2. Интерференция скалярных плоских монохроматических волн

Явление **интерференции** заключается в **пространственном перераспределении полной интенсивности** двух и более волн при их пространственном наложении, которое не сводится к простому сложению интенсивностей. Для двух скалярных волн ψ_1 и ψ_2 количественное описание интерференционной картины основано на использовании:

1) **принципа суперпозиции волновых полей**, когда полное волновое поле

$$\psi_P = \psi_1 + \psi_2\,;$$

2) определения **интенсивности** J_P как квадратичной по волновому полю ψ_P величины, усредненной по времени $\Delta t >> T$, где T – период колебаний полей,

$$J_P \sim \left\langle \psi_P^2 \right\rangle = \left\langle \psi_1^2 \right\rangle + \left\langle \psi_2^2 \right\rangle + 2\left\langle \psi_1 \cdot \psi_2 \right\rangle.$$

Измеряемой величиной считается интенсивность J_P, а не само волновое поле ψ_P. Интерференция наблюдается в том случае, если

$$\left\langle \psi_1 \cdot \psi_2 \right\rangle \neq 0 \text{ и } J_P \neq J_1 + J_2\,.$$

При решении задач на расчет стационарной картины интерференции необходимо перейти от ненаблюдаемого распределения волнового поля ψ_P к измеряемому распределению интенсивности J_P и определить положения ее максимумов и минимумов.

Сложение скалярных монохроматических волн заключается в сложении локальных гармонических колебаний, происходящих вдоль одной прямой.

Задача №4

Определить амплитуду A и фазу Φ результирующих колебаний в точке, где осуществляется наложение трех скалярных плоских монохроматических волн с одинаковыми амплитудами a и одинаковыми частотами ω, если фазы колебаний этих волн в данной точке равны Φ_1, $\Phi_1+\pi/2$ и $\Phi_1+3\pi/2$. Здесь $\Phi_1=\omega t$, где t – время.

Решение

При сложении гармонических колебаний, происходящих с одинаковой частотой вдоль одной прямой, удобно использовать **метод векторных диаграмм**. В этом методе гармонические колебания вдоль, например, оси x

$$x = a\cos(\omega t + \Phi_0)$$

представляются с помощью вектора $\vec{a}$, длина которого равна амплитуде колебаний *a*, а угол между вектором $\vec{a}$ и осью *x* в любой момент времени *t* численно равен фазе колебаний (рис.1)

$$\Phi(t) = \omega t + \Phi_0 .$$

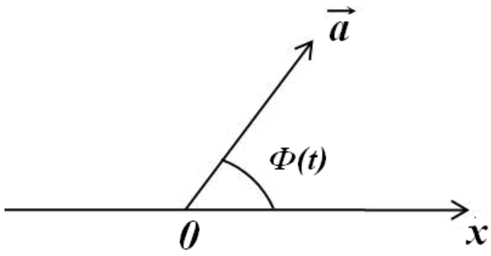

Рис.1

Таким образом, вектор $\vec{a}$ вращается вокруг точки *x* = 0 с постоянной угловой скоростью $d\varphi/dt = \omega$, а его проекция на ось *x* совершает гармонические колебания с амплитудой *a* и частотой ω около точки *x* = 0.

Для сложения двух гармонических колебаний, происходящих с одинаковой частотой вдоль оси *x*, необходимо из точки *x* = 0 построить два соответствующих вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ в некоторый фиксированный момент времени (например, при $t = 0$). Сумма этих векторов

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

дает проекцию на ось *x*, определяющую амплитуду *a* (длина вектора $\vec{a}$) и фазу Φ(*t*) (угол между вектором $\vec{a}$ и осью *x*) результирующих колебаний.

В рассматриваемой задаче согласно принципу суперпозиции полное волновое поле ψ_P в точке наблюдения

$$\psi_P = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = a\cos\Phi_1 + a\cos(\Phi_1 + \frac{\pi}{2}) + a\cos(\Phi_1 + \frac{3\pi}{2}). \qquad (1)$$

Соответствующая векторная диаграмма трех складываемых гармонических колебаний для момента времени $t = 0$ показана на рис.2.

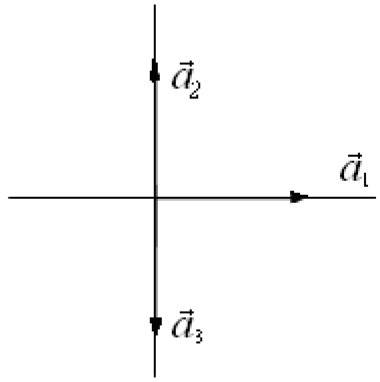

Рис.2

Из рисунка видно, что $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3=\vec{a}_1$, поэтому для произвольного момента времени результирующие гармонические колебания совпадают с гармоническими колебаниями волнового поля ψ_1 как по амплитуде, так и по фазе.

Ответ: амплитуда результирующих колебаний $A = a$, фаза $\Phi = \Phi_1$.

Задача №5

При какой разности хода $\Delta r = 2L_1 - L_2$ лучей 1 и 2, выходящих из источника *S*, в точке наблюдения *P*: 1) интенсивность излучения максимальная; 2) интенсивность излучения минимальная?

Длина волны обоих лучей одинакова и равна λ. При отражении луча *1* от зеркала *M* фаза волны увеличивается на π, а интенсивность не меняется. Расположение зеркал и ход лучей показаны на рис. 1.

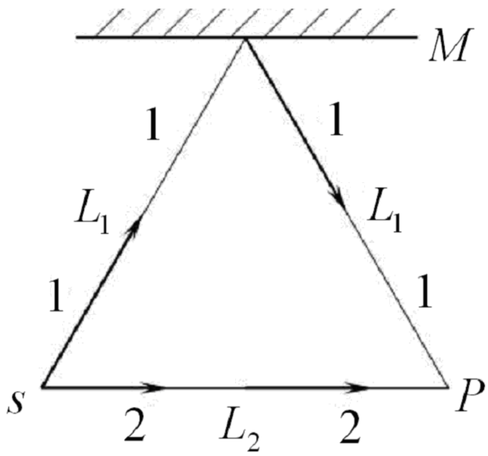

Рис. 1

Решение

Согласно принципу суперпозиции волновое поле в точке наблюдения *P*

$$\psi_P = \psi_1 + \psi_2 . \qquad (1)$$

С помощью векторной диаграммы легко показать, что максимальная амплитуда (и, соответственно, интенсивность) результирующих колебаний получается при разности фаз колебаний

$$\Delta\Phi_{\max} = \Phi_1 - \Phi_2 = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \tag{2}$$

а минимальная амплитуда – при разности фаз

$$\Delta\Phi_{\min} = \pi(2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \ . \tag{3}$$

Для плоской монохроматической волны, которую можно использовать для приближенного описания фазы каждого луча, набег фазы при прохождении расстояния r описывается формулой

$$\Delta\Phi = \vec{k}\vec{r} = kr = \frac{2\pi}{\lambda} r \,, \tag{4}$$

где волновой вектор $\vec{k}$ направлен вдоль радиус-вектора $\vec{r}$ по ходу луча.

В соответствии с условиями задачи

$$\Delta\Phi_1 = 2kL_1 + \pi = \frac{4\pi}{\lambda} L_1 + \pi \,,\ \Delta\Phi_2 = kL_2 = \frac{2\pi}{\lambda} L_2 \,, \tag{5}$$

поэтому разность фаз складываемых в точке P гармонических колебаний

$$\Delta\Phi_{12} = \Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2 = \frac{4\pi}{\lambda} L_1 + \pi - \frac{2\pi}{\lambda} L_2 . \tag{6}$$

Максимальная амплитуда результирующих колебаний наблюдается при

$$\Delta\Phi_{12} = 2\pi m = \frac{4\pi}{\lambda} L_1 + \pi - \frac{2\pi}{\lambda} L_2 \tag{7}$$

или

$$2L_1 - L_2 = (m - \frac{1}{2})\lambda \,,\ m = 1, 2, 3, ... \ , \tag{8}$$

а минимальная амплитуда – при

$$\Delta\Phi_{12} = \pi(2n+1) = \frac{4\pi}{\lambda} L_1 + \pi - \frac{2\pi}{\lambda} L_2 \tag{9}$$

или

$$2L_1 - L_2 = n\lambda \,,\ n = 1, 2, 3, ... \ . \tag{10}$$

Здесь учтено, что для сторон треугольника $2L_1 - L_2 > 0$.

Следует напомнить, что в результате интерференции происходит локальное увеличение или уменьшение интенсивности полного волнового поля, что связано с пространственным перераспределением интенсивности волны в плоскости наблюдения, где находится точка P. Полная энергия суммарного волнового поля во всем пространстве сохраняется постоянной.

Ответ: интенсивность максимальная, если $2L_1 - L_2 = (m - \frac{1}{2})\lambda$, $m = 1, 2, 3, ...$ интенсивность минимальная, если $2L_1 - L_2 = n\lambda$, $n = 1, 2, 3, ...$.

Задача №6

На плоский экран наблюдения падают две плоские монохроматические скалярные волны, имеющие одинаковые амплитуду *a*, частоту ν и начальную фазу $\Phi_0 = 0$. Волновые векторы $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ волн лежат в плоскости *xoz*, образуют угол α с нормалью к плоскости экрана и ориентированы симметрично относительно этой нормали (см. рис. 1). Фазовая скорость волн υ. Найти ширину Δ интерференционных полос, наблюдаемых на экране в плоскости *xoy*.

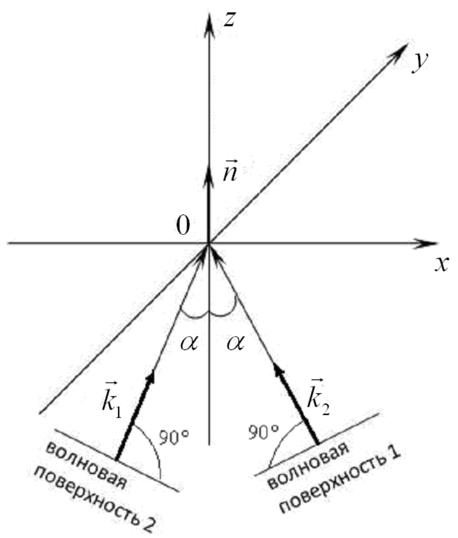

Рис. 1

Решение

Согласно принципу суперпозиции полное волновое поле ψ_P в плоскости наблюдения *xoy* запишется в виде

$$\psi_P(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t), \quad z = 0, \tag{1}$$

где

$$\psi_1(\vec{r}, t) = a\cos(\vec{k}_1\vec{r} - \omega t),\ \vec{k}_1 = (k\sin\alpha, 0, k\cos\alpha),\ k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \lambda = \frac{\upsilon}{\nu}, \tag{2}$$

$$\psi_2(\vec{r}, t) = a\cos(\vec{k}_2\vec{r} - \omega t),\ \vec{k}_2 = (-k\sin\alpha, 0, k\cos\alpha),\ \omega = 2\pi\nu\ . \tag{3}$$

Данные формулы позволяют найти характеристики колебаний полного волнового поля сразу во всех точках экрана наблюдения.

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим:

$$\begin{aligned}\psi_P(x,t) &= a\cos(k\sin\alpha\cdot x-\omega t)+a\cos(-k\sin\alpha\cdot x-\omega t)=\\ &=2a\cos(k\sin\alpha\cdot x)\cos\omega t=2a\cos(\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha\cdot x)\cos\omega t.\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь использована известная тригонометрическая формула

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Согласно (4) амплитуда колебаний суммарного волнового поля

$$A=2a\left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha\cdot x\right)\right| \tag{5}$$

теперь зависит от координаты *x.* График зависимости *A(x)* приведен на рис. 2.

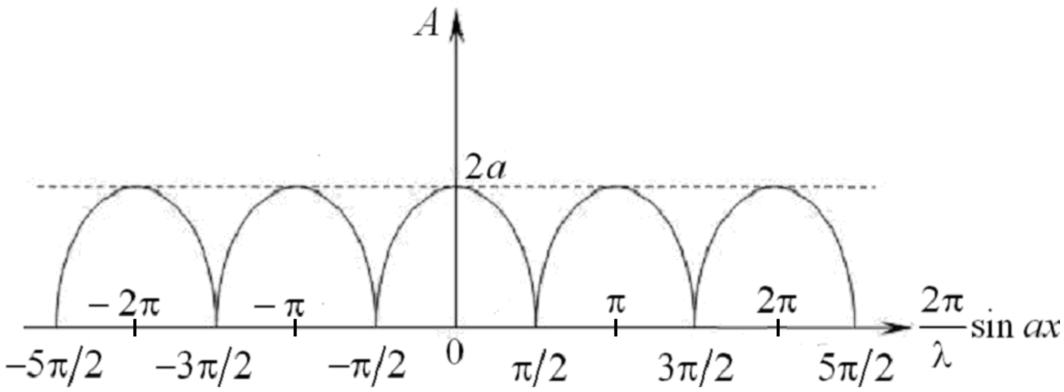

Рис.2

Амплитуда колебаний принимает минимальное значение $A_{min}=0$ в точках

$$\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha\cdot x_{\min.m}=\frac{\pi}{2}(2m+1), \qquad x_{min.m}=\frac{\lambda}{4\sin\alpha}(2m+1), \tag{6}$$

где $m=0,\pm1,\pm2,...$ и принимает максимальное значение $A_{\max}=2a$ в точках

$$\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha x_{\max.n}=\pi n, \qquad x_{\max.n}=\frac{\lambda}{2\sin\alpha}n, \tag{7}$$

где $n=0,\pm1,\pm2,...$.

Шириной интерференционной полосы называется расстояние Δ между соседними интерференционными минимумами или максимумами:

$$\Delta=x_{\min.m+1}-x_{\min.m}=x_{\max.n+1}-x_{\max.n}=\frac{\lambda}{2\sin\alpha}. \tag{8}$$

При $\alpha<<1$ $\sin\alpha\approx\alpha$ и ширина интерференционных полос $\Delta\approx\lambda/2\alpha>>\lambda$. Это позволяет путем измерения ширины интерференционной полосы найти длину волны видимого света $\lambda \approx 0{,}6\text{мкм}$ с помощью обычной линейки, если $\alpha << 1$. Иными словами, явление интерференции преобразует длину волны в ширину интерференционной полосы с коэффициентом увеличения $k = 1/2\sin\alpha >> 1$.

Ответ: $\Delta = \dfrac{\lambda}{2\sin\alpha}$.