Лекции 6-7.

Бесконечно малые последовательности

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon > 0\ \forall n \geq N_\varepsilon\ |\alpha_n| < \varepsilon$.

Свойства бесконечно малых последовательностей

1. Бесконечно малая последовательность ограничена.
2. Сумма и произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

   Доказательство: Рассмотрим сумму двух бесконечно малых последовательностей α_n и β_n.

   Пусть ε – произвольное положительное число. Тогда существуют номер N_1, начиная с которого бесконечно малые величины α_n становятся меньше числа $\varepsilon/2$:

   $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_1$.

   Аналогично,

$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_2$.

Обозначим символом N наибольший из номеров N_1 и N_2. Тогда для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

выражающее справедливость доказываемого утверждения.

3. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Ограниченность последовательности $\{b_n\}$ означает, что $|b_n| < B$ для всех $n = 1, 2, \dots$, где B – некоторое положительное число. Выберем сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$. Согласно определению бесконечно малой последовательности существует такой номер N, начиная с которого величины $|\alpha_n|$ становятся меньше любого положительного числа и, в частности, $|\alpha_n| < \varepsilon/B$. Тогда $|\alpha_n b_n| = |\alpha_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{B} \cdot B = \varepsilon$.
Для всех $n > N$, что доказывает утверждение.

Следствие. Умножение бесконечно малой последовательности на любое число дает бесконечно малую последовательность.

Предел функции.

Определение. *Окрестностью* точки $a \in R$ называется любой интервал, содержащий эту точку. *Проколотой окрестностью* точки $a \in R$ называется окрестность точки a, из которой удалена точка a.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$. ε-окрестностью точки $a \in R$ называется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Определение. *Проколотой* ε*-окрестностью* точки $a \in R$ называется ε-окрестность точки a, из которой удалена точка a ($(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus a$).

Определение (определение предела функции в точке). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ (зависящее от ε) такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$.

При этом пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (или $f(x) \to b$ при $x \to a$)

С помощью символов $\forall$ (читается «для любого», «для всех») и $\exists$ (читается «существует», «найдется») определение предела можно записать следующим образом:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon.$$

Примеры.

1) $f(x) \equiv 1,\ x \in R$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1\ \forall a \in R$.

2) $f(x) = 3x+1,\ x \in R$. Тогда $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$.

3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2},\ x \neq 2$. Тогда $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

4) $f(x) = \dfrac{|x|}{x},\ x \neq 0$. Не существует $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Предел функции при x, стремящемся к бесконечности

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена при всех $x \in R$ таких, что $|x| > M$ для некоторого числа $M > 0$. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $N > 0$ (зависящее от ε) такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

При этом пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ (или $f(x) \to b$ при $x \to \infty$) и говорят:
«предел $f(x)$ равен b при x, стремящемся к бесконечности»
или
« $f(x)$ стремится к b при x, стремящемся к бесконечности».
В символической записи

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) > 0 : |x| > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon .$$

Заменив в определении неравенство $|x| > N$ на неравенство $x > N$, получим определение предела при $x \to +\infty$.

В символической записи

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N\left(\varepsilon\right) > 0 : x > N \Rightarrow \left|f\left(x\right) - b\right| < \varepsilon.$$

Заменив в определении неравенство $|x| > N$ на неравенство $x < -N$, получим определение предела при $x \to -\infty$.

В символической записи

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N\left(\varepsilon\right) > 0 : x < -N \Rightarrow \left|f\left(x\right) - b\right| < \varepsilon.$$

Примеры.

1) $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

2) $f\left(x\right) = 2^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$.

3) $f\left(x\right) = 2^{-x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x} = 0$.

Односторонние пределы

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a,d), $a<d$. Число b называется *пределом справа функции* $f(x)$ *в точке* a, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ (зависящее от ε) такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<x-a<\delta$, выполняется неравенство $\left|f(x)-b\right|<\varepsilon$.

При этом пишут $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ (или $f(x)\to b$ при $x\to a+0$) и говорят:

«предел $f(x)$ равен b при x, стремящемся к a справа» или

«$f(x)$ стремится к b при x, стремящемся к a справа».

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (c,a), $c<a$. Число b называется *пределом слева функции* $f(x)$ *в точке* a, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$(зависящее от ε) такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $-\delta<x-a<0$ выполняется неравенство $\left|f(x)-b\right|<\varepsilon$.

При этом пишут $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ (или $f(x)\to b$ при $x\to a-0$) и говорят:

«предел $f(x)$ равен b при x, стремящемся к a слева» или

«$f(x)$ стремится к b при x, стремящемся к a слева».

Более короткие обозначения $f(a-0)=b$, $f(a+0)=b$.

Определение. Пределы справа и слева называются *односторонними пределами*.

Теорема. *Функция имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке оба ее односторонних предела существуют и равны.*

Пример.

$$f\left(x\right)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, x>0,\\ -1, x<0.\end{cases}, x\neq 0. \lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x}=-1, \lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x}=1.$$

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение:

Пусть $x<1$. Тогда при $x\to 1-0$ имеем: $x-1$- отрицательная бесконечно малая величина; следовательно $\dfrac{1}{x-1}\to -\infty$, а $2^{\frac{1}{x-1}}\to 2^{-\infty}=0$.

Отсюда $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\dfrac{1}{1+0}=1$.

Если $x > 1$, то при $x \to 1+0$ получим: $x-1$- положительная бесконечно малая величина; следовательно $\frac{1}{x-1} \to +\infty$, и $2^{\frac{1}{x-1}} \to 2^{+\infty} = +\infty$.

Таким образом, $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Пример.

Найти $\lim\limits_{x \to 2+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x}$ и $\lim\limits_{x \to 2-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x}$.

Решение:

Пусть $x < 2$, т.е. $x \to 2$ слева, тогда величина $(2-x)$ будет положительной бесконечно малой, а величина $\frac{1}{2-x}$ бесконечно большой, принимающей также положительные значения. Принимая во внимание, что при $x \to +\infty$ функция $\operatorname{arctg} x$ стремится к $\frac{\pi}{2}$, получаем, что

$\lim\limits_{x \to 2-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x} = \frac{\pi}{2}$.

Если же $x \to 2$ справа, т.е. оставаясь больше 2, тогда величина $(2-x)$ будет отрицательной бесконечно малой, а $\frac{1}{2-x}$ будет отрицательной бесконечно большой величиной. При $x \to -\infty$ функция $\operatorname{arctg} x$ стремится к $-\frac{\pi}{2}$, тогда

$$\lim_{x \to 2+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что $\lim_{x \to 2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x}$ не существует, так как односторонние пределы в точке $x_0 = 2$ не равны между собой.

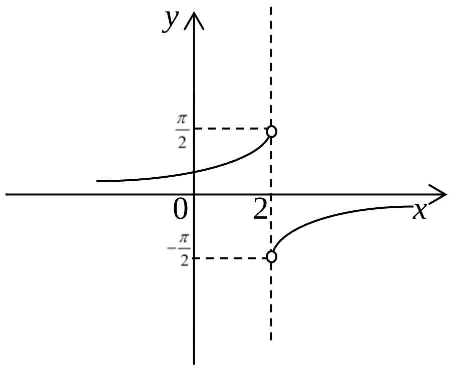


График функции $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x}$

Свойства функций, имеющих предел

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве D, если существуют такие постоянные m и M, что $m \le f(x) \le M$ для $x \in D$.

Можно дать и другое определение функции, ограниченной на множестве D.

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве D, если существует такая постоянная $M \ge 0$, что $|f(x)| \le M$ для $x \in D$.

Определения 1 и 2 эквивалентны.

Теорема. *Пусть существует* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, *где* $a \in R, b \in R$. *Тогда функция* $f(x)$ *ограничена в некоторой (проколотой) окрестности точки* a.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$ и найдем соответствующее значение $\delta > 0$. Тогда по определению предела $|f(x) - b| < 1$, если $0 < |x - a| < \delta$. Это означает, что $b - 1 < f(x) < b + 1$ при $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus a$.

Замечание. Теорема справедлива и в случае, когда $a = \infty, -\infty, +\infty$.

Теорема. *Пусть существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, *где* $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$. *Если* $b>0$, *то* $f(x)>0$ *в некоторой (проколотой) окрестности точки* a. *Если* $b<0$, *то* $f(x)<0$ *в некоторой (проколотой) окрестности точки* a.

Доказательство. Предположим, что $b>0$. Возьмем $\varepsilon=b/2$ и найдем соответствующее значение $\delta>0$. Тогда по определению предела $|f(x)-b|<b/2$, если $0<|x-a|<\delta$. Это означает, что $b-b/2<f(x)<b+b/2$ при $x\in(a-\delta,a+\delta)\setminus a$. Таким образом, $f(x)>b/2>0$ при x из окрестности точки a.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

Замечание. Теорема справедлива и в случае, когда $a=\infty,-\infty,+\infty$.

Теорема (о переходе к пределу в неравенстве). *Пусть функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *определены в некоторой (проколотой) окрестности точки* $a \in \mathbb{R}$ *и выполнено неравенство* $f_1(x) \le f_2(x)$ $\forall x$ *из этой окрестности . Пусть существуют пределы* $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = b_1$ *и* $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = b_2$*, где* $b_1 \in R, b_2 \in R$*. Тогда* $b_1 \le b_2$.

Доказательство от противного. Допустим, что $b_1 > b_2$. Возьмем $\varepsilon = (b_1 - b_2)/4$. По определению предела $f_1(x) > b_1 - \varepsilon$, если $0 < |x - a| < \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ и $f_2(x) < b_2 + \varepsilon$, если $0 < |x - a| < \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $f_2(x) < b_2 + \varepsilon < b_1 - \varepsilon < f_1(x)$, если $0 < |x - a| < \delta$. Получили противоречие.

Замечание. Теорема справедлива и в случае, когда $a = \infty, -\infty, +\infty$.

Теорема (о переходе к пределу в двустороннем неравенстве). *Пусть функции* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *и* $\varphi(x)$ *определены в некоторой (проколотой) окрестности точки* $a \in \mathbb{R}$ *и выполнено неравенство* $f_1(x) \le \varphi(x) \le f_2(x) \forall x$ *из этой окрестности. Пусть существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b$, *где* $b \in R$. *Тогда существует* $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда по определению предела $f_1(x) > b - \varepsilon$, если $0 < |x - a| < \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ и $f_2(x) < b + \varepsilon$, если $0 < |x - a| < \delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда из неравенства $f_1(x) \le \varphi(x) \le f_2(x) \forall x$ из этой окрестности следует, что $b - \varepsilon < \varphi(x) < b + \varepsilon$, если $0 < |x - a| < \delta$. А это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$.

Замечание. Теорема справедлива и в случае, когда $a = \infty, -\infty, +\infty$.

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^4 - 6x^2 + 11x}{5x^2 - 9x + 24}$.

Решение:

Числитель и знаменатель неограниченно возрастают при $x \to \infty$. Здесь неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Разделив числитель и знаменатель на x^4 (наибольшая из имеющихся степеней x числителя и знаменателя), и применяя формулы (2.3), (2.1), имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^4-6x^2+11x}{5x^2-9x+24} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{4-\frac{6}{x^2}+\frac{11}{x^3}}{\frac{5}{x^2}-\frac{9}{x^3}+\frac{24}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{24}{x^4}} = \frac{4-0+0}{0-0+0} = \frac{4}{0} = \infty.$$

Замечание

Рассмотрим дробно-рациональную функцию

$$y(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \qquad (a_m, b_n \neq 0).$$

Числитель и знаменатель функции – многочлены степени m и n. При $x \to \infty$ числитель и знаменатель дроби неограниченно увеличиваются. Предел частного двух многочленов при $x \to \infty$ равен отношению коэффициентов при старших членах, если степени числителя и знаменателя равны; предел этот равен 0, если степень числителя меньше степени знаменателя; предел равен ∞, если степень числителя больше степени знаменателя, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots . + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots . + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_m}{b_n}, & \text{если } m = n \\ 0, & \text{если } m < n \\ \infty, & \text{если } m < n. \end{cases}$$

Отсюда

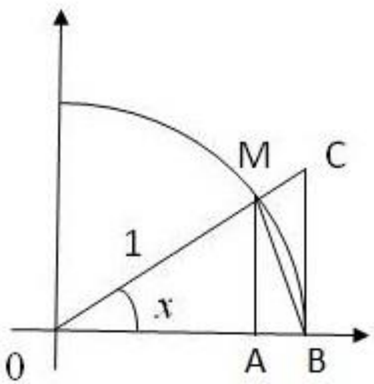
$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^5+4x^3+3}{8x^5-6x^2+2x} = (m = n = 5) = \frac{7}{8};$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^3+5}{5x^6-6x^2+2x} = (m = 4 < n = 6) = 0;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x+2} = (m = 2 > n = 1) = \infty.$$

Теорема о первом замечательном пределе.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}.$$



Доказательство. Пусть $x\in\left(-\pi/2,\pi/2\right)$. Поскольку $\sin\left(-x\right)/\left(-x\right)=\sin x/x$, то будем считать, что $0<x<\pi/2$. Рассмотрим единичную окружность. Пусть KC – дуга, соответствующая углу x. Из геометрических соображений $S_{\vartriangle OMB}<S_{сектораOMB}<S_{\vartriangle OBC}$. Вычисляя площади, получаем

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,\ \text{или}\ \sin x<x<\operatorname{tg}x.$$

После деления на $\sin x > 0$ получаем

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Поскольку $\cos x \to 1$ при $x \to 0$, то по ранее доказанной теореме и $\frac{\sin x}{x} \to 1$, ч.т.д.

Следствие 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Следствие 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot \operatorname{ctg} 5x\right)$.

Решение:

При $x \to 0$ $\operatorname{ctg} 5x \to \infty$.

Представим функцию $g(x) = x \cdot \operatorname{ctg} 5x$ в виде дроби, которая в точке $x = 0$ дает неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$; после чего преобразуем ее так, чтобы использовать 1-й замечательный предел.

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot \operatorname{ctg}5x\right)=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{\cos 5x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 5x}\cdot\cos 5x\right)=\left(\text{по формуле 2.2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 5x=\left|\lim_{x\to 0}\cos 5x=\cos 0=1\right|=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 5x}{x}}\cdot 1=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}}=\frac{1}{5}.$$

При вычислении предела было использовано:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\left|t=5x,\ t\to 0\right|=5\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=5\cdot 1=5.$$

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{x}$.

Решение:

Здесь неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Положим $\arcsin 4x=t$, тогда $4x=\sin t$, отсюда $x=\dfrac{\sin t}{4}$ и если $x\to 0$, то $t\to 0$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{4}\sin t}=4\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=4\cdot 1=4.$$

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x$.

Решение:

При $x\to\frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\to 0,\ \mathrm{tgx}\to\infty$.Имеем неопределенность $\left[0\cdot\infty\right]$.

Для раскрытия этой неопределенности введем новую переменную, чтобы воспользоваться первым замечательным пределом.

Пусть $t=\frac{\pi}{2}-x$, $x=\frac{\pi}{2}-t$, тогда при $x\to\frac{\pi}{2}$ $t\to 0$ и $\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\mathrm{ctg}t$.

Получаем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x=\lim_{t\to 0}t\cdot\mathrm{ctg}t=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\cos t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos t=$$

$$=1\cdot 1=1 .$$

Теорема о втором замечательном пределе.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\ \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{1/x}=e.$$

Примеры.

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{2\cdot(x/2)}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e\cdot e=e^{2}.$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}=\frac{1}{e^2}.$$

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{x}$.

Решение:

При $x\to\infty$ $\dfrac{x+2}{x-3}\to 1$ (дробно-рациональная функция, $m=n=1$).

Имеем неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$.

Разделим числитель и знаменатель дроби на x, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^x}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x}=\frac{e^2}{e^{-3}}=e^5.$$

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)^{x^2}$.

Решение:

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{3+\frac{4}{x}}=\frac{2}{3}$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)^{x^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty}=0$.

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$.

Решение:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3}{x+1}=1,\quad \lim\limits_{x\to\infty}(x-1)=\infty$.

Имеем неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$.

Преобразуем эту функцию таким образом, чтобы использовать второй замечательный предел.

Выделим целую часть у дроби $\dfrac{x-3}{x+1}$.

$$\frac{x-3}{x+1}=\frac{(x+1)-4}{x+1}=1+\frac{-4}{x+1}.$$

Сделаем замену переменной, положив $t=\dfrac{-4}{x+1}$, тогда $x=\dfrac{-4}{t}-1$ и учтем, что при $x\to\infty \qquad t\to 0$.

Получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{-4}{t}-2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\left(1+t\right)^{\frac{-4}{t}}\cdot\left(1+t\right)^{-2}\right)=(\text{по формуле}\left(2.2\right))=\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{-4}{t}}\cdot\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{-2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right)^{-4}\cdot 1=\left(\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right)^{-4}=e^{-4}.$$

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2+x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}3x=\infty.$$

Имеем неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$.

$$\frac{x}{2+x}=\frac{\left(x+2\right)-2}{2+x}=1+\frac{-2}{2+x}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}}\right)^{\left(\frac{-2}{2+x}\cdot 3x\right)}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}}=\left|t=\frac{-2}{2+x}\to 0 \text{ при } x\to\infty\right|=\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}=e\ ;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2}{2+x}\cdot 3x\right)=-6\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)=-6\text{, то }\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}=e^{-6}\ .$$

Пример.

Найти $\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{1/x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty\ .$$

Имеем неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$.

Получаем

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=e^{1}=e\ .$$

Здесь было учтено, что

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \left|t = \sin x \to 0\right| = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (1-й замечательный предел).