КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Кафедра теоретичної кібернетики

Звіт до лабораторної роботи №2

з дисципліни: **«Числові методи»**

Виконав студент 3-го курсу

Групи ТК-32

Горшков Денис

Київ – 2025

1. Вступ

У цій лабораторній роботі розглянуто три основні методи розв’язування СЛАР:

Метод Гаусса, який є універсальним прямим методом та дозволяє знаходити розв’язок довільної невиродженої системи, а також обчислювати визначник та обернену матрицю;

Метод прогонки (алгоритм Томаса) — оптимізований метод для тридіагональних матриць, що дає змогу значно зменшити кількість операцій порівняно з методом Гаусса;

Метод Зейделя, який є ітераційним методом та потребує виконання умов збіжності, таких як діагональна перевага матриці.

У роботі здійснюється автоматична генерація матриці розміру 4×4 з цілими елементами за модулем менше 10 та побудова відповідного вектора правої частини з урахуванням умов, необхідних для збіжності ітераційного методу. Окрім розв’язання системи, додатково обчислюється визначник матриці та обернена матриця методами, які дозволяють це виконати (метод Гаусса).

Мета роботи

Метою лабораторної роботи є дослідження та порівняння різних методів розв’язування СЛАР, а саме:

- реалізація методу Гаусса для знаходження розв'язку системи, визначника та оберненої матриці;
- реалізація методу прогонки для розв'язання тридіагональних систем;
- реалізація методу Зейделя як ітераційного методу розв'язання СЛАР з можливістю введення користувачем бажаної точності;
- порівняння отриманих розв'язків та аналіз правильності роботи кожного **алгоритму.**

2. Постановка задачі

Варіант № 3. Метод Гаусса, метод прогонки, метод Зейделя.

Згенерувати матрицю 4x4 з цілими елементами за модулем менше 10 та вектор правої частини з урахуванням обмежень та достатніх умов збіжності, що накладаються методами у вашому варіанті. Порахувати визначник матриці та обернену матрицю тими методами, що мають відповідне застосування. Для ітераційного методу бажану точність розв'язку СЛАР зробити параметром, який може вводити користувач.

3. Теоретичні відомості

3.1. Метод Гаусса

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Ax = b,$$

де A – матриця розмірності $n \times n$, $\det A \neq 0$, отже розв'язок системи існує і він єдиний.

Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь поділяються на прямі та ітераційні:

1) прямі методи:

– метод Гаусса з вибором головного елемента,

– метод квадратних коренів,

– метод прогонки;

2) ітераційні методи:

– метод Якобі,

– метод Зейделя.

Прямі методи застосовують для матриць невеликої розмірності n < 10^2 , а ітераційні для розріджених матриць, чи коли n > 10^2 . Матрицю назвемо розрідженою, якщо вона має достатньо багато нулів.

Метод Гаусса з вибором головного елемента

Для зменшення обчислювальної похибки в методі Гаусса використовують вибір головного елементу:

1) по стовпцях,

2) по рядках,

3) за всією матрицею.

Розглянемо алгоритм на прикладі методу Гаусса з вибором головного елементу по стовпцях.

Покладемо $A_0 = A$. Ведучим елементом обирається максимальний по модулю елемент стовпця, що розглядається: $a_{lk} = \max|a_{ik}^{(k-1)}|, \ i = \overline{k,n}$. Для того щоб ведучий елемент 34 зайняв відповідне місце, переставляються рядки k та l в матриці A_{k-1} за допомогою матриці перестановок:

$$\tilde{A}_k = P_k A_{k-1},$$

де P_k – це матриця перестановок, отримана з одиничної матриці перестановкою k та l рядків:

$$P_k = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ l \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array}$$

Прямий хід Гаусса в матричній формі:

$$A_k = M_k \tilde{A}_k,$$

де M_k – матриця розмірності $n \times n$:

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & m_{(k+1)k} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{nk} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$m_{kk} = \frac{1}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}, \quad m_{ik} = \frac{-\tilde{a}_{ik}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}, \quad i = \overline{k+1, n}.$$

За допомогою прямого ходу методу Гаусса в матричній формі:

$$M_n P_n \dots M_2 P_2 M_1 P_1 A x = M_n P_n \dots M_2 P_2 M_1 P_1 b,$$

зводимо систему до вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = & a_{1(n+1)}^{(1)}; \\ \qquad x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = & a_{2(n+1)}^{(2)}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \qquad\qquad x_n = & a_{n(n+1)}^{(n)}. \end{cases}$$

Розв'язок знаходимо за допомогою зворотнього ходу Гаусса:
$x_n = a^n_{n(n+1)}, \quad x_i = a^{(i)}_{i(n+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a^{(i)}_{ij}, \quad i = \overline{n-1, 1}.$

Складність методу Гаусса: $Q(n) = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

Зауваження. Методом Гаусса з вибором головного можна знайти визначник:

$$detA = (-1)^p \ \tilde{a}^{(1)}_{11} \ \tilde{a}^{(2)}_{22} \ \dots \ a^{(n)}_{nn} = (-1)^p \ a^{(0)}_{11} \ a^{(1)}_{22} \ \dots \ a^{(n-1)}_{nn},$$

де p – кількість перестановок.

Зауваження. При реалізації методу Гаусса з вибором головного по рядках:

$$a_{kl} = \max_j |a^{(k-1)}_{kj}|, \quad j = \overline{k, n}; \qquad \tilde{A}_k = A_{k-1} P_k,$$

також при перестановці стовпців необхідно перенумеровувати змінні.

Зауваження. При реалізації методу Гаусса з вибором головного за всією матрицею переставляються рядочки і стовпчики.

3.2. Метод прогонки

Метод прогонки використовується, якщо матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь A є тридіагональною. Цей метод є частковим випадком методу Гаусса.

Нехай маємо систему вигляду:

$$\begin{cases} -c_0 y_0 + b_0 y_1 = -f_0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_n y_{n-1} - c_n y_n = -f_n; \end{cases}$$

Достатня умова стійкості. Нехай коефіцієнти $a_0, b_0 = 0$; $c_0, c_n \neq 0$; $a_i, b_i, c_i \neq 0$; $i = \overline{1, n-1}$. Якщо виконуються умови:

1) $|c_i| \geqslant |a_i| + |b_i|, \quad i = \overline{0, n}$;

2) $\exists\, i : |c_i| > |a_i| + |b_i|$,

то метод є стійким: $|\alpha_i| \leqslant 1$; $|z_i| > 1$, $i = \overline{1, n}$.

Прямий хід метода Гаусса в методі прогонки відповідає знаходженню прогонкових коефіцієнтів:

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}; \qquad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}; \qquad \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{z_i}; \qquad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{z_i};$$

$$z_i = c_i - \alpha_i a_i; \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

Зворотній ход:

$$y_n = \frac{f_n + a_n \beta_n}{z_n}; \qquad y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = \overline{n-1, 0}.$$

Складність методу прогонки: $Q(n) = 8n - 2$.

Зауваження. Методом прогонки можна знайти визначник:

$$DetA = -c_0 \cdot (-z_1) \cdot \ldots \cdot (-z_n).$$

3.3. Метод Зейделя

Метод Зейделя є ітераційним методом для розв'язання СЛАР $Ax = b$, т.т. розв'язок знаходимо із заданою точністю ε. Початкове наближення x^0 обираємо довільним чином. Ітераційний процес має вигляд:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}. \tag{22}$$

Достатня умова збіжності 1. Якщо $\forall i : i = \overline{1,n}$ виконується нерівність

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

то ітераційний процес методу Зейделя (22) збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Достатня умова збіжності 2. Якщо $A = A^T > 0$, то ітераційний процес методу Зейделя (22) збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Умова припинення: $||x^n - x^{n-1}|| \leqslant \varepsilon$.

Необхідні і достатні умови збіжності. Для $\forall x^0$ ітераційний процес методу Зейделя (22) збігається тоді і тільки

тоді, коли $|\lambda| < 1$, де λ – це корені нелінійного рівняння:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Розв'язок

4.1. Метод Гаусса

Задача полягає в тому, щоб розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса. Використовуючи елементарні перетворення рядків, ми приводимо розширену матрицю до верхньої трикутної форми.

Початкова матриця системи:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 30 & -3 & -9 & 9 \\ 3 & -4 & 12 & 2 & -6 \\ -6 & 7 & -2 & 33 & 26 \end{array}\right]$$

Давайте перевіримо діагональну перевагу

1. Для першого рядка:

$|14| > |0| + |2| + |8| \Rightarrow 14 > 0 + 2 + 8 \Rightarrow 14 > 10$ (вірно)

2. Для другого рядка:

$|30| > |0| + |-3| + |-9| \Rightarrow 30 > 0 + 3 + 9 \Rightarrow 30 > 12$ (вірно)

3. Для третього рядка:

$|12| > |3| + |-4| + |2| \Rightarrow 12 > 3 + 4 + 2 \Rightarrow 12 > 9$ (вірно)

4. Для четвертого рядка:

$|33| > |-6| + |7| + |-2| \Rightarrow 33 > 6 + 7 + 2 \Rightarrow 33 > 15$ (вірно)

Отже, матриця з діагональною перевагою.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 30 & -3 & -9 & 9 \\ 3 & -4 & 12 & 2 & -6 \\ -6 & 7 & -2 & 33 & 26 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 30 & -3 & -9 & 9 \\ 0 & -4 & 11.571 & 0.286 & -7.071 \\ 0 & 7 & -1.143 & 36.429 & 28.143 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 2 & 0 & -0.364 \\ 0 & 30 & -3 & 0 & 15.035 \\ 0 & 0 & 11.171 & -0.914 & -5.871 \\ 0 & 0 & 0 & 38.492 & 25.810 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 0 & 0 & 0.577 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 13.623 \\ 0 & 0 & 11.171 & 0 & -5.258 \\ 0 & 0 & 0 & 38.492 & 25.810 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 0 & 0 & 0.577 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 13.623 \\ 0 & 0 & 11.171 & 0 & -5.258 \\ 0 & 0 & 0 & 38.492 & 25.810 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 0 & 0 & 0.577 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 13.623 \\ 0 & 0 & 11.171 & 0 & -5.258 \\ 0 & 0 & 0 & 38.492 & 25.810 \end{array}\right]$$

```
Select algorithm:
1. Метод Гауса
2. Метод Зейделя
3. Метод прогонки
4. Exit
> 1

Augmented matrix:
 [[14  0  2  8  5]
 [ 0 14 -3 -9  9]
 [ 3 -4 12  2 -6]
 [-6  7 -2 19 26]]
[[14.          0.          2.          8.          5.        ]
 [ 0.         14.         -3.         -9.          9.        ]
 [ 0.         -4.         11.57142857  0.28571429 -7.07142857]
 [ 0.          7.         -1.14285714 22.42857143 28.14285714]]
[[14.          0.          2.          8.          5.        ]
 [ 0.         14.         -3.         -9.          9.        ]
 [ 0.          0.         10.71428571 -2.28571429 -4.5       ]
 [ 0.          0.          0.35714286 26.92857143 23.64285714]]
[[14.          0.          2.          8.          5.        ]
 [ 0.         14.         -3.         -9.          9.        ]
 [ 0.          0.         10.71428571 -2.28571429 -4.5       ]
 [ 0.          0.          0.         27.0047619  23.79285714]]
[[14.          0.          2.          8.          5.        ]
 [ 0.         14.         -3.         -9.          9.        ]
 [ 0.          0.         10.71428571 -2.28571429 -4.5       ]
 [ 0.          0.          0.         27.0047619  23.79285714]]
determinant: 56709.99999999999

Solution: [-0.11317228  1.15953095 -0.2320402   0.88106154]
```

рис.1.(результат метода гаусса)

Визначник

Звідси порахуємо визначник:

det = 14.0 ∗ 30.0 ∗ 11.17142857142857 ∗ 38.492327365728904 = 180606.00000000003

Поділивши рядки матриці на елементи по діагоналі отримаємо розв’язок:

x = (0.041227866183848, 0.454087904056344, −0.470698647885452, 0.670525896149629)

Перевіримо підставивиши у початкове рівняння:

$$
\begin{aligned}
14 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 &= 5 \\
0 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 - 9 \cdot x_4 &= 9 \\
3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 &= -6 \\
-6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 33 \cdot x_4 &= 26
\end{aligned}
$$

Для обрахунку результатів використовувались числа з початковою точністю.

14 · 0.0412 + 0 · 0.4541 + 2 · (−0.4707) + 8 · 0.6705 = 5 (5.0 = 5)

0 · 0.0412 + 30 · 0.4541 − 3 · (−0.4707) − 9 · 0.6705 = 9 (9.0 = 9)

3 · 0.0412 − 4 · 0.4541 + 12 · (−0.4707) + 2 · 0.6705 = −6 (−6.0 = −6)

−6 · 0.0412 + 7 · 0.4541 − 2 · (−0.4707) + 33 · 0.6705 = 26 (25.999999999999996 = 26)

Отже, розв’язок задовольняє початковим умовам.

Обернена матриця

Допишемо одиничну матрицю справа, і застосуємо алгоритм Гауса

Обернена матриця:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 14 & 0 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -3 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 12 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & -2 & 33 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0.14285714 & 0.57142857 & 0.07142857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -3 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 11.57142857 & 0.28571429 & -0.21428571 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1.14285714 & 36.42857143 & 0.42857143 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0.14285714 & 0.57142857 & 0.07142857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.1 & -0.3 & 0 & 0.03333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.17142857 & -0.91428571 & -0.21428571 & 0.13333333 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.44285714 & 38.52857143 & 0.42857143 & -0.23333333 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0.14285714 & 0.57142857 & 0.07142857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.1 & -0.3 & 0 & 0.03333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.08184143 & -0.01918159 & 0.01193521 & 0.08951407 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 38.49232737 & 0.42007673 & -0.22804774 & 0.03964194 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.06780506 & 0.00174967 & -0.01338826 & -0.015149 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.00144513 & 0.03270102 & 0.0092688 & 0.00800638 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.01828843 & 0.01145034 & 0.08959835 & 0.00212618 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.01091326 & -0.0059245 & 0.00102987 & 0.0259792 \end{array}\right]$$

Обернена матриця:

$$\begin{bmatrix} 0.06780506 & 0.00174967 & -0.01338826 & -0.015149 \\ 0.00144513 & 0.03270102 & 0.0092688 & 0.00800638 \\ -0.01828843 & 0.01145034 & 0.08959835 & 0.00212618 \\ 0.01091326 & -0.0059245 & 0.00102987 & 0.0259792 \end{bmatrix}$$

4.2. Метод прогонки

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 11 & 8 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 22 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -19 \end{array}\right]$$

Перевіримо діагональну перевагу для кожного рядка:

1. Для першого рядка:

$|11| > |8| + |0| + |0| \Rightarrow 11 > 8 + 0 + 0 \Rightarrow 11 > 8$ (вірно)

2. Для другого рядка:

$|3| > |2| + |0| + |0| \Rightarrow 3 > 2 + 0 + 0 \Rightarrow 3 > 2$ (вірно)

3. Для третього рядка:

$|9| > |0| + |0| + |-8| \Rightarrow 9 > 0 + 0 + 8 \Rightarrow 9 > 8$ (вірно)

4. Для четвертого рядка:

$|3| > |0| + |0| + |2| \Rightarrow 3 > 0 + 0 + 2 \Rightarrow 3 > 2$ (вірно)

```
Select algorithm:
1. Метод Гауса
2. Метод Зейделя
3. Метод прогонки
4. Exit
> 3

Tridiagonal matrix:
 [[ 11.   8.   0.   0.   7.]
 [  2.   3.   0.   0.  12.]
 [  0.   0.   9.  -8.  22.]
 [  0.   0.   2.   3. -19.]]

Thomas result: [-4.41176471  6.94117647 -2.         -5.        ]
```

рис.2.(результат метода прогонки)

Перевіримо розв’язок (x1, x2, x3, x4) = (−4.4118, 6.9412, −2, −5), підставивши його у початкове рівняння:

$$
\begin{aligned}
11 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 7 \\
2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 12 \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 - 8 \cdot x_4 &= 22 \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 &= -19
\end{aligned}
$$

Підставляємо значення x1 = −4.4118, x2 = 6.9412, x3 = −2, x4 = −5:

$$
\begin{aligned}
11 \cdot (-4.4118) + 8 \cdot 6.9412 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-5) &= 7 \quad (7 = 7) \\
2 \cdot (-4.4118) + 3 \cdot 6.9412 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-5) &= 12 \quad (12 = 12) \\
0 \cdot (-4.4118) + 0 \cdot 6.9412 + 9 \cdot (-2) - 8 \cdot (-5) &= 22 \quad (22 = 22) \\
0 \cdot (-4.4118) + 0 \cdot 6.9412 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-5) &= -19 \quad (-19 = -19)
\end{aligned}
$$

Розв’язок коректний.

4.3 Метод Зейделя

Обчислимо матрицю ту ж що й в методі Гауса. Матриця з діагональною перевагою.

Знайдемо розв’язок з точністю $\epsilon = 10^{-5}$

Як критерій зупинки використовується норма max(|x1|, |x2|, ..., |xn|) < ϵ

```
Select algorithm:
1. Метод Гауса
2. Метод Зейделя
3. Метод прогонки
4. Exit
> 2

Augmented matrix:
 [[14  0  2  8  5]
 [ 0 14 -3 -9  9]
 [ 3 -4 12  2 -6]
 [-6  7 -2 19 26]]
Tolerance: 1e-5
Iteration  |                    x_new                    |    Norm
-------------------------------------------------------------------------------------------
1          | [ 0.357143  0.642857 -0.375000  1.204887]          | 1.2048872180451127
2          | [-0.277793  1.337070 -0.185676  0.768547]          | 0.6942132116004293
3          | [-0.055502  1.097136 -0.248504  0.920528]          | 0.23993485156231031
4          | [-0.133373  1.181374 -0.226287  0.867241]          | 0.08423881715407733
5          | [-0.106096  1.151879 -0.234056  0.885903]          | 0.029495404935489633
6          | [-0.115651  1.162211 -0.231334  0.879366]          | 0.010332335198326659
7          | [-0.112304  1.158592 -0.232288  0.881656]          | 0.0036191609595492835
8          | [-0.113476  1.159860 -0.231954  0.880853]          | 0.0012677198003139267
9          | [-0.113066  1.159416 -0.232071  0.881134]          | 0.00044405587887497155
10         | [-0.113210  1.159571 -0.232030  0.881036]          | 0.0001555436015403533
11         | [-0.113159  1.159517 -0.232044  0.881070]          | 5.4483706773078566e-05
12         | [-0.113177  1.159536 -0.232039  0.881058]          | 1.908451591603466e-05
13         | [-0.113171  1.159529 -0.232041  0.881063]          | 6.6849112989597614e-06

Збіжність досягнута після 13 ітерацій.

Solution: [-0.11317068  1.15952921 -0.23204066  0.88106264]
```

рис.3.(результат метода Зейделя)

Перевіримо розв’язок (x1, x2, x3, x4) = (0.041225818712442, 0.454088871042851, −0.470699996482141, 0.670526035469948) підставивиши у початкове рівняння:

$$
\begin{aligned}
14 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 &= 5 \\
0 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 - 9 \cdot x_4 &= 9 \\
3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 &= -6 \\
-6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 33 \cdot x_4 &= 26
\end{aligned}
$$

Результат обраховувався з початковою точнітю.

14 · 0.0412 + 0 · 0.4541 + 2 · (−0.4707) + 8 · 0.6705 = 5 (4.999969752769497 = 5)

$0 \cdot 0.0412 + 30 \cdot 0.4541 - 3 \cdot (-0.4707) - 9 \cdot 0.6705 = 9$ $(9.000031801502402 = 9)$

$3 \cdot 0.0412 - 4 \cdot 0.4541 + 12 \cdot (-0.4707) + 2 \cdot 0.6705 = -6$ $(-6.0000259148798705 = -6)$

$-6 \cdot 0.0412 + 7 \cdot 0.4541 - 2 \cdot (-0.4707) + 33 \cdot 0.6705 = 26$ $(26.000026348497876 = 26)$

Отже, розв’язок задовольняє початковим умовам.

6. Висновок

У цій лабораторній роботі були досліджені три методи розв’язування систем лінійних рівнянь: метод Гаусса, метод прогонки (Томаса) та метод Зейделя.

Метод Гаусса показав свою універсальність — він підходить для довільних невироджених систем, дозволяє обчислити визначник і обернену матрицю. Його недоліком є збільшення обчислювальної складності для великих систем.

Метод Томаса виявився найефективнішим для тридіагональних матриць: він працює значно швидше й потребує мінімум ресурсів, що робить його оптимальним для таких структурованих систем.

Метод Зейделя продемонстрував збіжність за порівняно невелику кількість ітерацій за умови діагональної переваги матриці. Як ітераційний метод, він зручний для великих систем, але успіх залежить від виконання умов збіжності.

Загалом дослідження дозволило порівняти роботу прямих ітераційних методів, виявити їхні сильні сторони та сфери застосування. Отримані результати можуть бути використані для аналізу й розв’язування інших систем лінійних рівнянь у чисельних методах та прикладних задачах.