Лекции 13-14.
Параметрически заданные функции и их дифференцирование. Уравнение касательной к параметризованной кривой

Определение. Пусть заданы функции

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in(\alpha,\beta). \tag{1}$$

Предположим, что функция $x=\varphi(t)$ на интервале (α,β) имеет обратную функцию $t=\varphi^{-1}(x)$. Тогда определена новая функция $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$, называемая *функцией, заданной параметрически соотношениями* (1).

Теорема. Верна формула

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\ \text{, или}\ y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{2}$$

Доказательство. По теоремам о дифференцировании сложной функции и о дифференцировании обратной функции

$$y'=\psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\left(\varphi^{-1}(x)\right)'=\frac{\psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Пример.

1)Найти y'_x, если $x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in\left(0,\pi/2\right)$.

2)Найти y'_x, если $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ t\in\left(0,\pi/2\right)$.

Уравнения (1) задают на плоскости *xy* кривую *L*. Предположим, что эта кривая имеет касательную в точке $M_0\left(x_0,y_0\right),\ x_0=\varphi\left(t_0\right),\ y_0=\psi\left(t_0\right)$. Пусть $M_1\left(x_1,y_1\right)$, $x_0=\varphi\left(t_1\right),\ y_0=\psi\left(t_1\right)$ – другая точка кривой L . Запишем уравнения секущей, проходящей через точки $M\left(x_0,y_0\right)$и $M\left(x_1,y_1\right)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0},\ \frac{x-\varphi\left(t_0\right)}{\varphi\left(t_1\right)-\varphi\left(t_0\right)}=\frac{y-\psi\left(t_0\right)}{\psi\left(t_1\right)-\psi\left(t_0\right)}.$$

Поделим знаменатели на$\left(t_1-t_0\right)$:

$$\frac{x-\varphi\left(t_0\right)}{\left(\varphi\left(t_1\right)-\varphi\left(t_0\right)\right)/\left(t_1-t_0\right)}=\frac{y-\psi\left(t_0\right)}{\left(\psi\left(t_1\right)-\psi\left(t_0\right)\right)/\left(t_1-t_0\right)}.$$

Переходя к пределу при $t_1 \to t_0$, получим уравнение касательной к кривой в точке $M\left(x_0, y_0\right)$ при условии, что $\varphi'\left(t_0\right) \neq 0$, $\psi'\left(t_0\right) \neq 0$ одновременно:

$$\frac{x-\varphi\left(t_0\right)}{\varphi'\left(t_0\right)} = \frac{y-\psi\left(t_0\right)}{\psi'\left(t_0\right)}. \tag{3}$$

Дифференцирование функций, заданных неявно

Определение. Говорят, что функция $y = f(x), x \in (a,b)$, неявно задана уравнением $F(x, y) = 0$, если $F(x, f(x)) = 0$ для всех $x \in (a,b)$.

Для вычисления производной неявной функции, заданной уравнением $F(x, y) = 0$, следует продифференцировать это уравнение по x (рассматривая левую часть как сложную функцию x), а затем полученное уравнение разрешить относительно y'_x.

Пример. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ неявно определяет на интервале (-1; 1) две функции $y_1 = \sqrt{1 - x^2}, y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$. Найти их производные, не используя явных выражений.

◀ Пусть $y = y(x)$ любая из этих функций. Тогда, дифференцируя по x тождество $x^2 + y^2(x) = 1$, получим: $2x + 2y \cdot y' = 0$. Отсюда $y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)}$, т.е.

$y_1'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y_2'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. ▶

Определение дифференцируемой (в точке) функции. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции. Дифференциал первого порядка

Предположим, что функция $y = f\left(x\right)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. Функция $y = f\left(x\right)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\left(\Delta x\right)\Delta x, \qquad (1)$$

где $A = A\left(x_0\right)$, $\alpha\left(x_0, \Delta x\right) \to 0, \Delta x \to 0.$ Величина $A\Delta x$ называется дифференциалом функции в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, и обозначается символом dy.

Теорема. *Для того чтобы функция* $y = f\left(x\right)$ *была дифференцируемой в точке* x_0, *необходимо и достаточно, чтобы существовала производная* $f'\left(x_0\right)$, *при этом справедливо равенство* $A = f'\left(x_0\right)$.

Доказательство:

◄ **Необходимость.** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Докажем, что в этой точке существует производная $f'(x)$. Действительно, из дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x следует, что приращение функции Δy, отвечающее приращению Δx аргумента, можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где величина A для данной точки x постоянна (не зависит от Δx), а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. По теореме о связи функции, имеющей предел, с ее пределом и бесконечно малой функцией, отсюда следует, что

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Существование производной доказано. Одновременно мы установили, что $A = f'(x)$.

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ в точке x имеет конечную производную $f'(x)$. Докажем, что $f(x)$ в этой точке дифференцируема. Действительно, существование производной $f'(x)$ означает, что при $\Delta x \to 0$ существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Отсюда, в силу теоремы о связи функции, имеющей предел, с ее пределом и бесконечно малой функцией, вытекает, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, и, значит,

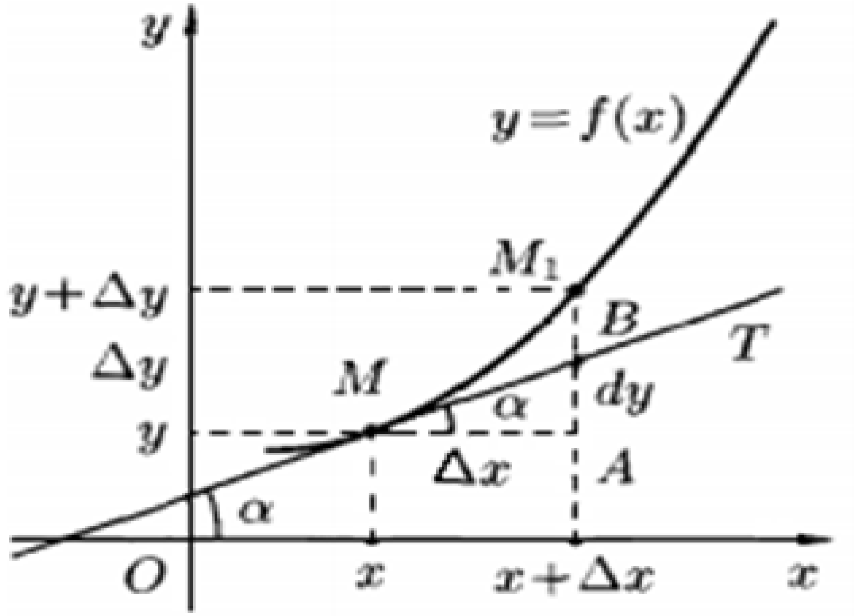
$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \qquad (2)$$

Так как в правой части формулы (2) величина $f'(x)$ не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то равенство (2) доказывает, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. ►

Это утверждение позволяет называть дифференцируемой всякую функцию, имеющую производную.

Заметим, что $dx = \Delta x$. Получаем формулу для вычисления дифференциала

$$dy = f'(x_0)\,dx.$$



Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал $dy(x, \Delta x)$ равен приращению ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ при приращении аргумента, равном Δx.

Теорема (Основные свойства дифференциала). *Пусть* $u(x)$ *и* $v(x)$ – *дифференцируемые функции в точке* x_0. *Тогда*

1) $d(u+v)=du+dv$*;*

2) $d(u-v)=du-dv$*;*

3) $d(uv)=vdu+udv$.

4) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}, v\neq 0.$

Если $C=\mathrm{const}$, *то* $dC=0$ *и* $d(Cu)=Cdu$.

Из формулы $\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$ следует, что если $f'(x_0)\neq 0$, то при $\Delta x\to 0$ приращение функции Δy и ее дифференциал dy в фиксированной точке x_0 являются эквивалентными бесконечно малыми, что позволяет записать приближенное равенство:

$$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x \text{ при малых } \Delta x.$$

Для вычисления приближенного значения функции в точке $x_0+\Delta x$ применяется формула

$$f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Пример. Вычислить полное приращение Δy и дифференциал dy функции $y=3x-x^2$ при $x_0=1$ и $\Delta x=0{,}005$.

Инвариантность формы первого дифференциала. Рассмотрим сложную функцию $F\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)$, где $f\left(y\right)$ и $g\left(x\right)$ – дифференцируемые функции. Тогда $dF=F'\left(x\right)dx$. По теореме о производной сложной функции

$$F'\left(x\right)=f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right),\ dF=f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)dx=f'\left(y\right)dy.$$

Дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал аргумента, независимо от того, является этот аргумент независимой переменной или же функцией.

Производные высших порядков. Механический смысл второй производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную $f'(x)$ в этой окрестности.

Определение. Второй производной $f''(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется первая производная от функции $f'(x)$ в точке x_0.

Таким образом, $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$, или на языке пределов

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x},$$

если предел справа существует и конечен.

Механический смысл второй производной. Предположим, что материальная точка M движется вдоль оси x, $s(t)$ – координата точки M в момент времени t. Тогда скорость есть производная от пройденного пути по времени: $v = s'(t)$. Ускорение $a = v'(t) = s''(t)$ есть вторая производная от пройденного пути по времени.

Пусть функция $y = f\left(x\right)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производные до порядка $(n$-1$)$ в этой окрестности.

Определение. Производной $f^{(n)}\left(x_0\right)$ порядка n функции $y = f\left(x\right)$ в точке x_0 называется первая производная от функции $f^{(n-1)}\left(x\right)$ в точке x_0.

Таким образом, $f^{(n)}\left(x\right)=\left(f^{(n-1)}\left(x\right)\right)'$, или на языке пределов

$$f^{(n)}\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}\left(x_0+\Delta x\right)-f^{(n-1)}\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Верны формулы

$$\left(u\pm v\right)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)},$$

$$\left(Cu\right)^{(n)}=Cu^{(n)}, C=\mathrm{const}.$$

Примеры.

1) $y=e^x,\ y^{(n)}\left(x\right)=e^x, n\in\mathbb{N}.$

Дифференциалы высших порядков. Первый дифференциал $dy = f'(x)dx$ является функцией как x, так и dx. Зафиксируем dx, рассмотрим dy как функцию x и найдем первый дифференциал от dy:

$$d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = dx \cdot d\left(f'(x)\right) = dx \cdot f''(x)dx = f''(x)(dx)^2.$$

Таким образом, второй дифференциал функции $y = f(x)$ вычисляется по формуле

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогично, дифференциал порядка *n* функции $y = f(x)$ вычисляется по формуле

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Для производной *n*–го порядка верна формула

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$