Матрична алгебра – найдивовижніший приклад того,
як одна і та сама закономірність зустрічається
під час найрізноманітніших обставин.

У. Сойєр

ЛЕКЦІЯ 2-3

ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Початок зародження теорії визначників припадає на XVII ст. і належить великому німецькому математику Готфріду – Вільгейму Лейбніцу (Leibnitz, 1648–1716). У 1750 р. шведський математик, ректор Стокгольмського університету Карл Крамер обґрунтував загальний закон побудови визначника і вивів загальні формули для розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими.

Визначник (детермінант) – це одна з характеристик квадратної матриці. На прямокутні матриці поняття визначників не поширюється.

Визначник матриці A позначають

$$\Delta, \text{ або } \det A, \text{ або } \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

◙ ***Визначником матриці першого порядку*** $A=(a_{11})$ *називають величину, яка дорівнює єдиному елементу цієї матриці:* $\det A = a_{11}$.

◙ ***Визначником матриці другого порядку*** $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число $a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}\ .$$

Приклад. Обчислити визначник матриці $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

За означенням визначник матриці А дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей: $\det A = 5\cdot 4 - 3\cdot 1 = 17$.

Для формулювання правила обчислення визначників третього та вищих порядків означимо деякі нові поняття.

◙ ***Мінором*** M_{ij} ***елемента*** a_{ij} *квадратної матриці* A *n-го порядку називається визначник матриці (n–1)-го порядку, отриманої викреслюванням елемента* a_{ij} *разом із рядком та стовпцем, в яких знаходиться цей елемент.*

◙ ***Алгебраїчним доповненням*** A_{ij} *елемента* a_{ij} *матриці* A *називається добуток мінора цього елемента на множник* $(-1)^{i+j}$. Тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Приклад. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ мінором M_{23} елемента $a_{23} = 7$ є визначник $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 25 = -7$, а алгебраїчне доповнення цього елемента $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot (-7) = 7$.

◙ ***Визначником матриці n-го порядку*** *називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх елементів деякого рядка або стовпця цієї матриці на алгебраїчні доповнення цих елементів:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

причому перша рівність називається *розкриттям визначника за i-м рядком*, а друга – *розкриттям визначника за j-м стовпцем.*

Приклад. Розкриємо визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, наприклад, за першим рядком: $\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} A_{1j} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

Визначаємо усі необхідні компоненти:

$a_{11} = 3;$ $\quad M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 42 = -40;$ $\quad A_{11} = (-1)^{1+1}(-40) = -40;$

$a_{12} = 5;$ $\quad M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1) - 35 = -36;$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2}(-36) = 36;$

$a_{13} = 4;$ $\quad M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 10 = -16;$ $\quad A_{13} = (-1)^{1+3}(-16) = -16.$

Тепер підставляємо знайдені числа у формулу: $\det A = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 4(-16) = -4$. Якщо розкрити визначник цієї матриці за довільним іншим рядком чи стовпцем, результат не зміниться (переконайтесь у цьому самостійно).

◙ *Квадратна матриця називається* ***виродженою (особливою)****, якщо її визначник дорівнює нулю. Матриця називається* ***невиродженою (неособливою)****, якщо її визначник відмінний від нуля.*

Матриця $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ є виродженою, оскільки її визначник дорівнює нулю: $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 - 5 \cdot 6 = 0$.

Крім методу розкриття визначника за довільним його рядком або стовпцем для обчислення визначників третього порядку, можна використати також ***метод трикутників***, або ***метод Сар'юса***. Метод трикутників схематично зображають так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad - \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

(1) (2)

Ця схема означає, що визначник третього порядку дорівнює різниці двох величин:

– перша дорівнює сумі трьох доданків, кожен з яких дорівнює добутку певних трьох елементів матриці: елементів головної діагоналі та елементів, які знаходяться у вершинах двох трикутників, зображених на схемі (1);
– друга дорівнює сумі таких добутків: елементів побічної діагоналі та елементів, які знаходяться у вершинах двох трикутників, зображених на схемі (2).

Тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) -$$

$$-(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33}).$$

Метод Сар'юса полягає у такому. Допишемо до визначника 1-й та 2-й його стовпці. З'єднаємо суцільною лінією ті три трійки елементів, які отримують паралельним перенесенням головної діагоналі; пунктирною лінією з'єднаємо три інші трійки елементів, які отримують паралельним перенесенням побічної діагоналі. Визначник дорівнює сумі добутків елементів, сполучених суцільними лініями без суми добутків елементів, сполучених пунктирними лініями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Очевидно, що одержані формули збігаються із попередніми, тобто значення визначника не залежать від застосованого методу обчислення.

ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

1. *Визначник матриці дорівнює визначнику транспонованої до неї матриці*: $\det A = \det A^T$.

Приклад. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. Тоді $\det A = -18$; $\det A^T = -18$.

Ця властивість забезпечує справедливість властивостей, які будемо формулювати для рядків матриці і для її стовпців.

2. *Якщо переставити місцями два рядки матриці, то визначник матриці змінить лише знак:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad k, s = \overline{1,n}.$$

3. *Визначник не змінюється, якщо до будь-якого рядка матриці додати інший її рядок, помножений на довільне число:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} + \lambda a_{s1} & a_{k2} + \lambda a_{s2} & \dots & a_{kj} + \lambda a_{sj} & \dots & a_{kn} + \lambda a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$k, s = \overline{1,n}.$$

4. *Визначник верхньотрикутної (нижньотрикутної) матриці дорівнює добутку її діагональних елементів:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{jj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{jj} \ldots \cdot a_{nn}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Якщо хоча б один діагональний елемент трикутної матриці дорівнює нулеві, то її визначник дорівнює нулю.

5. *Якщо хоча б один із рядків матриці складається з нулів, то її визначник дорівнює нулю:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Цю властивість можна легко перевірити, розкриваючи визначник за нульовим рядком.

6. *Визначник матриці, яка містить два однакові рядки, дорівнює нулю:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Справді, у такому визначнику легко одержати нульовий рядок, додаючи до одного з двох однакових рядків інший, помножений на (–1), тобто застосувавши властивість 3.

7. *Якщо усі елементи будь-якого рядка матриці помножити на деяке число λ, то її визначник помножиться на це число, тобто спільний множник будь-якого рядка можна виносити за знак визначника:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kj} & \dots & \lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Наприклад, $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 6 \cdot 7 = -24$, і $3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (2 \cdot 3 - 2 \cdot 7) = -24$.

8. *Визначник матриці, яка містить два пропорційні рядки, дорівнює нулю:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{s1} & \lambda a_{s2} & \dots & \lambda a_{sj} & \dots & \lambda a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad s = \overline{1,n}.$$

Ця властивість є наслідком трьох попередніх.

Наприклад, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 = 0.$

9. *Визначник добутку двох матриць дорівнює добутку їх визначників:* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Приклад. Нехай $\det A = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = 15$, $\det B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, тоді $\det A \cdot \det B = 15 \cdot 2 = 30$.

Але $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 17 & 4 \end{pmatrix}$, і визначник добутку $\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 17 & 4 \end{vmatrix} = 30$. Одержані результати є однакові.

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ n-ГО ПОРЯДКУ

1. ***Метод пониження порядку***.

Він полягає у тому, що перш ніж розкривати визначник за деяким стовпцем або рядком

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

утворюють у цьому рядку (стовпцеві) якомога більше нульових елементів.

Справедливим є твердження:

□ *У довільно вибраному рядку (стовпці) визначника скінченною кількістю застосувань властивостей визначників можна утворити усі, окрім, можливо одного, нульові елементи.* ■

Це означає, що після описаних перетворень, обчислення визначника n-го порядку зведеться до обчислення на один порядок нижчого визначника.

Приклад. Обчислити визначник методом пониження порядку:

$$\det A=\begin{vmatrix}1&-1&1&1\\2&1&-1&2\\2&5&-3&4\\3&0&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1&1\\0&3&-3&0\\0&7&-5&2\\0&3&-3&0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3&-3&0\\7&-5&2\\3&-3&0\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^5\begin{vmatrix}3&-3\\3&-3\end{vmatrix}=0.$$

На першому кроці утворили нулі у першому стовпці. Для цього до другого та третього рядків додали перший, помножений на (–2), а до четвертого додали перший, помножений на (–3). Розкрили визначник за першим стовпцем і одержали один визначник третього порядку. Оскільки усі, крім другого, елементи третього стовпця дорівнюють нулеві, то розкрили визначник за цим стовпцем. В одержаному визначнику другого порядку є два однакові рядки, тому він дорівнює нулеві.

Якщо зауважити на передостанньому кроці, що другий і четвертий рядки є однакові, то вже тоді можна зробити висновок, що $\det A=0$.

2. *Метод зведення до трикутної форми*

□ *Визначник довільної матриці скінченною кількістю застосувань властивостей визначників можна звести до визначника верхньотрикутної матриці.* ■

Приклад. Обчислити визначник методом зведення до трикутного вигляду:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&6&-1&11&10\\2&6&-1&9&13\\1&2&-1&3&4\\3&6&-3&9&14\\-1&-2&3&1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&-1&3&4\\2&6&-1&9&13\\2&6&-1&11&10\\3&6&-3&9&14\\-1&-2&3&1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&-1&3&4\\0&2&1&3&5\\0&2&1&5&2\\0&0&0&0&2\\0&0&2&4&3\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}1&2&-1&3&4\\0&2&1&3&5\\0&0&0&2&-3\\0&0&0&0&2\\0&0&2&4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1&3&4\\0&2&1&3&5\\0&0&2&4&3\\0&0&0&0&2\\0&0&0&2&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&-1&3&4\\0&2&1&3&5\\0&0&2&4&3\\0&0&0&2&-3\\0&0&0&0&2\end{vmatrix}=-16.$$

Спочатку переставили місцями перший і третій рядки (знак визначника змінився на протилежний), домігшись рівності $a_{11}=1$ (з числом 1 легко шукати спільне кратне). На другому кроці перетворюють на нулі елементи першого стовпця, додаючи до другого, третього, четвертого рядків перший, помножений відповідно на (–2), (–2), (–3), а до п’ятого – додаючи перший рякок без змін. Перший рядок залишають далі без змін. На третьому кроці елемент $a_{32}=2$ перетворюють на нуль, додаючи до третього рядка другий, помножений на (–1). На двох останніх кроках міняють місцями третій і п'ятий та четвертий і п'ятий рядки відповідно, змінюючи знак визначника на протилежний. Одержана матриця, визначник якої обчислюють, є трикутна, тому її визначник дорівнює добутку діагональних елементів $\Delta=-1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=-16$.

ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Природним є запитання: чи можна означити для матриці A елемент, обернений стосовно операції множення?

◙ ***Оберненою*** *до квадратної матриці* A *називається така матриця* A^{-1}, *що*

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

Наступне запитання стосується умов існування такої матриці і правил її відшукання. Відповідь дає теорема:

□ *Для того, щоб для квадратної матриці* A *існувала обернена, необхідно і досить, щоб ця матриця була невиродженою. Обернена матриця, якщо вона існує, єдина і її знаходять за формулою*

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & \cdots & A_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}^{T}$$

, де A_{ij} *– алгебраїчні доповнення елементів* a_{ij}. ■

Доведення. (Необхідність).

Нехай для матриці A існує обернена A^{-1}. Згідно з означенням $A^{-1}\cdot A=E$. За властивістю визначників $\det A^{-1}\cdot\det A=\det(A^{-1}\cdot A)=\det E=1$. Звідки $\det A^{-1}\cdot\det A=1$, а отже, $\det A\neq0$.

Достатність. Нехай $\Delta=\det A\neq0$. Доведемо спочатку, що обернена матриця, якщо вона існує, є єдина. Доведення виконаємо від супротивного. Нехай існують дві матриці X та Y такі, що $X\cdot A=A\cdot X=E,\quad Y\cdot A=A\cdot Y=E$, тоді $X=X\cdot E=X\cdot(A\cdot Y)=(X\cdot A)\cdot Y=E\cdot Y=Y$, тобто $X=Y$ – обернена, вона єдина і її позначають A^{-1}. Простою перевіркою можна переконатись, що

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & \cdots & A_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}^{T},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Матрицю $A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{T}$ називають ***приєднаною*** матрицею до матриці A.

Приклад. Знайти обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Визначник $\Delta = 4 - 6 = -2 \neq 0$, отже, обернена матриця існує. $A_{11} = 4,\ A_{12} = -3,\ A_{21} = -2,\ A_{22} = 1$. $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Зробимо перевірку: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Зауважимо, що у приєднаній матриці до матриці другого порядку елементи головної діагоналі помінялись місцями, а побічної – змінили знак на протилежний.

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Обчислимо $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 + 2(-2)\cdot 2 + 2(-2)\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 2 - (-2)(-2)\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 1 = -27$.

Оскільки ця матриця невироджена, то для неї існує обернена матриця. Знайдемо алгебраїчні доповнення усіх елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3; \quad A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2+4) = -6; \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6; \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Тоді приєднаною матрицею буде:

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix},$$

а оберненою $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

За означенням знайдена обернена матриця повинна бути такою, щоб її добуток з початковою матрицею дорівнював одиничній матриці. Тому для перевірки, чи обернена матриця знайдена правильно, слід помножити її (справа або зліва) на вихідну матрицю. Перевірка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

НАЙПРОСТІШІ МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Нехай X – невідома, A, B, C – відомі матриці відповідних розмірностей. Рівняння вигляду

$$AX = B, \quad XA = B, \quad AXB = C$$

називають *найпростішими матричними рівняннями.*

◙ ***Розв'язком*** *матричного рівняння називається така матриця* X *, яка під час підстановки у матричне рівняння перетворює його у правильну рівність* (тобто по обидва боки знака рівності утворяться однакові матриці).

□ *Рівняння* $AX = B$ *має єдиний розв'язок* $X = A^{-1}B$ *тоді і лише тоді, коли матриця* A *є невиродженою, а кількість рядків матриці* B *дорівнює порядку квадратної матриці* A. ■

Дійсно домножимо ліву і праву частини рівняння зліва на A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, то одержимо $EX = A^{-1}B$. Але добуток у лівій частині рівності дорівнює X, що і доводить твердження.

□ *Рівняння вигляду* $XA = B$ *має єдиний розв'язок* $X = BA^{-1}$ *тоді і лише тоді, коли матриця* A *є невиродженою, а кількість стовпців матриці* B *дорівнює порядку квадратної матриці* A. ■

□ *Рівняння вигляду* $AXB = C$ *має єдиний розв'язок* $X = A^{-1}CB^{-1}$ *тоді і лише тоді, коли матриці* A *і* B *є невиродженими, кількість рядків матриці* C *дорівнює порядку квадратної матриці* A*, а кількість стовпців матриці* C *дорівнює порядку квадратної матриці* B. ■

Приклад. Знайти X , якщо $AXB = C$*, де* $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

$\det A = 0 - 6 = -6 \neq 0;\ \det B = 6 - 0 = 6 \neq 0$ – матриці A і B – невироджені.

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

РАНГ МАТРИЦІ

Нехай A – прямокутна $m\times n$ матриця. Елементи, які лежать на перетині довільних k рядків і r стовпців утворюють $k\times r$ *підматрицю.*

◙ *Визначник квадратної підматриці, утвореної з елементів, які лежать на перетині довільних k рядків і k стовпців матриці A* ***називається мінором k-го порядку*** *матриці A.*

Приклад. Матриця $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ має 8 мінорів 1-го порядку (суть самі елементи матриці) і 6 мінорів 2-го порядку:

$$M_1=\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=11;\quad M_2=\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=11;\quad M_3=\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=6;$$

$$M_4=\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=-11;\quad M_5=\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=4;\quad M_6=\det\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=10.$$

Матриця розміру $m\times n$ ($m\ge k$, $n\ge k$) має $C_m^k\cdot C_n^k$ мінорів k-го порядку.

◙ ***Рангом*** *матриці називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.*

Приклад. Розглянемо матриці :

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

і знайдемо їхні визначники: $\det A=30$; $\det B=0$; $\det C=0$ і $\det D=0$. У кожної із чотирьох матриць найвищий порядок мінора дорівнює 3. Проте лише у матриці A він відмінний від нуля. Тому ранг матриці A дорівнює 3 ($rangA=3$). Визначник матриці В дорівнює нулю, тому $rangB<3$. Проте є ненульові мінори 2-го порядку:

$$M_1=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=10;\quad M_2=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=15;\quad M_3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=4.$$

Тому $rangB=2$. Усі мінори 2-го порядку матриць C та D дорівнюють 0, вони мають ненульові лише мінори 1-го порядку. Тому $rang\,C=rang\,D=1$.

Обчислити ранг матриці можна, обчисливши усі мінори, починаючи з $k=2$ (ранг будь-якої ненульової матриці ≥ 1, оскільки лише в нульової матриці усі мінори 1-го порядку дорівнюють 0). Це громіздка робота, особливо якщо розмірність матриці достатньо велика. Значно спростити процес обчислення рангу матриці може застосування таких властивостей:

□ *Якщо всі мінори k-го порядку матриці A дорівнюють нулю, тоді і всі мінори вищих порядків теж дорівнюють нулю. А отже,* $rang\ A<k$. ■

□ *Під час еквівалентних перетворень ранг матриці не змінюється.* ■

□ *Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків цієї матриці.* ■

Приклад. Нехай дано східчасту матрицю

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Її ранг, згідно з останнім твердженням дорівнює 3. Дійсно, єдиний мінор 4-го порядку (визначник самої матриці) дорівнює нулеві, оскільки визначник матриці, яка містить нульовий рядок, дорівнює нулю. Якщо знайдеться відмінний від нуля мінор 3-го порядку, то $rangA=3$. Розглянемо мінор з елементів, які знаходяться на перетині 1-го, 3-го, 4-го стовпців та 1-го, 2-го, 3-го рядків: $M=\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=4\neq 0$ (визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів). Отже, $rangA=3$. Зауважимо, що у цій східчастій матриці ненульових рядків є рівно три.

АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ РАНГУ МАТРИЦІ

1. За допомогою елементарних перетворень над рядками матриці A одержати східчасту матрицю $\tilde{A}$.
2. Порахувати кількість k ненульових рядків у матриці $\tilde{A}$.
3. Зробити висновок: $rangA=k$.

Приклад. Обчислити $rangA$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$. Східчаста матриця, еквівалентна даній, – це матриця $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & -7\end{pmatrix}=\tilde{A}$. Східчаста матриця $\tilde{A}$ має два ненульові рядки. Тому $rangA=rang\tilde{A}=2$.