Ejercicios.

1. Un dado tiene dos de sus lados pintados de rojo, dos de negro, dos de amarillo. Si el dado se tira dos veces, describe el espacio muestral bidimensional para el experimento. ¿Qué probabilidades asignaria a diversos puntos muestrales?

Sol.

El espacio muestral bidimensional es

$$\Omega = \{(R,R),(R,N),(R,A),(N,R),(N,N),(N,A) \\ (A,R),(A,N),(A,A)\}$$

Por tanto la probabilidad de obtner un color en un lanzamiento es $\frac{1}{3}$ luego entonces de dos tiros es $\frac{1}{9}$

2. Una caja contiene 4 pelotas blancas y 2 pelotas negras. Una pelota es tomada de esta. Describe el espacio muestral y asigna probabilidades a los puntos muestrales cuando (a) las pelotas son númeradas; (b) como las pelotas de colores no pueden distinguirse

Sol.

(a) El espacio muestral es

$$\Omega = \{B_i \mid i = 1,\dots,4\} \cup \{N_i \mid i = 1,2\}$$

donde $|\Omega| = 6$

portanto la probabilidad del evento es $\frac{1}{6}$

(b) El espacio muestral

$$\Omega = \{B, N\}$$

* con un punto con probabilidad $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
* con un punto con probabilidad $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3. Uno caja con 3 bolas blancas y dos balas negras. Dos balas son tomadas de la caja. Describa el espacios muestral bidimensional cuando (a) las bolas son númeradas (b) las balas coloreadas no pueden ser distinguidas.

Sol.

(a) El espacio muestral es el es una relación entre el conjunto de balas A con sí mismo, tal que, ${}_A R_A$ es una relación no reflexiva y asimetrica tal que $|{}_A R_A| = 20$ por tanto la probabilidad de obtener un posible resultado del evento es $1/20$

(b) El espacio muestral esta dado por la combinación de colores (B,B), (N,N), (N,B) (B,N)

por tanto $\exists$ trees puntos con probabilidad $3/10$ y uno con $1/10$

4. Demostrar que para los eventos A, B y C, la probabilidad que al menos ocurra uno de los eventos es $P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} - P\{A \cap B\} - P\{A \cap C\} - P\{B \cap C\} + P\{A \cap B \cap C\}$.

Dem

$$P\{A \cup B \cup C\} \leftrightarrow$$
$$P\{A \cup (B \cup C)\} \leftrightarrow$$
$$P\{A\} + P\{B \cup C\} - P\{A \cap (B \cup C)\} \leftrightarrow$$
$$P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} - P\{B \cap C\} - P\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\} \leftrightarrow$$
$$P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} - (P\{A \cap B\} + P\{A \cap C\} - P\{A \cap B \cap C\}) - P\{B \cap C\} \leftrightarrow$$
$$P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} - P\{A \cap B\} - P\{A \cap C\} - P\{B \cap C\} + P\{A \cap B \cap C\} \quad \blacksquare$$

5. Si el dado del problema 1 es tirado hasta que salga un lado rojo, describe el espacio muestral para el experimento. ¿Cuál es la probabilidad que se le asignaría a varios puntos muestra?

Sol.

$$P(x) = \sum_{x=1}^{n} \binom{n}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-x}$$

6. Dos bolas son tomadas de una urna que contiene 1 bola blanca, 3 bolas negras y 4 bolas verdes. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda negra? (b) ¿Cuál es la probabilida de reemplazar la primer bola antes de tomar la segunda?.

Sol.

(a) $\left(\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$

7. Una urna contiene 2 bolas blancas y 2 bolas negras; una segunda contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras. (a) Si una bola es es cogida de cada urna, ¿Cuál es la probabilidad que sean del mismo color? (b) Si una urna es seleccionada al azar y una bola es tomada de esta ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca? (c) Si una urna es tomada al azar y se seleccionan 2 bolas de esta ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

Sol.

(a) $\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{20}+\frac{6}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

(b) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{8}+\frac{2}{10}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{5+4}{20}=\frac{9}{20}$

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=$

$\frac{2}{24}+\frac{2}{24}+\frac{2}{40}+\frac{3}{20}=\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{6+5}{30}=\frac{11}{30}$

8. Compare las oportunidades de obtener un 5 con un dado y de obtener un 10 con dos dados.

Sol.

(a) Solo los pares ordenados $(4,6)$, $(5,5)$, $(6,4)$ suman 10 por tanto de un total de 36 posibles resultados $\exists$ $3/36 = 1/12$ de probabilidad de obtener un 10, así es más posible obtener un 5 con un solo dado.

9. Suponiendo que la proporción de niños varones sea $1/2$, encuentre la probabilidad que en una familia de 5 niños (a) todos los niños sean del mismo sexo; (b) los trees más grandes son niños y las dos más jovenes niñas, (c) trees de ellos seran niñas y 2 seran niñas?

Sol.

(a) $\frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ (b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{32}$

(c) $\binom{5}{3}\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

10. Extracciones sucesivas de una carta de una baraja ordinaria son hechas con reemplazo cada vez, ¿Cuantas extracciones son necesarias antes de que la probabilidad sea menor a 0,9 para obtener una pica al menos una vez?

Sol.

La probabilidad de obtener una pica de una baraja es $1/4$ por tanto para no obtenerla es $3/4$, dado que el experimento es con reemplazo se realiza n veces por tanto para obtener una pica al hacer n veces el experimento es $1-(3/4)^n$, luego entonces

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n \geq \frac{9}{10}$$

$$1-\frac{9}{10} \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\frac{1}{10} \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\log\left(\frac{1}{10}\right) \geq \log\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\log\left(\frac{1}{10}\right) \geq n\log\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{1}{10}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$n \geq \frac{-\log(10)}{-(\log(4)-\log(3))}$$

$$n \geq \frac{\log(10)}{\log(4)-\log(3)}$$

$$n \geq 8.00392\ldots$$

11. Una caja contiene 2 monedas honestas y 1 moneda con dos caras, una moneda es tomada al azar de la caja y lanzada 2 veces. (a) ¿Cual es la posibilidad de que esta muestre 2 caras? (b) si esta muestra tres caras ¿Cual es la probabilidad que sea una moneda deshonesta?

Sol.

La probabilidad de obtener una cara en una moneda honesta $\frac{1}{2}$, es decir $\frac{1}{4}$ por dos lanzamientos, mientras que la moneda deshonesta tiene 1 de obtener esta secuencia así

a) $P(x) = P(x|H)\,P(H) + P(x|D)\,P(D)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{12} + \frac{4}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

b) $$P(D|x) = \frac{P(D\cap x)}{P(x)} = \frac{P(x|D)\,P(D)}{P(x)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

12. Dos cajas contienen 3 bolas (1 blanca y 2 negras) y 4 bolas (2 blancas y 2 negras), respectivamente. Una bola es transferida de la primer a la segunda caja, luego una bola es tomada de la segunda caja. ¿Cual es la probabilidad que esta sea blanca?

Sol.

La probabilidad de tomar una bola blanca de la primer caja es $\frac{1}{3}$ y que sea negra es $\frac{2}{3}$, luego si esta bola tomada se inserta en la segunda caja tenemos que habría ahora 5 bolas por tanto la probabilidad de tomar una bola blanca dado que insertamos una negra son de $\frac{2}{5}$, así mismo si hubieramos insertado una blanca tendríamos una probabilidad de $\frac{3}{5}$, luego entonces

$$P(B) = P(B|T_N)\,P(T_N) + P(B|T_B)\,P(T_B)$$

$$= \frac{2}{5}\,\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\,\frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$$

13. Una moneda es lanzada una sola vez. Si cae cara, se lanza un dado y seras pagado con el número mostrado en dolares. En otro caso, 2 dados seran lanzadas y seras pagado en dolares la suma de números mostrados. ¿Cual es la probabilidad de que te paguen a lo mas 5 dolares?

Sol.

$$P(\leq 5) = P(\leq 5 \mid H)\,P(H) + P(\leq 5 \mid T)\,P(T)$$

$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{12} + \frac{5}{36}$$

$$= \frac{15}{36} + \frac{5}{36} = \frac{20}{36} = \frac{\cancel{4}(5)}{\cancel{4}(9)} = \frac{5}{9}$$

14. A, B y C en el orden de lanzamientos de una moneda, el primero en obtener cara gana. ¿Cuales son los respectivas oportunidades para ganar?. Note que el juego puede continuar indefinidamente.

Sol.

Sea $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$ las probabilidades de ganar de A, B y C tenemos los siguientes patrones:

$$P(A) = p + q^3p + q^6p + \cdots = p(1 + q^3 + q^6 + \cdots)$$

$$P(B) = qp + q^4p + q^7p + \cdots = qp(1 + q^3 + q^6 + \cdots)$$

$$P(C) = q^2p + q^5p + q^8p + \cdots = q^2p(1 + q^3 + q^6 + \cdots)$$

donde q es la sucesión de obtener cruz y p es el valor de obtener cara, es decir q y p tienen el valor de $\frac{1}{2}$, notamos que la serie $1 + q^3 + q^6 + \cdots$ es geometrica por tanto $1 + q^3 + q^6 + \cdots = (q^3)^0 + (q^3)^1 + (q^3)^2 + \cdots = \frac{1}{1-q^3}$, donde $|q^3| < 1$

luego entonces

$$P(A) = \frac{p}{1-q^3} = \frac{1/2}{1-1/8} = \frac{1/2}{7/8} = 8/14 = 4/7$$

$$P(B) = \frac{(1/2)(1/2)}{1-1/8} = \frac{1/4}{7/8} = 8/28 = 2/7$$

$$P(C) = \frac{(1/4)(1/2)}{1-1/8} = \frac{1/8}{7/8} = 8/56 = 1/7$$

15. Catorce monedas de 25 centavos y una pieza de oro de 5 dolares estan en un bolsa y quince monedas de 25 centavos en otra bolsa. Cinco monedas son tomadas de la primer bolsa y colocadas en la segunda, y entonces 5 monedas son tomadas de la segunda bolsa para colocarse en la primera ¿Cual es la probabilidad que despues de estas transacciones la moneda de oro se encuentre en la primer bolsa?

Sol.

Para saber cual es la probabilidad de extraer la moneda de oro de la primer bolsa debemos pensar el problema como un caso de combinacion, por tanto

$$P(X_1) = \frac{\binom{14}{4}}{\binom{15}{5}} = \frac{14!/(10!\,4!)}{15!/(10!\,5!)} = \frac{\cancel{14!}\,\cancel{10!}\,5!}{15!\,\cancel{10!}\,\cancel{4!}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Luego entonces si pasamos las 5 monedas a la segunda bolsa tendriamos 20 moneda para el problema de combinación

$$P(X_2) = \frac{\binom{19}{4}}{\binom{20}{5}} = \frac{19!/(15!\,4!)}{20!/(15!\,5!)} = \frac{\cancel{19!}\,\cancel{15!}\,5\cancel{!}}{20\cancel{!}\,\cancel{15!}\,\cancel{4!}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Asi dados los anteriores evento obtenemos que la probabilidad de devolver la moneda de oro a la primer bolsa es de $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

En otro caso si nunca saliera de la primer bolsa seria de $\frac{2}{3}$

Por tanto la probabilidad de tener la moneda de oro en la primer bolsa despues las transacciones es

$$P(X) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{1}{12} + \frac{8}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

16. Una carta es tomada de una baraja ordinaria, ¿Cual es la probabilidad que sea un rey dado que es una carta de figura?

Sol.

$$P(K/Cf) = \frac{P(K \cap Cf)}{P(Cf)} = \frac{P(Cf|K)\,P(K)}{P(Cf)} = \frac{1\left(\frac{4}{52}\right)}{\frac{12}{52}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

17. Dos dados son lanzados. ¿Cual es la probabilidad que la suma de las caras exceda 8, dado que uno a más de las caras es un 6?

Sol.

La probabilida de tener al menos un 6 en los dados es de $\frac{11}{36}$, luego entonces para que la suma exceda de 8 un dado de debe tomar un valor mayor a 2, por tanto la probabilidad es $\frac{7}{36}$, asi

Sea A el evento de que la suma de las caras exceda 8 y B el evento que al menos una cara sea 6 tenemos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{7}{11}$$

18. Una caja contiene 2 tickets rojos enumerados 1 y 2; y 3 ticket verdes númerados 1, 2 y 3. Si 2 tickets son tomados de una caja ¿Cual es la probabilidad que ambos sean rojos, dado que uno de ellos es sabido que es (a) rojo; (b) el ticked rojo número 1?

Sol.

Sea A el evento de saber el al menos un ticket sea rojo, B el evento que ambos ticket son rojos y C el evento de saber que el ticked rojo 1 fue elegido

$$P(A) = \frac{7}{10} \quad ; \quad P(B) = \frac{1}{10} \quad ; \quad P(C) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{7}$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{1/10}{4/10} = \frac{1}{4}$$

19. Una bolsa contiene 2 bolas negras y 2 blancas una bola es tomada y reemplazada con una bola del color opuesto. Entonces otra bola es tomada de la bolsa. Encuentre la probabilidad condicional que la primer bola fuera blanca dado que la segunda fuera blanca?

Sol.

Sea A el evento de que la primer bola sea blanca y B el evento que sea la segunda blanca, tenemos que

$P(A) = \frac{1}{2}$, dado que puede ser blanca o negra, así

$P(B|A) = \frac{1}{4}$, ya que $\{(B,B),(B,N),(B,N),(B,N)\}$, por tanto

$P(B|A^c) = \frac{3}{4}$, pues $\{(N,B),(N,B),(N,B),(N,N)\}$

Entonces

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Finalmente

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

20. Un grupo de negociantes consiste de 40% de democratas y 60% de republicanos si el 30% de los democratas y 50% de los republicanos fuman cigarros ¿Cual es la probabilidad que un hombre de negocios que fume cigarro sea republicano?

Sol.

Sea A y B los eventos que sean democratas y republicanos, respectivamente, luego C el evento que un negociante fume, entonces

$P(A) = \frac{4}{10}$; $P(B) = \frac{6}{10}$; $P(C|A) = \frac{3}{10}$; $P(C|B) = \frac{5}{10}$

$$P(C) = P(C|B)P(B) + P(C|A)P(A) = \frac{5}{10}\cdot\frac{6}{10} + \frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10} = \frac{30}{100} + \frac{12}{100} = \frac{42}{100}$$

$$P(B|C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C)} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{42}{100}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

21. Una prueba para detectar cancer que parece promotedora ha sido desarrollada. Supuestamente se encontrado que 97% de los pacientes con cancer en un gran hospital reacionaron positivamente a la prueba solo el 5% de estos no tiene cancer lo hizo tambien. Si 2% de los pacientes en el hospital tienen cancer ¿Cual es la probabilidad que el paciente seleccionado al azar reaccione positivamente a la prueba teniendo cancer?

Sol.

Sea A el evento que un paciente reacciona positivamente a la prueba

Sea B el evento que el paciente tiene cancer

$$P(A|B^c) = \frac{97}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{97}{2000}$$

$$P(A|B) = \frac{1903}{2000}$$

$$P(A) = P(A|B)\,P(B) + P(A|B^c)\,P(B^c)$$
$$= 1903/2000 \cdot 2/100 + 97/2000 \cdot 98/100$$
$$= 208/3125$$

luego

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1903}{100000}}{\frac{208}{3125}} = \frac{1903}{6656} \approx 0.28$$

22. Cada tres cajas tienen dos cajones cada una una caja contiene una moneda de oro otra contiene una moneda de plata en cada cajón y la tercera tiene una moneda de cada tipo. Una caja es escojida y un cajón es abierto y se encuentra una moneda de oro. ¿Cual es la probabilidad de que la moneda en el otro cajón también sea de oro?

Sol.

Sea A el evento de tener una moneda de oro en el primer cajón

Sea B el evento de tener una moneda de oro en el segundo cajón

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Universo de posibles resultados $= \{(O_1, O_2), (O, P), (P_1, P_2), (O_2, O_1), (P, O), (P_2, P_1)\}$

23. Si un jugador esta repartiendo tres espadas y dos corazones y es permitido tomar dos cartas del resto de la baraja ¿Cuál es la probabilidad de que dos cartas sean escaderes?

Sol.

Sea A el evento de obtener una espada por primeravez de la baraja

Sea B el evento de obtener una espada como segunda carta

$P(A) = \frac{10}{47}$; $P(B|A) = \frac{9}{46}$

Por regla de la cadena

$$P(A \cap B) = P(B|A)\,P(A) = \frac{10}{47} \cdot \frac{9}{46} = \frac{90}{2162} = \frac{45}{1081}$$

24. Si un jugador de bridge tiene dos ases en su mano ¿cuál es la probabilidad de que su compañero tenga un as b) dos ases

Sol.

a) $$\frac{\binom{2}{1}\binom{37}{12}}{\binom{39}{13}} = \frac{26}{57} = 0.4561$$

b) $$\frac{\binom{37}{11}}{\binom{39}{13}} = \frac{2}{19} = 0.1052$$

25. Si una mano de poker de cinco cartas es tomada de una baraja ¿Cuál es la probabilidad de que esta contenga tres ases?

Sol.

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{94}{54145}$$

26. ¿Cuál es la probabilidad de que una mano de bridge contenga trece cartas del mismo palo?

Sol.

$$\frac{\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}} = \frac{\frac{13!}{1\ 13!}}{\frac{52!}{39!\ 13!}} = \frac{1}{\frac{52!}{39!\ 13!}} \approx 1.57476 \times 10^{-12}$$

27. Si una caja contiene 40 fusibles en buenas condiciones y diez defectuosos si siete son seleccionados. ¿Cuál es la probabilidad de que todo estes esten en buenas condiciones?

Sol.

$$\frac{\binom{40}{7}\binom{10}{0}}{\binom{50}{7}} = \frac{18\,643\,560}{99\,884\,400} \approx 0.1866$$

28. De un grupo de cuarenta personas tres son escogidas. encuentra la probabilidad que diez personas en especifico no sean escogidas.

Sol.

$$\frac{\binom{30}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{4060}{9880} = \frac{203}{494} = 0.4109$$

29. Si tu compras dos boletos de lotería de los cuales n boletos fueron vendidos y cinco premios serán otorgados. ¿Cuál es la probabilidad de que tu almenos ganes un premio?

Sol.

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{n-5}{1}}{\binom{n}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{5\ \frac{n-5!}{n-6!}}{\frac{n!}{n-2!\ 2!}} + \frac{10}{\frac{n!}{n-2!\,2!}} = \frac{5n-25+10}{\frac{n!}{n-2!\ 2!}} = \frac{2(5n-15)}{n(n-1)} = \frac{10n-30}{n^2-n}$$

80. ¿Cuál es la probabilidad de que las manos de bridge de Norte y Sur ambas contengan exactamente dos ases?

Sol.
$$\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{24}}{\binom{52}{26}} = \frac{325}{833} = 0.3901$$

81. Si un jugador de bridge y su compañero tiene 9 espadas entre ellos. ¿Cuál es la probabilidad que las cuatro espadas lás tengan sus oponentes sean repartidas en tres y uno?

Sol.
$$\frac{2\binom{4}{3}\binom{22}{10}}{\binom{26}{13}} = \frac{2\cdot 4\cdot 646646}{10\,400\,600} = \frac{286}{575} = 0.4973$$

82. Encuentra la probabilidad de que una mano de poker de cinco cartas contenga solo cartas negras a) dado que este contenga al menos 4 cartas negras b) Dado que este contenga cuatro espadas.

Sea A el evento donde tenemos 5 cartas negras, B el evento donde la mano contenga al menos 4 cartas negras y C el evento donde se contengan 4 espadas, entonces

a)
$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\binom{26}{5}}{\binom{26}{4}\binom{26}{1}+\binom{26}{5}} = \frac{65780}{454480} = \frac{11}{76} = 0.1447$$

b)
$$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\binom{13}{4}\binom{13}{1}+\binom{13}{5}}{\binom{13}{4}\binom{39}{1}+\binom{13}{5}} = \frac{10582}{29172} = \frac{37}{102}$$

33. Encuentra la probabilidad de que una mano de polker de cinco cartas no contenga ninguna carta más pequeña que ocho dado que este contiene tres cartas arriba de diez donde los ases son tratados como la carta de menor valor.

Sol.

$$\frac{\binom{24}{5}-\binom{12}{5}\binom{12}{0}-\binom{12}{4}\binom{12}{1}-\binom{12}{3}\binom{12}{2}}{\binom{52}{5}-\binom{40}{5}-\binom{40}{4}\binom{12}{1}-\binom{40}{3}\binom{12}{2}} = \frac{161}{1456}$$

34. Dado X y Y detonan el número respectivo de caras que se obtienen al lanzar dos monedas dos veces. Calculé la probabilidad $Y-X$ sea menor que uno

Sol. Al ser dos eventos independiento tenemos que X y Y son $K \in \{0,1,2\}$ luego entonces $Y - X \leq 0$ es decir $Y \leq X$, así

$$P(Y \leq X) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] +$$

$$\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right] + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16} \quad \text{donde } \frac{11}{16} < 1$$

35. A lanza tres monedas y B lanza dos monedas simultaneamente el primero en obtener el mayor número de caras gana. a) Cuál es la probabilidad de que A gane?, b) Cuál es la probabilidad si el experimento es repetido siempre que se produzca un empate

Sol.
Sen A y B dos eventos independientos donde A es $a \in \{0,1,2,3\}$ y B es $b \in \{0,1,2\}$

a)
$$P(X > Y) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left[\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] +$$

$$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left[\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left[\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right] + \frac{3}{8}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right] + \frac{3}{8}\,\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{9}{32} + \frac{3}{32} = \frac{4}{32} + \frac{12}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

36. Demostrar que $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ $\qquad \dfrac{n+1!}{(n+1-r)!\, r!}$

Dem.

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} + \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= \frac{n!(n-r)!\,r! + n!\,(n-r+1)!\,(r-1)!}{r!\,(n-r+1)!\,(r-1)!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!\,\cancel{(r-1)!}\,(r(n-r)! + (n-r+1)!)}{(n-r)!\,\cancel{(r-1)!}\,r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!\,\cancel{(n-r)!}\,(r+n-r+1)}{\cancel{(n-r)!}\,r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!} = \binom{n+1}{r} \quad \blacksquare$$

37. Dada la densidad discreta $f(x) = e^{-1}/x!$, $x = 0, 1, 2, \dots$, a) Calcular $P\{X=2\}$ b) Calcular $P\{X<2\}$, c) Mostrar que e^{-1} es la constante adecuada para esta densidad.

Sol.

a) $P\{x=2\} = f(2) = 1/(e\,2!) = \dfrac{1}{2e} \approx 0.1839$

b) $P\{X<2\} = \displaystyle\sum_{x=0}^{1} f(x) = \sum_{x=0}^{1} \frac{1}{e\,x!} = \frac{1}{e\,0!} + \frac{1}{e\,1!} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}$

c) Sabemos que $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ entonces

$\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{x!} = e^{-1}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!}$ $\qquad$ donde $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} = e$, luego

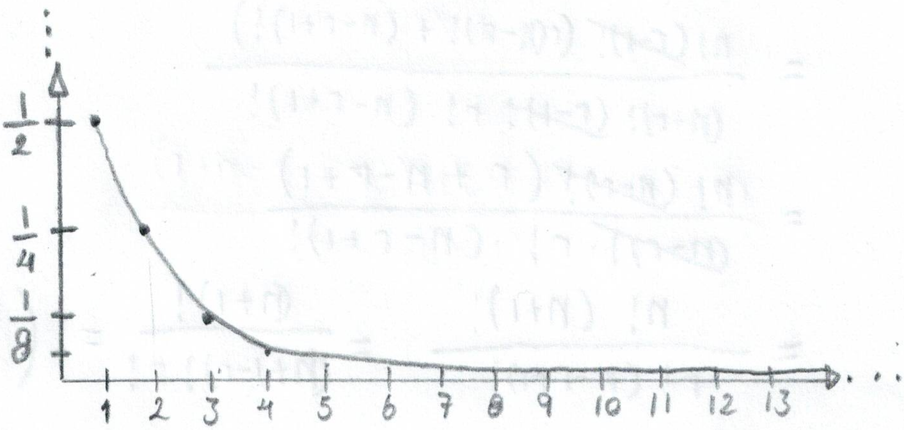
$e^{-1} \cdot e = 1 \quad \blacksquare$

38. Una moneda es lanzada hasta obtener cara ¿Cuál es la probabilidad de que, la primer cara se obtenga en el cuarto lanzamiento?, b) Cuál es la probabilidad $f(x)$, que x lanzamientos sean requeridos para obtener una cara, c) Gráfica la función de densidad $f(x)$

a) $p\{X=4\} = f(4) = \binom{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

b) $p\{X=x\} = f(x) = \binom{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \forall\ x = 1, 2, 3, \ldots$

c)

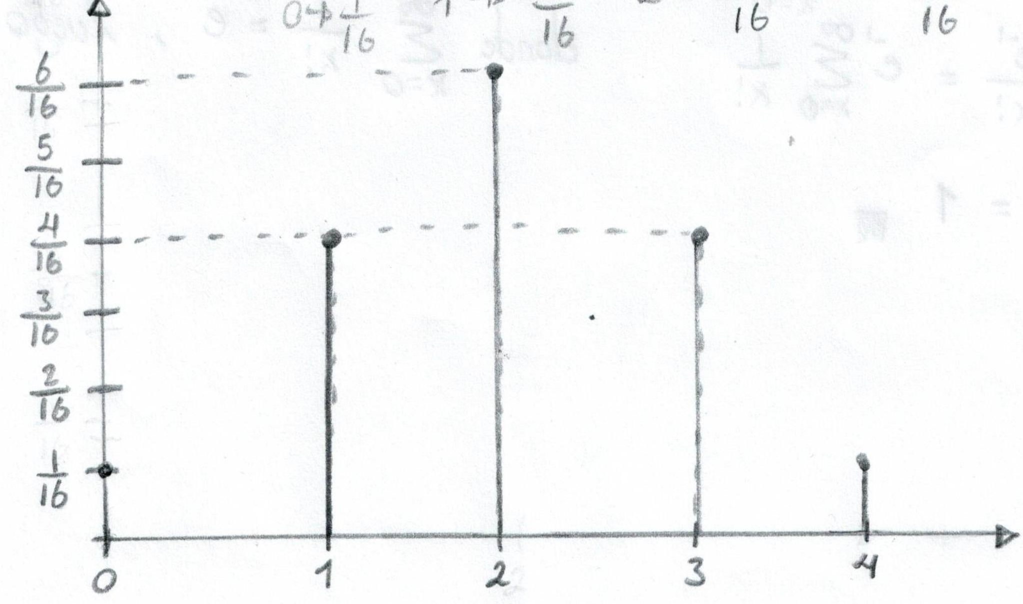


39.- Si la probabilidad es un medio finesse in bridge sea exitosa, a) ¿Cuál es la probabilidad que dos de cuatro finesses sean exitosos?, b) ¿Cuál es la probabilidad que x de cuatro finesses sean existoses?, c) Gráfica la función de densidad de $f(x)$

(a) $p\{X=2\} = f(2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{2!\,2!}\ \frac{1}{16} = \frac{12}{2}\ \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

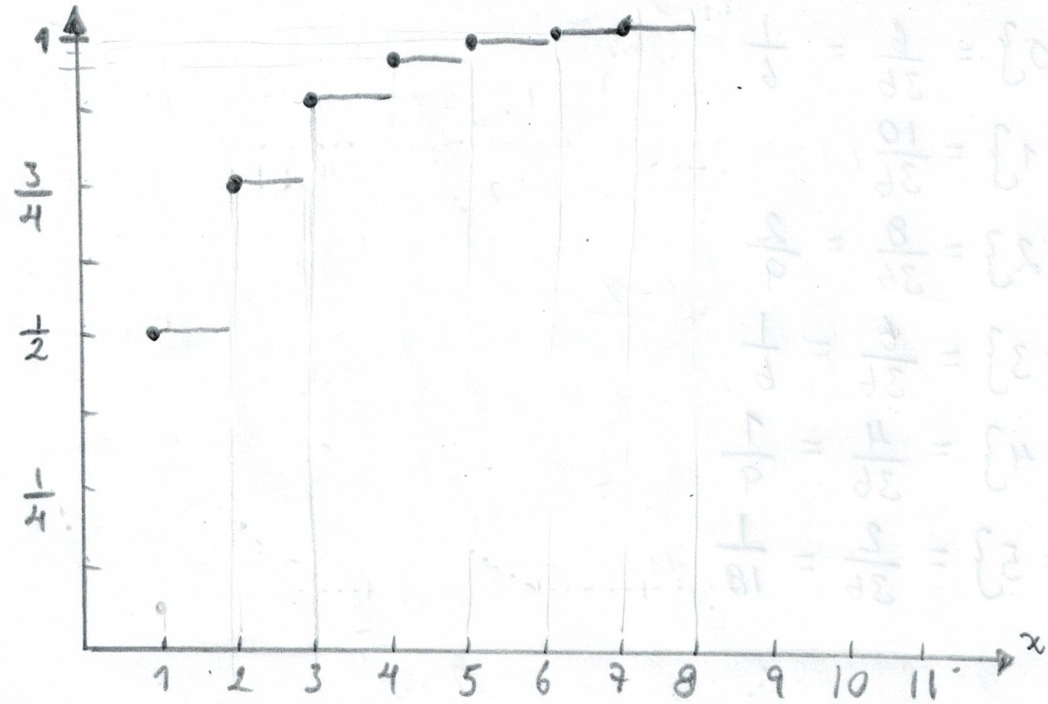
b) $p\{X=x\} = f(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{(4-x)!\,x!}\ \frac{1}{16} = \frac{3}{2\,(4-x)!\,x!} \quad \forall\ x = 0, 1, 2, 3, 4$

c) $0 \to \frac{1}{16}$ $\quad 1 \to \frac{4}{16}$ $\quad 2 \to \frac{6}{16}$ $\quad 3 \to \frac{4}{16}$ $\quad 4 \to \frac{1}{16}$



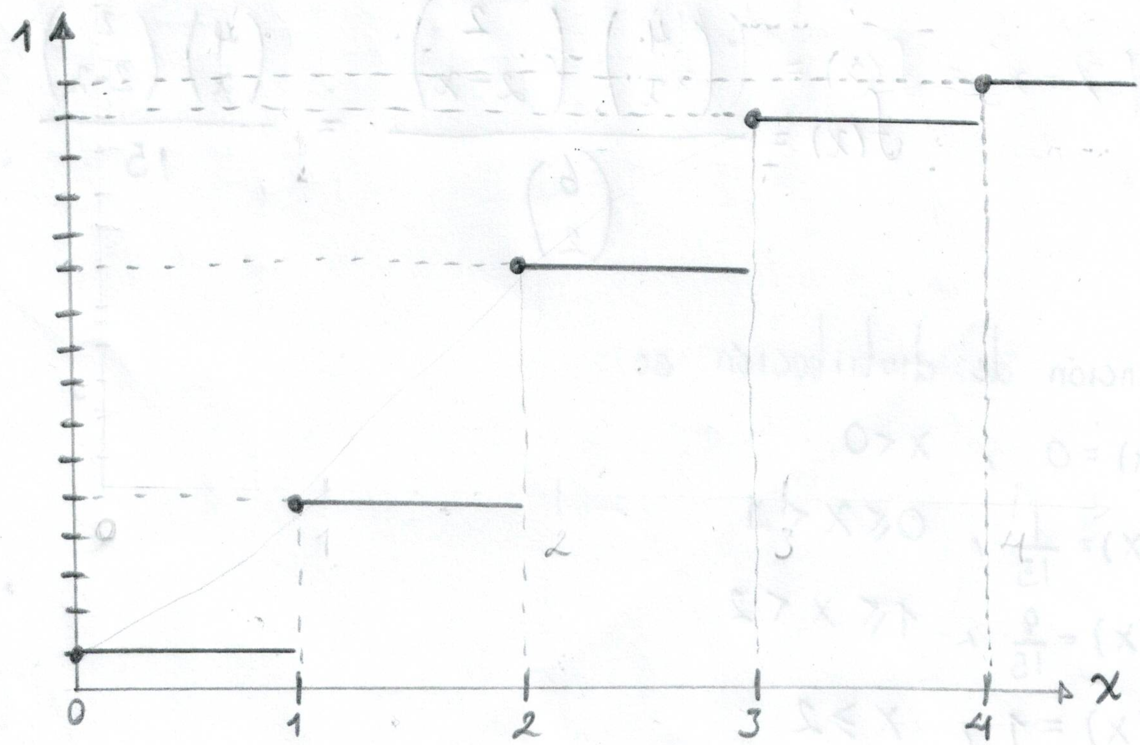
40. Gráfica la función de distribución $f(x)$ de la densidad obtenida en la pregunta 38.

Sol.



41. Gráfica la función de distribución $f(x)$ de la densidad obtenida en la pregunta 39.

Sol.



42. Dos dados son lanzados dado que x es la diferencia de los números mostrados en las caras es decir, el más grande menos el chico y 0 para empates. Encuentra la función de densidad X

Sol.

$$P\{X=0\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P\{X=1\} = \frac{10}{36}$$

$$P\{X=2\} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$P\{X=3\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P\{X=4\} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P\{X=5\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

43. Una caja contiene cuatro bolas rojas y dos negras. Dos bolas son tomadas. Dado que x es el número de bolas rojas obtenidas. Encuentra la función de densidad X y también su función de distribución.

Sol.

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{2}{2-x}}{\binom{6}{2}} = \frac{\binom{4}{x}\binom{2}{2-x}}{15}$$

La función de distribución es

$F(x) = 0 \quad , \quad x < 0$

$F(x) = \frac{1}{15} \quad , \quad 0 \leq x < 1$

$F(x) = \frac{9}{15} \quad , \quad 1 \leq x < 2$

$F(x) = 1 \quad , \quad x \geq 2$

44. Un dado es tirado una vez si un cinco o seis se obtiene, dado que X es igual al número obtenido. Si 1, 2, 3 ó 4 se obtien al lanzar el dado X sera igual a la suma de los dos números obtenidos encuentra la función de densidad de X.

Sol.

$$p\{X=2\} = \frac{1}{36}$$

$$p\{X=3\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$p\{X=4\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$p\{X=5\} = \frac{1}{6} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$$

$$p\{X=6\} = \frac{1}{6} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$$

$$p\{X=7\} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$p\{X=8\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$p\{X=9\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$p\{X=10\} = \frac{1}{36}$$

45. En un juego tres personas lanzan monedas, el juego continua hasta que alguno obtenga un resultado diferente a los otros dos, el sujeto con resultado diferente gana. Dado que X es igual al número de juegos necesarios antes de que una decision sea tomada encuentra la función de densidad.

Sol.

Dado que el universo de resultados es de encontrar 3 posible ganadores y un empate tenemos que

$$f(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$$

46. Hay N boletos númerados $1, 2, \ldots, N$, de los cuales n son escogidos dado que x es igual al número más pequeño de los boletos tomados. Encuentra la función de densidad X.

Sol.

La función de densidad de X esta dada par:

$$P\{X = K\} = \frac{\binom{N-K}{n-1}}{\binom{N}{n}} \quad \forall\ K \in \{1, 2, 3, \ldots, N-n+1\}$$

47. Dado X y Y denota el número de caras obtenidas al lanzar dos monedas encuentra la expresión para la función $f(X, y)$.

Sol.

Dado que la probabilido de obtenos cara al lazar una moneda es de $\frac{1}{2}$, tenemos que el hacer esto evento implica

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

48. Dado X y Y denotar el numero de caras obtenidos al lanzar un par de monedas dos veces encuentra una expresión para la función $f(x, y)$.

Sol.

Dado el ejercicio anterior en un lazamiento tenemos el siguiente conjunto de posibles resultados $\{(C, S), (S, C), (C, C), (S, S)\}$ tenemos que

$$f(x, y) = \binom{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} \cdot \binom{2}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{2-y}$$

$$= \binom{2}{x}\binom{2}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \binom{2}{x}\binom{2}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \binom{2}{x}\binom{2}{y}\frac{1}{16}$$

44. Un dado es tirado una vez si un cinco o seis se obtiene, dado que X es igual al número obtenido. Si 1, 2, 3 ó 4 se obtien al lanzar el dado X sera igual a la suma de los dos numeros obtenidos encuentra la función de densidad de X.

Sol.

$$p\{X=2\} = \frac{1}{36}$$

$$p\{X=3\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$p\{X=4\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$p\{X=5\} = \frac{1}{6} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$$

$$p\{X=6\} = \frac{1}{6} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$$

$$p\{X=7\} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$p\{X=8\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$p\{X=9\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$p\{X=10\} = \frac{1}{36}$$

45. En un juego tres personas lanzan monedas, el juego continua hasta que alguno obtenga un resultado diferente a los otros dos, el sujeto con resultado diferente gana. Dado que X es igual al número de juegos necesarios antes de que una decision sea tomada encuentra la función de densidad.

Sol.

Dado que el universo de resultados es de encontrar 3 posible ganadores y un empate tenemos que

$$f(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$$

49. Cinco dados son arrojados dado que X denota el número de unos y Y el número de dos. Encuentra la función de densidad $f(x,y)$.

$$f(x,y) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\binom{5-x}{y}\left(\frac{1}{6}\right)^{y}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x-y}$$

$$= \frac{5!}{\cancel{(5-x)!}\,x!}\cdot\frac{\cancel{(5-x)!}}{(5-x-y)!\,y!}\left(\frac{1}{6}\right)^{x+y}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x-y}$$

$$= \frac{5!}{x!\,y!\,(5-x-y)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{x+y}\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{-(x+y)}$$

$$= \frac{1280}{81\,x!\,y!\,(5-x-y)!}\left(4^{x+y}\right)^{-1} \qquad 0 \leq x+y \leq 5$$

50. Cuatro cartas son tomadas de una baraja dado que X denota el número de ases y Y el número de reyes que se obtienen. Encuentra una función de densidad $f(x,y)$

Sol.

$$f(x,y) = \frac{\binom{4}{x}\binom{4}{y}\binom{44}{4-x-y}}{\binom{52}{4}} \qquad 0 \leq x+y \leq 4$$

51. Dado X y Y detona el número de espadas y corazones respectivamente en una mano de bridgen de trece cartas. Encuentra la densidad $f(x,y)$

Sol.

$$f(x,y) = \frac{\binom{13}{x}\binom{13}{y}\binom{26}{13-x-y}}{\binom{52}{13}}$$

52.- Para ilustración de la sección trece calcular los valores de $f(1)$, $g(0)$, c) $f(y|1)$, d) $g(x|0)$. Donde f y g son densidades de X y Y

Sol

a) $f(1) = f(1,0) + f(1,1) = \frac{13}{52}\cdot\frac{39}{51} + \frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51} = \frac{13}{52}\left(\frac{39+12}{51}\right) = \frac{13}{52}$

b) $g(0) = g(0,0) + g(0,1) = \frac{39}{52}\cdot\frac{13}{51} + \frac{39}{52}\cdot\frac{38}{51} = \frac{39}{52}\left(\frac{13+38}{51}\right) = \frac{39}{52}$

Sabemos que

$$f(x,y) = \frac{\binom{13}{x}\binom{12}{y}\binom{39}{2-x-y}}{\binom{52}{2}}$$

c) $f(y|1) = \frac{f(1,y)}{f(1)} = \left(\frac{13\binom{12}{y}\binom{39}{1-y}}{\binom{52}{2}}\right)\left(\frac{13}{52}\right)^{-1} = \frac{52\binom{12}{y}\binom{39}{1-y}}{\binom{52}{2}}$

d) $g(x|0) = \frac{g(x,0)}{g(0)} = \left(\frac{13\cdot 39}{\binom{52}{2}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{13}{34}$

53. Para la distribución dada (21) en la sección 13 buscar $f(0)$ y $f(y|0)$

Sol.

a) $f(0) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = \dfrac{1+4+1}{\binom{6}{2}} = \dfrac{6}{\frac{6!}{4!\,2!}} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

b) $f(y|0) = \dfrac{f(0,y)}{f(0)} = \dfrac{\binom{2}{y}\binom{2}{2-y}}{\frac{6}{15}}$

54. Para la densidad del problema 47 el $f(y/x)$

Sol.

a) $f(x) = f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) = 1$

b) $f(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{1} = \dfrac{1}{4}$

55. Para la distribución del problema 48 buscar la distribución condicional $g(x,y)$

Sol.

$g(y) = \binom{2}{y}\frac{1}{16} + \binom{2}{y}\frac{2}{16} + \binom{2}{y}\frac{1}{16} = \binom{2}{y}\frac{1}{16}$

$g(x|y) = \dfrac{g(x,y)}{g(y)} = \dfrac{\binom{2}{x}\cancel{\binom{2}{y}\frac{1}{16}}}{\cancel{\binom{2}{y}\frac{1}{4}}} = \binom{2}{x} = \frac{1}{4}\,\dfrac{2!}{(2-x)!\,x!} = \dfrac{1}{2(2-x)!\,x!}$

56. Calcular los valores margen $f(2)$ y $g(4)$ del problema 49

Sol.

a)
$$f(2) = f(2,0) + f(2,1) + f(2,2) + f(2,3)$$
$$= \frac{20}{243} + \frac{5}{81} + \frac{5}{324} + \frac{5}{3888} = \frac{625}{3888}$$

b)
$$g(4) = g(0,4) + g(1,4) = \frac{5}{1944} + \frac{5}{7776} = \frac{25}{7776}$$

57. Usa el resultado del problema 56 para obtener la expresión para la densidad condicional $f(y|2)$

Sol.
$$f(y|2) = \frac{f(2,y)}{f(2)} = \frac{\dfrac{1280}{162\, y!\,(3-y)!\, 4^{2+y}}}{\dfrac{625}{3888}} = \frac{\frac{40}{81}}{\frac{625}{3888}} \frac{1}{y!\,(3-y)!\,4^y}$$

$$\approx \frac{3.072}{y!\,(3-y)!\,4^y}$$

58. Considera una baraja que consiste de un as, rey, reyna, J en cada uno de sus cuatro palos. Si dos cartas son tomadas de la baraja y X y Y denotan el número de espadas y corazones obtenidos encuentre a) la densidad conjunta $f(x,y)$, b) la densidad marginal $f(x)$, c) la densidad condicional $f(y|1)$. De para X igual a uno.

$$\frac{8!}{(8-2+x)!(2-x)!} + \frac{8!}{(8-1+x)!(1-x)!}$$

Sol.

a)
$$f(x,y) = \frac{\binom{4}{x}\binom{4}{y}\binom{8}{2-x-y}}{\binom{16}{2}}$$

b)
$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{12}{2-x}}{\binom{16}{2}}$$

c)

$$f(y|1)=\frac{f(1,y)}{f(1)}=\frac{\frac{\cancel{4}\binom{4}{y}\binom{8}{1-y}}{\cancel{\binom{16}{2}}}}{\frac{\cancel{4}\binom{12}{1}}{\cancel{\binom{16}{2}}}}=\frac{\binom{4}{y}\binom{8}{1-y}}{12}$$

59. Dado $f(x,y)=c(x+y)$ en los puntos $(1,1),(2,1),(2,2),(3,1)$ y cero para cualquier otro a) Evalúese b) Encuentre $f(x)$ c) Encuentre $f(y|x)$.

Sol.

a) $$\sum_{(x,y)} f(x,y)=1 \Rightarrow c(2+1)+c(1+1)+c(2+2)+c(3+1)=1$$

$$\Rightarrow c3+c2+c4+c4=1$$

$$\Rightarrow 13c=1$$

$$\Rightarrow c=\frac{1}{13}$$

b)
$$f(x)=\frac{1}{13}(1+1)+\frac{1}{13}(2+1)+\frac{1}{13}(2+2)+\frac{1}{13}(3+1)=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}+\frac{4}{13}+\frac{4}{13}=1$$

60. Explique por que dos variables X y Y no pueden ser distribuidas independientemente, aún por su naturaleza de $f(x,y)$, si la región en (x,y) en el plano $f(x,y)$ es positiva es una región triangular de la figura 16.

Sol.

Independientemente de la forma de la función $f(x,y)$, si la región donde la función es positiva es un triangulo, el hecho de conocer los valores de X restringe los valores posibles de Y.

61. Si $f(x) = e^{-\mu}\mu^x/x!$, $x = 1, 2, 3, \ldots$ y $f(y|x) = \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y}$
$y = 0, 1, 2, 3, \ldots, x$. Demostrar que la densidad marginal de Y esta dada por $g(y) = e^{-\mu p}(\mu p)^y / y!$.

Dem.

Sabemos que $f(x,y) = f(y|x)\, f(x)$, entonces

$$f(x,y) = \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

$$= \frac{\cancel{x!}}{(x-y)!\, y!} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^x}{\cancel{x!}} p^y (1-p)^{x-y}$$

$$= \frac{e^{-\mu}\mu^x}{(x-y)!\, y!} \cdot p^y (1-p)^{x-y}$$

luego $g(y) = \sum_{x=y}^{\infty} f(x,y) = \sum_{x=y}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^x}{(x-y)!\, y!} p^y (1-p)^{x-y}$

$$\Rightarrow = \frac{e^{-\mu} p^y}{y!} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{(1-p)^{x-y}\mu^x}{(x-y)!}$$

Supongamos que $K = x-y$, entonces $x = K+y$ entonces si $x=y$, $K=0$ así

$$g(y) = \frac{e^{-\mu} p^y}{y!} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(1-p)^K \mu^{K+y}}{K!}$$

$$= \frac{e^{-\mu} p^y \mu^y}{y!} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{((1-p)\mu)^K}{K!}$$ Recordemos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$= \frac{e^{-\mu} p^y \mu^y}{y!} e^{((1-p)\mu)}$$

$$= \frac{e^{(-\mu + \mu(1-p))} (p\mu)^y}{y!}$$

$$= \frac{e^{[\mu(-1+1-p)]} (p\mu)^y}{y!}$$

$$= \frac{e^{-p\mu} (p\mu)^y}{y!}$$

$\blacksquare$

62. Dado la densidad continua $f(x) = c x e^{-x}$, $x>0$ (a) determinar el valor de de c (b) calcular $P\{X<2\}$, (c) Calcule $P\{2<X<3\}$

Sol.

a) $\int_0^\infty c x e^{-x} dx = c[-x e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx]$

$= c\left[\lim_{x\to\infty} -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^\infty\right]$

$= c[0 - [\overset{0}{e^{-\infty}} - \overset{1}{e^{-0}}]]$

$= c\,1 \quad \therefore \quad c = 1$

b) $\int_{-\infty}^2 x e^{-x} dx = -xe^{-x}\Big|_0^2 - e^{-x}\Big|_0^2$

$= -2e^{-2} + 0 - e^{-2} + \overset{1}{e^{0}}$

$= -2e^{-2} - e^{-2} + 1$

$= -3e^{-2} + 1$

c) $-xe^{-x}\Big|_2^3 - e^{-x}\Big|_2^3 = -3e^{-3} + 2e^{-2} - e^{-3} + e^{-2}$

$= -4e^{-3} + 3e^{-2}$

63. Dado la densidad continua $f(x) = c$, $1<x<3$, (a) determinar el valor de c (b) calcular $P\{X<2\}$, (c) calcular $P\{X>1.5\}$

Sol.

a)

$\int_1^3 f(x)\, dx = 1$

$\Rightarrow \int_1^3 c\, dx = 1$

$\Rightarrow c\int_1^3 dx = 1$

$\Rightarrow cx\Big|_1^3 = 1$

$\Rightarrow c[3-1] = 1$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$

b)

$\frac{x}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}[2-1]$

$= \frac{1}{2}$

c)

$\frac{x}{2}\Big|_{1.5}^3 = \frac{1}{2}\left[3 - \frac{3}{2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{6}{2} - \frac{3}{2}\right]$

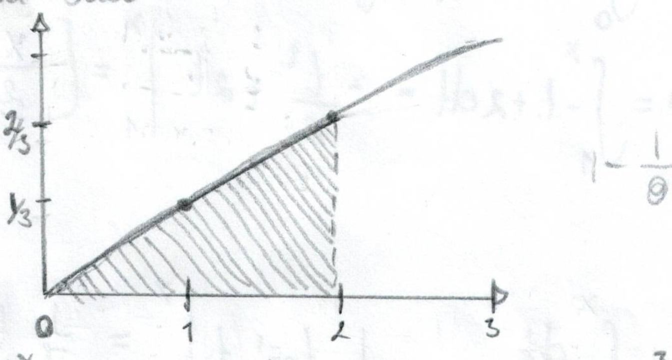
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$

$= \frac{3}{4}$.

64. Si $f(x)$ es la densidad de la variable aleatoria X, encuentra y grafica la función de distribución $F(x)$ en cada caso

a) $f(x) = \frac{1}{3}$, $x = 0, 1, 2$

$F(x) = \int_0^x \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^x dt = \frac{t}{3}\Big|_0^x = \frac{x}{3}$

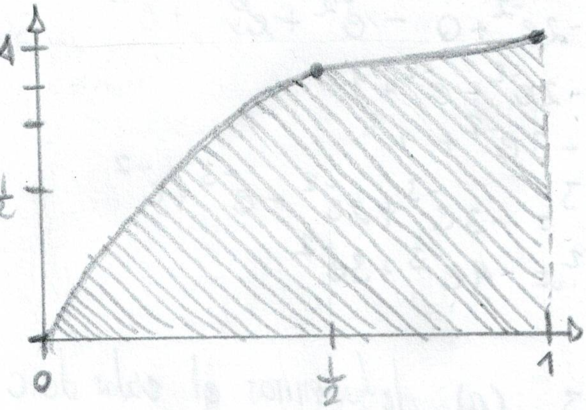


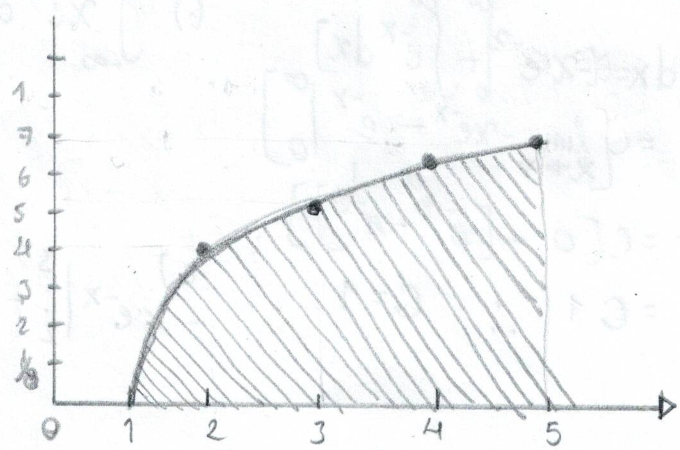
b) $f(x) = 3(1-x)^2$, $0<x<1$

$F(x) = 3\int_0^x (1-t)^2 dt = -3\frac{(1-t)^3}{3}\Big|_0^x = -(1-t)^3\Big|_0^x = -(1-x)^3 + (1)^3 = 1-(1-x)^3$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x > 1$

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^x t^{-2}\,dx = -t^{-1}\Big|_1^x = -\frac{1}{x} + 1$$





65. Encuentre la función de distribución $F(x)$ y grafíquela si la densidad de X es (a) $f(x) = \frac{1}{2}$, $0 \leq x \leq 2$, (b) $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = -x + 2$ para $1 < x \leq 2$, (c) $f(x) = [\pi(1+x^2)]^{-1}$.

a)
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x dt = \frac{t}{2}\Big|_0^x = \frac{x}{2}$$

b)
$$F(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$F(x) = \int_1^x -t + 2\,dt = -\frac{t^2}{2} + 2t\Big|_1^x = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right] - \left[-\frac{1}{2} + 2\right] = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$$

c)
$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{\pi}\tan^{-1} t\Big|_0^x = \frac{1}{\pi}\tan^{-1} x$$

66. Si $f(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2}$, $x>0$, encuentre un número x_0 tal que $P\{X > x_0\} = \frac{1}{2}$

Sol

$$P\{X > x_0\} = \int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{x_0}^{\infty} e^{-x/2}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -e^{-x/2}\Big|_{x_0}^{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\cancel{e^{-\infty}}^{\,0} + e^{-x_0/2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-x_0/2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ln e^{-x_0/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{x_0}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x_0 = -2\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x_0 = -2\left[\ln 1 - \ln 2\right]$$

$$\Rightarrow x_0 = 2\ln 2$$

67. Suponga la vida en horas, X, de un tipo de radiosonda tiene la densidad $f(x) = c/x^2$, $x > 100$ (a) Evalúe c, (b) Encuentre $F(x)$, (c) calcule $P\{X>500\}$

Sol.

a) $$\int_{100}^{\infty} \frac{c}{x^2}\,dx = c\int_{100}^{\infty}\frac{dx}{x^2} \qquad \text{donde} \quad \frac{c}{100} = 1 \Rightarrow c = 100$$

$$= -\frac{c}{x}\Big|_{100}^{\infty} = \frac{c}{100}$$

b) $$F(x) = \int_{100}^{x} \frac{100}{t^2}\,dt = -\frac{100}{t}\Big|_{100}^{x} = -\frac{100}{x} + \frac{100}{100} = 1 - \frac{100}{x} \qquad \forall\, x \geq 100$$

c) $$P\{X > 500\} = \int_{500}^{\infty} \frac{100}{x^2}\,dx = -\frac{100}{t}\Big|_{500}^{\infty} = -\cancel{\frac{100}{\infty}}^{\,0} + \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$$

68. Suponga que la probabilidad que un átomo de un material radiactivo sea desintegrado en tiempo t esta dado por $1 - e^{-at}$, donde a es una constante que depende del material. Encuentra la función de densidad de X.

Sol

La probabilidad que un atomo se desintegre en un tiempo t es

$$P\{X \leq t\} = F(t) = 1 - e^{-at} \quad \text{para } t \geq 0$$

luego

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-at}\right) = a e^{-at} \quad \therefore$$

$$f(t) = a e^{-at} \quad \forall\, t \geq 0$$

69. Si un medio del material radiactivo del problema 68. sera desintegrado en mil unidades de tiempo calcula la probabilidad que la vida de un átomo de este material exceda las dos mil unidades de tiempo.

Sol

La vida media $(T_{1/2})$ del material es 1000

La desintegracion radiactiva sigue un distribucion exponencial es decir:

$$P\{X > t\} = e^{-\lambda t}$$

sabemo que la probabilidad de que un atoma se desintegre es de $\frac{1}{2}$ es decir

$$P\{X > 2000\} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$