Лекція 27. Планарні графи.

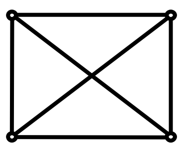
Плоскі та планарні графи

У багатьох випадках не має особливого значення, як зобразити граф у вигляді рисунка на площині (діаграми), оскільки ізоморфні графи подібні за своєю структурою і містять ту саму інформацію. Однак існують ситуації, коли необхідно, щоб зображення графа на площині задовольняло певні умови. Наприклад, якщо граф є моделлю деякої електронної схеми або транспортної мережі, де вершинами є окремі елементи схеми або станції, а ребрами, відповідно, – електричні провідники і шляхи, то бажано так розташувати ці ребра на площині, щоб уникнути перетинів.

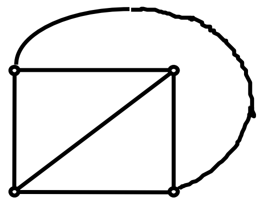
Таким чином виникає поняття плоского графа.

Граф називається плоским, якщо його можна зобразити на площині так, що лінії, які відповідають ребрам графа, не перетинаються (тобто мають спільні точки тільки у вершинах графа).

Граф називають планарним, якщо він ізоморфний деякому плоскому графу. Наприклад, граф, зображений на рис. 33а, планарний, оскільки він ізоморфний плоскому графу, зображеному на рис. 33б. Зокрема, будь-яке дерево є планарним графом. Про планарні графи кажуть, що вони укладаються на площині або мають плоске укладання.



а)



б)

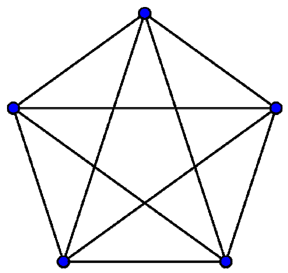
Рис. 33. Приклад планарного та плоского графа.

Критерій планарності

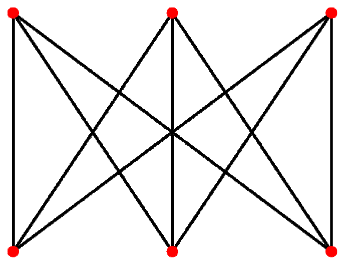
Далі розглянуто питання, як охарактеризувати планарні графи.

При вивченні вказаного питання особливе місце займають два специфічних графи. Перший з них – це повний граф з п’ятьма вершинами U_5, зображений на рис. 34а. Нагадаємо, що повні графи розглянуто в кінці лекції 18. Другий із графів – це повний двочастковий граф $K_{3,3}$, зображений на рис. 34б. Зауважимо, що двочасткові графи визначено в кінці лекції 21.

Як частина математичного фольклору кажуть про те, що повний двочастковий граф $K_{3,3}$ виникає із задачі про три хати і три криниці. Три хати – це три верхніх вершини на рис. 34б, а три криниці – це три нижніх вершини на цьому ж рисунку. Мешканці кожної з хат хочуть доступатися до кожної з криниць. Тому від кожної з верхніх вершин проведено по три ребра до кожної з нижніх вершин. Оскільки мешканці хат мають не дуже добрі стосунки між собою, то при подорожах до криниць вони не хотіли б зустрічатися між собою. Іншими словами, виникає запитання: чи не можна граф $K_{3,3}$ перемалювати без перетинів ребер, тобто чи є цей граф планарним ?



а)



б)

Рис. 34. Графи U_5 та $K_{3,3}$.

Таке ж питання можна поставити й стосовно графа U_5. Відповідь на ці запитання дає наведена далі теорема.

Теорема 12. Графи U_5 і $K_{3,3}$ не є планарними.

Значення графів U_5 і $K_{3,3}$ полягає в тому, що вони є єдиними суттєво непланарними графами. Усі інші непланарні графи містять у собі підграфи, які "подібні" до U_5 або $K_{3,3}$. Характер цієї подібності розкривається за допомогою таких понять.

Властивість планарності графа не порушується, якщо деяке ребро розбити на два введенням нової вершини степеня 2 (утворюється новий граф, у якому кількість вершин та ребер збільшується на 1) або замінити два ребра, інцидентних вершині степеня 2, одним ребром (кількість вершин і ребер зменшується на 1). Два графи називаємо гомеоморфними, якщо їх можна отримати з одного й того ж графа за допомогою операції введення в ребро вершини степеня 2.

На рис. 35 зображено три графи, які є попарно гомеоморфними між собою.

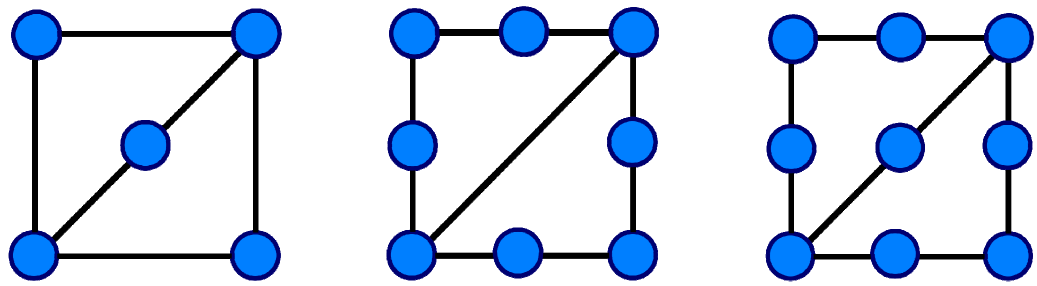


Рис. 35. Гомеоморфні графи.

Наступна теорема дає критерій планарності графів з використанням введеного поняття гомеоморфізму графів.

Теорема 13. Граф є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних U_5 або $K_{3,3}$.

Зауважимо, що в лекції 18 наведено низку повних графів. Графи U_1, U_2, U_3, U_4 є планарними. Повні графи з більшою кількістю вершин не є планарними, оскільки містять підграф U_5 і, отже, не задовольняють умову теореми 13.