9. Туннельный эффект. Соотношение неопределенностей

Согласно законам классической механики при движении частицы массой m в потенциальном поле $U(x)$ для произвольной точки x и любого момента времени t ее полная механическая энергия E, равная сумме кинетической энергии $K = m\upsilon^2(t)/2$ и потенциальной энергии $U(x)$, сохраняется постоянной

$$E = \frac{m\upsilon^2(t)}{2} + U(x) = const.$$

Отсюда следует, что частица может находиться только в той области пространства, где выполняется условие

$$E \geq U(x).$$

Нахождение частицы в тех областях, где это условие не выполняется, запрещено законом сохранения энергии.

В квантовой механике энергия частицы определяется не в отдельно взятой точке пространства и не в фиксированный момент времени, а для стационарного состояния частицы в целом, т.е. для всей области ее возможного движения и для бесконечно большого интервала времени. При этом энергия E стационарного состояния частицы описывается формулой

$$E = \langle K \rangle + \langle U \rangle,$$

где угловые скобки обозначают усреднение кинетической K и потенциальной U энергий по всей области возможного движения частицы с помощью волновой функции ψ.

Таким образом, что в области возможного движения частицы в случае квантовой механики выполняется более слабое условие

$$E \geq \langle U \rangle,$$

чем в случае классической механики, и нет никаких оснований считать невозможным нахождения частицы в области, где

$$E < U(x) < \infty.$$

Туннельный эффект заключается в том, что частица проникает в область, где $E < U(x)$, т.е. запрещенную законами классической механики. Он связан с делокализацией частицы в пространстве и невозможностью точно измерить энергию в определенный момент времени.

Задача №28

Определить, при каких условиях для потенциальной ямы, изображенной на рис.1, возможно хотя бы одно стационарное состояние с энергией $E < U_0$ (в этом состоянии частица совершает финитное движение). Масса частицы *m*.

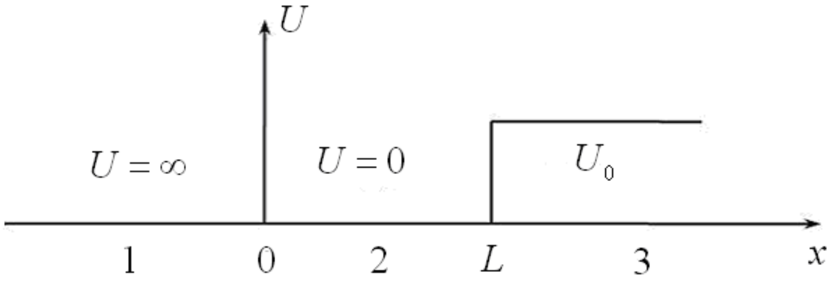

Рис. 1

Решение

Согласно условиям задачи, вся область $-\infty < x < \infty$ делится на три части, где стационарное уравнение Шредингера имеет различный вид и, соответственно, различные решения.

1. $x < 0,\ U = \infty$. Вероятность нахождения частицы с конечной энергией $E < \infty$ в этой области равна нулю, поэтому

$$\varphi_1 = 0,\ x < 0. \tag{1}$$

2. $0 < x < L,\ U = 0$. Стационарное уравнение Шредингера в этой области имеет вид

$$E\varphi_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_2}{dx^2}, \tag{2}$$

где волновая функция φ_2 удовлетворяет граничному условию

$$\varphi_2\big|_{x=0} = 0. \tag{3}$$

Решение граничной задачи (2) – (3) запишется следующим образом

$$\varphi_2 = A\sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right), \tag{4}$$

где *A* – постоянная (проверить с помощью подстановки).

3. $x > L,\ U = U_0$. Стационарное уравнение Шредингера в этой области принимает вид

$$E\varphi_3 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_3}{dx^2} + U_0\varphi_3, \tag{5}$$

где волновая функция φ_3 удовлетворяет граничному условию

$$\varphi_3 \to 0, \quad x \to \infty. \tag{6}$$

Решение граничной задачи (5) – (6) запишется в виде:

$$\varphi_3 = Be^{-\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}x}, \quad E < U_0, \tag{7}$$

где B – постоянная (проверить с помощью подстановки).

Таким образом, вероятность нахождения частицы в области $x > L$, запрещенной законами классической механики, отлична от нуля, поскольку $\varphi \neq 0$.

Полная волновая функция стационарного состояния частицы с энергией $E < U_0$

$$\psi(x,t) = \begin{cases} 0, \quad x < 0; \\ A\sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \qquad 0 < x < L; \\ Be^{-\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}x}e^{-i\frac{Et}{\hbar^2}}, \qquad x > L, \end{cases} \tag{8}$$

должна быть непрерывной вместе со своей первой производной по x на границе потенциальной ямы $x=L$:

$$A\sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L\right)e^{-i\frac{Et}{\hbar}} = Be^{-\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}L}, \tag{9}$$

$$A\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\cos\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L\right) = -B\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}e^{-\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}L}. \tag{10}$$

Если поделить равенство (9) на равенство (10), то получим уравнение

$$tg\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L\right) = -\sqrt{\frac{E}{U_0 - E}}, \tag{11}$$

определяющее энергию E стационарных состояний частицы. Для анализа этого уравнения удобно использовать графический метод. С этой целью необходимо построить графики зависимостей функций

$$f_1 = tg(kL) \text{ и } f_2 = -\sqrt{\frac{kL}{k_0L - kL}}$$

от параметра kL (см. рис. 2). Очевидно, что существует, по крайней мере,

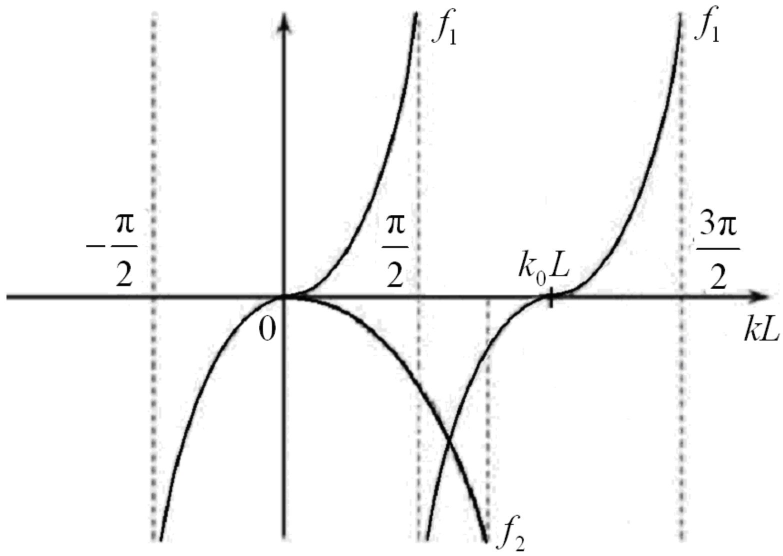

Рис. 2

одно решение (графики пересекаются), если

$$k_0L = \sqrt{\frac{2mU_0}{\hbar^2}}L > \frac{\pi}{2} \tag{12}$$

или

$$U_0 > \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}. \tag{13}$$

Если потенциальный барьер в области *x > 0* имеет конечную ширину, т.е.

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & L < x < L_1; \\ 0, & x > L_1, \end{cases}$$

частица с энергией $E < U_0$ за конечное время выйдет за пределы потенциальной ямы в область свободного движения $x > L_1$. В этом заключается туннельный эффект, наблюдаемый в микромире.

Ответ: $U_0 > \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$.

Задача №29

Вычислить коэффициент прохождения *D* частицы с энергией $E = 5$эВ прямоугольного потенциального барьера высотой $U_0 = 10$эВ и шириной *l = 1Å,* если масса частицы 1) $m = m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг; 2) $m = m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг.

Решение

Коэффициент прохождения *D* частицы с энергией *E* прямоугольного потенциального барьера высотой U_0 и шириной *l* описывается формулой

$$D = \frac{16k_1^2 k_2^2}{\left(k_1^2 + k_2^2\right)^2} e^{-2k_2 l}, \tag{1}$$

где $k_1 = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$; $k_2 = \sqrt{\dfrac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$ и $2k_2 l >> 1$.

Согласно условиям задачи

$$E = U_0 - E, \quad k_1 = k_2, \tag{2}$$

поэтому

$$D = 4e^{-2k_1 l}. \tag{3}$$

В случае электрона

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m_e E}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{10^{-68}}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{10}\ \text{м}^{-1} \tag{4}$$

и

$$D_e = 4e^{-2{,}4} \approx 0{,}36.$$

Для протона

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m_p E}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{10^{-68}}} \approx 5{,}2 \cdot 10^{11}\ \text{м}^{-1}$$

и

$$D_p = 4e^{-2 \cdot 5{,}17 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-10}} = \frac{4}{e^{103{,}4}} = 5 \cdot 10^{-45}. \tag{5}$$

Отметим, что коэффициент прохождения протона через потенциальный барьер становится равным 0,36, если ширину потенциального барьера уменьшить до 0,023Å.

Ответ: $D_e = 0{,}36$; $D_p = 5 \cdot 10^{-45}$.

В квантовой механике определяются так называемые **дополнительные динамические величины**, для которых не существует состояний, где эти величины одновременно являются точно определенными. Для дополнительных величин *A* и *B* справедливо соотношение **неопределенностей Гейзенберга**, согласно которому

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{\hbar}{2},$$

где $\Delta A = \sqrt{\left\langle A^2 \right\rangle - \left\langle A \right\rangle^2}$ и $\Delta B = \sqrt{\left\langle B^2 \right\rangle - \left\langle B \right\rangle^2}$, $\hbar = h/2\pi$, есть среднеквадратичные отклонения величин *A* и *B*, *h* – постоянная Планка. Здесь угловые скобки обозначают усреднение с помощью волновой функции. Примером дополнительных величин являются соответствующие пары координат и проекций импульса частицы на координатные оси: $x,\ p_x;\ y,\ p_y;\ z,\ p_z$. Вследствие соотношения неопределенностей для координат и импульса для движущейся частицы в квантовой механике нельзя ввести такие характеристики как радиус-вектор и траектория движения частицы, а сама частица всегда делокализована в пространстве.

Задача №30

Оценить время τ распада квазистационарного состояния частицы с массой m и энергией E, локализованного в симметричной прямоугольной потенциальной яме шириной L и глубиной $U_0 > E$, если коэффициент прохождения стенки потенциальной ямы для частицы равен $D << 1$. Зависимость потенциальной энергии U частицы от координаты x приведена на рис. 1.

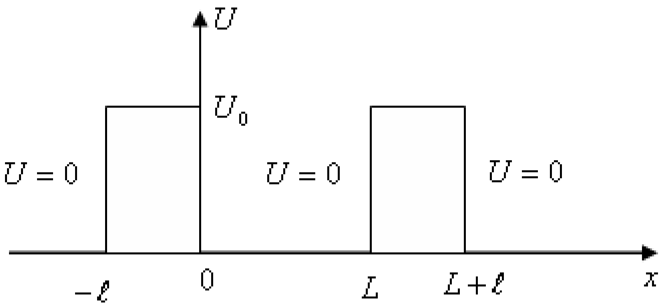

Рис. 1

Решение

Благодаря туннельному эффекту частица может пройти через потенциальный барьер стенок и перейти в состояние свободного движения в области $x < -\ell$ или $x > L + \ell$. В связи с этим состояние частицы, локализованное внутри потенциальной ямы, является **квазистационарным** и описывается волновой функцией следующего вида

$$\psi(x,t) = \varphi(x) e^{-i\frac{Et}{\hbar} - \frac{t}{\tau}}, \tag{1}$$

где τ - время распада локализованного внутри потенциальной ямы состояния частицы.

По условию задачи вероятность прохождения частицы через потенциальный барьер стенок при одном столкновении со стенкой равно D. Если скорость движения частицы внутри потенциальной ямы $\upsilon_{ср}$, то в единицу времени происходит

$$N = \frac{L}{\upsilon_{ср}} \tag{2}$$

таких столкновений и полная вероятность P вылета частицы за пределы потенциальной ямы в единицу времени

$$P = ND = \frac{L}{\upsilon_{\text{ср}}} D \ , \tag{3}$$

где $P < 1$.

Внутри потенциальной ямы частица обладает кинетической энергией

$$E = \left\langle \frac{m\upsilon^2}{2} \right\rangle = \frac{m}{2} \left\langle \upsilon^2 \right\rangle \ , \tag{4}$$

где угловые скобки обозначают усреднение с помощью волновой функции частицы, поэтому средняя скорость движения частицы

$$\upsilon_{\text{ср}} = \sqrt{\left\langle \upsilon^2 \right\rangle} = \sqrt{2E/m} \ . \tag{5}$$

Из формул (3) и (5) следует, что время распада

$$\tau = \frac{1}{P} = \frac{\upsilon_{\text{ср}}}{LD} = \frac{1}{LD}\sqrt{\frac{2E}{m}} \ . \tag{6}$$

Данная модель впервые была использована в 1928г. Г.Гамовым для расчета альфа-распада радиоактивных атомных ядер, где α - частица за счет туннельного эффекта преодолевает потенциальный барьер, связанный с сильным взаимодействием между нуклонами ядра.

Ответ: $\tau = \dfrac{1}{LD}\sqrt{\dfrac{2E}{m}}$.

Задача №31

Используя соотношение неопределенностей для координат и импульса, оценить минимальную кинетическую энергию $E_{\text{кин.min}}$ нуклона в атомном ядре, если масса нуклона $m_н = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг и радиус ядра $r_я = 10^{-13}$ см.

Решение

Согласно соотношению неопределенностей

$$\Delta p_x \Delta x \ge \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta p_y \Delta y \ge \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta p_z \Delta z \ge \frac{\hbar}{2}, \tag{1}$$

где

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle - \left\langle x \right\rangle^2} \ , \quad \Delta y = \sqrt{\left\langle y^2 \right\rangle - \left\langle y \right\rangle^2} \ , \quad \Delta z = \sqrt{\left\langle z^2 \right\rangle - \left\langle z \right\rangle^2} \ , \tag{2}$$

$$\Delta p_x = \sqrt{\left\langle p_x^2 \right\rangle - \left\langle p_x \right\rangle^2}\,,\ \ \Delta p_y = \sqrt{\left\langle p_y^2 \right\rangle - \left\langle p_y \right\rangle^2}\,,\ \ \Delta p_z = \sqrt{\left\langle p_z^2 \right\rangle - \left\langle p_z \right\rangle^2}\,. \tag{3}$$

В случае финитного движения частицы, когда частица движется в заданной ограниченной области пространства, можно выбрать такую систему координат, что

$$\left\langle x \right\rangle = \left\langle y \right\rangle = \left\langle z \right\rangle = 0\,. \tag{4}$$

Поскольку для финитного движения всегда

$$\left\langle p_x \right\rangle = \left\langle p_y \right\rangle = \left\langle p_z \right\rangle = 0\,,$$

то из (2) – (4) следует, что для координат и импульса нуклона в атомном ядре справедливы следующие формулы:

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \Delta x^2,\ \left\langle y^2 \right\rangle = \Delta y^2,\ \left\langle z^2 \right\rangle = \Delta z^2\,, \tag{5}$$

$$\left\langle {p_x}^2 \right\rangle = \Delta {p_x}^2,\ \left\langle {p_y}^2 \right\rangle = \Delta {p_y}^2,\ \left\langle {p_z}^2 \right\rangle = \Delta {p_z}^2\,. \tag{6}$$

Здесь предполагается, что ядро сферической формы, а его центр находится в начале системы координат.

Для оценки кинетической энергии нуклона в атомном ядре положим

$$\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta z^2\,,\ \left\langle x^2 \right\rangle = \left\langle y^2 \right\rangle = \left\langle z^2 \right\rangle = \frac{1}{3} r_я^2\,, \tag{7}$$

и

$$\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta z^2\,,\ \left\langle {p_x}^2 \right\rangle = \left\langle {p_y}^2 \right\rangle = \left\langle {p_z}^2 \right\rangle = \frac{1}{3} p^2\,. \tag{8}$$

Здесь $r_я$ – радиус атомного ядра.

Тогда согласно (1) – (8) находим, что

$$p_{\min}^2 \geq \frac{9}{4} \frac{\hbar^2}{r_я^2}\,. \tag{9}$$

Для основного состояния нуклона можно положить

$$p_{\min}{}^2 = \frac{9}{4} \frac{\hbar^2}{r_я^2} \tag{10}$$

и получить следующую оценку минимальной кинетической энергии

$$E_{\text{кин.}\min} = \frac{p_{\min}^2}{2m_н} = \frac{9}{8} \frac{\hbar^2}{m_н r_я^2} \approx 4{,}2 \cdot 10^7 \text{ эВ}. \tag{11}$$

Эта величина на много порядков превышает кинетическую энергию электронов в атоме.

Отметим, что чем меньше область локализации частицы, тем больше кинетическая энергия частицы и тем большая потенциальная энергия требуется для её локализации.

Ответ: $E_{\text{кин.min}} = 4,2 \cdot 10^7$ эВ.

Задача №32

Пучок электронов, летящих со скоростью $\upsilon = 10^3$ м/с в положительном направлении оси *z*, частично проходит через щель шириной $b = 0,1$ мм в экране, перпендикулярном к оси *z*. Определить ширину Δx центрального максимума распределения электронов, наблюдаемого на экране, расположенном на расстоянии $L = 1$ м от экрана со щелью. Щель прорезана параллельно оси *y*.

Решение

Пространственное распределение электронов определяется с помощью их волновой функции ψ. Пучок электронов с энергией *E* и импульсом *P*, падающий на экран со щелью, описывается волной де Бройля

$$\psi(z,t) = Ce^{i(kz-\omega t)}, \tag{1}$$

где *C* – нормировочная постоянная, $k = p/\hbar = m\upsilon/\hbar$, $\omega = E/\hbar = m\upsilon^2/2\hbar$. Соответствующая длина волны де Бройля

$$\lambda_B = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^3} \approx 7 \cdot 10^{-7}\,\text{м} << b. \tag{2}$$

Волна (1) дифрагирует на щели, а распределение электронов, описываемое величиной $|\psi_A|^2$, наблюдается на экране, для которого волновой параметр

$$P_B = \sqrt{\frac{\lambda_B L}{b^2}} \approx 8,3 >> 1. \tag{3}$$

Здесь ψ_A - дифрагированная волновая функция электрона за щелью.

Таким образом, для нахождения волновой функции ψ_A можно использовать приближение Фраунгофера и с её помощью оценить ширину центрального дифракционного максимума на экране наблюдения:

$$\Delta x = 2\frac{\lambda_B}{b}L = 1,4 \cdot 10^{-2}\,\text{м}. \tag{4}$$

В область шириной Δx попадает около 90% всех электронов, прошедших через щель.

Прохождение электронов через щель шириной *b* можно рассматривать как измерение координаты *x* электронов пучка с неопределенностью (погрешностью)

$$\Delta x_{\text{изм}} = \frac{b}{2}. \tag{5}$$

После прохождения щели электроны движутся в пределах угла

$$\Delta\theta = 2\frac{\lambda_B}{b}, \qquad (6)$$

что приводит к неопределенности компоненты импульса p_x этих электронов

$$\Delta p_{x.\text{изм}} = \frac{1}{2} p\Delta\theta = \frac{1}{2} m\upsilon \cdot 2\frac{\lambda_B}{b} = \frac{h}{b}. \qquad (7)$$

Из (5) и (7) следует соотношение неопределенностей для пучка электронов, прошедших через щель, записываемое в виде

$$\Delta x_{\text{изм}} \Delta p_{x.\text{изм}} = \frac{h}{2},$$

что согласуется с общей формулой для соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Ответ: $\Delta x = 2\frac{\lambda_B}{b} L = 2\frac{h}{bm\upsilon} L = 1{,}4 \cdot 10^{-2}$ м.

Соотношение неопределенностей для энергии и времени

При измерении энергии E стационарного состояния системы в течение времени Δt справедливо соотношение неопределенностей

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

где ΔE – неточность (погрешность) определения энергии идеальным прибором. Эта неопределенность энергии обусловлена обменом энергии между системой и измерительной системой за счет их взаимодействия, который может быть уменьшен до нуля только при бесконечной длительности процесса измерения.

Если система находится в нестационарном состоянии с конечным временем жизни τ, то в этом случае также справедливо соотношение неопределенностей для энергии и времени в виде

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau},$$

где ΔE – неопределенность энергии нестационарного состояния и τ – характерное время измерения средних значений динамических величин системы. Таким образом, допустимые энергетические уровни нестационарных состояний занимают на оси энергии область конечной ширины ΔE.

Все возбужденные уровни атомов имеют конечное время жизни, определяемое вероятностью спонтанного перехода атома на более низкие энергетические уровни с излучением фотона. Только основное состояние атома с наименьшей энергией обладает бесконечно большим временем жизни и точно определенным значением энергии.

Задача №33

С помощью соотношения неопределенностей оценить частотную ширину спектральной линии излучения атома, если время жизни возбужденного состояния атома τ=10^{-8}с.

Решение

Частота спектральной линии излучения атома при его переходе из возбужденного состояния 2 с энергией E_2 в основное состояние 1 с энергией E_1 описывается формулой

$$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}. \qquad (1)$$

Если время жизни возбужденного состояния 2 равно τ, то согласно соотношению неопределенностей ширина энергетического этого уровня

$$\Delta E_2 \approx \frac{\hbar}{\tau}. \qquad (2)$$

Соответствующая ширина спектральной линии

$$\omega_{21} = \frac{\Delta E_2}{\hbar} \approx \frac{1}{\tau} = 10^8 \frac{1}{\text{с}}. \qquad (3)$$

Поскольку время жизни основного состояния атома бесконечно большое, то ΔE_1=0.

Для видимого диапазона частот $\omega_{21} \sim 10^{14} - 10^{15}$ 1/с, поэтому $\Delta\omega_{21}/\omega << 1$ и излучение атома является квазимонохроматическим.

Ответ: $\Delta\omega_{21} \approx 1/\tau = 10^8$ 1/с.