3. Интерференция скалярных сферических монохроматических волн

Пространственная структура интерференционных полос зависит от типа налагаемых волн. В случае пространственного наложения двух плоских монохроматических волн интерференционная картина, как правило, представляет собой систему параллельно расположенных и чередующихся светлых и темных полос, которые распределены на некоторой плоскости. Здесь рассматривается интерференционная картина при пространственном наложении двух скалярных сферических монохроматических волн, более сложную пространственную структуру которой удобно описывать с помощью диаграммы направленности.

Пусть на оси x в точках $x_1 = d/2$ и $x_2 = -d/2$ расположены два источника S_1 и S_2 сферических монохроматических скалярных волн (см. рис.3.1).

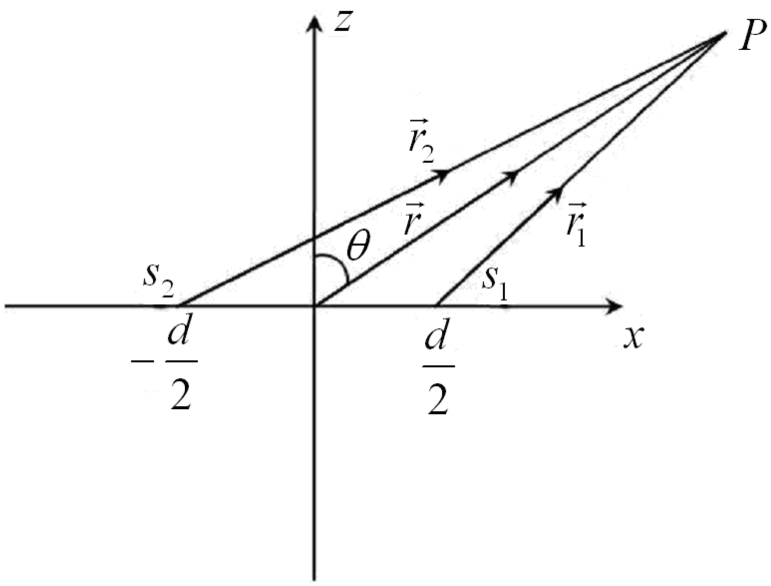


Рис.3.1

В точке наблюдения P полное волновое поле в соответствии с принципом суперпозиции запишется следующим образом:

$$\psi_P = \psi_1 + \psi_2 = \frac{a_1}{r_1}\cos(k_1 r_1 - \omega_1 t + \Phi_{10}) + \frac{a_2}{r_2}\cos(k_2 r_2 - \omega_2 t + \Phi_{20}),$$

где a_1 и a_2 -положительные постоянные, $k_1 = 2\pi/\lambda_1$, $k_2 = 2\pi/\lambda_2$, λ_1 и λ_2 – длины волн, ω_1 и ω_2 – частоты волн, $\omega_1/k_1 = \omega_2/k_2 = \upsilon$ – фазовая скорость волн, Φ_{10} и Φ_{20} – постоянные начальные фазы сферических волн.

Интенсивность полного излучения в точке P

$$J_p \sim \left\langle \psi_P^2 \right\rangle = \frac{a_1^2}{r_1^2}\left\langle \cos^2(k_1 r_1 - \omega_1 t + \Phi_{10}) \right\rangle + \frac{a_2^2}{r_2^2}\left\langle \cos^2(k_2 r_2 - \omega_2 t + \Phi_{20}) \right\rangle +$$

$$+2\frac{a_1 a_2}{r_1 r_2}\left\langle \cos(k_1 r_1 - \omega_1 t + \Phi_{10})\cos(k_2 r_2 - \omega_2 t + \Phi_{20}) \right\rangle = \frac{a_1^2}{2r_1^2} + \frac{a_2^2}{2r_2^2} +$$

$$+\frac{a_1 a_2}{r_1 r_2}\left[\left\langle \cos(k_1 r_1 - k_2 r_2 - (\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{10} - \Phi_{20}) \right\rangle + \left\langle \cos(k_1 r_1 + k_2 r_2 - (\omega_1 + \omega_2)t + \Phi_{10} + \Phi_{20})) \right\rangle\right].$$

Здесь использовано известное тригонометрическое выражение

$$2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta).$$

При усреднении по времени $\Delta t >> T = 2\pi/\omega$, где T – период колебаний, стационарная (не зависящая от времени) интерференционная картина наблюдается при выполнении следующих условий:

$$1)\ \omega_1 = \omega_2 = \omega,\ k_1 = k_2 = k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda};\ 2)\ \Phi_{10} - \Phi_{20} = const.$$

Необходимость такого усреднения связана с тем, что время быстродействия человеческого глаза на много порядков больше периодов колебаний света. Наибольшая контрастность (видность) интерференционных полос получается при одинаковой мощности излучений обоих источников, когда

$$a_1 = a_2 = a.$$

В результате находим, что при выполнении условий наблюдения стационарной картины интерференции с максимальной контрастностью

$$\left\langle \psi_P^2 \right\rangle = \frac{a^2}{2r_1^2} + \frac{a^2}{2r_2^2} + \frac{a^2}{r_1 r_2}\cos\left[k(r_1 - r_2) + \Phi_{10} - \Phi_{20}\right].$$

Наиболее простые формулы получаются в дальней зоне наблюдения, где $r >> d$ и $r^2 >> d^3/\lambda$. В этом случае для амплитуд можно положить $r_1 \approx r_2 \approx r$, а для разности фаз принять $k(r_1 - r_2) \approx -2\pi/\lambda \cdot (d\sin\theta)$.

С учетом всех приближений приходим к следующим выражениям:

$$\left\langle \psi_P^2 \right\rangle = \frac{a^2}{r^2}\left[1 + \cos(kd\sin\theta + \Phi_{20} - \Phi_{10})\right],\ J_P = 2J_0\left[1 + \cos(kd\sin\theta + \Phi_{20} - \Phi_{10})\right].$$

Здесь J_0 - интенсивность излучения отдельного источника на расстоянии r, которая не зависит от угла наблюдения θ. Зависимость $J_0(\theta)$ определяет диаграмму направленности системы из двух источников скалярных сферических монохроматических волн при заданных величинах λ, d и $\Phi_{10} - \Phi_{20}$. Таким образом, интерференция приводит к анизотропии полного излучения системы источников, каждый из которых дает изотропное излучение.

Задача №7

Построить диаграмму направленности излучения системы из двух синфазных источников сферических монохроматических волн одинаковой мощности и частоты, если расстояние между источниками $d = \lambda/2$, где λ - длина волны излучения. Синфазность источников означает, что начальные фазы сферических волн $\Phi_{10} = \Phi_{20}$.

Решение

Задача решается с помощью следующего алгоритма.

1. В общую формулу для интенсивности суммарного излучения двух источников

$$J_P(\theta) = 2J_0\left[1+\cos(kd\sin\theta + \Phi_{20} - \Phi_{10})\right] \quad (1)$$

следует подставить значения параметров согласно условиям задачи и получить выражение для построения конкретной диаграммы направленности

$$J_P\left(\theta\right) = 2J_0\left[1+\cos(\pi\sin\theta)\right]. \quad (2)$$

2. На основе полученного выражения (2) определить направления главных максимумов интенсивности

$$J_{P\max} = 4J_0, \quad \cos(\pi\sin\theta) = 1. \quad (3)$$

Отсюда получаем, что

$$\pi\sin\theta = 2\pi m, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, ... \quad (4)$$

или

$$\sin\theta = 2m; \quad (5)$$

а) $m = 0, \quad \sin\theta = 0, \quad \theta_{1\max} = 0, \quad \theta_{2\max} = \pi;$ (6)

б) при $m = \pm1, \pm2, ...$ уравнение

$$\sin\theta = 2m$$

решений не имеет, поскольку $\left|\sin\theta\right| \le 1$.

3. На основе выражения (2) определить направления главных минимумов интенсивности

$$J_{P\min} = 0, \quad \cos(\pi\sin\theta) = -1. \quad (7)$$

Отсюда получаем, что

$$\pi\sin\theta = \pi + 2\pi m, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, ... \quad (8)$$

или

$$\sin\theta = 1 + 2m; \quad (9)$$

а) $m=0, \quad \sin\theta=1, \quad \theta_{1\min}=\dfrac{\pi}{2}$; (10)

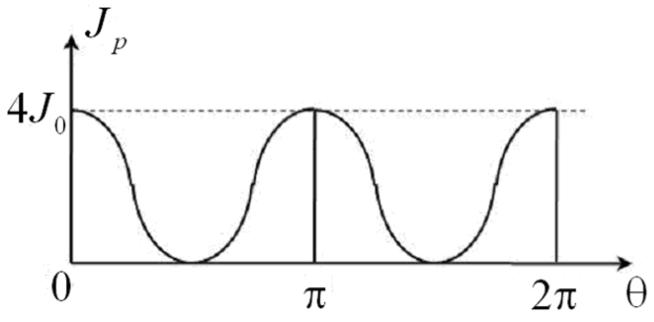
б) $m=-1, \quad \sin\theta=-1, \quad \theta_{1\min}=\dfrac{3\pi}{2}$; (11)

в) при $m=1,\pm2,\pm3,\ldots$ уравнение

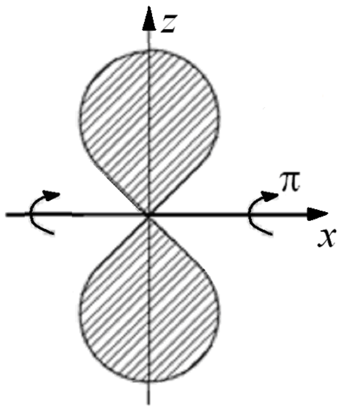
$$\sin\theta=1+2m$$

решений не имеет, поскольку $\left|\sin\theta\right|\le1$.

4. С помощью результатов, полученных в пунктах 2 и 3, построить график зависимости $J_P(\theta)$ и диаграмму направленности (см. рис. 1 а и б). Полная диаграмма направленности в виде замкнутой поверхности получается



а)



б)

Рис.1

с помощью поворота «восьмерки» на рис.1 б вокруг оси x на угол π.

Задача №8

Как изменится диаграмма направленности системы, описанной в задаче №7, если источники сдвинуты по фазе на $\Delta\Phi_0=\Phi_{20}-\Phi_{10}=\pi$?

Решение

1. Согласно общей формуле для интенсивности суммарного излучения двух источников сферических монохроматических волн и условиям задачи легко получить, что

$$J_P(\theta)=2J_0\left[1+\cos\left(\pi\sin\theta+\pi\right)\right]=2J_0\left[1-\cos\left(\pi\sin\theta\right)\right]. \tag{1}$$

2. На основе выражения (1) определяются направления главных максимумов интенсивности:

$$J_{P\max}=4J_0, \quad \cos(\pi\sin\theta)=-1. \tag{2}$$

Отсюда получаем, что

$$\pi \sin\theta = \pi + 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3}$$

или

$$\sin\theta = 1 + 2m; \tag{4}$$

а) $m = 0, \quad \sin\theta = 1, \quad \theta_{1\max} = \dfrac{\pi}{2};$ (5)

б) $m = -1, \quad \sin\theta = -1, \quad \theta_{1\max} = \dfrac{3\pi}{2};$ (6)

в) при $m = 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ уравнение

$$\sin\theta = 1 + 2m$$

решений не имеет, поскольку $\left|\sin\theta\right| \le 1$.

3. С помощью выражения (1) находятся направления главных минимумов интенсивности

$$J_{P\min} = 0, \; \cos(\pi \sin\theta) = 1. \tag{7}$$

Отсюда получаем, что

$$\pi \sin\theta = 2\pi m, \; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{8}$$

или

$$\sin\theta = 2m; \tag{9}$$

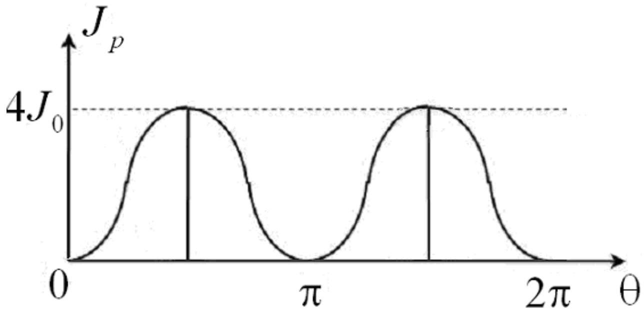
а) $m = 0, \quad \sin\theta = 0, \quad \theta_{1\min} = 0, \quad \theta_{2\min} = \pi$, (10)

б) при $m = 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ уравнение

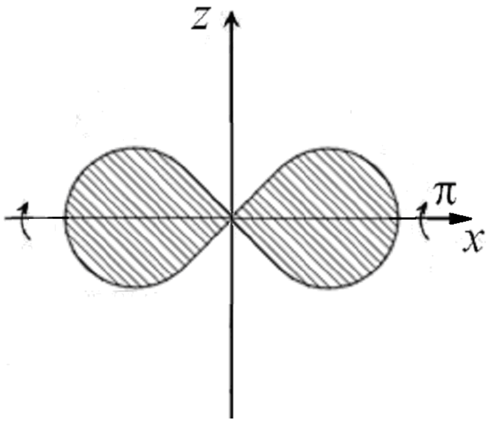
$$\sin\theta = 2m$$

решений не имеет, поскольку $\left|\sin\theta\right| \le 1$.

4. Используя результаты (5), (6) и (8), построим график зависимости $J_P(\theta)$ и диаграмму направленности (рис. 1 а и б). Таким образом, главные максимумы и минимумы смещаются на угол $\Delta\theta = \pi/2$, а диаграмма направленности поворачивается в плоскости *x0z* на угол $\Delta\theta = \pi/2$.



а)



б)

Рис.1

Задача №9

Определить число главных лепестков в диаграмме направленности излучающей системы из двух источников скалярных сферических монохроматических волн одинаковой мощности, если длины волн излучений одинаковые и равны λ, расстояние между источниками d = λ и источники сдвинуты по фазе на

$$\Delta\Phi = \Phi_{20} - \Phi_{10} = \frac{\pi}{2}.$$

Решение

1. Согласно общей формуле для интенсивности суммарного излучения двух источников сферических монохроматических волн и условиям задачи

$$J_P(\theta) = 2J_0\left[1 + \cos(2\pi\sin\theta + \frac{\pi}{2})\right] = 2J_0\left[1 - \sin\left(2\pi\sin\theta\right)\right]. \tag{1}$$

2. С помощью выражения (1) определим направления главных максимумов

$$J_{P\max} = 4J_0, \qquad \sin(2\pi\sin\theta) = -1. \tag{2}$$

Отсюда получаем, что

$$2\pi\sin\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, \;\; m = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{3}$$

или

$$\sin\theta = \frac{3}{4} + m \;; \tag{4}$$

а) $m = 0, \;\; \sin\theta = \dfrac{3}{4}, \;\; \theta_{1\max} = \arcsin\dfrac{3}{4}, \;\; \theta_{2\max} = \pi - \arcsin\dfrac{3}{4};$ (5)

б) $m=-1,\ \ \sin\theta=-\dfrac{1}{4},\ \ \theta_{3\max}=\pi+\arcsin\dfrac{1}{4},\ \ \theta_{4\max}=2\pi-\arcsin\dfrac{1}{4};$ (6)

в) при $m=1,\pm2,\pm3,\ldots$ уравнение

$$\sin\theta=\frac{3}{4}+m$$

не имеет решений, поскольку $|\sin\theta|\le1$.

3. С помощью выражения (1) определим направления главных минимумов

$$J_{P\min}=0\,,\ \ \sin(2\pi\sin\theta)=1\,. \tag{7}$$

Отсюда находим, что

$$2\pi\sin\theta=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots, \tag{8}$$

или

$$\sin\theta=\frac{1}{4}+m\,; \tag{9}$$

а) $m=0,\ \ \sin\theta=\dfrac{1}{4},\ \ \theta_{1\min}=\arcsin\dfrac{1}{4},\ \ \theta_{2\min}=\pi-\arcsin\dfrac{1}{4};$ (10)

б) $m=-1,\ \ \sin\theta=-\dfrac{3}{4},\ \ \theta_{3\min}=\pi+\arcsin\dfrac{3}{4},\ \ \theta_{4\min}=2\pi-\arcsin\dfrac{3}{4};$ (11)

в) при $m=1,\pm2,\pm3,\ldots$ уравнение

$$\sin\theta=\frac{3}{4}+m$$

не имеет решений, поскольку $|\sin\theta|\le1$.

Между главными максимумами $\theta_{1\max}$ и $\theta_{2\max}$ находится промежуточный минимум с интенсивностью $2J_0$, а между главными минимумами $\theta_{3\min}$ и $\theta_{4\min}$ – промежуточный максимум с интенсивностью $2J_0$, которые могут быть найдены путем решения уравнения

$$\frac{dJp(\theta)}{d\theta}=0\ .$$

Данное уравнение позволяет найти все экстремумы интенсивности, включая главные максимумы и минимумы.

Ответ: диаграмма направленности имеет четыре главных лепестка.

Рассмотренные примеры показывают, что с помощью явления интерференции на основе системы источников изотропного излучения можно сформировать диаграмму направленности с требуемой угловой зависимостью. Для этого необходимо распределить эти источники на некоторой плоскости на определенных расстояниях друг от друга и задать необходимые сдвиги фаз источников.