1. ¿Cuantas diferentes conjuntos de iniciales pueden formarse si cada persona tiene un apellido y (a) exactamente dos nombres, (b) a lo más dos nombres, (c) a lo más tres nombres?

Sol.

(a) 26^3 (b) 26^3+26^2 (c) $26^4+26^3+26^2$

2. La letras en código morse son formados por una sucesión de guiones y puntos con repetición permitida. ¿Cuántas letras son posibles formar con 10 símbolos o menos?

Sol.

El número posible de letras es $2^{10}+2^9+2^8+\cdots+2^3+2^2+2=\sum_{x=1}^{10} 2^x$

3. Cada pieza de domino esta marcada por dos números. La piezas son simetricas por tanto el par de números es no ordenado. ¿Cuántas diferentes piezas se hacen usando los números 1, 2, ..., n?

Sol.

$$P(x)=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1=\sum_{x=1}^{n} x=\frac{n(n+1)}{2}$$

4. Los números 1, 2, ..., n son ordenados aleatoriamente, Encuentra la probabilidad que los digitos aparezcan como vecinos en el orden mencionado (a) 1 y 2, (b) 1, 2 y 3,

Sol.

(a) $P(A)=\frac{(n-1)(n-2)!}{n!}=\frac{(n-1)!}{n(n-1)!}=\frac{1}{n}$; (b) $P(B)=\frac{(n-2)(n-3)!}{n!}=\frac{(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!}=\frac{1}{n(n-1)}$

5. A tira 6 dados y gana si obtiene al menos obtiene un ace. B tira doce dados y gana si almenos obtiene 2 aces. ¿Quien tiene mayor probabilidad de ganar?

Sol.

$$P(w_A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^6\approx 1-0.334=0.666\ ;\quad P(w_B)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{12}-12\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{11}=0.62$$

6. (a) Encuentra la probabilidad de que entre 3 digitos aleatorios aparezcan exactamente 1, 2 o 3 unos. Haz lo mismo con cuatro digitos

Sol.

(a) $P(A)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^3$

$=1-\frac{729}{1000}$

$=1-0.729=0.271$

(b) $P(B)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^4$

$=1-\frac{6561}{10000}$

$=1-0.6561=0.3439$

7. Encuentra las probabilidades p_r que en una muestra de r digitos aleatorios, 2 no sean iguales. Estime el valor númerico de p_{10} usando la formula de Stirling.

Sol.

Sabemos que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, luego entonces $p_r = \frac{n!}{n^r}$, así

$p_{10} = \frac{10!}{10^{10}}$, calculemos 10!

$$10! \sim \sqrt{2\pi 10}\left(\frac{10}{e}\right)^{10} \approx 3598695$$

luego entonces

$$p_{10} = \frac{3598695}{10^{10}} = 0.0003598$$

8. ¿Cuál es la probabilidad que entre K digitos aleatorios (a) 0 no aparece; (b) 1 no aparece; (c) que ni 0 o 1 no aparezcan; (d) al menos uno de los dos digitos 0 y 1 no aparece? Dado que A y B representan los eventos en (a) y (b). Exprese los otros eventos en terminos de A y B.

Sol.

$$P(A) = \left(\frac{9}{10}\right)^K$$

$$P(B) = \left(\frac{9}{10}\right)^K$$

$$P(A \cap B) = \left(\frac{8}{10}\right)^K$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \left(\frac{9}{10}\right)^K + \left(\frac{9}{10}\right)^K - \left(\frac{8}{10}\right)^K = \frac{2 \cdot 9^K - 8^K}{10^K}$$

9. Si n bolas son posicionadas en n celdas aleatorias, encuentre la probabilidad que exactamente una celda quede vacía.

Sol.

$$P(X) = \frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2} n!}{n^n}$$

10. En un estacionamiento hay una fila con doce cajones. Un hombre observa que hay 8 carros estacionados y que los cuatro cajones desocupados son adyacentes uno del otro.

Sol.

$$P(X) = \frac{\binom{9}{1} 4!\ 8!}{12!} = \frac{9 \cdot 24 \cdot 8!}{12 \cdot 11!} = \frac{2 \cdot 9!}{11!} = \frac{2 \cdot 9!}{11 \cdot 10 \cdot 9!} = \frac{2}{110} = \frac{1}{55}$$

11. A un hombre le dan n llaves de las cuales solo una abre una puerta. Él intenta sucesivamente (probando sin reemplazo). Este proceso puede requerir $1, 2, \ldots, n$ intentos. Demostrar que cada uno de los n resultados tiene $1/n$ de probabilidad.

Dem.

Sea el conjunto A con $|A| = n$, se debe tomar un solo elemento de este sin reemplazo, tenemos que $\exists$ n diferentes pruebas es decir $(n)_1$. Luego entonces, usemos la probabilidad de los casos no favorables para encontrar el resultado

$$1 - \frac{(n)_1}{n} = 1 - \frac{n-1}{n} = 1 - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \quad \blacksquare$$

12. Suponga que cada n barras son trozadas en una parte larga y otra corta. Las $2n$ partes son acomodadas en n pares de las nuevas barras formadas. Encuentre la probabilidad (a) que las partes sean unidas en el orden original, (b) que todas las partes largas hagan par con alguna parte corta.

Sol.

Numero de casos posibles: $\frac{(2n)!}{2^n n!}$

(a) $P(X) = \frac{2^n n!}{(2n)!}$ (b) $P(X) = \frac{n!}{\frac{(2n)!}{2^n n!}} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$

13. Un profesor obtiene una multa 12 veces por dejar su vehículo estacionado en un lugar prohibido por la noche. Las 12 multas fueron dadas ya sea el martes o el jueves. Encuentra la probabilidad del evento.

Sol.

La probabilidad de obtener una multa ya sea martes o jueves es $\frac{2}{7}$, luego entonces

$$P(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^{12} = \frac{4096}{1.38 \times 10^{10}} \approx 2.95 \times 10^{-7}$$

14. De las doce multas policiacas ninguna fue entregada en Domingo. ¿Esto es evidencia de que ninguna multa fue dada en Domingo?

Sol.

Supongamos que no recibimos multas los días domingo, por tanto los 6 días restantes sí, entonces

$$P(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^{12} = \frac{2.1767 \times 10^{9}}{1.38 \times 10^{10}} = 0.1572$$

15. Una caja contiene tornillos, 19 en buenas condiciones y 10 defectuosos. Si 10 tornillos son tomados ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

Sol.

$$\frac{\binom{19}{10}}{\binom{29}{10}} = \frac{92378}{20030010} = \frac{323}{70035} \approx 0.0046$$

16. De un conjunto con 5 símbolos a, b, c, d, e ; una muestra de 25 elementos es tomada. Encuentra la probabilidad de que la muestra contenga 5 símbolos de cada tipo

Sol.

$$P(x) = \frac{25!}{5!\,5!\,5!\,5!\,5!}\left(\frac{1}{5}\right)^{25} = \frac{25!}{(5!)^5\,5^{25}} \approx 0.0020$$

17. Si n hombres, entre los que estan A & B, estan en un fila, ¿Cuál es la probabilidad que haya exactamente r hombres entre A & B?, Si ellos estan en un circulo en lugar de una fila, mostrar que la probabilidad es independiente de r y por lo tanto es $1/(n-1)$.

Sol.

a) Sabemos que número total de formas de ordenar una fila es $n!$, luego entonces el número de posibles posiciones entre A & B es $2!\cdot(n-r-1)!$, así para conocer el número de formas que se pueden escoger r personas es C_r^{n-2}, entonces

$$P(x) = \frac{2!\cdot(n-r-1)\cdot\binom{n-2}{r}\cdot r!\cdot(n-r-2)!}{n!}$$

$$= \frac{2!\cdot(n-r-1)!\cdot\binom{n-2}{r}\cdot r!}{n!}$$

$$= \frac{2!\cdot(n-r-1)\cancel{!}\cdot\frac{(n-2)!}{\cancel{(n-r-2)!\,r!}}\cdot\cancel{r!}}{n!}$$

$$= \frac{2\cdot(n-r-1)\cdot(n-2)!}{n!}$$

$$= \frac{2\cdot(n-r-1)}{n(n-1)}$$

b) No importa donde este A, puede haber r personas entre A & B donde B se encuentra en $A+r+1$ o $A+(n-r-1)$, a menos que $r = n/2-1$, entonces

Si $r \neq n/2-1$

$$P(x) = \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$$

sino

$$P(x) = \frac{n}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1}$$

18. ¿Cual es la probabilidad que tiras dos veces 3 dados cada una muestre la misma configuración si (a) Las dados son distinguibles, (b) no lo son?

Sol.

(a) $p(x) = \frac{6^3}{6^6} = \frac{1}{6^3}$ (b) $P(x) = \frac{\binom{6+3-1}{3}}{\binom{6+3-1}{3}\binom{6+3-1}{3}} = \frac{1}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}$

19. Demuestra que es más probable obtener al menos un ace con 4 dados que al menos un doble ace en 24 tiros con 2 dados.

Sol

(a) $P(x) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177$

(b) $P(x) = \binom{24}{0}\left(\frac{1}{36}\right)^0\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.5085$

20. De una población de n elementos una muestra de tamaño r es tomada. Encuentra la probabilidad que ninguno de la N prescritos elementos sera incluido en la muestra, asumiendo que la elección es (a) sin, (b) con reemplazo. Compara los valores númericos para los dos metodo cuando (i) n = 100, r = N = 3, y (ii) n = 100, r = N = 10.

Sol.

a) $P(x) = \frac{\binom{n-N}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{\frac{(n-N)!}{(n-N-r)!\,r!}}{\frac{n!}{(n-r)!\,r!}} = \frac{(n-r)!\,(n-N)!}{n!\,(n-N-r)!}$

b) $P(x) = \frac{(n-N)^r}{n^r} = \left(\frac{n-N}{n}\right)^r = \left(1-\frac{N}{n}\right)^r$

i) $P_a = \frac{(100-3)!\,(100-3)!}{100!\,(100-6)!} = \frac{97!\cdot 97!}{100!\,(94)!} = \frac{97\cdot 96\cdot 95}{100\cdot 99\cdot 98} = 0.9118$

$P_b = \left(1-\frac{3}{100}\right)^3 = 1+2\left(\frac{9}{10000}\right)-2\left(\frac{3}{100}\right)-\frac{27}{1000000} = 0.9126$

ii) $P_a = \frac{(100-10)!\cdot(100-10)!}{100!\,(100-20)!} = \frac{90!\,90!}{100!\,80!} = \frac{90\cdot 89\cdot\ldots\cdot 81}{100\cdot 99\cdot\ldots\cdot 91} = 0.3304$

$P_b = \left(1-\frac{10}{100}\right)^{10} = \left(1-\frac{1}{10}\right)^{10} = 0.3486$

21. En una ciudad de n+1 habitantes, una persona cuenta un rumor a una segunda persona, quien a su vez se lo dice a una tercera persona, etc. En cada iteración el receptor del rumor es elegido aleatoriamente de n personas disponibles. Encuentra la probabilidad que el rumor sea dicho r veces sin (a) regresar a la primer persona que lo contó, (b) ser repetido por alguna persona. Haz el mismo problema cuando en cada iteración el rumor es contado por una única persona para formar un grupo de N personas elegidas aleatoriamente.

Sol.

(a) Número de formas de pasar el rumor por r iteraciones ; n^r

$$1 \to n \text{ formas}$$
$$2 \to (n-1) \text{ formas}$$
$$\vdots$$
$$r \to (n-1) \text{ formas}$$

es decir la probabilidad de que ocurra el evento es $\dfrac{n(n-1)^{r-1}}{n^r}$

(b)
$$1 \to n \text{ formas}$$
$$2 \to (n-1) \text{ formas}$$
$$\vdots$$
$$r \to (n-r+1) \text{ formas}$$

es decir la probabilidad del evento es $\dfrac{n!}{(n-r)!\, n^r}$

Segunda parte: número total de casos $\binom{n}{N}^r$

(a) $\dfrac{\binom{n}{N}\binom{n-1}{N}^{r-1}}{\binom{n}{N}^r}$ (b) $\dfrac{\binom{n}{N}\binom{n-N}{N}\cdots\binom{n-(r-1)N}{N}}{\binom{n}{N}^r}$

22. En una población de n+1 personas en hombre, el "progenitor" manda cartas a 2 distintas personas, la "primer generación". Esta repite el escenario y, generalmente, por cada carta recibida los receptores mandan 2 cartas a dos personas elegidas aleatoriamente sin considerar al anterior remitente. Encuentra la probabilidad de que en las generaciones 1, 2, ..., r no se incluya al progenitor. Encuentra la media de la distribución, suponiendo que n es muy grande.

Sol.

(a) Sea $\frac{1}{n+1}$ la probabilidad de enviarse una carta así mismo el progenitor, la Probabilidad de fracaso de este evento sería $1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$, luego entonces conocemos que se mandan $\sum_{x=0}^{r} 2^x - 1$ cartas, es decir que

$$\prod_{x=1}^{r}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2^x}$$

cumpliendo con $\sum_{x=0}^{r} 2-1$ por propiedad de los exponentes

Pero

$$\sum_{x=0}^{r} 2^x = \left(\frac{1-2^{r+1}}{1-2}\right) = 2^{r+1}-1$$

Luego entonces

$$\begin{aligned}
\prod_{x=1}^{r}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2^x} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sum_{x=1}^{r} 2^x} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sum_{x=0}^{r} 2^x - 1} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2^{r+1}-2} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2(2^r-1)}
\end{aligned}$$

Por tanto la probabilidad del evento es $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2(2^r-1)}$

23. Un problema familiar. En cierta familia 4 mujeres toman turnos para lavar los trastes. En total hay 4 roturas, 3 son hechas por la más pequeña, y después de es llamada torpe. ¿Tenía motivos para atribuir al azar la frecuencia de sus roturas?

Sol.

$$P(x) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right) = 4 \cdot \frac{1}{4^3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4^3} = \frac{3}{64}$$

Es muy poco probable

24. ¿Cual es la probabilidad que (a) los cumpleaños de 12 personas sean en 12 meses diferentes (asumir la misma probabilidad a los 12 meses)
(b) que los cumpleaños de 6 personas sean en 2 meses exactos?

Sol.

(a) $P(x) = 12!\left(\frac{1}{12}\right)^{12} = \frac{12!}{12^{12}} = \frac{11!}{12^{11}}$

(b) $P(x) = \frac{\binom{12}{2}(2^6-2)}{12^6} = \frac{4092}{2985984} = 0.0013$

25. Dadas 30 personas, encuentra la probabilidad que entre los 12 meses haya 6 con 2 cumpleaños y 6 con 3 cumpleaños

Sol.

$$P(x) = \frac{\binom{12}{6} \cdot \frac{30!}{(2!)^6(3!)^6}}{12^{30}} = \frac{924 \cdot 30!}{(2!)^6(3!)^6\, 12^{30}}$$

26. Un armario contiene n pares de zapatos. Si 2r zapatos son escogidos aleatoriamente (con $2r<n$) ¿Cual es la probabilidad que (a) no haya un par completo, (b) haya exactamente un par, (c) haya exactamente 2 pares completos entre ellos?

Sol.

(a) $P(x) = \frac{\binom{n}{2r}2^{2r}}{\binom{2n}{2r}}$ (b) $P(x) = \frac{\binom{n}{1}\binom{n-1}{2r-2}2^{2r-2}}{\binom{2n}{2r}}$ (c) $P(x) = \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2r-4}2^{2r-4}}{\binom{2n}{2r}}$

27. Un carro es estacionado entre N carros en una fila, en ninguno de los extremos. En su regreso el dueño encuentra que exactamente r de los N lugares estan aún estan ocupados. ¿Cual es la probabilidad que ambos lugares vecinos se encuentren vacios?

Sol.

$$P(x) = \frac{\binom{N-3}{r-1}}{\binom{N-1}{r-1}}$$

28. Un grupo de 2N niños y 2N niñas es dividido en 2 grupos iguales. Encuentra la probabilidad p para cada grupo tenga el mismo número de niñas y niños. Estima p usando la formula de stirling.

Sol.

$$P(p) = \frac{\binom{2N}{N}\binom{2N}{N}}{\binom{4N}{2N}} = \frac{\binom{2N}{N}^2}{\binom{4N}{2N}} = \frac{\frac{2N!}{(2N-N)!\,N!}}{\frac{4N!}{(4N-2N)!\,2N!}} =$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2N!}{(N!)^2}}{\frac{4N!}{(2N!)^2}} = \frac{2N!\,(2N!)^2}{(N!)^2\,4N!} = \frac{(2N!)^3}{4N!\,(N!)^2}$$

Donde

$$N! \sim \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N, \quad 2N! \sim 2\sqrt{\pi N}\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}, \quad 4N! \sim \sqrt{8\pi N}\left(\frac{4N}{e}\right)^{4N}$$

$$\frac{\left(\sqrt{2}\sqrt{2\pi N}\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}\right)^3}{\sqrt{8\pi N}\left(\frac{4N}{e}\right)^{4N}\left(\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{2N}{e}\right)^{6N}}{\left(\frac{4N}{e}\right)^{4N}\left(\frac{N}{e}\right)^{2N}} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2^{6N}\cancel{\left(\frac{N}{e}\right)^{6N}}}{4^{4N}\cancel{\left(\frac{N}{e}\right)^{6N}}} =$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}\cdot 2^{6N}}{2^{8N}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{2N}}$$

29. En Bridge. Demostrar que la probabilidad p de que en el Oeste reciba exactamente K ases es la misma probabilidad de que una mano arbitraria de trece cartas contenga K ases.

Sol.

$$(a)\quad P(p) = \frac{\binom{4}{K}\binom{48}{13-K}}{\binom{52}{13}}$$

$$(b)\quad P(p) = \frac{\binom{4}{K}\binom{48}{13-K}}{\binom{52}{13}}$$

30. La probabilidad que en el juego de bridge el "este" reciba m y el "sur" n picas es la misma que si 2 manos de 13 cartas cada una, tomadas aleatoriamente del mazo, la primera contine m y la segunda n picas.

(a) El número de formas de tomar 2 mazos es $\binom{52}{13}\binom{39}{13}$, luego entonces

$$\frac{\binom{13}{m}\binom{39}{13-m}\binom{13-m}{n}\binom{26+m}{13-n}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}}$$

31. ¿Cual es la probabilidad que la manas de Bridge "Norte" y "Sur" juntos contengan exactamente K ases donde $K = 0,1,2,3,4$?

Sol.

$$P(x) = \frac{\binom{4}{K}\binom{22}{26-K}}{\binom{52}{26}}$$

32. Dados a,b,c,d son 4 enteros tales que $a+b+c+d = 13$. Encuentre la probabilidad $p(a,b,c,d)$ en el juego de Bridge los jugadores Norte, Este Sur y Oeste tienen a,b,c,d picas, respectivamente.

Sol.

$$p(a,b,c,d) = \frac{\binom{13}{a}\binom{39}{13-a}\binom{13-a}{b}\binom{26+a}{13-b}\binom{13-a-b}{c}\binom{13+a+b}{13-c}\binom{13-a-b-c}{d}\binom{a+b+c}{13-d}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}}$$

33. Usando el resultado del problema 32 encuentre la probabilidad que algún jugador reciba a, otro b, el tercero c y al ultimo d picos si (a) $a=5$, $b=4$, $c=3$, $d=1$; (b) $a=b=c=4$, $d=1$; (c) $a=b=4$ $c=3$ y $d=2$.

Sol.

(a)
$$P(x)=\frac{\binom{13}{5}\binom{39}{8}\binom{8}{4}\binom{31}{9}\binom{4}{3}\binom{22}{10}\binom{1}{1}\binom{12}{12}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}}$$

(b)
$$P(x)=\frac{\binom{13}{4}\binom{39}{9}\binom{9}{4}\binom{30}{9}\binom{5}{4}\binom{21}{9}\binom{1}{1}\binom{12}{12}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}}$$

(c)
$$P(x)=\frac{\binom{13}{4}\binom{39}{9}\binom{9}{4}\binom{30}{9}\binom{5}{3}\binom{21}{10}\binom{2}{2}\binom{11}{11}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}}$$

34. Dado a,b,c,d son enteros con $a+b+c+d=13$ encuentra la probabilidad $q(a,b,c,d)$ que una mano en el Bridge consista de a picos, b corazones, c diamantes y d treboles y mostrar que el problema no se reduce a una situación, aleatoria, de 13 bolas en una celda, ¿Porque?

Sol.

(a)
$$q(a,b,c,d)=\frac{\binom{13}{a}\binom{13}{b}\binom{13}{c}\binom{13}{d}}{\binom{52}{13}}$$

(b)

El problema no se reduce al colocar bolas en una celda por que la cartas en cada mano son distintas y el calculo combinatorio debe tener en cuenta la selección de cartas especificas

35. Calcule las probabilidades $p_0(r), \ldots, p_4(r)$ entre r cartas tomadas del Bridge aleatoriamente existen $0,1,\ldots,4$ ases, respectivamente. Verifique que $p_0(r) = p_4(52-r)$

Sol.

(a)
$$p_i(r) = \frac{\binom{4}{i}\binom{48}{r-i}}{\binom{52}{r}} = \binom{4}{i}\frac{\dfrac{48!}{(48-r+i)!(r-i)!}}{\dfrac{52!}{(52-r)!\,r!}} = \binom{4}{i}\frac{48!\,(52-r)!\,r!}{52!\,(48-r+i)!\,(r-i)!} =$$

$$\Rightarrow \binom{4}{i}\frac{(52-r)_{4-i}\,(r)_i}{(52)_4}$$

(b)
$$p_0(r) = \binom{4}{0}\frac{(52-r)_4\,(r)_0}{(52)_4} = \frac{(52-r)_4}{(52)_4}$$

$$p_4(52-r) = \binom{4}{4}\frac{(52-52+r)_0\,(52-r)_4}{(52)_4} = \frac{(r)_0\,(52-r)_4}{(52)_4} = \frac{(52-r)_4}{(52)_4}$$

36. Si las cartas son tomadas aleatoriamentente una por una, encontrar las probabilidades $f_1(r), \ldots, f_4(r)$ que el primer, …, el cuarto as toman al r-enesimo intento. Averigue las medias de los tiempos de espera para el primer, …, el cuarto as y despues calculelos.

Sol.

Las probabilidades de los tiempos de espera para el primer, …, el cuarto as exceden r son:

$$w_1(r) = p_0(r) \;;\; w_2(r) = p_0(r) + p_1(r) \;;\; w_3(r) = p_0(r) + p_1(r) + p_2(r) \;;$$
$$w_4(r) = 1 - p_4(r)$$

Luego entonces $f_i(r) = w_i(r-1) - w_i(r)$

Finalmente para las medias debe cumplir $w_i(r) \leq \frac{1}{2}$, al graficar las funciones obtenemos que para $i=1$, $r=8$; $i=2$, $r=20$; $i=3$, $r=32$ & $i=4$, $r=44$.

37. Encuentre la probabilidad que dos manos cada una contengan exactamente K ases si las 2 manos estan compuestas de r cartas del bridge cada una y son tomadas de (a) la misma baraja, (b) de 2 barajas. Demostrar que cuando $r=13$ la probabilidad en (a) es la probabilidad que 2 jugadores preasignados del bridge reciban exactamente K ases cada uno.

Sol.

(a) $$p(a) = \frac{\binom{4}{K}\binom{48}{r-K}\binom{4-K}{K}\binom{48-r+K}{r-K}}{\binom{52}{r}\binom{52-r}{r}} \quad \text{con } K \leq 2$$

(b) $$p(b) = \left\{ \frac{\binom{4}{K}\binom{48}{r-K}}{\binom{52}{r}} \right\}^2 \quad \text{con } K \leq 4$$

Cuando $r=13$, dos manos de 13 cartas son tomadas. Para el evento (a) considera tomas del mismo deck r cartas para 2 jugadores, para el evento hipotetico tenemos que el juego de bridge involucra 4 jugadores y cada uno recibe 13 cartas, por tanto ambos eventos son similares.

38. Errores de impresión. Cada página del libro contiene N simbolos, posiblemente errores de impresión. El libro contiene 500 páginas y 5 errores de impresión. Demostrar que (a) la probabilidad que las páginas $1, 2, 3, \ldots, n$ contiene respectivamente $r_1, r_2, \ldots, r_n$ errores de impresión es

$$\binom{N}{r_1}\binom{N}{r_2}\cdots\binom{N}{r_n} \Big/ \binom{nN}{r}$$

(b) para una gran N esta probabilidad puede ser aproximada por (5.3). Concluya que las r errores de impresión son distribuidas en las n páginas aproximadamente de acuerdo con una distribución aleatoria de r pelotas en n celdas.

39. Si r_1 indistinguibles cosas de un primer tipo y r_2 indistinguibles cosas de un segundo tipo son posicionados en n celdas, encuentra el número de distinguibles arreglos.

Sol.

$$\binom{r_1+n-1}{r_1}\binom{r_2+n-1}{r_2}$$

40. Si r_1 dados y r_2 monedas son arrojados, ¿Cuantos resultados pueden ser distinguidos?

Sol.

$$\binom{r_1+5}{5}(r_2+1)$$

41. ¿De cuantas formas distinguibles cuando r_1 blancas, r_2 negras y r_3 rojas bolas se acomodadas?

Sol.

$$\frac{(r_1+r_2+r_3)!}{r_1!\; r_2!\; r_3!}$$

42. Encuentra la probabilidad que en un arreglo aleatorio de 52 cartas de bridge 2 ases no sean adyacentes.

Sol.

$$\frac{48!\; 4!\binom{49}{4}}{52!} = \frac{48!\cdot\frac{49!}{45!}}{52!} = \frac{\cancel{48!}\cdot\cancel{49}\cdot 48\cdot 47\cdot 46}{52\cdot 51\cdot 50\cdot\cancel{49}\cdot\cancel{48!}}$$

$$\Rightarrow \frac{(48)_4}{(52)_4}$$

43. En el ejemplo (3.c) inicia con 7 pasajeros y para en el decimo piso. De varios arreglos de descanso pueden ser denotadas por simbolos como (3, 2, 2) donde en cierto piso descienden 3 personas, luego 2 y así sucesivamente. Encuentra la probabilidad que de 15 posibles arreglos de (7) a (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

(a)

Dem.

Sabemos que el libro tiene n páginas y cada una tiene N símbolos, entonces el total de símbolos en el libro es de nN. Luego entonces $\exists$ r errores de impresión en el libro así $\exists \binom{nN}{r}$ formas de encontrar r errores en el libro.

Luego, si $\exists$ r errores reportidos en el libro y sabemos que $\sum_{i=1}^{n} r_i = r$ donde r_i es el número de errores en la i-enesima página, por tanto hablamos de una partición $\exists \binom{N}{r_i}$ formas de encontrar errores en una página, así la probabilidad sería

$$\frac{\binom{N}{r_1}\binom{N}{r_2}\cdots\binom{N}{r_n}}{\binom{nN}{r}} \quad \text{donde } \sum_{i=1}^{n} r_i = r$$

(b)

Sabemos que $\sum_{i=1}^{n} r_i = r$ el número de colocar r errores en n páginas que dan como resultado los números de ocupación $r_1, r_2, \ldots, r_n$; es dado por $\binom{nN}{r}$

Suponiendo que las N^n colocaciones son igual de probables, la probabilidad de obtener los números de ocupación dados $r_1, \ldots, r_n$ es igual a

$$\frac{r!}{r_1!\, r_2! \cdots r_n!} \left(\frac{1}{N}\right)^{-n}$$

44. Cumpleaños. Encuentre las probabilidades de diversas configuraciones del cumpleaños de 22 personas.

Sol.

Dado que S, D, T, C representan simple, doble, triple & cuatruple, respectivamente, nosotros tenemos.

$$P\{(22S)\} = \frac{365!}{343!} \cdot 365^{-22} = 0.5243$$

$$P\{(20S, 1D)\} = \frac{365!}{344!} \frac{22!}{20!\,2!} 365^{-22} = 0.352$$

$$P\{(18S, 2D)\} = \frac{365!}{2!\,345!} \frac{22!}{18!\,2!\,2!} \cdot 365^{-22} = 0.09695$$

$$P\{(16S, 3D)\} = \frac{365!}{3!\,346!} \frac{22!}{16!\,(2!)^3} \cdot 365^{-22} = 0.01429$$

$$P\{(19S, 1T)\} = \frac{365!}{345!} \frac{22!}{19!\,(3!)} \cdot 365^{-22} = 0.0068$$

$$P\{(17S, 1D, 1T)\} = \frac{365!}{346!} \frac{22!}{17!\,2!\,3!} 365^{-22} = 0.00336$$

$$P\{(14S, 4D)\} = \frac{365!}{347!} \cdot \frac{22!}{14!\,(2)^4} \cdot 365^{-22} = 0.00124$$

$$P\{(15S, 2D, 1T)\} = \frac{365!}{347!} \cdot \frac{22!}{15!\,(2)^2\,3!} \cdot 365^{-22} = 0.00066$$

$$P\{(18S, 1C)\} = \frac{365!}{346!} \cdot \frac{22!}{18!\,(4!)} \cdot 365^{-22} = 0.00009$$

45. Encuentre la probabilidad para una mano de poker sea un (a) royal flush (10, J, Q, K, A de un solo conjunto); (b) 4 de un tipo (4 cartas de igual valor de cara); (c) full house (un par y un triple de cartas con el mismo valor de casas) (d) straight (una secuencia de 5 cartas sin importar el conjunto); (f) dos pares (2 pares con el mismo valor de cara más otra carta); (g) un par (un par con el mismo valor de cara más tres diferentes cartas.

Sol.

$$(a) = \frac{4}{\binom{52}{5}} \quad (b) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 4}{\binom{52}{5}} \quad (c) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6}{\binom{52}{5}} \quad (d) = \frac{9 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}}$$

$$(e) = \frac{13\binom{12}{2} 4 \cdot 4^2}{\binom{52}{5}} \quad (f) = \frac{\binom{13}{2} 11 \cdot 6^2 \cdot 4}{\binom{52}{5}} \quad (g) = \frac{\binom{12}{3} 6 \cdot 4^3 \cdot 13}{\binom{52}{5}}$$

Sol.

$$P\{(7)\} = \frac{10!}{9!\,1!}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = 10\left(\frac{1}{10}\right)^7$$

$$P\{(6,1)\} = \frac{10!}{8!\,1!\,1!}\cdot\frac{7!}{1!\,6!}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = (10)_2\cdot 7\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^7$$

$$P\{(5,2)\} = \frac{10!}{8!\,1!\,1!}\cdot\frac{7!}{5!\,2!}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_2\cdot 21}{10^7}$$

$$P\{(5,1,1)\} = \frac{10!}{7!\,1!\,1!\,1!}\cdot\frac{7!}{5!\,1!\,1!}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_3\cdot(7)_2}{10^7}$$

$$P\{(4,3)\} = \frac{10!}{8!\,1!\,1!}\cdot\frac{7!}{4!\,3!}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_2\,35}{10^7}$$

$$P\{(4,2,1)\} = \frac{10!}{7!\,(1!)^3}\cdot\frac{7!}{4!\,2!\,1!}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_3\,105}{10^7}$$

$$P\{(4,1,1,1)\} = \frac{10!}{6!\,(1!)^4}\cdot\frac{7!}{4!\,(1!)^3}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_4\,(7)_3}{10^7}$$

$$P\{(3,3,1)\} = \frac{10!}{7!\,(1!)^3}\cdot\frac{7!}{3!\,3!\,1!}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_3\,140}{(10)^7}$$

$$P\{(3,2,2)\} = \frac{10!}{7!\,(1!)^3}\cdot\frac{7!}{3!\,2!\,2!}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_3\,210}{(10)^7}$$

$$P\{(3,2,1,1)\} = \frac{10!}{6!\,(1!)^4}\cdot\frac{7!}{3!\,2!\,(1!)^2}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_4\,420}{10^7}$$

$$P\{(3,1,1,1,1)\} = \frac{10!}{5!\,(1!)^5}\cdot\frac{7!}{3!\,(1!)^4}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_5\,(7)_4}{10^7}$$

$$P\{(2,2,2,1)\} = \frac{10!}{6!\,(1!)^4}\cdot\frac{7!}{(2!)^3\,1!}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_4\,630}{10^7}$$

$$P\{(2,2,1,1,1)\} = \frac{10!}{5!\,(1!)^5}\;\frac{7!}{(2)^2(1)^3}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_5\,1260}{10^7}$$

$$P\{(2,1,1,1,1,1)\} = \frac{10!}{4!\,(1)^6}\;\frac{7!}{2\,(1)^5}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_6\,2520}{10^7}$$

$$P\{(1,1,1,1,1,1,1)\} = \frac{10!}{3!\,(1)^7}\;\frac{7!}{(1)^7}\left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{(10)_7\,5040}{10^7}$$