

# Сети массового обслуживания (СеМО)

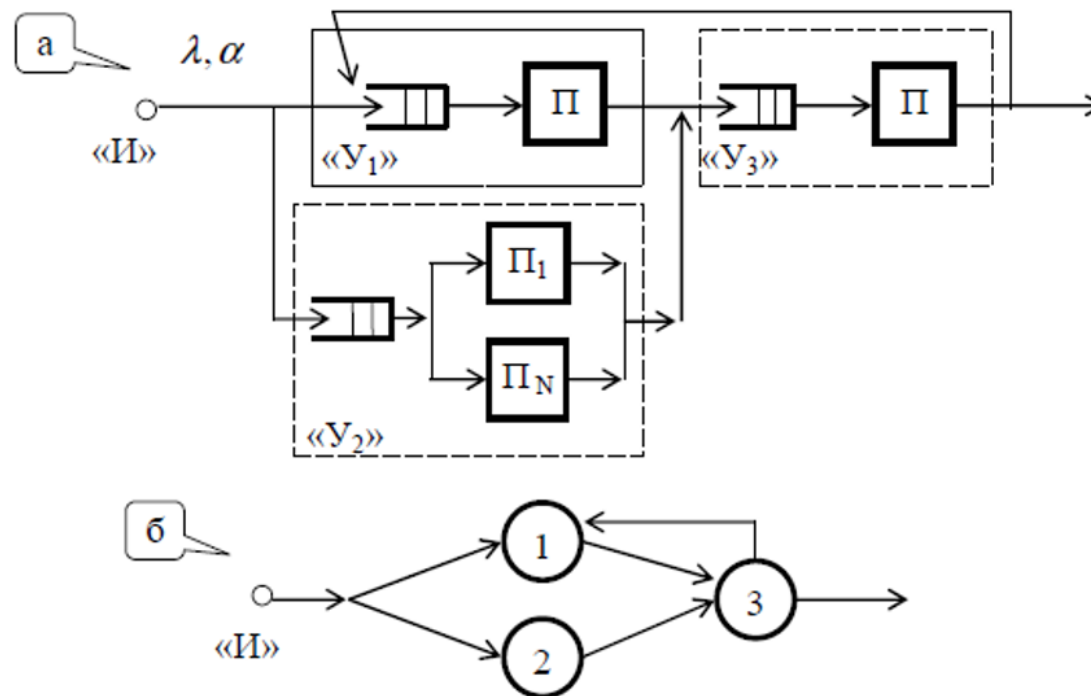
Сеть массового обслуживания (СеМО) – совокупность взаимосвязанных СМО, в среде которых циркулируют заявки (а).

Основными элементами СеМО являются узлы (У) и источники заявок (И).

Узел сети представляет собой систему массового обслуживания.

Источник – генератор заявок, поступающих в сеть и требующих определенных этапов обслуживания в узлах сети.

Для упрощенного изображения СеМО используется граф СеМО (б).

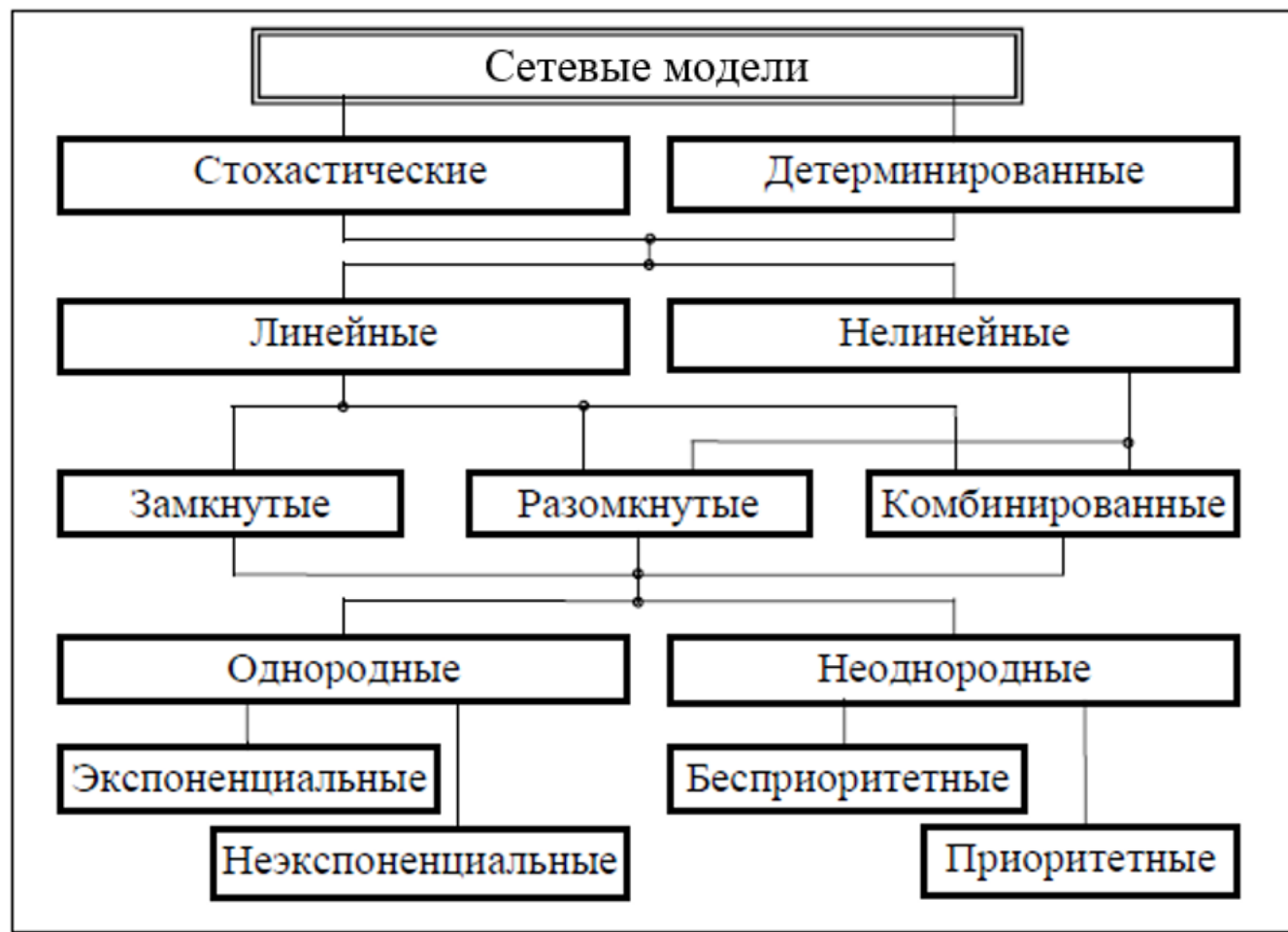


Граф СеМО – ориентированный граф, вершины которого соответствуют узлам СеМО, а дуги отображают переходы заявок между узлами (б).

Переходы заявок между узлами СеМО, в общем случае, могут быть заданы в виде вероятностей передач. Путь движения заявок в СеМО называется *маршрутом*.

## *Классификация сетевых моделей*

В зависимости от структуры и свойств исследуемых систем их моделями могут служить СеМО различных классов. Одна из возможных классификаций сетевых моделей приведена на рисунке.



В зависимости от *характера процессов поступления и обслуживания заявок* в сети СеМО делятся на:

- *стохастические*, в которых процессы поступления и/или обслуживания заявок носят случайный характер, то есть интервалы времени между поступающими заявками и/или длительности их обслуживания в узлах представляют собой случайные величины, описываемые соответствующими законами распределений;
- *детерминированные*, в которых интервалы времени между поступающими заявками и длительности их обслуживания в узлах являются детерминированными величинами.

По *виду зависимостей, связывающих интенсивности потоков заявок в разных узлах*, СеМО делятся на:

- *линейные*, если эти зависимости линейные;
- *нелинейные*, если эти зависимости являются нелинейными.

В линейных СеМО интенсивность потока заявок в узел  $j$  связана с интенсивностью потока заявок в узел  $i$  линейной зависимостью:  $\lambda_j = \alpha_{ij} \lambda_i$ , где  $\alpha_{ij}$ -коэффициент пропорциональности, показывающий, во сколько раз отличаются интенсивности потоков заявок в узел  $j$  и в узел  $i$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Интенсивность поступления заявок во все узлы  $j = 1, \dots, n$  можно записать через интенсивность  $\lambda_0$  потока заявок, поступающих в СеМО из источника заявок:  $\lambda_j = \alpha_j \lambda_0$ . Здесь  $\alpha_j \geq 0$  показывает, во сколько раз интенсивность потока заявок в узел  $j$  отличается от интенсивности источника заявок, и называется *коэффициентом передачи*. Коэффициент передачи можно трактовать как *среднее число попаданий заявки в данный узел за время ее нахождения в сети*. Например, если  $\alpha_j$  равен 3, то это означает, что любая заявка за время нахождения в сети в среднем 3 раза побывает на обслуживании в данном узле. Значение  $\alpha_j$ , равное 0,25, будет означать, что в среднем только одна заявка из четырёх попадёт на обслуживание в данный узел, а три другие обойдут данный узел стороной.

Нелинейность СеМО может быть обусловлена потерей заявок в сети (например, из-за ограниченной емкости накопителей в узлах) или размножением заявок в сети, заключающимся, например, в формировании нескольких новых заявок после завершения обслуживания некоторой заявки в одном из узлов сети.

Таким образом, СеМО является линейной, если в ней заявки не размножаются и не теряются.

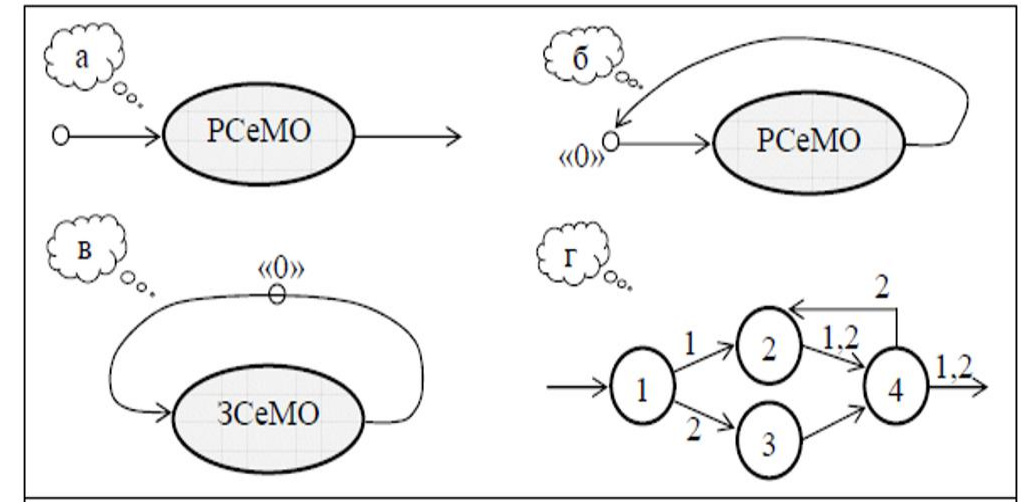
По числу циркулирующих в сети заявок различают СеМО:

- разомкнутые;
- замкнутые;
- замкнуто-разомкнутые.

Разомкнутая (открытая) СеМО (РСеМО) содержит один или несколько внешних независимых источников заявок, которые генерируют заявки в сеть независимо от числа заявок, находящихся в сети (а).

В РСеМО одновременно может находиться *любое* число заявок. С РСеМО связана внешняя среда, из которой поступают заявки в сеть и в которую они возвращаются после обслуживания в сети. Внешняя среда в РСеМО может обозначаться как нулевой узел "0", и РСеМО, в этом случае, изображается в виде (б).

Замкнутая (закрытая) СеМО (ЗСеМО) не содержит независимых внешних источников заявок; в ней циркулирует *постоянное* число заявок  $M$  (в). На графе ЗСеМО обычно выделяется особая дуга, отображающая процесс завершения обслуживания заявок в сети и мгновенного формирования новой заявки с такими же параметрами обслуживания, что и завершившая обслуживание. Это позволяет рассматривать завершившую обслуживание заявку как новую, поступившую в сеть из *зависимого источника заявок*. На выделенной дуге ЗСеМО отмечается условная точка "0", рассматриваемая как нулевой узел и трактуемая иногда как фиктивная СМО с нулевой длительностью обслуживания или как зависимый источник заявок, генерирующий заявки только в момент поступления некоторой заявки на его вход. При этом достигается однозначность в описании РСеМО и ЗСеМО и обеспечивается возможность определения характеристик ЗСеМО относительно выделенного узла "0". В частности, время пребывания заявок в ЗСеМО рассматривается как промежуток времени между двумя соседними моментами прохождения заявки через нулевой узел.



*Замкнуто-разомкнутая СеМО* (комбинированная) представляет собой комбинацию ЗСеМО и РСеМО, в которую, кроме постоянно циркулирующих в сети  $M^*$  заявок, из внешнего независимого источника поступают заявки такого же или другого класса, при этом суммарное число заявок в сети  $M \geq M^*$ .

По типу *циркулирующих заявок* различают СеМО:

- *однородные*, в которых циркулирует один класс заявок (однородный поток заявок);
- *неоднородные*, в которых циркулирует несколько классов заявок (неоднородный поток заявок), различающихся хотя бы одним из следующих факторов:

- длительностями обслуживания в узлах;
- приоритетами;
- маршрутами.

Маршруты заявок разных классов задаются путем указания номеров классов заявок на соответствующих дугах сети ( $\Gamma$ ).

# Параметры и характеристики СеМО

## Параметры СеМО

Для описания линейных *разомкнутых* и *замкнутых* однородных экспоненциальных СеМО используется следующая совокупность параметров:

- число узлов в сети:  $n$ ;
- число обслуживающих приборов в узлах сети:  $K_1, \dots, K_n$ ;
- матрица вероятностей передач:  $P = [p_{ij} \mid i, j = 0, 1, \dots, n]$ , где  $p_{ij}$

вероятность передачи заявки из узла  $i$  в узел  $j$ ;

- интенсивность  $\lambda_0$  источника заявок, поступающих в разомкнутую СеМО (РСеМО), или число заявок  $M$ , циркулирующих в замкнутой СеМО (ЗСеМО);
- средние длительности обслуживания заявок в узлах сети:  $b_1, \dots, b_n$ .

Для линейных СеМО :  $\sum_{j=0}^n p_{ij} = 1 \quad (i = \overline{0, n})$ ,

т.е. любая заявка, покинувшая некоторый узел, обязательно перейдёт в какой-то узел, включая тот же самый или нулевой. Переход заявки в нулевой узел означает, что заявка покинула сеть.

Замечание 1: состав параметров разомкнутых и замкнутых СеМО различается только одним параметром: для ЗСеМО, в отличие от РСеМО, вместо интенсивности  $\lambda_0$  поступления заявок в сеть необходимо задать число постоянно циркулирующих в сети заявок  $M$ .

Замечание 2: в случае *неэкспоненциальных разомкнутых* СеМО дополнительно необходимо задать законы распределения или, по крайней мере, вторые моменты интервалов времени между поступающими в разомкнутую сеть заявками и длительностей обслуживания заявок в узлах сети.

Замечание 3: в случае *неоднородных* СеМО необходимо дополнительно задать количество классов заявок  $H$  в сети и для каждого класса – матрицы вероятностей передач  $P(h)$ , интенсивности  $\lambda_0(h)$  или число заявок  $M(h)$ , а также средние длительности обслуживания  $b_i(h)$  заявок класса  $h = 1, \dots, H$  в узле  $i = 1, n$ .

При необходимости могут быть заданы законы распределений интервалов между поступающими в РСеМО заявками и законы распределений длительностей обслуживания заявок разных классов в узлах сети.

### Режимы функционирования СеМО

СеМО, как и СМО, может работать в *установившемся и неуставившемся* режимах. Последний может быть связан с началом работы системы (переходной режим), нестационарным характером потока заявок и обслуживания в приборе (нестационарный режим) и перегрузкой системы (режим перегрузки).

Для СеМО, как и для СМО, при использовании предположения о стационарности входящего потока заявок и длительностей обслуживания заявок в узлах условие существования установившегося режима совпадает с условием отсутствия перегрузок.

В разомкнутой СеМО: перегрузки отсутствуют, если каждый узел сети работает без перегрузок. Если же хотя бы один из узлов сети не справляется с нагрузкой, то длина очереди в этом узле начнет увеличиваться до бесконечности и, следовательно, суммарное число заявок в РСеМО будет расти неограниченно.

Таким образом, для того чтобы в разомкнутой СеМО не было перегрузок, необходимо отсутствие перегрузок во всех узлах РСеМО, то есть загрузка  $\rho_j$  любого узла  $j$  ( $j=1, \dots, n$ ) должна быть строго меньше единицы:

$$\rho_j = \frac{\lambda_j b_j}{K_j} = \frac{\alpha_j \lambda_0 b_j}{K_j} < 1 \quad \text{для всех } j = \overline{1, n}. \quad \text{Следовательно,} \quad \lambda_0 < \frac{K_j}{\alpha_j b_j} \quad \text{для всех } j = \overline{1, n}.$$

$$\text{Или} \quad \lambda_0 < \min \left( \frac{K_1}{\alpha_1 b_1}, \frac{K_2}{\alpha_2 b_2}, \dots, \frac{K_n}{\alpha_n b_n} \right).$$

Полученное условие налагает ограничение сверху на интенсивность поступления заявок в РСеМО из внешнего источника. Узлы, в которых указанное условие не выполняется, являются перегруженными. С течением времени это приводит к неограниченному росту числа заявок в сети, которые скапливаются в перегруженных узлах, имеющих накопители неограниченной ёмкости. В дальнейшем при исследовании разомкнутых СеМО, если не оговорено другое, будем полагать, что в сети существует установившийся режим.



В замкнутых СеМО: поскольку в ЗСеМО циркулирует постоянное число заявок, то в узлах сети не могут образовываться очереди бесконечной длины, следовательно, в ЗСеМО всегда существует установившийся режим. Даже если в сети имеется очень «медленный» узел, в котором по сравнению с другими узлами слишком долго обрабатываются заявки, то это может привести только к тому, что все заявки будут постоянно скапливаться в очереди перед данным узлом, однако их количество будет всегда конечно и в пределе равно числу циркулирующих в сети заявок. Загрузка такого «медленного» узла будет близка к единице, поскольку постоянное наличие очереди перед этим узлом обуславливает непрерывную работу приборов узла. Такой узел обычно представляет собой так называемое «узкое место» сети.

## Характеристики СеМО

Характеристики СеМО делятся на два класса:

- *узловые*, описывающие эффективность функционирования отдельных узлов СеМО;
- *сетевые*, описывающие функционирование СеМО в целом.

Состав *узловых* характеристик СеМО, работающей в стационарном режиме, такой же, как и для СМО, и для узла  $j = 1, \dots, n$  включает в себя следующие характеристики:

- нагрузка узла:  $y_j = \lambda_j b_j = \alpha_j \lambda_0 b_j$ ;
- *загрузка* узла:  $\rho_j = \frac{y_j}{K_j} = \frac{\alpha_j \lambda_0 b_j}{K_j}$ , причем  $\rho_j < 1$ ;
- коэффициент простоя узла:  $\eta_j = 1 - \rho_j$ ;
- время ожидания заявок в узле:  $w_j$ ;
- время пребывания заявок в узле:  $u_j = w_j + b_j$ ;
- длина очереди заявок узле:  $l_j = \lambda_j w_j = \alpha_j \lambda_0 w_j$ ;
- число заявок в узле (в очереди и на обслуживании):  $m_j = \lambda_j u_j = \alpha_j \lambda_0 (w_j + b_j) = l_j + y_j$ .

В приведенных выше формулах использован тот факт, что в линейных СеМО интенсивность поступления заявок в любой узел связана с интенсивностью источника соотношением  $\lambda_j = \alpha_j \lambda_0$ .

На основе узловых характеристик рассчитываются *сетевые характеристики* СеМО:

- *суммарная нагрузка* во всех узлах, характеризующая среднее число заявок, одновременно находящихся на обслуживании во всех узлах сети:  $Y = \sum_{j=1}^n y_j$ , где  $y_j$  – нагрузка узла  $j$ , причем  $0 < Y \leq \sum_{j=1}^n K_j$ ;

- *суммарная загрузка* всех узлов СеМО, характеризующая среднее число параллельно работающих узлов сети:  
 $R = \sum_{j=1}^n \rho_j$ , где  $\rho_j$  – загрузка узла  $j$ , причем  $0 < R \leq n$ ;

- *среднее число заявок, находящихся в очередях* всех узлов сети и ожидающих обслуживания:  
 $L = \sum_{j=1}^n l_j$ , где  $l_j$  – средняя длина очереди заявок в узле  $j$ ;

- *среднее число заявок, находящихся в сети*:  $M = \sum_{j=1}^n m_j$ , где  $m_j$  – среднее число заявок в узле  $j$ , причём для замкнутых сетей это выражение может быть использовано для проверки правильности проведенных расчетов, так как для них число заявок  $M$  в сети задано;

- *среднее время ожидания заявок в сети*:  $W = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$ , где  $w_j$  – среднее время ожидания заявок в узле  $j$ ;  $\alpha_j$  – коэффициент передачи для узла  $j$ , показывающий среднее число попаданий заявки в узел  $j$  за время её нахождения в сети;  $W_j = \alpha_j w_j$  – представляет собой суммарное (полное) время ожидания заявки в узле  $j$  за время её нахождения в сети;

- *среднее время пребывания заявок в сети:*  $U = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$ , где  $u_j$  – среднее время пребывания заявок в узле  $j$ ;  
 $U_j = \alpha_j u_j$  – суммарное (полное) время пребывания заявки в узле  $j$  за время её нахождения в сети;
- *производительность замкнутой СеМО  $\lambda_0$* , определяемая как интенсивность потока заявок, проходящих через выделенный нулевой узел замкнутой сети, и представляющая собой среднее число заявок, обслуженных в ЗСеМО за единицу времени; производительность ЗСеМО может быть рассчитана по формуле:  $\lambda_0 = \lambda_j / \alpha_j$ .
- Для сетевых характеристик СеМО выполняются *формулы Литтла*:

$$L = \lambda_0 W;$$

$$M = \lambda_0 U;$$

$$M = L + Y;$$

$$U = W + B,$$

где  $B = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j$  - суммарное время обслуживания заявки во всех узлах за время ее нахождения в сети;

формула  $\lambda_0 = \frac{M}{U}$  часто используется для вычисления производительности СеМО.

## ***Разомкнутые экспоненциальные СеМО с однородным потоком заявок***

*Основные предположения:*

- разомкнутая СеМО (РСеМО) *произвольной топологии* содержит  $n$  узлов;
- после завершения обслуживания в каком-либо узле передача заявки в другой узел происходит *мгновенно*;
- в качестве узлов могут быть как *одноканальные*, так и *многоканальные* СМО;
- все приборы многоканального узла являются *идентичными*, и любая заявка может обслуживаться любым прибором;
- заявка, поступившая в многоканальный узел, когда все или несколько приборов свободны, направляется случайным образом *в любой свободный прибор*;
- в каждом узле РСеМО имеется накопитель заявок *неограниченной ёмкости*, что означает отсутствие отказов поступающим заявкам при их постановке в очередь, то есть любая поступающая в узел заявка всегда найдет в накопителе место для ожидания независимо от того, сколько заявок уже находится в очереди;
- заявки поступают в РСеМО из *внешнего независимого* источника и образуют *простейший* поток заявок;
- длительности обслуживания заявок во всех узлах сети представляют собой случайные величины, распределенные по *экспоненциальному* закону;
- обслуживающий прибор любого узла *не простаивает*, если в его накопителе имеется хотя бы одна заявка, причем после завершения обслуживания очередной заявки мгновенно из накопителя выбирается следующая заявка;
- в каждом узле сети заявки из накопителя выбираются в соответствии с *бесприоритетной* дисциплиной обслуживания в порядке поступления (ОПП) по правилу «первым пришел – первым обслужен» (FIFO – First In First Out).

Для описания линейных разомкнутых однородных экспоненциальных СеМО необходимо задать следующую совокупность параметров:

- число узлов в сети:  $n$ ;
- число обслуживающих приборов в узлах сети:  $K_1, \dots, K_n$ ;
- матрицу вероятностей передач:  $\mathbf{P} = [p_{ij} \mid i, j = 0, 1, \dots, n]$ , где вероятности передач  $p_{ij}$  должны удовлетворять условию: сумма элементов каждой строки должна быть равна 1;
- интенсивность  $\lambda_0$  источника заявок, поступающих в РСеМО;
- средние длительности обслуживания заявок в узлах сети:  $b_1, \dots, b_n$ .

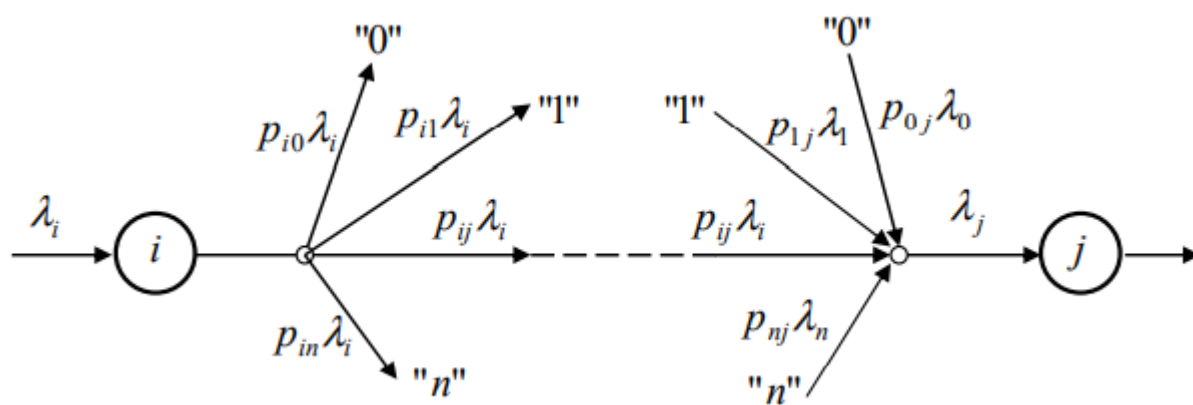
На основе перечисленных параметров могут быть рассчитаны *узловые и сетевые характеристики*, описывающие эффективность функционирования соответственно узлов и РСеМО в целом.

Расчет характеристик функционирования *линейных разомкнутых однородных экспоненциальных СеМО* базируется на эквивалентном преобразовании сети и проводится в четыре этапа:

- расчет коэффициентов передач  $\alpha_j$  и интенсивностей потоков заявок  $\lambda_j$  в узлах ( $j = 1, \dots, n$ ) СеМО;
- проверка условия отсутствия перегрузок в СеМО;
- расчет узловых характеристик;
- расчет сетевых характеристик.

### Расчет коэффициентов передач и интенсивностей потоков заявок в узлах РСемо

Интенсивности  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  потоков заявок, поступающих в узлы  $0, \dots, n$  сети, в установившемся режиме однозначно определяются вероятностями передач  $p_{ij}$  ( $i, j = 1 \dots n$ ), задающими маршруты заявок в СеМО. Так как в линейной СеМО заявки не размножаются и не теряются, то интенсивности входящего и исходящего потоков для любого узла будут равны между собой. Интенсивность потока заявок, входящих в любой узел  $j$  сети, равна сумме интенсивностей потоков заявок, поступающих в него из других узлов  $i = 0 \dots n$ .



Заявки из узла  $i$  поступают в узел  $j$  с вероятностью  $p_{ij}$ , интенсивность потока заявок, поступающих из  $i$  в  $j$ , равна  $p_{ij}\lambda_i$ , где  $\lambda_i$  - интенсивность исходящего и, следовательно, входящего потока заявок узла  $i$ . Тогда на входе узла  $j$  имеется поток с интенсивностью

$$\lambda_j = \sum_{i=0}^n p_{ij} \lambda_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

(система линейных алгебраических уравнений  $(n+1)$ -го порядка).

Решение системы - интенсивности потоков заявок в виде соотношения  $\lambda_j = \alpha_j \lambda_0$ . Коэффициент  $\alpha_j$  называется *коэффициентом передачи* и определяет среднее число попаданий заявки в узел  $j$  за время ее нахождения в сети, причем  $\alpha_0 = 1$ .

Для разомкнутой СеМО известна интенсивность источника заявок  $\lambda_0$ . Можно показать, что система уравнений для расчета интенсивностей имеет единственное решение вида  $\lambda_j = \alpha_j \lambda_0$ , где  $\lambda_0$  - заданная величина.

## *Проверка условия отсутствия перегрузок в СеМО*

В разомкнутой СеМО отсутствуют перегрузки, если выполняется условие:

$$\lambda_0 < \min\left(\frac{K_1}{\alpha_1 b_1}, \frac{K_2}{\alpha_2 b_2}, \dots, \frac{K_n}{\alpha_n b_n}\right)$$

Если указанное условие не выполняется, то стационарный режим в разомкнутой СеМО может быть реализован одним из следующих способов:

- уменьшением интенсивности  $\lambda_0$  внешнего источника заявок до значения, при котором это условие будет выполняться;
- увеличением количества обслуживающих приборов  $K_j$  в перегруженных узлах;
- уменьшением длительностей  $b_j$  обслуживания заявок в перегруженных узлах;
- уменьшением коэффициентов передач  $\alpha_j$  в перегруженных узлах.



## Расчет узловых характеристик РСемо

Один и тот же объект, рассматриваемый на разных уровнях детализации, можно представить различными моделями массового обслуживания, характеристики которых одинаковы или отличаются на величину, не превосходящую заданной погрешности. При выполнении определенных условий такие модели легко преобразуются друг в друга. Для сетевых моделей в виде разомкнутых и замкнутых СеМО могут использоваться два вида преобразований:

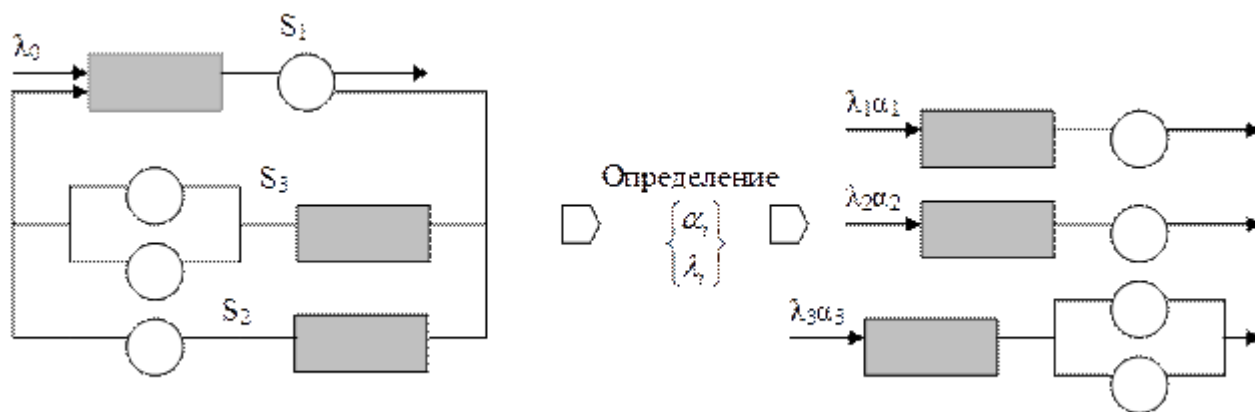
- *эквивалентное* преобразование;
- *толерантное* преобразование.

Две сетевые модели *эквивалентны*, если сравниваемые характеристики этих моделей не отличаются друг от друга. Две сетевые модели *толерантны* (подобны), если значения определенных характеристик отличаются друг от друга на величину, не превосходящую заданную.

Использование свойств эквивалентных и толерантных моделей позволяет упростить расчет характеристик моделей путем замены сложных сетевых моделей более простыми. Эквивалентными могут быть сетевые модели одного типа (например, две замкнутые сети), толерантными — модели как одного, так и разных типов.

Расчет характеристик функционирования линейных разомкнутых однородных экспоненциальных СеМО базируется на эквивалентном преобразовании сети, заключающемся в представлении разомкнутой СеМО с  $n$  узлами в виде  $n$  независимых экспоненциальных СМО типа М/М/Н (простейший поток заявок, длительность обслуживания распределена по экспоненциальному закону,  $N$  обслуживающих приборов). При этом интенсивность входящего потока заявок в СМО, отображающую узел  $j$  ( $j=1 \dots n$ ) сети, определяется из системы алгебраических уравнений  $\lambda_j = \alpha_j \lambda_0$ , а средняя длительность обслуживания заявок в СМО равна длительности обслуживания  $b_j$  заявок в соответствующем узле СеМО.

Пример. Преобразование разомкнутой сети в совокупность одно и многоканальные СМО.



Характеристики всех  $n$  СМО представляют собой узловые характеристики СеМО.

- Среднее время ожидания заявок в очереди может быть рассчитано с использованием выражения

- для многоканальных СМО типа М/М/Н  $w = \frac{Pb}{K(1-\rho)}$ , где  $P = \frac{(K\rho)^K}{K!(1-\rho)} P_0$  - вероятность того, что все  $K$  приборов заняты обслуживанием заявок;

- для одноканальных СМО типа М/М/1  $w = \frac{\rho b}{1-\rho}$ ;

- нагрузка в узле  $j$ , показывающая среднее число занятых приборов:  $y_j = \lambda_j b_j$ ;
- загрузка узла  $j$ :  $\rho_j = \min(y_j / K_j; 1)$ , - число обслуживающих приборов в узле  $K_j$ ;
- коэффициент простоя узла:  $\eta_j = 1 - \rho_j$ ;
- время пребывания заявок в узле:  $u_j = w_j + b_j$ ;
- длина очереди заявок:  $l_j = \lambda_j w_j$ ;
- число заявок в узле (в очереди и на обслуживании в приборе):  $m_j = \lambda_j u_j$ .

Рассчитанные таким образом характеристики отдельных СМО в точности соответствуют узловым характеристикам исходной СеМО, то есть в отношении своих характеристик модель массового обслуживания, представляющая собой совокупность независимых СМО (каждая СМО рассматривается независимо от других), строго эквивалентна исходной разомкнутой СеМО в целом.

### *Расчет сетевых характеристик РСеМО*

Сетевые характеристики, описывающие эффективность функционирования СеМО в целом, рассчитываются на основе полученных значений узловых характеристик. В состав сетевых характеристик входят:

- среднее число заявок, ожидающих обслуживания в сети, и среднее число заявок, находящихся в сети:

$$L = \sum_{j=1}^n l_j; \quad M = \sum_{j=1}^n m_j$$

- среднее время ожидания и среднее время пребывания заявок в сети:

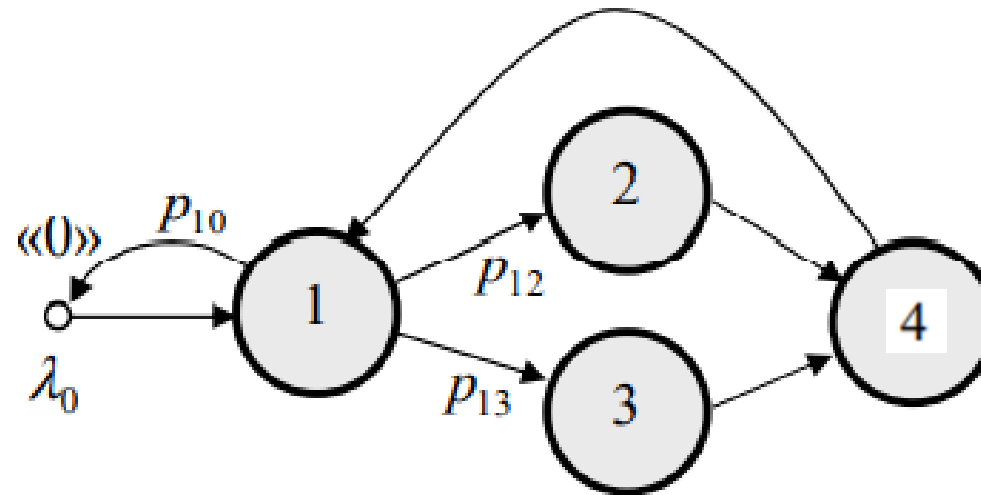
$$W = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j; \quad U = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$$

где  $w_j$  и  $u_j$  — соответственно среднее время ожидания и среднее время пребывания заявок в узле  $j$ ;  $\alpha_j$  — коэффициент передачи для узла  $j$ , показывающий среднее число попаданий заявки в узел  $j$  за время ее нахождения в сети.

Пример 1а. Рассчитать характеристики функционирования линейной разомкнутой однородной экспоненциальной СеМО с четырьмя узлами ( $n = 4$ ), граф которой представлен на рисунке. Связи между узлами СеМО описываются матрицей вероятностей передач:

$$\mathbf{P} =$$

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0
1	0,1	0	0,2	0,7	0
2	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	0



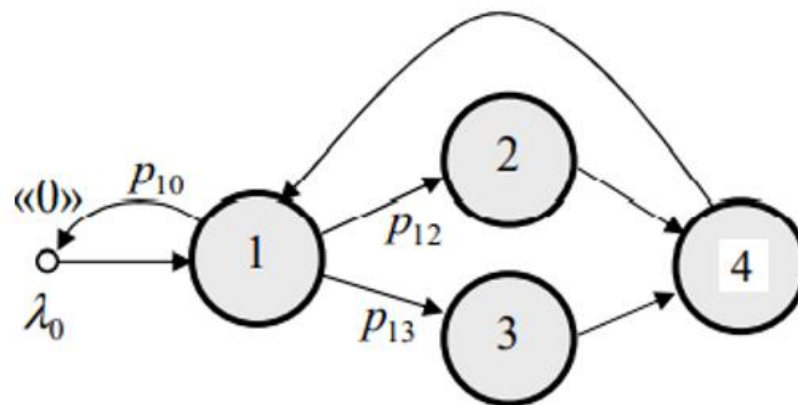
В РСеМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda = 0,1\text{с}^{-1}$ .

Положим, что все узлы СеМО – одноканальные, а средние длительности обслуживания заявок в узлах соответственно равны:

$b_1 = 0,8\text{ с}$ ;  $b_2 = 2\text{ с}$ ;  $b_3 = 0,4\text{ с}$ ;  $b_4 = 0,3\text{ с}$ .

Система линейных алгебраических уравнений для расчёта интенсивностей потоков заявок в узлах СеМО имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= p_{10} \lambda_1 = 0,1 \lambda_1 \\ \lambda_1 &= p_{01} \lambda_0 + p_{41} \lambda_4 = \lambda_0 + \lambda_4 \\ \lambda_2 &= p_{12} \lambda_1 = 0,2 \lambda_1 \\ \lambda_3 &= p_{13} \lambda_1 = 0,7 \lambda_1 \\ \lambda_4 &= p_{24} \lambda_2 + p_{34} \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned} \right\}.$$



Решение:  $\lambda_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda_2 = 0,2 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda_3 = 0,7 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda_4 = 0,9 \text{ с}^{-1}$ .

коэффициенты передач будут равны:  $\alpha_1 = \lambda_1 / \lambda_0 = 10$ ,  $\alpha_2 = \lambda_2 / \lambda_0 = 2$ ,  $\alpha_3 = \lambda_3 / \lambda_0 = 7$ ,  $\alpha_4 = \lambda_4 / \lambda_0 = 9$ .

Условие отсутствия перегрузок в РСеМО:

$$\lambda_0 < \min \left( \frac{K_1}{\alpha_1 b_1}, \frac{K_2}{\alpha_2 b_2}, \frac{K_3}{\alpha_3 b_3}, \frac{K_4}{\alpha_4 b_4} \right) = 0,125 \text{ с}^{-1}. \text{ (РСеМО работает без перегрузок)}$$

В соответствии с эквивалентным преобразованием представим рассматриваемую экспоненциальную разомкнутую СеМО в виде 4-х независимых СМО типа М/М/1, в которые поступают простейшие потоки заявок соответственно с интенсивностями:  $\lambda_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda_2 = 0,2 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda_3 = 0,7 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda_4 = 0,9 \text{ с}^{-1}$ , а средние длительности обслуживания заявок в СМО совпадают с длительностями обслуживания в соответствующих узлах СеМО:  $b_1 = 0,8 \text{ с}$ ;  $b_2 = 2 \text{ с}$ ;  $b_3 = 0,4 \text{ с}$ ;  $b_4 = 0,3 \text{ с}$ .

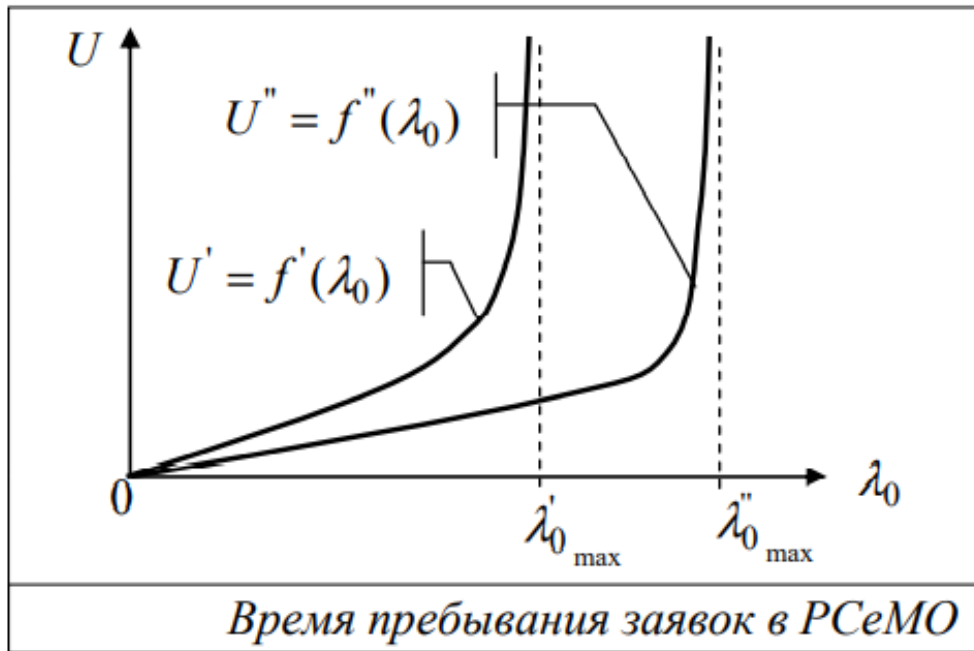
### Узловые характеристики СеМО

Узловые характеристики	Расчётные формулы	Узел 1	Узел 2	Узел 3	Узел 4
Нагрузка	$y_j = \lambda_j b_j$	0,8	0,4	0,28	0,27
Загрузка	$\rho_j = \min(y_j / K_j; 1)$	0,8	0,4	0,28	0,27
Коэф-т простоя	$\eta_j = 1 - \rho_j$	0,2	0,6	0,72	0,73
Время ожидания	$w_j = \rho_j b_j / (1 - \rho_j)$	3,2	1,33	0,16	0,11
Время пребывания	$u_j = w_j + b_j$	4	3,33	0,56	0,41
Длина очереди	$l_j = \lambda_j w_j$	3,2	0,27	0,11	0,10
Число заявок в узле	$m_j = \lambda_j u_j$	4	0,67	0,39	0,37

### Сетевые характеристики СеМО

Сетевые характеристики	Расчётные формулы	Значения
Время ожидания в сети	$W = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$	36,75
Время пребывания в сети	$U = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$	54,25
Число заявок в состоянии ожидания	$L = \sum_{j=1}^n l_j$	3,68
Число заявок в сети	$M = \sum_{j=1}^n m_j$	5,43

Наибольший интерес представляют свойства сети в целом, поскольку свойства отдельных узлов СеМО аналогичны свойствам соответствующих одноканальных и многоканальных СМО.



$\lambda_{0 \max}'$  — значение интенсивности, при котором среднее время пребывания заявок в сети становится бесконечно большим (перегрузка). Перегрузка в РСемо наступает, когда загрузка одного из узлов сети становится равной единице. Такой узел называется «узким местом». Разгрузить «узкое место» можно следующими способами:

- увеличением скорости работы (быстродействия) обслуживающего прибора;
- увеличением числа обслуживающих приборов в узле;
- уменьшением вероятности передачи заявок к узлу, являющемуся узким местом

Характер зависимостей других сетевых характеристик (времени ожидания, числа заявок в сети и в состоянии ожидания) разомкнутой СеМО от интенсивности поступления заявок аналогичен показанному на рисунке.



Пример 1б. В примере 1а было показано, что интенсивность поступления заявок в разомкнутую СеМО, при которой в сети отсутствуют перегрузки, должна удовлетворять условию:

$$\lambda_0 < \min\left(\frac{K_1}{\alpha_1 b_1}, \frac{K_2}{\alpha_2 b_2}, \frac{K_3}{\alpha_3 b_3}, \frac{K_4}{\alpha_4 b_4}\right) = 0,125 \text{ с}^{-1}$$

1. Рассчитаем сначала характеристики РСеМО, работающей в области загрузок, близких к 1, для чего положим, что интенсивность потока поступающих в сеть заявок равна  $\lambda_0 = 0,12 \text{ с}^{-1}$ . Тогда интенсивности потоков заявок в узлы РСеМО соответственно  $\lambda_1 = 1,2 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda_2 = 0,24 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda_3 = 0,84 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda_4 = 1,08 \text{ с}^{-1}$ , а средние длительности обслуживания заявок, как и ранее, будут равны:  $b_1 = 0,8 \text{ с}$ ;  $b_2 = 2 \text{ с}$ ;  $b_3 = 0,4 \text{ с}$ ;  $b_4 = 0,3 \text{ с}$ .

Характеристики	Узел 1	Узел 2	Узел 3	Узел 4	СеМО
Нагрузка	0,96	0,48	0,336	0,324	2,10
Загрузка	0,96	0,48	0,336	0,324	2,10
Время ожидания	19,2	1,85	0,202	0,144	198,4
Время пребывания	20	3,85	0,602	0,444	215,9
Длина очереди	23,04	0,44	0,170	0,155	23,8
Число заявок	24	0,92	0,506	0,479	25,9

В примере 1а:

Узловые характеристики	Расчётные формулы	Узел 1	Узел 2	Узел 3	Узел 4
Нагрузка	$y_j = \lambda_j b_j$	0,8	0,4	0,28	0,27
Загрузка	$\rho_j = \min(y_j / K_j; 1)$	0,8	0,4	0,28	0,27
Коэф-т простоя	$\eta_j = 1 - \rho_j$	0,2	0,6	0,72	0,73
Время ожидания	$w_j = \rho_j b_j / (1 - \rho_j)$	3,2	1,33	0,16	0,11
Время пребывания	$u_j = w_j + b_j$	4	3,33	0,56	0,41
Длина очереди	$l_j = \lambda_j w_j$	3,2	0,27	0,11	0,10
Число заявок в узле	$m_j = \lambda_j u_j$	4	0,67	0,39	0,37

Сетевые характеристики	Расчётные формулы	Значения
Время ожидания в сети	$W = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$	36,75
Время пребывания в сети	$U = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$	54,25
Число заявок в состоянии ожидания	$L = \sum_{j=1}^n l_j$	3,68
Число заявок в сети	$M = \sum_{j=1}^n m_j$	5,43

2. Для улучшения характеристик обслуживания заявок в РСМО необходимо разгрузить узкое место сети, которым является узел 1. Для этого увеличим скорость работы обслуживающего прибора в 2 раза, что приведёт к уменьшению длительности обслуживания заявок в 2 раза,  $b_1 = 0,4$ с.

Узловые характеристики	Узел 1	Узел 2	Узел 3	Узел 4	СеМО
Нагрузка	0,48	0,48	0,336	0,324	1,62
Загрузка	0,48	0,48	0,336	0,324	1,62
Время ожидания	0,369	1,846	0,202	0,144	10,1
Время пребывания	0,769	3,846	0,602	0,444	23,6
Длина очереди	0,443	0,443	0,170	0,155	1,21
Число заявок	0,923	0,923	0,506	0,479	2,83

Характеристики	Узел 1	Узел 2	Узел 3	Узел 4	СеМО
Нагрузка	0,96	0,48	0,336	0,324	2,10
Загрузка	0,96	0,48	0,336	0,324	2,10
Время ожидания	19,2	1,85	0,202	0,144	198,4
Время пребывания	20	3,85	0,602	0,444	215,9
Длина очереди	23,04	0,44	0,170	0,155	23,8
Число заявок	24	0,92	0,506	0,479	25,9

Разгрузка узкого места позволила существенно уменьшить значения сетевых характеристик: среднее время пребывания заявок в сети уменьшилось более чем раз, а число заявок, находящихся в очередях – почти в 20 раз.

Замечание. Изменение длительности обслуживания заявок в узле 1 привело к изменению узловых характеристик *только* этого узла; узловые характеристики остальных узлов не изменились. Это является следствием независимого функционирования узлов экспоненциальной разомкнутой СеМО, что фактически и позволяет использовать метод расчёта характеристик сети, основанный на декомпозиции, то есть представлении сети в виде совокупности независимых СМО.

3. Для сравнения выполним разгрузку узкого места другим способом, а именно: увеличим число обслуживающих приборов в узле 1 с одного до двух:  $K_1 = 2$ , сохранив прежнее значение длительности обслуживания одним прибором:  $b_1 = 0,8с$ .

Узловые характеристики	Узел 1	Узел 2	Узел 3	Узел 4	СеМО
Нагрузка	0,96	0,48	0,336	0,324	2,10
Загрузка	0,48	0,48	0,336	0,324	1,62
Время ожидания	0,288	1,846	0,202	0,144	9,28
Время пребывания	1,088	3,846	0,602	0,444	26,78
Длина очереди	0,346	0,443	0,170	0,155	1,11
Число заявок	1,306	0,923	0,506	0,479	3,21

Узловые характеристики	Узел 1	Узел 2	Узел 3	Узел 4	СеМО
Нагрузка	0,48	0,48	0,336	0,324	1,62
Загрузка	0,48	0,48	0,336	0,324	1,62
Время ожидания	0,369	1,846	0,202	0,144	10,1
Время пребывания	0,769	3,846	0,602	0,444	23,6
Длина очереди	0,443	0,443	0,170	0,155	1,21
Число заявок	0,923	0,923	0,506	0,479	2,83

При втором способе разгрузки узкого места за счёт увеличения числа обслуживающих приборов ( $K_1 = 2$ ,  $b_1 = 0,8с$ ) среднее время ожидания заявок в сети несколько уменьшилось по сравнению с первым способом ( $K_1 = 1$ ,  $b_1 = 0,4с$ ). В то же время, среднее время пребывания заявок в РСеМО увеличились более чем на 10%, что обусловлено большей длительностью обслуживания заявок ( $b_1 = 0,8с$ ) в каждом из приборов двухканального узла 1 по сравнению с одноканальным узлом при первом способе ( $b_1 = 0,4с$ ). Как и в предыдущем случае, изменение числа обслуживающих приборов в узле 1 привело к изменению узловых характеристик только этого узла.

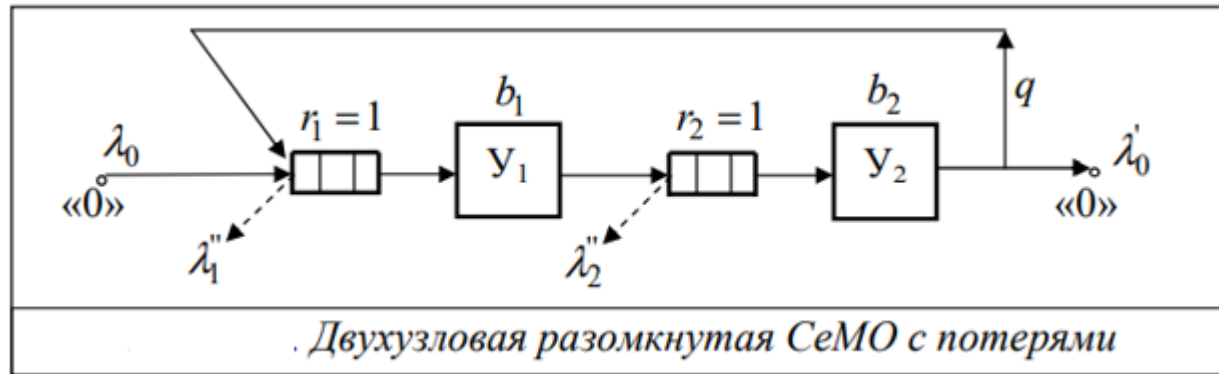
## Многофазные СМО

Многофазными называются СМО, состоящие из нескольких *последовательно соединенных* подсистем массового обслуживания, причем входящий поток каждой последующей подсистемы является выходящим предыдущей.

Входящий поток каждой последующей фазы является выходным потоком предыдущей и в общем случае имеет последствие. Однако, если на вход СМО с *неограниченной очередью* поступает *простейший* поток заявок, а время обслуживания *показательное*, то выходной поток этой СМО - простейший, с той же интенсивностью  $\lambda$ , что и входящий. Следовательно, многофазовую СМО с неограниченной очередью перед каждой фазой, простейшим входящим потоком заявок и показательным временем обслуживания на каждой фазе можно анализировать как простую последовательность простейших СМО. Если очередь к фазе ограничена, то выходной поток этой фазы перестает быть простейшим и вышеуказанный прием может применяться только в качестве приближенного.

*Марковские модели сетей массового обслуживания. Разомкнутая экспоненциальная СеМО с накопителями ограниченной емкости*

Рассмотрим разомкнутую экспоненциальную СеМО с двумя одноканальными узлами, в которую из внешней среды поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda_0$



Накопители в обоих узлах имеют ограниченную ёмкость, равную единице:  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 1$ . Заявка, поступившая в узел и заставшая накопитель заполненным, теряется. Длительности обслуживания в узлах распределены по экспоненциальному закону со средними значениями  $b_1$  и  $b_2$  соответственно. Заявки после обслуживания в узле 2 вероятностью  $q$  направляются в узел 1 и вероятностью  $(1 - q)$  – покидают СеМО.

Поскольку заявки в сети могут теряться, рассматриваемая разомкнутая СеМО является нелинейной, то есть интенсивности потоков заявок, поступающих в узлы СеМО, не связаны между собой линейной зависимостью и, следовательно, не могут быть рассчитаны путём решения системы линейных алгебраических уравнений.

## 1. Описание СеМО.

1.1. Сеть массового обслуживания – разомкнутая двухузловая.

1.2. Узлы 1 и 2 – одноканальные:  $K_1 = K_2 = 1$ .

1.3. Накопители в узлах ограниченной ёмкости:  $r_1 = r_2 = 1$ .

1.4. Дисциплины буферизации в узлах – с потерями заявок, если накопители заполнены.

1.5. Поток заявок однородный с интенсивностью  $\lambda_0$ .

## 2. Предположения и допущения.

2.1. Поступающие в разомкнутую СеМО заявки образуют простейший поток с интенсивностью  $\lambda_0$ .

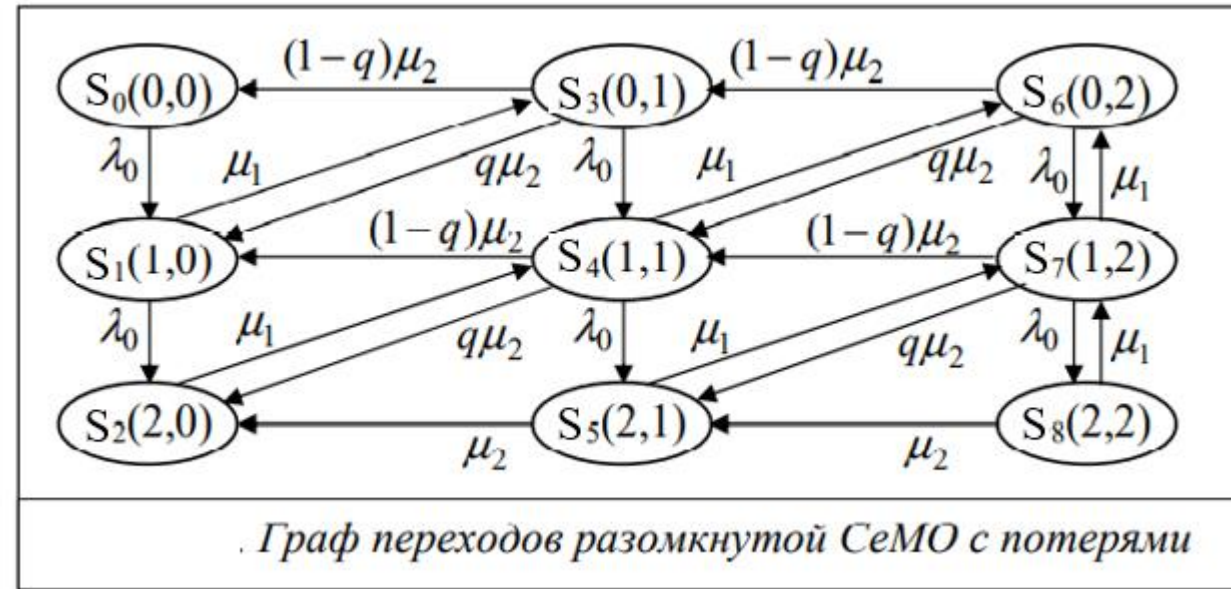
2.2. Длительности обслуживания заявок в узлах СеМО распределены по экспоненциальному закону с параметрами, представляющими собой интенсивности обслуживания:  $\mu_1 = 1/b_1$  и  $\mu_2 = 1/b_2$ .

В разомкнутой СеМО при любой нагрузке существует стационарный режим, так как в узлах сети не может быть бесконечных очередей.

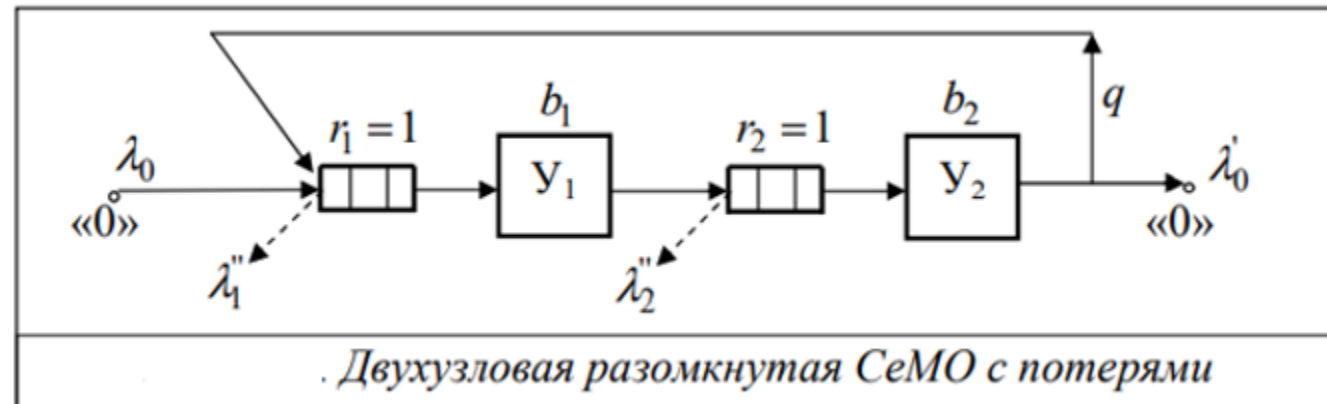
Для описания состояний сети введем следующие обозначения:  $S(M_1, M_2)$ , где  $M_i = \{0, 1, 2\}$  – количество заявок в узле  $i$  («0» – узел свободен; «1» – на обслуживании в узле находится одна заявка; «2» – в узле находятся две заявки – одна на обслуживания и вторая в накопителе).



$S_0: (0,0)$  – в СеМО нет ни одной заявки;  
 $S_1: (1,0)$  – в узле 1 находится одна заявка;  
 $S_2: (2,0)$  – в узле 1 находятся две заявки;  
 $S_3: (0,1)$  – в узле 2 находится одна заявка;  
 $S_4: (1,1)$  – в узле 1 и 2 находится по одной заявке;  
 $S_5: (2,1)$  – две заявки находятся в узле 1 и одна – в узле 2;  
 $S_6: (0,2)$  – в узле 2 находятся две заявки;  
 $S_7: (1,2)$  – две заявки находятся в узле 2 и одна – в узле 1;  
 $S_8: (2,2)$  – в узле 1 и 2 находятся по две заявки.



Замечание: т.к. СеМО с потерями относится к классу нелинейных сетевых моделей, расчёт характеристик связан с определёнными проблемами, в частности, с необходимостью детального анализа потоков заявок и с невозможностью применения в ряде случаев фундаментальных соотношений для расчёта сетевых характеристик. Кроме того, процесс формирования математических зависимостей для каждой конкретной нелинейной СеМО может существенно отличаться.



### 3. Расчет характеристик СеМО

#### 3.1 Узловые характеристики СеМО:

1) загрузки узлов определяются как суммы вероятностей состояний, в которых соответствующий узел занят обслуживанием заявок:

$$\rho_1 = p_1 + p_2 + p_4 + p_5 + p_7 + p_8;$$

$$\rho_2 = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8;$$

2) коэффициенты простоя узлов:  $\eta_1 = 1 - \rho_1$ ;  $\eta_2 = 1 - \rho_2$ ;

3) среднее число заявок в очередях:

$$l_1 = p_2 + p_5 + p_8; \quad l_2 = p_6 + p_7 + p_8;$$

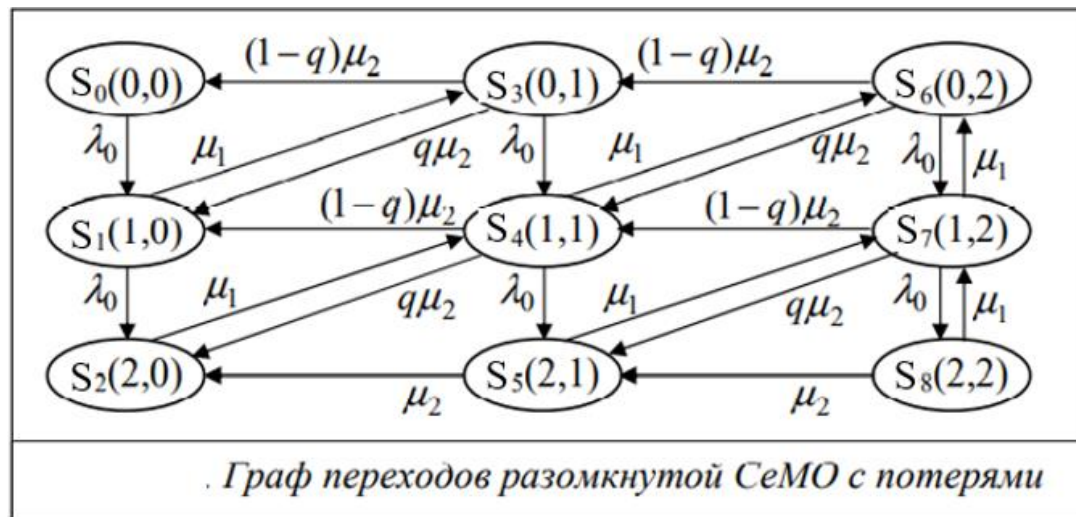
4) среднее число заявок в узлах:

$$m_1 = p_1 + p_4 + p_7 + 2(p_2 + p_5 + p_8) = l_1 + \rho_1;$$

$$m_2 = p_3 + p_4 + p_5 + 2(p_6 + p_7 + p_8) = l_2 + \rho_2;$$

5) производительности узлов (интенсивность обслуженных заявок на выходе узлов):

$$\lambda'_1 = \frac{\rho_1}{b_1} = \rho_1 \mu_1; \quad \lambda'_2 = \frac{\rho_2}{b_2} = \rho_2 \mu_2;$$





б) вероятности потери заявок в узлах СеМО:  $\pi_1 = 1 - \frac{\rho_1}{y_1}; \quad \pi_2 = 1 - \frac{\rho_2}{y_2};$

в этих выражениях:  $y_1 = \lambda_1 b_1$  и  $y_2 = \lambda_2 b_2$  – создаваемые в узлах нагрузки, где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – интенсивности поступления заявок в узлы 1 и 2 СеМО, для расчёта которых необходимо выполнить анализ потоков в рассматриваемой СеМО; интенсивность  $\lambda_1$  складывается из интенсивности  $\lambda_0$  поступления заявок из внешнего источника и интенсивности потока заявок, возвращающихся с вероятностью  $q$  в узел 1 после обслуживания в узле 2:  $\lambda_1 = \lambda_0 + q\lambda'_2$ , где  $\lambda'_2$  - интенсивность потока выходящих из узла 2 заявок (производительность узла 2);

Аналогично:  $\lambda_2 = \lambda'_1$ ; тогда после некоторых преобразований выражения для расчёта вероятностей потери заявок в узлах СеМО примут вид:

$$\pi_1 = 1 - \frac{\lambda'_1}{\lambda_0 + q\lambda'_2}; \quad \pi_2 = 1 - \frac{\lambda'_2}{\lambda'_1};$$

7) среднее время ожидания заявок в узлах рассчитывается по формулам Литтла с учётом только обслуженных заявок:

$$w_1 = l_1 / \lambda'_1; \quad w_2 = l_2 / \lambda'_2;$$

8) аналогично, среднее время пребывания заявок в узлах:

$$u_1 = m_1 / \lambda'_1 = w_1 + b; \quad u_2 = m_2 / \lambda'_2 = w_2 + b;$$

### 3.2 Сетевые характеристики СеМО:

- 1) суммарная загрузка узлов СеМО, характеризующая среднее число одновременно работающих узлов в сети:  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ ;
- 2) суммарное число заявок в очередях:  $L = l_1 + l_2$ ;
- 3) суммарное число заявок в узлах:  $M = m_1 + m_2 = L + \rho$ ;
- 4) производительность СеМО (интенсивность обслуженных заявок на выходе сети):  $\lambda'_0 = (1 - q)\lambda'_2$ ;
- 5) вероятность потери заявок в сети:  $\pi = \frac{\lambda_0 - \lambda'_0}{\lambda_0} = 1 - \frac{\lambda'_0}{\lambda_0}$ ;

Замечание. Математические зависимости для расчёта суммарного времени ожидания заявок и времени пребывания заявок в СеМО не могут быть получены в общем виде в виду нелинейности СеМО с потерями.