Основы теории массового обслуживания

Лекция 1. Введение. Элементы теории случайных процессов

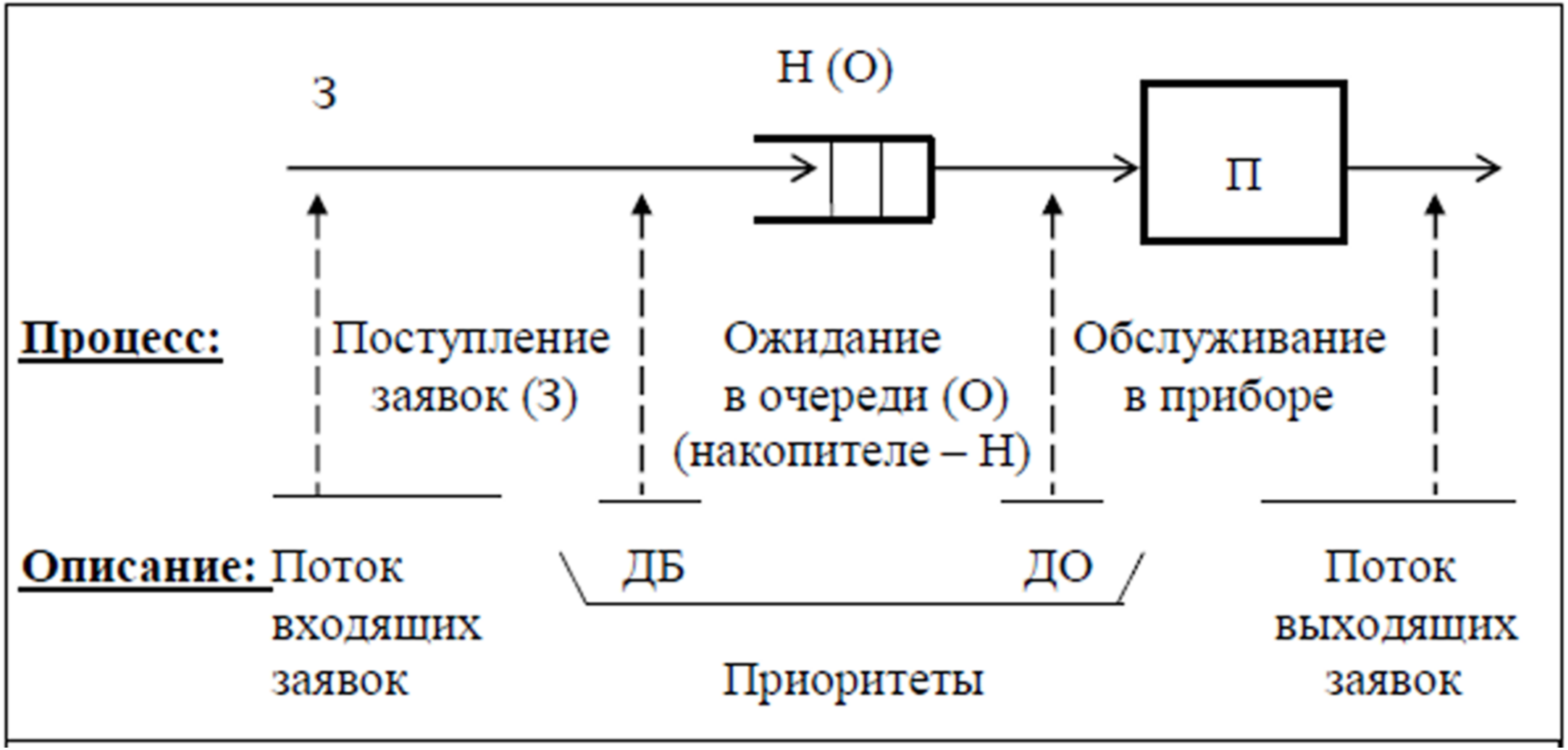
Введение

Системой массового обслуживания (СМО) называется любая система, предназначенная для обслуживания каких-либо заявок (требований), поступающих на нее в случайные моменты времени.

Теория массового обслуживания (ТМО) изучает случайные процессы, протекающие в системах массового обслуживания.

Предметом теории массового обслуживания является количественная сторона процессов, связанных с массовым обслуживанием. Для анализа этих процессов строится *математическая модель* обслуживающей системы, связывающая заданные условия работы системы с показателями эффективности, описывающими ее способность справляться с потоком требований. При исследовании системы массового обслуживания используются методы дискретной математики, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, теории случайных процессов.

Система массового обслуживания (СМО) – математический (абстрактный) объект, содержащий один или несколько приборов П (каналов), обслуживающих заявки З, поступающие в систему, и накопитель Н, в котором находятся заявки, образующие очередь О и ожидающие обслуживания



Некоторые сведения из теории вероятностей и математической статистики

- Определение. Событие *A* называется случайным, если при осуществлении определенной совокупности условий оно может либо произойти, либо не произойти. Осуществление определенной совокупности условий называется испытанием или экспериментом.
- Определение. Вся совокупность несовместных исходов эксперимента называется пространством элементарных событий Ω. Исходы ω_i, входящие в эту совокупность, называются элементарными событиями.

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n \}$$

- Определение. Пусть Ω – пространство элементарных событий, u – множество всех подмножеств Ω, включая невозможное событие и достоверное событие. Множество *u* называют алгеброй событий, если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения.
- Определение. Пусть Ω - пространство элементарных событий, *u*-алгебра событий, A - событие, принадлежащее алгебре событий. Вероятностью P(A) события A называется числовая функция, определенная для любого A из *u* и удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам):

✓ 1) P(A) всегда неотрицательна ($P(A) \geq 0$)

✓ 2) $P(\Omega) = 1$

✓ 3)$P(\Sigma A_к) = \Sigma P(A_к)$ - для несовместных событий $A_1, A_2, \ldots A_n$ ($A_i A_j = \varnothing$)

- Определение. Тройка (Ω, u, p) образует вероятностное пространство

- Определение. Случайной величиной X называется действительная *числовая* функция X = X(ω), определенная на пространстве элементарных событий Ω и такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$ множество тех ω, для которых X(ω) < x, принадлежит алгебре событий данного эксперимента.

Случайные величины

Дискретные (ДСВ) | Непрерывные (НСВ)

- Определение. Функцией распределения вероятностей случайной величины X называется функция F(x)= P(X < x).
- Определение. Случайная величина X называется дискретной случайной величиной, если все её значения можно пронумеровать, т.е. $X = \{x_i\}$, $(i=1,\ 2,\ 3\ldots)$. Законом распределения дискретной случайной величины (распределением) называется соответствие между ее возможными значениями и их вероятностями, то есть совокупность $\{x_i,\ p_i\}$, $(i=1, 2, 3\ldots)$
- Определение. Непрерывной случайной величиной X называется такая случайная величина, которая может принимать любые числовые значения в заданном интервале и для которой существует предел:

$$\rho_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

называемый плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X.

- Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности, т.е. $m_x = M[X] = MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
- Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежит отрезку $[a, b]$, называется определенный интеграл вида $MX = \int_a^b x\rho(x)dx$
- Определение. Дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $DX=D[X]=M[(X-M[X])^2]$
- Определение. Величина $\sigma = (D[X])^{1/2}$ называется средним квадратичным отклонением.
- Определение. Коэффициентом вариации случайной величины называют отношение стандартного отклонения σ к математическому ожиданию m : $v_X=var(X)= \sigma/m$.
- Определение. Ковариацией или корреляционным моментом двух случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин.

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mu_{XY} = M[(X-MX)(Y-MY)] = M[XY] - M[X]M[Y]$$

- Определение. Коэффициентом корреляции двух случайных величин X и Y называют отношение их корреляционного момента к произведению среднеквадратичных отклонений $r_{XY} = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Случайные процессы. Основные определения и понятия

- **Определение.** Пусть – G_t некоторое множество действительных чисел. Если каждому значению t поставлена в соответствие случайная величина $X(t)$, то говорят, что на множестве G_t задана случайная функция $X(t)$.

Например: броуновское движение частиц, работа телефонных станций, помехи в радиотехнических системах,

$X(t) = t^2U$, где U- случайная величина, не зависящая от времени.

- **Определение.** Случайная величина $X(t_0)$, соответствующая значению случайной функции при фиксированном значении аргумента $t = t_0$, называется сечением случайной функции.

$X(t) = t^2U, \quad S_{t=1} = U, \quad X(t=1) = U$

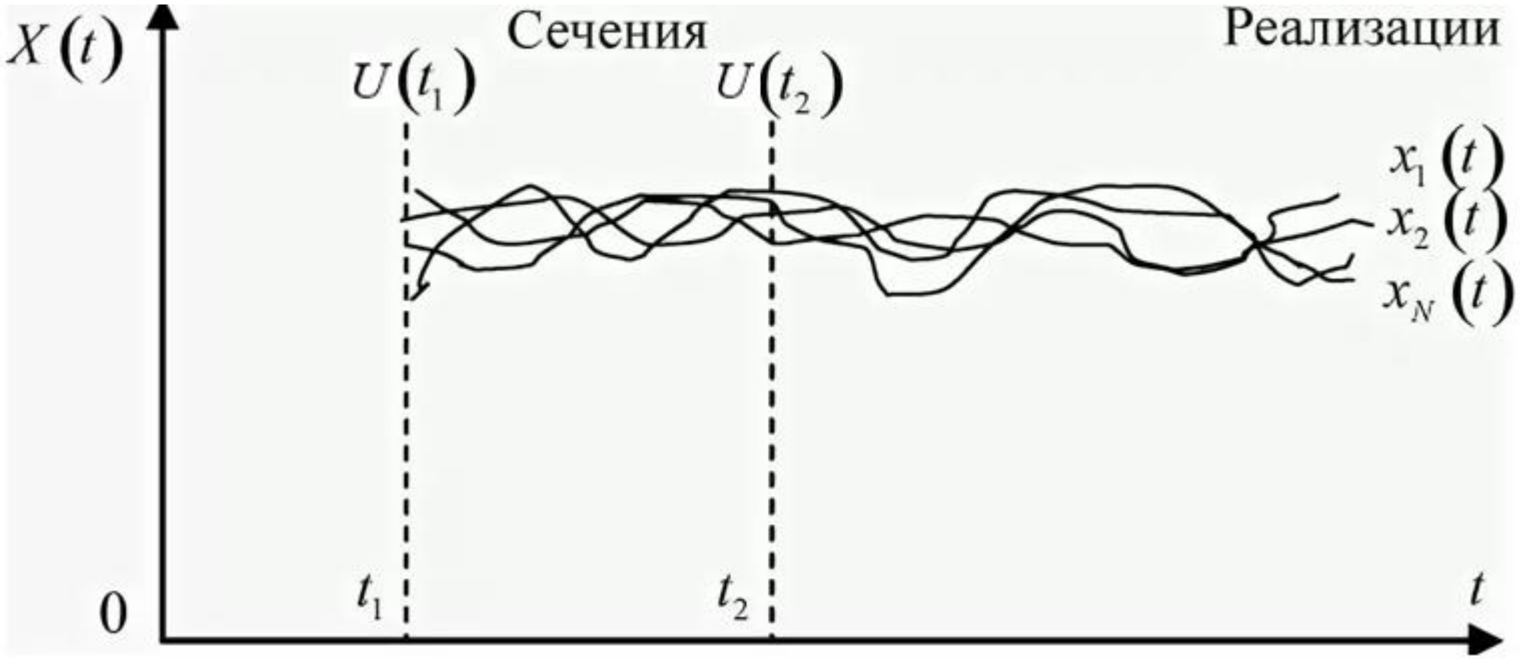
- **Определение.** Реализацией (траекторией) случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию $X(t)$, равной которой может оказаться случайной функции в результате испытания.

СФ может быть определена как множество реализаций или совокупность сечений.

Если в качестве аргумента выступает время, то СФ называется **случайным процессом**.

Классификация случайных процессов:

- дискретный случайный процесс с дискретным временем или случайная последовательность (цепь);
- дискретный случайный процесс с непрерывным временем (число человек в очереди, радиоактивный распад);
- непрерывный случайный процесс с дискретным временем или случайная последовательность (цепь) (процессы, заданные последовательностью сечений);
- непрерывный случайный процесс с непрерывным временем (температура во времени, скорость движения автомобиля во времени).



Корреляционная теория случайных функций

Определение. n-мерным законом распределения случайной функции $X(t)$, зависящей от действительных параметров $t_1, t_2, \ldots t_n$ называется закон совместного распределения n сечений $(X(t_1), X(t_2), \ldots X(t_n))$

1. Одномерная функция распределения (функция распределения сечения $X(t)$):

$$F_1(x / t) = P(X(t) < x)$$

2. Двумерная функция распределения:

$$F_2(x, y / t_1, t_2) = P(X(t_1) < x, X(t_2) < y)$$

………………………………………………………………………………………

Корреляционной теорией случайных функций называют теорию, основанную па изучении моментов первого и второго порядка. Эта теория оказывается достаточной для решения многих задач практики.

Определение. Математическим ожиданием СФ $X(t)$ называют неслучайную функцию $m_X(t)$, значение которой при каждом фиксированном t равно математическому ожиданию соответствующего сечения.

$m_X(t^*) = M[X(t^*)]$ (начальный момент 1-го порядка)

Определение. Дисперсией СФ $X(t)$ называют неслучайную, неотрицательную функцию $D_X(t)$, значение которой при каждом фиксированном t равно дисперсии соответствующего сечения.

$D_X(t^*) = D[X(t^*)]$

$\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)}$ (центральный момент 2-го порядка)

Определение. Корреляционной (автокорреляционной) функцией СФ $X(t)$ называется неслучайная функция $K_X(t_1,t_2)$, значения которой при каждой паре фиксированных аргументов t_1 и t_2 равно корреляционному моменту (ковариации) соответствующих сечений.

$K_X(t_1,t_2) = M\left[(X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))\right]$ (смешанный центральный момент 2-го порядка)

Замечание. $K_X(t_1,t_1) = D_X(t_1)$

Определение. Нормированной корреляционной (автокорреляционной) функцией СФ $X(t)$ называется функция

$$\rho_X(t_1,t_2) = \frac{K_X(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} = \frac{K_X(t_1,t_2)}{\sqrt{K_X(t_1,t_1)K_X(t_2,t_2)}}$$

Свойства автокорреляционной функции:

- $K_X(t_1,t_2) = K_X(t_2,t_1)$
- Если $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - неслучайная функция, то $K_Y(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2)$
- Если $Y(t) = X(t) \cdot \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - неслучайная функция, то $K_Y(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2)$
- $|K_X(t_1,t_2)| \le \sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2) = \sqrt{D_X(t_1)D_X(t_2)}$ $\quad$ ($|\rho_X(t_1,t_2)| \le 1$)

Определение. Для оценки степени зависимости двух случайных функций вводят взаимную корреляционную функцию $R_{XY}(t_1,t_2) = M[(X(t_1)-m_X(t_1))(Y(t_2)-m_Y(t_2))] = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)\right]$

и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2) = \dfrac{R_{XY}(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)}$

Замечание. Две случайные функции называются некоррелированными, если $R_{XY}(t_1,t_2) \equiv 0$

Свойства взаимной корреляционной функции:

- $R_{XY}(t_1,t_2) = R_{YX}(t_2,t_1)$
- Если $\tilde{X}(t) = X(t) + \varphi(t)$, $\tilde{Y}(t) = Y(t) + \psi(t)$ где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ - неслучайные функции, то $R_{\tilde{X}\tilde{Y}}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2)$
- Если $\tilde{X}(t) = X(t) \cdot \varphi(t)$, $\tilde{Y}(t) = Y(t) \cdot \psi(t)$ где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ - неслучайные функции, то $R_{\tilde{X}\tilde{Y}}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2)\varphi(t_1)\psi(t_2)$
- $|R_{XY}(t_1,t_2)| \le \sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2) = \sqrt{D_X(t_1)D_Y(t_2)}$ $\quad$ ($|\rho_{XY}(t_1,t_2)| \le 1$)

Теорема. Корреляционная функция суммы двух коррелированных СФ равна сумме корреляционных функций слагаемых и взаимной корреляционной функции, которая прибавляется дважды с разным порядком следования аргументов.

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

$$K_Z(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2) + R_{XY}(t_1, t_2) + R_{XY}(t_2, t_1)$$

Замечание. Если $X(t)$ и $Y(t)$ - не коррелированы, то

$$K_Z(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2)$$

Стационарные случайные процессы

Определение. Стационарным (в широком смысле) называется случайный процесс $X(t)$, математическое ожидание которого постоянно при всех значениях аргумента t и корреляционная функция которого зависит только от разности аргументов $t_2 - t_1$, т.е.

$$K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2 - t_1) = K_X(\tau)$$

Свойства корреляционной функции стационарного процесса:

- $K_X(\tau) = K_X(-\tau)$
- $|K_X(\tau)| \le K_X(0)$ $\quad \left(\rho_X(\tau) = \dfrac{K_X(\tau)}{K_X(0)}; \quad |\rho_X(\tau)| \le 1 \right)$

Определение. Стационарно-связанными называют два случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$, если их взаимная корреляционная функция зависти только от разности аргументов τ.

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(\tau)$$

Замечание.

1. $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$
2. Из стационарности X и Y не следует их стационарная связанность.

Эргодические случайные процессы

Определение. Средним по конечному промежутку от реализации стационарного случайного процесса *X(t)* называется величина (вообще говоря, случайная), определяемая соотношением

$$\langle x(t)\rangle = \langle x(t)\rangle_0^T = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$\langle ... \rangle$ - усреднение по времени, $M[...]$ - усреднение по распределению

Определение. Стационарный случайный процесс *X(t)* называют строго эргодическим по отношению к математическому ожиданию, если выполняется условие

$$\lim_{T\to\infty}\langle x(t)\rangle = m_X$$

(среднее по бесконечному промежутку времени от одной (любой) реализации равно среднему по множеству реализаций (среднему по ансамблю))

Определение. Стационарный случайный процесс *X(t)* называют слабо эргодическим по отношению к математическому ожиданию, если среднее по времени от одной (любой) реализации сходится в среднеквадратичном к математическому ожиданию, т.е.

$$\underset{T\to\infty}{l.i.m.}\langle x(t)\rangle = m_X \quad \text{или} \quad \lim_{T\to\infty} M[(\langle x(t)\rangle - m_X)^2] = 0$$

Определение. Стационарный случайный процесс *X(t)* называют слабо эргодическим по отношению к корреляционной функции, если выполняется условие

$$\underset{T\to\infty}{l.i.m.}\left\langle \overset{\circ}{x}(t)\,\overset{\circ}{x}(t+\tau)\right\rangle = K_X(\tau)$$

Теорема Слуцкого. Необходимым и достаточным условием слабой эргодичности стационарного случайного процесса *X(t)* по отношению к математическому ожиданию является условие

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T K_X(\tau)(1-\frac{\tau}{T})d\tau=0$$

Достаточным условием слабой эргодичности стационарного случайного процесса *X(t)* по отношению к математическому ожиданию является условие $K_X(\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$

Замечание 1. Необходимым и достаточным условием эргодичности процесса по отношению к дисперсии является:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K_X(t_1,t_2)dt_1dt_2=0$$

Замечание 2. Достаточным условием эргодичности стационарного случайного процесса по отношению к дисперсии является: $K_X(\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$

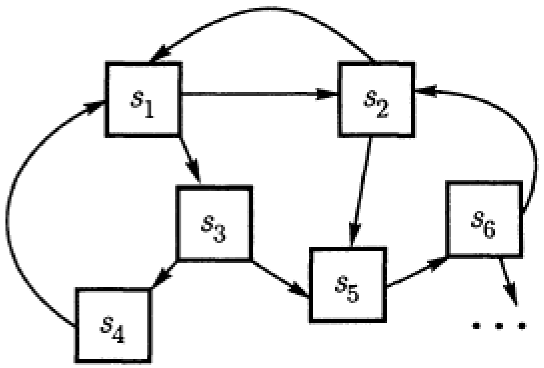
Оценка корреляционной функции для эргодического случайного процесса:

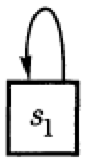
$$K_X^*(\tau)=\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t+\tau)dt=\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}x(t)x(t+\tau)dt-(m_X^*)^2$$

МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайный процесс, протекающий в какой-либо физической системе S, называется ***марковским (или процессом без последствия),*** если он обладает следующим свойством: для любого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t=t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние.

Далее будем рассматривать только марковские процессы с дискретными состояниями s_1, s_2, ...s_n. Такие процессы удобно иллюстрировать с помощью *графа состояний (переходов)*.





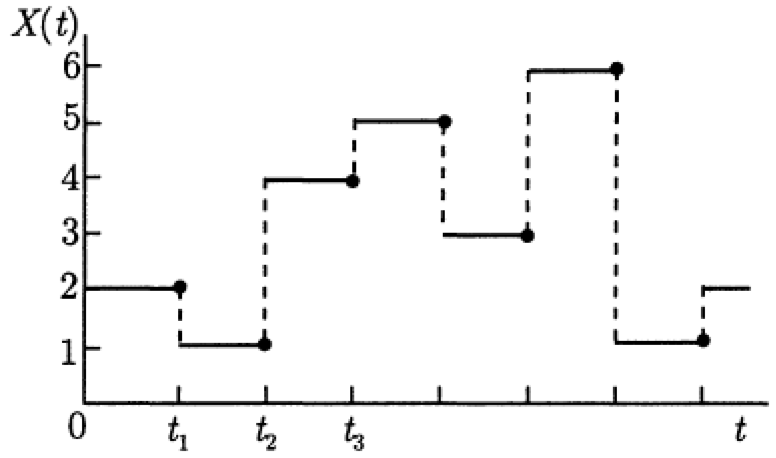
Возможные задержки в прежнем состоянии изображаются стрелкой («петлей»), направленной из данного состояния в него же. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным). Граф переходов называется *размеченным*, если на дугах графа указаны условия перехода в виде *вероятностей переходов* (для процессов с дискретным временем) или *интенсивностей переходов* (для процессов с непрерывным временем).

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем обычно называют *марковской цепью*. Для такого процесса моменты $t_1, t_2, \ldots$, когда система S может менять свое состояние, удобно рассматривать как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, рассматривать не время t, а номер шага: $1, 2, \ldots, k, \ldots$. Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$, ..., $S(k)$,..., если $S(0)$ — начальное состояние системы (перед первым шагом); $S(1)$ — состояние системы непосредственно после первого шага; ...; $S(k)$ — состояние системы непосредственно после k - то шага ....

Событие $\{S(k) = s_i\}$ = {сразу после k -го шага система находится в состоянии s_i} (i= 1,2,...) является случайным событием, поэтому последовательность состояний можно рассматривать как последовательность случайных событий. Начальное состояние $S(0)$ может быть как заданным заранее, так и случайным. О событиях последовательности говорят, что они образуют *марковскую цепь*.

Рассмотрим процесс с n возможными состояниями s_1, s_2, ...s_n. Если обозначить $X(t)$ - номер состояния, в котором находится система S в момент t, то процесс (марковская цепь) описывается целочисленной случайной функцией $X(t) > 0$, возможные значения которой равны 1,2,…n.



Обозначим через $p_i(k)$ вероятность того, что после k-то шага [и до (k + 1)-го] система S будет в состоянии s_i = (i= 1, 2,..., n). Вероятности $p_i(k)$ называются вероятностями состояний цепи Маркова. Очевидно, для любого k

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(k) = 1.$$

Распределение вероятностей состояний в начале процесса $p_1(0), p_2(0), \ldots, p_i(0), \ldots, p_n(0)$ называется *начальным распределением вероятностей* марковской цепи.
В частности, если начальное состояние $S(0)$ системы S в точности известно, например $S(0) = s_i$, начальная вероятность $p_i(0) = 1$, а все остальные равны нулю.
Вероятностью перехода на k *-м* шаге из состояния s_i в состояние s_j называется условная вероятность того, что система S после k *-го* шага окажется в состоянии s_j при условии, что непосредственно перед этим (после k-1 шагов) она находилась в состоянии s_i. Вероятности перехода иногда называются также *«переходными вероятностями»*.
Марковская цепь называется *однородной,* если переходные вероятности не зависят от номера шага, а зависят только от того, из какого состояния и в какое осуществляется переход: $\mathrm{P}\{S(k) = s_j | S(k-1) = s_i\} = P_{ij}$.

Переходные вероятности однородной марковской цепи P_{ij} образуют квадратную таблицу (матрицу):

$$\|P_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} P_{11} & P_{12} \ldots & P_{1j} \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} \ldots & P_{2j} \ldots & P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{i1} & P_{i2} \ldots & P_{ij} \ldots & P_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1} & P_{n2} \ldots & P_{nj} \ldots & P_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Сумма переходных вероятностей в любой строке матрицы равна единице.
Матрицу, обладающую таким свойством, называют *стохастической.*
Вероятность P_{ii} - вероятность того, что система, пришедшая к данному шагу в состояние s_i, в нем же и задержится на очередном шаге.

Если для *однородной* цепи Маркова заданы начальное распределение вероятностей и матрица переходных вероятностей, то вероятности состояний системы могут быть определены по рекуррентной формуле

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1)\ P_{ji} \quad (i = 1,\ \ldots,\ n;\ j = 1,\ \ldots,\ n).$$

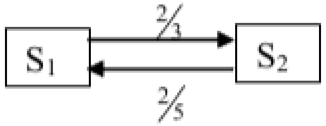
Процесс перехода за m шагов из состояния s_i в состояние s_j может быть представлен в виде следующих двух этапов: сначала переход за r шагов ($1 \leq r < m$) в некоторое промежуточное состояние s_l, а затем переход за оставшихся $m - r$ шагов в состояние s_j. Для вычисления *вероятностей переходов за m шагов* служит равенство Маркова:

$$P_{ij}(m) = \sum_{l=1}^{k} P_{il}(r) P_{lj}(m-r)$$

Правило 1: для того, чтобы найти матрицу перехода за m шагов, следует матрицу перехода за 1 шаг возвести в степень m.

Правило 2: для того, чтобы найти вектор распределения вероятностей по состояниям на шаге m, следует умножить начальный вектор вероятностей состояний на матрицу перехода за m шагов.

Пример 1. Построить матрицу переходных вероятностей для марковской цепи, заданной следующим размеченным графом:



Решение. $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$

Пример 2. Рассмотрим цепь Маркова, обладающую тремя состояниями и предназначенную для моделирования погоды. Предполагается, что раз в день (например, в полдень) состояние погоды описывается одной и только одной из следующих характеристик: S_1 - осадки, S_2 - облачно, S_3 - ясно. Матрица переходных вероятностей имеет вид:

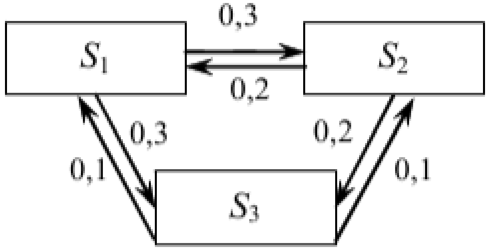
$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Составить размеченный граф состояний, если известно, что сегодня - ясный день.

А) Какова вероятность того, что завтра будет облачно, а послезавтра пойдёт дождь?

Б) Какова вероятность того, что погода останется в некотором состоянии S_i ровно x дней?

Решение.



А) Вероятность того, что завтра будет облачно, а послезавтра пойдёт дождь, находим но закону умножения вероятностей зависимых событий:

$$p = P\left(S(t_2) = S_2 \middle| S(t_1) = S_3\right) \cdot P\left(S(t_3) = S_1 \middle| S(t_2) = S_2\right) = \quad P_{32} P_{21} = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02.$$

Б). Какова вероятность того, что погода останется в некотором известном состоянии S_i ровно x дней (*геометрическое распределение случайной величины*)?

$$p_i(X = x) = (P_{ii})^{x-1}(1 - P_{ii}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Например, если известно, что сегодня дождь, то вероятность того, что он будет идти ровно 3 дня (включая сегодняшний), равна

$$p_1(X = 3) = (P_{11})^2(1 - P_{11}) = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096.$$

Математическое ожидание случайной величины X можно рассматривать как характеристику длительности данного состояния S_i в цепи Маркова. Для геометрического распределения

$$M_i(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x p_i(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} x(P_{ii})^{x-1}(1 - P_{ii}) = \frac{1}{1 - P_{ii}}.$$

Так среднее число дождливых дней подряд оказывается равным 1/0,6 =1,67, облачных дней –2,5, ясных дней – 5.