КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Кафедра теоретичної кібернетики

Звіт до лабораторної роботи №5

з теми: **«Інтерполяційний природній кубічний сплайн»**

з дисципліни: **«Числові методи»**

Виконав студент 3-го курсу

Групи ТК-32

Горшков Денис

Київ – 2025

1. Вступ

Інтерполяція є одним із ключових інструментів чисельного аналізу, що дозволяє відновлювати невідому функцію за кінцевим набором експериментальних або табличних даних. Одним із найбільш точних та універсальних способів інтерполяції є побудова кубічних сплайнів — гладких складених поліномів третього степеня, які забезпечують безперервність не лише самої функції, але й її перших та других похідних.

На відміну від глобальних методів, таких як інтерполяційні поліноми Лагранжа або Ньютона, сплайни не страждають на "ефект Рунге" і забезпечують стабільне наближення навіть на великих проміжках або при нерівномірному розташуванні вузлів. Особливий інтерес представляє **природний кубічний сплайн**, для якого накладається додаткова умова: друга похідна функції на кінцях проміжку дорівнює нулю. Такий сплайн моделює фізичну поведінку “вільної лінії”, яка не має прикріплених жорстко країв, і тому є оптимальним для гладких функцій без різких змін кривизни.

У даній роботі виконується побудова саме природного кубічного інтерполяційного сплайна для аналітичної функції

$f(x)=\tan(x), x\in[-0.5;0.5]$,

яка на вказаному інтервалі є неперервною, гладкою та монотонною. Це дозволяє повністю застосувати класичний алгоритм побудови сплайна, включно з розрахунком кроку, формуванням тридіагональної системи для знаходження коефіцієнтів cic_ici, та відтворенням повної системи поліномів si(x)s_i(x)si(x), що визначають інтерполяційну функцію на кожному з підпроміжків.

Мета роботи

Метою даної лабораторної роботи є:

1. Побудувати природний кубічний інтерполяційний сплайн для функції
   $f(x)=\tan(x)$, $x\in[-0.5;0.5]$,
   використовуючи рівновіддалені вузли та табличні значення функції.

2. Сформувати тридіагональну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів сплайну та розв'язати її.

3. Отримати повний набір коефіцієнтів a_i,b_i,c_i,d_i для кожного локального кубічного полінома.

4. Побудувати аналітичний вигляд сплайна у вигляді окремих функцій на кожному підінтервалі.

5. Провести аналіз точності наближення, порівнявши значення сплайна з точними значеннями функції $\tan(x)$ у вузлах і додаткових точках.

6. Зробити графічне порівняння:

- початкової функції $f(x)$,
- сплайна $s(x)$,
- абсолютної похибки.

7. Сформувати висновок щодо якості інтерполяції, стабільності методу та придатності природного кубічного сплайна для наближення гладких тригонометричних функцій.

2. Постановка задачі

Природний кубічний інтерполяційний сплайн для тої ж функції на тому ж проміжку по тим же точками.

$f(x)=\tan(x)$, $x \in [-0.5;0.5]$

3. Теоретичні відомості

Інтерполяційний природній кубічний сплайн

Інтерполяційним природнім кубічним сплайном називається поліном, для якого виконуються умови:
1) $s(x)$ – поліном степеня 3 для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$;
2) $s(x) \in C^2_{[a;b]}$;
3) $s(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$;

4) $s''(a) = s''(b) = 0$ – умова природності.

Зауваження. Для побудови інтерполяційного кубічного сплайну можна замість умови 4) використовувати інші умови, але тоді сплайн не буде природнім: $s''(a) = A$; $s''(b) = B$ або $s'(a) = A$; $s'(b) = B$, або умови періодичності: $s(a) = s(b)$, $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$.

Розглянемо формули для побудови інтерполяційного природного кубічного сплайну s_i на проміжку $[x_{i-1}, x_i]$:

$$s_i = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3,$$

де c_i знаходяться з тридіагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$h_i c_{i-1} + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right),$$

$$c_0 = c_n = 0;$$

решта коефіцієнтів знаходяться за формулами:

$$a_i = f_i; \qquad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}; \qquad d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}.$$

4. Розв'язок

Візьмемо рівновіддалені вузли (5 точок, 4 проміжки):

$$x_0 = -0.5,\ x_1 = -0.25,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.25,\ x_4 = 0.5,$$

$$y_i = f(x_i) = \tan x_i.$$

Обчислимо (округлення до 6 знаків):

x_i	$y_i = \tan x_i$
-0.5	-0.546302
-0.25	-0.255342
0	0.000000
0.25	0.255342
0.5	0.546302

Кроки:

$h_i = x_{i+1} - x_i = 0.25,\ i = 0, \ldots, 3.$

Використовуємо стандартний природний кубічний сплайн у вигляді

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

з умовами $S''(x_0) = S''(x_4) = 0$, що дає

$$c_0 = 0, \quad c_4 = 0.$$

Для внутрішніх вузлів $i = 1, 2, 3$ маємо тридіагональну систему

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right).$$

Оскільки всі $h_i = 0.25$, система набуває вигляду:

$$\begin{cases} 0.25\,c_0 + 0.5\,c_1 + 0.25\,c_2 = 3\left(\dfrac{y_2 - y_1}{0.25} - \dfrac{y_1 - y_0}{0.25}\right), \\ 0.25\,c_1 + 0.5\,c_2 + 0.25\,c_3 = 3\left(\dfrac{y_3 - y_2}{0.25} - \dfrac{y_2 - y_1}{0.25}\right), \\ 0.25\,c_2 + 0.5\,c_3 + 0.25\,c_4 = 3\left(\dfrac{y_4 - y_3}{0.25} - \dfrac{y_3 - y_2}{0.25}\right). \end{cases}$$

Підставляємо числові значення y_i і враховуємо $c_0 = c_4 = 0$:

$$\begin{cases} 0.5\,c_1 + 0.25\,c_2 = -0.427424, \\ 0.25\,c_1 + 0.5\,c_2 + 0.25\,c_3 = 0, \\ 0.25\,c_2 + 0.5\,c_3 = 0.427424. \end{cases}$$

Розв'язок системи:

$$c_0 = 0, \quad c_1 \approx -0.427424, \quad c_2 = 0, \quad c_3 \approx 0.427424, \quad c_4 = 0.$$

Беремо

$$a_i = y_i, \quad i = 0, \ldots, 3.$$

Коефіцієнти d_i і b_i для кожного проміжку $[x_i, x_{i+1}]$:

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), \quad i = 0, \ldots, 3.$$

Підставляємо $h_i = 0.25$ і знайдені c_i, y_i.

- Для $i = 0$ (проміжок $[-0.5, -0.25]$):

$$\begin{aligned}
a_0 &= y_0 \approx -0.546302, \\
d_0 &= \frac{c_1 - c_0}{3 \cdot 0.25} = \frac{-0.427424 - 0}{0.75} \approx -0.569898, \\
b_0 &= \frac{y_1 - y_0}{0.25} - \frac{0.25}{3}(2c_0 + c_1) \approx 1.164, -(-0.035) \approx 1.19946.
\end{aligned}$$

Отже:

$$a_0 \approx -0.546302, \quad b_0 \approx 1.19946, \quad c_0 = 0, \quad d_0 \approx -0.56990.$$

- Для $i = 1$ (проміжок $[-0.25, 0]$):

$$\begin{aligned}
a_1 &= y_1 \approx -0.255342, \\
d_1 &= \frac{c_2 - c_1}{0.75} = \frac{0 - (-0.427424)}{0.75} \approx 0.569898, \\
b_1 &= \frac{y_2 - y_1}{0.25} - \frac{0.25}{3}(2c_1 + c_2) \approx 1.02137 + 0.07123 \approx 1.09260.
\end{aligned}$$

Тобто

$$a_1 \approx -0.255342, \quad b_1 \approx 1.09260, \quad c_1 \approx -0.427424, \quad d_1 \approx 0.56990.$$

- Для $i = 2$ (проміжок $[0, 0.25]$):

$$\begin{aligned} a_2 &= y_2 = 0, \\ d_2 &= \frac{c_3 - c_2}{0.75} = \frac{0.427424 - 0}{0.75} \approx 0.569898, \\ b_2 &= \frac{y_3 - y_2}{0.25} - \frac{0.25}{3}(2c_2 + c_3) \approx 1.02137 - 0.03562 \approx 0.98575. \end{aligned}$$

Отже

$$a_2 = 0, \quad b_2 \approx 0.98575, \quad c_2 = 0, \quad d_2 \approx 0.56990.$$

- Для $i = 3$ (проміжок $[0.25, 0.5]$):

$$\begin{aligned} a_3 &= y_3 \approx 0.255342, \\ d_3 &= \frac{c_4 - c_3}{0.75} = \frac{0 - 0.427424}{0.75} \approx -0.569898, \\ b_3 &= \frac{y_4 - y_3}{0.25} - \frac{0.25}{3}(2c_3 + c_4) \approx 1.164 - (-0.0712) \approx 1.09260. \end{aligned}$$

Тобто

$$a_3 \approx 0.255342, \quad b_3 \approx 1.09260, \quad c_3 \approx 0.427424, \quad d_3 \approx -0.56990.$$

На кожному проміжку маємо кубічний поліном

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3.$$

Отже інтерполяційний природний кубічний сплайн $s(x)$ для $f(x) = \tan x$ на $[-0.5; 0.5]$:

$$s(x) = \begin{cases} -0.546302 + 1.19946(x + 0.5) - 0.56990(x + 0.5)^3, & -0.5 \le x \le -0.25, \\ -0.255342 + 1.09260(x + 0.25) - 0.42742(x + 0.25)^2 + 0.56990(x + 0.25)^3, & -0.25 \le x \le 0, \\ 0 + 0.98575x + 0 \cdot x^2 + 0.56990x^3, & 0 \le x \le 0.25, \\ 0.255342 + 1.09260(x - 0.25) + 0.42742(x - 0.25)^2 - 0.56990(x - 0.25)^3, & 0.25 \le x \le 0.5. \end{cases}$$

(Коефіцієнти округлено до 5 значущих цифр.)

5. Результат роботи програми

Вузли інтерполяції:

[-0.5 -0.42857143 -0.35714286 -0.28571429 -0.21428571 -0.14285714
-0.07142857 0. 0.07142857 0.14285714 0.21428571 0.28571429
0.35714286 0.42857143 0.5]

Значення tan(x) у вузлах:

[-0.54630249 -0.45689311 -0.37314441 -0.29375136 -0.21762698 -0.14383696
-0.0715503 0. 0.0715503 0.14383696 0.21762698 0.29375136
0.37314441 0.45689311 0.54630249]

Максимальна абсолютна похибка на [-0.5; 0.5]:

max|S(x) - tan(x)| ≈ 3.528248e-04 в точці x ≈ -0.472973

Контрольні точки (табличка похибок):

x	tan(x)	S(x)	|S-f|
-0.5000	-0.54630249	-0.54630249	0.00000000e+00
-0.4000	-0.42279322	-0.42269809	9.51315499e-05
-0.3000	-0.30933625	-0.30934593	9.68368911e-06
-0.2000	-0.20271004	-0.20271143	1.39915774e-06
-0.1000	-0.10033467	-0.10033416	5.11162819e-07

0.0000	0.00000000	-0.00000000	1.20210916e-17
0.1000	0.10033467	0.10033416	5.11162819e-07
0.2000	0.20271004	0.20271143	1.39915774e-06
0.3000	0.30933625	0.30934593	9.68368911e-06
0.4000	0.42279322	0.42269809	9.51315499e-05
0.5000	0.54630249	0.54630249	0.00000000e+00

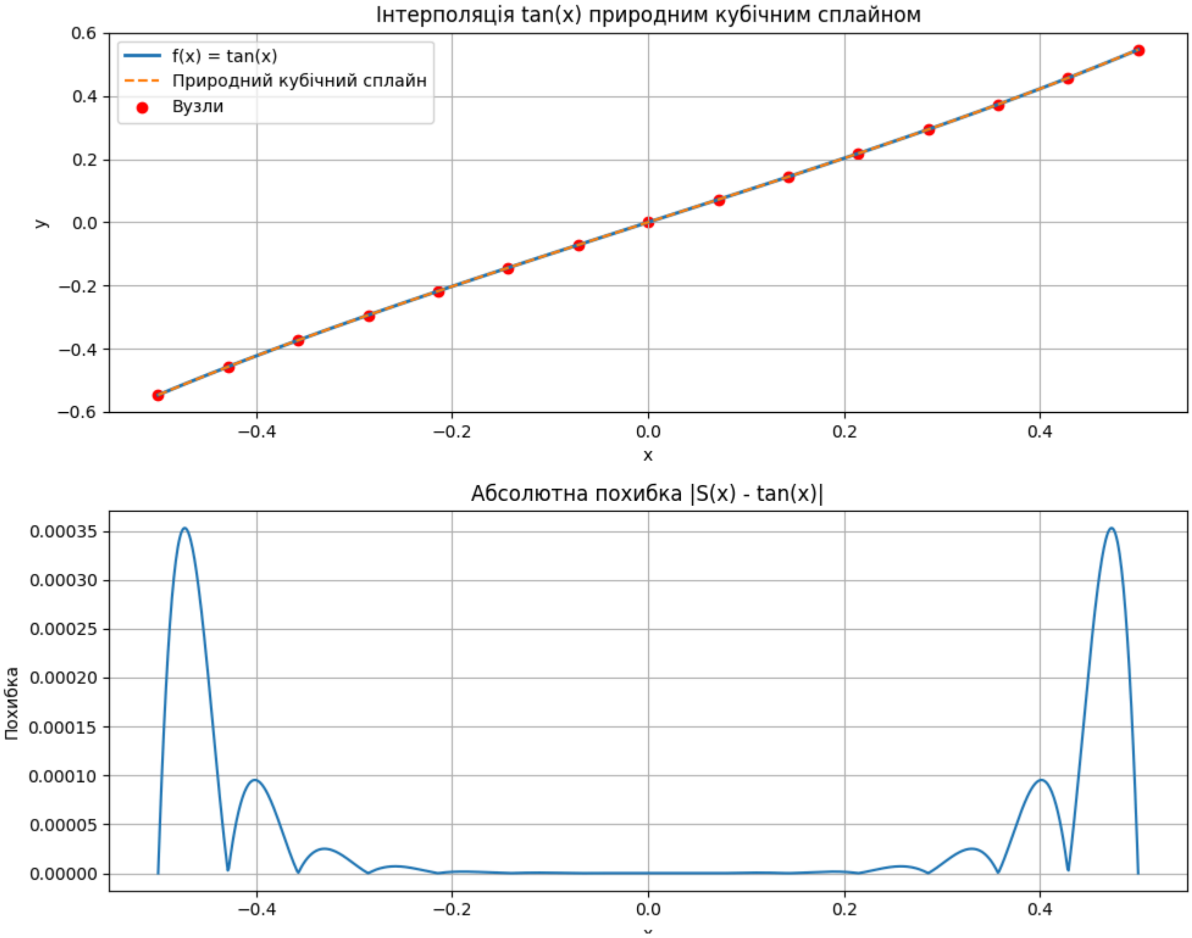

рис.1. (графіки інтерполяційних поліномів)

6. Висновок