Лекція 28. Розфарбування графів.

Розфарбування графів

Різноманітні завдання, що виникають при плануванні виробництва, складанні графіків огляду техніки, зберіганні і транспортуванні товарів тощо, можуть бути представлені часто як задачі теорії графів, тісно пов'язані з так званою “задачею розфарбування”. Графи, які розглядаємо далі, є неорієнтованими і без петель.

Граф G називають r-хроматичним, якщо його вершини можна розфарбувати з використанням r кольорів (фарб) так, що будь-які дві суміжні вершини мають різні кольори. Найменше число r таке, що граф G є r-хроматичним, називають хроматичним числом графа G і позначають $\gamma(G)$. Задачу знаходження хроматичного числа графа називають задачею про (правильне) розфарбовування графа. Відповідне цьому числу розфарбування вершин розбиває множину вершин графа на r підмножин, кожна з яких містить вершини одного кольору.

Приклад розфарбування графа показано на рис. 36. Числа 1 і 2 позначають кольори вершин.

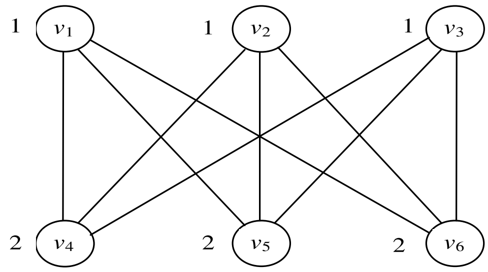

Рис. 36. Приклад розфарбування графа.

Для певних типів графів визначити хроматичні числа нескладно. Хроматичне число повного графа з n вершинами дорівнює n, а хроматичне число довільного двочасткового графа – 2. 2-хроматичні графи часто називають біхроматичними.

Проблема визначення, чи є заданий граф k-хроматичним для певного k, та проблема знаходження мінімального правильного розфарбування для заданого графа належать до класу задач, для яких на сьогодні не існують (і є всі підстави вважати, що не існують взагалі) ефективні точні алгоритми їх розв’язку. Тому важливими є результати, які дозволяють оцінити значення хроматичного числа $\gamma(G)$, виходячи з певних характеристик та властивостей графа G. Зокрема, знаючи число вершин n, число ребер m і степені $d(v_i)$ (i=1,…,n) всіх вершин графа, можна отримати нижню й верхню оцінки для хроматичного числа. Нижня оцінка для хроматичного числа виглядає так:

$$\gamma(G) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m}.$$

Верхні оцінки для хроматичного числа графа:

$$\gamma(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

або

$$\gamma(G) \leq \max_{v_i \in V}[d(v_i)] + 1.$$

Застосування оцінок для хроматичного числа значно звужує межі рішення. Для визначення оцінки хроматичного числа також можна використовувати інші топологічні характеристики графа, наприклад, властивість планарності. Граф, який можна зобразити на площині так, що ніякі два його ребра не перетинаються між собою, називають планарним. Наведена далі теорема стверджує, що коли граф G – планарний, то $\gamma(G) \leq 5$.

Теорема 14 (про п'ять фарб). Кожен планарний граф можна розфарбувати за допомогою щонайбільше п'яти кольорів так, що будь-які дві суміжні вершини будуть пофарбовані в різні кольори.

У наведеній далі гіпотезі йдеться про те, що коли граф G – планарний, то $\gamma(G) \leq 4$.

Гіпотеза (про чотири фарби). Кожен планарний граф можна розфарбувати за допомогою щонайбільше чотирьох кольорів так, що будь-які дві суміжні вершини будуть пофарбовані в різні кольори.

Ця гіпотеза (в еквівалентному формулюванні для географічних карт) з’явилася ще в середині 19-го століття. Її непрямо підтверджує час (більше століття), протягом якого численні спроби побудувати контрприклади залишалися марними. Гіпотезу чотирьох фарб доведено для окремих класів графів, наприклад, для графів, що мають не більше 41 вершини. В 1969 році Х. Хеєш звів проблему чотирьох фарб до дослідження великої, але скінченної множини графів. Пізніше кількість графів цієї множини було зведено до 1482 і вже в 1976 році колективу математиків і програмістів під керівництвом К. Аппеля і В. Хейкена за допомогою ЕОМ вдалося розфарбувати всі ці графи.

У 1996 році Н. Робертсон, Д. Сендерс, П. Сеймур, Р. Томас запропонували нове, простіше доведення гіпотези чотирьох фарб, але знову з використанням комп'ютера. Проте з повною мірою математичної строгості її не доведено, оскільки, наприклад, не доведено коректність компілятора та коректність виконання побудованого програмного коду, за допомогою якого будувалося розфарбування, крім того, і зведення загального випадку до перебору скінченної множини графів, і розфарбування останніх складно повторити.

Такий "фізичний" експериментальний спосіб доведення не влаштовує багатьох професійних математиків, і вони продовжують пошуки аналітичного доведення гіпотези.

На завершення зауважимо, що існують планарні графи, хроматичне число яких дорівнює 4. Найпростішим таким графом є U_4. Отже, гіпотезу чотирьох фарб не можна "вдосконалити", перетворивши у "гіпотезу трьох фарб".

Евристичний алгоритм розфарбування

В інформатиці евристичний алгоритм– це алгоритм, спроможний видати прийнятне рішення проблеми серед багатьох рішень, але неспроможний гарантувати, що це рішення буде найкращим. Отже, такі алгоритми є приблизними і неточними. Зазвичай такі алгоритми знаходять рішення, близьке до найкращого і роблять це швидко. Іноді такий алгоритм може бути точним, тобто він знаходить дійсно найкраще рішення, але він все одно буде називатися евристичним доти, доки не буде доведено, що рішення дійсно найкраще.

Два фундаментальні завдання в інформатиці – знаходження алгоритмів з імовірно найкращим часом виконання та з доброю якістю. Евристичний алгоритм відмовляється від одного або обидвох завдань; наприклад, він зазвичай знаходить дуже добре рішення, але немає доказів, що рішення насправді не є поганим; або працює досить швидко, але не має гарантії, що він завжди видасть рішення.

Часто можна знайти таку задачу, в якій евристичний алгоритм буде працювати або дуже довго, або видавати невірні результати, однак, такі парадоксальні приклади можуть ніколи не зустрітись на практиці через свою специфічну структуру. Таким чином, використання евристики дуже поширене в реальному світі. Для багатьох практичних проблем евристичні алгоритми, можливо, єдиний шлях для отримання задовільного рішення за прийнятний час.

Точні методи розфарбування графа складні для програмної реалізації. Однак існує багато евристичних процедур розфарбовування, що дозволяють знаходити хороші наближення для визначення хроматичного числа графа. Такі процедури можна з успіхом використовувати при розфарбовуванні графів з великою кількістю вершин, де застосування точних методів не виправдане з огляду на великий обсяг потрібних обчислень.

З евристичних процедур розмалювання слід відзначити послідовні методи, засновані на упорядкуванні множини вершин. В одному з найпростіших методів вершини спочатку розташовуються в порядку зменшення їх степенів. Перша вершина забарвлюється в колір 1; потім список вершин проглядається за спаданням степенів і в колір 1 забарвлюється кожна вершина, яка не є суміжною з вершинами, забарвленими в цей колір. Потім повертаємося до першої в списку незафарбованої вершини, зафарбуємо її в колір 2 і знову переглядаємо список вершин, фарбуючи в колір 2 будь-яку незабарвлену вершину, що не з'єднана ребром з іншою, вже пофарбованою в колір 2 вершиною. Аналогічно діємо з кольорами 3, 4 і т. д., поки не будуть пофарбовані всі вершини. Число використаних кольорів буде тоді наближеним значенням хроматичного числа графа.

Більш точно, евристичний алгоритм розфарбування вершин графа має такий вигляд.

Крок 1. Посортувати вершини графа в порядку зменшення їх степенів: $\{v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_n}\}$, де $d(v_{i_j}) \geq d(v_{i_{j+1}})$ для $j = 1,...,n-1$. Встановити колір $p := 1$.

Крок 2. Встановити $j := 0$, $V_p := \varnothing$ – множина вершин, вже розфарбованих в колір *p*.

Крок 3. $j := j+1$. Якщо вершина v_{i_j} не розфарбована і не є суміжною ні з однією вершиною з множини V_p, то присвоїти їй колір $col(v_{i_j}) := p$ та доповнити множину $V_p := V_p \cup \{v_{i_j}\}$.

Крок 4. Якщо $j \neq n$, то перейти на **крок 3**.

Крок 5. Якщо всі вершини графа розфарбовані, то кінець алгоритму; інакше: $p := p+1$ та перейти на **крок 2**.

Далі наведено приклад виконання описаного евристичного алгоритму розфарбування для графа *G*, зображеного на рис. 37.

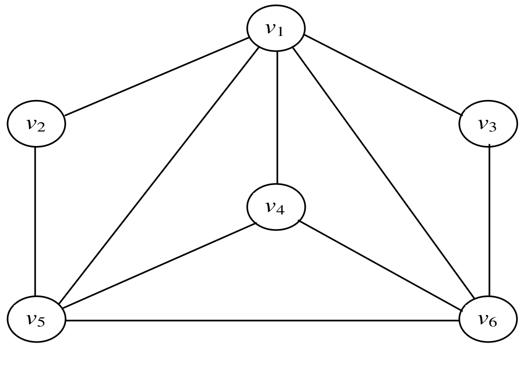

Рис. 37. Граф, який розфарбовуємо.

Проміжні дані для вирішення задачі будемо записувати в табл. 25. Відсортуємо вершини графа за спаданням їх степенів. У результаті отримуємо $v_1, v_5, v_6, v_4, v_2, v_3$. Відповідні даним вершинам степені дорівнюють: $\{5,4,4,3,2,2\}$. У першому рядку таблиці запишемо номери посортованих вершин; а в другому – відповідні вершинам степені. Наступні рядки відображають етапи присвоєння кольорів вершинам. Значення 0 означає, що вершина ще не пофарбована.

Табл. 25. Етапи розфарбування

номери вершин	v_1	v_5	v_6	v_4	v_2	v_3
степені вершин	5	4	4	3	2	2
$p := 1$	1	0	0	0	0	0
$p := 2$	1	2	0	0	0	2
$p := 3$	1	2	3	0	3	2
$p := 4$	1	2	3	4	3	2

Результат розфарбування показано на рис. 38. Таким чином, даний граф можна розфарбувати чотирма кольорами, тобто $\gamma(G) = 4$.

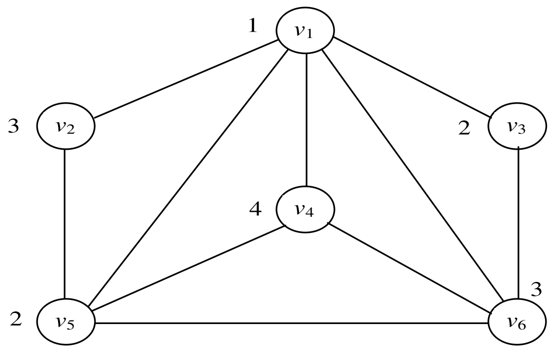

Рис. 38. Розфарбування графа з рис. 37.