П. В. Чулков

Арифметические задачи

Школьные
Математические
Кружки

П. В. Чулков

Арифметические задачи

Издание пятое, стереотипное

Издательство МЦНМО
Москва, 2015

УДК 51(07)
ББК 22.1
Ч81

Чулков П. В.

Ч81 Арифметические задачи.— 5-е изд., стереотип.— М.: МЦНМО, 2015.— 64 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0291-3

Третья брошюра серии ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ посвящена текстовым задачам, решаемым «арифметическим методом». В ней приведены шесть занятий, в которых подобраны задачи, ориентированные в основном на работу со школьниками 5–6 классов.

Все приведённые сюжетные задачи решаются путём прямых рассуждений, вытекающих из анализа конкретной ситуации. Конечно, большинство из них можно решить «алгебраически» (с помощью уравнений), но на начальном этапе обучения овладение арифметическим методом представляется очень важным для развития логического мышления школьников, для приобретения ими навыков анализа текста и умений рассуждать и делать правильные выводы.

Надеемся, что книжка будет интересна учителям математики, руководителям математических кружков, студентам педагогических вузов и всем, кто занимается со школьниками.

Предыдущее издание книги вышло в 2014 г.

Павел Викторович Чулков

Арифметические задачи

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. С. Горская* Рисунки *Д. М. Смирнова*

Подписано в печать 27.04.2015 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 4 печ. л. Тираж 3000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

ISBN 978-5-4439-0291-3

Предисловие

1. Арифметические задачи — традиционное название сюжетных задач, решаемых без составления уравнений, путём *прямых* рассуждений, вытекающих из анализа конкретной ситуации (такой метод решения называют «*арифметическим*»). Конечно, большинство сюжетных задач можно решить «*алгебраически*» (с помощью уравнений), но на начальном этапе обучения арифметический метод полезней.

Дело в том, что арифметический метод лучше приспособлен к стилю мышления большинства учащихся 5–6 классов: все проводимые рассуждения «предполагают совершенно наглядное и конкретное, осмысленное в области тех величин, о которых идет речь, истолкование»[1].

Последнее особенно важно, ведь школьники, как правило, не слишком хорошо разбираются в процессах, лежащих в основе сюжетов задач (движение, работа, производительность труда).

Таким образом, арифметический метод *прямо требует* от ученика построения наглядной модели, что важно при дальнейшем обучении: опыт показывает, что лучше составляют уравнения те учащиеся, которые хорошо умеют решать задачи арифметически!

2. В брошюре представлены материалы шести занятий, а также раздел **Дополнительные задачи.**

Задачи предназначены для учащихся 5–6 классов, решения к задачам по возможности «ориентированы» на пятиклассников и не требуют сведений, выходящих за пределы школьной программы. Ко всем задачам предложены решения, к некоторым — указания и комментарии для учителя. В качестве эпиграфов к заня-

[1] И.В. Арнольд [3]. См. также [8], [16], [17] в списке литературы.

тиям используются задачи-шутки, обсуждение которых поможет поднять настроение учащимся и, возможно, избежать некоторых типичных ошибок.

Занятие первое: знакомство с арифметическим методом.

Представлены примеры задач, решаемых арифметическим методом. В решениях отрабатывается использование словесных конструкций: «предположим, что...», «если..., то...», «пусть...», а также запись решения «по вопросам». Желательно проверять, удовлетворяет ли ответ условию задачи, используя при этом простейшие рисунки.

Занятия второе: задачи на проценты.

Это одна из самых трудных тем школьного курса, к которой необходимо возвращаться многократно. При решении задач на проценты важно осознавать, что именно принято за 100%, понимать, что «увеличить число на 32%» означает «умножить его на $1,32$», а «уменьшить на 32%» — «умножить на $0,68$». Поясним сказанное. Пусть дано некоторое число. Разрежем его на 100 равных частей. Уменьшить на 32% — значит, убрать 32 части. Останется 68 частей. Но того же результата можно достичь, умножая на $0,68$ — ведь тоже останется только 68 частей из 100!

Занятие третье: бассейны, работа и прочее.

Нередко учащиеся не видят за разными сюжетами этих задач общей математической основы, поскольку плохо представляют, что происходит при том или ином процессе. Задача преподавателя — помочь школьникам разобраться в этом.

Занятие четвертое: «увидеть» движение!

При решении задач на движение полезно использовать рисунки, на которых фиксируются те или иные «ключевые» моменты условия задачи.

Примеры таких рисунков представлены в материалах данного занятия. Такая наглядная основа позволяет существенно облегчить нахождение решения.

Занятие пятое: путь, скорость, время.

Цель занятия — потренироваться в решении задач на движение, показать связь задач на движение с другими типами арифметических задач (совместная работа и другие непрерывные процессы), выявить взаимосвязи между основными параметрами движения (путь, скорость, время). Среди прочих приведены задачи, использующие понятие «средней скорости».

Занятие шестое: движение по реке.

Рассмотрены задачи на движение по реке и другие аналогичные задачи. При их решении используется идея «сложения скоростей», а также идея разумного выбора «системы отсчёта».

Приняты следующие соглашения:

1) Если тело движется «по течению», то его скорость складывается из скорости тела в стоячей воде v и скорости течения реки u: $w = v + u$.

2) Если тело движется «против течения», то его скорость считается равной $w = v - u$.

3) Плоты движутся со скоростью течения реки.

Дополнительные задачи: представлены задачи, предназначенные для самостоятельной работы учащихся и организации математических соревнований. Кроме приведённых задач учителю могут понадобиться их вариации, то есть задачи с изменёнными цифрами и наименованиями, но математически равносильные (например, задача 8 занятия 6 является вариацией задачи 3 того же занятия). Мы, как правило, вариаций не приводим, считая, что учитель сможет их создать самостоятельно.

Такие задачи можно найти в популярной литературе.

3. **Об организации занятий кружка.** Один из возможных вариантов построения кружкового занятия следующий: каждое занятие рассчитано примерно на 1 час 30 минут с небольшим перерывом и состоит из двух частей:

- **разбор нового материала.** Задачи предлагаются учащимся по одной. После того как задача решена кем-нибудь из учащихся, происходит коллективное обсуждение;
- **работа с «задачами для самостоятельного решения»** происходит либо в режиме «устной олимпиады», когда школьники рассказывают преподавателю решения устно, или в режиме «математической регаты», когда решения излагаются

письменно, и, после того как собраны решения очередной задачи, преподаватель рассказывает решения учащимся.

И в том и в другом случае желательно наличие помощников (учеников старших классов или студентов).

4. **Обсуждение задач.** Важный этап работы с задачами — обсуждение решений задач с участниками кружка. Рассмотрим пример такого обсуждения.

Задача. Пешком или на автобусе?

Если Аня идёт в школу пешком, а обратно едет на автобусе, то на дорогу она тратит полтора часа. Если она едет в оба конца на автобусе, то весь путь занимает у неё тридцать минут. Сколько времени тратит Аня на дорогу, если и в школу, и из школы она идёт пешком?

Ответ: 2 часа 30 минут.

Решение. Решаем «с вопросами».

1) Сколько времени тратит Аня на дорогу «в один конец», если едет на автобусе? 30 минут : 2 = 15 минут.

2) Сколько времени тратит Аня на дорогу «в один конец», если идёт пешком? 1 час 30 минут − 15 минут = 1 час 15 минут.

3) Сколько времени тратит Аня на дорогу, если и в школу, и из школы она идёт пешком? 1 час 15 минут × 2 = 2 часа 30 минут.

Эта задача — хороший повод для обсуждения со школьниками того, какие предположения и упрощения мы делаем, чтобы перевести житейскую ситуацию на язык математики, и в какой мере такие предположения оправданы.

Ниже приведен примерный вариант обсуждения. Вопросы, скорее всего, придётся ставить учителю. Ответы лучше не давать школьникам в готовом виде, а подводить к ним.

Учитель. Постараемся выявить те условия, которые в задачи прямо не описаны, но подразумеваются.

Ответ. Мы предположили, что дорога «туда» пешком занимает столько же времени, сколько дорога пешком «обратно». (То же, если Аня ехала «туда» и «обратно» на автобусе.)

Учитель. В каком случае такое предположение оправдано?

Ответ. Если путь и средняя скорость «туда» и «обратно» соответственно равны, то одинаково и время. Для ходьбы пешком это обычно так, когда нет дополнительных указаний типа «дорога в гору» и «дорога под гору». Если ехать на автобусе, то ответ может зависеть от того, включаем ли мы в него время, затраченное, например, на ожидание автобуса. В данном случае можно, вероятно, предположить, что, время, потраченное на ожидание автобуса при дороге «туда» и «обратно», одно и то же и им можно пренебречь.

Учитель. Что ещё может влиять на несовпадение времён?

Ответ. Ходьба не влияет, если остановки «туда» и «обратно» расположены недалеко друг от друга. Езда на автобусе может дать разницу, если пути туда и обратно разные или если средние скорости автобуса туда и обратно не одинаковы (скажем, в школу едут в час пик, много пробок).

Учитель. Что же в итоге?

Ответ. Можно предположить, что туда и обратно Аня едет по одному и тому же маршруту и время ожидания автобуса в дорогу не включается.

В комментариях, приложенных к решениям некоторых задач, имеются ответы на вопросы, которые, возможно, стоит обсудить с учащимися. Предложенные указания являются примерными. Учитель на основе собственного опыта может внести в них необходимые изменения. Автор заранее благодарен за любые замечания и рекомендации.

В заключение: автор выражает признательность А. Д. Блинкову, Ф. А. Пчелинцеву, А. В. Шаповалову и А. В. Шевкину, которые прочитали рукопись и чьи замечания существенно способствовали её улучшению.

Занятие 1

Знакомство с арифметическим методом

В одной семье два отца и два сына.
Сколько это человек?

Старинная задача.

Представлены примеры задач, решаемых арифметическим методом. В решениях отрабатывается использование словесных конструкций: «предположим, что...», «если..., то...», «пусть...», а также запись решения «по вопросам». Желательно проверять, удовлетворяет ли ответ условию задачи, используя при этом простейшие рисунки.

Задача 1. По грибы. Вася нашел на 36 грибов больше, чем Лена. По дороге домой сестра стала просить Васю: «Дай мне несколько грибов, чтобы у меня стало столько же грибов, сколько и у тебя!» Сколько грибов должен брат отдать Лене?

Ответ: 18 грибов.

Решение. Предположим, что брат отложит свои «лишние» грибы в корзинку, тогда у брата и сестры грибов станет поровну. Для достижения требования задачи брат должен отдать сестре половину лишних грибов.

Задача 2. На скотном дворе гуляют гуси и поросята. Петя сосчитал количество голов, их оказалось 30, потом сосчитал, сколько всего ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на скотном дворе?

Ответ: 12 поросят и 18 гусей.

Решение. Предположим, что на дворе гуляют только гуси. Сколько у них ног? 60 ног. Откуда взялись 24 «лишних» ноги?

Они принадлежат поросятам — по 2 ноги на каждого. Итак, на дворе гуляют 12 поросят. Остальные — гуси.

Можно рассуждать иначе: предположим, что все поросята передними лапами встали на бревно. Понятно, что в этом случае земли касается 60 ног, а остальные 24 ноги — это ноги поросят, стоящие на бревне. Следовательно, на дворе 12 поросят.

Задача 3. На поляне паслись ослы. К ним подошли несколько мальчиков. «Сядем на ослов по одному», — предложил старший. Двум мальчикам ослов не хватило. «Попробуем сесть по двое», — снова предложил старший. Тогда один осёл остался без седока. Сколько ослов и сколько мальчиков было на поляне?

Ответ: шесть мальчиков и четыре осла.

Решение. Представим сначала, что мальчики сели на ослов по одному и двум мальчикам ослов не досталось.

Посадим мальчиков на ослов по двое. Сделаем так:

1) один из мальчиков пересаживается к кому-нибудь вторым, — один осёл без седока, как и требуется;

2) два других мальчика, — те, кому первоначально ослов не хватило, подсаживаются вторыми. Итог: три осла «заняты», один — «свободен». Следовательно, мальчиков — 6, ослов — 4.

Задача 4. Сколько лет Ване? Когда Ваню спросили, сколько ему лет, он подумал и сказал: «Я втрое моложе папы, но зато втрое старше Серёжи». Тут подбежал маленький Серёжа и сообщил, что папа старше его на 40 лет. Сколько лет Ване?

Ответ: 15 лет.

Решение. Папа в три раза старше Вани, который в три раза старше Серёжи, следовательно, папа в девять раз старше Серёжи.

Другими словами, папа старше Серёжи на восемь возрастов Серёжи, что составляет 40 лет. Следовательно, Серёже 5 лет.

Ваня старше Серёжи втрое, — ему 15 лет.

В задачах данного типа, как правило, принято учитывать только «полные» года. Об этом стоит сказать учащимся.

Задача 5. «Старинная задача». Для покупки порции мороженого Пете не хватает семи копеек, а Маше — одной копейки.

Тогда они сложили все имевшиеся у них деньги. Но их тоже не хватило на покупку даже одной порции. Сколько стоила порция мороженого?

Ответ: 7 копеек.

Решение. Если бы у Пети была хотя бы копейка, то он дал бы её Маше, и им хватило бы на мороженое (ведь ей не хватало всего одной копейки!). Следовательно, у Пети денег не было совсем, а так как ему не хватало на мороженое семи копеек, то мороженое стоило семь копеек.

Здесь желательно рассказать о системах денежных единиц, об их изменении, динамике цен на мороженое и т. д. На всякий случай: очень вкусное фруктовое мороженое в 60-70-е годы стоило как раз семь копеек.

Задача 6. Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным количеству девочек, её не решивших. Кого в классе больше: решивших задачу или девочек?

Ответ: одинаково.

Решение. Прибавим к мальчикам (a человек), решившим задачу, девочек, решивших задачу (b человек). Что мы получим? Всех учеников, решивших задачу ($a + b$ человек).

Прибавим к девочкам, *не* решившим задачу (a человек), девочек, решивших задачу (b человек). На этот раз получим всех девочек ($a + b$ человек).

Мы прибавляли к равным количествам одно и то же, значит, снова получились равные количества. Следовательно, всего решивших задачу столько же, сколько девочек.

Решение задачи хорошо представить в виде таблицы.

	Решили задачу	Не решили задачу
Мальчики	a	
Девочки	b	a

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7. Стопки тетрадей. Если из одной стопки тетрадей переложить в другую стопку 10 тетрадей, то тетрадей в стопках станет поровну. На сколько больше тетрадей в первой стопке, чем во второй?

Задача 8. Шоколадки. Для покупки восьми шоколадок Тане не хватит 20 рублей. Если же она купит пять шоколадок, то у неё останется 100 рублей. Сколько денег у Тани?

Задача 9. Покупаем альбом. Для покупки альбома Маше не хватило 2 копеек, Коле — 34 копеек, а Васе — 35 копеек. Тогда они сложили свои деньги, но их всё равно не хватило на покупку одного альбома. Сколько стоит альбом?

Задача 10. Давным-давно. Когда отцу было 27 лет, сыну было 3 года, а сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас каждому из них?

Задача 11. Стулья и табуретки. В комнате стоят стулья и табуретки. У каждой табуретки — 3 ножки, у каждого стула — 4 ножки. Когда на всех стульях и табуретках сидят люди, то в комнате всего 39 «ног». Сколько стульев и сколько табуреток в комнате?

Задача 12. Ошибка при сложении. При сложении двух целых чисел Коля поставил лишний ноль на конце одного из слагаемых и получил в сумме 6641 вместо 2411. Какие числа он складывал?

Ответы и решения

Задача 7. Ответ: на 20 больше.

Решение. Первая стопка уменьшилась на 10 тетрадей, а вторая увеличилась на 10 тетрадей, после чего стопки сравнялись в «объеме».

Задача 8. Ответ: у Тани 300 рублей.

Решение. 1) Предположим, Таня купила 5 шоколадок. Согласно условию задачи у неё осталось 100 рублей. Добавим ей ещё 20 рублей. Теперь в её распоряжении 120 рублей, на которые она может купить ещё три шоколадки. Следовательно, шоколадка стоит $120 : 3 = 40$ рублей.

2) Поскольку при покупке пяти шоколадок будет потрачено 200 рублей и ещё 100 рублей останется, то у Тани $200+100 = 300$ рублей.

Задача 9. Ответ: альбом стоит 35 копеек.

Решение. Так как у Коли на одну копейку больше, чем у Васи, то у него есть как минимум одна копейка, и при сложении денег к Машиным деньгам эта копейка добавится. Но денег на альбом в итоге не хватило, то есть к Машиным деньгам добавилось меньше чем две копейки, следовательно, у Васи вообще не было денег, то есть ему не хватало для покупки полной стоимости альбома.

Задача 10. Ответ: сыну — 12 лет, отцу — 36 лет.

Решение. Разница в возрасте между отцом и сыном неизменна и равна 24 годам. Так как сыну сейчас в три раза меньше лет, чем отцу, то 24 года — это удвоенный возраст сына.

Здесь полезно сделать рисунок.

Задача 11. Ответ: 4 стула и 3 табуретки.

Решение. Если бы в комнате стояли одни табуретки, то всего в комнате было бы не 39 «ног», как в условии, а не более 35. Почему? Потому что когда на табуретке сидит человек, то у каждой табуретки — 5 «ног», и количество «ног» кратно пяти, то есть если в комнате стоят 7 табуреток, то «ног» на 4 меньше, чем требуется по условию задачи. В этом случае недостаток «ног» можно компенсировать, если заменить 4 табуретки на 4 стула.

Если предположить, что комнате меньше семи табуреток, то «ног» — не более 30, и скомпенсировать недостаток «ног» не получится.

Задача 12. Ответ: 1941 и 470.

Решение. Поставив лишний ноль на конце одного из слагаемых, Коля тем самым увеличил это слагаемое в 10 раз. Таким образом, это слагаемое в 9 раз меньше разности $6641 - 2411 = 4230$. Следовательно, оно равно 470.

Занятие 2

Проценты

На сколько процентов
20% больше 10%?

Странный вопрос

Это одна из самых трудных тем школьного курса, к которой необходимо возвращаться многократно. При решении задач на проценты важно осознавать, что именно принято за 100%, понимать, что «увеличить число на 32%» означает «умножить его на $1,32$», а «уменьшить на 32%» — «умножить на $0,68$». Поясним сказанное. Пусть дано некоторое число. Разрежем его на 100 равных частей. Уменьшить на 32% — значит, убрать 32 части. Останется 68 частей. Но того же результата можно достичь, умножая на $0,68$ — ведь тоже останется только 68 частей из 100!

Задача 1. Петя купил две книги. Первая книга оказалась на 75% дешевле второй. На сколько процентов вторая книга дороже первой?

Ответ: на 300%.

Решение. 1) В первом предложении условия задачи за 100% принята стоимость второй книги. Поскольку стоимость первой книги на 75% меньше, то она составляет 25% стоимости второй. Следовательно, вторая книга дороже первой в четыре раза.

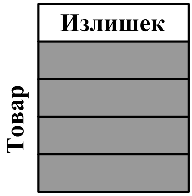
2) Для ответа на вопрос задачи следует за 100% принять стоимость первой книги. Тогда стоимость второй составит 400% стоимости первой книги. Следовательно, стоимость второй книги на 300% больше стоимости первой книги.

«Тонкость» в том, что ответ существенно зависит от того, какое число принято за 100%. В первом предложении условия 100% — это цена ВТОРОЙ книги, а во втором предложении — цена ПЕРВОЙ книги. Какую именно величину следует принимать за 100%, в большинстве случаев ясно из контекста. Как правило, это то, что следует изменить, чтобы получить другую величину. В данном случае «одна книга дешевле второй на 75%», следовательно, стоимость второй книги надо уменьшить на 75%, и за 100% принимают именно её стоимость. Спрашивается «на сколько процентов вторая книга дороже первой». Требуемое число показывает, на сколько процентов следует увеличить цену первой книги, значит, за 100% принимают именно её цену. В определенной степени это условность, но условность, необходимая для того, чтобы однозначно понимать тексты, в которых встречается понятие «процент».

Задача 2. Мечта покупателя. Картофель подешевел на 20%. На сколько процентов больше картофеля можно купить на ту же сумму денег?

Ответ: на 25%.

Решение. Картофель подешевел на 20%. Следовательно, весь ранее купленный картофель можно приобрести, истратив 80% денег (см. рисунок). Сложим этот картофель в мешок. Останется 20% от прежней суммы денег, значит, на оставшиеся деньги можно купить ещё четверть мешка картошки, то есть 25% дополнительно.



Задача 3. Где дешевле? В двух магазинах молоко стоило одинаково. Затем в одном магазине оно сразу подешевело на 40%, а в другом — сначала на 20%, а затем ещё на 25%. В каком из магазинов молоко теперь дешевле?

Ответ: цена на молоко в обоих магазинах после подешевения одинакова.

Решение. Во втором магазине после первого снижения цены молоко стало стоить 80% первоначальной цены, а после второго — $80\% \cdot 0,75 = 60\%$ первоначальной цены, что совпадает с ценой в первом магазине.

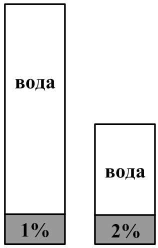
Задача 4. Садовый участок. Длину прямоугольного участка земли увеличили на 50%, а его ширину уменьшили на 10%. Как изменилась площадь участка?

Ответ: увеличилась на 35%.

Решение. При увеличении длины участка на 50% его площадь увеличивается в $1,5$ раза, а при уменьшении его ширины на 10% площадь «увеличивается» в $0,9$ раза. Таким образом, площадь увеличилась в $1,5 \cdot 0,9 = 1,35$ раза.

Задача 5. Сушёные грибы. Влажность свежих грибов — 99%, а сушёных — 98%. Как изменилась масса грибов после подсушивания?

Ответ: уменьшилась в два раза.



Решение. Предположим, что масса свежих грибов равна $100m$ кг, тогда сухого вещества в них — m кг. После подсушивания масса сухого вещества не изменилась, но стала составлять 2% (одну пятидесятую) от массы сушёных грибов (см. рисунок). Следовательно, масса сушёных грибов — $50m$ кг.

Задача 6. Два положительных числа. Одно из положительных чисел увеличили на 1%, другое — на 4%. Могла ли в результате сумма этих чисел увеличиться на 3%?

Ответ: да, могла.

Например, пусть первое число равно 100, а второе равно 200, тогда их сумма равна 300. После увеличения первое число станет равно 101, а второе 208. Тогда сумма чисел 309, что на 3% больше 300.

Как помочь детям получить такое решение? Переформулируем условие задачи так: могло ли оказаться, что сумма одного процента от некоторого положительного числа и четырёх процентов от некоторого другого числа равна трём процентам их суммы? Предположим, что могло.

Немного порассуждаем.

1) Если первое слагаемое увеличить не на 1%, а, как и второе, на 4%, то сумма увеличится на 4%.

2) Значит, лишние 3% от первого слагаемого дают лишний 1% суммы.

3) Итак, процент от первого слагаемого в три раза меньше процента от суммы, что возможно, если первое слагаемое в три раза меньше суммы и в два раза меньше второго слагаемого.

4) Получим пример: если первое число равно, например, 100 (для удобства вычислений), тогда второе равно 200 и т. д.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7. Два студента. Одинаковые стипендии двух студентов повысили: отличнику на 100%, а хорошисту — только на 50%. В следующий раз отличник получил «четвёрку», и ему понизили стипендию до уровня хорошиста. На сколько процентов понизили?

Задача 8. Заготовка сена. В траве содержится 60% воды, а в сене — 20% воды. Сколько сена получится из одной тонны травы?

Задача 9. Последствие кризиса. За два года завод снизил объём выпускаемой продукции на 51%, при этом каждый год он снижался на одно и то же число процентов. На сколько?

Задача 10. Физическая проблема. Объём некоторой жидкости при замерзании увеличился на 25%. На сколько процентов уменьшится объём льда при таянии?

Задача 11. После стирки. После каждой стирки объём куска мыла уменьшается на 20%. После скольких стирок он уменьшится не меньше чем вдвое?

Задача 12. Сравните числа. Известно, что 2% от положительного числа A больше, чем 3% от положительного числа B. Верно ли, что 5% от числа A больше, чем 7% от числа B?

Ответы и решения

Задача 7. Ответ: на 25%.

Решение. Пусть первоначальная стипендия каждого студента была равна x, тогда после повышения стипендия первого стала $2x$, а второго — $1,5x$. Стипендия второго студента теперь составляет три четверти стипендии первого, то есть 75%.

Задача 8. Ответ: 500 кг.

Решение. В тонне травы содержится 400 кг сухого вещества, что составляет 80% от массы сена, тогда масса сена (100%) составляет 500 кг.

Задача 9. Ответ: на 30%.

Решение. Через два года объём выпускаемой продукции составлял $0,49$ от первоначального, при этом этот объём составлял такую же часть от объёма V предыдущего года, как V от 1. Осталось узнать, квадрат какого числа равен $0,49$. Это число $0,7$. Следовательно, каждый год объём выпускаемой продукции уменьшался на 30%.

Задача 10. Ответ: уменьшится на 20%.

Решение. Объём воды при замерзании увеличивается на четверть (то есть становится равным пяти четвертям прежнего объёма). При этом четверть исходного объёма равна одной пятой части «нового» объёма. При таянии объём полученной жидкости станет прежним, то есть уменьшится на одну пятую часть.

Задача 11. Ответ: после четвёртой стирки.

Решение. Пусть первоначальный объём куска мыла равен x, тогда после первой стирки он равен $0,8x$, после второй стирки — $0,64x$, после третьей — $0,512x$, а после четвёртой — $0,4096x$, то есть уменьшится более чем вдвое.

Здесь полезно использовать немного «алгебры».

Задача 12. Ответ: да, верно.

Решение. Так как 2% от числа A больше, чем 3% от числа B, то 4% от числа A больше, чем 6% от числа B (и то и другое число мы увеличили в два раза). Кроме того, 1% от числа A больше, чем 1% от числа B.

«Сложив» два последних утверждения, получим, что 5% от числа A больше, чем 7% от числа B.

Можно «ближе к алгебре»: Пусть $A = 100x$, $B = 100y$, тогда 2% от числа A составляет $2x$, а 3% от числа B составляет $3y$. Получим, что $2x > 3y$, $4x > 6y$. Заметим также, что 1% от числа A больше, чем 1% от числа B, то есть $x > y$.

Занятие 3

Бассейны, работа и прочее

Яйцо варится 4 минуты.
Сколько времени будут
вариться три яйца?

Известная задача

Нередко учащиеся не видят за разными сюжетами этих задач общей математической основы, поскольку плохо представляют, что происходит при том или ином процессе. Задача преподавателя — помочь школьникам разобраться в этом.

Задача 1. День Рождения Малыша. Малыш съедает банку варенья за 6 минут, а Карлсон — в два раза быстрее. За какое время они съедят это варенье вместе?

Ответ: за две минуты.

Решение. Карлсон за единицу времени съедает варенья в два раза больше чем Малыш. Следовательно, вместе они съедят банку варенья в три раза быстрее, чем это может сделать один Малыш.

В процессе решения задача переформулирована так: «Малыш съедает банку варенья за 6 минут. За какое время смогут съесть это варенье три Малыша?» Таким образом, скорость поедания варенья здесь измеряется в «Малышах».

Задача 2. Старинная задача. Один человек выпьет кадь пития в 14 дней, а с женою выпьет ту же кадь в 10 дней. Во сколько дней жена его отдельно выпьет ту же кадь?

Ответ: за 35 дней.

Решение. 1) Если человек выпивает за 14 дней кадь пития, то за 70 дней он выпьет в пять раз больше (5 кадей).

2) Если вместе с женой человек за 10 дней выпивает кадь пития, то за 70 дней они выпьют в семь раз больше (7 кадей).

3) Следовательно, за 70 дней жена выпьет 2 кади пития.

Следовательно, кадь пития она выпьет за 35 дней.

Возможно другое решение: разделим кадь на 70 одинаковых ковшей. За день муж выпивает $70 : 14 = 5$ ковшей, а вместе с женою $70 : 10 = 7$ ковшей. Следовательно, жена выпивает 2 ковша пития в день, а всю кадь за 35 дней.

Здесь «пропорциональность» выступает в следующем виде: за одно и то же время муж (или, например, жена) выпивает одно и то же количество жидкости (количество для мужа и жены не обязательно одинаковое).

Откуда взялось число 70? Это наименьшее общее кратное чисел 10 и 14.

Задача 3. Пять кошек поймали пять мышек за пять минут. Сколько кошек поймают десять мышек за десять минут?

Ответ: пять.

Решение. Если пять кошек поймали пять мышек за пять минут, то за десять минут те же кошки поймают мышек в два раза больше.

Полезно обсудить такую «задачу»: «Сантехник может починить кран за 20 минут. За какое время починят кран 150 сантехников?»

Задача 4. Десять бобров рассчитали, что могут построить плотину за 8 дней. Когда они проработали два дня, то выяснилось, что ввиду надвигающегося паводка им надо закончить работу через 2 дня. Сколько бобров им необходимо позвать себе на подмогу?

Ответ: 20 бобров.

Решение. За четыре дня 10 бобров смогут выполнить половину всей работы, следовательно, приглашённым работникам за оставшиеся два дня нужно сделать вторую половину работу. Чтобы выполнить половину работы за два дня, потребуется ещё 20 бобров.

Задача 5. Дрова. Двое рабочих могут напилить за день три поленницы дров, а наколоть — шесть поленниц. Сколько поленниц дров они должны напилить, чтобы успеть наколоть их в тот же день?

Ответ: две поленницы.

Решение. За два дня рабочие напилят шесть поленниц, которые затем успеют наколоть за один день. Итого потребуется три дня. Следовательно, за один день они управятся с двумя поленницами.

Задача 6. Классический сюжет. Трое рабочих роют яму. Они работают по очереди, причём каждый работает столько времени, сколько нужно двум другим, чтобы вырыть половину ямы. Работая так, они вырыли яму. Во сколько раз быстрее они закончили бы работу, если бы работали одновременно?

Ответ: в $2,5$ раза.

Решение. Представим теперь, что они работают вместе. Сколько всего ям они выкопают в этом случае? Сначала первый рабочий выкопает свою долю от «общей» ямы, а двое других за это время выкопают половину ямы. Затем второй рабочий сделает свою часть работы, а остальные выкопают ещё половину ямы. Наконец, третий рабочий доделает свою часть работы, а остальные выкопают ещё половину ямы. Итого будет выкопано $2,5$ ямы. Поэтому, работая втроём, они закончили бы работу в $2,5$ раза быстрее.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7. Заполним бак. Через первый кран вода заполняет бассейн за три часа, а через второй — за 9 часов. За какое время заполнится бассейн, если открыть оба крана?

Задача 8. Два землекопа роют канаву. Один из них за час может прокопать в два раза больше, чем другой, а платят им за каждый час работы одинаково. Что обойдется дешевле: одновременная работа землекопов с двух сторон «до встречи» или рытьё половины канавы каждым из них?

Задача 9. Имеется две верёвки. Каждая из них горит неравномерно, но сгорает ровно за один час. Как с помощью этих верёвок отмерить ровно 45 минут?

Задача 10. Торт побольше Малыш съедает за 24 минуты, а Карлсон — за 12 минут. Малыш начал есть первым, а Карлсон присоединился к нему через 6 минут. Через какое время они вдвоём доедят торт? Какая доля торта достанется Малышу?

Задача 11. Маша, Барбос и Жучка. Когда у Маши было две взрослых кошки и щенок Барбос и все они ели поровну, то мешка корма для животных хватало на 6 дней. Барбос вырос, и мешка стало хватать на 4 дня. Потом Маша завела ещё собаку Жучку, и мешка корма стало хватать только на 3 дня. Кто ест больше: кошка или собака Жучка, и во сколько раз?

Задача 12. Три землекопа подрядились вырыть котлован. Если заболеет Иван, то двое сделают работу за 30 дней, если заболеет Пётр — то за 15 дней, а если не придёт Андрей — то за 12 дней. Вышел на работу один Андрей. За сколько дней он управится?

Ответы и решения

Задача 7. Ответ: за 2 часа 15 минут.

Решение. Первый кран заменяет три вторых крана. Поэтому можно считать, что открыто 4 вторых крана. Следовательно, бассейн заполнится за $\frac{9}{4}$ часа.

Задача 8. Ответ: дешевле обойдется одновременная работа «с двух сторон».

«Быстрый» землекоп роет быстрее, а следовательно, за выполненную работу получит меньше, чем «медленный». При работе «навстречу друг другу» он сделает больше половины работы (и получит за неё столько же, сколько и «медленный»), а при работе по очереди «быстрый» выполнит только половину работы.

Задача решается без вычислений, методом «оценки».

Задача 9. Решение. 1) Зажжём верёвки одновременно, причём первую с одного конца, а вторую — с двух концов. Когда вторая верёвка сгорит полностью, пройдёт ровно 30 минут.

2) В этот момент подожжём первую верёвку с другого конца. Когда верёвка догорит, пройдёт ещё 15 минут. Итого 45 минут.

Если задача не получается достаточно долго, полезно задать учащимся вопросы: какие манипуляции можно делать с верёвкой? Почему бесполезно складывать верёвку в несколько слоёв или резать на части?

Задача 10. Ответ: через 12 минут; половина.

Решение. За 6 минут Малыш успел съесть четверть торта и дальше оставшиеся три четверти торта они ели вдвоём. Из остатка Карлсон съест половину торта, а Малыш четверть (Карлсон ест в два раза быстрее!).

Задача 11. Ответ: Жучка съедает в $1,5$ раза больше.

Решение. Будем считать, что каждый ел одну порцию, тогда за 6 дней они съедали вместе 18 порций — один мешок. Когда Барбос вырос, кошки по-прежнему съедали 2 порции в день, то есть за 4 дня они съедали 8 порций, а остальные 10 порций съедал Барбос, то есть он съедал $2,5$ порции в день. Значит, за три дня они втроём стали съедать $2 \times 3 + 2,5 \times 3 = 13,5$ порций. Следовательно, Жучка съедает за три дня $4,5$ порции, то есть $1,5$ порции в день. Таким образом, она ест в полтора раза больше, чем одна кошка.

Задача 12. Ответ: за 120 дней.

Решение. Представим себе, что совместная работа продолжалась 60 дней.

За это время Пётр с Андреем выкопали два котлована, Иван с Андреем выкопали четыре котлована, а Иван с Петром — пять котлованов.

Но всего они выкопали не 11 котлованов, а только $5,5$, поскольку иначе вклад каждого будет подсчитан дважды. Вспомним, что за это время вклад в работу Ивана с Петром составляет пять котлованов. Следовательно, вклад в работу Андрея: половина котлована за 60 дней.

Занятие 4

Увидеть движение!

Тройка лошадей пробежала 30 вёрст за 3 часа.
За какое время пробежала 30 вёрст одна лошадь?

Известная задача

При решении задач на движение полезно использовать рисунки, на которых фиксируются те или иные «ключевые» моменты условия задачи.

Примеры таких рисунков представлены в материалах данного занятия. Такая наглядная основа позволяет существенно облегчить нахождение решения.

Задача 1. Стрекоза и муравьи. Два муравья, Вася и Кирилл, отправились в гости к Стрекозе. Вася всю дорогу полз, а Кирилл половину пути ехал на Гусенице, что было в два раза медленнее, чем ползти, а вторую половину скакал на Кузнечике, что было в десять раз быстрее, чем ползти. Кто из муравьёв пришёл в гости первым, если вышли они одновременно?

Ответ: первым пришёл Вася.

Решение. В тот момент, когда Кирилл проехал половину пути и пересаживался на Кузнечика, Вася прополз две половины пути, следовательно, он уже был на месте.

При разборе задачи полезно изобразить положение муравьёв в момент «пересадки» Кирилла с Гусеницы на Кузнечика.

Задача 2. Гусеница ползёт по столбу, при этом за день она поднимается на 5 метров, а за ночь опускается на 4 метра. Высота столба 10 метров. За какое время гусеница доползёт до вершины столба?

Ответ: за пять суток и ещё один день.

Решение. Обычно школьники дают ответ «за 10 дней», но ...

За сутки гусеница поднимается на 1 метр, следовательно, за 5 суток она поднимется на 5 метров, а за *шестой день* ещё на 5 метров и *достигнет* вершины столба…

Задачу удобно иллюстрировать рисунками, показывающими положение гусеницы на исходе каждых суток.

Задача 3. На круговом маршруте работают два автобуса, их интервал движения составляет 21 минуту. Каким будет интервал движения, если на этом маршруте будут работать три автобуса?

Ответ: 14 минут.

Решение. Так как интервал движения при двух автобусах на маршруте составляет 21 минуту (см. рисунок слева), то длина маршрута «в минутах» составляет 42 минуты. Следовательно, интервал движения при трёх автобусах на маршруте составляет 14 минут (см. рисунок справа).

Фактически мы «измерили» расстояние «в минутах».

Задача 4. Дорога на работу. Инженер обычно приезжает поездом на вокзал в 8 часов утра. Точно в 8 часов 00 минут к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 7 часов утра и пошёл навстречу машине. Встретив машину, он сел в неё и приехал на завод на 20 минут раньше, чем обычно. Определите показание часов в момент встречи инженера с машиной.

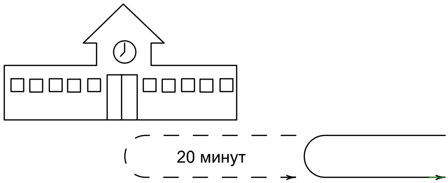
Ответ: 7 часов 50 минут.

Решение. Машина «сэкономила» время «дважды», поскольку:

1) не доехала до вокзала некоторое расстояние;

2) не возвращалась на то же самое расстояние.

Таким образом, поскольку машина вернулась на завод на 20 минут раньше, чем обычно, то в момент встречи с инженером ей оставалось ехать до вокзала 10 минут.

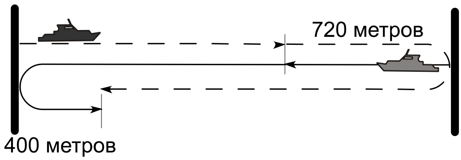


Задача 5. Встречи в пути. Два парома отходят одновременно от противоположных берегов реки и пересекают реку с постоянной скоростью перпендикулярно берегам. Паромы встречаются друг с другом на расстоянии 720 метров от ближайшего берега. Достигнув берега, они сразу отправляются обратно и затем встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?

Ответ: 1760 метров.

Решение. Сумма расстояний, которые паромы прошли до первой встречи, равна ширине реки, а сумма расстояний, которые они прошли к моменту второй встречи, равна утроенной ширине реки. Значит, до момента второй встречи прошло в три раза больше времени, чем до момента первой встречи. Следовательно, если к моменту первой встречи один из паромов прошёл 720 метров, то к моменту второй встречи он прошел 2160 метров, что на 400 метров превышает ширину реки.

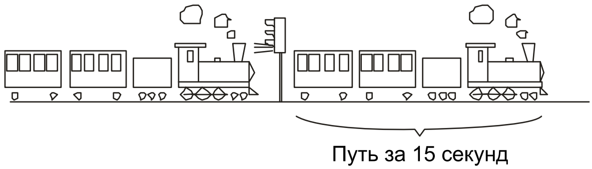
Все сказанное можно увидеть из рисунка.



Задача 6. Поезд на мосту. Поезд проходит мост длиной 450 метров за 45 секунд, а мимо светофора проезжает за 15 секунд. Вычислите длину поезда и его скорость.

Ответ: длина — 225 метров, скорость — 54 км/ч.

Решение. Поезд проходит расстояние, равное своей длине, за 15 секунд (см. рисунок сверху), а расстояние, большее на 450 метров, — за 45 секунд (см. рисунок снизу). Следовательно, 450 метров «голова» поезда проходит за 30 секунд, то есть сам поезд в два раза короче моста, а скорость поезда равна 15 м/с = 54 км/ч.



Важно обсудить с учащимися, что означает условие «поезд проходит мост длиной 450 метров за 30 секунд».

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7. От старта до финиша на одинаковых расстояниях друг от друга расставлены флажки. Спортсмен пробегает расстояние от первого до седьмого флажка за 7 секунд. За какое время он добежит от первого до десятого флажка?

Задача 8. По кольцевой линии курсируют с одинаковой скоростью и равными интервалами движения 12 трамваев. Сколько трамваев нужно добавить, чтобы при той же скорости интервалы между трамваями уменьшились на одну пятую?

Задача 9. И снова поезд. Поезд длиной 180 метров проезжает мимо столба за 9 секунд. За какое время поезд полностью проедет мост длиной 360 метров?

Задача 10. Два друга, Ваня и Федя, вышли навстречу друг другу с постоянными скоростями. Ваня вышел из деревни Ванино в 10 часов утра и пришёл в деревню Федино в 15 часов. Федя вышел из деревни Федино в 11 часов и пришёл в деревню Ванино в 16 часов. В котором часу они встретились?

Задача 11. Мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из пункта A в пункт B. Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся лишь тогда, когда мотоциклисту осталось проехать треть пути до B. Мотоциклист, доехав до B, развернулся и сразу поехал обратно в A. Кто приедет раньше: мотоциклист в пункт A или велосипедист в пункт B?

Задача 12. Король со свитой движется из пункта A в пункт B со скоростью 5 км/ч. Каждый час он высылает в B гонцов, которые движутся со скоростью 20 км/ч. С какими интервалами прибывают гонцы в пункт B?

Ответы и решения

Задача 7. Ответ: за $10,5$ секунд.

Решение. Шесть (а не семь!) промежутков между флажками спортсмен пробегает за 7 секунд, а 9 таких же промежутков — за время, равное $\frac{7}{6} \cdot 9 = 10,5$ секунд.

Указание. Сделайте рисунок!

Задача 8. Ответ: три трамвая.

Решение. Разделим промежуток между трамваями на пять равных частей. Тогда длина маршрута — 60 таких частей. Если интервал между трамваями уменьшить на одну пятую, то промежуток между трамваями будет равен четырём частям. Следовательно, на маршруте «поместится» 15 трамваев.

Задача 9. Ответ: за 27 секунд.

Решение. «Голова» поезда проедет мост за 18 секунд, а «хвост» будет ехать по мосту ещё 9 секунд.

Задача 10. Ответ: в 13.00.

Решение. Скорости ребят одинаковы (подумайте, почему), и за час каждый из них проходил одну пятую расстояния между деревнями. За первый час Ваня прошел одну пятую этого расстояния, а до встречи каждый из ребят прошел по две пятых.

Следовательно, Ваня и Федя встретились в 13.00.

Задача 11. Ответ: раньше приедет велосипедист.

Решение. Два «ключевых» факта: 1) велосипедист проехал треть пути быстрее, чем мотоциклист — две трети пути, следовательно, его скорость составляет больше половины скорости мотоциклиста; 2) после того как велосипедист тронулся в путь, ему оставалось проехать две трети пути от A до B, а мотоциклисту — четыре трети такого же пути.

Задача 12. Ответ: каждые 45 минут.

Решение. Любой гонец, отправленный королём, за час удалится от него на 15 км. Значит, расстояние между этим и следующим гонцом составляет 15 км. Скорость каждого гонца — 20 км/ч, поэтому 15 км гонец проходит за 45 минут. Следовательно, гонцы будут прибывать в B через каждые 45 минут.

Занятие 5

Путь, скорость, время

С какой скоростью должна бежать собака,
чтобы не слышать звона консервной банки,
привязанной к её хвосту?

Известная задача

Цель занятия — потренироваться в решении задач на движение, показать связь задач на движение с другими типами арифметических задач (совместная работа и другие непрерывные процессы), выявить взаимосвязи между основными параметрами движения (путь, скорость, время). Среди прочих приведены задачи, использующие понятие «средней скорости».

Задача 1. Шина велосипеда лопнула в тот момент, когда велосипедист проехал две трети пути. На остальной путь пешком он затратил в два раза больше времени, чем на езду на велосипеде. Во сколько раз быстрее велосипедист ехал, чем шёл?

Ответ: в четыре раза.

Решение. На ходьбу велосипедист затратил в два раза больше времени, чем на езду на велосипеде, но при этом прошёл в два раза меньшее расстояние.

Задача 2. Юра и Лена. Из дома Юра вышел на 5 минут позже Лены, но шёл в два раза быстрее, чем она. Через какое время Юра догонит Лену?

Ответ: через 5 минут.

Решение. Юра проходит за 5 минут такое же расстояние, как Лена за 10 минут.

Полезно сравнить со следующей задачей: «Юра и Лена должны прополоть две одинаковых грядки. Юра начал работу на 5 минут позже Лены, но работал в два раза быстрее, чем сестра, и работу они закончили одновременно.

Сколько времени работал Юра?» Сюжет разный — математическая суть одинаковая.

Задача 3. Стометровка. Три бегуна, Андрей, Борис и Саша, соревновались в беге на 100 метров. Когда Андрей добежал до финиша, Борис отставал от него на 10 метров. Когда Борис добежал до финиша, Саша отставал от него на 10 метров. На сколько метров отставал Саша от Андрея в тот момент, когда Андрей финишировал?

Ответ: на 19 метров.

Решение. Когда Андрей пробежал 100 метров, Борис отставал от него на 10 метров, то есть пробежал 90 метров. Следовательно, его скорость составляет $0,9$ скорости Андрея. Аналогично, скорость Саши составляет $0,9$ скорости Бориса, то есть она составляет $0,81$ скорости Андрея. Следовательно, когда Андрей финишировал, Саша пробежал 81 метр.

Полезно сравнить с решением следующей задачи: «Торговец продал 10% имеющихся яблок до обеда, а после обеда — 10% остатка. Какая часть яблок продана? Ответ выразите в процентах».

Задача 4. Средняя скорость — что это? Человек шёл некоторое время со скоростью 4 км/ч, а потом в два раза больше времени со скоростью 7 км/ч. Какова средняя скорость его движения?

Ответ: 6 км/ч.

Решение. Пусть «некоторое время» составляет t часов, тогда всего он прошел $4t+7\cdot 2t = 18t$ км за $3t$ часов, значит, его средняя скорость составляет 6 км/ч.

Необходимо, чтобы в сознании учащихся отложилось, что средняя скорость, вообще говоря, не является средним арифметическим скоростей. При решении этой и некоторых других задач, оставаясь в рамках арифметического метода, полезно использовать буквы.

Задача 5. Если велосипедист будет ехать со скоростью 10 км/ч, то он опоздает на один час. Если же он будет ехать со скоростью 15 км/ч, то он приедет на один час раньше. С какой скоростью он должен ехать, чтобы приехать вовремя?

Ответ: 12 км/ч.

Решение. Предположим, что велосипедистов двое и их скорости равны 10 км/ч и 15 км/ч. Если бы первый выехал на два часа раньше второго, то они бы приехали одновременно. При этом второй велосипедист как бы «давал фору» 20 км первому.

Эту фору второй велосипедист может наверстать ровно за 4 часа. Следовательно, для того чтобы второй велосипедист оказался в конечном пункте одновременно с первым, он должен проехать 60 км. Осталось определить скорость велосипедиста, проезжающего 60 км за 5 часов.

Задача 6. Два поезда движутся друг навстречу другу по параллельным путям с одинаковыми скоростями 60 км/ч. Пассажир, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шёл мимо него в течение шести секунд. Какова длина первого поезда?

Ответ: 200 метров.

Решение. Представим себе, что второй поезд стоит, а первый движется с удвоенной скоростью, то есть можно считать, что по отношению к пассажиру второго поезда скорость первого поезда равна 120 км/ч, что составляет $\frac{100}{3}$ м/с.

Следовательно, длина первого поезда равна $\frac{100}{3} \cdot 6 = 200$ м.

Здесь фактически осуществляется выбор удобной системы отсчёта, что пригодится в дальнейшем на уроках физики.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7. Машина идёт со скоростью 60 км/ч. Как надо увеличить её скорость, чтобы выигрывать на каждом километре по одной минуте?

Задача 8. Львёнок решил покататься на Черепахе, но сначала ему нужно её догнать. Какое расстояние придётся пробежать львёнку, прежде чем он сможет покататься, если его скорость в 10 раз больше скорости черепахи, а черепаха находится в 180 метрах от львёнка?

Задача 9. Пост ДПС. По шоссе со скоростью 60 км/ч едет колонна автомашин длинной 300 метров. Проезжая мимо ДПС, машины сбрасывают скорость до 40 км/ч и далее следуют с этой скоростью. Какова будет длина колонны, когда все машины проедут пост ДПС?

Задача 10. Вася и Петя, поссорившись, разбежались с одинаковыми скоростями в противоположных направлениях. Через пять минут Вася спохватился, повернул назад и, увеличив скорость, побежал догонять Петю. Во сколько раз увеличил скорость Вася, если он догнал Петю через пять минут после того, как повернул назад?

Задача 11. Спешащий турист. Пройдя половину маршрута, турист увеличил скорость на 25% и поэтому прибыл в пункт назначения на полчаса раньше срока. Сколько времени потребовалось туристу на прохождение маршрута?

Задача 12. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Одновременно из пункта B в пункт A навстречу велосипедисту вышел пешеход. После их встречи велосипедист повернул обратно, а пешеход продолжил свой путь. Известно, что велосипедист вернулся в пункт A на 30 минут раньше пешехода, при этом его скорость была в пять раз больше скорости пешехода. Сколько времени затратил пешеход на путь из A в B?

Ответы и решения

Задача 7. Ответ: это невозможно.

Решение. Чтобы выигрывать по минуте на каждом километре, требуется проезжать каждый километр на минуту быстрее, то есть в нашем случае (когда скорость равна 1 км/мин) — за 0 минут.

Задача 8. Ответ: 200 метров.

Решение. Представим себе, что Черепаха не двигается, тогда Львёнок приближается к ней со скоростью, в 9 раз большей, чем реальная «черепашья». Значит, в действительности за это время Черепаха отползёт от Львёнка на 20 метров, то есть Львёнку придется пробежать 200 метров.

Задача 9. Ответ: 200 метров.

Решение. Так как первоначальная скорость движения колонны равна 1000 м/мин, то «хвост» колонны окажется у поста ДПС через $0,3$ минуты после того, как мимо ДПС проедет «голова» колонны. За это время «голова» успеет проехать $\frac{40}{60} \cdot 0,3 = 0,2$ (км) $=$ $= 200$ (м), что и составляет длину колонны.

Задача 10. Ответ: в три раза.

Сделаем рисунок: O — место ссоры, B и P — точки, в которых соответственно находились Вася и Петя через 5 минут после ссоры.

За следующие 5 минут Петя пробежал расстояние, равное OP, и оказался в точке K. Следовательно, Вася должен был за это же время пробежать расстояние BK, в три раза большее, чем PK.

Задача 11. Ответ: 4 часа 30 минут.

Решение. Если бы турист прошёл весь маршрут с увеличенной скоростью, то он финишировал бы на один час раньше. Если бы при этом он двигался ещё час, то он прошёл бы «лишних» 25% пути.

Так как за один час ходьбы с увеличенной скоростью турист проходит 25% пути, то весь путь в этом случае он проходит за 4 часа. Следовательно, с обычной скоростью он проходит весь путь за 5 часов. Кроме того, известно, что, увеличив скорость на второй половине пути, он финишировал на 30 минут раньше.

Задача 12. Ответ: 45 минут.

Решение. Мысленно разделим участок AB на шесть равных частей.

1) Поскольку скорость велосипедиста в пять раз больше скорости пешехода, то в момент встречи велосипедист проехал пять частей, а пешеход прошёл одну часть.

2) Затем велосипедист повернул обратно и вернулся в пункт A, проехав пять частей пути, а пешеход за это время прошёл ещё одну часть.

3) Значит, оставшиеся четыре части пути пешеход прошёл за 30 минут. Следовательно, на весь путь (шесть частей) пешеход должен потратить 45 минут.

Занятие 6

По течению и против ...

Три лодочника могут перевести по реке три мешка картошки, по одному каждый, за один час. За какое время выполнит эту работу один лодочник?

Старинная задача

Рассмотрены задачи на движение по реке и другие аналогичные задачи. При их решении используется идея «сложения скоростей», а также идея разумного выбора «системы отсчета».

Приняты следующие соглашения:

1) Если тело движется «по течению», то его скорость складывается из скорости тела в стоячей воде v и скорости течения реки u: $w = v + u$.

2) Если тело движется «против течения», то его скорость считается равной $w = v - u$.

3) Плоты движутся со скоростью течения реки.

Задача 1. Два пловца одновременно прыгнули с плота и поплыли в разные стороны: один — по течению, а второй — против течения реки. Через 5 минут они одновременно повернули и поплыли обратно. Кто из пловцов доплывёт до плота быстрее?

Ответ: они доплывут одновременно.

Решение. Относительно плота пловец движется с постоянной скоростью независимо от того, плывет ли он по течению реки или против течения. Следовательно, отплыв за 5 минут на некоторое расстояние, пловец вернется обратно также за 5 минут.

Задача 2. Катер проплывает 90 км по течению за то же самое время, что 70 км против течения. Какое расстояние за это же время сможет проплыть плот?

Ответ: 10 км.

Решение. Первый способ. Предположим, что катер и плот стартовали одновременно и в одном направлении. Катер, проплыв 90 км за некоторое время (t часов), разворачивается и плывёт до встречи с плотом. Из решения предыдущей задачи ясно, что на это уйдёт столько же времени (t часов). Следовательно, до встречи с плотом катер проплывёт 70 км.

Итак, за удвоенное время ($2t$ часов) плот проплыл 20 км, значит, за указанное время (t часов) он проплывает 10 км.

Мы показали, что разность скоростей катера по течению и против течения равна удвоенной скорости реки. Такой же результат можно получить из правила сложения скоростей.

Второй способ. Скорость — это расстояние, пройденное за единицу времени. Примем за «единицу времени» то время, за которое катер проходит 90 км по течению реки (или 70 км против течения). Тогда скорость течения реки равна 10 км в указанную «единицу времени». Следовательно, плоты за «единицу времени» проплывут 10 км.

Можно и «алгебраически»: пусть T — указанное время, тогда $\frac{90}{T} - \frac{70}{T} = \frac{20}{T}$ — удвоенная скорость течения и т. д.

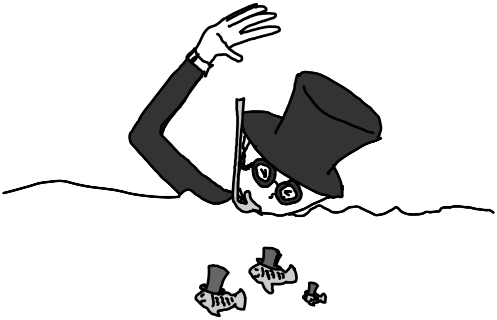
Задача 3. Вниз по Волге. От Нижнего Новгорода до Астрахани пароход идет 5 суток, а обратно — 7 суток. Сколько времени будут плыть плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

Решение. Пароход, двигаясь по течению, проходит в сутки одну пятую часть пути, а против течения — одну седьмую часть пути. Следовательно, удвоенная скорость течения, измеренная в частях пути в сутки, равна $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$.

Таким образом, за сутки плоты проплывают $\frac{1}{35}$ часть пути, а весь путь они проплывут за 35 суток.

При решении можно обойтись без дробей. Разделим (мысленно) расстояние между городами на 35 равных частей. Тогда за сутки пароход, двигаясь по течению, проходит расстояние, равное семи частям, а двигаясь против течения — расстояние, равное пяти частям. Разность скоростей «по течению» и «против течения» равна удвоенной скорости течения реки. Следовательно, скорость течения — одна часть в сутки. Таким образом, плоты будут плыть от Нижнего Новгорода до Астрахани 35 суток.

Задача 4. Дело в шляпе. Плывя вдоль реки, гребец под мостом потерял шляпу, но продолжал плыть в том же направлении. Через 15 минут он заметил пропажу, вернулся и поймал шляпу в 1 км от моста. Какова скорость течения реки?



Ответ: 2 км/ч.

Решение. Гребец догонит шляпу через 15 минут после того, как заметит пропажу. Следовательно, шляпа проплыла 1 км за полчаса.

Важно подчеркнуть, что на ход решения не влияет, в каком направлении плыла лодка первоначально — по течению или против. Пониманию помогает аналогия: представим, что история произошла в поезде: пассажир оставил шляпу на полке и вернулся. Сколько ему потребуется времени? Учащиеся отвечают, что пассажир вернется через 15 минут. Как узнать, какое расстояние за это время проедет поезд? Следует скорость поезда умножить на время. Аналогия «работает» убедительно.

Заметим, что «на физическом языке» эта аналогия фактически означает, что шляпа, плывущая по реке, выбрана в качестве начала отсчета в некоторой системе координат.

Задача 5. Кто больше? Два человека спускаются, не пропуская ступеней, по идущему вниз эскалатору. Один спускается быстрее другого. Кто из них насчитает больше ступенек и почему?

Ответ: тот, кто спускается быстрее.

Решение. Каждый из них в начальный момент видит одинаковое число ступенек. За время спуска часть ступенек успеет уползти под гребенку эскалатора, а остальные он сосчитает. Быстрый спустится раньше, поэтому от него «уползёт» меньше ступенек.

Задача 6. Неожиданный ход. Имея полный бак топлива, катер может проплыть 72 км против течения реки или 120 км по течению. На какое наибольшее расстояние по реке он может отплыть при условии, что топлива должно хватить и на обратный путь?

Ответ: 72 км.

Решение. При движении против течения на 1 км тратится $\frac{1}{72}$ содержимого бака, а при движении по течению — $\frac{1}{120}$ бака. Следовательно, в сумме на каждый километр пути расходуется $\frac{1}{45}$ бака. Поэтому отплыть можно на 45 км.

Казалось бы все? Но нет.

Можно поступить хитрее: отплыть по течению 72 км с выключенным мотором, а затем вернуться со включённым мотором.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7. Эскалатор метро спускает идущего по нему вниз пассажира за одну минуту. Если пассажир будет шагать по эскалатору вдвое быстрее, то он спустится за 45 секунд. Сколько времени спускается пассажир, стоящий на эскалаторе?

Задача 8. Пристани. Расстояние между пристанями A и B теплоход проходит по течению за 5 часов, а против течения — за 6 часов. За какое время проплывёт это расстояние плот?

Задача 9. Плот проплывает некоторое расстояние по реке за 18 часов, а моторная лодка, двигаясь против течения, за 3 часа. За какое время проплывёт указанное расстояние эта же моторная лодка, двигаясь по течению?

Задача 10. Моторная лодка может плыть по течению со скоростью 28 км/ч, а против течения — со скоростью 20 км/ч.

Маршрут между двумя пристанями туда и обратно лодка проделала за 6 часов. Каково расстояние между пристанями?

Задача 11. Лёня и Паша шагают по движущемуся вниз эскалатору, не пропуская ступенек. Паша успевает сделать два шага, пока Лёня делает один. Паша, пока спускался, успел сделать 28 шагов, а Лёня, пока спускался, успел сделать только 21 шаг. Сколько ступенек в видимой части эскалатора?

Задача 12. Петя и хулиган. Петя ехал по эскалатору. Когда он находился на середине лестницы, мимо него пробежал хулиган, сорвал с него шапку и бросил её на встречный эскалатор. Петя хочет как можно быстрее получить шапку обратно. Куда ему следует бежать: вверх или вниз?

Ответы и решения

Задача 7. Ответ: $1{,}5$ минуты.

Решение. Измерим скорость в эскалаторах в минуту. В первом случае скорость 1, во втором $\frac{4}{3}$. Приращение $\frac{1}{3}$ — это собственная скорость пассажира. Значит, скорость эскалатора равна $1 - \frac{1}{3}$, а время спуска стоящего пассажира $1 : \frac{2}{3} = 1{,}5$ мин.

Задача 8. Ответ: 60 часов.

Решение. За один час пароход проходит $\frac{1}{5}$ часть пути по течению и $\frac{1}{6}$ часть пути против течения. Разность $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{6}$, равная $\frac{1}{30}$ части пути, соответствует удвоенной скорости течения. Следовательно, за час плот проходит $\frac{1}{60}$ часть пути.

Задача 9. Ответ: за 2 часа 15 минут.

Решение. Скорость моторной лодки по течению отличается от её скорости против течения на две скорости течения. Следовательно, за час моторная лодка по течению проходит $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ части пути. Таким образом, весь путь по течению лодка проходит за $\frac{9}{4}$ часа.

Задача 10. Ответ: 70 км.

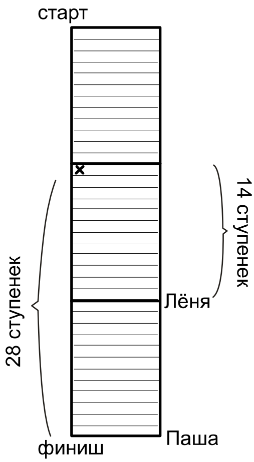
Решение. Предположим, что расстояние между пристанями равно 140 км. Тогда лодка пройдет это расстояние, двигаясь по течению, за 5 часов, а двигаясь против течения, — за 7 часов. Но $5+7=12$ в два раза больше, чем 6. Следовательно, требуется уменьшить расстояние в два раза, тогда и время прохождения пути уменьшится в два раза.

Задачу мы решили, применяя так называемое «фальшивое правило», очень популярное в эпоху Средневековья.

Почему мы взяли 140? Потому, что 140 — наименьшее общее кратное чисел 20 и 28. Мы также учитывали, что расстояние на каждом участке пути прямо пропорционально времени.

Задача 11. Ответ: длина эскалатора — 42 ступеньки.

Решение. Отметим левый край ступеньки эскалатора, на которую ребята ступили в начале движения. Пока Паша не сошёл с эскалатора, он всегда будет вдвое дальше от отметки, чем Лёня. Когда Паша спустился, Лёня сделал только 14 шагов (вдвое меньше, чем Паша). Поскольку 14 — это $\frac{2}{3}$ от 21, то Лёня спустится на $\frac{2}{3}$ длины. Значит, в этот момент Лёня и отметка делят эскалатор на 3 равные части (см. рисунок), и всего ступенек — 42.



Задача 12. Ответ задачи зависит от соотношения величин u и v: если скорость эскалатора u больше трети собственной скорости Пети $\frac{v}{3}$, то выгоднее бежать «вдогонку шапке», в остальных случаях направление движения значения не имеет.

Решение. Представим себе, что оба эскалатора «связаны в кольцо». Получилась замкнутая движущая дорожка, на которой находятся Петя и его шапка. На такой дорожке Пете всё равно куда бежать, «навстречу» шапке или «вдогонку», поскольку его скорость относительно шапки равна его собственной скорости v относительно эскалатора.

Всегда ли можно рассуждать подобным образом? Нет, это верно лишь в том случае, если Петя успевает добежать до шапки до того момента, как шапка остановится на площадке эскалатора. Если не успевает, то ему следует бежать «вдогонку» шапке. Ведь в какой-то момент шапка остановится, и скорость Пети относительно шапки возрастёт на скорость эскалатора u и станет равной $v + u$.

В задаче присутствует «скрытый параметр», не упоминающийся в условии, но существенно влияющий на ответ.

Дополнительные задачи

О чем это: две ноги сидели на трёх,
а когда пришли четыре и утащили одну,
то две ноги, схватив три, бросили их
в четыре, так что четыре оставили одну?

Старинная задача

Представлены задачи, предназначенные для самостоятельной работы учащихся и организации математических соревнований. Кроме приведённых задач учителю могут понадобиться их вариации, то есть задачи с изменёнными цифрами и наименованиями, но математически равносильные (например, задача 8 занятия 6 является вариацией задачи 3 того же занятия). Мы, как правило, вариаций не приводим, считая, что учитель сможет их создать самостоятельно.

Такие задачи можно найти в популярной литературе (см., например, [1], [2–5], [6–10] в списке литературы).

Задача 1. Проблемы с бензином. Можно ли разлить 50 литров бензина по трём бакам так, чтобы в первом баке было на 10 литров больше, чем во втором, а после переливания 26 литров из первого бака в третий в третьем баке стало столько же, сколько и во втором?

Задача 2. В двух мешках находится 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй $\frac{1}{8}$ часть муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках станет муки поровну. Сколько муки в каждом мешке?

Задача 3. Однажды царь наградил крестьянина яблоком из своего сада. Пошел крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором, а в каждом заборе только одни ворота, и в каждых воротах стоит сторож. Подошел крестьянин к первому сторожу и показал царский указ, а сторож ему в ответ: «Иди и возьми, но при выходе отдашь мне половину тех яблок, что несешь, и ещё одно». То же самое ему сказали второй и третий сторожа. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы после расплаты со сторожами у него осталось одно яблоко?

Задача 4. В поисках приключений. Расстояние между Атосом и Арамисом, едущими верхом по прямой дороге, равно 20 лье. За один час Атос проезжает 4 лье, а Арамис — 5 лье. Какое расстояние может быть между ними через 1 час?

Задача 5. Как выгоднее? В каком случае вкладчик получит больше денег: если банк начисляет доход в 12% раз в год или если он начисляет по 1% каждый месяц? (Начисленный доход сразу добавляется к имеющейся на счету сумме.)

Задача 6. Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 40 килограммам морской, чтобы содержание соли составило 2%?

Задача 7. На международной конференции 85% делегатов знают английский язык, а 75% — испанский (каждый из делегатов знает хотя бы один из этих языков). Какая часть делегатов наверняка знает оба языка?

Задача 8. Бюджет семьи. В семье четыре человека. Если Маше удвоят стипендию, то общий доход семьи возрастёт на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату — то на 15%, если же зарплату удвоят папе — то на 25%. Как возрастёт доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

Задача 9. Али-баба и разбойники. В прошлом году за Али-бабой гонялись 40 разбойников, но поймать не смогли. В этом году атаман пообещал увеличить число таких разбойников как минимум на 47%. Сколько разбойников будут гоняться за Али-бабой в этом году?

Задача 10. Пятачку на день рождения подарили несколько разноцветных шариков, из них 45% — красные. Пятачок отдал один синий и один зелёный шарики ослику Иа-Иа. Теперь у Пятачка ровно половина шариков — красные. Сколько всего шариков подарили ему на день рождения?

Задача 11. В трёхлитровой банке находится литр спирта, а в пятилитровой — литр воды. Разрешается переливать из одного сосуда в другой любое количество жидкости. Можно ли в результате какого-то количества переливаний получить в пятилитровой банке раствор спирта с концентрацией 54%? При переливании вода и спирт равномерно смешиваются.

Задача 12. Числа *A* и *B*. Число A на 400% больше числа B. На сколько процентов число B меньше числа A?

Задача 13. В фильме «Самогонщики» три друга гонят самогон. У Труса течёт жидкость крепостью a% и стандартная бутыль наполняется за a часов, у Балбеса течёт жидкость крепостью b% и такая же бутыль наполняется за b часов, а у Бывалого — c% за c часов соответственно. Для ускорения процесса друзья направили трубки аппаратов в одну бутыль и наполнили её за сутки. Найдите крепость получившейся смеси.

Задача 14. Два фонтана. Первый фонтан наполняет бассейн за 2 часа 30 минут, а второй — за 3 часа 45 минут. За какое время наполнят бассейн оба фонтана, работая вместе?

Задача 15. В леспромхозе решили вырубить участок леса. Чтобы успокоить экологов, директор леспромхоза сказал: «Мы будем рубить только сосны, их в лесу 99%, после рубки они составят 98% всех деревьев». Какую часть леса собирается вырубить леспромхоз?

Задача 16. Мама с дочкой. Мама может прополоть грядку за 7 часов непрерывной работы, а вместе с дочкой — за 5 часов. За какое время справится с работой дочка, если будет полоть грядку одна?

Задача 17. В отаре 8 овец. Первая съедает копну сена за один день, вторая за два дня и так далее, восьмая — за восемь дней. Кто быстрее съест копну сена: первые две овцы или все остальные?

Задача 18. Задача Льва Толстого. Артели косцов надо было скосить два луга, один из которых вдвое больше другого.

Половину дня вся артель косила большой луг. После полудня артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца, а вторая половина косила малый луг, на котором к вечеру остался участок, скошенный на другой день одним косцом, проработавшим целый день. Сколько косцов было в артели?

Задача 19. По мотивам И. Ньютона. Трава на лугу растёт одинаково густо и быстро. 70 коров могут съесть её за 24 дня, а 30 коров за 60 дней. Какое количество коров может пастись на этом лугу неограниченное время?

Задача 20. Винни-Пух и Пятачок сели за стол немного подкрепиться и начали одновременно есть мёд из одного горшка, не отвлекаясь на разговоры. Если бы Винни-Пух ел со скоростью Пятачка, то процесс еды длился бы на 4 минуты дольше, а если бы, наоборот, Пятачок ел со скоростью Винни-Пуха, то сократился бы на 1 минуту. За какое время мёд из горшка был полностью съеден?

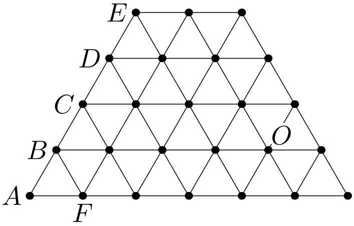
Задача 21. Задача Г. Дьюдени. Если полторы курицы несут полтора яйца за полтора дня, то сколько кур плюс ещё полкурицы, несущихся в полтора раза быстрее, снесут десяток яиц с половиной за полторы недели?

Задача 22. Муха и пешеходы. Два пешехода движутся по прямой дороге навстречу друг другу со скоростью 5 км/ч. Первоначальное расстояние между ними — 10 км. Муха, которая летает со скоростью 14 км/ч, взлетает с первого пешехода, долетает до второго пешехода, разворачивается и, не теряя ни секунды, летит обратно к первому пешеходу, потом снова ко второму и так далее. Какое расстояние пролетит муха к тому моменту, когда пешеходы встретятся?

Задача 23. Время встречи. В 9.00 из двух населённых пунктов навстречу друг другу выехали два велосипедиста Андрей и Костя. Андрей может проехать расстояние между этими пунктами за 6 часов, а Костя — за 4 часа. Когда они встретились: до 12.00 или позже? В какое время произошла встреча?

Задача 24. Двое путников одновременно вышли из A в B. Первый путник половину времени, затраченного им на весь переход, шёл со скоростью 5 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 4 км/ч. Второй путник первую половину пути шёл со скоростью 4 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 5 км/ч. Кто из путников пришел раньше?

Задача 25. «Треугольная» сетка сделана из шнура, который может гореть. Огонь распространяется по шнуру с одной и той же скоростью по всем направлениям (звено сгорает ровно за одну минуту). Какие из отмеченных звеньев сетки (AB, BC, CD, DE или AF) сгорят последними, если поджечь сетку в точке O? Через какое время это произойдет?



Задача 26. Дорога от дома до школы занимает у Володи 20 минут. Однажды по дороге он вспомнил, что забыл дома ручку. Если теперь он продолжит дорогу в школу, то придёт за 8 минут до звонка, а если вернётся домой, возьмёт ручку и пойдёт опять в школу, то опоздает на 10 минут. Какую часть пути до школы он успел пройти?

Задача 27. Три автомобиля. Из города в одном направлении выехали три автомобиля: второй — через 10 минут после первого, третий — через 20 минут после второго. Через 30 минут после своего выезда третий автомобиль догнал второй, а еще через 10 минут он догнал первый автомобиль. Через какое время после своего выезда из города второй автомобиль догнал первый?

Задача 28. Три друга, Андрей, Вася и Сергей, хотят преодолеть расстояние 60 км за три часа. В их распоряжении двухместный мотоцикл, скорость которого 50 км/ч. Могут ли они успеть вовремя, если скорость идущего пешком — 5 км/ч? Как им организовать движение?

Задача 29. «Ну, погоди!» Перед очередными съёмками Волк и Заяц соревновались в беге на $5,5$ км. За ходом забега следят несколько судей так, что вся трасса находится под их наблюдением. Каждый судья видит 1 км трассы. По окончании забега выяснилось, что километровый участок каждого из судей Волк пробежал за 8 минут, а Заяц — за 8 минут и 1 секунду. Могло ли случится так, что Заяц прошел всю трассу быстрее Волка?

Задача 30. Марсианская пустыня. Путешественник должен пересечь пустыню шириной 80 км. Известно, что за день он может пройти 20 км, взяв с собой запас кислорода на 3 дня. Поэтому он должен делать промежуточные станции, оставляя там баллоны с кислородом. Может ли он пересечь пустыню за 6 дней?

Задача 31. Ветхий мост. Папе, маме, сыну и бабушке надо ночью перебраться через мост. У них есть только один фонарь, без которого по мосту в темноте не пройти. К несчастью, мост настолько ветхий, что выдерживает максимум двоих. Ещё одна проблема состоит в том, что они могут двигаться с разной скоростью: папа проходит весь мост за одну минуту, мама — за две минуты, сын — за пять минут, а бабушка — за десять минут (двое всегда движутся со скоростью более медленного из них). Смогут ли они все перебраться через мост за 17 минут?

Задача 32. Три брата, Иван, Пётр и Николай, возвращались домой с рыбалки, где их ожидал бочонок кваса. Иван шел вдвое медленнее Петра и втрое медленнее Николая. Николай пришел домой первым, принялся за квас и к приходу Петра выпил седьмую часть бочонка. Затем пришел Пётр, и они стали пить квас уже вдвоём. Известно, что братья пьют квас с одинаковой скоростью. Досталось ли кваса Ивану?

Ответы и решения

Задача 1. Ответ: нет, нельзя.

Заметим, что как в первом, так и во втором баке должно быть не менее чем по 26 литров бензина. Поэтому так разлить 50 литров бензина невозможно.

Задача 2. Ответ: в первом — 80 кг муки, а во втором — 60 кг.

Если из первого мешка взять восьмую часть, то там останется семь восьмых от первоначального количества, то есть 70 кг (в мешках стало поровну!). Следовательно, одна восьмая часть составляет 10 кг, то есть в первом мешке — 80 кг, во втором — 60 кг.

Задача 3. Ответ: 22 яблока.

Представим себе, что мы смотрим кинофильм «от конца к началу». Что мы видим?

«Вначале» (то есть в конце!): у крестьянина одно яблоко.

1) «После» последнего сторожа (мы его видим первым): у крестьянина $(1+1) \times 2 = 4$ яблока.

2) «После» предпоследнего сторожа (мы его видим вторым): $(1+4) \times 2 = 10$ яблок.

3) «После» первого сторожа (мы его видим последним): $(1 + 10) \times 2 = 22$.

Задача 4. Ответ: 11 лье, 29 лье, 19 лье или 21 лье (в зависимости от направления движения).

В каком направлении ехал каждый из мушкетеров? Об этом в условии задачи ничего *не сказано.* Если навстречу друг другу, то расстояние между ними будет 11 лье. В других случаях (сделайте рисунки!) возможны ответы 29 лье; 19 лье; 21 лье.

Задача 5. Ответ: выгоднее начислять доходы раз в месяц.

Пусть вкладчик положил в банк некоторую сумму, тогда при первом способе начисления дохода он в конце года получит дополнительно 12% от вложенной суммы.

При втором способе начисления доходов он получит в первый месяц 1% от вложенной суммы, во второй месяц 1% от несколько увеличенной суммы, в третий раз 1% от ещё большей суммы и так далее.

Задача 6. Ответ: 60 кг.

В 40 кг морской воды содержится $40 \cdot 0,05 = 2$ (кг) соли, что в новом растворе составляет 2%, следовательно, раствора должно быть в 50 раз больше, то есть 100 кг.

Задача 7. Ответ: 60%.

Заметим вначале, что $85\% + 75\% = 160\%$.

За счет кого образовался излишек? За счет тех людей, которые знают оба языка, — их мы посчитали дважды. Таким образом, не менее 60% делегатов знает оба языка.

Полезно обсудить, что получится, если убрать условие в скобках, то есть считать, что есть делегаты, не знающие ни испанского, ни английского языков. Получим новый ответ: от 60% до 75%.

Задача 8. Ответ: 55%.

Если бы всем членам семьи вдруг стали платить вдвое больше, общий доход увеличился бы на 100%. Из этого увеличения 5% пришлось бы на Машу, 15 — на маму, 25 — на папу, а остальные 55 — на дедушку.

Задача 9. Ответ: не менее 59.

Заметим, что 5% от 40 равно 2, а 45% от 40 равно 18. Далее, 47% от 40 больше 18, но меньше 19.

Задача 10. Ответ: 20 шариков.

Заметим, что после того, как были подарены синий и зелёный шарики, количество красных шариков не изменилось и сравнялось с количеством остальных. Это означает, что количество шариков, оставшихся у Пятачка, уменьшилось на 10% (если 45% — половина, то 90% — все!). Таким образом, два шарика составляют 10% от количества подаренных шариков, то есть всего Пятачку подарили 20 шариков.

Задача 11. Ответ: нельзя.

Так как вода находится в пятилитровой банке и нет третьего сосуда, куда её можно перелить, то на приготовление раствора уйдёт вся вода. Вначале концентрация спирта в пятилитровом сосуде не выше (даже ниже), чем в трёхлитровом, и при переливаниях это нестрогое неравенство сохраняется. Воды и спирта у нас поровну, следовательно, в пятилитровой банке невозможно получить раствор с концентрацией более 50%.

При обсуждении следует обратить внимание учащихся на то, что данные об объёмах сосудов здесь несущественны.

Задача 12. Ответ: на 80%.

Число A на 400% больше числа B, следовательно, число A в пять раз больше числа B. Если принять A за 100%, то число B составляет от него 20%.

Задача 13. Ответ: 72%.

Разделим мысленно бутыль на 100 частей («стаканов») и последим за количеством чистого спирта в ней. В полной бутыли крепости a% содержится a «стаканов» спирта, следовательно, аппарат Труса вырабатывает один «стакан» спирта в час. То же верно и для двух других аппаратов. За 24 часа три аппарата выработают 72 «стакана» спирта, а крепость смеси будет 72%.

Задача 14. Ответ: за 1 час 30 минут.

Первый фонтан заполняет за час $\frac{2}{5}$ бассейна, а второй — $\frac{4}{15}$ бассейна. Вместе за час они заполнят $\frac{2}{3}$ бассейна, а оставшуюся треть бассейна — ещё за полчаса.

Можно и без дробей: за 15 часов первый фонтан наполнит шесть бассейнов, а второй — четыре бассейна. Итого вместе они наполнят десять бассейнов за 15 часов. Следовательно, один бассейн они наполнят за 1 час 30 минут.

Задача 15. Ответ: половину.

Действительно, раньше «не сосны» (их не рубили) составляли 1%, то есть $\frac{1}{100}$ часть, а теперь 2%, то есть $\frac{1}{50}$.

Здесь следует напомнить учащимся о задаче 5 из второго занятия. Сюжеты разные, суть одна и та же!

Задача 16. Ответ: за 17 часов 30 минут.

За час дочка сделает $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{35}$ часть работы. Следовательно, всю работу она выполнит за $17,5$ часов.

Или иначе: разделим всю работу на 35 равных частей, тогда мама за час делает 5 частей, а вместе с дочкой — 7 частей работы. Соответственно, дочка за час делает 2 части работы, а всю работу за 17 часов 30 минут.

Задача 17. Ответ: первые две овцы съедят быстрее.

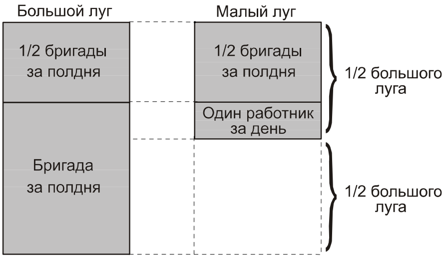
Сравним ежедневные рационы.

Проверим, что больше: $1+\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$.

Получим $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$, а $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<\frac{1}{4}\cdot 4=1$.

Без дробей получается сложнее.

Задача 18. Ответ: восемь человек.



Пусть в артели K косцов. Тогда за первую половину дня они скосили поле площадью Ka (a — площадь, скашиваемая одним косцом). За вторую половину дня на большом лугу было скошено $0,5Ka$, то есть площадь большего луга равна $1,5Ka$. Тогда площадь маленького луга равна $0,75Ka$, значит, площадь нескошенной его части составляет $0,25Ka$. Следовательно, один косец за день скашивает $0,25Ka$, а число косцов в бригаде можно найти, если $2Ka$ разделить на $0,25Ka$.

Задача 19. Ответ: три коровы.

Заметим, что 30 коров за 60 дней съели столько же травы, сколько может съесть одна корова за 1800 дней, а 70 коров за 24 дня съели столько же травы, сколько съедает одна корова за 1680 дней. Следовательно, за 120 дней корова съедает столько же травы, сколько вырастает за 36 дней. Значит, за один день на лугу вырастает столько травы, сколько съедают $3\frac{1}{3}$ коровы.

Хорошо бы воспользоваться случаем и рассказать, что-нибудь об И. Ньютоне.

Задача 20. Ответ: за 2 минуты 40 секунд.

Если оба приятеля едят со скоростью Винни-Пуха, то они съедают мёд на 5 минут быстрее, чем когда они оба едят со скоростью Пятачка. При этом каждый съедает по половине горшка. Значит, Винни-Пух съедает полгоршка мёда на 5 минут быстрее, чем Пятачок. Следовательно, когда они ели вместе и Винни-Пух съел полгоршка, то в горшке оставалось столько мёда, сколько Пятачок съест за 5 минут. Но вместе они доели этот остаток за 1 минуту. За это время Пятачок успел съесть $\frac{1}{5}$ остатка, значит, $\frac{4}{5}$ остатка съел Винни-Пух, то есть Винни-Пух ест мёд в четыре раза быстрее Пятачка. Значит, остаток был $\frac{3}{4}$ от половины, Винни съел $\frac{3}{5}$ от половины за минуту, поэтому первую половину он съел за $\frac{5}{3}$ минуты.

Задача 21. Ответ: полкурицы.

Если полторы курицы несут полтора яйца за полтора дня, то одна курица за полтора дня снесёт одно яйцо. Курица, которая «работает» быстрее в полтора раза, снесёт полтора яйца за полтора дня (по одному яйцу в день). Поэтому эта курица снесёт десять с половиной яиц за десять с половиной дней (полторы недели). Отнимем полкурицы — получим ответ.

Задача 22. Ответ: 14 км.

Пешеходы встретятся через час, следовательно, муха будет летать 1 час.

Задача 23. Ответ: в 11 часов 24 минуты.

На первый вопрос задачи можно ответить, не производя вычислений. Действительно, Андрей преодолевает расстояние между населёнными пунктами за 6 часов, следовательно, в 12.00 он будет на середине пути. Но Костя едет быстрее. Следовательно, в 12.00 Костя уже проедет середину пути, и встреча произойдёт на половине Андрея, то есть раньше, чем 12.00. Когда именно? Подсчитаем: Андрей проезжает за час $\frac{1}{6}$ часть пути, а Костя — $\frac{1}{4}$ часть пути, следовательно, за один час они сближаются на $\frac{5}{12}$ частей пути.

Таким образом, они встретятся через $1 : \frac{5}{12} = \frac{12}{5}$ часа, то есть в 11 часов 24 минуты.

Задача 24. Ответ: первый путник пришёл раньше.

Первый путник прошёл со скоростью 5 км/ч больше половины расстояния, а второй путник — ровно половину.

Задача 25. Ответ: последними сгорят звенья AB и AF — через 5 минут.

Огонь доберётся до любой из точек B, C, D, E, F за 4 минуты. Следовательно, последними сгорят отрезки AB и AF — через 5 минут (отрезки DE, CD и BC сгорят через $4,5$ минуты, потому что каждый из них будет гореть с двух концов).

Задача 26. Ответ: $\frac{9}{20}$ пути.

Если бы Володя вышел из дома на 8 минут позже, то, вернувшись за ручкой, он опоздал бы в школу на 18 минут. Эти 18 минут тратятся на двукратное прохождение уже пройденного пути. Следовательно, к моменту, когда он вспомнил о забытой ручке, Володя шёл 9 минут. А так как весь пути до школы он проходит за 20 минут, то за 9 минут он прошёл $\frac{9}{20}$ пути.

Задача 27. Ответ: через 200 минут.

1) Третий автомобиль проехал за 15 минут столько же, сколько второй проехал за 25 минут.

2) Третий автомобиль проехал за 20 минут столько же, сколько первый проехал за 35 минут.

3) Следовательно, за 60 минут третий автомобиль проедет столько же, сколько второй за 100 минут, а первый — за 105 минут.

4) Следовательно, за 100 минут второй проезжает столько, сколько первый за 105 минут, а поскольку первый опережает второго на 10 минут, то второму автомобилю потребуется 200 минут, чтобы догнать первый.

Задача 28. Ответ: да, могут.

Например, так:

1) Первый час: Андрей и Вася проезжают на мотоцикле 50 км, а Сергей проходит пешком 5 км. Далее Андрей за 2 часа успевает дойти пешком вовремя.

2) Второй час: Сергей проходит пешком еще 5 км, а Вася возвращается обратно на 40 км обратно и ждет там Сергея.

3) Третий час: Вася и Сергей преодолевают оставшийся путь на мотоцикле и успевают приехать вовремя.

Задача 29. Ответ: да, могло.

Приведем пример, когда это возможно.

Пусть Волк бежит с постоянной скоростью $7,5$ км/ч, то есть пробегает каждый километр за 8 минут.

Заяц бежит хитрее, неравномерно:

1) первые $0,5$ км («быстрый» участок) он пробегает за 2 минуты 1 секунду;

2) вторые $0,5$ км («медленный» участок) — за 6 минут;

3) третьи $0,5$ км («быстрый» участок) — снова за 2 минуты 1 секунду и так далее.

Следовательно, Волк пробегает $5,5$ км за 44 минуты, а Заяц — шесть «быстрых» участков — за 12 минут 6 секунд, а пять «медленных» участков — за 30 минут. Итого, Заяц пробежит дистанцию за 42 минуты 6 секунд, то есть быстрее Волка.

Покажем, что при таком движении Заяц любой километр пробегает ровно за 8 минут и 1 секунду.

Раскрасим полукилометровые отрезки дистанции $5,5$ км в два цвета (чёрный и белый) так, чтобы «медленные» участки были чёрными, а «быстрые» участки — белыми. Тогда каждый промежуток длиной 1 км содержит в себе целиком либо один из чёрных, либо один из белых отрезков, а остальная часть этого промежутка окрашена другим цветом. Последнее означает, что, пробегая любой километр, Заяц $0,5$ км бежит быстро (за 2 минуты 1 секунду), а другие $0,5$ км — медленно (за 6 минут). Итого, каждый километр он бежит 8 минут 1 секунду.

Задача трудная, но посильная для обсуждения с шестиклассниками.

Задача 30. Ответ: да, сможет.

1) За первые два дня он может организовать станцию в 20 км от начального пункта, где будет оставлен запас кислорода на один день, и вернуться в начальный пункт.

2) За следующие четыре дня он преодолеет пустыню, так как, взяв с собой запас кислорода на три дня, он пополнит его на промежуточной станции.

Задача 31. Ответ: да, смогут.

Возможная схема прохода по мосту:

1) папа с мамой — две минуты;

2) папа назад с фонариком — одна минута;

3) внук с бабушкой — десять минут;

4) мама с фонариком — две минуты;

5) папа с мамой — две минуты.

Итого — 17 минут.

Задача 32. Ответ: нет, не досталось.

Иван шел вдвое медленнее Петра и втрое медленнее Николая. Следовательно, Иван потратил на дорогу вдвое больше времени, чем Пётр, и втрое больше времени, чем Николай.

Пусть Иван, Пётр и Николай потратили на дорогу $6t$, $3t$ и $2t$ часов соответственно. Тогда Николай пил квас в одиночку t часов, а вместе с Петром — $3t$ часов. Николай выпил в одиночку одну седьмую часть бочонка, а вместе с Петром — шесть седьмых бочонка, то есть к приходу Ивана весь бочонок был выпит.

Приложение

Раздаточный материал

Занятие 1

Задача 1. По грибы. Вася нашел на 36 грибов больше, чем Лена. По дороге домой сестра стала просить Васю: «Дай мне несколько грибов, чтобы у меня стало столько же грибов, сколько и у тебя!» Сколько грибов должен брат отдать Лене?

Задача 2. На скотном дворе гуляют гуси и поросята. Петя сосчитал количество голов, их оказалось 30, потом сосчитал, сколько всего ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на скотном дворе?

Задача 3. На поляне паслись ослы. К ним подошли несколько мальчиков. «Сядем на ослов по одному», — предложил старший. Двум мальчикам ослов не хватило. «Попробуем сесть по двое», — снова предложил старший. Тогда один осёл остался без седока. Сколько ослов и сколько мальчиков было на поляне?

Задача 4. Сколько лет Ване? Когда Ваню спросили, сколько ему лет, он подумал и сказал: «Я втрое моложе папы, но зато втрое старше Серёжи». Тут подбежал маленький Серёжа и сообщил, что папа старше его на 40 лет. Сколько лет Ване?

Задача 5. «Старинная задача». Для покупки порции мороженого Пете не хватает семи копеек, а Маше — одной копейки. Тогда они сложили все имевшиеся у них деньги. Но их тоже не хватило на покупку даже одной порции. Сколько стоила порция мороженого?

Задача 6. Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным количеству девочек, её не решивших. Кого в классе больше: решивших задачу или девочек?

Занятие 2

Задача 1. Петя купил две книги. Первая книга оказалась на 75% дешевле второй. На сколько процентов вторая книга дороже первой?

Задача 2. Мечта покупателя. Картофель подешевел на 20%. На сколько процентов больше картофеля можно купить на ту же сумму денег?

Задача 3. Где дешевле? В двух магазинах молоко стоило одинаково. Затем в одном магазине оно сразу подешевело на 40%, а в другом — сначала на 20%, а затем ещё на 25%. В каком из магазинов молоко теперь дешевле?

Задача 4. Садовый участок. Длину прямоугольного участка земли увеличили на 50%, а его ширину уменьшили на 10%. Как изменилась площадь участка?

Задача 5. Сушёные грибы. Влажность свежих грибов — 99%, а сушёных — 98%. Как изменилась масса грибов после подсушивания?

Задача 6. Два положительных числа. Одно из положительных чисел увеличили на 1%, другое — на 4%. Могла ли в результате сумма этих чисел увеличиться на 3%?

Занятие 3

Задача 1. День Рождения Малыша. Малыш съедает банку варенья за 6 минут, а Карлсон — в два раза быстрее. За какое время они съедят это варенье вместе?

Задача 2. Старинная задача. Один человек выпьет кадь пития в 14 дней, а с женою выпьет ту же кадь в 10 дней. Во сколько дней жена его отдельно выпьет ту же кадь?

Задача 3. Пять кошек поймали пять мышек за пять минут. Сколько кошек поймают десять мышек за десять минут?

Задача 4. Десять бобров рассчитали, что могут построить плотину за 8 дней. Когда они проработали два дня, то выяснилось, что ввиду надвигающегося паводка им надо закончить работу через 2 дня. Сколько бобров им необходимо позвать себе на подмогу?

Задача 5. Дрова. Двое рабочих могут напилить за день три поленницы дров, а наколоть — шесть поленниц. Сколько поленниц дров они должны напилить, чтобы успеть наколоть их в тот же день?

Задача 6. Классический сюжет. Трое рабочих роют яму. Они работают по очереди, причём каждый работает столько времени, сколько нужно двум другим, чтобы вырыть половину ямы. Работая так, они вырыли яму. Во сколько раз быстрее они закончили бы работу, если бы работали одновременно?

Занятие 4

Задача 1. Стрекоза и муравьи. Два муравья, Вася и Кирилл, отправились в гости к Стрекозе. Вася всю дорогу полз, а Кирилл половину пути ехал на Гусенице, что было в два раза медленнее, чем ползти, а вторую половину скакал на Кузнечике, что было в десять раз быстрее, чем ползти. Кто из муравьёв пришёл в гости первым, если вышли они одновременно?

Задача 2. Гусеница ползёт по столбу, при этом за день она поднимается на 5 метров, а за ночь опускается на 4 метра. Высота столба 10 метров. За какое время гусеница доползёт до вершины столба?

Задача 3. На круговом маршруте работают два автобуса, их интервал движения составляет 21 минуту. Каким будет интервал движения, если на этом маршруте будут работать три автобуса?

Задача 4. Дорога на работу. Инженер обычно приезжает поездом на вокзал в 8 часов утра. Точно в 8 часов 00 минут к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 7 часов утра и пошёл навстречу машине. Встретив машину, он сел в неё и приехал на завод на 20 минут раньше, чем обычно. Определите показание часов в момент встречи инженера с машиной.

Задача 5. Встречи в пути. Два парома отходят одновременно от противоположных берегов реки и пересекают реку с постоянной скоростью перпендикулярно берегам. Паромы встречаются друг с другом на расстоянии 720 метров от ближайшего берега. Достигнув берега, они сразу отправляются обратно и затем встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?

Задача 6. Поезд на мосту. Поезд проходит мост длиной 450 метров за 45 секунд, а мимо светофора проезжает за 15 секунд. Вычислите длину поезда и его скорость.

Занятие 5

Задача 1. Шина велосипеда лопнула в тот момент, когда велосипедист проехал две трети пути. На остальной путь пешком он затратил в два раза больше времени, чем на езду на велосипеде. Во сколько раз быстрее велосипедист ехал, чем шёл?

Задача 2. Юра и Лена. Из дома Юра вышел на 5 минут позже Лены, но шёл в два раза быстрее, чем она. Через какое время Юра догонит Лену?

Задача 3. Стометровка. Три бегуна, Андрей, Борис и Саша, соревновались в беге на 100 метров. Когда Андрей добежал до финиша, Борис отставал от него на 10 метров. Когда Борис добежал до финиша, Саша отставал от него на 10 метров. На сколько метров отставал Саша от Андрея в тот момент, когда Андрей финишировал?

Задача 4. Средняя скорость — что это? Человек шёл некоторое время со скоростью 4 км/ч, а потом в два раза больше времени со скоростью 7 км/ч. Какова средняя скорость его движения?

Задача 5. Если велосипедист будет ехать со скоростью 10 км/ч, то он опоздает на один час. Если же он будет ехать со скоростью 15 км/ч, то он приедет на один час раньше. С какой скоростью он должен ехать, чтобы приехать вовремя?

Задача 6. Два поезда движутся друг навстречу другу по параллельным путям с одинаковыми скоростями 60 км/ч. Пассажир, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шёл мимо него в течение шести секунд. Какова длина первого поезда?

Занятие 6

Задача 1. Два пловца одновременно прыгнули с плота и поплыли в разные стороны: один — по течению, а второй — против течения реки. Через 5 минут они одновременно повернули и поплыли обратно. Кто из пловцов доплывёт до плота быстрее?

Задача 2. Катер проплывает 90 км по течению за то же самое время, что 70 км против течения. Какое расстояние за это же время сможет проплыть плот?

Задача 3. Вниз по Волге. От Нижнего Новгорода до Астрахани пароход идет 5 суток, а обратно — 7 суток. Сколько времени будут плыть плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

Задача 4. Дело в шляпе. Плывя вдоль реки, гребец под мостом потерял шляпу, но продолжал плыть в том же направлении. Через 15 минут он заметил пропажу, вернулся и поймал шляпу в 1 км от моста. Какова скорость течения реки?

Задача 5. Кто больше? Два человека спускаются, не пропуская ступеней, по идущему вниз эскалатору. Один спускается быстрее другого. Кто из них насчитает больше ступенек и почему?

Задача 6. Неожиданный ход. Имея полный бак топлива, катер может проплыть 72 км против течения реки или 120 км по течению. На какое наибольшее расстояние по реке он может отплыть при условии, что топлива должно хватить и на обратный путь?

Список литературы

1. Абдрашитов Б. М., Абдрашитов Т. М., Шлихунов В. Н. *Учитесь мыслить нестандартно.* — М.: Просвещение, 1996.

2. Акулич И. Ф. *Задачи на засыпку и другие математические сюрпризы.* 2-е изд. — Мн.: ООО «Асар», 2001.

3. Арнольд И. В. *Принципы отбора и составления арифметических задач.* — М.: МЦНМО, 2008.

4. Бабинская И. Л. *Задачи математических олимпиад.* — М.: Наука, 1975.

5. Баврин И. И., Фрибус Е. А. *Занимательные задачи по математике.* — М.: Гуманит. изд. центр «Владос», 1999.

6. Горячев Д., Воронец А. *Задачи, вопросы и софизмы для любителей математики.* — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

7. Грицаенко Н. П. *Ну-ка реши!* — М.: Просвещение, 1998.

8. Козлова Е. Г. *Сказки и подсказки* (*задачи для математического кружка*). 4-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2008.

9. Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С. *Математическая шкатулка.* — М.: Дрофа, 2006.

10. Нестеренко Ю. В. Олехник С. Н., Потапов М. К. *Задачи на смекалку.* — М.: Дрофа, 2003.

11. Островский А. И., Кордемский Б. А. *Геометрия помогает арифметике.* — М.: Физматгиз, 1960.

12. Савин А. П. *Занимательные математические задачи.* — М.: АСТ, 1995.

13. Романовский В. И. *Арифметика помогает алгебре.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

14. Спивак А. В. *Тысяча и одна задача.* — М.: Просвещение, 2003.

15. *Формирование приёмов математического мышления.* Под. ред. Н. Ф. Талызиной. — М.: Вентана-Граф, 1995.

16. Шевкин А. В. *Обучение решению текстовых задач в* 5–6 *классах.* — М.: Русское слово, 2003.

17. Шевкин А. В. *Сборник задач по математике для учащихся* 5–6 *классов.* — М.: Русское слово, 2003.

Оглавление