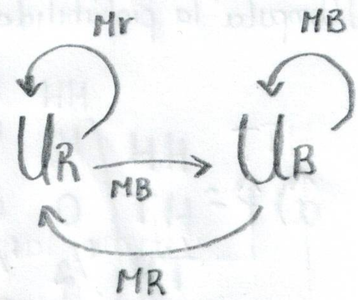
Cadenas de Markov

1. Que valores de x, y y z tomarían estas matrices de probabilidad de transición

$$a)\ \begin{matrix} .5 & .1 & x \\ y & .2 & .4 \\ .3 & z & .1 \end{matrix} \qquad b)\ \begin{matrix} x & .1 & .7 \\ .2 & .3 & y \\ .6 & z & .2 \end{matrix}$$

$$a)\ \begin{matrix} 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{matrix} \qquad b)\ \begin{matrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{matrix}$$

2. Una urna roja contiene dos canicas rojas y dos canicas azules una urna azul contiene una canica roja y cuatro azules. Una canica es seleccionada de una urna la canica se regresa a la urna de la cual fue tomada. Y la siguiente canica es tomada de la urna cuyo color fue tomado. a) Escribe la probabilidad de transición para esta elección, b) Suponga que la primer canica es tomada de la urna roja ¿cuál es la probabilidad de que la tercera venga de la urna azul?



$P_R = \frac{2}{5}$ $\quad P_B = \frac{3}{5}$ $\quad P_R = \frac{1}{5}$ $\quad P_B = \frac{4}{5}$

a)

$$\begin{array}{c|cc} & R & B \\ R & 2/5 & 3/5 \\ B & 1/5 & 4/5 \end{array} \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

b) $V_0 = (1 \ \ 0) \Longrightarrow V_1 = V_0 P = (1 \ \ 0) P = (2/5 \ \ 3/5)$

$V_2 = V_1 P = (2/5 \ \ 3/5)\ P = (7/25 \ \ 18/25)$

$P_B^2 = 18/25$

3. En la Universidad de Lienroc, el 63% de los de 1er año quienes cambiarón de pre-medicina especialización en artes liberales, mientras que el 18% de especialización en artes liberales cambiarón a médicina. Si la entrada de alumnos de nuevo ingreso es del 60% a pre-médicina y 40% artes ¿Cuál es la fracción graduada de pre-médicina?

	PR	Art
PR	0.37	0.63
Art	0.18	0.82

$$P=\begin{pmatrix} 0.37 & 0.63 \\ 0.18 & 0.82 \end{pmatrix}$$

$$V_0=(0.6 \quad 0.4)$$

$$V_0P=(0.6 \quad 0.4)\begin{pmatrix} 0.37 & 0.63 \\ 0.18 & 0.82 \end{pmatrix}=(0.294 \quad 0.706)$$

29.4% se graduan como pre-médicina

4. Una moneda es lanzada repetidamente dado que X_n es el resultado de lanzar dos monedas en un tiempo n, por ejemplo, el CS para indicar que el ultimo lanzamiento fue S y el anterior C.
a) Computa la probabilidad de transición de cambio, b) Encuentra p^2

$$a)\ P=\begin{array}{c} \\ HH \\ HT \\ TH \\ TT \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} HH & HT & TH & TT \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$b)\ P^2=P\cdot P=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

5. Un taxista se mueve entre el aeropuerto A y dos hoteles B y C de acuerdo a las siguientes reglas. Si el esta en el aeropuerto el debe ir alguno de los dos hoteles cercanos con la misma probabilidad, si el esta en el hotel debe ir al aeropuerto con una probabilidad de 3/4 Pero si va a otro hotel tiene una probabilidad de 1/4 a) Encuentra la matriz de transcisión, b) Suponga que el conductor empieza en el tiempo cero en el aeropuerto Encuentre la probabilidad para los tres posibles destinos en el tiempo dos, la probabilidad de que el este en el hotel B en el tiempo 3.

a)

$$P = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ A & 0 & 1/2 & 1/2 \\ B & 3/4 & 0 & 1/4 \\ C & 3/4 & 1/4 & 0 \end{array}$$

b) $\pi^{(0)} = (1\ 0\ 0)$

$\pi^{(2)} = ?$

$\pi^{(2)} = \pi^{(1)} P = \pi^{(0)} P P = \pi^{(0)} P^2 = (3/4\ \ 1/8\ \ 1/8)$

$\pi^{(3)} = \pi^{(0)} P^3 = (0.1875\ \ 0.40625\ \ 0.40625)$

$P^3_{AB} = 0.40625$

6. Con $N=4$, si es $1 \leq i \leq 3$, $p(i, i+1) = 0.4$, y $p(i, i-1) = 0.6$, pero los puntos terminales y estados de absorsión es decir $p(0,0) = 1$ y $P(4,4) = 1$ se encuentra $p^3(1,4)$ y $p^3(1,0)$

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

6.

$\pi^{(0)} = (0\ 1\ 0\ 0\ 0)$

$\pi^{(3)} = \pi^{(0)} P^{(3)} = (0.744\ \ 0\ \ 0.192\ \ 0\ \ 0.064)$

$P^3_{14} = 0.064$

$P^3_{10} = 0.744$

7. Un restaurante al aire libre cierra cuando llueve, de pasar los años se encuentra cierto patrón que de Mayo a Septiembre es cuando llueve un día y la probabilidad de que llueva el siguiente es de 0.4, cuando no llueve y la probabilidad de que llueva el siguiente día es de 0.1 a) Escriba la matriz de transición b) Si llueve un Martes cuál es la probabilidad de que llueva un sábado y y en domingo?

a)

$$P = \begin{array}{c} \\ R \\ NR \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} R & NR \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $\pi^{(0)} = (1\ 0)$

Jueves a Sábado $\longrightarrow$ 2 pasos $\pi^{(0)} P^2 = (0.22\ 0.78) \Longrightarrow P^2_{RR} = 0.22$

Jueves a Domingo $\longrightarrow$ 3 pasos $\pi^{(0)} P^3 = (0.166\ \ 0.834) \Longrightarrow P^3_{RR} = 0.166$

8. Una investigación sugiere que en un periodo de 5 años el 8% de las personas con televisión a cable se desace de este, y el 26% sin este lo contratara compare las predicciones del modelo de cambios de Markov con los siguientes datos sobre los siguientes datos de personas con cable: 56.4% en 1990, 63.4% en 1995 y el 68.0% en el 2000.

$$P = \begin{array}{c} \\ C \\ NC \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & NC \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.92 & 0.08 \\ 0.26 & 0.74 \end{pmatrix} \end{array}$$

1990 $\pi^{(0)} = (0.564\ \ 0.436)$

$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P = (0.6322\ \ \ 0.3677) \Longrightarrow P'_{cc} = 0.6322 \Longrightarrow 63.22\% \Longrightarrow$ Error de 0.18 pp

$\pi^{(2)} = \pi^{(0)} P2 = (0.6772\ \ \ 0.3227) \Longrightarrow P'_{cc} = 0.6772 \Longrightarrow 67.72\% \Longrightarrow$ Error de 0.28 pp

9. Un profesor de sociología postula que en cada década el 8% de las mujeres entra a un trabajo de fuerza y el 20% de las mujeres se salen de este. Compare las predicciones de su modelo con los siguientes datos sobre el porcentaje de las mujeres que trabajan 43.3% en 1970, 51.5% en 1980, 57.5% en 1990 y el 59.8% en el 2000.

$$P = \begin{array}{c|cc} & E & L \\ \hline E & 0.8 & 0.2 \\ L & 0.08 & 0.92 \end{array}$$

$1970: \pi^{(0)} = (0.433 \quad 0.567)$

$1980: \pi^{(1)} = \pi^{(0)} P = (0.39176 \quad 0.60824) \Rightarrow P'_{EE} = 0.3917 \longrightarrow 39.17\%$

dif de -0.12 pp

$1990: \pi^{(2)} = \pi^{(0)} P^2 = (0.3606 \quad 0.6379) \Rightarrow P'_{EE} = 0.362 \longrightarrow 36.2\%$

dif de -0.21 pp

$2000: \pi^{(3)} = \pi^{(0)} P^3 = (0.3406 \quad 0.6593) \Rightarrow P'_{EE} = 0.3406 \longrightarrow 34.06\%$

dif de -0.28 pp

10. La siguiente probabilidad de transción describen la migración de padres y pajáros entre tres habitats

	1	2	3
1	.75	.15	.10
2	.07	.85	.08
3	.05	.15	.80

Si hay 100 pajaros en cada habitat y al inicio del año ¿Cuántos esperaremos que hayan al final del año y al final del segundo año?

$\pi^{(0)} = (1000 \quad 1000 \quad 1000)$

$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P = (870, 1150, 98)$

$\pi^{(2)} = \pi^{(0)} P2 = (782, 1255, 963)$

11. Una compañía de renta de autos tiene oficinas en los aeropuertos Kennedy y La Guardia. Suponga que un carro rentado en alguna de las oficinas, debe ser devuelto a alguno de los dos aeropuertos si el carro tiene una probabilidad del 0.8 de ser devuelto a La Guardia, y de 0.7 de ser devuelto a la Kennedy. Suponga que empezamos con 1/2 de los autos en cada aeropuerto y que cada semana los autos son rentados una vez a) ¿Cuál es la fracción de carros al final de la primera semana?, b) Al final de la segunda, c) a lo largo del tiempo.

$$P = \begin{array}{c} \\ L \\ K \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} L & K \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\pi^{(0)} = (0.5 \quad 0.5)$

a) $\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P = (0.55 \quad 0.45) \rightarrow \% L = 55\%$

b) $\pi^{(2)} = \pi^{(0)} P^2 = (0.575 \quad 0.425) \longrightarrow \% L = 57.5\%$

c) $\pi^{(n)} = (L \quad K)$

$\pi^{(n)} P = \pi^{(n)}$

$(L \; K) P = (L \; K) \Rightarrow 0.8L + 0.3K = L \Rightarrow -0.2L + 0.3K = 0$

$0.2L + 0.7K = K \Rightarrow 0.2 - 0.3K = 0$

Además: $L + K = 0$

$\Rightarrow K = 0.6$, $L = 0.4$

$\therefore$

$L = 60\%$

12. 1990 un censo mostro 76% de los hogares en Colombia fuerón propiedades mientras que el resto eran rentadas durante la siguiente decáda el 6% de las propiedades llegarón a ser rentadas y el 12% de los rentados llego a ser propiedad. a) ¿Cuál fue el porcentaje de propiedades en el 2000 y 2010?, b) si estas tendencias siguen cual va a ser la fracción de propiedades a lo largo del tiempo

$$P = \begin{array}{c|cc} & H & R \\ \hline H & 0.94 & 0.06 \\ R & 0.12 & 0.88 \end{array}$$

$$\pi^{(0)} = (0.36 \quad 0.64)$$

a) $2000 \Longrightarrow \pi^{(1)} = \pi^{(0)} P = (0.4152 \quad 0.5848) \Longrightarrow \% H = 41.52\%$

$2010 \Longrightarrow \pi^{(2)} = \pi^{(0)} P^2 = (0.460464 \quad 0.539536) \Longrightarrow \% H = 46.0464\%$

b) Sea $\pi^n = (H \quad R)$

$$\pi^n P = \pi^n \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 0.94H + 0.12R = H \\ 0.06H + 0.88R = R \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} -0.06H + 0.12R = 0 \\ 0.06H - 0.12R = 0 \\ \text{Además: } H + R = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} H = 2/3 \\ R = 1/3 \\ \% H = 66.7 \end{array}$$

13. La mayoria de los vagones son propiedad de compañias ferroviarias cuando un vagón abandona las vías de su compañia de origen pasa a formar parte del parque Nacional de Vagones, puede ser utilizado por otras companias ferrovuarias. Un ferrocaril en particular descubrio que cada mes el 15% de los vagones que tenia en sus vías de origen salian para incoporarse y el 40% que tenia el parque Nacional volvian a sus vías de origen. Una empresa comienza el 1 de Enero con todo sus vagones en vías Nacionales ¿Que fracción estara ahí el 1 de Marzo y al final del año?, a largo plazo que fracción de vagones de una empresa estaran en sus pistas de origen.

$$P = \begin{array}{c|cc} & H & N \\ \hline H & 0.85 & 0.15 \\ N & 0.4 & 0.6 \end{array}$$

$$\pi^{(0)} = (1 \quad 0)$$

Marzo $\Longrightarrow \pi^{(2)} = \pi^{(0)} P^2 = (0.7825 \quad 0.2175) \Longrightarrow \% H = 78.25\%$

13.

Fin del año $\Rightarrow \pi^{(11)} = \pi^{(0)} P^{11} = (0.7273 \quad 0.2726) \Rightarrow \% H = 72.73\%$

Sea $\pi^n = (H \quad N)$

Entonces
$$\left.\begin{array}{l} 0.85H + 0.4N = H \\ 0.15H + 0.6N = N \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -0.15H + 0.4N = 0 \\ 0.15H - 0.4N = 0 \\ \text{Además}: H + N = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} H = 8/11 \\ N = 3/11 \end{array} \Rightarrow \% H = 72.72$$

14. Acaba de entrar en funcionamiento un sistema de transporte rápido en el primer mes de funcionamiento se a comprobado que el 25% de los viajeros utilizan el sistema mientras que el 65% se desplaza en automóvil. Supongamos que cada mes el 10% de los usuarios de transporte público vuelva a utilizar auto mientras que el 30% de usuarios de automóvil se pasan al sistema de transporte. a) Calcula probabilidad de transcisión en 3 etapas P^3 b) Cuáles seran las fracciones que utilizaran el transporte público en el 4to mes, c) A largo plazo?

$\pi^0 = (0.25 \quad 0.75)$

$$P = \begin{array}{c|cc} & S & A \\ \hline S & 0.9 & 0.1 \\ A & 0.3 & 0.7 \end{array}$$

a) $P^3 = P \cdot P \cdot P = \begin{pmatrix} 0.804 & 0.196 \\ 0.588 & 0.412 \end{pmatrix}$

b) $\pi^5 = \pi^0 P^3 = (0.642 \quad 0.358) \Rightarrow \% S = 64.2\%$

c) Sea $\pi^n = (S \quad A)$

Entonces
$$\left.\begin{array}{l} 0.9S + 0.3A = S \\ 0.1S + 0.7A = A \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -0.1S + 0.3A = 0 \\ 0.1S - 0.3A = 0 \\ \text{Además}: S + A = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S = 3/4 \\ A = 1/4 \end{array} \Rightarrow \% S = 75\%$$

15. Un estudio de salud regional indica que de un año a otro 75% de los famadores 25% continuarán fumando. 8% de los que no fuman volverán a hacerlo y el 92% lo dejarán si el 70% de la población fue de famadores en 1995. ¿Cuál será la fracción de famadores en 1998? y en 2005 y a lo largo del tiempo

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} S & NS \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ NS \end{array} & \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.08 & 0.92 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\pi^0 = (0.7 \ 0.3)$

$1998 \Rightarrow \pi^3 = \pi^0 P^3 = (0.38 \quad 0.62) \Longrightarrow \%S = 38\%$

$2005 \Longrightarrow \pi^{10} = \pi^0 P^{10} = (0.25 \quad 0.75) \Longrightarrow \%S = 25\%$

A largo plazo, sea $\pi = (S \quad NS)$

Entonces: $\left.\begin{array}{l} 0.75S + 0.08NS = S \\ 0.25S + 0.92NS = NS \end{array}\right\} \begin{array}{l} -0.25S + 0.08NS = 0 \\ 0.25S - 0.08NS = 0 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} 0.25S - 0.08NS = 0 \\ \text{Además}: S + NS = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} S = 8/33 \\ NS = 25/33 \end{array} \Longrightarrow \%S = 24.24\%$

16. La ciudad mítica tiene un programa de bicicletas gratis para el pueblo. Las bicicletas se pueden recoger en la biblioteca (L), en la cafetería (E), el supermecado (G). El director del programa a determinado que si una bicicleta se recoge en la biblioteca acaban en la cafetería con una probabilidad de 0.2 y en el supermecado con una probabilidad de 0.3, una bicicleta del supermercado a la biblioteca tiene una probabilidad de 0.4 y en la biblioteca con una probabilidad de 0.1. Una bicicleta iría a la biblioteca o a la cafetería con una probabilidad de 0.25. El Domingo hay el mismo número de bicicletas en cada lugar a) ¿Qué fracción de las bicicletas están en el mismo lugar el Martes?, b) El Domingo siguiente C) A lo largo de plaza que frecuencia se encuentra en los tres lugares?.

16.

$$P = \begin{array}{c} \\ L \\ C \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & C & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\cdot\ \pi^0 = (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3)$

a) Martes $\Rightarrow \pi^2 = \pi P^2 = (0.3933 \quad 0.31 \quad 0.2967)$

b) Sig. Domingo $\Rightarrow \pi^7 = \pi P^7 = (0.394 \quad 0.307 \quad 0.2982)$

c) A largo plazo, sea $\pi^n = (L \quad C \quad G)$

Entonces: $\pi^n P = \pi^n$

$$\left.\begin{array}{l} 0.5L + 0.4C + 0.25G = L \\ 0.2L + 0.5C + 0.25G = C \\ 0.3L + 0.1C + 0.56G = G \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -0.5L + 0.4C + 0.25G = 0 \\ 0.2L - 0.5C + 0.25G = 0 \\ 0.3L + 0.1C - 0.5G = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} L = 0.3947 \\ C = 0.307 \\ G = 0.298 \end{array}$$

Además: $L + C + G = 1$