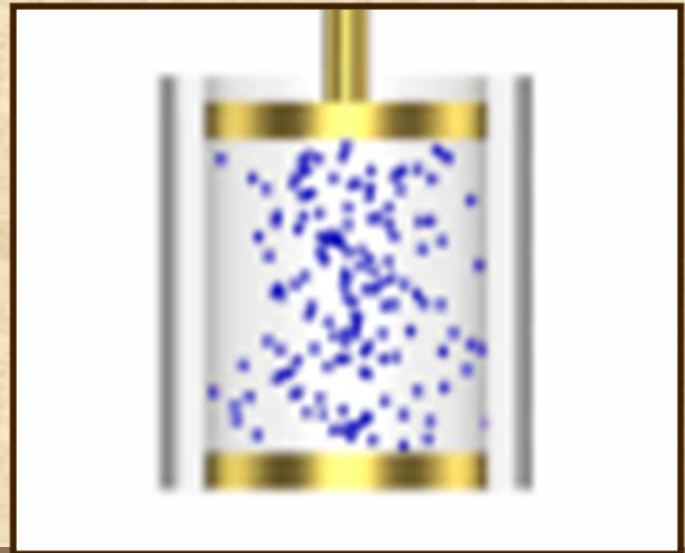
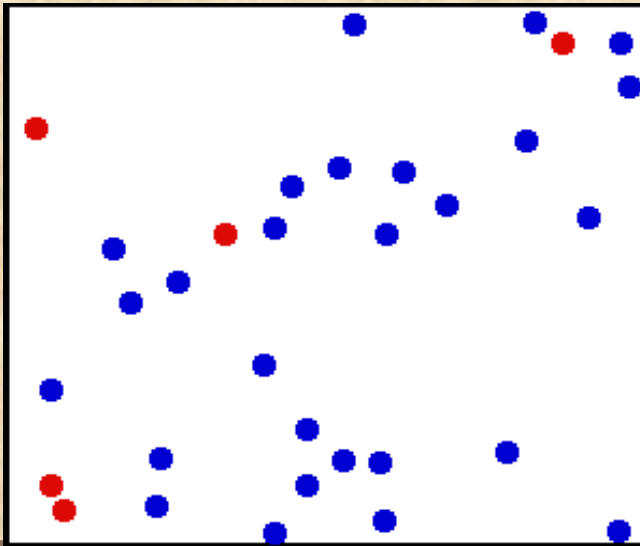


Термодинамика и статистическая физика



Лекция № 4

Статистический метод описания.

1. Основная задача статистической физики.
Микросостояние системы частиц.
2. Элементарные сведения из теории вероятностей.
3. Функция распределения. Среднее значение. Дисперсия

Закон распределения Максвелла.

1. Пространство скоростей. Принцип детального равновесия.
2. Распределение молекул газа по скоростям
в условиях термодинамического равновесия.
3. Закон распределения скоростей Максвелла.
Характерные скорости молекул.

Состояние системы детально охарактеризованное на уровне каждой частицы называется микросостоянием.

Микросостояния системы описываются заданием в каждый момент времени координат и скоростей всех молекул, атомов, а также электронов, атомных ядер и прочих частиц, из которых построены тела системы.

Состояние системы описанное с помощью макроскопических параметров, характеризующих систему в целом (P, V, T, n, m) называется макросостоянием.

Детальное описание состояний макроскопических систем, ввиду колоссальности числа частиц в них, не только невозможно осуществить фактически, но оно не представляет никакого интереса. В термодинамике имеют смысл средние значения, которые принимают при определённых условиях какие-то функции микросостояния системы. Провеличины такого рода говорят, что они имеют статистический характер или являются статистическими. Например, давление, плотность, температура, средний квадрат смещения частицы.

Основная задача статистической
физики: найти наиболее
вероятные распределения
молекул по скоростям, энергиям,
импульсам и т.д. И средние
значения соответствующих
параметров.

Элементарные сведения из теории вероятностей.

С точки зрения атомно-молекулярного строения вещества величины, встречающиеся в макроскопической физике, имеют смысл средних значений, которые принимают некоторые функции от микроскопических переменных системы.

Величины такого рода называются статистическими.

Примерами таких величин являются давление, температура, плотность и др.

Статистические закономерности

изучаются теорией вероятностей.

Событиями или случаями в теории вероятностей называют всякие явления, относительно которых имеет смысл ставить вопрос, могут они происходить или нет. Опыт в теории вероятностей называется испытанием. Если при данных условиях событие обязательно произойдёт, то оно называется достоверным событием.

Если **событие произойти не может**, то его называют **невозможным**.

Событие называют **случайным**, если в результате испытания оно **может как произойти, так и не произойти**.

Например, при игре в орлянку, может выпасть **либо орёл, либо решка**. Это-случайное событие. Но бросая много раз монету приблизительно в половине случаев будет герб. В этом случае **вероятность** выпадения герба равна $\frac{1}{2}$.

Математическое определение вероятности: вероятность *какого-либо события – это предел, к которому стремится отношение числа случаев, приводящих к осуществлению события, к общему числу случаев, при бесконечном увеличении последних:*

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{n}$$

Здесь n' – число раз, когда событие произошло, а n – общее число опытов.

Отсюда следует, что P может принимать значения от нуля до единицы.

По определению Лапласа,

вероятность -

отношение числа благоприятных
случаев к числу возможных
случаев.

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{n}$$

Если событие достоверно, то $P = 1$. Если событие не может произойти вообще, то $P = 0$.

События несовместимы, если появление **одного** из них **исключает появление любого из остальных**.

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы несовместных событий равна **сумме вероятностей этих событий**

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Событие, состоящее в появлении либо события A , либо события B . Например, в ящике красные, зелёные и белые шары.

Вероятность вынуть цветной шар:

$$P_{\text{цветн}} = P_{\text{красн}} + P_{\text{зелён}}$$

Сумма вероятностей всех единственно возможных и несовместимых событий **равна единице:**

$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$ - это утверждение является следствием теоремы сложения вероятностей. Т.к. события единственно возможны, то появление одного из них (безразлично какого) есть событие достоверное. Вероятность такого события равна единице. Но по теореме о сложении вероятностей вероятность этого события может быть представлена суммой $P_1 + P_2 + \dots + P_n$

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

Это соотношение часто называют

условием нормировки вероятностей.

Теорема умножения вероятностей.

Вероятность произведения двух событий

А и В равна произведению вероятности одного из них $P(A)$ на вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло $P(B/A)$ – это **условная вероятность** события B , при условии, что событие A произошло.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A)$$

Если события A и B **независимы** (их вероятности не зависят от того, произошло второе событие или нет), то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

вероятность произведения 2-х независимых событий равна произведению их вероятностей. Например, есть три шара: **красный**, **зелёный** и белый. Какова вероятность того, что при последовательном вынимании 2-х шаров они окажутся **зелёным** и **красным**? Если вынуть один шар, то вероятность, что он окажется

либо **зелёным**, либо **красным** (событие A),
равна по теореме сложения вероятностей:

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Если событие A произошло, то осталось
два шара один из которых будет либо **зе-
лёный**, либо **красный**. **Вероятность** вы-
нуть такой шар (событие B) равна:

$P(B / A) = 1 / 2$. **Искомая вероятность**
по теореме умножения равна:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Существует **ещё одна интерпретация вероятности**, применяющаяся в физике.

Пусть в закрытом сосуде имеется одна молекула. Сталкиваясь со стенками, молекула беспорядочно отражается от них и побывает в различных местах сосуда. Если наблюдать за молекулой в течение длительного времени t и при этом часть времени τ она провела в объёме V . Отношение τ / t называется относительным временем пребывания молекулы в объёме V . Предел этого отношения

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau}{t}$$

- **вероятность нахождения молекулы в объёме V .**

Важным понятием в теории вероятностей и её приложениях является понятие **среднего значения**. Пусть произведено N однотипных измерений одной и той же величины x при неизменных условиях. Пусть в n_1 случаях измеренное значение величины x оказалось равным x_1 , в n_2 случаях — x_2, \dots , в n_m случаях — x_m , ($n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m = N$).

Среднее значение измеряемой величины определяется выражением:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m}{N} = \sum_{i=1}^m \frac{n_i x_i}{N}$$

Отношение $\frac{n_1}{N}$, т.е. отношение числа наблюдений при которых величина x имеет значение x_1 , к общему числу наблюдений N , есть вероятность появления при измерениях значений x_1 , т.е. $\frac{n_1}{N} = P_1$ (подразумевается,

что $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_1}{N} = P_1$ - вероятность события) и

т.д. для упрощения вместо \lim пишут

$\frac{n_2}{N} = P_2$ и получаем **среднее значение**:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \dots + P_m \cdot x_m = \sum_{i=1}^m P_i \cdot x_i$$

Введём понятие **отклонения** результатов отдельных измерений **от среднего значения** $\langle x \rangle$, т.е. $\sigma x_i = x_i - \langle x \rangle$, где $i = 1, 2, \dots, N$

Дисперсия есть среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений (x_1, x_2, \dots, x_m) случайной величины от их среднего значения:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Среднее квадратичное отклонение:

$$\Delta x_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \approx \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Распространим полученные результаты на случай когда характеризующая систему величина x может принимать непрерывный ряд значений от 0 до ∞ . В этом случае говорят, что величина x имеет сплошной (или непрерывный) спектр значений (в предыдущем случае спектр значений был дискретным).

Возьмём очень малую величину a (скажем, $a = 10^{-10}$) и получим Δn_0 измерений, при которых $0 < x < a$, Δn_1 , при которых $a < x < 2a$, ..., Δn_x , при которых результат измерений находится в интервале от x до $x + a$ и т.д.

Вероятность того, что результат измерений окажется в интервале от нуля до a , равна:

$$\Delta P_o = \frac{\Delta n_o}{N},$$

в интервале от a до $2a$: $\Delta P_1 = \frac{\Delta n_1}{N}, \dots,$

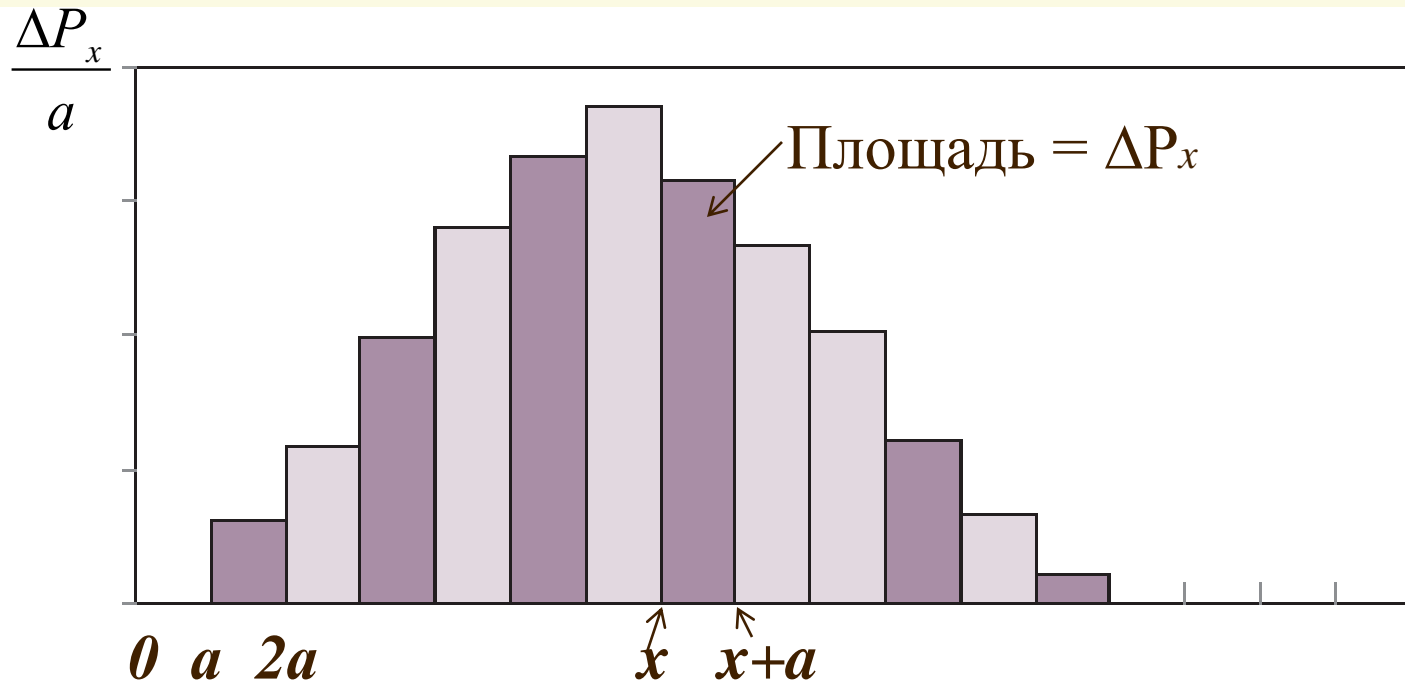
в интервале от x до $x + a$:

$$\Delta P_x = \frac{\Delta n_x}{N}.$$

Начертим ось x и отложим вверх от неё полоски шириной a и высотой $\frac{\Delta P_x}{a}$.

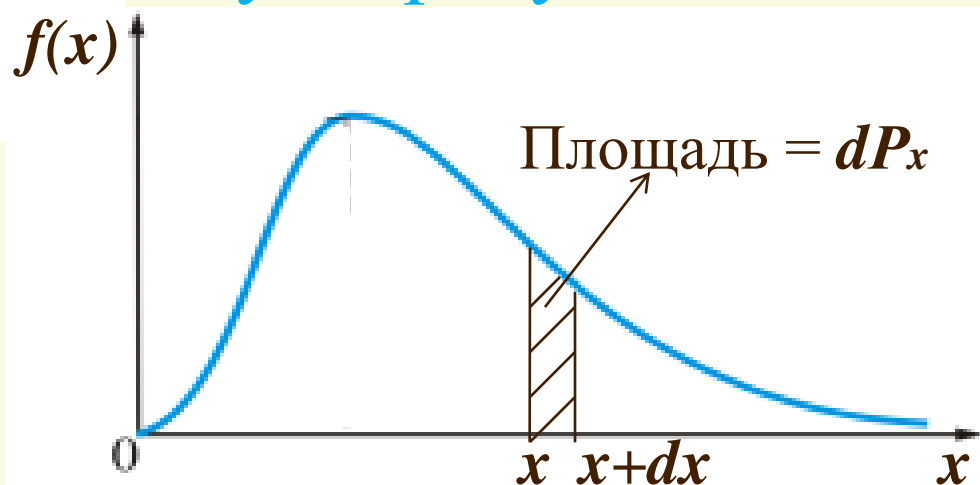
Получим **столбчатую диаграмму**, a
которая называется **гистограмма**.

Столбчатая диаграмма ИЛИ гистограмма.



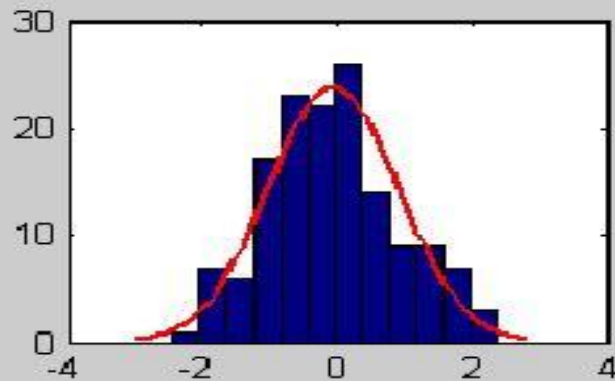
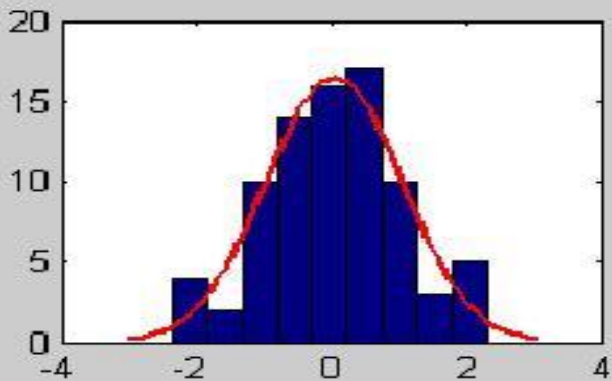
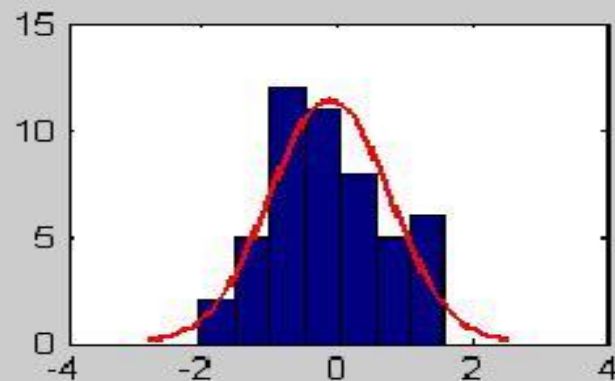
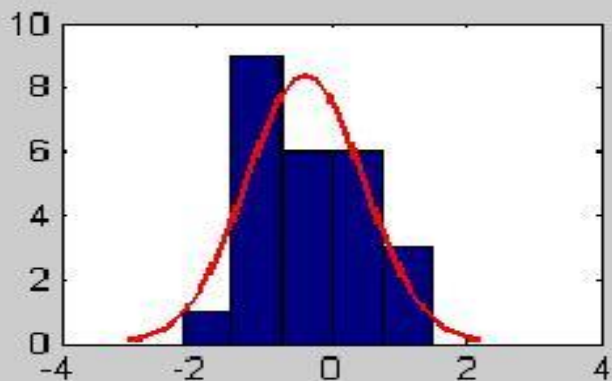
Площадь полоски, левый край которой имеет координату x , равна ΔP_x , а площадь всей гистограммы – единице, т.е. $\sum_{i=1}^m P_i = 1$

Гистограмма (столбчатая диаграмма) наглядно характеризует **вероятность** получения результатов измерений, заключающихся в **различных интервалах одинаковой ширины a** . Чем **меньше ширина** интервала a , тем детальнее будет охарактеризовано распределение вероятностей значений величины x . В пределе при $a \rightarrow 0$ ступенчатая линия превратится в **гладкую кривую**.



Функция $f(x)$ называется **функцией распределения вероятностей**

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



В пределе вместо ступенек будет гладкая кривая, которая называется функцией распределения вероятностей.

Площадь столбика ширины dx равна вероятности того, что результат измерения окажется в пределах от x до $x+dx$. Обозначив эту вероятность через dP_x , получим:

$$dP_x = f(x) \cdot dx$$

Индекс “ x ” при dP указывают на то, что имеется в виду вероятность для интервала, левый край которого лежит в точке с координатой x . **Площадь**, ограниченная кривой распределения, так же как и площадь гистограммы, **равна единице**. Это означает:

$$\int f(x) dx = \int dP_x = 1 - \text{условие нормировки}$$

Зная функцию распределения $f(x)$, можно найти среднее значение результатов измерения величины x . В $dN_x = N \cdot dP_x$ случаях получается результат, равный x . Сумма таких результатов определяется выражением:
 $x \cdot dN_x = x \cdot N \cdot dP_x$. Сумма всех возможных результатов равна:

$$\int x \cdot dN_x = \int x \cdot N \cdot dP_x$$

Разделив это на число измерений N , получим **среднее значение величины x** .

$$x_{cp} = \langle x \rangle = \int x \cdot dP_x = \int f(x) \cdot x \cdot dx$$

Аналогичные рассуждения дают, что **среднее значение некоторой функции $\varphi(x)$**

МОЖНО ВЫЧИСЛИТЬ по формуле:

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int \varphi(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

Например:

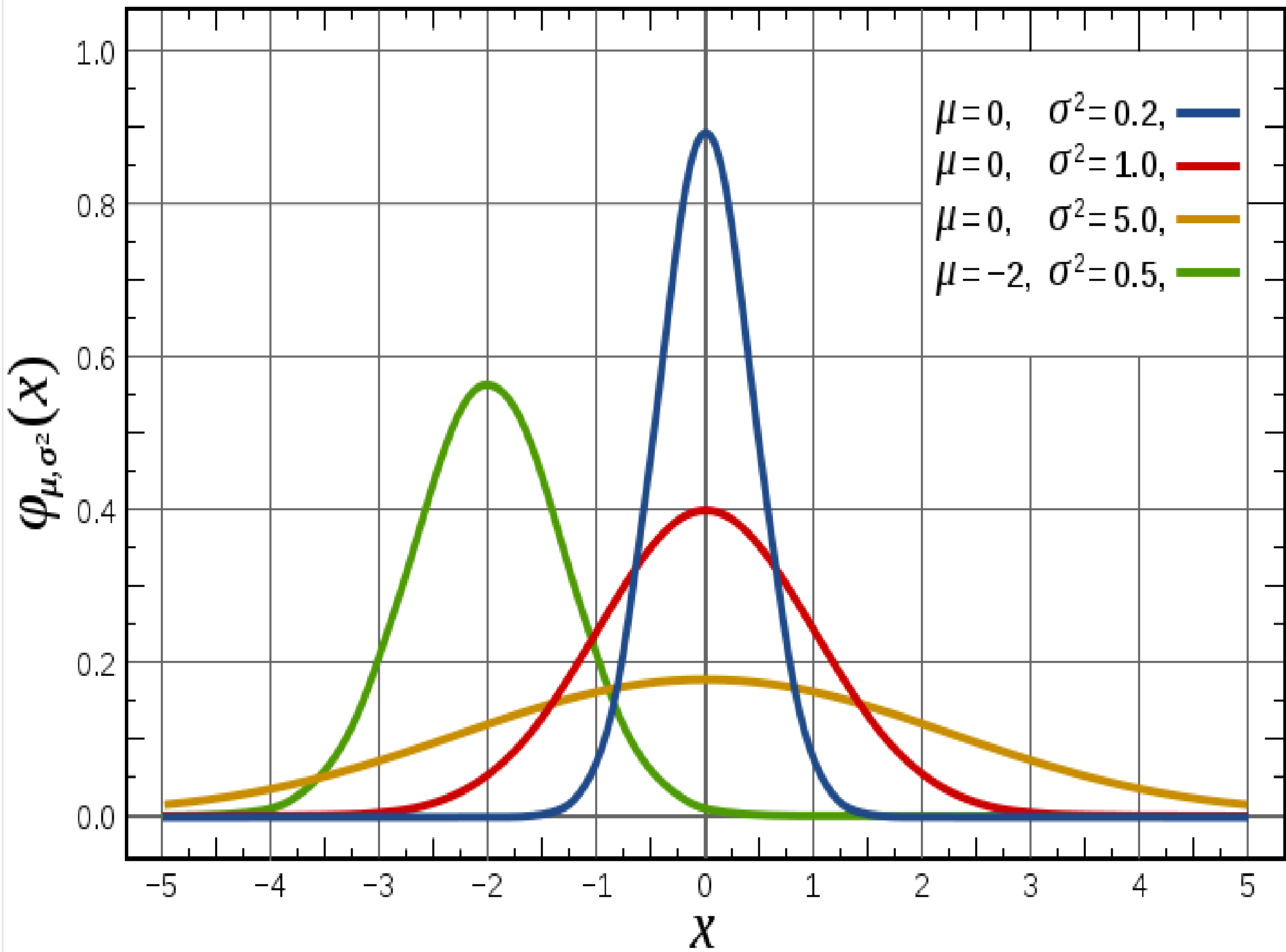
$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

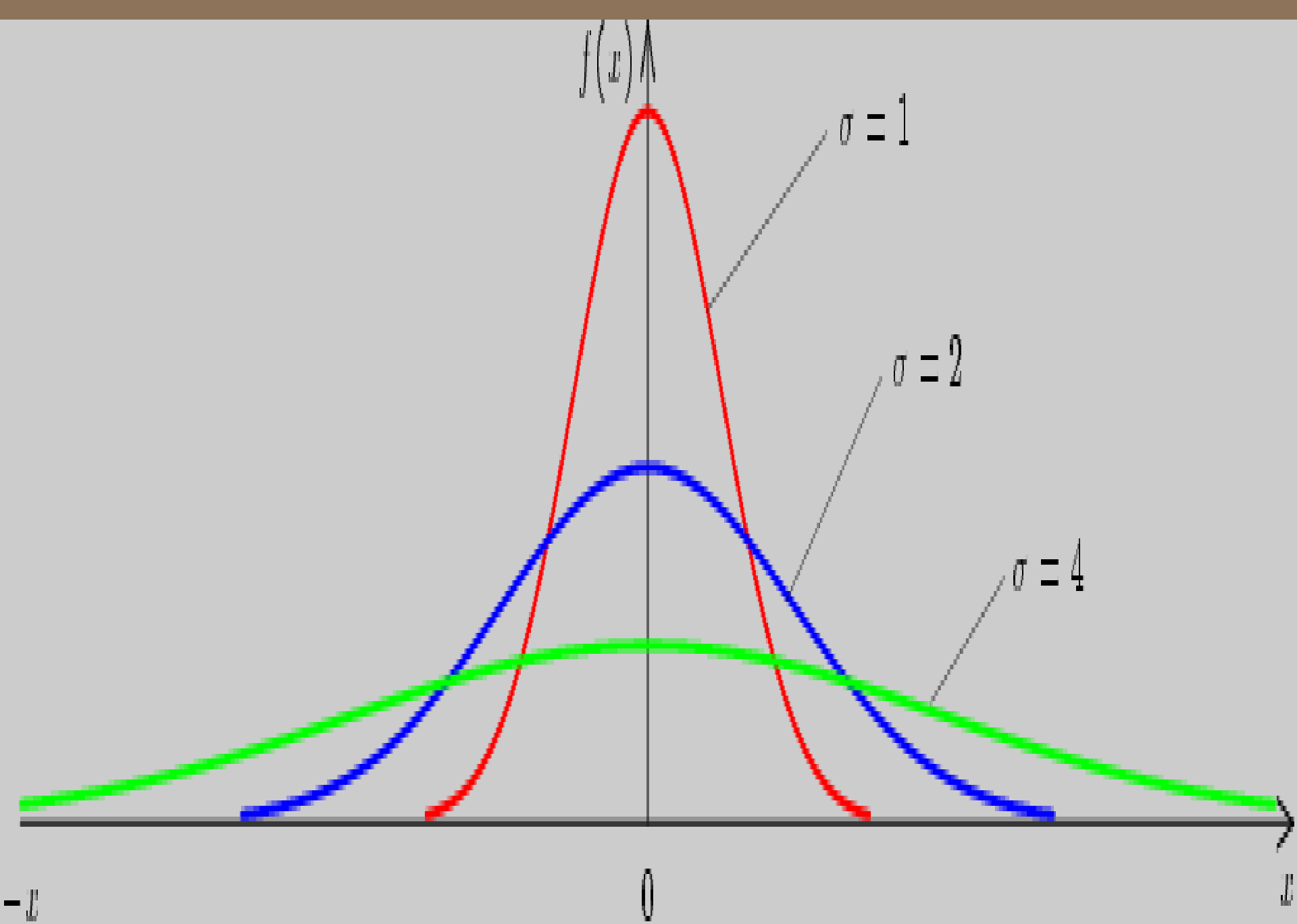
Закон распределения Гаусса.

Нормальное распределение, также называемое гауссовским распределением или распределением Гаусса — распределение вероятностей, которое задается функцией плотности распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где параметр μ — среднее значение (математическое ожидание) случайной величины и указывает координату максимума кривой плотности распределения, а σ^2 — дисперсия.







**Гаусс (Gauss) Карл
Фридрих** (30.4.1777,
Брауншвейг, -
23.2.1855, Гёттинген),
немецкий математик,
внёсший
фундаментальный
вклад также в
астрономию и
геодезию.



VTS_31_1.VOB

Закон распределения скоростей молекул при тепловом равновесии

Возьмём **газ**, состоящий из очень большого числа N тождественных молекул, находящихся **в состоянии беспорядочного теплового движения при определённой температуре T (т.е. в условиях термодинамического равновесия)**.

Предполагается, что **силовые поля**, действующие на газ, **отсутствуют**.

В газе в состоянии **хаотического движения должны компенсировать**

друг друга всякие два противоположно
направленные процесса. Скорости

таких противоположно направленных
процессов должны быть одинаковыми.

Это положение называется принципом
детального равновесия. Если бы оно не

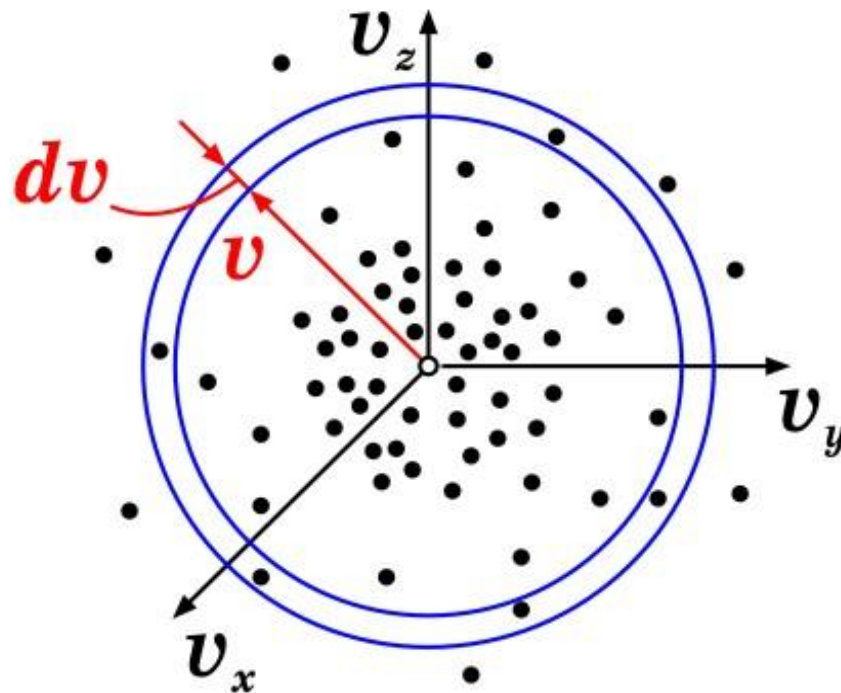
выполнялось, то тепловое движение
молекул в какой-то мере устранило бы
беспорядочный характер и приобрело бы
черты, свойственные упорядоченному.

Принцип детального равновесия справед-
лив для любых систем в состоянии хаоса.

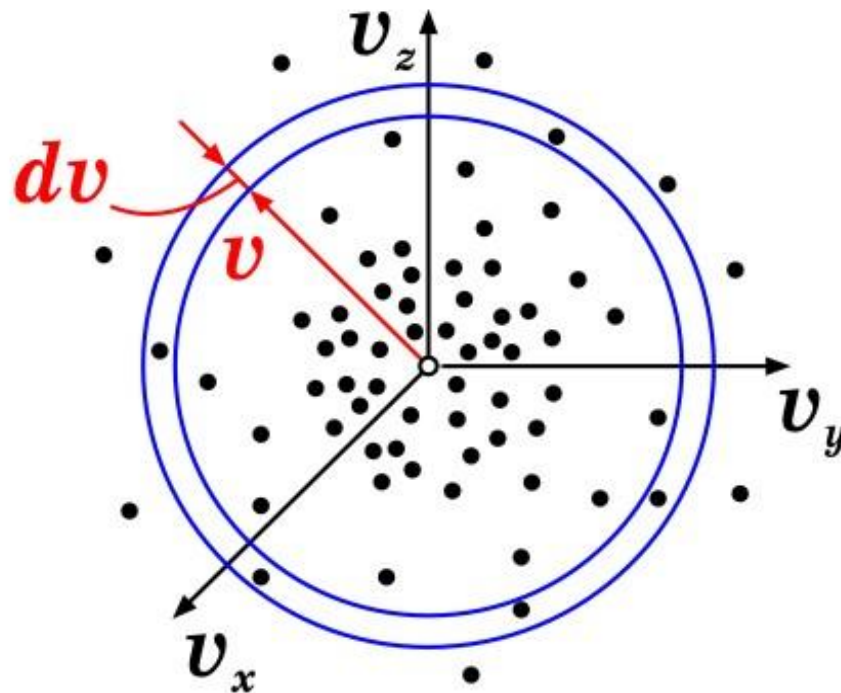
Закон распределения скоростей Максвелла.

Возьмём в воображаемом пространстве, которое назовём v – **пространством** (пространством скоростей), прямоугольные координатные оси, по которым будем откладывать значения v_x, v_y, v_z отдельных молекул (имеются в виду **компоненты скорости по осям x, y, z , взятым в обычном пространстве**).

Скорости каждой молекулы будет соответствовать точка в этом пространстве. Из-за столкновений положение точек будет непрерывно меняться, но их плотность в каждом месте будет оставаться неизменной (т.к. у нас равновесное состояние газа).



Вследствие **равноправности всех направлений движения** расположение точек относительно начала координат будет сферически симметричным. **Плотность** точек в v – пространстве будет **зависеть только от модуля скорости v** (или от v^2).



Молекулы движутся **хаотически**. Среди них есть и очень **быстрые**, и очень **медленные**. Благодаря беспорядочному движению и случайному характеру их взаимных столкновений, молекулы определённым образом распределяются по скоростям. Это распределение оказывается **однозначным и единственно возможным**, и не только не противоречит хаотическому движению, но именно им и обусловлено.

Мы будем искать **число частиц** (Δn) **скорости** которых лежат в определённом **интервале значения скорости** Δv (т.е. от v до $v + \Delta v$).

Здесь Δn – **число благоприятных частиц**, попавших в этот **интервал**.

Очевидно, что в единице объёма **число таких благоприятных частиц** **тем больше, чем больше Δv** .

Ясно так же, что Δn должно быть пропорционально концентрации молекул n . Число Δn зависит и от самой скорости, так как в **ОДИНАКОВЫХ** по величине интервалах, но при **РАЗНЫХ** абсолютных значениях скорости, число молекул будет **различным**.

Смысл сказанного легко понять из простого примера: *неодинаково, число людей в возрасте от 20 до 21 года и от 90 до 91 года.*

$$\text{И так: } \Delta n = f(v)n\Delta v$$

$$\Delta n = f(v)n\Delta v$$

Здесь $f(v)$ – **функция распределения молекул по скоростям**, n – концентрация молекул и Δv - интервал значений скоростей.
В пределе, получим: $dn = f(v)n dv$

Физический смысл $f(v)$ в том, что это отношение числа молекул, скорости которых лежат в определенном интервале скоростей, к общему числу молекул в единичном интервале скоростей:

$$f(v) = \frac{dn}{n}$$

Таким образом, $f(v)$ – *имеет*
смысл вероятности, то есть

показывает, какова *вероятность*
любой молекулы газа в единице
объёма иметь скорость, заключён-
ную в единичном интервале, вклю-
чающем заданную скорость v .

В данном случае $f(v)$ называют
плотностью вероятности.

Функция распределения Максвелла

Пусть имеется n тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при определенной температуре. После каждого акта столкновения между молекулами, их скорости меняются случайным образом.

В результате невообразимо большого числа столкновений устанавливается стационарное равновесное состояние, когда число молекул в заданном интервале скоростей сохраняется постоянным.

В результате каждого **СТОЛКНО-**
ВЕНИЯ проекции скорости молекулы
испытывают **случайное изменение**
на $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$, причем изменения
каждой проекции скорости незави-
симы друг от друга.

Найдем в этих условиях, каково
число частиц dn из общего числа n
имеет **скорость в интервале**
от v до $v + dv$.

При этом, мы не можем ничего определенного сказать о **ТОЧНОМ ЗНАЧЕНИИ** **скорости** той или иной частицы v_i , поскольку за столкновениями и движениями каждой из молекул **НЕВОЗМОЖНО** проследить ни в опыте, ни в теории. Такая детальная информация вряд ли имела бы практическую ценность.

Распределение молекул идеального газа по скоростям впервые было получено знаменитым английским ученым Дж. Максвеллом в 1860 году с помощью методов теории вероятностей.



Максвелл Джеймс Клерк

(1831 – 1879) –

английский физик.

Работы посвящены
электродинамике,
молекулярной физике,
общей статике, оптике,
механике, теории упрукос-

ти. Установил статистический закон,
описывающий распределение молекул
газа по скоростям.

Скорость – векторная величина.

Для **проекции скорости на ось x** (x -ой составляющей скорости v_x), имеем:

$$dn_x = f(v_x) n dv_x,$$
$$f(v_x) = \frac{dn_x}{n \cdot dv_x} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}},$$

ИЛИ

$$f(v_x) = \frac{dn_x}{n \cdot dv_x} = A_1 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}},$$

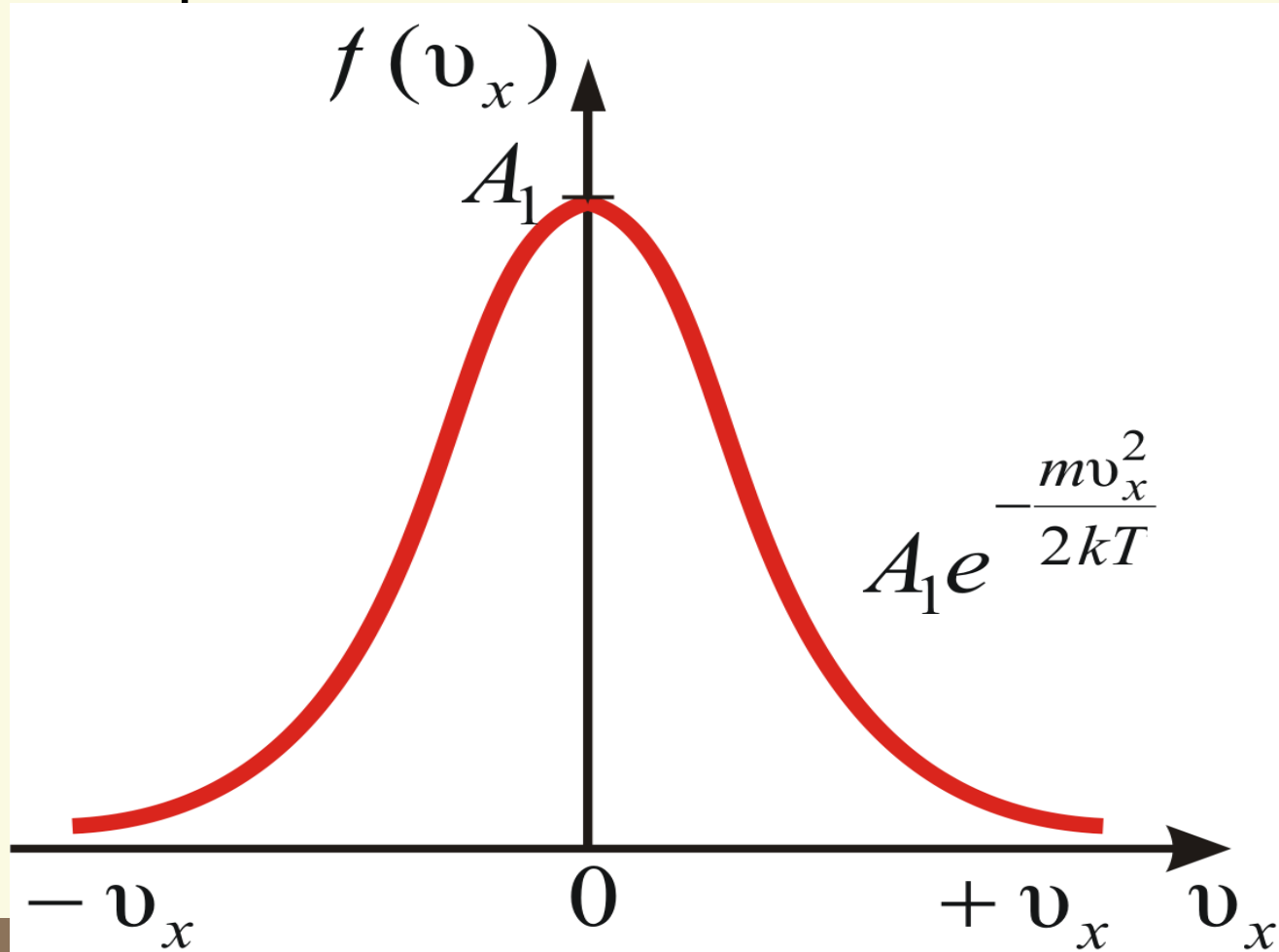
где A_1 находят из условия нормировки.

Видно, что доля молекул со скоростью

$v_x = 0$ не равна нулю.

При $v_x = 0$, $f(v_x) = A_1$

(в этом физический смысл постоянной A_1).



Приведённое выражение и график справедливы для *распределения молекул газа по x-ым компонентам скорости*. Очевидно, что и *по y-ым и z-ым компонентам скорости также можно получить:*

$$f(v_y) = \frac{dn_y}{n \cdot dv_y} = A_1 e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}}$$

$$\text{и } f(v_z) = \frac{dn_z}{n \cdot dv_z} = A_1 e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}.$$

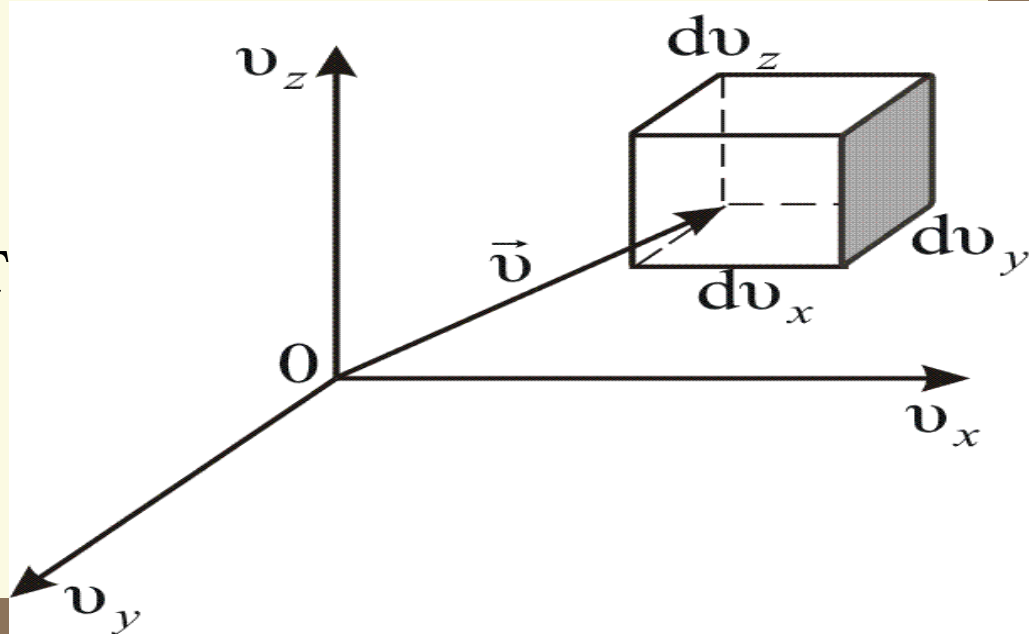
Вероятность того, что **скорость** молекулы одновременно удовлетворяет трём условиям: x – компонента скорости лежит в интервале от v_x до $v_x + dv_x$; y – компонента, в интервале от v_y до $v_y + dv_y$; z – компонента, в интервале от v_z до $v_z + dv_z$ будет равна **произведению вероятностей каждого из условий в отдельности:**

$$\frac{dn_{xyz}}{n} = A_1^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z,$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, $A_1^3 = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}$

Или $dn_{xyz} = n \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$

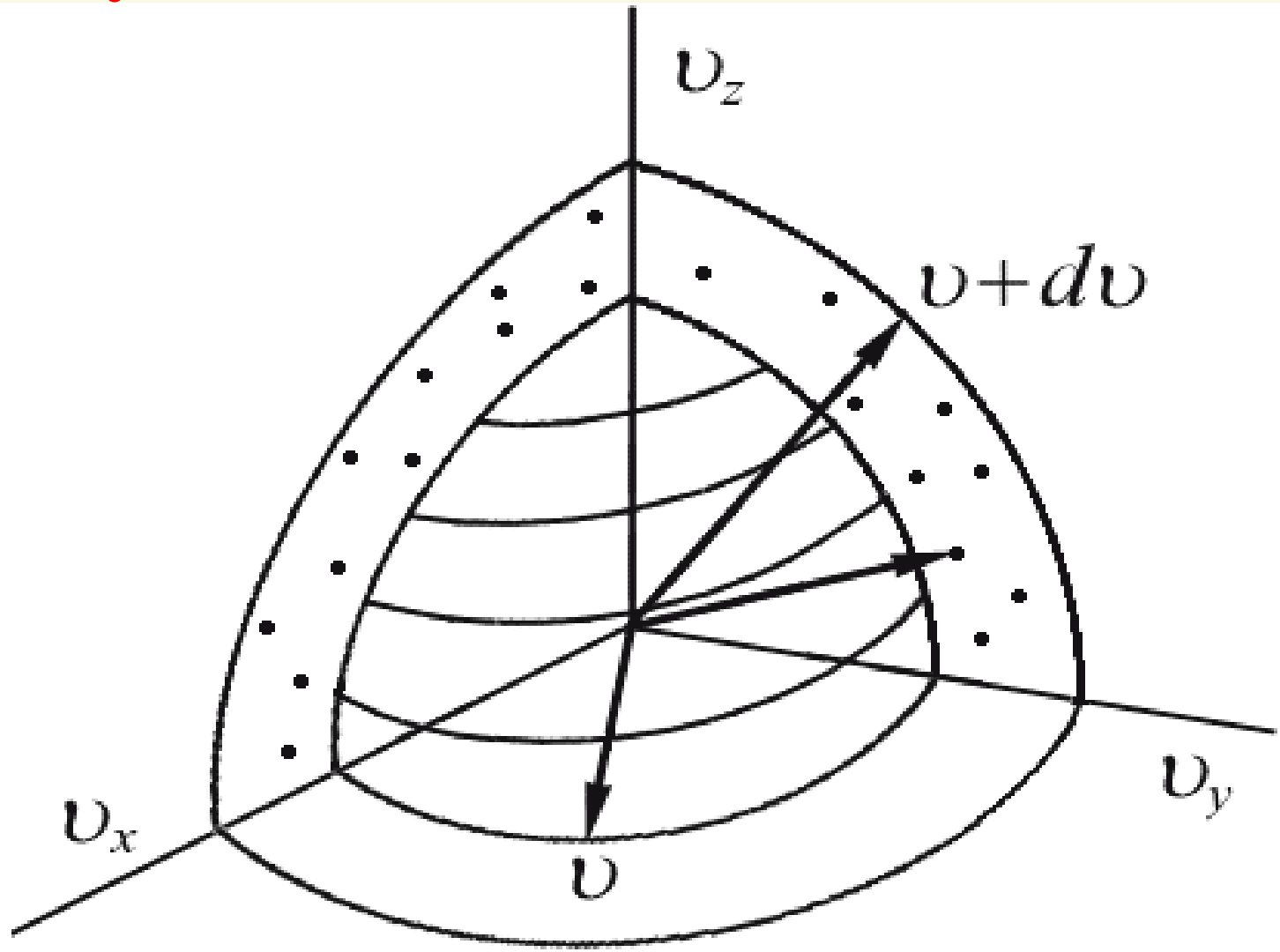
Этой формуле можно дать геометрическое истолкование: dn_{xyz} — это **число молекул в параллелепипеде** со сторонами dv_x , dv_y , dv_z , то есть в объёме $dV = dv_x dv_y dv_z$, находящемся на расстоянии \vec{v} от начала координат в пространстве скоростей.

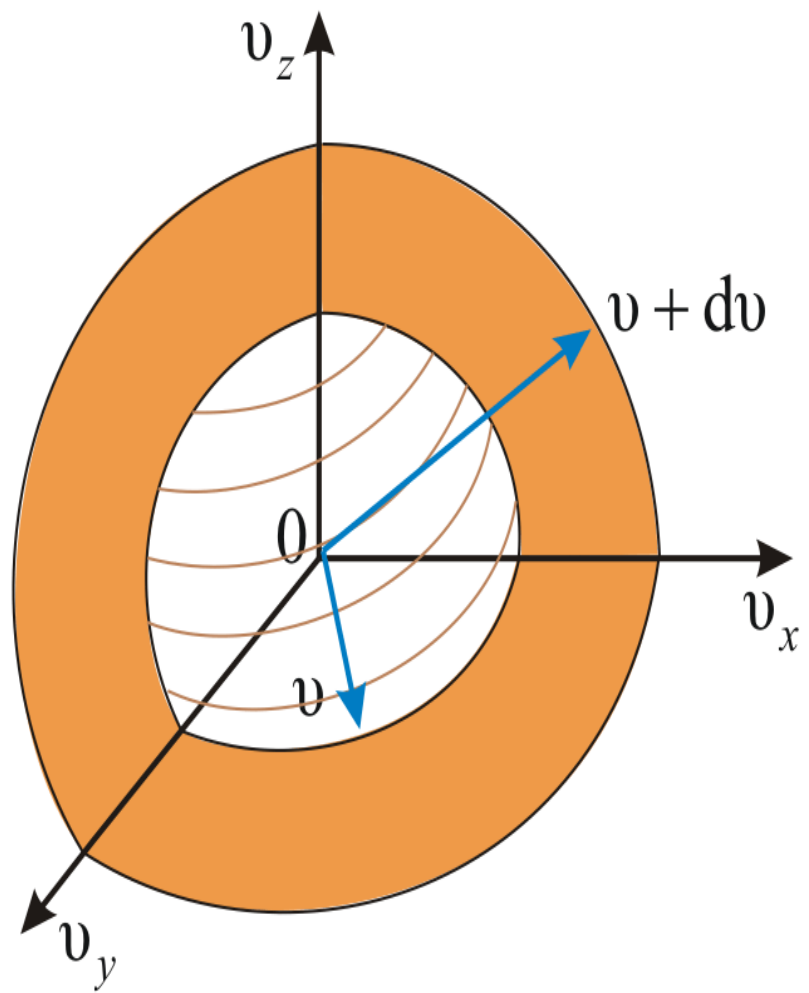
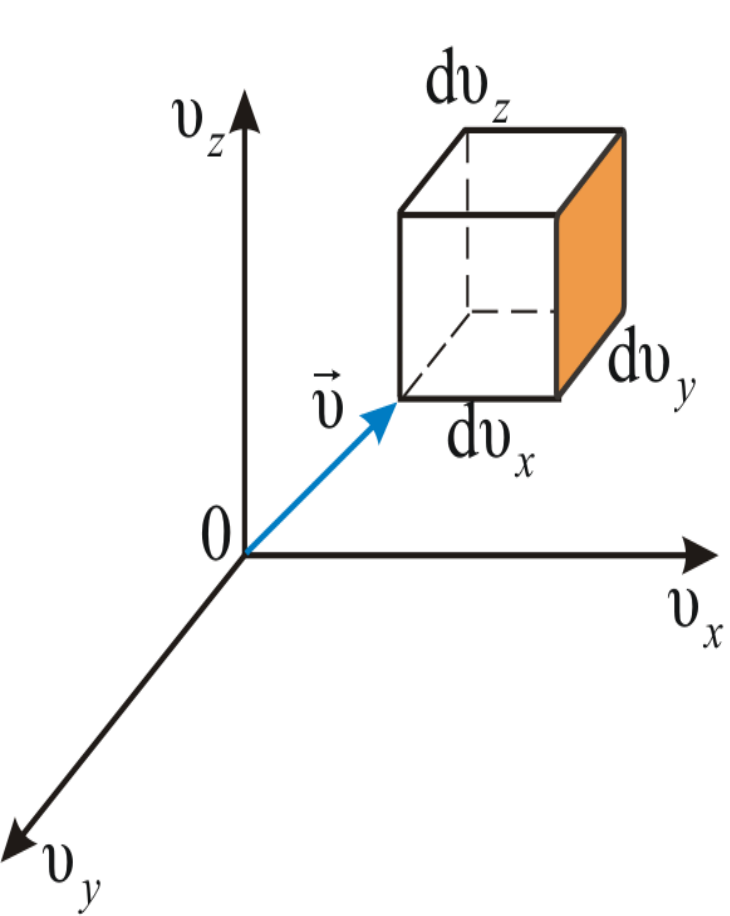


Величина dn_{xyz} не может зависеть от направления вектора скорости. Поэтому надо получить функцию распределения молекул по скоростям независимо от их направления, то есть по абсолютному значению скорости.

Если собрать вместе **все молекулы** в единице объёма, скорости которых заключены **в интервале** от v до $v + dv$ по всем направлениям, и выпустить их, то они окажутся через одну секунду в **шаровом слое толщиной dv и радиусом v .**

**Шаровой слой толщиной dv и
радиусом от v до $v+dv$.**





Этот *шаровой слой* складывается из тех *параллелепипедов*, о которых говорилось выше.

Объём этого шарового слоя:

$$d\Omega = 4\pi v^2 dv$$

Общее число молекул в слое:

$$dn = n \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d\Omega.$$

Отсюда следует *закон Максвелла*
– *распределение молекул по*
абсолютным значениям скоростей:

$$\frac{dn}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv,$$

где $\frac{dn}{n}$ – *доля всех частиц* единичного
объёма, скорости которых лежат в
интервале от v до $v + dv$.

При $dv = 1$ получаем плотность вероятности, или функцию Максвелла распределения молекул по скоростям:

$$F(v) = \frac{dn}{n \cdot dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2.$$

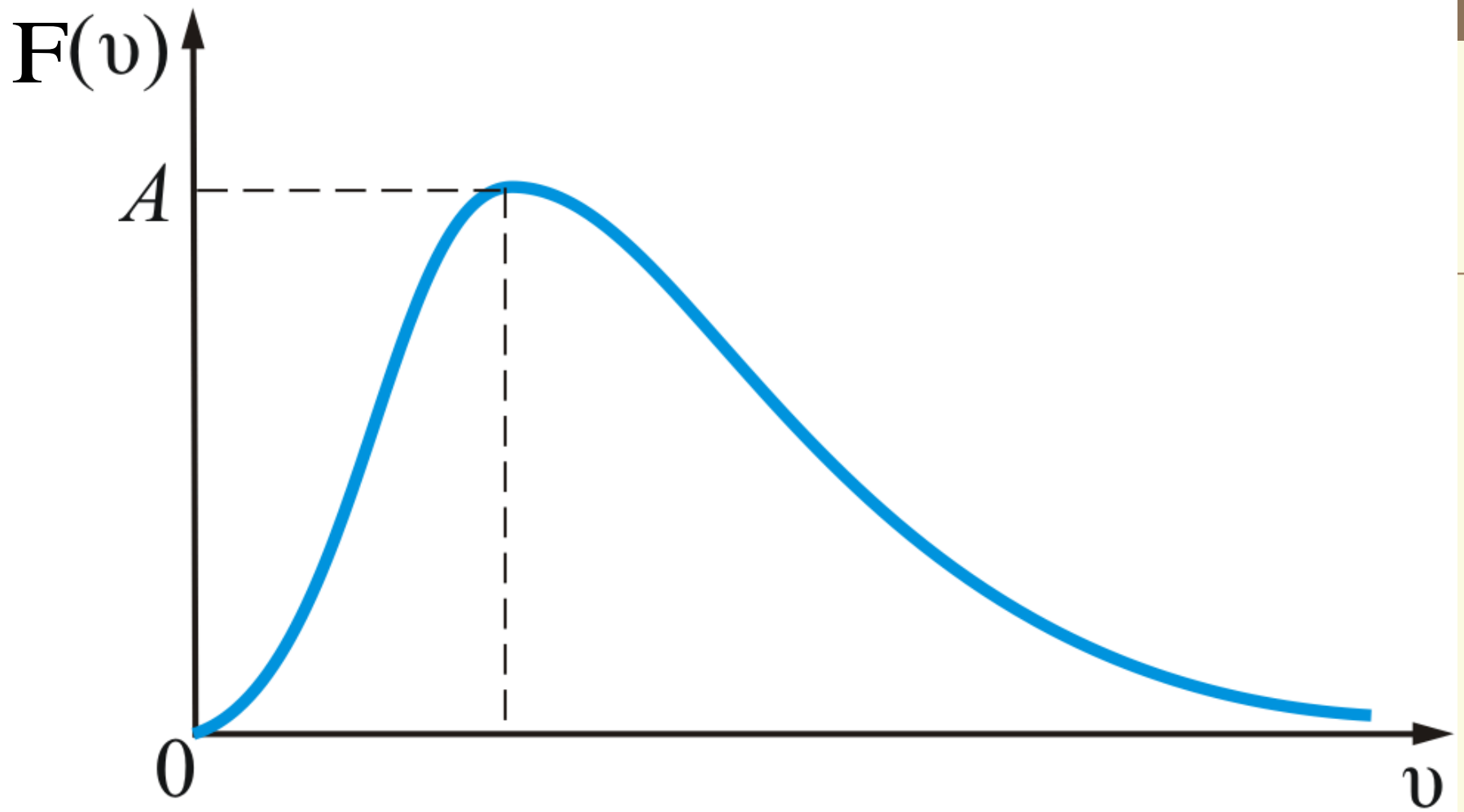
Эта функция обозначает долю молекул единичного объёма газа, абсолютные скорости которых заключены в единичном интервале скоростей, включающем данную скорость.

Обозначим $A = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}},$

тогда получим:

$$F(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2.$$

График этой функции показан на рис.



$$F(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Выводы:

- Вид распределения молекул газа по скоростям, для каждого газа **зависит от рода газа (m) и от параметра состояния (T).** Давление P и объём газа V на распределение молекул **не влияют.**

- В показателе степени стоит $\frac{mv^2}{2kT}$ отношение, **кинетической энергии**, соответствующей данной скорости v к **средней энергии теплового движения молекул при данной температуре:**

Распределение Максвелла характеризует распределение молекул по значениям кинетической энергии (то есть показывает, какова вероятность при данной температуре иметь именно такое значение кинетической энергии).

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

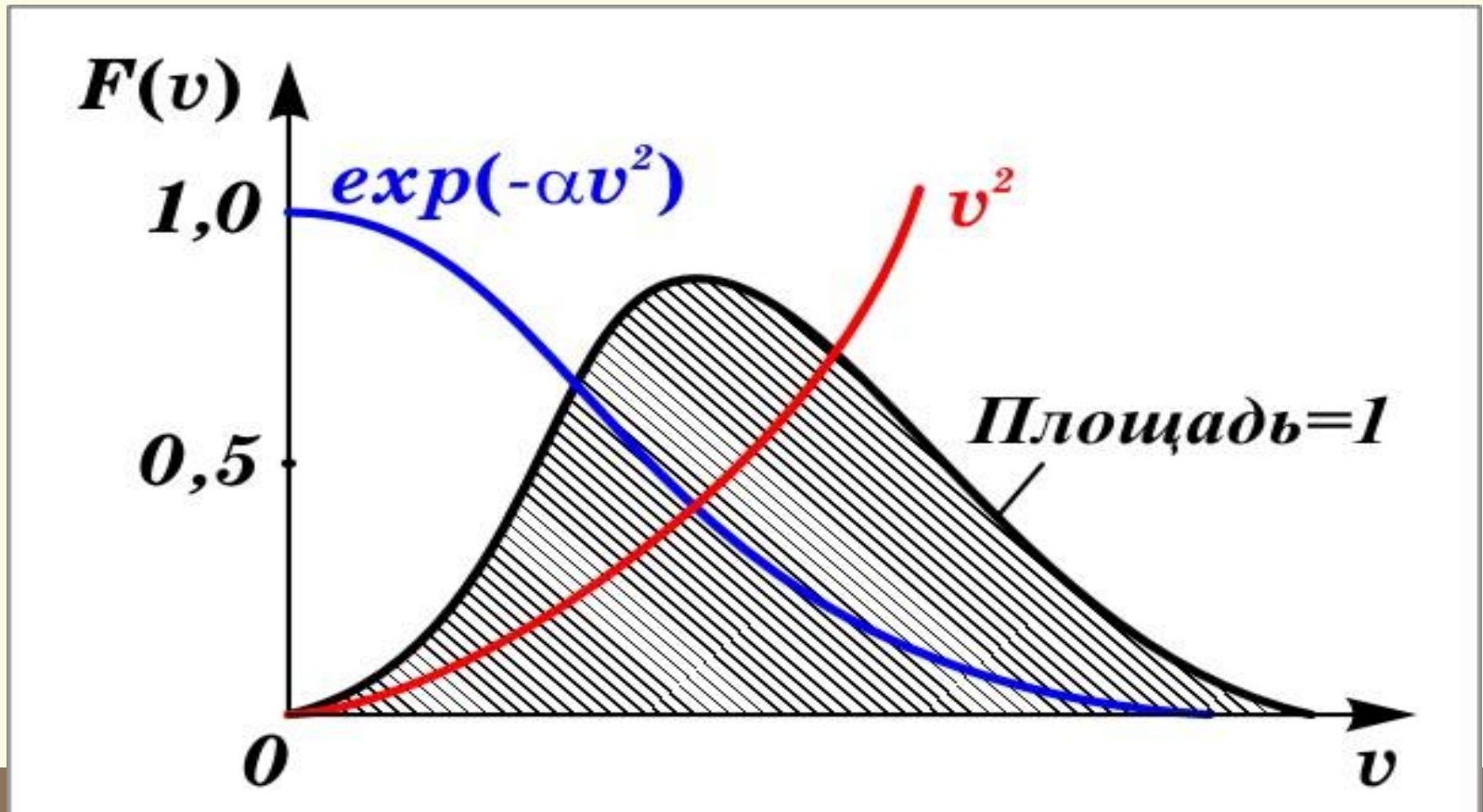
Характерные скорости (наиболее вероятная, среднеквадратичная и средняя скорости молекул газа).

Рассмотрим, как изменяется с абсолютной величиной скорости число частиц, приходящихся на единичный интервал скоростей, при единичной концентрации частиц.

$$F(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2.$$

Из графика видно, что при «малых» v , т.е. при $\left(\frac{mv^2}{2kT} \ll 1\right)$, имеем $F(v) \sim v^2$; затем $F(v)$

достигает максимума A и далее экспоненциально спадает $F(v) \sim e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$.



НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНАЯ СКОРОСТЬ

Наиболее вероятной называют такую

скорость молекул V_B , для которой $F(V)$

функция распределения **$F(V)$ принимает максимальное значение,**

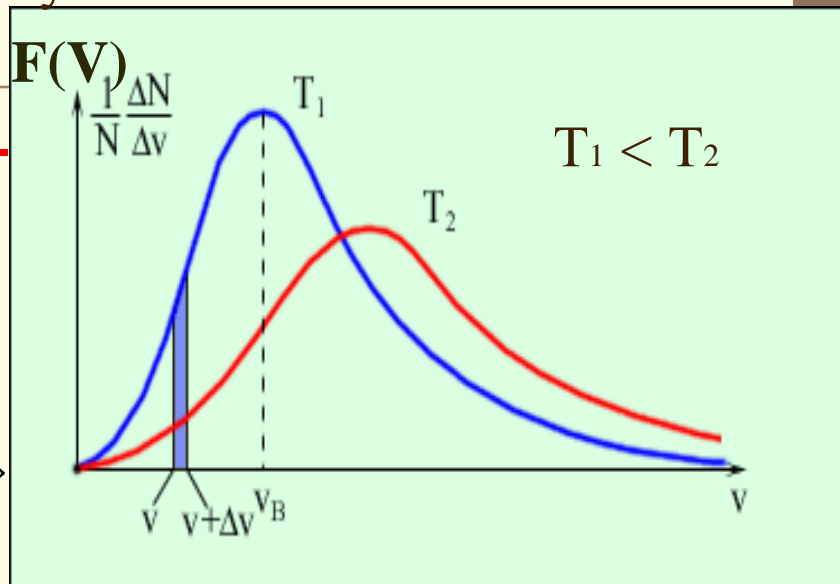
т.е. $F'(V_B)=0$.

$$F'(V) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left[V^2 \exp \left(-\frac{m_0 V^2}{2kT} \right) \right]' \Rightarrow$$

$$F'(V) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left[2V \exp \left(-\frac{m_0 V^2}{2kT} \right) - V^2 \exp \left(-\frac{m_0 V^2}{2kT} \right) \frac{2m_0 V}{2kT} \right] \Rightarrow$$

$$F'(V) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} V \exp \left(-\frac{m_0 V^2}{2kT} \right) \left[2 - \frac{m_0 V^2}{kT} \right]; F'(V_e) = 0 \Rightarrow$$

$$V_e = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2kN_A T}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

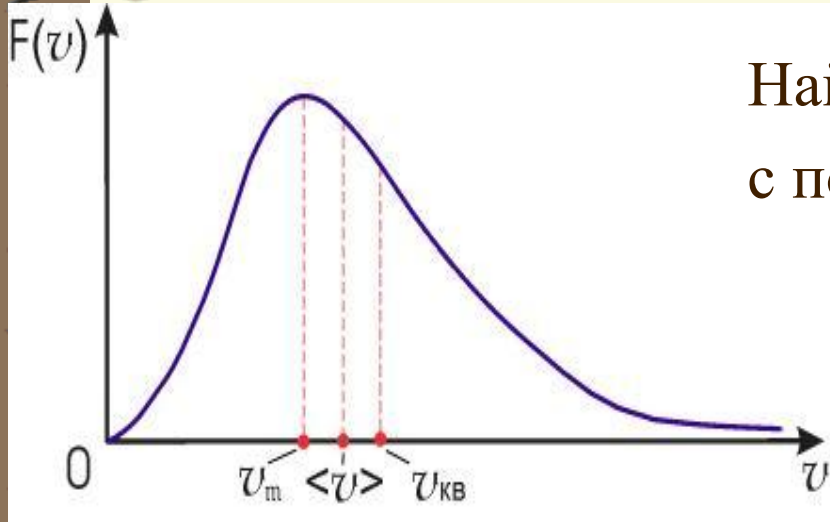


Величина скорости, на которую приходится **максимум** зависимости $F(v)$ называют **наиболее вероятной скоростью** $v_{\text{вер}}$. Величину этой скорости находят из условия равенства нулю производной:

$$F'_v = \frac{dF(v)}{dv} = 0$$

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ



Найдем среднюю скорость молекул V_c с помощью функции распределения:

$$V_c = \int_0^c VF(V)dV = \int_0^{\infty} VF(V)dV \Rightarrow$$

$$V_c = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0 V^2}{2kT} \right) V^3 dV = 2\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0 V^2}{2kT} \right) V^2 d(V^2).$$

$$\frac{m_0 V^2}{2kT} \equiv \xi \Rightarrow V^2 = \frac{2kT}{m_0} \xi \Rightarrow d(V^2) = \frac{2kT}{m_0} d\xi \Rightarrow$$

$$V_c = 2\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \frac{2kT}{m_0} \xi \frac{2kT}{m_0} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi d\xi = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Средняя скорость — $v_{\text{ср}}$

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v \cdot n \cdot F(v) dv,$$

где $n \cdot F(v)dv = dn$ — число молекул со скоростью от v до $v + dv$. Если подставить сюда $F(v)$ и вычислить, то получим:

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx \sqrt{\frac{2,25kT}{m}}$$

ИЛИ

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx \sqrt{\frac{2,25RT}{\mu}}$$

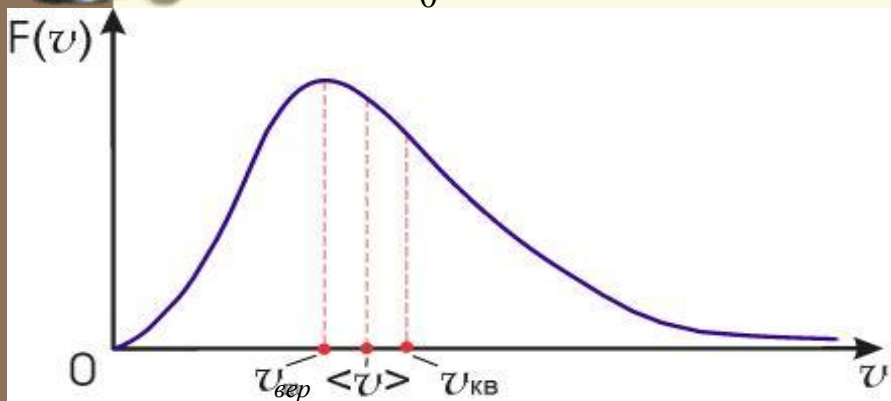
СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧНАЯ СКОРОСТЬ

Средней квадратичной скоростью молекул $V_{\text{кв}}$ называется квадратный корень из среднего значения квадрата скорости
 $V_{\text{кв}} = \sqrt{(V^2)_c}$, то есть по теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы:

$$\frac{m_0(V^2)_c}{2} = \frac{3}{2}kT \Rightarrow (V^2)_c = \left(\frac{3kT}{m_0}\right) = \left(\frac{3RT}{M}\right) \Rightarrow V_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Нахождении $(V^2)_c$ с помощью функции распределения:

$$(V^2)_c = \int_0^\infty V^2 F(V) dV = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{m_0 V^2}{2kT}\right) V^4 dV = \frac{3kT}{m_0}.$$



$$V_v : V_c : V_{\text{кв}} = \sqrt{2} : \sqrt{8/\pi} : \sqrt{3}.$$

$$V_v : V_c : V_{\text{кв}} = 1 : 1,13 : 1,22.$$

Среднюю квадратичную скорость

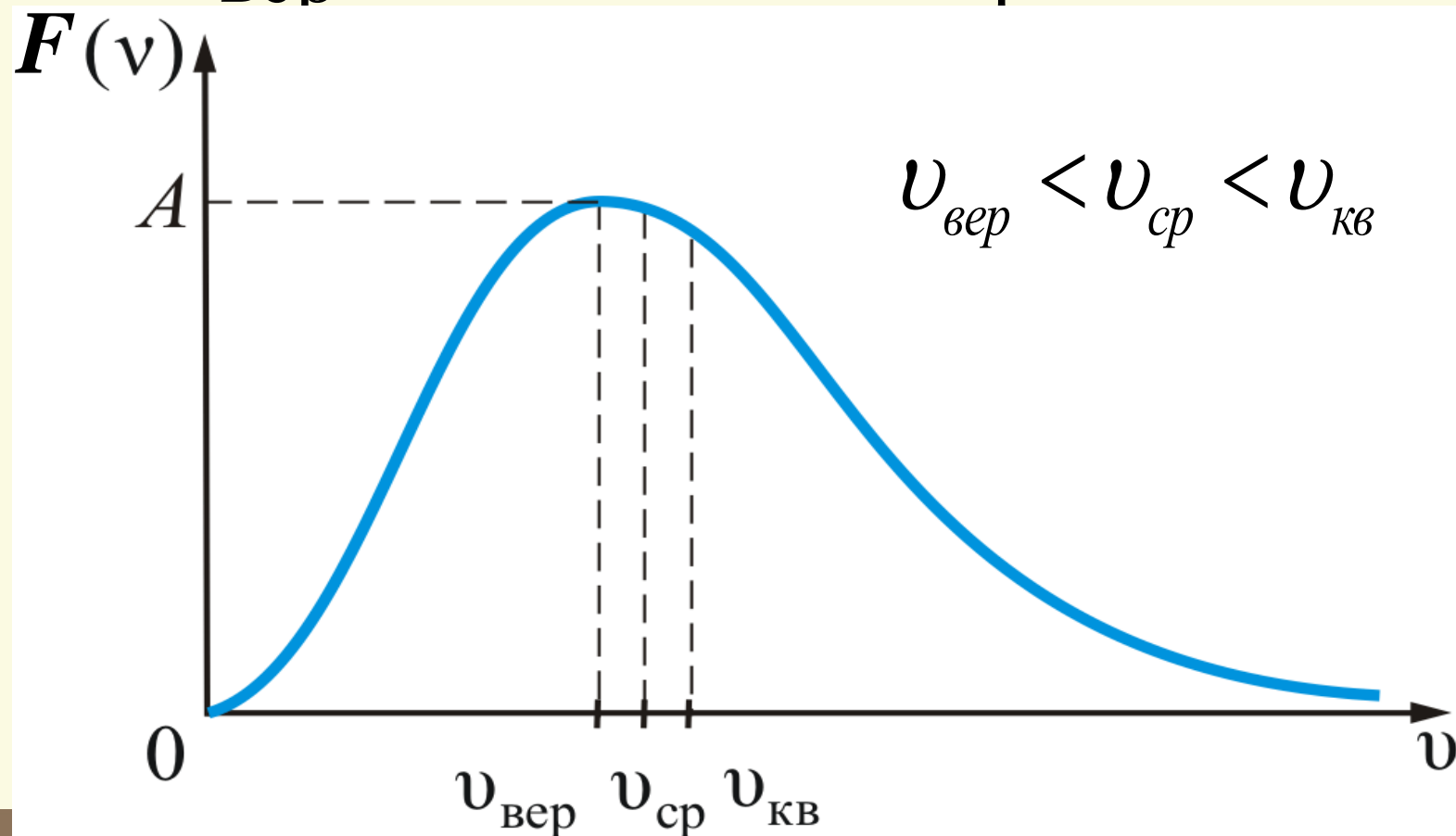
находят используя соотношение :

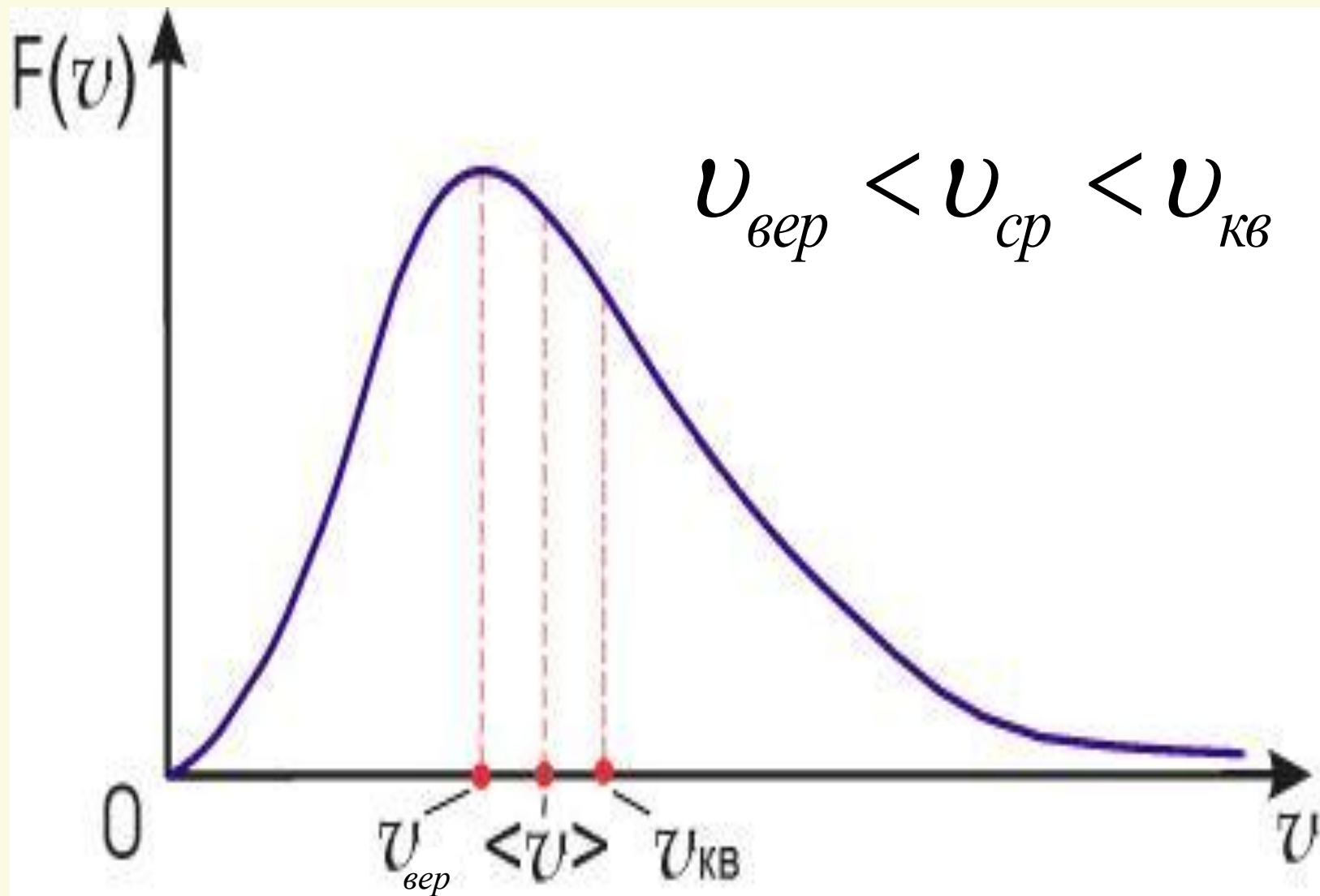
$$\frac{mv_{\text{KB}}^2}{2} = \frac{3}{2}kT$$

$$v_{\text{KB}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

Полезно знать, что

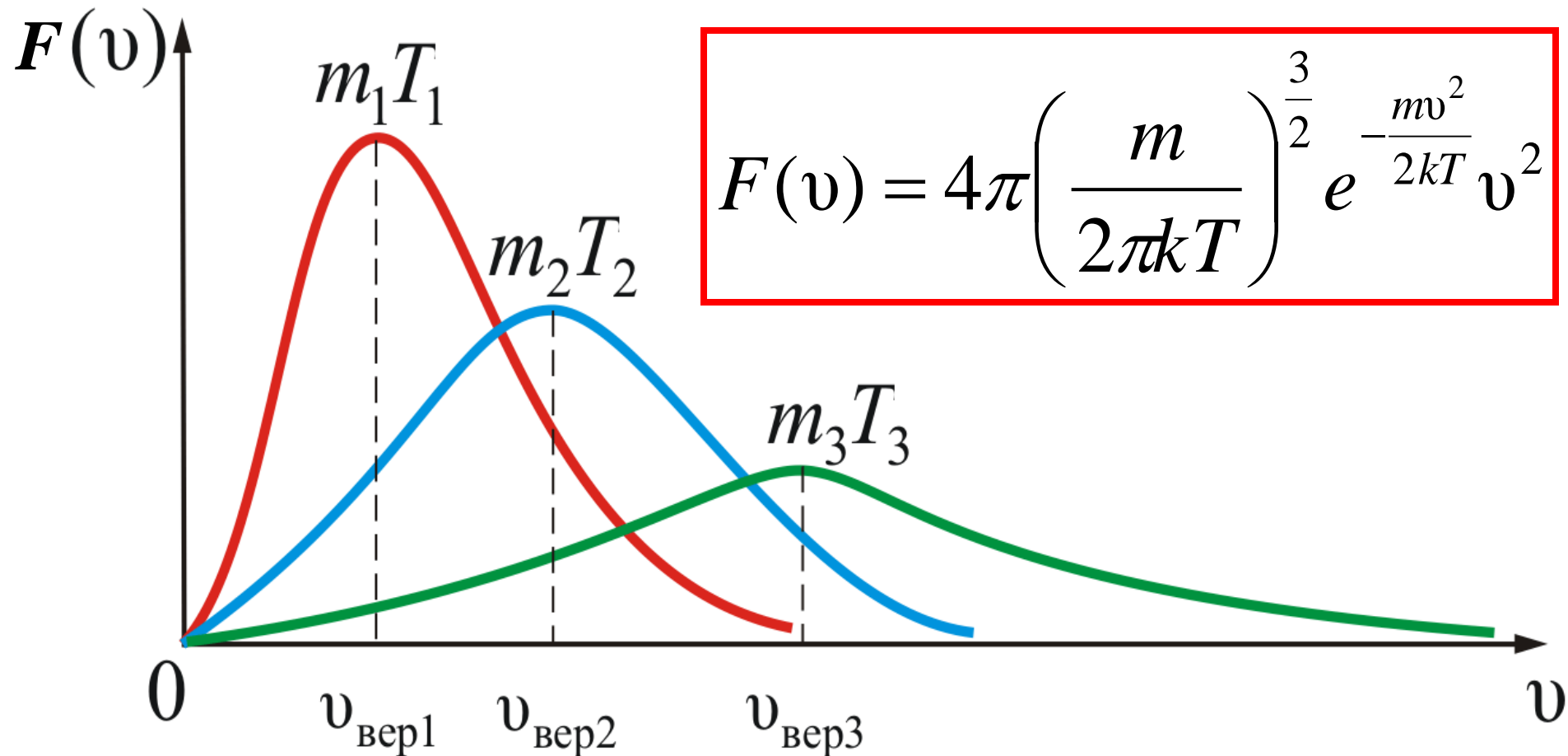
$$\frac{\nu_{\text{кв}}}{\nu_{\text{вер}}} = 1,22 \quad \frac{\nu_{\text{ср}}}{\nu_{\text{вер}}} = 1,13;$$





Зависимость функции распределения Максвелла от массы молекул и температуры газа

$m_3 < m_2 < m_1, T = \text{const}; \quad T_1 < T_2 < T_3, m = \text{const}$

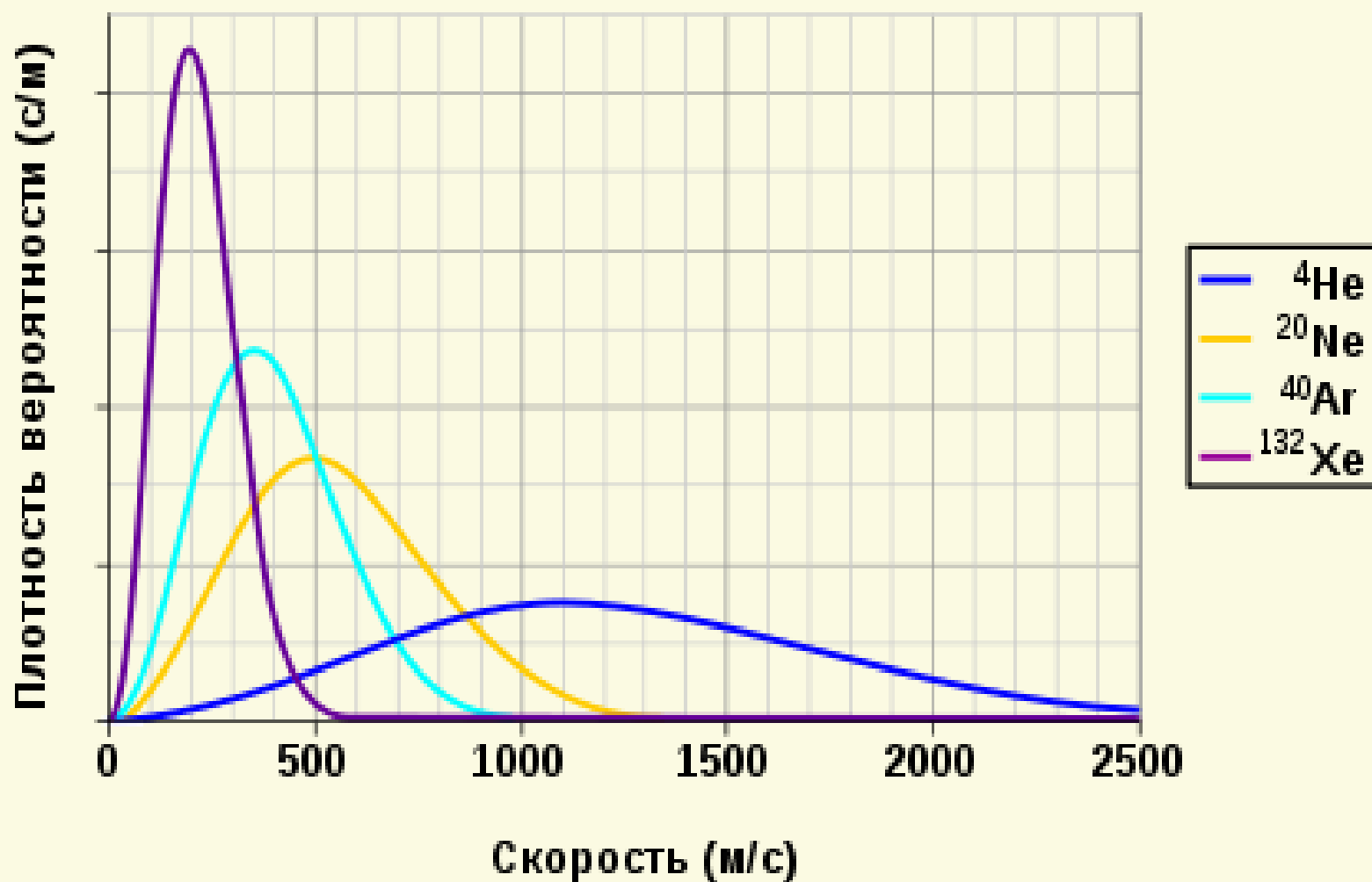


Из рис. можно проследить за изменением $F(\nu)$ при изменении m и T : $m_3 < m_2 < m_1$ (при $T = \text{const}$) или $T_1 < T_2 < T_3$ (при $m = \text{const}$).

Площадь под кривой величина постоянная, равная единице ($\text{const} = 1$), поэтому важно знать как будет изменяться положение максимума кривой:

$$F(\nu_{\text{вер}}) \sim \sqrt{\frac{m}{T}}, \quad \nu_{\text{вер}} \sim \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

Распределение плотности вероятности скоростей молекул для благородных газов



Распределение Максвелла

Распределение Максвелла - распределение молекул по скоростям

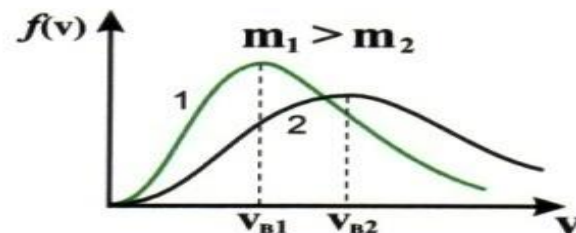
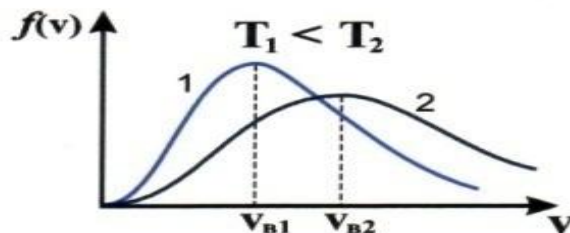
$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}$ функция распределения молекул по скоростям - это доля молекул, скорости которых лежат в единичном интервале в окрестностях некоторого значения v

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$



Задание

Объясните изменение графика зависимости функции распределения молекул по скоростям от температуры (T) газа и массы молекулы (m)



Лекция закончена!