

Программа КР “Ряды”

Теория

Числовой ряд, частичная сумма ряда, сходящийся (расходящийся) ряд, сумма ряда. Необходимое условие сходимости числового ряда. Сходимость ряда из членов геометрической прогрессии и его сумма. Признаки сходимости рядов с положительными членами (сравнения, предельный признак сравнения, Даламбера, Коши, интегральный). Ряд Дирихле и его сходимость. Признак Лейбница. Абсолютно (условно) сходящийся ряд.

Степенной ряд по степеням x , его радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости. Степенной ряд по степеням $(x-a)$.

Ряд Тейлора функции f . Ряд Маклорена. Разложение в ряд Маклорена функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Тренировочные варианты на уровень А

Вариант 1

1. Какая точка является левым концом интервала сходимости степенного ряда по степеням $(x+5)$, если его правым концом является точка $x=1$?
(Ответ: -11)
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-n}{n^3+2}$.
(Ответ: расходится)
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)!}$.
(Ответ: сходится)
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n+3}$.
(Ответ: сходится условно)
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+5}$.
(Ответ: $[0, 2)$)
6. Найти третий член ряда Тейлора по степеням $(x-\pi/6)$ функции $\sin x$.
(Ответ: $-\frac{1}{4}(x-\pi/6)^2$)
7. Разложить в степенной ряд по степеням x функцию $\frac{x^3}{x^2+1}$.
(Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+3}$)

Вариант 2

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$.
(Ответ: $\frac{1}{6}$)
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.
(Ответ: сходится)
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-2}$.
(Ответ: расходится)
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^3+1}$.
(Ответ: сходится абсолютно)
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+1}$.
(Ответ: $(-2, 2)$)
6. Найти второй член ряда Тейлора по степеням $(x+1)$ функции $\frac{x}{1-x}$.
(Ответ: $\frac{1}{4}(x+1)$)
7. Разложить в степенной ряд по степеням x функцию $x(1-e^{-x^3})$.
(Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{3n+1}}{n!}$)

Вариант 3

1. Найти третью частичную сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+2}$. (Ответ: $-\frac{1}{3}$)
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n^3+n^2}$. (Ответ: сходится)
3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$. (Ответ: сходится)
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{12n+7}$. (Ответ: расходится)
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n 5^n}$. (Ответ: $[-7, 3)$)
6. Найти третий член ряда Маклорена функции $\sin^2 x$. (Ответ: x^2)
7. Разложить в степенной ряд по степеням x функцию $x^2 \ln(1-3x)$. (Ответ: $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n+2}}{n}$)

Тренировочные варианты на уровни В, С

Вариант 1

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^5+n} - \sqrt{n^5}\right)$. (Ответ: сходится)
2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \cdot (x-1)^n$. (Ответ: $[0, 2)$)
3. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл $\int_0^{1/2} x \ln(1+x^2) dx$. (Ответ: $\frac{11}{768} \approx 0,014$)

Вариант 2

1. Найти все значения a , при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot n^{1-|a|}$ расходится. (Ответ: $|a| \leq 3$)
2. Найти наименьшее число n такое, что сумма ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}$ приближенно равняется его n -ой частичной сумме с точностью до 0,001. (Ответ: 3)
3. Разложить в степенной ряд по степеням x функцию $\sqrt{1-x^3}$ и выписать первые 5 членов этого разложения
(Ответ: $1 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^6 - \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^9 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!}x^{12} - \dots = 1 - \frac{1}{2}x^3 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^{3n}$)

Вариант 3

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n \cdot \sin \frac{1}{n}}{n}$. (Ответ: сходится)
2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{n+1} \cdot x^n$. (Ответ: $[-1, 1]$)
3. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл $\int_0^1 \sin \frac{x^2}{2} dx$. (Ответ: $\frac{55}{336} \approx 0,164$)