Зразок виконання типових завдань розрахунково-графічної роботи

Завдання 1. Знайти матрицю :

$$C=(AB^T+3E)B,\ \text{якщо}\ A=\begin{pmatrix}4&2\\3&1\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-2\\0&3\\2&2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо матрицю B^T, транспоновану до матриці B:

$$B^T=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&3&2\end{pmatrix}.$$

Добуток матриць A і B^T визначений, оскільки кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B^T, і результатом цього добутку буде матриця розміру 3×3 (порядку 3). Тоді $3E$ – одинична матриця порядку 3. Знаходимо матриці AB^T і $3E$:

$$AB^T=\begin{pmatrix}4&2\\3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot1+2\cdot(-2)&4\cdot0+2\cdot3&4\cdot2+2\cdot2\\3\cdot1+1\cdot(-2)&3\cdot0+1\cdot3&3\cdot2+1\cdot2\\2\cdot1+1\cdot(-2)&2\cdot0+1\cdot3&2\cdot2+1\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&6&12\\1&3&8\\0&3&6\end{pmatrix},\qquad 3E=3\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Додамо матриці AB^T і $3E$ поелементно:

$$AB^T+3E=\begin{pmatrix}0&6&12\\1&3&8\\0&3&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6&12\\1&6&8\\0&3&9\end{pmatrix}.$$

Обчислимо матрицю C, яка є добутком матриць AB^T+3E і B. Останній добуток матриць визначений. Маємо

$$C=(AB^T+3E)B=\begin{pmatrix}3&6&12\\1&6&8\\0&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&3\\2&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot1+6\cdot0+12\cdot2&3\cdot(-2)+6\cdot3+12\cdot2\\1\cdot1+6\cdot0+8\cdot2&1\cdot(-2)+6\cdot3+8\cdot2\\0\cdot1+3\cdot0+9\cdot2&0\cdot(-2)+3\cdot3+9\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27&36\\17&32\\18&27\end{pmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити визначники

а) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 7 & 6 & -9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. а) Обчислимо визначник третього порядку, користуючись правилом трикутників, схема якого подана на рис. 1

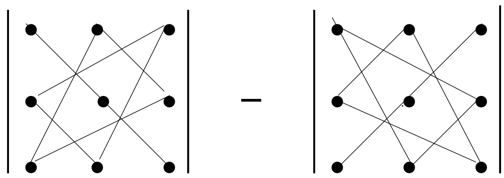

*Рис.*1

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 7 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot(-9) + 3\cdot 2\cdot 6 + 7\cdot(-4)\cdot(-2) - 3\cdot 3\cdot 7 - 5\cdot 6\cdot(-2) -$$

$$-2\cdot(-4)\cdot(-9) = -135 + 36 + 56 - 63 + 60 - 72 = -118.$$

б) за допомогою елементарних перетворень зведемо визначник матриці A до трикутного вигляду. Якщо можливо, перестановкою рядків (стовпців) добитися того, щоб елемент $a_{11} = 1$. У нашому випадку достатньо поміняти місцями перший і другий рядки місцями; при цьому знак визначника матриці A змінюється на протилежний.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Елементи першого рядка визначника послідовно помножимо на числа (-2), (-4), (-3) й додамо їх відповідно до елементів другого, третього й четвертого рядків. Після виконаних перетворень всі елементи першого стовпця є нульовими, окрім a_{11}.

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad -2 \quad -4 \quad -3 \quad = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & -3 \end{vmatrix}.$$

В останньому визначнику з другого, третього і четвертого рядків винесемо множник (-1).

Далі, помножимо елементи другого рядка спочатку на (-2), а потім на (-1) й додамо відповідно до елементів третього й четвертого рядків. При цьому елементи другого стовпця дорівнюють нулю, окрім a_{22}.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \quad -1 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \\ \\ \end{matrix}$$

Щоб отримати трикутну матрицю, необхідно домножити елементи третього рядка на (-1) і додати їх до елементів четвертого рядка. Визначник верхньої трикутної матриці дорівнює добутку її діагональних елементів:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20.$$

Завдання 3. Розв'язати матричне рівняння

$$A \cdot X \cdot B = C,$$

якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Визначники матриць A і B відмінні від нуля ($\det A = -1$, $\det B = 1$), тому для матриць A і B існують відповідно обернені матриці $A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ і $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. З рівняння $AXB = C$ знаходимо невідому матрицю X за формулою

$$X = A^{-1} C B^{-1}.$$

Маємо $X = \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 21 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь: $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 17, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

а) матричним методом; б) за правилом Крамера.

Розв'язання. а) маємо $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 5 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}16\\ 17\\ -2\end{pmatrix}$ Тоді початкова система рівнянь набуде вигляду $AX=B$. Оскільки $\det A=99\neq 0$, то системи рівнянь має єдиний розв'язок, який знаходимо за формулою

$$X=A^{-1}B.$$

Обчислимо обернену матрицю $\grave{A}^{-1}$:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=8; \quad A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=11; \quad A_{31}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix}=9;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & -3\end{vmatrix}=11; \quad A_{22}=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-22; \quad A_{32}=-\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=17; \quad A_{23}=-\begin{vmatrix}4 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=11; \quad A_{33}=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-18.$$

Маємо $A^{-1}=\dfrac{1}{99}\begin{pmatrix}8 & 11 & 9\\ 11 & -22 & 0\\ 17 & 11 & -18\end{pmatrix}$.

Обчислимо $X=A^{-1}B=\dfrac{1}{99}\begin{pmatrix}8 & 11 & 9\\ 11 & -22 & 0\\ 17 & 11 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\ 17\\ -2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{99}\begin{pmatrix}297\\ -198\\ 495\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$.

Отже, $x_1=3,\ x_2=-2,\ x_3=5$ – розв'язок системи.

б) обчислимо визначник системи $\Delta=\det A$ та визначники Δ_j, $j=1,2,3$. Маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 5 & 1 & -3\end{vmatrix}=99,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}16 & 3 & 2\\ 17 & -3 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{vmatrix}=297, \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}4 & 16 & 2\\ 2 & 17 & 1\\ 5 & -2 & -3\end{vmatrix}=-198,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}4 & 3 & 16\\ 2 & -3 & 17\\ 5 & 1 & -2\end{vmatrix}=495.$$

За формулами Крамера знаходимо розв'язок системи

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{297}{99}=3,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{198}{99}=-2,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{495}{99}=5.$$

Завдання 5. Дослідити сумісність системи лінійних рівнянь, а у разі сумісності знайти її загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 8x_4 = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю $\overline{A}$ системи, зведемо її до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень й обчислимо ранги матриць A і $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 11 & -8 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -14 & 7 & -2 \\ 0 & 7 & -14 & 7 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -14 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отримана матриця є розширеною матрицею системи лінійних рівнянь, рівносильною початковій системі. Згідно із теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна, оскільки ранг основної матриці A рівний рангу розширеної $\overline{A}$ і дорівнює 2, тобто $r = rang\ A = rang\ \overline{A} = 2$, і $r < n$, де $n = 4$ – кількість невідомих. Отже, система сумісна й невизначена.

Останній розширеній матриці відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ \quad 7x_2 - 14x_3 + 7x_4 = -2. \end{cases}$$

Базисними змінними вважаємо x_1, x_2, оскільки мінор, що відповідає цим змінним $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, а вільними – x_3, x_4. Тому останню систему рівнянь легко розв'язуємо "з кінця" і знаходимо

$$x_2 = 2x_3 - x_4 - \frac{2}{7}.$$

Підставляючи значення x_2 в перше рівняння, отримаємо

$$x_1 = -x_3 + x_4 + \frac{10}{7}.$$

Надавши вільним змінним довільних значень $x_3 = c_1, x_4 = c_2$, одержуємо загальний розв'язок системи: $(-c_1 + c_2 + \frac{10}{7}; 2c_1 - c_2 - \frac{2}{7}; c_1; c_2)$.

Завдання 6. Довести, що вектори $\vec{a} = (1; 1; -3)$, $\vec{b} = (3; -1; 1)$, $\vec{c} = (0; 1; 1)$ утворюють базис та знайти координати вектора $\vec{d} = (-7; 4; -10)$ у цьому базисі.

Розв'язання. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис, то вони повинні бути лінійно незалежними. Складемо лінійну комбінацію цих векторів:

$\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} = \vec{0},$ тобто $\alpha_1(1;1;-3) + \alpha_2(3;-1;1) + \alpha_3(0;1;1) = (0;0;0).$

Векторна рівність еквівалентна системі лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, то однорідна система має лише нульовий розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, що й доводить лінійну незалежність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Знайдемо тепер координати вектора $\vec{d}$ у базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, тобто такі числа $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, що $\vec{d} = \beta_1\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \beta_3\vec{c}.$

Звідси $\begin{cases} \beta_1 + 3\beta_2 = -7, \\ \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = 4, \\ -3\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = -10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 2, \\ \beta_2 = -3, \\ \beta_3 = -1. \end{cases}$

Отже, $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}.$

Завдання 7. Задані вектори $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ і $\vec{d}$ із завдання **6**. Визначити:

1) напрямні косинуси векторів $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$ і $\vec{n} = 3\vec{c} + \vec{d}$;
2) скалярний добуток $\vec{m} \cdot \vec{n}$ та косинус кута між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$;
3) проекцію вектора $\vec{m}$ на напрям вектора $\vec{n}$: $np_{\vec{n}}\vec{m}$;
4) векторний добуток $\vec{m} \times \vec{n}$;
5) мішаний добуток $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Розв'язання. 1) знайдемо вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}((3-1)\vec{i} + (-1-1)\vec{j} + (1+3)\vec{k}) = \frac{1}{2}(2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k},$$

$$\vec{n} = 3\vec{c} + \vec{d} = (0-7)\vec{i} + (3+4)\vec{j} + (3-10)\vec{k} = -7\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k}.$$

Обчислимо довжини векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$:

$$|\vec{m}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}, \qquad |\vec{n}| = \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + (-7)^2} = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}.$$

Напрямні косинуси векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$ знаходимо за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{m_x}{|\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad \cos\beta = \frac{m_y}{|\vec{m}|} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad \cos\gamma = \frac{m_z}{|\vec{m}|} = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$\cos\alpha = \frac{n_x}{|\vec{n}|} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\beta = \frac{n_y}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\gamma = \frac{n_z}{|\vec{n}|} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2) скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$ та косинус кута φ між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ обчислимо відповідно за формулами

$$\vec{m}\cdot\vec{n} = m_x \cdot n_x + m_y \cdot n_y + m_z \cdot n_z, \qquad \cos\varphi = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}.$$

Маємо

$$\vec{m}\cdot\vec{n} = 1\cdot(-7) + (-1)\cdot 7 + 2\cdot(-7) = -28, \qquad \cos\varphi = \frac{-28}{7\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{-4}{3\sqrt{2}}.$$

3) проекцію вектора $\vec{m}$ на напрям вектора $\vec{n}$ знаходимо за формулою

$$np_{\vec{n}}\vec{m} = |\vec{m}|\cos\varphi.$$

Отже, $np_{\vec{n}}\vec{m} = -\sqrt{6}\,\frac{4}{3\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}.$

4) векторний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$ в декартових координатах має вигляд

$$\vec{m}\times\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_y & m_z \\ n_y & n_z \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} m_z & m_x \\ n_z & n_x \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} m_x & m_y \\ n_x & n_y \end{vmatrix}\vec{k}\,.$$

Тоді

$$\vec{m}\times\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -7 & 7 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -7 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -7 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 7 \end{vmatrix}\vec{k} = -7\vec{i} - 7\vec{j}.$$

5) мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в декартових координатах має вигляд

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 - 9 - 0 - 3 - 1 = -14.$$

Завдання 8. Вершини піраміди знаходяться у точках $A_1(1;2;0)$, $A_2(-1;2;1)$, $A_3(2;0;5)$, $A_4(-2;5;4)$. Знайти:

1) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Розв'язання. 1) знайдемо вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, обчислимо їх довжини і скалярний добуток:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (-1-1)\vec{i} + (2-2)\vec{j} + (1-0)\vec{k}) = -2\vec{i} + \vec{k},$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (-2-1)\vec{i} + (5-2)\vec{j} + (4-0)\vec{k}) = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k},$$

$$\overline{|A_1A_2|} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \qquad \overline{|A_1A_4|} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{34},$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (-2)\cdot(-3) + 0\cdot 3 + 1\cdot 4 = 10.$$

Кут φ між векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$ знаходимо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_4}|} = \frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{34}} \approx 0{,}766.$$

З таблиць отримаємо, що кут $\varphi \approx 40^\circ$.

2) площа S грані $A_1A_2A_3$ (трикутника $A_1A_2A_3$) дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$. Для цього знайдемо вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$ та їх векторний добуток $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$. Маємо

$$\overrightarrow{A_1A_2} = -2\vec{i} + \vec{k}, \qquad \overrightarrow{A_1A_3} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k},$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 11^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{141} \text{ (кв. од.)}.$$

3) Об'єм V піраміди $A_1A_2A_3A_4$ дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4})|.$$

Маємо

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ -3 & 3 & 4 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|16 + 3 + 0 - 6 - 0 + 30| = \frac{1}{6}\cdot 43 = 7\frac{1}{6} \text{ (куб. од.)}.$$

Завдання 9. Задані три послідовні вершини $A(-1;2)$, $B(1;-3)$, $C(5;7)$ паралелограма $ABCD$. Визначити:

1) рівняння сторони AD;

2) рівняння висоти, проведеної з вершини B на сторону AD та довжину цієї висоти;

3) площу паралелограма $ABCD$;

4) гострий кут між діагоналями паралелограма.

Розв'язання. 1) зважаючи, що точки A, B, C – послідовні вершини паралелограма $ABCD$, тоді координати вершини $D(x_D; y_D)$ знаходимо із властивості

$$x_A + x_C = x_B + x_D, \quad y_A + y_C = y_B + y_D.$$

Отримаємо $x_D = -1+5-1=3;$ $\quad y_D = 2+7+3=12$.

Отже, $D(3;12)$.

Рівняння сторони AD знаходимо як ріняння прямої, що проходить через дві задані точки A і D:

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-2}{12-2}, \qquad \text{або} \qquad \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{10}, \text{ тобто } 5x-2y+9=0.$$

2) нехай BH – висота, проведена з вершини B на сторону AD. Тоді нормальний вектор $\vec{n}_{AD} = (5;-2)$ прямої AD є напрямним вектором для прямої BH: $\vec{s}_{BH} = \vec{n}_{AD} = (5;-2)$. Тому для запису рівняння висоти BH скористаємось канонічним рівнянням прямої:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+3}{-2}, \qquad \text{або} \qquad 2x+5y+13=0.$$

Довжина висоти BH дорівнює відстані від точки $B(1;-3)$ до прямої $AD: 5x-2y+9=0$. Маємо

$$|BH| = \frac{|5\cdot 1 - 2\cdot(-3)+9|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}} = \frac{20}{\sqrt{29}}.$$

3) площа S паралелограма $ABCD$ побудованого на векторах $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$ дорівнює

$$S = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|.$$

Розглянемо вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BA} = (-1-1)\vec{i} + (2+3)\vec{j} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$, $\quad \overrightarrow{BC} = (5-1)\vec{i} + (7+3)\vec{j} = 4\vec{i} + 10\vec{j}$.

Обчислимо векторний добуток векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 5 & 0\\ 4 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 0\\ 10 & 0\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}0 & -2\\ 0 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 4 & 10\end{vmatrix}\vec{k}=-40\vec{k}.$$

Тоді $S=|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\sqrt{0^2+0^2+(-40)^2}=40$ (кв. од.).

4) Кут φ між діагоналями паралелограма - це кут між векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$. Знаходимо вектори $\overrightarrow{AC}=(6;5)$ і $\overrightarrow{BD}=(2;15)$ та косинус кута φ між ними:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}=\frac{6\cdot2+5\cdot15}{\sqrt{36+25}\cdot\sqrt{4+225}}=\frac{87}{\sqrt{13969}}\approx 0{,}7361.$$

З таблиць отримаємо, що гострий кут $\varphi=\arccos 0{,}7361\approx 42^\circ 24'$.

Завдання 10. Задані рівняння площини $\pi_1:\ 5x-y+z+5=0$, прямої $l_1:\ \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{2}$ і точка $M_1(3;0;7)$. Знайти:

1) рівняння площини π_2, що проходить через пряму l_1 і точку M_1;

2) рівняння площини π_3, що проходить через точку M_1 перпендикулярно до прямої l_1;

3) рівняння прямої l_2, що проходить через точку M_1 паралельно до прямої l_1;

4) точку Q, яка симетрична точці M_1 відносно площини π_1;

5) відстань від точки M_1 до площини π_1;

6) відстань від точки M_1 до прямої l_1.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі маємо $\vec{n}_{\pi_1}=(5;-1;1)$ – нормальний вектор площини π_1, $\vec{s}_{l_1}=(4;-4;2)$ – напрямний вектор прямої l_1, точка $M_0(3;-1;0)\in l_1$.

1) для знаходження рівняння площини π_2, що проходить точку $M_1(3;0;7)$ і пряму l_1, зауважимо, що вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{s}_{l_1}$ (тут $M(x;y;z)$ – довільна точка площини π_2) компланарні, тому їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто $(\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}_{l_1})=0$, або

$$\begin{vmatrix}x-3 & y+1 & z\\ 3-3 & 0+1 & 7-0\\ 4 & -4 & 2\end{vmatrix}=0,\qquad \pi_2:\ 15x+14y-2z-31=0.$$

2) враховуючи, що площина π_3 перпендикулярна до прямої l_1 напрямний вектор $\vec{s}_{l_1}$ цієї прямої є нормальним вектором шуканої площини π_3: $\vec{s}_{l_1} = \vec{n}_{\pi_3} = (4; -4; 2)$. Вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x-3; y-0; z-7)$ і $\vec{n}_{\pi_3} = (4; -4; 2)$ перпендикулярні, тому їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $4(x-3) - 4(y-0) + 2(z-7) = 0$, або

$$\pi_3: \ 2x - 2y + z - 13 = 0.$$

3) Оскільки прямі l_1 паралельні l_2, то $\vec{s}_{l_1} = \vec{s}_{l_2}$, $\vec{s}_{l_2} = (4; -4; 2)$ і точка $M_1(3; 0; 7) \in l_2$. Для запису рівняння прямої l_2 скористаємось канонічним рівнянням прямої:

$$l_2: \ \frac{x-3}{4} = \frac{y}{-4} = \frac{z-7}{2}.$$

4) для знаходження точки Q, яка симетрична точці M_1 відносно площини π_1, спочатку через точку M_1 проведемо пряму l_3, яка перпендикулярна площині π_1 ($\vec{s}_{l_3} = \vec{n}_{\pi_1}$). Рівняння прямої l_3 матиме вигляд:

$$l_3: \ \frac{x-3}{5} = \frac{y}{-1} = \frac{z-7}{1}.$$

Далі знаходимо точку K перетину прямої l_3 і площини π_1. Точка K – це проекція точки M_1 на площину π_1:

$$\begin{cases} 5x - y + z + 5 = 0, \\ \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-7}{1}. \end{cases}$$

У рівнянні прямої перейдемо до її параметричного задання:

$$\begin{cases} 5x - y + z + 5 = 0, \\ \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-7}{1} = t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - y + z + 5 = 0, \\ x = 5t + 3, \\ y = -t, \\ z = t + 7. \end{cases}$$

Одержимо $5(5t+3) + t + t + 7 + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 27t + 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1.$ Звідси

$$\begin{cases} x = 5 \cdot (-1) + 3 = -2, \\ y = 1, \\ z = -1 + 7 = 6. \end{cases}$$

Отже, координати точки $K(-2; 1; 6)$.

Враховуючи, що точка K - середина відрізка M_1Q, тобто виконуються співвідношення

$$x_K=\frac{x_{M_1}+x_Q}{2},\quad y_K=\frac{y_{M_1}+y_Q}{2},\quad z_K=\frac{z_{M_1}+z_Q}{2},$$

з яких визначаємо координати точки $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$

$$x_Q=2x_K-x_{M_1}=2\cdot(-2)-3=-7;$$

$$y_Q=2y_K-y_{M_1}=2\cdot 1-0=2;$$

$$z_Q=2z_K-z_{M_1}=2\cdot 6-7=5.$$

Отже, координати точки $Q(-7; 2; 5)$.

5) відстань від точки M_1 до площини π_1 знаходимо за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Маємо $d=\dfrac{|5\cdot 3-1\cdot 0+1\cdot 7+5|}{\sqrt{5^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{27}{\sqrt{27}}=\sqrt{27}.$

6) відстань від точки M_1 до прямої l_1 знаходимо за формулою:

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}_{l_1}|}{|\vec{s}_{l_1}|},$$

де $M_0(3;-1;0)\in l_1$.

Обчислимо векторний добуток векторів $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{s}_{l_1}$:

$$\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}_{l_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 7\\ 4 & -4 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 7\\ -4 & 2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}7 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & -4\end{vmatrix}\vec{k}=30\vec{i}+28\vec{j}-4\vec{k}.$$

Тоді

$|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}_{l_1}|=\sqrt{30^2+28^2+(-4)^2}=\sqrt{1700}=10\sqrt{17}$, $|\vec{s}_{l_1}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}=6$.

Отже, $d=\dfrac{10\sqrt{17}}{6}=\dfrac{5\sqrt{17}}{3}$.

Завдання 11. Звести рівняння кривої до канонічного вигляду, визначити її тип; знайти півосі, фокуси, ексцентриситет та рівняння директрис.

$$x^2+4y^2+6x-16y+21=0.$$

Розв'язання. Виділимо повні квадрати в лівій частині рівняння

$$x^2+6x+9-9+4(y^2-4y+4-4)+21=0,$$

$$(x+3)^2+4(y-2)^2=4.$$

Перепишемо рівняння у наступному вигляді

$$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{1}=1.$$

Проведемо замінну змінних

$$\begin{cases} x' = x+3, \\ y' = y-2. \end{cases}$$

Маємо

$$\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{1}=1.$$

Це канонічне рівняння еліпса в системі координат $O'x'y'$, яка отримується із системи координат Oxy перенесенням початку координат $O(0;0)$ в точку $O'(-3;2)$. Точка $O'(-3;2)$ є центром еліпса (рис. 2).

Числа $a=\sqrt{4}=2$, $b=\sqrt{1}=1$ є відповідно великою та малою півосями еліпса.

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}.$$

Ексцентриситет еліпса дорівнює

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Фокуси еліпса розміщені на його великій осі $O'x'$. Координати фокусів у системі $O'x'y'$ є $F_1'(-\sqrt{3};\,0)$, $F_2'(\sqrt{3};\,0)$, а в системі Oxy – $F_1(-\sqrt{3}-3;\,2)$, $F_2(\sqrt{3}-3;\,2)$.

Рівняння директрис в системі координат $O'x'y'$ має вигляд:

$$x'=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{4}{\sqrt{3}},$$

а в системі координат Oxy: $x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}-3.$

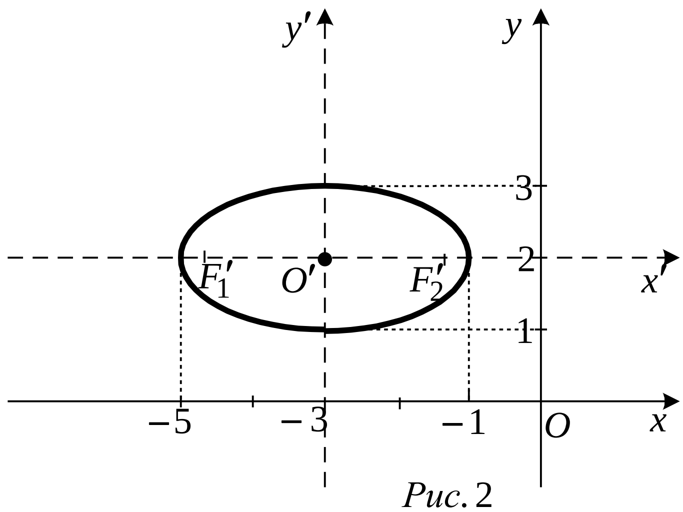

Рис. 2

Завдання 12. Обчислити границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^3-3x-2}$;   б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+10}+3x}{x^2-1}$;   в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{x^2}$;   д) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-5}{x+7}\right)^{2x-3}$.

Розв'язання. а) оскільки чисельник і знаменник дробу при $x\to 2$ прямують до нуля, тобто має місце невизначеність типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Тому розклавши й чисельник, і знаменник на множники, та скоротивши дріб на множник $(x-2)$, отримаємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^3-3x-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x^2+2x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x^2+2x+1}=\frac{9}{9}=1.$$

б) при $x\to -1$ чисельник і знаменник прямують до нуля. Отже, маємо границю із невизначеністю $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Домножимо чисельник та знаменник на спряжений до чисельника вираз. Матимемо

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+10}+3x}{x^2-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x+10}+3x)(\sqrt{x+10}-3x)}{(x^2-1)(\sqrt{x+10}-3x)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{10+x-9x^2}{(x^2-1)(\sqrt{x+10}-3x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to -1}\frac{-(9x-10)(x+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+10}-3x)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(10-9x)}{(x-1)(\sqrt{x+10}-3x)}=-\frac{19}{12}.$$

в) маємо невизначеність типу $\{\infty-\infty\}$. Домножимо та поділимо заданий вираз на спряжений до нього. Матимемо

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)=\{\infty-\infty\}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)\left(\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+2x+3}\right)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+2x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-5x-3}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+2x+3}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-x\left(5+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right)}=-\frac{5}{2}.$$

г) при $x \to 0$ чисельник та знаменник дробу прямують до нуля. Враховуючи те, що $\cos 6x - \cos 2x = -2\sin 2x \sin 4x$ та використовуючи першу важливу границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x - \cos 2x}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x \sin 4x}{x^2} =$$

$$= -2\cdot 2\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 4\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x} = -4\cdot 1\cdot 4\cdot 1 = -16.$$

д) якщо $x \to \infty$, то дріб $\dfrac{x-5}{x+7} \to 1$ і показник степеня $2x-3 \to \infty$. У цьому прикладі має місце невизначеність типу $\{1^\infty\}$. Використаємо другу важливу границю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Виділимо цілу частину дробу:

$$\frac{x-5}{x+7} = 1 + \frac{x-5}{x+7} - 1 = 1 + \frac{-12}{x+7}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+7}\right)^{2x-3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-12}{x+7}\right)^{2x-3} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-12}{x+7}\right)^{\frac{x+7}{-12}}\right]^{\frac{-12(2x-3)}{x+7}}.$$

Оскільки

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-12}{x+7}\right)^{\frac{x+7}{-12}} = \left|\begin{array}{c}\dfrac{x+7}{-12} = t,\\ x\to\infty \Rightarrow t\to\infty\end{array}\right| = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-12(2x-3)}{x+7} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = -12\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{7}{x}\right)} = -24,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-12}{x+7}\right)^{\frac{x+7}{-12}}\right]^{\frac{-12(2x-3)}{x+7}} = e^{-24}.$$

Завдання 13. Дослідити функції на неперервність та встановити характер точок розриву. Зобразити схематично графіки цих функцій в околі точок розриву.

а) $f(x)=2-3^{\frac{4}{x-1}}$;   б) $f(x)=\begin{cases}5x-2, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x<1,\\ 2e^{x-1}, & x\ge 1.\end{cases}$

Розв'язання. а) функція $f(x)$ є неперервною для всіх дійсних x, окрім точки $x_0=1$, яка є точкою розриву. Знайдемо односторонні границі в цій точці.

Враховуючи наступні міркування

$$x\to 1-0 \Rightarrow x-1\to -0 \Rightarrow \frac{4}{x-1}\to -\infty \Rightarrow 3^{\frac{4}{x-1}}\to 0 \Rightarrow 2-3^{\frac{4}{x-1}}\to 2,$$

$$x\to 1+0 \Rightarrow x-1\to +0 \Rightarrow \frac{4}{x-1}\to +\infty \Rightarrow 3^{\frac{4}{x-1}}\to +\infty \Rightarrow 2-3^{\frac{4}{x-1}}\to -\infty,$$

отримаємо

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=2, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=-\infty.$$

Оскільки одна з односторонніх границь є нескінченною, тому точка $x_0=1$ є точкою розриву другого роду функції $f(x)$. Графік функції в околі точки $x_0=1$ зображено на рис. 3.

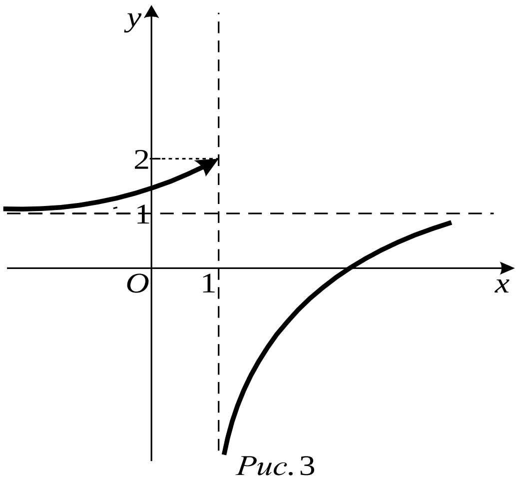

Рис. 3

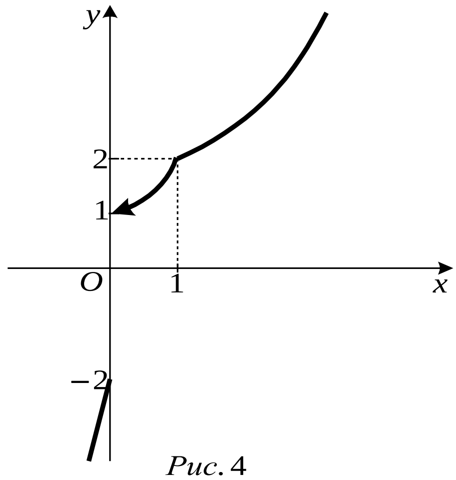

Рис. 4

б) кожна з елементарних функцій $5x-2,\ x^2+1,\ 2e^{x-1}$ є неперервною у внутрішніх точках області свого задання. Тому функція $f(x)$ може мати розрив лише у тих точках, де змінюється її аналітичний вираз, тобто у точках $x_1=0$ та $x_2=1$. Знайдемо односторонні границі в цих точках.

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}(5x-2)=-2, \quad \lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}(x^2+1)=1.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to -0} f(x)\ne\infty$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)\ne\infty$, але $\lim\limits_{x\to -0} f(x)\ne\lim\limits_{x\to +0} f(x)$, то точка $x_1=0$ є точкою розриву першого роду функції $f(x)$.

Далі

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(x^2+1) = 2, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 2e^{x-1} = 2. \quad f(1) = 2.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = f(1),$$

тому функція $f(x)$ є неперервною в точці $x_2 = 1$. Графік функції зображено на рис. 4.

Завдання 14. Знайти похідні y' функцій у п.а)-г) і похідну y'' в п. д).

1. а) $y = \dfrac{\ln(\operatorname{arctg} 5x)}{\arcsin 2x}$; б) $y = (x^2+1)^{\sin^2 x}$; в) $\begin{cases} x = \arcsin^2 t, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}; \end{cases}$

г) $x^2 + y^2 = \sin xy$; д) $y = \operatorname{arcctg}^3 \dfrac{1}{x}$.

Розв'язання. а) функція задана явно. Застосуємо правило знаходження похідної від частки двох функцій: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Матимемо

$$y' = \frac{(\ln(\operatorname{arctg} 5x))' \arcsin 2x - \ln(\operatorname{arctg} 5x)(\arcsin 2x)'}{\arcsin^2 2x} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\operatorname{arctg} 5x}\cdot\dfrac{5}{1+25x^2}\cdot\arcsin 2x - \ln(\operatorname{arctg} 5x)\cdot\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}{\arcsin^2 2x} =$$

$$= \frac{5\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x - 2(1+25x^2)\cdot\operatorname{arctg} 5x\cdot\ln(\operatorname{arctg} 5x)}{\arcsin^2 2x\cdot\operatorname{arctg} 5x\cdot(1+25x^2)\cdot\sqrt{1-4x^2}};$$

б) функція є показниково-степеневою. Застосуємо метод логарифмічного диференціювання та правило знаходження похідної від добутку двох функцій: $(uv)' = u'v + uv'$. Прологарифмуємо задану функцію

$$\ln y = \ln((x^2+1)^{\sin^2 x}) = \sin^2 x\cdot\ln(x^2+1).$$

Тоді це рівняння продиференціюємо й одержимо

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (\sin^2 x\cdot\ln(x^2+1))',$$

$$\frac{y'}{y} = (\sin^2 x)'\cdot\ln(x^2+1) + \sin^2 x\cdot(\ln(x^2+1))',$$

$$\frac{y'}{y} = 2\sin x\cos x\cdot\ln(x^2+1) + \sin^2 x\cdot\frac{2x}{x^2+1}.$$

Виразимо y' з останнього рівняння:

$$y' = y\left[\sin 2x\cdot\ln(x^2+1) + \frac{2x\sin^2 x}{x^2+1}\right].$$

Отже

$$y' = (x^2+1)^{\sin^2 x}\left[\sin 2x \cdot \ln(x^2+1) + \frac{2x\sin^2 x}{x^2+1}\right].$$

в) для параметрично заданої функції похідна дорівнює

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dy}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Обчислимо похідні x'_t і y'_t: $\quad x'_t = 2\arcsin t\,\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{2\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}$,

$$y'_t = \frac{\sqrt{1-t^2} - \dfrac{t}{2\sqrt{1-t^2}}(-2t)}{1-t^2} = \frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$$

Тоді $y' = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{(1-t^2)^3}}}{\dfrac{2\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}} = \dfrac{1}{2(1-t^2)\arcsin t}$.

г) продиференціюємо ліву і праву частини співвідношення за змінною x, при цьому вважаючи y функцією x, одержимо

$$2x + 2yy' = \cos xy(y + xy').$$

З цього рівняння визначаємо y':

$$y' = \frac{y\cos xy - 2x}{2y - x\cos xy}.$$

д) знайдемо похідні y' і y''.

$$y' = 3\operatorname{arcctg}^2\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3\operatorname{arcctg}^2\dfrac{1}{x}}{x^2+1}.$$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{3\operatorname{arcctg}^2\dfrac{1}{x}}{x^2+1}\right)' = \frac{6\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)(x^2+1) - 3\operatorname{arcctg}^2\dfrac{1}{x}\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{6\left(1 - x\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}\right)\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}}{(x^2+1)^2}.$$

Завдання 15. Записати рівняння дотичної та нормалі в точці $M_0(1;1)$ до кривої $x^2y^4+5x^3y-4x^4+y+5=0$.

Розв'язання. Рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=f(x)$ в заданій точці $M_0(x_0;\,y_0)$ мають відповідно вигляд

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0), \qquad y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Щоб знайти кутовий кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ дотичної до заданої кривої в точці $M_0(1;1)$, продиференціюємо ліву і праву частини заданого рівняння за змінною x, вважаючи, що $y=y(x)$. Одержимо

$$2xy^4+x^2 4y^3y'+15x^2y+5x^3y'-16x^3+y'=0, \qquad \text{або}$$

$$y'(4x^2y^3+5x^3+1)=16x^3-15x^2y-2xy^4.$$

Звідси $y'=\dfrac{16x^3-15x^2y-2xy^4}{4x^2y^3+5x^3+1}$. Тоді $y'\big|_{(1;\,1)}=\dfrac{16-15-2}{4+5+1}=-\dfrac{1}{10}$.

Отже, рівняння дотичної і рівняння нормалі відповідно мають вигляд

$$y-1=-\frac{1}{10}(x-1), \qquad \text{або} \qquad x+10y-11=0$$

$$y-1=10(x-1), \qquad \text{або} \qquad 10x-y-9=0.$$

Завдання 16. Обчислити границі функцій за допомогою правила Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos 4x}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to +0}x^4\ln x.$$

Розв'язання. а) Маємо невизначеність типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Застосувавши правило Лопіталя, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos 4x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(x\sin 2x)'}{(1-\cos 4x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+2x\cos 2x}{4\sin 4x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x+2x\cos 2x)'}{(4\sin 4x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x+2\cos 2x-4x\sin 2x}{16\cos 4x}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}.$$

б) Маємо невизначеність виду $\{0\cdot\infty\}$. Подамо добуток функцій у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеность $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, застосуємо правило Лопіталя. Тоді

$$\lim_{x\to+0} x^4 \ln x = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^4}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^4}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-4}{x^5}} = \lim_{x\to+0}\frac{x^4}{-4} = 0.$$

Завдання 17. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. 1. Область визначення функції:

$$D(y) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$

2. Оскільки $y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2} = -\dfrac{x^3}{3-x^2} = -y(x)$, то функція непарна, її графік симетричний відносно початку координат.

3. Знайдемо точки перетину з осями координат. Якщо $x=0$, то $y=0$. Якщо $y=0$, то $x=0$. Отже, графік функції проходить через початок координат $O(0;0)$.

4. Знайдемо асимптоти графіка функції. Оскільки

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2} = +\infty,$$

то функція має розриви другого роду у точках $x = \pm\sqrt{3}$. Тому прямі $x = -\sqrt{3}$ і $x = \sqrt{3}$ є вертикальними асимптотами.

Дослідимо поведінку функції на нескінченності. Рівняння похилої асимптоти, якщо вона існує, має вигляд $y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$. Обчислимо

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(3-x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3-x^2} = -1; \qquad b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2} = 0.$$

Отже, $y = -x$ – похила асимптота графіка функції.

5. Дослідимо функцію на екстремум та монотонність. Знаходимо похідну і критичні точки функції:

$$y' = \frac{3x^2(3-x^2) + 2x^4}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2};$$

причому $y' = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ x_3 = 3$.

Крім того, $y'(x)$ не існує в точках $x_4 = -\sqrt{3}$, $x_5 = \sqrt{3}$. Критичними точками є точки x_1, x_2, x_3, оскільки вони належить до області визначення функції. Дослідимо критичні точки, визначаючи знак y' зліва і справа від кожної з них (рис. 5).

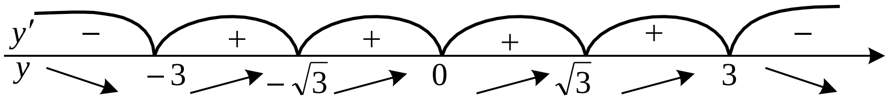

Рис. 5

Отже, функція $y(x)$ спадає на проміжках $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ і зростає на $(-3; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; 0) \cup (0; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 3)$. У точці $x = -3$ функція має мінімум $y_{\min} = y(-3) = 4{,}5$, а в точці $x = 3$ функція має максимум $y_{\max} = y(3) = -4{,}5$.

6. Дослідимо функцію на опуклість, увігнутість і знайдемо точки перегину графіка функції. Знаходимо другу похідну функції і критичні точки другого роду (це точки, в яких y'' не існує або дорівнює нулю). Маємо

$$y'' = \frac{(18x - 4x^3)(3 - x^2)^2 + 4x(9x^2 - x^4)(3 - x^2)}{(3 - x^2)^4} = \frac{6x(x^2 + 9)}{(3 - x^2)^3};$$

причому $y''(x) = 0$, якщо $x = 0$, $y''(x)$ не існує, якщо $x = \pm\sqrt{3}$, які не входять в область визначення функції. Отже, $x = 0$ – критична точка другого роду. Дослідимо цю критичну точку, визначаючи знак y'' на проміжках (рис. 6).

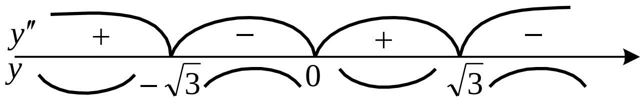

Рис. 6

З рис. 6 видно, що $y'' > 0$ на проміжках $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$ і на них графік функції увігнутий; $y'' < 0$ на проміжках $(-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ і на них графік функції опуклий. Точка $x = 0$ – точка перегину функції, і $y(0) = 0$.

7. Графік функції зображено на рис. 7.

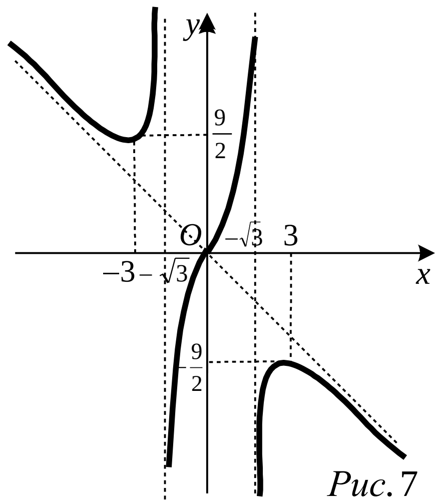

*Рис.*7