Лекция 5. **Однородные линейные дифференциальные уравнения**

Исследуем вопрос о структуре общего решения однородного линейного дифференциального уравнения, общий вид которого

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0}. \qquad (1)$$

<u>Определение</u>. Всякая система из n линейно независимых решений о.л.д.у. n-го порядка называется ***фундаментальной системой решений*** **(Ф.С.Р.)** этого уравнения.

<u>Замечание</u>. Легко видеть, что фундаментальных систем решений бесконечно много, поскольку вместо нулей и единиц в качестве начальных значений для решений $y_1, y_2, \cdots, y_n$ можно назначать любые числа, лишь бы определитель из этих чисел был отличен от нуля.

<u>**Теорема**</u> (о структуре общего решения о.л.д.у.). *Если* $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *– какая-нибудь фундаментальная система решений о.л.д.у.* n*-го порядка, то его общее решение имеет вид*:

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n}, \qquad (2)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *– произвольные постоянные.*

Доказательство: 1) Согласно следствию из ***свойств множества решений о.л.д.у.*** функция (2) является решением уравнения (1) при любых $C_1, C_2, \dots, C_n$.

2) Убедимся, что по формуле (2) путем выбора значений произвольных постоянных можно получить любое частное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $x_0 \in I$, а числа y_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$ – произвольны. Потребовав выполнение начальных условий для решения (2), получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0', \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

относительно неизвестных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Определитель этой системы равен вронскиану линейно независимой системы решений $y_1, y_2, \cdots, y_n$ в точке x_0 и, т.к.

система функций линейно независима, он отличен от нуля $\forall x_0 \in I$. Поэтому по правилу Крамера эта система имеет (притом единственное) решение, при котором функция (2) будет удовлетворять заданным начальным условиям. ■

Из доказанной теоремы следует, что задача отыскания общего решения о.л.д.у. n-го порядка сводится к нахождению любых n линейно независимых решений этого уравнения.

Пример 1. Проверить, что функции x^3 и x^4 являются решениями уравнения

$$x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$$

и найти его решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

◄ Подставив в уравнение $y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, получаем тождество:

$$6x^3 - 18x^3 + 12x^3 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Аналогично проверяется вторая функция. Данное уравнение является однородным линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка (к виду (1) оно приводится путем деления на x^2); интервалы непрерывности коэффициентов – $I_1 = (-\infty, 0)$ и $I_2 = (0, +\infty)$. Так как решения x^3 и x^4 линейно независимы ($\frac{x^3}{x^4} \neq \text{const}$), то они образуют фундаментальную систему решений данного уравнения, и по теореме его общее решение имеет вид

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^4 .$$

После подстановки начальных значений $x = 1$, $y = 1$ и $y' = 2$ в общее решение и его производную $y' = 3C_1 x^2 + 4C_2 x^3$ найдем $C_1 = 2$, $C_2 = -1$, и, следовательно, искомое частное решение $y = 2x^3 - x^4$. ▶

Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Общий вид о.л.д.у. n-го порядка *с постоянными коэффициентами*

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0}, \qquad (3)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые числа, или короче $L(y) = 0$, если обозначить через L линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, действующий по формуле

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y .$$

Определение 2. Многочлен n-й степени от переменной λ

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n},$$

называется *характеристическим многочленом*, а алгебраическое уравнение n-й степени

$$\boxed{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0} \qquad (4)$$

– *характеристическим уравнением* для о.л.д.у.

Теорема (о характеристическом уравнении). *Функция* $e^{\lambda x}$ *тогда и только тогда является решением о.л.д.у. с постоянными коэффициентами, когда* λ *есть корень (действительный или комплексный) соответствующего характеристического уравнения.*

Доказательство: Посмотрим, как оператор L действует на экспоненту $e^{\lambda x}$, где λ – произвольное число:

$$L(e^{\lambda x}) = (e^{\lambda x})^{(n)} + a_1(e^{\lambda x})^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(e^{\lambda x})' + a_n e^{\lambda x} =$$

$$= \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = P(\lambda) e^{\lambda x}.$$

Равенство $L(e^{\lambda x}) = P(\lambda)e^{\lambda x}$ означает, что всякая экспонента $e^{\lambda x}$ оператором L переводится в пропорциональную ей функцию.

Пусть теперь $y = e^{\lambda_0 x}$. Тогда y – решение о.л.д.у. (3) $\Leftrightarrow$ $L(y) = 0$ $\Leftrightarrow$ $P(\lambda_0)e^{\lambda_0 x} = 0$ $\Leftrightarrow$ $P(\lambda_0) = 0$ $\Leftrightarrow$ λ_0 – корень характеристического уравнения (4). ■

Общий вид о.л.д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0}. \tag{5}$$

Его характеристическое уравнение является квадратным вида

$$\boxed{\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0}. \tag{6}$$

Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения. Рассмотрим три возможных случая.

I. Если дискриминант уравнения (6) $D > 0$. Числа λ_1 и λ_2 действительны и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда функции $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ являются решениями уравнения (5), которые линейно независимы на I и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений этого уравнения. Поэтому общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}.$$

II. Если дискриминант уравнения (6) $D=0$. Числа λ_1 и λ_2 действительны и совпадают, т.е. корень $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ – двукратный. Функция $e^{\lambda x}$ является решением уравнения (5). Проверим, что другим решением этого уравнения в этом случае является функция $xe^{\lambda x}$. Действительно, по теореме Виета $\lambda_1+\lambda_2=2\lambda=-a_1$, так что двукратный корень λ удовлетворяет двум равенствам: $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ и $2\lambda+a_1=0$. С учетом этих равенств, подставляя

$$y=xe^{\lambda x},\ y'=(xe^{\lambda x})'=(1+\lambda x)e^{\lambda x} \text{ и } y''=(xe^{\lambda x})''=(2\lambda+\lambda^2 x)e^{\lambda x}$$

в уравнение (5), получим $[2\lambda+a_1+x(\lambda^2+a_1\lambda+a_2)]e^{\lambda x}=0$, т.е. $0=0$.

Решения $e^{\lambda x}$ и $xe^{\lambda x}$ линейно независимы и образуют, следовательно, фундаментальную систему решений, так что общее решение уравнения (5) в этом случае

$$\boxed{y=e^{\lambda x}(C_1+C_2x)}.$$

III. Если дискриминант уравнения (6) $D<0$. Числа λ_1 и λ_2 комплексно сопряженные, т.е. $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$. Тогда одним из решений уравнения (5) согласно теореме 2 является комплексная функция

$$e^{\lambda_1 x}=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Заметим, что если $y=u+iv$ – комплексное решение о.л.д.у. то $u=\operatorname{Re}y$ и $v=\operatorname{Im}y$ – его действительные решения, т.к. из $L(u+iv)=L(u)+iL(v)=0$ следует $L(u)=0$ и $L(v)=0$. Поэтому функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются решениями уравнения (5), притом линейно независимыми, т.к. их отношение $\operatorname{ctg}\beta x\neq\text{const}$. Приняв эти функции за фундаментальную систему решений, получим общее решение уравнения (5) в виде

$$\boxed{y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + 10y = 0.$$

Пример 3. Найти решение уравнения

$$y'' - 4y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

Пример 4. Найти решение уравнения

$$y^{(4)} + y'' = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'''(0) = -1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.