

5. Дифракционная решетка

Дифракционная решетка является **спектральным прибором**, с помощью которого определяется спектр электромагнитного излучения видимого диапазона. Она позволяет измерить длины волн тех монохроматических волн, которые входят в состав интересующего нас излучения. Принцип действия дифракционных решеток основан на **явлениях дифракции и интерференции**.

Простейшая дифракционная решетка, работающая на пропускание, представляет собой плоский непрозрачный экран, в котором на одинаковом расстоянии d друг от друга прорезано большое количество $N \gg 1$ одинаковых параллельных щелей шириной b . Наблюдение интерференционной картины ведется в дальней зоне дифракции, где волновой параметр

$$P_b = \sqrt{\frac{\lambda L}{b^2}} \gg 1.$$

Здесь L – расстояние между дифракционной решеткой и плоскостью наблюдения, λ – средняя длина волны падающего излучения и $b > \lambda$.

Если на дифракционную решетку падает плоская монохроматическая волна с длиной волны $\lambda > b$, то на каждой щели происходит дифракция, а дифрагированные волны, идущие от всех щелей в одном направлении, интерферируют. Таким образом, в области пространственного перекрывания дифрагированных волн наблюдается **многолучевая интерференция**.

Если плоская монохроматическая волна с длиной волны λ падает нормально на плоскость дифракционной решетки, то распределение интенсивности излучения, прошедшего через дифракционную решетку, в приближении Фраунгофера описывается выражением

$$J_P(\theta) = J_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2 \beta}.$$

Здесь $\alpha = kb \sin(\theta/2)$, $\beta = kd \sin \theta/2$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ – угол между осью z и направлением на точку наблюдения P , J_0 – максимальная интенсивность прошедшего излучения, наблюдаемая при дифракции на одной щели, (рис. 5.1).

Функция $\sin^2 \alpha / \alpha^2$ описывает распределение интенсивности волны, дифрагированной на отдельной щели, а функция $\sin^2(N\beta) / \sin^2 \beta$ – распределение

интенсивности излучения в результате интерференции N лучей, идущих под одинаковым углом θ .

Решетка занимает область $-Nd/2 < x < Nd/2$. Величина $D = Nd$ есть полная ширина решетки. Параллельные лучи, идущие от всех щелей решетки, собираются в точке наблюдения P с помощью тонкой фокусирующей линзы L .

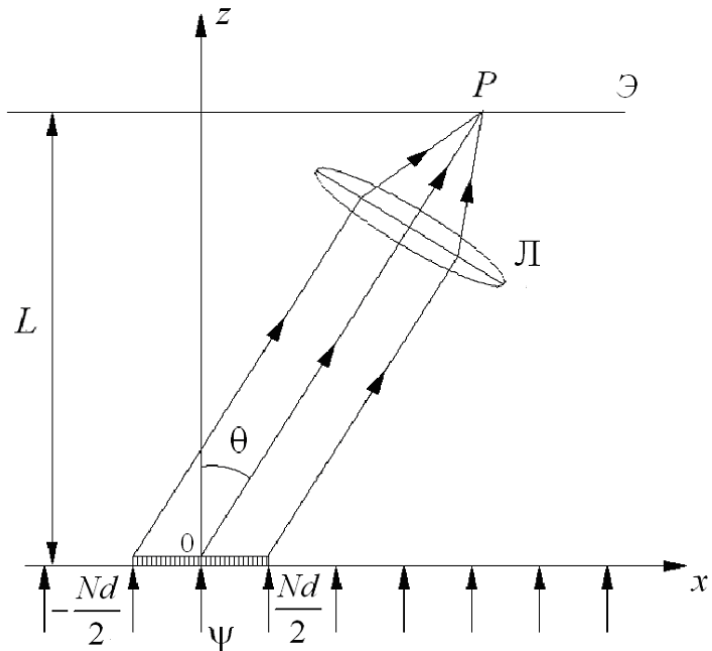


Рис. 5.1

Распределение интенсивности излучения $J_p(\theta)$ на экране наблюдения Э, расположенном параллельно плоскости дифракционной решетки xoy , приведено на рис. 5.2 для случая $N = 5$ и $d = 3b$. Четкая интерференционная

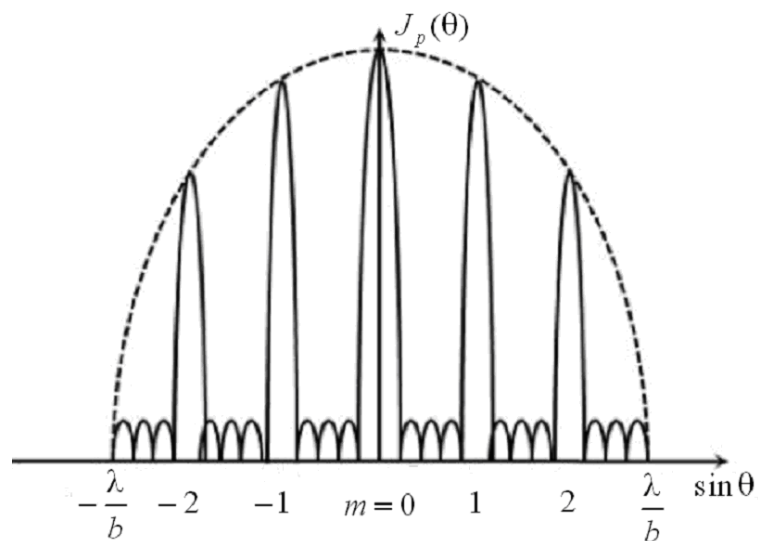


Рис. 5.2

картина обычно хорошо видна в пределах угловой ширины **центрального дифракционного максимума** для одной щели

$$\Delta\theta = 2\frac{\lambda}{b},$$

где $b \ll d$, $|\theta| \ll 1$.

Распределение интенсивности $J_p(\theta)$ содержит **главные максимумы** и **нули интенсивности**. Главные максимумы, или **спектры**, описываются формулами:

$$J_{\max.m} = J_0 \frac{\sin^2 \alpha_m}{\alpha_m^2} N^2, \quad \sin \theta_{\max.m} \approx \theta_{\max.m} = \frac{\lambda}{d} m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $\alpha_m = kb\theta_{\max.m}/2$, число m называется **порядком** главного максимума (спектра).

Главные максимумы наблюдаются в тех направлениях, для которых дифрагированные плоские монохроматические волны от двух соседних щелей приходят в точку наблюдения с разностью фаз $\Delta\Phi = 2\pi m$, т.е. в фазе и усиливают друг друга.

Угловая ширина главных максимумов, определяемая как угловое расстояние между двумя ближайшими к главному максимуму нулями интенсивности, описывается формулой

$$\Delta\theta_{\max.m} = 2\frac{\lambda}{dN}$$

и уменьшается с ростом числа щелей N , а интенсивность в главных максимумах растет пропорционально квадрату числа щелей N^2 .

Задача №13

На дифракционную решетку с периодом $d=3$ мкм (расстояние между соседними щелями) нормально падает плоская монохроматическая волна с длиной волны $\lambda = 5890$ Å ($1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ м}$). Оценить возможный наибольший порядок спектра, получаемый с помощью данной дифракционной решетки, используя 1) закономерности интерференции и 2) закономерности дифракции, если ширина щели $b = 1,5$ мкм.

Решение

Разность хода дифрагированных волн, идущих от двух соседних щелей под углом θ ,

$$\Delta r = d \sin \theta, \quad (1)$$

поэтому интерференционный максимум порядка m наблюдается при выполнении условия

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

Отсюда получаем, что максимальный порядок наблюдаемого спектра, определяемый закономерностями интерференции, соответствует $\sin \theta = 1$ и

$$m_{\max}^{\text{инт.}} = \frac{d}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{5890 \cdot 10^{-10}} = 5. \quad (3)$$

Интерференционная картина достаточно хорошо видна лишь в пределах угловой ширины центрального дифракционного максимума ($|\theta| \ll 1$)

$$\Delta \theta^{\text{диф.}} = \theta_{\max}^{\text{диф.}} - \theta_{\min}^{\text{диф.}} = 2\theta_{\max}^{\text{диф.}} = 2 \frac{\lambda}{b}, \quad (4)$$

поэтому максимальный порядок наблюдаемого спектра согласно законам дифракции Фраунгофера находится с помощью уравнения

$$d \sin \theta_{\max}^{\text{диф.}} \approx d \theta_{\max}^{\text{диф.}} = d \frac{\lambda}{b} = m_{\max}^{\text{диф.}} \lambda \quad (5)$$

или

$$m_{\max}^{\text{диф.}} = \frac{d}{b} = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 10^{-6}} = 2. \quad (6)$$

Таким образом, главное ограничение на число наблюдаемых спектров связано с дифракцией света на отдельной щели.

Ответ: $m_{\max}^{\text{инт.}} = \frac{d}{\lambda} = 5$; $m_{\max}^{\text{диф.}} = \frac{d}{b} = 2$.

Использование дифракционной решетки в качестве спектрального прибора основано на зависимости углового положения главных максимумов (спектров) с $m \neq 0$ от длины волны λ падающей на решетку волны. Если на дифракционную решетку одновременно падают сразу две плоские монохроматические волны с длинами волн λ_1 и λ_2 , то любой главный максимум порядка $m \neq 1$ разделяется на 2 максимума (рис. 5.3).

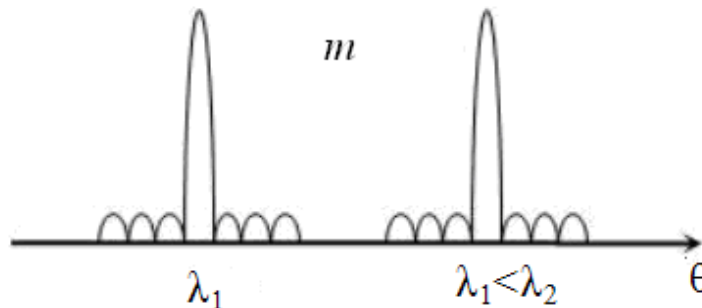


Рис. 5.3

Если уменьшать разность длин волн $\lambda_2 - \lambda_1$, то соответствующие главные максимумы одного порядка сближаются. Согласно **критерию Рэлея** максимальное допустимое сближение двух главных максимумов одного порядка, при котором они считаются пространственно разделенными, соответствует положению главного максимума для длины волны λ_2 на ближайшем нуле интенсивности для длины волны $\lambda_1 < \lambda_2$ справа от этого главного максимума.

Данная минимальная разность $\Delta\lambda$ двух длин волн, при которой главные максимумы одного порядка являются разрешенными в соответствии с критерием Рэлея, описывается формулой

$$\Delta\lambda_{\min} = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{R},$$

где $\lambda_{\text{ср}} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ и R – **разрешающая сила (способность)** спектрального прибора. Для рассматриваемой нами дифракционной решетки разрешающая сила при наблюдении спектра порядка m определяется выражением

$$R = mN,$$

где N – полное число щелей дифракционной решетки, на которые падает исследуемое излучение (может не совпадать с полным числом щелей решетки).

Задача №14

Желтая линия спектра излучения натрия представляет собой две спектральные линии с длинами волн $\lambda_1 = 589,9$ нм и $\lambda_2 = 589,66$ нм. Можно ли разрешить эти две спектральные линии с помощью дифракционной решетки шириной $D = 5$ см, имеющей $n = 100$ штрихов на 1 мм? Излучение падает нормально на плоскость решетки.

Решение

Определим минимальную разрешающую силу R дифракционной решетки, когда наблюдение ведется в первом порядке спектра $m = 1$,

$$R = mN = nD = 5000. \quad (1)$$

Минимальная разность двух длин волн, которые можно разрешить с помощью данной дифракционной решетки в первом порядке,

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{R} = \frac{589,78}{5000} = 0,117 \text{ нм}. \quad (2)$$

Поскольку разность длин волн двух спектральных линий удовлетворяет условию

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0,24 \text{ нм} > \Delta\lambda_{\min} = 0,117 \text{ нм},$$

то уже в первом порядке спектра данные спектральные линии наблюдаются в виде двух разделенных главных максимумов и, следовательно, могут быть разрешены.

Ответ: да, можно разрешить.

Задача №15

Могут ли перекрываться спектры первого и второго порядков при освещении дифракционной решетки видимым светом с длинами волн в диапазоне $4000 \div 7000 \text{ \AA}$? Свет падает перпендикулярно к плоскости дифракционной решетки.

Решение

Спектр первого порядка занимает область углов

$$\frac{\lambda_{\min}}{d} < \theta < \frac{\lambda_{\max}}{d}, \quad (1)$$

а спектр второго порядка – область углов

$$2 \frac{\lambda_{\min}}{d} < \theta < 2 \frac{\lambda_{\max}}{d}. \quad (2)$$

Поскольку

$$\frac{\lambda_{\max}}{d} = \frac{7000 \text{ \AA}}{d} < 2 \frac{\lambda_{\min}}{d} = 2 \frac{4000 \text{ \AA}}{d}, \quad (3)$$

то данные спектры не перекрываются.

Ответ: не перекрываются.