

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

до розрахунково-графічної роботи
для студентів інженерно-технічних спеціальностей

*Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики.
Протокол № 3 від 26.09.2012 р.*

Львів – 2012

Інтегральне числення: Методичні вказівки та індивідуальні завдання до розрахунково-графічної роботи для студентів інженерно-технічних спеціальностей / Укл.: М.І.Вовк, Х.Т.Дрогомирецька, Р.І.Квіт, Н.В.Пабирівська, О.М.Рибицька, Т.М.Сало, У.В.Жидик, М.І.Клапчук. – Львів. Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2012. – 48 с.

Укладачі:

Вовк М.І., канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Дрогомирецька Х.Т., канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Квіт Р.І., канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Пабирівська Н.В., канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Рибицька О.М., канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Сало Т.М., канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Жидик У.В., канд. фіз.-мат. наук, ст.викл.,
Клапчук М.І., канд. фіз.-мат. наук, ас.

Відповідальний за випуск Сало Т.М., канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензенти

Каленюк П.І., д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Тарасюк С.І., канд. фіз.-мат. наук, доц.

Інтегральне числення є одним із найважливіших розділів вищої математики, що є базовим курсом при підготовці студентів інженерно-технічних спеціальностей. Необхідним етапом у вивченні інтегрального числення є самостійна робота студентів. Для цього програмою курсу передбачено виконання студентами розрахунково-графічної роботи, яка контролюється викладачем. Саме індивідуальні завдання найкраще активізують самостійну роботу студентів, сприяють глибшому засвоєнню матеріалу, допомагають підготуватись до модульних і семестрових контролів. У даних методичних вказівках і завданнях до розрахунково-графічних робіт запропоновано тридцять варіантів завдань по дванадцять задач у кожному, а також приклад розв'язання типового варіанта. Мета роботи - організувати самостійну роботу студентів над розділом "Інтегральне числення допомогти закріпити теоретичний матеріал, оволодіти основними методами інтегрування, вміти застосувати отримані знання та навички до розв'язування задач прикладного характеру у суміжних дисциплінах.

Для успішного виконання запропонованих завдань необхідно засвоїти наступні теми.

1. Первісна і невизначений інтеграл.
2. Метод заміни змінної.
3. Метод інтегрування частинами.
4. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен у знаменнику.
5. Інтегрування дробово-раціональних функцій.
6. Інтегрування тригонометричних функцій.
7. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.
8. Визначений інтеграл.
9. Невластиві інтеграли першого та другого роду.
10. Застосування визначеного інтеграла для знаходження площі фігури.
11. Застосування визначеного інтеграла для знаходження довжини дуги кривої.
12. Застосування визначеного інтеграла для знаходження об'єму тіла обертання.

Розв'язування типового варіанта

Приклад 1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (e^x - 3)^2 dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 3} dx; \quad \text{в) } \int \sin x \cos 5x dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int (e^x - 3)^2 dx &= \int (e^{2x} - 6e^x + 9) dx = \int e^{2x} dx - 6 \int e^x dx + 9 \int dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - 6e^x + 9x + C. \end{aligned}$$

б) Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом. Виділимо у ньому цілу частину:

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 5 \bigg| x + 3 \\ x^2 + 3x \\ \hline -5x + 5 \\ -5x - 15 \\ \hline 20 \end{array}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 3} dx &= \int \left(x - 5 + \frac{20}{x + 3} \right) dx = \int x dx - 5 \int dx + 20 \int \frac{1}{x + 3} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - 5x + 20 \ln |x + 3| + C. \end{aligned}$$

в) Перетворивши добуток у суму, отримаємо

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos 5x dx &= \int \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin(-4x)) dx = \frac{1}{2} \int \sin 6x dx - \frac{1}{2} \int \sin 4x dx = \\ &= -\frac{1}{12} \cos 6x + \frac{1}{8} \cos 4x + C. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 5}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)} dx; \quad \text{в) } \int e^{2 \sin x + 5} \cos x dx.$$

Розв'язання.

а) Оскільки $x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3 = \frac{1}{3} d(x^3 + 5)$, то

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 5}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{x^3 + 5}} d(x^3 + 5) = |x^3 + 5 = t| =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3} \sqrt{t} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 5} + C.$$

б) Внесемо $\frac{1}{x}$ під знак диференціала. Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)} dx &= \int \frac{1}{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{\ln^2 x + 1} d \ln x = \left| \ln x = t \right| = \\ &= \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \ln x + C. \end{aligned}$$

в) Оскільки $\cos x dx = d \sin x = \frac{1}{2} d(2 \sin x + 5)$, то

$$\begin{aligned} \int e^{2 \sin x + 5} \cos x dx &= \frac{1}{2} \int e^{2 \sin x + 5} d(2 \sin x + 5) = \left| 2 \sin x + 5 = t \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{2 \sin x + 5} + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (2x - 3) \cos 2x dx; \quad \text{б) } \int \arccos x dx; \quad \text{в) } \int e^x \sin 3x dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int (2x - 3) \cos 2x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = 2x - 3 & du = (2x - 3)' dx = 2 dx \\ dv = \cos 2x dx & v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} (2x - 3) \sin 2x - \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} (2x - 3) \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \arccos x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arccos x & du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= x \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

в) Використаймо двічі формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \int e^x \sin 3x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sin 3x & du = 3 \cos 3x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right| = e^x \sin 3x - 3 \int e^x \cos 3x dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = \cos 3x & du = -3 \sin 3x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right| = e^x \sin 3x - 3 \left(e^x \cos 3x + 3 \int e^x \sin 3x dx \right). \end{aligned}$$

Нехай $\int e^x \sin 3x dx = A$. Тоді з рівняння

$$A = e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x - 9A$$

знаходимо

$$10A = e^x (\sin 3x - 3 \cos 3x),$$

$$A = \frac{1}{10} e^x (\sin 3x - 3 \cos 3x).$$

Отже,

$$\int e^x \sin 3x dx = \frac{1}{10} e^x (\sin 3x - 3 \cos 3x) + C.$$

Приклад 4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{6x+1}{3x^2+x-2} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x-3}{x^2+4x+3} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{6-5x-x^2}}.$$

Розв'язання.

а) Оскільки вираз у чисельнику є похідною знаменника, то достатньо внести його під знак диференціала і, зробивши відповідну заміну, знайти табличний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{6x+1}{3x^2+x-2} dx &= \int \frac{1}{3x^2+x-2} d(3x^2+x-2) = \left| 3x^2+x-2 = t \right| = \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |3x^2+x-2| + C. \end{aligned}$$

б) Виділимо повний квадрат у знаменнику і зробимо заміну. Маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{x^2+4x+3} dx &= \int \frac{x-3}{(x+2)^2-1} dx = \int \frac{(x+2)-5}{(x+2)^2-1} d(x+2) = \left| x+2 = t \right| = \\ &= \int \frac{t-5}{t^2-1} dt = \int \frac{t}{t^2-1} dt - \int \frac{5}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2-1} d(t^2-1) - 5 \int \frac{1}{t^2-1} dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln |t^2-1| - \frac{5}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln |(x+2)^2-1| - \frac{5}{2} \ln \left| \frac{x+2-1}{x+2+1} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2+4x+3| - \frac{5}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C. \end{aligned}$$

в) Виділимо під коренем повний квадрат і зробимо заміну. Отримаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6-5x-x^2}} = \int \frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\frac{49}{4}-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}} = \left| x+\frac{5}{2} = t \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - t^2}} = \arcsin \frac{2t}{7} + C = \arcsin \frac{2x+5}{7} + C.$$

Приклад 5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{x^4+3x^3-x-18}{x^3+x^2-6x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2+9x+5}{(x-2)(x+1)^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{2x+3}{x^3-2x^2+3x-6} dx.$$

Розв'язання.

а) Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом. Виділимо в ньому цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} x^4+3x^3-x-18 & x^3+x^2-6x \\ x^4+x^3-6x^2 & x+2 \\ \hline 2x^3+6x^2-x-18 & \\ 2x^3+2x^2-12x & \\ \hline 4x^2+11x-18 & \end{array}$$

Тоді

$$\int \frac{x^4+3x^3-x-18}{x^3+x^2-6x} dx = \int \left(x+2 + \frac{4x^2+11x-18}{x^3+x^2-6x} \right) dx.$$

Щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб $\frac{4x^2+11x-18}{x^3+x^2-6x}$, розкладемо його на прості дроби методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{4x^2+11x-18}{x^3+x^2-6x} = \frac{4x^2+11x-18}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2}.$$

Зведемо дроби у правій частині до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3) = 4x^2+11x-18.$$

Оскільки остання рівність повинна виконуватись при будь-яких значеннях змінної x , то для знаходження трьох невідомих A, B, C надамо три різні значення x і розв'яжемо отриману систему:

$$\begin{aligned} x=0: & \quad -6A = -18, \\ x=-3: & \quad 15B = -15, \\ x=2: & \quad 10C = 20. \end{aligned}$$

Вибір значень x обумовлений простотою наступних обчислень: при кожному такому значенні два доданки перетворюються на нулі.

Маємо $A = 3, B = -1, C = 2$. Тоді

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 + 3x^3 - x - 18}{x^3 + x^2 - 6x} dx &= \int \left(x + 2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-2} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln |x| - \ln |x+3| + 2 \ln |x-2| + C = \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln \left| \frac{x^3(x-2)^2}{x+3} \right| + C.\end{aligned}$$

б) Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом. Розкладемо його на прості дробі:

$$\frac{x^2 + 9x + 5}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

$$A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2) = x^2 + 9x + 5.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів надамо x різних значень

$$x = 2 : \quad 9A = 27,$$

$$x = -1 : \quad -3C = -3,$$

$$x = 0 : \quad A - 2B - 2C = 5.$$

Отримаємо $A = 3, B = -2, C = 1$. Таким чином,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 9x + 5}{(x-2)(x+1)^2} dx &= \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \\ &= 3 \ln |x-2| - 2 \ln |x+1| - \frac{1}{x+1} + C = \ln \frac{|x-2|^3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + C.\end{aligned}$$

в) Розкладемо підінтегральну функцію на прості дробі:

$$\frac{2x+3}{x^3-2x^2+3x-6} = \frac{2x+3}{x^2(x-2)+3(x-2)} = \frac{2x+3}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3}.$$

$$A(x^2+3) + (Bx+C)(x-2) = 2x+3$$

$$Ax^2 + 3A + Bx^2 + Cx - 2Bx - 2C = 2x + 3.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$x^2 : \quad A + B = 0,$$

$$x^1 : \quad C - 2B = 2,$$

$$x^0 : \quad 3A - 2C = 3.$$

Тоді

$$\begin{cases} A = -B, \\ C = 2 + 2B, \\ -3B - 4 - 4B = 3, \end{cases} \implies \begin{cases} B = -1, \\ A = 1, \\ C = 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що для відшукування невідомих A , B і C можна було також застосувати метод, використаний у прикладах а) і б). Проте, у цьому прикладі одержали б громіздку систему. Також слід зауважити, що під час побудови системи можна комбінувати запропоновані способи.

Отже, маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^3-2x^2+3x-6} dx &= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2+3} \right) dx = \\ &= \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+3} d(x^2+3) = \\ &= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + C = \ln \frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+3}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x + 3}; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\cos^2 x - 9 \sin x \cos x}.$$

Розв'язання.

а) Скористаємось універсальною тригонометричною підстановкою $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Тоді

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3 \sin x - \cos x + 3} dx &= \int \frac{1}{\frac{6t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= 2 \int \frac{dt}{4t^2 + 6t + 2} = 2 \int \frac{dt}{\left(2t + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \\ &= \ln \left| \frac{2t+1}{2t+2} \right| + C = \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} \right| + C. \end{aligned}$$

б) Оскільки підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$, то скористаємось заміною $\sin x = t$. Для цього домножимо чисельник і знаменник підінтегральної

функції на $\cos x$, щоб після внесення під знак диференціала отримати $d \sin x$.
Маємо

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)} d \sin x = \\ &= |\sin x = t| = \int \frac{1}{t^2(1 - t^2)} dt. \end{aligned}$$

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом. Розкладемо його на прості дробі:

$$\frac{1}{t^2(1 - t^2)} = \frac{1}{t^2(1 - t)(1 + t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1 - t} + \frac{D}{1 + t}.$$

$$At(1 - t)(1 + t) + B(1 - t)(1 + t) + Ct^2(1 + t) + Dt^2(1 - t) = 1.$$

$$t = 0 : \quad B = 1,$$

$$t = 1 : \quad 2C = 1,$$

$$t = -1 : \quad 2D = 1$$

$$t = 2 : \quad -6A - 3B + 12C - 4D = 1.$$

Маємо $B = 1, C = 1/2, D = 1/2, A = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1/2}{1 - t} + \frac{1/2}{1 + t} \right) dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \ln |1 - t| + \frac{1}{2} \ln |1 + t| + C = \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| + C = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C. \end{aligned}$$

в) Оскільки підінтегральна функція є парною відносно $\cos x$ та $\sin x$, то скористаємось заміною $\operatorname{tg} x = t$. Для цього зробимо наступні перетворення

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^2 x - 9 \sin x \cos x} dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{1 - 9 \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{1}{1 - 9 \operatorname{tg} x} d \operatorname{tg} x = \\ &= |\operatorname{tg} x = t| = \int \frac{1}{1 - 9t} dt = -\frac{1}{9} \ln |1 - 9t| + C = -\frac{1}{9} \ln |1 - 9 \operatorname{tg} x| + C. \end{aligned}$$

Приклад 7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 3}}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{x} dx.$$

Розв'язання.

а) Підкореневий вираз є лінійною функцією. Замінімо його на t^2 і позбуде-
мось ірраціональності. Маємо

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+3}} = \left| \begin{array}{l} 2x+3 = t^2 \\ x = \frac{1}{2}(t^2-3) \\ dx = t dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{1+t} dt =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = t - \ln|t+1| + C = \sqrt{2x+3} - \ln|\sqrt{2x+3}+1| + C.$$

б) Оскільки підінтегральний вираз можна розуміти як $x^{-1}(1+x^{1/3})^{1/2}dx$,
то скористаємось підстановкою Чебишова для диференціального бінома. Тоді

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} 1+\sqrt[3]{x} = t^2 \\ x = (t^2-1)^3 \\ dx = 3(t^2-1)^2 \cdot 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{(t^2-1)^3} \cdot 6t(t^2-1)^2 dt =$$

$$= 6 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt = 6 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt = 6 \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C =$$

$$= 6\sqrt{1+\sqrt[3]{x}} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}+1} \right| + C.$$

Приклад 8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x} dx; \quad \text{б) } \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2 x} dx; \quad \text{в) } \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx.$$

Розв'язання.

а) Знайдемо інтеграл методом заміни змінної:

$$\int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x} dx = \int_1^e (1+\ln^2 x) d \ln x = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = e \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 (1+t^2) dt = \left(t + \frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

б) Скористаємось формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx & v = \operatorname{tg} x \end{array} \right| = x \operatorname{tg} x \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} - \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} x dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{4} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} d \cos x = \\
&= \frac{\pi(4\sqrt{3}-3)}{12} + \ln |\cos x| \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi(4\sqrt{3}-3)}{12} + \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi(4\sqrt{3}-3)}{12} - \frac{1}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

в) Зробимо підстановку $x = t^2$. Тоді

$$\begin{aligned}
\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int_0^3 \frac{1}{1+t} \cdot 2t dt = 2 \int_0^3 \frac{t}{t+1} dt = \\
&= 2 \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2(t - \ln |t+1|) \Big|_0^3 = \\
&= 2(3 - \ln 4 - 0 + \ln 1) = 2(3 - 2 \ln 2) = 6 - 4 \ln 2.
\end{aligned}$$

Приклад 9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx; \qquad \text{б) } \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Розв'язання.

а) Даний інтеграл є невластивим інтегралом першого роду. Тому

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x}{x^4+1} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{x^4+1} dx^2 = |x^2 = t| = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^{b^2} \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} t \Big|_0^{b^2} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Отже, інтеграл збіжний.

а) Маємо невластивий інтеграл другого роду. Оскільки підінтегральна функція є необмеженою на верхній межі, то

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \operatorname{arcsin} \frac{x}{2} \Big|_1^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\operatorname{arcsin} \frac{2-\varepsilon}{2} - \operatorname{arcsin} \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Отже, інтеграл збіжний.

Приклад 10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

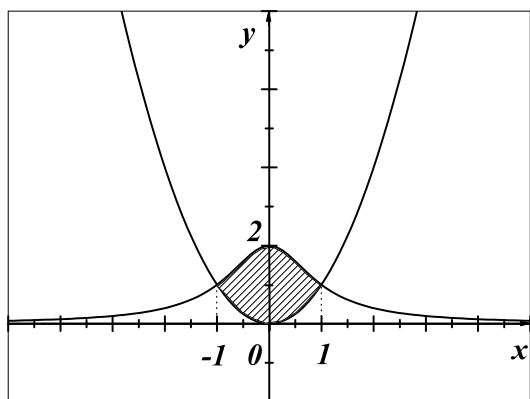
$$\text{а) } y = \frac{2}{x^2 + 1}, \quad y = x^2; \quad \text{б) } \rho = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = t^2 - t, \\ y = t^3 - t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Розв'язання. а) Зобразимо лінії, задані рівняннями, на рисунку.

Точки перетину знаходимо із рівності

$$\frac{2}{x^2 + 1} = x^2.$$

Коренями даного рівняння є $x = \pm 1$. Оскільки фігура є симетричною відносно осі Oy , то її площу можна шукати як подвоєну площу половини фігури. Тоді



$$S = 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2 + 1} - x^2 \right) dx =$$

$$= 2 \left(2 \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \pi - \frac{2}{3} \text{ (кв. од.)}$$

б) Крива задана в полярній системі координат, тому згідно з формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

отримуємо

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2} \text{ (кв. од.)}$$

в) Межа фігури задана параметрично. Скористаємось формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)| dt.$$

Оскільки $x'(t) = 2t - 1$, то

$$y(t)x'(t) = (t^3 - t)(2t - 1) = t(t - 1)(t + 1)(2t - 1).$$

Даний вираз набуває додатних значень при $t \in (0, 1/2)$ і від'ємних при $t \in (1/2, 1)$, тому

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 |(t^3 - t)(2t - 1)| dt = \int_0^{1/2} (t^3 - t)(2t - 1) dt - \int_{1/2}^1 (t^3 - t)(2t - 1) dt = \\
 &= \int_0^{1/2} (2t^4 - t^3 - 2t^2 + t) dt - \int_{1/2}^1 (2t^4 - t^3 - 2t^2 + t) dt = \\
 &= \left(\frac{2}{5} t^5 - \frac{1}{4} t^4 - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_0^{1/2} - \left(\frac{2}{5} t^5 - \frac{1}{4} t^4 - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_{1/2}^1 = \\
 &= \frac{1}{80} - \frac{1}{64} - \frac{1}{12} + \frac{1}{8} - \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{80} + \frac{1}{64} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{32} \text{ (кв. од.)}
 \end{aligned}$$

Приклад 11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y=e^x, \ 0 \leq x \leq \ln \sqrt{3}; \quad \text{б) } \rho = \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x=2 \sin t + \cos t, \\ y=2 \cos t - \sin t, \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання.

а) Крива задана в декартовій системі координат, тому згідно з формулою

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

маємо

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{\ln \sqrt{3}} \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1 + e^{2x}} = t \\ 1 + e^{2x} = t^2 \\ x = \frac{1}{2} \ln(t^2 - 1) \\ dx = \frac{t}{t^2 - 1} dt \end{array} \right| = \int_{\sqrt{2}}^2 t \cdot \frac{t}{t^2 - 1} dt = \\
 &= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = \int_{\sqrt{2}}^2 dt + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t^2 - 1} = t \Big|_{\sqrt{2}}^2 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^2 = \\
 &= 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{3} - \ln \left| \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right| \right) = 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}.
 \end{aligned}$$

б) У полярній системі координат довжину дуги кривої обчислюють за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

Оскільки $\rho' = \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$, то

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^4 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} (\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2})} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} |\sin \frac{\varphi}{2}| d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = -2 \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{2\pi} = -2(\cos \pi - \cos 0) = 4. \end{aligned}$$

в) Довжину дуги, що задана параметрично, обчислюють за формулою

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

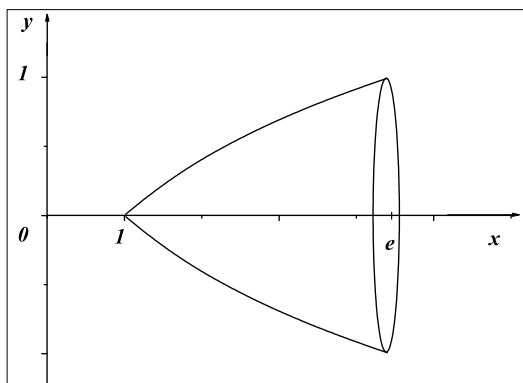
Маємо $x' = 2 \cos t - \sin t$, $y' = -2 \sin t - \cos t$. Тоді

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(2 \cos t - \sin t)^2 + (-2 \sin t - \cos t)^2} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 \cos^2 t - 4 \cos t \sin t + \sin^2 t + 4 \sin^2 t + 4 \cos t \sin t + \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{5(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{5} dt = \frac{\pi\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена кривими: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

Розв'язання. Згідно з формулою

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx$$



Решение

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_1^e \ln^2(x) dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right| = \\
 &= \pi \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx \right) = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right| = \pi \left(e - 2(x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx) \right) = \\
 &= \pi(e - 2(e - (e - 1))) = \pi(e - 2) \text{ (куб. од.)}
 \end{aligned}$$

Варіант 1

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (\sqrt{x} + 1)^2 dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{1 - \cos 4x}.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^3}{(x^4 + 2)^2} dx; \quad \text{б) } \int \frac{e^{5x}}{10 + e^{10x}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 4}}{\cos^2 x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (x^2 + 5) \cos 3x dx; \quad \text{б) } \int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{1 + x^2} dx; \quad \text{в) } \int e^{3x-1} \cos x dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{5x - 1}{5x^2 - 2x + 8} dx; \quad \text{б) } \int \frac{6x - 7}{\sqrt{x^2 + 10x + 9}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{3x^2 - 5x - 2}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 2}{x^2 + 2x - 3} dx; \quad \text{б) } \int \frac{3x^2 + 5x + 9}{x^3 + 6x^2 + 9x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{5x^2 + 2x + 9}{x^3 + x^2 + 5x + 5} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{(1 + \cos x) \sin x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{2 + \sqrt{3x - 1}}; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{2 + x^2}}.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx; \quad \text{б) } \int_1^e \ln^2 x dx; \quad \text{в) } \int_0^8 \frac{dx}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{4\sqrt{x}}}; \quad \text{б) } \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 8x + 15}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = \frac{2}{x^2 + 1}, \quad y = 3 - 2x^2; \quad \text{б) } \rho = \cos \varphi - \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t^3 - 4t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = e^{-x}, \quad \ln \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq x \leq \ln \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \text{б) } \rho = \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 2 \sin t + \cos t, \\ y = 2 \cos t - \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$xy = 5, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 5.$$

Варіант 2

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{a) } \int \sqrt[3]{x}(x+1) dx; \quad \text{б) } \int \frac{xe^x + 3 - x}{x} dx; \quad \text{в) } \int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{a) } \int \frac{x^5}{x^{12} - 4} dx; \quad \text{б) } \int x^4 e^{x^5 - 2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sin(\operatorname{ctg} 2x + 5)}{\sin^2 2x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{a) } \int \frac{x-3}{\cos^2 x} dx; \quad \text{б) } \int x^3 \log_5(x-1) dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{x^2 + 4} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{a) } \int \frac{7x+2}{\sqrt{7x^2+4x-1}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{3x-2}{x^2-6x-7} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-7x+6}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{a) } \int \frac{x^5 + x^2 + x - 1}{x^3 - x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x-7}{(x+1)(x-3)^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{5x+5}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 2 \sin^2 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{a) } \int \frac{x+2}{x\sqrt{x-3}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}-4}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{a) } \int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx; \quad \text{в) } \int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} (2x+3)e^{-x} dx; \quad \text{б) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{a) } y = 2\sqrt{x}, \quad y = \frac{x^2}{4}; \quad \text{б) } \rho = \frac{\varphi}{\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \cos t + 1, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{a) } y = x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}; \quad \text{б) } \rho = 3 \cos 2\varphi + 3, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = e^{2t} \cos t, \\ y = e^{2t} \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \ln 2.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad y = 0, \quad x = 8.$$

Варіант 3

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (3^x - 2)^2 dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}; \quad \text{в) } \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt[3]{x}}{2 + \sqrt[3]{x^4}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{(3 \ln x - 2)^4}{x} dx; \quad \text{в) } \int \sin x \sqrt{7 + \cos x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int x^2 \cos ax dx; \quad \text{б) } \int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} dx; \quad \text{в) } \int e^{-x/3} \cos 2x dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{18x - 5}{9x^2 - 5x + 6} dx; \quad \text{б) } \int \frac{5x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{5x^2 + 6x + 1}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{2x^2 + 10x + 4}{x^3 + 3x^2 - x - 3} dx; \quad \text{б) } \int \frac{5x - 9}{(x+5)(x+1)^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^4 + 2x^2 + 4x - 1}{x^3 - 1} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 5 \cos^2 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^4 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt{x} - 2}{1 + x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x^3}}.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx; \quad \text{в) } \int_0^{\ln 10} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx; \quad \text{б) } \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = x^2, \quad x + y = 2; \quad \text{б) } \rho = \varphi \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = (1 - \sqrt[3]{x^2})^{3/2}, \quad \frac{1}{27} \leq x \leq \frac{1}{8}; \quad \text{б) } \rho = \frac{4}{\varphi}, \quad 1 \leq \varphi \leq \sqrt{3}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = e^{3t} \sin 2t + 5, \\ y = e^{3t} \cos 2t - 2, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \ln 3\sqrt{13}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = 2 \cos x, \quad y = 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Варіант 4

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (\sqrt[3]{x} - 1)^2 dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x^2 - 4x + 1}{x - 2} dx; \quad \text{в) } \int (2 + \sin x)^2 dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^6}{\sqrt{x^{14} + 2}} dx; \quad \text{б) } \int 2^{2^x} 2^x dx; \quad \text{в) } \int \frac{e^{\operatorname{tg} x + 7}}{\cos^2 x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\ln x - 3}{x^4} dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{4 - x^2} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{4x + 3}{\sqrt{4x^2 + 6x - 7}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{9x + 4}{x^2 - 4x - 21} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 2x + 1}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{2x^4 - 24x^2 - 23x + 4}{x^3 - 3x^2 - 4x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x^2 - 4x - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + x + 2}.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\cos x}{\sqrt{3 \sin^2 x - \cos^2 x}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\cos^3 x \sin x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}; \quad \text{б) } \int \frac{x^3}{\sqrt{3+x^2}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx; \quad \text{б) } \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx; \quad \text{в) } \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 8x + 17}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = |\lg x|, \quad y = 0, \quad x = 0, 1, \quad x = 10; \quad \text{б) } \rho = \frac{1}{1 - \cos \varphi}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 3t - t^2, \\ y = 3t^2 - t^3, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \frac{1}{4} \ln \cos 4x, \quad \frac{\pi}{16} \leq x \leq \frac{\pi}{12}; \quad \text{б) } \rho = 1 - \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \cos 4t - 4 \cos t, \\ y = \sin 4t + 4 \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/5.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = x^2 - 2x + 1, \quad y = 0, \quad x = 2.$$

Варіант 5

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int x(1 + \sqrt{x}) \, dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} \, dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{1 + \cos 8x}.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int x^5(1 - x^6)^{12} \, dx; \quad \text{б) } \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} - 16}} \, dx; \quad \text{в) } \int 2^{\cos x + 6} \sin x \, dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (3x - x^2) \cos \frac{x}{2} \, dx; \quad \text{б) } \int \lg(x^2 + 9) \, dx; \quad \text{в) } \int \frac{\cos(5x - 3)}{e^x} \, dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{6x - 7}{3x^2 - 7x - 14} \, dx; \quad \text{б) } \int \frac{7x + 2}{\sqrt{x^2 + 14x + 13}} \, dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{4x^2 - 9x + 2}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{x^4 - x^3 - 10x - 12}{x^3 - 4x} \, dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 - 4x + 2}{(x - 3)^3} \, dx; \quad \text{в) } \int \frac{3x^2 + 13x - 6}{x^3 + 7x^2 + x + 7} \, dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin x}{\cos x + 3} \, dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\cos^5 x \sin^3 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} \, dx; \quad \text{б) } \int x^3 \sqrt{x^2 + 2} \, dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{-1}^0 2^x \cos(\pi 2^x) \, dx; \quad \text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{x \, dx}{\sin^2 x}; \quad \text{в) } \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{1 - x^2}{x^4 + x^2} \, dx; \quad \text{б) } \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2 + 10x + 16}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = 2^x, \quad y = 2; \quad x = 0; \quad \text{б) } \rho = \sin^2 \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{12}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \cos^5 t, \\ y = \sin^5 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \operatorname{ch} x + 3, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad \text{б) } \rho = 1 - \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \frac{1}{4}(\sin t - t), \\ y = \frac{1}{4}(\cos t - 1), \end{cases} \quad \frac{4\pi}{3} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = 0, \quad x = \pi/4.$$

Варіант 6

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (2 + e^x)^3 dx; \quad \text{б) } \int \frac{2\sqrt{x} + 3}{x} dx; \quad \text{в) } \int \sin 7x \cos x \cos 5x dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^3}{(x^4 + 9)^5} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{e^{5\operatorname{tg} 3x + 4}}{\cos^2 3x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int \frac{(1-x)\sin x}{\cos^3 x} dx; \quad \text{б) } \int (x-2)\operatorname{arctg} 3x dx; \quad \text{в) } \int e^{-x} \sin^2 x dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{10x + 1}{\sqrt{10x^2 + 2x - 3}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{4x - 5}{x^2 - 8x + 17} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{7x - 3x^2 - 2}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x^2 - 6x + 7}{(x-1)^2(x+2)} dx; \quad \text{в) } \int \frac{4x^2 - x + 6}{x^3 + 2x} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{3 + 2\sin x + \cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt[4]{x+2}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2+\sqrt{x}}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx; \quad \text{б) } \int_0^{1/2} \arcsin x dx; \quad \text{в) } \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_{\pi}^{+\infty} \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/6} \operatorname{ctg} x dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = \frac{x^2 - 4x}{2}, \quad y = 0; \quad \text{б) } \rho = 3 + 2\cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = t^2 + 3t, \\ y = t^3 + 3t^2, \end{cases} \quad -3 \leq t \leq 0.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \sqrt{(x+2)^3}, \quad -2 \leq x \leq -1; \quad \text{б) } \rho = 3(\varphi^2 - 1), \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 4\sin^3 t - 3\sin t, \\ y = 4\cos^3 t - 3\cos t, \end{cases} \quad 2 \leq t \leq 4.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \ln 2.$$

Варіант 7

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int \sqrt[4]{x}(1 - \sqrt[3]{x}) dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x+1}{3x+2} dx; \quad \text{в) } \int (\sin x + \cos x)^2 dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^4}{\sqrt[7]{x^5+2}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln 5x}}; \quad \text{в) } \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x - 3}}{\cos^2 x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (5x+2) \sin^2 x dx; \quad \text{б) } \int (5x+1) \ln^2 x dx; \quad \text{в) } \int 3^{x+5} \cos 2x dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{4x+5}{2x^2+5x-1} dx; \quad \text{б) } \int \frac{7x+6}{\sqrt{x^2-10x+16}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{10x-2x^2-8}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{19x+33}{x^3-9x+2x^2-18} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2+15x-28}{(x^2+2x-8)(x-2)} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^4-x+6}{x^3+8} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{5-4\cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{2\sin x - \cos x}{\cos^2 x(\cos x + \sin x)} dx.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt{x+2}}{x+4} dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^3}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}; \quad \text{б) } \int_1^3 (3x+5) \ln x dx; \quad \text{в) } \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{4x^2-9} dx; \quad \text{б) } \int_{-1}^0 \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = 4x^2, \quad y = 10 - x^2; \quad \text{б) } \rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \sin t + 5, \\ y = 2\cos^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \sqrt{x}, \quad \frac{1}{4} \leq x \leq 1; \quad \text{б) } \rho = 5\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 1; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 3\cos t - 4\cos^3 t, \\ y = -4\sin^3 t + 3\sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \sqrt{2x}, \quad x - y = 0.$$

Варіант 8

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int 2^x(1-3^x) dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}; \quad \text{в) } \int \sin 3x \sin 5x dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int x^2 \sqrt[5]{2-x^3} dx; \quad \text{б) } \int x^2 6^{1+2x^3} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[5]{1+\operatorname{ctg} x}}.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int \frac{x \cos x}{\sin^5 x} dx; \quad \text{б) } \int (2x+7) \operatorname{arccotg} 2x dx; \quad \text{в) } \int 5^{-x} \sin 2x \cos 2x dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{5x+4}{\sqrt{5x^2+8x+9}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{8x-3}{x^2-12x+20} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2-1}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{x^5+x^4-18}{x^3-9x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{6x^2-4x+5}{x^3+5x^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x+3}{x^3+x^2+x+1} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{13-5 \cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\cos x}{8 \sin^2 x - \cos^2 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\sin 2x} dx.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^2}}.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx; \quad \text{в) } \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} x^2 5^{-x} dx; \quad \text{б) } \int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt{5x+10}}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = \ln x, \quad y = 0; \quad x = e. \quad \text{б) } \rho = 3 \sin 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \frac{\sin^2 t}{2 + \sin t}, \\ y = \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = 3e^{-x}, \quad \ln \frac{3}{2\sqrt{2}} \leq x \leq \ln \sqrt{3}; \quad \text{б) } \rho = \varphi^3, \quad \sqrt{3} \leq \varphi \leq 3; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 2e^t \sin t - 1, \\ y = 2e^t \cos t + 1, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \ln 2.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = x^4, \quad y = x.$$

Варіант 9

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (1 + \sqrt[3]{x})^3 dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 + 5x + 8}{x + 3} dx; \quad \text{в) } \int \cos^4 \frac{x}{2} dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x} + 5}}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{1 - 2^{\ln x}}{x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int \frac{x + 1}{\sin^2 x} dx; \quad \text{б) } \int (8x + 1) \lg^2 x dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{3 - x^2} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{6x - 1}{6x^2 - 2x + 11} dx; \quad \text{б) } \int \frac{4x + 7}{\sqrt{x^2 + 6x + 25}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 1}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 - 8}{(x + 2)^3} dx; \quad \text{в) } \int \frac{5x^2}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{2 \cos x - \sin x + 1}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin x}{\cos 2x + 3} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sin x}{\cos^2 x (\sin x + 3 \cos x)} dx.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1}}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}-2}}{\sqrt{x}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} x \sin x dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{2^{\arctg x}}{1 + x^2} dx; \quad \text{б) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = 2^x, \quad y = 2^{-x}; \quad x = 1. \quad \text{б) } \rho = \operatorname{tg} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \frac{t^2}{1 + t^3}, \\ y = \frac{t}{1 + t^3}, \end{cases} \quad 0 \leq t < \infty.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \frac{1}{6} \sqrt{x(6-2x)}, \quad 0 \leq x \leq 9; \quad \text{б) } \rho = e^{2\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \ln \sqrt{3}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 3 \sin^3 t + 2, \\ y = 3 \cos^3 t + 4, \end{cases} \quad \pi/4 \leq t \leq \pi/2.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \arcsin x, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

Варіант 10

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (3 - \sqrt{x})^2 dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x+4}{x+1} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^4}{\sqrt[5]{8-x^5}} dx; \quad \text{б) } \int 2^x \sin(2^x) dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{\frac{10 + \arcsin x}{1-x^2}} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (1-x^2) \sin 5x dx; \quad \text{б) } \int \frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\sin^2 x} dx; \quad \text{в) } \int e^{5x+3} \sin x dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{22x-1}{\sqrt{11x^2-x+7}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{8x+3}{x^2+8x-20} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{7x-6x^2-2}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{2x+3}{x^3+6x^2+11x+6} dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x^4+3x^2+x-2}{x^3+x^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{7-x}{(x+1)(x^2-2x+5)} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{1-3\sin x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 3\sin^2 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\cos x(\sin x - \cos x)}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+9}}; \quad \text{б) } \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x)^5}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(2+\operatorname{tg}^2 x) \cos^2 x}; \quad \text{б) } \int_{-1}^1 x e^{-x} dx; \quad \text{в) } \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_7^{+\infty} \frac{dx}{x^2-10x+29}; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = 3\sqrt{x}, \quad y = 3x; \quad \text{б) } \rho = 2\sin 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \cos 3t + 1, \\ y = \sin 3t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \arcsin e^{-x}, \quad \ln 2 \leq x \leq \ln 3; \quad \text{б) } \rho = 2e^{3\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{3} \ln \sqrt{90}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \sin t - 2\cos t, \\ y = 2\sin t + \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \sqrt{5}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = 4 - x^2, \quad y = 0.$$

Варіант 11

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (2^x + 1)^2 dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx; \quad \text{в) } \int \sin x \cos x \cos 2x dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^4}{2+3x^5} dx; \quad \text{б) } \int \frac{1 - \cos(\ln x)}{x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{e^{4 \arccos x + 1}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx; \quad \text{б) } \int (x^4 - \sqrt{x}) \log_3 x dx; \quad \text{в) } \int 2^{x-5} 3^{2x} \sin x dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{8x-9}{4x^2-9x+4} dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-14x+33}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{5x^2-2x+2}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{x^3 - 15x + 8}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} dx; \quad \text{б) } \int \frac{40 + 9x - x^2}{(x+3)(x^2+2x-3)} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^2 - 3x + 8}{x^3 + 4x^2 + 2x + 8} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\cos x + 3 \sin x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^4 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt{x}}{4 - \sqrt[3]{x}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_e^{e^3} \frac{dx}{x(\ln x + 1)^2}; \quad \text{б) } \int_0^\pi x \sin \frac{x}{2} dx; \quad \text{в) } \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 4x}; \quad \text{б) } \int_0^{2/\pi} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = \arctg x, \quad y = \frac{\pi}{4}, \quad x = 0; \quad \text{б) } \rho = \frac{1}{\sin \varphi}, \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \sin t + 4, \\ y = 5 \cos^3 t - 1, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \ln(1-x^2) + 4, \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \rho = \frac{3}{e^\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \ln \sqrt{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 3 \sin t + 4 \cos t, \\ y = 4 \sin t - 3 \cos t, \end{cases} \quad 2 \leq t \leq 3.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = 2^x, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 1.$$

Варіант 12

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int \sqrt{x}(x^2 - 1) dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 + 5}{x^2 + 4} dx; \quad \text{в) } \int (\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{ctg}^2 2x) dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^3}{\sqrt[3]{4+x^4}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{\ln x - 3}}{x} dx; \quad \text{в) } \int 5^{2 \cos 4x + 1} \sin 4x dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int x^2 \sin(5x - 1) dx; \quad \text{б) } \int \cos x \ln(\sin x) dx; \quad \text{в) } \int e^{-2x} \sin \frac{x}{5} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{6x + 1}{\sqrt{6x^2 + 2x - 9}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{3x + 8}{x^2 + 12x - 28} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 7x + 3}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{x}{(x-1)(x^2 + 3x + 2)} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^3 + x^2 - 8}{x^2(x+2)} dx; \quad \text{в) } \int \frac{15x + 6}{x^3 - x^2 - 4x - 6} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{4 \cos x + 5}; \quad \text{б) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin x + 1} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x - 3} + 2}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4 + \sqrt{x}}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin^3 x}} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 x e^{3x} dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_{\pi/2}^{+\infty} \cos^2 \frac{x}{2} dx; \quad \text{б) } \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } xy = 7, \ y = 0, \ x = 1, \ x = 7; \quad \text{б) } \rho = \cos^2 \varphi, \ -\frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin 2t + 1, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = (1 - \sqrt[3]{x^2})^{3/2}, \ -1 \leq x \leq -\frac{1}{8}; \quad \text{б) } \rho = \sin^5 \frac{\varphi}{5}, \ \frac{5\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 10t^3 + 4, \\ y = 9t^5 - 5t - 1, \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = x^2, \quad y = 0, \quad x = -3.$$

Варіант 13

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (2 + x^2)^3 dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x - 5}{1 - 3x} dx; \quad \text{в) } \int (\cos x - \sin x)^2 dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \sqrt[5]{x} \sqrt{2 + \sqrt[5]{x^6}} dx; \quad \text{б) } \int 10x^9 \cdot 10^{x^{10}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sin^2 x (15 + \operatorname{ctg} x)^7}.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx; \quad \text{б) } \int (x + 3) \operatorname{arctg} x dx; \quad \text{в) } \int e^x \sin 3x \cos 3x dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{7x + 3}{7x^2 + 6x - 8} dx; \quad \text{б) } \int \frac{11x - 2}{\sqrt{x^2 + 10x - 24}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{7x - 3x^2 - 4}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{x^4 - x + 2}{x^3 - 4x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{5x^2 - 7x - 4}{(x - 7)(x + 1)^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{11x - 21}{x^3 + 27} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{1 + 4 \sin x + \cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{4 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt[4]{x-1} + 1}{\sqrt{x-1} + x-1} dx; \quad \text{б) } \int x^2 \sqrt[3]{3+x} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2} dx; \quad \text{б) } \int_{-1}^1 \arccos x dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} x \operatorname{arctg} x dx; \quad \text{б) } \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x}}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = 3\sqrt{x}, \quad y = \frac{x^2}{9}; \quad \text{б) } \rho = \sqrt{\sin 4\varphi}, \quad \frac{\pi}{16} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 3 \sin t, \\ y = 4 \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = 2 - \ln \sin x, \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{б) } \rho = \frac{1}{4}\varphi^4, \quad 0 \leq \varphi \leq 1; \quad \text{в) } \begin{cases} x = -6t^2 - 5, \\ y = 6t^3 - 2t + 3, \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \sin x, \quad y = 2 \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

Варіант 14

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int e^x(2 - e^{-3x}) dx; \quad \text{б) } \int \frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x} dx; \quad \text{в) } \int \cos 3x \sin 7x dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})}; \quad \text{б) } \int \frac{e^{7x}}{e^{14x} + 9} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sqrt[7]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (4x - 1) \cos^2 x dx; \quad \text{б) } \int \ln(x^2 - 4) dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sin(2x + 1)}{e^x} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{9x - 4}{\sqrt{9x^2 - 8x + 3}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{6x - 7}{x^2 + 4x + 29} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x - 5}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{19x + 15}{(x - 3)(x^2 + x)} dx; \quad \text{б) } \int \frac{3x + 10}{x^3 - 5x^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^4 + x - 6}{x^3 + x^2 + 2x + 2} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{3 \sin x + 5 + 5 \cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\cos^3 x}{3 \sin^2 x + 5} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 2 \cos^2 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x - 2}(\sqrt[3]{x - 2} - 1)}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{4 + \sqrt{x}}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/4} \frac{(\operatorname{tg} x)^{3/2}}{\cos^2 x} dx; \quad \text{б) } \int_0^{1/2} x \arcsin x dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_{\pi/6}^{+\infty} x \cos 3x dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = x^2 - 3, \quad x - y = 1; \quad \text{б) } \rho = \varphi + \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = t - t^2, \\ y = t - t^3, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = (4 - \sqrt[3]{x^2})^{3/2}, \quad 1 \leq x \leq 8; \quad \text{б) } \rho = 7(\cos \varphi + 1), \quad \pi/2 \leq \varphi \leq \pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 3 \cos^2 t + 3t, \\ y = 4 \sin^2 t - 4t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/4.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

Варіант 15

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (2\sqrt{x} - 1)^2 dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 + 3}{2x^2 + 1} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\cos 6x - 1}.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5 + 3}}; \quad \text{б) } \int \frac{(\ln x - 4)^3}{3x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1 + x^2} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int \frac{(2x + 3) \cos x}{\sin^3 x} dx; \quad \text{б) } \int (5x - 1) \operatorname{arctg} x dx; \quad \text{в) } \int e^x \cos^2 5x dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{20x - 9}{10x^2 - 9x + 4} dx; \quad \text{б) } \int \frac{7x - 8}{\sqrt{x^2 - 6x + 45}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{9x - 2x^2 + 5}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{2x^3 + x^2 - 28x - 24}{(x + 2)(x^2 - 3x)} dx; \quad \text{б) } \int \frac{2 + 5x - 2x^2}{(x - 2)^3} dx; \quad \text{в) } \int \frac{4x + 8}{x^3 - x^2 + 3x - 3} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{5 \sin x + \cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin^3 x + 2 \sin x}{\cos^2 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{1 + \sqrt{5x + 2}}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \sin 2x dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{3} dx; \quad \text{в) } \int_1^4 x^{-1/2} e^{\sqrt{x}} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_{\pi^2/9}^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{б) } \int_{1/e^2}^1 \frac{dx}{x \sqrt{2 + \ln x}}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = 2 - x^2, \quad y = x; \quad \text{б) } \rho = \cos \varphi + 3, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 6 \sin^3 t, \\ y = \cos t + 4, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \frac{1}{\pi} \ln \sin \pi x, \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \rho = 4(1 - \cos \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq 0; \quad \text{в) } \begin{cases} x = -3 \cos^2 t + 6t, \\ y = 4 \sin^2 t + 8t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

Варіант 16

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int \sqrt{x}(x+3) dx; \quad \text{б) } \int \frac{4-3x}{2x+1} dx; \quad \text{в) } \int \sin^2 3x \sin 8x dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^5 dx}{\sqrt[7]{x^6-1}}; \quad \text{б) } \int \frac{2^x}{4^x+9} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(5+\operatorname{arctg} x)}}.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (x-2) \sin 3x \cos 3x dx; \quad \text{б) } \int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad \text{в) } \int 8^{x-1} \sin \frac{x}{3} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{x+2}{\sqrt{3x^2+12x-7}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x-11}{x^2-8x+7} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{6x^2-5x-1}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{2x^5+6x^4-8x^3-6x-4}{x^3+3x^2-4x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^3+x-1}{x^2(x-1)^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{10x-6}{x^3-4x^2+x-4} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{1+3\cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sin^2 x - 4\cos^2 x} dx.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{x-3}{x\sqrt{x+4}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{7+\sqrt{x}}}{x} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x \ln(\sin x) dx; \quad \text{б) } \int_e^{e^2} x \ln x dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_6^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+8}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x+5}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = 2 - x^2, \quad y = x; \quad \text{б) } \rho = \sin \varphi + \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 2t(t-2), \\ y = 3t(t^2-4), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \frac{1}{2}x^2+4, \quad 0 \leq x \leq \pi/6; \quad \text{б) } \rho = \cos \varphi + \sin \varphi, \quad \pi/2 \leq \varphi \leq \pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = -\sin t + \cos t, \\ y = \cos t + \sin t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \sqrt[4]{x}, \quad y = 0, \quad x = 16.$$

Варіант 17

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int 3^x(1+2^x) dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sin^2 3x \cos^2 3x}.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^4 dx}{3-x^{10}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{e^{4x}}{\sqrt[3]{e^{4x}+10}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{3^{\arcsin x+2}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (x^2-3)e^{-x} dx; \quad \text{б) } \int \ln^3 x dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{7-x^2} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{11x-5}{11x^2-10x+6} dx; \quad \text{б) } \int \frac{10x-7}{\sqrt{x^2+14x-15}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{2x-5x^2-2}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{3x^4-15x^3+18x^2+1}{x^2-5x+6} dx; \quad \text{б) } \int \frac{-x^2+x+9}{x^3-6x^2+9} dx; \quad \text{в) } \int \frac{2x^2-3x+4}{x^3+x} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+1}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sin^2 x+\cos^4 x}{\cos^2 x+\sin^4 x} dx.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{1+\sqrt[5]{x^2}}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{3+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}; \quad \text{б) } \int_2^3 \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad \text{в) } \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+5x^2+4} dx; \quad \text{б) } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = \cos x, \quad y = 1 - \frac{2}{\pi}x; \quad \text{б) } \rho = 5\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 4\cos^5 t, \\ y = 4\sin t - 3, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \frac{1}{3} \ln \sin 3x, \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \quad \text{б) } \rho = 1 - \varphi^2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 2\sin^2 t + 2t, \\ y = \cos^2 t - t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

Варіант 18

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (\sqrt[4]{x} - 3)^2 dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx; \quad \text{в) } \int \cos^2 x \sin^2 3x dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt[5]{x}}{(1 - \sqrt[5]{x^6})} dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}}; \quad \text{в) } \int \frac{10^{\operatorname{tg} x - 1}}{\cos^2 x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (2x + 1)5^{-x} dx; \quad \text{б) } \int \arcsin^2 x dx; \quad \text{в) } \int 2^{-x} \cos^2 \frac{x}{3} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{7x - 4}{\sqrt{7x^2 - 8x + 14}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{5x - 9}{x^2 - 12x + 32} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{7x^2 - 4x - 3}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{2x + 12}{x^3 - 3x^2 - 4x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^4 - 5x^3 + 27x - 27}{(x + 1)(x - 3)^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x - 9}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{4 \sin x - \cos x + 15}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sin x \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x - 5}}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}}}{x} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{б) } \int_1^{\sqrt{3}} \arctg x dx; \quad \text{в) } \int_0^1 x^7 \sqrt{1 + x^2} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \sin^3 x dx; \quad \text{б) } \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = \arctg x, y = 0, x = \sqrt{3}; \quad \text{б) } \rho = 1 + \cos 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \cos t \sin 2t, \\ y = 2 \cos t, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = (9 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}, 1 \leq x \leq 27; \quad \text{б) } \rho = 2 \cos \varphi + 3 \sin \varphi, \quad \frac{\pi}{13} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{13}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \cos t + 2t \sin t, \\ y = \sin t - 2t \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \frac{1}{x + 1}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3.$$

Варіант 19

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (x^2 + 1)^3 dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^3}{x+1} dx; \quad \text{в) } \int (\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)^2 dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^8}{\sqrt{x^{18} + 9}} dx; \quad \text{б) } \int x^4 \cdot 8^{1-x^5} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x + 6}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (7x + 4)e^{2x-1} dx; \quad \text{б) } \int \arccos^2 x dx; \quad \text{в) } \int \cos(\ln 3x) dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{24x + 11}{12x^2 + 11x - 2} dx; \quad \text{б) } \int \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 + 18x + 17}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{x - 6x^2 + 2}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{(x+2)^2}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 - 9}{(x+1)(x-1)^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x + 4}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{25 - 7 \cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{16 \sin^2 x + 8 \cos x \sin x + \cos^2 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt{x+2} dx}{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+2}}; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{x^6}{x^{14} + 5} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/4} x \cos 4x dx; \quad \text{в) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx; \quad \text{б) } \int_0^e \frac{3 + \ln x}{x} dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = 3x - x^2, \quad y = x^2 - x; \quad \text{б) } \rho = \varphi \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \sin^3 3t, \\ y = \cos 3t, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \quad 0 \leq x \leq 5; \quad \text{б) } \rho = 3 \cos \varphi + 4 \sin \varphi, \quad \frac{1}{5} \leq \varphi \leq 1; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t, \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \arccos x, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

Варіант 20

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (e^x - 1)e^{-2x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{1 - \cos \frac{x}{3}}.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int x^{10}(x^{11} - 50)^6 dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln^2 x}}; \quad \text{в) } \int \frac{5^{\operatorname{arctg} x + 4}}{1 + x^2} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int \frac{x^2 + 5}{e^{2x}} dx; \quad \text{б) } \int \sqrt{x} \lg x dx; \quad \text{в) } \int \sin(\ln 2x) dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{4x - 7}{\sqrt{4x^2 - 14x + 3}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{8x + 3}{x^2 - 16x + 39} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 8x - 3}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{x^4 + 7x - 20}{(x^2 + 2x - 3)(x - 2)} dx; \quad \text{б) } \int \frac{8x - 12}{x^2(x + 3)} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^6}{1 - x^4} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{3 \sin x + 3 \cos x + 4}; \quad \text{б) } \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 3 \cos^2 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\operatorname{tg} x + 5}{3 \sin 2x} dx.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x-6} - \sqrt{x-6}}; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}}.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_3^4 \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}; \quad \text{б) } \int_1^5 x \ln x dx; \quad \text{в) } \int_0^{\ln 6} \sqrt{e^x + 3} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^0 (2x - 1) \sin \frac{x}{3} dx; \quad \text{б) } \int_0^5 \frac{dx}{(x - 5)^2}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = x^2, \quad y = \frac{x^3}{3}; \quad \text{б) } \rho = \frac{2}{1 - \cos 2\varphi}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \cos 2t - 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \operatorname{ch}^2 x, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \rho = 4 \sin \varphi - 3 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \sqrt{5}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 6t^2, \\ y = 3t^3 - 4t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad y = x.$$

Варіант 21

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int x(2 - \sqrt{x}) \, dx; \quad \text{б) } \int \frac{x}{x+7} \, dx; \quad \text{в) } \int \cos 4x \cos 2x \sin 2x \, dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^7}{\sqrt[9]{x^8 + 12}} \, dx; \quad \text{б) } \int \frac{(\ln x - 3)^2}{x} \, dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sin x}{e^{5-\cos x}} \, dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int \frac{(2x+3)\cos x}{\sin^3 x} \, dx; \quad \text{б) } \int (5x-1)\operatorname{arctg} x \, dx; \quad \text{в) } \int e^x \cos^2 5x \, dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{x+1}{6x^2+12x-3} \, dx; \quad \text{б) } \int \frac{9x+7}{\sqrt{x^2-4x-45}} \, dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{5x-7x^2+2}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{3x+17}{x^3-2x^2-11x+12} \, dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^4-2x^3+3x+3}{x^3-2x^2+x} \, dx; \quad \text{в) } \int \frac{4x-2}{x^3-x^2+2x-2} \, dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x - 2}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 3} \, dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sin 2x \cos^2 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{x+3}}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{8-x^4}}{x} \, dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{\pi^2/36}^{\pi^2/4} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx; \quad \text{б) } \int_0^3 x e^{x/3} \, dx; \quad \text{в) } \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} \, dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin e^{-x}}{e^x} \, dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = \frac{x^2}{2}; \quad \text{б) } \rho = 1 + \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 2 \sin t - \sin 2t, \\ y = 2 \cos t - \cos 2t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \arcsin e^x, \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}; \quad \text{б) } \rho = \cos^3 \frac{\varphi}{3}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos^2 t, \\ y = \frac{1}{2} \sin^2 t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \sin 2x, \quad y = 0, \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}).$$

Варіант 22

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (1 - 3\sqrt{x})^2 dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x-1}{2x+1} dx; \quad \text{в) } \int (3 - \cos \frac{x}{2})^2 dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int x^5 \sqrt[3]{12-x^6} dx; \quad \text{б) } \int 3^x \cos(3^x - 4) dx; \quad \text{в) } \int \frac{(\operatorname{ctg} x + 1)^{10}}{\sin^2 x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int \frac{3x+5}{7^x} dx; \quad \text{б) } \int x \operatorname{arccotg}^2 x dx; \quad \text{в) } \int \sin(\ln(x-1)) dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{20x-11}{\sqrt{10x^2-11x+9}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{7x+15}{x^2-20x+19} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x+2}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{3+4x-x^3}{x^3-4x^2+3x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{7x^2-31}{(x+2)(x+1)^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{28-5x}{x^3+64} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{4 \sin x + 7 \cos x + 7}; \quad \text{б) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x - 4}; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt{x-3}}{x+6} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-\sqrt{x}}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_2^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_9^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x-5}; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-\sin x}} dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = \arcsin x, y = \arccos x, x = 0; \quad \text{б) } \rho = \frac{1}{1 + \cos \varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \sin^3 2t, \\ y = \cos^3 2t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \frac{1-x^2}{8}, 0 \leq x \leq 1; \quad \text{б) } \rho = 2 \sin^3 \frac{\varphi}{3}, \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 3t^3 - 4t, \\ y = -6t^2, \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 0.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \sqrt{x}, \quad y = x.$$

Варіант 23

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int 2^x(3^x - 1) dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}; \quad \text{в) } \int \cos 2x \cos 6x dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt[4]{\sqrt{x} + 15}}{\sqrt[4]{x^3}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sin(5 + \ln x)}{x} dx; \quad \text{в) } \int e^{1 - \cos 5x} \sin 5x dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (3x - 2)e^{x+1}2^{2x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\arccos x}{\sqrt{x+1}} dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{3x + 5}{3x^2 + 10x - 11} dx; \quad \text{б) } \int \frac{9x - 14}{\sqrt{x^2 + 8x - 9}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{5x - 3x^2 + 2}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{4x + 9}{x^3 + 4x^2 - 9x - 36} dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x^2 + 9x}{(x + 4)^3} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{13 + 12 \cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\cos x + \cos^3 x}{\sin^2 x + 2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt[6]{x+2} + \sqrt[3]{x+2}}; \quad \text{б) } \int x^3 \sqrt{x^2 + 5} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/4} x^2 \cos x dx; \quad \text{в) } \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} x \operatorname{arctg} x dx; \quad \text{б) } \int_{-\pi/2}^0 \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = \ln x, y = 0, x = \frac{1}{e}; \quad \text{б) } \rho = \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = t^2 - 3t, \\ y = 9t - t^3, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \ln(1 - x^2), -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \text{б) } \rho = \sin^4 \frac{\varphi}{4}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 3 \cos t - \cos 3t, \\ y = 3 \sin t - \sin 3t, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = x^2 - 4x + 4, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3.$$

Варіант 24

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int \sqrt[5]{x}(2+x) dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x^2 + 3x - 1}{x+1} dx; \quad \text{в) } \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^6}{\sqrt[3]{9-x^7}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt[5]{\ln x - 5}}{x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x + 10}}{\sin^2 x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int \frac{x^2}{2x+3} dx; \quad \text{б) } \int 2^x \operatorname{arctg}(2^x) dx; \quad \text{в) } \int e^{\arcsin x} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{5x-7}{\sqrt{5x^2-14x-12}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{10x-11}{x^2+6x-16} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-8x+5}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{x^5 - x^4 + 16}{x^3 - 4x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{23x+12}{(x+6)(x^2+3x-18)} dx; \quad \text{в) } \int \frac{19x-1}{x^3+5x^2+7x+35} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+5\cos^2 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x-4}}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{27+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} e^{1-\cos x} \sin x dx; \quad \text{б) } \int_0^2 x^2 e^{2x} dx; \quad \text{в) } \int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{x}{1+x^4} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}; \quad \text{б) } \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y^2 = 2x+1, \quad x-y-1=0; \quad \text{б) } \rho = 2 - \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 3t + t^2, \\ y = 3t^2 + t^3, \end{cases} \quad -3 \leq t \leq 0.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \arcsin e^{-x}, \quad \ln 2 \leq x \leq \ln 3; \quad \text{б) } \rho = 2\varphi^{-1}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \varphi \leq 1; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \sin 2t - 2 \sin t, \\ y = \cos 2t - 2 \cos t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

Варіант 25

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (e^x - 1)(e^{-x} + 1) dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x} dx; \quad \text{в) } \int \cos^2 3x \sin 2x dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}; \quad \text{б) } \int x^7 \cdot 2^{1-x^8} dx; \quad \text{в) } \int \cos x \sqrt[5]{1 - \sin x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (2x+3)2^{x-1}3^{x+1} dx; \quad \text{б) } \int x \arccos(x^2) dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{9x+7}{9x^2+14x-7} dx; \quad \text{б) } \int \frac{11x-6}{\sqrt{x^2+12x+11}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{7-2x^2-5x}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{x^2+2}{x^3-x^2-2x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^4+2x^3-1}{x^3+2x^2+x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^2+15}{x^3+x^2+5x} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{5-3\cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin x}{\sin^4 x - \cos^4 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{8\sin^2 x + 1}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{x+2\sqrt{x+3}}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x dx; \quad \text{б) } \int_1^2 x^3 e^{x^2} dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x + 2 \cos x}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+8}}; \quad \text{б) } \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1; \quad \text{б) } \rho = \cos^2 \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = t^2 - 4t, \\ y = t^3 - 4t^2, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 4.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \operatorname{sh}^2 x, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad \text{б) } \rho = 2 \cdot 3^\varphi, \quad \log_3 2 \leq \varphi \leq \log_3 4; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 6 \ln t + 3t^2, \\ y = 2t^2 + 4 \ln t, \end{cases} \quad 1 \leq t \leq e.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$xy = 2, \quad y = 3 - x.$$

Варіант 26

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{a) } \int \sqrt{x}(1 - \sqrt[3]{x}) dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x+3}{3x-1} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{a) } \int \frac{x^9}{\sqrt[3]{12-x^{10}}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{e^{10x}}{e^{20x}-25} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\cos 9x}{\sin^{10} 9x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{a) } \int (x+1)^2 e^{3x} dx; \quad \text{б) } \int \lg(x^2 + a^2) dx; \quad \text{в) } \int 2^{\arcsin x} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{a) } \int \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+21}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x+5}{x^2-10x+41} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{7x-5x^2+6}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{a) } \int \frac{x+16}{x^3+x^2-16x-16} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x+9}{(x+4)(x^2+3x-4)} dx; \quad \text{в) } \int \frac{2x^4+x^2-24}{x^3-8} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\cos^3 x}{1-\sin^4 x}; \quad \text{в) } \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos 2x} dx.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+3}+1)\sqrt[3]{x+3}}; \quad \text{б) } \int x^2 \sqrt[3]{4+x} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{a) } \int_0^{1/4} \frac{x}{\sqrt{1+16x^2}} dx; \quad \text{б) } \int_1^2 \frac{\ln x}{x^7} dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+3\cos x}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{a) } \int_1^{+\infty} \ln \sqrt{x} dx; \quad \text{б) } \int_{-5}^0 \frac{x}{\sqrt{5+x}} dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{a) } y = (x-1)^4 - 1, \ y = 0; \quad \text{б) } \rho = 1 + \sin 3\varphi, \ 0 \leq \varphi \leq \pi/3; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t, \\ y = \sin t (1 + \cos t), \end{cases} \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{a) } y = \arccos e^x, \ -\ln 3 \leq x \leq -\ln 2; \quad \text{б) } \rho = \frac{3}{2^\varphi}, \ -\ln 3 \leq \varphi \leq -\ln 2; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 6 \ln t + 2t^2, \\ y = t^2 + 3 \ln t, \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \sqrt{1-x}, \quad y = 0, \quad x = -3.$$

Варіант 27

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (e^x + e^{-x})^2 dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^3 + 6}{x + 2} dx; \quad \text{в) } \int \sin 4x \sin 6x dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt[3]{9 - \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{(2 - \ln^3 x)^{14}}{x} dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{\frac{\arccos x - 5}{1 - x^2}} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int x 2^{3x-1} 3^{1-x} dx; \quad \text{б) } \int x \arcsin(x^2) dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{9 - x^2} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{4x - 11}{2x^2 - 11x + 9} dx; \quad \text{б) } \int \frac{7x - 10}{\sqrt{x^2 + 16x + 15}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{4x^2 + x - 5}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{11x - 7}{(x - 2)(x^2 - 49)} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^4 + 3x^3 + 9}{x^3 + 3x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{4x^2 - 14x + 9}{x^3 - 4x^2 + x - 4} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{2 \cos x + \sin x + 1}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\operatorname{ctg} x \cos 2x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{3 + \sqrt{4x - 1}}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{3 + \sqrt[3]{x}}}{x} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^3 x \sin 2x dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 - 2 \cos x}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2) \arctg^2 x}; \quad \text{б) } \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 9}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = \sin x, y = \cos x, x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]; \quad \text{б) } \rho = \frac{1}{\cos 2\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 2t(1 + t), \\ y = t - t^3, \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 0.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = \sqrt{(2x - 1)^3}, \quad \frac{4}{9} \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \rho = \frac{3}{2^\varphi}, \quad 1 \leq \varphi \leq 2; \quad \text{в) } \begin{cases} x = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ y = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = x - x^2, \quad y = 0.$$

Варіант 28

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)} \int (1 + \sqrt[4]{x})^2 dx; \quad \text{б)} \int \frac{x 2^x + 3}{x} dx; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{\cos 6x + 1}.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а)} \int x^4 \sqrt[5]{x^5 + 49} dx; \quad \text{б)} \int 6^x \cdot 6^{(6-6^x)} dx; \quad \text{в)} \int \frac{\sqrt[10]{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а)} \int \frac{x \sin x}{\cos^5 x} dx; \quad \text{б)} \int e^x \operatorname{arctg}(e^x) dx; \quad \text{в)} \int 5^{\arccos x} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а)} \int \frac{3x - 2}{\sqrt{6x^2 - 8x - 9}} dx; \quad \text{б)} \int \frac{8x + 3}{x^2 - 14x + 24} dx; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2 - x}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а)} \int \frac{2x^4 - x^3 - 32}{x^3 - 16x} dx; \quad \text{б)} \int \frac{25 dx}{(x + 2)(x - 3)^2}; \quad \text{в)} \int \frac{8x^2 - 31x + 9}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а)} \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 2}; \quad \text{б)} \int \frac{\cos x - \cos^3 x}{\sin^2 x - 6 \cos^2 x} dx; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 9 \cos^2 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а)} \int \frac{dx}{2 + \sqrt[4]{x + 1}}; \quad \text{б)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2 + \sqrt{x}}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а)} \int_0^{\pi/4} \sin^3 x \cos^2 x dx; \quad \text{б)} \int_{4/5}^1 (5x - 4) \ln x dx; \quad \text{в)} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 2 \sin x}.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 12x + 35}}; \quad \text{б)} \int_{-2}^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 8}}.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а)} y = \arccos x, \quad y = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{1}{2}; \quad \text{б)} \rho = \frac{1}{1 - \cos \varphi}, \quad \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{в)} \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos^3 t, \end{cases} \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а)} y = 3 - \arccos e^{-x}, \quad 1 \leq x \leq \ln 3; \quad \text{б)} \rho = e^{4\varphi}, \quad \ln 2 \leq \varphi \leq \ln 3; \quad \text{в)} \begin{cases} x = \ln \sin t, \\ y = t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \sqrt{x} e^x, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

Варіант 29

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2} + 2) dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1} dx; \quad \text{в) } \int \sin^4 x dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^7}{x^{16} + 25} dx; \quad \text{б) } \int \frac{e^{5x}}{\sqrt[7]{10 - e^{5x}}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\arcsin^5 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int (2x - 1)^2 e^{x+5} dx; \quad \text{б) } \int \lg(x^2 - a^2) dx; \quad \text{в) } \int e^{\arccos \frac{x}{2}} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{5x + 9}{5x^2 + 18x - 4} dx; \quad \text{б) } \int \frac{9x - 4}{\sqrt{x^2 + 20x - 21}} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{8x^2 - 2x - 3}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{11x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^4 + 4x^2 - x + 14}{(x + 5)(x - 1)^2} dx; \quad \text{в) } \int \frac{2x^2 - x + 2}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\cos x - 3 \sin x + 1}; \quad \text{б) } \int \frac{\cos x}{3 \sin^2 x + 8 \cos^2 x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\sin 2x}{\cos^6 x} dx.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{4 - \sqrt{2x + 1}}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/4} x \sin 2x dx; \quad \text{в) } \int_0^4 \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 5} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} 2^{-x} \sin x dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \ln x dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = \operatorname{tg} x, y = 1, x = 0; \quad \text{б) } \rho = 1 + \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/8; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 3 \cos t + 1, \\ y = 1 - 2 \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = 1 - x^2, 0 \leq x \leq 1; \quad \text{б) } \rho = 2 \sin \varphi + \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 8 - \frac{t^4}{4}, \\ y = \frac{t^5}{5} - 2, \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = \sqrt{\ln x}, \quad y = 0, \quad x = e.$$

Варіант 30

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int (1 - e^x)(1 + e^{-x}) dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-1}}; \quad \text{в) } \int \sin 4x \sin^2 3x dx.$$

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\text{а) } \int \frac{x^3}{5-x^4} dx; \quad \text{б) } \int \sin(2+4e^{3x})e^{3x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\cos(\operatorname{ctg} x)}{\sin^2 x} dx.$$

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\text{а) } \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{16+x^2} dx.$$

4. Знайти невизначені інтеграли від функцій, які містять квадратний тричлен у знаменнику:

$$\text{а) } \int \frac{18x+1}{\sqrt{9x^2+x-17}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{6x+5}{x^2-18x-19} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{\sqrt{8x^2-4x+1}}.$$

5. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{3x+1}{x^3-6x^2+11x-6} dx; \quad \text{б) } \int \frac{4x^2+6x-13}{(x+1)(x^2-3x-4)} dx; \quad \text{в) } \int \frac{2x^4+2x^2+3}{x^3+x} dx.$$

6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{2 \sin x - 3 \cos x + 2}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 1} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{9 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x + \cos^2 x}.$$

7. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \int \frac{1 + \sqrt[4]{x+3}}{\sqrt{x+3} + x+3} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3+\sqrt{x}}} dx.$$

8. Знайти визначені інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/4} x \cos 3x dx; \quad \text{в) } \int_1^{64} \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx.$$

9. Дослідити на збіжність невластиві інтеграли:

$$\text{а) } \int_{\pi}^{+\infty} \sin^3 x \sin 2x dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{5^x}{25^x - 1} dx.$$

10. Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

$$\text{а) } y = \arcsin x, \quad y = 0, \quad x = 1; \quad \text{б) } \rho = \frac{1}{\sin^2 \varphi}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 4t - t^3, \\ y = 2t - t^2, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

11. Знайти довжини дуг кривих:

$$\text{а) } y = -\frac{4}{3} \left(\frac{x}{2} + 3 \right)^{3/2}, \quad -8 \leq x \leq 0; \quad \text{б) } \rho = \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = 3 \ln \operatorname{ctg} t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена кривими:

$$y = 2^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ**
до розрахунково-графічної роботи
для студентів інженерно-технічних спеціальностей

Укладачі:

Вовк Мирослава Іванівна
Дрогомирецька Христина Теофілівна
Квіт Роман Іванович
Пабірівська Неля Віталіївна
Рибицька Ольга Мар'янівна
Сало Тетяна Михайлівна
Жидик Уляна Володимирівна
Клапчук Мирослава Іванівна