} \subset B : \forall n \geq 1 : y_n \neq y_0 : f(x, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(x)$ на множині A .

Впливає з означення рівномірної збіжності.

Theorem 1.2.3 Критерій Коші

$$f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x), y \rightarrow y_0 \text{ на } A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall y_1, y_2 \in B, y_1, y_2 \neq y_0 : \begin{cases} |y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta \end{cases} \implies \sup_{x \in A} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

Proof.

\Rightarrow Вказівка: означення рівномірної границі та нерівність трикутника.

$$\Leftarrow \text{Дано: } \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall y_1, y_2 \in B, y_1, y_2 \neq y_0 : \begin{cases} |y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta \end{cases} \implies \sup_{x \in A} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

Візьмемо деяку послідовність $\{y_n, n \geq 1\}$, де $y_n \neq y_0, y_n \rightarrow y_0$. Тоді

$\exists N : \forall n, m \geq N : |y_n - y_0| < \delta, |y_m - y_0| < \delta$. За умовою, звідси $\sup_{x \in A} |f(x, y_n) - f(x, y_m)| < \varepsilon$. За

критерієм Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності, $f(x, y_n)$ є рівномірно збіжною на A . Отже, $f(x, y)$ - рівномірно збіжний на A за **Prp. 5.2.2. (TODO: лікування)** ■

Тепер уже до суті цього підрозділу.

Definition 1.2.4 Задана функція $f: [a, \omega) \times A$, така, що $\forall y \in A: \forall c \in [a, \omega): f \in \mathcal{R}([a, c])$. Також маємо збіжний невластний інтеграл із параметром $J(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx, \forall y \in A$.
Невластний інтеграл **збігається рівномірно** на множині A , якщо

$$\sup_{y \in A} \left| \int_a^\omega f(x, y) dx - \int_a^c f(x, y) dx \right| \xrightarrow{c \rightarrow \omega} 0$$

Remark 1.2.5 Воно якось схоже за рівномірну збіжність функції, але трошки не так. Тут розглядається взагалі-то рівномірна збіжність функції $g(x, y)$ до функції $g(y)$ ТА при цьому аргумент $x \rightarrow x_0$.

Theorem 1.2.6 Критерій Коші

$\int_a^\omega f(x, y) dx$ – збіжний рівномірно на $A \iff \forall \varepsilon > 0: \exists C: \forall c_1, c_2 \in (C, \omega): \sup_{y \in A} \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$.
Впливає з критерію Коші рівномірної збіжності функцій.

Theorem 1.2.7 Ознака Ваєрштраса

Задані функції $f: [a, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}, g: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що виконується наступне:

- 1) $\forall x \in [a, \omega): \forall y \in A: |f(x, y)| \leq g(x)$;
- 2) $\int_a^\omega g(x) dx$ – збіжний.

Тоді $\int_a^\omega f(x, y) dx$ – збіжний рівномірно на A .

Proof.

$$\sup_{y \in A} \left| \int_c^\omega f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_c^\omega g(x) dx \right| \xrightarrow{c \rightarrow \omega} 0. \quad \blacksquare$$

Example 1.2.8 Довести, що $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ рівномірно збіжний на множині $[1 + \gamma, +\infty)$, якщо $\gamma > 0$.

Маємо функцію $f(x, \alpha) = \frac{1}{x^\alpha}$. Також відома оцінка $x^\alpha > x^{1+\gamma} \implies \frac{1}{x^\alpha} < \frac{1}{x^{1+\gamma}},$ виконано $\forall x \geq 1$.

Також $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\gamma}}$ – збіжний невластний інтеграл (еталон). Тому за ознакою Вейєрштраса, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ рівномірно збіжний на множині $[1 + \gamma, +\infty)$.

Example 1.2.9 Довести, що $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ не є рівномірно збіжним на множині $(1, +\infty)$.

Дійсно, $\sup_{\alpha > 1} \left| \int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \right| = \sup_{\alpha > 1} \left(\frac{1}{c^{\alpha-1}} \frac{1}{1-\alpha} \right) = +\infty \not\rightarrow 0$ при $c \rightarrow +\infty$.

Theorem 1.2.10 Ознака Діріхле та Абеля

Задані функції $f, g: [a, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що виконана одна з двох пар умов:

$$\left. \begin{array}{l} \int_a^A f(x, y) dx - \text{рівномірно обмежена на } [a, \omega). \\ g - \text{монотонна на } [a, \omega) (\forall y \in A) \text{ та} \\ g(x, y) \xrightarrow{x \rightarrow \omega} 0, x \rightarrow \omega. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \int_a^\omega f(x, y) dx - \text{збіжний рівномірно на } A. \\ g - \text{монотонна на } [a, \omega) (\forall y \in A) \text{ та} \\ \text{рівномірно обмежена на } [a, \omega) \times A. \end{array}$$

ознака Діріхле *ознака Абеля*

Тоді $\int_a^\omega f(x, y)g(x, y) dx$ – рівномірно збіжний на A .

Доведення теореми Діріхле аналогічно доводиться, як це було в розділі про прості невластні інтеграли (TODO: лінкування). Так само із Діріхле впливає Абеля аналогічним чином.

Example 1.2.11 Довести, що $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x} + 1} dx$ збіжний рівномірно на $[\alpha, +\infty), \alpha > 0$.

Розглянемо функції $f(x, y) = \sin xy$ та $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

$\int_0^A \sin xy dx = -\frac{1}{y} \cos xy \Big|_0^A = -\frac{1}{y} \cos Ay + \frac{1}{y}$. Ця штука – рівномірно обмежена на $[0, +\infty)$, тому що

$$\frac{1}{y}|1 - \cos Ay| \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\alpha}, \text{ виконано } \forall A \in [0, +\infty).$$

$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ясно, що монотонна на $[0, +\infty)$ та рівномірно прямує до нуля при $x \rightarrow +\infty$.

Отже, за ознакою Діріхле, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x+1}} dx$ - збіжний рівномірно на $[\alpha, +\infty)$.

Example 1.2.12 Довести, що $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x+1}} \operatorname{arctg} xy dx$ збіжний рівномірно на $[\alpha, +\infty)$, $\alpha > 0$.

Розглянемо функції $f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x+1}}$ та $g(x, y) = \operatorname{arctg} xy$.

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x+1}} dx$ - збіжний рівномірно за попереднім прикладом.

$\operatorname{arctg} xy$ - монотонна по x , а також $\forall x : \forall y : |\operatorname{arctg} xy| \leq \frac{\pi}{2}$, тобто рівномірно обмежена.

Отже, за ознакою Абеля, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sqrt{x+1}} \operatorname{arctg} xy dx$ - збіжний рівномірно на $[\alpha, +\infty)$.

Theorem 1.2.13 Ознака Діні

Задано функцію $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$. Також відомо, що $f \geq 0$ та $J(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx \in C([c, d])$.

Тоді J - збіжний рівномірно на $[c, d]$.

Proof.

Доведення ознаки прямо випливає з теореми Діні про рівномірну збіжність функціонального ряду. Для спрощення доведення розгляну випадок, коли $\omega = +\infty$.

Розглянемо функціональну послідовність $g_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y) dx$, які визначені на $[c, d]$. Зауважи-

мо, що $g_n \in C([c, d])$ за **Prp. 1.1.3**. Далі, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx = J(y) \in C([c, d])$. Нарешті, всі $g_n(y)$ неспадають в силу того, що $f \geq 0$.

Отже, за ознакою Діні для функціональної послідовності, g_n збігається рівномірно до J при $n \rightarrow \infty$.

Тоді звідси $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall y \in [c, d] : |g_N(y) - J(y)| < \varepsilon$. Тобто маємо $\left| \int_{a+N}^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$.

Оберемо $C = a + N$, тоді $\forall c > C$ та $\forall y \in [c, d]$ матимемо $\left| \int_c^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$. Власне, це доводить рівномірну збіжність J на $[c, d]$. ■

1.3 Властивості невластного інтегралу

Proposition 1.3.1 Про неперервність невластного інтеграла з параметром

Задана функція $f : [a, \omega) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$. Також J - рівномірно збіжний на $[c, d]$. Тоді $J \in C([c, d])$.

Proof.

За означенням рівномірної збіжності, маємо $\sup_{y \in [c, d]} \left| \int_\xi^\omega f(x, y) dx \right| \rightarrow 0, \xi \rightarrow \omega$. Іншими словами,

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \xi > a : \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_\xi^\omega f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тепер оцінимо J :

$$\begin{aligned} |J(y_1) - J(y_2)| &= \left| \int_a^\omega f(x, y_1) dx - \int_a^\omega f(x, y_2) dx \right| = \\ &= \left| \int_a^\xi f(x, y_1) dx - \int_a^\xi f(x, y_2) dx + \int_\xi^\omega f(x, y_1) dx - \int_\xi^\omega f(x, y_2) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^\xi f(x, y_1) - f(x, y_2) dx \right| + \left| \int_\xi^\omega f(x, y_1) dx \right| + \left| \int_\xi^\omega f(x, y_2) dx \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Перший модуль: $f \in C_{\text{unif}}([a, \xi] \times [c, d])$, тоді $\exists \delta : \forall y_1, y_2 : |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{\xi - a}$.

Другий модуль: $\sup_{y \in [c, d]} \left| \int_\xi^\omega f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \forall y \in [c, d] : \left| \int_\xi^\omega f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\boxed{<} \int_a^\xi \frac{\varepsilon}{\xi - a} dx + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Збираємо пазл та маємо $J \in C_{\text{unif}}([c, d]) \implies J \in C([c, d])$. ■

Proposition 1.3.2 Про інтегрованість невластного інтеграла з параметром

Задана функція $f: [a, \omega) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, така, що $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$. Також J – рівномірно збіжний на $[c, d]$. Тоді $J \in \mathcal{R}([c, d])$, причому $\int_c^d \underbrace{\int_a^\omega f(x, y) dx}_{=J(y)} dy = \int_a^\omega \int_c^d f(x, y) dy dx$.

Proof.

Розпишемо інтеграл $\int_c^d J(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy + \int_c^d \int_b^\omega f(x, y) dx dy$.

Перший доданок – це визначений інтеграл, тому там виконується **Prp 3.1.4.** (TODO: лінкування),

тобто $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$.

Другий доданок уже цікавіше, його ми оцінимо:

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d \int_b^\omega f(x, y) dx dy \right| &\leq \int_c^d \left| \int_b^\omega f(x, y) dx \right| dy \leq \int_c^d \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_b^\omega f(x, y) dx \right| dy = \\ &= \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_b^\omega f(x, y) dx \right| (d - c) \rightarrow 0, b \rightarrow \omega. \text{ Якщо } b \rightarrow \omega, \text{ то тоді отримаємо} \\ \int_c^d J(y) dy &= \int_a^\omega \int_c^d f(x, y) dx dy + 0 = \int_a^\omega \int_c^d f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$
■

Proposition 1.3.3 Про диференційованість невластного інтеграла з параметром

Задана функція $f: [a, \omega) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, така, що виконані умови:

- 1) $\exists y_0 \in [c, d] : J(y_0)$ – збіжний;
- 2) $\frac{\partial f}{\partial y} \in C([a, \omega) \times [c, d])$;
- 3) $\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ – рівномірно збіжний.

Тоді J – збіжний, диференційований на $[c, d]$, при цьому $J'(y) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$.

Proof.

Розглянемо функцію $I(y) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$. Оскільки $\frac{\partial f}{\partial y}$ неперервна та I – рівномірно збіжний, то тоді за **Prp. 3.2.6.** (TODO: лінкування), $I \in \mathcal{R}([y, y_0])$.

$$\int_{y_0}^y I(t) dt = \int_a^\omega \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt dx = \int_a^\omega f(x, y) - f(x, y_0) dx = J(y) - J(y_0).$$

Отже, $J(y) = \int_{y_0}^y I(t) dt + J(y_0)$ – збіжний $\forall y \in [c, d]$, як сума окремих збіжних доданків. Значить,

$$J'(y) = I(y) - 0 = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$
■

Example 1.3.4 Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(\tg x)}{\tg x} dx$.

Ми розглянемо функцію $J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(y \tg x)}{\tg x} dx$. Про неї відомо, що:

- 1) $\exists y_0 = 0 : J(0) = 0$, тобто зв'язний;
- 2) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + y^2 \tg^2 x} \in C\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \times [-1, 1]\right)$;
- 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + y^2 \tg^2 x} dx$ – збіжний рівномірно принаймні на $[-1, 1]$ за мажорантною Ваєрштраса. Дійсно, $\frac{1}{1 + y^2 \tg^2 x} \leq 1, \forall y \in [-1, 1]$.

Отже, ми можемо продиференціювати функцію $J(y)$ та отримати:

$$J'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^2 \operatorname{tg}^2 x} dx \stackrel{t=\operatorname{tg} x}{=} \dots = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+y}.$$

$$J(y) = \int \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+y} dy = \frac{\pi}{2} \ln |1+y| + C.$$

Оскільки $J(0) = 0$, то звідси $C = 0$. Наша мета була – це знайти $J(1)$. Таким чином,

$$J(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Proposition 1.3.5 Про невластне інтегрування невластного інтеграла з параметром

Задана функція $f \in C([a, +\infty) \times [c, +\infty))$, причому $f \geq 0$. Також відомо, що $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \in C([c, +\infty))$, а також $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \in C([a, +\infty))$. Тоді якщо $\int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy$ – збіжний, то

$\int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} f(x, y) dy dx$ – збіжний. Навпаки теж. Нарешті,

$$\int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} f(x, y) dy dx.$$

Proof.

Позначимо $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$, про неї відомо, що $I \in C([c, +\infty))$, а також $\int_c^{+\infty} I(y) dy$ – збіжний.

Хочемо довести, що $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R \int_c^{+\infty} f(x, y) dy dx = \int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy$.

Відомо, що $\int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy$ – збіжний, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta_1 : \forall d > c : d > \Delta_1 \implies \left| \int_d^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Також відомо, що $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ – збіжний рівномірно за ознакою Діні, тоді

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta_2 : \forall R > a : R > \Delta_2 \implies \forall y \in [c, +\infty) : \left| \int_R^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}.$$

Оберемо $\Delta = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$, фіксуємо довільне $d > \Delta$ та $R > \Delta$ таким чином, щоб $d > c, R > a$.

А далі для доведення ліміту зробимо оцінку:

$$\begin{aligned} & \left| \int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy - \int_c^{+\infty} \int_a^R f(x, y) dx dy \right| = \left| \int_c^{+\infty} \int_R^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| = \\ & = \left| \int_c^d \int_R^{+\infty} f(x, y) dx dy + \int_d^{+\infty} \int_R^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| \leq \left| \int_c^d \int_R^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| + \left| \int_d^{+\infty} \int_R^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| \leq \\ & \leq \int_c^d \left| \int_R^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| + \left| \int_d^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy \right| < \int_c^d \frac{\varepsilon}{2(d-c)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином, дійсно, $\int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} f(x, y) dy dx = \int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy$. ■

1.4 Інтеграл Діріхле

Інтегралом Діріхле називають таку рівність, яку зараз доведу (про збіжність вже говорили) (TODO: лінкування)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Розглянемо функцію $J(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$, причому підінтегральну функцію ми довізначимо в точці 0. Тоді підінтегральна функція неперервна.

Перш за все $J(a)$ – рівномірно збіжний на $[0, +\infty)$, бо за ознакою Абеля, маємо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ – збіжний рівномірно (доводили);}$$

e^{-ax} – монотонна відносно x та рівномірно обмежена, бо $|e^{-ax}| \leq 1$.

Із цього ми отримуємо, що $J \in C([0, +\infty))$, а тому $J(0) = \lim_{a \rightarrow 0} J(a)$. Далі маємо наступне:

- 1) $\exists a_0 = 0 : J(0)$ – збіжний;
- 2) $\frac{\partial f}{\partial a} = -e^{-ax} \sin x \in C([0, +\infty) \times [0, +\infty))$;
- 3) $-\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x \, dx$ збіжний рівномірно на $[\gamma, +\infty)$, де $\gamma > 0$, за мажорантною Ваєрштраса.

Дійсно, $|e^{-ax} \sin x| \leq e^{-\gamma x}$, а $\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \, dx$ – збіжний.

Таким чином, $J'(a) = -\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x \, dx = \dots = -\frac{1}{1+a^2}$.

$J(a) = -\arctg a + C$, причому ця рівність виконана $\forall a \in [\gamma, +\infty)$. Але водночас $J(0) = \lim_{a \rightarrow 0} J(a) = C$.

Проте ще маємо, що $|J(a)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \, dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right| \, dx \stackrel{|\sin x| \leq x}{\leq} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a}$.

А тому $J(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow +\infty$. Звідси випливає, що $0 = -\frac{\pi}{2} + C \implies J(0) = \frac{\pi}{2}$.

Додатково дослідимо ось такий інтеграл та доведемо рівність:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$$

Поки обмежимося $a > 0$, тоді

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx \stackrel{ax=t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

$F(-a) = -F(a) = -\frac{\pi}{2}$ та $F(0) = 0$ – тут відносно ясно.

1.5 Інтеграл Ойлера-Пуассона

Інтегралом Ойлера-Пуассона називають таку рівність, яку зараз доведу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Позначимо $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$. Зробимо заміну $x = at$. А потім помножимо обидві частини рівності на e^{-a^2} . Разом отримаємо рівність:

$$J e^{-a^2} = \int_0^{+\infty} e^{-a^2} e^{-a^2 t^2} a \, dt.$$

А потім проінтегруємо обидві частини рівності по a на $[0, +\infty)$ – отримаємо:

$$\int_0^{+\infty} J e^{-a^2} \, da = J \int_0^{+\infty} e^{-a^2} \, da = J^2.$$

А з іншого боку, ми отримали:

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2} e^{-a^2 t^2} a \, dt \, da \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2 - a^2} a \, da \, dt \stackrel{s=-a^2 t^2 - a^2}{=} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2 + 1)} \int_{-\infty}^0 e^s \, ds \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2 + 1)} \, dt = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Отже, взявши квадратний корінь, отримаємо $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (ясно, що J – невід’ємне число).

Варто обґрунтувати рівняння зі знаком питання. Для цього перевіримо всі умови для невластного інтегрування невластного інтеграла. Функція $f(t, a) = a e^{-a^2(t^2+1)} \in C([0, +\infty) \times [0, +\infty))$, причому $f \geq 0$. Також

$\int_0^{+\infty} a e^{-a^2(t^2+1)} \, da = \frac{1}{2} \frac{1}{t^2 + 1} \in C([0, +\infty))$ та $\int_0^{+\infty} a e^{-a^2(t^2+1)} \, dt = J e^{-a^2} \in C([0, +\infty))$ (неважко довести, що J рівномірно збігається).

Нарешті, $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} a e^{-a^2(t^2+1)} \, da \, dt$ ми знайшли вище, який виявився збіжним. Отже, рівність ‘?’ є справедливою.

1.6 Гамма-функція

Definition 1.6.1 Гамма-функцією називають таку функцію:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0$$

Lemma 1.6.2 При $\alpha > 0$ гамма-функція збіжна.

Proof.

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка – це точка $x = 0$. Порівняємо з інтегралом $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx$ – збіжний при $\alpha > 0$. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1. \text{ Отже, обидва збіжні, тому перший доданок – збіжний при } \alpha > 0.$$

Розглянемо другий інтеграл. Особлива точка – це $x = \infty$. Порівняємо з інтегралом $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$ – збіжний. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \begin{cases} 0 \text{ за Лопіталем, } \alpha \geq 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1-\alpha} e^{\frac{x}{2}}} = 0, \alpha < 1 \end{cases}. \text{ Отже, обидва збіжні, тому другий доданок – збіжний}$$

при всіх $\alpha \in \mathbb{R}$ (у тому числі при $\alpha > 0$).

Остаточно, $\Gamma(\alpha)$ – збіжний при $\alpha > 0$. ■

Lemma 1.6.3 $\Gamma \in C^\infty((0, +\infty))$.

Proof.

Коли будемо диференціювати n разів гамма-функцію, ми очікуватимемо таке:

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x dx.$$

Спробуємо зараз довести, що $\Gamma^{(n)}$ – рівномірно збіжний на проміжку $[a, b] \subset (0, +\infty)$.

$$\text{Маємо } \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x dx.$$

Розглянемо перший інтеграл. Використаємо мажорантну Ваєрштраса:

$$|x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x| = x^{\alpha-1} e^{-x} (-1)^n \ln^n x \leq \begin{cases} (-1)^n x^{b-1} e^{-x} \ln^n x \\ (-1)^n x^{a-1} e^{-x} \ln^n x \end{cases}.$$

Ситуації тут можуть бути різними, але поведінка інтеграла не зміниться. Я буду на розгляд брати перший випадок. Тобто дослідимо $\int_0^1 x^{b-1} e^{-x} \ln^n x dx$ на збіжність. Відомо, що $\ln x = o(x^{-\varepsilon})$, $x \rightarrow 0$, де $\varepsilon > 0$. Тоді правилом Лопіталя можна довести, що $\ln^n x = o(x^{-\varepsilon})$, $x \rightarrow 0$.

Завдяки цьому, ми візьмемо $\int_0^1 x^{b-1} x^{-\varepsilon} e^{-x} dx$ – збіжний, допоки $b > \varepsilon$. Це доводили під час попередньої леми. А далі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{b-1} e^{-x} \ln^n x}{x^{b-1} x^{-\varepsilon} e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^n x}{x^{-\varepsilon}} = 0$.

Отже, $\int_0^1 x^{b-1} e^{-x} \ln^n x dx$ – збіжний. І тому за мажорантною Вейєрштраса, $\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x dx$ – збіжний рівномірно на $[a, b]$.

Аналогічно доводиться, що $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x dx$ – збіжний рівномірно на $[a, b]$. Там та сама оцінка на мажоранту, а також треба використати $\ln x = o(x^\varepsilon)$, $x \rightarrow +\infty$, де $\varepsilon > 0$.

Остаточно, $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x dx$ – збіжний рівномірно на $[a, b] \subset (0, +\infty)$, що й доводить той факт, що $\Gamma \in C^\infty((0, +\infty))$. ■

Theorem 1.6.4 $\forall \alpha > 0 : \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$.

Вказівка: $\Gamma(\alpha + 1)$ інтегруємо частинами, взявши за $u = x^\alpha$, $dv = e^{-x} dx$.

Corollary 1.6.5 $\Gamma(n + 1) = n!$ при $n \in \mathbb{N}$.

Proof.

Дійсно, за попередньою теоремою, маємо таку рівність:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1\Gamma(1).$$

$$\text{Нарешті, обчислимо } \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1. \quad \blacksquare$$

Corollary 1.6.6 $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$

Proof.

Дійсно, за попередньою теоремою, маємо таку рівність:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) &= \Gamma\left(n - \frac{1}{2} + 1\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2} + 1\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \left(n - \frac{2n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 1}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Нарешті, обчислимо } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \stackrel{\text{Заміна: } t=\sqrt{x}}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \quad \blacksquare$$

Remark 1.6.7 До речі кажучи, завдяки функціональному рівнянню $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, ми можемо продовжити нашу функцію на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Якщо я хочу порахувати $\Gamma(-0.5)$, то для цього я просто визначаю його як $\Gamma(-0.5) = \frac{\Gamma(0.5)}{-0.5}$. Для

цілих чисел я продовження не можу зробити, бо $\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1}$, проте $\Gamma(0)$ тупо не визначена. Якби $\Gamma(0)$ була визначена, то $\Gamma(1) = 0 \cdot \Gamma(0) = 0$, але ми знаємо, що $\Gamma(1) = 1$ – тому визначити не можна.

Графік гамма-функції

Proposition 1.6.8 $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Gamma(\alpha) = +\infty.$

Proof.

Маємо $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ для великих $\alpha > 0$. Оцінимо $\Gamma(\alpha)$.

$$\Gamma(\alpha) > \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx > \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e}.$$

$$\text{Таким чином, } \Gamma(\alpha+1) > \frac{\alpha}{e} \rightarrow +\infty \text{ при } \alpha \rightarrow +\infty. \quad \blacksquare$$

Proposition 1.6.9 $\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \Gamma(\alpha) = +\infty.$

Proof.

$$\text{Дійсно, маємо } \Gamma(\alpha) > \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \geq \frac{1}{e} \int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{x^\alpha}{\alpha e} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha e} \rightarrow +\infty. \quad \blacksquare$$

Proposition 1.6.10 Гамма-функція опукла вниз на проміжку $(0, +\infty)$.

Proof.

$$\text{Дійсно, } \Gamma''(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^2 x dx > 0 \text{ при всіх } \alpha > 0. \quad \blacksquare$$

Proposition 1.6.11 $\Gamma'(1) = -\gamma$, де γ – константа Ойлера-Маскероні.

Proof.

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx \stackrel{\text{заміна: } x=-\ln u}{=} \int_0^1 \ln(-\ln u) du \quad \square$$

Пригадаємо, що $\ln a = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$. За допомогою цього ліміту, ми можемо отримати наступне:

$$\square \int_0^1 \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt[n]{u}) \right) du \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln n + \ln(1 - \sqrt[n]{u}) du = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n + \int_0^1 \ln(1 - \sqrt[n]{u}) du \right) \quad \square$$

Тепер згадаємо, що $\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$, тож звідси випливає наступне:

$$\int_0^1 \ln(1 - \sqrt[n]{x}) du = -\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt[n]{u})^k}{k} du = -\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u^{\frac{k}{n}}}{k} du = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{\frac{k}{n} + 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k(k+n)} =$$

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

$$\boxed{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right) = -\gamma.$$

Окремо варто пояснити рівність $\stackrel{?}{=}$, щоб все було цілком строго. (TODO: додати) ■

Proposition 1.6.12 $\Gamma'(2) = 1 - \gamma$.

Proof.

Маємо рівняння $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, яке ми продиференціюємо.

$$\Gamma'(\alpha + 1) = \Gamma(\alpha) + \alpha\Gamma'(\alpha).$$

Власне, звідси отримаємо $\Gamma'(2) = \Gamma(1) + \Gamma'(1) = 1 - \gamma$. ■

Remark 1.6.13 Таким чином, буде простіше дослідити похідну. По-перше, оскільки $\Gamma'' \geq 0$, то тоді звідси Γ' має бути неспадною на $(0, +\infty)$. По-друге, між $(1, 2)$ існує точка α_0 , яка буде точкою локального мінімуму. В силу неспадності похідної отримаємо, що на $(1, \alpha_0)$ гамма-функція спадатиме та на $(\alpha_0, +\infty)$ гамма-функція зростатиме.

Proposition 1.6.14 Гамма-функція логарифмічно опукла вниз на проміжку $(0, +\infty)$.

Proof.

Тобто хочемо довести, що $\ln \Gamma$ опукла вниз на $(0, +\infty)$. Маємо

$$(\ln \Gamma)'' = \frac{1}{\Gamma^2} (\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2).$$

Також, за допомогою нерівності Коші-Буняковського, ми доведемо наступне:

$$\begin{aligned} (\Gamma'(\alpha))^2 &= \left(\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln x \, dx \right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \left(x^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \right) \left(x^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \ln x \right) dx \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(x^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx \right) \left(\int_0^{+\infty} \left(x^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \ln x \right)^2 dx \right) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^2 x \, dx = \\ &= \Gamma(\alpha) \Gamma''(\alpha). \end{aligned}$$

Власне, це доводить, що $(\Gamma')^2 - \Gamma\Gamma'' \leq 0$, а тому звідси $(\ln \Gamma)'' > 0$, що доводить бажане. ■

1.7 Бета-функція

Definition 1.7.1 Бета-функцією називають таку функцію:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0$$

Lemma 1.7.2 При $\alpha, \beta > 0$ бета-функція збіжна.

Proof.

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Розглянемо перший інтеграл. Особлива точка – це точка $x = 0$. Порівняємо з інтегралом $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} dx$ – збіжний для $\alpha > 0$. Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}} = 1. \text{ Отже, обидва збіжні, тому перший доданок – збіжний.}$$

Розглянемо другий інтеграл. Проводимо заміну $1-x = t$, тоді маємо:

$$- \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt \text{ – це той самий перший доданок. І він вже буде збіжним, якщо } \beta > 0.$$

Остаточно, $B(\alpha, \beta)$ – збіжний при $\alpha > 0, \beta > 0$. ■

$$\textbf{Proposition 1.7.3} \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy.$$

Вказівка: зробити заміну $x = \frac{y}{1+y}$.

Proposition 1.7.4 $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.

Вказівка: $x = 1 - t$.

Proposition 1.7.5 $B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - 1}{\beta + \alpha - 1} B(\alpha - 1, \beta)$ при $\alpha > 1$.

Вказівка: інтегруємо частинами, де $u = x^{\alpha-1}$ та решта dv .

Зауважимо, що $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha) = \frac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 1} B(\beta - 1, \alpha) = \frac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 1} B(\alpha, \beta - 1)$ при $\beta > 1$.

Ще зауважимо, що $B(\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha}$, якщо порахувати бета-функцію.

Використовуючи два зауваження, можемо отримати ось це:

$$B(\alpha, n) = \frac{n-1}{\alpha+n-1} B(\alpha, n-1) = \frac{n-1}{\alpha+n-1} \frac{n-2}{\alpha+n-2} \cdots \frac{2}{\alpha+2} \frac{1}{\alpha+1} \frac{1}{\alpha} = \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}.$$

Зокрема при $\alpha = m$ ми отримаємо $B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$.

1.8 Зв'язок між гамма- та бета-функціями. Основна теорема гамма-функції

Proposition 1.8.1 $\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha B(\alpha, n)$.

Proof.

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \stackrel{x=\ln \frac{1}{u}}{=} \int_0^1 \ln^{\alpha-1} \frac{1}{u} du = \int_0^1 (-\ln u)^{\alpha-1} du = \int_0^1 \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1-u^t}{t} \right)^{\alpha-1} du = \\ &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-u^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} \right)^{\alpha-1} du \stackrel{\Gamma \in C((0, +\infty))}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n^{\alpha-1} (1-u^{\frac{1}{n}})^{\alpha-1} du \stackrel{u=s^n}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \int_0^1 s^{n-1} (1-s)^{\alpha-1} ds = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha B(n, \alpha) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Theorem 1.8.2 Формула подвоєння Лежандра

$$2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha).$$

Proof.

Позначимо функцію $f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) 2^{\alpha-1}$ при $\alpha > 0$. Вона задовольняє умові теореми Бора-Молерупа. Перевіримо три пункти:

- 1) $f(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) 2^{1-1} = 1$;
- 2) $f(\alpha+1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right) 2^\alpha = \alpha f(\alpha)$;
- 3) $\ln f(\alpha) = -\ln \sqrt{\pi} + \ln \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \ln \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + (\alpha-1) \ln 2$.

Кожна з функцій (у тому числі константи) опуклі вниз, тому $\ln f(\alpha)$ також опукла вниз як сума. Значить задана функція $f(\alpha) = \Gamma(\alpha)$, що дає формулу Лежандра. ■

Theorem 1.8.3 Функціональне рівняння Ойлера

$$\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \text{ при } 0 < \alpha < 1.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{\cos \pi \alpha} \text{ при } -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Proof.

Використовує **Prp 3.8.1**. (TODO: лікування) отримаємо:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\alpha} \frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha) \dots (n-\alpha)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-\alpha} \frac{1}{\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{1}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right)} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{1}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha}{n-1}\right)} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)} \end{aligned}$$

В теорії рядів Фур'є (колись згодом) ми одержимо формулу:

$$\sin(\pi\alpha) = \pi\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right) \stackrel{\text{або}}{=} \pi\alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right).$$

$$\text{Власне звідси отримаємо } \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Друга формула вказівка: заміна $\beta = \alpha + \frac{1}{2}$. ■

Theorem 1.8.4 Зв'язок між Γ та B

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Proof.

Розглянемо $\Gamma(\alpha + \beta)$ та проведемо заміну $x = y(t+1)$, $dx = (t+1) dy$.

$$\Gamma(\alpha + \beta) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1} e^{-x} dx = (t+1)^{\alpha+\beta} \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-y(t+1)} dy.$$

Отримаємо

$$\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-y(t+1)} dy$$

Помножимо обидві частини на $t^{\alpha-1}$ та проінтегруємо від 0 до $+\infty$ по t :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} \Gamma(\alpha + \beta) dt = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} t^{\alpha-1} e^{-y} e^{-yt} dy dt$$

$$\Gamma(\alpha + \beta) \cdot B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} y^{\beta-1} e^{-y} \int_0^{+\infty} y^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-yt} dt dy.$$

Внутрішній інтеграл при заміні $yt = x$ стане рівним $\Gamma(\alpha)$. Його виносимо з-під зовнішнього інтегралу, а сам інтеграл вже є $\Gamma(\beta)$. Тоді

$$\Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta).$$

А тепер час обґрунтувати обережно зміну порядку інтегрування: із $dy dt$ до $dt dy$.

Розглянемо функцію $f(t, y) = y^{\alpha+\beta-1} t^{\alpha-1} e^{-y(t+1)}$. Ми обмежимося лише випадком $\alpha > 1, \beta > 1$.

Зрозуміло, що $f \geq 0$, а також $f \in C([0, +\infty) \times [0, +\infty))$. В т. $(t, 0), (0, y)$ все ок, тому що при наших α, β ми маємо $y^{\alpha+\beta-1} \rightarrow 0, t^{\alpha-1} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0, t \rightarrow 0$.

$$I(y) \int_0^{+\infty} f(t, y) dt = \Gamma(\alpha) y^{\beta-1} e^{-y} - \text{це ми рахували вище. } F \in C([0, +\infty)).$$

$$J(t) = \int_0^{+\infty} f(t, y) dy = \Gamma(\alpha + \beta) \frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha+\beta}} - \text{теж вище було. } J \in C([0, +\infty)).$$

$$\text{Також } \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t, y) dt ds = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta), \text{ тобто це - збіжний інтеграл.}$$

Отже, зміна порядку інтегралів є справедливою лише для $\alpha > 1, \beta > 1$, тобто

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \text{ справедлива для } \alpha, \beta > 1.$$

$$B(\alpha - 1, \beta - 1) = \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1} B(\alpha, \beta - 1) = \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1} \cdot \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta - 1} B(\alpha, \beta), \text{ а тут уже } \alpha, \beta > 1. \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned} B(\alpha - 1, \beta - 1) &= \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1} \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta - 1} B(\beta, \alpha) = \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1} \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta - 1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - 1} \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta - 1} \frac{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)(\beta - 1)\Gamma(\beta - 1)}{(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2)\Gamma(\alpha + \beta - 2)} = \frac{\Gamma(\alpha - 1)\Gamma(\beta - 1)}{\Gamma(\alpha - 1 + \beta - 1)}. \end{aligned}$$

Отже, ми довели нашу формулу зв'язка для всіх $\alpha > 0, \beta > 0$. ■

Theorem 1.8.5 Теорема Бора-Молерупа

Припустимо, що задана функція $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняє умовам:

- 1) $f(1) = 1$;
- 2) $f(\alpha + 1) = \alpha f(\alpha)$ при $\alpha > 0$;
- 3) f - логарифмічно опукла вниз функція на $(0, +\infty)$.

Тоді функція $f \equiv \Gamma$, тобто є гамма-функцією.

Тобто гамма-функція - єдина можлива функція, яка задовольняє трьом властивостям вище.

Proof.

Із умов 1), 2) випливає, що $f(n) = (n-1)!$ при $n \in \mathbb{N}$. Отже, нам достатньо показати рівність $f(\alpha) = \Gamma(\alpha)$ лише при $\alpha \in (0, 1]$.

Умова 3) каже, що $\ln f$ опукла вниз на $(0, +\infty)$. Це означає, що на інтервалі $[n-1, n+1]$ та точці $n+\alpha, \alpha \in (0, 1], n \geq 2$ маємо наступну нерівність:

$$\frac{\ln f(n-1) - \ln f(n)}{n-1-n} \leq \frac{\ln f(n+\alpha) - \ln f(n)}{n+\alpha-n} \leq \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{n+1-n}.$$

Зауважимо, що $\ln f(n-1) - \ln f(n) = \ln \frac{1}{n-1} = -\ln(n-1)$, а також $\ln f(n+1) - \ln f(n) = \ln n$.

Зважаючи на знаменники, отримаємо такі нерівності:

$$\ln(n-1) \leq \frac{\ln f(n+\alpha) - \ln(n-1)!}{\alpha} \leq \ln n.$$

$$\ln(n-1)^\alpha = \alpha \ln(n-1) \leq \ln f(n+\alpha) - \ln(n-1)! \leq \alpha \ln n = \ln n^\alpha.$$

Далі проекспоненціюємо нерівності з обох сторін:

$$(n-1)^\alpha \leq \frac{f(n+\alpha)}{(n-1)!} \leq n^\alpha;$$

$$(n-1)^\alpha (n-1)! \leq f(n+\alpha) \leq n^\alpha (n-1)!.$$

За пунктом 2), отримаємо $f(n+\alpha) = (\alpha+n-1) \dots (\alpha+1) \alpha f(\alpha)$. Звідси випливає:

$$\frac{(n-1)^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)} \leq f(\alpha) \leq \frac{n^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}$$

$$\frac{(n-1)^\alpha (n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)} \leq f(\alpha) \leq \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)} \frac{\alpha+n}{n}$$

Дана нерівність виконана для всіх $n \geq 2$ та $\alpha \in (0, 1]$. Зокрема ми взяли фіксоване n , тому щойно отримана нерівність працюватиме й для $n+1$. Коротше, буде

$$\frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)} \leq f(\alpha) \leq \frac{(n+1)^\alpha (n+1)!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n+1)} \frac{\alpha+n+1}{n+1}.$$

Нас з цих двох нерівностей цікавитиме ланцюг з червоних нерівностей:

$$f(\alpha) \leq \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)} \frac{\alpha+n}{n} \leq \frac{\alpha+n}{n} f(\alpha).$$

$$\frac{n}{\alpha+n} f(\alpha) \leq \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)} \leq f(\alpha).$$

$$\frac{n}{\alpha+n} f(\alpha) \leq n^\alpha B(\alpha, n) \frac{n}{\alpha+n} \leq f(\alpha).$$

Спрямуємо $n \rightarrow \infty$. Звідси отримаємо $f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha B(\alpha, n) \frac{n}{\alpha+n}$. Проте якщо продовжити рівність, то можна зауважити, що $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha B(\alpha, n) \frac{n}{\alpha+n} = \Gamma(\alpha)$. ■

Remark 1.8.6 Можна було закінчити доведення інакше. Представимо собі, що ми не знаємо, що $\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha B(\alpha, n)$. Ми в кінці для кожного $\alpha \in (0, 1]$ отримали $f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha B(\alpha, n)$, а границя приймає єдине значення. Оскільки нам вже відомо, що Γ задовольняє 1), 2), 3), то ми би такими самими міркуваннями отримали $\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha B(\alpha, n)$ (інший спосіб доведення цієї формули). Оскільки границя єдина, то $\Gamma(\alpha) = f(\alpha)$.