Лекция 8.

Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

а) Если m или n – нечетное положительное число, то от нечетной степени отделяют один множитель и вводят новую переменную. Пусть $m = 2k+1$, тогда

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int \cos^n x \sin^{2k} x \sin x dx = \int \cos^n x \sin^{2k} x d(-\cos x) =$$

$$= -\int \cos^n x (\sin^2 x)^k d\cos x = -\int \cos^n x (1-\cos^2 x)^k d\cos x = \left|\cos x = t\right| = -\int t^n (1-t^2)^k dt$$ –

интеграл от рациональной функции.

Пример. Найти $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Решение.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \sin x dx = \left|\sin x dx = -d\cos x\right| = -\int \cos^2 x \sin^2 x d\cos x =$$

$$= -\int \cos^2 x(1-\cos^2 x)d\cos x = \left|t=\cos x\right| = -\int t^2(1-t^2)dt = -\int (t^2 - t^4)dt = -\int t^2 dt + \int t^4 dt =$$

$$-\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Ответ: $-\dfrac{\cos^3 x}{3} + \dfrac{\cos^5 x}{5} + C$.

б) Если m и n –четные положительные числа, то применяются *формулы понижения степени:*

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha); \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).}$$

Пример. Найти $\int \sin^2 \dfrac{x}{4} dx$.

Решение.

$$\int \sin^2\frac{x}{4}dx = \int \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\frac{x}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{2}dx.$$

$$\int \cos\frac{x}{2}dx = 2\int \cos\frac{x}{2}d\frac{x}{2} = \left| t = \frac{x}{2} \right| = 2\int \cos t dt = 2\sin t + C = 2\sin\frac{x}{2} + C.$$

В итоге

$$\int \sin^2\frac{x}{4}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2} + C = \frac{1}{2}x - \sin\frac{x}{2} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}x - \sin\frac{x}{2} + C$

2. Интегралы вида $\int \sin ax \cos bx dx,\ \int \sin ax \sin bx dx,\ \int \cos ax \cos bx dx$ находятся при помощи следующих тригонометрических формул

$$\boxed{\begin{gathered}\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)\\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big).\end{gathered}}$$

Пример. Найти $\int \sin 7x \sin 3x dx$.

Решение.

$$\sin 7x \sin 3x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(7x-3x\right)-\cos\left(7x+3x\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cos 10x\right)$$

$$\int \sin 7x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos 4x-\cos 10x\right)dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x dx - \frac{1}{2}\int \cos 10x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int \cos 4x d4x -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\int \cos 10x d10x = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

Ответ: $\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$.

3. Интегралы вида $\int R\left(\sin x, \cos x\right)dx$,

где R – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, которая называется универсальной тригонометрической подстановкой. При этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример. Найти $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{3+\sin x+\cos x}$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$.

Применим универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\frac{1}{3+\sin x+\cos x} = \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{3+3t^2+2t+1-t^2} = = \frac{1+t^2}{4+2t+2t^2} = \frac{1+t^2}{2\left(t^2+t+2\right)}$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{\left(1+t^2\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{2\left(t^2+t+2\right)} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} =$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot t+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2}=\int\frac{dt}{\left(t^2+t+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\frac{7}{4}}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=$$

$$=\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\left|z=t+\frac{1}{2}\right|=\int\frac{dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2z}{\sqrt{7}}+C==\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)+C\quad=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+C\,.$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+C$.

Замечание. Если у интеграла $\int R(\sin x,\cos x)dx$ подынтегральная функция является четной относительно $\sin x,\cos x$, то делается подстановка $\operatorname{tg}x=t.$

Пример. Найти $\int\frac{dx}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}$.

Решение.

$$\frac{1}{5(-\cos x)^2+9(-\sin x)^2}=\frac{1}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}$$ – четная относительно $\cos x, \sin x$.

$$\int\frac{dx}{5\cos^2 x+9\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(5+9\,\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}=\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(5+9\mathrm{tg}^2 x\right)}==\left|\frac{dx}{\cos^2 x}=d\left(\mathrm{tg}x\right)\right|$$

$$=\int\frac{d\left(\mathrm{tg}x\right)}{5+9\mathrm{tg}^2 x}=\left|\,\mathrm{tg}x=t\,\right|=\int\frac{dt}{5+9t^2}=\frac{1}{3}\int\frac{d3t}{5+(3t)^2}=\left|\,3t=z\,\right|==\frac{1}{3}\int\frac{dz}{5+z^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{z}{\sqrt{5}}+C$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3t}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{3\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3\mathrm{tg}x}{\sqrt{5}}+C.$$

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3\mathrm{tg}x}{\sqrt{5}}+C$.

Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. $\int R\left(x, \sqrt[k]{x}, \sqrt[m]{x}\right)dx$

В этом случае делается подстановка $x = t^n$, где n – наименьшее общее кратное (НОК) k и m.

Пример. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Решение.

НОК (2,3)=6; $x = t^6$; $dx = 6t^5dt$; $\sqrt{x} = t^3$; $\sqrt[3]{x} = t^2$.

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^5dt}{t^2\left(t+1\right)} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int \frac{\left(t^3+1\right)-1}{t+1}dt =$$

$$=6\int\left(\frac{t^3+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=6\int\left(\frac{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt==6\int t^2dt-6\int tdt$$

$$+6\int dt-6\int\frac{dt}{t+1}=6\frac{t^3}{3}-6\frac{t^2}{2}+6t-6\ln|t+1|+C=$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

Ответ: $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$.

2. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

а) Если $A=0$, $\displaystyle\int\frac{Bdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, то выделяется полный квадрат в знаменателе.

Пример. Найти $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

Решение.

$$3-2x-x^2=-\left(x^2+2x-3\right)=-\left(x^2+2\cdot1\cdot x+1-1-3\right)=-\left(\left(x^2+2x+1\right)-4\right)==-\left((x+1)^2-4\right)=-(x+1)^2+4=4-(x+1)^2$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=\left|\,x+1=t\,\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}==\arcsin\frac{t}{2}+C\;=\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$$

Ответ: $\arcsin\dfrac{x+1}{2}+C$.

б) Случай, когда $A\neq 0$ рассмотрим на примере.

Пример. Найти $\displaystyle\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2-6x+8}}dx$.

Решение. Найдем производную подкоренного выражения и выделим ее в числителе:

$$\left(x^2-6x+8\right)'=2x-6;\;(2x-6)dx=\left(x^2-6x+8\right)'dx=d\left(x^2-6x+8\right)$$

$$5x+3=5\left(x+\frac{3}{5}\right)=\frac{5\cdot 2}{2}\left(x+\frac{3}{5}\right)=\frac{5}{2}\left(2x+\frac{6}{5}\right)=\frac{5}{2}\left(2x-6+6+\frac{6}{5}\right)==\frac{5}{2}(2x-6)+\frac{5}{2}\cdot\frac{36}{5}\;=\frac{5}{2}(2x-6)+18$$

$$\int\frac{(5x+3)dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}=\int\frac{\frac{5}{2}(2x-6)+18}{\sqrt{x^2-6x+8}}dx=\frac{5}{2}\int\frac{(2x-6)dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}+18\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$$

Обозначим I_1 – первый интеграл; I_2 – второй интеграл.

$$I_1=\int\frac{(2x-6)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}=\int\frac{d\left(x^2-6x+8\right)}{\sqrt{x^2-6x+8}}=\left|t=x^2-6x+8\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C==2\sqrt{x^2-6x+8}+C$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2\cdot 3x+3^2-3^2+8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-1}}==\int\frac{d\,(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-1}}=\left|t=x-3\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=$$

$$=\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+C=\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2-1}\right|+C=\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+8}\right|+C$$

В итоге

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2-6x+8}}dx=\frac{5}{2}\cdot 2\sqrt{x^2-6x+8}+18\cdot\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+8}\right|+C==5\sqrt{x^2-6x+8}+18\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+8}\right|+C.$$

Ответ: $5\sqrt{x^2-6x+8}+18\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+8}\right|+C$.

3. Тригонометрические подстановки

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ приводятся к интегралам от рациональной функции аргументов $\sin t,\ \cos t$ с помощью тригонометрических подстановок $x = a\sin t$, $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $x = \dfrac{a}{\sin t}$ соответственно.

Пример. Найти $\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

Решение. Применим тригонометрическую подстановку

$x = 2\sin t$, $\sin t = \dfrac{x}{2}$, $t = \arcsin\dfrac{x}{2}$.

Имеем $dx = 2\cos t\,dt$. Следовательно,

$$\int \sqrt{4 - x^2}\,dx = \int \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt = 2\int \sqrt{4\left(1 - \sin^2 t\right)}\cos t\,dt = 2\int 2\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt =$$

$$= 4\int \cos t\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt = 4\int \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2t\right)dt = 2\int \left(1 + \cos 2t\right)dt =$$

$$= 2\left(\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,d2t\right) = 2\int dt + \int \cos 2t\,d2t = 2t + \sin 2t + C = 2t + 2\sin t\cos t + C =$$

$$= 2t + 2\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t} + C = 2\arcsin\frac{x}{2} + 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + C = = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + C.$$

Ответ: $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$