Лекція 8. Зчисленні множини.

Поняття рівнопотужності множин

Розглянемо відображення з множини натуральних чисел **N** в множину парних натуральних чисел $\mathbf{N}_2$, яке кожному натуральному числу ставить у відповідність подвоєне число, тобто бієктивне відображення $f(n) = 2n$. Тоді можна сказати, що існує стільки парних натуральних чисел, скільки й натуральних, а також, що у випадку нескінченних множин може існувати бієктивне відображення деякої множини на її підмножину, яка відмінна від самої множини. Завдяки поняттю бієктивного відображення можна порівнювати між собою нескінченні множини.

Дві множини X та Y називаються рівнопотужними, якщо існує принаймні одне бієктивне відображення $f : X \to Y$.

Відношення "X рівнопотужна Y" є відношенням еквівалентності між множинами. Клас еквівалентності, тобто клас всіх множин рівнопотужних даній множині, називається потужністю або кардинальним числом. Скінченні кардинальні числа – це класи еквівалентності скінченних множин. Ці числа за визначенням є натуральними числами $0, 1, 2, \ldots$. Слід відзначити, що ми приймаємо як первинне поняття натуральні числа, але їх строге математичне визначення досить складне. Як наслідок не легко *apriori* означити скінченні множини. Часто за визначенням вважають множину скінченною, якщо вона не рівнопотужна ніякій зі своїх підмножин, відмінних від самої множини, а потім доводять, що кардинальне число має властивості натуральних чисел.

Перейдемо до двох найбільш важливих нескінченних потужностей: потужності зчислених множин і потужності континууму.

Зчисленні множини

Множина називається зчисленною, якщо вона рівнопотужна множині натуральних чисел **N**. Множина зчисленна, якщо існує хоча б одна бієкція цієї множини в множину **N**. Іншими словами, множина зчисленна, якщо її елементи можна пронумерувати натуральними числами і номери не будуть повторюватися.

Раніше ми з'ясували, що множина парних натуральних чисел $\mathbf{N}_2$ є зчисленною.

Задамо відображення $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ так: $f(z)=2z$ при $z>0$, $f(z)=2|z|+1$ при $z\leq 0$. Воно бієктивне і, значить, множина цілих чисел $\mathbf{Z}$ також є зчисленною.

Нехай $\mathbf{K}=\mathbf{N}\cup\{0\}$. Покажемо, що множина $\mathbf{K}\times\mathbf{K}$ рівнопотужна множині $\mathbf{N}$. Дійсно, з наведеної на рис. 10 схеми бачимо, що відображення $f:\begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) & (0,1) & (2,0) & (1,1) & (0,2) & ... \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & ... \end{pmatrix}$, тобто $f: \mathbf{K}\times\mathbf{K} \to \mathbf{N}$, є бієкцією. Умовно це відображення можна мислити собі як спіраль, яка розкручується.

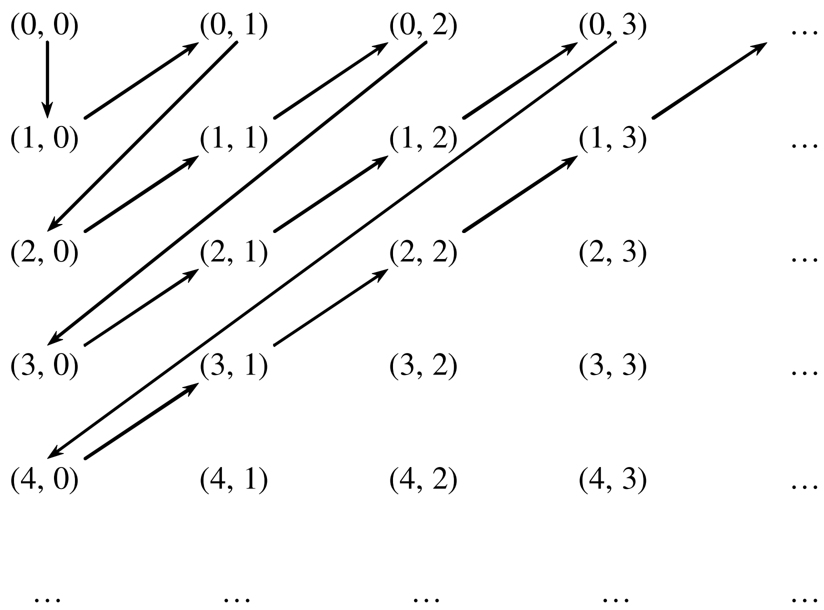

Рис. 10. Приклад бієктивного відображення з множини $\mathbf{K}\times\mathbf{K}$ в множину $\mathbf{N}$

Інший варіант бієктивного відображення $f: \mathbf{K}\times\mathbf{K} \to \mathbf{N}$ наведено на рис. 11.

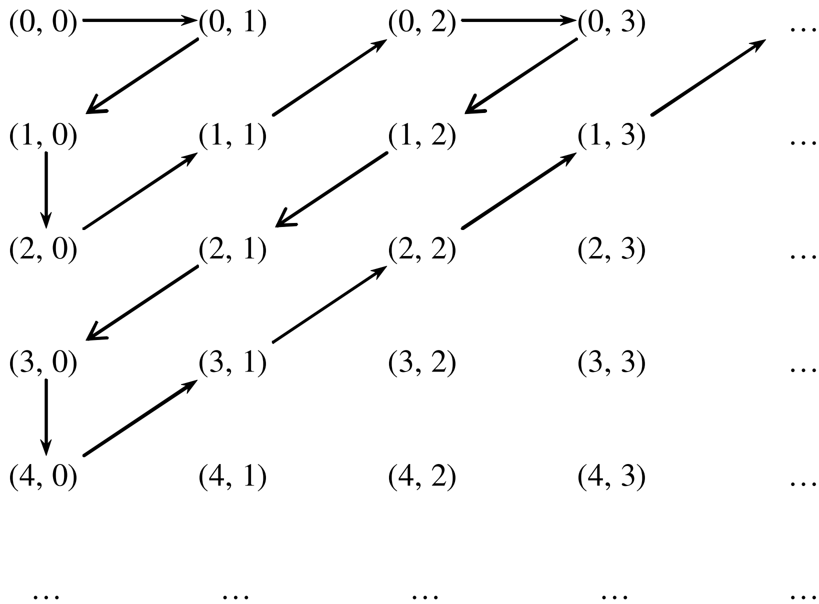

Рис. 11. Інше бієктивне відображення з множини $\mathbf{K}\times\mathbf{K}$ в множину $\mathbf{N}$

Слід зауважити, що насправді існує нескінченна кількість бієктивних відображень з множини з множини **K**×**K** в множину **N**. Проте, щоб ствердити, що вказані множини рівнопотужні, досить навести одне з них.

Покажемо, що множина $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ рівнопотужна множині **N**. На рис. 12 наведено схему, яка задає відповідне бієктивне відображення $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$.

$$
\begin{tikzcd}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & (-2,-2) \arrow[r] & (-2,-1) \arrow[r] & (-2,0) \arrow[r] & (-2,1) \arrow[r] & (-2,2) \arrow[r] & \ldots \\
\ldots & (-1,-2) \arrow[u] & (-1,-1) \arrow[r] & (-1,0) \arrow[r] & (-1,1) \arrow[r] & (-1,2) \arrow[d] & \ldots \\
\ldots & (0,-2) \arrow[u] & (0,-1) \arrow[u] & (0,0) \arrow[r] & (0,1) \arrow[d] & (0,2) \arrow[d] & \ldots \\
\ldots & (1,-2) \arrow[u] & (1,-1) \arrow[u] & (1,0) \arrow[l] & (1,1) \arrow[l] & (1,2) \arrow[d] & \ldots \\
\ldots & (2,-2) \arrow[u] & (2,-1) \arrow[l] & (2,0) \arrow[l] & (2,1) \arrow[l] & (2,2) \arrow[l] & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{tikzcd}
$$

Рис. 12. Приклад бієктивного відображення з множини **Z**×**Z** в множину **N**

Таким чином, множина $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ також є зчисленною.

Покажемо, що й множина раціональних чисел зчисленна. Множину раціональних чисел можна розглядати так: **Q** = {(m,n) | m – ціле число, n – натуральне число, найбільший спільний дільник m та n дорівнює 1}.

На наведеній на рис.13 схемі зображено впорядковані пари – елементи множини $\mathbf{Q}_1$ = {(m,n) | m – ціле число, n – натуральне число}. Оскільки різні такі пари можуть задавати одне і те ж раціональне число (наприклад, пари (1,2), (2,4), (3,6) і т.д. задають число ½), то кожен елемент множини **Q** на схемі зображаємо променем, початком якого є пара (m,n), у цьому разі найбільший спільний дільник m та n дорівнює 1. Починаючи з неї і через всі подальші пари, що задають те саме раціональне число, проводимо промінь – по суті об'єднуємо такі пари в одну групу.

Нумеруємо елементи множини **Q** прямими зі стрілками, що послідовно з'єднують початки променів. Загальний шлях нумерації складається з низки умовних півкіл. У кожному півколі прямі зі стрілками з'єднують ті пари, що мають рівні суми $|m| + |n|$.

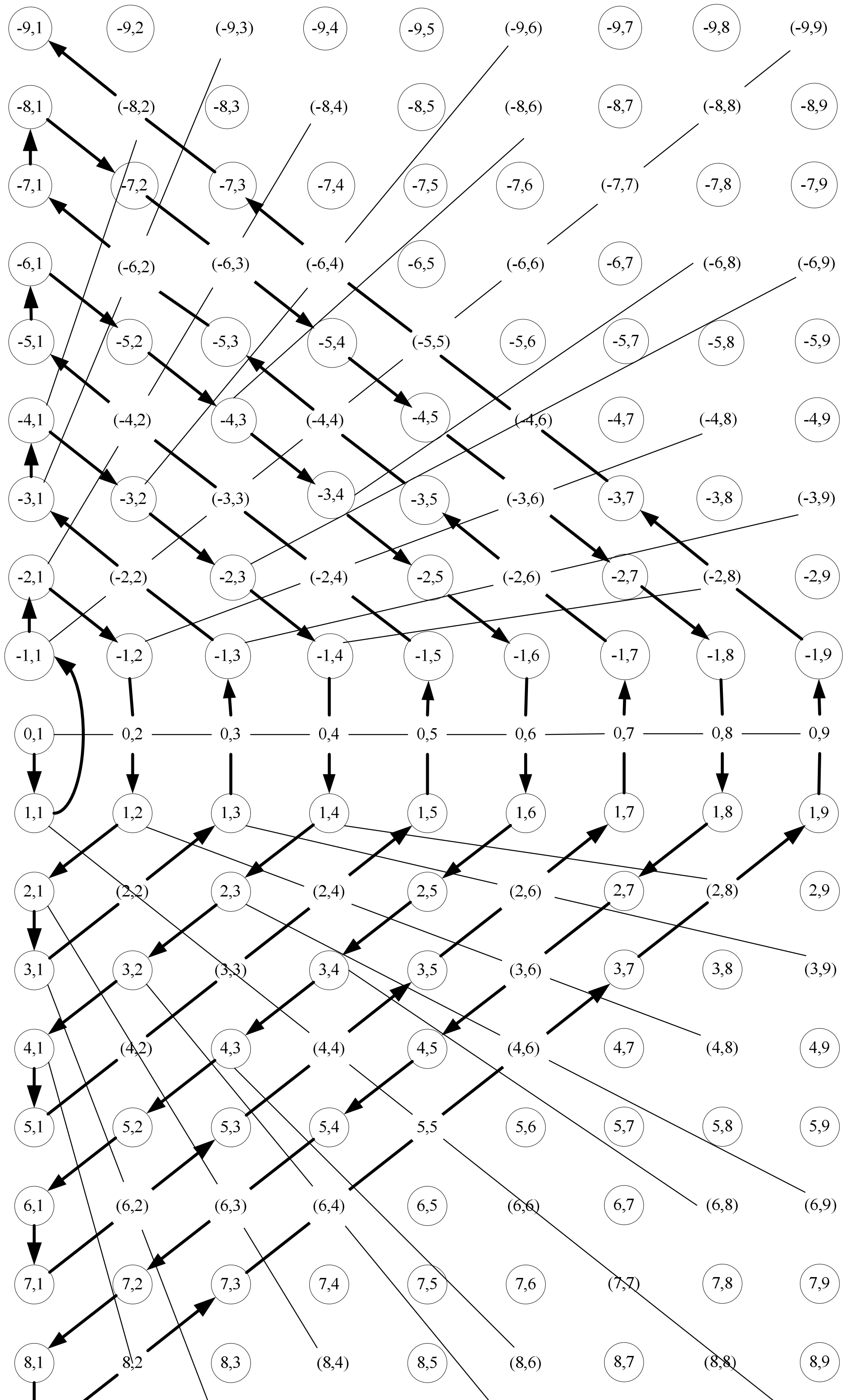

Рис. 13. Приклад бієктивного відображення з множини **Q** в множину **N**

Ми показали, що множини $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{K}\times\mathbf{K}$ (де $\mathbf{K}=\mathbf{N}\cup\{0\}$), $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ є зчисленними, явно збудувавши відповідні бієктивні відображення з цих множин у множину натуральних чисел. Переважно при цьому використовували певні схеми, хоча можна було б описати бієктивні відображення аналітично. Такий метод доведення називають конструктивним. Разом з тим можна використати так званий екзистенціальний метод доведення, коли потрібні бієктивні відображення не будують явно, а лише показують їх існування. У цьому разі доведення стають коротшими, проте ми не маємо бієктивних відображень у явному вигляді.