Лекция 10. Числовые ряды

Определение. Пусть задана бесконечная последовательность действительных или комплексных чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

называется *числовым рядом*. При этом числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ называются *членами ряда*.

Определение. Сумма $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ первых n членов ряда называется его n – *й частичной суммой.*

Рассмотрим частичные суммы:

$S_1 = u_1$,

$S_2 = u_1 + u_2$,

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$,

…………………...

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n$.

Определение. Если существует конечный предел $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то *ряд* (1) *называется сходящимся*, а число S – *суммой ряда* (1). Записывают $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен, то *ряд* (1) *называется расходящимся.*

<u>Пример.</u> Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится и найти его сумму.

◂ Так как дробь $\frac{1}{n(n+1)}$ представима в виде $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, т.е. заданный ряд сходится и его сумма равна 1. ▸

Исследование ряда из членов геометрической прогрессии

Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad a \neq 0 \tag{2}$$

и в случае сходимости найдем его сумму.

◄ Имеем $S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$. Используя формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии, получаем

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ при различных значениях q.

1) Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{1-q} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$, ряд (2) сходится, а его сумма равна $\frac{a}{1-q}$.

2) Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \infty$, т.е. ряд (2) расходится.

3) Если $q = 1$, $S_n = an$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, и, следовательно ряд расходится.

4) Если $q = -1$, ряд (2) принимает вид $a - a + a - a + \ldots$ Его n-я частичная сумма равна

$$S_n = \begin{cases} a, & \text{при } n = 2k-1, \\ 0, & \text{при } n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathrm{N}.$$

Поскольку две подпоследовательности $\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют различные пределы: $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k-1} = a$ и $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = 0$, то предел последовательности S_n частичных сумм рассматриваемого ряда при $n \to \infty$ не существует и ряд расходится.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$ и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$ и расходится при $|q| \geq 1$. ▸

Необходимое условие сходимости

Теорема (необходимое условие сходимости). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то существует конечный предел S последовательности $\{S_n\}$, где S_n – n-я частичная сумма ряда. Тогда $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ (при $n \to \infty$ и $(n-1) \to \infty$).

Тогда $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. ■

Следствие (достаточное условие расходимости). *Если* $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится*.

Доказательство. Действительно, если бы ряд сходился, то (по теореме) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Но это противоречит условию. Значит, ряд расходится. ■

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{3n+1}$.

◀ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{3n+1}$ расходится, т.к. $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n+1}=\frac{5}{3}\neq 0$, т.е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда. ▶

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{n+9}\right)^n$.

◀ $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+9}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\frac{n+5}{n+9}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{4}{n+9}\right)}$. Так как $\ln(1+t)\sim t$ при $t\to 0$, то $\ln\left(1-\frac{4}{n+9}\right)\sim-\frac{4}{n+9}$ при $n\to\infty$, и $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{4}{n+9}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{4n}{n+9}}=e^{-4}\neq 0$. Следовательно, ряд расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда. ▶

Замечание: Условие $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ является необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда: из условия $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ не следует, что ряд сходится. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

В качестве примера рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Однако этот ряд расходится.

◀ Действительно, $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, т.е. $S_n > \sqrt{n}$, откуда следует, что $S_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, и, значит, ряд расходится. ▶

Свойства сходящихся рядов

Определение. Ряд

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = R_k, \tag{3}$$

полученный из ряда (1) путём отбрасывания его первых k членов, называется *остатком ряда* (1) после k-го члена.

Свойство 1. *Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой его остаток.*

Другими словами, на сходимость ряда не влияет отбрасывание любого числа его первых членов.

Доказательство. а) Пусть ряд (1) сходится и имеет сумму S, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Обозначим через S_k сумму отброшенных членов ряда (1), а через σ_{n-k} сумму первых n – k первых членов ряда (3), где k – фиксировано. Тогда $S_n = S_k + \sigma_{n-k}$, где S_k – некоторое число, не зависящее от n. Отсюда $\sigma_{n-k} = S_n - S_k$ и

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{n-k} = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_k) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_k = S - S_k,$$

т.е. последовательность частичных сумм $\{\sigma_{n-k}\}$ ряда (3) имеет предел, что означает сходимость ряда (3).

б) Пусть теперь ряд (3) сходится и имеет сумму σ, т.е. $\lim_{n\to\infty}\sigma_{n-k} = \sigma$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_k + \sigma_{n-k}) = \lim_{n\to\infty} S_k + \lim_{n\to\infty}\sigma_{n-k} = S_k + \sigma,$$

что и означает сходимость ряда (1). ■

Свойство 2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$, где C – любое число, также сходится и его сумма равна CS.

Доказательство. Пусть S_n – частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а σ_n – частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$. Тогда $\sigma_n = Cu_1 + Cu_2 + \ldots + Cu_n = C(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = CS_n$. Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} CS_n = C \lim_{n\to\infty} S_n = CS.$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = CS$. ■

Свойство 3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и их суммы, соответственно, равны S_1 и S_2, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ также сходится и его сумма, соответственно, равна $S_1 + S_2$.

Доказательство. Пусть U_n и V_n – частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, а σ_n – частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$. Тогда $\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = U_n + V_n$.

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}(U_n + V_n) = \lim_{n\to\infty}U_n + \lim_{n\to\infty}V_n = S_1 + S_2.$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = S_1 + S_2$. ■

Критерий Коши сходимости ряда

Теорема (критерий Коши сходимости ряда). *Для того, чтобы ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* $N=N(\varepsilon)$*, что при любом* $n \geq N$ *выполнялось неравенство*

$$|R_k| < \varepsilon.$$