

Лабораторная работа 5

Изучение вынужденных колебаний в колебательном контуре

Целью работы является изучение резонансных явлений в последовательном электрическом колебательном контуре и определение его параметров.

Приборы и принадлежности:

генератор сигналов ГЗ-112, осциллограф С1-96, измерительный модуль.

Рассмотрим процессы, протекающие в колебательном контуре (рис.1), состоящем из последовательно соединенных катушки индуктивности L , конденсатора C , резистора R и источника ЭДС ε .

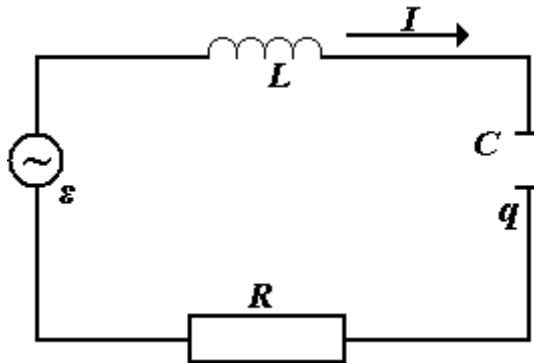


Рис.1

Пусть ЭДС источника ε изменяется со временем t по гармоническому закону:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega t,$$

где ε_m амплитуда ЭДС; ω - циклическая частота.

Будем полагать, что процессы в цепи удовлетворяют условию квазистационарности. Тогда для мгновенных значений токов и напряжений справедливы все законы, установленные для постоянного тока. По закону Ома для цепи, представленной на рис.1, можно записать:

$$U_C + U_R = \varepsilon + \varepsilon_L, \quad (1)$$

где $U_C = \frac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе; $U_R = IR$ - напряжение на сопротивлении R ; $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$ - ЭДС самоиндукции в катушке индуктивности L ; I, q, ε - мгновенные значения тока, заряда и ЭДС источника $I = \frac{dq}{dt}$.

Подставляя выражения для U_C , U_R , ε_L и I в уравнение (1) получим для заряда конденсатора q неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon_m \cos \omega t. \quad (2)$$

Уравнение (2) можно представить в виде

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \omega t, \quad (3)$$

где $2\beta = \frac{R}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Дифференциальное уравнение (3) позволяет установить зависимость заряда $q(t)$ конденсатора C от времени. Его решение равно сумме решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного уравнения (3). Решение однородного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

имеет вид $q_1(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$ и определяет затухающие колебания в контуре. Затухание колебаний зависит от множителя $e^{-\beta t}$, где β – коэффициент затухания, а q_0 и φ_0 определяются начальными условиями. При $t \gg \frac{1}{\beta}$ установившиеся колебания в контуре описываются частным решением уравнения (3):

$$q(t) = q_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (4)$$

Амплитуду q_m и разность φ фаз можно определить из формул

$$q_m = \frac{\varepsilon_m}{L} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (5)$$

$$tq\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (6)$$

В настоящей лабораторной работе найдём ток в колебательном контуре. Из уравнений (4), (5) и (6) можно получить выражение для тока $I = \frac{dq}{dt}$:

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi_1), \quad (7)$$

где I_m – амплитуда тока; φ_1 – разность фаз между током и ЭДС ε генератора,

$$I_m = \varepsilon_m \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (8)$$

$$tq\varphi_1 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (9)$$

Уравнение (7) описывает установившиеся стационарные вынужденные колебания тока в колебательном контуре. Из выражений (7) и (9) следует, что ток отстает по фазе от ЭДС ε в том случае, когда $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ($\varphi_1 > 0$) и опережает ЭДС, когда $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ ($\varphi_1 < 0$).

Амплитуда вынужденных колебаний тока I_m , как следует из выражения (8), зависит от соотношения частоты источника ЭДС ω и собственной частоты контура $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Зависимость амплитуды установившихся колебаний от частоты внешнего напряжения носит название резонансной кривой. На рис.2 изображена резонансная кривая для силы тока.

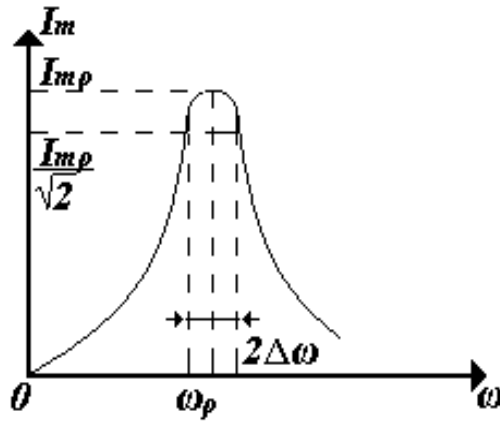


Рис.2

Из графика на рис.2 видно, что при приближении частоты вынужденных колебаний ω к собственной частоте контура ω_0 амплитуда тока резко увеличивается. Это явление называется резонансом. Частота, при которой амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального резонансного значения, называется резонансной. Из формулы (8) следует, что резонансное значение амплитуды силы тока $I_{mp} = \frac{\varepsilon_m}{R}$ и достигается при частоте внешнего напряжения ω равной резонансной $\omega_p = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

Определим ширину резонансной кривой $2\Delta\omega$ (рис.2), на уровне соответствующем току $\frac{I_{mp}}{\sqrt{2}}$ (ее называют полосой пропускания контура).

Из формулы (8) найдем

$$I_m = \varepsilon_m = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{I_{mp}}{\sqrt{2}} = \varepsilon_m \frac{1}{R\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Равенство (10) выполняется, если $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R$. Рассмотрим частоты ω , близкие к ω_0 , т.е. $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$. В этом случае

$$(\omega_0 + \Delta\omega)L - \frac{1}{C(\omega_0 + \Delta\omega)} = R, \quad (11)$$

или

$$\omega_0 L \left[\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{1}{C\omega_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)} \right] = R.$$

Ограничиваясь точностью первой степени отношения $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, соотношение (11) можно представить в виде:

$$\omega_0 L \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} \right) \approx \omega_0 L \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \right) = R. \quad (12)$$

Из уравнения (12) получим ширину $(2\Delta\omega)$ резонансной кривой

$$2\Delta\omega = \frac{R\omega_0}{\omega_0 L} = \frac{\omega_0}{Q}, \quad (13)$$

где $Q = \omega_0 \frac{L}{R}$ - добротность колебательного контура, которая определяется из ширины резонансной кривой.

Из формулы (13) определим добротность Q колебательного контура

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{\nu_0}{2\Delta\nu}, \quad (14)$$

где $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ и $2\Delta\omega = \frac{2\Delta\varphi}{2\pi}$. Таким образом, исследование резонансных кривых колебательного контура может быть использовано для определения его параметров, что находит применение в измерительной технике.

Описание лабораторной установки

Принципиальная схема измерительной установки показана на рис.3.

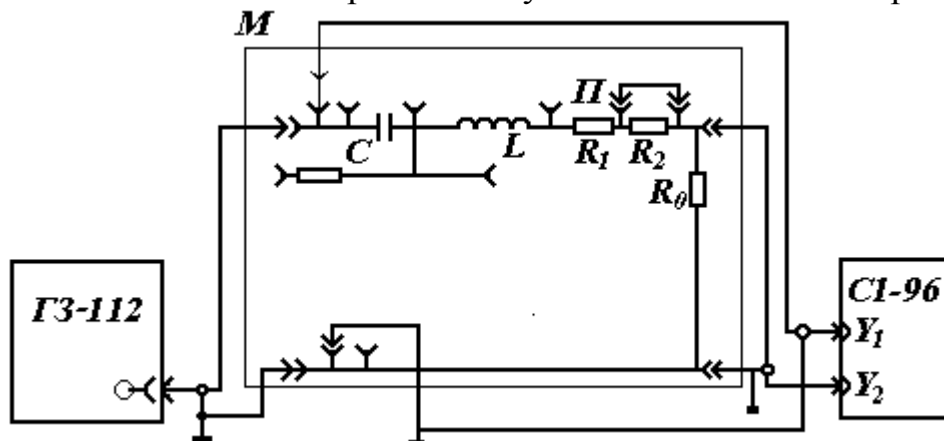


Рис.3

Элементы исследуемого колебательного контура смонтированы в кассете **М**. Источником ЭДС служит генератор **ГЗ-112**, выходное напряжение и частоту которого можно изменять в широких пределах. Амплитуда напряжения, приложенного к контуру (выходное напряжение генератора), а также амплитуда напряжения на резисторе R_0 , прямо пропорциональная току, текущему в контуре, измеряются с помощью двулучевого осциллографа **С1-96**. Напряжение с входа колебательного контура подается в канал Y_1 , а напряжение с резистора R_0 - в канал Y_2 . Полное активное сопротивление цепи колебательного контура: $R_K = R_L + R_0 + R_{\Gamma} + R_{\Pi}$, где R_L – сопротивление катушки контура; $R_{\Gamma} = 50$ Ом – выходное сопротивление генератора, R_{Π} – сопротивление резистора, включенного с помощью переключки **П**.

Рабочая часть экрана ЭЛТ осциллографа **С1-96** для луча составляет: по горизонтали 10 делений, по вертикали 8 делений. Основная приведенная погрешность измерения напряжения не превышает $\pm 4\%$. Основная приведенная погрешность измерения временных интервалов не превышает $\pm 5\%$. Основная погрешность установки частоты по шкале генератора **ГЗ-112/1** не превышает $\pm \left(2 + \frac{30}{\nu_n}\right)\%$, где ν_n - установленное по шкале значение частоты в герцах.

Порядок измерений

1. Соберите схему измерительной установки согласно рис.3.
2. По данным параметрам колебательного контура индуктивности L и емкости конденсатора C рассчитайте его собственную частоту $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$,

($\omega_0 = 2\pi\nu_0$). Индуктивность колебательного контура L , его емкость C , а также сопротивления R_0 , R_L и R_T указаны на установке.

3. Подготовьте генератор и осциллограф к работе. Установите тумблер выбора режима работы генератора в положение "~". Используя результаты расчета частоты колебательного контура ν_0 , переключателем "множитель" установите необходимый диапазон частот генератора. Ручку регулировки выходного напряжения поставьте в среднее положение, "ослабление дБ" – в положение "0".

Внимание! Во избежание выхода из строя электро-лучевой трубки (ЭЛТ) осциллографа перед включением его в сеть установите ручку яркости "☀" в крайнее против хода часовой стрелки положение, соответствующие минимальной яркости лучей. Переключатель режима развертки "АВТ" (автоколебательный режим). Ручку растяжки развертки в положение "X1" (нажата). Включите генератор и осциллограф в сеть и дайте прогреться 5-7 мин.

4. Ручками яркость "☀", фокусировка "⊗" добейтесь оптимальной яркости и фокусировки лучей, ручками "↑" "↔" установите изображение сигналов в средней части экрана ЭЛТ.

5. Нажатием кнопки " Y_1 " включите внутреннюю синхронизацию и ручкой "уровень", а также ручкой переключателя длительности развертки "Время/дел." получите на экране ЭЛТ две четкие и устойчивые осциллограммы: осциллограмма канала Y_1 представляет собой напряжение на входе колебательного контура, осциллограмма канала Y_2 – напряжение на резисторе R_0 .

1. С помощью переключателей коэффициентов отклонения "Время/дел." Каналов Y_1 и Y_2 осциллографа и ручкой плавной регулировки выходного напряжения генератора установите величину изображения сигналов на экране при резонансе не более 8 дел. **Внимание!** Значения коэффициентов отклонения усилителей каналов Y_1 и Y_2 , обозначенные на передней панели осциллографа, верны лишь при крайнем правом положении ручек "Усил. Плавно".

2. Изменяя частоту генератора, измерьте амплитуду напряжения U_m на резисторе R_0 ($U_m = I_m R_0$) (канал Y_2). Отсчеты следует производить через 100 Гц (сделайте 10-15 измерений). **Указание.** Для определения амплитуды измерьте в делениях шкалы размах переменного напряжения (размах равен удвоенному значению амплитуды) $U_m = 2U_m(t)$ и умножьте это расстояние на показания переключателя коэффициента отклонения "Вольт/дел."

3. Снимите резонансные кривые при различных значениях сопротивления резистора R_n и результаты измерений (не менее 15 измерений для каждого сопротивления) занесите в табл.1.

Таблица 1

№	$\nu, \Gamma_{\text{Ц}}$	$R_{\text{п}} = 0 \text{ Ом}$		$R_{\text{п}} = 1 \text{ кОм}$		$R_{\text{п}} = 3 \text{ кОм}$	
		$2U_{\text{м}}$	$U_{\text{м}}$	$2U_{\text{м}}$	$U_{\text{м}}$	$2U_{\text{м}}$	$U_{\text{м}}$
1							
2							
3							
4							
и							
т.д							

10. По результатам измерений постройте на одном чертеже графики резонансных кривых, откладывая по оси абсцисс частоту генератора ν , а по оси ординат не $U_{\text{м}}$, а отношение $U_{\text{м}}$ к $U_{\text{мп}}$ (т.е. к $U_{\text{м}}$ при резонансе).

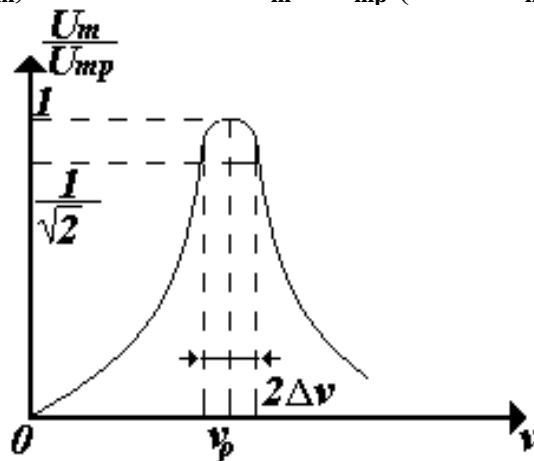


Рис. 3.

11. Используя графики резонансных кривых, рассчитайте добротность колебательного контура по формуле: $Q = \frac{\nu_p}{2\Delta\nu}$, где $2\Delta\nu$ - ширина резонансной кривой на высоте $\frac{I_{\text{мп}}}{\sqrt{2}}$, ν_p - резонансная частота при $R_{\text{п}} = 0$.
12. Найденные значения добротности и резонансной частоты контура сопоставьте с результатами расчета по формулам:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_K} = \frac{1}{R_K} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{и} \quad \nu_{\text{рез}} = \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad \text{где } L - \text{индуктивность катушки; } C - \text{емкость конденсатора, а } R_K = R_L + R_0 + R_{\Gamma} + R_{\text{п}} - \text{полное сопротивление колебательного контура.}$$

Разность фаз φ_1 определяется уравнением:

$$\tan \varphi_1 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (9)$$

Измерение угла сдвига фаз φ_1 можно выполнить по относительному расположению осциллограмм напряжения на экране осциллографа:

1. Установите с помощью переключателя "Время/дел." такую скорость развертки, чтобы наблюдались 1 – 2 периода исследуемых сигналов (при

этом кнопка переключателя растяжки изображения должна находиться в положении **X1**).

2. Ручкой "Уровень" получите устойчивое изображение сигналов, а ручками центровки " \updownarrow " " \leftrightarrow " каналов Y_1 и Y_2 совместите временные оси осциллограммы.

3. Разность фаз сигналов в радианах можно определить по формуле

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{a}{A}, \quad (15)$$

где a и A измеряются в делениях временной шкалы осциллографа, как показано на рис.4.

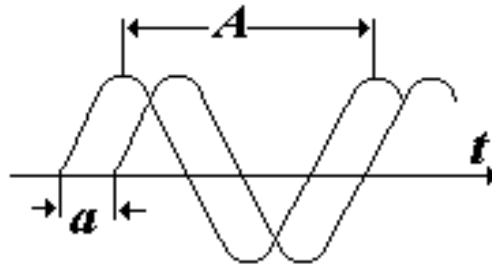


Рис. 4.

4. Рассчитайте погрешность измерений.

Контрольные вопросы

1. Какие процессы в колебательном контуре и при каком условии называются квазистационарными?
2. Какой вид имеет частное решение дифференциального уравнения (3)?
3. Что называется резонансом? Получите из выражения (8) резонансное значение амплитуды силы тока и резонансную частоту.
4. Что называется резонансной кривой?
5. Что называется добротностью колебательного контура? Получите выражение для добротности колебательного контура $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Инструкция по подготовке установки для лабораторной работы 5 Изучение вынужденных колебаний в колебательном контуре

1. Состав установки

- 1.1 Панель монтажная с элементами RLC и гнездами для подключения кабелей и установки перемычек.
- 1.2. Осциллограф универсальный двулучевой (ОСУ-20).
- 1.3. Генератор низкочастотный ГЗ-112/1.

2. Подготовка приборов для работы

- 2.1. Подготовка осциллографа (рис.1).

2.1.1. Осциллограф должен быть отключен от сети, кнопка **POWER(1)** – отжата.

2.1.2. Переключатели входов **CH1(2)** и **CH2(3)** поставить в положение **GND**.

2.1.3. Ручки **POSITION** \updownarrow (4,5) **POSITION** \leftrightarrow (6) установить в среднее положение.

2.1.4. Ручку яркости **INTEN(7)** - в правое крайнее положение.

2.1.5. Ручку **FOCUS(8)** – в правое крайнее положение.

2.1.6. Ручку усиления **Volt/div(9)** первого канала – в положение «1».

2.1.7. Центральные маленькие ручки (10,12) – в правое крайнее положение.

2.1.8. Ручку усиление **Volt/div (11)** второго канала – в положение «5».

2.1.9. Переключатель рода развертки **MODE(13)** в положение **AUTO**.

2.1.10. Переключатель источника синхронизации **TRIGGER SOURCE(14)** – в положение **CH1**.

2.1.11. Переключатель времени развертки **Time/div(15)** – в положение **2ms**.

2.1.12. Переключатель лучей **Mode(16)** - в положение **DUAL**.

- 2.2. Подготовка генератора (рис.2) для лабораторной работы.

2.2.1. Генератор должен быть отключен от сети. Тумблер **СЕТЬ(1)** – в положение **ВЫКЛЮЧЕНО**.

2.2.2. Ручка **МНОЖИТЕЛЬ(2)** - в положение **10²**.

2.2.3. Переключатель формы выходного сигнала(3) - в положение «~».

2.2.4. Переключатель **ОСЛАБЛЕНИЕ(4)** – в положение «0».

2.2.5. Ручку регулировки выходного сигнала(5) – в среднее положение.

3. Соединение панели монтажной с приборами для работы

3.1. Соединить кабелем гнездо осциллографа **CH1(17)** с гнездами панели \perp (1) и (3).

3.2. Соединить кабелем гнездо осциллографа **CH2(18)** с гнездами панели \perp (5) и (4).

3.3. Замкнуть резисторы (6) перемычкой.

3.4. Соединить кабелем гнездо выхода генератора(6) с гнездами платы \perp (1) и (3).

4. Включение установки

4.1. Вставить вилки приборов в сетевые розетки и включить соответствующие сетевые выключатели осциллографа и генератора и прогреть их в течение 2-3 минут.

4.2. Положение появившихся на экране осциллографа линий развертки откорректировать ручками **POSITION(4,5,6)**.

4.3. Перевести переключатели **CH1(2) и CH2(3)** в положение **AC**.

4.4. Плавно вращая ручку изменения **частоты (7)**, добиться максимума вынужденных колебаний по второму каналу (пример на рис.4).

4.5. Синхронизировать изображение ручкой **TRIG LEVEL(19)**.

4.6. Изменять добротность контура различным замыканием **резисторов (6)** панели.

4.7. Амплитуду колебаний регулировать **ручкой (5)** генератора, а длительность - ручкой **Time/div** осциллографа.

4.8. Перейти к измерениям.

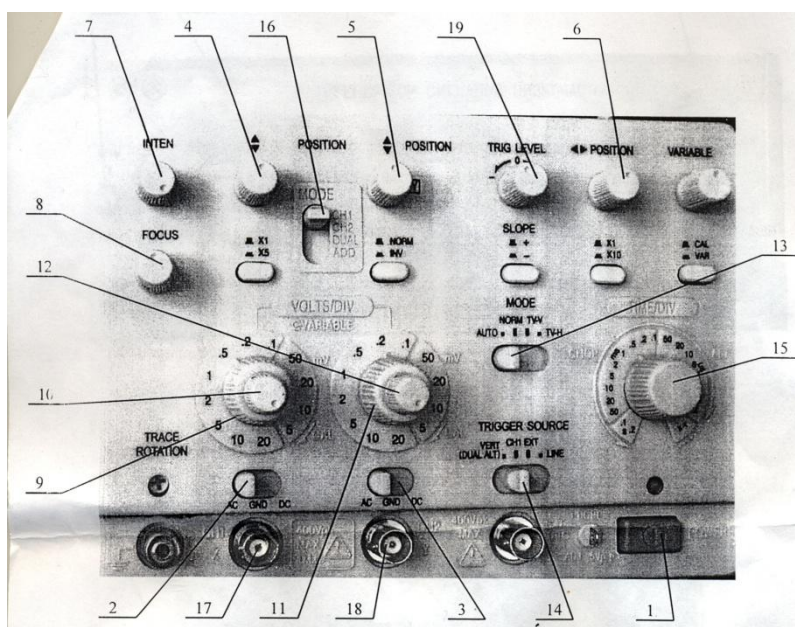


Рис. 1. Панель управления осциллографа ОСУ-20

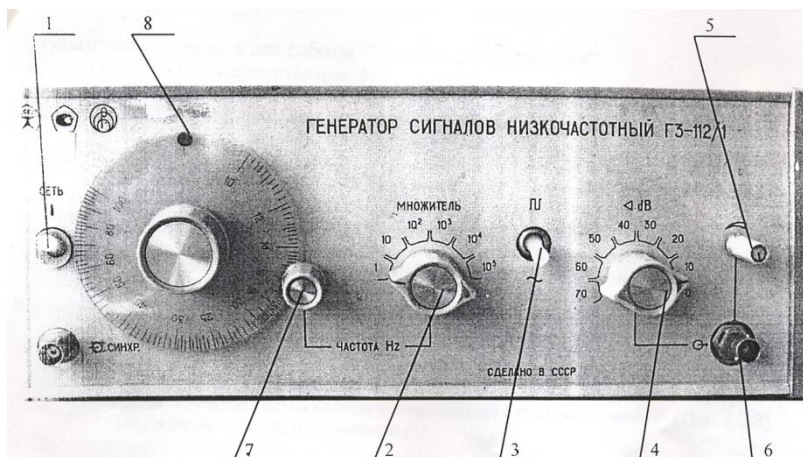


Рис. 2. Генератор ГЗ-112/1

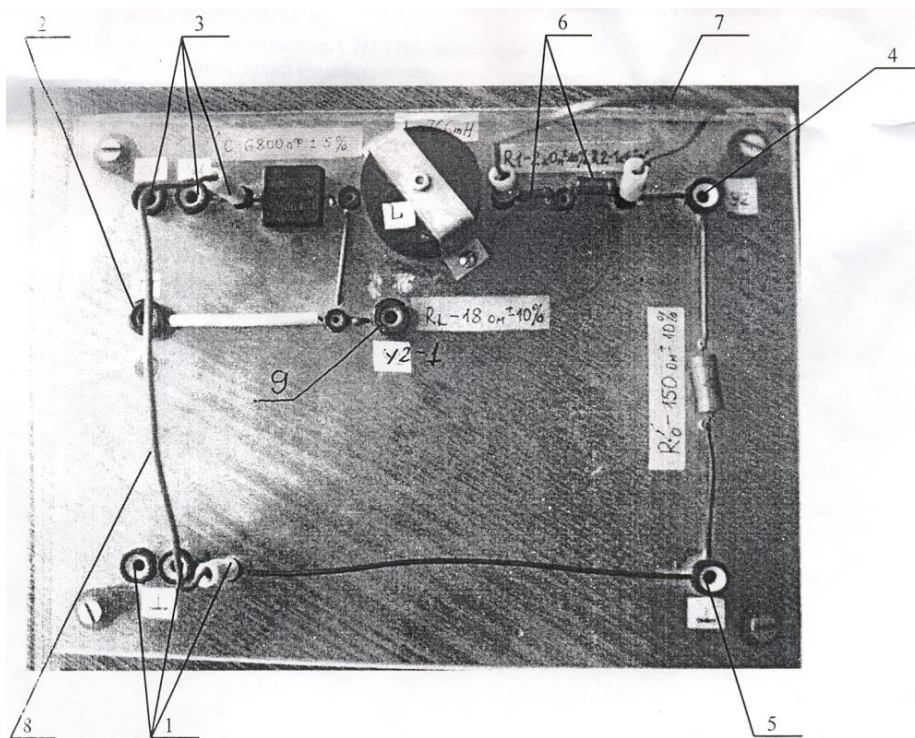


Рис. 3. Панель монтажная

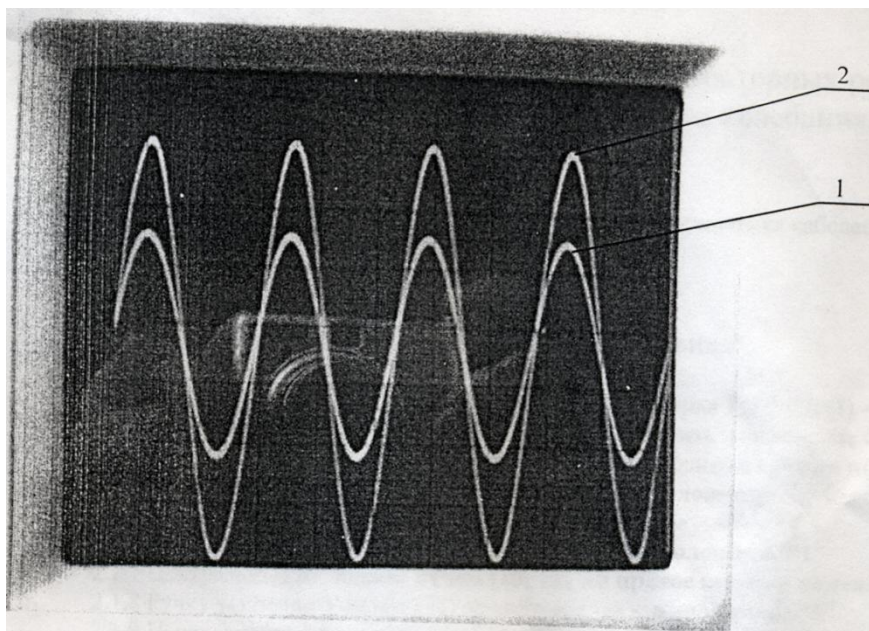


Рис. 4. Пример осциллограммы вынужденных колебаний.
1 – входное напряжение, 2 – выходное напряжение.