Лекція 24. Задачі Ейлера для графів. Гамільтонові цикли.

Задача про ланцюги

Теорія графів почалася з розв’язування задачі про кенігсберзькі мости (Ейлер, XVIII ст.). Розташування мостів в м. Кенігсберг зображене на рис. 23.

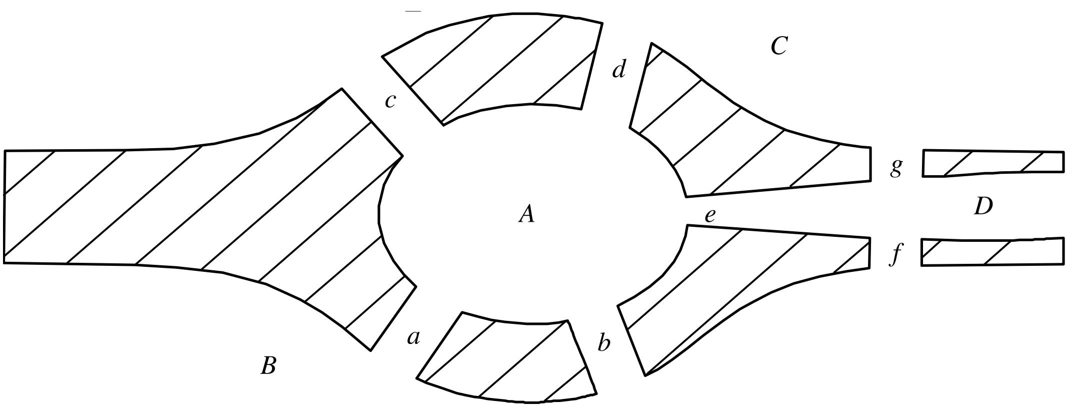


Рис. 23. Задача про кенігсберзькі мости

У місті є 7 мостів $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, які розбивають його на чотири частини $\{A, B, C, D\}$. Необхідно обійти всі мости міста, проходячи по кожному рівно один раз, і повернутись у початкову точку. Граф для цієї задачі наведений на рис. 24.

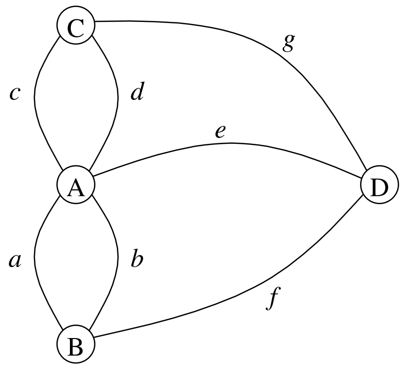


Рис. 24. Граф задачі про кенігсберзькі мости

Загальна постановка задачі є наступною (Ейлер): в яких випадках у скінченному неорієнтованому графі можна знайти такий цикл, у якому зустрічалось би кожне ребро графа. Якщо такий цикл існує, то він називається ейлеровим циклом, а сам граф називається ейлеровим графом.

Теорема 8. Скінченний неорієнтований граф G є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) G – зв'язаний граф;
2) степені всіх вершин графа є парними.

Алгоритм побудови ейлерового циклу:

1) вибираємо довільну вершину a графа;
2) будуємо довільний ланцюг P з початком у вершині „a". Оскільки степені всіх вершин графу є парними, то ланцюг може завершитись тільки в „a" (тобто він є циклом);
3) якщо $P(a, a)$ містить не всі ребра графу G, то будуємо граф $G_1 = G - P(a, a)$, в якому всі вершини мають теж парний степінь. Оскільки граф G є зв'язаним, то серед вершин $P(a, a)$ має знайтись вершина „b", яка зв'язана ребром хоча б з однією вершиною графу G (інакше граф G був би незв'язним);
4) будуємо з ребер графу G_1 ланцюг P', що починається у вершині „b" і може закінчуватись тільки у „b"; з ланцюгів P і P' будуємо новий цикл:

$$P_1(a, a) = P(a, b) \cup P'(b, b) \cup P(b, a);$$

5) якщо $P_1(a, a)$ не містить всіх ребер графу G, то, за аналогією з кроком 3, будуємо граф $G_2 = G - P_1(a, a)$ і т.д.

З огляду на скінченність графу, цей процес зупиниться, коли всі ребра графу G будуть вичерпані.

Узагальнюючи задачу Ейлера можна шукати найменшу кількість ланцюгів (не циклів!), які не мають спільних ребер і покривають увесь зв'язний граф G.

Теорема 9. Нехай G – скінченний зв'язаний граф з k вершинами непарного степеня. Тоді мінімальна кількість ланцюгів, які не мають спільних ребер і покривають граф G, дорівнює $k / 2$.

Алгоритм побудови ланцюгів для узагальненої задачі Ейлера:

1) з'єднуємо довільним чином пари вершин з непарним степенем (для цього необхідно $k / 2$ ребер). При цьому утворюється граф G_1, всі вершини якого мають парний степінь;
2) граф G_1 є ейлеровим і в ньому можна збудувати ейлеровий цикл S;
3) після відкидання з циклу S доданих на кроці 1 $k / 2$ ребер, отримуємо $k / 2$ ланцюгів, які покривають увесь граф G.

Розглянемо приклад, який ілюструє розв'язання основної та узагальненої задачі Ейлера. Задано скінченний неорієнтований граф, зображений на рис. 25. Знайти для нього розв'язок узагальненої задачі Ейлера.

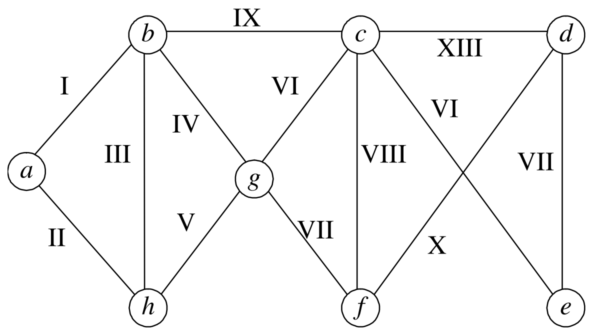


Рис. 25. Початковий граф

Щоб розв'язати поставлену задачу спочатку випишемо степені всіх вершин початкового графа:

Вершина	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
Степінь	2	4	5	3	2	3	4	3

Оскільки є 4 вершини з непарним степенем, то $k = 4$. Це означає, що розв'язок узагальненої задачі Ейлера складатиметься з 2 ланцюгів. Попарно з'єднаємо ребрами вершини з непарним степенем: (c, d) та (f, h) (на рис. 26 ці ребра позначені штриховими лініями).

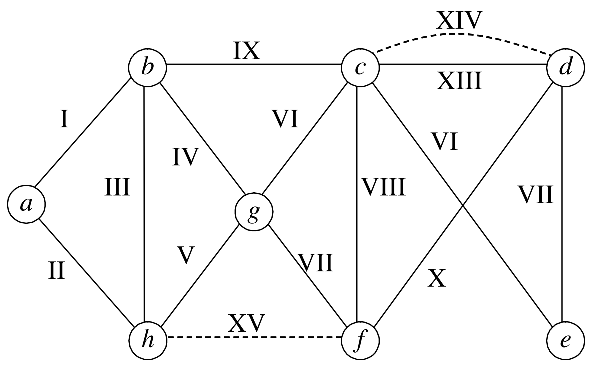
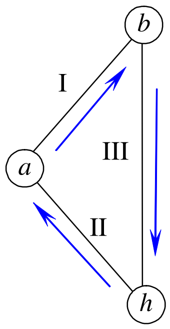


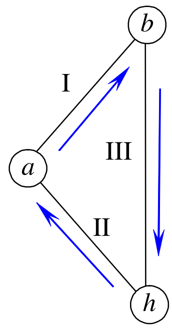
Рис. 26. Видозмінений граф

Отриманий після введення двох додаткових ребер граф є ейлеровим. Покроково збудуємо для утвореного графу ейлеровий цикл. На i-ому кроці спочатку утворюємо ланцюг P_i з початком і кінцем у певній вершині (тобто такий ланцюг є циклом). Після цього утворюємо цикл Q_i об'єднанням циклу P_i, отриманого на даному кроці, та циклу $Q_{i\text{-}1}$, отриманого на попередньому кроці. Графічна ілюстрація цієї побудови, яка включає п'ять кроків (i=1, 2, 3, 4, 5), дається далі.

1. Будуємо ланцюг P_1 з початком у вершині "a":

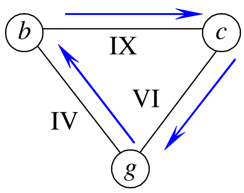


P_1 = (I, III, II)

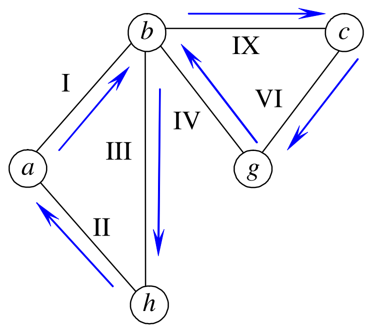


Q_1 = (I, III, II)

2. Будуємо ланцюг P_2 з початком у вершині "b":

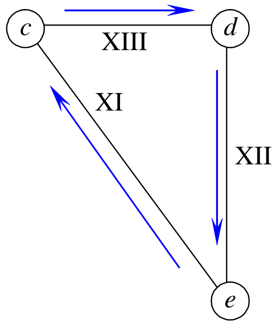


P_2 = (IX, VI, IV)

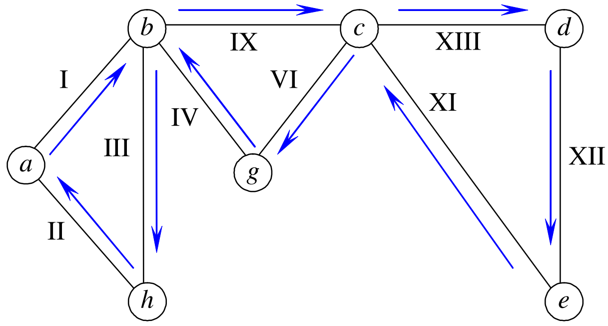


Q_2 = (I, IX, VI, IV, III, II)

3. Будуємо ланцюг P_3 з початком у вершині "c":

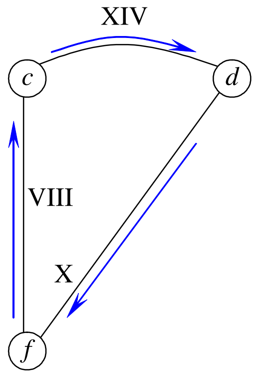


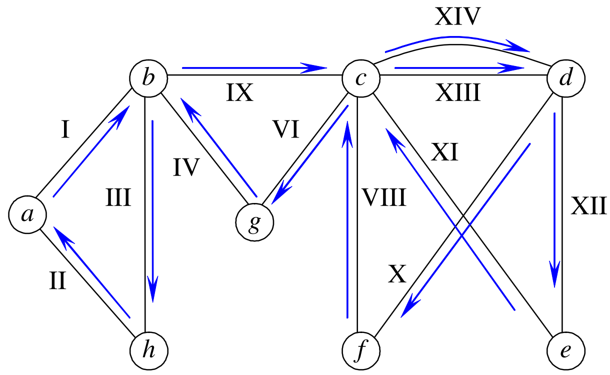
P_3 = (XIII, XII, XI)



Q_3 = (I, IX, XIII, XII, XI, VI, IV, III, II)

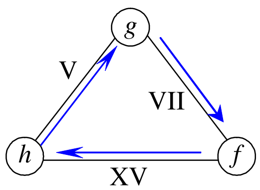
4. Будуємо ланцюг P_4 з початком у вершині “c”:

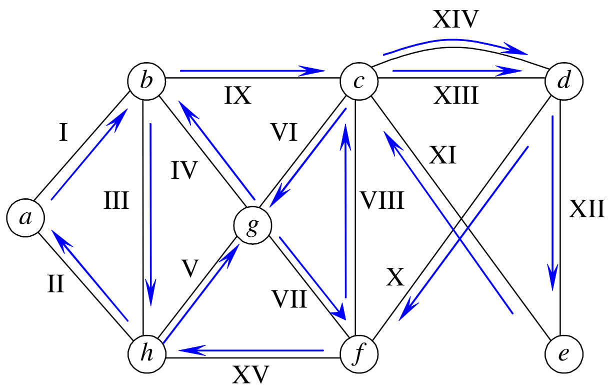




P_4 = (XIV, X, VIII) Q_4 = (I, IX, XIV, X, VIII, XIII, XII, XI, VI, IV, III, II)

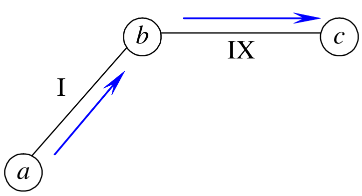
5. Будуємо ланцюг P_5 з початком у вершині “g”:

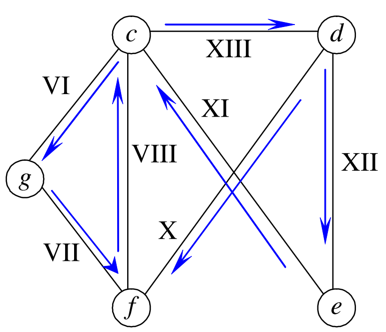


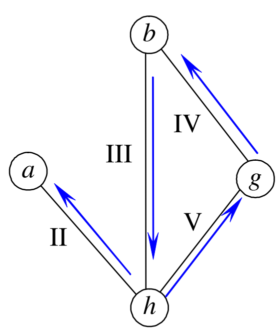


P_5 = (VII, XV, V) Q_5 = (I,IX,XIV,X,VIII,XIII,XII,XI,VI,VII,XV,V,IV,III,II)

Витираючи в ланцюгу Q_5 додані раніше ребра XIV і XV, отримаємо три ланцюги R_1, R_2, R_3.

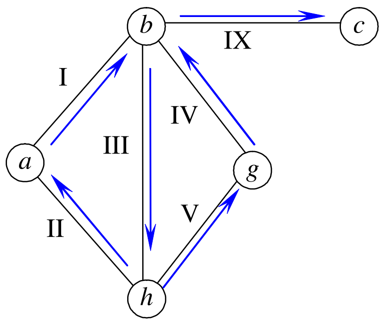




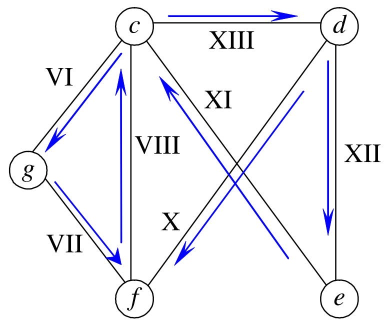


R_1=(I, IX) R_2=(X, VIII, XIII, XII, XI, VI, VII) R_3=(V, IV, III, II)

Зауважимо, що ланцюги R_1 і R_3 мають спільний кінець – вершину „a”. „Склеюючи” ці ланцюги, отримаємо остаточно розв’язок узагальненої задачі Ейлера з двох ланцюгів: S_1 та S_2.



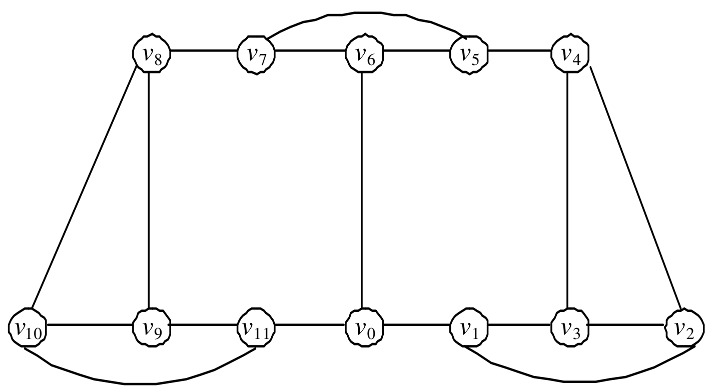
S_1=(V, IV, III, II, I, IX)



S_2=(X, VIII, XIII, XII, XI, VI, VII)

Гамільтонові цикли

Гамільтоновий цикл – це цикл, який проходить по кожній вершині графа і рівно один раз.



Незважаючи на подібність у формулюванні для ейлерових і гамільтонових циклів, відповідні результати мають мало спільного. Критерій існування ейлерових циклів був встановлений достатньо просто; для гамільтонових циклів ніякого загального правила невідомо. Більше того, для конкретних графів іноді важко встановити, чи існує взагалі такий цикл. Тому обмежимось двома достатніми умовами.

Теорема 10. (Дірак). Якщо в графі з n вершинами для довільної вершини v виконується умова $\rho(v) \geq n / 2$, то в графі існує гамільтоновий цикл.

Теорема 10а. (Оре). Якщо в графі з n вершинами для довільної пари несуміжних вершин v,w виконується умова $\rho(v)+\rho(w)\geq n$, то в графі існує гамільтоновий цикл.

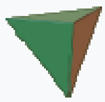
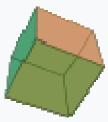
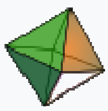
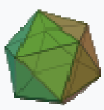
Виходячи з теореми 10, у будь-якому повному графі існує цикл Гамільтона.

Також, відомо, що в усіх правильних многогранниках (якщо розглядати їх як графи) існує цикл гамільтона. Нагадаємо, що многогранник називають правильним, якщо:

- він опуклий;
- всі його грані є рівними правильними многокутниками;
- в кожній його вершині сходиться однакова кількість граней;
- всі його двогранні кути рівні.

Існує всього п'ять правильних многогранників, які були відомі ще за античних часів. Вони наведені в табл. 24.

Табл. 24. Правильні многогранники.

Многогранник		Вершини кутів	Ребра	Грані
Правильний тетраедр (чотиригранник)		4	6	4
Куб (шестигранник)		8	12	6
Октаедр (восьмигранник)		6	12	8
Правильний додекаедр (дванадцятигранник)		20	30	12
Ікосаедр (двадцятигранник)		12	30	20

Для прикладу, цикл гамільтона в додекаедрі показано на рис. 27.

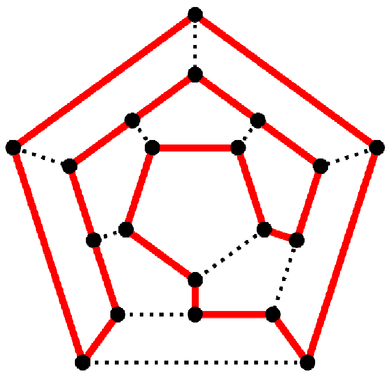
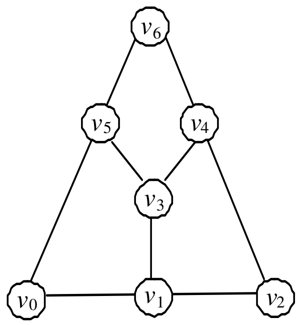


Рис. 27. Цикл гамільтона в додекаедрі.

Гамільтоновий цикл названий на честь ірландського математика Вільяма Гамільтона, який вперше визначив це поняття, дослідивши задачу “навколосвітньої подорожі” по додекаедру, вузлові вершини якого символізували найбільші міста Землі, а ребра — дороги, що їх з’єднують.

Приклад графа, в якому не існує циклу гамільтона.



Якщо в графі з n вершинами шукати цикл гамільтона шляхом перебирання, то складність такого алгоритму порядку $n!$