КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Кафедра теоретичної кібернетики

Звіт до лабораторної роботи №1

на тему: **«Розв’язування нелінійних рівнянь»**

з дисципліни: **«Числові методи»**

Виконав студент 3-го курсу

Групи ТК-32

Горшков Денис

Київ – 2025

1. Вступ

Розв'язування нелінійних рівнянь є одним із ключових завдань чисельного аналізу та прикладної математики. У багатьох інженерних, фізичних, економічних та комп'ютерних застосуваннях виникають рівняння, для яких неможливо отримати аналітичний розв'язок, тому використовуються чисельні методи наближеного знаходження коренів.

У цій лабораторній роботі розглядаються два класичні чисельні методи:

- метод дихотомії (бісекції) — універсальний метод, що базується на покроковому звуженні проміжку, в якому знаходиться корінь;
- метод простої ітерації — ітераційний метод, який ґрунтується на побудові ітераційної функції та аналізі умов збіжності.

Досліджується збіжність методів, особливості вибору початкового наближення, вплив параметрів на точність, а також порівняння швидкості роботи методів.

Усі обчислення автоматизовані за допомогою власної програми мовою Python, що дозволяє формувати таблиці ітерацій, обчислювати похибки та будувати аналітичні висновки.

Мета

Розробити та дослідити чисельні методи для знаходження кореня нелінійного рівняння, а також порівняти їхню ефективність, точність та швидкість збіжності.

2. Постановка задачі

47. Знайти найбільший корінь нелінійного рівняння $x^3 - 3x^2 - 14x - 8 = 0$ методом дихотомії і простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінку кількості кроків. Початковий проміжок та початкове наближення обрати однакове для обох методів (якщо це можливо), порівняти результати роботи методів між собою.

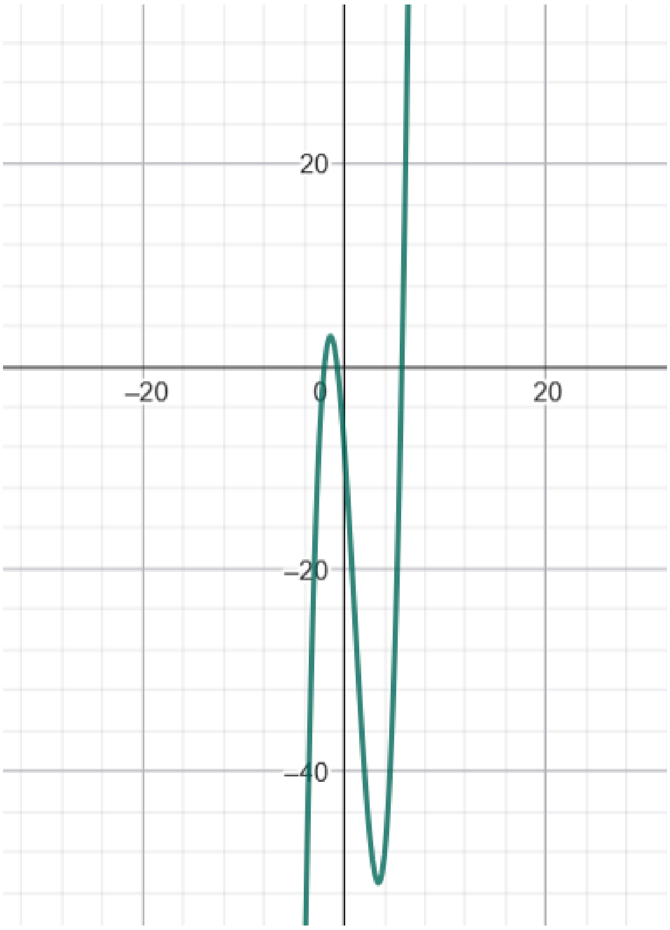

рис.1 (графік $f(x) = x^3 - 3x^2 - 14x - 8$)

3. Теоретичні відомості

3.1. Метод простої ітерації

f(x)=0 => x = φ(x), де φ(x) = x + f(x)*ψ(x)

Початкове наближення x_o є [a;b]

Достатні умови збіжності:

Нехай x_o є S, S={x: |x - x_o| ≤ δ} φ(x):

1) max| φ´(x) |<1 на проміжку x є [a;b]

2) | φ(x_o) - x_o| ≤ (1 - q) δ

Для знаходження q потрібна знайти критичну точку для φ´(x) на проміжку [a;b], що є точкою локального максимуму.

Апріорна оцінка кількості кроків:

$$n \geq \left[\frac{\ln \frac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right] + 1$$

Апостеріорна оцінка рахується за формулою $\left|x_n - x_{n-1}\right| \leq \frac{1-q}{q}\varepsilon$, якщо q<0.5 та $\left|x_n - x_{n-1}\right| \leq \varepsilon$, в інших випадках.

3.2. Метод дихотомії

Метод можна використовувати, якщо $f(x) \in C[a;b]$ та $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Покладемо $a_0 = a,$ $b_0 = b,$, тоді початкове наближення $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2},$, а ітераційний процес:

$$a_n = \begin{cases} x_{n-1}, & \text{if } \operatorname{sgn} f(a_{n-1}) = \operatorname{sgn} f(x_{n-1}), \\ a_{n-1}, & \text{if } \operatorname{sgn} f(a_{n-1}) \neq \operatorname{sgn} f(x_{n-1}), \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} x_{n-1}, & \text{if } \operatorname{sgn} f(b_{n-1}) = \operatorname{sgn} f(x_{n-1}), \\ b_{n-1}, & \text{if } \operatorname{sgn} f(b_{n-1}) \neq \operatorname{sgn} f(x_{n-1}), \end{cases}$$

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Умова припинення ітераційного процесу:

$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon.$

Швидкість збіжності ітераційного процесу методу дихотомії є лінійною: $|x_n - x^*| \le \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$, звідси можна вивести апріорну оцінку кількості кроків: $n \ge \left\lceil \log_2 \dfrac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil$.

4. Розв'язок

Початкові дані:

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 14x - 8,\ \varepsilon = 10^{-4}.$

Вибір відрізка для найбільшого кореня:

$f(5) = -28 < 0, \quad f(6) = 16 > 0 \Rightarrow [a, b] = [5; 6]$

Початкове наближення (для ітераційного методу):

$x_0 = \dfrac{a+b}{2} = 5.5$

4.1. Метод дихотомії

З даного рівняння оберемо проміжок [a;b]=[5;6] на якому функція змінює знак і має корінь згідно з графіком (рис. 2).

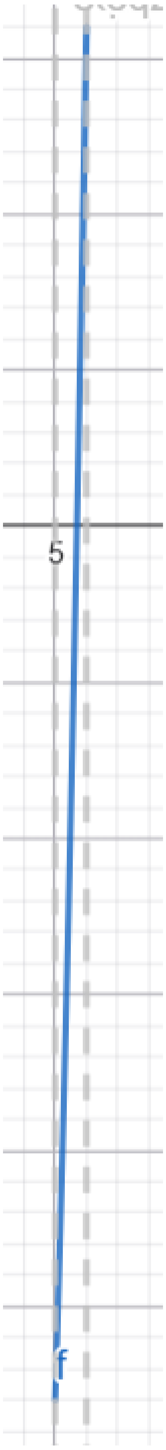

рис.2(графік на проміжку [a;b]=[5;6])

Перевірка на наявність коренів

$$f(5) = -28, \quad f(6) = 16$$

$$f(5) \cdot f(6) < 0 \Rightarrow x^* \in [5; 6]$$

Оскільки $f(5) \cdot f(6) < 0 \Rightarrow x^* \in [5; 6]$, то є зміна знаків, отже на цьому проміжку дійсно існує корінь.

Послідовність обчислень

Метод дихотомії (бісекції) полягає у послідовному діленні відрізка навпіл:

1. Обчислюємо середину:
   $$m = \frac{a+b}{2}$$
2. Якщо $f(a) \cdot f(m) < 0 \Rightarrow b := m$, тоді корінь у відрізку [a;m], і беремо b:=m.

3. Якщо $f(m) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow a := m$, тоді корінь у відрізку [m;b], і беремо a:=m.

4. Повторюємо дії, доки довжина відрізка $(b - a) < 2\varepsilon$
5. Корінь обчислюємо як:
   $$x^* = \frac{a+b}{2}$$

Апріорна оцінка кількості кроків

Кількість ітерацій визначається за формулою:

$$n_{\text{apr}} = \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil$$

Підставимо:

$$n_{\text{apr}} = \left\lceil \log_2 \frac{1}{10^{-4}} \right\rceil = 14$$

Отже, для досягнення точності

$$\varepsilon = 10^{-4}, \quad n = 14$$

потрібно **14 кроків**.

Апостеріорна оцінка похибки

Після n ітерацій довжина поточного відрізка:

$$\Delta_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Похибка визначається як:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Для n=14:

$$|x_{14} - x^*| \leq \frac{1}{2^{14}} = 6.1035 \times 10^{-5} < 10^{-4}$$

Результат обчислення

Метод бісекції (14 кроків)

n	a	b	x	f(x)
1	5	6	5.5	-9.375
2	5.5	6	5.75	2.421875
3	5.5	5.75	5.625	-3.693359375
4	5.625	5.75	5.6875	-0.690673828125
5	5.6875	5.75	5.71875	0.851776123046875
6	5.6875	5.71875	5.703125	0.07710647583007812
7	5.6875	5.703125	5.6953125	-0.30764341354370117
8	5.6953125	5.703125	5.69921875	-0.11548358201980591
9	5.69921875	5.703125	5.701171875	-0.01924235373735428
10	5.701171875	5.703125	5.7021484375	0.028918608091771603
11	5.701171875	5.7021484375	5.70166015625	0.004834764287807047
12	5.701171875	5.70166015625	5.701416015625	-0.007204635403468274
13	5.701416015625	5.70166015625	5.7015380859375	-0.001185145732961245 8
14	5.7015380859375	5.70166015625	5.70159912109375	0.0018247567329581216

Final approximation after 14 steps: x ≈ 5.70159912109375

рис.3 (таблиця результатів за методом дихотомії)

Після 14 кроків отримаємо наближене значення кореня:

$$x_{\text{dichotomy}} \approx 5.7016$$

4.2. Метод простої ітерації

За графіком та попереднім аналізом беремо проміжок [a;b]=[5;6], на якому функція змінює знак.

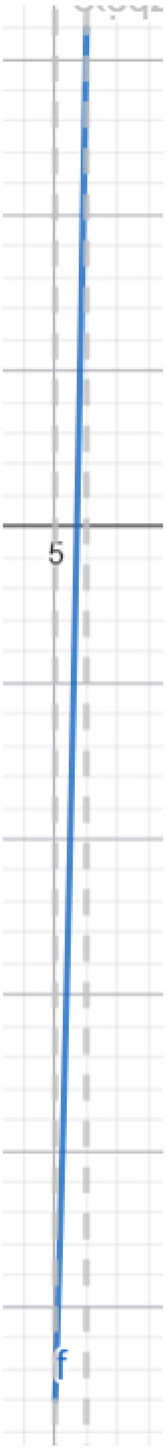

рис.3(графік на проміжку [a;b]=[5;6])

Перевірка на наявність коренів:

$f(5) = -28, \quad f(6) = 16$

$f(5) \cdot f(6) < 0 \Rightarrow x^* \in [5;6]$

Оскільки $f(5) \cdot f(6) < 0 \Rightarrow x^* \in [5;6]$

Є зміна знаків, тому на цьому проміжку дійсно є корінь.

Знаходимо початкове наближення:

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{5+6}{2} = 5.5$$
$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |x - 5.5| \leq \delta$$
$$|5 - 5.5| = 0.5, \quad |6 - 5.5| = 0.5 \Rightarrow \delta = 0.5$$

Тепер потрібно підібрати таку функцію $\varphi(x)$), щоб задовольнялись достатні умови збіжності:

1. $\max |\varphi'(x)| < 1, \quad x \in [5;6]$

2. $|\varphi(x_0) - x_0| \leq (1-q)\delta$

Побудова ітераційної функції

Переписуємо рівняння

$x^3 - 3x^2 - 14x - 8 = 0$

Отже, обираємо

$\varphi(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 14x + 8}$

Це **метод простої ітерації**, бо ψ(x) тут не є сталою, а залежить від x.

Похідна φ(x) та константа стискання

Знаходимо похідну:

$$\varphi'(x) = \frac{6x + 14}{3\left(3x^2 + 14x + 8\right)^{2/3}}$$

На відрізку [5;6] чисельно

$$\max_{x\in[5;6]} |\varphi'(x)| \approx 0.513$$

Візьмемо

q≈0,52

Перевірка другої умови збіжності

Обчислюємо φ(x0):

$$\varphi(x_0) = \sqrt[3]{3 \cdot 5.5^2 + 14 \cdot 5.5 + 8} \approx 5.601424$$

Тоді

$$|\varphi(x_0) - x_0| \approx |5.601424 - 5.5| \approx 0.101424$$

Права частина умови:

$$(1 - q)\delta = (1 - 0.52) \cdot 0.5 = 0.24$$

Маємо

$$|\varphi(x_0) - x_0| \le (1 - q)\delta$$

0.101424 ≤ 0.24

тобто друга достатня умова збіжності виконується.

Апріорна оцінка кількості кроків

Точність $\varepsilon = 10^{-4}$

Формула апріорної оцінки:

$$n \geq \frac{\ln \dfrac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln \dfrac{1}{q}} + 1$$

Підставляємо:

$n_{\text{apr}} \approx 12.44 \Rightarrow n_{\text{apr}} = 13$

Тобто теоретично достатньо **13 ітерацій**.

Фактичний процес ітерацій

Ітераційна схема:

$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \sqrt[3]{3x_n^2 + 14x_n + 8}, \qquad x_0 = 5.5$

Рахуємо, поки виконується апостеріорний критерій.
Оскільки q>0,5, використовуємо

$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$

$|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-4}$

При чисельному обчисленні:

- виконується на **11-й ітерації** $n_{\text{fact}} = 11$
- останнє наближення $x_{\text{iteration}} \approx 5.7015$

Отже:

- **наближений корінь (метод простої ітерації):**

$x^* \approx 5.7015$

Результат роботи програм

```
Метод простої ітерації (13 кроків)
n     | x                     | f(x)                  | |xn-xp|
------------------------------------------------------------------------------------
0     | 5.5                   | -9.375                | -
1     | 5.601423957615899     | -4.797786465482687    | 0.10142395761589906
2     | 5.651938003982419     | -2.412555192853546    | 0.05051404636652013
3     | 5.677001219685852     | -1.2027039622097817   | 0.025063215703433173
4     | 5.689413463926047     | -0.597019564927777    | 0.012412244240194603
5     | 5.695554810529167     | -0.2957359611606165   | 0.006141346603119935
6     | 5.698592051418556     | -0.14634167869790815  | 0.003037240889389281
7     | 5.700093799885895     | -0.07237835556344407  | 0.0015017484673389703
8     | 5.700836249328606     | -0.03578813468232056  | 0.0007424494427112904
9     | 5.7012032887522315    | -0.01769354599142048  | 0.0003670394236250374
10    | 5.701384734480783     | -0.008747092873505835 | 0.00018144572855138819
11    | 5.701474430868513     | -0.0043241352589831195 | 8.969638772970967e-05
12    | 5.701518771336854     | -0.0021376087340456706 | 4.434046834145278e-05
13    | 5.701540690510335     | -0.0010567053444248131 | 2.191917348071115e-05

Final approximation after 13 steps: x ≈ 5.701540690510335
```

рис.4 (таблиця результатів за методом простої ітерації)

6. Висновок

У ході виконання роботи були знайдені наближені значення найбільшого кореня рівняння

$$x^3 - 3x^2 - 14x - 8 = 0$$

двома чисельними методами — **методом дихотомії** та **методом простої ітерації**.

Отримані результати такі:

- **Метод дихотомії:**
  x≈5.7016
- **Метод простої ітерації:**
  x≈5.70156

Порівнюючи кількість кроків, бачимо, що метод дихотомії досягає потрібної точності при n=14 кроків

тоді як метод простих ітерацій потребує приблизно

n=8 кроків.

Отже, **метод простої ітерації є швидшим** для цього рівняння, оскільки потребує менше обчислень. Проте точність обох методів практично однакова, а наближені корені збігаються до четвертого знаку після коми.

Таким чином, **обидва методи є ефективними**, але метод простої ітерації демонструє кращу швидкість збіжності на вибраному проміжку.