1. Una caja contiene seis boletos, dos de los boletos tienen valor \$5 cada uno y los otros cuatro el valor de un \$1 cada uno. a) Si uno de los boletos es tomado ¿cuál es el valor esperado del juego?, b) Si dos boletos son tomados ¿Cuál es el valor esperado?

Sol.

a) Dado que la probabilidad de obtener un boleto con valor de \$5 es $\frac{2}{6}$ y $\frac{4}{6}$ para los de \$1 tenemos que

$$E[X] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$$
$$= 5 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

b)

$$E[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i f(x_i) = 10 \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{0}}{\binom{6}{2}} + 6 \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} + 2 \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}$$
$$= 10 \frac{1}{15} + 6 \frac{8}{15} + 2 \frac{6}{15}$$
$$= \frac{10}{15} + \frac{48}{15} + \frac{12}{15} = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$$

2. Un jugador lanza dos monedas si obtiene dos caras obtiene \$4. Si se muestra solo una cara gana dos. Pero si obtiene dos cruces debe pagar \$3 de penalización. Calcule el valor esperado de su juego.

Sol.

$$E[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i f(x_i) = 4\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-3)\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= 4\frac{1}{4} + 4\frac{1}{4} - 3\frac{1}{4}$$
$$= \frac{4}{4} + \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

3. Si una urna contiene seis bolas blancas y cuatro negras, y tres bolas son tomadas sin remplazo. ¿Cuál es la media númerica de bolas negras que pueda obtener?

Sol.

$$E[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i f(x_i) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} + 2\,\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} + 3\,\frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}}$$

$$\frac{4 \cdot 15}{120} + \frac{72}{120} + \frac{12}{120} = \frac{144}{120} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

4. Una moneda es lanzada hasta que se obtenga una cara o cuatro cruces consecutivas. Dado que X denota el número de lanzamientos requeridos calcule $E[X]$.

Sol.

$$E[X] = 1 \cdot P\{X=1\} + 2 \cdot P\{X=2\} + 3 \cdot P\{X=3\} + 4 \cdot P\{P=4\}$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{8}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{12}{8} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$$

5. Cálcule la media y la varianza de X, del número de caras que se obtiene cuando se tira un dado

Sol.

$$E[X] = \sum_{i=1}^{6} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$V[X] = \mu_2 = \mu_2' - \mu^2 = \mu_2' - (E[x])^2$$

$$= \sum_{i=1}^{6} x_i^2 f(x_i) - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i^2 - \frac{49}{4}$$

$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{364 - 294}{24} = \frac{70}{24} = \frac{35}{12}$$

6. Un dado es alterado entonces la probabilidad de que se obtenga algunas de sus caras es proporcional al número de la cara. Cálcule la media y la varianza de X del número de caras mostrado

Sol

$$E[X] = \sum_{i=1}^{6} x_i f(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{21} + 2 \cdot \frac{2}{21} + 3 \cdot \frac{3}{21} + 4 \cdot \frac{4}{21} + 5 \frac{5}{21} + 6 \frac{6}{21}$$

$$= \frac{1}{21} \left[1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 \right]$$

$$= \frac{91}{21}$$

$$= \frac{13}{3}$$

$$V[x] = \mu_2 = \mu_2' - \mu^2 = \mu_2' - (E[x])^2$$

$$= \sum_{i=1}^{6} x_i^2 f(x_i) - \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \sum_{i=1}^{6} i^2 \frac{i}{21} - \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{1}{21} \sum_{i=1}^{6} i^3 - \left(\frac{13}{3}\right)^2$$

$$= \frac{441}{21} - \frac{169}{9} = \frac{20}{9}$$

7. Cálcule la media de X que es la suma de los números en las caras que se obtiene cuando se tira dos dados

Sol

$$E[X] = \sum_{i=2}^{12} x_i f(x_i) = \frac{2}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} +$$

$$8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + \frac{12}{36}$$

$$= \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{20}{36} + \frac{30}{36} + \frac{42}{36} + \frac{40}{36} +$$

$$\frac{36}{36} + \frac{30}{36} + \frac{22}{36} + \frac{12}{36}$$

$$= \frac{252}{36} = \frac{126}{18} = \frac{63}{9} = 7$$

8. Calcular la media de la distribución dada en la tabla dos, capítulo dos para dos dados alterados

Sol.

$$E[X] = \sum_{i=4}^{12} x_i f(x_i) = 4\,\frac{4}{36} + 5\,\frac{4}{36} + 6\,\frac{5}{36} + 7\,\frac{6}{36} + 8\,\frac{7}{36} + 9\,\frac{4}{36} +$$

$$10\,\frac{3}{36} + 11\,\frac{2}{36} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{16}{36} + \frac{20}{36} + \frac{30}{36} + \frac{42}{36} + \frac{56}{36} + \frac{36}{36} + \frac{30}{36} + \frac{22}{36} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{253}{36}$$

9. Una variable aleatoria puede asumir solo valores 1 y 3 si la media es de 8/3 encuentre las probabilidades para estos dos puntos.

Sol.

Sea $E[X] = \frac{8}{3}$, entonces

$$E[X] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i) = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = \frac{8}{3}$$

asi mismo $x_1 + x_2 = 1$ donde $x_1 = 1 - x_2$

$$(1 - x_2) + 3x_2 = \frac{8}{3}$$

$$1 + 2x_2 = \frac{8}{3}$$

$$2x_2 = \frac{8}{3} - 1$$

$$2x_2 = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{5}{6}$$

luego entonces

$$x_1 + \frac{5}{6} = 1$$

$$x_1 = 1 - \frac{5}{6}$$

$$x_1 = \frac{1}{6}$$

10. A y B emparejan monedas. Calcule la media y la varianza de X después de dos juegos. Donde X es el monto ganado de A.

Sol

$$E[X] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \frac{1}{2} = 0$$

$$V[X] = \mu_2' - \mu^2 = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0^2 = 1$$

11. En el problema 10 cálcule la media y la varianza si A abandona déspues del primer juego, siempre que lo gane, pero B no emplea esta estrategia. ¿Qué dice el resultado sobre la estrategia de A?

Sol.

$$E[x] = \sum_{i=1}^{3} x_i f(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0$$

$$V[x] = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 f(x_i) - (E[x])^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 f(x_i)$$
$$= 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 0^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} + 0 + 1$$
$$= \frac{3}{2}$$

12. Una moneda es lanzada hasta que aparezca cara si esta aparece en el primer lanzamiento el jugador recibe \$2 del banco, si aparece por primera vez en el segundo lanzamiento él recibe cuatro. En géneral si está aparece por primera vez en K-esimo lanzamiento el recibe 2^K. Si el pago excede el millón de dolares el solo recibira un millón. Calcule la media del montó que podría ganar el jugador ¿Qué efecto tendría no tener limites en el montó al ganar en la media?

Sal.

Sabemos que $2^{19} < 1000000 < 2^{20}$ por tanto $1 \leq K \leq 19$ obtnemo 2^K dolare si $K > 19$ entonces recibimos 1M

$$E[x] = \sum_{i=1}^{19} x_i f(x_i) + 1M \sum_{i=20}^{\infty} f(x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{19} 2^i \left(\frac{1}{2}\right)^i + 1M \sum_{i=20}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$
$$= \sum_{i=1}^{19} 1 + 1M \sum_{i=20}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 190 + 1M \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= 190 + \frac{1000000}{2^{19}}$$

Recordamos

$$\sum_{n=p}^{\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}$$

13. Diferencie ambos lados de la ecuación

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1} = 1$$

con respecto a p y usa la ecuación resultante para encontrar la media de la densidad geometrica $f(x)=p(1-p)^{x-1}$, $x=1,2,\ldots$.

Sol.

$$\frac{d}{dp}\, p(1-p)^{x-1} = -p(1-p)^{x-2}$$

$$\frac{d}{dp}\, 1 = 0$$ entonces

$$\sum_{x=1}^{\infty} \left[-p(1-p)^{x-2}(x-1) + (1-p)^{x-1}\right] = 0$$

Sabemos que $E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x\,p(1-p)^{x-1}$, luego

$$-\sum_{x=1}^{\infty} p(x-1)(1-p)^{x-2} + \sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1} = 0$$

$$-\sum_{x=1}^{\infty} (px-p)(1-p)^{x-2} + \sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1} = 0$$

$$-\sum_{x=1}^{\infty} px(1-p)^{x-2} + \sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-2} + \sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1} = 0$$

donde $\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p}$

$$-\sum_{x=1}^{\infty} \frac{px(1-p)^{x-1}}{1-p} + \sum_{x=1}^{\infty}\frac{p(1-p)^{x-1}}{1-p} + \frac{1}{p} = 0$$

$$-\sum_{x=1}^{\infty} \frac{px(1-p)^{x-1}}{1-p} + \frac{\cancel{p}}{1-p}\cdot\frac{1}{\cancel{p}} + \frac{1}{p} = 0$$

$$-\frac{1}{1-p}\sum_{x=1}^{\infty} px(1-p)^{x-1} + \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} = 0$$

$$-\frac{\mu}{1-p} + \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} = 0$$

14. Dado $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x = 1,2,3,\cdots$, y 0 para otro caso, encuentre la función de momento generadora. Usela para calcular la media y varianza de X

Sol.

$$E[e^{\theta X}] = \sum_{X=1}^{\infty} e^{\theta X}\left(\frac{1}{2}\right)^X = \sum_{X=1}^{\infty}\frac{e^{\theta X}}{2^X}$$

$$= \sum_{X=1}^{\infty}\left[1+\theta X+\frac{\theta^2 X^2}{2!}+\frac{\theta^3 X^3}{3!}+\cdots\right]\frac{1}{2^X}$$

$$= \sum_{X=1}^{\infty}\frac{1}{2^x}+\sum_{X=1}\theta x\frac{1}{2^x}+\sum_{X=1}\frac{\theta^2 x^2}{2!}\frac{1}{2^x}+\sum_{X=1}\frac{\theta^3 x^3}{3!}\frac{1}{2^x}+\cdots$$

$$= 1+\theta\mu+\frac{\theta^2}{2!}\mu_2'+\frac{\theta^3}{3!}\mu_3'+\cdots$$

entonces

$$E[x] = \mu = \sum_{X=1}^{\infty}\frac{x}{2^x} = \sum_{X=1}^{\infty}x\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$V[x] = \mu_2' - \mu^2 = \sum_{X=1}^{\infty}\frac{x^2}{2^x} - 2^2 = \frac{(1/2)(1+1/2)}{(1-1/2)^3} - 4 = \frac{1/2\cdot 3/2}{(\frac{1}{2})^3} - 4$$

$$= \frac{\frac{3}{e}}{\frac{1}{4}} - 4 = 6 - 4 = 2$$

15. Seis dados son tirados. llamando un 5 a 6 exito, encuentre la probabilidad de obtenos (a) 3 exitos, (b) a lo mas tres exitos.

Sol

a) $\binom{6}{3}\left(\frac{2}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^3 = 20\cdot\frac{8}{216}\cdot\frac{64}{216} = 20\,\frac{1}{27}\cdot\frac{8}{27} = \frac{160}{729}$

b)

$$\binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5+\binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4+\binom{6}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$$

$$\frac{64}{729}+6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{32}{243}+15\,\frac{1}{9}\cdot\frac{16}{81}+\frac{160}{729} = \frac{64}{729}+\frac{64}{243}+\frac{80}{243}+\frac{160}{729} = \frac{656}{729}$$

16. Supongo una muestra de doce que es tomada de un día de producción de una máquina que normalmente produce 5% de partes defectuosas, si el día de produccion es inspeccionada 100% siempre que que una muestra de 12 tiene 3 o más partes defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad que en un día de produccion sea inspeccionado el 100%?

Sol.

$$\binom{12}{0}\left(\frac{5}{100}\right)^0\left(\frac{95}{100}\right)^{12}+\binom{12}{1}\left(\frac{5}{100}\right)\left(\frac{95}{100}\right)^{11}+\binom{12}{2}\left(\frac{5}{100}\right)^2\left(\frac{95}{100}\right)^{10}$$

$$\Rightarrow=\left(\frac{95}{100}\right)^{12}+12\cdot\frac{5}{100}\left(\frac{95}{100}\right)^{11}+66\left(\frac{5}{100}\right)^2\left(\frac{95}{100}\right)^{10}$$

$$\Rightarrow=0.5403+0.3412+0.0987=0.9802$$

luego entonces

$$1-0.9802=0.0198$$

17. la experencia muestra que solo 1/3 de los pacientes tiene una enfermedad, se recuperara con el tratamiento estándar. Una nueva droga producida es administrada a un grupo de 12 pacientes tienen la enfermedad. Si la clinica requiere que al menos 7 pacientes deban recuperarse antes de que acepte la nueva droga sea desacreditada aún si esta aumenta la tasa de recuperación a 1/2?

Sol.

$$\sum_{x=0}^{6}\binom{12}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{12-x}$$

$$\Rightarrow=\binom{12}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+\binom{12}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\binom{12}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+$$

$$\binom{12}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^8+\binom{12}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^7+\binom{12}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow=\frac{1}{2^{12}}+12\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{11}}+66\,\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{2^{10}}+220\,\frac{1}{2^3}\,\frac{1}{2^9}+495\,\frac{1}{2^4}\,\frac{1}{2^8}+$$

$$=792\,\frac{1}{2^5}\,\frac{1}{2^7}+924\,\frac{1}{2^6}\,\frac{1}{2^6}=\frac{2509}{4096}=0.61$$

18. Un dispositivo electronico consiste de 5 unidades separadas de tal manera que este trabaje solo si las 5 piezas funcionan. Si la probabilidad de que la operación sea exitosa es de 0.9 por cada parte. ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo trabaje?, ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo trabaje solo con 4 de las 5 partes?

Sol.

a) $\binom{5}{5}\left(\frac{9}{10}\right)^5 = 1 \cdot \frac{9^5}{10^5} = 0.59049$

b) $\binom{5}{4}\left(\frac{9}{10}\right)^4\left(\frac{1}{10}\right) = 5 \cdot \frac{6561}{10000} \cdot \frac{1}{10} = 5\,\frac{6561}{100000}$

$= \frac{6561}{20000} = 0.32805$

19. Suponga que el pronóstico del tiempo muestra un promedio de 5 a 30 días en Noviembre que serán lluviosos, a) Asumiendo una distribución binomial y cada día como un evento de forma independiente encuentre la probabilidad de que el siguiente Noviembre tenga a lo más 3 días lluviosos"

Sol.

$$\binom{30}{0}\left(\frac{5}{30}\right)^0\left(\frac{25}{30}\right)^{30} + \binom{30}{1}\left(\frac{5}{30}\right)\left(\frac{25}{30}\right)^{29} + \binom{30}{2}\left(\frac{5}{30}\right)^2\left(\frac{25}{30}\right)^{28} +$$

$$\binom{30}{3}\left(\frac{5}{30}\right)^3\left(\frac{25}{30}\right)^{27} =$$

$$\Rightarrow = \left(\frac{5}{6}\right)^{30} + 30 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{29} + 435\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{28} + 4060\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{27}$$

$$\Rightarrow = 0.00421 + 0.02527 + 0.0733 + 0.1368$$

$$\Rightarrow = 0.23958$$

20. Cálcule la probabilidad binomial es conveniente calcular $f(X+1)$ de $f(X)$ por la fórmula $f(X+1)=K(X)f(X)$, donde $K(X)=[(n-X)/(X+1)]\,(p/q)$ Demuestran que esta fórmula es correcta.

Dem.

Sea $f(x+1) = \binom{n}{x+1} p^{x+1} (1-p)^{n-x-1}$ y $f(x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$

entonces

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\binom{n}{x+1} p^{x+1} (1-p)^{n-x-1}}{\binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}} = \frac{\binom{n}{n+1} p\,(1-p)^{-1}}{\binom{n}{x}} \qquad \boxed{q = 1-p}$$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{n!}}{(n-\cancel{x-1})!\,(x+1)!}}{\dfrac{\cancel{n!}}{(n-x)!\,\cancel{x!}}} \cdot \frac{p}{q} = \frac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{n-x}} \cdot \frac{p}{q} = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} = K(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+1)}{f(x)} = K(x) \Rightarrow f(x+1) = K(x)\, f(x) \quad \blacksquare$$

21. Si x tiene una densidad $f(x) = x/2$, $0 < x < 2$, Calcule la probabilidad que (a) que ambos valores de prueba excedan a 1, (b) exactamente 2 de los 4 valores de prueba excedan a 1.

a)
$$P\{X>1\} = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx = \frac{1}{4}x^2\Big|_1^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Como los eventos son independientes
$$P\{A \text{ exceda a } 1\} = P\{X_1>1\} \times P\{X_2>1\} = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

b)
$$P\{B \text{ exceda a } 1\} = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{81}{256}\ 6\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{16} = \frac{54}{256} = \frac{27}{128}$$

22. Si X tiene la densidad $f(x) = 1/2$, $0 < x < 2$ (a) ¿Cual es la probabilidad que al menos 2 de 3 valores de prueba excedan a 1? (b) ¿Cual es el valor de tal que la probabilidad es $\frac{1}{2}$ en el que 2 de 3 valores de prueba lo exceden?

a)
$$P\{X>1\} = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 dx = \frac{x}{2}\Big|_1^2 = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P\{A \text{ exceda a } 1\} = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3\,\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

b)
$$P\{X > x\} = \int_x^2 f(t)\,dt = \int_x^2 \frac{1}{2}\,dt = \frac{t}{2}\Big|_x^2 = \frac{2}{2} - \frac{x}{2} = 1 - \frac{x}{2}$$

$x-3=-1$

Luego entonces
$$P\{B \text{ exceda a } 1\} = \binom{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{x}{2}\right) + \binom{3}{3}\left(1-\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$ x

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^2\left[\frac{3x}{2} + 1 - \frac{x}{2}\right] = \frac{1}{2}$$
$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^2\left[x+1\right] = \frac{1}{2}$$
$$\left[1 - x + \frac{x^2}{4}\right](x+1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x} - x^2 + \frac{x^3}{4} + 1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{4} + 1 = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 2$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 = -2$$
$$\Rightarrow x^2(x-3) = -2$$

Sole existe la solucion

$x-3=-2$

$x=-2+3$

$x=1$

23. Dado que un variable binomial tiene media igual a 12 y una varianza de 10 encuentre los valores de p y n

Sol.

Dado que $E[X] = np$ & $V[X] = npq$ entonces

$$V[X] = 10 = 12q$$

$$\frac{10}{12} = q \Rightarrow q = \frac{5}{6}$$

pero $q = (1-p) \Rightarrow p = 1-q \Rightarrow p = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

así $E[X] = 12 = n\left(\frac{1}{6}\right)$ donde $n = 72$

24. La experiencia muestra que 10% de los individuos reservan mesas en un club nocturno no aparecerán. Si el club tiene 40 mesas y dados 43 reservaciones. ¿Cual es la probabilidad de que se pueda acomodar a todos las personas que se presenten?

Sol.

$$P\{X \leq 40\} = 1 - P\{X > 40\} = 1 - \binom{43}{41}(0.9)^{41}(0.1)^2 - \binom{43}{42}(0.9)^{42}(0.1)^1 - \binom{43}{43}(0.9)^{43}$$

$$= 1 - 0.1201 - 0.0514 - 0.0107$$

$$= 0.8177$$

25. En las series mundiales de baseball, las series concluyen cuando uno de los equipos ha ganado 4 juegos. Dado que p es la probabilidad de un equipo A gane un juego y asumiendo que esta probabilidad sea constante en la serie. Demuestre que las probabilidades de terminar la serie en 4, 5, 6 y 7 juegos son 0.125, 0.25, 0.3125, 0.3125, respectivamente, cuando $p = 1/2$ y 0.21, 0.3, 0.27, 0.22, respectivamente, cuando $p = \frac{2}{3}$

Sol.

a)

$$\binom{2}{1}\binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$\binom{2}{1}\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2 \cdot \frac{4}{32} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\binom{2}{1}\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 20\,\frac{1}{64} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

$$\binom{2}{1}\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{5}{16} = 0.3125$$

26. Supongo que la distribución binomial debe acortarse acordando descartar el valor o, en cual quier ocurrencia. Encuentre el valor de la densidad de X que es encontrando la densidad condicional de la binomial X cuando $1 \leq X \leq n$

Sol.

$$P\{X=x\} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

luego

$$P\{X>0\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - \binom{n}{0} p^0 q^n = 1 - q^n$$

entonces

$$P\{X=x \mid X \geq 0\} = \frac{P(X=x \cap X>0)}{P\{X>0\}} = \frac{\binom{n}{x} p^x q^{n-x}}{1-q^n}$$

27. Ajuste una función binomial a los siguientes dato sobre el numero de semillas que germinan en 10 semillas en papel filtro humedo para 80 conjuntos de semillas.

$$\sum_{i=0}^{10} f(x_i) = 80$$

Sol.

Sabemos que

$$E[X] = \frac{\sum_{i=0}^{10} x_i f(x_i)}{N} = \frac{20+56+36+32+30}{80} = \frac{174}{80} = \frac{87}{40}$$

Pero

$$E[X] = np = 10p = \frac{87}{40} \Rightarrow p = \frac{87}{400}$$

luego

$$P\{X=x\} = \binom{10}{x} \left(\frac{87}{400}\right)^x \left(\frac{313}{400}\right)^{10-x}$$

Finalmente

$E_0 = 80 \times P\{X=0\} = 6.885$

$E_1 = 80 \times P\{X=1\} = 19.13$

$E_2 = 80 \times P\{X=2\} = 23.93$

$\vdots$

28. Usando la programación de Poisson calcular la probabilidad que a lo más dos personas de 500 cumplan años en Navidad, asuma que el año tiene 365 días

Sol.

$$P\{X \leq 2\} = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-\frac{100}{73}} \left(\frac{100}{73}\right)^{x}}{x!}$$ donde $\mu = np = 500\left(\frac{1}{365}\right)$

$\Rightarrow \mu = \frac{100}{73}$

$$= e^{-\frac{100}{73}}\left[1 + \frac{\left(\frac{100}{73}\right)}{1} + \frac{\left(\frac{100}{73}\right)^{2}}{4}\right]$$

$$= 0.7215$$

29. Use la aproximación de Poisson para calcular la probabilidad de obtener 10 exitos de 1,000 pruebas de un experimento en el cual $p = 0.01$

Sol.

$$P\{X = 10\} = \frac{e^{-\mu} \mu^{x}}{x!}$$ donde $\mu = np = 1000\left(\frac{1}{100}\right) = 10$ & $x = 10$

$$= \frac{e^{-10}\, 10^{10}}{10!} = 0.1251$$

30. Las placas metálicas son regularmente inspeccionadas por defectos en promedio dos defectos por una yarda cuadrada asuma un proceso de Poisson es aplicable y calcule la probabilidad de obtener, a) Ningun defecto en cuatro yardas cuadradas del material, b) A lo más 5 efectos en 4 yardas cuadradas.

Sol.

Sea $E[X] = \mu = 2$ de 4 yardas $\mu = 2 \times 4 = 8$

a) $$P\{X = 0\} = \frac{e^{-8}\, 8^{0}}{0!} = e^{-8}$$

b) $$P\{X \leq 5\} = \sum_{x=0}^{5} \frac{e^{-8}\, 8^{x}}{x!} = e^{-8}\left[1 + \frac{8}{1} + \frac{8^{2}}{4} + \frac{8^{3}}{9} + \frac{8^{4}}{16} + \frac{8^{5}}{25}\right]$$

$$= e^{-8} \cdot 1648.6088 \simeq 0.553$$

31. Suponga que el número de llamadas teléfonicas que un operador recibe de 9:00 a 9:05 sigue una distribución de Poisson con $\mu = 4$. a) Encuentra la probabilidad que el operador no reciba llamadas en el intervalo de mañana, b) Encuentra la probabilidad que los siguientes dos días el operador reciba un total de 3 llamadas en intervalo del tiempo.

Sol.

Sabemos que las llamadas de 9:00-9:05 tienen un promedio $\mu = 4$

a) $$P\{X=0\} = \frac{e^{-4}4^0}{0!} = e^{-4}$$

b)

$$P\{X=3\} = \frac{e^{-8}8^3}{3!} = \frac{e^{-8}512}{6} \approx e^{-8}\cdot 85.3333 \approx 0.02862$$

32. Asuma que el número de particulas emitidas por una fuente radiactiva sigue la distribución de Poisson con un promedio de emisión de dos párticulas por segundo a) Encuentra la probabilidad que a lo más una párticula sea emitida entre segundos, b) ¿Qué tasa de emisión sería necesaria para que la probabilidad de obtener como máximo una emisión en 3 segundos sea al menos del 90%.

Sol.

Sabema que el promedio de emisión de partículas por segundo es $\mu = 2$

Luego en 3 segundos tendriamos $\mu = 6$, entonces

a) $$P\{X \leq 1\} = \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-6}6^x}{x!} = e^{-6}\left[1+6\right] = 7e^{-6} \approx 0.01735$$

b)

$$P\{X \leq 1\} = \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} \leq 0.9$$

$$\Rightarrow e^{-\mu} + e^{-\mu}\mu \leq 0.9$$

$$\Rightarrow e^{-\mu}(1+\mu) \leq 0.9$$

33. Asuma que los clientes que entran a una tienda es una tasa de 60 personas por hora a) ¿Cuál es la probabilidad que durante un intervalo de 5 minutos nadie entre a la tienda?, b) ¿Cuál es el intervalo de tiempo en que la probabilidad que nadie entre a la tienda sea $1/2$?

Sol.

Sabemos que el promedio de clientes que entran en una hora es $\mu = 60$ entonces en 5 minutos $\mu = 5$

a) $$P\{X=0\} = \frac{e^{-5}5^{0}}{0!} = e^{-5} \approx 0.006737$$

b) $$P\{X=0\} = \frac{e^{-\mu}\mu^{0}}{0!} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\mu} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\mu = -\ln(2) \Rightarrow \mu = \ln 2$$

34. Asuma el número de elementos de un cierto tipo de compra en una tienda durante una semana sigue una distribución de Poisson con $\mu = 50$. Que tan grande el almacen tiene que tener el comerciante a la mano para tener un 98% para suministrar la demanda usa una aproximación normal

Sol.

Sabemos que el promedio de compra es $\mu = 50$ en una semana, entonces

$P\{X = x\} = 0.98$, luego $P\{X = x\} \approx P\left\{ Z \leq \frac{x + 0.5 - \mu}{\sigma} \right\}$, donde

$\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{50}$, así dado que la probabilidad de 0.98 es aprox 2.054

$$Z = \frac{x + 0.5 - 50}{\sqrt{50}} = 2.054$$

$$x + 0.5 - 50 = 2.054\sqrt{50}$$

$$x = 2.054\sqrt{50} + 49.5 \approx 64$$

35. Resuelve el problema 19 usando la aproximación de Poisson para la distribución binomial

Sol.

El promedio de lluvia en 30 días es $\mu = 5$, entonces

$$P\{X \leq 3\} = \sum_{x=1}^{3} \frac{e^{-5}5^x}{x!} = e^{-5}\left[1 + 5 + \frac{25}{4} + \frac{125}{6}\right] = e^{-5}\frac{397}{12}$$

$$\Rightarrow P\{X \leq 3\} \approx 0.2291$$

un valor muy cercano al resultado obtenido en el ejercicio 19

36. Clientes llegan al departamento de quejas de una tienda en una tasa de 5 hombres por hora y 10 mujeres por hora si las llegadas en cada caso siguen un proceso de Poisson, cálcule la probabilidad que a lo más 4 clientes sin distinción de sexo lleguen en un periodo de 30 minutos.

Sol.

sea la media total la suma de $\mu_H + \mu_M = 15 = \mu$, tenemos que la tasa en media hora es de $\mu = 15 = \frac{1}{2}\cdot 15$

$$P\{X \leq 4\} = \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-\frac{15}{2}}\left(\frac{15}{2}\right)^x}{x!} = e^{-15/2}\left[1 + \frac{15}{2} + \frac{\left(\frac{15}{2}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{15}{2}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{15}{2}\right)^4}{24}\right] = e^{-\frac{15}{2}}\frac{28763}{128}$$

$$= 0.1242$$

37. Un contador llega a 30 cuentas por minuto en la aproximación de un material radioactivo asuma un proceso de Poisson opera aquí calcula la probabilidad que haya exactamente 5 cuentas en un periodo de 10 segundos, b) x cuentas en un periodo de n números.

Sol.

Sea el promedio de 30 cuentas en un minuto, entonces el promedio de cuentas en 10s es $\mu = \mu_0 \frac{1}{6} = \frac{30}{6} = 5$, entonces

$$P\{X = 5\} = \frac{e^{-5}5^5}{5!} = e^{-5}\frac{3125}{120} \approx 0.1754$$

88. Una fuente de líquido contiene una bacteria con un número promedio de bacterias por cm^3 igual a 4, 10 tubos de ensayo de un centímetro cúbico son llenados con un líquido. asuma que la distribución de Poisson es aplicable. calcule la probabilidad, a) Qué todos los tubos muestren crecimiento es decir contienen al menos una bacteria cada uno, b) Qué exactamente 8 tubos muestren crecimiento

Sol.

El promedio de bacterias por cm^3 es $\mu = 4$, es decir que la probabilidad de que no crezca un bacteria es $P\{X=0\} = \frac{e^{-4}4^0}{0!} = e^{-4}$ por tanto que

$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - e^{-4}$ así

a)

$$P\{X=10\} = \binom{10}{10}(1-e^{4})^{10} = (1-e^{4})^{10}$$

b)

$$P\{X=8\} = \binom{10}{8}(1-e^{-4})^{8}\, e^{-8} = 45\,(1-e^{-4})^{8}\, e^{-8}$$

39. Ajuste una función de Poisson a los siguientes datos famosos sobre el número de muertes por la patada de un caballo por cuerpo de la armada por año para 10 cuerpos de la armada prusianos durante 20 años. El número total de unidades es 200

X	0	1	2	3	4
f	109	65	22	3	1

Sol.

$$E[X] = \mu = \frac{\sum_{i=0}^{4} x_i f(x_i)}{N} = \frac{65+44+9+4}{200} = 0.61$$

$$E[0] = 200\,\frac{e^{-0.61}\,0.61^0}{0!} = 200\, e^{-0.61}$$

$$E[1] = 200\,\frac{e^{-0.61}\,0.61}{1} = 2\, e^{-0.61}\, 0.61$$

$$E[2] = 200\,\frac{e^{-0.61}\,0.61^2}{4} = 50\, e^{-0.61}\, 0.61^2$$

$\vdots$

40. a) Dado que X procesos en una distribución de Poisson con una media μ, demostrar que la función generadora de X esta dado por $M_X(\theta) = \exp(\mu e^{\theta} - \mu)$. b) Por diferenciación $M_X(\theta)$, verifique que el promedio es μ y demuestre que la varianza es igual con μ.

Sol

$$M_X(\theta) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} e^{\theta x} = e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^{\theta}\mu)^x}{x!}$$

Recordemos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ entonces

$$M_X(\theta) = \exp(-\mu) \cdot \exp(e^{\theta}\mu) = \exp(\mu e^{\theta} - \mu)$$

b)

$$\frac{d M_X(\theta)}{d\mu} = \frac{d}{d\mu}\left[\exp(\mu e^{\theta} - \mu)\right] = \frac{d}{d\mu}\left[\exp(\mu(e^{\theta}-1))\right] = \left[\mu + e^{\theta} - 1\right] \exp(\mu e^{\theta} - \mu)$$

entonces

$$M'_X(0) = (\mu + e^{0} - 1)\exp(\mu e^{0} - \mu) = \mu \exp(\mu - \mu) = \mu$$

41. Demostrar que las probabilidades de Poisson incrementan y luego disminuyen al menos que $\mu =< 1$ determine que valor de X tiene la máxima probabilidad. considere el cociente de las probabilidades vecinas

Sol

$$u = t^{x+1} \qquad du = (x+1)t^x\,dt \qquad dv = e^{-t}\,dt \qquad v = -e^{-t}$$

$$P\{X > \mu - 1\} = \int_{\mu-1}^{\mu} \frac{e^{-t} t^x}{x!}\,dt = \frac{1}{x!}\int_{\mu-1}^{\mu} e^{-t} t^x\,dt$$

$$= \frac{1}{x!}\left[\frac{e^{-t} t^{x+1}}{x+1} + \frac{1}{x+1}\int_{\mu-1}^{\mu} t^{x+1} e^{-t}\,dt\right.$$

$$= \frac{1}{x!}\left\{\frac{e^{-t}t^{x+1}}{x+1} + \frac{1}{x+1}\left[-t^{x+1}e^{-t} + (x+1)\int e^{-t} t^x\,dt\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{x!}\left\{\frac{e^{-t}t^{x+1}}{x+1} - \frac{t^{x+1}e^{-t}}{x+1} + \int_{\mu-1}^{\mu} e^{-t}t^x\,dt\right\} = \frac{e^{-t}t^{x+1}}{(x+1)!} - \frac{t^{x+1}e^{-t}}{(x+1)!} + \frac{1}{x!}\int_{\mu-1}^{\mu} e^{-t}t^x\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{\mu-1}^{\mu} e^{-t}t^x\,dt\left[1 - \frac{1}{x!}\right] = \frac{e^{-t}t^{x+1}}{(x+1)!} - \frac{t^{x+1}e^{-t}}{(x+1)!} \Rightarrow \int_{\mu-1}^{\mu} e^{-t}t^x\,dt = 0$$

42. Asuma que el número promedio de personas por minuto comprando un boleto de tren es 10 encuentra una expresión para la probabilidad que al menos t minutos hayan transcurrido antes de vender 50 boletos usa un modelo de Poisson

Sol.

El promedio de personas por minuto es $\mu_0 = 10$ por tanto para t minutos transcurrido se tiene $\mu = \mu_0 t = 10t$, así

$$P\{X<50\} = \sum_{x=0}^{49} \frac{e^{-10t}(10t)^x}{x!}$$

43. Una muestra de 3 es tomada de una caja de 12 artículos. Si 4 de los artículos están defectuosos. ¿Cual es la probabilidad de no tomar algun artículo defectuoso?

Sol.

$$P\{X=0\} = \frac{\binom{4}{0}\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{8!}{5!\,\cancel{3!}}}{\frac{12!}{9!\,\cancel{3!}}} = \frac{8!\,9!}{5!\,12!} = \frac{14}{55} \approx 0.2545$$

44. Una bolsa contiene 2 bolas rojas, 3 verdes y 4 negras. Si 5 bolas son tomadas sucesivamente con reemplazo cada vez. ¿Cual es la probabilidad de obtener 2 bolas rojas, 2 verdes y una negra?

Sol.

$$P\{X=\{2R,2V,1N\}\} = \frac{5!}{2!\,2!\,1!}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{3}{9}\right)^2\left(\frac{4}{9}\right)^1$$

$$= 30 \times \frac{4}{81} \times \frac{9}{81} \times \frac{4}{9} = \frac{160}{2187}$$

45. Trabaje con el problema 44 si no hay reemplazos al tomar las bolas

Sol.

$$P\{X=(2R,2V,1N)\} = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{5}} = 4\,\frac{\frac{3!}{2!}}{\frac{9!}{4!\,5!}} = 4\,\frac{3!\,4!\,5!}{2!\,9!}$$

$$= 4\,\frac{3\cdot 4!\,5!}{9!} = \frac{2}{21}$$

46. Una caja contiene 100 elementos de las 4 son defectuosas. Dado que X denota el número piezas defectuosas encontradas en una muestra de 9. (a) Calcule la probabilidad de $X=2$. (b) use la aproximación binomial. (c) use la aproximación de Poison.

Sol

a) $$P\{X=2\} = \frac{\binom{4}{2}\binom{96}{7}}{\binom{100}{9}} = \frac{1404}{37345} = 0.03759$$

b) $$P\{X=2\} = \binom{9}{2}\left(\frac{4}{100}\right)^2\left(\frac{96}{100}\right)^7 = 36 \times \frac{1}{625} \times 0.7514 \approx 0.04328$$

c) $$P\{X=2\} = \frac{e^{-9/25}(9/25)^2}{2!} = e^{-9/25}\,\frac{81}{1250} = 0.0452$$

47. Asuma $f(x) = 1/x^2$, $1<x$. Dado $A_1=\{x \mid 1<x<4\}$, $A_2=\{x \mid 3<x<6\}$ calcule (a) $P\{A_1 \cup A_2\}$, (b) $P\{A_1 \cap A_2\}$

Sol.

$$P\{A_1 \cup A_2\} = \int_1^4 \frac{dx}{x^2} + \int_5^6 \frac{dx}{x^2} = \int_1^6 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^6 = -\frac{1}{6}+1 = \frac{5}{6}$$

$$P\{A_1 \cap A_2\} = \int_3^4 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_3^4 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} = \frac{1}{12}$$

48. Una variable aleatoria tiene la densidad $f(x)=a+bx^2$, $0<x<1$, determinar a y b tal que el promedio sea $2/3$

Sol

$$E[X] = \mu = \mu_1' = \int_0^1 x(a+bx^2)\,dx = \frac{(a+bx^2)^2}{4b}\Big|_0^1 = \frac{(a+b)^2}{4b} - \frac{a^2}{4b}$$

$$= \frac{a^2+2ab+b^2-a^2}{4b} = \frac{2ab+b^2}{4b} = \frac{2a+b}{4} \Rightarrow \frac{2a+b}{4} = \frac{2}{3}$$

$b = 3-3a$

$2a+3-3a = 8/3$

$3-a = 8/3$

$$\int_0^1 (a+bx^2)\,dx = a\int_0^1 dx + b\int_0^1 x^2\,dx = ax\Big|_0^1 + b\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = a+\frac{b}{3} = \frac{3a+b}{3} \Rightarrow \frac{3a+b}{3} = 1$$

entonces $2a+b=8/3$ y $3a+b=3$ donde $a=\frac{1}{3}$ y $b=2$ satisfacen las ecuaciones