ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАДАЧ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

1. **Знайти область визначення функцій:**

$$\text{а)}\ \ y = \arcsin(\log_4(5x^2 - 4x + 1)); \qquad \text{б)} y = \frac{\sqrt[4]{x^2 - 0,25}}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} + \log_2(\arccos x).$$

а) Область визначення знаходимо з умови:

$$\begin{cases} -1 \le \log_4(5x^2 - 4x + 1) \le 1, \\ 5x^2 - 4x + 1 > 0; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{4} \le 5x^2 - 4x + 1 \le 4, \\ x \in R; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5x^2 - 4x + 1 \le 0, \\ 5x^2 - 4x + \dfrac{3}{4} \ge 0, \\ x \in R; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 5\left(x - \dfrac{2+\sqrt{19}}{5}\right)\left(x - \dfrac{2-\sqrt{19}}{5}\right) \le 0, \\ 5(x - 0,3)(x - 0,5) \ge 0, \\ x \in R; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{19}}{5} \le x \le \dfrac{2+\sqrt{19}}{5}, \\ x \le 0,3, \quad \text{або} \quad x \ge 0,5, \\ x \in R. \end{cases}$$

Звідки $x \in \left[\dfrac{2-\sqrt{19}}{5}; 0,3\right] \bigcup \left[0,5; \dfrac{2+\sqrt{19}}{5}\right]$.

б) Область визначення функції б), що є сумою двох функцій, є спільною частиною їх областей визначення з виключенням з неї тих значень аргументу, за яких функція, що стоїть у знаменнику, перетворюється в нуль. Маємо

$$\begin{cases} x^2 - 0,25 \ge 0, \\ x^2 + 4x + 3 > 0, \\ \arccos x > 0, \\ |x| \le 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-0,5)(x+0,5) \ge 0, \\ (x+1)(x+3) > 0, \\ -1 \le x < 1 \\ -1 \le x \le 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le -0,5, \text{ або } x \ge 0,5, \\ x < -3, \text{ або } x > -1, \\ -1 \le x < 1 \\ -1 \le x \le 1. \end{cases}$$

Звідки маємо $x \in (-1; -0,5] \bigcup [0,5; 1)$.

2. **Знайти границі функцій:**

Всі запропоновані границі містять той чи інший тип невизначеності. Для пунктів а)–г) невизначеності розкриваються за допомогою тотожніх перетворень заданих функцій; для д)– е) – на основі використання співвідношень еквівалентності нескінченно малих, а невизначеність типу 1^∞ можна, зокрема, розкривати за формулою $\lim\limits_{x \to x_0} u^v = e^{\lim\limits_{x \to x_0}[v(u-1)]}$.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+2}{4x^3+3x-6} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{4+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}} = \dfrac{3}{4}.$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{4x^3+1}}{\sqrt{x^4+2}} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^4}}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^4}}} = 0.$

в) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^3-10x+3}{x^3-3x^2+2x-6} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{(x-3)(x^2+3x-1)}{(x-3)(x^2+2)} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2+3x-1}{x^2+2} = \dfrac{17}{11}.$

Тут для виділення множника $(x-3)$ зручно, згідно з теоремою Безу, поділити чисельник і знаменник на $x-3$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}\right)} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}} = \dfrac{3}{2}.$

Тут для розкриття невизначеності типу $(\infty-\infty)$ помножили і поділили вираз у дужках на спряжений до нього вираз.

д) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\ln(x^2-3x+3)}{\ln(x^2-5x+7)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{\ln[1+(x^2-3x+2)]}{\ln[1+(x^2-5x+6)]} =$

$= \left| \begin{array}{l} \ln[1+(x^2-3x+2)] \sim x^2-3x+2 \\ \ln[1+(x^2-5x+6)] \sim x^2-5x+6 \end{array} \right| = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)} = -1.$

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x+5}\right)^{\dfrac{x}{8}} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x}{8}\left(\dfrac{2x+1}{2x+5}-1\right)\right]} = \exp^{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{4x+10}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{4+\frac{10}{x}}} = e^{-1/4}.$

3. **Дослідити на неперервність функції:**

$$y = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \le 1 \\ x, & |x| > 1. \end{cases}$$

”Підозрілими” на розрив тут є точки, ліворуч і праворуч від яких функція задана різними аналітичними виразами (функції $y_1 = 2 - x^2$ і $y_2 = x$, очевидно, неперервні), тобто $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$. Для з'ясування характеру розривів функції при цих значеннях аргументу обчислимо лівосторонню (в точці $x = -1$)

$$\lim_{x \to -1-0} y_2 = \lim_{x \to -1-0} x = -1$$

та правосторонню границі

$$\lim_{x \to -1+0} y_1 = \lim_{x \to -1+0} (2 - x^2) = 1.$$

Значення функції в цій точці: $y_1(-1) = 2 - (-1)^2 = 1$. Отже, в точці $x = -1$ задана функція має розрив першого роду. Аналогічно досліджуємо точку $x = 1$

$$\lim_{x \to 1-0} y_1 = \lim_{x \to 1-0} (2 - x^2) = 1,$$

$$\lim_{x \to 1+0} y_2 = \lim_{x \to 1+0} x = 1.$$

Значення функції в цій точці: $y_1(1) = 2 - (1)^2 = 1$. Отже, в точці $x = 1$ функція неперервна. Схематичний графік функції показано на рис. 1.

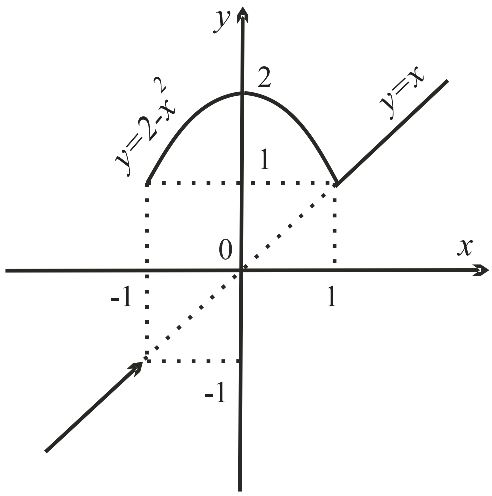

Рис. 1. Схематичний графік функції

б) $y = \mathrm{e}^{-1/x^2}$.

При $x = 0$ функція не визначена і через те розривна. Для з'ясування характеру розриву обчислимо лівосторонню та правосторонню границі функції:

$$\lim_{x \to -0} \mathrm{e}^{-1/x^2} = \lim_{x \to +0} \mathrm{e}^{-1/x^2} = 0.$$

Оскільки обидві границі існують і рівні, але в цій точці функція не визначена, то при $x = 0$ задана функція має усувний розрив (рис. 2).

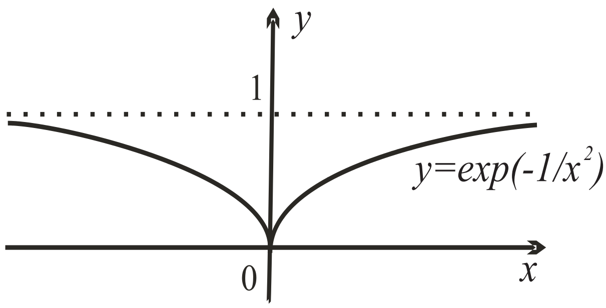

Рис. 2. Схематичний графік функції

4. **Знайти похідні функцій:**

а) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}$.

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)^2} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2}\cos^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 x + 1}.$$

б) $y = x^{\sin x}$.

Похідну цієї функції знайдемо, попередньо логарифмуючи цю функцію

$$\ln y = \sin x \ln x, \qquad (\ln y)' = \frac{1}{y} y' = \cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x,$$

звідки

$$y' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right).$$

в) $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases}$

Для параметрично заданої функції похідна

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^3)'}{(2t-1)'} = \frac{3t^2}{2} = \frac{3}{2} t^2.$$

5. **Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = 1 + x\,\mathrm{e}^y$ в точці $M(0;1)$.**

Рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = f(x)$ в заданій точці $M(x_0; y_0)$ мають відповідно вигляд:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Щоб знайти кутовий коефіцієнт $y'(x_0)$ дотичної до заданої кривої в точці $M(0;1)$, продиференціюємо праву і ліву частини заданого рівняння по x:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^y + x\,\mathrm{e}^y\frac{dy}{dx}.$$

Звідси

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{e}^y}{1 - x\mathrm{e}^y}.$$

Тоді

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{\mathrm{e}^1}{1-0} = \mathrm{e}.$$

Отже, рівняння дотичної буде

$$y = \mathrm{e}x + 1$$

і рівняння нормалі

$$y = -\frac{x}{\mathrm{e}} + 1.$$

6. **Знайти границі функцій за правилом Лопіталя:**

Слід пам'ятати, що правило Лопіталя безпосередньо застосовується до розкриття невизначеностей типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ або $\left(\frac{0}{0}\right)$: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{u'(x)}{v'(x)}$, а якщо маємо інші типи, то їх потрібно попередньо звести до вказаних. Іноді правило Лопіталя потрібно застосувати декілька разів в одному і тому ж прикладі.

а) 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x - x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\mathrm{tg}\,x - x)'}{(x - \sin x)'} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)\cos^2 x} = 2.$$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^3-3x^2+4)'}{(x^4-4x^3+5x^2-4x+4)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-6x}{4x^3-12x^2+10x-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(3x^2-6x)'}{(4x^3-12x^2+10x-4)'}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x-6}{12x^2-24x+10}=-\dfrac{3}{19}.$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x}{x^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(5^x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x\ln 5}{2x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(5^x\ln 5)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x\ln^2 5}{2}=+\infty.$

б) 1. $\lim\limits_{x\to+0}\left(x^2\ln x\right)=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{x^{-2}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{(\ln x)'}{(x^{-2})'}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^{-1}}{-2x^{-3}}=\lim\limits_{x\to+0}[-2x^2]=0.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(4^x-\ln x)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[4^x\left(1-\dfrac{\ln x}{4^x}\right)\right]=$

$=\left|\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{4^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x4^x\ln x}=0\Rightarrow\left(1-\dfrac{\ln x}{4^x}\right)\to 1\right|=(+\infty)\cdot 1=+\infty.$

3. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}=(0^0)=e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\ln x)}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\sin^{-1}x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(\sin^{-1}x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-\sin^{-2}x\cos x}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{(-\sin^2 x)'}{(x\cos x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{-2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}}=e^0=1.$

7. **Для функції $y=f(x)$ записати формули Тейлора або Маклорена другого порядку в околі точки $x=x_0$, якщо**

а) $y=\dfrac{x}{x-1},\qquad x_0=2.$

б) $y=\operatorname{tg}x,\qquad x_0=0.$

(залишковий член взяти у формі Лагранжа).

Запишемо формулу Тейлора другого порядку для тричі неперервно диференційовної в околі точки $x=x_0$ функції $y=f(x)$:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+R_2(x),$$

де

$$R_2(x)=\frac{f'''\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{3!}(x-x_0)^3,\qquad 0<\theta<1$$

– залишковий член у формі Лагранжа.

У тому випадку, коли $x_0 = 0$ маємо формулу Маклорена другого порядку.

Розв'яжемо задачу а). Знаходимо похідні функції $y = \dfrac{x}{x-1}$:

$$y' = -\frac{1}{(x-1)^2}; \qquad y'' = \frac{2}{(x-1)^3}; \qquad y''' = -\frac{6}{(x-1)^4}.$$

Враховуючи, що

$$y(2) = 2; \qquad y'(2) = -1; \qquad y''(2) = 2,$$

запишемо формулу Тейлора другого порядку для функції $y = \dfrac{x}{x-1}$ в околі точки $x_0 = 2$, а саме:

$$\frac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + (x-2)^2 - \frac{(x-2)^3}{\left(1+\theta(x-2)\right)^4}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

б) Знаходимо потрібні похідні функції $y = \operatorname{tg} x$:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}; \qquad y''' = \frac{2(2-\cos 2x)}{\cos^4 x}.$$

Враховуючи, що

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 1; \qquad y''(0) = 0,$$

запишемо формулу Маклорена другого порядку для функції $y = \operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2-\cos 2\theta x}{3\cos^4 \theta x}\, x^3, \qquad 0 < \theta < 1.$$

З останньої формули видно, що для малих значень аргументу $\operatorname{tg} x \approx x$.

8. **Дослідження функцій**

Дослідження функцій та побудову їх графіків здійснюємо за схемою:

– *вказуємо область визначення функції;*

– *з'ясовуємо парність, непарність, періодичність функції, шукаємо нулі функції;*

– *визначаємо точки розриву функції і встановлюємо їх характер;*

– *записуємо рівняння вертикальних асимптот графіка функції;*

– *складаємо рівняння похилих асимптот графіка функції;*

– *досліджуємо функцію на екстремум; обчислюємо значення функції в екстремальних точках; виділяємо інтервали монотонності функції;*

– *знаходимо точки перегину графіка функції і обчислюємо значення функції в цих точках; вказуємо інтервали опуклості-вгнутості графіка функції;*

– *за результатами проведеного дослідження будуємо графік функції.*

Дослідимо функцію $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$ та побудуємо її графік.

Задана функція визначена і неперервна на всій числовій осі. Отже, вертикальних асимптот ця функція немає.

Функція непарна, тому що $y(-x) = -y(x)$. Графік функції симетричний відносно початку координат, що дає можливість досліджувати її лише на проміжку $[0;\infty)$.

Функція y перетворюється в нуль при $x = 0$.

Знаходимо похилу (горизонтальну) асимптоту $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{4+x^2} = 0; \qquad b = \lim_{x\to\infty}[y(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{4+x^2} = 0.$$

Отже, графік функції має одну асимптоту $y = 0$, яка збігається з віссю абсцис.

Шукаємо похідну функції

$$y' = 4\cdot\frac{4-x^2}{(4+x^2)^2}.$$

Прирівнявши її вираз до нуля, знаходимо критичні точки $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. З виразу похідної видно, що для будь-якого $x \in [0;2)$ $y'(x) > 0$ (функція монотонно зростає), а при будь-якому $x \in (2;\infty)$ $y'(x) < 0$ (функція монотонно спадає). Ці інтервали розмежовані точкою максимуму з абсцисою $x = 2$, причому $y(2) = 1$.

Для знаходження точок перегину знаходимо похідну другого порядку

$$y'' = -8\cdot\frac{x(12-x^2)}{(4+x^2)^3}$$

і прирівнюємо її до нуля. Одержуємо абсциси "підозрілих" на перегин точок: $x_1 = -2\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2\sqrt{3}$.

З виразу y'' бачимо, що при будь-якому $x \in (0;2\sqrt{3})$ $y''(x) < 0$ (графік опуклий), при $x \in (2\sqrt{3};\infty)$ $y''(x) > 0$ (графік вгнутий). Отже, всі "підозрілі" точки є точками перегину із значеннями функції в них $y(\pm 2\sqrt{3}) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y(0) = 0$.

Використовуючи результати дослідження функції та властивість непарності, будуємо її графік (рис. 3).

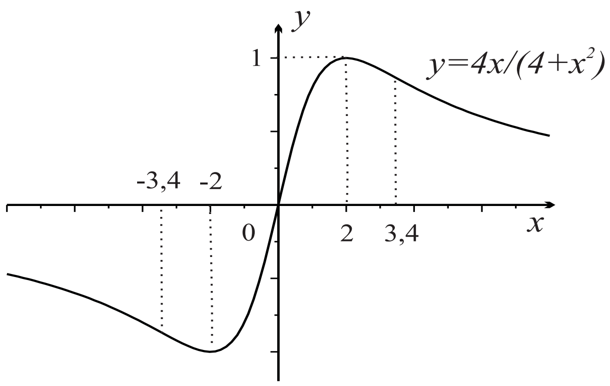

Рис. 3. Графік функції

9. **Розв'язати задачі на застосування похідної**

а) Потрібно побудувати відкритий циліндричний резервуар місткістю V_0 з товщиною стінки d. Якими повинні бути розміри резервуару (радіус основи і висота), щоб затрати матеріалу були найменшими?

Резервуар у розрізі має вигляд, що зображений на рис. 4.

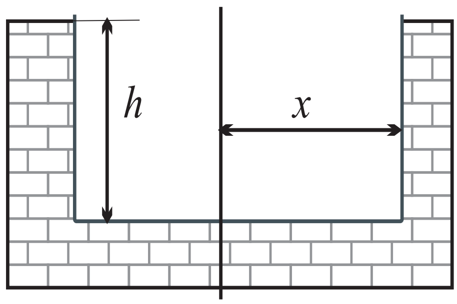

Рис. 4. Резервуар у розрізі

Радіус основи внутрішнього циліндра позначимо через x, висоту внутрішнього циліндра – через h. Об'єм днища та стінки резервуара знаходимо за формулою

$$V = \pi(x+d)^2 d + \pi\left[(x+d)^2 - x^2\right] h = \pi d(x+d)^2 + \pi h(2xd + d^2).$$

З іншого боку за умовою об'єм резервуара $V_0 = \pi x^2 h$. Звідси знаходимо висоту $h = \dfrac{V_0}{\pi x^2}$.

Отже, $V(x) = \pi d(x+d)^2 + \dfrac{\pi V_0}{\pi x^2}(2xd + d^2)$.

Дослідимо цю функцію на екстремум при $x > 0$.

$$V'(x) = 2\pi d(x+d) - \frac{2V_0 d}{x^2} - \frac{2V_0 d^2}{x^3} = 0.$$

Або

$$(x+d)(\pi x^3 - V_0) = 0,$$

додатним коренем якого є $x_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V_0}{\pi}}$.

Знаходимо другу похідну

$$V''(x) = 2\pi d + 2V_0\, d\, \frac{2x + 3d}{x^3}.$$

Очевидно, що $V''(x) > 0$, отже, при значенні внутрішнього радіуса $x = x_0$, функція затрат матеріалу $V(x_0)$ має мінімум, причому $h = \sqrt[3]{\dfrac{V_0}{\pi}}$.

б) Довести, що між двома коренями многочлена завжди знаходиться корінь його похідної.

Доведення. Довільний многочлен $P_n(x)$ є неперервною і диференційовною функцією на інтервалі $(x_1; x_2)$, де x_1, x_2 – корені многочлена $P_n(x)$. Отже, $P_n(x_1) = P_n(x_2) = 0$ і на відрізку $[x_1; x_2]$ виконується теорема Ролля. Тому існує значення $c \in (x_1; x_2)$ (c лежить між коренями x_1, x_2) таке, що $f'(c) = 0$, що й потрібно було довести.

в) Довести, що для $x \in (0; \infty)$ справджується нерівність $x > \ln x$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = x - \ln x$. Знайдемо її похідну

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Розв'язуючи нерівності $f'(x) < 0$ і $f'(x) > 0$, маємо: $f(x)$ спадає на інтервалі $(0; 1)$ від $f(0) = \infty$ до мінімального значення $f(1) = 1$ і зростає на інтервалі $(1; \infty)$ від $f(1) = 1$ до $f(\infty) = \infty$ через те, що

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x - \ln x) = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = \infty, \quad \text{бо} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Така поведінка функції $f(x)$ доводить її додатність, а, отже, справедливість нерівності $x > \ln x$ для $x \in (0; \infty)$.