АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Простейшие СМО с «нетерпеливыми» заявками

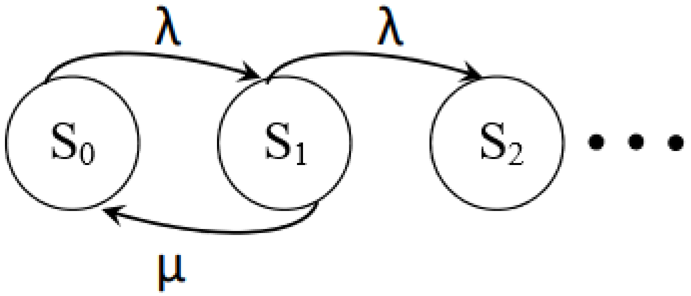
СМО с «нетерпеливыми» заявками M/M/1

Рассмотрим одноканальную СМО с однородным потоком заявок и неограниченной очередью, в которую поступает простейший поток с интенсивностью λ. Длительность обслуживания заявок распределена по показательному закону со средним значением b. Дисциплины ожидания и обслуживания - бесприоритетные. В СМО присутствуют заявки с ограниченным временем ожидания начала обслуживания или с ограниченным временем пребывания заявок в системе. В первом случае заявки могут выйти из очереди, не дождавшись начала обслуживания. Во втором - заявки могут выйти как из очереди, так и из канала, не дождавшись окончания обслуживания. Предельное время ожидания (пребывания) в общем случае является случайной величиной.

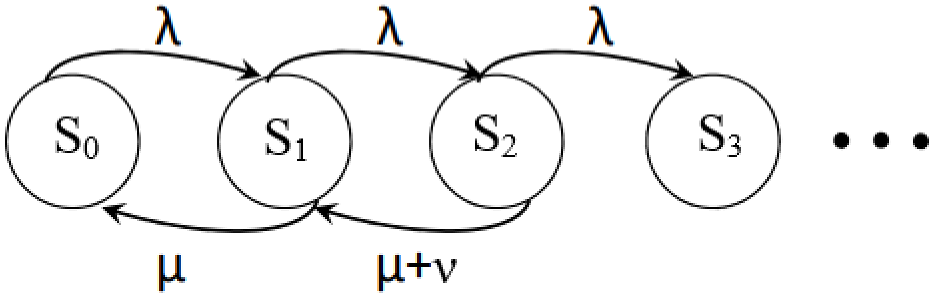
Предположим, что время пребывания заявки в очереди ограничено некоторым случайным сроком T, распределенным по показательному закону с параметром ν (на каждую заявку, стоящую в очереди, действует «поток уходов» с интенсивностью ν).

S_i: i заявок в системе

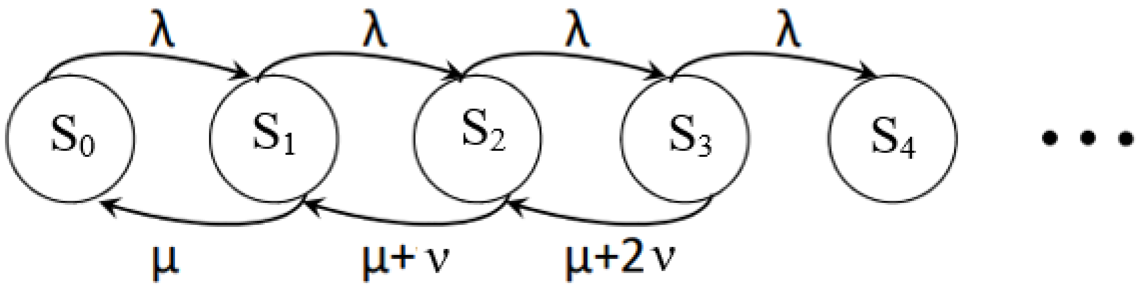
1.



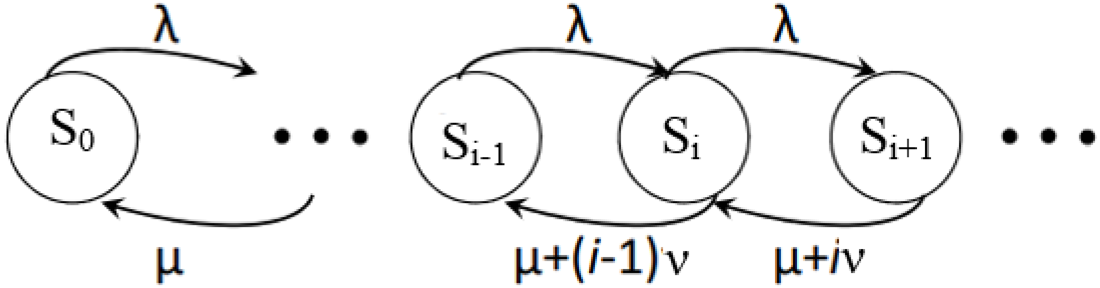
2.



3.



4.



Система уравнений Колмогорова:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$
$$P_i'(t) = \lambda P_{i-1}(t) - [\lambda + \mu + (i-1)\nu]P_i(t) + (\mu + i\nu)P_{i+1}(t),$$

$$i \geq 1.$$

В стационарном режиме:

$$0 = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$
$$0 = \lambda P_{i-1}(t) - [\lambda + \mu + (i-1)\nu] P_i(t) + (\mu + i\nu) P_{i+1}(t)$$

Решение для финальных вероятностей:

$$P_i = \left[\prod_{j=0}^{i-1} (\mu + j\nu)\right]^{-1} \cdot \lambda^i \cdot P_0, \qquad i \geq 1$$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\prod_{j=0}^{i-1} (\mu + j\nu)}\right]^{-1}$$

Стационарный режим существует при любых значениях параметров λ,μ,ν.

Характеристики СМО

Среднее число *m* заявок в системе и средняя длина *l* очереди определяются формулами:

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} iP_i = P_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\lambda^i}{\prod_{j=0}^{i-1}(\mu + j\cdot\nu)};$$

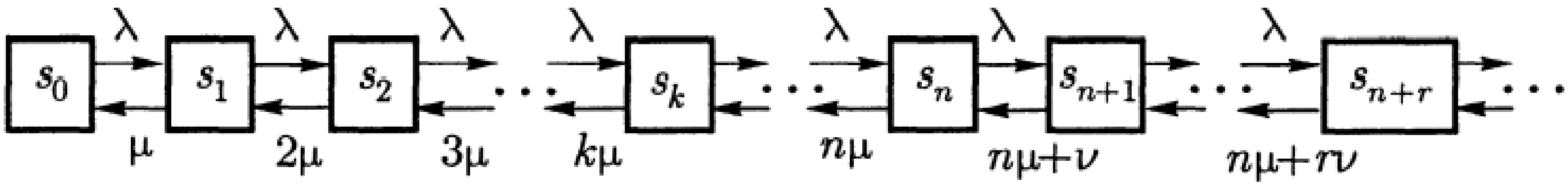
$$l = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)P_i = P_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i-1)\lambda^i}{\prod_{j=0}^{i-1}(\mu + j\cdot\nu)}$$

Каждая заявка «испытывает желание» уйти с интенсивностью ν. Поэтому интенсивность выходящего потока покинувших очередь заявок равна $l\nu$. Поскольку в очередь принимаются все без исключения заявки, абсолютная пропускная способность системы $\lambda' = \lambda - l\nu$. Относительная пропускная способность $\pi_0 = 1 - l\nu/\lambda$.

СМО с «нетерпеливыми» заявками M/M/n

Рассмотрим n-канальную СМО с однородным потоком заявок и неограниченной очередью, в которую поступает простейший поток с интенсивностью λ. Длительность обслуживания заявок распределена по показательному закону со средним значением b. Дисциплины ожидания и обслуживания - бесприоритетные.

Предположим, что время пребывания заявки в очереди ограничено некоторым случайным сроком T, распределенным по показательному закону с параметром ν (на каждую заявку, стоящую в очереди, действует «поток уходов» с интенсивностью ν).



Финальные вероятности (существуют всегда, если только β=ν/μ>0):

$$p_0 = \left\{1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^n}{n!} + \frac{y^n}{n!}\left[\frac{y}{n+\beta} + \frac{y^2}{(n+\beta)(n+2\beta)} + \ldots + \frac{y^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+r\beta)} + \ldots\right]\right\}^{-1};$$

$$p_1 = \frac{y}{1!}p_0; \ldots; \quad p_k = \frac{y^k}{k!}p_0 \ (1 \le k \le n); \ldots; \quad p_n = \frac{y^n}{n!}p_0; \quad p_{n+1} = \frac{y^n}{n!}\cdot\frac{y}{n+\beta}p_0; \ldots;$$

$$p_{n+r} = \frac{y^n}{n!}\cdot\frac{y^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+r\beta)}\cdot p_0 (r \ge 1); \ldots .$$

В формулу для p_0 входит бесконечная сумма, не являющаяся геометрической прогрессией, но члены которой убывают быстрее, чем члены геометрической прогрессии. Можно доказать, что ошибка, возникающая от отбрасывания всех членов бесконечной суммы, начиная с r-го, меньше, чем $\frac{y^n}{n!}\frac{(y/\beta)^r}{r!}e^{-y/\beta}$.

Характеристики СМО

Абсолютная пропускная способность системы: $\lambda' = \lambda - lv = k\mu$

Относительная пропускная способность: $\pi_0 = 1 - lv/\lambda$

Вероятность потери заявок: $\pi_n = 1 - \pi_0$

Среднее число занятых каналов: $k = p_1 + 2p_2 + \ldots + (n-1)p_{n-1} \ldots + n[1-(p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1})]$

Средняя длина очереди: $l = (\lambda - k\mu)/v$ $(\lambda - lv = k\mu)$

Среднее число заявок в системе: $m = l + k$

Загрузка: $\rho = k/n$

Коэффициент простоя системы: $\eta = 1 - \rho$

Среднее время ожидания заявок в очереди w и среднее время пребывания заявок u в системе вычисляются по формулам Литтла.

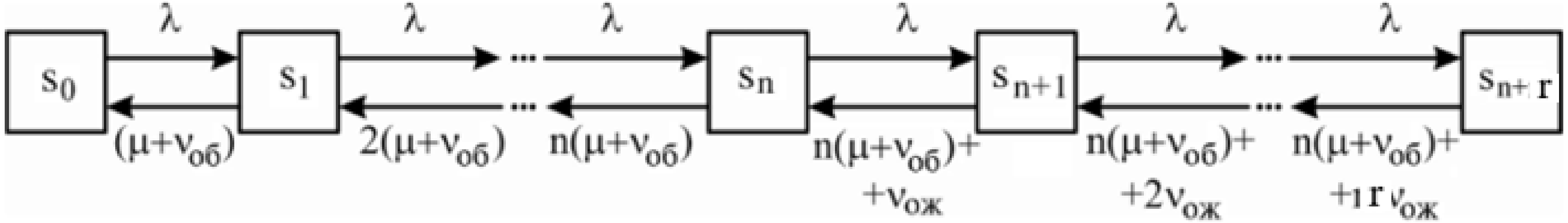
Замечание 1.

Для СМО с ограниченной очередью решение проводится аналогично.

Замечание 2.

В случае. если заявки могут выйти как из очереди, так и из канала, не дождавшись окончания обслуживания, необходимо рассматривать два потока ухода заявок с интенсивностями $\nu_{об.}$ и $\nu_{ож.}$

Размеченный граф для *n*-канальной СМО с *r* местами в очереди имеет вид:



Пример. Рассматривается простейшая двухканальная СМО с «нетерпеливыми» заявками.

Интенсивность потока заявок $\lambda = 3$ заявки/ч; среднее время обслуживания одной заявки

$b = 1/\mu = 1$ ч; средний срок, в течение которого заявка «терпеливо» стоит в очереди, равен 0,5 ч.

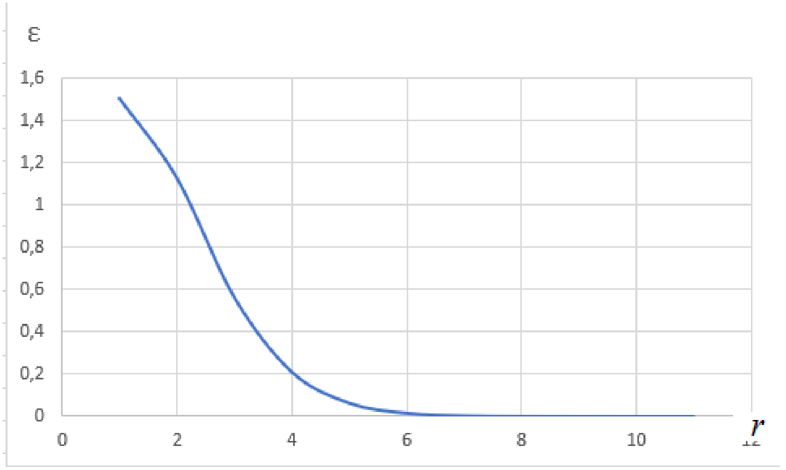
Подсчитать финальные вероятности состояний, ограничиваясь теми, которые не меньше 0,001.

Найти характеристики эффективности СМО.

Решение.

λ=3, μ=1, n=2, y=3, v=2, β=2

1. Финальные вероятности.



$$p_0 = \left\{1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^2}{2}\left[\frac{3}{4} + \frac{3^2}{4\cdot 6} + \frac{3^3}{4\cdot 6\cdot 8} + \frac{3^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3^5}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \frac{3^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \frac{3^7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16}\right]\right\}^{-1} \approx 0{,}0692;$$

$$p_1 = 3p_0 \approx 0{,}208; \quad p_2 = \frac{3}{2}p_1 \approx 0{,}311; \quad p_3 = \frac{3}{4}p_2 \approx 0{,}234;$$

$$p_4 = \frac{3}{6}p_3 \approx 0{,}117; \quad p_5 = \frac{3}{8}p_4 \approx 0{,}044; \quad p_6 = \frac{3}{10}p_5 \approx 0{,}013;$$

$$p_7 = \frac{3}{12}p_6 \approx 0{,}003; \quad p_8 = \frac{3}{18}p_7 \approx 0{,}001.$$

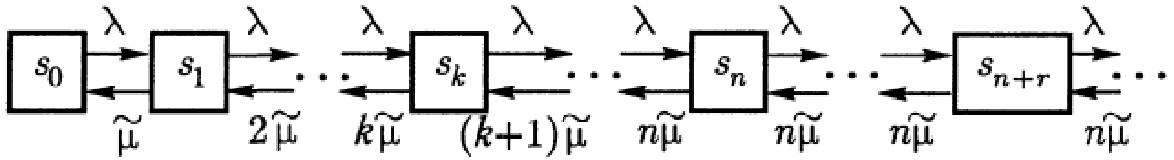
2. Характеристики эффективности СМО.

Простейшая СМО с «ошибками»

Рассмотрим *n*-канальную СМО с неограниченной очередью. На ее вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; время обслуживания - показательное с параметром μ. Обслуживание происходит без гарантии качества; с вероятностью *p* оно удовлетворяет заявку, а с вероятностью *q=1-p* не удовлетворяет и заявка обращается в СМО вторично и либо сразу обслуживается, если нет очереди, либо становится в очередь, если она есть. Состояния СМО нумеруются по числу заявок в СМО.
Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО.

$$\left.\begin{array}{l} s_0 \text{ — СМО свободна;} \\ s_1 \text{ — занят один канал;}\ldots; \\ s_k \text{ — занято } k \text{ каналов } (1 \le k \le n);\ldots; \\ s_n \text{ — заняты все } n \text{ каналов} \end{array}\right\} \text{очереди нет;}$$

s_{n+r} — заняты все n каналов, а r заявок стоят в очереди ($r = 1, 2, \ldots$).



Данная СМО эквивалентна СМО с полной гарантией качества обслуживания (см. лекцию 7), но с интенсивностью потока обслуживаний, равной $\tilde{\mu} = p\mu$.

Простейшие замкнутые СМО

СМО, в которых интенсивность потока поступающих заявок зависит от состояния системы. Такие СМО называют *замкнутыми* или системами Энгсета по имени Т. Энгсета, который впервые дал их полный анализ.

Простейшая одноканальная замкнутая СМО

Одноканальная СМО содержит конечное число N источников заявок, каждый из которых порождает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявка, пришедшая от источника в момент, когда канал занят, становится в очередь и ждет обслуживания. При этом источник может подать следующую заявку только в том случае, если поданная им предыдущая заявка уже обслужена. Среднее время обслуживания каналом одной заявки (безразлично из каких источников) равно 1/ μ, где μ — интенсивность простейшего потока обслуживании. Каждый из источников может находиться в одном из двух состояний: активном или пассивном $N_{акт} + N_{пас} = N$. Активное состояние источника — это такое состояние, при котором уже обслужена поданная им последняя заявка. Пассивное состояние характеризуется тем, что поданная источником последняя заявка еще не обслужена, т.е. либо стоит в очереди, либо находится под обслуживанием. В активном состоянии источник может подавать заявки, а в пассивном — нет. Следовательно, интенсивность общего потока заявок зависит от того, сколько источников находится в пассивном состоянии, т.е. сколько заявок связано с процессом обслуживания (стоит в очереди или непосредственно обслуживается).

Характерным для замкнутой СМО является зависимость потока заявок от состояний самой СМО. Эта зависимость проявляется существенно при конечном небольшом числе источников заявок. Но если число источников достаточно велико, то практически можно считать, что интенсивность потока заявок не зависит от состояний СМО.

Состояния СМО (по числу источников, находящихся в пассивном состоянии, т.е. по числу заявок, находящихся в очереди и под обслуживанием):

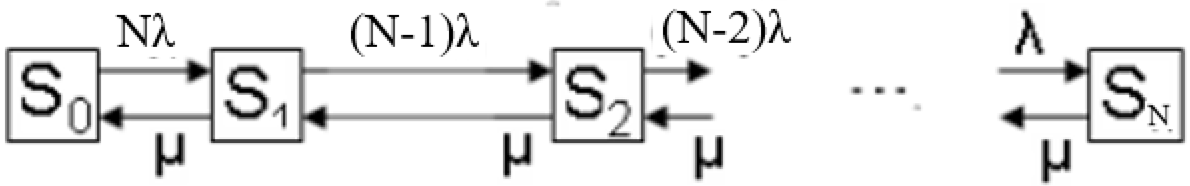
s_0 - все n источников находятся в активном состоянии, канал свободен, очереди нет;

s_1 - один источник находится в пассивном состоянии, канал обслуживает поданную этим источником заявку, очереди нет;

s_2 - два источника находятся в пассивном состоянии, заявка, поданная одним из них, обслуживается, а заявка, поданная другим источником, стоит в очереди;

…..

s_N - все N источников находятся в пассивном состоянии, заявка, поданная одним из них, обслуживается, а n -1 заявок, поданных остальными источниками, стоят в очереди.



Финальные вероятности:

$$\alpha_0 = 1 \text{ и } \alpha_k = \frac{k!}{(n-k)!} \cdot y^k, \text{ для } k = 1, 2 \ldots \mathrm{N};$$

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} y^k\right)^{-1}, P_k = \alpha_k \cdot P_0.$$

Абсолютная пропускная способность СМО $\lambda' = A = \mu P_{\text{зан.}}$, где $P_{\text{зан.}} = 1 - P_0$ - вероятность того, что система занята обслуживанием заявки.

Поскольку $N_{\text{акт}} + N_{\text{пас}} = N$, то и для средних значений числа активных и пассивных источников $\bar{N}_{акт} + \bar{N}_{пас} = N$

Средняя интенсивность входящего потока

$$\bar{\Lambda} = A = (1 - P_0) \cdot \mu = (N - \bar{N}_{пас}) \cdot \lambda \implies \qquad \bar{N}_{пас} = N - \frac{1 - P_0}{y}.$$

$\bar{N}_{пас}$ - среднее число заявок в системе m.

Тогда $$l = m - k = N - \frac{1 - P_0}{y} - (1 - P_0) = N - (1 - P_0) \cdot \left(\frac{1}{y} + 1\right).$$

Вероятность того, что заявка активна, т. е. доля активных заявок $P_{\text{акт.}} = 1 - \frac{m}{N}$;

Пример. Рабочий обслуживает четыре станка ($N = 4$); каждый станок отказывает с интенсивностью λ=0,5отказа/ч; среднее время ремонта b=1/ μ = 0,8 ч. Все потоки событий — простейшие.
Найти: 1) финальные вероятности состояний; 2) пропускную способность A; 3) среднее относительное время простоя рабочего $P_{пр}$; 4) среднее число l станков в очереди 5) среднее число неисправных станков w; 6) среднюю производительность группы станков с учетом их неполной надежности, если в работающем состоянии один станок дает ζ единиц продукции.

Решение.
μ= 1/b= 1,25ч.$^{-1}$; y= λ/μ = 0,4.

1). $p_0 = \{1 + 1{,}6 + 1{,}92 + 1{,}53 + 0{,}61\}^{-1} = 6{,}66^{-1} \approx 0{,}150;$

$$p_1 = 1{,}6 p_0 \approx 0{,}240; \quad p_2 = 1{,}92 p_0 \approx 0{,}288;$$

$$p_3 = 1{,}53 p_0 \approx 0{,}230; \; p_4 = 0{,}061 p_0 \approx 0{,}092;$$

2). A=0,850μ≈1,06 станка/ч;

3). $P_{пр} = p_0 = 0{,}150$;

4). $l \approx 4 - 0{,}850(1+2{,}5) \approx 1{,}03$;

5). $m \approx 1{,}03 + k \approx 1{,}03 + 0{,}85 = 1{,}88$;

6). производительность группы станков равна $(N - m)\zeta \approx 2{,}12\zeta$.

Простейшая многоканальная замкнутая СМО

Пример. Двое рабочих ($N = 2$) обслуживают шесть станков ($n= 6$). Станок требует наладки в среднем через каждые полчаса. Наладка занимает у рабочего в среднем 10 мин. Все потоки событий - простейшие.

1) Определить характеристики СМО: среднее число занятых рабочих k; абсолютную пропускную способность A; среднее число неисправных станков m;

2) Установить, улучшатся ли характеристики СМО, если рабочие будут налаживать станки совместно, тратя вдвоем на наладку одного станка в среднем 5 мин.

Решение.

1). Рабочие налаживают станки порознь; $n =6$; $N = 2$; $\lambda = 2$; $\mu = 6$; $y= \lambda/\mu = 1/3$.

Состояния СМО:

s_0 - все станки исправны, рабочие не заняты;

s_1 - один станок неисправен, один рабочий занят, второй свободен свободны;

s_2 - 2 станка неисправны, оба рабочих заняты;

s_3 - 2 станка неисправны, из них 2 налаживаются, один стоит в очереди;;

………

s_6 - 2 станка неисправны и налаживаются, 4 станка ждут очереди.

$$p_0 = \left\{1 + \frac{6}{1}\frac{1}{3} + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}\frac{1}{3^2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 2}\frac{1}{3^3} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2^2}\frac{1}{3^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 2^3}\frac{1}{3^5} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 2^4}\frac{1}{3^6}\right\}^{-1} \approx 0{,}153;$$

$$p_1 = 6 / 1 \cdot 1 / 3 \cdot p_0 \approx 0{,}306.$$

……………………………………………………………………………..

Среднее число занятых рабочих: $k = 1 \cdot p_1 + 2\,(1 - p_0 - p_1) \approx 1{,}235.$

Абсолютная пропускная способность СМО: $A = \mu k \approx 7{,}41$

Среднее число неисправных станков: $m = 6 - 7{,}41/2 \approx 2{,}30$

2). Рабочие налаживают станки вместе; n =6; N = 1; λ = 2; μ = 12; y= λ/μ = 1/6.

$$p_0 = \left\{1 + 1 + + \frac{6 \cdot 5}{6^2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6^6} \right\}^{-1} \approx 0{,}264; \quad p_1 \approx 0{,}264; \quad p_2 \approx 0{,}220; \quad p_3 \approx 0{,}147;$$

$$p_4 \approx 0{,}076; \quad p_5 \approx 0{,}024; \quad p_6 \approx 0{,}004;$$

……………………………………………………………………………..

Среднее число неисправных станков: $m = 6 - \dfrac{0{,}736}{1/6} \approx 1{,}59.$

Среднее число занятых рабочих: $k = 1 - p_0 = 0{,}736.$

Учитывая, что «канал» обслуживания состоит в данном случае из двух рабочих, среднее число занятых рабочих будет $\overline{k'} = 2 \cdot 0{,}736 \approx 1{,}47;$

Абсолютная пропускная способность СМО: $A = \mu k \approx 12 * 0{,}736 = 8{,}8$

Вывод: взаимопомощь между рабочими (каналами обслуживания) в данном случае повысила среднюю занятость с 1,23 до 1,47, снизила среднее число неисправных станков с 2,30 до 1,59 и повысила пропускную способность с 7,4 до 8,8.