Лекция 12. Ряды с произвольными членами. Абсолютная и условная сходимость

Рассмотрим ряды с членами произвольных знаков. Такие ряды называются *знакопеременными*.

Теорема (достаточное условие сходимости знакопеременного ряда). *Пусть дан ряд с произвольными* (*действительными или комплексными*) *членами*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,. \qquad (15)$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| , \qquad (16)$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда, то сходится и данный числовой ряд.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд

$$(u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \ldots + (u_n + |u_n|) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$$

Так как $0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n|$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$ сходится (так как сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$),

то по признаку сравнения следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n + |u_n|\right)$.

Исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n + |u_n|\right) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится как разность двух сходящихся рядов. ■

Мы доказали, что из условия сходимости ряда (16) вытекает сходимость ряда (15). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, а ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится (это будет доказано), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин его членов, расходится (гармонический ряд).

Определение. Ряд с произвольными (действительными или комплексными) членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, называют *абсолютно сходящимся*, если сходится действительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ из абсолютных величин его членов.

Используя данное определение доказанную выше теорему можно сформулировать так: *Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.*

Пример. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

◀ Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|. \tag{19}$$

Так как при любом n имеет место соотношение $\left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле, $\alpha = 2 > 1$), то по признаку сравнения ряд (19) сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. ▶

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Определение. *Знакочередующимся рядом* называется ряд, у которого члены попеременно то положительны, то отрицательны, т.е. ряд такого вида:

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{, где } a_n > 0,\ \forall n \in \mathrm{N}. \quad (20)$$

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий достаточный признак сходимости:

Теорема (признак Лейбница). *Пусть знакочередующийся ряд* (20) *удовлетворяет условиям:*

1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда этот знакочередующийся ряд сходится, его сумма неотрицательна и не превосходит первого члена.

Доказательство. Рассмотрим сначала частичную сумму четного числа членов ряда (20)

$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$. Из первого условия теоремы следует, что выражение в каждой скобке неотрицательно. Значит, сумма $S_{2n} \geq 0$ и не убывает с возрастанием номера n. С другой стороны эту сумму можно записать так:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Заметим, что $S_{2n} \leq a_1$. Таким образом, последовательность S_2, S_4, $S_6, \ldots$, $S_{2n}\ldots$ не убывает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, причем $0 \leq S \leq a_1$.

Рассмотрим теперь частичные суммы нечетного числа членов ряда (20). Очевидно, что $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} + a_{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + 0 = S,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ по второму условию теоремы. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ как при четном, так и при нечетном n. Следовательно, ряд (20) сходится, причем $0 \leq S \leq a_1$. ■

Если знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n > 0$, $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяет условиям признака Лейбница, то модуль суммы всякого его остатка $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ оценивается сверху числом a_{n+1}: $|R_n| \leq a_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$. Для вычисления суммы такого ряда с заданной точностью δ решаем неравенство $a_{n+1} < \delta$, откуда находим количество членов ряда, которое необходимо взять для вычисления суммы ряда с заданной точностью δ. Далее вычисляем n-ю частичную сумму $S \approx S_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

◄ Проверим условия признака Лейбница для данного знакочередующегося ряда с $a_n = \frac{1}{n!}$:

1) последовательность $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ убывает;

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

Следовательно, по признаку Лейбница исходный ряд сходится. ►

Пример. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ с точностью до 0,01.

◄ Данный знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) Последовательность $\left\{\frac{1}{n^3+1}\right\}$ убывает;

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} = 0$.

Следовательно, справедливо неравенство

$$\left|R_n\right| \le a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3+1}.$$

Если $a_{n+1} < \delta$, то и $|R_n| < \delta$. Следовательно, достаточно найти минимальное число $n \in \mathrm{N}$, для которого выполняется неравенство

$$\frac{1}{(n+1)^3+1} < 0{,}01.$$

Преобразуем это неравенство: $(n + 1)^3 + 1 > 100$, $n > \sqrt[3]{99} - 1 \approx 3{,}62.$ В результате находим, что $n = 4$. Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} \approx S_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{28} + \frac{1}{65} \approx -0{,}41$$

с точностью до 0,01. ▸

Условно сходящиеся ряды

Определение. Ряд с произвольными (действительными или комплексными) членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называют *условно сходящимся*, если он сходится, но не является абсолютно сходящимся, т.е. если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Заметим, что деление сходящихся рядов на абсолютно и условно сходящиеся существенно. Например, для условно сходящихся рядов сумма ряда не равна сумме положительных и сумме отрицательных членов ряда, как это имеет место для абсолютно сходящихся рядов.

Пример. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$.

◄ Сначала изучим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$. В нашем случае $|u_n|=\frac{1}{n^{\alpha}}$. Если $\alpha \le 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| \ne 0$ и, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ расходится.

При $\alpha > 0$ возможны два варианта:

а) если $\alpha > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится, откуда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ сходится абсолютно;

б) если $0 < \alpha \le 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится, значит, исходный ряд не будет сходиться абсолютно.

Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ на условную сходимость. Докажем, что этот ряд удовлетворяет признаку Лейбница.

Действительно, во-первых, последовательность $\left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\}$ убывает, во-вторых, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$. Согласно признаку Лейбница ряд сходится.

Таким образом, при $\alpha \le 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ расходится, при $0 < \alpha \le 1$ сходится условно, при $\alpha > 1$ сходится абсолютно. ▶

Пример. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\ln n}$.

◀ Проверим, сходится ли ряд из модулей членов ряда, т.е. ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Функция $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ удовлетворяет всем требованиям, наложенным на нее в интегральном признаке Коши,

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\ln x\Big|_{2}^{b}\right)=+\infty .$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится, т.е.ряд $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ не является абсолютно сходящимся.

Исследуем ряд $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ на условную сходимость. Последовательность $\left\{\frac{1}{n\ln n}\right\}$ убывает, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}=0$. Следовательно, по признаку Лейбница ряд сходится. Значит, данный ряд сходится условно. ▶