

## Программа КР “Функции нескольких переменных”

### Теория

Функция двух переменных: область определения и ее геометрическое изображение, множество значений, график, приращение в точке, формула для вычисления дифференциала, приближенное вычисление приращения с помощью дифференциала.

Градиент функции трех переменных, его направление и модуль.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $F(x, y, z) = 0$ .

Исследование функции двух переменных на экстремум: точка минимума (максимума, экстремума), минимум (максимум, экстремум), необходимые условия экстремума, достаточные условия экстремума.

### Тренировочные варианты на уровень А

#### Вариант 1

1. Найти значение функции  $z = \frac{\sqrt{x}}{y}$  в точке  $(\frac{1}{9}, -\frac{2}{3})$ . (Ответ:  $-1/2$ )
2. Найти и построить на плоскости  $xy$  область определения функции  $z = \ln(2x + y - 3)$ . (Ответ:  $2x + y - 3 > 0$ )
3.  $z = \cos \frac{y}{x}$ .  $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$  (Ответ:  $\frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x}$ )
4.  $z = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ .  $dz = ?$  (Ответ:  $\frac{\sqrt{y}dx - \sqrt{x}dy}{2(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})}$ )
5. Найти модуль градиента функции  $u = \frac{xy}{z}$  в точке  $(1, -1, -1)$ . (Ответ:  $\sqrt{3}$ )
6. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности  $3x - y^2 + z^2 = 0$  в точке  $(3, 3, 0)$ . (Ответ:  $x - 2y + 3 = 0$ )
7. Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 + 5y^2 + 3xy + 11x + 11y - 1$ . (Ответ:  $z_{\min} = z(-7, 1) = -34$ )

#### Вариант 2

1. Найти и построить на плоскости  $xy$  область определения функции  $z = \sqrt{x + y}$ . (Ответ:  $x + y \geq 0$ )
2.  $z = \sqrt{1 - x - y^2}$ .  $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$  (Ответ:  $\frac{-y}{\sqrt{1 - x - y^2}}$ )
3.  $z = e^{-x/y}$ .  $dz = ?$  (Ответ:  $e^{-x/y} \frac{-ydx + xdy}{y^2}$ )
4. Найти градиент функции  $u = \arctg(\frac{x}{y} - z)$ . (Ответ:  $\frac{(y, -x, -y^2)}{y^2 + (x - yz)^2}$ )
5. Найти приближенно (заменяв дифференциалом) приращение функции  $z = x^2 - 4xy^2 + 2y - 4$  в точке  $(1, -1)$ , если  $\Delta x = 0,01$ ,  $\Delta y = 0,02$ . (Ответ:  $0,18$ )
6. Составить уравнения нормали к поверхности  $z = e^{x+y} - xy^2 + 1$  в точке  $(1, -1, 1)$ . (Ответ:  $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ )
7. Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 + 4y^2 + 8xy - 8x - 8y + 1$ . (Ответ: функция не имеет экстремумов)

#### Вариант 3

1. Найти вектор, в направлении которого функция  $u = xy - yz$  в точке  $(1, -1, 2)$  возрастает с наибольшей скоростью. (Ответ:  $(-1, -1, 1)$ )
2. Найти и построить на плоскости  $xy$  область определения функции  $z = \frac{x}{\sqrt{1-y}}$ . (Ответ:  $y < 1$ )
3.  $z = \arcsin(xy)$ .  $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$  (Ответ:  $\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$ )
4.  $z = \sin^2(x - y)$ .  $dz = ?$  (Ответ:  $(dx - dy)\sin 2(x - y)$ )
5. Найти модуль градиента функции  $u = \frac{z-y}{x}$  в точке  $(1, 1, 1)$ . (Ответ:  $\sqrt{2}$ )
6. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности  $x + \sqrt{xy} + z^2 - 3 = 0$  в точке  $(1, 1, -1)$ . (Ответ:  $3x + y - 4z - 8 = 0$ )
7. Исследовать на экстремум функцию  $z = 2\ln(2x - 3) + 3\ln(y + 2) - 4x - 3y + 7$ . (Ответ:  $z_{\max} = z(2, -1) = 2$ )

## Тренировочные варианты на уровни В, С

### Вариант 1

1. Найти и построить на плоскости  $xy$  область определения функции  $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$ . (Ответ:  $-1 \leq x^2 + y \leq 1$ )
2. Верно ли, что функция  $z = y \cdot \varphi(\cos(x - y))$  удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}$ ? (Ответ: да)
3. Исследовать на экстремум функцию  $z = 4y^3 + 6xy^2 - 3x^2 - 12y^2 + 2$ . (Ответ:  $z_{\max} = z(0,0) = 2$ )

### Вариант 2

1. Найти и построить на плоскости  $xy$  область определения функции  $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$ . (Ответ:  $x \leq x^2 + y^2 < 2x$ )
2.  $xe^y - ye^x = 0$ . Доказать, что  $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)y}{x(y-1)}$ .
3. Найти производную функции  $u = xy + yz + zx$  в точке  $M(2,1,3)$  в направлении вектора  $\overline{MN}$ , где  $N(5,5,15)$ . (Ответ:  $68/13$ )

### Вариант 3

1. Найти и построить на плоскости  $xy$  область определения функции  $z = \arccos \frac{x}{x+y}$ . (Ответ:  $y(2x+y) \geq 0, (x,y) \neq (0,0)$ )
2. Для поверхности  $z = 4x - xy + y^2$  найти уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости  $4x + y + 2z + 9 = 0$ . (Ответ:  $4x + y + 2z - 78 = 0$ )
3. Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 + x\sqrt{y} + 6x + y + 10$ . (Ответ:  $z_{\min} = z(-4,4) = -2$ )