У розпорядженні математики знаходяться могутні важелі, представлені її теорією найважливіших структур, і вона охоплює єдиним поглядом уніфіковані, аксіоматично великі області, в яких раніше насправді панував безформний хаос.

Нікола Бурбакі

ЛЕКЦІЯ 4-5

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРВЧНИХ РІВНЯНЬ

Пригадаємо, що ***розв'язком рівняння*** $F(x)=0$ ***з однією змінною*** є таке число x, яке під час підстановки у це рівняння, перетворює його у правильну рівність.

Приклад. Рівняння $x^2-6x+5=0$ має два розв'язки $x_1=2, x_2=3$. Рівняння $x^2+5=0$ не має жодного дійсного розв'язку.

Розв'язком рівняння $F(x,y)=0$ ***з двома змінними*** є впорядкований набір двох чисел (x_0,y_0), який під час підстановки у це рівняння перетворює його у правильну рівність.

Приклад. Рівняння $x-2y+4=0$ має безліч розв'язків. Дійсно, будь-яка пара $(2\alpha-4,\alpha)$ буде розв'язком. Наприклад, при $\alpha=0$ пара $(-4;0)$ є розв'язком тощо.

Аналогічно, ***розв'язком рівняння з n невідомими*** $F(x_1,x_2,...,x_n)=0$ є впорядкований набір n чисел $(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$, який під час підстановки у це рівняння перетворює його у правильну рівність.

◙ ***Розв'язком системи рівнянь з*** n ***невідомими***

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ F_2(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots \\ F_m(x_1,x_2,...,x_n)=0 \end{cases}$$

називають впорядкований набір n *чисел* $(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$*, який під час підстановки у кожне з цих* m *рівнянь, перетворює його у правильну рівність.*

Приклад. Легко переконатись, що система $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ має розв'язок $(1;1)$.

◙ *Система називається* ***сумісною****, якщо у неї є хоча б один розв'язок.*

◙ *Система називається* ***визначеною****, якщо вона має єдиний розв'язок, і* ***невизначеною****, якщо вона має більше ніж один розв'язок.*

Приклад. $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ – система сумісна, але невизначена. Дійсно, у неї є, наприклад, розв'язки $(-2{,}4)$, $(4{,}-2)$, $(1{,}1)\ldots$

◙ *Якщо система не має жодного розв'язку, то вона називається* ***несумісною****.*

Приклад. Система $\begin{cases} x-y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ – несумісна.

◙ *Дві сумісні системи називаються* ***рівносильними (еквівалентними)****, якщо кожний розв'язок однієї системи рівнянь є розв'язком другої системи рівнянь, і навпаки.*

Приклад. Сумісна система $\begin{cases} x+2y=3 \\ x-y=0 \end{cases}$ еквівалентна системі $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=0 \end{cases}$. Кожна із систем має єдиний розв'язок $(1;1)$.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

◙ *Рівняння $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ стосовно n невідомих називається* ***лінійним****, якщо усі невідомі у ньому лише множать на число і додають між собою. Тобто це рівняння вигляду*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\,,$$

де b і a_i – довільні дійсні числа, для яких $\sum_{k=1}^{n} a_i^2 \neq 0$ (тобто коефіцієнти при змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ одночасно не дорівнюють нулеві).

Ліву частину лінійного рівняння, а саме вираз $a_1x_1 + ... + a_nx_n$, називають ***лінійною комбінацією змінних*** $x_1, x_2, ..., x_n$.

Система m ***лінійних рівнянь з*** n ***невідомими*** має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Числа a_{ij} називаються ***коефіцієнтами системи***, а числа b_i – її ***вільними членами***.

МАТРИЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Нехай кількість n лінійних рівнянь системи дорівнює кількості невідомих, тобто розглянемо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Якщо позначити через A квадратну матрицю n-го порядку, складену з коефіцієнтів при невідомих (її називають ***головною***, *або* ***основною матрицею системи***), а через X, B – матриці-стовпці невідомих і вільних членів відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

тоді систему можна переписати у вигляді матричного рівняння:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ або } A \cdot X = B.$$

Якщо матриця A є невиродженою, тоді у системи є єдиний розв'язок, який одержуємо як розв'язок матричного рівняння $X = A^{-1} \cdot B$.

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} x + 2y + 2z = 15 \\ 2x + y - 2z = 6 \\ 2x - 2y + z = 9 \end{cases}$ матричним способом.

Формуємо спочатку основну матрицю системи: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислюємо визначник матриці A: $\det A = -27 \neq 0$. Отже, цю систему можна розв'язати матричним способом. Запишемо відповідне матричне рівняння: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$. Стовпець невідомих $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ дорівнює добутку матриці, оберненої до $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ на стовпець

стовпець вільних членів $X = A^{-1} \cdot B$. Оскільки $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$, то

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$, тобто $x = 5$; $y = 2$; $z = 3$. Відповідь $(5;2;3)$.

МЕТОД КРАМЕРА

Нехай потрібно знайти розв'язок системи, в якої, як і в попередньому випадку, кількість рівнянь n дорівнює кількості невідомих. І нехай головна матриця системи – невироджена, тобто $\Delta = \det A \neq 0$. Позначимо Δ_i – визначники, які отримують з визначника Δ заміною в ньому *i*-го стовпця стовпцем вільних членів системи.

□ *Єдиний розв'язок* $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна знайти за* ***формулами Крамера****:* $x_i = \dfrac{\Delta i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ ■

Приклад. Розв'язати систему з попереднього прикладу методом Крамера.

Основна матриця системи: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Її визначник: $\Delta = \det A = -27 \neq 0$. Це означає, що система визначена і її розв'язок можна знайти методом Крамера. Обчислимо решта три визначники, одержані заміною у визначнику головної матриці першого, другого чи третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 15 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \\ 9 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -135; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -54; \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix} = -81.$$

Тоді $x_i = \dfrac{\Delta i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3$, тобто $x_1 = \dfrac{-135}{-27} = 5;\; x_2 = \dfrac{-54}{-27} = 2;\; x_3 = \dfrac{-81}{-27} = 3$.

Відповідь: $(5; 2; 3)$. Одержані за формулами Крамера чи матричним способом розв'язки є однаковими.

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо довільну лінійну систему *m* рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Відповідна їй головна матриця матиме *m* рядків і *n* стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розширеною матрицею системи називається матриця

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

яка відрізняється від основної матриці *A* додатковим стовпцем вільних членів.

Матричний метод та метод Крамера дав змогу нам відшукати єдиний розв’язок системи, в якої основна матриця квадратна і невироджена (такі системи ще називають крамеровими). Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то згадані методи незастосовні. Часто їх застосування теж є недоцільним і у випадку квадратної основної матриці. Це зумовлено необхідністю обчислення визначників. За великого порядку n – це дуже громіздка робота.

Природним є запитання: В яких випадках система з довільною кількістю рівнянь та невідомих є сумісною, в яких визначеною, а в яких несумісною? Чи можливо одержати відповідь, уникаючи обчислень визначників?

Відповідь на ці запитання дає теорема **Кронекера-Капеллі:**

Теорема. *Необхідною і достатньою умовою сумісності системи лінійних рівнянь є рівність рангів її основної та розширеної матриць:*

$$rangA = rang\tilde{A}.$$

Зокрема, якщо $rangA = rang\tilde{A} = n$ *(кількість невідомих), то система визначена. Якщо ж* $rangA = rang\tilde{A} < n$ *, то система невизначена (тобто має безліч розв’язків).*

Для студента буде цікаво довідатись, що перше опубліковане доведення цієї теореми належить Ч.Л. Доджсону (1832–1898, псевдонім Люїс Керрол), автору відомих повістей “Аліса в країні чудес” та “Аліса в задзеркаллі”.

Зауваження. Ранг r довільної матриці $A_{m\times n}$ менший або рівний $\min\{m,n\}$ (меншому з розмірів). Оскільки розширена матриця $\widetilde{A}$ є розмірності $m\times(n+1)$, то $rangA \le rang\widetilde{A}$.

Система є несумісна, якщо $rang\widetilde{A} > rangA$. Якщо для обчислення рангу основної і розширеної матриць системи застосувати метод зведення до східчастої форми, то система буде несумісною лише у випадку, коли у східчастій матриці буде наявний рядок ($0\,0\ldots0\,b_s$), $b_S \neq 0$. У цьому випадку

$$rangA = s-1 \text{ , а } rang\widetilde{A} = s \text{ .}$$

Приклад. Дослідити на сумісність систему рівнянь $\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x+6y=5 \end{cases}$.

Визначимо ранги основної та розширеної матриць системи. Для цього зводимо їх спочатку до східчастого вигляду і фіксуємо кількість ненульових рядків:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rangA=1. \quad \widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&6&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow rang\widetilde{A}=2\,.$$

Оскільки ранги основної та розширеної матриць не збігаються, то досліджувана система несумісна.

МЕТОД ГАУССА (Karel-Fridrich Gauβ, 1777–1855)

Цей метод є універсальним. Його можна застосовувати для одночасного дослідження системи на сумісність, а також у випадку сумісності для відшукання єдиного чи безлічі розв’яків. Перш ніж описати сам метод сформулюємо твердження.

Твердження. *Нехай матриця $\widetilde{A}$ – розширена матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь, а матриця $\widetilde{C}$ – східчаста матриця, одержана з матриці $\widetilde{A}$ скінченною кількістю елементарних перетворень рядків. Тоді відповідні цим матрицям системи лінійних алгебраїчних рівнянь є рівносильними.*

Справді, еквівалентні перетворення матриці відображають такі дії над рівняннями у відповідній системі лінійних рівнянь, як додавання до одного рівняння будь-якого іншого, помноженого на деяке число, множення обох частин рівняння на довільне, відмінне від нуля число, відкидання рівняння, в якому усі коефіцієнти і вільний член дорівнюють нулеві (всякий набір n чисел є розв’язком такого рівняння, тому таке рівняння в жоден спосіб не пов’язує невідомі). Усі ці перетворення не змінюють множини розв’язків. Це означає, що множина розв’язків вихідної системи і системи, яка відповідає матриці $\widetilde{C}$, є однією і тією самою.

Прямий хід методу Гаусса

Записують розширену матрицю $\tilde{A}$ системи. Її розмірність $m \times (n+1)$, де $m-$ кількість рівнянь, $n-$ кількість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$:

За допомогою елементарних перетворень зводять матрицю $\tilde{A}$ до східчастого вигляду $\tilde{C}$. Обчислюють ранги матриці $\tilde{C}$ і матриці C, одержаної з $\tilde{C}$ відкиданням останнього стовпця.

Приклад. Нехай вихідна і перетворена розширені матриці системи з трьома невідомими є такими: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & 5 & 2 \\ 0 & \underline{1} & -3 & -8 \\ 0 & 0 & \underline{11} & 20 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{59} \end{pmatrix} = \tilde{C}$. Тобто

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 11 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 59 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} rangA = rangC = 3, \\ rang\tilde{A} = rang\tilde{C} = 4. \end{array}$$

Згідно з теоремою Кронекера–Капеллі відповідна система несумісна. Після зведення розширеної матриці до східчастого вигляду такий висновок можна зробити і без обчислення рангів. Достатньо записати рівняння, яке відповідає останньому рядку матриці $\tilde{C}$: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 59$. Його не задовольняє жоден впорядкований набір трьох чисел, тобто таке рівняння не має розв'язків. Оскільки розв'язок системи рівнянь – це спільний розв'язок усіх рівнянь, то з того, що не має розв'язку хоча б одне з рівнянь, випливає несумісність усієї системи.

Приклад. Для розширеної матриці деякої іншої системи з трьома невідомими після зведення до східчастого вигляду одержимо

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & -2 & -2 & -3 \\ 0 & \underline{1} & -2 & 8 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -2 \end{pmatrix} = \tilde{C}.$$

Звідси $rang\tilde{C} = 3$. Оскільки $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $rangC = 3$. Кількість невідомих $n = 3$, тому система сумісна і має єдиний розв'язок.

Зауваження. Одиниця у першому рядку на першому місці одержана відніманням від другого рядка першого і перестановкою цих рядків місцями. Якщо перший ненульовий елемент в рядку дорівнює одиниці, то нулі під цим елементом одержувати значно простіше.

Зворотний хід методу Гаусса

У випадку сумісної системи для відшукання розв'язків застосовують зворотний хід методу Гаусса. Розглянемо можливі випадки:

1. Якщо $rangA = rang\widetilde{A} = n$, то система, яка відповідає східчастій матриці $\widetilde{C}$, матиме вигляд:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{11}x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{1n}x_n = \widetilde{b}_1 \\ \qquad \widetilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \widetilde{a}_{nn}x_n = \widetilde{b}_n \end{cases}$$

, де $\widetilde{a}_{ij}$, $\widetilde{b}_i$ – елементи матриці $\widetilde{C}$, причому $\widetilde{a}_{nn} \neq 0$.

З останнього рівняння обчислюють $x_n = \dfrac{\widetilde{b}_n}{\widetilde{a}_{nn}}$. Невідому x_{n-1} обчислюють з передостаннього рівняння, замінивши у ньому x_n на знайдене значення $\dfrac{\widetilde{b}_n}{\widetilde{a}_{nn}}$. І так далі до невідомої x_1. Набір ($x_1,\ldots,x_n$) – шуканий єдиний розв'язок системи.

Приклад. Дослідити систему на сумісність та у випадку сумісності знайти її розв'язок $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -2 \end{cases}$.

Зведемо розширену матрицю системи до східчастого виду

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 8 & -10 & 6 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 13 & -13 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 11 & 9 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & -26 & -26 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$rang\,A = rang\,\tilde{A} = 3 = n$ – система визначена. Застосуємо зворотній хід методу Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_2 - 11x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

2. Якщо $rangA = rang\widetilde{A} = r < n$, то перетворена система матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{11}x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{1r}x_r + \ldots + \widetilde{a}_{1n}x_n = \widetilde{b}_1 \\ \qquad \widetilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{2r}x_r + \ldots + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \widetilde{a}_{rr}x_r + \ldots + \widetilde{a}_{rn}x_n = \widetilde{b}_r \end{cases}.$$

Вибираємо в матриці C будь-який ненульовий мінор r-го порядку. Його називають базовим, а відповідні змінні x_i цього мінору – базовими змінними. Решта $n-r$ змінних – вільні змінні, тобто вони можуть набувати довільних дійсних значень. Базові змінні виражають із перетвореної системи через вільні (можна, наприклад, застосувати формули Крамера).

Приклад. Дослідити на сумісність і, у випадку сумісності, знайти всі розв'язки системи

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 6x - 10y - 6z = -8 \\ -x + 2y + 4z = 5 \end{cases}.$$

Запишемо розширену матрицю цієї системи і перетворимо її до східчастого вигляду:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 6 & -10 & -6 & -8 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{C}, \text{ тоді } C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

За кількістю ненульових рядків встановлюємо ранги основної і розширеної матриць: $rangC = rangA = 2,\ \ rang\tilde{C} = rang\tilde{A} = 2,\ \ n = 3$. Система сумісна і невизначена, тобто має безліч розв'язків. Застосуємо зворотний хід методу Гаусса. Нехай як базовий мінор виберемо $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Тоді базові змінні x_1, x_2, а вільна – x_3. Перетворена система матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4x_3 - 5 \\ \qquad x_2 = -9x_3 + 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -14x_3 + 17 \\ x_2 = 11 - 9x_3 \end{cases}$$

або, якщо позначити вільну змінну $x_3 = \alpha \in R$, тоді усі розв'язки системи можна записати $(-14\alpha + 17;\ \ 9\alpha + 11;\ \ \alpha),\ \ \alpha \in R$.

Кожен розв'язок системи можна одержати, підставивши замість α довільне число. Переконайтесь у цьому самостійно.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ РІВНЯНЬ

Якщо вільні члени в усіх рівняннях системи лінійних алгебраїчних рівнянь дорівнюють нулю, то система називається ***однорідною***:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Однорідна система характерна тим, що вона ***завжди сумісна***. Дійсно, вона завжди має хоча б один, а саме ***нульовий*** (***тривіальний***) розв'язок $(0;0;\ldots 0)$. У цьому легко переконатись простою підстановкою у будь-яке рівняння однорідної системи. Цей факт також можна легко довести, застосувавши теорему Кронекера–Капеллі: ранги основної та розширеної матриць завжди збігаються. У якому випадку система має, крім тривіального, ще й інші розв'язки? Відповідь одержуємо на основі тієї самої теореми. Її сформулюємо у вигляді твердження:

□ *Для того, щоб існував нетривіальний розв'язок системи лінійних однорідних рівнянь, необхідно і достатньо, щоб* ***ранг основної матриці був менший за кількість невідомих системи.*** ■

Якщо сформульована умова виконується, тоді, крім нульового розв'язку, система має безліч ненульових розв'язків.

Приклад. Розв'язати однорідну систему:

$$\text{а)}\ \begin{cases} -3y+z=0 \\ 2x-y+6z=0 \\ 4x+2y-z=0 \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-y+5z=0 \\ -x+2y+4z=0 \\ -3x+5y+3z=0 \end{cases}.$$

Розв'язання:

а) Оскільки головна матриця системи є квадратною, то обчислимо її визначник

$$\det A=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}=4-72+4-6=-70\neq 0.$$

Тому $rangA=3$ і дорівнює кількості невідомих. Отже, система має лише тривіальний розв'язок $(0{,}0{,}0)$.

б) Кількість рівнянь у цій системі не дорівнює кількості невідомих, тому для обчислення рангу зведемо головну матрицю системи до східчастого вигляду (зауважимо, що розширену матрицю записувати недоцільно, оскільки останній стовпець завжди залишатиметься нульовим, а ранг розширеної матриці однорідної системи, як нам вже відомо, дорівнює рангу основної) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\tilde{A}$.

Тому $rangA=2<3$ – кількість невідомих, що означає: система має безліч розв'язків. Застосуємо зворотний хід методу Гаусса. Система рівнянь, яка відповідає перетвореній матриці має вигляд:

$$\begin{cases} x-y+5z=0 \\ y+9z=0 \end{cases}.$$

Нехай як вільну невідому виберемо $z = \alpha \in R$, тоді $y = -9\alpha$, а $x = -14\alpha$. Отже, впорядкована трійка $(-14\alpha,\ -9\alpha,\ \alpha)$ для довільного дійсного α є розв'язком системи. Очевидно, що тривіальний розв'язок одержують за $\alpha = 0$.