Семинар 4.

Характеристики распределений случайных величин

Задача 0. По матрице интенсивностей найти финальные вероятности.

А)

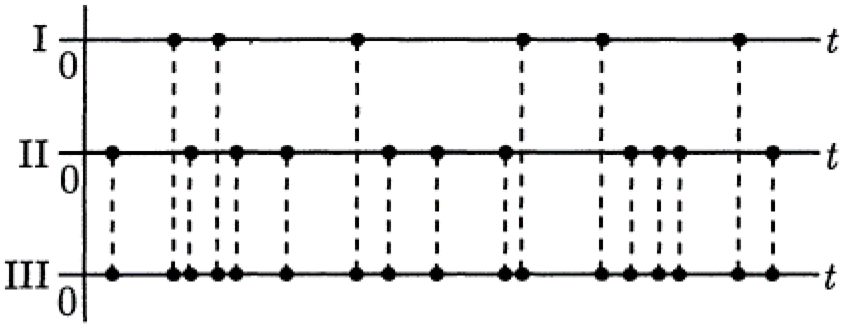
-1	1	0	0	0	0
2	-4	2	0	0	0
0	1	-2	1	0	0
0	0	2	-4	2	0
0	0	0	1	-2	1
0	0	0	0	2	-2

Б)

-1	1	0	0	0	0
2	-4	2	0	0	0
0	1	-2	1	0	0
0	0	0	-2	2	0
0	0	0	1	-2	1
0	0	0	0	2	-2

Задача 1. Производится наложение («суперпозиция») двух простейших потоков: потока I с интенсивностью λ_1 и 2) потока II с интенсивностью λ_2 .

Будет ли поток III, получившийся в результате суперпозиции, простейшим, и если да, то с какой интенсивностью?



Задача 2. Составить композицию двух показательных законов

$$f_1(x_1) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} & \text{при} \quad x_1 > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x_1 < 0, \end{cases}$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} & \text{при} \quad x_2 > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x_2 < 0. \end{cases}$$

Алгоритм аппроксимации реального потока с помощью гипоэкспоненциального распределения

1. По заданному значению коэффициента вариации v определить минимально необходимое число экспоненциальных фаз k в аппроксимирующем распределении как ближайшее большее целое по отношению к $1/v^2$

$$k \ge \frac{1}{v^2};$$

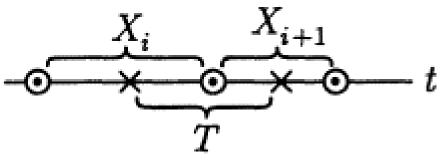
2. Выбрать значение $k_1<k$ и рассчитывается $k_2 = k - k_1$;
3. По формулам

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{t}{k}\left[1+\sqrt{\frac{k_2}{k_1}\left(kv^2-1\right)}\right] \\ t_2 &= \frac{t}{k}\left[1-\sqrt{\frac{k_1}{k_2}\left(kv^2-1\right)}\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{t}{k}\left[1-\sqrt{\frac{k_2}{k_1}\left(kv^2-1\right)}\right] \\ t_2 &= \frac{t}{k}\left[1+\sqrt{\frac{k_1}{k_2}\left(kv^2-1\right)}\right] \end{aligned}\right\}.$$

рассчитать значения t_1 и t_2.

4. Вычислить интенсивности образующих простейших потоков.

Задача 3. На оси 0t имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. Из этого потока формируется другой следующим образом: интервал между каждыми двумя соседними событиями делится пополам и в точку деления вставляется еще одно событие (крестики — вставленные события). Рассмотрим поток, состоящий только из «крестиков» (середин интервалов). Найти плотность распределения f(t) интервала T между соседними событиями в новом потоке. Каков коэффициент вариации интервала T между событиями?



Задача 4. Гиперэкспоненциальное распределение

Алгоритм аппроксимации реального потока с помощью гиперэкспоненциального распределения (n=2).

1. Выбрать $q \le \frac{2}{1+v^2}$.

2. Вычислить $t_1 = \left[1+\sqrt{\frac{1-q}{2q}(v^2-1)}\right]t$. $\quad t_2 = \left[1-\sqrt{\frac{q}{2(1-q)}(v^2-1)}\right]t$.

3. Вычислить интенсивности образующих простейших потоков.

Задача 5. Рассматривается процесс накопления информации в базах данных, хранимых в ЭВМ. Интенсивность поступления единиц информации в базы данных равна $\lambda(t)$ и не зависит от того, сколько их накоплено. Каждая единица информации, поступившая в базы данных, хранится в них бессрочно. Найти характеристики $m_x(t)$, $D_x(t)$ случайной функции X(t) — числа накопленных единиц информации в базах данных в предположении, что поток поступлений единиц информации пуассоновский с интенсивностью $\lambda(t)$ и в начальный момент времени t = 0 случайная функция X(0) = 0.

Из лекции 4. Если процесс описывается схемой гибели и размножения, то можно записать дифференциальные уравнения для математического ожидания и дисперсии случайной функции X(t) — числа единиц в системе в момент времени t:

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \mu_k)\ p_k(t);$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} [\lambda_k + \mu_k + 2k\ (\lambda_k - \mu_k) - 2m_x(t)\ (\lambda_k - \mu_k)]\ p_k(t)$$

Задача 6. Условия те же, что и в предыдущей задаче, за исключением того, что принятая на хранение в базах данных единица информации хранится некоторое время, после чего по определенному признаку исключается из баз данных. Поток исключений для каждой единицы информации — пуассоновский с интенсивностью $\mu(t)$.