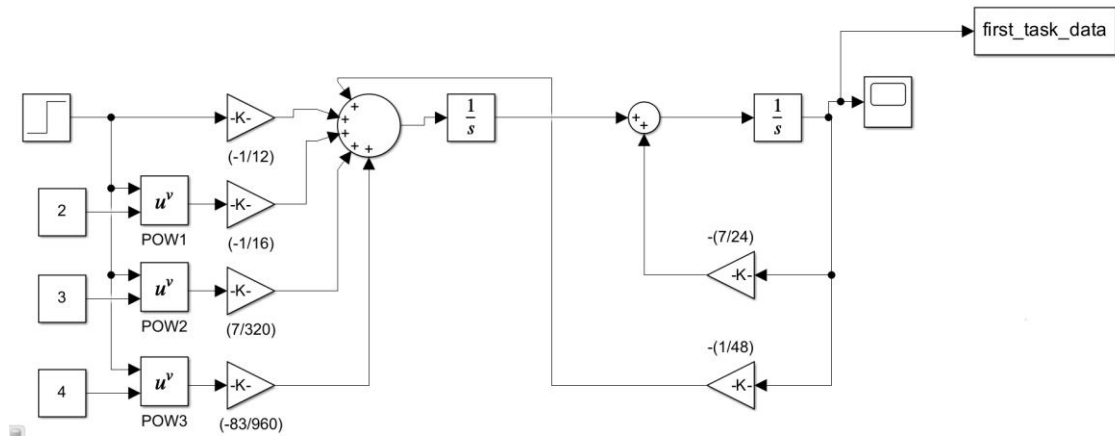


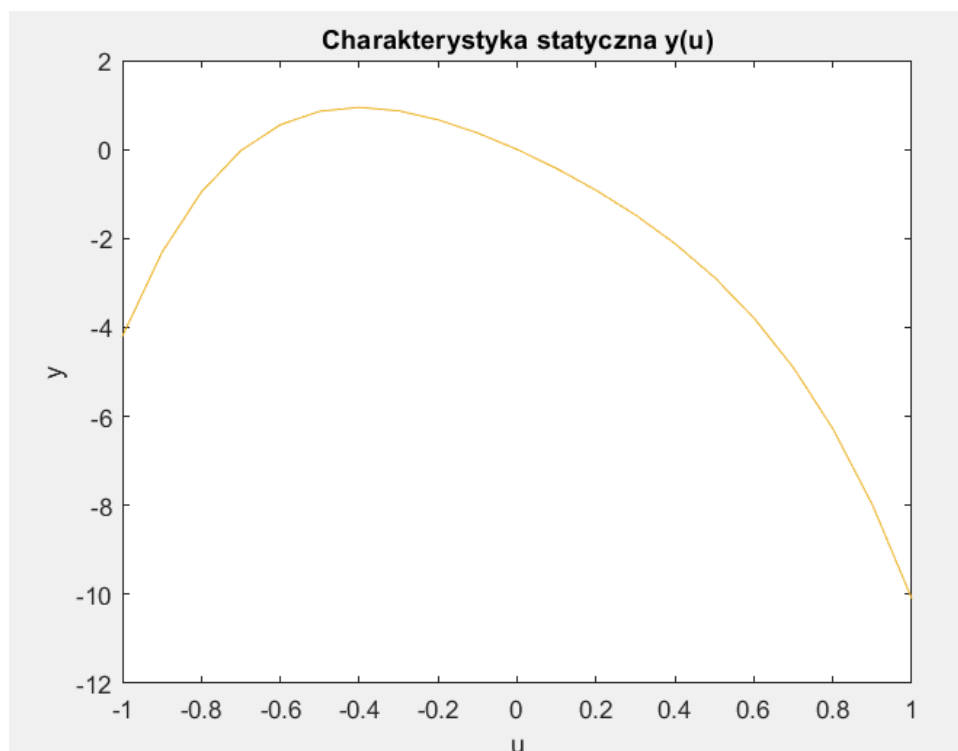
1. Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego



Rysunek 1. Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego

2. W celu wyznaczenia charakterystyki statycznej na podstawie modelu ciągłego należy przekształcić funkcję wyjścia tak, aby zależała wyłącznie od wejścia, czyli funkcję $y(x_1, \dots, x_n, u)$ do funkcji $y(u)$, a także przyjąć, że $\frac{dx_n(t)}{dt} = 0$ oraz usunąć zależności od czasu. Po wykonaniu tych czynności i rozwiązaniu układu równań otrzymujemy wynik:

$$y(u) = -4u - 3u^2 + 1.05u^3 - 4.15u^4$$



Rysunek 2. Wykres charakterystyki statycznej dla modelu nieliniowego ciągłego

3. W danej przestrzeni stanów występują trzy człony nieliniowe: u^2 , u^3 , u^4 . Linearyzacja potęgowej funkcji za pomocą rozwinięcia w szereg Taylora pierwszego rzędu wygląda następująco:

$$u^n \approx \bar{u}^n + n\bar{u}^{n-1}(u - \bar{u}), \text{ gdzie } \bar{u} - \text{punkt linearyzacji}$$

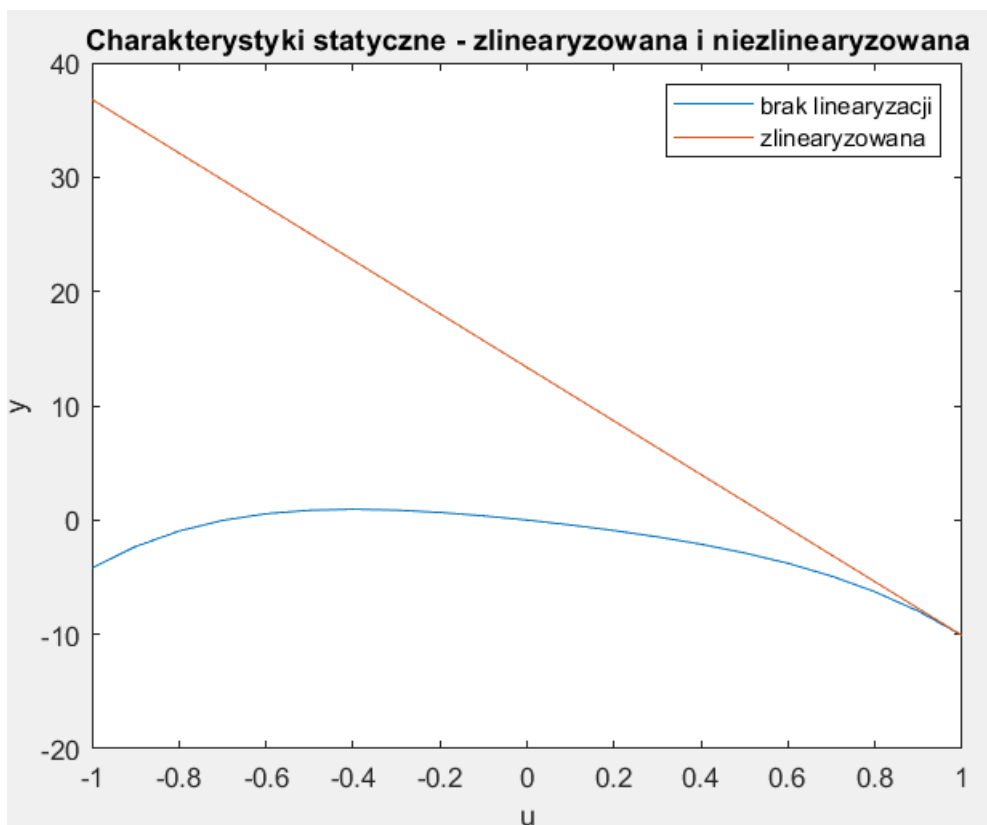
Po wykonaniu takich przekształceń do wzoru wyznaczonego w p. (2) otrzymujemy:

$$y(u) \approx -4u - 3\{\bar{u}^2 + 2\bar{u}(u - \bar{u})\} + \frac{21}{20}\{\bar{u}^3 + 3\bar{u}^2(u - \bar{u})\} - \frac{83}{20}\{\bar{u}^4 + 4\bar{u}^3(u - \bar{u})\}$$

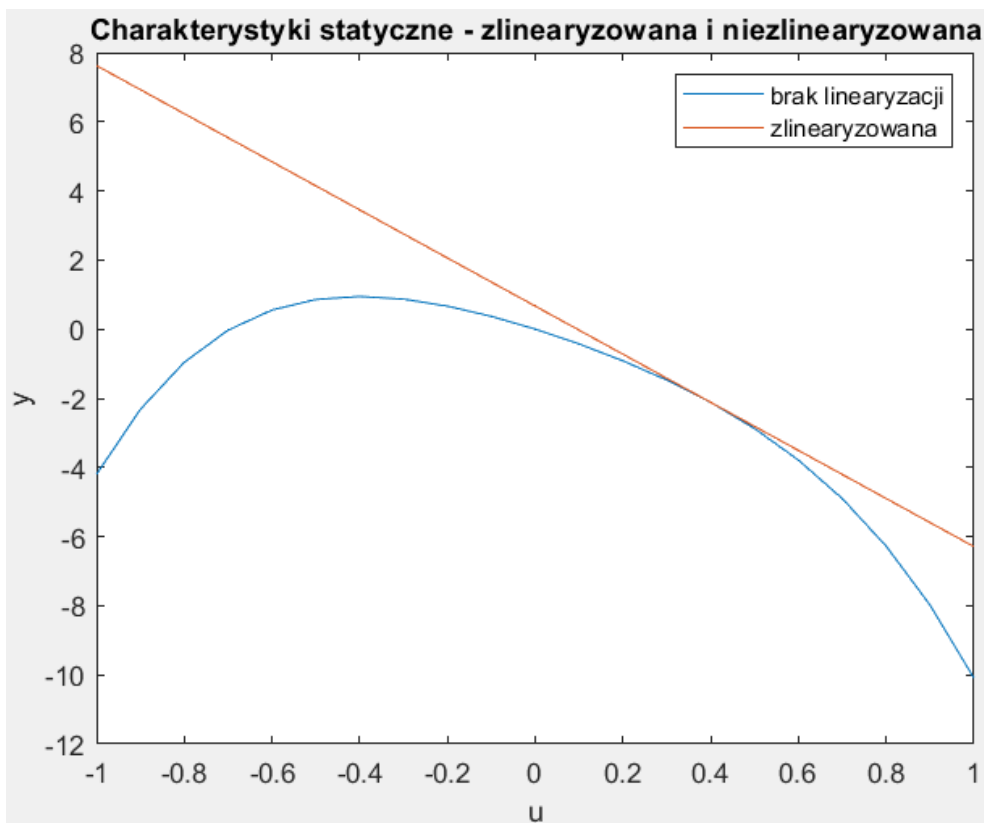
Co daje po przekształceniu

$$y(u) \approx 3\bar{u}^2 - 2.1\bar{u}^3 + \frac{249}{20}\bar{u}^4 + u(-4 - 6\bar{u} + \frac{63}{20}\bar{u}^2 - \frac{83}{5}\bar{u}^3)$$

4. Wykresy charakterystyk statycznych zlinearyzowanych i niezlinearyzowanych przedstawiono na rysunkach niżej



Rysunek 3. Wykresy dla punktu linearyzacji $\bar{u} = 1$



Rysunek 4. Wykresy dla punktu linearyzacji $\bar{u} = 0.4$

Można zauważyć, iż funkcja zlinearyzowana w pewnym punkcie \bar{u} będzie styczną do charakterystyki niezlinearyzowanej w tym samym punkcie.

5. W celu wyznaczenia modelu dyskretnego posłużono się metodą Eulera do przodu, czyli metodą przy której

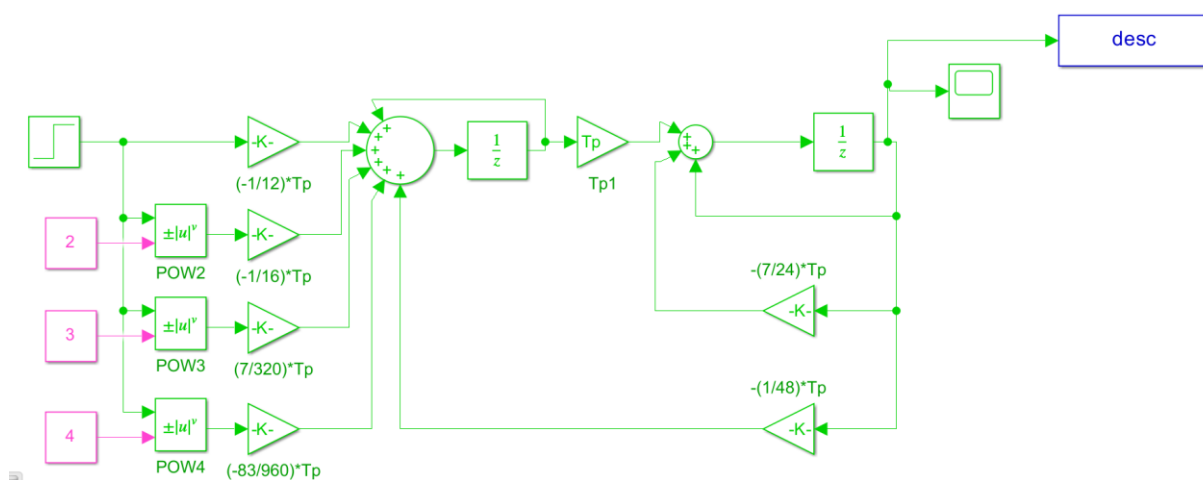
$$x_n(t) \Rightarrow x_n(k)$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} \Rightarrow \frac{x_n(k) - x_n(k-1)}{T_p}$$

Gdzie T_p – okres próbkowania, k – indeks czasu dyskretnego.

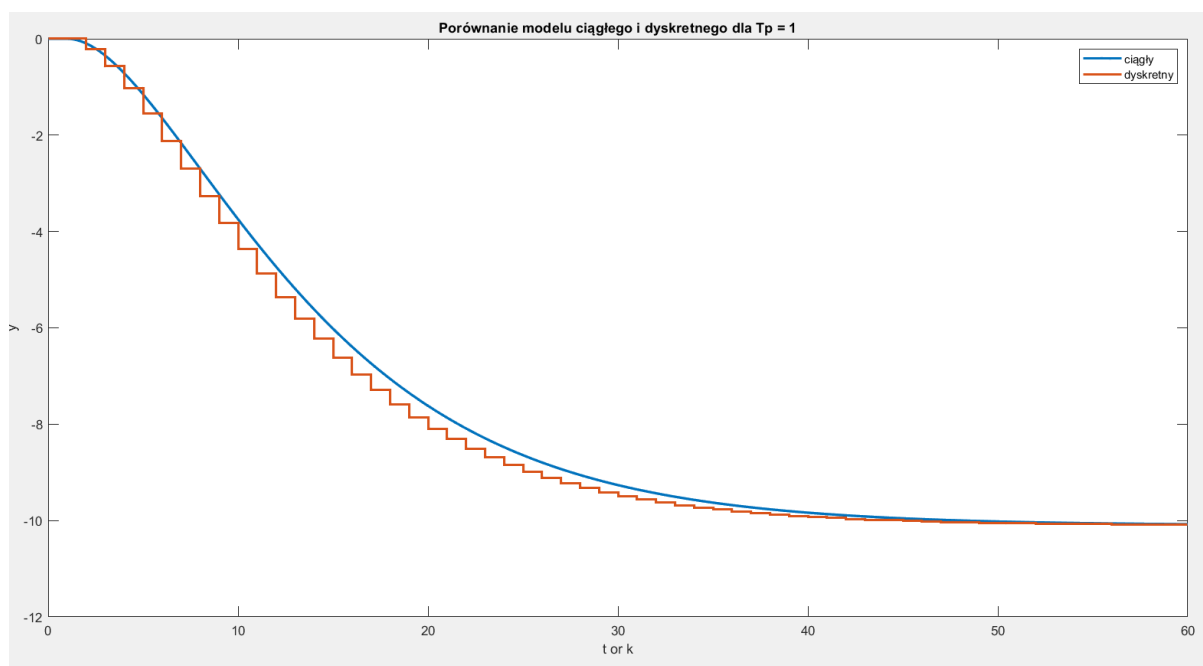
Otrzymany po przekształceniu układ równań:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - \frac{7}{24}T_p x_1(k) + T_p x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{48}T_p x_1(k) + x_2(k) + T_p \left(-\frac{1}{12}u(k) - \frac{1}{16}u^2(k) + \frac{7}{320}u^3(k) - \frac{83}{960}u^4(k) \right) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

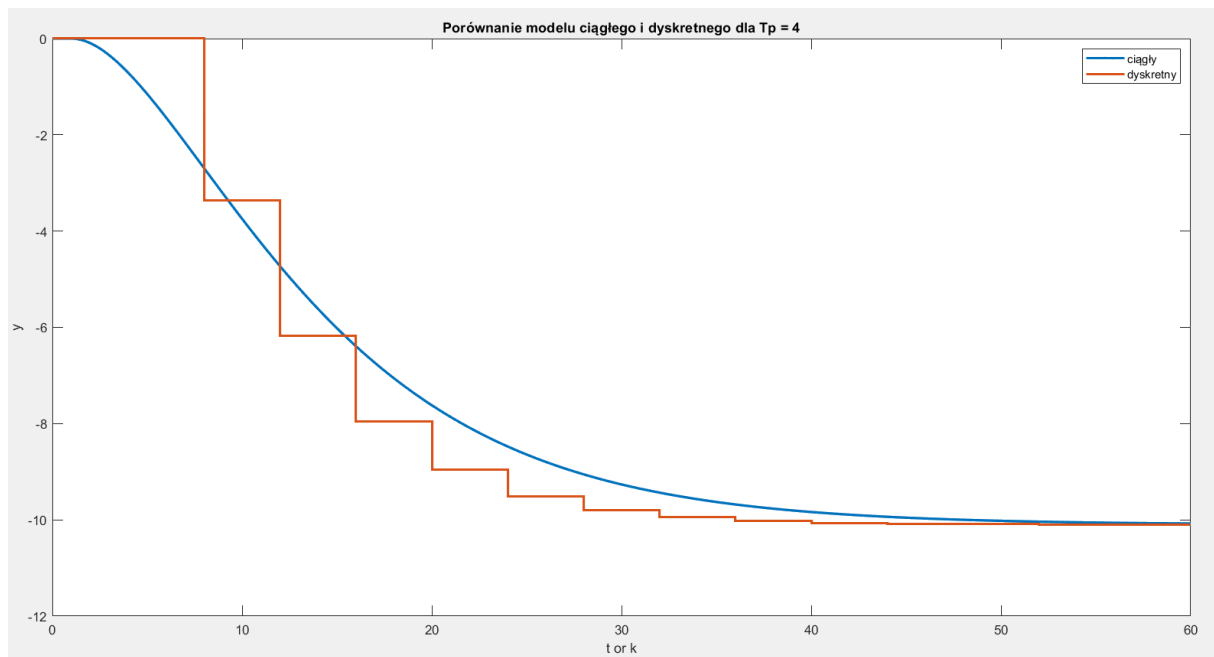


Rysunek 5. Reprezentacja graficzna nieliniowego dyskretnego modelu

6. Podczas symulacji użyto skoku z wartości od 0 do 1 w chwili 1 sek.



Rysunek 6. Porównanie dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego dla okresu próbkowania $T_p = 1$



Rysunek 7. Porównanie dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego dla okresu próbkowania $T_p = 4$

Z powyższych rysunków można wywnioskować, że im mniejszy jest okres próbkowania tym lepiej model dyskretny „nadąża” za modelem ciągłym, co jest logiczne, ponieważ teoretycznie przy okresie próbkowania równym 0 te wykresy musiałyby być takie same. Jeśli okres próbkowania będzie za duży, to model dyskretny będzie źle „odtwarzać” model ciągły. Decyzja, przy którym okresie próbkowania odpowiedź dyskretnego modelu będzie „dobra” zależy wyłącznie od projektanta.

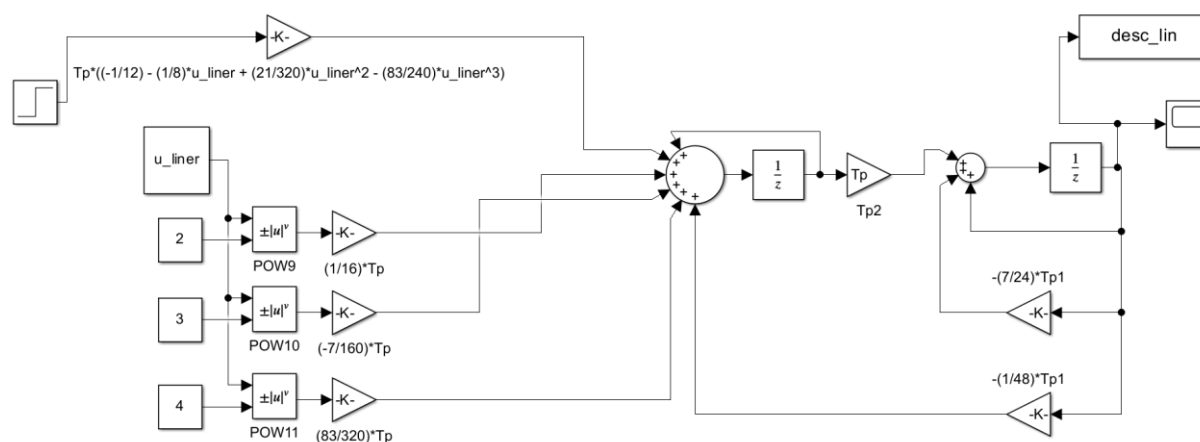
7. Stosując tą samą metodę linearyzacji co w p. (3) otrzymano wynik:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - \frac{7}{24}T_p x_1(k) + T_p x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{48}T_p x_1(k) + x_2(k) + T_p(u(k)(-\frac{1}{12} - \frac{1}{8}\bar{u} + \frac{21}{320}\bar{u}^2 - \frac{83}{240}\bar{u}^3) + \frac{1}{16}\bar{u}^2 - \frac{7}{160}\bar{u}^3 + \frac{83}{320}\bar{u}^4) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

Gdzie \bar{u} – punkt linearyzacji

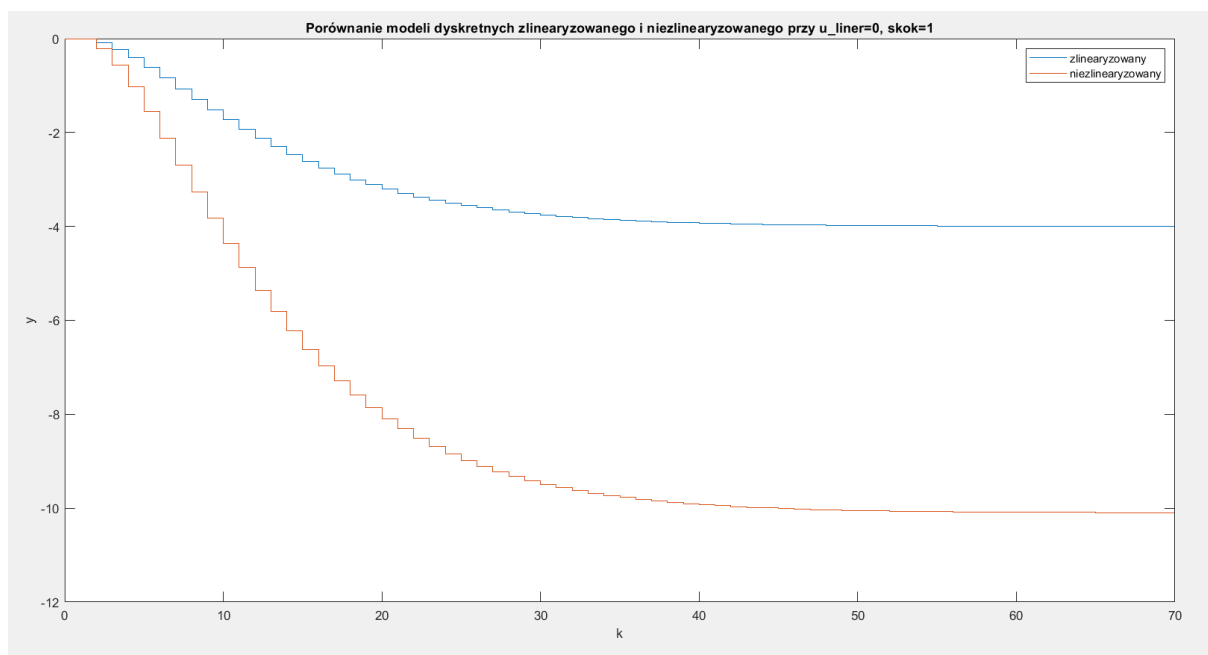
Obliczenia przeprowadzono na kartce.

8. Reprezentację graficzną zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego zilustrowano na rysunku niżej. Ten sam model bez członu stałego pokazano na rysunku 17.

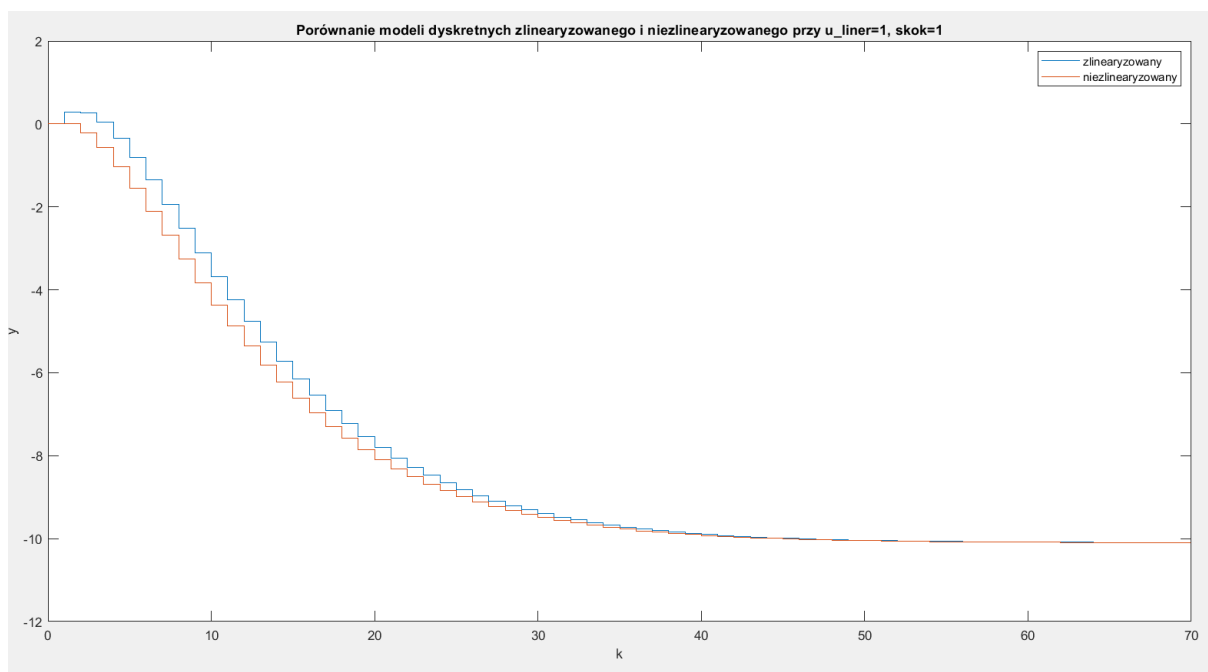


Rysunek 8. Reprezentacja graficzna zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego

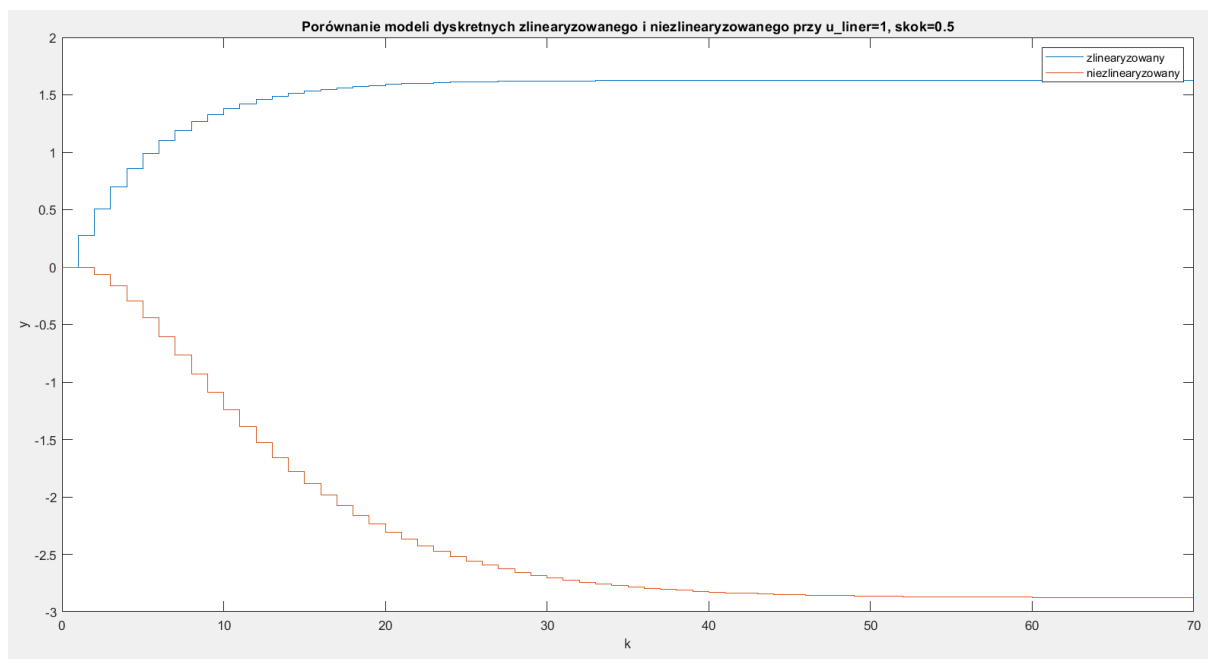
9.



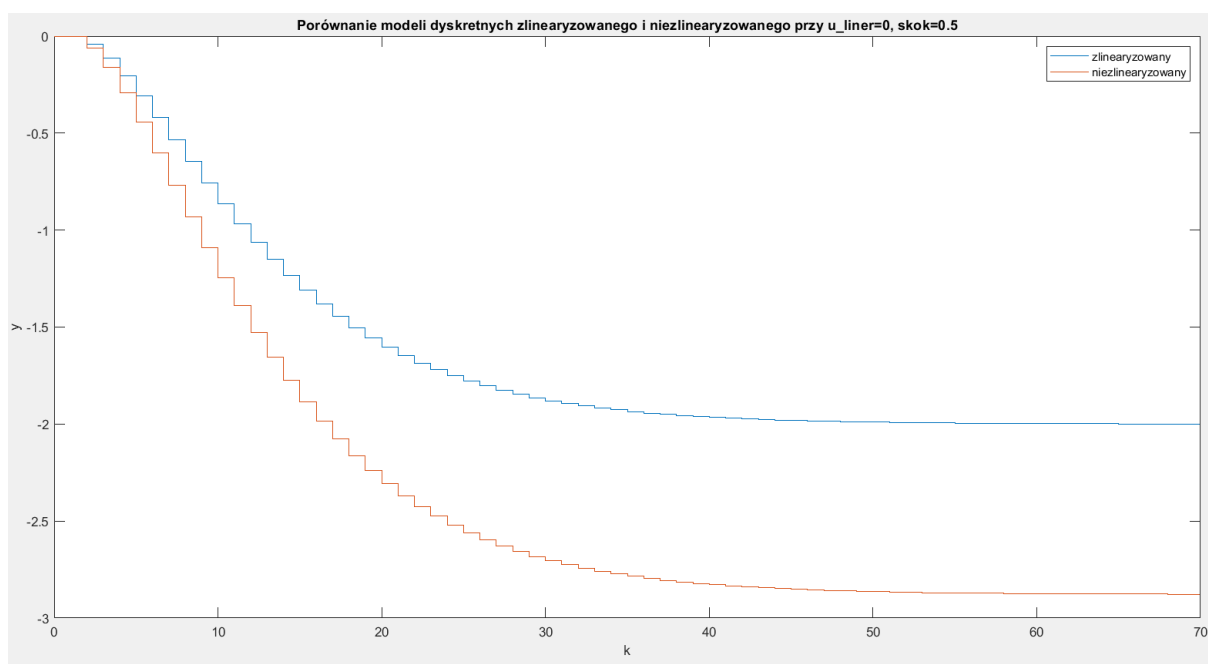
Rysunek 9. Porównanie modeli dyskretnych wersji nieliniowej i zlinearyzowanej w punkcie 0 przy wartości skoku 1



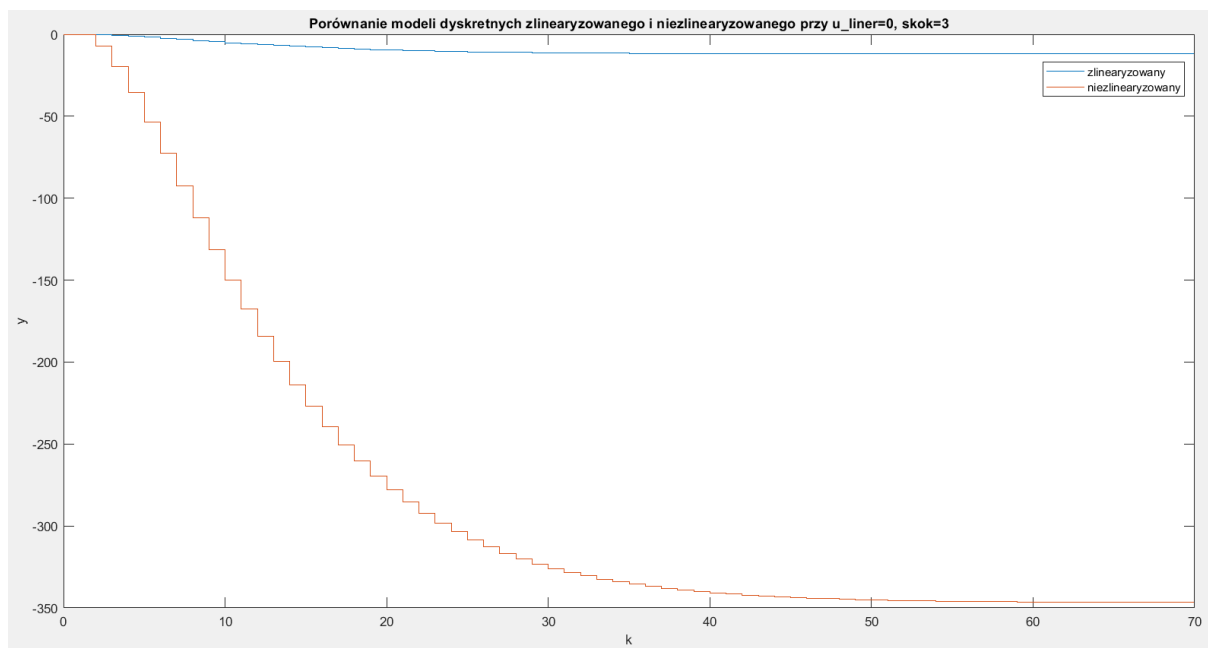
Rysunek 10. Porównanie modeli dyskretnych wersji nieliniowej i zlinearyzowanej w punkcie 1 przy wartości skoku 1



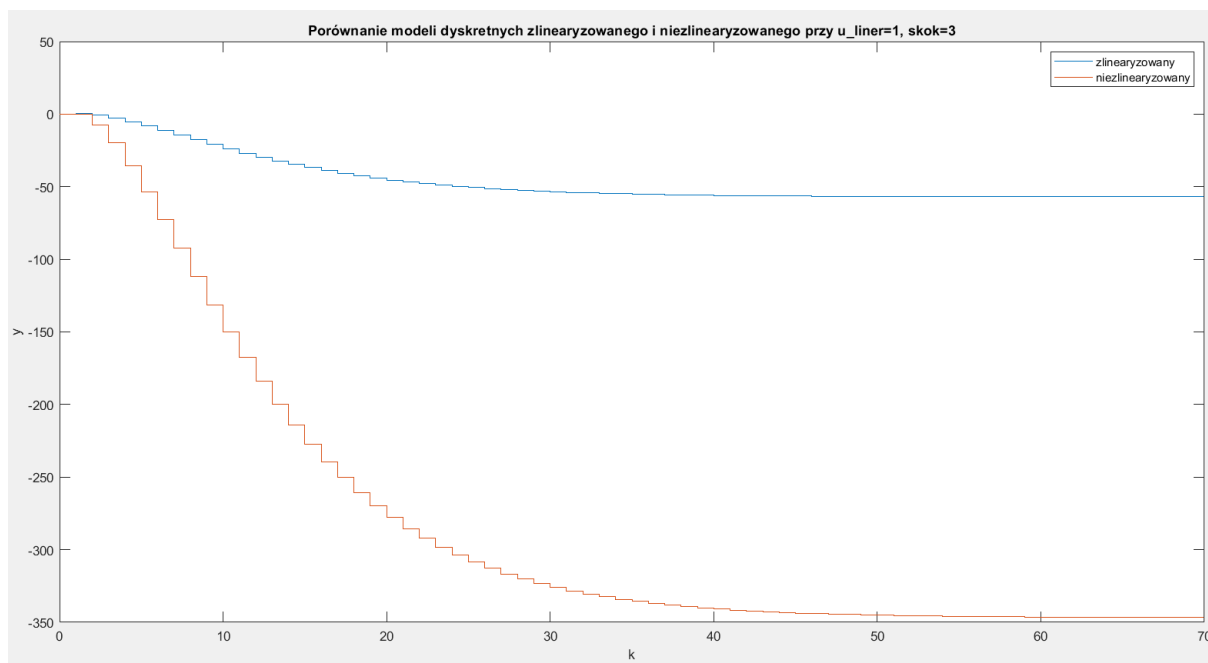
Rysunek 11. Porównanie modeli dyskretnych wersji nielinearnej i zlinearyzowanej w punkcie 1 przy wartości skoku 0.5



Rysunek 12. Porównanie modeli dyskretnych wersji nielinearnej i zlinearyzowanej w punkcie 0 przy wartości skoku 0.5



Rysunek 13. Porównanie modeli dyskretnych wersji nieliniowej i zlinearyzowanej w punkcie 0 przy wartości skoku 3



Rysunek 14. Porównanie modeli dyskretnych wersji nieliniowej i zlinearyzowanej w punkcie 1 przy wartości skoku 3

Na powyższych wykresach można zauważyć, że model dyskretny nieliniaryzowany nie zmienia swojego kształtu przy zmianie skoku, a tylko przeskalowuje się, jednak nie robi to w sposób proporcjonalny do zmian wejścia układu, co wskazuje na nieliniowość modeli (spowodowane nieliniowymi członami $u^2(k)$, $u^3(k)$, $u^4(k)$). Zlinearyzowana charakterystyka natomiast zachowuje się po różnemu. Ciekawą obserwacją, która od razu rzuca się w oczy jest taka, że przy skoku 0.5 w punkcie linearyzacji 1 zlinearyzowany model dyskretny nie „maleje”, a „wzrasta”.

10. Najpierw należy Odczytać macierzy A, B, C, D z równań przestrzeni stanu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{7}{24}T_p & T_p \\ -\frac{T_p}{48} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ T_p(-\frac{1}{12} - \frac{1}{8}\bar{u} + \frac{21}{320}\bar{u}^2 - \frac{83}{240}\bar{u}^3) \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0]$$

$$D = 0$$

Według wzoru transmitancja dyskretna $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$, gdzie I – macierz jednostkowa, A, B, C, D – macierze, wyznaczone wcześniej.

Podstawiając do wzoru powyższe wartości macierzy A, B, C, D otrzymujemy:

$$G(z) = \frac{T_p^2(-4 - 6\bar{u} + \frac{63}{20}\bar{u}^2 - \frac{83}{5}\bar{u}^3)}{48z^2 - 96z + 48 + 14zT_p - 14T_p + T_p^2}$$

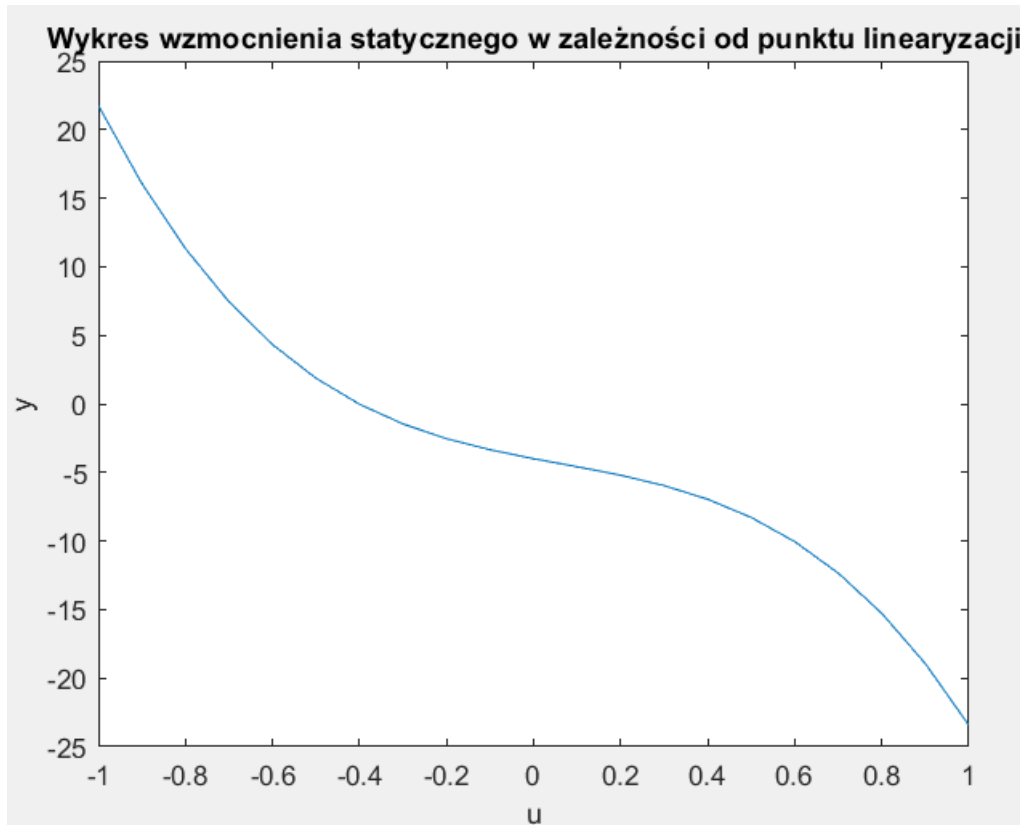
Gdzie T_p – okres próbkowania, \bar{u} - punkt linearyzacji

Przy okresie próbkowania $T_p = 1s$ otrzymujemy

$$G(z) = \frac{-4 - 6\bar{u} + \frac{63}{20}\bar{u}^2 - \frac{83}{5}\bar{u}^3}{48z^2 - 82z + 35} = G(z) = \frac{-4 - 6\bar{u} + \frac{63}{20}\bar{u}^2 - \frac{83}{5}\bar{u}^3}{48(z - \frac{5}{6})(z - \frac{7}{8})}$$

11. Przy okresie próbkowania $T_p = 1s$ otrzymujemy:

$$K_{stat}(\bar{u}) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = -4 - 6\bar{u} + \frac{63}{20}\bar{u}^2 - \frac{83}{5}\bar{u}^3$$



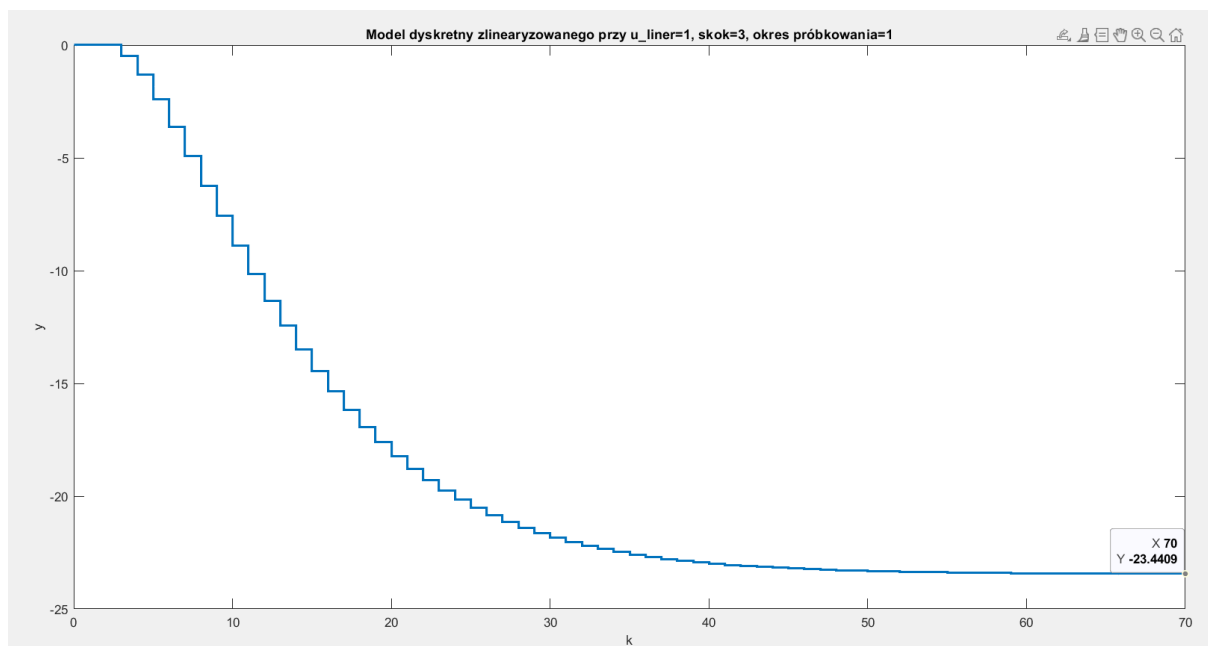
Rysunek 15. Wykres wzmocnienia statycznego w zależności od punktu linearyzacji

Wartość wzmocnienia statycznego w punkcie u musi pokrywać się z wartościami wyjścia zlinearyzowanego modelu dyskretnego przy skoku jednostkowym bez wpływu członu stałego (transmitancja nie uwzględnia go). Można zauważyć, że

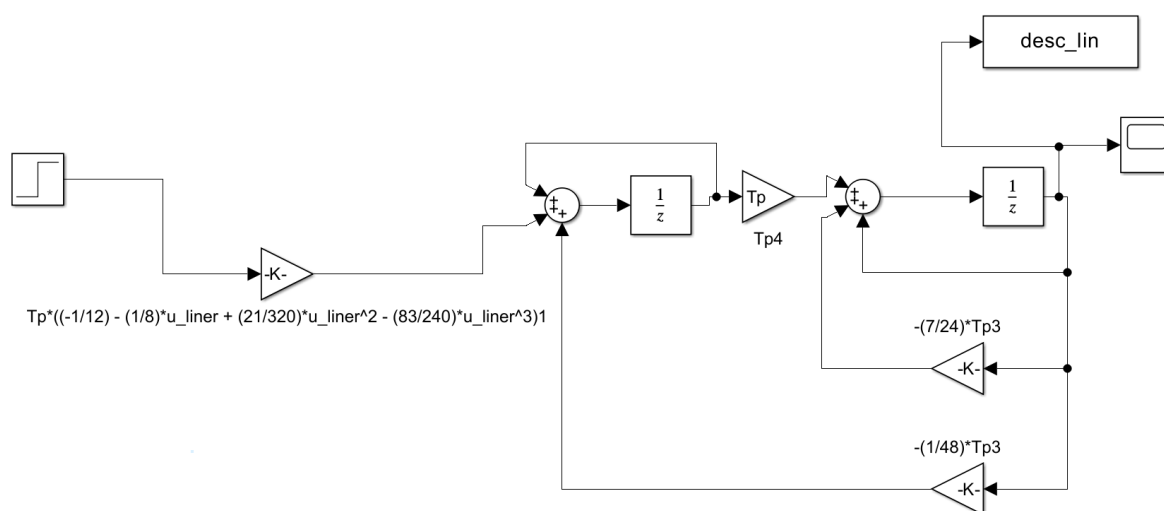
$$K_{stat}(0) = -4$$

$$K_{stat}(1) = -23.45$$

Aczkolwiek na rysunku 10. wartość stabilnego wyjścia wynosi mniej więcej -10, a nie -23.45. Powodem tego jest wpływ członu stałego. Po usunięciu tego członu wyjście układu jest zgodne z oczekiwaniami. Reprezentacja takiego układu zilustrowano na rysunku 17., a wykres wyjścia na rysunku 16.



Rysunek 16. Wyjście modelu dyskretnego zlinearyzowanego bez członu stałego w punkcie $\bar{u} = 1$ przy wartości skoku 1



Rysunek 17. Reprezentacja graficzna modelu dyskretnego zlinearyzowanego bez członu stałego