ЛЕКЦІЯ 7-8

МНОЖЕННЯ ВЕКТОРІВ

У цьому курсі лінійної алгебри та аналітичної геометрії вивчаються скалярний, векторний та мішаний добутки векторів.

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК

◙ ***Скалярним добутком*** $(\bar{a},\bar{b})$ *(або* $\bar{a}\cdot\bar{b}$ *) двох векторів* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ *називається число (скаляр), яке дорівнює добуткові довжин цих векторів на косинус кута між ними:*

$$(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi.$$

Скалярний добуток вектора $\bar{a}$ на себе позначають $\bar{a}^2=(\bar{a},\bar{a})$.

◙ *Два вектори називають* ***ортогональними****, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулеві.*

Зауважимо, що на площині чи у тривимірному просторі, поняття ортогональності та перпендикулярності будуть для векторів тотожними.

Безпосередньо із означення легко одержати такі властивості:

Властивості скалярного добутку

1) $(\bar{a},\bar{b})=(\bar{b},\bar{a})$ (комутативність);

2) $(\bar{a},(\bar{b}+\bar{c}))=(\bar{a},\bar{b})+(\bar{a},\bar{c})$ (дистрибутивність);

3) $(\bar{a},\bar{a})=|\bar{a}|^2$, або $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$;

4) $(\lambda\bar{a},\bar{b})=(\bar{a},\lambda\bar{b})=\lambda(\bar{a},\bar{b})$, де λ – довільне дійсне число;

5) $(\bar{a},\bar{b})=0$, якщо $\bar{a}=0$, чи $\bar{b}=0$, або якщо $\bar{a}\perp\bar{b}$ (***умова ортогональності двох векторів***).

Наслідками сформульованих властивостей для попарно перпендикулярних ортів $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ є такі співвідношення:

1) $\bar{i}^2=\bar{j}^2=\bar{k}^2=1$ (справді $\bar{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|\cdot|\vec{i}|\cdot\cos 0^0=1$, аналогічно $\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$);

2) $\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{i}\cdot\bar{k}=\bar{j}\cdot\bar{k}=0$ (кут між кожними двома векторами прямий, тому його косинус дорівнює нулеві, а отже, скалярні добутки довільних двох базисних векторів $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ дорівнюють нулеві).

□ *Якщо вектори – співмножники, задані своїми координатами в деякій декартовій системі координат, тобто, якщо* $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = (a_x, a_y, a_z)$ *і* $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k} = (b_x, b_y, b_z)$, *то скалярний добуток цих векторів обчислюється за формулою*

$$(\bar{a},\bar{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \ .$$

Для доведення цієї формули використаємо властивості скалярного добутку. Справді:

$$(\bar{a},\bar{b}) = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\cdot(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = a_x\bar{i}\cdot b_x\bar{i} + a_x\bar{i}\cdot b_y\bar{j} + a_x\bar{i}\cdot b_z\bar{k} +$$
$$+a_y\bar{j}\cdot b_x\bar{i} + a_y\bar{j}\cdot b_y\bar{j} + a_y\bar{j}\cdot b_z\bar{k} + a_z\bar{k}\cdot b_x\bar{i} + a_z\bar{k}\cdot b_y\bar{j} + a_z\bar{k}\cdot b_z\bar{k} = a_x\cdot b_x\bar{i}\cdot\bar{i} +$$
$$+a_x\cdot b_y\bar{i}\cdot\bar{j} + a_x\cdot b_z\bar{i}\cdot\bar{k} + a_y\cdot b_x\bar{j}\cdot\bar{i} + a_y\cdot b_y\bar{j}\cdot\bar{j} + a_y\cdot b_z\bar{j}\cdot\bar{k} + a_z\cdot b_x\bar{k}\cdot\bar{i} +$$
$$+a_z\cdot b_y\bar{k}\cdot\bar{j} + a_z\cdot b_z\bar{k}\cdot\bar{k} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b.$$

■

Приклад. Обчислити скалярний добуток векторів $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k} = (3,-1,5)$, $\bar{b} = \bar{j} + 4\bar{k} = (0,1,4)$.

$$(\bar{a},\bar{b}) = 3\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 5\cdot 4 = 19.$$

Застосування скалярного добутку

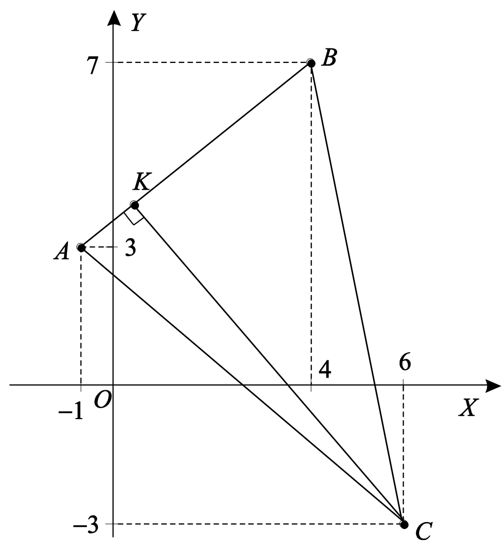
1) ***Косинус кута між двома векторами*** обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Зауважимо, що знак останньої частки, а отже, і косинуса кута між векторами, визначає знак скалярного добутку цих векторів. Якщо він додатний, то вектори утворюють гострий кут, якщо від'ємний, – то тупий, і, як вже говорилось раніше, у разі рівності нулю скалярного добутку робимо висновок про перпендикулярність векторів.

2) ***Проекція вектора*** $\bar{a}$ ***на вектор*** $\bar{b}$ обчислюється за формулою

$$Пр_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$



Приклад. У трикутнику ABC знайти довжину відрізка AK, який відтинає висота, опущена з вершини C, якщо $A(-1{,}3), B(4{,}7), C(6{,}-3)$.

Зауважимо, що $|AK|$ – проекція вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$. Знайдемо компоненти потрібних векторів: $\overrightarrow{AB}=(5{,}4)$ та $\overrightarrow{AC}=(7{,}-6)$. Тоді

$$|AK| = Пр_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} =$$

$$= \frac{5\cdot 7+4\cdot(-6)}{\sqrt{25+16}} = \frac{11}{\sqrt{41}}.$$

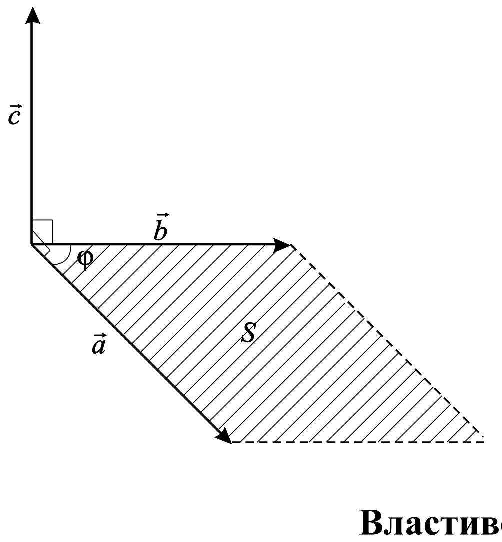
3) Перевірка ***перпендикулярності векторів*** $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

□ *Для того, щоб два ненульові вектори були перпендикулярними (ортогональними), необхідно і досить, щоб їх скалярний добуток дорівнював нулеві:*

$$\vec{a}\perp\vec{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=0.$$

Справді, якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 90^0=0$. З іншого боку, якщо $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=0$, то або один із співмножників має нульову довжину (що є неможливим згідно з формулюванням твердження) або кут між ними є прямим. ■

ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК



◙ ***Векторним добутком*** $[\bar{a},\bar{b}]$ *(або* $\bar{a}\times\bar{b}$*) вектора* $\bar{a}$ *на вектор* $\bar{b}$ *називається вектор* $\bar{c}$*, для якого виконуються властивості:*

1) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\sin\varphi$*, де* φ *– кут між векторами* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$*;*

2) вектор $\bar{c}$*, перпендикулярний до векторів* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$*;*

3) вектори $\bar{a}$ *,* $\bar{b}$ *і* $\bar{c}$ *утворюють праву трійку векторів.*

Властивості векторного добутку

1) $[\bar{a},\bar{b}]=-[\bar{b},\bar{a}]$ (антикомутативність векторного добутку).

Справді, якщо змінити порядок співмножників, то вектори $\vec{c}=[\bar{a},\bar{b}]$ та $\vec{d}=[\bar{b},\bar{a}]$ матимуть однакову довжину та будуть перпендикулярними до векторів $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$.Проте, якщо трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ є правою, то такою самою правою буде трійка $\bar{b}$, $\bar{a}$ і $-\bar{c}$. Отже, $\vec{d}=-\vec{c}$;

2) $[\bar{a},(\bar{b}+\bar{c})]=[\bar{a},\bar{b}]+[\bar{a},\bar{c}]$ (дистрибутивність);

3) $[\lambda\bar{a},\bar{b}]=[\bar{a},\lambda\bar{b}]=\lambda\cdot[\bar{a},\bar{b}]$;

4) $[\bar{a},\bar{b}]=0$, якщо $\bar{a}=0$, чи $\bar{b}=0$, або якщо $\bar{a}\parallel\bar{b}$;

5) для ортів $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ справедливі співвідношення:

$[\bar{i},\bar{i}]=[\bar{j},\bar{j}]=[\bar{k},\bar{k}]=\bar{0}$ (наслідок властивості 4);

$[\bar{i},\bar{j}]=-[\bar{j},\bar{i}]=\bar{k}$; $[\bar{j},\bar{k}]=-[\bar{k},\bar{j}]=\bar{i}$; $[\bar{k},\bar{i}]=-[\bar{i},\bar{k}]=\bar{j}$.

Справді, трійки векторів $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, $\bar{j},\bar{k},\bar{i}$ та $\bar{k},\bar{i},\bar{j}$ є правими. Кожен з цих трьох векторів є перпендикулярним до площини, яку визначають два інші, а добуток довжин будь-яких базисних векторів на синус кута між ними дорівнює 1. (Наприклад, $|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\sin\frac{\pi}{2}=1\cdot1\cdot1=1$).

□ *Якщо вектори задані своїми компонентами у деякому ортонормованому базисі* $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$: $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$ *і* $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$, *то векторний добуток цих векторів є вектором, розклад якого у тому самому базисі легко одержати за формулою*

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\bar{k},$$

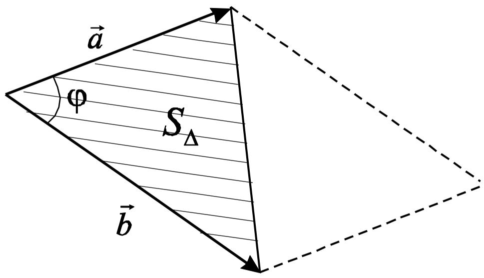
тобто
$$\vec{c}=[\bar{a},\bar{b}]=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right).$$

Застосування векторного добутку

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, як на сторонах, дорівнює довжині векторного добутку цих векторів:

$$S=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|.$$

Оскільки діагональ паралелограма ділить його на два рівновеликі трикутники, то ***площа трикутника***, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, дорівнює половині довжини векторного добутку цих векторів:



$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|.$$

Приклад. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{j} + 4\bar{k}$, як на сторонах:

$$[\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = -9 \cdot \bar{i} - 12 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k} = (-9; -12; 3),$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-9)^2 + (-12)^2 + 3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{9+16+1} = \frac{3}{2}\sqrt{26} \text{ (кв. од.)}$$

МІШАНИЙ ДОБУТОК

◙ ***Мішаним добутком*** $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ *трьох векторів називається число, яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку векторів* $[\bar{a},\bar{b}]$ *на вектор* $\bar{c}$:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = ([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}).$$

□ *Якщо вектори* $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ *задано координатами у деякому ортонормованому базисі* $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ *:* $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$, *то мішаний добуток цих векторів обчислюється за формулою*

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= a_x \cdot b_y \cdot c_z + b_x \cdot c_y \cdot a_z + a_y \cdot b_z \cdot c_x - a_z \cdot b_y \cdot c_x - a_y \cdot b_x \cdot c_z - b_z \cdot c_y \cdot a_x,$$

тобто дорівнює визначнику, кожен рядок якого складається з компонент векторів-множників.

Справді

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)\cdot\left(c_x,c_y,c_z\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot c_z=$$

$$=a_y\cdot b_z\cdot c_x-a_z\cdot b_y\cdot c_x-b_z\cdot c_y\cdot a_x+a_z\cdot b_x\cdot c_y+a_x\cdot b_y\cdot c_z-a_y\cdot b_x\cdot c_z,$$

що після перестановки доданків збігається із попередньою формулою. ■

Властивості мішаного добутку

1) $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-(\bar{b},\bar{a},\bar{c})=-(\bar{a},\bar{c},\bar{b})=-(\bar{c},\bar{b},\bar{a})$

під час перестановки двох векторів мішаний добуток змінює знак;

2) $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{b},\bar{c},\bar{a})=(\bar{c},\bar{a},\bar{b})$

під час перестановки трьох векторів у круговому порядку мішаний добуток не змінюється;

1) $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0$ тоді і лише тоді, коли ці вектори компланарні.

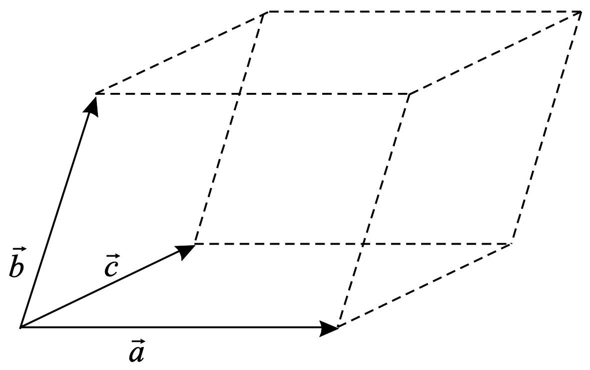
Зауважимо, що перші дві властивості стають очевидними після застосування властивостей визначників. Стосовно третьої властивості, то у випадку нульового одного співмножника у визначнику буде нульовий рядок, а отже, він дорівнюватиме нулеві. Розглянемо випадок компланарності трьох ненульових векторів. Отже, нехай усі три вектори лежать в одній площині. Тоді векторний добуток $[\bar{a},\bar{b}]$ – це вектор, перпендикулярний до цієї площини, а отже, і до вектора $\bar{c}$. Скалярний добуток двох перпендикулярних векторів, як відомо, дорівнює нулеві, тобто

$$\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)=\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \bar{a},\bar{b},\bar{c} \text{ – компланарні.}$$

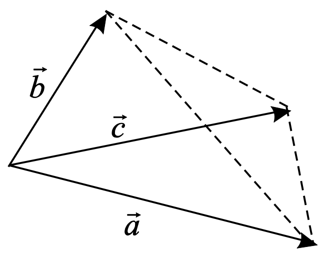
Застосування мішаного добутку

1) ***Об’єм паралелепіпеда***, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, дорівнює абсолютній величині мішаного добутку цих векторів:

$$V_{паралелепіпеда}=\left|\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\right|.$$



2) ***Об'єм піраміди***, побудованої на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$, дорівнює :



$$V_{піраміди} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right) \right|.$$

Приклад. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a} = (1;3;0)$, $\overline{b} = (4;-2;2)$ і $\overline{c} = (3;1;2)$:

$$\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 18 - 0 - 2 - 24 = -12 .$$

$$V_{паралелепіпеда} = \left| \left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right) \right| = |-12| = 12 .$$

3) ***Перевірка компланарності*** (*лінійної залежності в* R^3) ***векторів*** $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$:

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – *компланарні (лінійно залежні)* $\Leftrightarrow$ $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right) = 0$.

4) $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ утворюють праву трійку векторів, якщо $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right) > 0$, і ліву трійку, якщо $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right) < 0$.

Пропонуємо читачеві зведену таблицю добутків векторів, їх властивостей та застосувань.

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК	**ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК**	**МІШАНИЙ ДОБУТОК**
1	**2**	**3**

Означення **Скалярним добутком** $(\bar{a},\bar{b})$ двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається число (скаляр), яке позначається символом $\left(\bar{a},\bar{b}\right)$ або $\bar{a}\cdot\bar{b}$ і дорівнює добуткові довжин цих векторів на косинус кута між ними: $(\bar{a},\bar{b})=\lvert\bar{a}\rvert\lvert\bar{b}\rvert\cos\varphi$. **Обчислення** Якщо $\bar{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ і $\bar{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, то скалярний добуток цих векторів обчислюється за формулою: $(\bar{a},\bar{b})=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$.	**Означення** **Векторним добутком** $[\bar{a},\bar{b}]$, або $\bar{a}\times\bar{b}$ вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ називається третій вектор $\bar{c}$ із властивостями: 1) $\lvert\bar{c}\rvert=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$; 2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$; 3) вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ утворюють праву трійку векторів. **Обчислення** Якщо $\bar{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ і $\bar{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, то векторний добуток цих векторів обчислюється за формулою: $$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$	**Означення** **Мішаним добутком** $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$ трьох векторів називається число, що дорівнює скалярному добуткові векторного добутку векторів $[\bar{a},\bar{b}]$ на вектор $\bar{c}$: $$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right).$$ **Обчислення** Якщо $\bar{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\bar{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, $\bar{c}=\left(c_x,c_y,c_z\right)$, то мішаний добуток цих векторів обчислюється за формулою: $$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$
Властивості 1) $(\bar{a},\bar{b})=(\bar{b},\bar{a})$ (переставний); 2) $(\bar{a},(\bar{b}+\bar{c}))=(\bar{a},\bar{b})+(\bar{a},\bar{c})$ (розподільний закон); 3) $(\bar{a},\bar{a})=\lvert\bar{a}\rvert^2$, або $\bar{a}^2=\lvert\bar{a}\rvert^2$; 4) $(\bar{a},\bar{b})=0$, якщо $\bar{a}=0$, чи $\bar{b}=0$, або якщо $\bar{a}\perp\bar{b}$ (умова ортогональності двох векторів); 5) Для орт $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ справедливо: 1) $\bar{i}^2=\bar{j}^2=\bar{k}^2=1$ 2) $\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{i}\cdot\bar{k}=\bar{j}\cdot\bar{k}=0$.	**Властивості** 1) $[\bar{a},\bar{b}]=-[\bar{b},\bar{a}]$ 2) $[\bar{a},\bar{b}]=0$, якщо $\bar{a}=0$, чи $\bar{b}=0$, або якщо $\bar{a}\ II\ \bar{b}$; 3) $[\bar{a},(\bar{b}+\bar{c})]=[\bar{a},\bar{b}]+[\bar{a},\bar{c}]$ (розподільний закон); 4) Для орт $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ справедливі співвідношення: 1) $[\bar{i},\bar{i}]=[\bar{j},\bar{j}]=[\bar{k},\bar{k}]=\bar{0}$ 2) $[\bar{i},\bar{j}]=-[\bar{j},\bar{i}]=\bar{k}$; $[\bar{j},\bar{k}]=-[\bar{k},\bar{j}]=\bar{i}$; $[\bar{k},\bar{i}]=-[\bar{i},\bar{k}]=\bar{j}$.	**Властивості** 1) $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-(\bar{b},\bar{a},\bar{c})$; $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-(,\bar{a},\bar{c},\bar{b})$; $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=-(\bar{c},\bar{b},\bar{a})$; у разі перестановки двох векторів мішаний добуток змінює знак; 2) $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{b},\bar{c},\bar{a})=(\bar{c},\bar{a},\bar{b})$; у разі перестановки трьох векторів в круговому порядку мішаний добуток не змінюється; 3) $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0$, якщо $\bar{a}=0$, $\bar{b}=0$, чи $\bar{c}$ = 0; або якщо ці вектори компланарні.

Продовження таблиці

1	2	3

Застосування	**Застосування**	**Застосування**
1) Косинус кута (кут) між двома векторами обчислюється за формулою: $\cos\varphi=\frac{(\bar{a}\cdot\bar{b})}{\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert}$ $=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$. 2) Проекція вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ обчислюється за формулою $Пр_{\bar{b}}\bar{a}=\lvert\bar{a}\rvert\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{b}\rvert}=$ $=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$. 3) Перевірка перпендикулярності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$: Якщо $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=0,\ \textit{то}\ \vec{a}\perp\vec{b}$.	1) Площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $S=\lvert[a,b]\rvert$. 2) Площа трикутника, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\lvert[a,b]\rvert$.	1) Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$: $V_{\text{паралелепіпеда}}=\left\lvert\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\right\rvert$. 2) Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$: $V_{\text{піраміди}}=\frac{1}{6}\left\lvert\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\right\rvert$; 3) Перевірка компланарності векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$: компланарні $\Leftrightarrow\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=0$. 4) Перевірка лінійної незалежності векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$: Якщо $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}\neq 0$, то вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ лінійно незалежні. 5) $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ утворюють праву трійку векторів, якщо $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)>0$ і ліву трійку, якщо $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)<0$.