# 4. Распределение Максвелла

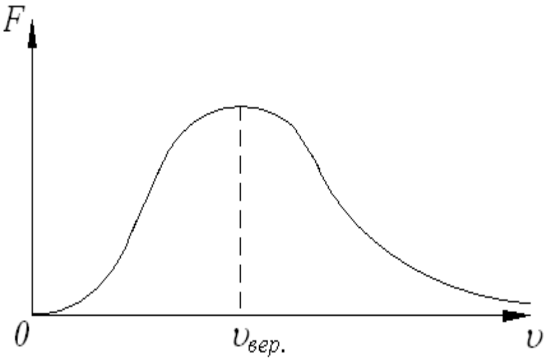
При статистическом методе описания равновесного состояния макроскопической системы одинаковых частиц основной характеристикой является функция распределения или плотность вероятности случайной величины. В случае теплового движения компоненты скорости $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ частиц рассматриваются как независимые случайные величины, изменяющиеся непрерывным образом от -∞ до +∞. Если система из большого числа одинаковых частиц находится в тепловом равновесии с температурой *T,* то справедлив закон распределения Максвелла. Согласно этому закону, распределение частиц по абсолютным значениям скорости

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$$

имеет вид

$$F(\upsilon) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \cdot 4\pi\upsilon^2,$$

где $m$ – масса частицы и $k=1{,}38\cdot 10^{-23}$ *Дж/К* – постоянная Больцмана. График зависимости $F(\upsilon)$ приведен на рисунке.




Максимум функции $F(\upsilon)$ определяет наиболее вероятную скорость частиц. Функция распределения $F(\upsilon)$ определяет вероятность $dP(\upsilon)$ того, что произвольная частица имеет абсолютное значение скорости в интервале $\upsilon, \upsilon+d\upsilon$,

$$dP(\upsilon) = F(\upsilon)d\upsilon$$

и подчиняется условию нормировки

$$\int_0^{\infty} F(\upsilon)d\upsilon = \int_0^1 dP = 1 \ .$$

Задача №10

Определить наиболее вероятную среднюю и среднеквадратичную скорости молекул хлора $Cl_2$ при температуре $T=500K$. Молярная масса хлора $\mu = 71г$.

Решение

Наиболее вероятная скорость движения молекул идеального газа в условиях равновесия находится с помощью уравнения

$$\frac{dF}{d\upsilon}=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot 4\pi\frac{d}{d\upsilon}(e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^2)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot 4\pi\left(-\frac{m}{kT}e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^3+e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\cdot 2\upsilon\right)=$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot 4\pi e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\cdot\upsilon(-\frac{m}{kT}\upsilon^2+2)=0\ . \qquad (10.1)$$

Отсюда находим два решения:

$$\upsilon_1=0,\quad \upsilon_2\sqrt{\frac{2kT}{m}}\ . \qquad (10.2)$$

Скорость $\upsilon_1$ определяет положение минимума функции $F(\upsilon)$ и является минимальной скоростью. Скорость $\upsilon_2$ определяет положение максимума функции $F(\upsilon)$ и является наиболее вероятной скоростью движения молекул.

Используя данные из условия задачи, находим

$$\upsilon_{вер.}=\upsilon_2=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=346\,м/с\ . \qquad (10.3)$$

Здесь $m=\mu/N_A=1{,}1\cdot 10^{-25}кг$ - масса одной молекулы, $N_A=6\cdot 10^{23}\,1/моль$ - число Авогадро.

Средняя скорость движения молекул хлора

$$\langle\upsilon\rangle=\upsilon_{ср}=\int_0^\infty\upsilon\cdot F(\upsilon)d\upsilon=\int_0^\infty\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\cdot 4\pi\upsilon^3 d\upsilon=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot 4\pi\int_0^\infty e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\upsilon^3 d\upsilon=$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}4\pi\left(\frac{2kT}{m}\right)^2\cdot\int_0^\infty e^{-u^2}u^3du=\left(\frac{2kT}{\pi m}\right)^{1/2}4\left\{-\frac{1}{2}u^2e^{-u^2}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty ue^{-u^2}du\right\}=$$

$$=\left(\frac{2kT}{\pi m}\right)^{1/2}\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u^2}du^2=\left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}=390\,м/с\ . \qquad (10.4)$$

Среднеквадратичная скорость молекул хлора

$$\upsilon_{ср.кв}=\sqrt{\langle\upsilon^2\rangle}=\left(\int_0^\infty\upsilon^2F(\upsilon)d\upsilon\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=424\,м/с\ . \qquad (10.5)$$

При вычислении интеграла в (10.4) использовалось известное значение несобственного интеграла

$$\int_0^\infty e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

Интересно отметить, что все три вычисленные скорости теплового движения молекул хлора превышают скорость звука в воздухе 330м/с.

Ответ: $\upsilon_{вер}=346м/с$, $\upsilon_{ср}=390м/с$, $\upsilon_{ср.кв}=424м/с$.

## Задача №11

Как зависит от давления $P$ средняя скорость $\upsilon_{ср}$ частиц идеального газа при адиабатном процессе?

Решение

Задача решается с помощью уравнения адиабатного процесса

$$PV^\gamma=const\ , \qquad (11.1)$$

где $P$ – давление, $V$ – объём и $\gamma$ – показатель адиабаты, формулы для средней скорости теплового движения частиц

$$\upsilon_{ср} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \qquad (11.2)$$

и уравнения состояния идеального газа – уравнения Клапейрона-Менделеева

$$PV = RT \ , \qquad (11.3)$$

записанного для 1 моля газа.

Из (11.1) и (11.3) следует, что

$$T = C_1 P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \ , \qquad (11.4)$$

где $C_1$ – постоянная. Подставляя $T$ из (11.4) в (11.2), получим

$$\upsilon_{ср} = \sqrt{\frac{8kC_1^2}{\pi m}} p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = C_2 p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \ , \qquad (11.5)$$

где $C_2$ – постоянная.

Ответ: $\upsilon_{ср} = C_2 p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$, $C_2$ – постоянная и $\gamma$ – показатель адиабаты (для идеального газа $\gamma = C_p / C_V = 5/3$).

При достаточно большой температуре в тепловом движении многоатомной молекулы участвуют все её степени свободы: поступательные, вращательные и колебательные. В случае теплового равновесия справедлив классический закон о равнораспределении средней кинетической энергии теплового движения по всем степеням свободы молекулы. При этом средняя кинетическая энергия теплового движения, приходящаяся на 1 степень свободы равна *kT/2*, где *k* – постоянная Больцмана и *T* – температура системы:

$$\langle \varepsilon_{кин.x} \rangle = \langle \varepsilon_{кин.y} \rangle = \langle \varepsilon_{кин.z} \rangle = \frac{1}{2}kT \ ,$$

$$\langle \varepsilon_{кин.вр} \rangle = \frac{1}{2}kT \ ,$$

$$\langle \varepsilon_{кин.кол.} \rangle = \frac{1}{2}kT \ .$$

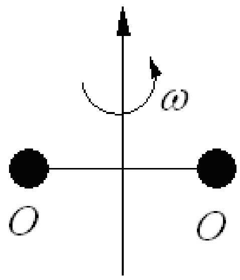
Полная средняя кинетическая энергия теплового движения многоатомной молекулы определяется формулой

$$\langle \varepsilon_{кин.} \rangle = n\frac{1}{2}kT \, ,$$

где $n$ – полное число степеней свободы молекул, участвующих в тепловом движении при заданной температуре *T*.

## Задача №12

Определить среднеквадратичную угловую скорость $\omega_{ср.кв.}$ вращения молекул кислорода $O_2$ относительно оси симметрии молекулы, если температура газа $T=300K$ и момент инерции относительно заданной оси $I=19{,}2\cdot 10^{-40} г/см^2$.




Решение

Согласно классическому закону о равнораспределении средней кинетической энергии по всем степеням свободы многоатомной молекулы

$$\left\langle \varepsilon_{кин.вр} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} I\omega^2 \right\rangle = \frac{1}{2} I \left\langle \omega^2 \right\rangle = \frac{1}{2} kT \ . \tag{12.1}$$

Отсюда находим, что среднеквадратичная угловая скорость вращения молекулы кислорода

$$\omega_{ср.кв} = \sqrt{\left\langle \omega^2 \right\rangle} = \sqrt{\frac{kT}{I}} = \sqrt{\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{19,2 \cdot 10^{-40} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4}}} = 4,64 \cdot 10^{12} c^{-1} \ . \tag{12.2}$$

Ответ: $\omega_{ср.кв} = 4,64 \cdot 10^{12} c^{-1}$.