Алгебра - це більше, ніж наука,
це спосіб розмовляти про науку"

Нільс Бор[1]

Лінійна алгебра та аналітична геометрія відіграють без перебільшення фундаментальну роль в математичній освіті інженера. Адже поняття абстрактного векторного простору, вектора, як його елемента, базису та координат вектора в базисі, лінійного перетворення використовуються у всіх галузях комп'ютерних наук та інформаційних технологій в цілому.

У сучасній математиці алгебра – це наука, предметом якої є операції, записані в символічній формі. Операції здійснюються над елементами деяких множин. У цьому курсі розглядаються множини матриць та множини векторів із означеними для них операціями та описом їх властивостей.

Розвиток лінійної алгебри почався з практичних задач розв'язування лінійних рівнянь. Поступово сформувалися абстрактні поняття вектора, матриці, векторного простору тощо. Мабуть, першою задачею лінійної алгебри було відшукання розв'язку рівняння вигляду

$$ax + b = 0,$$

тобто лінійного (як ми сьогодні його називаємо) рівняння з однією змінною. Як відомо, проблеми коректності цієї задачі, існування її розв'язку та відшукання "найкращого" з деяких практичних міркувань "розв'язку" залежно від природи величин a та b є актуальними і сьогодні.

Сформулюємо основні означення і властивості матриць.

Прямокутну таблицю, складену з дійсних чисел або об'єктів іншої природи, які допускають операції додавання, множення та множення на число, впорядковано розміщених в m рядках і n стовпцях, називають ***матрицею розміру*** $m \times n$.

Матриці позначають великими латинськими літерами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix}.$$

[1] Нільс Ге́нрик Дави́д Бор (1885 - 1962) — данський фізик-теоретик, один із творців сучасної фізики. Лауреат Нобелівської премії з фізики (1922). Відомий як творець першої квантової теорії атома й активний учасник розробки основ квантової механіки. Зробив значний внесок у розвиток теорії атомного ядра а ядерних реакцій, процесів взаємодії елементарних частинок із середовищем

Елементи матриці позначають a_{ij}, а саму матрицю $A=\{a_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$. Перший індекс i означає номер рядка матриці, а другий індекс j – номер стовпця, в якому знаходиться елемент a_{ij} матриці A. Наприклад, елемент a_{32} міститься у третьому рядку і другому стовпці.

Якщо усі елементи матриці є числами, то таку матрицю називають ***числовою матрицею.***

Приклад. Матриця $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ є числовою матрицею, її розмір (розмірності) 4×3, де, наприклад, $a_{23}=0$, а $a_{41}=4$.

ВИДИ МАТРИЦЬ

Матриця може мати довільну кількість рядків та стовпців. Деякі матриці одержали спеціальні назви, які вказують на їхню розмірність.

Матрицю, яка складається лише з одного рядка і довільної кількості стовпців, називають ***матрицею-рядком*** $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Зрозуміло, що для таких матриць необхідність подвійного індексу відпадає.

Матриця, яка складається лише з одного стовпця і довільної кількості рядків, називається ***матрицею-стовпцем*** *(або* ***стовпцем****):* $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}$

Матриці-рядки або матриці-стовпці називають також ***векторами.***

М*атриця, яка складається з одного рядка та одного стовпця, тобто з одного елемента, ототожнюється з цим елементом.*

Тобто кожне число можна розуміти як числову матрицю розміру 1×1.

Матрицю, у якої усі елементи дорівнюють нулеві, називають ***нульовою*** *матрицею:* $O=\begin{pmatrix}0 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 0\end{pmatrix}$

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців, називається ***квадратною*** *матрицею порядку n :*

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Якщо ж у формулюванні тих чи інших тверджень виникає необхідність наголосити на тому, що розмірність матриці може бути довільною (кількість рядків матриці не обов'язково збігається з кількістю її стовпців), то таку матрицю називають ***прямокутною***.

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців, називається ***квадратною*** *матрицею порядку n :*

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Елементи квадратної матриці називаються ***елементами головної діагоналі****, або просто* ***діагональними****, якщо обидва їх індекси рівні між собою.*

Діагональними елементами є елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Кажуть, що ці елементи утворюють ***головну діагональ*** матриці. Елементи $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$ квадратної матриці утворюють її ***побічну діагональ***.

Квадратна матриця називається ***діагональною****, якщо усі її недіагональні елементи дорівнюють нулю.*

Діагональна матриця скорочено записується у вигляді:

$$A = diag\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}.$$

Якщо усі діагональні елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то вона називається ***одиничною***

Позначають одиничну матрицю символом Е або E_n, якщо важливо вказати розмір цієї матриці:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = diag\{1,1,\dots,1\}.$$

Позначення E_4 означає одиничну матрицю розміру 4×4.

*Квадратна матриця називається **нижньою трикутною**, якщо усі елементи, які розташовані вище від головної діагоналі, дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$*

$$за\, i < j : \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Квадратна матриця називається **верхньою трикутною,** якщо усі елементи, розташовані нижче від головної діагоналі, дорівнюють нулю: $a_{ij} = 0$ при $i > j$:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Прямокутна матриця називається **східчастою**, якщо перший зліва ненульовий елемент у кожному наступному рядку розташований правіше, ніж у попередньому.*

Якщо перші ненульові елементи в i-му та в $i+1$-му рядках мають індекси im та $(i+1)\ n$, тоді для того, щоб матриця була східчастою, необхідно, щоб $m < n$. Кожна східчаста матриця є верхньотрикутною, але не навпаки.

Приклад. Матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ є верхньотрикутною, але не є східчастою, бо другі індекси перших зліва ненульових елементів у другому, третьому та четвертому рядках ($a_{24} = 2;\ a_{34} = 1;\ a_{44} = 7$) є рівні між собою і дорівнюють 4, тобто у третьому та четвертому рядках перші ненульові елементи не знаходяться правіше за ненульові елементи попередніх рядків.

*Квадратна матриця називається **симетричною**, якщо* $a_{ij} = a_{ji}$, *наприклад:*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

*Квадратна матриця називається **кососиметричною**, якщо* $a_{ij} = -a_{ji}$.

◙ *Дві матриці називаються **рівними** між собою, якщо вони мають однакові розміри та їх елементи з однаковими індексами (**відповідні** елементи) є рівними.*

ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

До лінійних операцій над матрицями належать **додавання матриць** та **множення матриці на число.**

◙ ***Сумою*** $A+B$ *двох матриць* $A = \{a_{ij}\}$ *і* $B = \{b_{ij}\}$ *однакової розмірності* $m \times n$ *називається матриця* $C = \{c_{ij}\}$ *тієї самої розмірності, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць* A *та* B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Приклад. $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$

Пропонуємо читачеві переконатись у справедливості твердження:

□ *Довільну квадратну матрицю можна подати у вигляді суми симетричної та кососиметричної матриць*■

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

де перший доданок є симетричною, а другий – кососиметричною матрицями.

◙ ***Добутком матриці*** A ***на число*** λ *називається матриця* C *тієї самої розмірності, що й* A, *елементи якої дорівнюють відповідним елементам матриці A, помноженим на* λ: $c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$.

Приклад. $3\cdot A=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9 & -12\\ -3 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

◙ *Матриця* $-A=-1\cdot A$ *називається* ***протилежною*** *до матриці A.*

Легко переконатись, що $A+(-A)=O$.

◙ *Різницею* $A-B$ *двох матриць* $A=\{a_{ij}\}$ *і* $B=\{b_{ij}\}$ *однакової розмірності називається матриця* $C=\{c_{ij}\}$, *кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць* A *та* $-B$.

Приклад. $A-B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 0 & 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -6\\ -1 & -5 & 7\end{pmatrix}$.

Отже, додавати й віднімати можна лише матриці однакової розмірності і результатом буде матриця тієї самої розмірності.

ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАЦІЙ НАД МАТРИЦЯМИ

1) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (асоціативність додавання);
2) $A+B=B+A$ (комутативність додавання);
3) $A+O=A$;
4) $1\cdot A=A$;
5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
6) $(\lambda\pm\mu)A=\lambda A\pm\mu A$;
7) $(\mu\lambda)A=\lambda(\mu A)$;
8) $\lambda A=A\lambda$.

Проілюструємо, наприклад, виконання властивості 5 для матриць:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix}1 & 0{,}5 & 2\\ 0 & 1{,}5 & -1\end{pmatrix}.$$

$$4(A+B)=4\left(\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0{,}5 & 2\\ 0 & 1{,}5 & -1\end{pmatrix}\right)=4\begin{pmatrix}-1 & 1{,}5 & 6\\ -3 & 1{,}5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 24\\ -12 & 6 & 4\end{pmatrix}.$$

З іншого боку:

$$4(A+B)=4\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & 0{,}5 & 2\\ 0 & 1{,}5 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-8 & 4 & 16\\ -12 & 0 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 2 & 8\\ 0 & 16 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 24\\ -12 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

До властивостей лінійних операцій над матрицями можна зарахувати і таку властивість:

Якщо $A=B$, *то для довільної матриці* C *тієї самої розмірності, що й* A *та* B

$$A + C = B + C.$$

МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ

Для компактного запису багатьох формул, які зустрічатимуться далі, зручним буде скорочений запис суми елементів.

Символ вигляду $\sum_{k=1}^{n} a_k$ читається так: сума за індексом *к* від 1 до *n* елементів a_k. Він означає суму елементів $a_1, a_2, ..., a_n$, тобто $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Наприклад, $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. Якщо ж індексів два, тоді додавання виконується за кожним з двох індексів:

$$\sum_{s,j=1}^{4} a_{sj} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{31} + a_{32} + a_{33} +$$
$$+ a_{34} + a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44}$$

або $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} a_{sj} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34}$.

Правило, за яким здійснюватимемо множення двох матриць, не можна, мабуть, вважати єдино можливим. Проте саме такий добуток дасть можливість застосовувати апарат матриць як інструмент під час дослідження та розв’язання систем лінійних рівнянь.

◙ ***Добутком рядка на стовпець*** *з тією самою кількістю елементів називається число, яке дорівнює сумі добутків відповідних елементів:*

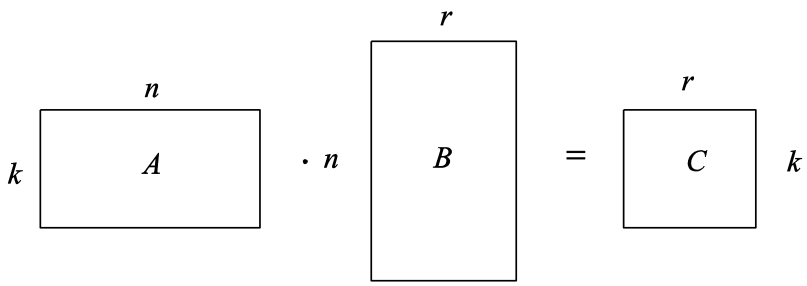
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i .$$

Допитливий читач зауважить схожість такого добутку із скалярним добутком двох векторів, заданих координатами у деякій декартовій системі координат (див. розділ 4).

◙ ***Добутком матриць*** *A* і *B називається матриця* $C = \{c_{ij}\}$, *кожний елемент* c_{ij} *якої є добутком i-го рядка матриці A на j-й стовпець матриці B:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}).$$

Дві прямокутні матриці A і B можна перемножувати лише у тому випадку, коли кількість стовпців множника A дорівнює кількості рядків множника B. При цьому кількість рядків добутку $A \cdot B$ дорівнює кількості рядків матриці A, а кількість його стовпців дорівнює кількості стовпців матриці B:



Приклад. Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Зауважимо спочатку, що такий добуток існує, бо кількість стовпців першої матриці збігається із кількістю рядків другої матриці (n = 4). У першому рядку і в першому стовпці матриці C стоїть елемент, одержаний множенням першого рядка матриці А на перший стовпець матриці B:

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 10 + 1 + 0 + 12 = 23.$$

Елемент, що стоїть у першому рядку і другому стовпці матриці C, одержаний множенням першого рядка матриці A на другий стовпець матриці B:

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 0 + 2 + 0 - 6 = -4.$$

Аналогічно обчислюються усі інші елементи матриці C.

У результаті множення цих матриць ми одержимо матрицю C розміру 2×3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -4 & -3 \\ 27 & -12 & -24 \end{pmatrix}.$$

ВЛАСТИВОСТІ ДОБУТКУ МАТРИЦЬ

1. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ (асоціативність множення);
2. $A\cdot E=A;\quad E\cdot A=A.$
3. Якщо $B=C$, то $A\cdot B=A\cdot C$ (множення обох частин рівності на матрицю зліва), а також $B\cdot A=C\cdot A$ (множення обох частин рівності на матрицю справа), якщо A довільна матриця розмірності, яка забезпечує можливість вказаних добутків.
4. $A\cdot B\neq B\cdot A$ (некомутативність множення), хоча існують винятки.
5. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C;\quad (A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ (дистрибутивність множення зліва і справа стосовно додавання).
6. $\lambda(A\cdot B)=(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)=(A\cdot B)\lambda$.

Приклад. Знайти добутки матриць $A\cdot B,\quad B\cdot A$, якщо $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\3&2\end{pmatrix}.$$

◙ *Матриці A і B називаються* ***переставними***, *або* ***комутативними***, *якщо* $A\cdot B=B\cdot A$.

Наприклад, матриці O та E переставні з будь-якою матрицею відповідного порядку: $O\cdot A=A\cdot O=O;\quad E\cdot A=A\cdot E=A.$ Це означає, що у множині квадратних матриць певного порядку одинична та нульова матриці відіграють в операції множення матриць таку саму роль, як і одиниця та нуль у множині дійсних чисел. Зокрема, справедливим є ланцюжок рівностей

$$A\cdot B+\lambda A=A\cdot B+\lambda A\cdot E=A\cdot B+A\cdot\lambda E=A(B+\lambda E).$$

На відміну від дійсних чисел добуток двох матриць, кожна з яких відмінна від нульової матриці, може дорівнювати нульовій матриці. Тобто з того, що $A\cdot B=O$, не випливає, що $A=O$ або $B=O$.

Приклад. Добуток матриць $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$ дорівнює нульовій матриці. (Переконайтесь самостійно).

ПІДНЕСЕННЯ МАТРИЦІ ДО НАТУРАЛЬНОГО СТЕПЕНЯ

◙ *Матриця*

$$A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\dots\cdot A}_{n\ разів}$$

*називається **n-м степенем** квадратної матриці А, де* n *– натуральне число*.

Зокрема, матриця A^2 називається ***квадратом матриці*** A, а матриця A^3 – її ***кубом***. ***Нульовий степінь*** матриці означують аналогічно до нульового степеня числа: $A^0 = E$.

ТРАНСПОНУВАННЯ МАТРИЦІ

◙ ***Транспонованою*** *матрицею до матриці* $A = \{a_{ij}\}$ *розміру* $m \times n$, *називають матрицю* $A^T = \{a^T{}_{ij}\}$ *розміру* $n \times m$, *кожний елемент якої одержують з матриці* A *за формулою* $a^T{}_{ij} = a_{ji}$. Тобто i-й рядок матриці A стає i-м стовпцем матриці A^T.

Якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, тоді $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Якщо $B^{\mathrm{T}} = B$, то матриця B є квадратною і симетричною, а у випадку виконання умови $B^{\mathrm{T}} = -B$ матриця є кососиметричною.

ВЛАСТИВОСТІ

1. $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;
2. $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$;
3. $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A$;
4. $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

Приклад. Проілюструвати виконання властивості 4 для матриць $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Справді, $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 10 \\ 20 & 12 \end{pmatrix}$, тоді $(A \cdot B)^T == \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$. Добуток транспонованих матриць із зміненим порядком множників: $B^T \cdot A^T =$ $= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ збігається із попереднім результатом.

ЕЛЕМЕНТАРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ МАТРИЦІ

◙ ***Елементарними перетвореннями рядків матриці*** *називають:*

1) перестановку місцями рядків матриці;

2) додавання до будь-якого рядка матриці іншого її рядка, помноженого на довільне ненульове число;

3) множення довільного рядка матриці на довільне ненульове число.

Аналогічними є елементарні перетворення стовпців матриці.

◙ *Матриця В, одержана з матриці А за допомогою скінченної кількості елементарних перетворень рядків або стовпців, називається* ***еквівалентною*** *до матриці А* ($A \sim B$).

□ *Довільну матрицю скінченної розмірності скінченним числом елементарних перетворень рядків можна перетворити у еквівалентну їй східчасту матрицю.*■

Справді, нульову матрицю можна вважати східчастою. Якщо матриця ненульова, то в ній виберемо такий рядок, перший зліва ненульовий елемент у якому має найменший другий індекс (якщо таких рядків є кілька, то вибір серед них одного рядка є довільним). Переставимо його на місце першого рядка. За допомогою елементарних перетворень перетворимо матрицю так, щоб під вибраним ненульовим елементом першого рядка утворилися нулі. Тепер серед усіх ненульових рядків, починаючи з другого, знову виберемо такий рядок, ненульовий елемент у якому має найменший другий індекс. Переставимо його на місце другого рядка і т. д. Оскільки матриця має скінченну кількість рядків, то скінченим числом елементарних перетворень рядків вона перетвориться у східчасту матрицю. ■

Приклад. За допомогою елементарних перетворень рядків матриці A звести її до східчастого вигляду.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 12 \end{pmatrix} \overset{\text{I крок}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{II крок}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 12 & 20 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{III крок}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{IV крок}}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{-1} & 3 & 5 & 0 \\ 0 & \underline{3} & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

І крок. Здійснено елементарні перетворення:

1) третій і четвертий рядки помножили на $1/2$ та відповідно на $1/3$, оскільки 2 – спільне кратне усіх елементів третього, а 3 – четвертого рядків;

2) переставили місцями рядки так, щоб в кожному рядку нулів зліва було більше або рівно за попередній.

ІІ крок. Утворення нулів у першому стовпці:

1) до другого рядка покомпонентно додали перший рядок: (1+(–1)=0, 0+3=3, 0+5=5, 3+0=3).

2) до третього рядка додали перший, помножений на 3: (3+(–3)=0, 3+9=12, 5+15=20, 12+0=12).

ІІІ крок. Після множення третього рядка на $1/4$, елементи, що знаходяться у другому стовпці третього та четвертого рядків, перетворюють на нулі:

1) до ІІІ рядка додали ІІ рядок, помножений на (–1);
2) IV-й рядок помножили на 3 і до нього додали ІІ, помножений на (–2).

IV крок: 1) переставили третій і останній рядки місцями;

2) до четвертого рядка додали третій, помножений на (–7).

Утворена матриця – східчаста.