Лекция 8. Системы дифференциальных уравнений

Основные понятия

Определение. Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \tag{1}$$

связывающая независимую переменную x, искомые функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots, y_n(x)$, и их производные 1-го порядка, и разрешенная относительно этих производных, называется *нормальной системой*.

Определение. *Порядком системы* дифференциальных уравнений называется сумма порядков уравнений, входящих в систему.

Определение. *Решением* (*частным решением*) системы (1) на интервале I называется всякая совокупность (система) n функций $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$, при подстановке которых в систему вместе с их производными каждое уравнение системы обращается в тождество относительно $x \in I$.

Пример. Показать, что функции $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = -1/2\sqrt{x}$ являются решением системы

$$\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = \dfrac{y_2^2}{y_1} \end{cases} \text{ на } (0, +\infty).$$

◄ Подставляя $y_1 = \sqrt{x}$, $y_1' = 1/2\sqrt{x}$, $y_2 = -1/2\sqrt{x}$, $y_2' = 1/4x\sqrt{x}$ в данную систему, получаем тождества $1/2\sqrt{x} = 1/2\sqrt{x}$ и $1/4x\sqrt{x} = 1/4x\sqrt{x}$ при $x \in (0, +\infty)$. ►

Определение. Равенства вида

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0,\ \ldots, y_n(x_0) = y_n^0 \tag{2}$$

(используется также запись $y_1|_{x=x_0} = y_1^0$, $y_2|_{x=x_0} = y_2^0$, $\ldots, y_n|_{x=x_0} = y_n^0$), где $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ – заданные числа (*начальные значения*), называются *начальными условиями* для системы (1).

Определение. Задача отыскания решения системы (1), удовлетворяющего заданным начальным условиям (2), называется *задачей Коши* для этой системы.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши для системы (1)). *Если функции* $f_1, f_2, \dots, f_n$ *и их частные производные* $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, *непрерывны в некоторой области* $D \subset R^{n+1}$ *, то для любой точки* $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in D$ *задача Коши для системы* (1) *с начальными условиями* (2) *имеет и притом единственное решение.*

Определение. Совокупность n функций

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, \dots, C_n),\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, \dots, C_n), \dots,\ y_n = \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n), \quad (3)$$

зависящих от n параметров $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется *общим решением* системы (1), если:

1) при любых допустимых значениях $C_1, C_2, \dots, C_n$ она является решением этой системы;

2) любое частное решение системы может быть получено из (3) при некоторых значениях параметров $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Второе условие означает, что для любой точки $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in D$ найдутся такие значения $C_1, C_2, \dots, C_n$, при которых функции (3) будут удовлетворять начальным условиям (2)).

Пример. Показать, что совокупность функций

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x},\quad z = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}$$

является общим решением системы

$$\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = z - 4y. \end{cases}$$

Найти частное решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1$, $z(0) = 2$.

◄ Проверим выполнение условий из определения общего решения.

1) Число произвольных постоянных в функциях данной совокупности равно двум, что совпадает с порядком системы. При любых значениях C_1 и C_2 функции y и z образуют решение системы:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \\ z = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x}, \\ z' = -2C_1 e^{-x} - 6C_2 e^{3x}; \end{cases}$$

подставляя в данную систему y, z, y' и z', получим тождества:

$$\begin{cases} -C_1e^{-x}+3C_2e^{3x}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-(2C_1e^{-x}-2C_2e^{3x}), \\ -2C_1e^{-x}-6C_2e^{3x}=2C_1e^{-x}-2C_2e^{3x}-4(C_1e^{-x}+C_2e^{3x}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -C_1e^{-x}+3C_2e^{3x}=-C_1e^{-x}+3C_2e^{3x}, \\ -2C_1e^{-x}-6C_2e^{3x}=-2C_1e^{-x}-6C_2e^{3x} \end{cases}.$$

2) Каковы бы ни были начальные значения x_0, y_0, z_0, система уравнений

$$\begin{cases} y_0=C_1e^{-x_0}+C_2e^{3x_0}, \\ z_0=2C_1e^{-x_0}-2C_2e^{3x_0} \end{cases}$$

имеет, притом единственное решение относительно C_1 и C_2, т.к. ее определитель $\Delta=\begin{vmatrix} e^{-x_0} & e^{3x_0} \\ 2e^{-x_0} & -2e^{3x_0} \end{vmatrix}=-4e^{2x_0}\neq 0$, и, следовательно, существуют значения C_1 и C_2, при которых данные функции будут удовлетворять начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$.

Поскольку все условия определения общего решения выполнены, то данная совокупность функций является общим решением данной системы.

Для нахождения частного решения после подстановки начальных значений $x=0$, $y=-1$ и $z=2$ в общее решение получим систему

$$\begin{cases} -1 = C_1 + C_2, \\ 2 = 2C_1 - 2C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = -1$ и, следовательно, искомое частное решение есть $y = -e^{3x}$, $z = 2e^{3x}$. ►

Сведение уравнения n-го порядка к нормальной системе

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

разрешенное относительно старшей производной, можно свести к нормальной системе n-го порядка. Для этого введем новые функции

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ \ldots,\ y_n = y^{(n-1)}.$$

Тогда данное уравнение, очевидно, эквивалентно следующей нормальной системе n-го порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases}$$

которая является частным случаем системы (1).

Пример 3. Привести к нормальной системе дифференциальное уравнение

$$y'' + xy' - y^2 = 0.$$

◀ Положим $z = y'$. Тогда $z' = y''$ и уравнение приводится к нормальной системе

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = y^2 - xz. \end{cases}$$ ▶

Метод исключения

Одним из методов решения системы дифференциальных уравнений является *метод исключения*. Он основан на обратном переходе – сведении системы к одному дифференциальному уравнению относительно одной из неизвестных функций. Например, для решения нормальной системы второго порядка

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases}$$

выражаем из первого уравнения $y_2 = g(x, y_1, y_1')$, после чего, находя полную производную $\dfrac{dy_2}{dx}$ и подставляя эти выражения во второе уравнение, получаем уравнение 2-го порядка относительно функции y_1.

Пример 4. Решить методом исключения систему

$$\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = z - 4y. \end{cases}$$

◄ Выразим из первого уравнения z: $z = y - y'$. Отсюда $z' = y' - y''$. Подставив эти выражения во второе уравнение системы, получим уравнение 2-го порядка относительно y:

$$y' - y'' = y - y' - 4y \text{ или } y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Общее решение этого о.л.д.у. с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Отсюда $y' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x}$ и

$$z = y - y' = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - (-C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x}) = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \\ z = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x} \end{cases}$$

– общее решение данной системы. ►