Лекція 7. Особливі відношення (порядку, еквівалентності).

Розглянемо далі більш детально відношення, які мають особливе значення.

Відношення порядку

Відношення L на множині X називається відношенням порядку, якщо воно має такі властивості:

а) рефлективності: $(x, x) \in L$ при будь-якому $x \in X$;

б) антисиметричності: для довільних $x_1, x_2 \in X$ з того, що $(x_1, x_2) \in L$ і $(x_2, x_1) \in L$, випливає $x_1=x_2$;

в) транзитивності: якщо $(x_1, x_2) \in L$ і $(x_2, x_3) \in L$, то $(x_1, x_3) \in L$.

Замість того, щоб писати $(x, x') \in L$, часто записують $x \le x'$. У цьому випадку $x' \ge x$ означає $x \le x'$ і властивості рефлективності, транзитивності й антисиметричності запишуться відповідно у вигляді:

$x \le x$;

якщо $x \le x'$ і $x' \le x''$, то $x \le x''$;

якщо $x \le x'$ і $x' \le x$, то $x = x'$.

Розглянемо приклади відношень порядку:

1)°у множинах **N** натуральних чисел, **Z** цілих чисел, **Q** раціональних чисел відношення $(x, x') \in L$ тоді і тільки тоді, коли $x \le x'$, є відношенням порядку. Відношення $(x, x') \in L$ тоді і тільки тоді, коли $x \ge x'$, також є відношенням порядку, яке протилежне до попереднього. Аналогічно можна розглядати відношення: $x < x'$, $x' \ge x$, $x' > x$;

2)°у множині слів української мови існує відношення порядку, яке називається алфавітним, якщо домовитися ототожнювати омоніми;

3)°у множині $X = P(Y)$ підмножин множини Y існує природне відношення порядку: $A \le B$, якщо $A \subseteq B$;

4)°у множині $X = \mathbf{R}^Y$ функцій, визначених на множині Y, з дійсними значеннями також існує природне відношення порядку: $f \le g$, якщо для кожного $y \in Y$ виконується нерівність $f(y) \le g(y)$.

5)°у множині **N** натуральних чисел існує наступне відношення порядку: $a \le b$, якщо a є дільником b;

6)°у довільній множині X відношення $x \leq x'$, якщо $x = x'$, є відношенням порядку. Кажуть, що це - хаотичний порядок на X.

Множина X з відношенням порядку $\leq$ називається повністю впорядкованою, якщо для будь-яких двох різних елементів x, x' з X: або $x \leq x'$ або $x' \leq x$. Інакше множина X називається частково впорядкованою.

У розглянутих прикладах 1), 2) множина є повністю впорядкованою, а у прикладах 3) - 6) – частково впорядкованою. У випадку, коли x і x' не задовольняють ніякому з двох зазначених співвідношень, кажуть, що вони не порівнянні. Так, у прикладі 3) - дві непорожні підмножини, що не перетинаються, не порівнянні; у прикладі 4) - не порівнянні постійні функції 0 і 10; у прикладі 5) - не порівнянні цілі числа 2 і 3; у прикладі 6) - два довільних різних елементи не порівнянні.

Нехай X і Y - дві впорядкованих множини. Відображення $f : X \to Y$ називається зростаючим, якщо з $x \leq x'$ випливає $f(x) \leq f(x')$. Відображення $f : X \to Y$ називається спадним, якщо з умови $x \leq x'$ випливає $f(x') \leq f(x)$.

Відношення еквівалентності

Відношення L називається відношенням еквівалентності, якщо воно має такі властивості:

а) рефлективності: $(x, x) \in L$ при будь-якому $x \in X$;

б) симетричності: з $(x_1, x_2) \in L$ випливає $(x_2, x_1) \in L$;

в) транзитивності: якщо $(x_1, x_2) \in L$ і $(x_2, x_3) \in L$, то $(x_1, x_3) \in L$.

Замість того, щоб писати $(x_1, x_2) \in L$, часто пишуть $x_1 \sim x_2$ або $x_1 \equiv x_2 (\text{mod}\, L)$ (читається так: x_1 конгруентне x_2 за модулем L) чи, простіше, ($x_1 \sim x_2$ або $x_1 \equiv x_2$, якщо немає необхідності ще раз вказувати, що мова йде про одне й те саме відношення L).

Для $x \in X$ позначимо через $K(x)$ підмножину, що складається з елементів, еквівалентних x, тобто $K(x) = \{y \mid y \in X; y \sim x\}$. Таку підмножину будемо називати класом еквівалентності. Зрозуміло, що клас еквівалентності є множиною всіх елементів, еквівалентних довільному елементу з цього класу. Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Два класи еквівалентності або не перетинаються або співпадають.

Доведення. Припустимо, що перетин множин $K(x)$ і $K(x')$ непорожній, і візьмемо $z \in K(x) \cap K(x')$. Клас еквівалентності $K(x)$ утворений з елементів, еквівалентних одному зі своїх елементів x. Оскільки x і z еквівалентні, то за властивістю транзитивності отримуємо, що $K(x)$ утворений також з елементів, еквівалентних z. Аналогічно $K(x')$ утворений з елементів, еквівалентних z. Таким чином, $K(x)$ і $K(x')$ співпадають.

Відношення еквівалентності на множині X породжує деяке розбиття множини X, тобто деяку сім'ю непорожніх підмножин множини X (класів еквівалентності), які попарно не перетинаються, а їх об'єднання рівне X. Будь-які два елементи з одного класу зв'язані відношенням еквівалентності, тобто еквівалентні; з різних класів - не еквівалентні.

Навпаки, будь-яке розбиття множини X: $X = \bigcup\limits_{j \in J} X^j$, де X_j непорожні і попарно не перетинаються, визначає деяке відношення еквівалентності, а саме $x \equiv x'$, якщо існує такий індекс $j \in J$, що $x, x' \in X_j$. У цьому випадку підмножини X_j є класами еквівалентності для цього відношення.

Приклади відношень еквівалентності:

1)°Визначимо на множині цілих чисел **Z** відношення еквівалентності так, що $p \equiv q$, тоді і тільки тоді, коли $p - q$ ділиться без остачі на деяке наперед задане натуральне число $m > 1$, скажімо $m = 5$. У теорії чисел таке відношення записується у вигляді $p \equiv q \pmod{m}$.

2)°Нехай X - множина прямих на площині. Визначимо відношення еквівалентності для прямих x_1 і x_2, покладаючи $x_1 \equiv x_2$, коли ці прямі паралельні.

3) Нехай X – множина студентів, які присутні на лекції з дискретної математики. Два елементи цієї множини еквівалентні, якщо вони народилися в тому самому місяці року.

Фактор-множина

Виходячи із сказаного кожен клас еквівалентності X_j є підмножиною множини X, що складається з елементів, еквівалентних деякому фіксованому елементу цієї множини. Тому можна розглянути і множину всіх класів еквівалентності, яку звичайно називають фактор-множиною за даним відношенням еквівалентності L і позначають наступним чином X/L. Якщо через $K(x)$ позначити клас еквівалентності елемента x, то $K(x)$ є елементом фактор-множини та $x \in K(x)$.

Можна дати просту інтерпретацію фактор-множини на прикладах відношень еквівалентності, наведених раніше.

1) фактор – множина - це множина $\mathbf{Z}_m=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$ цілих чисел, порівняних за модулем числа 5;

2) фактор- множина - це множина напрямлених прямих на площині;

3) фактор- множина - це множина певних місяців року. Вона може мати менше дванадцяти місяців, бо в аудиторії може не виявитися студентів, які народилися в одному з місяців, скажімо в лютому.