Семинар 11.

Задача 1. Интенсивность потока отключений электрических сетей составляет λ = 0,6 ч.$^{-1}$, среднее время проведения ремонтных работ b= 2,5 ч., при устранении неисправностей работает две ремонтных бригады (n = 2), допустимое время перерыва электроснабжения $t_{доп.}$ = 4 ч., число мест в очереди r = 4. Определить вероятности состояний и показатели эффективности СМО.

Рассмотреть 2 случая: допустимое время перерыва электроснабжения установлено а)только для заявок в очереди; б) для всех заявок в системе.

Задача 2. Рабочий обслуживает группу из трех станков. Каждый станок останавливается в среднем 2 раза в час Процесс наладки занимает у рабочего, в среднем, 10 минут Определить характеристики замкнутой СМО: вероятность занятости рабочего; его абсолютную пропускную способность А; среднее количество неисправных станков; среднюю относительную потерю производительности группы станков за счет неисправностей. Как изменятся характеристики СМО, если рабочих будет двое?

Задача 3. Для простейшей трехканальной СМО с отказами и параметрами: λ= 4 заявки/мин, среднее время обслуживания заявки одним каналом $1/\mu$= 0,5 мин, интенсивность обслуживания заявки j каналами $\varphi(j)= j\mu$, определить характеристики эффективности СМО для трех вариантов использования СМО: 1) при отсутствии взаимопомощи; 2) при неограниченной взаимопомощи; 3) при равномерной взаимопомощи между каналами.

Задача 4. Для простейшей трехканальной СМО с очередью r=2 и параметрами: λ= 4 заявки/мин, среднее время обслуживания заявки одним каналом $1/\mu$= 0,5 мин, интенсивность обслуживания заявки j каналами $\varphi(j)=j\mu$, определить характеристики эффективности СМО для трех вариантов использования СМО: 1) при отсутствии взаимопомощи; 2) при неограниченной взаимопомощи; 3) при равномерной взаимопомощи между каналами.

11.32*. В условиях задачи 11.31 найти среднее время $\bar{t}_{оч}$, которое будет ожидать наладки произвольно выбранный вышедший из строя станок.

Р е ш е н и е. Формула Литтла, которой мы пользовались ранее, пригодна только для открытых СМО, где интенсивность потока заявок не зависит от состояния СМО. Для замкнутых СМО она непригодна. Время $\bar{t}_{оч}$ найдем с помощью следующих рассуждений. Пусть в какой-то момент t появилась заявка (отказал станок). Найдем вероятность того, что в этот момент СМО находилась в состоянии s_k $(k = 0, \ldots, m-1)$ (ясно, что в состоянии s_m она находиться не могла). Рассмотрим m гипотез:

H_0 — в момент появления заявки СМО находилась в состоянии s_0;

H_1 — в момент появления заявки СМО находилась в состоянии s_1;

H_k — в момент появления заявки СМО находилась в состоянии s_k, ...;

H_{m-1} — в момент появления заявки СМО находилась в состоянии s_{m-1}.

Априорные вероятности этих гипотез равны $p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots, \ldots, p_{m-1}$.

Теперь найдем апостериорные вероятности гипотез при условии, что наблюдено событие $A = \{$на элементарном участке времени $(t,\ t+\ dt)$ появился отказ станка}. Условные вероятности этого события при гипотезах $H_0, H_1, ..., H_{m-1}$ равны:

$$\mathbf{P}\ (A|H_0) = m\lambda\, dt; \quad \mathbf{P}\ (A|H_1) = (m-1)\ \lambda dt; \ldots;$$

$$\mathbf{P}\ (A|H_k) = (m-k)\ \lambda dt; \ldots; \mathbf{P}\ (A|H_{m-1}) = \lambda dt.$$

По формулам Бейеса найдем апостериорные вероятности гипотез (при условии, что событие A произошло). Обозначая эти вероятности $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k, \ldots, \tilde{p}_{m-1}$, получаем:

$$\tilde{p}_0 = \frac{mp_0}{\sum\limits_{k=0}^{m-1}(m-k)\ p_k}; \quad \tilde{p}_1 = \frac{(m-1)\ p_1}{\sum\limits_{k=0}^{m-1}(m-k)\ p_k}; \ldots;$$

$$\tilde{p}_k = \frac{(m-k)\ p_k}{\sum\limits_{k=0}^{m-1}(m-k)\ p_k}; \ldots; \quad \tilde{p}_{m-1} = \frac{p_{m-1}}{\sum\limits_{k=0}^{m-1}(m-k)\ p_k}. \quad (11.32.1)$$

Зная эти вероятности, найдем полное математическое ожидание времени пребывания отказавшего станка в очереди. Если станок отказал в момент, когда система находится в состоянии s_0, он не будет стоять в очереди; если в состоянии s_1, то будет находиться в ней в среднем время $1/\mu$, если в состоянии s_2 — время $2/\mu$ и т.д. Умножая вероятности (11.32.1) на эти числа и складывая, получаем

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m-1} k\tilde{p}_k. \quad (11.32.2)$$

Лекция

11.29. Рассматривается простейшая двухканальная СМО с «нетерпеливыми» заявками (см. задачу 11.28). Интенсивность потока заявок $\lambda = 3$ заявки/ч; среднее время обслуживания одной заявки $\bar{t}_{обсл} = 1 / \mu = 1$ ч; средний срок, в течение которого заявка «терпеливо» стоит в очереди, равен 0,5 ч. Подсчитать финальные вероятности состояний, ограничиваясь теми, которые не меньше 0,001. Найти характеристики эффективности СМО: $Q, A, \bar{k}, \bar{r}, \bar{t}_{оч}, \bar{t}_{сист}$.

Решение. Имеем $\lambda = 3, \mu = 1, \nu = 2; \rho = 3, \beta = 2, n = 2$. По формулам задачи 11.28 получаем:

$$p_0 = \left\{1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^2}{2}\left[\frac{3}{4} + \frac{3^2}{4 \cdot 6} + \frac{3^3}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{3^4}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3^5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \frac{3^6}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \frac{3^7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}\right]\right\}^{-1} \approx 0{,}0692;$$

откуда

$$p_1 = 3p_0 \approx 0{,}208; \quad p_2 = \frac{3}{2}p_1 \approx 0{,}311; \quad p_3 = \frac{3}{4}p_2 \approx 0{,}234;$$

$$p_4 = \frac{3}{6}p_3 \approx 0{,}117; \quad p_5 = \frac{3}{8}p_4 \approx 0{,}044; \quad p_6 = \frac{3}{10}p_5 \approx 0{,}013;$$

$$p_7 = \frac{3}{12}p_6 \approx 0{,}003; \quad p_8 = \frac{3}{18}p_7 \approx 0{,}001.$$

Среднее число занятых каналов согласно (11.28.6): $\bar{k} = 1p_1 + 2(1 - p_0 - p_1) \approx 1{,}654$; средняя длина очереди согласно (11.28.5) $\bar{r} = (\rho - \bar{k})/\beta = (3 - 1{,}654)/2 \approx 0{,}673$; абсолютная пропускная способность $A = \bar{k}\mu \approx 1{,}654$ заявки/ч; относительная пропускная способность $Q = A/\lambda \approx 0{,}551$ и далее: $\bar{t}_{оч} = \bar{r}/\lambda \approx 0{,}224$ ч; $\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} \approx 2{,}327$; $\bar{t}_{сист} = \bar{z}/\lambda \approx 0{,}776$ ч.

Пример 1. Рабочий обслуживает группу из трех станков. Каждый станок останавливается в среднем 2 раза в час. Процесс наладки занимает у рабочего, в среднем, 10 минут. Определить характеристики замкнутой СМО: вероятность занятости рабочего; его абсолютную пропускную способность А; среднее коли-чество неисправных станков; среднюю относительную потерю производитель- ности группы станков за счет неисправностей