Лекция 16

Частные производные высших порядков

Рассмотрим сначала функцию двух переменных

$$z = f\left(x, y\right),$$

определенную в окрестности U точки $\left(x_0, y_0\right)$. Предположим, что в этой окрестности определены ее частные производные первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x' \ , \ \ \frac{\partial f}{\partial y} = f_y',$$

которые также являются функциями переменных x, y.

Определение. ***Частными производными 2-го порядка*** функции $z = f\left(x, y\right)$ называются частные производные от ее частных производных 1-го порядка:

$$f_{xx}'' = \left(f_x'\right)_x' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \ f_{yy}'' = \left(f_y'\right)_y' = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$f_{xy}'' = \left(f_x'\right)_y' = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \ f_{yx}'' = \left(f_y'\right)_x' = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

На языке пределов, например,

$$f_{xx}''(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_x'(x_0+\Delta x,y_0)-f_x'(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

если предел справа существует и конечен.

Аналогично можно определить частные производные третьего порядка

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}.$$

Вообще, частные производные (n+1)-го порядка определяются как первые частные производные от частных производных n -го порядка.

Теорема. *Если функция* $z=f(x,y)$ *и ее частные производные* f_{xy}'', f_{yx}'' *определены и непрерывны в точке* (x_0,y_0), *то в этой точке* $f_{xy}''(x_0,y_0)=f_{yx}''(x_0,y_0)$

Определение. *Дифференциалом 2-го порядка* $d^2 f$ функции $z=f(x,y)$ называется дифференциал от ее дифференциала 1-го порядка, рассматриваемого как функция переменных x и y при фиксированных значениях дифференциалов dx и dx

$$d^2 f=d(df).$$

Теорема. Пусть *функция* $z = f(x, y)$ *и ее частные производные* f''_{xx} f''_{yy} f''_{yx}, f''_{yx} *определены и непрерывны в* $U(x_0, y_0)$. *Верна формула*

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

◄Доказательство. Дифференциал первого порядка функции двух переменных x и y имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

и зависит от точки (x, y) и дифференциалов dx и dy. Зафиксируем dx и dy. Тогда

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dy\right) dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy\right) dy =$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\cdot dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Для вывода формулы применены свойства дифференциала и предыдущая теорема.►

Пример. Найти d^2z, если $z=e^{xy}$.

◄ Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{xy}\right)=y^2e^{xy},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{xy}\right)=x^2e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{xy}\right)=e^{xy}+xye^{xy}=e^{xy}\left(1+xy\right).$$

$$d^2z=y^2e^{xy}dx^2+2e^{xy}\left(1+xy\right)dxdy+x^2e^{xy}dy^2\ .$$►

Экстремум функции нескольких переменных.

Предположим, что функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$.

Определение. Говорят, что функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет (локальный) ***максимум (минимум)*** в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если существует такая окрестность точки P_0, для всех точек P которой, отличных от точки P_0, выполняется неравенство $f(P_0) > f(P)$ (соответственно, $f(P_0) < f(P)$). Максимум или минимум функции называется ее ***экстремумом***.

Теорема (Необходимое условие экстремума). *Если дифференцируемая функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *достигает экстремума в точке* $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, *то в этой точке частные производные 1-го порядка равны нулю, т.е.* $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{P_0} = 0,\ i = 1, \ldots, n$.

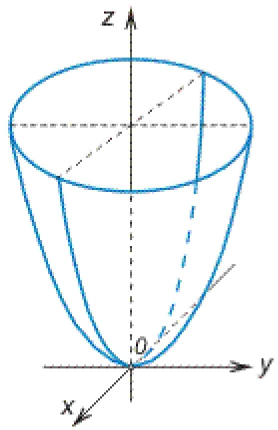
Определение. Точка $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, в которой частные производные 1-го порядка равны нулю, называется ***стационарной точкой.***

Следствие. Точки экстремума функции следует искать среди стационарных точек либо среди точек, где хотя бы одна из частных производных не существует.

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух переменных. Точка $P_0(x_0, y_0)$ является стационарной, если $z_x'(P_0) = 0,\ z_y'(P_0) = 0$.

Пример. $z = x^2 + y^2$.

Находим $z_x{}' = 2x$, $z_y{}' = 2y$. Стационарная точка $P_0(0,0)$. Очевидно, что это точка минимума.



Достаточные условия экстремума для функции двух переменных

Теорема (достаточное условие экстремума). *Пусть функция* $z = f(x, y)$ *непрерывна вместе со своими частными производными до 2-го порядка в некоторой окрестности точки* $P_0(x_0, y_0)$. *Пусть точка* $P_0(x_0, y_0)$ *является стационарной, т.е.*

$$z_x'(P_0) = 0,\ z_y'(P_0) = 0.$$

Введем обозначения:

$$A = z''_{xx}(P_0),\ B = z''_{xy}(P_0), C = z''_{yy}(P_0),\ D = AC - B^2.$$

Тогда:

1) *если* $D > 0$, $A > 0 (C > 0)$, *то* P_0 *- точка минимума;*
2) *если* $D > 0$, $A < 0 (C < 0)$, *то* P_0 *- точка максимума;*
3) *если* $D < 0$, *то точка* P_0 *не является точкой экстремума;*
4) *если* $D = 0$, *то требуется дополнительное исследование.*

Пример. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 9xy + 1$.