Лекція 11. Півгрупи та півгрупи з одиницею.

Визначення півгрупи та півгрупи з одиницею

Множину X із заданою на ній бінарною асоціативною операцією називають півгрупою. Іншими словами, півгрупою називають множину X, на якій задана бінарна операція T з наступною властивістю:

(G1) операція T є асоціативною: $(x\ T\ y)\ T\ z = x\ T\ (y\ T\ z)$ для всіх $x, y, z \in X$;

Півгрупа, в якій операція є комутативною, тобто для будь-яких $x, y \in X$ виконується умова $x\ \ T\,y = y\ \ T\,x,$ називають комутативною (абелевою) півгрупою.

Півгрупу з (двостороннім) нейтральним елементом прийнято називати півгрупою з одиницею або моноїдом. Інакше кажучи, півгрупою з одиницею називають множину X, на якій задана бінарна операція T з такими властивостями:

(G1) операція T є асоціативною: $(x\ T\ y)\ T\ z = x\ T\ (y\ T\ z)$ для всіх $x, y, z \in X$;

(G2) X містить двосторонній нейтральний елемент e: $e\ T\,x = x\ T\,e = x$ для всіх $x \in X$.

Півгрупа з одиницею, в якій операція є комутативною, тобто для будь-яких $x, y \in G$ виконується умова $x\ \ T\,y = y\ \ T\,x,$ називають комутативною (абелевою) півгрупою з одиницею.

Наведемо деякі приклади півгруп та півгруп з одиницею.

1) Нехай Ω - довільна множина й $M(\Omega)$ - множина всіх її перетворень (відображень Ω в себе). Задамо на $M(\Omega)$ операцію, яка є композицією відображень. Тоді $M(\Omega)$ стає некомутативною півгрупою з одиницею. Нейтральним елементом є тотожне відображення.

Так, у частковому випадку Ω ={1,2}, алгебра $M(\Omega)$ складається з усіх відображень множини {1,2} в себе: $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Операцією є композиція $\circ$ відображень. Таблиця Келі для операції в заданій алгебрі наведена в табл. 7.

Табл. 7.

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	a	b	b	a
c	a	b	c	d
d	a	b	d	c

Як відомо композиція відображень є асоціативною, отже алгебра $A = (X; \circ\}$ є півгрупою, де $X = \{a, b, c, d\}$. У півгрупі A є одиничний (нейтральний) елемент c, оскільки $\forall x \in X$, $x \circ c = c \circ x = x$. Отже, півгрупа A є півгрупою з одиницею. Оскільки $a \circ b = b$, а $b \circ a = a$, то ця півгрупа з одиницею не є абелевою.

2) Нехай $n > 1$ - деяке фіксоване натуральне число. Множина $M_n(\mathbf{R})$ матриць розміру nхn з дійсними значеннями відносно множення матриць є некомутативним моноїдом з нейтральним елементом – одиничною матрицею.

3) Нехай знову Ω - довільна множина й $P(\Omega)$ - множина всіх підмножин цієї множини. Задаємо на $P(\Omega)$ операцію перетину множин. Тоді $P(\Omega)$ стає комутативним моноїдом. Нейтральним елементом тут є множина Ω.

4) Множина цілих чисел, які діляться на деяке фіксоване натуральне число $n > 1$, відносно операції множення утворює комутативну півгрупу без одиниці.