Лекция 6

Основные методы интегрирования.

1) Непосредственное интегрирование

Заключается в нахождении неопределенных интегралов с помощью основных свойств неопределенных интегралов и таблицы интегралов.

Примеры:

1) $\int\left(\frac{4}{x}-x^3+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=4\int\frac{dx}{x}-\int x^3dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-\frac{2}{3}}dx\quad=$

$4\ln|x|-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+3x^{\frac{1}{3}}+C;$

2) $\int\frac{dx}{x^2+5}=\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$

Отметим, что переменную x, входящую в формулы $1\div 12$, можно заменить любой другой.

Например, вместо $\int\cos x\,dx=\sin x+C$ можно написать $\int\cos t\,dt=\sin t+C$.

2) Замена переменной в неопределенном интеграле.

Этот метод основан на теореме:

Теорема. Пусть $F(x)$– первообразная функции $f(x)$ на промежутке X, $x=\varphi(t)-$ дифференцируемая на промежутке T функция, значения которой принадлежат X. Тогда $F\big(\varphi(t)\big)-$ первообразная функции $f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$, $t\in T$. Следовательно, $\int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt=\int f(x)dx$.

◄ Рассмотрим функцию $F(x)$, где $x=\varphi(t)$, т.е. рассмотрим сложную функцию $F\big(\varphi(t)\big)$.

$F'(x)=\Big(F\big(\varphi(t)\big)\Big)'=f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\quad=>\quad F(x)=F\big(\varphi(t)\big)-$ первообразная функции $f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$, значит $\int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt=F\big(\varphi(t)\big)+C=F(x)+C=\int f(x)dx$, что и требовалось доказать. ►

Отсюда, если известен $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C$.

Эта формула позволяет свести нахождение интеграла $\int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt$ к нахождению интеграла $\int f(x)dx$.

Этот прием распадается на два случая:

А) Подведение под знак дифференциала.

Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ удалось представить в виде

$f(x)dx = g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx$, тогда $\int f(x)dx = \int g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx$.

Полагая $\varphi(x) = t$, получим $\int f(x)dx = \int g(t)dt$.

Если первообразная $g(x)$ известна и равна $G(x)$, то

$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G\big(\varphi(x)\big) + C$, т.е.

$\int f(x)dx = \int g\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)dx = \int g\big(\varphi(x)\big)d\varphi(x) = |\varphi(x) = t| = \int g(t)dt = G(t) + C = G\big(\varphi(x)\big) + C$.

Примеры:

3) $\int \sin\frac{x}{5}dx = 5\int \sin\frac{x}{5}\cdot\frac{1}{5}dx = 5\int \sin\frac{x}{5}d\left(\frac{x}{5}\right) = \left|t = \frac{x}{5}\right| = 5\int \sin t\,dt =$
$-5\cos t + C = -5\cos\frac{x}{5} + C$

4) $\int \frac{dx}{3x+1} = |(3x+1)' = 3| = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+1)}{3x+1} = |t = 3x+1| =$
$\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C;$

Вообще говоря, если

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad \text{то}$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

5) $\int \frac{xdx}{1+x^4} = \left| \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x \right| = \int \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)' dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2)' dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{1+x^4} = |t = x^2| =$
$\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ arctg\ t + +C = \frac{1}{2}\ arctg\ x^2 + C;$

6) $\int tg\ x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{(-\cos x)'}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = |\cos x = u| =$
$-\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + +C = -\ln|\cos x| + C\,;$

7) $\int e^{\mathrm{tg}^2 x} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int e^{\mathrm{tg}^2 x}\, \mathrm{tg}\, x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int e^{\mathrm{tg}^2 x}\, \mathrm{tg}\, x d\, \mathrm{tg}\, \mathrm{x} = |\mathrm{tg}\, x = t| =$
$= \int e^{\mathrm{t}^2} t d\, \mathrm{t} = \int \frac{1}{2} e^{\mathrm{t}^2} d\, \mathrm{t}^2 = |y = t^2| = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y + C = \frac{1}{2} e^{t^2} + C = \frac{1}{2} e^{\mathrm{tg}^2 x} + C.$

Б) Метод подстановки В других случаях в подынтегральное выражение $f(x)dx$ непосредственно подставляют вместо x дифференцируемую функцию $x = s(t)$ от новой переменной t и получают выражение

$$f(x)dx = f(s(t))s'(t)dt = g(t)dt.$$

Если $t = \omega(x)$ — обратная функция для $x = s(t)$, то

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\omega(x)) + C.$$

Такой метод замены переменной называют также ***подстановкой***.

Пример. Найти $\int x(2x+1)^{2017}dx$.

◄ Сделаем подстановку $t = 2x+1$. Тогда $x = (t-1)/2$, $dx = \frac{1}{2}dt$,

$$\int x(2x+1)^{2017}dx = \int \frac{t-1}{2}t^{2017}\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\int t^{2018}dt - \frac{1}{4}\int t^{2017}dt = \frac{t^{2019}}{4\cdot 2019} - \frac{t^{2018}}{4\cdot 2018} + C =$$

$$=\frac{(2x+1)^{2019}}{4\cdot 2019}-\frac{(2x+1)^{2018}}{4\cdot 2018}+C. \blacktriangleright$$

Пример. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = \left| \begin{matrix} x = t^2; \ \ \sqrt{x} = t \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2t - 2\,arctgt + C =$
$2\sqrt{x} - -2\,arctg\sqrt{x} + +C$

Пример. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

$$\int \sin(x+1)dx = \int \sin(x+1)d(x+1) = -\cos(x+1) + C,$$

$$\int \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C,$$

$$\int \sin(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+1)d(2x+1) = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$$

3) Метод интегрирования по частям

Теорема. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют непрерывные производные* $u'(x)$ *и* $v'(x)$. *Тогда*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

или, короче,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эти формулы носят название формул интегрирования по частям.

Доказательство. По формуле дифференцирования произведения

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Возьмем неопределенный интеграл от обеих частей этого равенства:

$$\int \left(u(x)v(x)\right)' dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

или

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

откуда

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Формулы интегрирования по частям применяются к интегралам вида $\int x^n e^{\alpha x}dx$, $\int x^n \cos\beta x dx$, $\int x^n \sin\beta x dx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$, $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$, $\int x^n \ln x dx$ и т.д.

Примеры.

1. Найти $\int xe^x dx$.

$$\blacktriangleleft \int xe^x dx = \left| \begin{array}{c} u = x, \\ du = dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C. \blacktriangleright$$

2. Найти $\int x\sin x dx$.

$$\blacktriangleleft \int x\sin x dx = \left| \begin{array}{c} u = x, \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C. \blacktriangleright$$

3. Найти $\int \operatorname{arctg} x dx$.

$$◄ \int \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{c} u = \operatorname{arctg} x, \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right| = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C$$

Действительно,

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + C. ►$$

Замечание.

Вообще интегралы вида $\int x^k e^{ax} dx$, $\int x^k \cos ax\, dx$, $\int x^k \sin axdx$, $k \in N$, $a \in \mathbb{R}$ вычисляются последовательным применением метода интегрирования по частям k раз, причем за $u = x^k$.

4. $\int x \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x; \ du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx; \ \ v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x -$
$\frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I, то $f(x)$ имеет первообразную на промежутке I.

Замечание. Если производная любой элементарной функции снова является элементарной функцией, то первообразная элементарной функции не обязательно будет элементарной функцией. Например, неопределенные интегралы

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}$$

и другие не выражаются через элементарные функции. Операция взятия неопределенного интеграла приводит к появлению новых функций, не являющихся элементарными.