

46. Una caja contiene 100 elementos de los 4 son defectuosos. Dado que  $X$  denota el número de elementos defectuosos en una muestra de 9. (a) Calcula la probabilidad de  $X=2$ . (b) usa la aproximación binomial. (c) usa la aproximación de Poisson.

Sol  
a)  $P\{X=2\} = \frac{\binom{4}{2} \binom{96}{7}}{\binom{100}{9}} = \frac{1404}{37345} = 0.03759$

b)  $P\{X=2\} = \binom{9}{2} \left(\frac{4}{100}\right)^2 \left(\frac{96}{100}\right)^7 = 36 \times \frac{1}{625} \times 0.7514 \approx 0.04328$

c)  $P\{X=2\} = \frac{e^{-9/25} \left(\frac{9}{25}\right)^2}{2!} = e^{-9/25} \frac{81}{1250} = 0.0452$

47. Supón que  $f(x) = 1/x^2$ ,  $1 < x$ . Dado  $A_1 = \{x | 1 < x < 4\}$ ,  $A_2 = \{x | 3 < x < 6\}$   
calcula (a)  $P\{A_1 \cup A_2\}$ , (b)  $P\{A_1 \cap A_2\}$

Sol.  
 $P\{A_1 \cup A_2\} = \int_1^4 \frac{dx}{x^2} + \int_5^6 \frac{dx}{x^2} = \int_1^6 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^6 = -\frac{1}{6} + 1 = \frac{5}{6}$

$P\{A_1 \cap A_2\} = \int_3^4 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_3^4 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} = \frac{1}{12}$

48. Una variable aleatoria tiene la densidad  $f(x) = a+bx^2$ ,  $0 < x < 1$ , determina

a y b tal que el promedio sea  $\frac{2}{3}$   
Sol  
 $E[X] = \mu = \mu' = \int_0^1 x(a+bx^2) dx = \frac{(at+bt^3)}{4b} \Big|_0^1 = \frac{(a+b)^2}{4b} - \frac{a^2}{4b}$   
 $b = 3 - 3a$   
 $= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2}{4b} = \frac{2ab + b^2}{4b} = \frac{2a+b}{4} \Rightarrow \frac{2a+b}{4} = \frac{2}{3} \quad 2a+3-3a=\frac{8}{3}$   
 $3-a=\frac{8}{3}$

$\int_0^1 (a+bx^2) dx = a \int_0^1 dx + b \int_0^1 x^2 dx = ax \Big|_0^1 + b \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = a + \frac{b}{3} = \frac{3a+b}{3} \Rightarrow \frac{3a+b}{3} = 1$   
entonces  $2a+b=\frac{8}{3}$  y  $3a+b=3$  donde  $a=\frac{1}{3}$  y  $b=2$  satisfacen las ecuaciones

49. Calculo  $P\{\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma\}$  para  $X$  que posea la densidad

Sol.  $f(x) = 6x(1-x)$ ,  $0 < x < 1$

$$E[X] = \mu = \int_0^1 6x^2(1-x)dx = 6 \left[ x^2 dx - 6 \int_0^1 x^3 dx = 2x^3 \right]_0^1 - \frac{3}{2} x^4 \Big|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 6x^3(1-x)dx = 6 \left[ x^3 dx - 6 \int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{2} x^4 \right]_0^1 - \frac{6}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{3}{10}$$

donde

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{12-10}{40} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

así  $6 = \sqrt{20}$  por tanto  $\mu - 2\sigma = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}-4}{2\sqrt{20}} = 6$  &  $\mu + 2\sigma = \frac{\sqrt{20}+4}{2\sqrt{20}} = D$

$$\begin{aligned} P[A] &= \int_0^D 6x(1-x)dx = 6 \left[ x^2 dx - 6 \int_0^D x^3 dx = 3x^2 \Big|_0^D - 2x^3 \Big|_0^D \right] \\ &= 3 \left[ \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{20}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{20}}\right)^2 \right] - 2 \left[ \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{20}}\right)^3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{20}}\right)^3 \right] \\ &\approx 3 \left[ (0.9472)^2 - (0.0527)^2 \right] - 2 \left[ (0.9472)^3 - (0.0527)^3 \right] \\ &\approx 2.6832 - 1.6999 \approx 0.9833 \end{aligned}$$

50. Si  $f(x) = cx e^{-x^2/2}$ ,  $x > 0$ , encuentre (a)  $c$ , (b) la media de  $X$ .

(c) la varianza de  $X$

Sol.  $P\{X>0\} = \int_0^\infty cx e^{-x^2/2} dx = c \int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx = -ce^{-x^2/2} \Big|_0^\infty = -c[e^{-\infty^0} - e^0] = c$

pero  $P\{X>0\} = 1$  entonces  $c = 1$

$$\mu = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2} dx = -x e^{-x^2/2} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx = 0 + \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^3 e^{-x^2/2} dx = \int_0^\infty 2u e^{-u} du = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2 - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 2 - \frac{\pi}{4} = \frac{8-\pi}{8}$$

51. Si  $f(x) = 1$ ,  $0 < x < 1$ , encontrar (a) la media y varianza de  $X$   
 (b) la media y varianza de  $X^2$

Sol.

$$\mu = \int_0^1 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$E[X^4] = \int_0^1 x^4 \, dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$V[X] = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9}$$

$= \frac{9-5}{45} = \frac{4}{45}$

52. Demostrar que la distribución de Cauchy, cuya densidad es  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$   
 no posee momentos finitos.

Dem

$$\text{Sea } E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2\pi} \ln(1+x^2) \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

luego entonces

$$E[X] = \frac{1}{2\pi} \left[ \lim_{a \rightarrow \infty} \ln(1+a^2) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+b^2) \right]$$

sin embargo  $E[X] = \infty - \infty$  Indeterminado, por tanto no converge

53. Dado que  $f(x) = cx^2$ ,  $x > 0$ , encuentre (a) C, (b)  $M'_K$  por integración  
 (c)  $M_K(\theta)$ , (d)  $M'_K$  de  $M_X(\theta)$ .

a)  $\int_0^2 cx \, dx = c \int_0^2 x \, dx = \frac{cx^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{4c}{2} = 2c \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

b)  $M'_K = \frac{1}{2} \int_0^2 x^K x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^{K+1} \, dx = \frac{x^{K+2}}{2(K+2)} \Big|_0^2 = \frac{2^{K+2}}{2(K+2)} = \frac{2^{K+1}}{K+2}$

c)  $M_K(\theta) = E[e^{\theta x}] = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{\theta x} x \, dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{xe^{\theta x}}{\theta} \Big|_0^2 - \frac{1}{\theta} \int_0^2 e^{\theta x} \, dx \right] =$   
 $= \frac{1}{2} \left[ \frac{2e^{2\theta}}{\theta} - \frac{1}{\theta} \left( \frac{e^{\theta x}}{\theta} \Big|_0^2 \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{2e^{2\theta}}{\theta} - \frac{e^{2\theta}}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} \right] = \frac{e^{2\theta}}{\theta} - \frac{e^{2\theta}}{2\theta^2} + \frac{1}{2\theta^2}$

54. Dado que  $f(x) = ce^{-x}$ ,  $x > 0$ , encuentre (a) C, (b)  $M_X(\theta)$ , (c)  $M'_K$  de  $M_X(\theta)$

a)  $P\{X > 0\} = c \int_0^\infty e^{-x} \, dx = -ce^{-x} \Big|_0^\infty = -c(e^{-\infty} - e^0) = c = 1 \Rightarrow c = 1$

b)  $M_X(\theta) = E[e^{\theta x}] = \int_0^\infty e^{\theta x} e^{-x} \, dx = \int_0^\infty e^{\theta x-x} \, dx = \int_0^\infty e^{x(\theta-1)} \, dx = \frac{e^{x(\theta-1)}}{\theta-1} \Big|_0^\infty$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x(\theta-1)}}{\theta-1} - \frac{1}{\theta-1} = \frac{1}{1-\theta} \quad \text{A } \theta < 1$

c)  $M'_X(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{1-\theta} \right) = -\frac{1}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{(1-\theta)^2}$

$M'_K = \frac{1}{(1-\theta)^2} = 1$

55. Dado que  $f(x) = cx^\alpha e^{-x}$ ,  $x > 0$ ,  $\alpha$  un entero positivo, encuentre  
 (a)  $c$  usando el hecho que  $\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = \alpha!$ , (b)  $\mu'_K$  de la definición  
 (c)  $M_X(\theta)$ , (d)  $\mu'_K$  de  $M_X(\theta)$

Sol.  
 $\int_0^\infty cx^\alpha e^{-x} dx = c \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = c \alpha! = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\alpha!}$

b)  $\mu'_K = \frac{1}{\alpha!} \int_0^\infty x^K x^\alpha e^{-x} dx = \frac{1}{\alpha!} \int_0^\infty x^{K+\alpha} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(K+\alpha+1)}{\alpha!} = \frac{(K+\alpha)!}{\alpha!}$

c)  $M_X(\theta) = E[e^{\theta X}] = \int_0^\infty e^{\theta x} x^\alpha e^{-x} dx = \int_0^\infty x^\alpha e^{\theta x-x} dx$

56. Encuentre la función generadora de momentos para la distribución triangular  
 cuya distribución se dada por  $f(x)=x$ ,  $0 < x < 1$ ,  $f(x)=2-x$ ,  $1 \leq x < 2$

Sol.

$$\begin{aligned}
 M_X(\theta) &= E[e^{\theta X}] = \int_0^1 e^{\theta x} x dx + \int_1^2 e^{\theta x} (2-x) dx \\
 &= \int_0^1 e^{\theta x} x dx + 2 \int_1^2 e^{\theta x} dx - \int_1^2 e^{\theta x} x dx \\
 &= \frac{x e^{\theta x}}{\theta} \Big|_0^1 - \frac{1}{\theta} \int_0^1 e^{\theta x} dx + \frac{2}{\theta} e^{\theta x} \Big|_1^2 - \frac{x e^{\theta x}}{\theta} \Big|_1^2 + \frac{1}{\theta} \int_1^2 e^{\theta x} dx \\
 &= \left[ \frac{e^\theta}{\theta} \right] - \left[ \frac{e^{\theta x}}{\theta^2} \right]_0^1 + \left[ \frac{2e^{2\theta}}{\theta} - \frac{2e^\theta}{\theta} \right] - \left[ \frac{2e^{2\theta}}{\theta} - \frac{e^\theta}{\theta} \right] + \left[ \frac{e^{\theta x}}{\theta^2} \right]_1^2 \\
 &= \frac{e^\theta}{\theta} - \frac{e^\theta}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} + \frac{2e^{2\theta}}{\theta} - \frac{2e^\theta}{\theta} - \frac{2e^{2\theta}}{\theta} + \frac{e^\theta}{\theta} + \frac{e^{2\theta}}{\theta^2} - \frac{e^\theta}{\theta^2} \\
 &= \frac{e^{2\theta}}{\theta^2} - \frac{2e^\theta}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} = \frac{e^{2\theta} - 2e^\theta + 1}{\theta^2} = \frac{(e^\theta + 1)^2}{\theta^2} = \left( \frac{e^\theta + 1}{\theta} \right)^2
 \end{aligned}$$

57. Dado  $\varphi_X(t) = \log M_X(t)$  donde  $M_X(t)$  es la función generadora de momentos, demostrar que  $\varphi'(0) = \mu$  y  $\varphi''(0) = \sigma^2$

Sol.

Seó  $\varphi_X(t) = \log M_X(t)$  entonces

$$\varphi'_X(t) = \frac{d}{dt} \log M_X(t) = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \text{ entonces si } t=0$$

$$\varphi'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \frac{\mu}{1} = \mu$$

Luego

$$\begin{aligned}\varphi''_X(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \right) = -\frac{(M'_X(t))^2}{(M_X(t))^2} + \frac{M''_X(t)}{M_X(t)} \\ &= \frac{M_X(t) M''_X(t) - (M'_X(t))^2}{(M_X(t))^2}\end{aligned}$$

así

$$\varphi''_X(0) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2 \quad \blacksquare$$

58. Dado  $\varphi_X(t) = E[t^X] = E[e^{X \log t}] = M_X(\log t)$ . Demostrar que

$$\varphi_X^K(1) = E[X(X-1)\cdots(X-K+1)]$$

y por tanto  $\varphi_X(t)$  genera momentos factoriales.

Dem.

Sea

$$\frac{d}{dt} \varphi_X(t) = E \left[ \frac{d}{dt} t^X \right] = E \left[ X t^{X-1} \right] \text{ luego, hagamola para } K \text{ veces}$$

$$\frac{d^K}{dt^K} \varphi_X(t) = E \left[ \frac{d^K}{dt^K} t^X \right] = E \left[ X(X-1)(X-2)\cdots(X-K+1) t^{X-K} \right]$$

entonces

$$\begin{aligned}\varphi_X^K(t) &= E \left[ X(X-1)(X-2)\cdots(X-K+1) t^{X-K} \right] \\ &= E \left[ X(X-1)(X-2)\cdots(X-K+1) \right] \blacksquare\end{aligned}$$

59. Dos estudiantes acuerdan encontrarse en un restaurante 6 y 7 P.M. Encuentra la probabilidad que se encuentren si cada uno acuerda esperar 15 min al otro y ellos llegaron en un tiempo entre las 6 y 7.

Sol.

El espacio de muestra  $S = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$  partiendo el total del espacio es de 3600 pares

Luego entonces sea A el espacio de muestra para llegar  $A = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60, |x-y| \leq 15\}$  donde

$$\text{Area}(A) = 3600 - 2025 = 1575, \text{ por tanto}$$

$$P(\text{encuentro}) = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}$$

60. Tres puntos son elegidos al azar de la circunferencia de un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren en una semicircunferencia?

Sol.

Podemos representar la posición de los puntos como angulos del 0 a  $2\pi$ . Dado que  $P_1$  es 0 y  $P_2, P_3$  son elegidos al azar en el intervalo  $[0, 2\pi]$  para que todos punto sobre en un semicírculo comenzando en algún punto x todas las puntos debe estar en el intervalo  $[x, x+\pi]$  así

$$P = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$$

61. Si  $X$  es normalmente distribuido con  $\mu=2$  y  $\sigma=\frac{1}{3}$ , encuentra  
(a)  $P\{X>3\}$ , (b)  $P\{2<X<3\}$

60).

a)  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{3-2}{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow P\{X>3\} = P\{Z>3\} = 3$

b) Para  $x_1=2$

$Z_1 = \frac{2-2}{\frac{1}{3}} = 0$  luego para  $x_2=3$ ,  $Z_2 = \frac{3-2}{\frac{1}{3}} = 3$  donde

$$P\{2 < X < 3\} = P\{0 < Z < 3\} = P\{Z < 3\} - P\{Z > 0\} \text{ dand}$$

$$P\{Z < 3\} = 0.99865 \quad \& \quad P\{Z > 0\} = 0.5$$

$$P\{Z < 3\} = 0.99865 \quad \& \quad P\{Z > 0\} = 0.5$$

$$P\{0 < Z < 3\} \approx 0.99865 - 0.5 = 0.49865.$$

62.

(a)

$$P\{X > x_0\} = P\{Z > z\} = 0.10$$

$$Z = \frac{x_0 - 2}{2} \Rightarrow \frac{x_0 - 2}{2} = 0.1 \Rightarrow x_0 - 2 = 0.2 \Rightarrow x_0 = 2.2$$

(b)  $P\{X > -x_0\} = P\{Z > z\} = 0.2$

$$Z = \frac{-x_0 - 2}{2} \Rightarrow \frac{-(x_0 + 2)}{2} = 0.2 \Rightarrow -(x_0 + 2) = 0.4 \Rightarrow -x_0 - 2 = 0.4$$

$$\Rightarrow x_0 = -2.4$$

63.

Sol.

Se sabe que  $P\{X > 80\} \geq 0.9$  entonces usando  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$   
 $Z = \frac{80-100}{6} = -\frac{20}{6}$  por tanto  $P\{Z > -\frac{20}{6}\} \geq 0.9$ , esto condiciona  
 indica que el valor  $-\frac{20}{6}$  debe ser menor o igual que el z-score que  
 corresponde a una probabilidad de  $1 - 0.9 = 0.1$ , donde  $Z_{0.1} = -1.282$   
 Por lo que tenemos que

$$-\frac{20}{6} \leq -1.282$$

$$\Rightarrow -20 \leq -6 \cdot 1.282$$

$$\Rightarrow 20 \geq 6 \cdot 1.282$$

$$6 \leq \frac{20}{1.282}$$

$$6 \leq 15.6$$

64.

(a)

Sea  $P\{X=5\}$  y sabiendo que  $\mu = np$ ,  $\sigma = \sqrt{npq}$ , entonces

$\mu = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$  &  $\sigma = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ , donde

$$P\{X=5\} = P\left\{\frac{4.5-5}{\sqrt{\frac{5}{2}}} \leq Z \leq \frac{5.5-5}{\sqrt{\frac{5}{2}}}\right\} = P\{Z \leq 0.3162\} - P\{Z \leq -0.3162\}$$

$$\text{donde } P\{Z \leq 0.3162\} = 0.6240 \quad \& \quad P\{Z \leq -0.3162\} = 0.3760$$

$$\Rightarrow \text{la probabilidad } P\{4.5 \leq X \leq 5.5\} = 0.6240 - 0.3760 = 0.248$$

b)

$$\text{Sabemos que } P\{Z \leq 0.3162\} = P\{X \leq 5.5\} = 0.6240$$

65. Sea  $\mu = np = 15 \left(\frac{1}{3}\right) = 5$  &  $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{15 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt{10/3}$ , luego entonces para obtener la probabilidad de 4 éxitos

(a)

$$\begin{aligned} P\{3.5 \leq X \leq 4.5\} &= P\left\{\frac{3.5-5}{\sqrt{10/3}} \leq Z \leq \frac{4.5-5}{\sqrt{10/3}}\right\} = P\{-0.8215 \leq Z \leq -0.2738\} \\ &= P\{Z \leq -0.2738\} - P\{Z \leq -0.8215\} \\ &= 0.3936 - 0.2061 = 0.1875 \end{aligned}$$

b) a lo más 4 éxitos

$$P\{X \leq 4.5\} = P\left\{Z \leq \frac{4.5-5}{\sqrt{10/3}}\right\} = P\{Z \leq -0.2738\} = 0.3936$$

66. Sea  $\mu = np = 60 \left(\frac{1}{6}\right)$  &  $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60 \cdot \frac{5}{36}} = \sqrt{25/3}$  luego entonces para

obtener la probabilidad de obtener 10 ases

a) usando aproximación binomial

$$\begin{aligned} P\{X=10\} &= \binom{60}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{50} = 7.5394 \times 10^{10} \cdot 1.6538 \times 10^{-8} \cdot 1.0988 \times 10^{-4} \\ &= 0.13701 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P\{X=10\} &= P\left\{\frac{9.5-10}{\sqrt{25/3}} \leq Z \leq \frac{10.5-10}{\sqrt{25/3}}\right\} = P\{-0.1732 \leq Z \leq 0.1732\} \\ &= P\{Z \leq 0.1732\} - P\{Z \leq -0.1732\} \\ &= 0.5675 - 0.4325 = 0.135 \end{aligned}$$

67. Encontrar un número  $x_0$ , tal que la probabilidad de obtener un número de caras comprendido entre  $500-x_0$  y  $500+x_0$ , ambos inclusive en 1000 lanzamientos sea 0.8.

Sea

$$\text{Sea } \mu = np = 1000 \left(\frac{1}{2}\right) = 500 \quad \& \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000/4} = \sqrt{250} \text{ entornos}$$

$$\begin{aligned} P\{500-x_0 \leq X \leq 500+x_0\} &= P\left\{\frac{500-x_0-500}{\sqrt{250}} \leq Z \leq \frac{500+x_0-500}{\sqrt{250}}\right\} \\ &= P\left\{-\frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}} \leq Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} \\ &= P\left\{Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} - P\left\{Z \leq -\frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} \\ &= P\left\{Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} - 1 + P\left\{Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} \\ &= 2P\left\{Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} - 1 \end{aligned}$$

donde  $P\left\{Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} \approx 0.9$  para que  $2P\left\{Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} - 1 = 0.8$ , donde  $Z \approx 1.2$

$$\frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}} \approx 1.2 \Rightarrow x_0 \approx 20.3966 - 0.5 \approx 19.8966$$

68.

$$\text{Sea } \mu = np = 800 \left(\frac{1}{100}\right) = 32 \quad \& \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{768/25} \text{ entornos}$$

$$\begin{aligned} P\{X \leq 34.5\} &= P\left\{Z \leq \frac{34.5-32}{\sqrt{768/25}}\right\} = P\left\{Z \leq \frac{2.5}{\sqrt{768/25}}\right\} = P\left\{Z \leq 0.451\right\} \\ &= 0.6736 \end{aligned}$$

69.

Ser  $\mu = np = 100 \left(\frac{6}{100}\right) = 6$  &  $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{144/25}$  entonces  
 $P\{X \leq 10.5\} = P\left\{Z \leq \frac{10.5 - 6}{\sqrt{144/25}}\right\} = P\{Z \leq 1.894\} \approx 0.9706$

por tanto la probabilidad de fallar la garantía

$$P\{X \geq 10.5\} = 1 - P\{X \leq 10.5\} = 1 - 0.9706 = 0.0294$$

70.

Sol.

El número total de palabras es  $(1200)(6)(10) = 72000$  palabras en promedio en 10 días por tanto la probabilidad de una sola palabra extra dada por  $360/72000 = 0.005$  entonces la desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\frac{(0.005)(0.995)}{1200}} = \sqrt{0.000004145} = 0.002036$$

entonces los límites

$$L_u = (0.005) + 3(0.002036) = 0.011108$$

$$L_l = (0.005) - 3(0.002036) = -0.001108$$

71.

Sol

La suma de las puntuaciones es  $\sum p_i = 96$  entonces para obtener el promedio

de partes defectuosas es  $\sum p_i/n = 96/36 = \frac{8}{3}$

entonces la desviación estándar de la proporción es

$$\sigma = \sqrt{\frac{\frac{8}{36} \left(\frac{29}{36}\right)}{1000}} = \sqrt{\frac{73}{2812500}} \approx 0.00509$$

entonces los límites son

$$L = 0.02667 \pm 3(0.00509)$$

72.

Sol.

Si la confianza es igual a 0.9 entonces  $\alpha = 1 - 0.9 = 0.1$  donde  
 $P\{X = x_0\} \approx 0.05$  es 1.65 entonces conocemos que

$$n = \frac{P\{Z \leq 0.05\}^2 / \alpha}{E^2}$$

a)  $n = \frac{(1.65)^2 (0.4)(0.6)}{0.05^2} = \frac{0.6534}{0.0009} = 726$

b)  $n = \frac{(1.65)^2 (0.5)^2}{0.05} \approx 756.25$

73.

Sol

Sea el promedio de llamadas por minuto  $\mu = 10$  entonces  $\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{10} = 3.16$   
entonces

$$P\{X > 20\} = P\{Y \geq 20.5\} \text{ donde } Z = \frac{Y - \mu}{\sigma} = \frac{20.5 - 10}{\sqrt{10}} = \frac{10.5}{\sqrt{10}} \approx 3.32$$

luego

$$P\{Y \geq 20.5\} = P\{Z \geq z\} = 1 - P\{Z \leq z\} = 1 - 0.99055 = 0.00945$$

74.

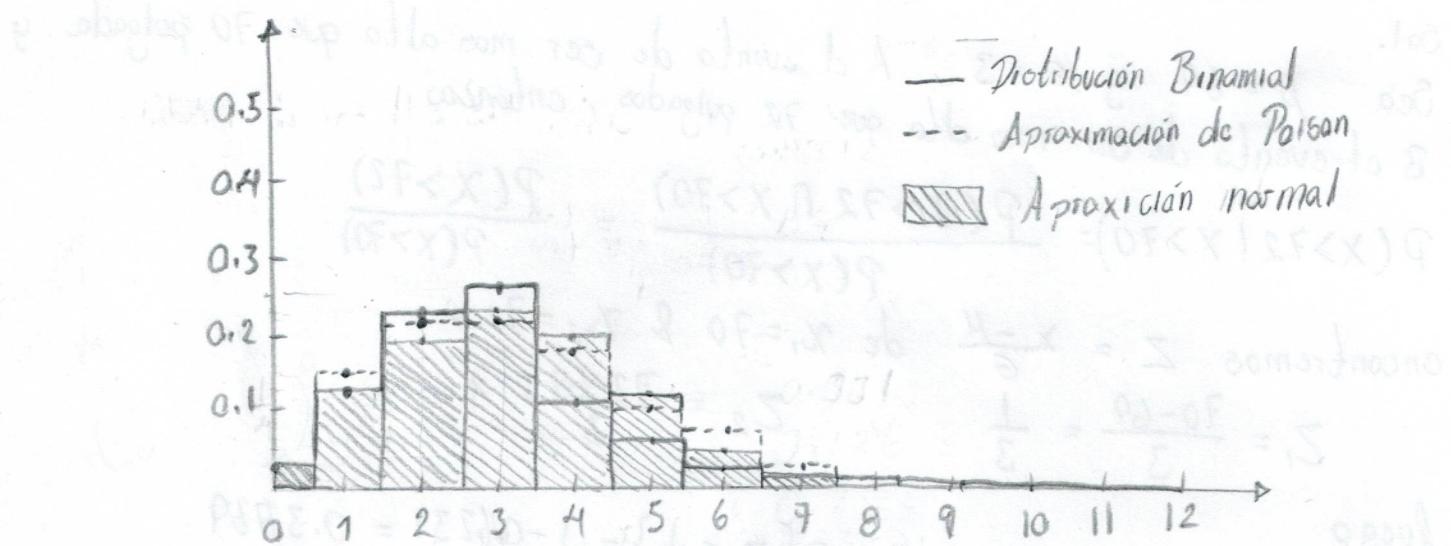
Sol

Sea  $\mu = 100$  y  $\sigma = \sqrt{100} = 10$

$$P\{X \leq 90.5\} = P\left\{Z \leq \frac{90.5 - 100}{10}\right\} = P\left\{Z \leq -\frac{9.5}{10}\right\} = P\{Z \leq -0.95\}$$

$$= 0.1711$$

75.



76.

Sol. Sea  $\mu = 0$  &  $\sigma^2 = 4$

$$\begin{aligned} P\{-6 \leq X \leq 6\} &= P\left\{-\frac{6-0}{2} \leq Z \leq \frac{6-0}{2}\right\} = \left\{-\frac{3}{2} \leq Z \leq \frac{3}{2}\right\} \\ &= P\left\{Z \leq \frac{3}{2}\right\} - P\left\{Z \leq -\frac{3}{2}\right\} \\ &= 0.9332 - 0.0662 \\ &= 0.8664 \end{aligned}$$

la probabilidad de pérdida está dada por

$$P(\text{pérdida}) = 1 - 0.8664 = 0.1336$$

por tanto el número perdido de tiros en 100 intentos es 13.36 lira

77.

Sol.

Sea  $\mu = 69$  y  $\sigma = 3$ , A) el evento de ser mas alta que 70 pulgadas y B) el evento de ser mas alta que 72 pulgadas, entonces

$$P(X > 72 | X > 70) = \frac{P(X > 72 \cap X > 70)}{P(X > 70)} = \frac{P(X > 72)}{P(X > 70)}$$

encontramos  $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$  de  $x_1 = 70$  &  $x_2 = 72$

$$Z_1 = \frac{70-69}{3} = \frac{1}{3}, \quad Z_2 = \frac{72-69}{3} = 1$$

luego

$$P\{X > 70\} = P\{Z > \frac{1}{3}\} = 1 - P\{Z \leq \frac{1}{3}\} = 1 - 0.6231 = 0.3769$$

$$P\{X > 72\} = P\{Z > 1\} = 1 - P\{Z \leq 1\} = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

así

$$\frac{P(X > 72)}{P(X > 70)} = \frac{0.1587}{0.3769} = 0.42106$$

78.

Don

para una distribución normal el momento  $K$  es

$$M_x(K) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^K f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^K \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{6}} dx$$

trabajamos con la distribución normal estandar entonces  $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$M_x(K) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^K}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^K e^{-z^2/2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -z^{K-1} e^{-z^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} (K-1) z^{K-2} dz$$

$$= \frac{(K-1)}{\sqrt{2\pi}} M_x(K-2)$$

$$\begin{aligned} u &= z^{K-1} \\ du &= (K-1) z^{K-2} dz \\ dv &= z e^{-z^2/2} dz \\ -v &= -e^{-z^2/2} \end{aligned}$$

79.

sabemos que  $\int_0^{t_0} ae^{-at} dt = 0.8$  es decir

$$-e^{-at} \Big|_0^{t_0} \Rightarrow -e^{-at_0} + 1 = 1 - e^{-at_0}$$

luego entonces  $(1 - e^{-at_0}) = e^{-at_0 t_0}$  para tanto

$$P\{T > t_0\} = 1 - (1 - e^{-at_0}) = e^{-at_0 t_0} \approx 0.49$$

$$e^{-at_0} = 0.8 \Rightarrow \ln e^{-at_0} = \ln(0.8) \Rightarrow -at_0 = \ln(0.8)$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{\ln(0.8)}{-a}$$

$$\text{Pero } \text{Si } a = 0.02 \Rightarrow t_0 = \frac{\ln(0.8)}{-0.02} \approx 11$$

80.

Sol.

Cada componente tiene  $\mu = 2$  donde  $\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$  de fallas por hora  
 para encontrar la tasa de fallas del sistema basta  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$   
 entonces  $\lambda = 0.5 + 0.5 = 1$  así el tiempo esperado para la falla es el  
 reciproco de la tasa de fallo  $E[T] = 1$ .

81.

Dem.

$$\text{Sea } P(X > t_1 + t_2 | X > t_1) = P(X > t^2) \text{ entonces}$$

$$P(X > t_1 + t_2 | X > t_1) = \frac{P(X > t_1 + t_2 \cap X > t_1)}{P(X > t_1)} = \frac{P(X > t_1 + t_2)}{P(X > t_1)} \quad t_1 \leq t_1 + t_2$$

por definición

$$P(X > x) = \int_x^{\infty} \lambda e^{-xt} dt = -e^{-xt} \Big|_x^{\infty} = e^{-xx} \text{ entonces}$$

$$P(X > t_1 + t_2 | X > t_1) = \frac{e^{-x(t_1 + t_2)}}{e^{-xt_1}} = e^{-xt_2} = P(X > t_2)$$