Лекция 2

Первое и второе достаточные условия экстремума

Будем предполагать, что функция $y = f(x)$ непрерывна в окрестности U точки x_0 и дифференцируема в этой окрестности, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального минимума (максимума)* функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, для каждой точки $x \neq x_0$ которой выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$).

Определение. Внутренние точки области определения функции $y = f(x)$, в которых $f'(x_0) = 0$, называются *стационарными точками* этой функции.

Определение. Внутренние точки области определения функции $y = f(x)$, в которых $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, называются *критическими точками* этой функции.

Необходимое условие экстремума. *Если* x_0 *– точка (локального) экстремума функции* $y = f(x)$, *то* $f'(x_0) = 0$ *или* $f'(x_0)$ *не существует.*

Теорема (первое достаточное условие экстремума). *Если* $f'(x) > 0$ *при* $x < x_0$ *и* $f'(x) < 0$ *при* $x > x_0$, *то* x_0 *является точкой локального максимума. Если* $f'(x) < 0$ *при* $x < x_0$ *и* $f'(x) > 0$ *при* $x > x_0$, *то* x_0 *является точкой локального минимума.*

◄Доказательство. Проверим первое утверждение. По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где точка *c* расположена между x_0 и x. Если $x > x_0$, то $c > x_0$ и $f'(c) < 0$. Следовательно, $f(x) - f(x_0) < 0$. Если $x < x_0$, то $c < x_0$ и $f'(c) > 0$. Следовательно, снова $f(x) - f(x_0) < 0$. Таким образом, в точке x_0 достигается локальный максимум. Второе утверждение проверяется аналогично.►

Пример применения теоремы.

$y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$, или $y=(x+1)^{2/3}+(x-1)^{2/3}$.

Найдем первую производную функции и приравняем ее к нулю:

$$y'=\frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}+\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3}=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right]=\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x+1}}.$$

$y'=0$, следовательно, $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=0\Rightarrow x=0$. Кроме того, производная не существует в точках ±1. Расставив знаки первой производной на промежутках $(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$, находим, что функция убывает на интервале $(-\infty,-1)$, возрастает на интервале $(-1,0)$, убывает на интервале $(0,1)$, возрастает на интервале $(1,+\infty)$. Точки $x=\pm1$ являются точками локального минимума, точка $x=0$ является точкой локального максимума.

Теорема (второе достаточное условие экстремума). *Если* $f'(x_0)=0$ *и* $f''(x_0)>0$*, то* x_0 *является точкой локального минимума. Если* $f'(x_0)=0$ *и* $f''(x_0)<0$*, то* x_0 *является точкой локального максимума.*

◄Доказательство. Существование второй производной функции в точке x_0 означает существование первой производной функции в некоторой окрестности точки x_0 и тем более непрерывность функции в этой окрестности. По определению

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

Если $f''(x_0)>0$, то найдется такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что $\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0\ \forall x\in U(x_0)$. Поскольку $f'(x_0)=0$, то $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0\ \forall x\in U(x_0)$. Если $x>x_0$, то имеем $f'(x)>0$. Если $x<x_0$, то имеем $f'(x)<0$. По первому достаточному условию экстремума в точке x_0 достигается локальный минимум. Второе утверждение теоремы проверяется аналогично.►

Пример применения теоремы.

$y = x^3 - x + 1$, $y' = 3x^2 - 1$, $y'' = 6x$. Найдем стационарные точки из условия $y' = 0$, или $3x^2 - 1 = 0$. Получаем $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Вычисляем $y''(x_1) = 6\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0$, $y''(x_2) = 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$. Следовательно, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ – точка локального максимума, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ – точка локального минимума.

Замечание. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$, то в точке x_0 может достигаться локальный экстремум, а может и не достигаться.

Пример. $y = x^4$, $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $x_0 = 0$ – точка локального минимума.

Пример. $y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y'(0) = 0$ $y''(0) = 0$, $x_0 = 0$ не является точкой локального экстремума.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. По второй теореме Вейерштрасса на отрезке $[a,b]$ найдутся точки, в которых функция принимает свое наибольшее значение и свое наименьшее значение: $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(c_1)$, $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(c_2)$. Точка c_1 может совпадать с концом отрезка, либо лежать на интервале (a,b). В последнем случае c_1 является точкой локального максимума и, следовательно, критической точкой. Аналогично, точка c_2 может совпадать с концом отрезка, либо лежать на интервале (a,b). В последнем случае c_2 является точкой локального минимума и, следовательно, критической точкой.

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет конечное число критических точек на интервале (a,b). Это означает, что функция не дифференцируема лишь в конечном числе точек и число стационарных точек также конечно. Тогда можно сформулировать следующее ***правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:***

1) найти производную функции $f'(x)$;

2) найти критические точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функции $f(x)$, лежащие на интервале (a,b);

3) найти значения $f(x_1),\ f(x_2),\ldots,f(x_n)$ и значения $f(a),\ f(b)$;

4) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее:

$$M = \max\{f(x_1),\ f(x_2),\ldots,f(x_n), f(a), f(b)\},$$

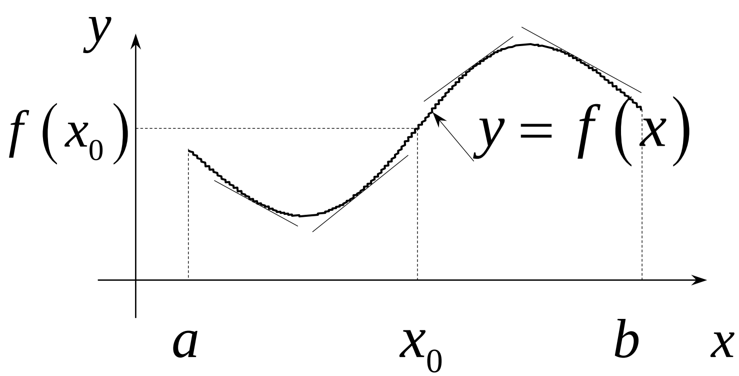
$$m = \min\{f(x_1),\ f(x_2),\ldots,f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

Пример. $y = x^3 - x + 1$. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[0,2]$.

◄Находим производную $y' = 3x^2 - 1$ и приравниваем ее к нулю: $3x^2 - 1 = 0$. Получаем $x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. На интервале $(0,2)$ лежит $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Вычисляем значения функции в трех точках: $y(0)=1$, $y(2)=7$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=1-\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Таким образом, $M=7$, $m=1-\frac{2}{3\sqrt{3}}$.►

Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба

Определение. График дифференцируемой функции $f(x)$ называется *выпуклым вниз* (*вверх*) на интервале (a,b), если его дуга $y=f(x)$, расположена выше (ниже) любой касательной к этой дуге на интервале (a,b).



На рисунке график функции $y = f(x)$ является выпуклым вниз на интервале (a, x_0) и выпуклым вверх на интервале (x_0, b).

Запишем уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$:

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \text{ или } Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пусть график функции $y = f(x)$ является выпуклым вниз на интервале (a,b). Это означает, что $f(x) > Y$, или $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $\forall x \in (a,b), x \neq x_0$.

Пусть график функции $y = f(x)$ является выпуклым вверх на интервале (a,b). Это означает, что $f(x) < Y$, или $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $\forall x \in (a,b), x \neq x_0$.

Теорема (необходимое и достаточное условие выпуклости вниз (вверх) графика функции). *График функции $y = f(x)$ является выпуклым вниз (вверх) на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда производная $f'(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a,b).*

◀Доказательство. Пусть $x_0 \in (a,b)$. Запишем уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$: $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Предположим, что $f'(x)$ возрастает на интервале (a,b). Рассмотрим разность

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$= \left(f'(c) - f'(x_0)\right)(x - x_0)$, точка c лежит между x и x_0.

Здесь мы применили теорему Лагранжа. Если $x < x_0$, то $c \in (x, x_0)$ и $f'(c) < f'(x_0)$. Следовательно, $y - Y > 0$. Если $x > x_0$, то $c \in (x_0, x)$ и $f'(c) > f'(x_0)$. Следовательно, снова $y - Y > 0$. Значит, график функции является выпуклым вниз на интервале (a,b).

Предположим теперь, что график функции является выпуклым вниз на интервале (a,b). Возьмем точки $a < x_1 < x_2 < b$. Построим касательные в точках $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$:

$$Y_1 = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \text{ и } Y_2 = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2).$$

В силу выпуклости вниз $f(x)-Y_1>0$, $x\neq x_1$. В частности, $f(x_2)-Y_1>0$, т.е. $f(x_2)>f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$. Аналогично, $f(x)-Y_2>0$, $x\neq x_2$, $f(x_1)-Y_2>0$, т.е. $f(x_1)>f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2)$. Получаем неравенство

$$f'(x_1)<\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<f'(x_2),$$

из которого следует, что производная $f'(x)$ возрастает на интервале (a,b).►

Теорема (достаточное условие выпуклости вниз (вверх) графика функции). *Если* $f''(x)>0$ *(* $f''(x)<0$*) на интервале* (a,b)*, то график функции* $y=f(x)$ *является выпуклым вниз (вверх) на этом интервале.*

◄Доказательство. Если $f''(x)>0$ на интервале (a,b), то $f'(x)$ возрастает на интервале (a,b). По теореме 1 график функции $y=f(x)$ является выпуклым вниз на интервале (a,b).►

Определение. Точка $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ графика непрерывной функции $y = f\left(x\right)$, при переходе через которую меняется направление выпуклости, называется *точкой перегиба*.

Теорема (необходимое условие точки перегиба). *Если* $\left(x_0, y_0\right)$ *– точка перегиба графика функции* $y = f\left(x\right)$, *то* $f''\left(x_0\right) = 0$ *или* $f''\left(x_0\right)$ *не существует*.

◀Доказательство. Предположим для определенности, что график функции $y = f\left(x\right)$ является выпуклым вниз на интервале $\left(a, x_0\right)$ и выпуклым вверх на интервале $\left(x_0, b\right)$. По теореме 1 производная $f'\left(x\right)$ возрастает на интервале $\left(a, x_0\right)$ и убывает на интервале $\left(x_0, b\right)$. Следовательно, x_0 является точкой локального максимума для $f'\left(x\right)$. В силу необходимого условия локального экстремума $f''\left(x_0\right) = 0$ или $f''\left(x_0\right)$ не существует.▶

Теорема (достаточное условие точки перегиба графика непрерывной функции). *Пусть* $f''(x_0)=0$ *или* $f''(x_0)$ *не существует. Если при переходе через точку* x_0 *вторая производная меняет знак, то* $(x_0, f(x_0))$ *– точка перегиба.*

◀Доказательство. Предположим, что $f''(x)>0$ на интервале (a,x_0) и $f''(x)<0$ на интервале (x_0,b). По достаточному условию выпуклости вниз график функции $y=f(x)$ является выпуклым вниз на интервале (a,x_0) и график функции $y=f(x)$ является выпуклым вверх на интервале (x_0,b). Следовательно, $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба.▶

Пример. Найти интервалы выпуклости вниз (вверх), а также точки перегиба кривой Гаусса: $y=e^{-x^2}$.

◀Имеем $y'=-2xe^{-x^2}$ и $y''=\left(4x^2-2\right)e^{-x^2}$. Вторая производная обращается в нуль в точках $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают ось x на три интервала $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$. Знаки y'' соответственно будут “+”, “–”, “+”. Поэтому на первом и третьем интервалах график выпуклый вниз, а на втором – вверх. Точки $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба.

Заметим, что ввиду симметрии кривой Гаусса относительно оси y исследование направления выпуклости этой кривой достаточно провести лишь на полуоси $(0,+\infty)$

►