46. Una caja contiene 100 elementos de las 4 son defectuosas. Dado que X denota el número piezas defectuosas encontradas en una muestra de 9. (a) Calcule la probabilidad de $X=2$. (b) use la aproximacion binomial. (c) use la aproximación de Poison.

Sol

a) $$P\{X=2\} = \frac{\binom{4}{2}\binom{96}{7}}{\binom{100}{9}} = \frac{1404}{37345} = 0.03759$$

b) $$P\{X=2\} = \binom{9}{2}\left(\frac{4}{100}\right)^2\left(\frac{96}{100}\right)^7 = 36 \times \frac{1}{625} \times 0.7514 \approx 0.04328$$

c) $$P\{X=2\} = \frac{e^{-9/25}(9/25)^2}{2!} = e^{-9/25}\frac{81}{1250} = 0.0452$$

47. Asuma $f(x) = 1/x^2$, $1 < x$. Dado $A_1 = \{x \mid 1 < x < 4\}$, $A_2 = \{x \mid 3 < x < 6\}$ calcule (a) $P\{A_1 \cup A_2\}$, (b) $P\{A_1 \cap A_2\}$

Sol.

$$P\{A_1 \cup A_2\} = \int_1^4 \frac{dx}{x^2} + \int_5^6 \frac{dx}{x^2} = \int_1^6 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^6 = -\frac{1}{6} + 1 = \frac{5}{6}$$

$$P\{A_1 \cap A_2\} = \int_3^4 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_3^4 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} = \frac{1}{12}$$

48. Una variable aleatoria tiene la densidad $f(x) = a + bx^2$, $0 < x < 1$, determinar a y b tal que el promedio sea $2/3$

Sol

$$E[X] = \mu = \mu_1' = \int_0^1 x(a+bx^2)\,dx = \frac{(a+bx^2)^2}{4b}\Big|_0^1 = \frac{(a+b)^2}{4b} - \frac{a^2}{4b}$$

$$= \frac{a^2+2ab+b^2-\cancel{a^2}}{4b} = \frac{2ab+b^2}{4b} = \frac{2a+b}{4} \Rightarrow \frac{2a+b}{4} = \frac{2}{3}$$

$b = 3-3a$

$2a+3-3a = 8/3$

$3-a = 8/3$

$$\int_0^1 (a+bx^2)\,dx = a\int_0^1 dx + b\int_0^1 x^2 dx = ax\Big|_0^1 + b\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = a + \frac{b}{3} = \frac{3a+b}{3} \Rightarrow \frac{3a+b}{3} = 1$$

entonces $2a+b = 8/3$ y $3a+b = 3$ donde $a = \frac{1}{3}$ y $b = 2$ satisfacen las ecuaciones

49. Calcule $P\{\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma\}$ para X procesa la densidad

Sol. $f(x)=6x(1-x)\ ,\ 0<x<1$

$$E[X]=\mu=\int_0^1 6x^2(1-x)\,dx = 6\int_0^1 x^2dx - 6\int_0^1 x^3\,dx = 2x^3\Big|_0^1 - \frac{3}{2}x^4\Big|_0^1 = 2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E[X^2]=\int_0^1 6x^3(1-x)\,dx = 6\int_0^1 x^3dx - 6\int_0^1 x^4dx = \frac{3}{2}x^4\Big|_0^1 - \frac{6}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{3}{2}-\frac{6}{5}=\frac{3}{10}$$

donde

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{3}{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{12-10}{40}=\frac{2}{40}=\frac{1}{20}$$

así $\sigma = 1/\sqrt{20}$ portanto $\mu-2\sigma=\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{20}-4}{2\sqrt{20}}=C$ & $\mu+2\sigma=\frac{\sqrt{20}+4}{2\sqrt{20}}=D$

$$P\{A\}=\int_C^D 6x(1-x)\,dx = 6\int_C^D x\,dx - 6\int_C^D x^2dx = 3x^2\Big|_C^D - 2x^3\Big|_C^D$$

$$=3\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{20}}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{20}}\right)^2\right]-2\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{20}}\right)^3-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{20}}\right)^3\right]$$

$$\approx 3\left[(0.9472)^2-(0.0527)^2\right]-2\left[(0.9472)^3-(0.0527)^3\right]$$

$$\approx 2.6832-1.6999\approx 0.9833$$

50. Si $f(x)=cxe^{-x^2/2}$, $x>0$, encuentre (a) c, (b) la media de X, (c) la varianza de X

Sol.

$$P\{X>0\}=\int_0^\infty cxe^{-x^2/2}dx = c\int_0^\infty xe^{-x^2/2}dx = -ce^{-x^2/2}\Big|_0^\infty = -c\left[\cancel{e^{-\infty}}^{\,0}-e^0\right]=c$$

pero $P\{X>0\}=1$ entonces $c=1$

$$\mu=\int_0^\infty x^2e^{-x^2/2}dx = -xe^{-x^2/2}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x^2/2}dx = 0+\int_0^\infty e^{-x^2/2}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$E[X^2]=\int_0^\infty x^3e^{-x^2/2}dx=\int_0^\infty 2u\,e^{-u}du = 2\cdot\Gamma(2)=2\cdot 1! = 2$$

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2=2-\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2=2-\frac{\pi}{2}$$

51. Si $f(x) = 1$, $0 < x < 1$, encontrar (a) la media y varianza de X
(b) la media y varianza de X^2

Sol.

$$\mu = \int_0^1 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

$$E[x^2] = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$E[x^4] = \int_0^1 x^4\, dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$V[x] = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{9-5}{45} = \frac{4}{45}$$

52. Demostrar que la distribución de Cauchy, cuya densidad es $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ no posee finitos momentos.

Dem

Sea $E[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2\pi} \ln(1+x^2)\Big|_{\infty}^{\infty}$

luego entonces

$$E[X] = \frac{1}{2\pi}\left[\lim_{a\to\infty} \ln(1+a^2) - \lim_{x\to-\infty} \ln(1+b^2)\right]$$

sin embargo $E[x] = \infty - \infty$ indeterminado, por tanto no converge ∎

53. Dado que $f(x) = cx^2$, $x > 0$, encuentre (a) c, (b) μ'_K por integración (c) $M_K(\theta)$, (d) μ'_K de $M_x(\theta)$.

Sol.

a) $$\int_0^2 cx\,dx = c\int_0^2 x\,dx = \frac{cx^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{4c}{2} = 2c \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

b) $$\mu'_K = \frac{1}{2}\int_0^2 x^K x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^{K+1}\,dx = \frac{x^{K+2}}{2(K+2)}\Big|_0^2 = \frac{2^{K+2}}{2(K+2)} = \frac{2^{K+1}}{K+2}$$

c) $$M_K(\theta) = E[e^{\theta x}] = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{\theta x} x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{xe^{\theta x}}{\theta}\Big|_0^2 - \frac{1}{\theta}\int_0^2 e^{\theta x}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2e^{2\theta}}{\theta} - \frac{1}{\theta}\left(\frac{e^{\theta x}}{\theta}\Big|_0^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2e^{2\theta}}{\theta} - \frac{e^{2\theta}}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}\right] = \frac{e^{2\theta}}{\theta} - \frac{e^{2\theta}}{2\theta^2} + \frac{1}{2\theta^2}$$

54. Dado que $f(x) = ce^{-x}$, $x > 0$, encuentre (a) c, (b) $M_x(\theta)$, (c) μ'_K de $M_x(\theta)$

Sol.

a) $$P\{X > 0\} = c\int_0^\infty e^{-x}\,dx = -ce^{-x}\Big|_0^\infty = -c(\cancel{e^{-\infty}}^{0} - e^0) = c = 1 \Rightarrow c = 1$$

b) $$M_x(\theta) = E[e^{\theta x}] = \int_0^\infty e^{\theta x} e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{\theta x - x}\,dx = \int_0^\infty e^{x(\theta-1)}\,dx = \frac{e^{x(\theta-1)}}{\theta-1}\Big|_0^\infty$$

$$= \cancel{\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x(\theta-1)}}{\theta-1}}^{0} - \frac{1}{\theta-1} = \frac{1}{1-\theta} \quad \forall\, \theta < 1$$

c) $$M'_x(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{1-\theta}\right) = -(1-\theta)^{-2}\cdot -1 = \frac{1}{(1-\theta)^2}$$

$$\mu'_K = \frac{1}{(1-\theta)^2} = 1$$

55. Dado que $f(x) = c x^{\alpha} e^{-x}$, $x > 0$, α un entero positivo, encuentre (a) c usando el hecho que $\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = \alpha!$, (b) μ'_k de la definición (c) $M_X(\theta)$, (d) μ'_k de $M_X(\theta)$

Sol

$$\int_0^\infty c\, x^\alpha e^{-x} dx = c \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = c\,\alpha! = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\alpha!}$$

b)

$$\mu'_k = \frac{1}{\alpha!}\int_0^\infty x^k x^\alpha e^{-x} dx = \frac{1}{\alpha!}\int_0^\infty x^{k+\alpha} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\alpha!} = \frac{(k+\alpha)!}{\alpha!}$$

c)

$$M_X(\theta) = E[e^{\theta X}] = \int_0^\infty e^{\theta x} x^\alpha e^{-x} dx = \int_0^\infty x^\alpha e^{\theta x - x} dx$$

56. Encuentre la función generadora de momentos para la distribución triangula cuya distribución es dada por $f(x) = x$, $0 < x < 1$, $f(x) = 2 - x$, $1 \le x < 2$

Sol.

$$M_X(\theta) = E[e^{\theta X}] = \int_0^1 e^{\theta x}\, x\, dx + \int_1^2 e^{\theta x}(2-x)\, dx$$

$$= \int_0^1 e^{\theta x} x\, dx + 2\int_1^2 e^{\theta x} dx - \int_1^2 e^{\theta x} x\, dx$$

$$= \frac{x e^{\theta x}}{\theta}\Big|_0^1 - \frac{1}{\theta}\int_0^1 e^{\theta x} dx + \frac{2}{\theta} e^{\theta x}\Big|_1^2 - \frac{x e^{\theta x}}{\theta}\Big|_1^2 + \frac{1}{\theta}\int_1^2 e^{\theta x} dx$$

$$= \left[\frac{e^\theta}{\theta}\right] - \frac{e^{\theta x}}{\theta^2}\Big|_0^1 + \left[\frac{2e^{2\theta}}{\theta} - \frac{2e^\theta}{\theta}\right] - \left[\frac{2e^{2\theta}}{\theta} - \frac{e^\theta}{\theta}\right] + \frac{e^{\theta x}}{\theta^2}\Big|_1^2$$

$$= \cancel{\frac{e^\theta}{\theta}} - \frac{e^\theta}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} + \cancel{\frac{2e^{2\theta}}{\theta}} - \cancel{\frac{2e^\theta}{\theta}} - \cancel{\frac{2e^{2\theta}}{\theta}} + \cancel{\frac{e^\theta}{\theta}} + \frac{e^{2\theta}}{\theta^2} - \frac{e^\theta}{\theta^2}$$

$$= \frac{e^{2\theta}}{\theta^2} - \frac{2e^\theta}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2} = \frac{e^{2\theta} - 2e^\theta + 1}{\theta^2} = \frac{(e^\theta + 1)^2}{\theta^2} = \left(\frac{e^\theta + 1}{\theta}\right)^2$$

57. Dado $\psi_X(t) = \log M_X(t)$ donde $M_X(t)$ es la función generadora de momentos, demostrar que $\psi'(0) = \mu$ y $\psi''(0) = \sigma^2$.

Sol.

Sea $\psi_X(t) = \log M_X(t)$ entonces

$$\psi'_X(t) = \frac{d}{dt} \log M_X(t) = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \quad \text{entonces si } t=0$$

$$\psi'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \frac{\mu}{1} = \mu$$

luego

$$\psi''_X(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{M'_X(t)}{M_X(t)}\right) = -\frac{(M'_X(t))^2}{(M_X(t))^2} + \frac{M''_X(t)}{M_X(t)}$$

$$= \frac{M_X(t) M''_X(t) - (M'_X(t))^2}{(M_X(t))^2}$$

así

$$\psi''_X(0) = \sigma^2 + \cancel{\mu^2} - \mu^2 = \sigma^2 \quad \blacksquare$$

58. Dado $\psi_X(t) = E[t^X] = E[e^{X\log t}] = M_X(\log t)$. Demostrar que

$$\psi_X^{K}(1) = E[X(X-1)\cdots(X-K+1)]$$

y por tanto $\psi_X(t)$ genera momentos factoriales.

Dem.

Sea

$$\frac{d}{dt}\psi_X(t) = E\left[\frac{d}{dt} t^X\right] = E\left[X t^{X-1}\right] \quad \text{luego, hagamosla para } K \text{ veces}$$

$$\frac{d^K}{dt}\psi_X(t) = E\left[\frac{d^K}{dt} t^X\right] = E\left[X(X-1)(X-2)\cdots(X-K+1)\, t^{X-K}\right]$$

entonces

$$\psi_X^{K}(t) = E\left[X(X-1)(X-2)\cdots(X-K+1)\, 1^{X-K}\right]$$

$$= E[X(X-1)(X-2)\cdots(X-K+1)] \quad \blacksquare$$

59. Dos estudiante acuerdan encontrarse en un restaurante 6 y 7 P.M. Encuentre la probabilidad que se encuentran si cada una acuerda esperar 15 min al otro y ellos llegaron en un tiempo entre las 6 y 7.

Sol.

El espacio de muestra $S=\{(x,y) \mid 0\leq x\leq 60,\ 0\leq y\leq 60\}$ portant el total del espacio es de 3600 pares

Luego entonces se A el espacio de muestra para llegar

$A=\{(x,y) \mid 0\leq x\leq 60,\ 0\leq y\leq 60,\ |x-y|\leq 15\}$ donde

$\text{Area}(A) = 3600 - 2025 = 1575$, por tanto

$$P(\text{encuentro}) = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}$$

60. Tres puntos son elegidos al azar de la circunferencia de un circulo ¿Cual es la probabilidad de que se encuentren en una semicircunferencia?

Sol.

Podemos representar la posicion de los puntos como angulos del 0 a 2π

Dado que P_1 es 0 y P_2, P_3 son escogidos al azar en el intervalo $[0,2\pi)$ para que todos punto estar en un semicirculo comenzando en algún punto x todos los puntos debe estar en el intervalo $[x, x+\pi]$ asi

$$P = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$$

61. Si X es normalmente distribuido con $\mu = 2$ y $\sigma = \frac{1}{3}$, encuentra (a) $P\{X>3\}$, (b) $P\{2<X<3\}$

6a).

a) $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{3-2}{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow P\{X>3\} = P\{Z>3\} = 3$

b) Para $x_1 = 2$

$Z_1 = \frac{2-2}{\frac{1}{3}} = 0$ luego para $x_2 = 3$, $Z_2 = \frac{3-2}{\frac{1}{3}} = 3$ donde

$P\{2<X<3\} = P\{0<Z<3\} = P\{Z<3\} - P\{Z>0\}$ dond

$P\{Z<3\} = 0.99865$ & $P\{Z>0\} = 0.5$

$P\{0<Z<3\} \approx 0.99865 - 0.5 = 0.49865.$

62.

(a)

$P\{X>x_0\} = P\{Z>z\} = 0.10$

$Z = \frac{x_0-2}{2} \Rightarrow \frac{x_0-2}{2} = 0.1 \Rightarrow x_0 - 2 = 0.2 \Rightarrow x_0 = 2.2$

(b) $P\{X>-x_0\} = P\{Z>z\} = 0.2$

$Z = \frac{-x_0-2}{2} \Rightarrow -\frac{(x_0+2)}{2} = 0.2 \Rightarrow -(x_0+2) = 0.4 \Rightarrow -x_0 - 2 = 0.4$

$\Rightarrow x_0 = -2.4$

63.

Sol.

Se sabe que $P\{X > 80\} \geq 90$ entonces usando $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$Z = \frac{80-100}{\sigma} = -\frac{20}{\sigma}$ por tanto $P\{Z > -\frac{20}{\sigma}\} \geq 0.9$, esta condición indica que el valor $-\frac{20}{\sigma}$ debe ser menor o igual que el z-score que corresponde a una probabilidad de $1-0.9=0.1$, donde $z_{0.1} = -1.282$

Por lo que tenemos que

$$-\frac{20}{\sigma} \leq -1.282$$

$$\Rightarrow -20 \leq -\sigma \cdot 1.282$$

$$\Rightarrow 20 \geq \sigma \cdot 1.282$$

$$\sigma \leq \frac{20}{1.282}$$

$$\sigma \leq 15.6$$

64.

(a)

Sea $P\{X=5\}$ y sabiendo que $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$ entonces

$\mu = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ & $\sigma = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$, donde

$P\{X=5\} = P\left\{\frac{4.5-5}{\sqrt{\frac{5}{2}}} \leq Z \leq \frac{5.5-5}{\sqrt{\frac{5}{2}}}\right\} = P\{Z \leq 0.3162\} - P\{Z \leq -0.3162\}$

donde $P\{Z \leq 0.3162\} = 0.6240$ & $P\{Z \leq -0.3162\} = 0.3760$

$\Rightarrow$ la probabilidad $P\{4.5 \leq X \leq 5.5\} = 0.6240 - 0.3760 = 0.248$

b)

Sabemos que $P\{Z \leq 0.3162\} = P\{X \leq 5.5\} = 0.6240$

6.5.

Sea $\mu = np = 15\left(\frac{1}{3}\right) = 5$ & $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{15\,^{2}/_{9}} = \sqrt{^{10}/_{3}}$, luego entonces para obtener la probabilidad de 4 exitoss

(a)

$$P\{3.5 \leq X \leq 4.5\} = P\left\{\frac{3.5-5}{\sqrt{10/3}} \leq Z \leq \frac{4.5-5}{\sqrt{10/3}}\right\} = P\{-0.8215 \leq Z \leq -0.2738\}$$

$$= P\{Z \leq -0.2738\} - P\{Z \leq -0.8215\}$$

$$= 0.3936 - 0.2061 = 0.1875$$

b) a lo más 4 exitos

$$P\{X \leq 4.5\} = P\left\{Z \leq \frac{4.5-5}{\sqrt{\frac{10}{3}}}\right\} = P\{Z \leq -0.2738\} = 0.3936$$

66.

Sea $\mu = np = 60\left(\frac{1}{6}\right)$ & $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60\,^{5}/_{36}} = \sqrt{^{25}/_{3}}$ luego entonces para obtener la probabilidad de obtener 10 ases

a) usando aproximación binomial

$$P\{X = 10\} = \binom{60}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^{50} = 7.5394\times10^{10} \cdot 1.6538\times10^{-8} \cdot 1.0988\times10^{-4}$$

$$= 0.13701$$

b)

$$P\{X = 10\} = P\left\{\frac{9.5-10}{\sqrt{25/3}} \leq Z \leq \frac{10.5-10}{\sqrt{25/3}}\right\} = P\{-0.1732 \leq Z \leq 0.1732\}$$

$$= P\{Z \leq 0.1732\} - P\{Z \leq -0.1732\}$$

$$= 0.5675 - 0.4325 = 0.135$$

67. Encontrar un número, tal que la probabilidad de obtener un numero de caras comprendido entre $500-x_0$ y $500+x_0$, ambos inclusive en 1000 lanzamientos sea 0.8.

Sol.

Sea $\mu = np = 1000\left(\frac{1}{2}\right) = 500$ & $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000/4} = \sqrt{250}$ entonces

$$P\{500-x_0 \leq X \leq 500+x_0\} = P\left\{\frac{500-x_0-500+0.5}{\sqrt{250}} \leq Z \leq \frac{500+x_0-500+0.5}{\sqrt{250}}\right\}$$

$$= P\left\{-\frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}} \leq Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\}$$

$$= P\left\{Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} - P\left\{Z \leq -\frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\}$$

$$= P\left\{Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} - 1 + P\left\{Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\}$$

$$= 2P\left\{Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} - 1$$

donde $P\left\{Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} \approx 0.9$ para que $2P\left\{Z \leq \frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}}\right\} - 1 = 0.8$, donde $z \approx 1.2$

$$\frac{x_0+0.5}{\sqrt{250}} \approx 1.29 \Rightarrow x_0 \approx 20.3966 - 0.5 \approx 19.8966$$

68.

Sea $\mu = np = 800\left(\frac{4}{100}\right) = 32$ & $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{768/25}$ entonces

$$P\{X \leq 34.5\} = P\left\{Z \leq \frac{34.5-32}{\sqrt{768/25}}\right\} = P\left\{Z \leq \frac{2.5}{\sqrt{768/25}}\right\} = P\{Z \leq 0.451\}$$

$$= 0.6736$$

69.

Sea $\mu = np = 100\left(\frac{6}{100}\right) = 6$ & $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{141/25}$ entonces

$$P\{X \leq 10.5\} = P\left\{Z \leq \frac{10.5-6}{\sqrt{141/25}}\right\} = P\{Z \leq 1.894\} \approx 0.9706$$

por tanto la probabilidad de fallar la garantía

$$P\{X \geq 10.5\} = 1 - P\{X \leq 10.5\} = 1 - 0.9706 = 0.0294$$

70.

Sol.

El número total de palabras es $(1200)(6)(10) = 72000$ palabras en promedio en 10 días por tanto la probabilidad de una mala palabra esta dada por $360/72000 = 0.005$ entonces la desviación estandar

$$\sigma = \sqrt{\frac{(0.005)(0.995)}{1200}} = \sqrt{0.000004145} = 0.002036$$

entonces los limites

$$L_s = (0.005) + 3(0.002036) = 0.011108$$

$$L_i = (0.005) - 3(0.002036) = -0.001108$$

71.

Sol

La suma de los puntos dados es $\sum p_i = 96$ entonces para obtener el promedio de partes defectuosas es $\sum p_i/n = 96/36 = \frac{8}{3}$

entonces la desviación estandar de la proporcion es

$$\sigma = \sqrt{\frac{8/300 \cdot 292/300}{1000}} = \sqrt{\frac{73}{2812500}} \approx 0.00509$$

entonces los limites son

$$L = 0.02667 \pm 3(0.00509)$$

72.

Sol.

Si la confianza es igual a 0.9 entonces $\alpha = 1 - 0.9 = 0.1$ donde $P\{X = x_0\} \approx 0.05$ es 1.65 entonces conocemos que

$$n = \frac{P\{z \leq 0.05\}^2 pq}{E^2}$$

a)

$$n = \frac{(1.65)^2(0.4)(0.6)}{0.03^2} = \frac{0.6534}{0.0009} = 726$$

b)

$$n = \frac{(1.65)^2(0.5)^2}{0.05} \approx 756.25$$

73.

Sol

Sea el promedio de llamadas por minuto $\mu_0 = 10$ entonces $\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{10}$ entonces

$$P\{X > 20\} = P\{Y \geq 20.5\} \quad \text{donde} \quad Z = \frac{Y - \mu}{\sigma} = \frac{20.5 - 10}{\sqrt{10}} = \frac{10.5}{\sqrt{10}} \approx 3.32$$

luego

$$P\{Y \geq 20.5\} = P\{Z \geq z\} = 1 - P\{Z \leq z\} = 1 - 0.99955 = 0.00045$$

74.

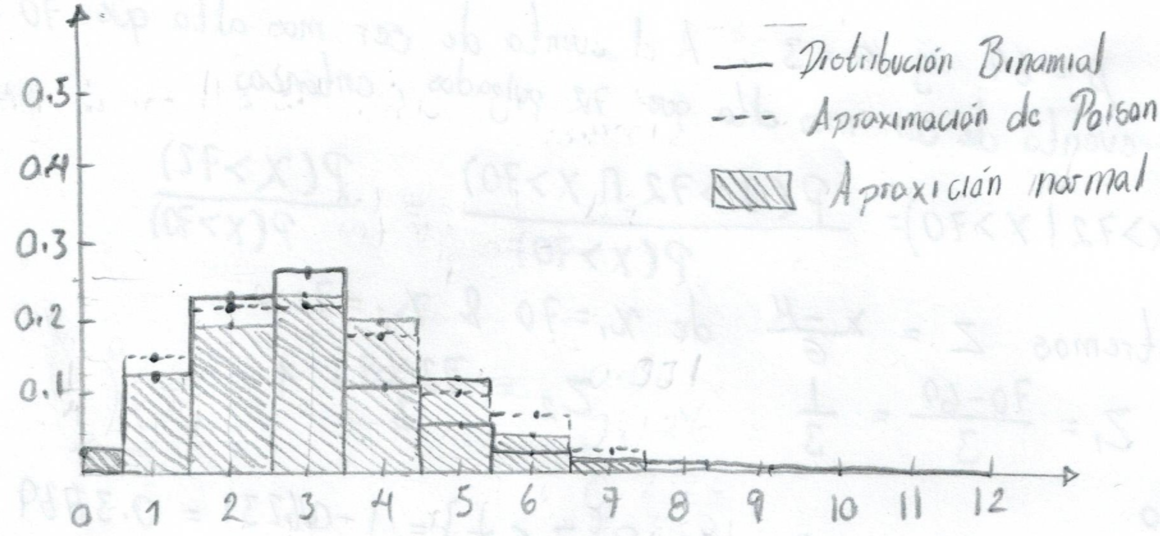
Sol

Sea $\mu = 100$ y $\sigma = \sqrt{100}$

$$P\{X \leq 90.5\} = P\left\{Z \leq \frac{90.5 - 100}{\sqrt{100}}\right\} = P\left\{Z \leq \frac{-9.5}{\sqrt{100}}\right\} = P\{Z \leq -0.95\}$$

$$= 0.1711$$

75.



76.

Sol. Sea $\mu = 0$ & $\sigma = 4$

$$P\{-6 \leq X \leq 6\} = P\left\{\frac{-6-0}{4} \leq Z \leq \frac{6-0}{4}\right\} = \left\{-\frac{3}{2} \leq Z \leq \frac{3}{2}\right\}$$

$$= P\left\{Z \leq \frac{3}{2}\right\} - P\left\{Z \leq -\frac{3}{2}\right\}$$

$$= 0.9332 - 0.0662$$

$$= 0.8664$$

la probabilidad de perdida esta dada por

$$P(\text{perdida}) = 1 - 0.8664 = 0.1336$$

por tanto el número perdido de tiros en 100 intentos es 13.36 tiros

77.

Sol.

Sea $\mu = 69$ y $\sigma = 3$, A el evento de ser mas alta que 70 pulgada y B el evento de ser mas alta que 72 pulgadas, entonces

$$P(X>72 \mid X>70) = \frac{P(X>72 \cap X>70)}{P(X>70)} = \frac{P(X>72)}{P(X>70)}$$

encontremos $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ de $x_1 = 70$ & $x_2 = 72$

$$Z_1 = \frac{70-69}{3} = \frac{1}{3} \quad , \quad Z_2 = \frac{72-69}{3} = 1$$

luego

$$P\{X>70\} = P\{Z>\tfrac{1}{3}\} = 1 - P\{Z \leq \tfrac{1}{3}\} = 1 - 0.6231 = 0.3769$$

$$P\{X>72\} = P\{Z>1\} = 1 - P\{Z \leq 1\} = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

así

$$\frac{P(X>72)}{P(X>70)} = \frac{0.1587}{0.3769} = 0.42106$$

78.

Dem

para una distribución normal el momento K es

$$M_x(K) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^K f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^K \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

trabajamos con la distribución normal estandar entonces $z = x$ ∴

$u = z^{K-1}$

$du = (K-1) z^{K-2} dz$

$dv = ze^{-z^2/2} dz$

$v = -e^{-z^2/2}$

$$M_x(K) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^K}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, d\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^K e^{-z^2/2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\cancel{\left[-z^{K-1} e^{-z^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty}}^{\,0} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} (K-1) z^{K-2}\, dz \right)$$

$$= \frac{(K-1)}{\sqrt{2\pi}} M_x(K-2) \quad \blacksquare$$

79.

sabemos que $\int_0^{t_0} a e^{-at} dt = 0.8$ es decir

$- e^{-at} \Big|_0^{t_0} \Rightarrow - e^{-at_0} + 1 = 1 - e^{-at_0}$

luego entonces

$P\{T > t_0\} = 1 - (1 - e^{-at_0}) = e^{-at_0}$ por tanto

$e^{-at_0} = 0.8 \Rightarrow \ln e^{-at_0} = \ln(0.8) \Rightarrow -a t_0 = \ln(0.8)$

$\Rightarrow t_0 = \frac{\ln(0.8)}{-a}$

Pero si $a = 0.02 \Rightarrow t_0 = \frac{\ln(0.8)}{-0.02} \approx 11$

80.

Sol.

Cada componente tiene $\mu = 2$ donde $\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$ de fallos por hora

para encontrar la tasa de fallos del sistema basta $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

entonces $\lambda = 0.5 + 0.5 = 1$ así el tiempo esperado para la falla es el reciproco de la talla de fallo $E[T] = 1$.

81.

Dem.

Sea $P(X > t_1 + t_2 \mid X > t_1) = P(X > t^2)$ entonces

$$P(X > t_1 + t_2 \mid X > t_1) = \frac{P(X > t_1 + t_2 \cap X > t_1)}{P(X > t_1)} = \frac{P(X > t_1 + t_2)}{P(X > t_1)} \quad t_1 \subseteq t_1 + t_2$$

por definición

$$P\{X > x\} = \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = - e^{-\lambda t} \Big|_x^{\infty} = e^{-\lambda x}$$ entonces

$$P(X > t_1 + t_2 \mid X > t_1) = \frac{e^{-\lambda(t_1 + t_2)}}{e^{-\lambda t_1}} = e^{-\lambda t_2} = P\{X > t_2\}$$