МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

“ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з курсу “Дискретна математика”
для студентів першого бакалаврського рівня вищої освіти
спеціальності 123 “Комп’ютерна інженерія”

Затверджено
на засіданні кафедри
“Спеціалізовані комп’ютерні системи”
Протокол № 3 від 02.10.2018

Львів 2018

“ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА”. Методичні вказівки до практичних занять для студентів першого бакалаврського рівня вищої освіти спеціальності 123 “Комп’ютерна інженерія” / Укл. Попович Р.Б. – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2018. – 34 с.

Укладач: Попович Р. Б., д-р фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний за випуск: Дунець Р.Б., д-р техн. наук, проф.

Рецензент: Кочан Р.В., д-р техн. наук, проф.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні вказівки до практичних занять укладені відповідно до навчальної програми з дисципліни “Дискретна математика” та містять три розділи “Елементи теорії множин”, “Елементи абстрактної алгебри”, “Елементи теорії графів”.

Мета видання – допомогти студентам в активному і неформальному засвоєнні цих підрозділів дискретної математики. На початку кожного підрозділу спочатку в теоретичних відомостях наводяться означення та основні положення. Для полегшення засвоєння нових понять наводяться приклади, даються короткі коментарі до означень. До кожного розділу наведено приклади розв’язування типових задач, що дозволяє глибше зрозуміти та побачити як застосовується теоретичний матеріал. У кінці кожного підрозділу даються тести для самоперевірки та відповіді до них.

Метою проведення практичних занять є здобуття студентами знань та практичних навичок, необхідних для виконання розрахунково-графічної роботи. В результаті проведення практичних робіт

- студент повинен знати і володіти наступними поняттями: множина й операції над множинами; відображення та його властивості; відношення та його властивості; алгебра та властивості операції, заданої в алгебрі; відображення алгебр та їх властивості; графи та маршрути в них.
- студент повинен вміти: зображати множини за допомогою діаграм Ейлера; виконувати операції над множинами; задавати відображення; досліджувати їх властивості; задавати відношення; досліджувати їх властивості; задавати алгебри; досліджувати їх властивості; визначати тип алгебраїчної структури; вміти зображати задачі мовою графів; задавати графи; знаходити оптимальні маршрути в них.

1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Теоретичні відомості

Розглянемо дві множини A і B та введемо низку операцій над ними. Для графічної ілюстрації використовують діаграми (кола) Ейлера. При зображенні множини на площині креслять замкнену лінію із заштрихованою внутрішньою областю (найчастіше – це коло, звідси й назва відповідного інструмента, що широко застосовується в теорії множин).

Об’єднання A і B – множина, що складається з усіх елементів множини A, всіх елементів множини B і не містить ніяких інших елементів (рис. 1.1), тобто

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

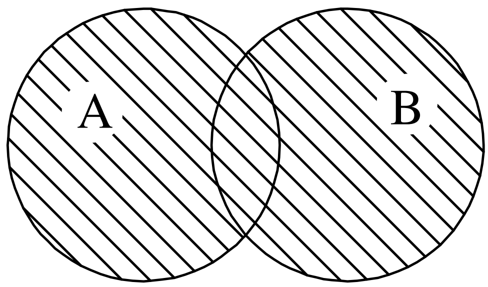


Рис. 1.1. Діаграма для об’єднання множин

Перетин A і B – множина, що складається з тих і тільки з тих елементів, які належать одночасно множині A та множині B (рис. 1.2), тобто

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

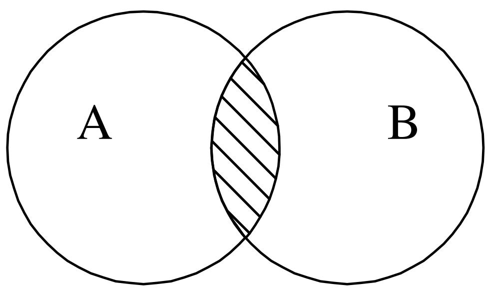


Рис. 1.2. Діаграма для перетину множин

Різниця A і B (відносне доповнення) – множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A й не належать множині B (рис. 1.3), тобто

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

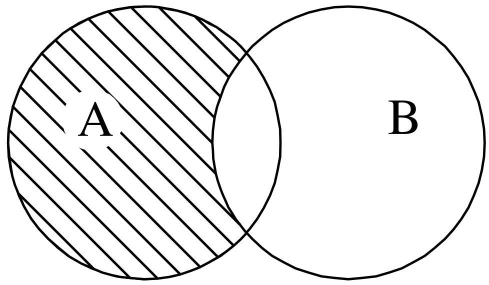


Рис. 1.3. Діаграма для різниці множин

Симетрична різниця A і B (диз’юнктивна сума) – множина, що складається усіх елементів A, які не належать множині B, й усіх елементів B, які не належать множині A, та яка не містить ніяких інших елементів (рис. 1.4), тобто

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \text{ і } x \notin B) \text{ або } (x \in B \text{ і } x \notin A)\}.$$

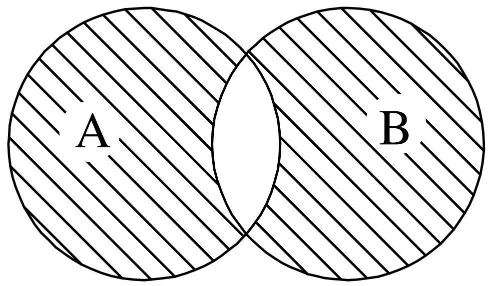


Рис. 1.4. Діаграма для диз’юнктивної суми множин

Очевидно, що $A \oplus B=(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Звичайно, вже в означенні конкретної множини явно або неявно обмежується сукупність об’єктів, що є допустимими (слони – серед тварин, натуральні числа – серед цілих або дійсних залежно від контексту). Зручно сукупність допустимих об’єктів зафіксувати явно та вважати, що множини, які розглядаються, складаються з елементів цієї сукупності. Її називають основною множиною (універсумом) і позначають U. Універсум U арифметики – числа, універсум U зоології – тварини і т.д. Будь-яку множину розглядатимемо у зв’язку з універсумом, який на діаграмах асоціюватимемо з прямокутником на площині, всередині якого зображатимемо множини (рис. 1.5).

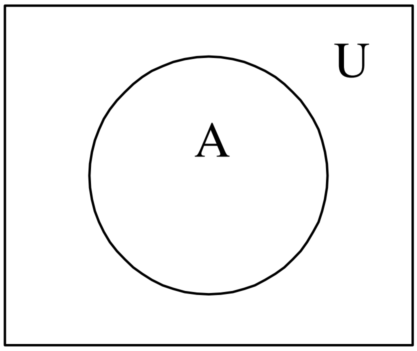


Рис. 1.5. Зображення універсуму на діаграмі

Доповнення множини A – це множина, що містить усі елементи універсуму, за винятком елементів A (рис. 1.6), тобто $\overline{A} = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$.

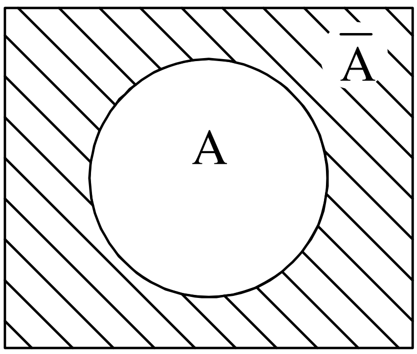


Рис.1.6. Діаграма для доповнення множини

Множина A називається підмножиною множини B, якщо кожен елемент A є елементом B. Для позначення цього факту вводиться знак $\subset$ - символ строгого включення (або $\subseteq$ - символ нестрогого включення) (рис. 1.7). Якщо необхідно підкреслити, що множина B містить також інші елементи, крім елементів множини A, то використовують символ строгого включення $A \subset B$.

Дві множини рівні, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів. Справджується таке: $A = B$ тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

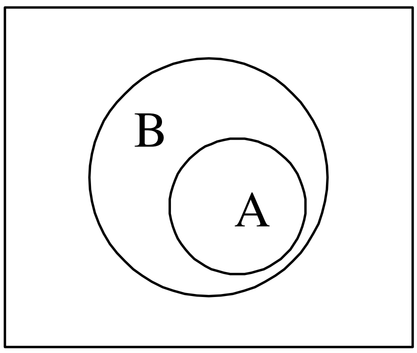


Рис. 1.7. Діаграма для включення множин

Множину, елементами якої є всі підмножини множини A, називають множиною підмножин множини A і позначають $P(A)$. Так, для множини $A = \{a, b, c\}$ маємо $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\},\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. У разі скінченної множини A з n елементів, множина підмножин $P(A)$ містить 2^n елементів.

Нехай задано дві множини X і Y. Відображення f з областю визначення X та областю значень Y кожному елементу x з множини X ставить у відповідність деякий (але єдиний) елемент $f(x)$ з множини Y. Елемент $f(x)$ називають образом елемента x при відображенні f. Символічно відображення записується наступним чином: $f : X \to Y$ чи $X \xrightarrow{f} Y$.

Відображення f множини X в множину Y називають ін'єктивним, чи ін'єкцією, якщо два різних елементи з X мають образами при відображенні f два різних елементи з Y.

Відображення f називають сюр'єктивним, чи сюр'єкцією, якщо кожен елемент з Y є образом при відображенні f принаймні одного елемента з X.

Відображення f називається бієктивним, чи бієкцією, якщо кожен елемент із Y є образом при відображенні f деякого, і при тому єдиного, елемента з X. Відображення бієктивне тоді і тільки тоді, коли воно одночасно ін'єктивне й сюр'єктивне.

Розглянемо декартовий добуток $к$-го степеня множини X: $X^к = X \times X \times ... \times X$. Довільну підмножину L множини $X^к$ ($L \subseteq X^к$) будемо називати $к$-арним відношенням, заданим на множині X. Вважатимемо, що впорядковані елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ знаходяться між собою у відношенні L, коли $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L$. Одномісні відношення, які ще називаються унарними, відповідають підмножинам множини X. Особливу увагу приділяють бінарним відношенням ($k = 2$), які для стислості будемо називати просто відношеннями, якщо не обумовлено іншого. Якщо на X задано відношення $L \subseteq X^2$, то запис $x\,L\,y$ означає, що x і y знаходяться у відношенні L, тобто $(x, y) \in L$.

Відношення L на множині X називається:

рефлективним, якщо довільний елемент множини знаходиться у відношенні сам з собою, тобто для будь-якого $x \in X$ виконується $x\,L\,x$. Прикладами рефлективних відношень можуть бути $\leq$, $\geq$, $=$ на множині натуральних чисел;

антирефлективним, якщо для будь-якого $x \in X$ пара (x, x) не належить до відношення L. Прикладами антирефлективних відношень можуть бути $<$, $>$, $\neq$ на множині раціональних чисел;

симетричним, якщо для довільних $x, y \in X$ з того, що $x\,L\,y$ випливає $y\,L\,x$;

антисиметричним, якщо для довільних $x, y \in X$ з того, що $x\,L\,y$ і $y\,L\,x$, випливає $x = y$ (наприклад, $\leq$ на множині натуральних чисел, тому що з $x \leq y$ і $y \leq x$ випливає $y = x$);

транзитивним, якщо для довільних $x, y, z \in X$ з того, що $x\,L\,x'$ і $x'\,R\,x''$, випливає $x\,L\,x''$ (наприклад, відношення $\subseteq$ на множині $P(X)$ всіх підмножин деякої множини X чи відношення $\leq$ на множині натуральних чисел).

1.2. Практичні заняття з теми „Елементи теорії множин”

Завдання 1. Задані початкові множини $A=\{1,3,7\}$, $B=\{1,5,9\}$. Знайти такі множини: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \oplus B$, $A \times B$, $B \times A$.

Розв’язування

a) $A \cup B=\{1,3,5,7,9\}$

b) $A \cap B=\{1\}$

c) $A \setminus B=\{3,7\}$

d) $B \setminus A=\{5,9\}$

e) $A \oplus B=\{3,5,7,9\}$

f) $A \times B=\{(1,1),(1,5),(1,9),(3,1),(3,5),(3,9),(7,1),(7,5),(7,9)\}$

g) $B \times A=\{(1,1),(1,3),(1,7),(5,1),(5,3),(5,7),(9,1),(9,3),(9,7)\}$

Завдання 2. Знайти доповнення множини $A=\{1,3,7\}$ до універсальної множини $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Розв’язування

$A = \{2,4,5,6,8,9,10\}$

Завдання 3. Задано початкову множину $A=\{1,3,7\}$. Записати множину $\mathrm{P}(A)$ підмножин початкової множини.

Розв’язування

$\mathrm{P}(A) = \{\varnothing,\{1\},\{3\},\{7\},\{1,3\},\{3,7\},\{1,7\},\{1,3,7\}\}$

Завдання 4. Задані початкові множини $A=\{1,3,7\}$, $B=\{1,5,9,13\}$, $C=\{3,5,7,11\}$. Знайти такі множини: $A \cap (B \cup C)$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$, $A \times (B \cup C)$.

Розв’язування

a) Оскільки $B \cup C=\{1,3,5,7,9,11,13\}$, то $A \cap (B \cup C)=\{1,3,7\}$.

b) Оскільки $A \setminus B=\{3,7\}$та $B \setminus C=\{1,9,13\}$, то $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)=\{1,3,7,9,13\}$.

c) Оскільки маємо $B \cup C$={1,3,5,7,9,11,13}, то $A \times (B \cup C)$={(1,1),(1,3),(1,7),(1,9),(1,13),(3,1),(3,3),(3,7),(3,9),(3,13), (7,1),(7,3),(7,7),(7,9),(7,13)}

Завдання 5. Використавши таблицю належності, з'ясувати чи є рівність $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ тотожністю для множин.

Розв'язування

Заповнимо таблицю належності для множин як показано в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

A	B	C	$A \cap B \cap C$	$\overline{A \cap B \cap C}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0

Порівнюємо стовпці належності пов'язані з множиною $\overline{A \cap B \cap C}$, яка є в лівій частині рівності, та з множиною $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$, яка є в правій частині рівності. Оскільки вказані стовпці співпадають, то рівність є тотожністю для множин.

Завдання 6. Використавши метод подвійного включення, довести, що рівність $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ є тотожністю для множин.

Розв'язування

Доведемо спочатку, що $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Для цього візьмемо будь-який елемент $x \in A \cup (B \cap C)$. Тоді за означенням операцій $\cup$ та $\cap$ маємо $x \in A$ або ($x \in B$ і $x \in C$). За законом дистрибутивності "або" відносно "і" ($x \in A$ або $x \in B$) і ($x \in A$ або $x \in C$), тобто $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$. Це рівносильно $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, що й треба було довести.

Доведемо тепер, що $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. Для цього візьмемо будь-який елемент $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Звідси ($x \in A$ або $x \in B$) і ($x \in A$ або $x \in C$). Це рівносильно $x \in A$ або ($x \in B$ і $x \in C$), тобто $x \in A \cup (B \cap C)$, що й потрібно було довести.

Таким чином, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Завдання 7. Використавши метод еквівалентних перетворень довести, що рівність $A \cap (B \oplus C) = = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ є тотожністю.

Розв'язування

Аналізуючи праву та ліву частину твердження можна інтуїтивно відчути, що перетворення правої частини тотожності до лівої буде простішим. Отже:

$$(A \cap B) \oplus (A \cap C) =$$

$$= ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap \overline{(A \cap B) \cup (A \cap C)} =$$

$$= (A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{(A \cap B)} \cup \overline{(A \cap C)}) = (A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cup \overline{C}) =$$

$$= (A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{A} \cup (\overline{B} \cup \overline{C}) =$$

$$((A \cap (B \cup C)) \cap \overline{A}) \cup ((A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) =$$

$$= \varnothing \cup ((A \cap (B \cup C)) \cap (A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}))) = (A \cap (B \cup C)) \cap (A \cap \overline{(B \cap C)}) =$$

$$= A \cap ((B \cup C) \cap \overline{(B \cap C)}) = A \cap (B \cup C) \setminus (B \cap C) =$$

$$= A \cap (B \oplus C).$$

Таким чином, тотожність доведено.

Завдання 8. Дослідити властивості (ін'єктивність, сюр'єктивність та бієктивніть) відображення $f : X \to Y$, де $X = Y = \mathbf{N}$, $f(x)$ = сума цифр числа (x).

Розв'язування

а) ін'єктивність. Візьмемо числа x_1, $x_2 \in X$, $x_1=12$, $x_2=21$. Тоді $f(x_1) = f(x_2) = 3$. Таким чином, $x_1 \neq x_2$, але $f(x_1) = f(x_2)$. Значить, задане відображення не є ін'єктивним;

б) сюр'єктивність. Візьмемо довільне число $y \in Y$. До множини X належить число $x = \underbrace{1...1}_{y \text{ разів}}$. Зрозуміло, що $f(x) = y$. Значить, відображення сюр'єктивне;

в) бієктивність. Оскільки задане відображення не ін'єктивне, то за означенням воно не є бієктивне.

Завдання 9. Дослідити властивості (ін'єктивність, сюр'єктивність та бієктивніть) відображення $f : X \to Y$, де X = { прямокутники }, $Y = \mathbf{R}^+$ - множина додатних дійсних чисел, $f(x)$ = площа (x).

Розв'язування

Введемо такі позначення. Довільний прямокутник x можна подати як впорядковану пару його сторін (a_x, b_x) де a_x та b_x – додатні дійсні числа. Тоді відображення $f(x)$ = площа (x) визначатиметься виразом $f(x) = s_x = a_x \cdot b_x$.

а) ін’єктивність. Оскільки два різні прямокутники зі сторонами (2,10) та (4,5) мають однакову площу 20, то відображення не ін’єктивне;

б) сюр’єктивність. Візьмемо довільне $y \in Y$. У множині X є прямокутник зі сторонами $(1, y)$, який має площу y. Значить, відображення сюр’єктивне;

в) бієктивність. Оскільки задане відображення не ін’єктивне, то за означенням воно не є бієктивне.

Завдання 10. Задане відношення $L \subseteq X \times X$, $X = \mathbf{N}$, $(x, y) \in L$, якщо $x^2 - y^2$ ділиться на число 3. Дослідити відношення на рефлективність, антирефлективність, симетричність, антисиметричність, транзитивність.

Розв’язування

Очевидно, що відношення є рефлективним, бо для довільних x вираз $x^2 - x^2$ завжди рівний нулю, а отже ділиться на 3. Оскільки L є рефлективне, то воно не може бути антирефлективним.

При аналізі на симетричність припустимо, що $(x, y) \in L$, і нехай $(x^2 - y^2) / 3 = z$. Тоді для (y, x), $(y^2 - x^2) / 3 = -z$, отже і $(y, x) \in L$. Звідси робимо висновок, що відношення L є симетричним, а отже воно не буде антисиметричним.

З умови належності пари (x, y) відношенню L випливає, що $x^2 - y^2$ ділиться на 3. Для того, щоб $(y, z) \in L$, необхідно, щоб $y^2 - z^2$ ділилося на 3. Тоді й сума цих чисел $(x^2 - y^2)+(y^2 - z^2)=x^2 - z^2$ ділиться на 3. Таким чином, умова транзитивності $x\, L\, y$ і $y\, L\, z \to x\, L\, z$ виконується.

Так як, досліджене відношення R є рефлективним, симетричним та транзитивним, то це є так зване відношення еквівалентності.

Завдання 11. Задане відношення $L \subseteq X \times X$, $X = \mathbf{Q}$, $(x, y) \in L$, якщо $| x - y | \leq 2007$. Дослідити відношення на рефлективність, антирефлективність, симетричність, антисиметричність, транзитивність.

Розв’язування

Відношення рефлективне, бо для будь-якого $x \in \boldsymbol{Q}$ виконується нерівність $| x - x | \leq 2007$. Відношення не є антирефлективним, бо скажімо для елемента $x=5 \in \mathbf{Q}$ нерівність $| x - x | \leq 2007$ виконується.

Відношення є симетричним, бо для довільних $x, y \in \boldsymbol{Q}$, з нерівності $| x - y | \leq 2007$ випливає нерівність $| y - x | \leq 2007$. Відношення не є антисиметричним, бо для різних елементів $x=7$ та $y=5$ з множини $\boldsymbol{Q}$ одночасно виконуються нерівності $| x - y | \leq 2007$ та $| y - x | \leq 2007$.

Відношення не є транзитивним, бо для елементів x=2010, y =1 та z=10 з множини $\boldsymbol{Q}$ нерівності $| x - y | \leq 2007$ та $| y - z | \leq 2007$ виконуються, а нерівність $| x - z | \leq 2007$ не виконується.

1.3. Тести для самоперевірки

1. Задано множину $\{x \mid x$ – ціле число та $x^2<16\}$. Яка з наведених далі множин дорівнює заданій множині ?

Можливі відповіді:

a) {0,1,2,3,4}　　b) {1,2,3,4}

c) {-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4}　　d) {-4,-3,-2,-1,0}

e) немає правильної відповіді

2. Задані початкові множини A ={1,3,7}, B ={1,5,9}. Яка з наведених далі множин дорівнює об'єднанню $A \cup B$ початкових множин ?

Можливі відповіді:

a) {3,5,7,9}　　b) {1,3,5,7,9}

c) {1,3,7,9}　　d) {1,5,7}

e) немає правильної відповіді

3. Задані початкові множини A ={1,3,7,11}, B ={1,5,7,9}. Яка з наведених далі множин дорівнює перетину $A \cap B$ початкових множин ?

Можливі відповіді:

a) {1,3,7}　　b) {1,7,9}

c) {1,3,7,9,11}　　d) {1,7}

e) немає правильної відповіді

4. Задані початкові множини A ={1,2,3,7}, B ={1,5,7,9,11}. Яка з наведених далі множин дорівнює різниці $A \setminus B$ початкових множин ?

Можливі відповіді:

a) {1,2,3}　　b) {2,3,7}

c) {2,3}　　d) {1,2,3,7}

e) немає правильної відповіді

5. Задані початкові множини A ={1,2,3,7}, B ={1,5,7,9,11}. Яка з наведених далі множин дорівнює різниці $B \setminus A$ початкових множин ?

Можливі відповіді:

a) {5,9,11}　　b) {1,5,9,11}

c) $\{1,5,7,9,11\}$ d) $\{5,7,9,11\}$

e) немає правильної відповіді

6. Задані початкові множини $A=\{1,3,7\}$, $B=\{1,5,9\}$. Яка з наведених далі множин дорівнює симетричній різниці (диз'юнктивній сумі) $A \oplus B$ початкових множин ?

Можливі відповіді:

a) $\{1\}$ b) $\{3,5,7,9\}$

c) $\{5,7,9\}$ d) $\{3,5,7\}$

e) немає правильної відповіді

7. Задані початкові множини $A=\{1,3,7\}$, $B=\{1,5,11\}$. Яка з наведених далі множин дорівнює добутку $A \times B$ початкових множин ?

Можливі відповіді:

a) $\{(1,1),(1,3),(1,7),(5,1),(5,3),(5,7),(11,1),(11,3),(11,7)$

b) $\{(3,1),(3,5),(3,11),(7,1),(7,5),(7,11)\}$

c) $\{(1,1),(1,5),(1,11),(3,3),(3,5),(3,11),(7,1),(7,5),(7,11)\}$

d) $\{(1,1),(1,5),(1,11),(3,1),(3,5),(3,11),(7,1),(7,5),(7,11)\}$

e) немає правильної відповіді

8. Задані початкові множини $A=\{1,3,7\}$, $B=\{1,5,11\}$. Яка з наведених далі множин дорівнює добутку $B \times A$ початкових множин ?

Можливі відповіді:

a) $\{(1,1),(1,3),(1,7),(5,1),(5,3),(5,7),(11,1)\}$

b) $\{(1,1),(1,3),(1,7),(5,1),(5,3),(5,7),(11,1),(11,3),(11,7)\}$

c) $\{(1,1),(1,5),(1,11),(3,1),(3,5),(3,11),(7,1),(7,5),(7,11)\}$

d) $(1,3),(1,7),(5,1),(5,3),(5,7),(11,1),(11,3),(11,7)\}$

e) немає правильної відповіді

9. Яка з наведених множин дорівнює доповненню множини $A=\{1,3,7\}$ до універсуму $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$?

Можливі відповіді:

a) $\{0,2,4,5,6,8,9\}$ b) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

c) $\{0,2,4,5,6,7,8,9\}$ d) $\{0,1,2,4,5,6,8,9\}$

e) немає правильної відповіді

10. Якій множині дорівнює множина всіх підмножин множини $A=\{3,5,7\}$?

Можливі відповіді:

a) $\{\{3\},\{5\},\{7\},\{3,5\},\{3,7\},\{5,7\},\{3,5,7\}\}$

b) $\{\varnothing,\{3\},\{5\},\{7\},\{3,5\},\{3,7\},\{5,7\}\}$

c) $\{\varnothing,\{3\},\{5\},\{7\},\{3,5\},\{3,7\},\{5,7\},\{3,5,7\}\}$

d) $\{\{3\},\{5\},\{7\}\}$

e) немає правильної відповіді

11. Скільки елементів у множині $\{a,\{a\}\}$?

Можливі відповіді:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

e) немає правильної відповіді

12. Яка з наведених далі рівностей для множин є тотожністю:

Можливі відповіді:

a) $A \cup B = A \cap B$ b) $A \setminus B = B \setminus A$

c) $A \times B = B \times A$ d) $A \cup B = B \cup A$

e) немає правильної відповіді

13. Задане відображення $f: X \to Y$, де $X = Y = \mathbf{N}$, $f(x)$ = добуток ненульових цифр числа (x). Воно є

Можливі відповіді:

a) ін'єктивне, сюр'єктивне

b) не ін'єктивне, сюр'єктивне

c) ін'єктивне, не сюр'єктивне

d) не ін'єктивне, не сюр'єктивне

e) немає правильної відповіді

14. Задане відношення $L \subseteq X \times X$, $X = \mathbf{Z}$, $(x, y) \in L$, якщо $2x+7y \le 2018$. Воно є

Можливі відповіді:

a) рефлективне, симетричне, транзитивне

b) не рефлективне, симетричне, транзитивне

c) рефлективне, не симетричне, транзитивне

d) рефлективне, симетричне, не транзитивне

e) немає правильної відповіді

1.4. Відповіді до тестових завдань „Елементи теорії множин"

1) c; 2) b; 3) d; 4) c; 5) a; 6) b; 7) d; 8) b; 9) a; 10) c; 11) b; 12) d; 13) d; 14) e.

2. ЕЛЕМЕНТИ АБСТРАКТНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Теоретичні відомості

Нехай X – довільна множина. n-арною операцією на множині X називається відображення f: $X^n \to X$, яке кожному вектору $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ ставить у відповідність однозначно визначений елемент $x \in X$. Це записується наступним чином: $x = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Таких операцій на множині X можна задати декілька. Множина операцій, заданих на X, називається його сигнатурою й позначається $F = (f_1, f_2, \ldots)$.

Множину X разом з її сигнатурою F називаємо алгеброю (алгебраїчною структурою) та позначаємо $A(X, F)$. Множина X – це так звана множина-носій алгебри.

Найбільш поширеними є бінарні операції, які далі будемо називати просто операціями. Бінарна операція (або закон композиції) на X – це довільне (але фіксоване) відображення f:$X^2 \to X$. Таким чином, будь-якій впорядкованій парі (x_1, x_2) елементів із X ставиться у відповідність однозначно визначений елемент $f(x_1, x_2)$ цієї ж множини X. Часто бінарну операцію позначають якимось спеціальним символом: T, $*$, $\circ$, $+$ та замість $f(x_1, x_2) = z$ записують $x\ T\ y = z$. Коли зрозуміло про що йдеться, символ операції може пропускатися.

Операція T називається асоціативною, якщо для будь-яких $x, y, z \in X$ виконується умова $(x\ T\ y)\ T\ z = x\ T\ (y\ T\ z)$.

Операція T називається комутативною, якщо для будь-яких $x, y \in X$ виконується умова $x\ T\ y = y\ T\ x$.

Операція T_1 називається дистрибутивною зліва відносно операції T_2, якщо для будь-яких $x, y, z \in X$ виконується умова $x\ T_1\ (y\ T_2\ z) = (x\ T_1\ y)\ T_2\ (x\ T_1\ z)$. Операція T_1 називається дистрибутивною справа відносно операції T_2, якщо для будь-яких $x, y, z \in X$ виконується умова $(y\ T_2\ z)\ T_1\ x = (x\ T_1\ y)\ T_2\ (x\ T_1\ z)$. Операція T_1 називається дистрибутивною відносно операції T_2, якщо вона одночасно є дистрибутивною зліва й справа.

Елемент e є нейтральним (одиничним) зліва відносно операції T, якщо для будь-якого $x \in X$ виконується $e\ T\ x = x$. Елемент e є нейтральним (одиничним) справа відносно операції T, якщо для будь-якого $x \in X$ має місце рівність $x\ T\ e = x$. Елемент e є нейтральним (одиничним) відносно операції T, якщо він є одночасно нейтральним зліва й справа, тобто для будь-якого $x \in X$ виконується $x\ T\ e = e\ T\ x = x$. Якщо нейтральний елемент існує, то він є єдиним: дійсно, коли $e_1 \neq e_2$, то з $e_1 = e_1\ T\ e_2 = e_2$ отримуємо суперечність.

Елемент x^{-1} називається оберненим зліва до елемента $x \in X$ відносно операції T, коли $x^{-1}\,T\,x = e$. Елемент x^{-1} називається оберненим справа до елемента $x \in X$ відносно операції T, коли $x\,T\,x^{-1} = e$. Елемент x^{-1} називається оберненим до елемента $x \in X$ відносно операції T, коли він є одночасно оберненим зліва й справа, тобто $x^{-1}\,T\,x = x\,T\,x^{-1} = e$.

У випадку, коли алгебраїчна структура має скінченне число елементів, можна для кожної заданої на ній бінарної операції будувати так звану таблицю Келі, яка повністю описує дану операцію. Число рядків і стовпців таблиці рівне числу елементів алгебри, а на перетині рядка й стовпця записується результат виконання операції над відповідними цим рядку й стовпцю двома елементами. Побудова таблиці Келі для операції T алгебри показана в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

T	a_1	a_2	…	a_n
a_1	a_1Ta_1	a_1Ta_2	…	a_1Ta_n
a_2	a_2Ta_1	a_2Ta_2	…	a_2Ta_n
…	…	…	…	…
a_n	a_nTa_1	a_nTa_2	…	a_nTa_n

2.2. Практичні заняття з теми „Елементи абстрактної алгебри”

Завдання 1. Задано алгебру $\mathrm{A}(M,\times)$, де $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 17^k \end{pmatrix} \middle| a \in \mathrm{N}, k \in Z \right\}$, $\times$ – операція множення матриць. Проаналізувати властивості операції в цій алгебрі.

Розв’язування

Спочатку перевіряємо чи множина M замкнена відносно заданої операції. Візьмемо будь-які два елементи множини M (а значить довільні $a, b \in \mathrm{N}$ та $k, l \in \mathrm{Z}$) і виконаємо над ними операцію множення. У результаті отримуємо

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 17^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 17^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 17^{k+l} \end{pmatrix}.$$

Оскільки множина натуральних чисел замкнена відносно множення (тобто $ab \in \mathrm{N}$), а множина цілих чисел замкнена відносно операції додавання (тобто $k + l \in \mathrm{Z}$), то множина M замкнена відносно заданої операції множення $\times$.

Оскільки множення натуральних чисел комутативне й додавання цілих чисел комутативне, то

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 17^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 17^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 17^l \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 17^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 17^{k+l} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, задана на множині M операція множення є комутативною. Зауважимо, що множення довільних матриць з дійсними елементами не є комутативним, як показує такий приклад:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Так як множення натуральних чисел асоціативне й додавання цілих чисел асоціативне, то для будь-яких трьох елементів множини M (тобто довільних $a, b, c \in \mathrm{N}$ та $k, l, m \in \mathrm{Z}$) справедливі рівності

$$\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 17^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 17^l \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 17^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 17^k \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 17^l \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 17^m \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} abc & 0 \\ 0 & 17^{k+l+m} \end{pmatrix}.$$

Отже, задана на множині M операція є асоціативною. Як альтернативний варіант, можна зауважити, що множення довільних матриць з дійсними елементами є асоціативним.

Оскільки $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 17^0 \end{pmatrix} \in M$ (бо $1 \in \mathrm{N}$ та $0 \in \mathrm{Z}$) та для довільного елемента з множини M виконується рівність

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 17^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 17^k \end{pmatrix},$$

то елемент $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ є нейтральним зліва. Так як операція комутативна, то він одночасно нейтральний справа, тобто двосторонній нейтральний елемент.

Дослідимо, які елементи мають обернені. Для цього візьмемо довільний елемент $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 17^k \end{pmatrix}$ та будемо підбирати для нього обернений $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 17^l \end{pmatrix}$, тобто такий, щоб виконувалась рівність

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 17^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 17^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

З неї випливає, що $l = -k$ та $ab = 1$. Так як a та b - натуральні числа, то остання рівність можлива лише при $a = b = 1$. Отже, обернений існує лише для елементів вигляду $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 17^k \end{pmatrix}$ і дорівнює $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 17^{-k} \end{pmatrix}$. Слід зауважити, що коли k - ціле число, то й $-k$ також ціле число. Також варто підкреслити, що пошук оберненого елемента, використовуючи правило пошуку оберненої матриці, дав би той самий результат, але був би занадто громіздким.

Завдання 2. Алгебра складається з усіх відображень множини {1,2} в себе: $a=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $d=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Операцією є композиція ○ відображень. Скласти таблицю Келі та дослідити властивості операції в цій алгебрі.

Розв'язування

Таблиця Келі для операції ○ в заданій алгебрі показана в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

○	*a*	*b*	*c*	*d*
a	*a*	*b*	*a*	*b*
b	*a*	*b*	*b*	*a*
c	*a*	*b*	*c*	*d*
d	*a*	*b*	*d*	*c*

Виходячи із складеної таблиці, бачимо, що у всіх її клітинках є лише елементи множини M. Таким чином, множина M замкнена відносно заданої операції.

Перевірку асоціативності операції можна виконати безпосередніми обчисленнями. Для цього слід розглянути 64 варіанти. Дійсно, перевіряємо справедливість рівності $(x○y)○z=x○(y○z)$, де $x,y,z\in X=\{a, b, c, d\}$. Як альтернатива безпосередній первірці, можна скористатися відомим фактом, що композиція відображень є асоціативною. Отже, алгебра $A = (X; ○\}$ є півгрупою.

У півгрупі A є одиничний (нейтральний) елемент рівний c, оскільки $\forall x\in X,\ x○c=c○x=x$. Отже, півгрупа A є моноїдом. Оскільки $a○b=b$, а $b○a=a$, то операція не є комутативною, й моноїд не є абелевим.

Завдання 3. Перевірити, чи утворює групу множина R^+ додатніх дійсних чисел з операцією T, якщо операція задається так: $a\,T\,b=a^2b^4$.

Розв'язування

Для того, щоб алгебра була групою, зокрема необхідно, щоб в алгебрі існував двосторонній нейтральний елемент. Умовою існування нейтрального елемента e є $\forall x\in R^+,\ e\,T\,x=x\,T\,e=x$. Нехай e_1 –лівий, а e_2 –правий нейтральний елементи. Тоді $e_1\,T\,x=(e_1)^2x^4=x$, звідси $e_1=x^{-3/2}$. Разом з тим $x\,T\,e_2=x^2(e_2)^4=x$ і $e_2=x^{-1/4}$. Як бачимо $e_2\neq e_1$. Таким чином, нейтрального елемента не існує, і тому задана алгебра не є групою.

Завдання 4. Задані група всіх дійсних чисел відносно операції додавання $(R, +)$ та група додатних дійсних чисел відносно операції множення $(R^+, \cdot)$.

Також задане відображення $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}^+$, $f(x)=3^x$. Дослідити властивості цього відображення (чи це відображення є гомоморфізмом, епіморфізмом, мономорфізмом, ізоморфізмом груп).

Розв'язування

Так як для будь-яких елементів $x, y \in \mathrm{R}$ виконується

$$f(x+y)=3^{x+y}=3^x \cdot 3^y=f(x) \cdot f(y),$$

то відображення f є гомоморфізмом груп.

Оскільки функція 3^x монотонно зростаюча, то відображення є ін'єктивним, тобто мономорфізмом груп. Так як при фіксованому $y \in \mathrm{R}^+$ рівняння $3^x=y$ має розв'язок, то відображення є сюр'єктивним, тобто епіморфізмом груп. Отже, відображення є бієктивним, тобто ізоморфізмом груп.

Завдання 5. Показати, що група додатних дійсних чисел відносно операції множення $(\mathrm{R}^+, \cdot)$ ізоморфна групі дійсних чисел відносно операції додавання $(\mathrm{R}, +)$.

Розв'язування

Для доведення ізоморфізму можна використати наступне бієктивне відображення $ln : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}$, яке зберігає групову операцію: $ln(a \cdot b) = ln(a) + ln(b)$.

Завдання 6. Довести, що множина всіх чисел виду $a + b\sqrt{3}$ (a та b – цілі числа), які додаються та множаться як звичайні дійсні числа, є кільцем.

Розв'язування

Справді, замкнутість цієї множини відносно операцій додавання та множення випливає зі співвідношень

$$(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = (a + b) + (c + d)\sqrt{3}$$

та

$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}.$$

Таким чином, наведені операції є дійсно бінарними операціями на заданій множині.

Перевіримо спочатку, що задана множина з операцією додавання є абелевою групою. Оскільки числа виду $a + b\sqrt{3}$ є частковим випадком дійсних чисел, то операція їх додавання є асоціативною й комутативною. Нейтральним елементом відносно додавання, очевидно, є елемент $0 + 0\sqrt{3}$. Оберненим для елемента $a + b\sqrt{3}$ відносно операції додавання є елемент $-a - b\sqrt{3}$.

Числа виду $a + b\sqrt{3}$ є частковим випадком дійсних чисел. Тому й операція їх множення є асоціативною. Значить, вказана множина відносно заданої операції множення є півгрупою.

Як згадувалося раніше, операції множення та додавання на заданій множині є операціями над дійсними числами. Тому вказана операція множення є дистрибутивною відносно операції додавання.

Отже множина всіх чисел виду $a+b\sqrt{3}$ (a та b – цілі числа), які додаються та множаться як звичайні дійсні числа, є кільцем.

Зауважимо, що це кільце не є полем, бо не існує нейтрального елемента відносно операції множення, як показують наступні міркування. Нехай $e_a+e_b\sqrt{3}$ - нейтральний елемент відносно операції множення. Тоді повинна виконуватися рівність $(e_a+e_b\sqrt{3})\sqrt{3}=\sqrt{3}$, тобто $3e_b=(1-e_a)\sqrt{3}$. Як бачимо зліва стоїть ціле число, а справа – ірраціональне. Ми отримали суперечність.

Завдання 7. Задано алгебру A(M,×), де $M=\{a+bi \mid a,b\in Z, i^2=-1\}$ – множина цілих гауссових чисел, × – операція множення цих чисел. Проаналізувати властивості операції в цій алгебрі.

Розв'язування

Справді, замкнутість цієї множини відносно операцій множення випливає зі співвідношення

$$(a+bi)(c+di)=(ac - bd)+(ad+bc)i.$$

Таким чином, наведена операція є дійсно бінарною операцією на заданій множині.

Оскільки $ac - bd = ca - db$ та $ad + bc = da + cb$, то операція множення цілих гауссових чисел є комутативною. Як альтернативний варіант, можна зауважити, що множення довільних комплексних чисел є комутативним.

Оскільки множення довільних комплексних чисел є асоціативним, то, зокрема, множення цілих гауссових чисел є асоціативним.

Оскільки $1=1+0\cdot i$ належить до множини M, то 1 є двостороннім нейтральним елементом.

Дослідимо, які елементи мають обернені. Для цього візьмемо довільний елемент $a+bi$ та будемо підбирати для нього обернений $c+di$, тобто такий, щоб виконувалась рівність

$$(a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i=1+0\cdot i,$$

тобто

$$ac - bd=1 \text{ та } ad + bc=0.$$

Маємо систему з 2 лінійних рівнянь з двома невідомими c, d, яку треба розв'язати.

Як альтернативний варіант зауважуємо, що $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$. Тоді

$$(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i\right)=1.$$

Виходячи з цього, маємо. що лише при a=±1, b=0 або a=0, b=±1 елемент $a+bi$ має обернений.

Завдання 8. Задано алгебру A(M,×), де

$$M = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in R, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

множина кватерніонів, × – операція множення кватерніонів. Зауважимо, що ij=-ji=k, jk=-kj=i, ki=-ik=j. Проаналізувати властивості операції в цій алгебрі.

Розв'язування

Використовуючи наведені рівності, можна показати, що множина M замкнена відносно множення.

Оскільки ij=-ji, то операція множення кватерніонів не є комутативною.

Операція множення кватерніонів є асоціативною.

Так як $1=1+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k$ належить до множини M, то 1 є двостороннім нейтральним елементом.

Дослідимо, які елементи мають обернений. Зауважимо, що виконується рівність

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 .$$

Введемо позначення $H = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Тоді при H≠0 отримуємо

$$(a + bi + cj + dk)\left(\frac{a}{H} - \frac{b}{H}i - \frac{c}{H}j - \frac{d}{H}k\right) = 1 .$$

Виходячи з цього, всі кватерніони, крім $0 = 0 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$, мають двосторонній обернений елемент.

2.3. Тести для самоперевірки

1. Яка множина є групою відносно операції множення ?

Можливі відповіді:

a) множина цілих чисел

b) множина парних цілих чисел

c) множина невід'ємних дійсних чисел

d) множина додатних раціональних чисел

e) немає правильної відповіді

2. Нехай S_3 – група підстановок з 3 елементів. Позначимо елементи цієї групи S_3 так: $e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $d=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$. Яка множина є підгрупою групи S_3 ?

Можливі відповіді:

a) $\{e,c,d\}$ b) $\{e,b,a\}$ c) $\{e,d,a\}$ d) $\{e,f,b\}$

e) немає правильної відповіді

3. Нехай S_3 – група підстановок з 3 елементів. Порядок елемента a дорівнює:

Можливі відповіді:

a) 1 c) 4 b) 2 d) 6 e) немає правильної відповіді

4. Яка множина не є кільцем відносно операцій додавання та множення?

Можливі відповіді:

a) множина натуральних чисел
b) множина цілих чисел
c) множина раціональних чисел
d) множина дійсних чисел
e) немає правильної відповіді

5. Яка множина є полем відносно операцій додавання та множення?

Можливі відповіді:

a) множина натуральних чисел
b) множина парних цілих чисел
c) множина цілих чисел
d) множина раціональних чисел
e) немає правильної відповіді

6. Який поліном є нерозкладним над скінченним полем F_2 з двох елементів ?

Можливі відповіді:

a) x^2+x+1 b) x^2+1 c) x^2+x d) x^2

e) немає правильної відповіді

7. Задано алгебри $A(M;\oplus)$, $B(K;\text{XOR})$, де M - множина всіх підмножин множини $\{1,2,3\}$, $K=\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$, $\oplus$ - операція диз’юнктивної суми, XOR - операція побітового додавання за модулем 2, та

відображення $f : M \to K$, де $f(X) = (y_1\, y_2\, y_3)_2$, $y_i = \begin{cases} 0, & i \notin X \\ 1, & i \in X \end{cases}$. Задане відображення є:

Можливі відповіді:

a) тільки гомоморфізмом

b) мономорфізмом, але не епіморфізмом

c) епіморфізмом, але не мономорфізмом

d) ізоморфізмом

e) немає правильної відповіді

2.4. Відповіді до тестових завдань „Елементи абстрактної алгебри”

1) d; 2) c; 3) e; 4) a; 5) d; 6) a; 7) d.

3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

3.1. Теоретичні відомості

Нехай G - неорієнтований граф. Маршрутом в G називається скінченна або нескінченна послідовність ребер $S = \{\ldots, e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ в якій кожні два сусідні ребра e_{i-1} і e_i мають спільну вершину.

Якщо початкова й кінцева вершини маршруту співпадають, то маршрут називається циклічним.

Ланцюг – це маршрут, кожне ребро якого зустрічається рівно один раз. Циклічний ланцюг називається циклом.

Нециклічний ланцюг називається простим, якщо в ньому жодна вершина не повторюється. Цикл з початком (і кінцем) у вершині v_0 називається простим, якщо в ньому жодна вершина, крім v_0, не повторюється.

Дві вершини „a" і „b" графу G називаються зв'язаними, якщо існує маршрут $S(a, b)$.

Якщо в $S(a, b)$ деяка вершина v_i повторюється більше одного разу, то відкидаючи циклічну ділянку $S(v_i, v_i)$, отримаємо новий маршрут $S'(a, b)$, в якому вершина v_i зустрічається тільки один раз. Повторюючи цю процедуру для всіх таких вершин v_i, приходимо до висновку: якщо дві вершини в графі можуть бути зв'язані маршрутом, то існує і простий ланцюг, який зв'язує ті ж вершини.

Граф G називається зв'язаним, якщо зв'язана будь-яка його пара вершин.

Ейлером була сформульована така задача: в яких випадках у скінченному неорієнтованому графі можна знайти такий цикл, у якому кожне ребро графу зустрічалось би рівно один раз. Якщо такий цикл існує, то він називається ейлеровим циклом, а сам граф називається ейлеровим.

Зв'язний граф G є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли степені всіх його вершин парні.

3.2. Практичні заняття з теми „Елементи теорії графів"

Завдання 1. Для заданого неорієнтованого графа (рис. 3.1) записати матрицю суміжності вершин та матрицю суміжності ребер.

Розв'язування

Відповідна матриця суміжності вершин наведена в табл. 3.1, а матриця суміжності ребер – в табл.3.2.

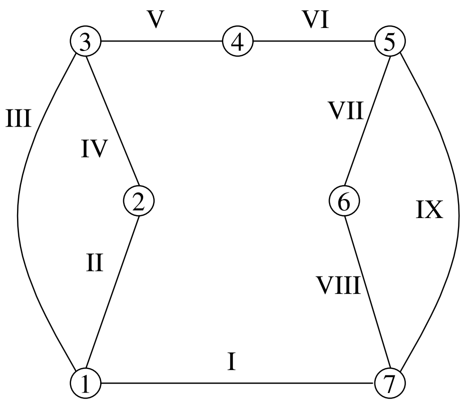


Рис. 3.1. Заданий граф

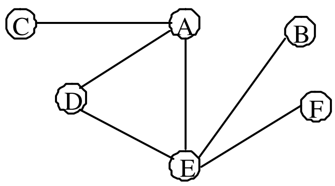
Таблиця 3.1

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	0	0
3	1	1	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	1	0	1
7	1	0	0	0	1	1	0

Таблиця 3.2

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I	0	1	1	0	0	0	0	1	1
II	1	0	1	1	0	0	0	0	0
III	1	1	0	1	1	0	0	0	0
IV	0	1	1	0	1	0	0	0	0
V	0	0	1	1	0	1	0	0	0
VI	0	0	0	0	1	0	1	0	1
VII	0	0	0	0	0	1	0	1	1
VIII	1	0	0	0	0	0	1	0	1
IX	1	0	0	0	0	1	1	1	0

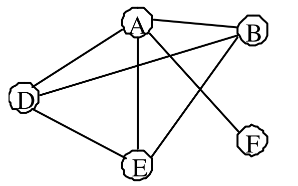
Завдання 2. Чи є наведений далі граф зв’язаним ?



Розв’язування

Заданий граф є зв’язаним, бо для будь-якої пари його вершин існує маршрут з однієї вершини в іншу.

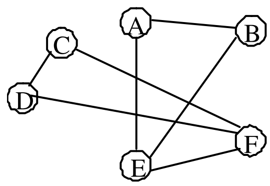
Завдання 3. Чи є маршрут $S = \{(B,E), (E,A), (A,D), (D,E), (E,B), (B,A), (A,F)\}$ на наведеному далі графі ланцюгом (простим ланцюгом, ейлеровим циклом) ?



Розв'язування

Маршрут не є ланцюгом, бо в ньому ребро (B,E) повторюється два рази. Маршрут не є простим ланцюгом, бо він не є навіть ланцюгом. Маршрут не є ейлеровим циклом, бо в ньому не зустрічається ребро (B,D).

Завдання 4. Який максимальний степінь вершин наведеного далі графа ?



Розв'язування

Максимальний степінь дорівнює 3 для вершин E та F.

Завдання 5. Задано скінченний неорієнтований граф (рис. 3.2). Знайти для нього розв'язок узагальненої задачі Ейлера.

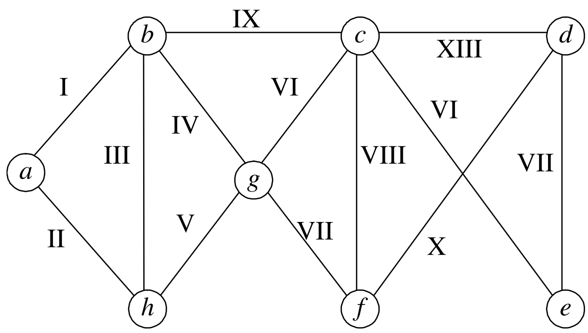


Рис. 3.2. Початковий граф

Розв'язування

Далі виписано степені вершин початкового графа:

Вершина	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
Степінь	2	4	5	3	2	3	4	3

Оскільки є 4 вершини з непарним степенем, то $k = 4$. Це означає, що розв’язок узагальненої задачі Ейлера складатиметься з 2 ланцюгів. Попарно з’єднаємо ребрами вершини з непарним степенем: (c, d) та (f, h) (на рис. 3.3 ці ребра позначені штриховими лініями).

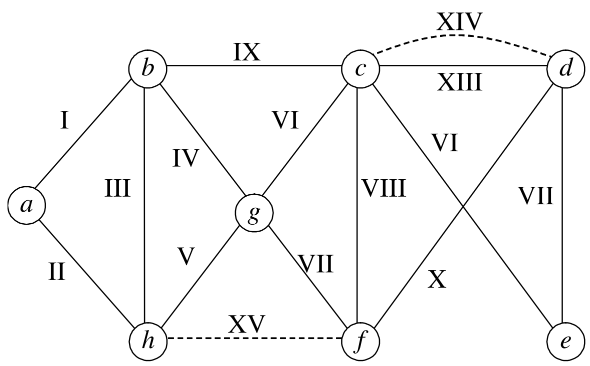
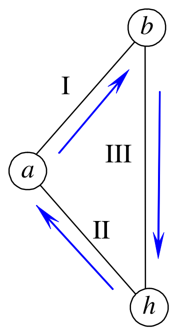
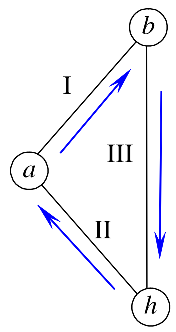


Рис. 3.3. Видозмінений граф

Отриманий після введення двох додаткових ребер граф є ейлеровим. Покроково збудуємо для утвореного графу ейлеровий цикл. На i-ому кроці спочатку утворюємо ланцюг P_i з початком і кінцем у певній вершині (тобто такий ланцюг є циклом). Після цього утворюємо цикл Q_i об’єднанням циклу P_i, отриманого на даному кроці, та циклу $Q_{i\text{-}1}$, отриманого на попередньому кроці. Графічна ілюстрація цієї побудови, яка включає п’ять кроків (i=1, 2, 3, 4, 5), дається далі.

1. Будуємо ланцюг P_1 з початком у вершині “a”:

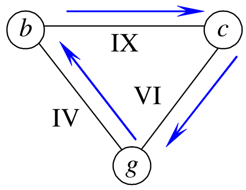


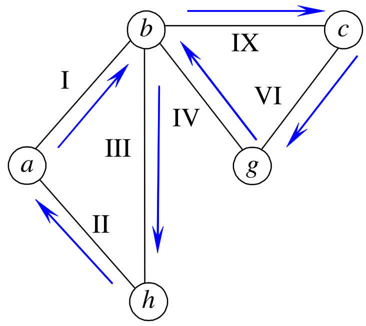


P_1 = (I, III, II)

Q_1 = (I, III, II)

2. Будуємо ланцюг P_2 з початком у вершині “b”:

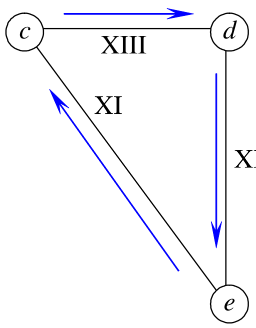


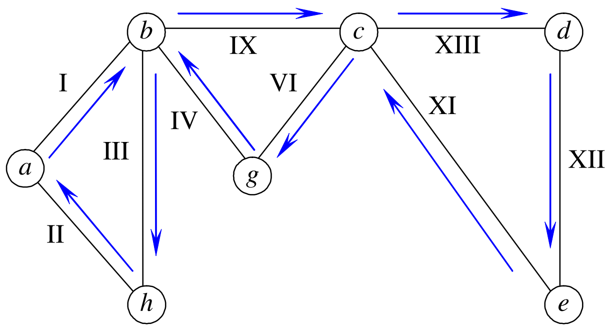


P_2 = (IX, VI, IV)

Q_2 = (I, IX, VI, IV, III, II)

3. Будуємо ланцюг P_3 з початком у вершині “c”:

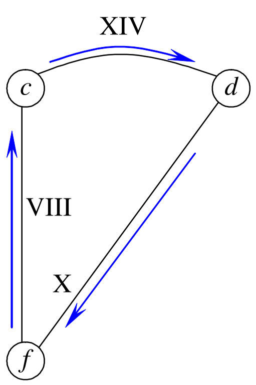


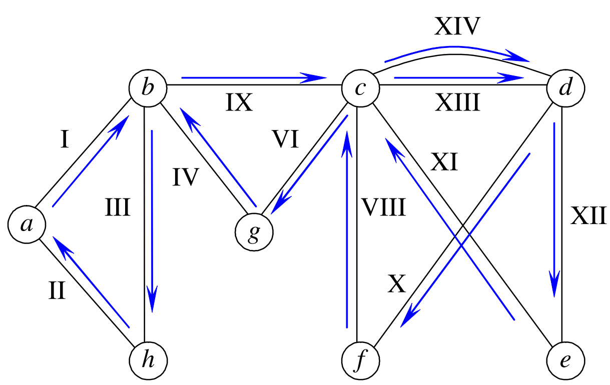


P_3 = (XIII, XII, XI)

Q_3 = (I, IX, XIII, XII, XI, VI, IV, III, II)

4. Будуємо ланцюг P_4 з початком у вершині “c”:

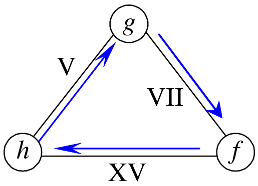


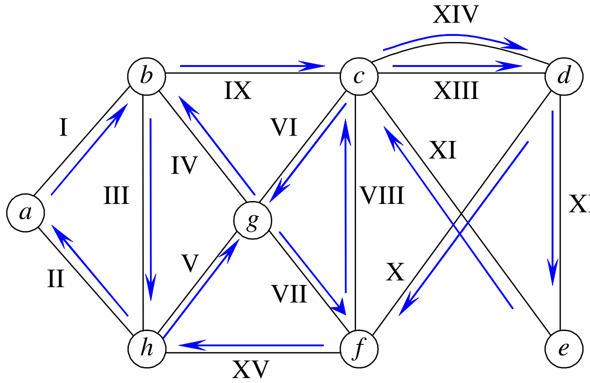


P_4 = (XIV, X, VIII)

Q_4 = (I, IX, XIV, X, VIII, XIII, XII, XI, VI, IV, III, II)

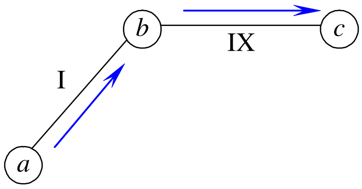
5. Будуємо ланцюг P_5 з початком у вершині “g”:

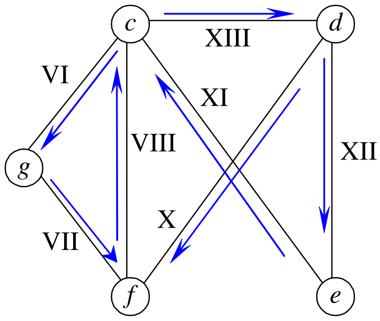


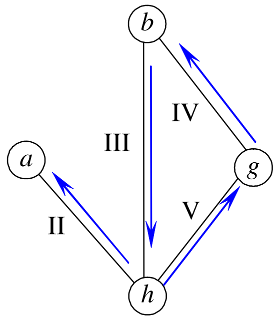


P_5 = (VII, XV, V) Q_5 = (I,IX,XIV,X,VIII,XIII,XII,XI,VI,VII,XV,V,IV,III,II)

Витираючи в ланцюгу Q_5 додані раніше ребра XIV і XV, отримаємо три ланцюги R_1, R_2, R_3.

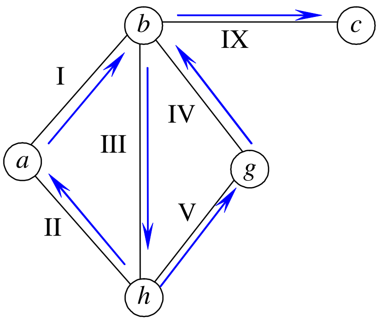


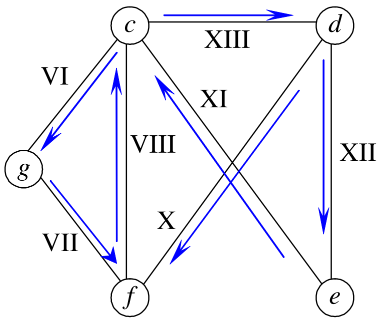




R_1=(I, IX) R_2=(X, VIII, XIII, XII, XI, VI, VII) R_3=(V, IV, III, II)

Зауважимо, що ланцюги R_1 і R_3 мають спільний кінець – вершину „*a*”. „Склеюючи” ці ланцюги, отримаємо остаточно розв’язок узагальненої задачі Ейлера з двох ланцюгів: S_1 та S_2.





S_1=(V, IV, III, II, I, IX) S_2=(X, VIII, XIII, XII, XI, VI, VII)

3.3. Тести для самоперевірки

1. Якщо графи ізоморфні, то що можна сказати про їх матриці суміжності після відповідної перенумерації вершин другого графа ?

Можливі відповіді:

a) матриці суміжності нульові

b) матриці суміжності не існують

c) матриці суміжності рівні

d) матриці суміжності не рівні

e) немає правильної відповіді

2. Під планарним графом розуміємо:

Можливі відповіді:

a) граф в тривимірному просторі

b) граф на площині

c) граф без циклів

d) граф у багатовимірному просторі

e) немає правильної відповіді

3. Під простим циклом розуміємо:

Можливі відповіді:

a) маршрут

b) циклічний ланцюг

c) циклічний ланцюг, у якому всі вершини крім початкової й кінцевої не повторюються

d) ланцюг

e) немає правильної відповіді

4. Граф, у якому довільна пара вершин зв'язана, називаємо:

Можливі відповіді:

a) гамільтоновим

b) ейлеровим

c) зв'язаним

d) планарним

e) немає правильної відповіді

5. Якщо в скінченному неорієнтованому графі існує цикл, в якому зустрічається кожне ребро графа (і рівно один раз), то такий цикл називають:

Можливі відповіді:

a) елементарним

b) простим

c) ейлеровим

d) гамільтоновим

e) немає правильної відповіді

6. Скінченний неорієнтований граф є ейлеровим у тому і лише в тому випадку, якщо він:

Можливі відповіді:

a) зв'язаний

b) степені всіх його вершин парні

c) не зв'язаний

d) зв'язаний і степені всіх його вершин парні

e) немає правильної відповіді

7. Для довільного скінченного зв'язаного графа G циклічний ранг $\gamma(G)$:

Можливі відповіді:

a) $\gamma(G) = 1$

b) $\gamma(G) = 0$

c) $\gamma(G) < 0$

d) $\gamma(G) \geq 0$

e) немає правильної відповіді

8. Під деревом розуміємо:

Можливі відповіді:

a) зв'язаний граф з циклами

b) зв'язаний граф без циклів

c) незв'язаний граф без циклів

d) зв'язаний граф із додатним циклічним рангом

e) немає правильної відповіді

3.3. Відповіді до тестових завдань „Елементи теорії графів"

1) c; 2) b; 3) c; 4) c; 5) c; 6) d; 7) d; 8) b.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андрійчук В.І., Комарницький М.Я., Іщук Ю.Б. Вступ до дискретної математики – Львів: Видавничий центр ЛНУ, 2003.– 254с.
2. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика: Підручник – К.: Вища школа, 2002. – 287с.
3. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник – Харків: Компанія СМІТ, 2004. – 480с.
4. Ємець В., Мельник А., Попович Р. Сучасна криптографія: основні поняття – Львів, БаК, 2003.- 144 с.
5. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики: Підручник – К.: Наукова думка, 2002. – 568с.
6. Манзій О. С., Тесак І. Є., Кавалець І. І., Чарковська Н. В. Дискретна математика. Практикум: Навчальний посібник – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2016. – 212 с.
7. Матвієнко М. П. Дискретна математика: Підручник. Вид. 2-ге перероб. і доп. – Київ: Видавництво Ліра-К, 2017. – 324 с.
8. Нікольський Ю.І., Пасічник В.А., Щербина Ю.Р. Дискретна математика: Підручник – Київ: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.
9. Стрелковська І.В., Буслаєв А.Г., Харсун О.М., Пашкова Т.Л., Баранов М.І., Григор'єва Т.І., Вишневська В.М., Кольцова Л.Л. Дискретна математика: Навч. посіб. – Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2010. –196 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з курсу “Дискретна математика” для студентів першого бакалаврського рівня вищої освіти спеціальності 123 “Комп’ютерна інженерія”.

Укладач Попович Роман Богданович

Редактор
Комп’ютерне складання

Здано у видавництво…….. Підписано до друку……….

Формат 70х100/16. Папір офсетний. Друк на різографі.

Умовн. друк. арк. ….. Обл.-вид. арк. ……

Наклад ……. прим. Зам. …….

Видавництво Національного університету "Львівська політехніка"

Поліграфічний центр
Видавництва Національного університету "Львівська політехніка"

вул. Ф.Колеси, 2, 79000, Львів