Лекция 9

Непрерывность функции в точке

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a, если

1)функция определена в этой точке

2) существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Определение. Функция $f(x)$, не являющаяся непрерывной в точке a, называется разрывной в точке a.

Говорят еще, что функция $f(x)$ имеет разрыв в точке a.

Сформулируем определение непрерывности на языке «$\varepsilon - \delta$»:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon .$$

Определение. Число $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ называется *приращением функции* $f(x)$ *в точке* a, соответствующим *приращению аргумента* Δx.

Из определения следует, что приращение Δf функции $f(x)$ зависит как от приращения аргумента Δx, так и от точки a: $\Delta f = \Delta f(a, \Delta x)$.

Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке). *Функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* a *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

◄Доказательство. В определении непрерывности на языке «$\varepsilon - \delta$» заменим разность $f(x) - f(a)$ на Δy:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |\Delta y| < \varepsilon .$$

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.►

Теорема. Пусть *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в точке* a. *Тогда функции* $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ *также являются непрерывными в точке* a. *Если* $g(a) \neq 0$, *то функция* $f(x)/g(x)$ *будет непрерывной в точке* a.

Утверждения теоремы являются следствием теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций.

Например,

$$\lim_{x \to a}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a),$$

следовательно, функция $f(x)+g(x)$ непрерывна в точке a.

Теорема (о непрерывности сложной функции). Пусть *функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* a*, а функция* $g(y)$ *непрерывна в точке* $b = f(a)$. *Тогда сложная функция* $F(x) = g(f(x))$ *непрерывна в точке* a.

Односторонняя непрерывность функции в точке. непрерывность на интервале и отрезке

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,d)$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа* в точке a, если существует $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(c,a]$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева* в точке a, если существует $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (a,b), если функция $f(x)$ является непрерывной в каждой точке этого интервала.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, если функция $f(x)$ является непрерывной в каждой точке интервала (a,b), непрерывной справа в точке a и непрерывной слева в точке b.

Непрерывность обратной функции

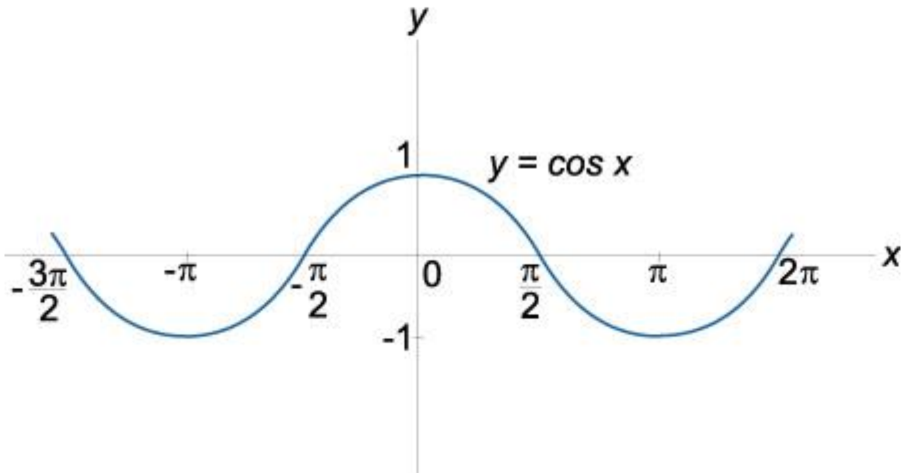
Теорема . *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a,b]$. *Пусть* $A = f(a)$, $B = f(b)$. *Предположим, что функция* $f(x)$ *возрастает на* $[a,b]$. *Тогда на отрезке* $[A,B]$ *определена функция* $g(y)$, *обратная к функции* $f(x)$. *Функция* $g(y)$ *возрастает и непрерывна на отрезке* $[A,B]$.

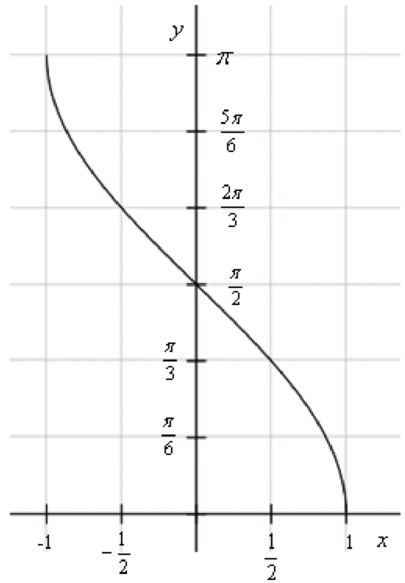
Замечание. В теореме можно заменить слово «возрастает» на слово «убывает» и отрезок $[A,B]$ на отрезок $[B,A]$.

Пример.

1) $f(x) = \cos x$, $x \in [0,\pi]$, убывает, $A = 1$, $B = -1$.

Обратная функция $g(y) = \arccos y$, $y \in [-1,1]$, убывает и непрерывна.





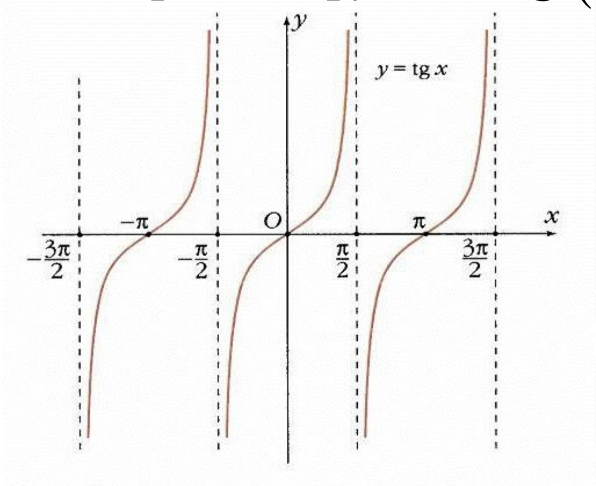
Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на интервале* (a,b), *где* $a\in\mathbb{R}$ *или* $a=-\infty$, $b\in\mathbb{R}$ *или* $b=+\infty$. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=B$, *где* $A\in\mathbb{R}$ *или,* $B\in\mathbb{R}$ *или* $B=+\infty$. *Предположим, что функция* $f(x)$ *возрастает на* (a,b). *Тогда на интервале* (A,B) *определена функция* $g(y)$, *обратная к функции* $f(x)$. *Функция* $g(y)$ *возрастает и непрерывна на интервале* (A,B).

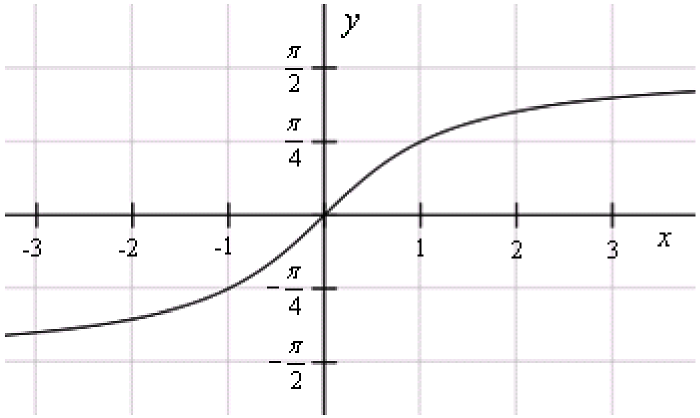
Замечание. В теореме можно заменить слово «возрастает» на слово «убывает» и интервал (A,B) на интервал (B,A).

Примеры.

1) $f(x)=\operatorname{tg}x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, возрастает, $A=-\infty,\ B=+\infty$.

Обратная функция $g(y)=\operatorname{arctg}y,\ y\in(-\infty,+\infty)$, возрастает и непрерывна.





Непрерывность элементарных функций

Определение.
Следующие функции называются *основными элементарными:*
1. $y = C$, где C — постоянная.
2. *Степенная* функция: $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.
3. *Показательная* функция: $y = a^{x}$, $a > 0, a \neq 1$.
4. *Логарифмическая* функция: $y = \log_a x, x > 0, a > 0, a \neq 1$.
5. *Тригонометрические* функции: $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$.
6. *Обратные тригонометрические* функции:
$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$

Определение. *Элементарной* называется всякая функция, которая может быть получена из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и операции композиции.

Теорема. *Элементарные функции являются непрерывными в своей области определения.*

Классификация точек разрыва

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Если функция $f(x)$ не является непрерывной в этой точке, то точка a называется ее *точкой разрыва*. В частности, точка a является точкой разрыва функции $f(x)$, если функция $f(x)$ не определена в точке a.

Различают следующие типы точек разрыва.

1. Если существует конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, но $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, то a называется точкой *устранимого разрыва*. В этом случае существуют оба односторонних предела, причем $f(a+0) = f(a-0) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Значение $f(x)$ в точке a может не существовать.

Пример. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $a = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2. Если оба односторонних предела $f(a+0)$ и $f(a-0)$ существуют, но $f(a+0) \neq f(a-0)$, то a называется *точкой разрыва первого рода*. В этом случае $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует.

Пример. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $a=0$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-1$.

3. Точка разрыва, которая не является точкой разрыва первого рода или точкой устранимого разрыва, называется *точкой разрыва второго рода*.

Примеры.

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $a=0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

2) $f(x)=2^{1/x}$, $a=0$. $\lim\limits_{x\to-0} 2^{1/x}=0$, $\lim\limits_{x\to+0} 2^{1/x}=+\infty$.

3) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $a=0$. Не существует предел функции $\sin\dfrac{1}{x}$ при $x\to 0$.

Пример.

Найти точки разрыва функции $y=\begin{cases} 2-x, & \text{при } x\le 0, \\ \cos x, & \text{при } 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } x\ge\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Решение:

Числовая ось, являющаяся областью определения функции $f(x)$, разбита на три интервала $(-\infty;0]$; $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\left[\dfrac{\pi}{2};+\infty\right)$, в каждом из которых функция $f(x)$ задана элементарными функциями: $u(x)=2-x$, $v(x)=\cos x$, $z(x)=0$.

Внутри каждого из отмеченных интервалов эти функции определены и, следовательно, непрерывны.

Значит, остается исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность только в точках $x=0$ и $x=\dfrac{\pi}{2}$, в которых стыкуются области определения функций, составляющих функцию $f(x)$.

Вычислим односторонние пределы в точке $x=0$.

$\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0}(2-x)=2$.

$\lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lim\limits_{x\to +0}\cos x=1$.

Следовательно, $x=0$ – точка неустранимого разрыва(скачок).

Теперь рассмотрим точку $x=\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x=0. \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} 0=0.$$

Предел слева равен пределу справа.

Заметим, что $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, то есть $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Отсюда следует, что в точке $x=\frac{\pi}{2}$ функция непрерывна (по определению).

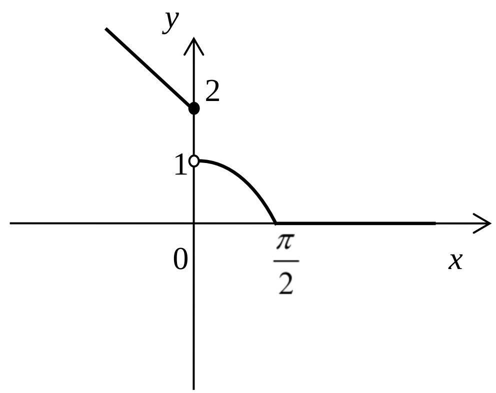


График функции $y=\begin{cases} 2-x, & \text{при } x\le 0,\\ \cos x, & \text{при } 0<x<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при } x\ge\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Пример.

Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{6}{(x-3)^2}$ и исследовать их характер.

Решение:

Функция определена во всех точках, кроме $x=3$.

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{6}{(x-3)^2}=\frac{6}{(3-0-3)^2}=\frac{6}{0^2}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{6}{(x-3)^2}=\frac{6}{(3+0-3)^2}=\frac{6}{0^2}=+\infty.$$

Точка $x=3$ является точкой разрыва 2-го рода.

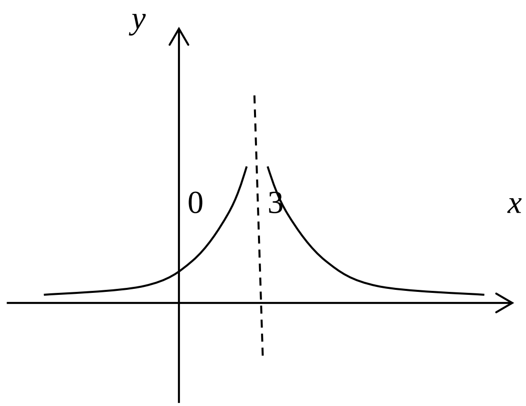


График функции $y=\dfrac{6}{(x-3)^2}$

Пример.

Найти точки разрыва функции $y=3^{\frac{-1}{x+1}}$ и определить их характер.

Решение:

Функция определена во всех точках, кроме $x=-1$.

$$\lim_{x\to -1-0} 3^{\frac{-1}{x+1}} = 3^{\frac{-1}{-1-0+1}} = 3^{\frac{-1}{-0}} = 3^{+\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x\to -1+0} 3^{\frac{-1}{x+1}} = 3^{\frac{-1}{-1+0+1}} = 3^{\frac{-1}{+0}} = 3^{-\infty} = 0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\infty$, то $x=-1$ -точка разрыва 2-го рода.

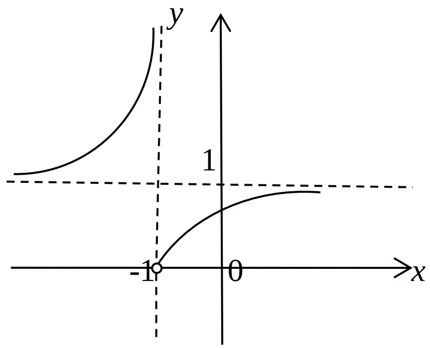


График функции $y=3^{\frac{-1}{x+1}}$

Пример.

Найти точки разрыва функции $y = \sin\dfrac{1}{x}$ и определить их характер.

Решение:

Функция определена во всех точках, кроме $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to \pm 0} \sin\dfrac{1}{x} = \sin\infty$.

Предел не существует ни конечный, ни бесконечный, ни слева, ни справа.

Следовательно, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

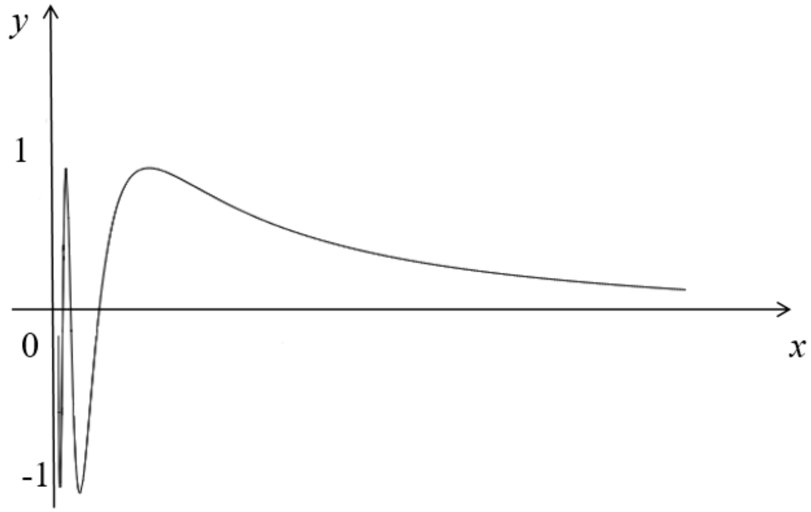


График функции $y = \sin\dfrac{1}{x}$