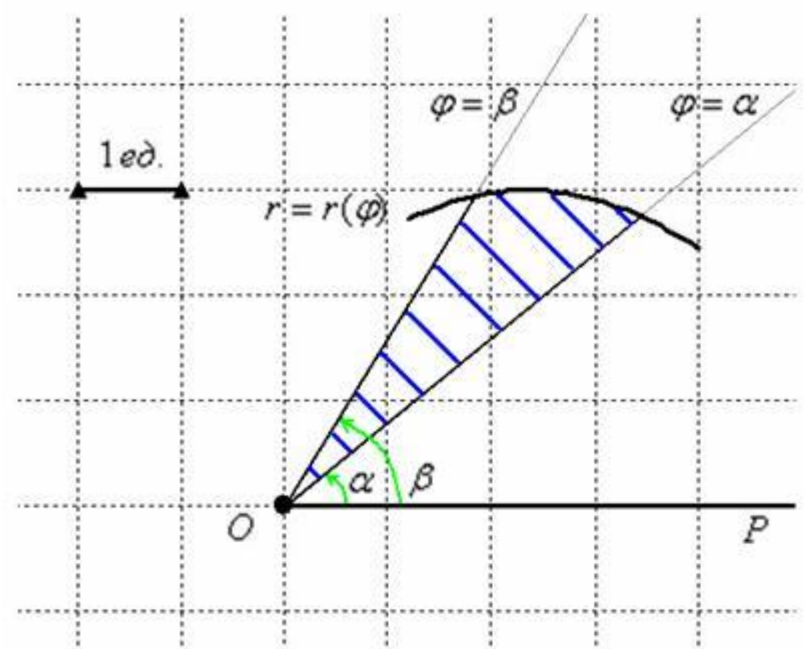
Лекции 11-12

Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах

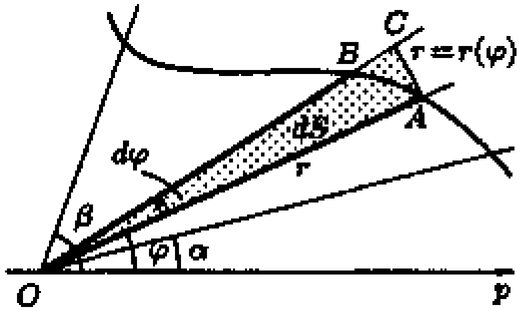
Пусть O ─ полюс, OP─ полярный луч. Криволинейный сектор ограничен лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и линией $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$.



Тогда площадь сектора выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Доказательство. Площадь сектора круга радиуса R с центральным углом $\Delta\varphi$ равна $\frac{1}{2}R^2\Delta\varphi$. Приблизим криволинейный сектор фигурами A и B, составленными из круговых секторов.



Разобьем отрезок $[\alpha,\beta]$ на n частей промежуточными точками

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$$

Обозначим через $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = 1,\ldots,n$. Обозначим через $\lambda = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta\varphi_i$. Положим

$$m_i = \min_{\varphi\in[\varphi_{i-1},\varphi_i]} r(\varphi),\ M_i = \max_{\varphi\in[\varphi_{i-1},\varphi_i]} r(\varphi),\ i = 1,\ldots,n.$$

Круговые сектора ограничены лучами $\varphi = \varphi_{i-1}$, $\varphi = \varphi_i$ и дугами окружностей радиусов $R = m_i$ и $R = M_i$, $i = 1,\ldots,n$, соответственно. Тогда

$\frac{1}{2} m_i^{\,2}\Delta\varphi_i$ – площадь сектора с радиусом m_i и центральным углом $\Delta\varphi_i$,

$\frac{1}{2} M_i^{\,2}\Delta\varphi_i$ – площадь сектора с радиусом M_i и центральным углом $\Delta\varphi_i$,

$$S(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^{\,2}\Delta\varphi_i,$$

$$S(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^{\,2}\Delta\varphi_i$$

– площади вписанной в сектор и описанной около сектора фигур A и B и одновременно интегральные суммы для интеграла $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$.

Следовательно, $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i^{\,2}\Delta\varphi_i = \lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} M_i^{\,2}\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$.

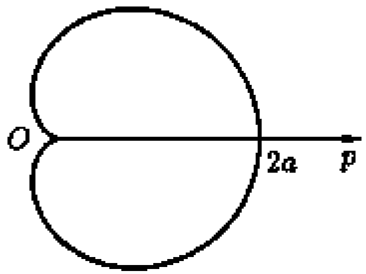


Рис. 187.

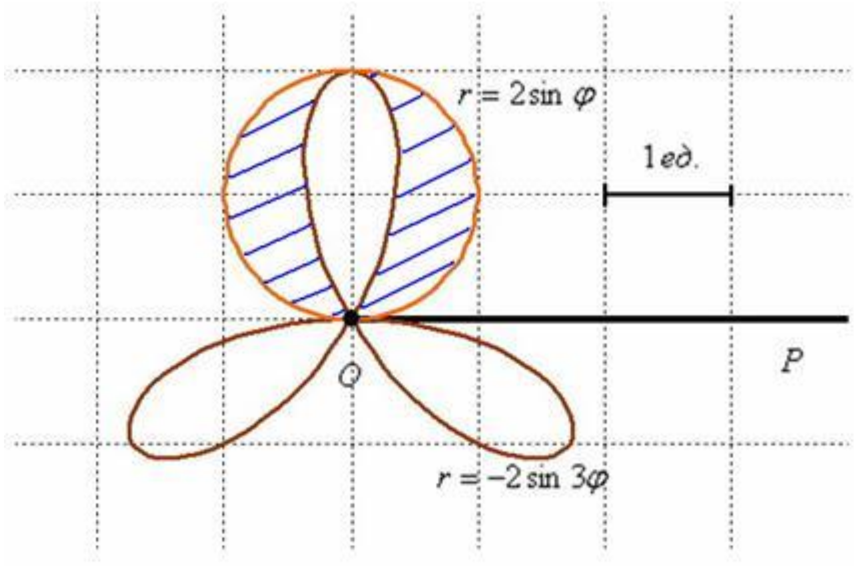
◀Находим

$$r^2(\varphi) = a^2(1+\cos\varphi)^2 = a^2\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right) = a^2\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 + 2a^2\cos\varphi + \frac{a^2}{2}\cos 2\varphi.$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{3}{2}a^2 + 2a^2\cos\varphi + \frac{a^2}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{3\pi}{2}a^2.$$ ▶

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r = -2\sin 3\varphi$, $r = 2\sin\varphi$.



◄Первая линия представляет собой трехлепестковую розу, вторая линия представляет собой окружность радиуса 1. Верхний лепесток соответствует изменению угла φ от $\pi/3$ до $(2\pi)/3$, окружность соответствует изменению угла φ от 0 до π. Искомая площадь S равна разности площадей круга S_1 и лепестка S_2 Площадь круга равна $S_1 = \pi$, площадь лепестка

$$S_2 = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} r^2(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\pi/3} 4\sin^2 3\varphi d\varphi = 4\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

$$S = S_1 - S_2 = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

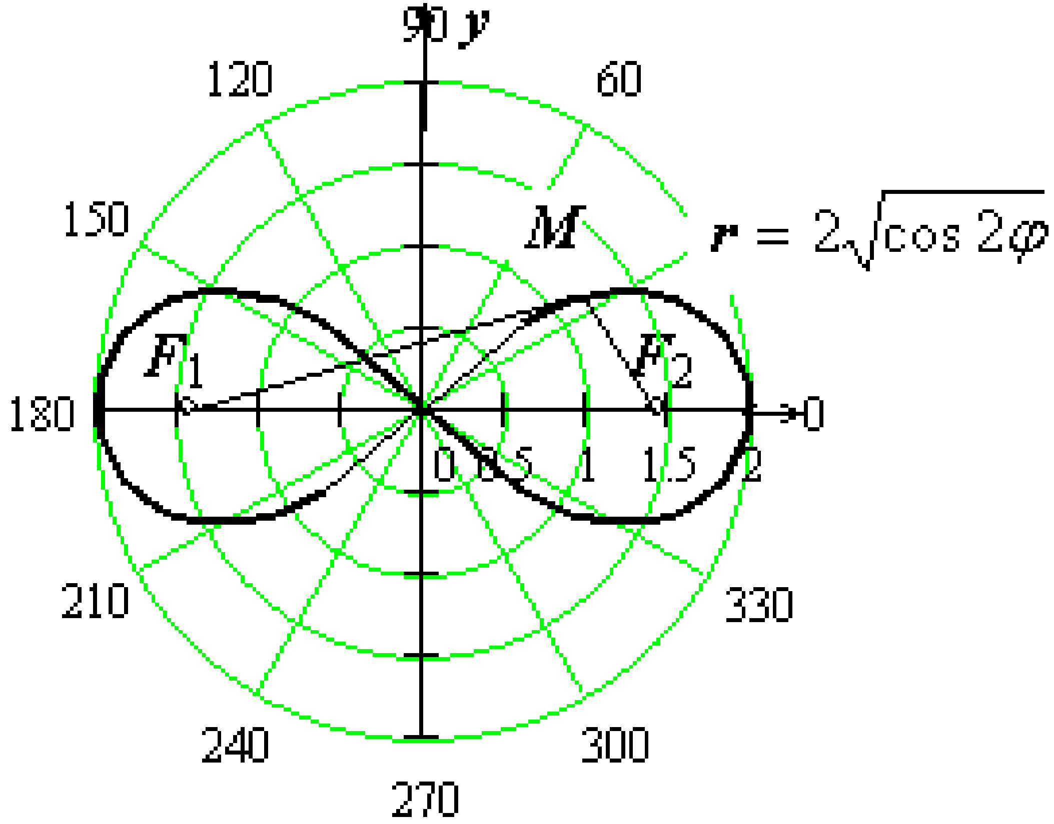
Ответ: $\frac{\pi}{3}$►.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$.

◄Кривая обладает симметрией относительно осей *Ox* и *Oy*, поэтому достаточно найти площадь той части фигуры, которая лежит в первом квадранте. Из неравенства $\cos 2\varphi \geq 0$ находим, что $\varphi \in [0, \pi/4]$. Далее вычисляем:

$$r^2 = 4\cos 2\varphi,$$

$$S = 4\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2(\varphi)\,d\varphi = 2\int_0^{\pi/4} 4\cos 2\varphi d\varphi = 8\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 4.$$►



Лемниската Бернулли

Вычисление длины дуги кривой

Определение. *Длиной* l кривой AB называется (конечный) предел длин вписанных в AB ломаных, когда длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю (если предел при этом существует и не зависит от выбора точек ломаной). Кривая, имеющая конечную длину, называется *спрямляемой*.

Обозначим

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \left| M_{i-1} M_i \right|.$$

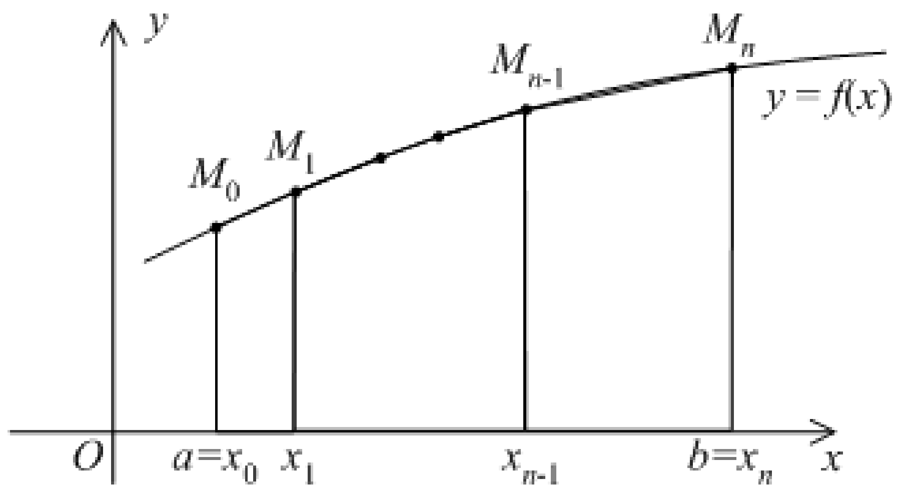
Тогда

$$l_{AB} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left| M_{i-1} M_i \right|.$$

Теорема (вычисление длины дуги графика функции). Если кривая задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a,b]$ и производная $y'(x)$ является непрерывной функцией, то длина l дуги этой кривой равна

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx},$$

где a и b – абсциссы концов дуги.



Доказательство. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей промежуточными точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\ldots,n$. Обозначим через λ наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,\ldots,n$:

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i .$$

Рассмотрим точки $A = M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \ldots, M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), M_n(x_n, y_n) = B$ дуги графика функции. Найдем длину звена ломаной и длину всей ломаной:

$$|M_{i-1}M_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(y(x_i) - y(x_{i-1})\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left[y'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right]^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(y'(\xi_i)\right)^2 (\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + \left(y'(\xi_i)\right)^2}\,\Delta x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(y'(\xi_i)\right)^2}\,\Delta x_i .$$

Мы применили формулу Лагранжа к функции $y(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\ldots,n$. Таким образом, длина ломаной совпадает с интегральной суммой для интеграла $\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$. Переходя к пределу при $\lambda \to 0$ находим, что

$$l_{AB} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i| = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(y'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

Пример. Найти длину дуги кривой $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $x \in [0,1]$.

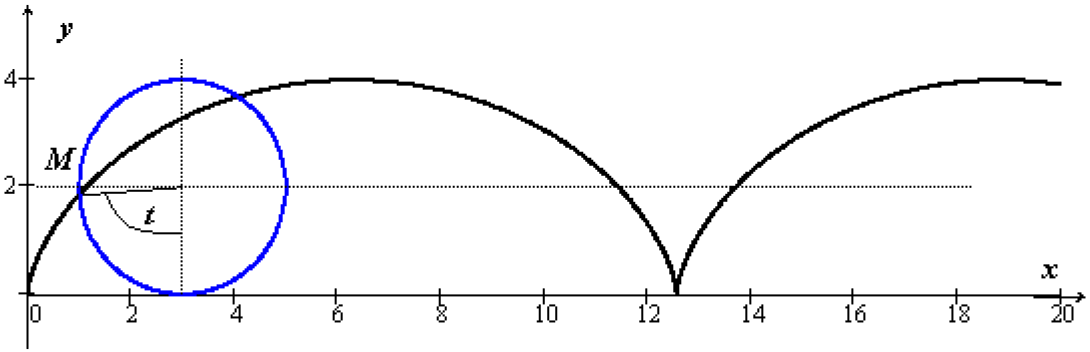
◀Находим $y' = \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3}x^{1/2} = \sqrt{x}$,

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \left.\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 = \frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right).$$ ▶

Теорема (вычисление длины дуги плоской кривой, заданной параметрически). Если плоская кривая задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x'(t)$, $y'(t)$ - непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$, то длина l этой кривой равна

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt}.$$

Пример. Найти длину арки циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.



Циклоида

◀Находим

$$x' = 2(t - \sin t)' = 2(1 - \cos t),\ y' = 2(1 - \cos t)' = 2\sin t,$$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(2(1 - \cos t))^2 + (2\sin t)^2} = \sqrt{4 - 4\cos t} =$$

$$= 2\sqrt{2\sin^2(t/2)} = 2\sqrt{2}\sin(t/2).$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_{0}^{2\pi} 2\sqrt{2}\sin(t/2)\,dt = -4\sqrt{2}\cos(t/2)\Big|_0^{2\pi} = 8\sqrt{2}. \blacktriangleright$$

Теорема (вычисление длины дуги кривой в пространстве, заданной параметрически). Если кривая в пространстве задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ - непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$, то длина l этой кривой равна

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt}.$$

Пример. Найти длину дуги винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ct$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, $c > 0$.

$$◀\, l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + c^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + c^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2 + c^2}\,.▶$$

Теорема (вычисление длины дуги кривой в полярных координатах). Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ и функция $r'(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то длина l этой кривой равна

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi}.$$

Доказательство. Выразим декартовые координаты точки через полярные координаты и перейдем к параметрическому заданию кривой, полагая параметр t равным полярному углу φ:

$$x = r\cos\varphi = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi = r(\varphi)\sin\varphi.$$

Тогда

$$x' = \left(r(\varphi)\cos\varphi\right)' = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi,$$

$$y' = \left(r(\varphi)\sin\varphi\right)' = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi,$$

$$\left(x'(\varphi)\right)^2 + \left(y'(\varphi)\right)^2 = \left(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi\right)^2 + \left(r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi\right)^2 =$$

$$= \left(r'(\varphi)\right)^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \left(r(\varphi)\right)^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2.$$

По теореме 2

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2 + \left(y'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

Пример. Найти длину кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$.

◀ Очевидно, $\varphi \in [0, 2\pi]$. В силу симметрии кривой относительно полярного луча можно вычислить длину дуги, соответствующей $\varphi \in [0, \pi]$ и удвоить результат.

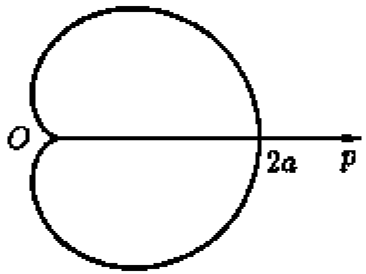


Рис. 187.

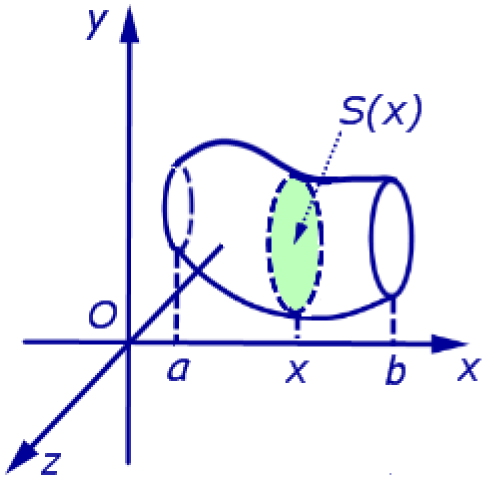
$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

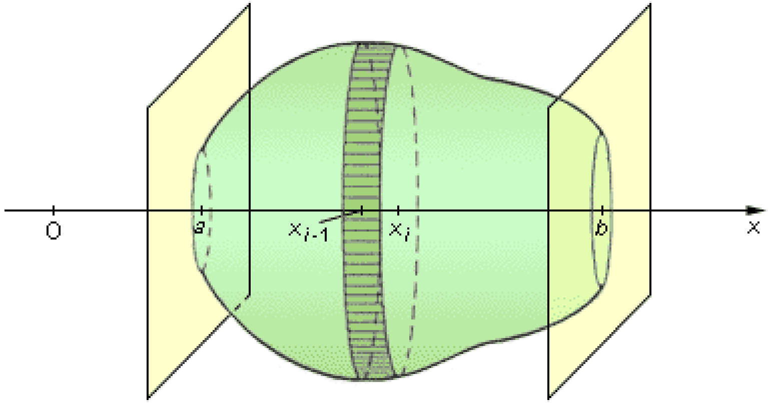
$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{4a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} 2a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 8a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 8a. \text{▶}$$

Вычисление объемов тел «через» площади поперечных сечений. Вычисление объема тела вращения

Теорема (вычисление объема тела через площадь поперечных сечений). *Пусть тело заключено между плоскостями* $x = a$ *и* $x = b$. *Если площадь* $S(x)$ *сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является непрерывной функцией на отрезке* $[a,b]$, *то объем тела равен*

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$





◀Доказательство. Разобьем отрезок $\left[a,b\right]$ на n частей промежуточными точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \quad (1)$$

Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину отрезка $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через λ наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i.$$

Проведем плоскости $x = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тело разделится на слои, которые при малых λ можно считать прямыми цилиндрами. Объем i –го слоя(между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$) равен $V_i = S\left(x_{i-1}\right) \cdot \Delta x_i$. Сумма объемов слоев равна

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} S\left(x_{i-1}\right) \cdot \Delta x_i$$

и является интегральной суммой для интеграла

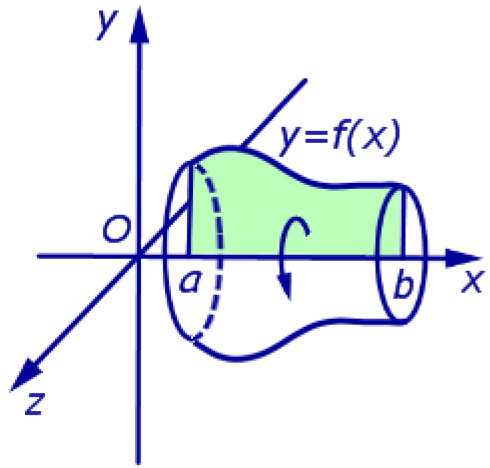
$$\int_a^b S(x)\,dx.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$ получаем

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} S(x_{i-1})\cdot \Delta x_i = \int_a^b S(x)\,dx. \blacktriangleright$$

Теорема (вычисление объема тела вращения). *Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции* $a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$, *где* $f(x)$ *непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция, равен*

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$



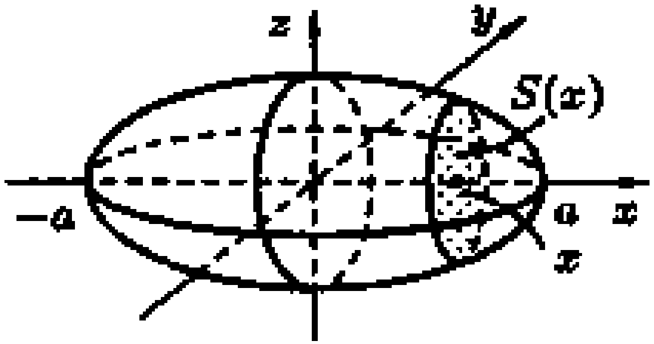
◀Доказательство. Сечение тела плоскостью $x = c,\ a \le c \le b,$ перпендикулярной оси Ox, является кругом радиуса $f(c)$, поэтому площадь сечения $S(x)$ в теореме 2 равна площади круга:

$$S(x) = \pi f^2(x).$$

По теореме 2 получаем искомую формулу

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \blacktriangleright$$

Пример. Найти объем тела, ограниченного трехосным эллипсоидом, заданным каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.



Сечения эллипсоида плоскостями, перпендикулярными оси Ox являются эллипсами, заданными уравнениями вида

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},\ -a \le x \le a.$$

Приведем уравнение к каноническому виду

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1.$$

Полуоси эллипса равны

$$b\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)},\ c\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)},$$

площадь сечения равна

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{\pi bc}{a^2}\left(a^2-x^2\right).$$

Следовательно, объем тела равен

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\int_{-a}^{a}\frac{\pi bc}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Ответ: $\frac{4}{3}\pi abc$.

Замечание. Если $a=b=c=R$, то эллипсоид превращается в сферу, а объем соответствующего шара $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Механические приложения определенного интеграла

1. Вычисление работы переменной силы при прямолинейном перемещении

Пусть материальная точка перемещается вдоль отрезка $[a,b]$ оси Ox под действием переменной силы $\vec{F}$, параллельной оси Ox. Тогда работа этой силы вычисляется по формуле

$$\boxed{A=\int_a^b F(x)dx}.$$

2. Вычисление моментов. Координаты центра масс

Статический момент материальной точки массы m, лежащей на координатной оси и имеющей координату x равен mx. Статические моменты M_x и M_y точки массы m, лежащей на плоскости и имеющей координаты (x, y), относительно оси Ox и оси Oy равны соответственно

$$M_x = my,\ M_y = mx.$$

Аналогично в пространстве определяются статические моменты точки массы m и имеющей координаты (x, y, z) относительно координатных плоскостей:

$$M_{xy} = mz,\ M_{xz} = my,\ M_{yz} = mx.$$

Момент инерции материальной точки массы m относительно точки A (относительно прямой l, относительно плоскости p) равен произведению массы точки на квадрат расстояния ее до точки A (до прямой l, до плоскости p, соответственно).

Статические моменты и моменты инерции системы материальных точек равны сумме соответствующих моментов точек, составляющих эту систему. Это позволяет получить формулы для вычисления моментов материального отрезка – стержня, некоторых кривых, плоских фигур и пространственных тел с помощью определенных интегралов.

Центр масс системы материальных точек на прямой равен $\frac{M}{m}$, где M - статический момент системы, а m – масса системы.

Для точек на плоскости центр масс C имеет координаты

$$x_C = \frac{M_y}{m},\ y_C = \frac{M_x}{m}.$$

Для точек в пространстве центр масс C имеет координаты

$$x_C = \frac{M_{yz}}{m}, y_C = \frac{M_{xz}}{m},\ z_C = \frac{M_{xy}}{m},$$

где в числителях стоят статические моменты относительно соответствующих координатных плоскостей.

Так, для стержня $[a,b]$ с линейной плотностью $\rho(x)$ статический момент M и момент инерции I_0 относительно точки $O(0)$ вычисляются по формулам

$$\boxed{M=\int_a^b x\rho(x)\,dx},\quad \boxed{I_0=\int_a^b x^2\rho(x)\,dx},$$

а момент инерции I_A относительно точки $A(x_0)$ - по формуле

$$\boxed{I_A=\int_a^b (x-x_0)^2\rho(x)\,dx}.$$

Пример. Найти центральный момент инерции стержня $[0,1]$, $\rho(x)=x^2$ (т.е. момент инерции относительно центра масс стержня).

◀ Найдем сначала массу, статический момент и центр масс стержня. Масса m стержня равна

$$m=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3};$$

статический момент M стержня равен

$$M=\int_0^1 x\langle x^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}.$$

Тогда центр масс стержня имеет координату $x_C=\dfrac{M}{m}=\dfrac{3}{4}$.

Теперь найдем центральный момент инерции стрежня:

$$I_C=\int_0^1\left(x-\tfrac{3}{4}\right)^2x^2dx=\frac{1}{80}.$$