6. Процессы переноса

В отсутствии внешнего силового поля равновесное состояние системы характеризуется постоянными во внешнем объеме системы значениями концентрации частиц *n* и температуры *T*. Если отклонения от равновесия невелики, можно ввести представление о локальном равновесии в малых макроскопических областях системы. Каждая такая область характеризуется своими величинами концентрации и температуры. Благодаря хаотическому тепловому движению частиц в неравновесной системе самопроизвольно (спонтанно) формируются процессы переноса вещества (диффузия) и температуры (теплопроводность). Эти процессы переноса стремятся выравнить значения *n* и *T* по всему объему системы и перевести систему в равновесное состояние.

В задачах рассматриваются стационарные (не зависящие от времени) процессы диффузии и теплопроводности в идеальном газе. Допустим, что процессы переноса происходят только вдоль оси *x*. Диффузия описывается законом Фика

$$I_{nx} = -D\frac{dn}{dx} \ ,$$

где I_{nx} – плотность потока частиц вдоль оси *x* (число частиц, проходящих за единицу времени через единичное поперечное сечение, перпендикулярное оси *x*), *D* – коэффициент диффузии, *n* – концентрация частиц. Теплопроводность определяется законом Фурье

$$I_{Qx} = -\aleph\frac{dT}{dx} \ ,$$

где I_{Qx} – плотность полюса теплоты вдоль оси *x* (количество теплоты, переносимой за единицу времени через единичное поперечное сечение, перпендикулярное оси *x*), $\aleph$ – коэффициент теплопроводности, *T* – температура.

В равновесном состоянии $n = const$, $T = const$, поэтому $dn/dx = 0$ и $dT/dx = 0$, а потоки частиц и теплоты обращаются в нуль.

Задача №16

Для случая идеального газа получить формулы для коэффициентов диффузии *D* и теплопроводности $\aleph$.

Решение

Задача решается с помощью закона Фика

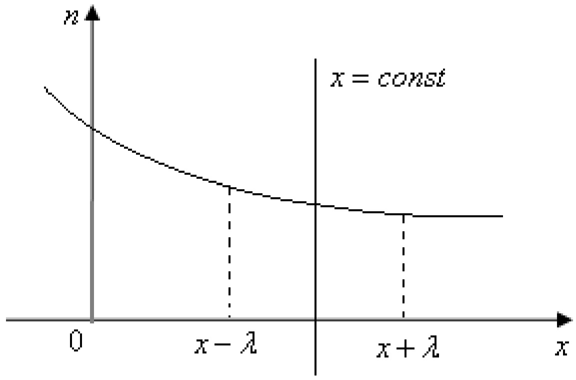
$$I_{nx} = -D\frac{dn}{dx} \ . \tag{16.1}$$

Пусть распределение частиц по скоростям теплового движения является изотропным, т.е. все направления движения произвольной частицы равновероятны. В этом случае плотность потока частиц в направлении оси *x* описывается формулой

$$I_{nx} = \frac{1}{6} n(x) \upsilon_T \ , \tag{16.2}$$

где υ_T – средняя скорость теплового движения, $n(x)$– концентрация частиц в точке x. Температура газа T и, следовательно, скорость υ_T одинаковые во всех точках газа. Распределение Максвелла по скоростям является изотропным.

Если концентрация n зависит от координаты x (см. рисунок),



суммарная плотность потока частиц в направлении оси x имеет вид

$$I_{nx} = \frac{1}{6}\upsilon_T[n(x-\lambda) - n(x+\lambda)] \approx \frac{1}{6}\upsilon_T[n(x) - \frac{dn}{dx}\lambda - n(x) - \frac{dn}{dx}\lambda] = -\frac{1}{3}\upsilon_T\lambda\frac{dn}{dx} = -D\frac{dn}{dx} \ . \tag{16.3}$$

Отсюда находим, что

$$D = \frac{1}{3}\upsilon_T\lambda \ . \tag{16.4}$$

Здесь λ – средняя длина свободного (без столкновений) пробега частиц.

Плотность потока теплоты

$$I_{Qx} = \frac{1}{6} n\upsilon_T\varepsilon_T(T) \ , \tag{16.5}$$

где $\varepsilon_T(T)$ – тепловая энергия, приходящаяся на 1 частицу. Используя соотношение

$$n\varepsilon_T(T) = nm\frac{\varepsilon_T(T)}{m} = \rho C_{уд.V} T \ , \tag{16.6}$$

где ρ – плотность газа, $C_{уд.V}$ – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме *V*, плотность потока теплоты (16.5) можно переписать следующим образом

$$I_{Qx} = \frac{1}{6}\upsilon_T\rho C_{уд.V} T(x) \ . \tag{16.7}$$

Плотность полного потока теплоты вдоль оси x

$$I_{Qx} = \frac{1}{6}\upsilon_T\rho C_{уд.V}[T(x-\lambda) - T(x+\lambda)] \approx -\frac{1}{3}\upsilon_T\rho C_{уд.V}\frac{dT}{dx} = -\aleph\frac{dT}{dx} \tag{16.8}$$

и коэффициент теплопроводности

$$\aleph = \frac{1}{3}\upsilon_T\lambda\rho C_{уд.V} = D\rho C_{уд.V} \ . \tag{16.9}$$

Ответ: $D = \frac{1}{3}\upsilon_T\lambda$, $\aleph = D\rho C_{уд.V}$.

Задача №17

Средняя длина свободного пробега молекул водорода H_2 при нормальных условиях (T=273К, P=10^5Па) равна $\lambda = 1{,}3 \cdot 10^{-7}$ м. Определить газокинетический диаметр d молекулы водорода.

Решение

Согласно молекулярно – кинетической теории газа средняя длина свободного пробега частицы определяется формулой

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \ , \tag{17.1}$$

где n – концентрация частиц газа, $\sigma = \pi d^2$ – эффективное сечение столкновений частицы, d – газокинетический диаметр частицы.

Используя известную формулу для давления газа

$$p = nkT \ , \tag{17.2}$$

с помощью (17.1) получим

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\pi\lambda p}} = 3{,}46 \cdot 10^{-10} м \ . \tag{17.3}$$

Таким образом, газокинетический диаметр порядка диаметра самой молекулы, а средняя длина свободного пробега много больше среднего расстояния между молекулами $r \sim 1/\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{kT/p} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-9} м$.

Ответ: $d = 3{,}46 \cdot 10^{-10} м$.

Задача №18

Сколько столкновений Z за 1 секунду испытывает атом неона Ne при давлении газа $P=100Па$ и температуре $T=600К,$ если его газокинетический диаметр $d = 2 \cdot 10^{-10} м$? Масса атома неона $m = 3{,}3 \cdot 10^{-26} кг$.

Решение

Согласно молекулярно-кинетической теории газа среднее число столкновений частицы за интервал времени Δt определяется формулой

$$Z = \upsilon_T \cdot \Delta t \cdot \sigma \cdot n \ , \tag{18.1}$$

где $\upsilon_T = \sqrt{3kT/m}$ – среднеквадратичная скорость частиц, σ – эффективное сечение столкновений частицы, n – концентрация частиц газа.

Используя известные формулы

$$\sigma = \pi d^2 \text{ и } n = \frac{p}{kT} \ , \tag{18.2}$$

с помощью (18.1) получим

$$Z = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \pi d^2 \frac{p}{kT} \approx 6 \cdot 10^5 \frac{1}{c} \ . \tag{18.3}$$

Ответ: $Z = 6 \cdot 10^5 \dfrac{1}{c}$.