Лекція 9. Класифікація множин.

Усі розглянуті досі нескінченні множини виявилися зчисленними множинами. Тому виникає запитання: а чи існують нескінченні множини, які не є зчисленними ? Відповідь отримаємо далі.

Континуальні множини

Теорема 2 (Кантор). Множина дійсних чисел з інтервалу (0, 1) не є зчисленною.

Доведення. Дійсно, доведемо, що множина $X = (0, 1)$ дійсних чисел, які задовольняють нерівність $0 < x < 1$, не є зчисленною.

Доведення проведемо методом від протилежного. Припустимо, що X зчисленна й існує деяка бієкція з множини X в множину $\mathbf{N}$, тобто елементи множини X можуть бути записані у вигляді деякої послідовності $x_1, x_2, x_3, \ldots$, елементи якої попарно різні.

$$x_1 = 0,x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)}\ldots$$
$$x_2 = 0,x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(2)}\ldots$$
$$x_3 = 0,x_1^{(3)}x_2^{(3)}x_3^{(3)}\ldots$$
$$\ldots$$

Крім того, розглянемо дійсне число θ, яке визначимо так: перед комою поставимо 0, потім як j-й десятковий знак θ_j виберемо довільне ціле число між 1 і 9, яке відрізняється від j-го десяткового знака $x_j^{(j)}$ числа x_j. Таким способом (його називають діагональним методом Кантора) ми утворюємо нескінченний дріб, що визначає деяке число $\theta = 0,\theta_1\theta_2\theta_3\ldots$. Зрозуміло, що справедлива нерівність $0 < \theta < 1$. Для довільного натурального j виконується таке. Оскільки j-й десятковий знак числа θ відрізняється від j-го десяткового знака числа x_j (тобто $\theta_j \neq x_j^{(j)}$), то число θ не співпадає ні з одним з чисел послідовності $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Ми отримали суперечність. Це й доводить теорему.

Теорема 2а. Множина нескінченних двійкових послідовностей не є зчисленною.

$$x_1 = x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} \ldots$$
$$x_2 = x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(2)} \ldots$$
$$x_3 = x_1^{(3)} x_2^{(3)} x_3^{(3)} \ldots$$
$$\ldots$$

Будемо множини, які рівнопотужні множині (0, 1), називати континуальними множинами. Континуальною множиною є також множина всіх дійсних чисел **R**, оскільки $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$ є бієктивним відображенням із множини (0, 1) в множину **R**.

Дійсно, нехай для елементів x_1, x_2 із множини (0, 1) виконується $x_1 \neq x_2$. Припустимо, що $\ln \frac{x_1}{1-x_1} = \ln \frac{x_2}{1-x_2}$. Тоді отримуємо $\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2}, x_1 - x_1 x_2 = x_2 - x_1 x_2$, а значить $x_1 = x_2$ – суперечність. Отже, відображення, що розглядаємо, є ін'єктивним.

Це відображення також є сюр'єктивним, бо з рівняння $\ln \frac{x}{1-x} = y$ маємо $x = \frac{e^y}{e^y + 1}$. Слід зауважити, що $0 < \frac{e^y}{e^y + 1} < 1$, тобто наведений розв'язок рівняння дійсно належить до множини (0, 1).

Покажемо, що множина (0, 1) рівнопотужна множині (a,b) для будь-яких дійсних чисел a,b, $a < b$. Дійсно, відповідна бієкція задається виразом $f(x) = (b-a)x + a$.

З останнього факту й транзитивності поняття рівнопотужності випливає, що множини точок двох інтервалів (a,b) та (c,d) рівнопотужні між собою.

Також покажемо, що множина (0, 1)x(0, 1) рівнопотужна множині (0, 1). Потрібне бієктивне відображення задаємо виразом $f\big((0, a_1 a_2 \ldots; 0, b_1 b_2 \ldots)\big) = 0, a_1 b_1 a_2 b_{2\ldots}$.

Наведемо без доведення таку теорему.

Теорема 3. Нехай X та Y – дві довільні множини. Тоді

1) або існує ін'єкція X в Y, або існує ін'єкція Y в X (обидві обставини не виключають одна одну);

2) якщо існує одночасно ін'єкція X в Y та ін'єкція Y в X, то існує також бієкція X на Y.

Наслідок 1. Для заданих множин X та Y є тільки три можливості:

а) існує ін'єкція X в Y і не існує ін'єкція Y в X. В цьому випадку говорять, що Y має потужність строго більшу потужності X, або що X має потужність, строго меншу потужності Y;

б) існує ін'єкція Y в X і не існує ін'єкція X в Y. Тоді X має потужність строго більшу потужності Y або Y має потужність, строго меншу потужності X;

в) існує бієкція X в Y. У цьому випадку кажуть, що X і Y мають однакову потужність або рівнопотужні.

Теорема 4. Для будь-якої множини X, множина $P(X)$ її підмножин не є рівнопотужною множині X.

Доведення. Доведення проведемо методом від протилежного. Припустимо, що існує множина A, яка рівнопотужна множині $P(A)$, тобто є деяка бієкція $f:A \to P(A)$. Розглянемо множину $B=\{x\in A \mid x\notin f(x)\}$. Зрозуміло, що B є підмножиною множини A, а значить B належить до $P(A)$. Оскільки відображення f бієктивне (а зокрема сюр'єктивне), то існує такий елемент $y\in A$, що $f(y)=B$.

Розглянемо два можливі випадки.

Якщо $y\in B$, то з рівності $B=f(y)$ маємо $y\in f(y)$. Тоді, згідно з визначенням множини B, маємо $y\notin B$. Таким чином, у першому випадку отримали суперечність.

Якщо ж $y\notin B$, то, за визначенням множини B, маємо $y\in f(y)$. Тоді рівність $f(y)=B$ дає $y\in B$. У другому випадку також отримали суперечність.

Отже початкове припущення помилкове, і, для будь-якої множини X, $P(X)$ не є рівнопотужною множині X.

Виходячи з останньої теореми, для нескінченних множин існує нескінченна кількість класів рівнопотужних множин.

На завершення сформулюємо континуум-гіпотезу. Згідно цієї гіпотези, клас множини $P(\mathbf{N})$ іде одразу за класом множини $\mathbf{N}$ (тобто між ними не можна вставити проміжний клас). Узагальнена континуум-гіпотеза полягає в припущенні, що при довільній множині X клас множини $P(X)$ іде безпосередньо за класом множини X.

Доведено (П. Коен, 1963 р.), що континуум-гіпотеза не має рішення – її неможливо ані довести, ані спростувати, можна тільки прийняти її або протилежне їй твердження як аксіому.