МАТЕМАТИКА
1-й семестр

Лектор: ВИНОГРАДОВА ЮЛИЯ АЛЕКСАНДРОВНА,
кафедра прикладной математики, ауд. 357а
тел. 8-926-281-75-66
email: yulich@inbox.ru

Основные разделы:
Введение в математический анализ
Производная и дифференциал
Контрольные мероприятия 1-го семестра:
1-й модуль –
1) РГР «Введение в математический анализ»
2) Защита РГР «Введение в математический анализ»
2-й модуль –
1) Контрольная работа «Производные»

Экзамен

Учебные пособия

1. Задачи и контрольные вопросы по математике для студентов 1 семестра/А.В. Боголюбов, Ю.В. Елисеева, А.Г. Елькин, Е.А. Яновская. – М.: МГТУ «Станкин», «Янус-К», 2003, 2007, 2009.

2. Бубнова Т. В., Виноградова Ю. А., Господинова А. Г. Пределы последовательностей и функций: учеб. пособие / Т. В. Бубнова, Ю. А. Виноградова, А. Г. Господинова – М.: «Янус-К», 2019

3. Бубнова Т. В., Виноградова Ю. А. Высшая математика. Избранные главы: учеб. пособие – М.: ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН», 2015

Электронная среда университета **edu.stankin.ru**

Электронная библиотека **biblioclub.ru**

Лекция 1.
Введение в математический анализ

Под *множеством* понимается совокупность (собрание, класс, семейство)некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку.

Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами.

Если x – элемент множества M, то пишут $x \in M$.
Множество M задается следующим образом:
$M = \{x | x \text{ удовлетворяет} \dots\}$ или $M = \{x_1, x_2, x_3 \dots\}$.

Если множества состоят из одних и тех же элементов, то они равны.

Множества, состоящие из чисел, называются *числовыми*.

Числовые множества.

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R} = \{x = \pm n, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots\}$ — множество действительных, или вещественных, чисел, реализуется в виде конечных или бесконечных (периодических и непериодических) десятичных дробей.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \ldots\}$ - числа, представимые в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, образуют множество иррациональных чисел

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Понятие абсолютной величины (модуля) действительного числа

Определение. *Абсолютной величиной* или *модулем* действительного числа x называется неотрицательное число

$$|x| = \begin{cases} x, \ x \geq 0, \\ -x, \ x < 0 \end{cases}.$$

Свойства абсолютной величины:

1. $|x| \ge x, |x| \ge -x, |x| = |-x|$
2. $|x+y| \le |x| + |y|$
3. $|x-y| \ge |x| - |y|$
4. $|xy| = |x| \cdot |y|$
5. $|x/y| = |x|/|y|,\ y \ne 0$
6. $\sqrt{x^2} = |x|$

Геометрический смысл модуля и модуля разности двух чисел:

$|x|$ равен расстоянию от точки x до точки 0 на оси x,

$|x_1 - x_2|$ равен расстоянию между точками x_1, x_2 на оси x.

Решение неравенства $|x-a| < b$:

$a - b < x < a + b \Leftrightarrow x \in (a-b, a+b)$

Решение неравенства $|x-a| > b$:

$x < a - b$ или $x > a + b \Leftrightarrow x \in (-\infty, a-b) \cup (a+b, +\infty)$

Понятие функции действительной переменной

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R}$ – произвольное множество действительных чисел. Пусть каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $f(x)$. Тогда говорят, что на множестве D определена *числовая функция* f. При этом множество D называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$, число $f(x)$ называется *значением функции* в точке x. Множество всех значений функции обозначается $E(f)$.

Символически функция записывается в виде $f : D \to E$ или $y = f(x)$.

Определение. Множество точек плоскости с координатами $\left(x, f(x)\right), x \in D$ называют *графиком функции* $y = f(x)$, определенной на множестве D.

Способы задания функции

1) Наиболее распространенным является *аналитический способ* задания функции. Он состоит в том, что с помощью формулы конкретно устанавливается алгоритм вычисления значений функции $y = f(x)$ для каждого из значений *аргумента* x.
2) Графический способ.
3) Табличный способ.

Определение. Пусть функция $f: D \to E$ такова, что для любых $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ из условия $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае всякому числу $y \in E(f)$ можно поставить в соответствие некоторое вполне определенное число $x \in D(f)$: $f(x) = y$. Тем самым определена новая функция $f^{-1}: E \to D$, называемая *обратной* к заданной функции *f*.

Графики *взаимнообратных* функций $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$.

Определение. Пусть заданы функции $f: D \to Y$ и $g: Y \to E$. Их *композицией* (или сложной функцией, полученной последовательным применением функций *f* и *g*) называется функция $h: D \to E$, определяемая равенством $h(x) = g(f(x))$, $x \in D$.

Определение. Функция называется *четной* (*нечетной*), если ее область определения симметрична относительно точки $x=0$ и $f(x) = f(-x)$ ($f(x) = -f(-x)$).

График четной функции симметричен относительно оси $\boldsymbol{Y}$, график нечетной функции симметричен относительно точки $(0,0)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$ (*период* функции) такое, что для любого $x \in D$ числа $x+T, x-T$ также принадлежат множеству D и выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

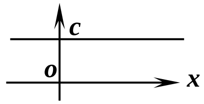
Определение. Функция $f(x)$ называется *возрастающей*
(*неубывающей, убывающей, невозрастающей*) на множестве A ,
если для любых $x_1 \in A, x_2 \in A, x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \leq f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_1) \geq f(x_2)$). Любая такая функция называется *монотонной* на множестве A.

Элементарные функции

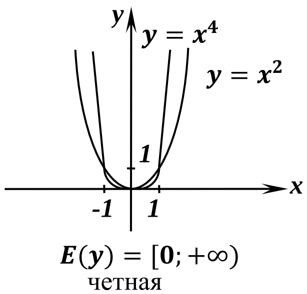
Определение.

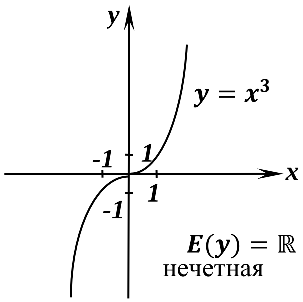
Следующие функции называются *основными элементарными:*

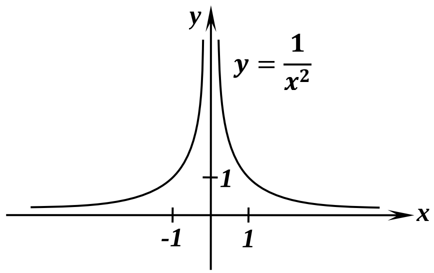
1. $y = C$, где C — постоянная.

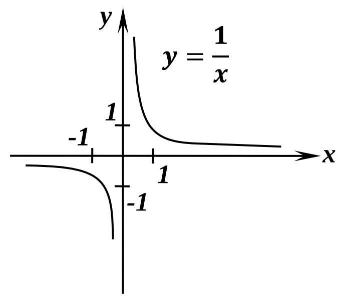


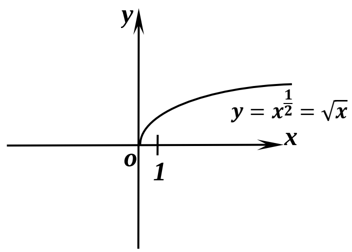
2. *Степенная* функция: $y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

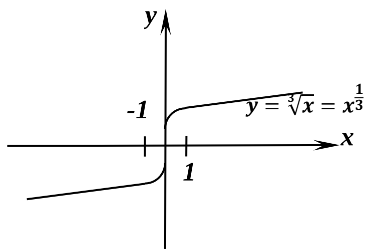




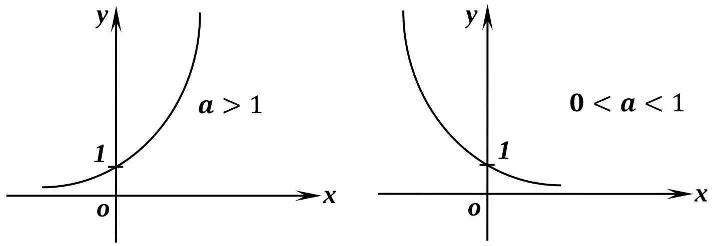




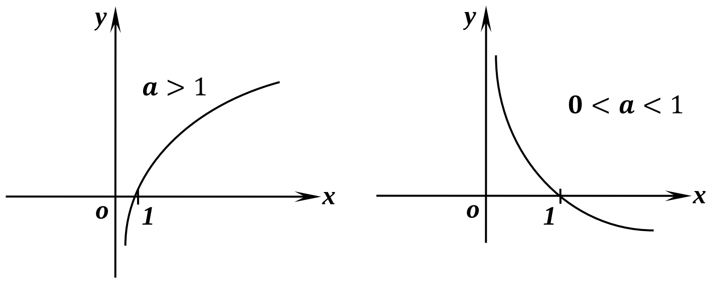




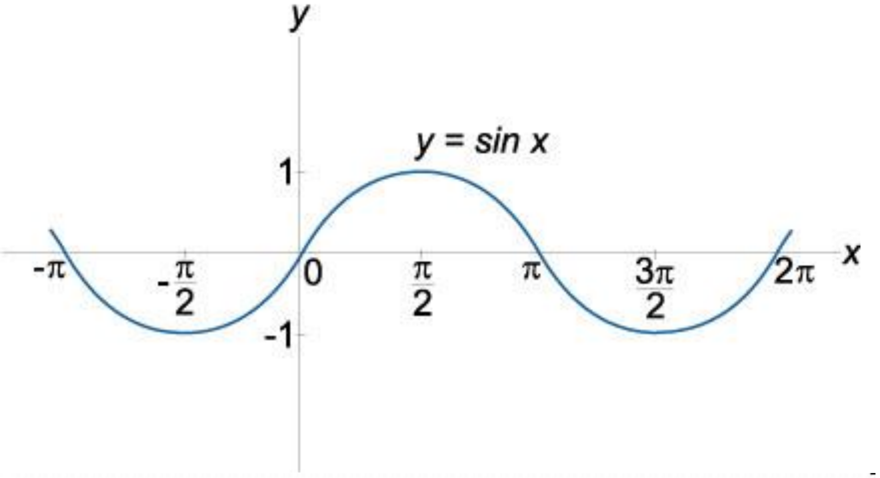
3.*Показательная* функция: $y = a^x, a > 0, a \neq 1.$

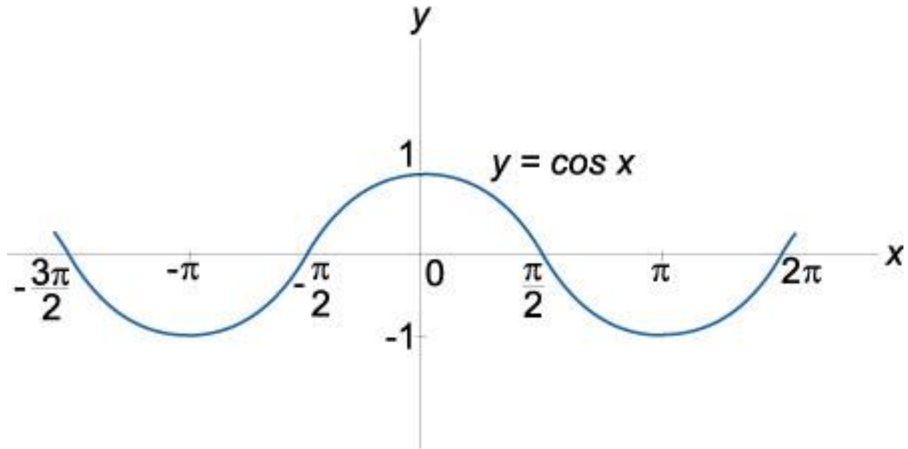


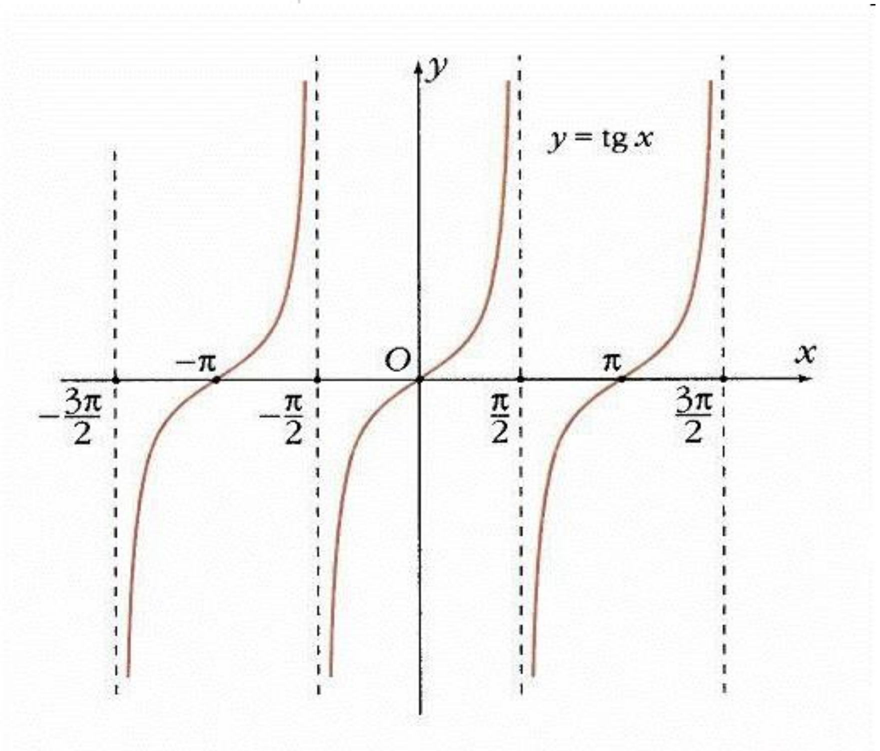
4.*Логарифмическая* функция: $y = \log_a x, x > 0, a > 0, a \neq 1.$

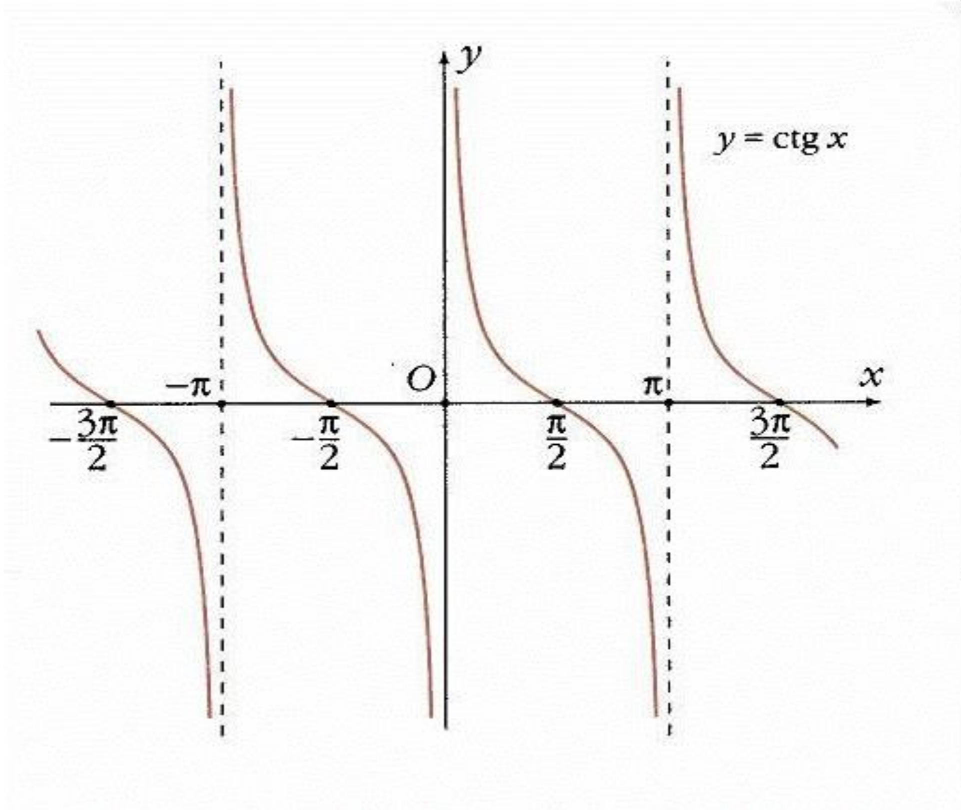


5.*Тригонометрические* функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.



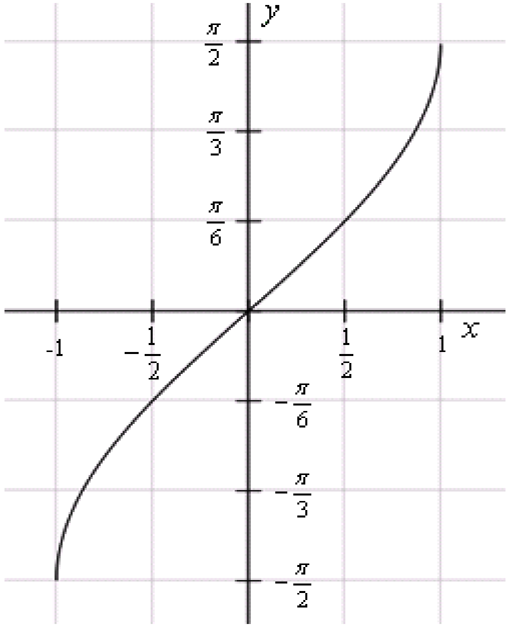




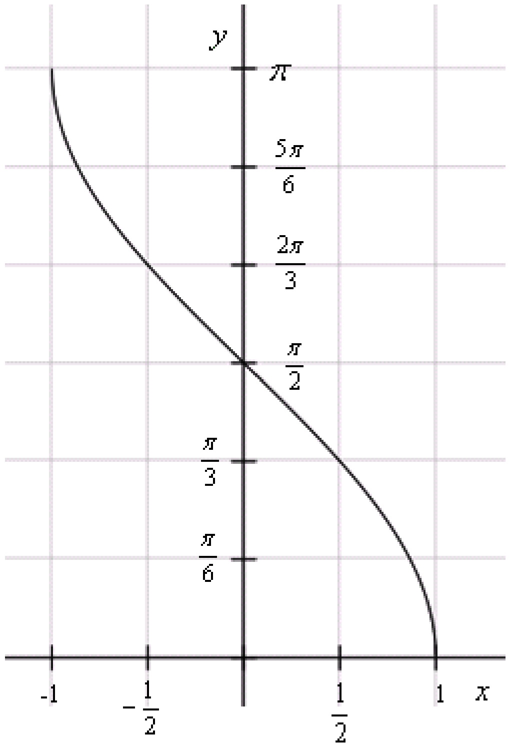


6.*Обратные тригонометрические* функции:

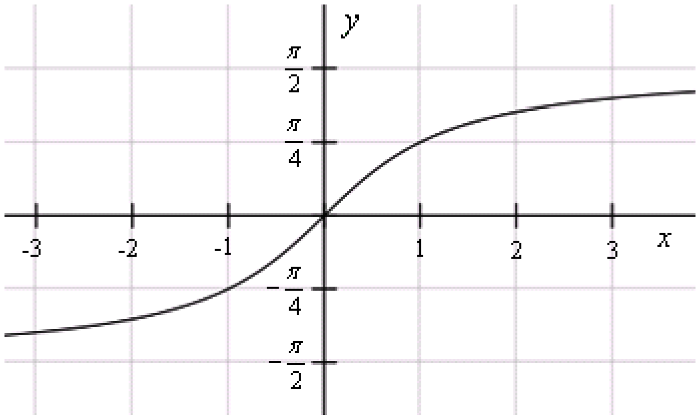
1) $y = \arcsin x$, $x \in [-1,1]$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, функция монотонно возрастает.



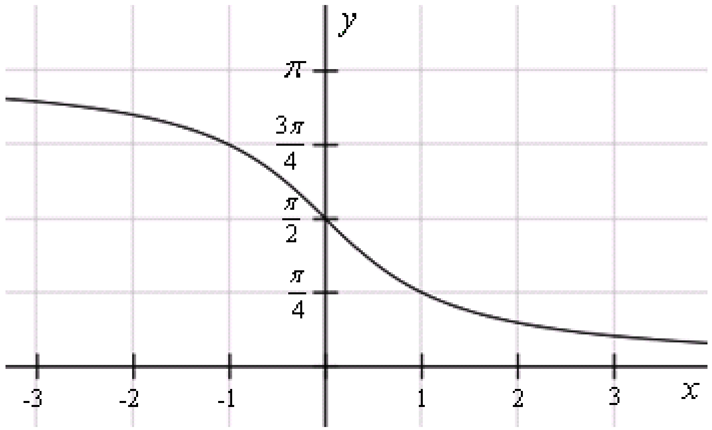
2) $y = \arccos x,\ x \in [-1,1],\ y \in [0,\pi]$, функция монотонно убывает.



3) $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, функция монотонно возрастает, график имеет горизонтальные асимптоты $y = -\frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}$.



4) $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (0, \pi)$, функция монотонно убывает, график имеет горизонтальные асимптоты $y = 0, y = \pi$.



Определение .

Элементарной называется всякая функция, которая может быть получена из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и операции композиции.