Процессы гибели и размножения

Определение. Марковским процессом гибели и размножения с непрерывным временем назовем такой случайный процесс, который может принимать только целые неотрицательные значения; изменения этого процесса могут происходить в любой момент времени t, при этом в любой момент времени он может либо увеличиться на единицу, либо уменьшиться на единицу, либо остаться неизменным.

Пусть $\lambda_i(t)$ - интенсивность потока событий, ведущих к увеличению значения i (поток “размножения”), через $\mu_j(t)$ - интенсивность потока событий, ведущих к уменьшению значения j (поток “гибели”).

Распределение состояний $p_i\,(t),\ i = 0,1,\dots,n,\dots$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = \mu_1(t)p_1(t) - \lambda_0(t)p_0(t), \\ \dfrac{dp_i}{dt} = \lambda_{i-1}(t)p_{i-1}(t) - \left(\lambda_i(t) + \mu_i(t)\right)p_i(t) + \mu_{i+1}(t)p_{i+1}(t), \\ \qquad i = 1, 2, \dots, n, \dots \end{cases}$$

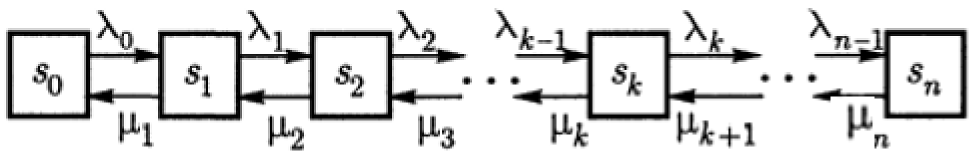
при начальных условиях $p_i(0) = p_{i0},\quad i = 0, 1, 2, \dots \quad \sum_i p_{i0} = 1.$

В инженерных приложениях обычно имеют дело с процессами гибели и размножения с ограниченным числом состояний (n+1), тогда система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = \mu_1(t)p_1(t) - \lambda_0(t)p_0(t), \\ \dfrac{dp_i}{dt} = \lambda_{i-1}(t)p_{i-1}(t) - \left(\lambda_i(t) + \mu_i(t)\right)p_i(t) + \mu_{i+1}(t)p_{i+1}(t), \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \dfrac{dp_n}{dt} = \lambda_{n-1}(t)p_{n-1}(t) - \mu_n(t)p_n(t) \end{cases}$$

при начальных условиях $p_0(0)=1$, $p_1(0)=0, \ldots, p_n(0)=0$. Вероятности $p_i(t)$ характеризуют среднюю загрузку системы и ее изменение с течением времени.

Граф состояний системы может быть представлен в виде:



Для нахождения *числовых характеристик случайного процесса* необходимо решить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний случайного процесса. Если найден одномерный закон распределения случайного процесса $p_j(t) = P(X(t) = j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, то математическое ожидание есть $m_x(t) = \sum_i i p_i(t)$, а дисперсия – $D_x(t) = \sum_j j^2 p_j(t) - (m_x(t))^2$.

Рассмотрим возможность определить числовые характеристики без нахождения одномерного закона распределения. Для этого умножим каждое уравнение системы Колмогорова на соответствующее i и просуммируем, тогда получим

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_i i \frac{dp_i}{dt} = \sum_i \left(i\lambda_{i-1}(t) p_{i-1}(t) - i(\lambda_i(t) + \mu_i(t)) p_i(t) + i\mu_{i+1}(t) p_{i+1}(t) \right),$$

или

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_i (\lambda_i(t) - \mu_i(t)) p_i(t).$$

Аналогично, для дисперсии $\frac{d}{dt}\sum_i i^2 p_i(t) = \sum_i \left(\lambda_i(t) + \mu_i(t) + 2i(\lambda_i(t) - \mu_i(t))\right) p_i(t)$.

Учитывая, что $\frac{dD_x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i i^2 p_i(t) - 2m_x(t)\frac{dm_x(t)}{dt}$, получим $\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_i \left(\lambda_i(t) + \mu_i(t) - 2(i - m_x(t))(\lambda_i(t) - \mu_i(t))\right) p_i(t)$.

Если известен закон изменения интенсивностей гибели и размножения, то часто полученные для математического ожидания и дисперсии уравнения можно выписать, исключив из них вероятности распределения.

Пример. Рассматривается процесс эксплуатации нефтяных скважин. Ввод нефтяных скважин в эксплуатацию осуществляется с интенсивностью $\lambda_k(t)=at$. Интенсивность потока выхода из строя каждой скважины μ=const. Найти числовые характеристики случайного процесса $X(t)$ – число нефтяных скважин, находящихся в эксплуатации в момент времени t, если $X(0)=0$.

Решение. Процесс эксплуатации нефтяных скважин можно рассматривать как процесс гибели и размножения с интенсивностью гибели $\mu_k(t)=k\mu$ и интенсивностью размножения $\lambda_k(t)=at$. Найдем математическое ожидание случайного процесса:

$$\frac{dm_x(t)}{dt}=\sum_i(\lambda_i(t)-\mu_i(t))p_i(t)=\sum_i(at-i\mu)p_i(t)=at-\mu\sum_i ip_i(t) \quad =at-\mu m_x(t).$$

Учитывая начальные условия $X(0)=0$, получаем начальное распределение $p_0(0)=1$, $p_1(0)=0,\dots$, $p_n(0)=0$, следовательно $m_x(0)=0$.

Общее решение дифференциального уравнения: $m_x(t)=Ce^{-\mu t}+\frac{at}{\mu}-\frac{a}{\mu^2}$.

С учетом начального условия $m_x(t)=\frac{a}{\mu^2}\left(\mu t-1+e^{-\mu t}\right)$.

Дифференциальное уравнение для дисперсии

$$\frac{dD_x(t)}{dt}=\sum_i\left(\lambda_i(t)+\mu_i(t)+2(i-m_x(t))(\lambda_i(t)-\mu_i(t))\right)p_i(t)=\sum_i\left(at+i\mu+2(i-m_x(t))(at-i\mu)\right)p_i(t)=at+m_x(t)\mu-2\mu D_x(t).$$

Следовательно

$$\frac{dD_x}{dt}+2\mu D_x=at+\frac{a}{\mu}\left(\mu t-1+e^{-\mu t}\right).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид: $D_x(t)=Ce^{-2\mu t}+\frac{a}{\mu^2}\left(\mu t-1+e^{-\mu t}\right).$

Тогда с учетом начального условия $D_x(0)=0$ получаем $D_x(t)=\frac{a}{\mu^2}\left(\mu t-1+e^{-\mu t}\right)$.

Процесс чистого размножения. Распределение Пуассона.

Определение. Процессом чистого размножения называется процесс гибели и размножения, у которого интенсивности всех потоков гибели равны нулю, т. е. $\mu_j(t)=0$, $j=1, 2,\ldots$.

Рассмотрим процесс чистого размножения при условии что $\lambda_i(t) = \lambda$ для всех i=0,1,2,... . Подставляя эти значения в уравнения Колмогорова, получим

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t) \end{cases}$$

Предположим также, что процесс начинается в нулевой момент $p_i(0) = \begin{cases} 1, & i=0; \\ 0, & i \neq 0. \end{cases}$

Решение 1-го уравнения:

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \Leftrightarrow y' + \lambda y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\lambda y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\lambda dx \Leftrightarrow \ln y = -\lambda x + C_0 \Leftrightarrow \quad p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Подставляя это решение в следующее уравнение системы, приходим к уравнению $p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$.

Решение 2-го уравнения (с учетом НУ): $p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

Используя метод математической индукции, получим распределение Пуассона: $p_i(t) = \dfrac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, i \geq 0, t \geq 0$.

Таким образом, процесс чистого размножения с постоянной интенсивностью λ приводит к последовательности рождений, образующей пуассоновский процесс.

Процесс Пуассона и его основные свойства

Определение. Пуассоновским процессом $X(t)$ с параметром $\lambda>0$, называют случайный процесс, обладающий следующими свойствами:

1. $X(0)=0$

2. Для любого разбиения временного интервала точками $0<t_1,\dots t_{n-1},t_n$ приращения $X(t_1)$, $X(t_2)-X(t_1)$,... $X(t_n)-X(t_{n-1})$ независимы.

3. Для любых $t_2>t_1$ СВ $X(t_2)-X(t_1)$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda(t_2-t_1)$

$$P(X(t_2)-X(t_1)=k)=\frac{(\lambda(t_2-t_1))^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$

$$m_X=\lambda t\,;\; K_X=\lambda\min(t_1;t_2)$$

Применение. Моделирование различных потоков (системы массового обслуживания и анализ их пригодности, финансовые потоки, теория счетчиков, процессы рождения и гибели и т.д.)

Пример. Рассмотрим процесс чистого размножения с постоянной интенсивностью λ =2 (увеличение популяции на 2 особи за единицу времени). Найти

а) вероятности состояний системы;

б) вероятности того, что через 2 единицы времени число особей в популяции будет равно 0, 2, 4,9;

в) вероятности того, что через 3 единицы времени число особей в популяции будет равно 0, 2, 4,9;

Решение.

а) $$p_i(t)=\frac{(2t)^i}{i!}e^{-2t}, i\geq 0, t\geq 0$$

б) $$p_0(2)=\frac{(2\cdot 2)^0}{0!}e^{-2\cdot 2}=e^{-4}=0{,}018,\ p_2(2)=\frac{(2\cdot 2)^2}{2!}e^{-2\cdot 2}=8\cdot e^{-4}=0{,}146,\ p_4(2)=\frac{(2\cdot 2)^4}{4!}e^{-2\cdot 2}=\frac{32}{3}\cdot e^{-4}=0{,}195,$$

$$p_9(2)=\frac{(2\cdot 2)^9}{9!}e^{-2\cdot 2}=\frac{262144}{362880}\cdot e^{-4}=0{,}013$$

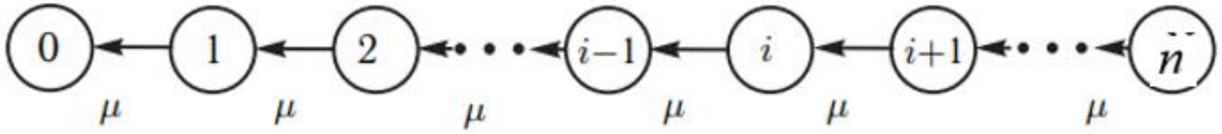
в) $$p_0(3)=\frac{(2\cdot 3)^0}{0!}e^{-2\cdot 3}=e^{-4}=0{,}002,\ p_2(3)=\frac{(2\cdot 3)^2}{2!}e^{-2\cdot 3}=18\cdot e^{-6}=0{,}044,$$

$$p_4(3)=\frac{(2\cdot 3)^4}{4!}e^{-2\cdot 3}=\frac{1296}{24}\cdot e^{-6}=0{,}133,\ p_9(3)=\frac{(2\cdot 3)^9}{9!}e^{-2\cdot 3}=\frac{262144}{362880}\cdot e^{-4}=0{,}068$$

Процесс чистой гибели

Определение. Процессом чистой гибели (ПЧГ) называется процесс гибели и размножения, у которого интенсивности всех потоков размножения равны нулю, т. е. $\lambda_i(t)=0$, $i=0,1,2,\dots$.

Пример. $\mu_i = \mu = const$, $i=0,1,2,\dots n$.



$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = \mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_i}{dt} = \mu_{i+1} p_{i+1}(t) - \mu_i p_i(t) \\ \qquad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dfrac{dp_n}{dt} = -\mu_n p_n(t) \end{cases}$$

начальное распределение $p_0(0)=0$, $p_1(0)=0, \dots, p_n(0)=1$

ПЧГ (с интенсивностью $\mu_i = \mu$) в момент t есть случайное число оставшихся в живых индивидуумов $X(t)$, при этом случайное число погибших индивидуумов $Y(t) = n - X(t)$ имеет закона распределения Пуассона

$P(Y(t)=j)= \dfrac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t}$. $M X(t) = n - \mu t$, $DX(t) = \mu t$.

Финальные вероятности (стационарный режим):

$$\begin{cases} 0 = \mu_1(t)p_1(t) - \lambda_0(t)p_0(t), \\ 0 = \lambda_{i-1}(t)p_{i-1}(t) - \left(\lambda_i(t) + \mu_i(t)\right)p_i(t) + \mu_{i+1}(t)p_{i+1}(t), \\ \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 0 = \lambda_{n-1}(t)p_{n-1}(t) - \mu_n(t)p_n(t) \end{cases}$$

Решение системы:

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k} + \ldots + \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\right\}^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}p_0; \ldots; \quad p_k = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}p_0 \ (0 \le k \le n); \ldots; \qquad p_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}p_0.$$

Вероятность любого состояния в схеме гибели и размножения равна дроби, в числителе которой стоит произведение всех интенсивностей размножения, стоящих левее s_k, а в знаменателе - всех интенсивностей гибели, стоящих левее s_k, умноженной на вероятность крайнего левого состояния p_0.

Пример 2. Вычислительный центр имеет три ЭВМ. В центр поступает на решение в среднем четыре задачи в час. Среднее время решения одной задачи - полчаса. Вычислительный центр принимает и ставит в очередь на решение не более трех задач. Необходимо оценить эффективность центра.

Решение.

- интенсивность потока заявок $\lambda = 4$ (задача / час);
- время обслуживания одной заявки $t_{об}=0{,}5$ (час / задача),
- интенсивность обслуживания $\mu = 2$ (задача / час);

Перечень возможных состояний:

S_0 - заявок нет, все ЭВМ свободны;

S_1 - одна ЭВМ занята, две свободны;

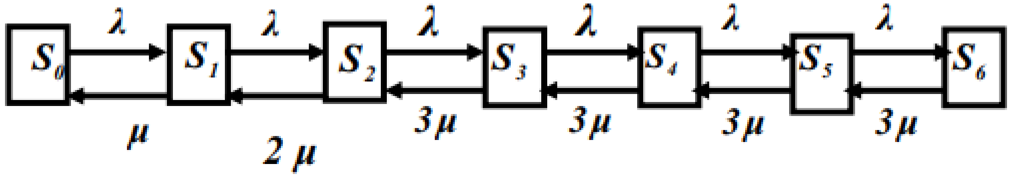
S_2 - две ЭВМ заняты, одна свободна;

S_3 - три ЭВМ заняты;

S_4 - три ЭВМ заняты, одна заявка в очереди;

S_5 - три ЭВМ заняты, две заявки в очереди;

S_6 - три ЭВМ заняты, три заявки в очереди.



Вероятность состояния S_0 :

$$P_0 = \Big(1 + \lambda/\mu + \lambda\cdot\lambda/2\mu\cdot\mu + \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot 2\mu\cdot\mu + \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot 3\mu\cdot 2\mu\cdot\mu +$$
$$+ \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot 3\mu\cdot 2\mu\cdot\mu + \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot 3\mu\cdot 3\mu\cdot 2\mu\cdot\mu +$$
$$+ \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot 3\mu\cdot 3\mu\cdot 3\mu\cdot 2\mu\cdot\mu\Big)^{-1} = 0.122.$$

Показатели эффективности:

- вероятность отказа (все три ЭВМ заняты и три заявки стоят в очереди) $P_{m+n} = \dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^{m+n}}{n^m \cdot n!} \cdot P_0 = 0.048;$
- относительная пропускная способность $q = 1 - P_{m+n} = 0.952;$
- абсолютная пропускная способность $A = \lambda \cdot q = 3.808;$
- среднее число занятых ЭВМ $\bar{z} = \dfrac{A}{\mu} = 1.904.$

Основные преобразования над случайными потоками: *суммирование* потоков и *разрежение* потоков:

Суммой потоков назовем поток, в котором моменты появления событий состоят из моментов появления событий в суммируемых потоках (интенсивность суммарного потока равна сумме интенсивностей данных потоков).

Предельная теорема для суммарного потока. Сумма независимых стационарных ординарных потоков событий сходится к пуассоновскому стационарному потоку.

Разрежением потока называют такое преобразование, в котором каждое событие исходного потока остается в этом потоке с вероятностью q и исключается из него с вероятностью p

- детерминированное «просеивание» простейшего потока с интенсивностью λ, с помощью которой получаются потоки Эрланга
- случайное разрежение пуассоновского потока с интенсивностью λ – пуассоновский поток с интенсивностью $q\lambda$