Лекція 12. Групи.

Визначення групи

Півгрупа з одиницею, в якій для кожного елемента існує двосторонній обернений, називається групою.

Іншими словами, групою називається множина G, на якій задана бінарна операція (символ операції пропускаємо) з наступними властивостями:

(G1) операція асоціативна: $(x\,y)\,z = x\,(y\,z)$ для всіх $x, y, z \in G$;

(G2) G містить нейтральний (одиничний) елемент e: $e\,x = x\,e = x$ для всіх $x \in G$;

(G3) для кожного елемента $x \in G$ існує обернений x^{-1}, $x^{-1}\,x = x\,x^{-1} = e$.

Група, в якій операція є комутативною, тобто для будь-яких $x, y \in G$ виконується умова $x\,y = y\,x$, називається комутативною (абелевою) групою.

Група називається скінченною, якщо вона має скінченне число елементів. У протилежному випадку група називається нескінченною. Якщо група G скінченна, то число її елементів позначається $|G|$ і називається порядком групи.

З аксіом групи (G1) - (G3) випливають наступні прості наслідки.

1. Закон скорочення: якщо $x\,y = x\,z$, то $y = z$ (ліве скорочення);
   якщо $y\,x = z\,x$, то $y = z$ (праве скорочення);

2. Для кожного елемента групи обернений елемент єдиний;

3. Для кожної пари елементів $a, b \in G$ рівняння $a\,x = b$ та $y\,a = b$ мають єдині розв'язки.

Доведемо для прикладу закон лівого скорочення. Дійсно, припустимо, що $xy = xz$. Згідно з аксіомою (G3) для елемента x існує обернений x^{-1}. Домножимо ліву й праву частину рівності на x^{-1}. Тоді отримаємо $x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz)$. Застосовуючи в лівій і правій частині (G1), маємо $(x^{-1}x)\,y = (x^{-1}x)z$. Значить, $ey = ez$ і остаточно $y = z$.

Зауважимо, що у випадку алгебри $(Z,\cdot)$ – множини цілих чисел з операцією множення, яка не є групою, закон лівого скорочення не виконується. Наприклад, маємо правильну рівність $0 \cdot 2 = 0 \cdot 3$, проте рівність $2 = 3$ не виконується.

Наступні множини є групами відносно вказаних операцій:

1) множина **Z** цілих чисел відносно додавання;

2) множини **Q** \ {0}, **R** \ {0}, **C** \ {0} відносно множення. Позначатимемо ці групи відповідно Q^*, R^*, C^*;

3) множини **Q**, **R**, **C** відносно додавання;

4) множина $\mathbf{C}_n$ (комплексних) коренів n-го степеня з одиниці відносно множення. Зокрема, у частковому випадку n=4 маємо $\mathbf{C}_4=\{1, -1, i, -i\}$. Таблиця Келі цієї групи показана в табл. 8.

Табл. 8.

·	1	-1	*i*	-*i*
1	1	-1	*i*	-*i*
-1	-1	1	-*i*	*i*
i	*i*	-*i*	-1	1
-*i*	-*i*	*i*	1	-1

5) множина $Aut(M)$ всіх бієктивних відображень множини M на себе. Якщо множина M є скінченною і має n елементів, то в цьому випадку вказані бієктивні відображення називаються підстановками n елементів, а множина S_n всіх підстановок утворює групу підстановок n елементів;

6) множина $GL_n(\mathbf{C})$ невироджених (тобто з відмінним від нуля визначником) комплексних матриць розміру nхn відносно множення матриць.

7) множина невироджених (тобто з відмінним від нуля визначником) дійснозначних матриць розміру 2х2 відносно множення матриць. Для елементів цієї множини $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ маємо $A\times B\neq B\times A$, тобто група не є абелевою.

Зауважимо, що для кожного натурального числа n можна збудувати абелеву групу, яка має порядок n. Для цього треба розглянути фактор-множину $Z_n=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},...,\overline{n-1}\}$ класів еквівалентності цілих чисел, порівняних за модулем n. Перетворимо цю множину в групу, задавши на ній операцію додавання $\oplus$ класів цілих чисел за модулем n. Щоб додати два класи $\overline{r}$ і $\overline{s}$ потрібно спочатку додати цілі числа r і s, а потім знайти остачу від ділення знайденої суми на число n. Клас знайденої остачі й буде результатом додавання класів $\overline{r}$ і $\overline{s}$. Множина $\mathbf{Z}_n$ разом із заданою на ній операцією додавання $\oplus$ є абелевою групою, яка має порядок n.

У табл. 9 наведено таблицю Келі для операції додавання $\oplus$ групи $\mathbf{Z}_5$:

Табл. 9. Таблиця Келі для операції додавання групи $\mathbf{Z}_5$

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$