Лекція 9
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ.

Рівняння лінії на площині

Нехай на площині задана декартова система координат Oxy і деяка лінія L. Рівняння з двома змінними

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

називається **рівнянням лінії** (кривої) L відносно заданої системи координат, якщо його задовольняють координати x і y довільної точки кривої L і не задовольняють координати жодної іншої точки площини.

Отже, лінія L – це множина точок площини, координати яких задовольняють рівняння (1). Говорять також, що рівняння (1) визначає лінію L.

Наприклад, рівняння $x^2+y^2-1=0$ визначає на площині коло радіусом 1 з центром у початку координат (рис. 1). Дійсно, точка площини $M(x,y)$ лежить на вказаному колі тоді і тільки тоді, коли її відстань від початку координат – точки $O(0,0)$ – дорівнює одиниці, тобто

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=1.$$

Звідси рівняння цього кола має вигляд $x^2+y^2=1.$

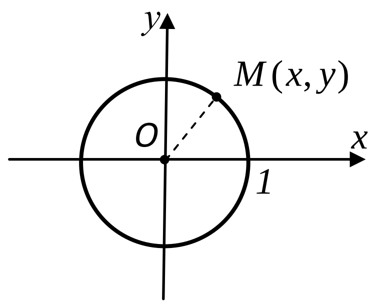


Рис. 1

Приклад. Написати рівняння лінії на площині, якщо різниця квадратів відстаней від кожної її точки до точок $M_1(2;5)$ і $M_2(4;1)$ дорівнює 16.

Нехай M(x, y) біжуча точка шуканої лінії. За умовою задачі повинна справджуватися рівність :

$$|M_1M|^2-|M_2M|^2=16.$$

Виразимо значення відстаней через координати точок:

$$\left|M_1M\right| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}\ ;\ \left|M_2M\right| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$$

і підставимо у рівність :

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 - (x-4)^2 - (y-1)^2 = 16$$

Після спрощень рівняння набуде вигляду

$$x - 2y - 1 = 0.$$

Зауважимо, що не кожне рівняння вигляду (1) визначає геометричний образ, який ми звикли називати лінією. Наприклад:

- рівняння $x^2 + y^2 = 0$ визначає єдину точку $O(0,0)$ на площині;
- рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не визначає на площині жодного геометричного образу;
- рівняння $x + y - |x| - |y| = 0$ визначає всі точки першої координатної чверті разом з точками додатніх координатних півосей (рис.2)

Рис. 2

Приклад. Встановити яка з точок $M_1(-1;2)$ чи $M_2(2;3)$ лежить на лінії $2x^2 + y^2 - x - 15 = 0$?

Точка лежить на лінії, якщо декартові координати точки задовольняють рівняння лінії. Підставляємо координати точки M_1 $(x = -1; y = 2)$ у рівняння лінії:

$2(-1)^2 + (2)^2 - (-1) - 15 = -8 \neq 0$. Точка M_1 не лежить на лінії. Підставляємо координати точки M_2 $(x = 2; y = 3)$ у рівняння лінії: $2(2)^2 + (3)^2 - (2) - 15 = 0$. Точка M_2 лежить на лінії.

Лінія називається ***алгебраїчною лінією*** n***-го порядку***, якщо в її рівнянні $F(x,y)=0$ функція $F(x,y)$ є многочленом n-го степеня відносно двох змінних.

Так загальний вигляд рівняння алгебраїчної лінії першого порядку є таким: $Ax+By+C=0$, де $A^2+B^2\neq 0$ (тобто коефіцієнти A і B не дорівнюють нулю одночасно).

Аналогічно рівняння лінії другого порядку в загальному випадку має вигляд:

$$a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_3=0,$$

де ${a_{11}}^2+{a_{12}}^2+{a_{22}}^2\neq 0$. Наприклад, $x^2-2xy-4=0$.

Перетином двох ліній на площині є множина точок, які лежать одночасно на кожній з цих ліній, а тому задовольняють одночасно рівняння першої та другої лінії.

Для того, щоб знайти координати точок перетину ліній, потрібно розв'язати систему відповідних рівнянь.

Приклад. Знайти точки перетину ліній, заданих рівняннями: $x^2-2xy-4=0$ та $x^2-y^2+4y-4=0$.

Знайдемо розв'язки системи:

$$\begin{cases} x^2-2xy-4=0, \\ x^2-y^2+4y-4=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2xy-4=0, \\ x^2-(y-2)^2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2xy-4=0, \\ (x-(y-2))(x+(y-2))=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2xy-4=0, \\ \left[\begin{array}{l} x-(y-2)=0, \\ x+(y-2)=0; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+4x+4=0, \\ y=x+2, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2-4x-4=0, \\ y=-x+2; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=2, \\ y=x+2, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=-\dfrac{2}{3}, x_3=2, \\ y=-x+2. \end{cases} \end{array}\right.$$

+Отже, є три точки перетину: $M_1(2;4), M_2(-\frac{2}{3};\frac{8}{3}), M_3(2;0)$.

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Розглянемо деяку пряму лінію на площині із вибраною на ній декартовою системою координат Oxy і задамось питаннями:

1) яким є рівняння такої лінії;

2) які дані про пряму потрібно мати для побудови її рівняння?

Відповідь на перше запитання сформулюємо у вигляді твердження:

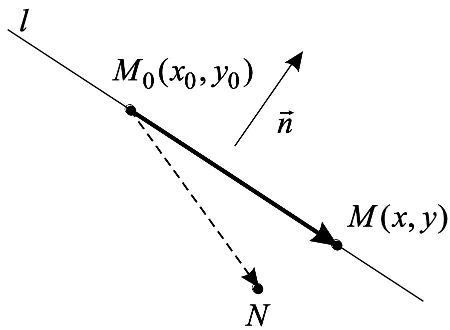
Якщо на площині зафіксована деяка декартова система координат Oxy*, то кожне алгебраїчне рівняння І-го порядку (тобто лінійне рівняння) відносно двох змінних* x *та* y

$$Ax + By + C = 0, \qquad \left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$$

є рівнянням прямої.

Розглянемо декілька варіантів відповіді на друге запитання.

1. *Положення прямої l на площині однозначно визначається вектором* $\overline{n} = \left(A, B\right)$ *, перпендикулярним до неї, та точкою* $M_o(x_o, y_o)$ *, що лежить на цій прямій.*



Вектор $\overline{n} = (A, B)$, ортогональний (перпендикулярний) до прямої l, називають ***нормальним вектором*** цієї прямої (***нормаллю***, або ***вектором нормалі***).

ЗАДАЧА 1. *Побудувати рівняння прямої , яка проходить через дану точку $M_o(x_o, y_o)$ перпендикулярно до даного вектора* $\overline{n} = (A, B)$.

Виберемо довільну точку $M(x, y)$ прямої *l* , тоді $\overline{M_oM}$ = $(x - x_o; y - y_o)$. За умовою $\overline{M_oM} \perp \overline{n}$.

Запишемо умову ортогональності векторів $\overline{n}$ і $\overline{M_oM}$:

$$\left(\overline{n}, \overline{M_oM}\right) = 0.$$

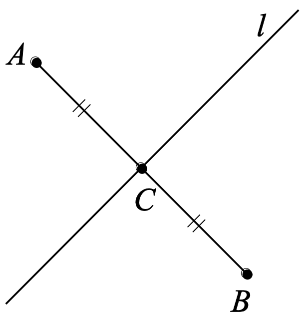
Оскільки $\overline{M_oM} = (x - x_o; y - y_o)$, а $\overline{n} = (A, B)$, то ця рівність в координатній формі має вигляд:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0 - \qquad (6)$$

рівняння прямої, яка проходить через точку $M_o(x_o, y_o)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n} = (A, B)$.

Якщо розкрити дужки та позначити вираз $-Ax_o - By_o$ через *C*, то дістанемо ***загальне рівняння прямої*** :

$$Ax + By + C = 0. \qquad (7)$$



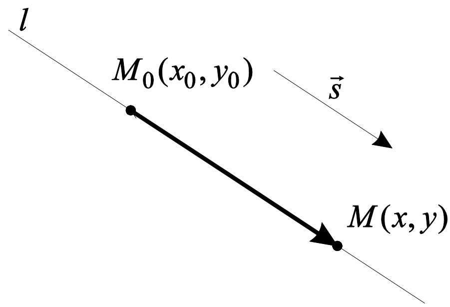
Зауважимо, що якщо точка $N(x, y)$ не лежить на прямій, то умова перпендикулярності відповідних векторів $\overline{n}$ і $\overline{M_oN}$ не виконуватиметься, а, отже, координати точки не задовольнятимуть рівняння прямої.

Приклад. Побудувати рівняння прямої, яка є серединним перпендикуляром відрізка AB, якщо $A(-3,4), B(5,0)$.

Нехай C – середина відрізка AB, тоді її координати $C\left(\frac{-3+5}{2};\frac{4+0}{2}\right)$, тобто $C(1;2)$. З того, що пряма перпендикулярна до відрізка AB випливає, що в якості вектора нормалі можна використати вектор $\overrightarrow{AB}=(8;-4)$ або будь-який колінеарний з ним вектор, наприклад, $\vec{n}=(2;-1)$. Тоді рівняння шуканої прямої

$l:\quad 2\cdot(x-1)-1\cdot(y-2)=0$, яке після спрощень матиме вигляд: $2x-y=0$.

2. *Положення прямої l на площині можна однозначно визначити, задавши точку $M_o(x_o,y_o)$, через яку проходить ця пряма, та паралельний до неї вектор* $\bar{s}=(m,n)$.



Вектор $\bar{s}=(m,n)$, паралельний прямій l, називають ***напрямним*** вектором цієї прямої.

ЗАДАЧА 2 . Побудувати рівняння прямої , яка проходить через задану точку $M_o(x_o,y_o)$ паралельно до заданого вектора $\bar{s}=(m,n)$.

Виберемо довільну точку $M(x,y)$ прямої l, тоді вектор $\overline{M_oM}$ має координати $\overline{M_oM}=(x-x_o;\,y-y_o)$. За умовою $\overline{M_oM}\parallel\bar{s}$. Записуючи умову колінеарності векторів, дістанемо ***канонічне рівняння прямої:***

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Числа m і n – це координати напрямного вектора, а x_0, y_0 - координати точки, яка лежить на прямій.

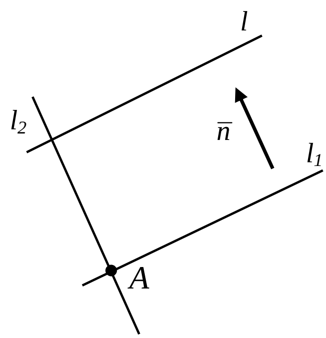
Якщо у канонічному рівнянні прямої коефіцієнт пропорційності позначити через деякий параметр t: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=t$, тоді

$$\begin{cases} x-x_0=tm \\ y-y_0=tn \end{cases}, \quad \text{або} \quad \begin{cases} x=tm+x_0 \\ y=tn+y_0 \end{cases}, \text{ де } t\in(-\infty;+\infty).$$

Одержані співвідношення називають **параметричним рівнянням прямої.**

Приклад. Написати рівняння прямих, які проходять через точку $A(-3;1)$ паралельно (перпендикулярно) до прямої $2y-6x-3=0$.

Вектор $\overline{n}=(-6;2)$, нормальний до даної прямої l, є нормальним вектором до прямої l_1, якщо $l_1 \parallel l$, і напрямним вектором до прямої l_2, якщо $l_2 \perp l$.

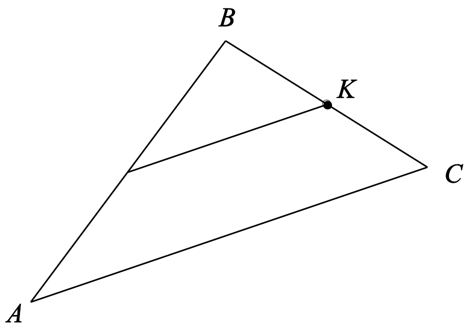


Рівняння прямої l_1 записуємо, використовуючи формулу (3) для $A=-6;\ B=2;\ x_0=-3;\ y_0=1$:
$l_1:\quad -6(x+3)+2(y-1)=0$, або після спрощення $3x-y+10=0$.

Рівняння прямої l_2 записуємо, використовуючи формулу (7) для $m=-6;\ n=2;\ x_0=-3;\ y_0=1.$

Тому $l_2:\ \frac{x+3}{-6}=\frac{y-1}{2}$, або після спрощення $x+3y=0$.

Приклад. Побудувати рівняння середньої лінії трикутника ABC, яка проходить через середини сторін AB та BC, якщо координати вершин трикутника $A(-4,7), B(5,0), C(0;-2)$.



Позначимо K середину відрізка BC, тоді $K(2{,}5;-1)$. Середня лінія трикутника як відомо є паралельною до протилежн сторони AC, тому в якості напрямного вектора можна вибрати вектор $\overrightarrow{AC} = (4;-9)$ або довільний вектор, колінеарний з ним. Тоді запишемо канонічне рівняння шуканої середньої лінії:

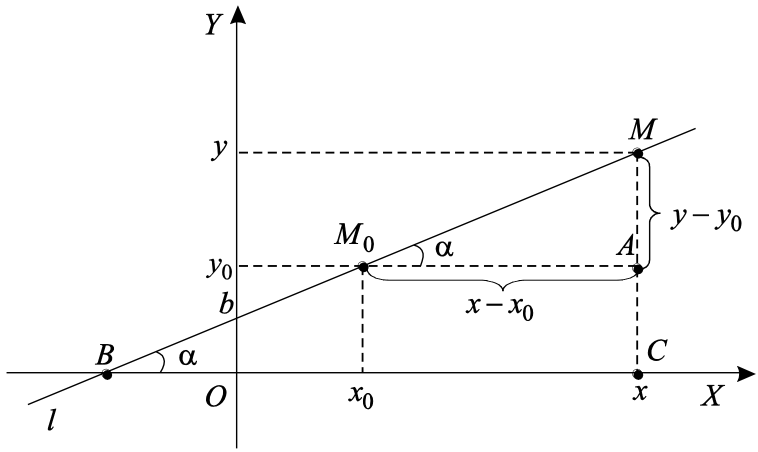
$$\frac{x-2{,}5}{4} = \frac{y+1}{-9}.$$

Після застосування властивості пропорції $-9\cdot(x-2{,}5) = 4\cdot(y+1)$ отримаємо загальне рівняння шуканої прямої: $9x+4y-18{,}5=0$.

Параметричне рівняння цієї ж прямої буде таким: $\begin{cases} x = 4t+2{,}5 \\ y = -9t-1 \end{cases}$.

3. *Положення прямої однозначно визначається кутом нахилу прямої до додатного напряму осі абсцис та деякою точкою, яка лежить на цій прямій.*

ЗАДАЧА 3. Побудувати рівняння прямої, яка утворює з додатним напрямком осі абсцис кут α та проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$.



На рисунку зображена пряма l, яка утворює з додатним напрямом осі Ox кут α, і проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. Як видно з рисунка, прямокутні трикутники MBC та MM_0A є подібні і $\angle MBC = \angle MM_0A = \alpha$. З трикутника MM_0A, згідно з означенням тангенса кута, маємо: $\dfrac{y-y_0}{x-x_0} = tg\alpha$. Тобто для всіх точок прямої l виконується співвідношення

$$y - y_0 = tg\alpha(x - x_0)$$

або якщо позначити $tg\alpha = k$, то одержимо рівняння вигляду:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

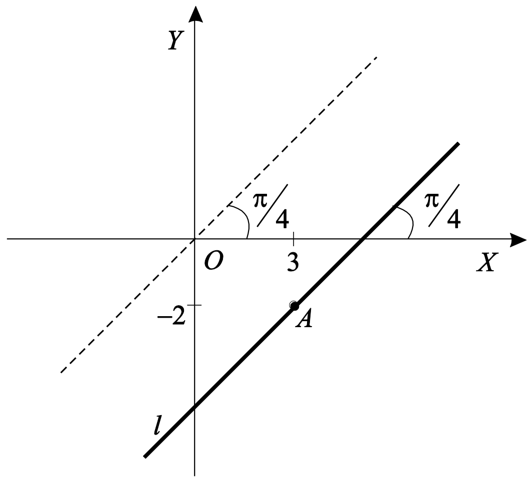
Запишемо його так: $y = kx + y_0 - kx_0$. Покладаючи тепер $b = y_0 - kx_0$, дістанемо рівняння

$$y = kx + b,$$

яке називається ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.***

У останньому рівнянні число k називають ***кутовим коефіцієнтом*** прямої. Він дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатнього напряму осі абсцис. Число b є ординатою точки перетину прямої з віссю Oy (справді, якщо покласти $x=0$, то $y=b$).

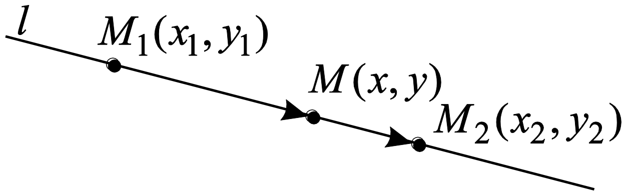
Приклад. Побудувати рівняння прямої, яка є паралельною до бісектриси I – го координатного кута та проходить через точку $A(3;-2)$.



Згадана бісектриса утворює кут $\dfrac{\pi}{4}$ з додатним напрямком осі абсцис, а тому і паралельна до шеї шукана пряма утворює той самий кут. Тому рівняння прямої: $y+2=tg\dfrac{\pi}{4}(x-3)$ або $y=x-5$.

4. *Положення прямої l на площині можна однозначно визначити за домогою двох різних точок, які лежать на цій прямій.*

ЗАДАЧА 4. Побудувати рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$.



Якщо точка $M(x;y)$ належить прямій l, то вектори $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ та $\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$ є колінеарними. З умови колінеарності векторів отримуємо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Таке рівняння є ***рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки.***

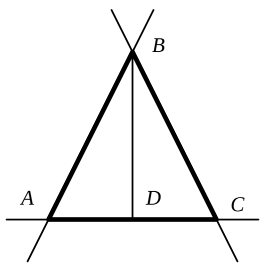
Приклад. У рівнобедренному трикутнику ABC задані рівняння $2x - y - 5 = 0$ основи AC, рівняння $x - y = 0$ бічної сторони AB та вершина $C(4;3)$. Знайти рівняння бічної сторони BC.

Визначимо координати точки A, як точку перетину прямих AC і AB:

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases},$$

звідки $A(5;5)$. Висота BD у рівнобедренному трикутнику є одночасно його медіаною, тому координати точки D знаходимо як середину основи АС:

$$x = \frac{5+4}{2} = 4{,}5; \quad y = \frac{5+3}{2} = 4.$$



Тому $D(4{,}5;4)$. Зауважимо, що нормальним вектором до прямої BD є вектор $\overline{n} = \overline{AC} = (-1; -2)$.

Запишемо рівняння прямої BD, використовуючи формулу (3) (при $A=-1;\ B=-2;\quad x_0=4{,}5;\ y_0=4)$:

$$-1(x-4{,}5)-2(y-4)=0 \qquad \text{або} \qquad 2x+4y-25=0.$$

Визначаємо вершину B як точку перетину прямих AB і BD:

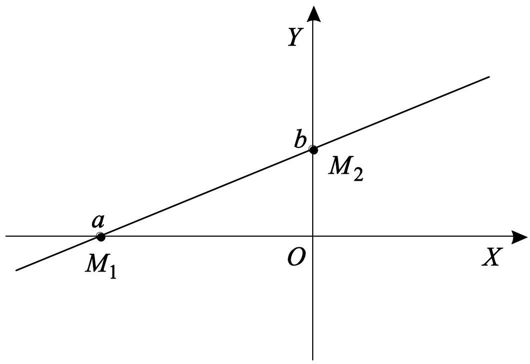
$$\begin{cases} x-y=0, \\ 2x+4y-25=0, \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{25}{6};\ y=\frac{25}{6}.$$

Отже, координати точки $B\left(\frac{25}{6};\frac{25}{6}\right)$. Записуємо рівняння сторони BC як рівняння прямої, що проходить через дві точки : $\dfrac{x-4}{\frac{25}{6}-4}=\dfrac{y-3}{\frac{25}{6}-3}$,

або після спрощень: $7x-y-25=0$.

5. *Якщо пряма не проходить через початок координат і не є паралельною до жодної з координатних осей, тоді вона обов'язково перетинає координатні осі (відтинає від них відрізки).*

ЗАДАЧА 5. Побудувати рівняння прямої, яка відтинає від осей OX та OY відрізки a та b відповідно.



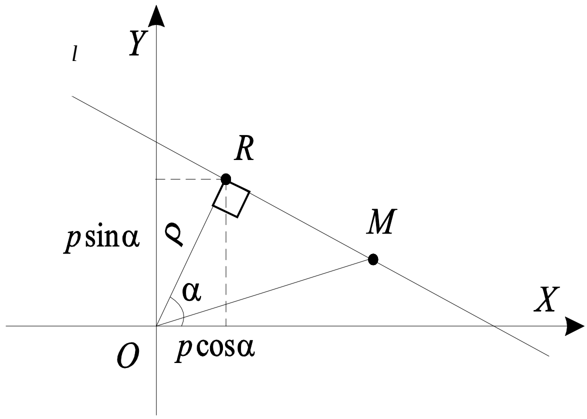
За умовою шукана пряма перетинає вітки осей кординат у точках $M_o(a,0)$ та $M_1(0,b)$, тоді для побудови її рівняння застосуємо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки : $\dfrac{x-a}{0-a}=\dfrac{y-0}{b-0}$.

Одержане рівняння можна звести до вигляду: $b(x-a)=-ay,$ звідси $bx+ay=ab$. Поділимо останню рівність на ab, тоді $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – ***рівняння прямої «у відрізках».***

6. *Якщо пряма не проходить через початок координат, то її положення на площині визначається відстанню ρ від початку координат та кутом α між додатним напрямком осі Ox і перпентикуляром, опущеним з початку координат на цю пряму.*

ЗАДАЧА 6.

Побудувати рівняння п
відстань від якої до початку коор
дорівнює числу ρ, а кут
перпендикуляром, опущеним н
пряму з початку координат, і дод
напрямком осі OX дорівнює α



Нехай точка R - основа перпендикуляра, опущеного з початку оординат на пряму l. Позначимо ρ – довжину цього перпендикуляра, а α –

кут, утворений додатним напрямком осі абсцис та вектором $\overrightarrow{OR}$. За таких позначень точка R буде мати координати $(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)$. Такими ж будуть координати вектора $\overline{OR}$. Виберемо тепер довільну точку $M(x,y)$ прямої l. Знайдемо проекцію вектора $\overline{OM}$ на вектор $\overline{OR}$:

$$np_{\overline{OR}}\overline{OM} = \rho = \frac{\left(\overline{OR}\cdot\overline{OM}\right)}{\left|\overline{OR}\right|} =$$

$$\frac{x\cdot\rho\cos\alpha + y\rho\sin\alpha}{\rho} = x\cos\alpha + y\sin\alpha .$$

Звідси одержуємо ***нормальне рівняння прямої***: $\quad x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho = 0.$

Щоб одержати із загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ *її нормальне рівняння, треба поділити обидві частини цього рівняння на довжину вектора нормалі* $\sqrt{A^2 + B^2}$*, взяту зі знаком, протилежним до знака вільного члена* C*:*

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

або
$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Число $\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ називають ***нормуючим множником.*** Довжина ρ перпендикуляра, опущеного на пряму з початку координат дорівнює $\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$, а косинус і синус кута, який утворює цей перпендикуляр з додатним напрямом осі Ox відповідно дорівнюють величинам $\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, $\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$.

Приклад. Побудувати нормальне рівняння прямої $x-y+3=0$.

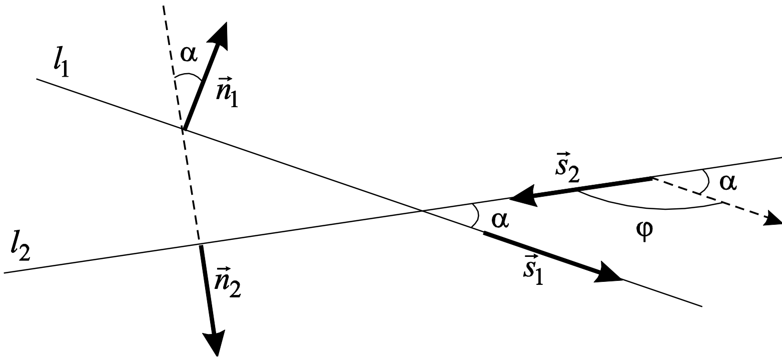
Нормуючий множник цієї прямої $\mu=\frac{1}{-\sqrt{1^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (знак « - » у нормувальному множнику вибрано через те, що вільний член $C=3$ у загальному рівнянні є додатним). Помножимо загальне рівняння прямої на нормуючий множник і тим самим одержимо нормальне рівняння прямої: $-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{3}{\sqrt{2}}=0$. З останнього рівняння безпосередньо випливає, що пряма знаходиться від початку координат на відстані $\rho=\frac{3}{\sqrt{2}}$, а кут, який утворює її приведений нормальний вектор з додатнім напрямом осі OX, дорівнює $\frac{3\pi}{4}$ (оскільки $\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$., а $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$).

Взаємне розміщення прямих
Кут між двома прямими на площині

Дві прямі на площині можуть перетинатись в одній точці, збігатися одна з одною або бути паралельними.

Якщо дві прямі перетинаються, то при перетині вони утворюють два кути: α і $\pi-\alpha$ (гострий і тупий), або у випадку перпендикулярності кут $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Кутом між прямими називають менший з утворених кутів.



Позначимо кут між прямими l_1 і l_2 через α.

1) Якщо дві прямі l_1 і l_2 задані своїми канонічними рівняннями:

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1} \quad \text{і} \quad l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2},$$

то кут α між прямими l_1 і l_2 збігається з точністю φ між напрямними векторами $\bar{s}_1=(m_1,n_1)$ і $\bar{s}_2=(m_2,n_2)$, якщо φ - гострий, і дорівнює куту $\pi-\varphi$, якщо кут φ - тупий . Таку ситуацію часто описують так: кут α збігається з кутом φ з точністю до доданка π. Тоді кут α між прямими можна визначити за допомогою формули:

$$\cos\alpha=|\cos\varphi|=\frac{|\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2|}{|\bar{s}_1|\cdot|\bar{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}.$$

2) Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$; $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, то кут α між прямими l_1 і l_2 обчислюється з точністю до доданка π, як кут між нормальними векторами $\bar{n}_1=(A_1,B_1)$ і $\bar{n}_2=(A_2,B_2)$ і визначається за допомогою формули:

$$\cos\alpha=|\cos\varphi|=\frac{|\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2|}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Звідси ***умови паралельності та перпендикулярності двох прямих*** мають вигляд:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \text{ або } A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0;$$

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ або } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

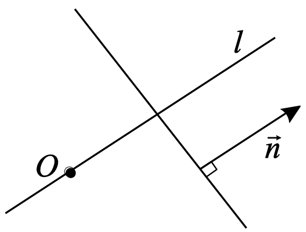
3) Якщо дві прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами:
l_1: $y = k_1 x + b_1$ і l_2: $y = k_2 x + b_2$, то кут α між прямими l_1 та l_2 визначається за допомогою формули :

$$tg\alpha = \frac{|k_1 - k_2|}{1 + k_1 k_2}.$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямих можна записати і у такому вигляді:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2; \qquad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Приклад. Побудувати рівняння прямої, яка проходить через початок координат перпендикулярно до прямої $2x - y + 3 = 0$.



I *спосіб.* Вектор нормалі даної прямої $\vec{n} = (2;-1)$. Для шуканої прямої l він може слугувати напрямним вектором, тому канонічне рівняння буде таким: $\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-1}$ або $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1}$. Або після перетворень загальне рівняння прямої l матиме вигляд: $x + 2y = 0.$

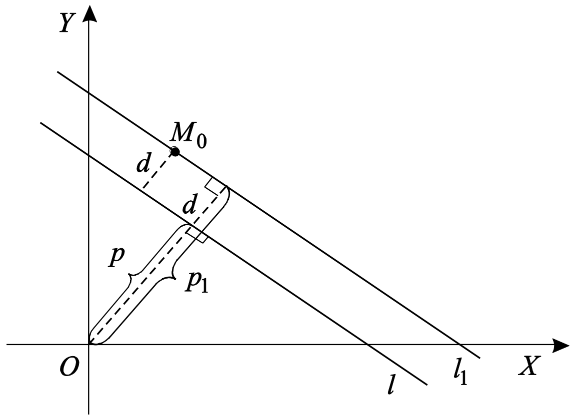
II *спосіб.* Запишемо рівняння заданої прямої у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом $y = 2x + 3$. Її кутовий коефіцієнт $k = 2$, тоді кутовий коефіцієнт перпендикулярної до неї прямої дорівнює $-\frac{1}{2}$. Тоді шукане рівняння: $y-0=-\frac{1}{2}(x-0)$ або загальне рівняння: $x+2y=0$.

Відстань від точки до прямої

Відстань від заданої точки $M_0(x_0,y_0)$ ***до прямої*** l, заданої загальним рівнянням $Ax+By+C=0$, обчислюється за формулою :

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Доведемо цю рівність для випадку, коли точка $M_0(x_0,y_0)$ знаходиться від початку координат далі, ніж пряма l.



Через точку $M_0(x_0,y_0)$ проведемо пряму, паралельну до прямої l. Її загальне рівняння буде

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

або

$$Ax+By-(Ax_0+By_0)=0,$$

а нормальне

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y-\frac{|Ax_0+By_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Звідси видно, що відстань ρ_1 від точки O до прямої l_1: $\rho_1 = \dfrac{|Ax_0 + By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Аналогічно відстань від початку координат до прямої l: $\rho = \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. З рисунка видно, що шукана відстань прямої d дорівнює різниці відстаней:

$$d = \rho_1 - \rho = \frac{|Ax_0 + By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Остання ланка рівностей одержана на основі того, що вирази $Ax_0 + By_0$ та C мають різні знаки.

Приклад. Знайти відстань від точки $A(-4,3)$ до прямої $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y+5}{3}$.

Запишемо загальне рівняння цієї прямої: $3(x-4) = -1(y+5)$ або $3x + y - 7 = 0$. Тоді шукана відстань дорівнює

$$d = \frac{|3\cdot(-4) + 1\cdot 3 - 7|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{16}{\sqrt{10}}.$$

Приклад. Обчислити площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $3x - 4y - 10 = 0$ і $6x - 8y + 5 = 0$.

Прямі, задані в умові задачі, паралельні, бо коефіцієнти при невідомих у рівняннях цих прямих пропорційні.

Отже, щоб обчислити площу квадрата, треба спочатку знайти відстань між його паралельними сторонами.

Виберемо довільні значення x і y, які задовольняють рівняння $3x - 4y - 10 = 0$, наприклад, $x = -2;\ y = -4.$ Тоді точка $M(-2; -4)$ лежатиме на першій прямій $3x - 4y - 10 = 0$.

За формулою (12) знайдемо відстань від точки $M(-2;\,-4)$ до другої прямої $6x-8y+5=0$: $d=\dfrac{|-2\cdot 6-8\cdot(-4)+5|}{\sqrt{36+64}}=2{,}5.$

Ця відстань дорівнює довжині сторони квадрата, тому площа квадрата ($S=d^2$) дорівнює $6{,}25$ кв.од.