Лекция 9. Однородные линейные системы дифференциальных уравнений

Определение. *Однородной линейной системой дифференциальных уравнений* (*о.л.с.д.у.*) *n-го порядка* называется нормальная система вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n \end{cases} \tag{4}$$

Коэффициенты $a_{ij}(t)$ предполагаются далее непрерывными функциями на некотором интервале I.

Если ввести матрицы

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \ldots a_{2n}(t) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \ldots a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$ (*матрица системы*), $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ и $$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix},$$

то равенство

$$\dot{X} = A(t)X$$

есть *матричная запись* системы (4).

Произвольное решение системы (4) можно записать в виде матрицы-столбца (*n-компонентной вектор-функции*)

$$X(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}.$$

Свойства множества решений *о.л.с.д.у.*:

1) *если* $X_1(t)$ *и* $X_2(t)$ *– какие-нибудь два решения о.л.с.д.у., то их сумма* $X_1 + X_2$ *также есть решение этой системы*;

2) *если* $X(t)$ *– какое-нибудь решение о.л.с.д.у. и C – любое число, то их произведение* cx *также есть решение этой системы*.

Следствие. *Если* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *– решения о.л.с.д.у. и* $C_1, C_2, \ldots, C_m$ *– произвольные числа, то вектор-функция* $C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_mX_m$ *также является решением этой системы.*

Система вектор-функций $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_m(t)$ называется *линейно независимой на промежутке I*, если из равенства

$$C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_mX_m = \overline{0} \quad {}_{\forall t \in I}$$

(здесь $\overline{0}$ – нулевой столбец) следует, что $C_1 = C_2 = \ldots = C_m = 0$.

Пусть дана система $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ из *n*-компонентных вектор-функций. Если образовать квадратную матрицу из этих вектор-функций, сделав их ее столбцами, то определитель $W(t)$ этой матрицы называется *вронскианом* данной системы.

Теорема (необходимое и достаточное условие линейной независимости решений о.л.с.д.у.). *Для того чтобы n решений* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *однородной линейной системы дифференциальных уравнений n-го порядка были линейно независимы на интервале I непрерывности коэффициентов этой системы необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан* $W(t)$ *не обращался в нуль на этом интервале.*

Определение. Всякая совокупность из n линейно независимых решений о.л.с.д.у. n-го порядка называется *фундаментальной системой решений* этой системы.

Теорема (о структуре общего решения о.л.с.д.у.). *Если* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *– какая-нибудь фундаментальная система решений о.л.с.д.у. n-го порядка, то ее общее решение имеет вид*:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n, \qquad (2)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *– произвольные постоянные.*

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Рассмотрим некоторые понятия линейной алгебры, которые используются при решении о.л.с.д.у. с постоянными коэффициентами.

Пусть A – числовая квадратная матрица n-го порядка, Y – числовая матрица-столбец размера $n \times 1$, называемая далее (n-*компонентным*) *вектором*, $\overline{0}$ – нулевой вектор.

Определение. Если для некоторого числа λ (действительного или комплексного) существует вектор $Y \neq \overline{0}$ (возможно и с комплексными компонентами) такой, что $AY = \lambda Y$, то λ называется *собственным значением*, а вектор Y – *соответствующим собственным вектором* матрицы A.

Определение. Многочлен n-й степени $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, где E – единичная матрица n-го порядка, а $\det(\cdot)$ означает определитель, называется *характеристическим многочленом*, а уравнение $P(\lambda) = 0$ – *характеристическим уравнением* матрицы A.

Собственные значения матрицы A совпадают с корнями ее характеристического уравнения, а всякий собственный вектор, соответствующий собственному значению λ, является ненулевым решением однородной системы линейных уравнений вида $(A - \lambda E)Y = \overline{0}$ (Y – столбец неизвестных).

Пример. Найти собственные значения и какие-нибудь соответствующие собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

◄ Составим характеристическое уравнение матрицы A:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3=0.$$

Его корни, т.е. собственные значения матрицы A, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$. Пусть $Y_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ и $Y_2=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$ – соответствующие собственные векторы. Для нахождения Y_1 составим однородную систему линейных уравнений

$$(A-\lambda_1 E)Y_1=(A+E)Y_1=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\bar{0},$$

т.е.

$$\begin{cases}2\alpha_1-\alpha_2=0,\\ -4\alpha_1+2\alpha_2=0.\end{cases}$$

Одно из ненулевых решений этой системы $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$. Таким образом, один из собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_1, имеет вид

$$Y_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Аналогично находим Y_2:

$$(A-\lambda_2 E)Y_2=(A-3E)Y_2=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\bar{0}\ \Rightarrow\ \begin{cases}-2\beta_1-\beta_2=0,\\ -4\beta_1-2\beta_2=0,\end{cases}$$

$\beta_1=1$, $\beta_2=-2$, и, следовательно, $Y_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$. Ответ: $\lambda_1=-1$, $Y_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$; $\lambda_2=3$, $Y_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$. ▶

Решение однородных линейных систем с постоянными коэффициентами методами линейной алгебры

В случае, когда все коэффициенты системы (4) постоянны, т.е. матрица $A(t)=A$ не зависит от t, для отыскания фундаментальной системы решений может быть использован аппарат собственных значений и собственных векторов.

Определение. *Характеристическим уравнением* о.л.с.д.у. $\dot{X}=AX$ с постоянными коэффициентами называется уравнение

$$\det(A-\lambda E)=0$$

(т.е. характеристическое уравнение матрицы A этой системы).

Теорема (о характеристическом уравнении). *Вектор-функция* $X(t) = Ye^{\lambda t}$, *где* $Y \neq \overline{0}$ *– числовой n-мерный вектор, тогда и только тогда является решением о.л.с.д.у. с постоянными коэффициентами, когда* λ *есть корень (действительный или комплексный) характеристического уравнения этой системы, т.е. собственное значение ее матрицы, а* Y *– соответствующий собственный вектор.*

Доказательство: Если $X(t) = Ye^{\lambda t}$, то легко видеть, что $\dot{X} = \lambda Ye^{\lambda t}$. Тогда вектор-функция $X(t) = Ye^{\lambda t} \neq \overline{0}$ является решением системы $\dot{X} = AX$, т.е. $\dot{X}(t) \equiv AX(t)$ $\Leftrightarrow$ $\lambda Ye^{\lambda t} \equiv AYe^{\lambda t}$ $\Leftrightarrow$ $\lambda Y = AY$, т.е. λ – собственное значение матрицы A, а Y – соответствующий собственный вектор. ■

Рассмотрим подробно случай $n = 2$, т.е. систему

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

Тогда характеристический многочлен – второй степени:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - S\lambda + \Delta,$$

где $S = a_{11} + a_{22}$, $\Delta = \det A$, и, следовательно, возможны следующие три случая.

I. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2. Тогда, если Y_1 и Y_2 – какие-нибудь соответствующие собственные векторы, вектор-функции $X_1 = Y_1 e^{\lambda_1 t}$ и $X_2 = Y_2 e^{\lambda_2 t}$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, согласно теореме о структуре общего решения оно имеет вид $X = C_1 X_1 + C_2 X_2$.

<u>Пример 2</u>. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$$

◄ Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения и соответствующие собственные векторы $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (см. пример 1). Следовательно, вектор-функции

$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -2e^{3t} \end{pmatrix}$ – фундаментальная система решений, и общее решение системы имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -2e^{3t} \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}. \end{cases} \blacktriangleright$$

II. Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные, т.е. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. В этом случае, найдя для собственного значения λ_1 какой-нибудь соответствующий собственный вектор Y_1 (с комплексными компонентами), в качестве Ф. С. Р. взять действительную и мнимую части комплексного решения $Y_1 e^{\lambda_1 t}$, т.е. $X_1 = \operatorname{Re} Y_1 e^{\lambda_1 t}$ и $X_2 = \operatorname{Im} Y_1 e^{\lambda_1 t}$.

Пример. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$

◀ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Для нахождения какого-нибудь собственного вектора $Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, соответствующего собственному значению $\lambda = 2+i$, имеем систему

$$(A - \lambda E)Y = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \overline{0} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (-1-i)\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ -2\alpha_1 + (1-i)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть $\alpha_1 = 1$. Тогда $\alpha_2 = 1 + i$, т.е. $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$. Итак, согласно теореме о характеристическом уравнении данная система имеет комплексное решение вида

$$X = Ye^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ (\cos t - \sin t) + i(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} e^{2t}$$

(использована формула Эйлера $e^{it} = \cos t + i\sin t$). В качестве фундаментальной системы решений X_1 и X_2 возьмем $\operatorname{Re} X$ и $\operatorname{Im} X$ соответственно:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Итак, общее решение системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t},$$

или

$$\begin{cases} x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{2t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t). \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

III. Характеристическое уравнение имеет двукратный действительный корень λ_1. В этом случае фундаментальную систему решений образуют вектор-функции $X_1 = Ye^{\lambda_1 t}$ и $X_2 = (\tilde{Y} + tY)e^{\lambda_1 t}$, где $Y = (A - \lambda_1 E)\tilde{Y} \neq \overline{0}$

<u>Пример 4</u>. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 4x + 6y, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

◄ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

имеет корень $\lambda = 4$ кратности 2.

Пусть $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда $Y = (A - \lambda E)\tilde{Y} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$X_1 = Ye^{\lambda t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad X_2 = (\tilde{Y} + tY)e^{\lambda t} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} t)e^{4t} = \begin{pmatrix} -t \\ 1+2t \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Общее решение данной системы

$$\begin{cases} x = -e^{4t}(C_1 + C_2 t), \\ y = e^{4t}(2C_1 + C_2 + 2C_2 t). \end{cases}$$

Для нахождения частного решения константы C_1 и C_2 определяем из системы

$$\begin{cases} 0 = -C_1, \\ 1 = 2C_1 + C_2, \end{cases}$$

полученной в результате подстановки начальных значений $t = 0$, $x = 0$ и $y = 1$ в общее решение, откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, и, следовательно, искомое частное решение есть

$$\begin{cases} x = -te^{4t}, \\ y = e^{4t}(1 + 2t). \end{cases} \blacktriangleright$$