Лекція 25. Особливі класи графів (дерева, двочасткові графи)

Дерева

Дерева – це особливий і важливий клас графів. Особлива роль дерев визначається як широким їхнім застосуванням у різних галузях науки і практики, так і тим особливим положенням, яке дерева займають у самій теорії графів. Останнє випливає з граничної простоти будови дерев. Часто при розв'язуванні різних задач теорії графів їхнє дослідження починають з дерев. Зокрема, порівняно нескладною є проблема перевірки ізоморфності дерев.

Деревом називаємо зв'язаний граф, у якому немає циклів. Приклад дерева наведено на рис. 28.

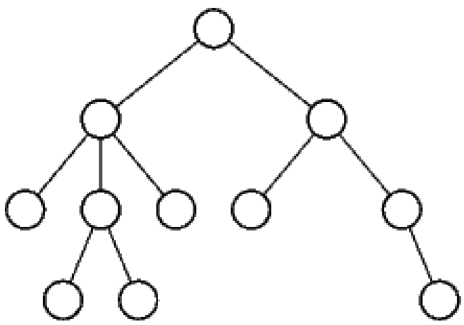


Рис. 28. Приклад дерева.

Довільний скінченний зв'язаний граф G описуємо так званим цикломатичним числом

$$\gamma(G) = \nu_E - \nu_V + 1,$$

де ν_V – кількість вершин, а ν_E – кількість ребер цього графа.

Твердження 1. Для довільного скінченного зв'язаного графа G цикломатичне число

$$\gamma(G) \geq 0$$

і дорівнює кількості ребер, які необхідно вилучити з G для того, щоб отримати дерево.

Дерево, про яке йдеться в твердженні 1, називають кістяковим деревом початкового графа G. Зрозуміло, що для дерев $\gamma(G) = 0$.

У довільному графі G вершина v називається кінцевою, якщо $\rho(v) = 1$, тобто вершині v інцидентне лише одне ребро; це ребро називається кінцевим.

Ребро в зв'язаному графі називаємо суттєвим, якщо його вилучення веде до порушення зв'язаності графа.

Найважливіші характеристичні риси дерев описуються такими шістьма рівносильними одне одному властивостями:

Твердження 2. Для довільного скінченного неорієнтованого графа такі властивості є рівносильними:
(a) граф зв'язаний і в ньому немає циклів
(b) $\gamma(G) = 0$ та $v_V - v_E = 1$
(c) граф зв'язаний та $v_V - v_E = 1$
(d) дві довільні вершини зв'язані єдиним ланцюгом
(e) граф зв'язаний і кожне його ребро суттєве
(f) $\gamma(G) = 0$, але якщо до Gдодати будь яке ребро (не додаючи вершин), то в отриманого графа G_1 буде $\gamma(G_1) = 1$

При знаходженні кістякового дерева довільного скінченного зв'язаного графа підхід із відкиданням ребер не є ефективним через те, що складно перевіряти наявність циклів в утворюваному графі. Ефективним є підхід із конструюванням (утворенням) кістяка. У цьому разі просто на кожному кроці перевіряти наявність циклів у графі, що виникає.

Якщо крім того кожному ребру (v_i, v_j) графа присвоєно вагу $w((x_i, x_j))$, то шукаємо оптимальне кістякове дерево, яке мінімізує (максимізує) суму ваг його ребер. Це можна використати для розв'язання такої задачі: необхідно з'єднати міста залізничною колією таким чином, щоб не будувати зайвих ліній. При цьому вважається відомою вартість будівництва колії між двома довільними містами. Таким чином, необхідно побудувати зв'язаний граф, який містить всі задані вершини і для якого повна вартість $\sum\limits_{(v_i, v_j) \in E} w((v_i, v_j))$ була б найменшою. Очевидно, що шуканий граф є деревом.

Вказаний підхід реалізує алгоритм Пріма (так званий алгоритм найближчого сусіда). Він дозволяє збудувати кістякове дерево скінченного неорієнтованого зв'язаного графа. Множину вершин графа позначаємо $V := \{v_1, ..., v_n\}$, а множину його ребер $E := \{e_1, ..., e_m\}$. Зрозуміло, що ці множини є скінченними.

Крок 1. Присвоєння початкових значень.
V_1 – множина вершин кістякового дерева, що формується,

$V_1 := \{v_\alpha\}$, де v_α – довільна вершина графа (скажімо, перша за номером);
$V_2 := V \setminus V_1$;
E_1 – множина ребер кістякового дерева, що формується,
$E_1 := \varnothing$.

Крок 2. Оновлення даних.
Знаходимо таке ребро $e = (v_i, v_j) \in E$, що $v_i \in V_1$, $v_j \in V_2$ та $w((v_i, v_j)) = \min\{w((v_\alpha, v_\beta)) \mid v_\alpha \in V_1, v_\beta \in V_2)\}$
Тоді покладаємо $V_1 := V_1 \cup \{v_i\}$, $V_2 := V \setminus V_1$, $E_1 := E_1 \cup \{(v_i, v_j)\}$.

Крок 3. Перевірка на завершення.
Якщо $V_1 = V$, то граф з множиною вершин V_1 і з множиною ребер E_1 є шуканим графом.
У випадку $V_1 \neq V$ переходимо на **Крок 2**.

Далі наведено приклад виконання алгоритму Пріма для зв'язаного графа. Множина вершин цього графа складається з п'яти елементів $V := \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Список ребер з вказанням їх ваг (після вертикальної риски) наведено далі:
$(v_1, v_4 \mid 1), (v_4, v_1 \mid 1), (v_1, v_5 \mid 3), (v_5, v_1 \mid 3), (v_2, v_3 \mid 3), (v_3, v_2 \mid 3), (v_2, v_4 \mid 5), (v_4, v_2 \mid 5),$
$(v_2, v_5 \mid 4), (v_5, v_2 \mid 4), (v_3, v_5 \mid 4), (v_5, v_3 \mid 4), (v_4, v_5 \mid 2), (v_5, v_4 \mid 2)$.
Заданий граф зображено на рис. 29.

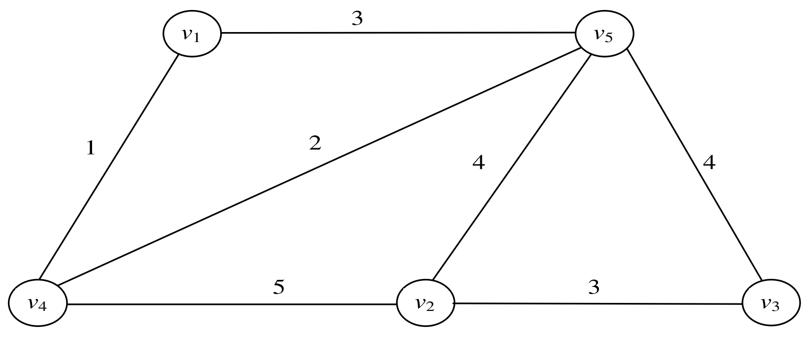


Рис. 29. Зв'язаний граф, для якого шукаємо кістякове дерево

Спершу впорядковуємо ребра за зростанням їх ваг. Для цього слід використати якийсь алгоритм сортування:

$(v_1, v_4 \mid 1), (v_4, v_1 \mid 1), (v_4, v_5 \mid 2), (v_5, v_4 \mid 2), (v_1, v_5 \mid 3), (v_5, v_1 \mid 3), (v_2, v_3 \mid 3), (v_3, v_2 \mid 3),$
$(v_2, v_5 \mid 4), (v_5, v_2 \mid 4), (v_3, v_5 \mid 4), (v_5, v_3 \mid 4), (v_2, v_4 \mid 5), (v_4, v_2 \mid 5).$

Тепер власне виконуємо алгоритм Пріма (додаючи для кожного **кроку 2** ребро мінімальної ваги).

Крок 1.
$V_1 := \{v_1\}$, $V_2 := V \setminus V_1 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E_1 := \varnothing$

Крок 2.
$(v_1, v_4 \mid 1)$
$V_1 := V_1 \cup \{v_4\} = \{v_1\} \cup \{v_4\} = \{v_1, v_4\}$, $V_2 := V \setminus V_1 = \{v_2, v_3, v_5\}$,
$E_1 := E_1 \cup \{(v_1, v_4 \mid 1)\} = \{(v_1, v_4 \mid 1)\}$

Крок 3.
$V_1 \neq V$

Крок 2.
$(v_4, v_5 \mid 2)$
$V_1 := V_1 \cup \{v_5\} = \{v_1, v_4\} \cup \{v_5\} = \{v_1, v_4, v_5\}$,
$V_2 := V \setminus V_1 = \{v_2, v_3\}$,
$E_1 := E_1 \cup \{(v_4, v_5 \mid 2)\} = \{(v_1, v_4 \mid 1), (v_4, v_5 \mid 2)\}$

Крок 3.
$V_1 \neq V$

Крок 2.
$(v_5, v_2 \mid 4)$
$V_1 := V_1 \cup \{v_2\} = \{v_1, v_4, v_5\} \cup \{v_2\} = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$,
$V_2 := V \setminus V_1 = \{v_3\}$,
$E_1 := E_1 \cup \{(v_5, v_2 \mid 4)\} = \{(v_1, v_4 \mid 1), (v_4, v_5 \mid 2), (v_5, v_2 \mid 4)\}$

Крок 3.
$V_1 \neq V$

Крок 2.

$(v_2, v_3 \mid 3)$

$V_1 := V_1 \cup \{v_3\} = \{v_1, v_2, v_4, v_5\} \cup \{v_3\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

$V_2 := V \setminus V_1 = \varnothing$,

$E_1 := E_1 \cup \{(v_2, v_3 \mid 3)\} = \{(v_1, v_4 \mid 1), (v_4, v_5 \mid 2), (v_5, v_2 \mid 4), (v_2, v_3 \mid 3)\}$

Крок 3.

$V_1 = V$

Таким чином, отримали кістякове дерево мінімальної ваги для початкового графа (множина вершин $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, а множина ребер $E_1 = \{(v_1, v_4 \mid 1), (v_4, v_5 \mid 2), (v_5, v_2 \mid 4), (v_2, v_3 \mid 3)\}$), яке зображено на рис. 30.

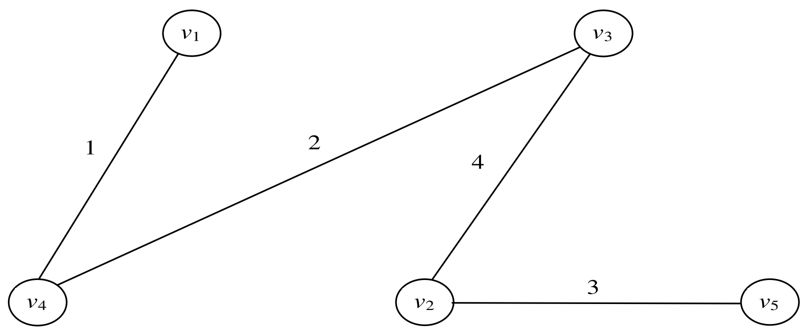


Рис. 30. Кістякове дерево для графа з рис. 29.

Вага отриманого кістякового дерева (тобто сума ваг всіх його ребер) мінімальної ваги дорівнює 10. Зауважимо, що отримане кістякове дерево не єдине. Інше можливе кістякове дерево (і також ваги 10) наведене на рис. 31.

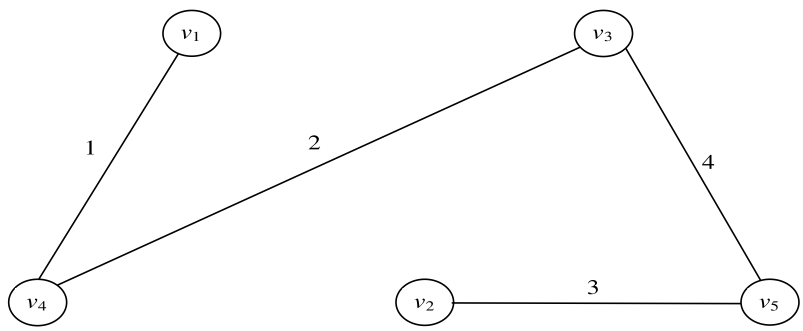


Рис. 31. Інше кістякове дерево для графа з рис. 29.

Кількість кістякових дерев у повному графі з n вершинами описується формулою Келі.

Теорема 10 (Келі). Кількість кістякових дерев у повному графі з n вершинами дорівнює n^{n-2}.

У загальному випадку, кількість кістякових дерев у довільному графі може бути обчислена за допомогою так званої матричної теореми Кірхгофа (про дерева). Вказана теорема стверджує, що кількість кістякових дерев графа дорівнює визначнику матриці Лапласа цього графа. Для скінченного неорієнтованого графа без кратних ребер і петель його матриця Лапласа дорівнює L=D-A, де D – матриця степенів вершин (діагональна матриця із степенями вершин по діагоналі), A – матриця суміжності вершин.

Для зв'язаного графа G з n вершинами, нехай $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ – це ненульові власні значення його матриці Лапласа. Тоді кількість кістякових дерев графа дорівнює $\frac{1}{n}\lambda_1\lambda_2...\lambda_{n-1}$.

Двочасткові графи

Граф $G=(V,E)$ називається двочастковим, якщо існує розбиття $\{V_1,V_2\}$ множини вершин V на дві підмножини (частки) таке, що для довільного ребра $(v,w)\in E$ виконується $v \in V_1$ і $w \in V_2$. Приклад двочасткового графа наведено на рис. 32.

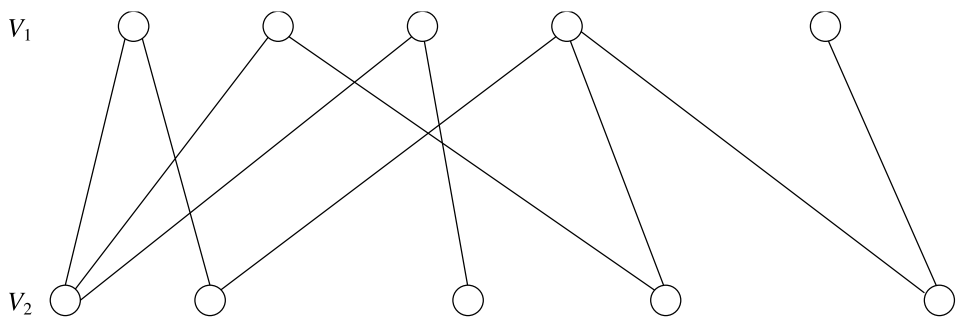


Рис. 32. Приклад двочасткового графа.

Двочастковий граф $G=(V,E)$ називається повним двочастковим графом, якщо для будь-якої пари вершин його часток $v \in V_1$ і $w \in V_2$ маємо $(v,w)\in E$. Якщо $|V_1|=m$ і $|V_2|=n$, то повний двочастковий граф G позначається $K_{m,n}$.

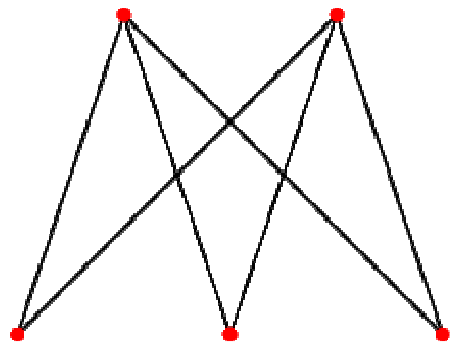


Рис. 33. Повний двочастковий граф $K_{2,3}$.

Теорема 11. (а) граф є двочастковим тоді і тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину;
(b) будь-яке дерево є двочастковим графом.

Нехай $G(V_1, V_2)$ - двочастковий граф. Пароз'єднання – це підмножина ребер цього графа, для якої жодні два різних ребра не мають спільної вершини. Максимальне пароз'єднання двочасткового графа – це пароз'єднання, яке має найбільшу кількість ребер.

Розглянемо таку задачу: знайти пароз'єднання, яке містить всі вершини множини V_1.

Твердження 3 (Холл). Пароз'єднання двочасткового графа покриває всі вершини множини V_1 тоді і тільки тоді, якщо для довільної множини $U_1 \subseteq V_1$ кількість елементів у множині $U_2 \subseteq V_2$, яка містить всі вершини, з'єднані ребром хоча б однією вершиною з U_1, не менша від кількості вершин множини U_1.

<u>Алгоритм побудови пароз'єднання Π</u>.

Будемо вважати, що умови твердження Холла виконані. Задамося довільним пароз'єднанням Π_0. Якщо воно не охоплює всіх вершин множини V_1, то існує $x_0 : x_0 \in V_1$ і $x_0 \notin \Pi_0$.

Побудуємо

$W_0 = \{x_0\}$;

$W_1 = \{y \mid (x_0, y) \in G\}$;
$W_2 = \{x \mid (x, y) \in \Pi_0, y \in W_1, x \notin W_0\}$;
$W_3 = \{y \mid (x, y) \in G, x \in W_2, y \notin W_1\}$;
$W_4 = \{x \mid (x, y) \in \Pi_0, y \in W_3, x \notin W_0 \cup W_2\}$;
$W_5 = \{y \mid (x, y) \in G, x \in W_4, y \notin W_1 \cup W_3\}$;
. . .

Зауважимо, що, згідно з побудовою, в множинах W_1 і W_2, W_3 і W_4, W_5 і W_6 і т.д. попарно однакова кількість елементів. Крім того, послідовність вершин W_i не може закінчитись на множині з парним індексом W_{2k}, оскільки для множини

$$U_1 = W_0 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{2k} \subseteq V_1$$

кількість вершин у відповідній множині

$$U_2 = W_1 \cup W_3 \cup \ldots \cup W_{2k-1} \subseteq V_2$$

(U_2 містить всі вершини графу, які з'єднані ребром хоча б з однією з вершин множини U_1) на одиницю більше, що суперечить умові твердження Холла. Тому існує вершина y^*:

$$y^* \in W_{2k-1} \text{ і } y^* \notin \Pi_0.$$

Тоді існує маршрут S, який починається з x_0, проходить через вершини множин W_i і закінчується в y^* і містить непарну ($2k$ - 1) кількість ребер:

$$\mathrm{S} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{2k-1}\}.$$

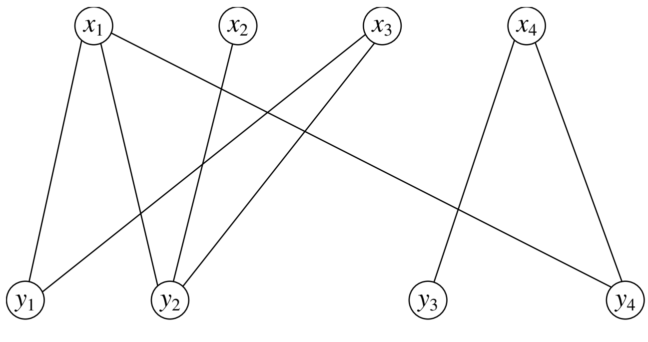
Зауважимо, що всі парні ребра $\mathrm{e}_{2k} \in \Pi_0$.

Нове пароз'єднання Π_1 будуємо наступним чином:

$$\Pi_1 = \Pi_0 \setminus \{e_2 \cup e_4 \cup \ldots \cup e_{2k-2}\} \cup \{e_1 \cup e_2 \cup \ldots \cup e_{2k-1}\}.$$

Пароз'єднання Π_1 містить на одне ребро і на одну вершину з множини V_1 більше, ніж Π_0. Якщо Π_1 не охоплює всі вершини множини V_1, то беремо деяку вершину x_0 : $x_0 \in V_1$ і $x_0 \notin \Pi_1$ і т.д.

Приклад



$\Pi_0 = \{(x_1, y_1), (x_3, y_2)\}$.

1) $W_0 = (x_2)$; $W_1 = (y_2)$; $W_2 = (x_3)$; $W_3 = (y_1)$; $W_4 = (x_1)$; $W_5 = (y_4)$.
   $e_1 = (x_2, y_2)$; $e_2 = (x_3, y_2)$; $e_3 = (x_3, y_1)$; $e_4 = (x_1, y_1)$; $e_5 = (x_1, y_4)$.
   $\Pi_1 = \{(x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_1, y_4)\}$.
2) $W_0 = (x_4)$; $W_1 = (y_3, y_4)$.
   $e_1 = (x_4, y_3)$.
   $\Pi = \Pi_2 = \{(x_1, y_4), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_4, y_3)\}$.