Лекция 14. Степенные ряды (продолжение)
Вычисление радиуса сходимости степенного ряда.

Теорема. *Если существует конечный или бесконечный* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, *то для радиуса R сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *справедлива формула*

$$\boxed{R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}}, \tag{14}$$

а если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, *то*

$$\boxed{R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}. \tag{15}$$

Все сказанное с помощью преобразования типа $X = x - x_0$ (x – новая переменная, x_0 – фиксировано) переносится и на степенные ряды по степеням (x – x_0) вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. R – его радиус сходимости. либо интервал ($x_0 - R$, $x_0 + R$) – интервал сходимости.

Областью сходимости степенного ряда с действительными членами

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

может оказаться либо интервал ($x_0 - R$, $x_0 + R$), либо отрезок [$x_0 - R$, $x_0 + R$], либо ($x_0 - R$, $x_0 + R$] или [$x_0 - R$, $x_0 + R$). Если $R = +\infty$, то областью сходимости будет вся числовая ось, т.е. интервал $(-\infty, +\infty)$, если $R = 0$, то область сходимости будет состоять из одной точки x_0.

Для отыскания области сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

нужно сначала вычислить его радиус сходимости R, найти интервал сходимости ($x_0 - R$, $x_0 + R$), в котором ряд абсолютно сходится, затем исследовать сходимость ряда в концах интервала сходимости – в точках $x = x_0 - R$, $x = x_0 + R$.

Пример. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^2(x+5)^n$.

◀ Выпишем $x_0 = -5$ и коэффициенты ряда $a_n = (n!)^2$. Существует $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 0$. Таким образом, радиус сходимости $R = 0$, область сходимость состоит из единственной точки $x = -5$. ▶

Пример. Найти радиус, интервал и область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x-3)^n$.

◀ Выпишем $x_0 = 3$ и коэффициенты ряда $a_n = \frac{2^n}{n}$. Найдем $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n(n+1)}{n\cdot 2^{n+1}}\right| = \frac{1}{2}$. Концы интервала сходимости $x_1 = x_0 - R = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ и $x_2 = x_0 + R = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Итак, ряд абсолютно сходится для всех x из интервала $\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. Подставляем в заданный ряд $x = x_1 = \frac{5}{2}$. Получится числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(\frac{5}{2}-3\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Этот знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, следовательно, он сходится.

Подставим в заданный ряд $x=x_2=\frac{7}{2}$. Получим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Получили гармонический ряд, который, как известно, расходится.

Итак, область сходимости – $\left[\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ (к интервалу сходимости присоединился один из его концов). ▶

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов с действительными членами

Обратимся теперь к степенным рядам вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (16)$$

где a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), x_0 – заданные действительные числа (a_n – *коэффициенты ряда*), x – действительная переменная.

Теорема (об интегрировании степенных рядов). *Пусть ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

имеет интервал сходимости $(-R, R)$. *Если пределы интегрирования* α, β *лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов от членов ряда, т.е.*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots\right)dx = \int_{\alpha}^{\beta} a_0 dx + \int_{\alpha}^{\beta} a_1 x dx + \ldots + \int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx + \ldots$$

Теорема (о дифференцировании степенных рядов). *Если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) \tag{19}$$

имеет интервал сходимости (– R, R)*, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \varphi(x), \tag{20}$$

полученный почленным дифференцированием ряда (19) *имеет тот же интервал сходимости* (– R, R). *При этом* $\varphi(x) = f'(x)$, *если* $|x| < R$. *Другими словами, внутри интервала сходимости производная от суммы степенного ряда* (19) *равна сумме ряда, полученного почленным дифференцированием ряда* (19).

Замечание. Ряд (20) снова можно почленно дифференцировать и продолжать так сколь угодно раз, причем интервалы сходимости полученных рядов будут совпадать с интервалом сходимости исходного ряда.

Разложение функций в ряд Тейлора (Маклорена)

Определение. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 производные всех порядков, то степенной ряд

$$\boxed{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} \qquad (21)$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

В случае, когда $x_0 = 0$, ряд Тейлора

$$\boxed{f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n} \qquad (22)$$

называют *рядом Маклорена*.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ *разлагается в степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ на интервале $(x_0 - R;\ x_0 + R)$, если на этом интервале данный степенной ряд сходится и его сумма равна $f(x)$, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n. \qquad (23)$$

Теорема (о единственности разложения функции в степенной ряд). *Если функция* $f(x)$ *на интервале* $(x_0 - R;\, x_0 + R)$ *разлагается в степенной ряд* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$*, то это разложение единственно, причем*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ n \in \mathrm{N} \tag{24}$$

т.е. ряд (23) *является рядом Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

Доказательство. По условию ряд (23) сходится на интервале $(x_0 - R;\, x_0 + R)$ и функция $f(x)$ – его сумма. Следовательно, по теореме о дифференцировании степенных рядов (см. п. 5.3) ряд (23) можно почленно дифференцировать на интервале $(x_0 - R;\, x_0 + R)$. Дифференцируя n раз обе части равенства (23), получим

$f'(x) = 1\cdot a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots,$

$f''(x) = 1\cdot 2\, a_2 + 2\cdot 3a_3(x - x_0) + 3\cdot 4a_4(x - x_0)^2 + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots,$

$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x - x_0) + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots,$

……………………………………………………………

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n(n+1)\, a_{n+1}\,(x - x_0) +$$
$$+ 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1)\,(n+2)a_{n+2}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Полагая в полученных равенствах и в равенстве (23) $x = x_0$, имеем

$$f(x_0) = a_0,\ f^{/}(x_0) = 1 \cdot a_1,\ f^{//}(x_0) = 2!a_2,\ f^{///}(x_0) = 3!a_3, \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = n!a_n, \ldots,$$

откуда находим

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f^{/}(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f^{//}(x_0)}{2!},\ a_3 = \frac{f^{///}(x_0)}{3!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots$$

Таким образом, все коэффициенты ряда (23) определяются единственным образом формулами (24), что и доказывает теорему. ■

Возникает вопрос: при каких условиях ряд Тейлора функции $f(x)$ на некотором интервале сходится к $f(x)$? Чтобы ответить на этот вопрос, напишем формулу Тейлора для функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x),\ n = 0,1,2,\ldots, \tag{25}$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора. Заметим, что остаточный член можно представить, например, в *форме Лагранжа*:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ \ \xi \in (x_0, x). \tag{26}$$

Полагая $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, перепишем формулу (25) в виде

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \tag{27}$$

где $S_n(x)$ – n-я частичная сумма ряда Тейлора.

Теорема (необходимое и достаточное условие разложимости в ряд Тейлора). *Ряд Тейлора функции* $f(x)$ *в интервале* $(x_0 - R; x_0 + R)$ *сходится и имеет своей суммой функцию* $f(x)$ *тогда и только тогда, когда в интервале* $(x_0 - R; x_0 + R)$ *остаточный член* $R_n(x)$ *формулы Тейлора для функции* $f(x)$ *стремится к нулю при* $n \to \infty$, *т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \text{ при } x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

Теорема (достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора). *Пусть функция* $f(x)$ *и все ее производные ограничены в совокупности на интервале* $(x_0 - R;\ x_0 + R)$*, т.е. существует такая постоянная* $M > 0$*, что для всех* $x \in (x_0 - R;\ x_0 + R)$ *и всех* $n = 0, 1, 2\ldots$ *выполняется неравенство*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le M. \tag{28}$$

Тогда на интервале $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ *функция* $f(x)$ *раскладывается в ряд Тейлора* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R$.