Лабораторная работа № 3
Линейное программирование

Цель работы: решение прямой и двойственной задач линейного программирования и анализ чувствительности математической модели ЛП.

1. Краткие теоретические сведения

Задачи линейного программирования (ЛП) являются разновидностью задач математического программирования. В задачах ЛП допустимая область задается в виде системы неравенств и/или равенств, причем все функции в этих ограничениях, а также целевая функция линейны.

Различают несколько форм представления задач ЛП. Наиболее часто используются стандартная и каноническая формы описания задач ЛП. Рассмотрим задачу ЛП на максимум, стандартная форма которой имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m}, \quad x_1,\dots,x_n \ge 0 \quad \text{или в векторной форме:} \quad c^T x \to \max, \; Ax \le b, \; x \ge 0. \tag{3.1}$$

Здесь $a_{ij},\ b_i,\ c_j,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ - известные величины, $A=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ - прямоугольная матрица, $b=(b_1 \dots b_m)^T,\ c=(c_1 \dots c_n)^T$ - векторы.

Канонический вид подобной задачи ЛП:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i=\overline{1,m}, \quad x_1,\dots,x_n \ge 0,\ m<n, \quad \text{или в векторной форме:} \quad c^T x \to \max, \; Ax = b, \; x \ge 0,\ m<n. \tag{3.2}$$

Переход от одной формы представления к другой осуществляется по известным правилам [1,2]. При решении задачи ЛП симплекс–методом, она представляется в канонической форме.

Каждой задаче ЛП на максимум (3.1), (3,2) соответствует задача ЛП на минимум и наоборот. Одну из них (первую или вторую) можно назвать *прямой* задачей, а другую – *двойственной* к ней. Методика построения двойственной задачи описана в [2]. Если прямой считать задачу вида (3.1), то ей соответствует двойственная:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \qquad\qquad\qquad\qquad b^T y \to \min,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j=\overline{1,n}, \quad \text{или в векторной форме:} \quad A^T y \leq c, \qquad (3.3)$$
$$y_1,\ldots,y_m \geq 0, \qquad\qquad\qquad\qquad y \geq 0_m.$$

Прямая и двойственная задачи связаны следующими теоремами двойственности [2].

Теорема о существовании решений. Задача линейного программирования вида (3.1) или (3.3) имеет решение тогда и только тогда, когда допустимые множества прямой и двойственной задачи не пусты, т.е.

$$X = \{x \in R^n \leq b,\, x \geq 0_n\} \neq \varnothing, \quad Y = \{y \in R^m Ty \geq c,\, y \geq 0_m\} \neq \varnothing.$$

Теорема о совпадении оптимальных значений. Допустимые векторы x^* и y^* являются решениями задач (3.1) и (3.3) тогда и только тогда, когда значения целевых функций обеих задач на этих векторах совпадают: $(cx^*) = (by^*)$.

Теорема о дополняющей нежесткости. Допустимые векторы x^* и y^* являются решениями задач (3.1) и (3.3) тогда и только тогда, когда они удовлетворяют следующим условиям:

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\right) x_j^* = 0, \quad j = \overline{1,n},$$
$$\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) y_i^* = 0, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (3.4)$$

Теорему о дополняющей нежесткости можно сформулировать следующим образом.

- *Если в оптимальной точке прямой задачи некоторое ограничение не активно (неравенство выполняется строго), то в оптимальной точке двойственной задачи соответствующая переменная равна нулю.*
- *Если в прямой задаче некоторая переменная не равна нулю (строго положительна), то в оптимальной точке двойственной задачи соответствующее ограничение активно (обращается в равенство).*

2. Содержание работы

Для серийного изготовления детали механический цех может использовать пять различных технологий ее обработки на токарном, фрезерном, строгальном и шлифовальном станках. В табл. 3.1 указано время (в минутах) обработки детали на каждом станке в зависимости от технологического способа и общий ресурс рабочего времени станков за одну смену.

Таблица 3.1

Станки		Токарный					Фрезерный					Строгальный					Шлифовальный				
		В А Р И А Н Т Ы																			
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Технологии	1	2	3	1	0	1	1	1	0	2	3	1	3	4	1	2	3	1	2	3	2
	2	1	0	2	2	1	0	2	1	2	0	2	0	1	1	0	4	4	4	2	5
	3	3	1	0	1	2	2	1	3	0	1	0	4	2	1	1	2	0	2	4	3
	4	0	2	5	3	2	2	3	1	1	2	3	2	0	1	2	1	2	1	0	1
	5	1	1	2	1	0	1	0	2	3	1	2	1	3	1	5	1	2	1	1	1
Ресурс времени станков		4100		5000			2000			2500		5800		4000			10800		8000		

Станки		Токарный					Фрезерный					Строгальный					Шлифовальный				
		В А Р И А Н Т Ы																			
		6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10
Технологии	1	1	3	1	2	1	1	1	0	2	3	1	3	4	1	2	4	1	2	3	2
	2	1	0	2	2	1	0	2	1	2	0	0	0	1	1	0	3	4	4	2	5
	3	3	2	5	0	2	2	1	3	0	1	2	4	2	1	1	2	0	2	4	3
	4	1	2	0	3	2	2	3	1	1	2	3	2	0	1	2	0	2	1	0	1
	5	0	1	2	1	0	1	0	2	3	1	2	1	3	1	5	1	2	1	1	1
Ресурс времени станков		4100		5000			2000			2500		5800		4000			10800		8000		

Требуется указать, как надо использовать имеющиеся технологии с тем, чтобы добиться максимального выпуска продукции. Затем следует осуществить анализ чувствительности модели ЛП.

3. Порядок выполнения работы

3.1. Составить математическую модель прямой задачи ЛП в соответствии с выбранным из таблицы вариантом, обозначая через $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,5}$, количество деталей, выпускаемых цехом по j технологии; b_i - ресурс времени i-станка, $i \in$ {токарный, фрезерный, строгальный, шлифовальный}; a_{ij} - временные затраты i-го станка на обработку детали по j-й технологии.

Найти оптимальное решение x^* этой задачи, максимальное значение целевой функции $f^* = f(x^*)$ и число итераций вычислительной процедуры, используя среду *Excel*.

3.1.1. Составить Excel-таблицу в соответствии с моделью задачи ЛП (рис.3.1), зарезервировав ячейки **B3:F3** (изменяемые ячейки) под результат решения задачи $(x1, x2, x3, x4, x5)$, ячейки **F6:F9** под значения правых частей ограничений и ячейку **G4** под оптимальное значение целевой функции (ЦФ).

3.1.2. Ввести целевую функцию, осуществив следующие операции.

- Курсор установить в ячейку **G4**.
- Щелкнуть мышью по кнопке f_x, расположенной на панели инструментов. На экране появляется диалоговое окно **Мастер функций шаг 1 из 2**.
- Выбрать функцию **СУММПРОИЗВ.** В строку **Массив 1** ввести **$B$3:$F$3**, в строку **Массив 2** ввести **B4:F4**. Массив 1 будет использоваться при вводе ограничений, поэтому на этот массив надо сделать абсолютную ссылку, поставив перед адресами ячеек знак **$**.

Адреса ячеек во все диалоговые окна удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по ячейкам, чьи адреса следует ввести.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Выпуск продукции по технологиям**						
2		x1	x2	x3	x4	x5	Целевая	
3							функция	
4	Коэффициенты ЦФ	1	1	1	1	1		
5	**Станки**							Ограничения
6	Токарный	2	1	3	0	1		4100
7	Фрезерный	1	0	2	2	1		2000
8	Строгальный	1	2	0	3	2		5800
9	Шлифовальный	3	2	2	1	1		10800

Рис. 3.1

3.1.3. Ввести ограничения задачи ЛП.

- Курсор установить в ячейку G4 и скопировать формулу из этой ячейки в буфер.
- Последовательно устанавливая курсор в ячейки F6:F9 и нажимая кнопку **Вставить**, записать в эти ячейки выражения для ограничений.

3.1.4. В строке **Меню** выбрать команду **Сервис\Поиск решения**. Появляется диалоговое окно **Поиск решения** (рис. 3.2).

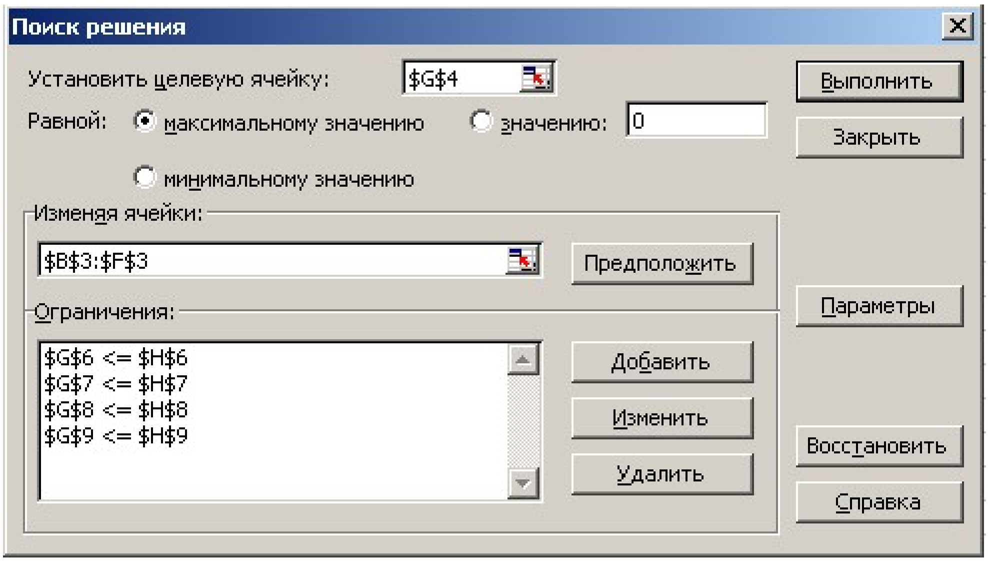

Рис. 3.2

3.1.5. В строку **Установить целевую ячейку** ввести адрес ячейки **$G$4** и указать, какое значение целевой функции (максимальное или минимальное) требуется найти.

Ввести адреса искомых переменных **$B$3:$F$3** в строку **Изменяя ячейки**.

3.1.6. Ввести в программу ограничения. Для чего щелкнуть мышью по кнопке **Добавить** диалогового окна **Поиск решения**. Появляется другое диалоговое окно **Добавление ограничения** (рис. 3.3).

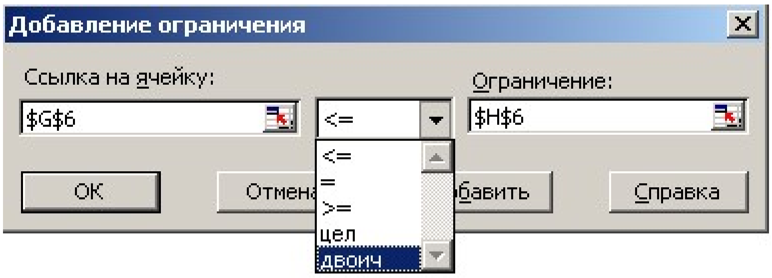

Рис. 3.3

В строке **Ссылка на ячейку** ввести адрес ячейки первого ограничения **$G$6**, затем знак ограничения.

В строке **Ограничение** ввести адрес ячейки **$H$6**, где записана величина ресурса токарного станка.

Щелкнуть мышью по кнопке **Добавить**. Появляется вновь диалоговое окно **Добавление ограничения**. Ввести остальные ограничения задачи, по вышеописанному алгоритму.

После введения последнего ограничения щелкнуть по кнопке **ОК**. На экране появится диалоговое окно **Поиск решения** с введенными условиями.

3.1.7. Задать параметры для решения задачи ЛП.

- В диалоговом окне **Поиск решения** (рис. 3.2) щелкнуть левой клавишей мыши по кнопке **Параметры.** На экране появляется диалоговое окно **Параметры поиска решения**.
- Установите флажки в строках **Линейная модель** (это обеспечит применение симплекс-метода) и **Неотрицательные значения** этого окна.
- Щелкнуть левой клавишей мыши по кнопке **ОК**. Возврат в диалоговое окно **Поиск решения**.
- Указатель мыши установить на кнопку **Выполнить**. Появляется диалоговое окно **Результаты поиска решения** и исходная таблица с заполненными ячейками **B3:F3**, соответствующими искомым переменным $(x1, x2, x3, x4, x5)$ задачи ЛП и ячейкой **G4** с максимальным значением целевой функции.

3.2. Исследовать чувствительность модели к изменениям ресурсов машинного времени станков, т.е. выяснить – вариация какого ресурса b_i приводит к наибольшему возрастанию целевой функции.

Для этого увеличивая поочередно величину каждого ресурса на 5 – 10 %, находим решения прямой задачи ЛП согласно п.3.1 и значения целевой функции $f(b_i)$. Затем определяется приращение функции $\Delta f_i = f(b_i) - f^*$, вызванное увеличением i-го ресурса. При этом структура решения прямой задачи не должна меняться, т.е. двойственные переменные остаются неизменными.

3.3. Построить математическую модель двойственной задачи ЛП в виде

$$F(p_1, p_2, p_3, p_4) = \sum_{i=1}^{4} b_i p_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij} p_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,5},$$

где $p_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}$, - оценка *i*-го ресурса.

Решить данную задачу с помощью пакета *Excel*, фиксируя в протоколе оптимальное решение и минимальное значение целевой функции. Проверить выполнение теоремы о совпадении оптимальных значений.

3.4. Усложнить задачу, положив, что цех сможет выпускать детали по *k*-й технологии в ограниченном количестве, не более $s = x_k/2$ штук, где k - номер технологического процесса, по которому было выпущено наибольшее количество деталей x_k в п.3.1. Скорректировать математическую модель п.3.1 в соответствии с возникшей ситуацией и решить задачу ЛП.

Сравнить решение с п.3.1.

3.5. Показать, как изменится использование технологий, если при выпуске деталей в количестве, определенном п.3.1, потребовать минимизации машинных затрат.

4. Содержание отчета

4.1. Постановка задачи ЛП.

4.2. Математические модели прямой и двойственной задачи ЛП.

4.3. Протоколы решения задач ЛП в среде *Excel*.

4.4. Анализ чувствительности модели. Связь чувствительности с двойственными переменными.

Литература

1. Исследование операций в экономике/ под ред. проф. Н.Ш.Кремера. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.