КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Кафедра теоретичної кібернетики

Звіт до лабораторної роботи №1

на тему: **«Розв’язування нелінійних рівнянь»**

з дисципліни: **«Числові методи»**

Виконав студент 3-го курсу

Групи ТК-32

Горшков Денис

Київ – 2025

1. Постановка задачі

47. Знайти найбільший корінь нелінійного рівняння $x^3 - 3x^2 - 14x - 8 = 0$ методом дихотомії і простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінку кількості кроків. Початковий проміжок та початкове наближення обрати однакове для обох методів (якщо це можливо), порівняти результати роботи методів між собою.

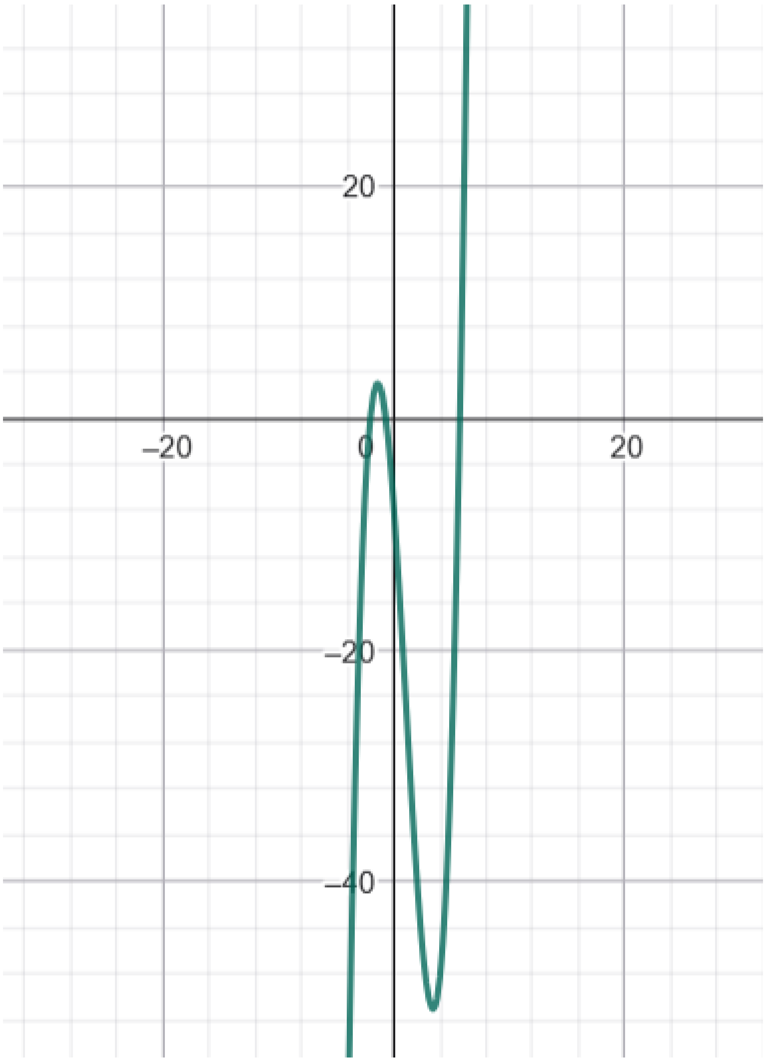

рис.1 (графік $f(x) = x^3 - 3x^2 - 14x - 8$)

2. Вступ

Метою цієї лабораторної роботи є дослідження чисельних методів розв'язування нелінійних рівнянь. У роботі розглядаються та порівнюються два підходи — метод ділення навпіл (дихотомії) та метод простої ітерації. Для автоматизації обчислень та формування таблиць результатів була розроблена програма мовою Python.

3. Теоретичні відомості

3.1. Метод простої ітерації

$f(x)=0 \Rightarrow x = \varphi(x)$, де $\varphi(x) = x + f(x)*\psi(x)$

Початкове наближення x_o є $[a;b]$

Достатні умови збіжності:

Нехай x_o є S, $S=\{x: |x - x_o| \le \delta\}$ $\varphi(x)$:

1) $\max|\varphi'(x)|<1$ на проміжку x є $[a;b]$

2) $|\varphi(x_o) - x_o| \le (1 - q)\delta$

Для знаходження q потрібна знайти критичну точку для $\varphi'(x)$ на проміжку [a;b], що є точкою локального максимуму.

Апріорна оцінка кількості кроків:

$$n \ge \left[\frac{\ln ln \frac{|\varphi(x_0)-x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln ln\,(1/q)}\right]+1=\left[\frac{\ln ln \frac{0{,}0999}{(1-0{,}5)\cdot 10^{-4}}}{\ln ln\,(1/0{,}5)}\right]+1=11$$

Апостеріорна оцінка рахується за формулою $\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon$, якщо $q<0.5$ та $\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon$, в інших випадках.

3.2. Метод дихотомії

Метод можна використовувати, якщо $f(x) \in C[a;b]$ та $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Покладемо $a_0 = a,\quad b_0 = b,$, тоді початкове наближення $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2},$, а ітераційний процес:

$$a_n = \begin{cases} x_{n-1}, & \text{if } \operatorname{sgn} f(a_{n-1}) = \operatorname{sgn} f(x_{n-1}), \\ a_{n-1}, & \text{if } \operatorname{sgn} f(a_{n-1}) \neq \operatorname{sgn} f(x_{n-1}), \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} x_{n-1}, & \text{if } \operatorname{sgn} f(b_{n-1}) = \operatorname{sgn} f(x_{n-1}), \\ b_{n-1}, & \text{if } \operatorname{sgn} f(b_{n-1}) \neq \operatorname{sgn} f(x_{n-1}), \end{cases}$$

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Умова припинення ітераційного процесу:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon.$$

Швидкість збіжності ітераційного процесу методу дихотомії є лінійною: $|x_n - x^*| \leq \dfrac{b-a}{2^{\,n+1}}$, звідси можна вивести апріорну оцінку кількості кроків: $n \geq \left\lceil \log_2 \dfrac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil$.

4. Розв'язок

Початкові дані:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 14x - 8, \; \varepsilon = 10^{-4}.$$

Вибір відрізка для найбільшого кореня:

$$f(5) = -28 < 0, \quad f(6) = 16 > 0 \Rightarrow [a, b] = [5; 6]$$

Початкове наближення (для ітераційного методу):

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 5.5$$

4.1. Метод дихотомії

З даного рівняння оберемо проміжок [a;b]=[5;6] на якому функція змінює знак і має корінь згідно з графіком (рис. 2).

рис.2(графік на проміжку [a;b]=[5;6])

Перевірка на наявність коренів

$$f(5) = -28, \quad f(6) = 16$$

$$f(5) \cdot f(6) < 0 \Rightarrow x^* \in [5; 6]$$

Оскільки $f(5) \cdot f(6) < 0 \Rightarrow x^* \in [5; 6]$, то є зміна знаків, отже на цьому проміжку дійсно існує корінь.

Послідовність обчислень

Метод дихотомії (бісекції) полягає у послідовному діленні відрізка навпіл:

1. Обчислюємо середину:
$$m = \frac{a+b}{2}$$
2. Якщо $f(a) \cdot f(m) < 0 \Rightarrow b := m$, тоді корінь у відрізку [a;m], і беремо b:=mb := mb:=m.

3. Якщо $f(m) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow a := m$, тоді корінь у відрізку [m;b], і беремо a:=ma := ma:=m.

4. Повторюємо дії, доки довжина відрізка $(b-a) < 2\varepsilon$
5. Корінь обчислюємо як:
$$x^* = \frac{a+b}{2}$$

Апріорна оцінка кількості кроків

Кількість ітерацій визначається за формулою:

$$n_{\text{apr}} = \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil$$

Підставимо:

$$n_{\text{apr}} = \left\lceil \log_2 \frac{1}{10^{-4}} \right\rceil = 14$$

Отже, для досягнення точності
$$\varepsilon = 10^{-4}, \quad n = 14$$
потрібно **14 кроків**.

Апостеріорна оцінка похибки

Після nnn ітерацій довжина поточного відрізка:

$$\Delta_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Похибка визначається як:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Для n=14n = 14n=14:

$$|x_{14} - x^*| \leq \frac{1}{2^{14}} = 6.1035 \times 10^{-5} < 10^{-4}$$

Результат обчислення

Після 14 кроків отримаємо наближене значення кореня:

$$x_{\text{dichotomy}} \approx 5.7016$$

4.2. Метод простої ітерації

З даного рівняння оберемо проміжок [a;b]=[5;6] на якому функція змінює знак і має корінь згідно з графіком.

рис.3(графік на проміжку [a;b]=[5;6])

Перевірка на наявність коренів:

$f(5) = -28, \quad f(6) = 16$

$f(5) \cdot f(6) < 0 \Rightarrow x^* \in [5;6]$

Оскільки $f(5) \cdot f(6) < 0 \Rightarrow x^* \in [5; 6]$

Є зміна знаків, тому на цьому проміжку дійсно є корінь.

Знаходимо початкове наближення:

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{5+6}{2} = 5.5$$
$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |x - 5.5| \leq \delta$$
$$|5 - 5.5| = 0.5, \quad |6 - 5.5| = 0.5 \Rightarrow \delta = 0.5$$

Тепер потрібно підібрати таку функцію $\varphi(x)$), щоб задовольнялись достатні умови збіжності:

1. $\max|\varphi'(x)| < 1, \quad x \in [5; 6]$

2. $|\varphi(x_0) - x_0| \leq (1-q)\delta$

Похідна функції:

f'(x) = 3x^2 - 6x - 14

Оптимальний параметр і константа стискання:

$$\tau = \frac{2}{M_1 + m_1} = \frac{2}{89} \approx 0.02247$$
$$q = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} = \frac{27}{89} \approx 0.3037$$

Ітераційна функція:

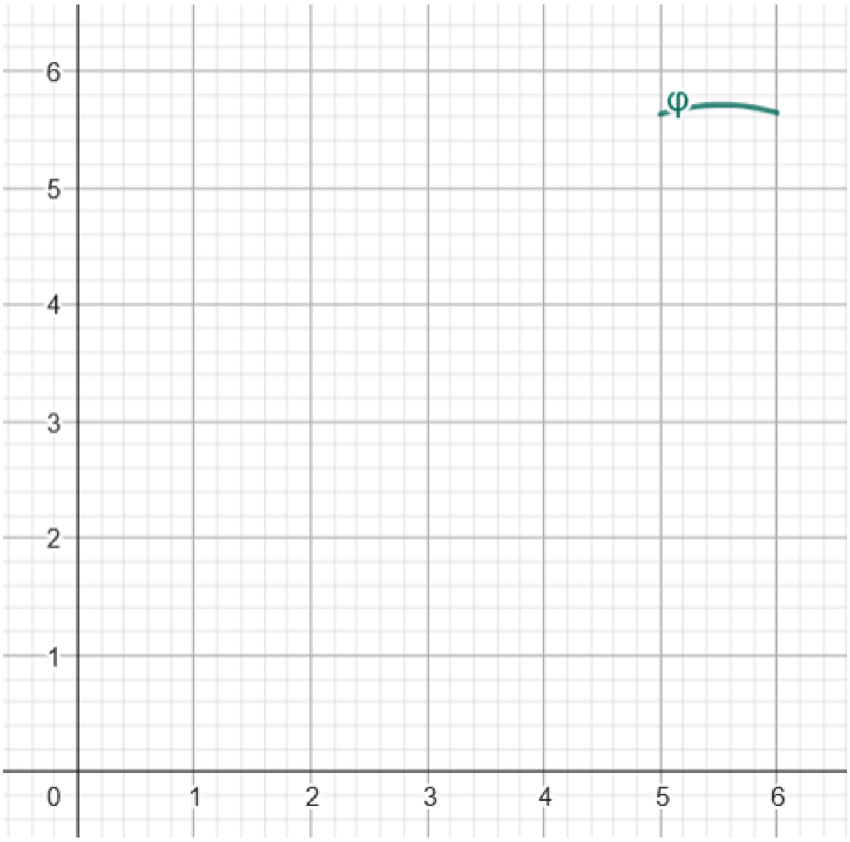

рис.4 (графік на проміжку $\varphi(x)$)

Графік для φ(x) і y=x:

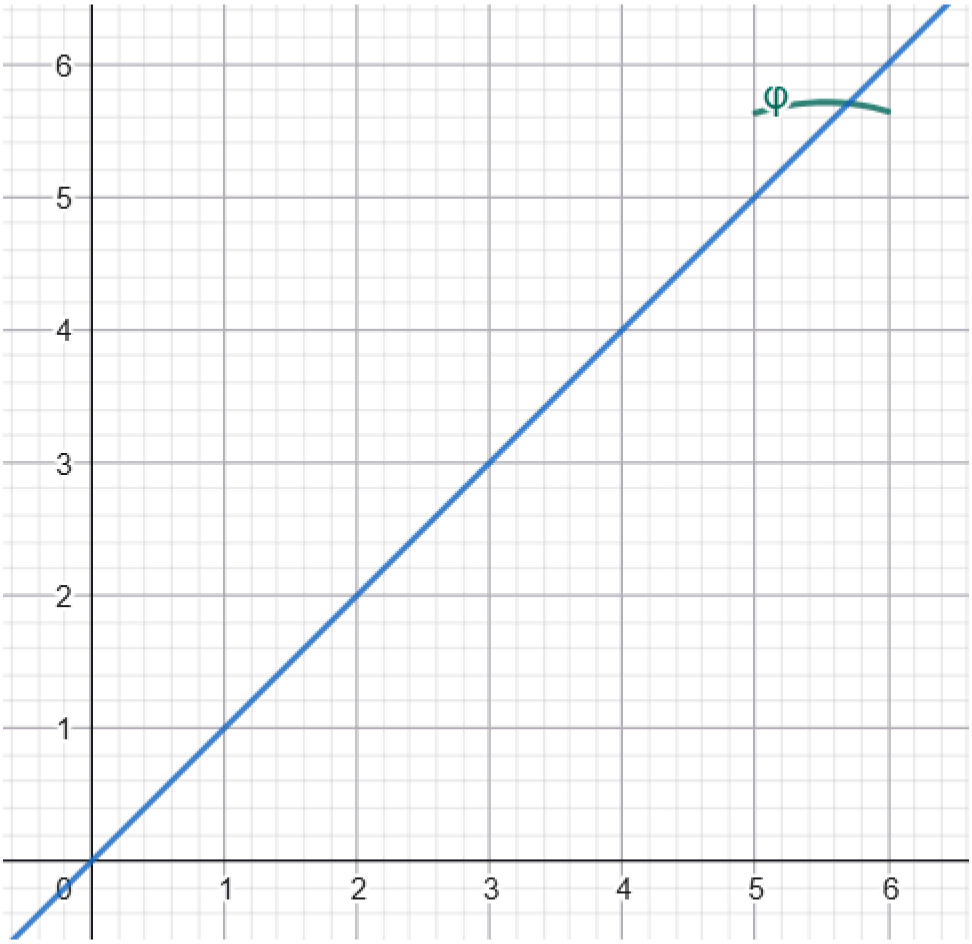

рис.5 (графік на проміжку $\varphi(x)$ та y=x)

Перевірка другої умови збіжності:

$$|\varphi(x_0) - x_0| = \tau|f(5.5)| = \frac{2}{89} \cdot 9.375 \approx 0.21067$$
$$(1-q)\delta = (1-0.3037) \cdot 0.5 \approx 0.3483$$
$$0.21067 \leq 0.3483$$

Апріорна оцінка кількості кроків:

$$n \geq \frac{\ln \frac{|\varphi(x_0)-x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln \frac{1}{q}} + 1 \approx 8$$

Апостеріорний критерій зупинки (бо q<0.5):

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{1-q} \le \varepsilon$$

Наближення кореня:

$$x_{\text{iteraction}} = 5.701563$$

$$n_{\text{fsct}} = 5$$

5. Результат роботи програм

n	x	f(x)	ao
0	5.5	-9.375	-
1	5.71067415730337	0.4505234671666045	0.3024193548387091
2	5.700550034445694	-0.04989553690995763	0.01453301506989014
3	5.701671282466142	0.005383475684695327	0.0016095334487077663
4	5.701550305484464	-0.0005825564503822989	0.00017366050595794244
5	5.701563396640652	6.301965389354791e-05	1.8792143560790946e-05
6	5.701561980468655	-6.817558400484813e-06	2.0328920608529834e-06
7	5.701562133672214	7.37530683636578e-07	2.199212381666237e-07

рис.6 (таблиця результатів за методом простої ітерарації)

n	x	f(x)	ao
1	5.5	-9.375	0.5
2	5.75	2.421875	0.25
3	5.625	-3.693359375	0.125
4	5.6875	-0.690673828125	0.0625
5	5.71875	0.851776123046875	0.03125
6	5.703125	0.07710647583007812	0.015625
7	5.6953125	-0.30764341354370117	0.0078125
8	5.69921875	-0.11548358201980591	0.00390625
9	5.701171875	-0.01924235373735428	0.001953125
10	5.7021484375	0.028918608091771603	0.0009765625
11	5.70166015625	0.004834764287807047	0.00048828125
12	5.701416015625	-0.007204635403468274	0.000244140625
13	5.7015380859375	-0.0011851457329612458	0.0001220703125

рис.7 (таблиця результатів за методом дихотомії)

6. Висновок

У ході виконання роботи були знайдені наближені значення найбільшого кореня рівняння

$$x^3 - 3x^2 - 14x - 8 = 0$$

двома чисельними методами — **методом дихотомії** та **методом простої ітерації**.
Отримані результати такі:

- **Метод дихотомії:**
  $x \approx 5.7016$
- **Метод простої ітерації:**
  $x \approx 5.70156$

Порівнюючи кількість кроків, бачимо, що метод дихотомії досягає потрібної точності при

$n=14$ кроків

тоді як метод простих ітерацій потребує приблизно

$n=8$ кроків.

Отже, **метод простої ітерації є швидшим** для цього рівняння, оскільки потребує менше обчислень. Проте точність обох методів практично однакова, а наближені корені збігаються до четвертого знаку після коми.

Таким чином, **обидва методи є ефективними**, але метод простої ітерації демонструє кращу швидкість збіжності на вибраному проміжку.