Лекція 23. Маршрути в графах.

Підграф графа

При *видаленні ребра* зберігаються всі вершини графа і всі його ребра, окрім того, що видаляється. Зворотна операція – *додавання ребра*.

При *видаленні вершини* разом з вершиною видаляємо й усі інцидентні їй ребра. Граф, що отримуємо з графа G видаленням вершини a,позначаємо G-a. При *додаванні вершини* до графа додається нова ізольована вершина. За допомогою операцій додавання вершин і ребер можна "ні з чого", тобто з нуль-графа побудувати будь-який граф.

Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ називаємо під графом графа $G = (V, E)$, якщо $V_1 \subseteq V$ та $E_1 \subseteq E$. Тобто, будь-який підграф можна отримати з графа видаленням деяких вершин і ребер.

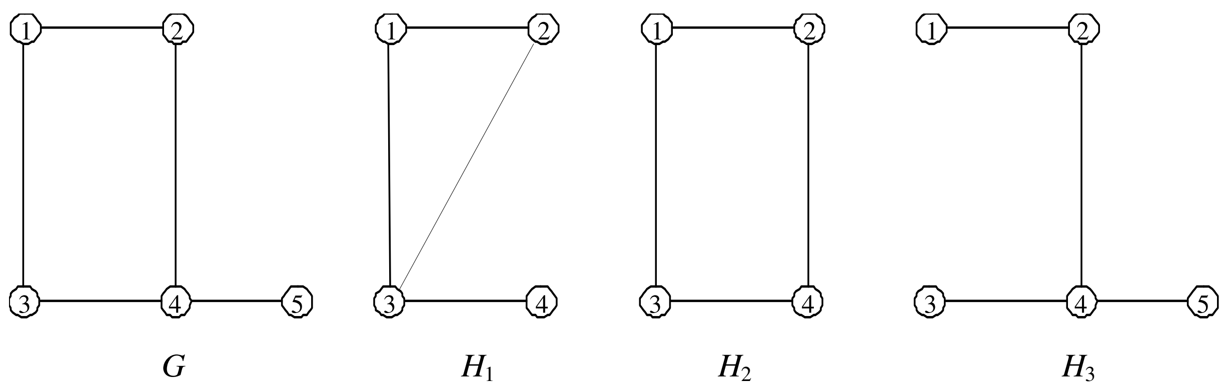

Рис. 20. Поняття підграфа

На рис. 20, H_1 не є підграфом G (бо містить ребро e=(2, 3), якого немає в графі G), а H_2 та H_3 – підграфи графа G.

Маршрути, ланцюги, цикли: деякі визначення.

Нехай G – неорієнтований граф.

Маршрутом в G називається скінченна або нескінченна послідовність ребер $S = \{\ldots, e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ в якій кожні два сусідні ребра e_{i-1} і e_i мають спільну вершину, тобто

$$e_0 = (v_0, v_1)$$

$$e_1 = (v_1, v_2)$$

$$e_2 = (v_2, v_3)$$

$$. \quad . \quad .$$

$$e_n = (v_n, v_{n+1}).$$

Якщо в S немає ребер, які стоять перед e_0, то v_0 називається початковою вершиною S; якщо немає ребер після e_{n-1}, то v_n - кінцевою вершиною. Якщо вершина v_i належить і e_{i-1} і e_i, то вона називається внутрішньою.

Якщо маршрут S має початкову і кінцеву вершини, то він називається скінченним; якщо S має початок і не має кінцевої вершини (або навпаки), то він називається односторонньо-нескінченним; якщо немає ні початкової вершини ні кінцевої – то двосторонньо-нескінченними. Якщо S має початкову вершину v_0 і кінцеву v_n, то позначаємо його

$$S = S(v_0, v_n)$$

(тобто S – це маршрут довжини n, який з'єднує вершини v_0 і v_n).

Якщо $v_0 = v_n$, то маршрут називається циклічним.

Якщо v_i і v_j – дві вершини маршруту S, то

$$S(v_i, v_j) = (e_i, \dots, e_{i+1}, \dots, e_{j-1})$$

називається підмаршрутом.

Зображений на рис. 21 маршрут $S = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ є скінченним, має довжину 5, початкову вершину v_1 і кінцеву вершину v_5. Маршрут $S_1 = (e_2, e_3, e_4)$ є підмаршрутом даного маршруту.

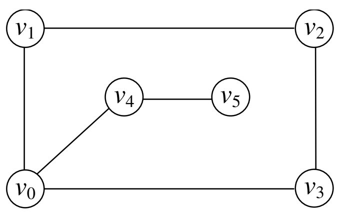

Рис. 21. Поняття, пов'язані з маршрутами

Ланцюг – це маршрут, кожне ребро якого зустрічається рівно один раз. Циклічний ланцюг називається циклом.

Нециклічний ланцюг називається простим, якщо в ньому жодна вершина не повторюється. Цикл з початком (і кінцем) в v_0 називається простим, якщо в ньому жодна вершина, крім v_0 не повторюється.

Зрозуміло, що частина ланцюга або циклу теж є ланцюгом або циклом.

Для орієнтованих графів вводяться в розгляд як неорієнтовані маршрути (ланцюги) (тобто не приймається до уваги орієнтація ребер), так і орієнтовані маршрути (ланцюги).

Зв'язані графи

Нехай G – неорієнтований граф.

Дві вершини „a" і „b" графу G називаються зв'язаними, якщо існує маршрут $S(a, b)$.

Якщо в $S(a, b)$ деяка вершина v_i повторюється більше одного разу, то відкидаючи циклічну ділянку $S(v_i, v_i)$, отримаємо новий маршрут $S'(a, b)$, в якому вершина v_i зустрічається тільки один раз. Повторюючи цю процедуру для всіх таких вершин v_i, приходимо до висновку: якщо дві вершини в графі можуть бути зв'язані маршрутом, то існує і простий ланцюг, який зв'язує ті ж вершини.

Граф G називається зв'язаним, якщо зв'язана будь-яка його пара вершин.

Всі підграфи $G(V_i)$ зв'язаного графа $G(V)$ є теж зв'язаними і називаються зв'язаними компонентами графа.

Зауважимо, що зв'язаність – це відношення еквівалентності між вершинами графу. Дійсно, вказане відношення одночасно володіє такими властивостями:

а) рефлективність: довільна вершина графа зв'язана сама з собою;

б) симетрія: якщо „a" і „b" – зв'язні (тобто існує маршрут $S(a, b)$), то в силу неорієнтованості графу „b" і „a" теж зв'язані (маршрутом $S(b, a)$);

в) транзитивність: якщо зв'язані „a" і „b" (маршрутом $S_1(a, b)$) і „b" і „c" (маршрутом $S_2(b, c)$), то існує маршрут з „a" в „c" ($S_1(a, b) + S_2(b, c)$), тобто вершини „a" і „c" теж зв'язані.

Очевидним є твердження, що довільний неорієнтований граф розбивається на свої зв'язані компоненти. Це дозволяє більшість задач зводити до випадку зв'язаних графів. Наприклад, граф на рис. 22 складається з трьох компонент зв'язаності. Перша компонента зв'язаності, яка розташована у верхньому лівому куті рис. 22, має 4 вершини. Друга компонента зв'язаності, яка розташована у нижній частині рис. 22, має 10 вершин. Третя компонента зв'язаності, яка розташована між першою та другою компонентами звязаності, має 22 вершини. Зауважимо, що зв’язаний граф має рівно одну компоненту зв’язаності, яка містить увесь граф.

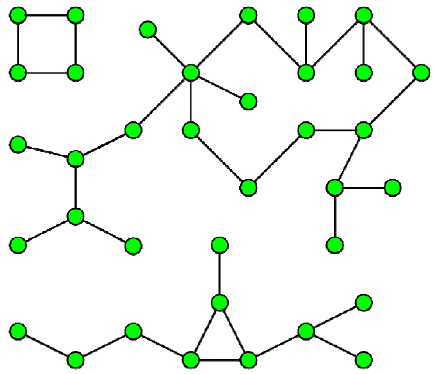

Рис. 22. Граф з трьома компонентами зв’язаності.