

## Лекція 22. Способи задання графів.

### Способи задання графів

Графічний опис графів є незручним для їх аналізу на комп'ютерах. Тому розглянемо табличні способи задання графів.

Надалі будемо розглядати тільки скінченні графи, у яких множини вершин  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  і ребер  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  є скінченними.

Матриця суміжності вершин графа  $G(V)$  (позначається  $M(G) = \{m_{ij}\}$ ) – це квадратна матриця розміру  $n \times n$ , в якій  $m_{ij}$  – кількість ребер у графі  $G$ , які з'єднують вершину  $v_i$  з вершиною  $v_j$ . Якщо граф  $G$  неорієнтований, то

$$m_{ij} = m_{ji},$$

тобто матриця  $M$  є симетричною.

На рис. 16 зображений деякий неорієнтований граф; відповідна матриця суміжності вершин наведена в табл. 20.

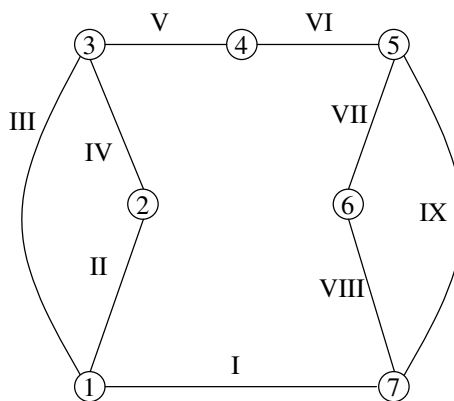


Рис. 16. Заданий граф

Табл. 20. Матриця суміжності вершин графа з рис. 16

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	0	0
3	1	1	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	1	0	1
7	1	0	0	0	1	1	0

Граф також може бути описаний за допомогою матриці інцидентності (позначається  $K(G) = \{k_{ij}\}$ ), яка має  $n$  рядків (вершини) і  $m$  стовпців (ребра). Для неорієнтованого графу  $K_{ij} = 1$ , якщо вершина  $v_i$  інцидентна ребру  $e_j$ ; в протилежному випадку  $K_{ij} = 0$ .

Для орієнтованого графа  $K_{ij} = 1$ , якщо  $v_i$  – початкова вершина ребра  $e_j$ ;  $K_{ij} = -1$ , якщо  $v_i$  – кінцева вершина ребра  $e_j$ ;  $K_{ij} = 0$ , якщо вершина  $v_i$  не інцидентна ребру  $e_j$ .

У табл. 21 наведена матриця інцидентності для неорієнтованого графа, зображеного на рис. 16.

Табл. 21. Матриця інцидентності для графа з рис. 16

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	1	1	0
7	1	0	0	0	0	0	0	1	1

На рис. 17 заданий деякий орієнтований граф. Матриця інцидентності для вказаного графа наведена в табл. 22.

Неорієнтований граф без петель  $G$  може бути також описаний квадратною матрицею суміжності ребер (позначається  $L(G) = \{l_{ij}\}$ ) розміром  $m \times m$ . У цьому разі  $l_{ij} = 1$ , якщо  $i \neq j$  й у ребер  $e_i$  та  $e_j$  є спільна вершина. У протилежному випадку маємо  $l_{ij} = 0$ .

Для графа, зображеного на рис. 16, відповідна матриця суміжності ребер наведена в табл. 23.

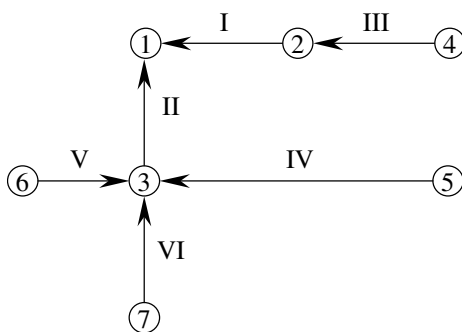


Рис. 17

Табл. 22

	I	II	III	IV	V	VI
1	-1	-1	0	0	0	0
2	1	0	-1	0	0	0
3	0	1	0	-1	-1	-1
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	1

Табл. 23

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I	0	1	1	0	0	0	0	1	1
II	1	0	1	1	0	0	0	0	0
III	1	1	0	1	1	0	0	0	0
IV	0	1	1	0	1	0	0	0	0
V	0	0	1	1	0	1	0	0	0
VI	0	0	0	0	1	0	1	0	1
VII	0	0	0	0	0	1	0	1	1
VIII	1	0	0	0	0	0	1	0	1
IX	1	0	0	0	0	1	1	1	0

### *Степінь вершини графа*

Нехай  $G(V)$  – неорієнтований граф. Степенем  $\rho(a)$  деякої вершини  $a \in V$  називається кількість ребер графа, інцидентних цій вершині.

Якщо граф заданий матрицею суміжності вершин, то

$$\rho(v_i) = \sum_{j=1}^n M_{ij}.$$

Для матриці інцидентності аналогічний вираз має вигляд

$$\rho(v_i) = \sum_{j=1}^n N_{ij}.$$

Число ребер у графі  $G$  позначимо через  $v_E = v_E(G)$ . При підрахунку суми  $\sum_{i=1}^n \rho(v_i)$  кожне ребро  $e(v_i, v_j)$ , графа  $G$  підраховується двічі: один раз – як таке, що з'єднує вершину  $v_i$  з вершиною  $v_j$ , а другий раз – як таке, що з'єднує  $v_j$  з  $v_i$ . Тому отримуємо

$$2v_e = \sum_{i=1}^n \rho(v_i), \quad (1)$$

тобто сума степенів вершин будь-якого графа дорівнює подвоєному числу його ребер. Формула (1) залишається правильною і для графу з петлями, якщо їх розглядати як подвійні ребра.

Оскільки в лівій частині рівності (1) стоїть парне число, то права частина також повинна бути парним числом. Цей факт формулюємо у вигляді такої леми.

**Лема 2.** У скінченному неорієнтованому графі без петель кількість вершин з непарним степенем є парною.

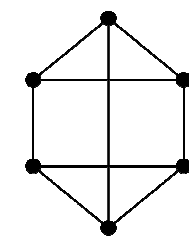
Наведене твердження (і сам вираз (1)) відомі як *лема про рукоштовнання*. Назва походить з відомого математичного завдання: необхідно довести, що в будь-якій групі кількість людей, які потиснули руку непарній кількості інших людей, буде парним.

Граф називається *однорідним степеня  $k$* , якщо  $\rho(v_i) = k$ , для всіх вершин  $v_i \in V$ . Згідно з формулою (1), в однорідному графі степеня  $k$ , який має  $n$  вершин, кількість ребер задається виразом

$$v_E = \frac{nk}{2}. \quad (2)$$

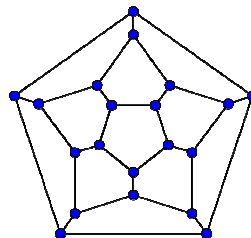
Очевидно, що однорідний граф існує лише коли  $k$  або  $n$  є парним числом, тобто коли права частина в рівності (2) є цілим числом. На рис. 18 наведено приклади однорідних графів.

Граф на рис. 18а є однорідним степеня  $k = 3$  та має  $n = 6$  вершин; кількість ребер у ньому дорівнює 9. Граф на рис. 18б є однорідним степеня  $k = 3$  та має  $n = 20$  вершин; кількість ребер у ньому дорівнює 30. Граф на рис. 18в є однорідним степеня  $k = 4$  та має  $n = 6$  вершин; кількість ребер у ньому дорівнює 12.



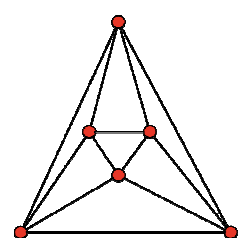
$k = 3, n = 6$

а)



$k = 3, n = 20$

б)



$k = 4, n = 6$

в)

Рис. 18. Приклади однорідних графів.

Повний граф  $U = U(V)$  – це неорієнтований граф, у якому дві довільні різні вершини з'єднані рівно одним ребром. Зрозуміло, що повний граф  $U(V)$  з  $n$  вершинами – це однорідний граф степеня  $n - 1$ . Тому кількість ребер в такому графі дорівнює

$$v_E(U) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (3)$$

Зрозуміло, що повний граф існує для будь-якої кількості вершин  $n$ , бо  $n - 1$  та  $n$  є послідовними цілими числами й одне з них обов'язково ділиться на 2. На рис. 19 подано зображення повних графів з кількістю вершин від 1 до 11. Кількість ребер у них обчислюємо згідно з виразом (3).

Так, для  $n=1$  вершин кількість ребер у повному графі дорівнює 0. Для  $n=2$  вершин кількість ребер у повному графі дорівнює 1. Для  $n=3$  вершин кількість ребер у повному графі дорівнює 3. Для  $n=4$  вершин кількість ребер у повному графі дорівнює 6. Для  $n=5$  вершин кількість ребер у повному графі дорівнює 10. Для  $n=6$  вершин кількість ребер у повному графі дорівнює 15. Для  $n=7$  вершин кількість ребер у повному графі дорівнює 21. Для  $n=8$  вершин кількість ребер у повному графі дорівнює 28. Для  $n=9$  вершин кількість ребер у повному графі дорівнює 36. Для  $n=10$  вершин кількість ребер у повному графі дорівнює 45. Для  $n=11$  вершин кількість ребер у повному графі дорівнює 55.

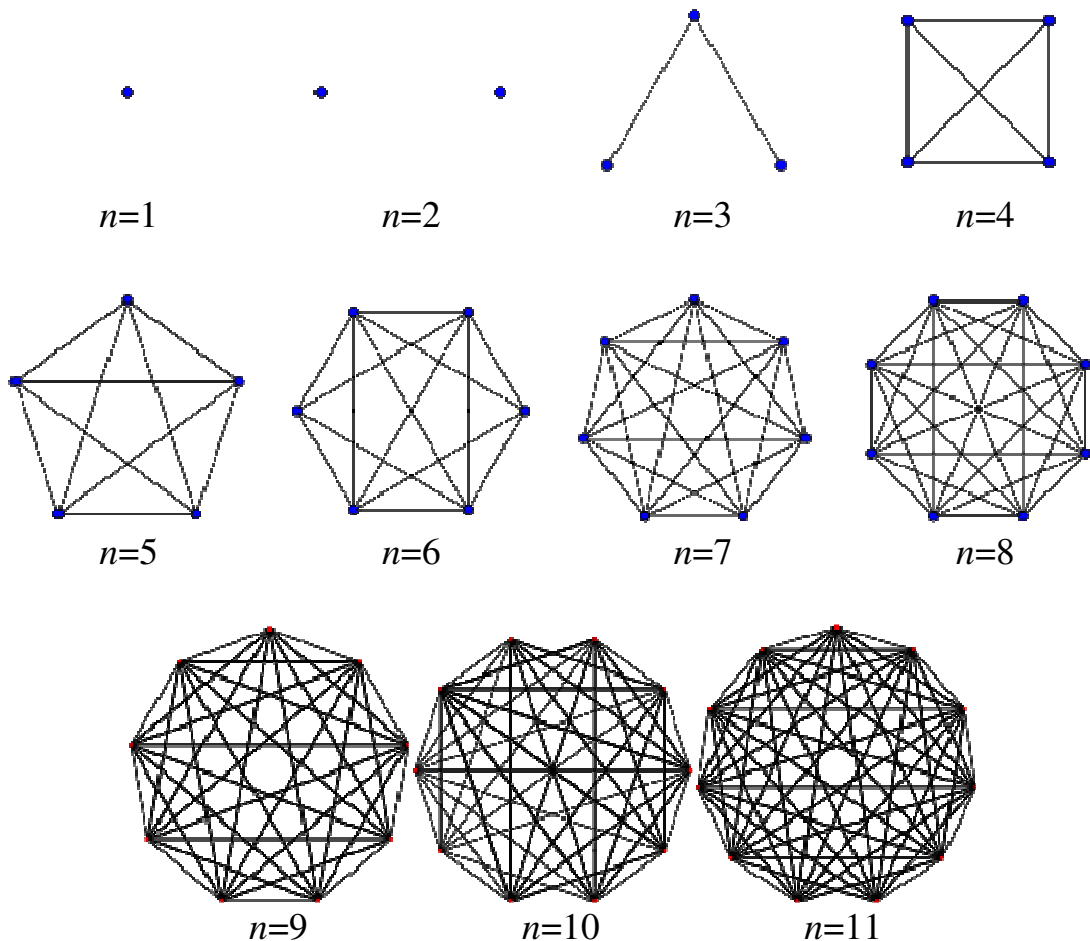


Рис. 19. Приклади повних графів.

Повний граф з петлями  $U_0 = U_0(V)$  – це повний граф, у якому до кожної вершини додана петля. Кількість ребер у повному графі з петлями дається такою рівністю:

$$v_E(U_0) = v_E(U) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Нехай тепер  $G(V)$  – орієнтований граф. Тоді через  $\rho(v_i)$  і  $\rho^*(v_i)$  позначають кількість ребер, які виходять з вершини  $v_i$  і входять в вершину  $v_i$  відповідно. Аналогічно попередньому кількість ребер в орієнтованому графі

$$v_e = \sum_{i=1}^n \rho(v_i) = \sum_{i=1}^n \rho^*(v_i).$$