

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

Е.В. Ефромеева

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

Рекомендовано кафедрой информационных технологий и вычислительных систем ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

Москва
2019

УДК 519.63:519.85

ББК 22.193

Е 92

Рецензенты: д-р. пед. наук, проф. В.К. Жаров (заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики ФГБОУ ВО «Российский государственный гуманитарный университет» (РГГУ));

канд. соц. наук, доц. И.И. Грунтовский (заведующий кафедрой общегуманитарных и научных дисциплин Международного юридического института)

Ефромеева Е.В.

Е 92 Избранные главы алгебры и анализа: учеб. пособие. – М.: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2019. – 136 с.: ил.
ISBN 978-5-7028-0618-1

Рассмотрены примеры решения дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей. Основное внимание уделено решению смешанной задачи для уравнения Лапласа, теплопроводности и колебания струны методом сеток.

Изложены основы теории двойственности, элементы целочисленного программирования.

Предназначено для бакалавров высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

УДК 519.63:519.85
ББК 22.193

ISBN 978-5-7028-0618-1

© Ефромеева Е.В., 2019

© ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2019

Содержание

Введение	5
1. Дифференциальные уравнения в частных производных	7
1.1. Основные определения	7
1.2. Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей	10
1.3. Представление частных производных в конечно-разностном виде ..	11
1.4. Классификация схем. Сходимость и устойчивость	13
2. Эллиптические уравнения	15
3. Гиперболические уравнения	22
3.1. Дифференциальные уравнения второго порядка гиперболического типа	22
3.2. Продольные колебания стержня	23
3.3. Малые колебания газа в неограниченной цилиндрической трубке	24
3.4. Свободные электрические колебания в проводе. Телеграфное уравнение	24
3.5. Колебание мембраны	25
3.6. Устойчивость и корректность поставленной задачи	26
3.7. Простейшее гиперболическое уравнение	26
4. Параболические уравнения	30
5. Теория двойственности	36
5.1. Составление математических моделей двойственных задач	36
5.2. Первая теорема двойственности	39
5.3. Вторая теорема двойственности	41
5.4. Разновидности симплекс-метода	43
5.4.1. Двойственный симплекс-метод	44
5.4.2. Обобщенный симплекс-метод	47
5.5. Задачи для самостоятельного решения	48
6. Элементы целочисленного программирования	52
6.1. Постановка задачи	52
6.2. Графический способ решения задачи ЦЛП	52

6.3.	Методы решения задач ЦЛП	54
6.3.1.	Метод ветвей и границ.....	55
6.3.2.	Метод отсекающих плоскостей	61
6.4.	Задача коммивояжера	69
6.5.	Задачи для самостоятельного решения.....	71
7.	Основные приемы работы с пакетом Mathcad	73
7.1.	Основные элементы пакета Mathcad.....	73
7.2.	Графический редактор	75
7.3.	Редактор формул	79
7.3.1.	Формулы с константами	84
7.3.2.	Переменные и формулы с переменными.....	84
7.3.3.	Собственные функции пользователя	85
7.3.4.	Формулы с векторами и матрицами.....	86
7.3.5.	Обработка формул в символьном виде.....	88
7.3.6.	Задание функций и формул с помощью программных модулей .	90
7.3.7.	Операторы программирования	92
8.	Лабораторные работы.....	95
8.1.	Явные разностные схемы	95
8.2.	Лабораторная работа 1.....	99
8.3.	Лабораторная работа 2.....	105
8.4.	Лабораторная работа 3.....	109
8.5.	Лабораторная работа 4.....	115
8.6.	Лабораторная работа 5.....	117
8.7.	Лабораторная работа 6.....	124
8.8.	Лабораторная работа 7.....	125
Приложение 1		
	Требования к оформлению отчета о лабораторной работе	133
Приложение 2		
	Шаблон титульного листа для отчетов о лабораторных работах	135
	Библиографический список.....	136

Введение

С каждым годом возрастает роль информационных технологий во всех областях человеческой деятельности, в том числе и для решения технических задач, для проектирования сложных объектов и управления их работой, сбора и обработки информации в естественно-научных экспериментах, для поиска и реализации оптимальных режимов производственно-технологических процессов. Это в свою очередь приводит к необходимости более пристального изучения математических методов, знаний основ математических дисциплин и применения этих знаний к решению различных задач.

Главная цель пособия – преодолеть существующий определенный разрыв между теорией методов и формированием умения их практической реализации.

Современный курс должен сочетать в себе обязательное изучение теории численных методов и их практической реализации на ПК как написанием собственных программ, их реализующих, так и использованием средств современных математических пакетов.

Первые четыре раздела пособия посвящены приближенным методам решения дифференциальных уравнений в частных производных и их применению в различных областях физики и техники. Основное внимание уделено решению смешанной задачи для уравнения Лапласа, теплопроводности и колебания струны методом конечных разностей (методом сеток).

Следующие два раздела пособия включают в себя теоретический материал по теории двойственности и элементам целочисленного программирования, который иллюстрируется большим количеством примеров и задач различной сложности.

В пособии также даны методические указания к выполнению лабораторных работ по решению дифференциальных уравнений, задач с элементами целочисленного программирования. Такой подход позволит не только освоить математическое содержание метода конечных разностей (границ его применимости, погрешности метода и т.д.) и основ элементов целочисленного программирования, но и использовать современные программные средства (наличие которых отнюдь не освобождает от необходимости изучения математики).

Весьма важным при таком подходе оказывается выбор базового программного средства. Система Mathcad изначально создавалась для численного решения математических задач (1988 г). Сегодня Mathcad – это

интегрированная математическая система, позволяющая наглядно вводить исходные данные, проводить традиционное математическое описание решения задачи и получать результаты вычисления как в аналитическом, так и в численном виде с использованием при необходимости их графического представления. Система имеет хорошо продуманные встроенные текстовый, формульный и графический редакторы и ориентирована на студентов, инженеров, научных работников.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1.1. Основные определения

Теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов современной математики. Одна из основных особенностей дифференциальных уравнений это непосредственная связь теории дифференциальных уравнений с приложениями. Изучая какие-либо физические явления, исследователь, прежде всего, создает его математическую идеализацию или математическую модель, записывает основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Очень часто эти законы можно выразить в виде дифференциальных уравнений. Такими оказываются модели различных явлений механики сплошной среды, химических реакций, электрических и магнитных явлений и др.

Исследуя полученные дифференциальные уравнения вместе с дополнительными условиями, которые, как правило, задаются в виде начальных и граничных условий, математик получает сведения о происходящем явлении, иногда может узнать его прошлое и будущее. Универсальным и чрезвычайно эффективным методом решения задач математической физики является метод конечных разностей или метод сеток. Он позволяет сводить приближенное решение уравнений в частных производных к решению систем алгебраических уравнений.

Инженеру очень часто приходится сталкиваться с задачами, в которых искомая величина зависит от нескольких переменных. В этом случае решаемые уравнения содержат частные производные и называются дифференциальными уравнениями в частных производных.

К сожалению, очень многие из таких уравнений не имеют аналитического решения, и чтобы их решить, приходится прибегать к численным методам. Если для решения обыкновенных дифференциальных уравнений существует множество различных методов, то для решения дифференциальных уравнений в частных производных приходится выбирать между методами конечных разностей и конечных элементов. В данном пособии вопрос о численном интегрировании дифференциальных уравнений в частных производных рассматривается с точки зрения применения метода конечных разностей для решения различных технических задач.

Дифференциальные уравнения в частных производных составляют в настоящее время одну из наиболее быстро развивающихся отраслей численного анализа. Области науки и техники, где рассматриваются уравнения в частных

производных, весьма многочисленны и важны; к ним относятся, например, ядерная физика, аэродинамика и т.п.

Рассмотрим общий подход к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными уравнения в частных производных и проанализируем также некоторые численные методы, которые могут оказаться полезными во многих случаях.

Дифференциальные уравнения, содержащие частные производные, называются дифференциальными уравнениями в частных производных.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых неизвестная функция зависит только от одной переменной, в дифференциальных уравнениях в частных производных неизвестная функция зависит от нескольких переменных (например, $u(x;t)$ зависит от координаты x и времени t).

Дифференциальные уравнения в частных производных можно классифицировать по многим признакам. Обычно дифференциальные уравнения в частных производных классифицируются либо в зависимости от их математической природы (эллиптические, параболические и гиперболические), либо в зависимости от физического смысла решаемых с их помощью задач (уравнение диффузии, волновое уравнение и т.п.). Чтобы пользоваться математической литературой и литературой по прикладным дисциплинам, будущий инженер должен быть знаком с этими классификациями. Важность этой классификации обусловлена тем, что для каждого класса существует своя общая теория и методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка можно записать в следующем виде:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (1.1)$$

где A, B, C, D, E, F, G являются функциями только от независимых переменных x и y . Зависимой переменной является u :

$$u(x; y).$$

Индексы при u означают частные производные, например:

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Зависимость функций A, B, C от x и y усложняет ситуацию, так как делает возможным изменение типа уравнения при переходе из одной части рассматриваемой области в другую.

Дополнительными условиями для дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных могут служить граничные или начальные условия, а также комбинация тех и других. Эллиптические уравнения описывают установившиеся (стационарные) процессы. Задача при этом ставится в замкнутой области, причем в каждой точке границы этой области задаются граничные условия. Параболическими и гиперболическими

уравнениями описываются эволюционные процессы (процессы «распространения»). В таких задачах на одной части границы ставятся граничные условия, на другой – начальные. Возможны также открытые области, в которые можно «распространить решение».

Вспомним, что обыкновенное дифференциальное уравнение имеет целое семейство решений, причем нужное решение выбирается с помощью начального условия.

Точно так же в случае уравнения в частных производных ему должна сопутствовать некоторая дополнительная информация, позволяющая выбрать определенное решение. Но теперь, поскольку имеются две независимые переменные, условия выбора одного конкретного решения должно задаваться вдоль какой-то кривой в плоскости xu . Это условие может быть наложено на функцию u , на ее производную или на функцию и на ее производную совместно. В некоторых случаях кривая, вдоль которой задано условие, может быть замкнутой, в других случаях незамкнутой; это зависит от типа уравнения.

Уравнения второго порядка подразделяют на три типа в зависимости от коэффициентов A, B, C в (1.1):

- ✓ уравнение называется *эллиптическим*, если $B^2 - 4AC < 0$;
- ✓ уравнение называется *параболическим*, если $B^2 - 4AC = 0$;
- ✓ уравнение называется *гиперболическим*, если $B^2 - 4AC > 0$.

Уравнение может принадлежать к нескольким типам в зависимости от значений коэффициентов. Уравнение

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

является эллиптическим при $y > 0$, параболическим при $y = 0$ и гиперболическим при $y < 0$. Те уравнения, которые будут рассматриваться в настоящем пособии, имеют постоянные коэффициенты и поэтому принадлежат к одному какому-то типу. В инженерной практике чаще всего встречаются уравнения в частных производных, приведенные в табл. 1.1, где Δ – оператор Лапласа. В случае одной независимой переменной x

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

В случае двух независимых переменных x и y

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Оператор Δ^2 называется бигармоническим оператором и в случае двух независимых переменных имеет вид

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}.$$

В следующих разделах рассмотрим примеры каждого из трех типов уравнений с соответствующими граничными условиями и опишем для них практические методы решения.

Таблица 1.1

Наиболее известные типы дифференциальных уравнений в частных производных

Уравнения	Математическая формула	Примеры задач, в которых встречается уравнение
Лапласа	$\Delta f = 0$	Установившееся течение жидкости. Стационарные тепловые поля
Пуассона	$\Delta f = -k$	Теплопередача с внутренними источниками тепла
Диффузии	$\Delta f = \frac{1}{h^2} \frac{\partial f}{\partial t}$	Нестационарная теплопроводность
Волновое	$\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$	Распространение звуковых волн
Бигармоническое	$\Delta^2 f = F(x, y)$	Деформация пластин

1.2. Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей

В основе решения уравнений в частных производных методом конечных разностей лежит конечно-разностная аппроксимация производных, которая осуществляется в три этапа (рис. 1.1).

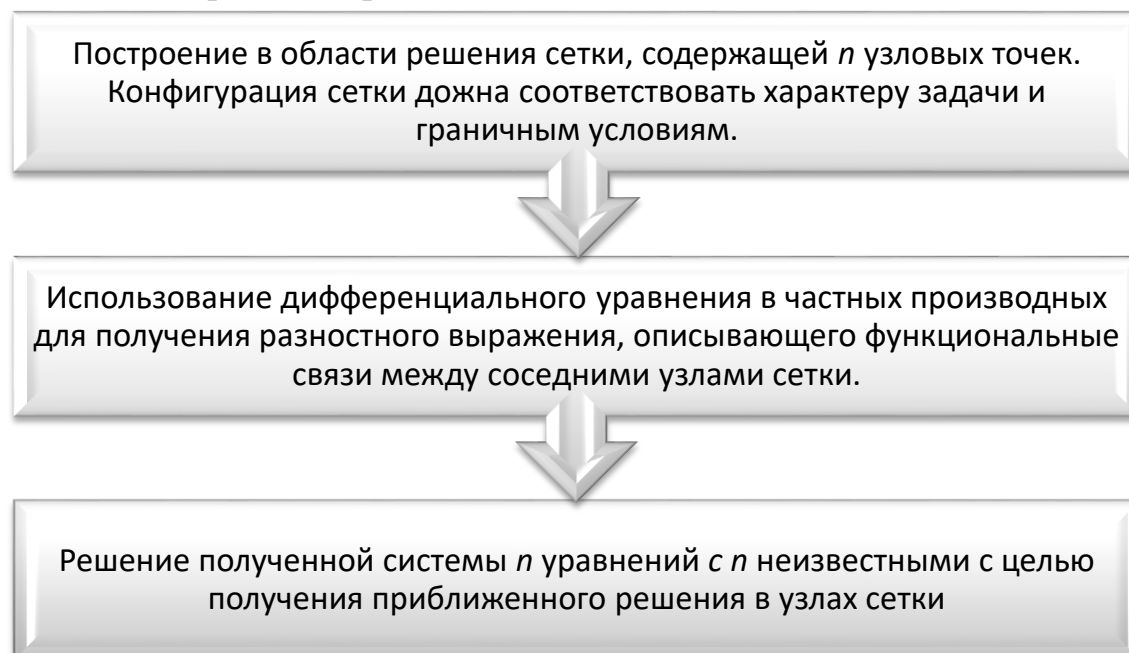


Рис. 1.1. Этапы численного решения дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей

Сначала в области решения вводят равномерную сетку «узловых точек», соответствующую характеру задачи и граничным условиям. Затем решаемое уравнение в частных производных записывают в наиболее удобной системе координат и, представляя производные в конечно-разностной форме, приводят его к виду разностного уравнения. Полученное разностное уравнение используют в дальнейшем для описания функциональной связи между соседними узлами сетки. Разностное уравнение записывают для всех узлов сетки и получают в результате систему n уравнений с n неизвестными. На последнем этапе полученную систему n уравнений с n неизвестными решают одним из численных методов. На первый взгляд эта процедура, состоящая из трех этапов, может показаться простой и прямо ведущей к решению. Однако на самом деле это не так. Широкое разнообразие типов и размеров сеток, видов дифференциальных уравнений в частных производных, возможных конечно-разностных аппроксимаций этих уравнений и методов решений получаемых систем уравнений делают задачу численного решения уравнений в частных производных исключительно многогранным и интересным исследованием.

1.3. Представление частных производных в конечно-разностном виде

Классическое определение производной функции одной переменной записывают в виде

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

Естественно, что на компьютере нельзя осуществить предельный переход. С другой стороны, можно придать h некоторое малое, хотя и ненулевое значение и попытаться проверить, что приближение получается достаточно точным (проблема точности) и что ошибка не возрастает в ходе процесса вычислений (проблема устойчивости).

Чтобы получить численное решение дифференциального уравнения, непрерывные переменные заменяют на дискретные. Это осуществляется заменой производных отношениями конечных разностей. В результате получается система алгебраических уравнений, которую затем решают при помощи вычислительной техники.

Этот метод сводится к тому, что *производная заменяется разностью* применительно к уравнениям в частных производных.

Поскольку теперь имеются две независимые переменные, то обе должны участвовать в разностном уравнении.

Начнем с того, что рассмотрим разности только в направлении x .

Вспомним, что разложение функции $u(x, y_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, y_0 можно записать в виде

$$u(x, y_0) = u(x_0, y_0) + (x - x_0)u_x(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}u_{xx}(\xi, y_0),$$

где ξ лежит между x и x_0 . Если теперь положить $x = x_0 + h$, то после некоторых преобразований получаем

$$u_x(x_0, y_0) - \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} = -\frac{h}{2} u_{xx}(\xi, y_0), \quad (1.2)$$

то есть, если представить приближенно u_x с помощью

$$u_x(x_0, y_0) = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h},$$

то ошибка ограничения будет равна

$$E_t = -\frac{h}{2} u_{xx}(\xi, y_0); \quad x_0 \leq \xi \leq x_0 + h.$$

Равенство (1.2) было получено с помощью подстановки в ряд Тейлора $x = x_0 + h$; результат называется *правой разностью*. Можно получить и другое равенство, называемое *левой разностью*, подставляя в ряд Тейлора $x = x_0 - h$. При этом получаем

$$u_x(x_0, y_0) = \frac{u(x_0, y_0) - u(x_0 - h, y_0)}{h}. \quad (1.3)$$

И правая, и левая разности нужны при выводе разностной формулы для u_{xx} . Сначала выпишем разностное приближение для u_{xx} через u_x , а затем заменим u_x подходящими разностными приближениями. Напишем приближение для u_{xx} , используя правую разность:

$$u_{xx}(x_0, y_0) = \frac{u_x(x_0 + h, y_0) - u_x(x_0, y_0)}{h}. \quad (1.4)$$

Если в эту формулу подставить теперь правые разности для u_x , то весь окончательный результат окажется как бы «сдвинутым» вправо. Чтобы скомпенсировать этот эффект, используем левые разности для u_x . Левая разность для $u_x(x_0, y_0)$ задается формулой (1.3) и, кроме того,

$$u_x(x_0 + h, y_0) = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} \quad (1.5)$$

(естественно, это выражение полностью совпадает с правой разностью для $u_x(x_0, y_0)$). Подставляя (1.3) и (1.5) в (1.4), получим

$$u_{xx}(x_0, y_0) = \frac{u(x_0 + h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - h, y_0)}{h^2}. \quad (1.6)$$

Это весьма важный результат, которым мы будем ниже неоднократно пользоваться. Отметим симметрию формулы относительно x_0, y_0 .

Чтобы определить ошибку ограничения, возникающую при замене производных разностями, вспомним что

$$u(x, y_0) = u(x_0, y_0) + (x - x_0)u_x(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} u_{xx}(x_0, y_0) + \\ + \frac{(x - x_0)^3}{6} u_{xxx}(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^4}{24} u_{xxxx}(\xi, y_0).$$

Теперь положим $x = x_0 + h$; $x = x_0 - h$, а затем сложим два получившихся равенства. При этом получается, что ошибка ограничения равна

$$E_T = -\frac{h^2}{12} u_{xxxx}(\xi, y_0), x_0 - h \leq \xi \leq x_0 + h.$$

Были рассмотрены только производные в направлении x . Совершенно аналогичный анализ можно провести для производных в направлении y , где величину шага по y обозначим через k :

$$u_{yy}(x_0, y_0) = \frac{u(x_0, y_0 - k) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 + k)}{k^2}. \quad (1.7)$$

Ошибка ограничения равна

$$E_T = -\frac{k^2}{12} u_{yyyy}(x_0, \eta), y_0 - k \leq \eta \leq y_0 + k.$$

Таким образом, получены разностные выражения для u_x, u_{xx} и u_{yy} . Разностные выражения для u_y полностью аналогичны (1.2), а вывод выражения для u_{xy} предлагается провести самостоятельно. Используя эти выражения, можно полностью переписать дифференциальное уравнение в частных производных, получив из него уравнение в конечных разностях.

Например, общеизвестное уравнение Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

можно переписать в виде:

$$\frac{u(x_0 + h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - h, y_0)}{h^2} + \frac{u(x_0, y_0 - k) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 + k)}{k^2} = 0.$$

1.4. Классификация схем. Сходимость и устойчивость

Разностные схемы можно классифицировать по способу вычисления результата и по свойствам самой схемы. Основными видами разностных схем являются:

1. Явные схемы – вычисляют значение результата через несколько соседних точек данных. Явные схемы часто оказываются неустойчивыми.
2. Неявные схемы используют уравнения, которые выражают данные через несколько соседних точек результата. Для нахождения результата решается система линейных уравнений. Неявные схемы обычно являются устойчивыми.
3. Полу неявные схемы на одних шагах применяется явная схема, на других – неявная (как правило, эти шаги чередуются).
4. Компактные схемы используют уравнения, которые связывают значения результата в нескольких соседних точках с значениями данных в нескольких соседних точках. Это позволяет повысить порядок аппроксимации.

5. Консервативные схемы. Когда разностная схема удовлетворяет тем же интегральным соотношениям (например, сохранению энергии, энтропии), что и первоначальное дифференциальное уравнение, то говорят о свойстве консервативности.
6. Схемы на смещенных сетках. В этих схемах сетки, на которых задан результат, и данные смещены относительно друг друга. Например, точки результата находятся посередине между точками данных. В некоторых случаях это позволяет использовать более простые граничные условия.

При решении некоторой задачи приближенным методом в конечном счете надо иметь предварительное суждение о том, с какой точностью можно приблизить при помощи этого метода точное решение задачи. Поэтому следует рассмотреть вопрос о сходимости и точности разностных схем.

Замена исходной дифференциальной задачи разностной задачей приводит к тому, что искомая функция $u(x, t)$ определяется приближенно значениями сеточной функции u_{ij} в узлах сетки (x_i, t_j) . В каждом узле погрешность такого приближения равна

$$\delta u_{ij} = u(x_i, t_j) - u_{ij}.$$

В качестве глобальной погрешности (т.е. погрешности решения на всей области G) можно принять максимальное по модулю значение δu_{ij} на сетке

$$\delta u_{ij} = \max_{i,j} |\delta u_{ij}|.$$

Разностная схема называется сходящейся, если при сгущении узлов сетки (т.е. при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$) значение погрешности δu стремится к нулю:

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} \delta u \rightarrow 0.$$

Если при этом $\delta u \leq M(h^p + k^p)$, где M – некоторая положительная константа, то разностная схема имеет p -й порядок точности по h и k -й порядок точности по t . Говорят также, что она сходится со скоростью $\mathcal{O}(h^p + k^p)$.

Разностная схема называется устойчивой, если малому изменению исходных данных соответствует малое изменение решения. Устойчивость характеризует чувствительность разностной схемы к различного рода погрешностям и является внутренним свойством разностной задачи.

Если разностная схема является устойчивой только при определенном соотношении между шагами сетки, то она называется условно устойчивой. Если никаких условий на соотношение между шагами не накладывается, то разностная схема называется безусловно (или абсолютно) устойчивой.

2. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Типичным примером задачи, приводящей к эллиптическому уравнению, является, например, расчет напряжений, возникших при упругом кручении длинного цилиндрического стержня. Сечение стержня может быть любой формы, например, как на рис. 2.1. Будем считать, что сечение стержня ограничено кривой C ; область, ограниченную этой кривой, мы будем обозначать через R .

Предположим, что ось z параллельна оси цилиндра и проходит через центр тяжести сечения O . Таким образом, сечение цилиндра лежит в плоскости xu . Наконец, обозначим угол кручения на единицу длины через θ , т.е. угол поворота плоскости $z = z_0$ относительно плоскости $z = 0$ будет равен $z_0 \cdot \theta$.

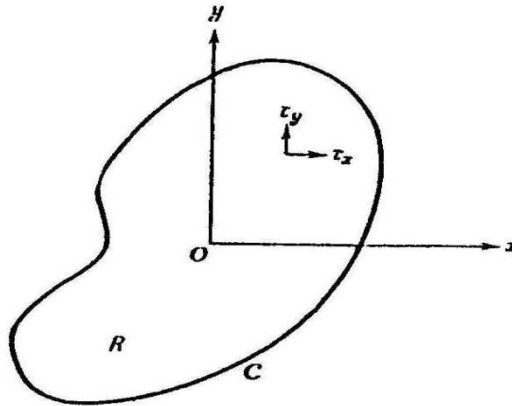


Рис.2.1. Сечение цилиндра в задаче об упругом кручении

Единственными ненулевыми напряжениями в этой задаче является напряжения сдвига τ_x и τ_u в направлениях осей x и u в плоскости xu (индексы здесь не означают дифференцирования). Если определить функцию ψ с помощью соотношений:

$$\tau_x = \frac{E\theta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial u};$$

$$\tau_u = -\frac{E\theta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где E – модуль Юнга и ν – коэффициент Пуассона для материала стержня, то функция ψ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = -2 \tag{2.1}$$

внутри области R , а на границе C этой области $\psi = \text{const.}$

Поскольку интересующие нас физические величины зависят от производных ψ , то величина константы не играет в данном случае никакой роли. Обычно принимают $\psi = 0$ на кривой C .

Уравнение (2.1) называется *уравнением Пуассона*. Его часто записывают в виде

$$\Delta\psi = -2$$

или

$$\nabla^2\psi = -2.$$

Многие физические задачи приводят к уравнению Пуассона. Распределение потенциалов (или электрических напряжений) на проводящей плоскости при задании потенциала на границе также удовлетворяют уравнению Пуассона. Наконец, задача о стационарных потоках тепла в двумерном теле также сводится к уравнению Пуассона.

После такого краткого объяснения происхождения эллиптических уравнений обратимся к выводу разностных схем их решения.

Рассмотрим классическую задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2)$$

в некоторой области R и

$$\psi = f(x, y) \quad (2.3)$$

на границе этой области, которой является кривая C . Уравнение (2.2) представляет собой *уравнение Лапласа*, частный случай уравнения Пуассона.

Ради простоты будем предполагать, что кривая C представляет собой отрезки прямых, параллельных осям x и y .

Конечно, можно было бы и не ограничиваться таким упрощенным случаем и попытаться разработать программы для кривых более сложной формы, но, так как мы рассматриваем только основы методов решения, то этого вполне достаточно.

В частности, будем рассматривать прямоугольник шириной A и высотой B . Разделим сначала ширину прямоугольника A на n интервалов, каждый размером $h = A/n$; точно таким же образом разделим высоту B на m частей размерами $k = B/m$. Внутри сетки получаются при этом $(n-1)(m-1)$ пересечений (углов) сетки. Запишем разностное соотношение для каждой внутренней точки и решим после этого получившуюся систему уравнений.

Прежде всего договоримся о том, в каком порядке нумеровать точки пересечения. Начинаем нумерацию в горизонтальном направлении слева направо от нуля, крайняя правая точка будет при этом n -ой. Аналогично в вертикальном направлении нумеруем точки снизу вверх от нуля до m . Узел с индексами i, j будет i -м слева и j -м снизу. Например, на рис. 2.2 узел P имеет индексы 3,2, узел Q – индексы 2,8.

Пусть начало координат совпадет с точкой 0,0. Обозначим

$$u(ih, jk) = u_{i,j}.$$

Аналогично запишем

$$f(ih, jk) = f_{i,j}.$$

При этой системе обозначений граничное условие (2.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_{i,0} &= f_{i,0}; & i &= 0, 1, 2, \dots, n, \\ u_{i,m} &= f_{i,m}; & i &= 0, 1, 2, \dots, n, \\ u_{0,j} &= f_{0,j}; & j &= 0, 1, 2, \dots, m, \\ u_{n,j} &= f_{n,j}; & j &= 0, 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.4)$$

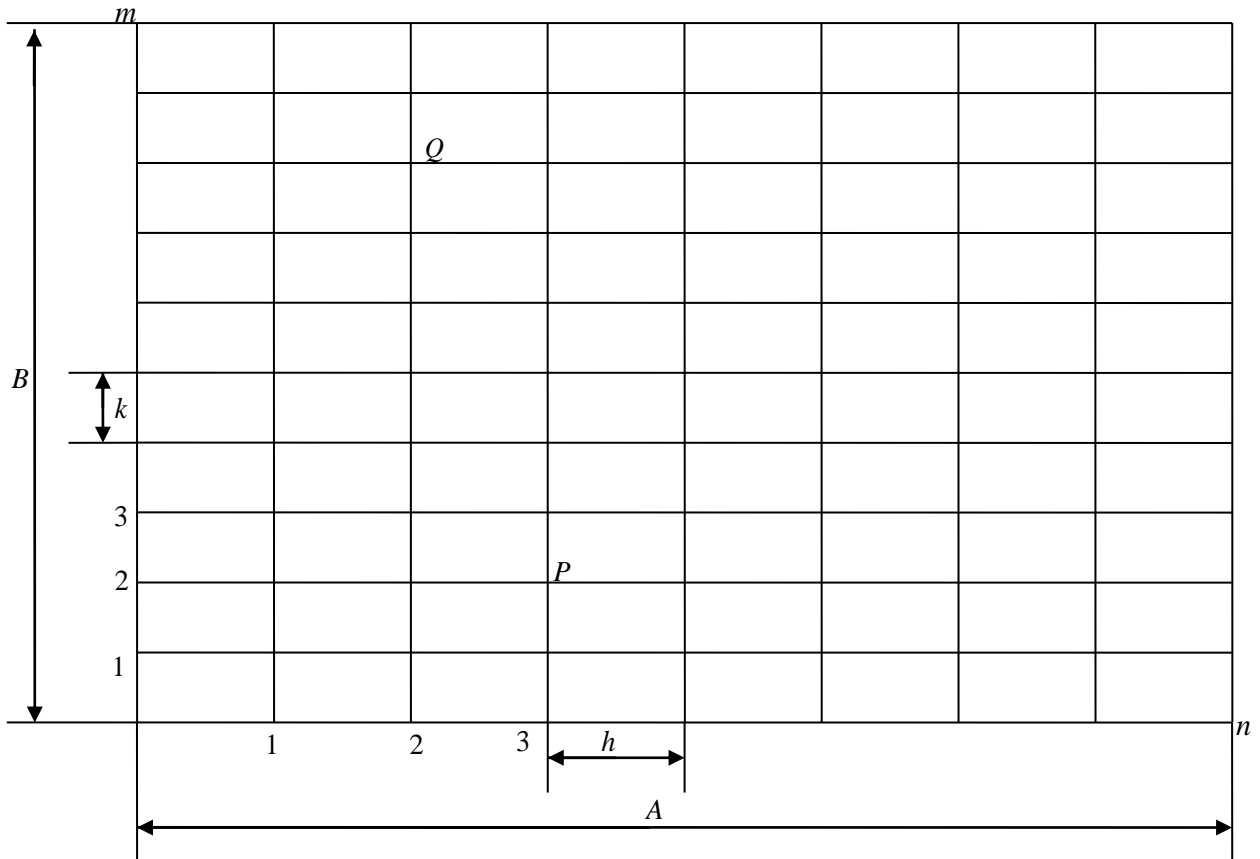


Рис. 2.2. Построение сетки в прямоугольной области

Пусть теперь точка i, j будет точкой x_0, y_0 в (1.6) и (1.7). Если теперь обозначить $\lambda = k/h$, то дифференциальное уравнение (2.2) сведется к разностному уравнению вида

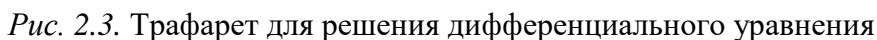
$$\lambda^2 u_{i+1,j} + \lambda^2 u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2(1 + \lambda^2) u_{i,j} = 0 \quad (2.5)$$

для $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ и $j = 1, 2, 3, \dots, m-1$.

При $\lambda = 1$, т.е. при одинаковых величинах интервалов разбиения в горизонтальном и вертикальном направлениях, это соотношение означает, что значение $u_{i,j}$ является средним арифметическим из четырех соседних с ним.

Важно то, что получена система линейных алгебраических уравнений. Всего имеется $(m-1)(n-1)$ уравнений относительно $(m+1)(n+1)$ неизвестных. После того как $2(m+n)$ неизвестных будут исключены с помощью граничного условия (2.4), остается точно $(m-1)(n-1)$ уравнений

Заметим, что уравнение (2.5) можно представить схематически, начертив пять узлов разностного уравнения (2.5) и обозначив около каждого из них соответствующий коэффициент. Этот рисунок называется трафаретом. Трафарет геометрически иллюстрирует разностную аппроксимацию дифференциального уравнения (рис. 2.3).



Запишем подробно некоторые из уравнений (2.5). Для удобства примем $\lambda = 1$, т.е. $h = k$, но общность выводов не трудно проверить при любом $\lambda > 0$. Начнем с $i = 1$, $j = 1$ и при неизменном j пройдем значения $i = 1, 2, \dots, n - 1$:

Теперь увеличим j до 2 и снова пройдем значения $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Конечное значение j будет равно $m - 1$.

18

1. Подавляющая часть коэффициентов системы равна нулю.
2. В каждом уравнении один из коэффициентов равен +4. Если в уравнении имеется пять коэффициентов, отличных от нуля, то сумма остальных равна -2 или -3.

Таким образом, в этой системе выполнены условия сходимости итерационного метода Гаусса–Зейделя (на основе ее второго свойства). Первое же свойство системы делает решение методом исключения весьма непривлекательным: исходная система с большим количеством равных нулю коэффициентов превратится после исключения неизвестных в полную треугольную систему. Учитывая, что m и n часто бывают довольно большими (несколько сотен), решение системы уравнений с помощью метода исключения нельзя признать целостным.

Выпишем некоторые уравнения в том виде, в котором с ними будут проводиться итерации. Обозначая верхними индексами порядковый номер итерации и полагая, как обычно, $u_{i,j}^{(0)} = 0$, для всех i, j , получим следующий порядок решения системы уравнений:

$$\begin{aligned}
u_{1,1}^{(1)} &= \frac{1}{4}[f_{1,0} + f_{0,1} + u_{2,1}^{(0)} + u_{1,2}^{(0)}], \\
u_{2,1}^{(1)} &= \frac{1}{4}\left[f_{2,0} + u_{1,1}^{(1)} + u_{3,1}^{(0)} + u_{2,2}^{(0)}\right], \\
u_{3,1}^{(1)} &= \frac{1}{4}\left[f_{3,0} + u_{2,1}^{(1)} + u_{4,1}^{(0)} + u_{3,2}^{(0)}\right], \\
&\dots\dots\dots \\
u_{n-1,1}^{(1)} &= \frac{1}{4}\left[f_{n-1,0} + f_{n,1} + u_{n-2,1}^{(1)} + u_{n-1,2}^{(0)}\right], \\
u_{1,2}^{(1)} &= \frac{1}{4}\left[f_{0,2} + u_{1,1}^{(1)} + u_{2,2}^{(0)} + u_{1,3}^{(0)}\right], \\
u_{2,2}^{(1)} &= \frac{1}{4}\left[u_{2,1}^{(1)} + u_{1,2}^{(1)} + u_{3,2}^{(0)} + u_{2,3}^{(0)}\right], \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Хотя вид у этой схемы получается весьма устрашающий, но в действительности все вычисления очень легко запрограммировать для ЭВМ.

Основная схема решения системы уравнений следующая. Введем в программу двумерный массив, состоящий из $m + 1$ строк и $n + 1$ столбцов. Строки нуль и m , а также столбцы нуль и n представляют собой граничные условия, т.е. они задаются перед решением системы уравнений. Иногда эта исходная информация вводится из файла, в других случаях граничные условия могут вычисляться по заданным внутри программы формулам. После этого начинаются собственно вычисления. Схема расчетов содержит два цикла: один из этих циклов имеет в качестве индексного параметра j , и значение j изменяется от 1 до $m - 1$, другой цикл имеет в качестве индексного параметра i , и значение i изменяется от 1 до $n - 1$. Каждая пара значений i, j определяет узел, в котором уравнение (2.5) решают относительно $u_{i,j}$, и только что вычисленное значение сравнивают с тем, которое было вычислено в результате

предыдущей итерации. Наибольшая разность значений неизвестных, полученных при последовательных итерациях, сравнивается с допуском ε , чтобы определить, сошелся процесс или нет. Если процесс не сошелся, то проводится очередная итерация.

Все эти вычисления, кажется, проще сделать, чем описать. Весь процесс решения эллиптических разностных уравнений изображен на рис. 2.4, где приведена блок-схема программы.

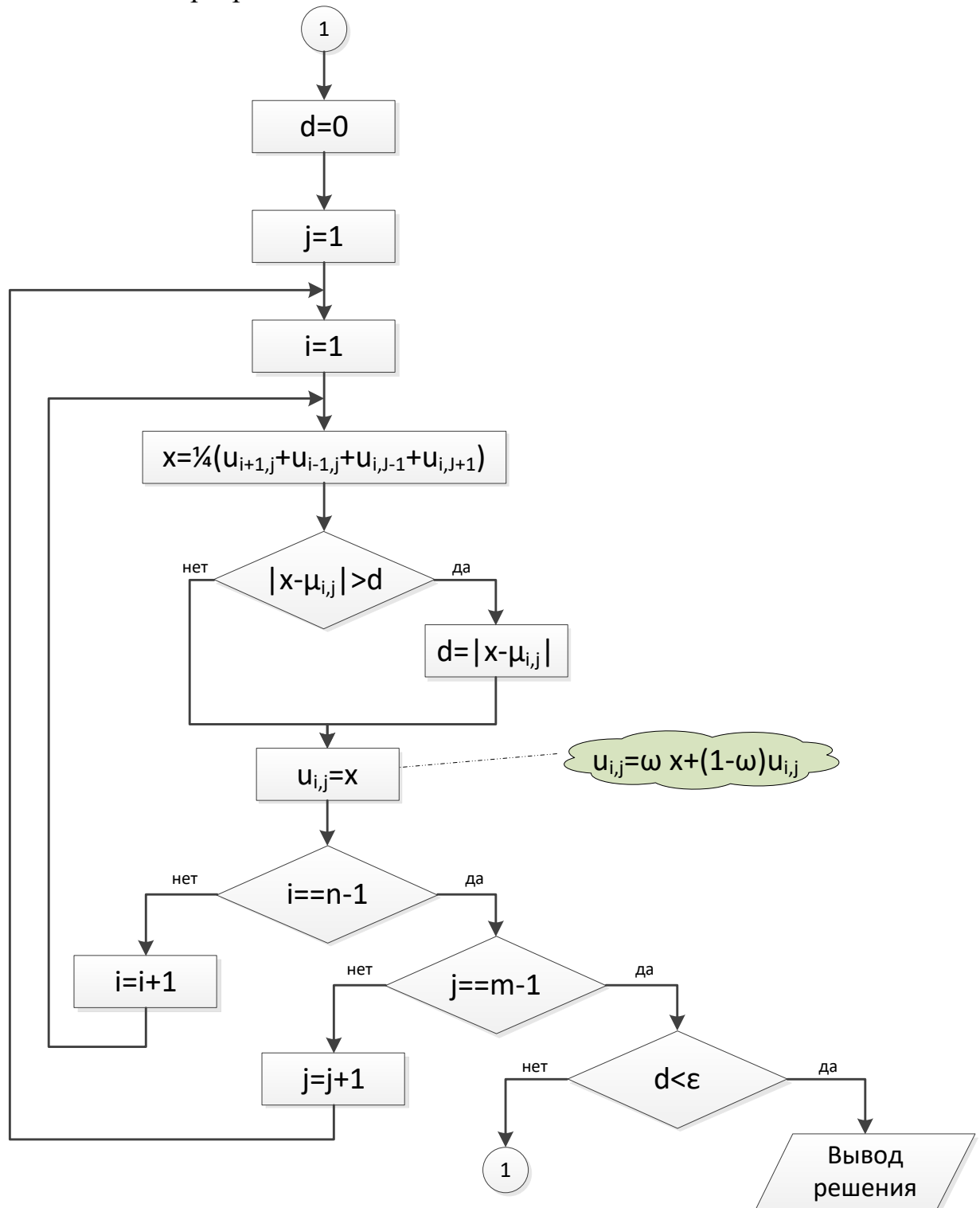


Рис. 2.4. Блок-схема программы

Метод Гаусса–Зейделя в применении к эллиптическим разностным уравнениям называется *методом Либмана* или *методом смещений*.

Вспомним теперь, что бывает полезно увеличить или уменьшить очередную поправку при расчете очередного приближения к корню уравнения. Также аналогичный метод может оказаться полезным при решении систем линейных алгебраических уравнений. В действительности это справедливо и для метода Либмана.

Чтобы можно было увеличивать или уменьшать очередные поправки, на блок-схеме показаны необходимые изменения. Параметр ω – называется ускоряющим множителем. В общем случае $1 < \omega < 2$. Если $\omega = 1$, то это обычный метод Либмана, при $\omega > 1$ – ускоренный метод Либмана. При правильном выборе ω можно получить значительную экономию времени вычислений.

Наконец, можно использовать экстраполяционный переход к пределу, как это делалось в других случаях. Если $U_{i,j}$ – точное, а $u_{i,j}$ – приближенное решение, то

$$U_{i,j} = u_{i,j} + K_{i,j}h^2$$

при условии, что четвертая производная практически постоянна. При другой величине интервала p приближенное решение будет равно $v_{i,j}$, так что

$$U_{i,j} = v_{i,j} + K_{i,j}p^2$$

и

$$K_{i,j} = \frac{v_{i,j} - u_{i,j}}{h^2 - p^2}.$$

3. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Дифференциальные уравнения второго порядка гиперболического типа

Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. Поскольку колебания представляют собой нестационарный процесс, то одной из независимых переменных является время t . Другими независимыми переменными выступают пространственные координаты x , y и z . В зависимости от их количества различают одномерное, двумерное и трехмерное волновые уравнения.

Одномерное волновое уравнение описывает, в частности, продольные колебания стержня, сечения которого совершают плоскопараллельные колебательные движения, а также поперечные колебания струны и другие задачи. Двумерное волновое уравнение используется для описания колебаний тонкой пластины (мембраны). Трехмерное волновое уравнение описывает распространение волн в пространстве (например, акустических волн в жидкостях и газах, электромагнитных волн и т.п.).

Простейшее уравнение гиперболического типа – одномерное волновое уравнение:

$$u_{xx} = au_{yy},$$

которое описывает свободные поперечные колебания струны. Струна – туго натянутая нить, практически не растяжимая, но легко изгибаемая (рис. 3.1). Пусть она имеет длину l и в положении равновесия занимает отрезок $[0, l]$ на оси Ox . Рассматриваются малые поперечные колебания. Функция $u(x, t)$ есть отклонение точки с абсциссой x от положения равновесия в момент времени t . Известны физические параметры струны: ρ – линейная плотность; T – натяжение струны; $p(x, t)$ – внешняя сила, рассчитанная на единицу длины. Без вывода приведем уравнение колебания:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, t). \quad (3.1)$$

Поделив уравнение (3.1) на ρ и введя параметр $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t),$$

где

$$g(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho}.$$

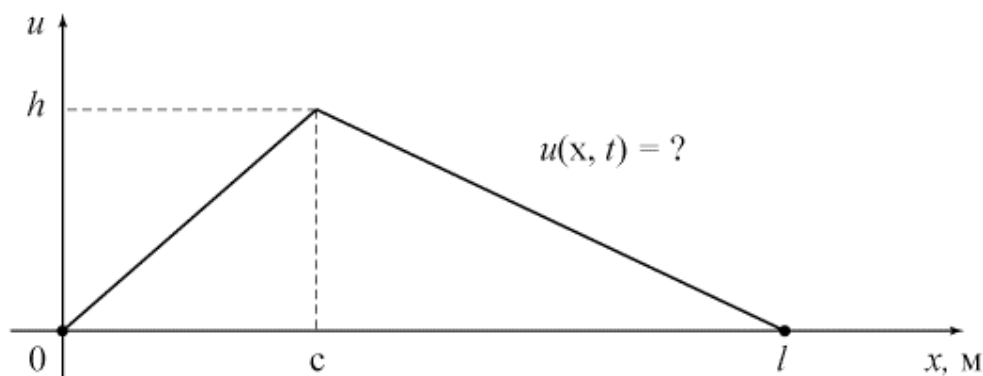


Рис. 3.1. Закрепленная на обоих концах струна оттянута вверх

Если внешняя сила отсутствует, $p(x, t) = 0$, то колебания называются собственными или свободными. Они описываются уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Колебания предполагаются малыми, т.е. их амплитуда мала по сравнению с длиной струны.

Типичная постановка смешанной (начально-краевой) задачи для ограниченной струны длиной l состоит в следующем. В начальный момент времени задаются форма струны и скорость движения каждой из ее точек (количество начальных условий должно совпадать с порядком входящей в уравнение производной по времени):

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – некоторые функции, задающие, соответственно, начальную форму струны и скорость ее точек. В простейшем случае $\psi(x)$ может быть равна нулю.

Если концы струны жестко закреплены, то их смещения равны нулю и граничные условия имеют вид:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

3.2. Продольные колебания стержня

Стержень (рис. 3.2.) – тело цилиндрической или какой-либо иной формы, для растяжения или сгибания которого надо приложить известное усилие. То обстоятельство, что при сгибании стержня надо затратить определенное усилие, отличает даже самый тонкий стержень от струны, которая гнется свободно.

Дифференциальное уравнение продольных колебаний однородного стержня имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, ρ – объемная плотность стержня; E – модуль упругости материала стержня.

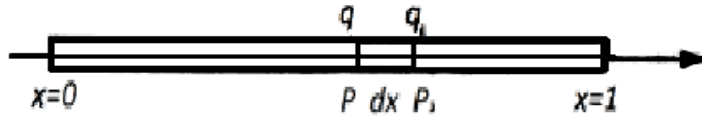


Рис. 3.2. Однородный стержень

3.3. Малые колебания газа в неограниченной цилиндрической трубке

Другим примером дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа является уравнение, описывающее малые колебания газа в неограниченной цилиндрической трубке:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где ради краткости введено обозначение

$$a = \sqrt{\frac{P_0 \gamma}{\rho_0}},$$

где P_0 – давление, под которым находится газ в невозмущенном состоянии; ρ_0 – плотность газа; γ – постоянная величина, численные значения которой приводятся в справочных таблицах.

3.4. Свободные электрические колебания в проводе. Телеграфное уравнение

При прохождении по проводу электрического тока вокруг него возникает электромагнитное поле, которое вызывает изменения, как силы тока, так и величины напряжения. Благодаря этим изменениям в проводе возникает определенный колебательный процесс. Подобный процесс можно описать одним из двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0$$

или

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0,$$

где i – сила тока; v – напряжение; L – коэффициент самоиндукции; C – емкость провода; G – утечка изоляции.

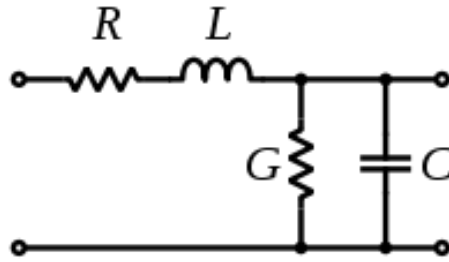


Рис. 3.3. Схематическое изображение элементарных компонентов линии электропередачи

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

где $a = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ называется телеграфным уравнением.

3.5. Колебание мембраны

Мембрана – гибкая тонкая плёнка, приведённая внешними силами в состояние натяжения и обладающая вследствие этого упругостью. Дифференциальное уравнение колебаний мембраны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t),$$

где $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, T_0 – натяжение мембраны; ρ – поверхностная плотность мембраны; $f(x, y, t)$ – плотность силы, рассчитанная на единицу массы мембраны.

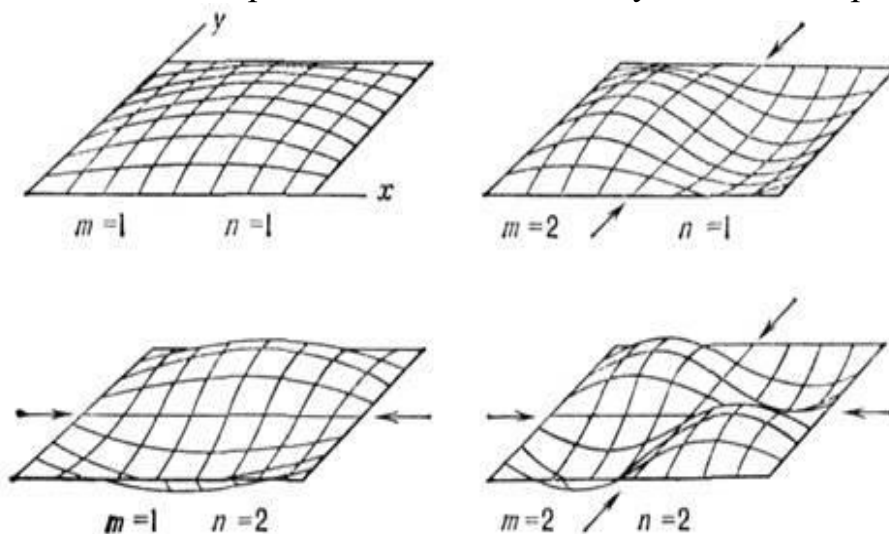


Рис. 3.4. Форма первых четырех собственных колебаний прямоугольной мембраны

3.6. Устойчивость и корректность поставленной задачи

Всякий физический определенный процесс, развивающийся во времени, должен характеризоваться функциями, непрерывно зависящими от начальных данных. Если бы не было этой непрерывной зависимости, то два существенно различных процесса могли бы соответствовать практически одинаковым системам начальных условий. Процессы такого типа нельзя считать определенными такими начальными условиями.

Если решение математической задачи непрерывно зависит от дополнительных условий (от начальных, граничных условий и от правой части уравнений), то говорят, что задача устойчива.

Говорят, что математическая задача поставлена корректно, если:

- 1) решение задачи существует;
- 2) задача имеет единственное значение;
- 3) решение задачи непрерывно зависит от исходных данных (устойчиво).

Кроме того, при решении краевых задач:

- a) надо убедиться в том, что дополнительные условия достаточны для выделения однозначного решения; это достигается доказательством теоремы единственности;
- b) надо убедиться в том, что дополнительные условия не переопределяют задачу, т.е. среди них нет несовместных условий; это достигается доказательством теоремы существования

3.7. Простейшее гиперболическое уравнение

Рассмотрим простейшую физическую задачу для изучения этого типа дифференциальных уравнений в частных производных.

Имеется струна длиной L , натянутая между двумя точками оси x , точкой $x = 0$ и точкой $x = L$. Натяжение струны равно T . Если отклонить струну от положения равновесия и отпустить, то она начнет колебаться. Смещение каждой точки струны относительно положения равновесия зависит не только от координаты x этой точки, но и от времени t . Отклонение струны от положения равновесия описывается уравнением гиперболического типа, которое приводится без вывода

$$u_{xx} - a^2 u_{tt} = 0$$

для $0 \leq x \leq L$ и $t > 0$. Коэффициент a учитывает физические характеристики

$$a^2 = \frac{w}{Tg},$$

где w – вес струны на единицу длины; T – натяжение; g – ускорение силы тяжести. Это уравнение обычно называется *волновым уравнением*. Для

простоты будем принимать $a = 1$, так что задачу можно выразить следующим образом:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0. \quad (3.2)$$

Такая формулировка задачи вовсе не означает потери общности, т.к. простая замена переменных сводит любое волновое уравнение к виду (3.2).

Поскольку концы струны закреплены, то имеем

$$u(0, t) = u(L, t) = 0; \quad t \geq 0. \quad (3.3)$$

Начальными условиями являются начальное смещение

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.4)$$

и начальная скорость

$$u_t(x, 0) = g(x); \quad 0 < x < L. \quad (3.5)$$

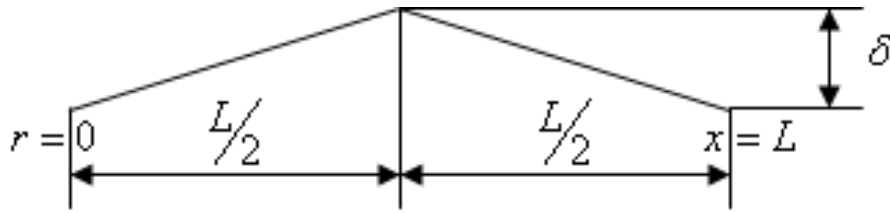


Рис. 3.4. Возможные начальные условия для колеблющейся струны, описываемой волновым уравнением

Например, если оттянуть струну за середину, как показано на рис. 3.4, и отпустить ее без придания ей начальной скорости, то начальные условия запишутся в виде:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\delta}{L}x; & 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ \frac{2\delta}{L}(L-x); & \frac{L}{2} \leq x \leq L, \end{cases}$$

$$g(x) = 0; \quad 0 < x < L.$$

Заметим, что называются эти условия *начальными*, а не *граничными*. Действительно, если задать для гиперболического уравнения граничные условия, то полученная задача не будет иметь единственного решения. Подобные задачи называются *некорректно поставленными*. Очень важно, чтобы дополнительные условия должным образом соответствовали каждому типу уравнений.

Чтобы найти разностные уравнения, соответствующие (3.2), воспользуемся снова равенствами (1.6) и (1.7), причем вместо y будем писать t . Снова начертим сетку, но теперь эта сетка простирается бесконечно в направлении положительных значений t ; можно искать решение для сколь угодно далекого момента времени. В направлении x примем шаг сетки равным h , в направлении t – равным k . Поэтому интервал L разделяется на $n = L/h$ малых интервалов h , а в направлении t может быть сколь угодно много интервалов k .

Если обозначить

$$u_{i,j} = u(ih, jk)$$

и

$$\lambda = \frac{k}{h},$$

то разностное уравнение можно записать в виде

$$u_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} \quad (3.6)$$

для $i = 1, 2, \dots, n$ и для $j = 1, 2, \dots, m$.

Трафарет при этом выглядит, как показано на рис. 3.5.

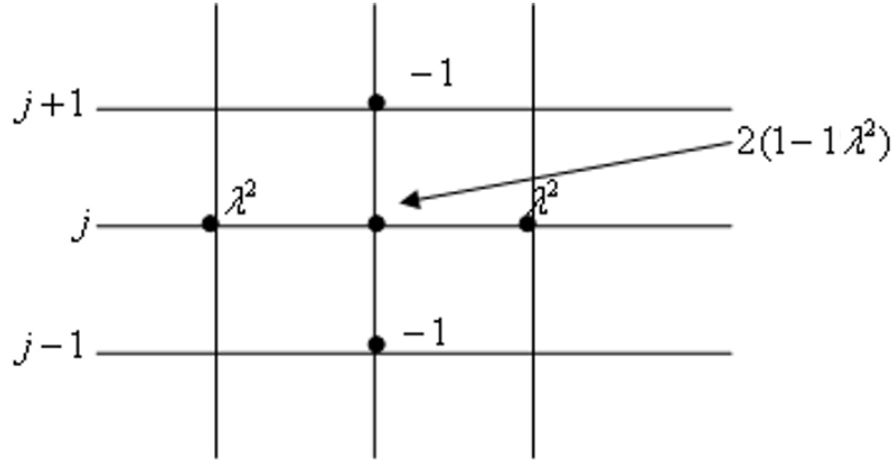


Рис. 3.5. Трафарет для решения дифференциального уравнения

Граничное условие (3.3) легко записать в виде

$$u_{0,j} = u_{n,j} = 0; \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Начальное условие (3.4) записывают в виде

$$u_{i,0} = f(ih); \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.7)$$

Чтобы записать в разностном виде начальное условие (3.5), можно использовать равенство (1.2), откуда

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{k} = g(ih).$$

После этого, используя (3.7), получаем

$$u_{i,1} = f(ih) + kg(ih). \quad (3.8)$$

Заметим теперь, что (3.7) и (3.8) дают значения u для первых двух строк: $j = 0$ и $j = 1$.

Подставляя $j = 1$ в (3.6), получим

$$u_{i,2} = 2(1 - \lambda^2)u_{i,1} + \lambda^2(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}) - u_{i,0}.$$

Все слагаемые в правой части этого уравнения включают значения u только из первых двух строк сетки; но ведь все эти значения известны из начальных условий. Поэтому в последнем уравнении имеется только одно неизвестное и все значения функции, соответствующие третьей строке, можно вычислить в явном виде. После этого можно вычислять значения функции в четвертой строке, исходя из значений во второй и в третьей строках, и т.д. столько раз, сколько потребуется. При этом даже не приходится решать систему уравнений.

Таким образом, (3.6) представляет собой *явную* схему решения волнового уравнения. Для сравнения вспомним, что при решении эллиптического уравнения (2.5), оно представляло собой схему, где в каждом уравнении было более чем по одному неизвестному; таким образом, этот метод можно было назвать *неявным*.

Рассмотрим теперь вопросы сходимости и устойчивости метода. Не будем приводить здесь доказательств, а ограничимся только формулировкой окончательных результатов. Можно утверждать, что решение (3.6) сходится к решению (3.2) (имеется в виду, что при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$ решение разностного уравнения асимптотически приближается к решению дифференциального уравнения), если

$$\lambda < 1,$$

или, что то же самое,

$$k < h. \quad (3.9)$$

Это условие является достаточным для сходимости, но оно не является необходимым. Другими словами, существуют уравнения и величины интервалов, при которых (3.9) не выполняется, но все же получается правильный результат. Все дело в том, что тогда нельзя гарантировать сходимость. В общем случае, конечно, желательно обеспечить сходимость наверняка, и поэтому будем требовать соблюдения условий (3.9).

Таким образом, как только выбрана величина интервала разбиения h в направлении x , то появляется ограничение на величину интервала по времени. Если необходимо провести вычисления для большого отрезка t , то может потребоваться большое количество шагов по времени.

Другим столь же важным обстоятельством является то, что при $\lambda > 1$ метод становится неустойчивым как в абсолютном, так и в переносном смысле. Это означает, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, что любые ошибки возрастают в ходе вычисления решения.

Поэтому при решении уравнения (3.2) явными методами условие (3.9) обязательно должно выполняться. Отличительная особенность всех явных методов заключается в том, что при их использовании должно соблюдаться некоторое условие типа (3.9), обеспечивающее сходимость и устойчивость метода.

Существуют также *неявные* методы решения гиперболических уравнений, не подверженные неустойчивости. Неявные методы и соответствующие способы нахождения решений мы обсудим в следующем разделе пособия, посвященной решению параболических уравнений; все основные идеи этого раздела можно без труда перенести и на методы решения гиперболических уравнений.

4. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В качестве примера физической задачи, приводящей к уравнению этого типа, рассмотрим процесс теплопередачи по длинному стержню, лежащему вдоль оси x от $x = 0$ до $x = L$. Предположим, что в точке $x = 0$ температура поддерживается на уровне T_0 , а в точке $x = L$ температура поддерживается на уровне T_L . Предположим также, что в момент времени $t = 0$ распределение температуры вдоль стержня задавалось функцией $f(x)$. Тогда распределение температуры вдоль стержня во все последующие моменты времени является решением уравнения

$$u_{xx} = au_t,$$

где u – температура стержня в данной точке в данный момент времени, а постоянная $a = c\rho/k$, где c – теплоемкость материала стержня; ρ – плотность материала содержания и k – его теплопроводность. Для простоты положим $a = 1$, так что уравнение сведется к следующему виду:

$$u_{xx} = u_t. \quad (4.1)$$

Запишем граничные условия для этого уравнения:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= T_0, \\ u(L, t) &= T_L, \end{aligned} \quad (4.2)$$

и начальное условие:

$$u(x, 0) = f(x). \quad (4.3)$$

Уравнение (4.1) представляет собой параболическое дифференциальное уравнение в частных производных, известное как *уравнение теплопередачи* или *уравнение диффузии*.

Многие другие важные задачи также приводят к параболическим уравнениям. Например, уравнения, которыми описываются длинные линии связи, так называемые телеграфные уравнения, также являются параболическими.

При записи в разной форме граничные условия (4.2) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{0,j} &= T_0; & j &= 1, 2, \dots, \\ u_{n,j} &= T_L; & j &= 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Начальное условие (4.3) запишем в виде

$$u_{j,0} = f(ih). \quad (4.5)$$

Чтобы преобразовать в разностную форму (4.1), снова представим себе сетку, охватывающую область $0 \leq x \leq L$ и $t > 0$ с интервалом разбиения h в направлении x и интервалом разбиения k в направлении t .

$$\begin{aligned} u_t &\approx \left(\frac{1}{k}\right) [u(x, t+k) - u(x, t)] = \left(\frac{1}{k}\right) [u_{i,j+1} - u_{i,j}], \\ u_x &\approx \left(\frac{1}{h}\right) [u(x+h, t) - u(x, t)], \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
u_{xx} &\approx \left(\frac{1}{h^2}\right) [u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)] = \\
&= \left(\frac{1}{h^2}\right) [u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Подставив в формулу (4.1) полученные выражения (4.6) и (4.7), получим

$$\begin{aligned}
(1/k)[u_{i,j+1} - u_{i,j}] &= (1/h^2)[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}]; \\
u_{i,j+1} &= u_{i,j} + (k/h^2)[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}] = \\
&= \lambda u_{i+1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

где $\lambda = k/h^2$, и индекс i изменяется от 1 до $n-1$, а индекс j – от 1 до ∞ .

Трафарет этого метода показан на рис. 4.1.

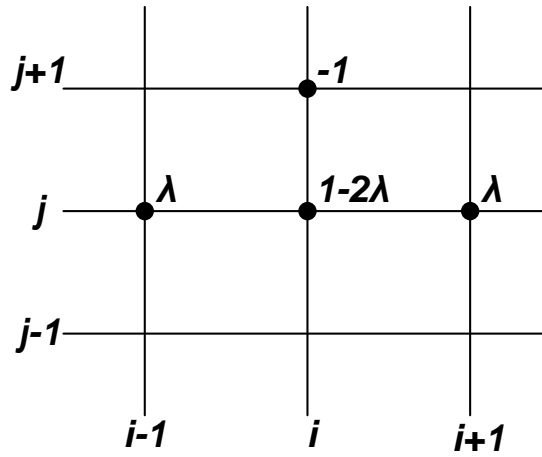


Рис. 4.1. Трафарет для решения дифференциального уравнения

Верхний предел ошибки ограничения определяют из соотношения

$$|T_{i,j}| \leq \frac{\lambda(6\lambda - 1)}{12} M h^4, \tag{4.9}$$

где $|u_{xxxx}| < M$ при условии $\lambda \neq \frac{1}{6}$, так как при $\lambda = \frac{1}{6}$ это выражение обращается в ноль.

При $\lambda = \frac{1}{6}$ верхний предел ошибки ограничения выглядит так:

$$|T_{i,j}| \leq \frac{N}{810} h^6,$$

где $|u_{xxxxxx}| < N$.

Очевидно, что с точки зрения наименьшей ошибки ограничения целесообразно было бы выбирать

$$k = \frac{1}{6} h^2.$$

Это не всегда оказывается удобным.

Преобразовать дифференциальное уравнение в разностное можно не только одним способом. Существуют и другие способы построения разностных схем для параболического уравнения. Конкретно рассмотрим два способа и укажем на их преимущества и недостатки.

Первый способ заключается в использовании левых разностей. Тот метод, который привел к уравнению (4.8), был основан на использовании правых разностей (4.6).

Если использовать левые разности ($u_t \approx 1/k(u_{i,j} - u_{i,j-1})$), то разностное уравнение записывают в следующем виде:

$$-\lambda u_{i+1,j} + (1 + 2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i-1,j} = u_{i,j-1}, \quad (4.10)$$

где $\lambda = k/h^2$. Трафарет этого метода показан на рис. 4.2.

Верхний предел ошибки ограничения определяют по формуле

$$|T_{i,j}| \leq \frac{\lambda(6\lambda - 1)}{12} M h^4, \quad (4.11)$$

где, по-прежнему $|u_{xxxx}| < M$.

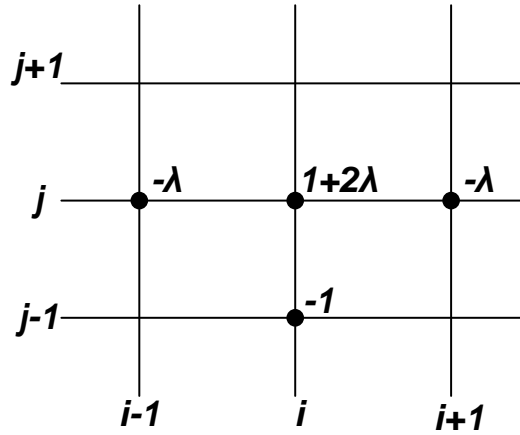


Рис. 4.2. Трафарет для решения дифференциального уравнения

Этот предел больше, чем (4.9); кроме того, нельзя свести ошибку ограничения к $O(h^6)$ специальным выбором параметра λ .

Рассмотрим второй способ построения разностного уравнения, эквивалентного (4.1). Вспомним, что, согласно (4.7), в точке i, j

$$u_{xx} \approx \left(\frac{1}{h^2}\right) [u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}].$$

Аналогично в точке $i, j + 1$

$$u_{xx} \approx \left(\frac{1}{h^2}\right) [u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}].$$

Усредняя эти два приближения, получим

$$u_{xx} \approx \left(\frac{1}{h^2}\right) (u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}).$$

Если теперь для вычисления u_t воспользоваться правыми разностями (4.6), то

$$u_t \approx \left(\frac{1}{k}\right) [u_{i,j+1} - u_{i,j}],$$

и разностное уравнение, эквивалентное (4.1), записывают в виде

$$\frac{\lambda}{2} u_{i-1,j+1} - (\lambda + 1) u_{i,j+1} + \frac{\lambda}{2} u_{i+1,j+1} = -\frac{\lambda}{2} u_{i-1,j} + (\lambda - 1) u_{i,j} - \frac{\lambda}{2} u_{i+1,j}. \quad (4.12)$$

Этот способ построения разностного уравнения часто называют методом Кранка–Никольсона. Трафарет для (4.12) показан на рис. 4.3.

Верхний предел ошибки ограничения определяют по формуле:

$$|T_{i,j}| \leq \frac{\lambda}{12} M h^4, \quad (4.13)$$

где $|u_{xxxxxx}| < N$.

Этот верхний предел в $(6\lambda + 1)$ раз меньше, чем (4.11). Поскольку предел ошибки ограничения (4.13) меньше, чем (4.11), то по этой характеристике разностное уравнение (4.12) предпочтительнее, чем (4.10).

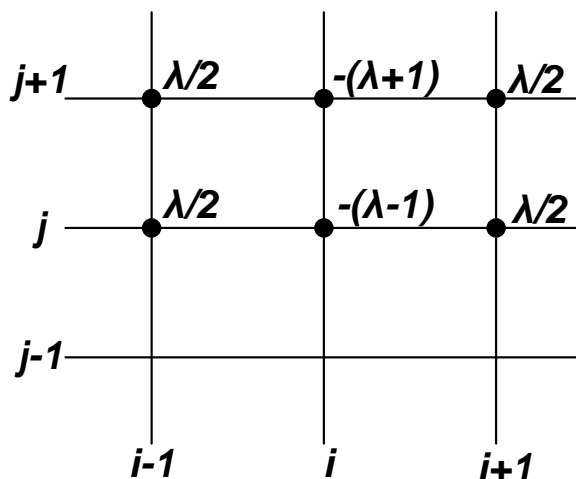


Рис. 4.3. Трафарет для решения дифференциального уравнения методом Кранка – Никольсона

Выше были рассмотрены три различных способа разностного представления дифференциального уравнения $u_{xx} = u_t$, а именно формулы (4.8), (4.10) и (4.12). Рассмотрим теперь методы решения каждого из этих разностных уравнений и сопоставим их достоинства и недостатки. Во всех случаях будем считать, что граничные условия заданы в виде (4.4) и (4.5).

Первый способ, определяемый формулой (4.8), представляет собой явную систему уравнений для $u_{i,j+1}$. Имея на основании начальных и граничных условий первую строку решения, можно вычислить вторую строку, непосредственно из (4.8), при этом $j = 0$. Вычислив вторую строку, можно таким же образом вычислить третью строку, $j = 1$. Таким же способом можно продолжить вычислять значения и по оси времени, сколько в этом есть необходимость.

Для параболических уравнений возникают вопросы сходимости и устойчивости. Действительно, процесс вычисления решений сходится и устойчив, если

$$\lambda < \frac{1}{2},$$

или, что то же самое, при

$$k < \frac{h^2}{2}.$$

Тем самым накладываются довольно серьезные ограничения на выбор шага по времени, гораздо более серьезные, чем в случае гиперболического уравнения. Именно это и заставляет искать возможности решения уравнения другими способами, в частности (4.10) и (4.12).

И (4.10), и (4.12) представляют собой неявные методы решения, аналогичные тому методу, который был применен для эллиптических уравнений. Рассмотрим сначала (4.10). Можно выписать уравнения для первой строки решения $j = 1$, используя начальные и граничные условия (4.4) и (4.5):

$$\begin{aligned}(1 + 2\lambda)u_{1,1} - \lambda u_{2,1} &= f(h) + \lambda T_0, \\ -\lambda u_{1,1} + (1 + 2\lambda)u_{2,1} - \lambda u_{3,1} &= f(2h), \\ -\lambda u_{2,1} + (1 + 2\lambda)u_{3,1} - \lambda u_{4,1} &= f(3h), \\ &\dots\dots\dots \\ -\lambda u_{n-2,1} + (1 + 2\lambda)u_{n-1,1} &= f(nh - h) + \lambda T_L.\end{aligned}$$

Всего получается $n - 1$ линейных уравнений с $n - 1$ неизвестными для $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Эти уравнения можно решить методом исключения; кроме того, что подавляющее большинство коэффициентов равно нулю, сам вид системы делает решение методом исключения довольно простой задачей. Дело в том, что единственные ненулевые коэффициенты расположены в трех диагональных рядах симметрично относительно главной диагонали. Система уравнений этого типа называется тридиагональной. Можно решать эту систему и с помощью итерационного метода Гаусса–Зейделя, так как диагональный коэффициент в каждом уравнении равен $1 + 2\lambda$, а сумма недиагональных равна -2λ , что обеспечивает сходимость. Для ускорения сходимости можно воспользоваться экстраполяцией.

Найдя решение для первой строки, т.е. для $t = k, j = 1$, можно записать систему уравнений для второй строки и снова получить тридиагональную систему из $n - 1$ уравнений. После решения этой системы можно переходить к третьей строке и так далее.

Для вычисления одной строки значений U каждый раз приходится решать систему из $n - 1$ линейных алгебраических уравнений.

Поскольку трудоемкость этого способа гораздо больше, чем для явных формул (4.8), можно задать вопрос, имеет ли смысл вообще когда-либо прибегать к такому способу? Ответ на вопрос заключается в том, что (4.10) устойчиво и сходится для всех $\lambda > 0$. Поэтому, пользуясь методом (4.10), можно брать гораздо большую величину шага по времени. Попробуем определить, можно ли действительно добиться экономии машинного времени.

Приблизительно можно считать, что при использовании метода (4.10) затраты машинного времени на вычисление одной строки решения будут вдвое больше, чем при использовании метода (4.8). Если взять $\lambda = 1$, то общая затрата времени на расчет решения до определенного момента будет вдвое меньше. Хотя, нужно учесть, что ошибка ограничения круто возрастает с ростом шага по времени, так что определяющим фактором может стать именно максимально допустимая ошибка.

Последняя разностная формула (4.12) является другим неявным методом и для вычисления одной строки также требуется решение тридиагональной системы из $n - 1$ уравнений. Затраты машинного времени при использовании этой формулы будут, следовательно, такими же, как и для (4.10). Этот метод также устойчив для всех λ .

Заметим, что при удвоении λ в формуле (4.12) ошибка ограничения удваивается, в то время как в (4.10) ошибка ограничения учетверяется. Поэтому метод (4.12) (метод Кранка–Никольсона) предпочтительнее, нежели (4.10).

Нужно отметить, однако, что для других параболических уравнений этот метод устойчив не при всех λ и поэтому иногда приходится прибегать к (4.10).

Существует еще много различных разностных методов и явных, и неявных.

5. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

5.1. Составление математических моделей двойственных задач

Любой задаче, называемой *исходной* или *прямой*, можно поставить в соответствие другую задачу, которая называется *двойственной* или *сопряженной*. Обе эти задачи образуют пару двойственных задач. Каждая из задач является двойственной к другой задаче рассматриваемой пары.

В теории двойственности используются четыре пары двойственных задач:

Исходная задача

Двойственная задача

Симметричные пары

- | | |
|---|--|
| <p>1. $f(x) = Cx \rightarrow \max,$
 $Ax \leq A_0,$
 $x \geq 0;$</p> | <p>$w(y) = yA_0 \rightarrow \min,$
 $yA \geq C,$
 $y \geq 0.$</p> |
| <p>2. $f(x) = Cx \rightarrow \min,$
 $Ax \geq A_0,$
 $x \geq 0;$</p> | <p>$w(y) = yA_0 \rightarrow \max,$
 $yA \leq C,$
 $y \geq 0.$</p> |

Несимметричные пары

- | | |
|--|--|
| <p>3. $f(x) = Cx \rightarrow \max,$
 $Ax = A_0,$
 $x \geq 0;$</p> | <p>$w(y) = yA_0 \rightarrow \min,$
 $yA \geq C.$</p> |
| <p>4. $f(x) = Cx \rightarrow \min,$
 $Ax = A_0,$
 $x \geq 0;$</p> | <p>$w(y) = yA_0 \rightarrow \max,$
 $yA \leq C.$</p> |

Здесь $C = (c_1, c_2, \dots, c_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_m),$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Правила составления двойственных задач:

- а) во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны находиться в правой части, а члены с неизвестными – в левой;
- б) ограничения-неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону;
- в) если знаки неравенств в ограничениях исходной задачи " \leq ", то целевая функция $f(x) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ должна максимизироваться, а если " \geq ", то минимизироваться;
- г) каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, должно удовлетворять условию неотрицательности, а неизвестное, отвечающее ограничению-равенству, может быть любого знака;
- д) целевая функция двойственной задачи имеет вид
$$w(y) = c_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m,$$
где c_0 - свободный член целевой функции $f(x)$ исходной задачи; b_1, b_2, \dots, b_m - свободные члены в ограничениях исходной задачи, при этом b_i - свободный член именно того ограничения исходной задачи, которому соответствует неизвестная y_i , а y_1, y_2, \dots, y_m - неизвестные в двойственной задаче;
- е) целевая функция $w(y)$ двойственной задачи должна оптимизироваться противоположным по сравнению с $f(x)$ образом, то есть если $f(x) \rightarrow \max$, то $w(y) \rightarrow \min$, и если $f(x) \rightarrow \min$, то $w(y) \rightarrow \max$;
- ж) каждому неизвестному $x_k, k = 1, 2, \dots, n$ исходной задачи соответствует ограничение в двойственной задаче. Совокупность этих n ограничений (вместе с условиями неотрицательности неизвестных y_j , соответствующих ограничениям-неравенствам исходной задачи) образует систему ограничений двойственной задачи. Все ограничения двойственной задачи имеют вид неравенств, свободные члены которых находятся в правых частях, а члены с неизвестными y_1, y_2, \dots, y_m - в левых. Все знаки неравенств имеют вид " \geq ", если $w(y) \rightarrow \min$, и " \leq ", если $w(y) \rightarrow \max$.

Коэффициенты, с которыми неизвестные y_1, y_2, \dots, y_m входят в ограничение, соответствующее неизвестному x_k , совпадают с коэффициентами при этом неизвестном x_k в ограничениях исходной задачи, а именно: коэффициент при y_i совпадает с тем коэффициентом при x_k , с которым x_k входит в ограничение исходной задачи, соответствующее неизвестному y_i .

Пример.

Составить задачу, двойственную к данной

$$f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

Задача имеет вид исходной задачи симметричной пары двойственных задач.

Умножим правые части ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим целевую функцию

$$w(y) = 5y_1 + 4y_2 + 8y_3 \rightarrow \max.$$

Функция $w(y)$ максимизируется, так как целевая функция исходной задачи минимизируется.

Умножим коэффициент при x_1 в системе ограничений на соответствующие переменные двойственной задачи и сложим их, получим

$$2y_1 + y_2 + y_3.$$

Данная сумма меньше или равна коэффициенту при x_1 в целевой функции

$$2y_1 + y_2 + y_3 \leq 5.$$

Неравенство имеет вид " \leq ", потому что целевая функция двойственной задачи максимизируется. Аналогично составляются еще два ограничения двойственной задачи:

$$y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2,$$

$$-y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 3.$$

Все переменные двойственной задачи удовлетворяют условию неотрицательности, потому что все ограничения исходной задачи – неравенства.

Окончательно двойственная задача имеет вид

$$w(y) = 5y_1 + 4y_2 + 8y_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 5, \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2, \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 3, \\ y_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

5.2. Первая теорема двойственности

Отметим следующие важные свойства взаимно двойственных задач. Для определенности будем считать, что задача на минимум является прямой, а на максимум – двойственной.

Лемма 1. Если x и y допустимые решения соответственно прямой и двойственной задачи, то $z(x) \geq w(y)$.

Лемма 2. Если x и y допустимые решения соответственно прямой и двойственной задачи и $z(x) = w(y)$, то x и y – оптимальные решения.

Теоремы двойственности позволяют установить взаимосвязь между оптимальными решениями пары двойственных задач. Решив одну из пары двойственных задач, можно или найти оптимальное решение другой, не решая ее, или установив его отсутствие. Возможны следующие случаи:

- ✓ обе задачи из пары двойственных имеют оптимальные решения;
- ✓ одна из задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, а другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Теорема (первая теорема двойственности). Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и двойственная к ней имеет оптимальное решение; причем значения целевых функций задач на своих оптимальных решениях совпадают.

Если одна из пары двойственных задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Пример.

Для данной задачи составить двойственную, решить ее симплекс-методом и, используя первую теорему двойственности, найти решение исходной задачи:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \min, \\ &\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 5, \\ x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Используя вторую симметричную пару двойственных задач, составляем задачу, двойственную исходной:

$$\begin{aligned} z(y) &= 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 \rightarrow \max, \\ &\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 2, \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq 4, \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 6, \\ y_{1,2,3} \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Вводя неотрицательные дополнительные переменные y_4, y_5, y_6 , приводим задачу к каноническому виду:

$$z(y) = 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_4 = 2, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_5 = 4, \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 + y_6 = 6, \\ y_{1,2,3,4,5,6} \geq 0. \end{cases}$$

Находим начальное опорное решение $Y_1 = (0,0,0,2,4,6)$ с базисом из единичных векторов $B_1 = (y_4, y_5, y_6)$. Решение задачи симплекс-методом приведено в таблице.

		6	5	2	0	0	0		
	C_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Св.чл.	
y_4	0	2	1	0	1	0	0	2	1
y_5	0	1	1	1	0	1	0	4	4
y_6	0	2	-1	2	0	0	1	6	3
z		-6	-5	-2	0	0	0	0	
y_1	6	1	1/2	0	1/2	0	0	1	2
y_5	0	0	1/2	1	-1/2	1	0	3	6
y_6	0	0	-2	2	-1	0	1	4	-
z		0	-2	-2	3	0	0	6	
y_2	5	2	1	0	1	0	0	2	-
y_5	0	-1	0	1	-1	1	0	2	2
y_6	0	4	0	2	1	0	1	8	4
z		4	0	-2	5	0	0	10	
y_2	5	2	1	0	1	0	0	2	
y_3	2	-1	0	1	-1	1	0	2	
y_6	0	6	0	0	3	-2	1	4	
z		2	0	0	3	2	0	14	

Оптимальное решение двойственной задачи $Y^* = (0, 2, 2, 0, 0, 4)$, его базис $B_1 = (y_2, y_3, y_6)$, значение целевой функции $z_{\max}^* = 14$.

Оптимальное решение исходной задачи, двойственной к решенной, можно найти по формуле

$$X^* = C^* D^{-1}.$$

Матрица D состоит из координат векторов y_2, y_3, y_6 , входящих в базис оптимального решения двойственной задачи:

$$D = (y_2, y_3, y_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица D^{-1} находится в последней симплекс-таблице. Ее столбцы располагаются под столбцами единичной матрицы, т.е. под единичными векторами y_4, y_5, y_6 , образующими базис начального опорного решения:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора C^* являются коэффициенты целевой функции при базисных неизвестных оптимального решения y_2, y_3, y_6 . Данные коэффициенты записываются в том же порядке, в каком векторы условий входят в базис оптимального решения, т.е. $C^* = (5, 2, 0)$.

$$\text{Вычисляем } X^* = C^* D^{-1} = (5, 2, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (3, 2, 0).$$

Оптимальное решение исходной задачи можно найти проще, по формуле

$$x_i^* = \Delta_i^* + c_i^*, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для этого необходимо к оценкам разложений по базису оптимального решения векторов y_4, y_5, y_6 , входящих в базис начального опорного решения, т.е. к оценкам этих векторов в последней симплекс-таблице, прибавить соответствующие коэффициенты целевой функции (они расположены над верхней строкой таблицы над соответствующими оценками)

$$x_1^* = 3 + 0 = 3, \quad x_2^* = 2 + 0 = 2, \quad x_3^* = 0 + 0 = 0.$$

Ответ. $f_{min}^* = 14$ при $x^* = (3, 2, 0)$.

5.3. Вторая теорема двойственности

Вторая теорема двойственности иначе называется **принципом дополняющей нежесткости**. Для ее формулировки нам потребуется ввести классификацию ограничений.

Если взять конкретный план задачи линейного программирования и подставить его в некоторое ограничение, имеющее вид нестрогого неравенства, то оно будет выполняться либо как равенство, либо как строгое неравенство. В случае равенства ограничение для этого плана будет *активным* (в другой терминологии жестким, связанным), а при неравенстве *неактивным* (нежестким, свободным).

Теорема (вторая теорема двойственности). Для оптимальных планов прямой и двойственной задачи в каждой паре двойственных условий только одно условие может быть неактивным (нежестким, свободным).

Доказательство. Приведем доказательство для несимметричного случая. Предположим, что прямая задача задана в канонической форме. Тогда, двойственные условия имеют следующий вид:

$$x_j \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть \vec{X} и \vec{Y} - оптимальные планы.

Составим выражение:

$$\begin{aligned} \vec{X}^T [\vec{c} - A^T \vec{Y}] &= \vec{X}^T \vec{c} - \vec{X}^T A^T \vec{Y} = \langle \text{транспонируем скаляр} \rangle = \vec{X}^T \vec{c} - \vec{Y}^T A \vec{X} = \\ &= \langle \text{т. к. } \vec{X} - \text{план} \rangle = \vec{X}^T \vec{c} - \vec{Y}^T \vec{b} = L(\vec{X}) - M(\vec{Y}) = \\ &= \langle \text{по первой теореме двойственности} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Расписываем покомпонентно скалярное произведение:

$$\vec{X}^T [\vec{c} - A^T \vec{Y}] = \sum_{j=1}^n \underbrace{x_j}_{\geq 0} \left[c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right] = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отсюда следует, что в каждой j -й паре двойственных условий

$$\text{либо } x_j = 0, \quad \text{либо } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j.$$

Доказательство для симметричного случая предлагается провести самостоятельно.

Замечание. Если планы прямой и двойственной задач являются невырожденными, то принцип дополняющей нежесткости звучит более категорично: для оптимальных планов прямой и двойственной задач в каждой паре двойственных условий одно является активным, другое неактивным.

Пример.

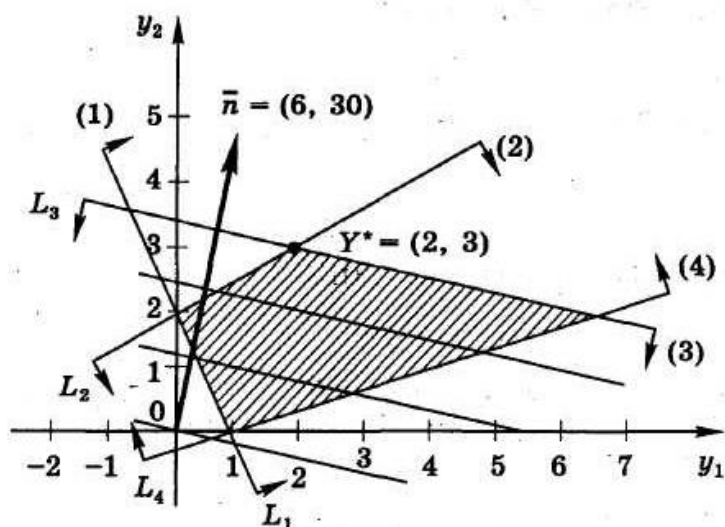
Для данной задачи составить двойственную, решить ее графическим методом и, используя вторую теорему двойственности, найти решение исходной задачи:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 2x_4 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 30, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Составим двойственную задачу:

$$\begin{aligned} w(y) &= 6y_1 + 30y_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -2y_1 - y_2 \leq -2, & (1) \\ -y_1 + 2y_2 \leq 4, & (2) \\ y_1 + 4y_2 \leq 14, & (3) \\ 2y_1 - 5y_2 \leq 2. & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

Решим эту задачу графическим методом. На рис. 5.1 изображены область допустимых решений задачи, нормаль $\bar{n} = (6; 30)$, целевая функция и оптимальное решение задачи $Y^* = (2; 3)$.



$$Y^* = L_2 \cap L_3,$$

$$+ \begin{cases} -y_1 + 2y_2 = 4, \\ y_1 + 4y_2 = 14 \end{cases}$$

$$6y_2 = 18;$$

$$y_2^* = 3, \quad y_1^* = 2;$$

$$Y^* = (2; 3)$$

$$w(y) = 6 \cdot 2 + 30 \cdot 3 = 102.$$

Рис. 5.1. Решение задачи графическим методом

Подставим оптимальное решение $Y^* = (2; 3)$ в систему ограничений. Получим, что ограничения (1) и (4) выполняются как строгие неравенства:

$$\begin{cases} -2 \cdot 2 - 3 < -2 \Rightarrow x_1^* = 0, \\ -2 + 2 \cdot 3 = 4, \\ 2 + 4 \cdot 3 = 14, \\ 2 \cdot 2 - 5 \cdot 3 < 2 \Rightarrow x_4^* = 0. \end{cases}$$

Согласно второй теореме двойственности соответствующие координаты оптимального решения двойственной задачи, т.е. исходной задачи, равны нулю: $x_1^* = x_4^* = 0$. Учитывая это, из системы ограничений исходной задачи получим

$$+ \begin{cases} -x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_2 + 4x_3 = 30 \end{cases}$$

$$6x_3 = 42;$$

$$x_3^* = 7, \quad x_2^* = 1; \quad X^* = (0, 1, 7, 0).$$

Ответ: $f_{min}^* = 102$ при $X^* = (0, 1, 7, 0)$.

5.4. Разновидности симплекс-метода

В симплекс-методе, изученном в рамках дисциплины «Исследование операций», решение задачи начинается с некоторого допустимого базисного решения. На последующих итерациях осуществляется переход также к допустимым базисным решениям с постепенным улучшением значения целевой функции, пока не будет достигнута точка оптимума. Такой алгоритм иногда называют прямым симплекс-методом.

Рассмотрим две другие разновидности симплекс-метода: двойственный симплекс-метод и обобщенный симплекс-метод. В двойственном симплекс-

методе решение задачи начинается с недопустимого, но лучшего, чем оптимальное, решения. Последовательные итерации этого метода приближают решение к области допустимости без нарушения оптимальности (точнее, "супероптимальности") промежуточных решений. Когда будет достигнута область допустимых решений, процесс вычислений заканчивается, так как последнее решение будет оптимальным. В обобщенном симплекс-методе комбинируются элементы прямого и двойственного методов. Начальное решение в этом методе будет и неоптимальным, и недопустимым. На последующих итерациях базисные решения могут быть как допустимыми, так и недопустимыми. На последней итерации решение должно быть и оптимальным, и допустимым (если, конечно, такое решение существует).

5.4.1. Двойственный симплекс-метод

Так же, как и в прямом симплекс-методе, основная проблема двойственного симплекс-метода состоит в том, чтобы на каждой итерации получить "правильное" базисное решение. Для реализации двойственного симплекс-метода разработаны следующие два условия, выполнение которых гарантирует оптимальность последовательных промежуточных решений и приближение их к области допустимых решений.

Двойственное условие допустимости. В качестве исключаемой переменной x_r выбирается базисная переменная, имеющая наибольшее по абсолютной величине отрицательное значение. Если таких переменных несколько, то выбор произволен. Если все базисные переменные неотрицательные, процесс вычислений заканчивается.

Двойственное условие оптимальности. Вводимая в базис переменная определяется как переменная, на которой достигается следующий минимум:

$$\min_{\text{небазисные } x_j} \left\{ \left| \frac{f_j - c_j}{\alpha_{rj}} \right|, \alpha_{rj} < 0 \right\},$$

где $f_j - c_j$ — коэффициент в z -строке симплекс-таблицы, соответствующий переменной x_j , α_{rj} — отрицательный коэффициент из симплекс-таблицы, расположенный на пересечении ведущей строки (соответствующей исключаемой переменной x_r) и столбца, соответствующего небазисной переменной x_j . При наличии нескольких альтернативных переменных выбор делается произвольно. Отметим, что двойственное условие оптимальности гарантирует достижение оптимального решения.

Чтобы существовало начальное оптимальное ("супероптимальное") и недопустимое решение, необходимо выполнение двух условий:

1. Целевая функция должна удовлетворять условию оптимальности обычного симплекс-метода.
2. Все ограничения должны быть неравенствами типа " \leq ".

Второе условие можно удовлетворить простым умножением на -1 неравенств типа " \geq ". Если есть ограничения в виде равенств, то эти равенства

заменяются на два неравенства. Например, равенство $x_1 + x_2 = 3$ эквивалентно двум неравенствам

$$x_1 + x_2 \leq 3, \quad x_1 + x_2 \geq 3 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 3, \quad -x_1 - x_2 \leq -3.$$

После преобразования всех ограничений в виде неравенств типа " \leq " начальное недопустимое решение возможно тогда и только тогда, когда по крайней мере в одном неравенстве правая часть будет строго отрицательной. В противном случае двойственный симплекс-метод не применяется, поскольку возможное начальное решение уже оптимально и допустимо.

Пример.

Дана следующая задача линейного программирования:

$$q = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Сначала первых два неравенства умножаются на -1, чтобы привести их к неравенствам типа " \leq ".

$$q = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -3x_1 - x_2 \leq -3, \\ -4x_1 - 3x_2 \leq -6, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Начальная симплекс-таблица этой задачи имеет следующий вид:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Св. чл.
x_3	-3	-1	1	0	0	-3
x_4	-4	-3	0	1	0	-6
x_5	1	1	0	0	1	3
q	-3	-2	0	0	0	0

Поскольку $q_j - c_j \leq 0$ для всех $j = 1, \dots, 5$, начальное базисное решение ($x_1 = -3, x_2 = -6, x_3 = 3$) является оптимальным и недопустимым.

Двойственное условие допустимости указывает на переменную $x_4 (= -6)$ как на исключаемую из базиса. Теперь применим двойственное условие оптимальности для определения вводимой переменной. Для этого используем следующую таблицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
q – строка ($q_j - c_j$)	-3	-2	0	0	0
x_4 – строка, α_{4j}	-4	-3	0	1	0
отношение $\left \frac{q_j - c_j}{\alpha_{rj}} \right $	$3/4$	$2/3$	—	—	—

Приведенные отношения показывают, что вводимой переменной будет x_2 . Отметим, что переменные x_j будут кандидатами на включение в базисное решение только тогда, когда коэффициент α_{4j} будет строго отрицательным. По этому критерию переменные x_3 , x_4 и x_5 не рассматриваются как кандидаты на включение в базис.

Следующая таблица получена с помощью известных операций над строками, применяемых в прямом симплекс-методе:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Св. чл.
x_3	$-\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1
x_2	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_5	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	1
q	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	4
отношение	$\frac{1}{5}$	—	—	2	—	

Последняя таблица показывает, что из базиса исключается переменная x_3 и вводится x_1 . В результате получаем следующую симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Св. чл.
x_1	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_5	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{6}{5}$
q	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{21}{5}$

Решение, представленное в последней таблице, допустимо (и оптимально), поэтому вычисления заканчиваются. Это решение имеет вид $x_1^* = \frac{3}{5}$, $x_2^* = \frac{6}{5}$, $q^* = \frac{21}{5}$.

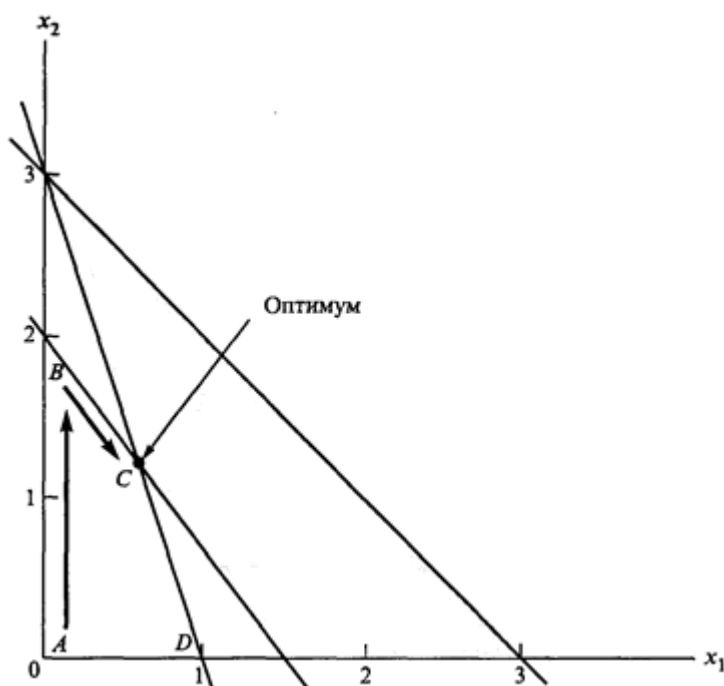


Рис. 5.2. Последовательность шагов метода

На рис. 5.2 показана последовательность шагов двойственного симплекс-метода при решении задачи из примера. Алгоритм начинается в крайней точке A (которой соответствует недопустимое, но "лучшее, чем оптимальное" решение), затем он переходит к точке B (которой также соответствует недопустимое, но "лучшее, чем оптимальное" решение) и заканчивается в точке C , уже принадлежащей области допустимых решений.

5.4.2. Обобщенный симплекс-метод

В прямом симплекс-методе начальное решение допустимо, но не оптимально. В двойственном симплекс-методе данное решение оптимально (точнее, "супероптимально"), но не допустимо. Возникает естественный вопрос: можно ли начать решение задачи ЛП с неоптимального и недопустимого решения? Мы видели, что в прямом симплекс-методе при отсутствии допустимого начального решения используются искусственные переменные. В двойственном симплекс-методе при отсутствии оптимального начального решения также применяются искусственные ограничения. Хотя задача этих процедур и состоит в обеспечении автоматического выполнения вычислений, необходимо не терять из виду основную идею симплексных алгоритмов, а именно то, что оптимальное решение задачи ЛП достигается в одной из крайних (угловых) точек пространства допустимых решений. С учетом этих замечаний можно разработать симплексный алгоритм решения задач, в котором начальное решение будет и неоптимальным, и недопустимым. Следующий пример показывает, как можно обобщить симплексный алгоритм.

Пример.

Дана следующая задача линейного программирования:

$$\begin{cases} w = 2x_3 \rightarrow \max, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 8, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 10, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

В качестве начальной таблицы можно принять следующую симплекс-таблицу, где представлено начальное решение (x_4, x_5, x_6) , которое не оптимально (из-за переменной x_3) и не допустимо (так как $x_4 = -8$). (Заметим, что в этой таблице первое равенство умножено на -1 для того, чтобы показать недопустимость решения непосредственно в столбце "Св. чл.")

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Св. чл.
x_4	1	-2	2	1	0	0	-8
x_5	-1	1	1	0	1	0	4
x_6	2	-1	4	0	0	1	10
w	0	0	-2	0	0	0	0

Решение задачи без использования каких-либо искусственных переменных или ограничений может быть следующим. Сначала освобождаемся от свойства недопустимости базисного решения путем применения версии двойственного условия допустимости. В нашем примере это приведет к выбору переменной x_4 в качестве исключаемой из базиса. Чтобы определить вводимую переменную, надо найти в x_4 -строке строго отрицательный коэффициент, соответствующий небазисной переменной. Выбор вводимой переменной можно осуществить без удовлетворения требования оптимальности решения, так как в

данном случае это не существенно. В результате получим следующую таблицу (вводимая переменная x_2):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Св. чл.
x_2	$-1/2$	1	-1	$-1/2$	0	0	4
x_5	$-1/2$	0	2	$1/2$	1	0	0
x_6	$3/2$	0	3	$-1/2$	1	1	14
w	0	0	-2	0	0	0	0

Решение в последней таблице допустимо, но не оптимально. Далее можно использовать прямой симплекс-метод для получения оптимального решения. В общем случае, если на очередной итерации полученное решение недопустимо, то описанная процедура повторяется до тех пор, пока не будет получено допустимое решение. Далее основное внимание уделяется оптимальности решения путем применения условия оптимальности прямого симплекс-метода.

Пример показывает гибкость симплексного метода. В литературе описано большое количество вариаций симплекс-метода (например, метод одновременного решения прямой и двойственной задач, симметричный, перекрестный и мультиплексный методы), причем создается впечатление, что каждый из них существенно отличается от других, тогда как все они просматривают экстремальные точки пространства решений с различной степенью автоматизации вычислений и вычислительной эффективности.

5.5. Задачи для самостоятельного решения

Составить двойственные задачи для следующих задач:

$$1. \quad f = x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$2. \quad f = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$3. \quad f = x_1 - x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 18, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0. \end{cases}$$

$$4. \quad f = 4x_1 + 13x_2 + 3x_3 + 6x_4 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0. \end{cases}$$

$$5. \quad f = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4, \\ x_1 + 2x_3 = 2, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$6. \quad f = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

Для следующих задач составить и решить двойственные и, используя их решение, найти решение исходных задач:

$$7. f = 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 3, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$8. f = x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 3, \\ x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$9. f = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$10. f = 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 7, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$11. f = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$12. f = 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 4, \\ x_1 + x_3 \geq 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$13. f = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 7, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1, \\ 11x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 27, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$14. f = 15x_1 + 7x_2 + 12x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$15. f = 2x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \geq 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 6, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$16. f = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \leq 4, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 3, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 \geq 5, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

Для следующих задач составить и решить двойственные и, используя вторую теорему двойственности, найти решение исходных задач:

$$17. f = -x_1 - 7x_2 - 8x_3 + x_4 + 4x_5 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 4, \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0. \end{cases}$$

$$18. f = 5x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0. \end{cases}$$

$$19. \quad f = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0. \end{cases}$$

$$20. \quad f = 24x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0. \end{cases}$$

$$21. \quad f = 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 10x_4 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0. \end{cases}$$

$$22. \quad f = -x_1 + 9x_2 + 9x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_{1,2,3,4} \geq 0. \end{cases}$$

Решить двойственным симплекс-методом:

$$23. \quad f = 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 7, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$24. \quad f = 2x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 12, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 3, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$25. \quad f = 15x_1 + 7x_2 + 12x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 20, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$26. \quad f = 15x_1 + 2x_2 + 12x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 5, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$27. \quad f = 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

28. На рис. 5.3 показано пространство решений, соответствующее задаче минимизации целевой функции $q = 2x_1 + x_2$. Предполагается, что поиск решения выполняется двойственным симплекс-методом; оптимальное решение соответствует точке $F = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

а) если начальное базисное (недопустимое) решение соответствует точке G , будет ли алгоритм двойственного симплекс-метода проходить через точки G, E, F ? Обоснуйте это;

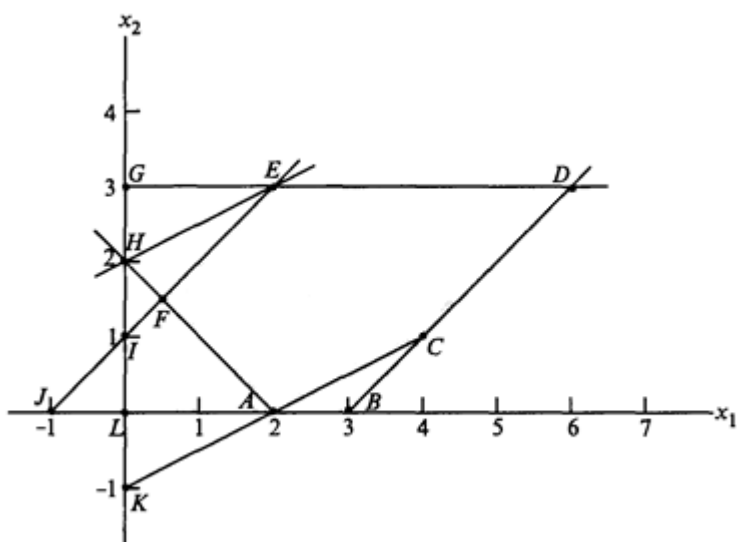


Рис. 5.3. Пространство решений

б) если начальное базисное (недопустимое) решение соответствует точке L , определите на рисунке возможную последовательность точек, через которые будет проходить алгоритм двойственного симплекс-метода для достижения оптимального решения в точке F .

Ответы:

7. $f_{\min}^* = 14$, $x^* = (1, 2, 0)$; $y^* = (2, 0, 4)$.

8. $f_{\min}^* = 3$, $x^* = (2, 1, 0)$; $y^* = (0, 1, 0)$.

9. $f_{\min}^* = 3$, $x^* = (0, 0, 3)$; $y^* = (\frac{1}{2}, 0, 0)$.

10. Задача не имеет решения; $w_{\max}^* \rightarrow \infty$.

11. $f_{\min}^* = 11$, $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$; $y^* = (1, 4, 0)$.

12. $f_{\min}^* = \frac{124}{7}$, $x^* = (0, \frac{38}{7}, \frac{16}{7})$; $y^* = (\frac{1}{7}, 0, \frac{12}{7})$.

13. $f_{\min}^* = 8$, $x_1^* = (1, 0, 4)$, $x_2^* = (0, 1, 5)$; $y^* = (5, 0, 1)$.

14. $f_{\min}^* = 18$, $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$; $y^* = (3, 4, 0)$.

15. Задача не имеет решения; $w_{\max}^* \rightarrow \infty$.

16. Задача не имеет решения; $w_{\max}^* \rightarrow \infty$.

17. $f_{\max}^* = -22$, $x^* = (0, 2, 1, 0, 0)$; $y^* = (-2, -5)$.

18. $f_{\max}^* = \frac{27}{2}$, $x^* = (\frac{5}{2}, 0, 0, 1)$; $y^* = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

19. $f_{\max}^* = 9$, $x^* = (0, 0, 1, 1, 0)$; $y^* = (2, 1)$.

20. $f_{\min}^* = 1$, $x^* = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; $y^* = (3, 1)$.

21. $f_{\min}^* = 46$, $x^* = (1, 0, 0, 4)$; $y^* = (2, 4)$.

22. $f_{\min}^* = 9$, $x^* = (0, 0, 1, 0)$; $y_1^* = (9, 0)$, $y_2^* = (3, 2)$.

23. $f_{\min}^* = 22$, $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{13}{3})$.

24. Система ограничений несовместна.

25. $f_{\min}^* = 60$, $x^* = (1-t)x_1^* + tx_2^*$, $0 \leq t \leq 1$, $x_1^* = (0, 0, 5)$, $x_2^* = (4, 0, 0)$.

26. $f_{\min}^* = 10$, $x^* = (0, 5, 0)$.

27. $f_{\min}^* = 12$, $x^* = (0, 4, 0)$.

28. а) нет, поскольку точка E соответствует допустимому решению – в двойственном симплекс-методе промежуточные решения должны быть недопустимыми, пока не будет достигнуто оптимальное решение.

Пример.

$$P = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 - 3x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{целые.} \end{cases}$$

Строим прямые на плоскости x_1Ox_2 , уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

x_1	0	10
x_2	5	0

$$2x_1 - x_2 = 1$$

x_1	0	0,5
x_2	-1	0

$$x_1 - 3x_2 = 2$$

x_1	0	2
x_2	-0,6	0

Находим полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

$ABCD$ – многоугольник решений (рис. 6.1), все точки которого удовлетворяют системе ограничений и условию неотрицательности переменных, но условию целочисленности удовлетворяют координаты лишь 15 точек (узлы целочисленной решетки). Такие точки, расположенные внутри области $ABCD$, являются допустимыми решениями задачи целочисленного программирования.

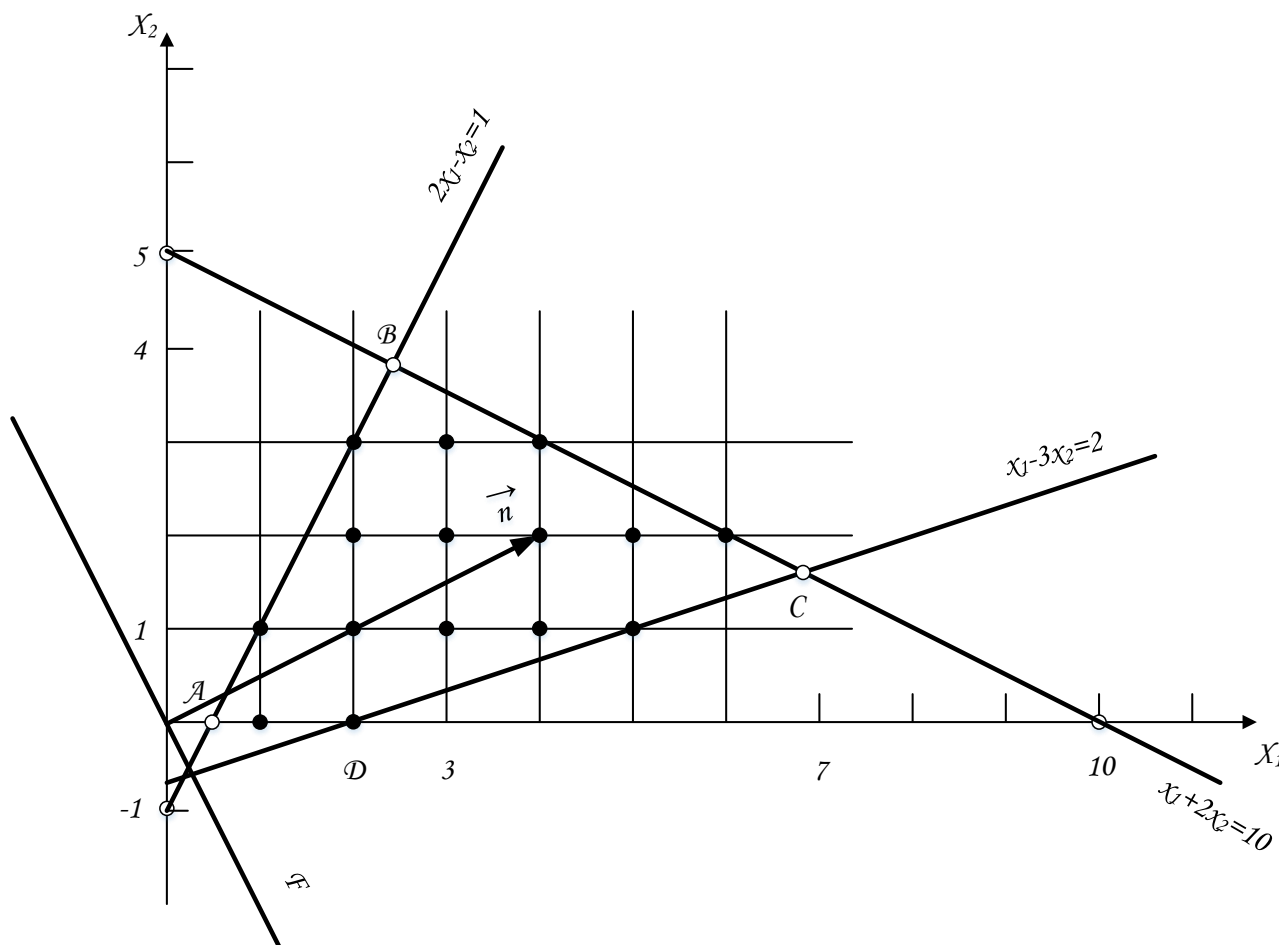


Рис. 6.1. Многоугольник решений

Заменяем многоугольник $ABCD$ на многоугольник $DEGHIKLMN$ (рис. 6.2), содержащий все целочисленные точки с допустимыми координатами. Перемещение линии уровня в направлении \vec{n} определит оптимальное решение – точку с целочисленными координатами $L(6;2)$, тогда

$$P_{max} = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 24 + 4 = 28.$$

Сравните полученное решение с решением задачи без ограничения целочисленности ($P_{max} = \frac{152}{5}$ при $x_1^* = \frac{34}{5}$, $x_2^* = \frac{8}{5}$).

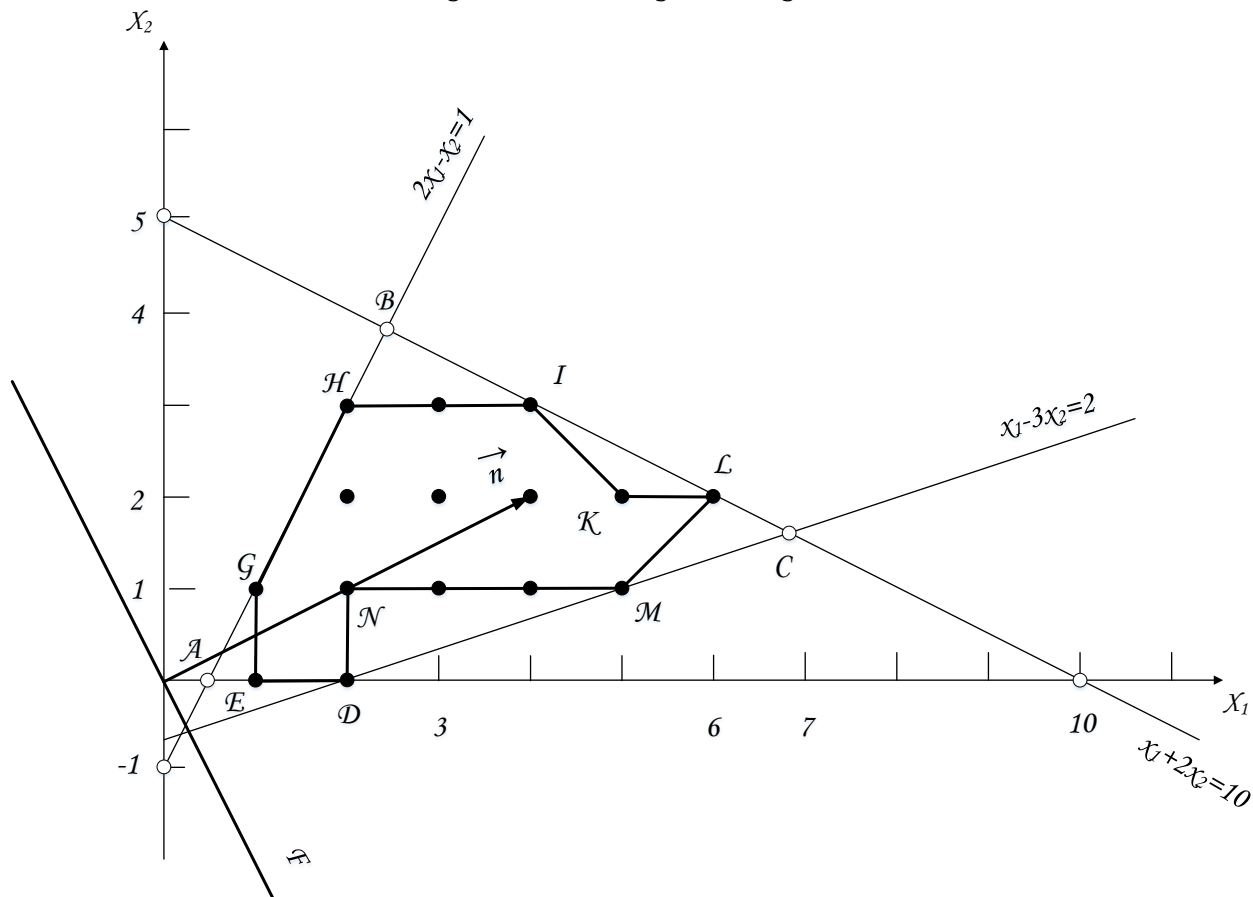


Рис. 6.2. Целочисленная область решения

6.3. Методы решения задач ЦЛП

Методы решения задач целочисленного программирования основаны на использовании вычислительных возможностей методов линейного программирования. Обычно алгоритмы целочисленного программирования включают три шага.

Шаг 1. "Ослабление" пространства допустимых решений задачи целочисленного линейного программирования путем замены любой двоичной переменной y непрерывным ограничением $0 \leq y \leq 1$ и отбрасывания требования целочисленности для всех остальных переменных ($0 \leq x \leq u$; $x = 2^0 y_0 + 2^1 y_1 + 2^2 y_2 + \dots + 2^k y_k$, где k – наименьшее целое число, $2^{k+1} - 1 \leq u$; y_0, \dots, y_k – двоичные переменные). В результате получается обычная задача линейного программирования.

Шаг 2. Решение задачи линейного программирования и определение ее оптимального решения.

Шаг 3. Имея полученное (непрерывное) оптимальное решение, добавляем специальные ограничения, которые итерационным путем изменяют пространство допустимых решений задачи линейного программирования таким образом, чтобы в конечном счете получилось оптимальное решение, удовлетворяющее требованиям целочисленности.

Разработаны два общих метода генерирования специальных ограничений, о которых идет речь при реализации шага 3:

1. Метод ветвей и границ.
2. Метод отсекающих плоскостей.

Хотя ни один из упомянутых методов не дает надежных результатов при решении задачи целочисленного линейного программирования, опыт вычислений свидетельствует, что метод ветвей и границ более успешно решает задачу, чем метод отсекающих плоскостей.

6.3.1. Метод ветвей и границ

Основная идея метода состоит в разбиении априорного множества планов (возможно содержащего недопустимые планы) на подмножества, которые в свою очередь разбиваются на подмножества и т.д. При этом среди возникающих подмножеств могут быть такие, которые не содержат допустимых планов или заведомо не содержат оптимальных планов. Если это удастся определить на некотором этапе с помощью тех или иных оценок, то такие подмножества исключаются из дальнейшего рассмотрения. В результате решение находится частичным (а не полным) перебором.

Графически указанный процесс можно представить структурной схемой в виде дерева, у которого каждая вершина соответствует некоторому подмножеству планов (и связанной с ним вспомогательной задаче линейного программирования), а выходящие из нее ветви отвечают разбиению этого подмножества на новые подмножества планов (и связанным с ними задачам).

Если с помощью имеющихся оценок определяется, что некоторое подмножество не содержит допустимых или оптимальных планов, то на соответствующей ему вершине доходящая до нее ветвь обрывается. Таким образом, процесс состоит в построении ветвей и определении их границ, что и отражено в названии метода.

Алгоритм метода ветвей и границ в общем случае:

Предположим, что рассматривается задача максимизации. Зададим нижнюю границу оптимального значения целевой функции z задачи ЦЛП равной $-\infty$. Положим $i = 0$.

Шаг 1 (Зондирование и определение границы).

Выбираем i -ю подзадачу линейного программирования ЛП i для исследования. Решаем ЛП i и зондируем ее, при этом возможна одна из трех ситуаций:

1. Оптимальное значение целевой функции задачи ЛП_i не может улучшить текущей нижней границы.
2. ЛП_i приводит к лучшему допустимому целочисленному решению, чем текущая нижняя граница.
3. ЛП_i не имеет допустимых решений.

Возможны два случая:

- ⇒ Если задача ЛП_i прозондирована, нижняя граница изменяется только при условии, что найдено лучшее решение задачи ЦЛП. Если все подзадачи прозондированы, необходимо закончить вычисления: оптимальным решением задачи ЦЛП является то, которое соответствует текущей нижней границе, если такая существует. Иначе положить $i = i + 1$ и повторить шаг 1.
- ⇒ Если задача ЛП_i не прозондирована, переходим к шагу 2 для выполнения ветвления.

Шаг 2 (Ветвление).

Выбираем одну из целочисленных переменных x_j , оптимальное значение x_j^* которой в оптимальном решении задачи ЛП_i не является целым числом. Исключаем из пространства допустимых решений область $[x_j^*] < x_j < [x_j^*] + 1$ (где $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x) путем формирования двух подзадач ЛП, которые соответствуют ограничениям $x_j \leq [x_j^*]$ и $x_j \geq [x_j^*] + 1$. Положим $i = i + 1$ и переходим к шагу 1.

Пример.

Решить задачу ЦЛП.

$$\begin{cases} z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ 40x_1 + 17x_2 \leq 136, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{целые.} \end{cases}$$

На рис. 6.3 пространство допустимых решений задачи целочисленного линейного программирования представлено точками. Соответствующая начальная задача линейного программирования (ЛП₀) получается путем отбрасывания условий целочисленности. Ее оптимальным решением будет $x_1 = 2,72$, $x_2 = 1,6$ и $z = 7,04$.

Так как оптимальное решение задачи ЛП₀ не удовлетворяет условию целочисленности, метод ветвей и границ изменяет пространство решений ЗЛП. Для этого сначала выбирается одна из целочисленных переменных, значение которой в оптимальном решении задачи ЛП₀ не является целочисленным. Например, выбираем $x_1 = 2,72$ — это равносильно замене задачи ЛП₀ двумя новыми задачами ЛП₁ и ЛП₂ (в этом случае x_1 — **переменная ветвления**).

Задача ЛП₁

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ 40x_1 + 17x_2 \leq 136, \\ x_1 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача ЛП₂

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ 40x_1 + 17x_2 \leq 136, \\ x_1 \geq 3, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

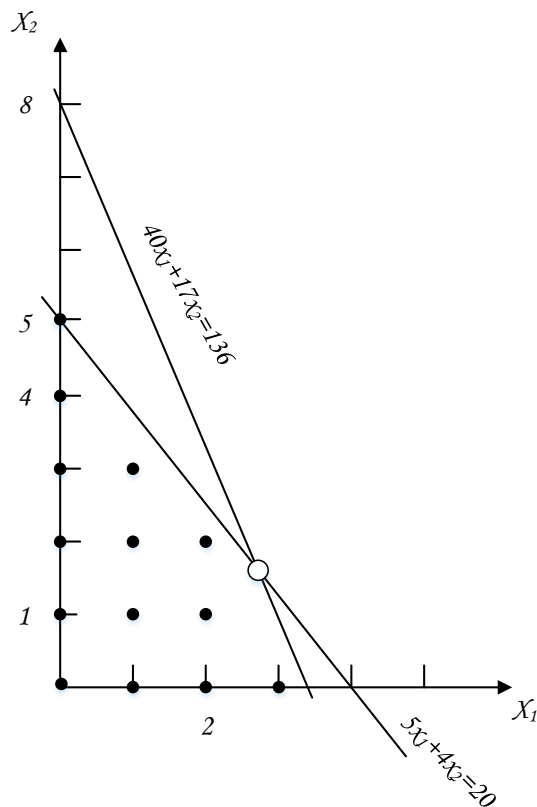


Рис. 6.3. Пространство допустимых решений задачи

На рис. 6.4 изображены пространства допустимых решений задач ЛП₁ и ЛП₂. Оба пространства содержат все допустимые решения исходной задачи ЦЛП. Оптимальное решение задачи ЦЛП находится в пространства допустимых решений либо задачи ЛП₁, либо задачи ЛП₂. Следовательно, обе должны быть решены.

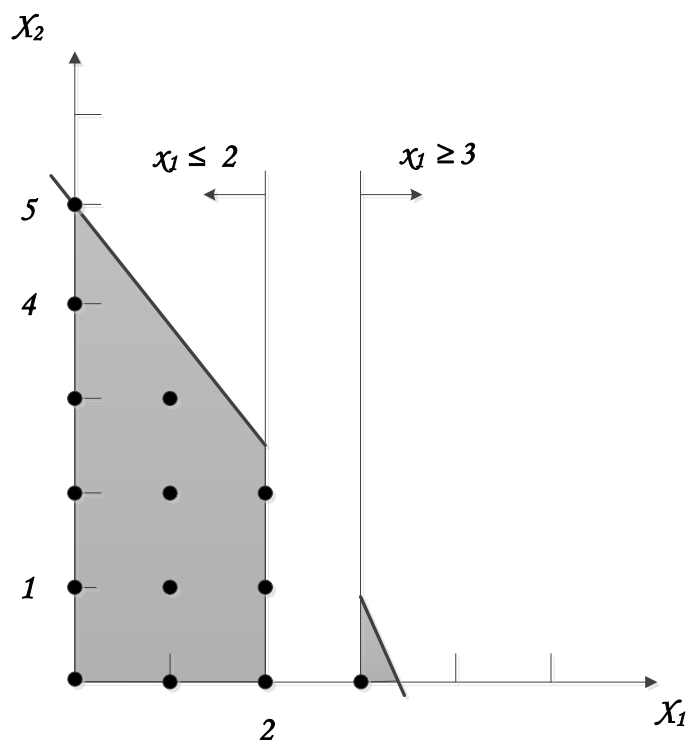


Рис. 6.4. Пространства допустимых решений задач ЛП1 и ЛП2

Оптимальным решением задачи ЛП₁ (которое можно получить графическим или симплекс-методом) является $x_1 = 2$, $x_2 = 2,5$ и $z = 6,5$.

Поскольку значение переменной x_2 не является целым числом, задача ЛП₁ исследуется дальше. Рассматриваем подзадачи ЛП₃ и ЛП₄, используя ветви $x_2 \leq 2$ и $x_2 \geq 3$.

Задача ЛП₃

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ 40x_1 + 17x_2 \leq 136, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача ЛП₄

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ 40x_1 + 17x_2 \leq 136, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Задача ЛП₃ имеет целочисленное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ и $z = 6$ и, следовательно порождает нижнюю границу ($z = 6$) оптимального значения целевой функции задачи ЦЛП.

Оптимальным решением задачи ЛП₄ является $x_1 = 1,6$, $x_2 = 3$ и $z = 6,2$.

Поскольку значение переменной x_1 не является целым числом, задача ЛП₄ исследуется дальше. Рассматриваем подзадачи ЛП₅ и ЛП₆, используя ветви $x_1 \leq 1$ и $x_1 \geq 2$.

Задача ЛП₅

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ 40x_1 + 17x_2 \leq 136, \\ x_1 \leq 1, \\ x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача ЛП₆

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ 40x_1 + 17x_2 \leq 136, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 2. \end{cases}$$

Оптимальным решением задачи ЛП₅ является $x_1 = 1$, $x_2 = 3,75$ и $z = 5,75$. При значении нижней границы $z = 6$ нет возможности получить целочисленное решение задачи ЛП₅, которое будет лучше существующего. В результате мы отбрасываем подзадачу ЛП₅ и считаем ее *прозондированной*.

Задача ЛП₆ прозондирована, так как не имеет допустимых решений (ОДР – пустое множество).

Оптимальным решением задачи ЛП₂ является $x_1 = 3$, $x_2 = 0,9412$ и $z = 6,9412$.

Поскольку значение переменной x_2 не является целым числом, задача ЛП₂ исследуется дальше. Рассматриваем подзадачи ЛП₇ и ЛП₈, используя ветви $x_2 \leq 0$ и $x_2 \geq 1$.

Задача ЛП₇

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ 40x_1 + 17x_2 \leq 136, \\ x_1 \geq 3, \\ x_2 \leq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача ЛП₈

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ 40x_1 + 17x_2 \leq 136, \\ x_1 \geq 3, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

Оптимальным решением задачи ЛП₇ является $x_1 = 3,4$, $x_2 = 0$ и $z = 6,8$.

Поскольку значение переменной x_1 не является целым числом, задача ЛП₇ исследуется дальше. Рассматриваем подзадачи ЛП₉ и ЛП₁₀, используя ветви $x_1 \leq 3$ и $x_1 \geq 4$.

Задача ЛП₉

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ 40x_1 + 17x_2 \leq 136, \\ x_1 \geq 3, \\ x_2 = 0, \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$$

Задача ЛП₁₀

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ 40x_1 + 17x_2 \leq 136, \\ x_1 \geq 4, \\ x_2 \leq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача ЛП₉ имеет целочисленное решение $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ и $z = 6$. Значение нижней границы остается неизменным ($z = 6$).

Задача ЛП₁₀ прозондирована, так как не имеет допустимых решений (ОДР – пустое множество).

Задача ЛП₈ прозондирована, так как не имеет допустимых решений (ОДР – пустое множество).

Так как все подзадачи прозондированы, оптимальным решением задачи ЦЛП является решение, соответствующее последней нижней границе, а именно $z = 6$ в точках $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ и $x_1 = 3$, $x_2 = 0$. Схема вычислений показана на рис. 6.5.

Стоит обратить внимание, что если несколько переменных не удовлетворяют условию целочисленности, то выбор переменной ветвления произволен. Также выбор подзадачи для зондирования – произволен.

Пример.

Решить задачу ЦЛП.

$$p = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 46, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 10, \\ x_{1,2,3} \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 - \text{целые.} \end{cases}$$

Начальная задача линейного программирования (ЛП₀) получается путем отбрасывания условий целочисленности. Решим ее симплекс-методом, оптимальным решением будет $x_1 = 2,43$, $x_2 = 1,71$, $x_3 = 0$ и $p = 6,571$.

Провидим процедуру ветвления по переменной x_1 . Задача ЛП₀ разбивается на подзадачи ЛП₁ и ЛП₂. Рассматриваем подзадачи ЛП₁ и ЛП₂, используя ветви $x_1 \leq 2$ и $x_1 \geq 3$.

Решив задачу ЛП₁ симплекс-методом, получим оптимальное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ и $p = 6$.

Задача ЛП₂ прозондирована, так как не имеет допустимых решений.

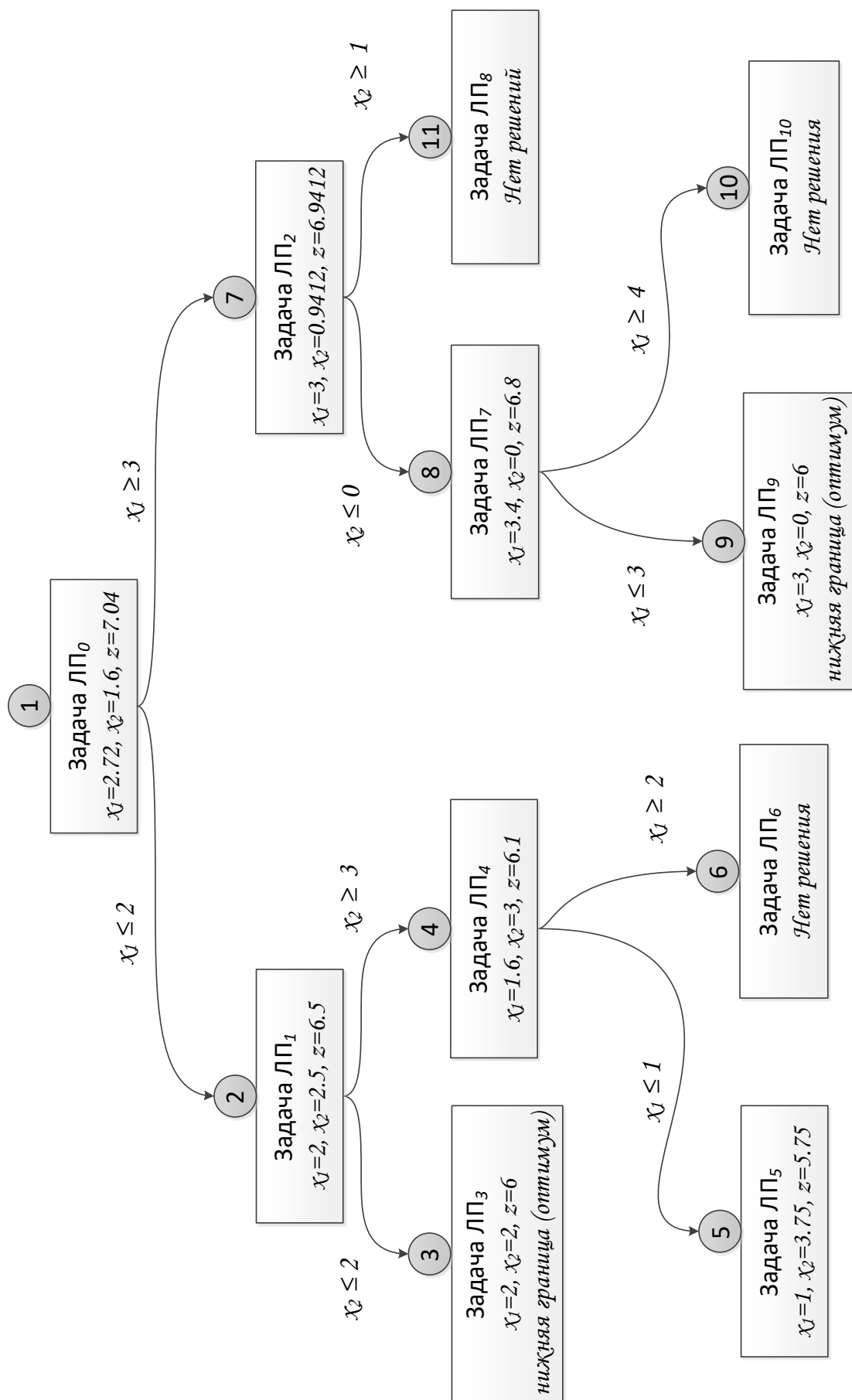


Рис. 6.5. Схема вычислений

Схема вычислений показана на рис. 6.6:

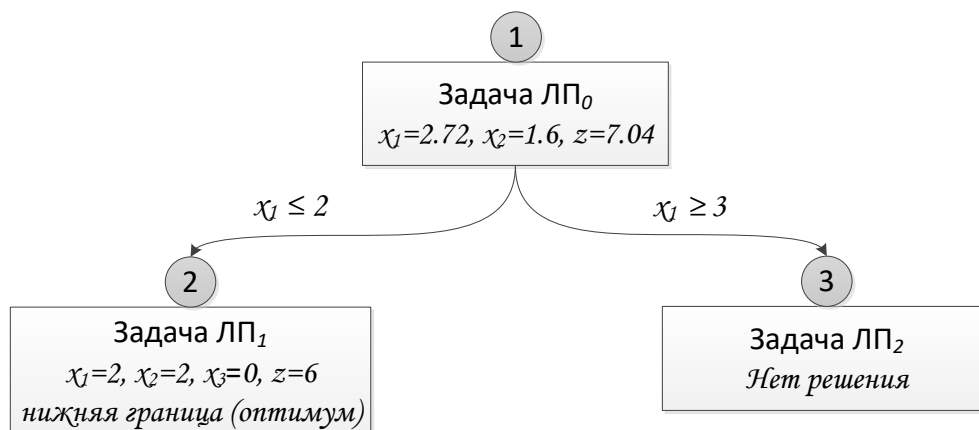


Рис. 6.6. Схема решения

6.3.2. Метод отсекающих плоскостей

Данный метод, как и метод ветвей и границ, начинает работу с оптимального решения "обычной" (непрерывной) задачи линейного программирования. Однако вместо ветвления и построения границ этот метод видоизменяет пространство допустимых решений, последовательно прибавляя специальным образом построенные ограничения (именуемые отсечениями).

Пример.

Решить задачу ЦЛП.

$$\begin{cases}
 z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\
 -0,75x_1 + 4x_2 \leq 12, \\
 2,5x_1 + 1x_2 \leq 10, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
 x_1, x_2 - \text{целые.}
 \end{cases}$$

Метод путем добавления отсечений преобразует пространство допустимых решений ЗЛП в выпуклый многогранник, вершина которого соответствует оптимуму.

Оптимальное решение непрерывной задачи $x_1 = 2,6$, $x_2 = 3,49$ и $z = 9,581$ (рис. 6.7).

Прибавляем отсечение I, которое вместе с ограничениями исходной задачи приводит к оптимальному решению $x_1 = 2,8$, $x_2 = 3$ и $z = 8,8$ (рис. 6.8).

Прибавляем отсечение II, которое вместе с отсечением I и исходными ограничениями приводит к оптимальному решению $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ и $z = 8$ (рис. 6.9). Это решение является целочисленным, что и требуется.

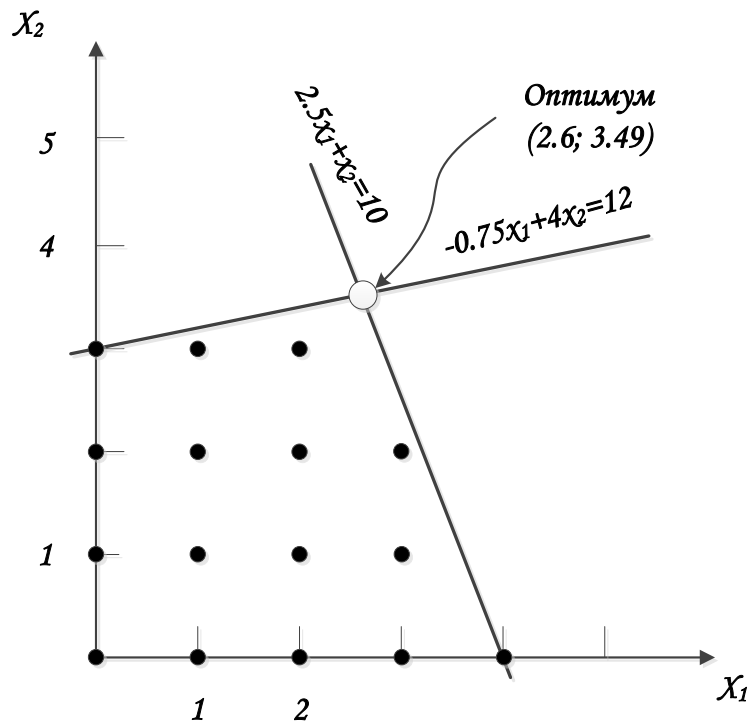


Рис. 6.7. Решение задачи без ограничения целочисленности

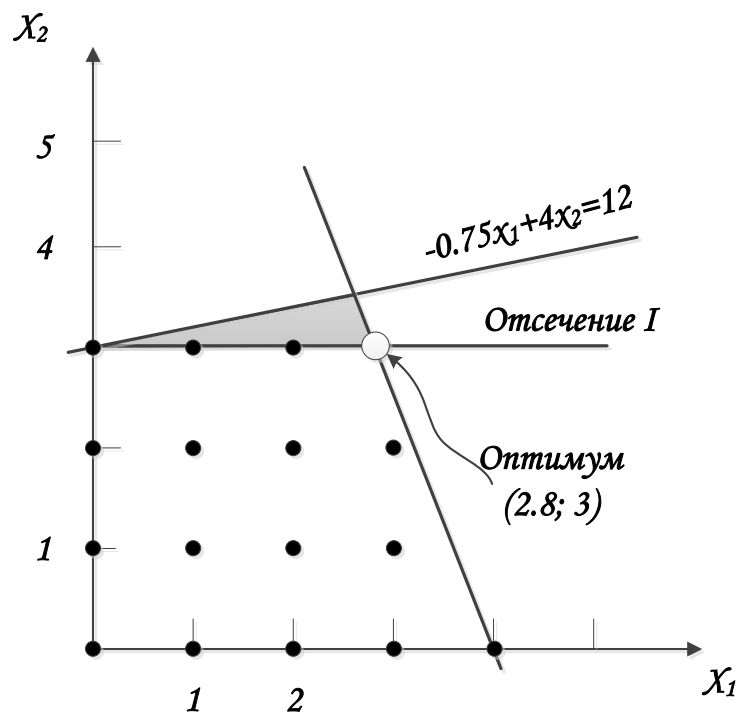


Рис. 6.8. Отсечение I

Прибавленные отсечения не отбрасывают ни одной исходной допустимой целочисленной точки, но должны проходить как минимум через одну целочисленную точку (допустимую или нет). Этим требованиям должно удовлетворять любое отсечение.

В общем случае может потребоваться любое (конечное) количество отсечений для достижения полностью целочисленной экстремальной точки.

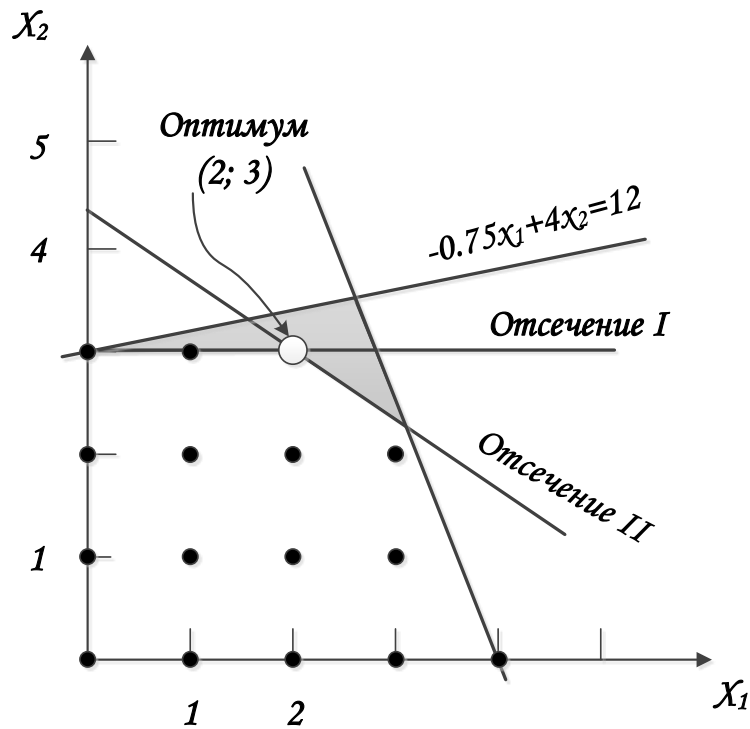


Рис. 6.9. Отсечение II

В симплекс-таблице, соответствующей оптимальному решению задачи линейного программирования, следует выбрать одну из строк (*производящую*), для которой базисная переменная нецелочисленная. Искомое отсечение строится на основании дробных составляющих коэффициентов производящей строки.

Оптимальная симплекс-таблица исходной задачи имеет следующий вид:

$i \backslash j$	x_1	x_2	x_3	x_4	Св. чл.
x_2	0	1	0.23	0.0698	3.49
x_1	1	0	-0.093	0.37	2.6
z	0	0	0.37	0.51	9.581

Оптимальным непрерывным решением является $x_1 = 2,6$, $x_2 = 3,49$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ и $z = 9,581$. Целочисленное отсечение получается в предположении, что все переменные задачи являются целочисленными. Поскольку коэффициенты исходной целевой функции являются целочисленными, то и значение z , соответствующее целочисленному решению, должно быть целочисленным.

Информация, содержащаяся в симплекс-таблице, соответствующей оптимальному решению, может быть записана в виде следующих уравнений:

$$x_2 - \text{уравнение: } x_2 + \frac{23}{100}x_3 + \frac{349}{5000}x_4 = 3\frac{49}{100},$$

$$x_1 - \text{уравнение: } x_1 - \frac{93}{1000}x_3 + \frac{37}{100}x_4 = 2\frac{6}{10},$$

$$z - \text{уравнение: } z + \frac{37}{1000}x_3 + \frac{51}{100}x_4 = 9\frac{581}{1000}.$$

Любое из трех уравнений можно использовать в качестве производящей строки для построения отсечения. Для построения дробного отсечения каждый из нецелочисленных коэффициентов раскладывается на целую и дробную части при условии, что дробная часть является строго положительной. Выберем (произвольно) для этой цели x_2 – уравнение. Разложение коэффициентов приведет к следующему уравнению:

$$x_2 + \left(0 + \frac{23}{100}\right)x_3 + \left(0 + \frac{349}{5000}\right)x_4 = \left(3 + \frac{49}{100}\right).$$

Перенесем все целочисленные слагаемые в правую часть, а все дробные в левую.

$$\frac{23}{100}x_3 + \frac{349}{5000}x_4 - \frac{49}{100} = 3 - x_2.$$

Поскольку все переменные в рассматриваемой задаче целочисленные, правая часть последнего уравнения должна быть целочисленной, откуда следует, что и левая также должна принимать целые значения. Так как переменные x_3 и x_4 – неотрицательны, то выражение $\frac{23}{100}x_3 + \frac{349}{5000}x_4$ является неотрицательным. Поэтому величина $\frac{23}{100}x_3 + \frac{349}{5000}x_4 - \frac{49}{100}$, будучи целочисленной, не может быть меньше $-\frac{49}{100}$. Поэтому необходимое условие целочисленности записывается следующим образом:

$$\frac{23}{100}x_3 + \frac{349}{5000}x_4 - \frac{49}{100} \geq 0.$$

Это и есть отсечение, порожденное x_2 – строкой. Ранее найденное оптимальное непрерывное решение не удовлетворяет ограничению. Присоединяем отсечение в качестве дополнительного ограничения к конечной симплекс-таблице.

$$-\frac{23}{100}x_3 - \frac{349}{5000}x_4 \leq -\frac{49}{100}$$

$$-\frac{23}{100}x_3 - \frac{349}{5000}x_4 + s_1 = -\frac{49}{100}, \quad s_1 \geq 0$$

$i \backslash j$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Св. чл.
x_2	0	1	0.23	0.0698	0	3.49
x_1	1	0	-0.093	0.37	0	2.6
s_1	0	0	-0.23	-0.0698	1	-0.6
z	0	0	0.37	0.51	0	9.581

Таблица представляет оптимальное, но недопустимое решение. Для восстановления допустимости необходимо применить двойственный симплекс-метод (п. 5.4.1).

$i \backslash j$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Св. чл.
x_2	0	1	0	0	1	3
x_1	1	0	0	0.4	-0.4	2.8
x_3	0	0	1	0.3	-4.35	2.13
z	0	1	0	0.4	1.6	8.8

Из-за дробного значения x_1 последнее решение все еще нецелочисленное. Выберем x_1 -строку в качестве производящей.

$$x_1 + \left(0 + \frac{4}{10}\right)x_4 + \left(-1 + \frac{6}{10}\right)s_1 = \left(2 + \frac{8}{10}\right).$$

Соответствующее ограничение имеет вид:

$$-\frac{4}{10}x_4 - \frac{6}{10}s_1 + s_2 = -\frac{8}{10}, \quad s_2 \geq 0.$$

Присоединяем 2 отсечение к последней симплекс-таблице.

$i \backslash j$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Св. чл.
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0.4	-0.4	0	2.8
x_3	0	0	1	0.3	-4.3	0	2.1
s_2	0	0	0	-0.4	-0.6	1	-0.8
z	0	1	0	0.4	1.6	0	8.8

Таблица представляет оптимальное, но недопустимое решение. Для восстановления допустимости необходимо применить двойственный симплекс-метод.

$i \backslash j$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Св. чл.
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	-1	1	2
x_3	0	0	1	0	4.8	-0.75	1.5
x_4	0	0	0	1	1.5	-2.5	2
z	0	1	0	0	1	1	8

Оптимальное решение ($x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $z = 8$), определяемое последней симплекс-таблицей, является целочисленным.

Пример.

Решить задачу ЦЛП.

$$\begin{cases} z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 7x_2 \leq 21, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

Приводим задачу к каноническому виду. Для этого в левую часть ограничений введем дополнительные переменные $x_3 \geq 0$ и $x_4 \geq 0$.

$$\begin{cases} z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 21, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 8, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

Решим задачу симплексным методом без учета требований на целочисленность переменных.

Считая дополнительные переменные x_3, x_4 базисными, запишем начальную симплекс-таблицу:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	Св.чл.	
x_3	5	7	1	0	21	3
x_4	-1	3	0	1	8	$2\frac{2}{3}$
z	-1	-2	0	0	0	

В строке “z” найдем наименьшее отрицательное значение (-2) – это будет разрешающий столбец. Затем для нахождения разрешающей строки разделим значения из столбца “Св. чл.” на неотрицательные и ненулевые значения разрешающего столбца (кроме строчки “z”) и найдем минимум из получившихся значений.

В нашем случае $\min(3; 2\frac{2}{3}) = 2\frac{2}{3}$. Разрешающий элемент находится на пересечении разрешающего столбца (второй столбец) и разрешающей строки (вторая строка). Разрешающий элемент равен 3.

В новой таблице, в качестве нового базисного элемента запишем x_2 .

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	Св.чл.	
x_3	$22/3$	0	1	$-7/3$	$7/3$	$7/22$
x_2	$-1/3$	1	0	$1/3$	$8/3$	∞
z	$-5/3$	0	0	$2/3$	$16/3$	

Разрешающий элемент равен $22/3$.

В новой таблице, в качестве нового базисного элемента запишем x_1 .

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	Св.чл.
x_1	1	0	$3/22$	$7/22$	$7/22$
x_2	0	1	$1/22$	$5/22$	$61/22$
z	0	0	$5/22$	$3/22$	$129/22$

В последней строке нет отрицательных оценок, значит оптимальное решение найдено: $x_1 = \frac{7}{22}$; $x_2 = \frac{61}{22}$; $z = \frac{129}{22}$.

Однако, решение нецелочисленно. Продолжаем, используя метод отсекающих плоскостей.

Находим целые части оптимального решения:

$$\left\lfloor \frac{7}{22} \right\rfloor = 0,$$

$$\left\lfloor \frac{61}{22} \right\rfloor = 2.$$

Находим дробные части оптимального решения:

$$\left\{ \frac{7}{22} \right\} = \frac{7}{22} - 0 = \frac{7}{22},$$

$$\left\{ \frac{61}{22} \right\} = \frac{61}{22} - 2 = \frac{17}{22}.$$

Выбираем (произвольно) переменную x_2 .

Вводим дополнительное ограничение целочисленности:

$$0x_2 + \frac{1}{22}x_3 + \frac{5}{22}x_4 \geq \frac{17}{22}$$

$$\frac{1}{22}x_3 + \frac{5}{22}x_4 - s_1 = \frac{17}{22}$$

Добавляем это ограничение к симплекс-таблице и получаем:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Св.чл.
x_1	1	0	$3/22$	$-7/22$	0	$7/22$
x_2	0	1	$1/22$	$5/22$	0	$61/22$
s_1	0	0	$-1/22$	$-5/22$	1	$-17/22$
z	0	0	$5/22$	$3/22$	0	$129/22$

Таблица представляет оптимальное, но недопустимое решение. Для восстановления допустимости необходимо применить двойственный симплекс-метод (разд. 5.4.1).

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Св.чл.
x_1	1	0	$1/5$	0	$-7/5$	$7/5$
x_2	0	1	0	0	1	2
x_4	0	0	$1/5$	1	$-22/5$	$17/5$
z	0	0	$1/5$	0	$3/5$	$27/5$

Получили нецелочисленное решение: $x_1 = \frac{7}{5}$; $x_2 = 2$; $Z = \frac{27}{5}$;

Находим целые части оптимального решения:

$$\left[\frac{7}{5} \right] = 1,$$

$$\left[\frac{27}{5} \right] = 5.$$

Находим дробные части оптимального решения:

$$\left\{ \frac{7}{5} \right\} = \frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5},$$

$$\left\{ \frac{27}{5} \right\} = \frac{27}{5} - 5 = \frac{2}{5}.$$

Выбираем (произвольно) переменную.

Вводим дополнительное ограничение целочисленности:

$$0x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}s_1 \geq \frac{2}{5},$$

$$\frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}s_1 - s_2 = \frac{2}{5}.$$

Далее, добавляем данное ограничение к симплекс-таблице:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Св.чл.
x_1	1	0	1/5	0	-7/5	0	1 2/5
x_2	0	1	0	0	1	0	2
x_4	0	0	1/5	1	-22/5	0	3 2/5
s_2	0	0	-1/5	0	3/5	1	-2/5
z	0	0	1/5	0	3/5	0	5 2/5

Таблица представляет оптимальное, но недопустимое решение. Для восстановления допустимости необходимо применить двойственный симплекс-метод.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Св.чл.
x_1	1	0	0	0	-2	1	1
x_2	0	1	0	0	1	0	2
x_4	0	0	0	1	-5	1	3
s_2	0	0	1	0	3	-5	2
z	0	0	0	0	0	1	5

Оптимальное решение целочисленно: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $z = 5$;

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $z = 5$.

6.4. Задача коммивояжера

В 1859 г. У. Гамильтон придумал игру «Кругосветное путешествие», состоящую в отыскании такого пути, проходящего через все вершины (города, пункты назначения) графа, чтобы посетить каждую вершину однократно и возвратиться в исходную.

Для решения этой задачи необходимо ввести ряд определений:

Эйлеров цикл – цикл в графе, содержащий каждое ребро один раз.

Гамильтонов цикл – цикл в графе, содержащий каждую вершину один раз.

Граф может быть и эйлеровым, и гамильтоновым, или одним из них, или ни тем ни другим.

Теорема Эйлера: граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связан и все его локальные степени четны.

Существует *теорема о процедуре построения эйлеровой цепи*. Пусть G - эйлеров граф. Тогда следующая процедура всегда возможна и приводит к построению эйлеровой цепи графа G :

выходя из произвольной вершины, идем по ребрам графа произвольным образом, соблюдая следующие правила:

- ☞ стираем ребра по мере их прохождения (вместе с изолированными вершинами, которые при этом образуются);
- ☞ на каждом этапе идем по ребру, удаление которого нарушает связность, только в том случае, когда нет других возможностей.

Теорема Дирака: если в простом графе с n вершинами локальная степень каждой вершины не менее $n/2$, то граф является гамильтоновым.

С понятием гамильтоновых циклов тесно связана так называемая задача коммивояжера: коммивояжер (бродячий торговец) должен выйти из первого города, посетить по разу в неизвестном порядке города $2, 3, \dots, n$ и вернуться в первый город. Расстояния между городами известны. В каком порядке следует обходить города, чтобы замкнутый путь (тур) коммивояжера был кратчайшим?

Задача коммивояжера является одной из знаменитых задач теории комбинаторики. Она была поставлена в 1934 году, и об неё, как об Великую теорему Ферма, “обламывали зубы” лучшие математики. В своей области (оптимизации дискретных задач) задача коммивояжера служит своеобразным полигоном, на котором испытываются все новые методы.

Существуют различные методы решения и вариации данной задачи. Помимо сложных математических методов (метод ветвей и границ, метод отсекающих плоскостей) есть более простой способ решения – алгоритм Дейкстры.

На практике применяются различные модификации самых эффективных методов: метод ветвей и границ и метод генетических алгоритмов, а также алгоритм муравьиной колонии.

Для применения метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжера необходимо сначала применить этот метод к задаче о

назначениях, соответствующей данной задаче коммивояжера. Если полученное оптимальное решение образует полный цикл, то на этом вычисления заканчиваются. В противном случае в задачу необходимо ввести ограничения, удаляющие частичные циклы (достаточно исключить только один частный цикл). Это создает ряд подзадач, которых в общем случае столько же, сколько переменных образуют один частичный цикл.

Пример.

В следующей матрице записаны расстояния между 5 городами задачи коммивояжера:

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 5 & \infty & 3 & 9 & 1 \\ 4 & 8 & \infty & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & \infty & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение начальной задачи о назначениях следующее:

		1		
				1
			1	
1				
	1			

$$w = 19, (x_{13} = 1, x_{34} = 1, x_{41} = 1), (x_{25} = 1, x_{52} = 1).$$

Это решение порождает два частичных цикла (1-3-4-1) и (2-5-2). Применяя метод ветвей и границ, получим дерево решений, изображенное на рис. 6.10.

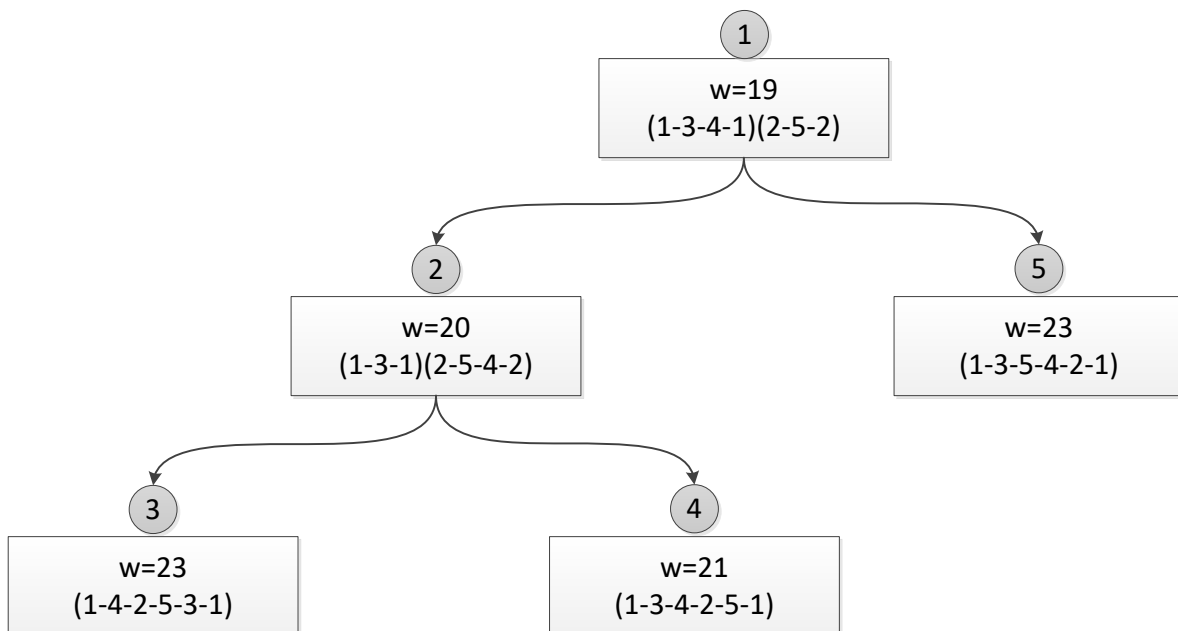


Рис. 6.10. Дерево решений

Чтобы исключить частичные циклы в задаче узла 1, надо разбить эти частичные циклы путем принудительного приравнивания переменных x_{ij} ,

задающих эти циклы, нулю. Частичный цикл 1-3-4-1 можно разбить, если положить $x_{13} = 0$, $x_{34} = 0$ или $x_{41} = 0$ (одновременно только одну переменную). Аналогично частичный цикл 2-5-2 можно разбить, если ввести ограничения: $x_{25} = 0$ или $x_{52} = 0$. Каждое из подобных ограничений порождает отдельную ветвь дерева подзадач.

Оптимальным циклом будет цикл 1-3-4-2-5-1 с длиной 21.

6.5. Задачи для самостоятельного решения

Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ.

Решить задачу целочисленного программирования методом отсекающих плоскостей.

Сделать проверку полученных решений графическим методом.

1. $5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45, \\ x_{1,2} \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{целые.} \end{cases}$$

2. $5x_1 + 7x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 41, \\ x_{1,2} \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{целые.} \end{cases}$$

3. $7x_1 + 10x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 7x_1 + x_2 \leq 35, \\ x_{1,2} \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{целые.} \end{cases}$$

4. $5x_1 + 7x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26, \\ x_1 + 4x_2 \geq 25, \\ x_{1,2} \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{целые.} \end{cases}$$

5. $3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 8, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 8, \\ x_{1,2} \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{целые.} \end{cases}$$

Применяя метод ветвей и границ, решить задачу коммивояжера с заданной матрицей расстояний.

6.

		до города			
		1	2	3	4
от города	1	-	5	11	9
	2	10	-	8	7
	3	7	14	-	8
	4	12	6	15	-

7.

		до города			
		1	2	3	4
от города	1	-	27	44	28
	2	47	-	43	36
	3	29	26	-	29
	4	34	35	44	-

8.

		до города				
		1	2	3	4	5
от города	1	-	48	34	31	43
	2	33	-	28	44	43
	3	41	35	-	40	36
	4	37	35	39	-	46
	5	48	48	25	29	-

9.

		до города				
		1	2	3	4	5
от города	1	-	90	80	40	100
	2	60	-	40	50	70
	3	50	30	-	60	20
	4	10	70	20	-	50
	5	20	40	50	20	-

10.

		до города				
		1	2	3	4	5
от города	1	-	32	37	37	29
	2	40	-	40	28	31
	3	41	34	-	34	37
	4	36	37	33	-	27
	5	31	39	33	38	-

11.

		до города				
		1	2	3	4	5
от города	1	-	25	40	31	27
	2	5	-	17	30	25
	3	19	15	-	6	1
	4	9	5	24	-	6
	5	22	8	7	10	-

12.

	1	2	3	4	5	6
1	-	26	42	15	29	25
2	7	-	16	1	30	25
3	20	13	-	35	5	0
4	21	16	25	-	18	18
5	12	46	27	48	-	5
6	23	5	5	9	5	-

13.

	1	2	3	4	5	6
1	-	6	4	8	7	14
2	6	-	7	11	7	10
3	4	7	-	4	3	10
4	8	11	4	-	5	11
5	7	7	3	5	-	7
6	14	10	10	11	7	-

Ответы:

1. $f_{\max}^* = 23$, $x^* = (3, 2)$.

3. $f_{\max}^* = 58$, $x^* = (4, 3)$.

5. $f_{\max}^* = 13$, $x^* = (0, 0, 1)$.

6. $1 - 4 - 2 - 3 - 1$, $l = 30$.

8. $1 - 3 - 5 - 4 - 2 - 1$, $l = 167$.

10. $1 - 3 - 2 - 4 - 5 - 1$, $l = 157$.

12. $1 - 4 - 3 - 5 - 6 - 2 - 1$, $l = 62$.

2. $f_{\max}^* = 37$, $x^* = (6, 1)$.

4. $f_{\min}^* = 52$, $x^* = (2, 6)$.

7. $1 - 2 - 3 - 4 - 1$, $l = 133$.

9. $1 - 4 - 3 - 5 - 2 - 1$, $l = 180$.

11. $1 - 5 - 3 - 4 - 2 - 1$, $l = 50$.

13. $1 - 3 - 4 - 5 - 6 - 2 - 1$, $l = 36$.

7. ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ РАБОТЫ С ПАКЕТОМ MATHCAD

7.1. Основные элементы пакета Mathcad

К основным элементам математических выражений *Mathcad* относятся *типы данных, операторы, функции и управляющие структуры*.

Операторы – элементы *Mathcad*, с помощью которых можно создавать математические выражения. К ним, например, относятся символы арифметических операций, знаки вычисления сумм, произведений, производной и интеграла и т.д.

Операнд – число или выражение, на которое действует оператор. Например, в выражении $5! + 3$ число 3 и выражение $5!$ – операнды оператора $+$ (плюс), а число 5 – операнд оператора факториал ($!$). После указания *операндов* операторы становятся исполняемыми по документу блоками.

К *типам данных* относятся числовые константы, обычные и системные переменные, массивы (векторы и матрицы) и данные файлового типа.

Константами называют поименованные объекты, хранящие некоторые значения, которые не могут быть изменены. *Переменные* являются поименованными объектами, имеющими некоторое значение, которое может изменяться по ходу выполнения программы. Тип переменной определяется ее значением; переменные могут быть числовыми, строковыми, символьными и т.д. Имена констант, переменных и иных объектов называют *идентификаторами*. Идентификаторы в *Mathcad* представляют собой набор латинских или греческих букв и цифр.

В *Mathcad* содержится небольшая группа особых объектов, которые нельзя отнести ни к классу констант, ни к классу переменных, значения которых определены сразу после запуска программы. Их правильнее считать *системными переменными*, имеющими предопределенные системой начальные значения.

Обычные переменные отличаются от системных тем, что они должны быть предварительно *определены* пользователем, т. е. им необходимо хотя бы однажды *присвоить значение*. В качестве *оператора присваивания* используется знак $:=$, тогда как знак $=$ отведен для *вывода значения* константы или переменной.

Если переменной присваивается начальное значение с помощью оператора $:=$ (вызывается нажатием клавиши $:$ (двоеточие) на клавиатуре), то такое присваивание называется *локальным*. До этого присваивания переменная не определена и ее нельзя использовать. Однако с помощью знака \equiv (клавиша \sim на клавиатуре) можно обеспечить *глобальное* присваивание.

Mathcad прочитывает весь документ дважды слева направо и сверху вниз. При первом проходе выполняются все действия, предписанные

локальным оператором присваивания (\equiv), а при втором – производятся действия, предписанные локальным оператором присваивания ($:=$), и отображаются все необходимые результаты вычислений ($=$).

Существуют также жирный знак равенства $=$ (комбинация клавиш **Ctrl** + $=$), который используется, например, как оператор приближенного равенства при решении систем уравнений, и символьный знак равенства \rightarrow (комбинация клавиш **Ctrl** + $.$).

Дискретные аргументы – особый класс переменных, который в пакете *Mathcad* зачастую заменяет *управляющие структуры*, называемые циклами (однако полноценной такая замена не является). Эти переменные имеют ряд фиксированных значений, либо целочисленных (1 способ), либо в виде чисел с определенным шагом, меняющихся от начального значения до конечного (2 способ).

1. $Name := Nbegin .. Nend$,

где $Name$ – имя переменной; $Nbegin$ – ее начальное значение; $Nend$ – конечное значение; $..$ – символ, указывающий на изменение переменной в заданных пределах (вводится клавишей $;$). Если $Nbegin < Nend$, то шаг переменной будет равен $+1$, иначе -1 .

2. $Name := Nbegin, (Nbegin + Step) .. Nend$

где $Step$ – заданный шаг изменения переменной (он должен быть положительным, если $Nbegin < Nend$, или отрицательным в обратном случае).


Дискретные аргументы значительно расширяют возможности *Mathcad*, позволяя выполнять многократные вычисления или циклы с повторяющимися вычислениями, формировать векторы и матрицы.

Массив – имеющая уникальное имя совокупность конечного числа числовых или символьных элементов, упорядоченных некоторым образом и имеющих определенные адреса. В пакете *Mathcad* используются массивы двух наиболее распространенных типов:

- одномерные (векторы);
- двумерные (матрицы).

Порядковый номер элемента, который является его адресом, называется *индексом*. Индексы могут иметь только целочисленные значения. Они могут начинаться с нуля или единицы, в соответствии со значением системной переменной *ORIGIN*.


Векторы и матрицы можно задавать различными способами:

- с помощью команды *Вставка* \Rightarrow *Матрица* или комбинации клавиш **Ctrl** + **M**, или щелчком на кнопке  панели *Матрица*, заполнив массив пустых полей для не слишком больших массивов;
- с использованием дискретного аргумента, когда имеется некоторая явная зависимость для вычисления элементов через их индексы.

7.2. Графический редактор

Графические области делятся на три основных типа – двумерные графики, трехмерные графики и импортированные графические образы. Двумерные и трехмерные графики строятся самим *Mathcad* на основании обработанных данных.

Для создания *декартового графика* необходимо:

1. Установить визир в пустом месте рабочего документа.
2. Выбрать команду *Вставка => График => X-Y график* или нажать комбинацию клавиш **Shift** + @, или щелкнуть кнопку  панели *Графики*. Появится шаблон декартового графика.
3. Ввести в средней метке под осью *X* первую независимую переменную, через запятую – вторую и так до 10, например, x_1, x_2, \dots
4. Ввести в средней метке слева от вертикальной оси *Y* первую независимую переменную, через запятую – вторую и т. д., например, $y_1(x_1), y_2(x_2), \dots$, или соответствующие выражения.
5. Щелкнуть за пределами области графика. После такого щелчка *Mathcad* вычисляет промежуточные значения и строит точки графика (рис. 7.1).

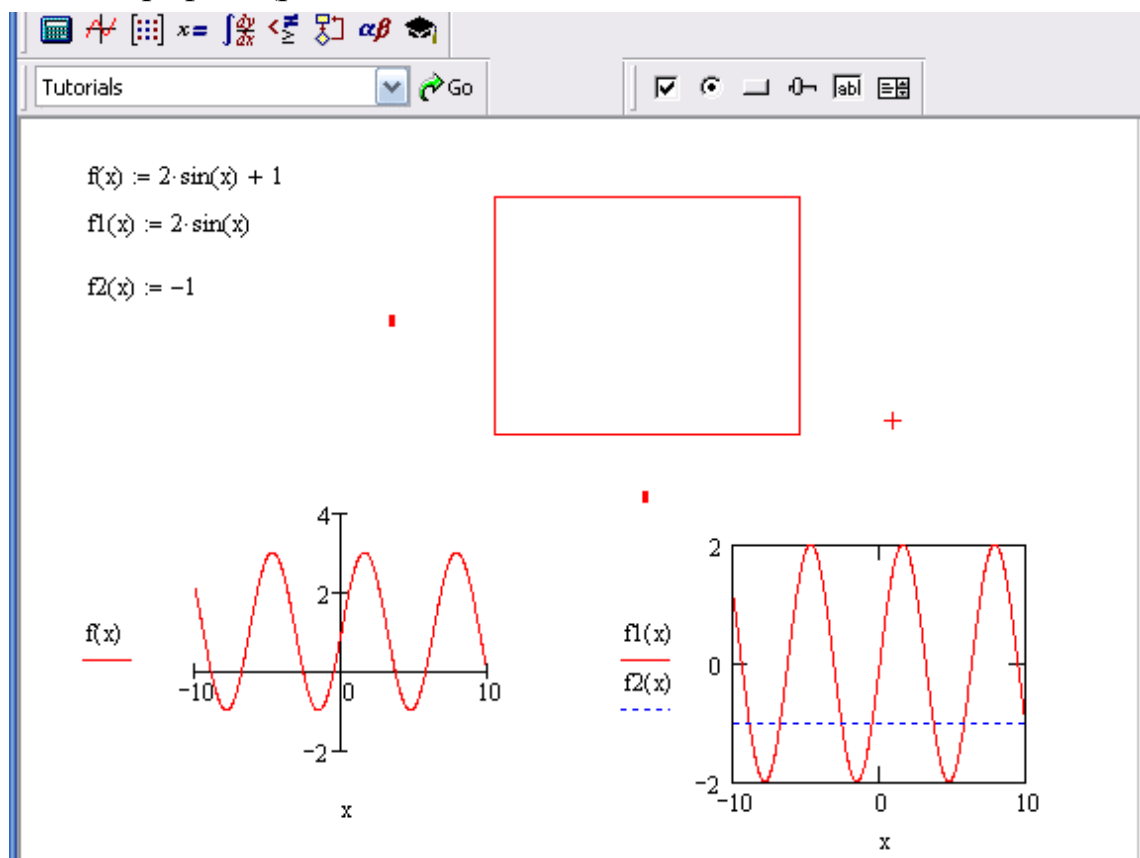


Рис. 7.1. Незаполненный шаблон двумерного графика и варианты результатов построения графиков одной и двух функций в графической области *X-Y Plot*

Для построения графиков нескольких функций необходимо ввести их названия через запятую. По умолчанию *Mathcad* берет интервал по оси x , где

$x \in [-10; 10]$. Если необходим другой интервал, то его следует ввести перед областью графика.

Для построения графиков поверхностей используется подпанель *Graph* шаблон *Surface Plot* (рис. 7.2).

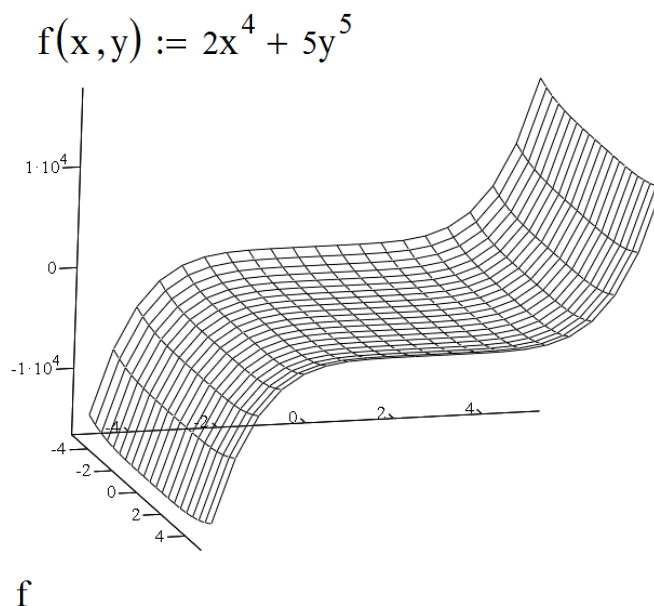


Рис. 7.2. График поверхности

График поверхности можно вращать в пространстве. Вращение поверхности эквивалентно ее просмотру с разных сторон. Для визуализации этих действий надо поместить указатель мыши в область графика, нажать левую кнопку мыши и, удерживая ее, начать перемещать мышь в некотором направлении. Сразу будет видно, что фигура вместе с осями координат и призмой, в которой она находится, начнет вращаться в ту ли иную сторону. Если двигать скроллинг мыши вперед или назад, то можно удалять или приближать объект.

Трехмерные, или *3D-графики*, отображают функции двух переменных вида $Z(X, Y)$. При построении трехмерных графиков в ранних версиях *Mathcad* поверхность нужно было определить математически (2 способ). Теперь применяют функцию *CreateMesh* (рис. 7.3).

CreateMesh(*F* (или *G*, или *f1, f2, f3*), *x0, x1, y0, y1, xgrid, ygrid, fmap*)

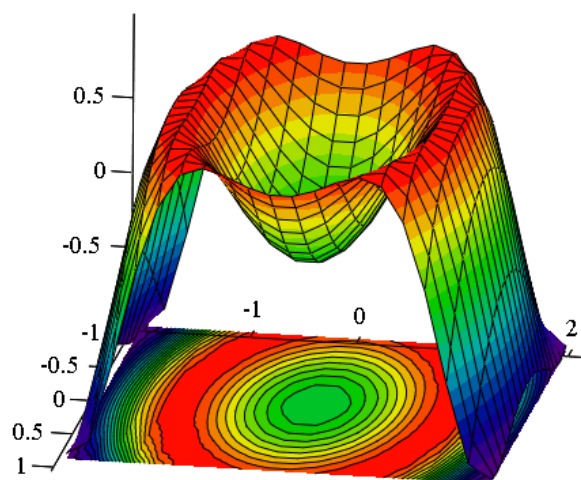
Создает сетку на поверхности, определенной функцией *F*. *x0, x1, y0, y1* – диапазон изменения переменных, *xgrid, ygrid* – размеры сетки переменных, *fmap* – функция отображения. Все параметры, за исключением *F*, – факультативные. Функция *CreateMesh* по умолчанию создает сетку на поверхности с диапазоном изменения переменных от -5 до 5 и с сеткой 20×20 точек.

Нередко поверхности и пространственные кривые представляют в виде точек, кружочков или иных фигур. Такой график создается операцией *Вставка* \Rightarrow *График* \Rightarrow *3D-график разброса*, причем поверхность задается параметрически – с помощью трех матриц (*X, Y, Z*). Для определения исходных данных для такого вида графиков используется функция *CreateSpace* (рис. 7.4).

1 способ

$$f(x,y) := \sin(x^2 + y^2)$$

G1 := CreateMesh(f, -1, 1, -2, 2, 20, 20)



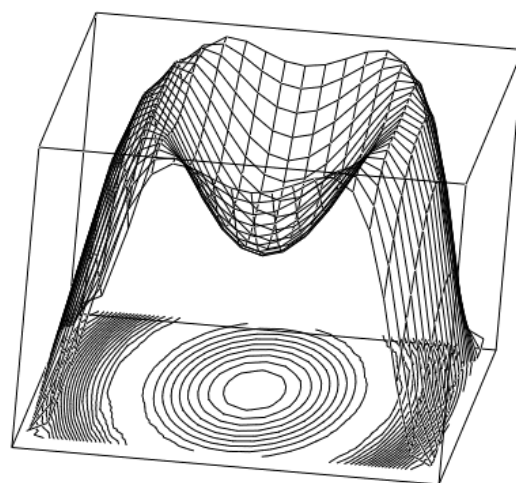
G1, G1

2 способ

$$i := 0..20 \quad x_i := -1 + i \cdot 0.1$$

$$j := 0..20 \quad y_j := -2 + j \cdot 0.2$$

$$G2_{i,j} := f(x_i, y_j)$$



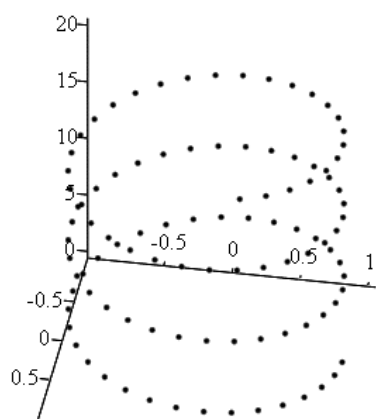
G2, G2

Рис. 7.3. Пример трехмерного графика

1 способ

$$f(t) := \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix}$$

P := CreateSpace(f, 0, 20, 100)



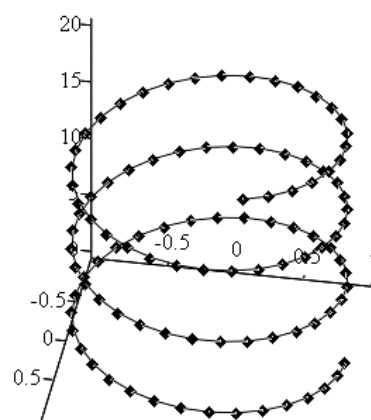
P

2 способ

$$t := 0..100$$

$$x_t := \sin\left(\frac{t}{5}\right) \quad y_t := \cos\left(\frac{t}{5}\right)$$

$$z_t := \frac{t}{5}$$



(x, y, z)

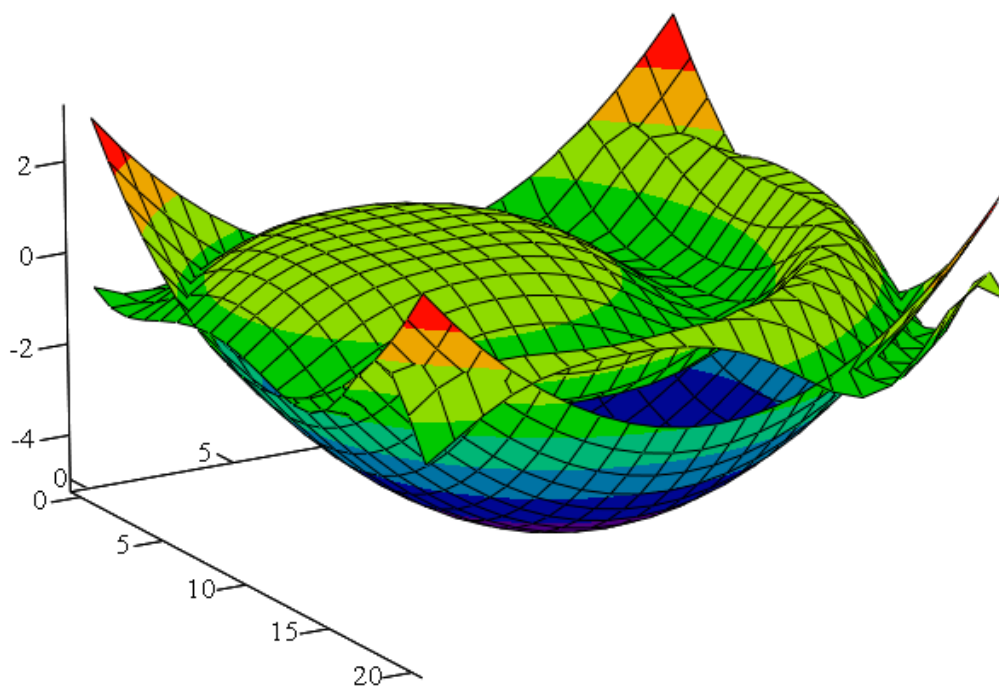
Рис. 7.4. Пример трехмерного графика разброса

CreateSpace (F , $t0$, $t1$, $tgrid$, $fmap$) – возвращает вложенный массив трех векторов, представляющих x -, y -, и z -координаты пространственной кривой, определенной функцией F . $t0$ и $t1$ – диапазон изменения переменной, $tgrid$ – размер сетки переменной, $fmap$ – функция отображения. Все параметры, за исключением F , – факультативные.

Построение пересекающихся фигур

Особый интерес представляет собой возможность построения на одном графике ряда разных фигур или поверхностей с автоматическим учетом их взаимного пересечения. Для этого надо отдельно задать матрицы соответствующих поверхностей и после вывода шаблона 3D-графика перечислить эти матрицы под ним с использованием в качестве разделителя запятой (рис. 7.5).

$$\begin{aligned} f1(x,y) &:= \cos(x^2 + y^2) & f2(x,y) &:= x^2 + y^2 - 5 & x &:= 0..20 \\ & & & & y &:= 0..20 \\ G1_{x,y} &:= f1\left(\frac{x-7}{5}, \frac{y-7}{5}\right) & G2_{x,y} &:= f2\left(\frac{x-10}{5}, \frac{y-10}{5}\right) \end{aligned}$$



G1,G2

Рис. 7.5. Пример пересечения поверхностей

Создание анимационного клипа

Mathcad имеет встроенную переменную FRAME, чье единственное назначение – управление анимациями:

- Создайте объект, чей вид зависит от FRAME.
- Убедитесь, что установлен режим автоматического расчета (*Инструменты => Вычислить => Автоматическое Вычисление*).

- Выберите *Инструменты* => *Анимация* для вызова одноименного диалогового окна.
- Заключите в выделяющий пунктирный прямоугольник часть рабочего документа, которую нужно анимировать.
- Установите нижние и верхние границы FRAME (поля **От:** и **До:**).
- В поле **Скорость** введите значение скорости воспроизведения (кадров/сек).
- Выберите **Анимация**. Сейчас анимация только создается.
- Сохраните анимацию как AVI файл (**Сохранить как**).
- Воспроизведите сохраненную анимацию *Вид* => *Воспроизведение*.

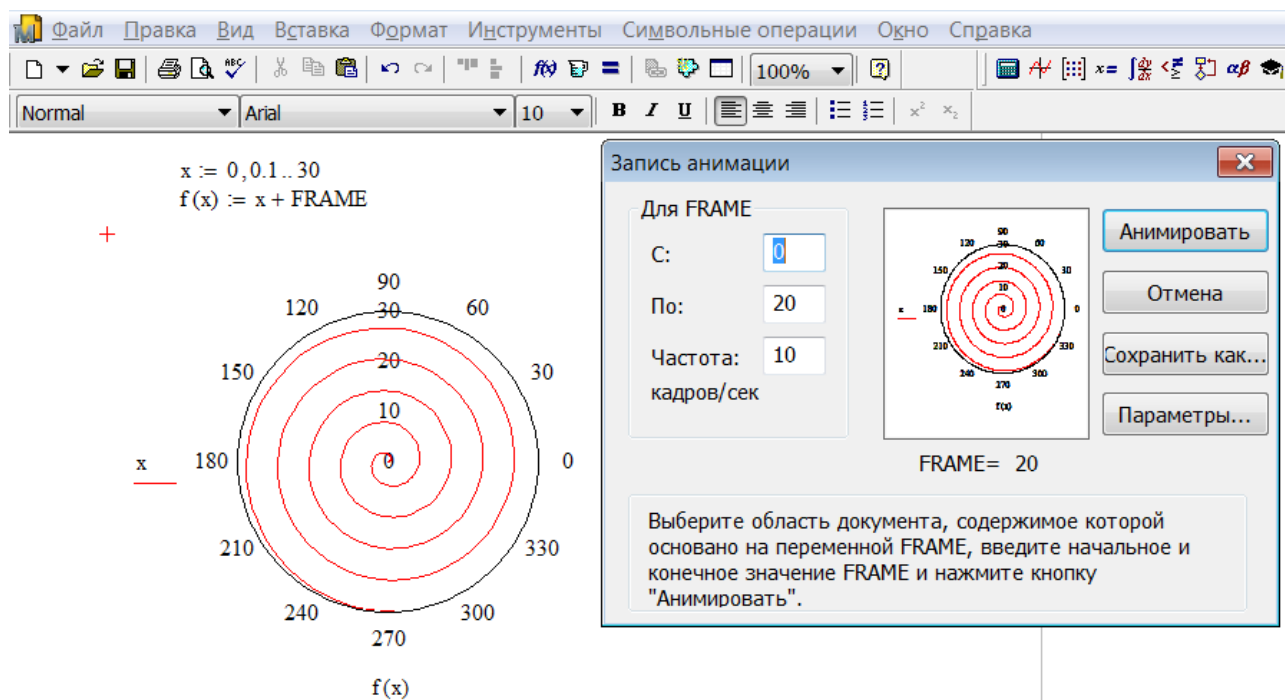


Рис. 7.6. Пример анимации

7.3. Редактор формул

Для запуска редактора достаточно установить указатель мыши в любом свободном месте окна редактирования и щелкнуть левой кнопкой. Курсор указывает место, с которого можно начать набор формулы – вычислительного блока. В области ввода формул курсор превращается в синий уголок, указывающий направление и место ввода. Для расширения охваченной уголком области можно использовать клавиши управления курсором и клавишу <Пробел>.

Особенности работы *Mathcad* при выполнении простых вычислений:

- *Mathcad* отображает формулы в общепринятом виде. *Mathcad* самостоятельно подбирает размеры дробных черт, скобок и других математических символов пропорционально написанной фразе, части формулы и пр.
- *Mathcad* понимает порядок действий.

- Некоторые комбинированные операторы (например, $:=$) вводятся одним символом (нажатием на клавишу $<:=>$).
- *Mathcad* вставляет пробелы до и после арифметических операторов.
- Целая часть числа от дробной в числах десятичной записи отделяется точкой.
- По умолчанию десятичные числа имеют представление с тремя цифрами после разделительной точки. Для задания большего количества цифр после запятой необходимо изменить формат вывода числа в пункте *Результат... меню Формат* (рис. 7.7).
- Числа могут быть представлены в виде обыкновенной дроби – параметр *Дробь* (рис. 7.8).

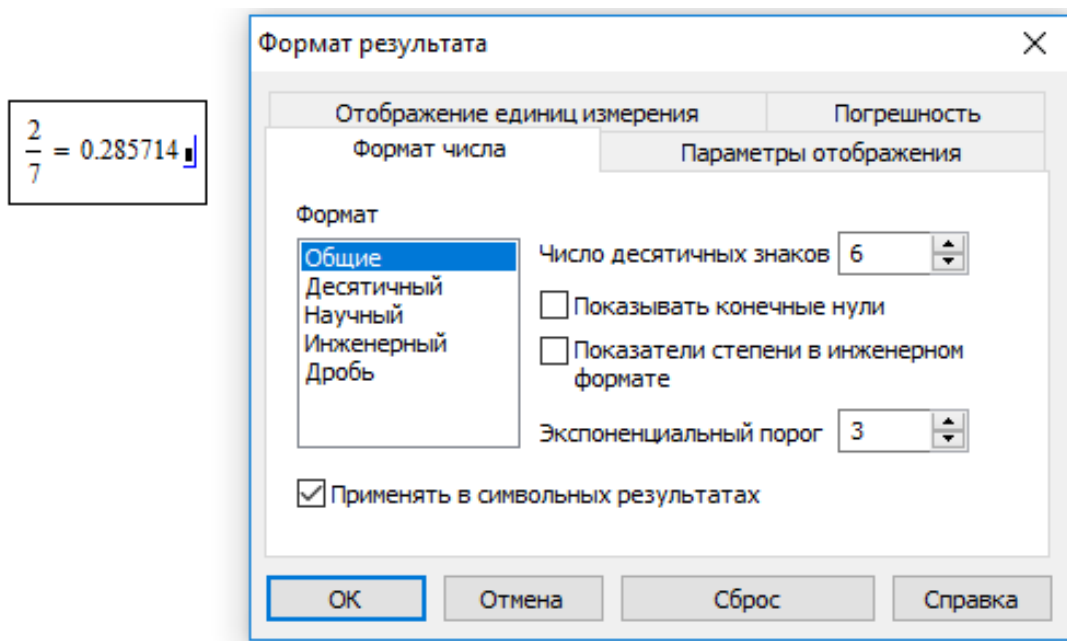


Рис. 7.7. Пример работы с окном *Формат результата*

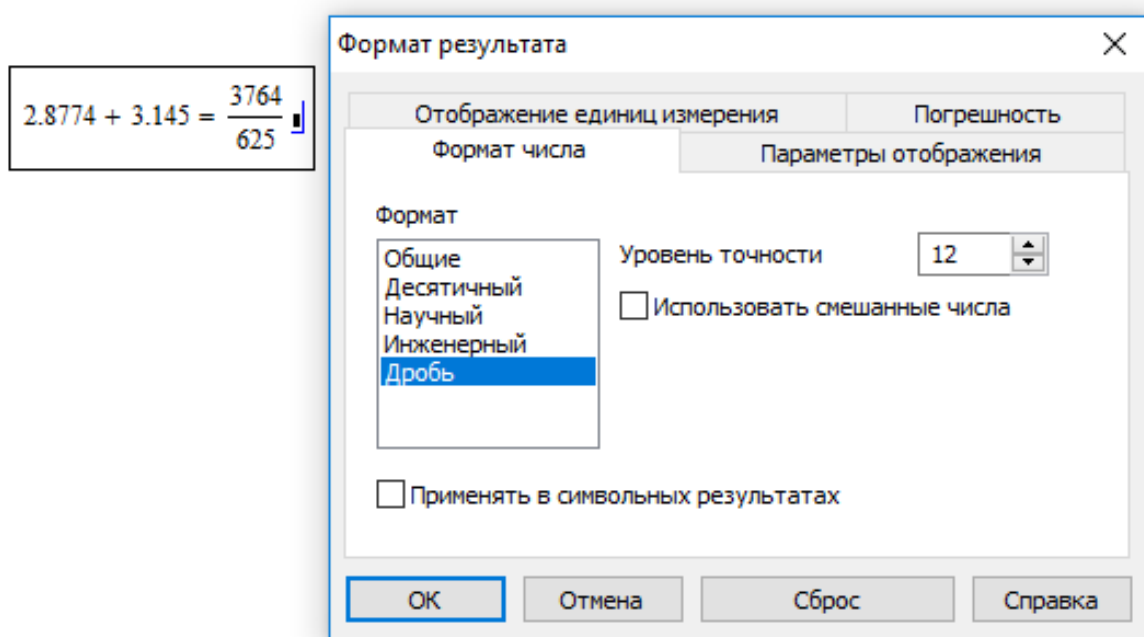


Рис. 7.8. Пример представления числа в виде обыкновенной дроби

- *Mathcad* понимает наиболее распространенные константы (например, число $\pi = 3,1415926$, ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с и т. д.).
- После нажатия на клавишу \leq *Mathcad* показывает результат. Как говорилось выше, по умолчанию *Mathcad* отображает результат с тремя цифрами после запятой.

Рабочая область окна представляет собой калькулятор, т. е. формулы можно писать в любой рабочей области. Вычисления в *Mathcad* можно осуществлять с любой точки экрана. Для этого необходимо щелкнуть мышью в любом месте рабочей области.

В *Mathcad* большинство команд собраны на панели инструментов *Math* (рис. 7.9).

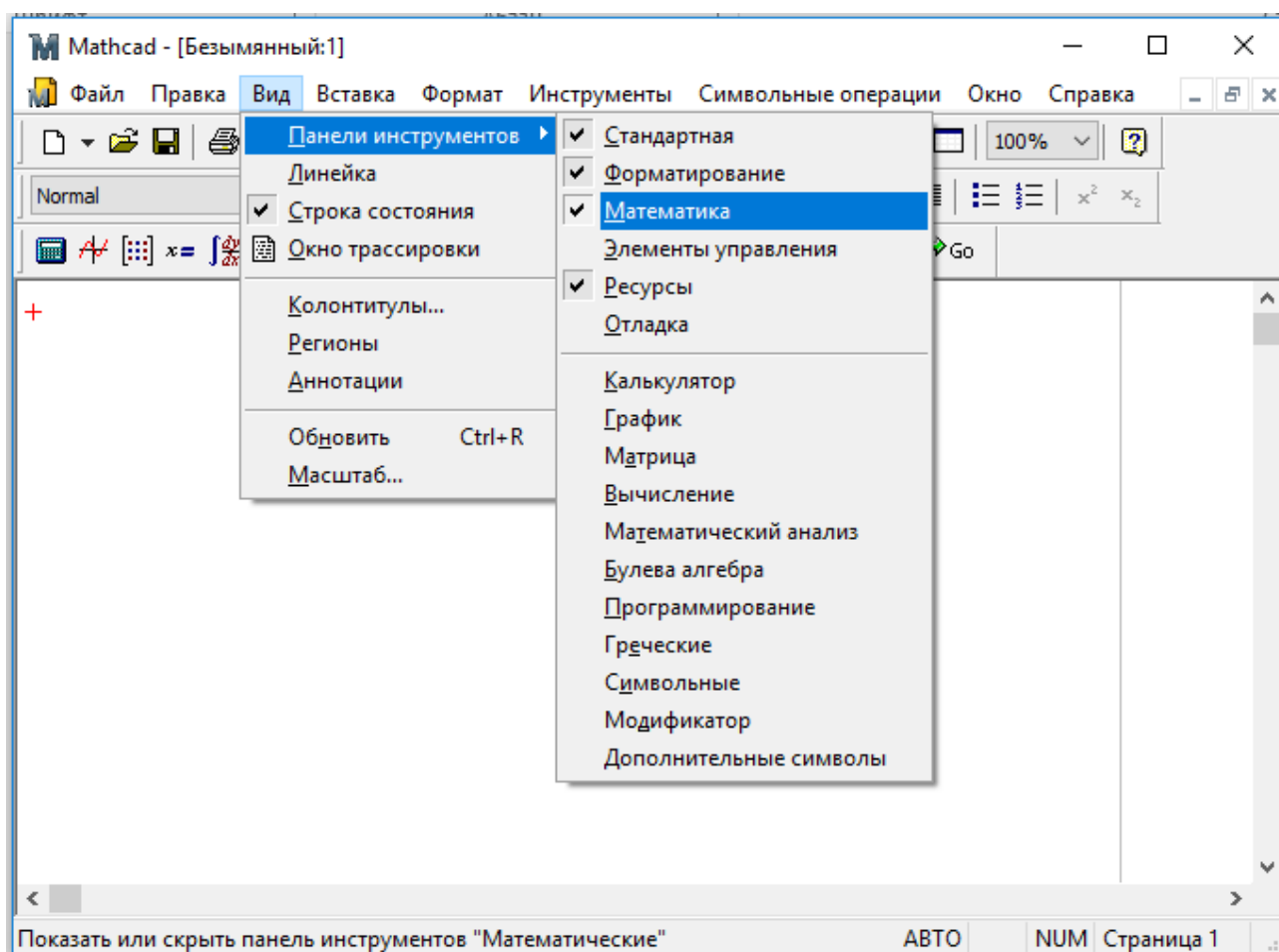


Рис.7.9. Вызов панели инструментов

Панель инструментов позволяет быстро вызывать команды главного меню. Каждая кнопка панели инструментов (рис. 7.10) активизируется щелчком мыши по ней. Палитры инструментов можно перемещать по рабочей области в любом направлении. Размеры панелей можно изменять.

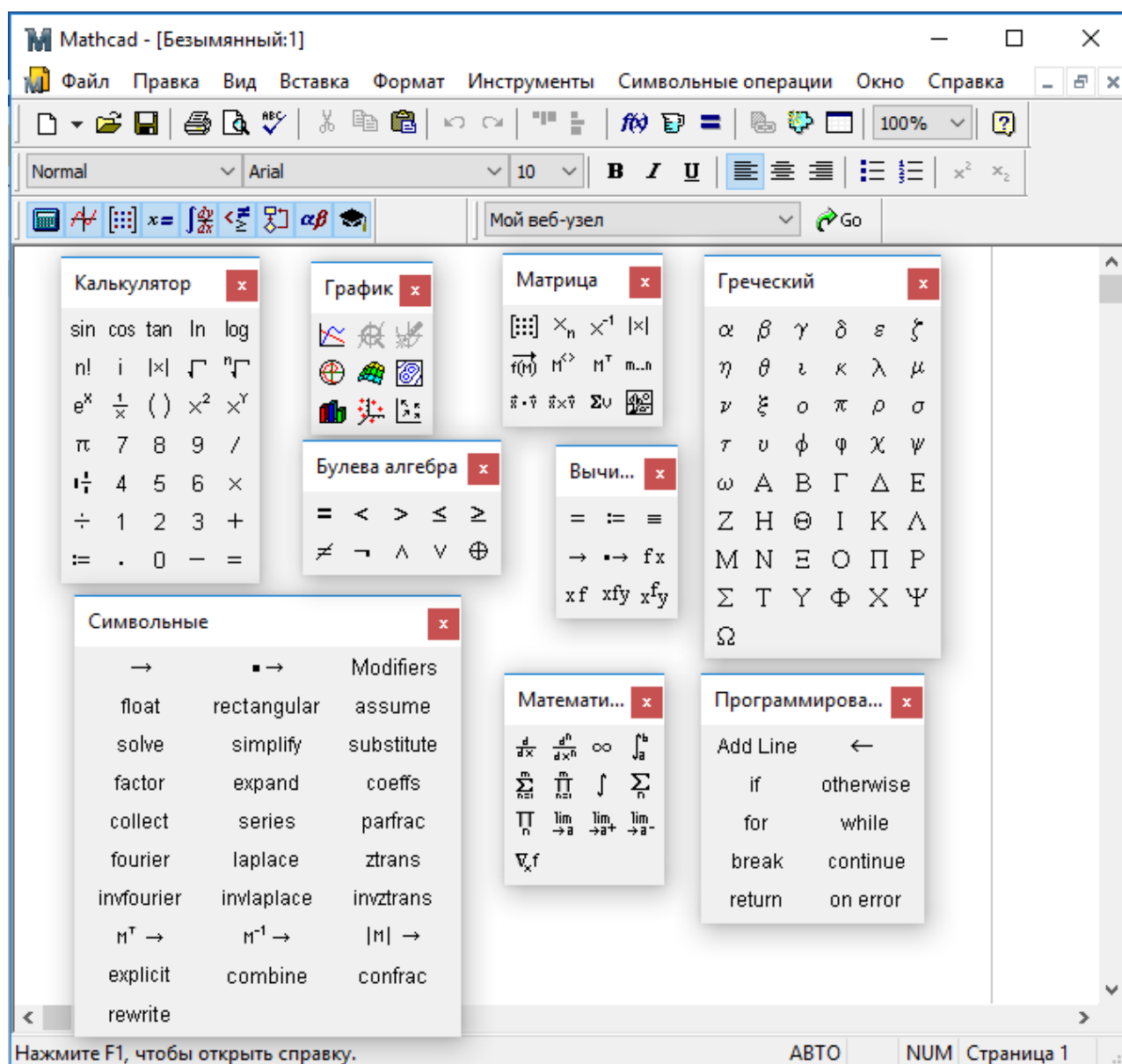


Рис. 7.10. Математические палитры

Подготовка вычислительных блоков может быть облегчена использованием шаблонов при задании того или иного оператора. Для этого в *Mathcad* служат палитры математических символов и шаблонов операторов и функций. Например, для вычисления определенного интеграла функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ воспользуемся шаблоном интеграла (рис. 7.11). В составе шаблона четыре поля ввода, обозначенные черными прямоугольниками:

- ✓ для функции;
- ✓ для верхнего предела интегрирования;
- ✓ для нижнего предела интегрирования;
- ✓ для переменной, по которой осуществляется интегрирование.

После нажатия на клавишу \Leftarrow получаем результат вычисления интеграла:

$$f(x) := 8 \cdot \sqrt{(25 - x^2) \cdot (5 - x^2)}$$

$$b := 2$$

$$a := 0$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_b^a f(x) dx = -147.269$$

Рис. 7.11. Шаблон ввода определенного интеграла

В *Mathcad* есть специальные типы переменных, называемые ранжированными. Они имеют множественные значения. Например (рис. 7.12), переменная *i* представляет собой целые числа от 1 до 4 с шагом 0,5, переменная *n* принимает значения от 1 до 7 с шагом 1:

$$n := 1..7$$

$$i := 1, 1.5..4$$

n =

1
2
3
4
5
6
7

i =

1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Рис. 7.12. Пример задания ранжированной переменной

Примечание.

Второй член в задании ранжированной переменной – это сумма ее начального значения и шага. На рис. 9.13 шаг переменной *i* равен $1,5 - 1 = 0,5$. Если второй член не указан, шаг по умолчанию принимается равным единице.

Ранжированная переменная может быть использована для той или иной функции или представления значений вектора. Она задает пределы изменения независимой переменной и ее шаг значений при построении графиков.

7.3.1. Формулы с константами

Константы в *Mathcad* представляют собой действительные и комплексные числа. Действительные константы могут иметь знак “+” или “-”. Дробная часть константы отделяется от целой части точкой. Комплексная константа представляется в виде суммы (разности) действительной и мнимой частей. При этом за мнимой частью константы без какого-либо знака операции ставится символ i .

В *Mathcad* имеется несколько зарезервированных имен констант. Это число π , которое вводится с подпанели *Калькулятор (Calculator)*; основание натурального логарифма, которое вводится клавишей $<e>$; значение 0,01 для вычисления процентов, которое вводится клавишей $<\%>$; значение компьютерной бесконечности (это число 10^{307}), которое вводится кнопкой ∞ подпанели *Исчисление (Calculus)*.

7.3.2. Переменные и формулы с переменными

Имена переменных и функций называются идентификаторами. Идентификаторы в *Mathcad* могут иметь практически любую длину. Они состоят из символов, каждый из которых может быть буквой (в том числе и греческой), а также цифрой. При этом первым символом должна быть буква.

Для получения численного результата необходимо всем переменным из формулы присвоить числовые значения. Присваивания бывают двух видов: локальные и глобальные. Локальное присваивание осуществляется кнопкой $:=$ подпанели *Калькулятор (Calculator)* или клавишей $<:=>$. Присвоенное значение в документе начинает действовать с момента его записи (слева-направо и сверху-вниз), поэтому необходимо следить, чтобы очередная формула была в строке правее или ниже предыдущей.

Глобальное присваивание действует в пределах всего документа, независимо от места его определения. Глобальное присваивание задается кнопкой \equiv подпанели *Оценка (Evaluation)*.

Пример цепочки формул с использованием локального (для x) и глобального (для a) присваивания:

$$x := 1 \quad y := x + 2 \quad z := y \cdot x + 3 \quad z = 6$$

$$x := 2 \quad \mu := \frac{z \cdot x}{a} \quad \mu := 4$$

$$a \equiv 3$$

Если для одной и той же переменной в документе задано локальное и глобальное присваивание, то локальное присваивание отменяет глобальное присваивание, превратив последнее в локальное.

Если для одной и той же переменной в документе глобальное присваивание задается несколько раз, то действует всегда самое последнее из них.

В *Mathcad* наиболее часто встречающиеся функции вынесены на подпанели *Калькулятор* (*Calculator*) и *Исчисление* (*Calculus*). К большинству же функций можно обратиться с помощью кнопки $f(x)$ стандартной панели инструментов. При этом ввод функции осуществляется с использованием диалогового окна *Вставить Функцию* (*Insert Function*). Диалоговое окно (рис. 7.13) содержит два списка. С помощью левого списка *Категория функции* (*Function Category*) осуществляется выбор раздела, к которому относится извлекаемая функция. Если есть затруднения в выборе раздела, то можно воспользоваться элементом списка *All*, по которому извлекаются все стандартные функции *Mathcad* в алфавитном порядке. В правом списке *Имя функции* (*Function Name*) содержится в алфавитном порядке перечень функций выбранного раздела:

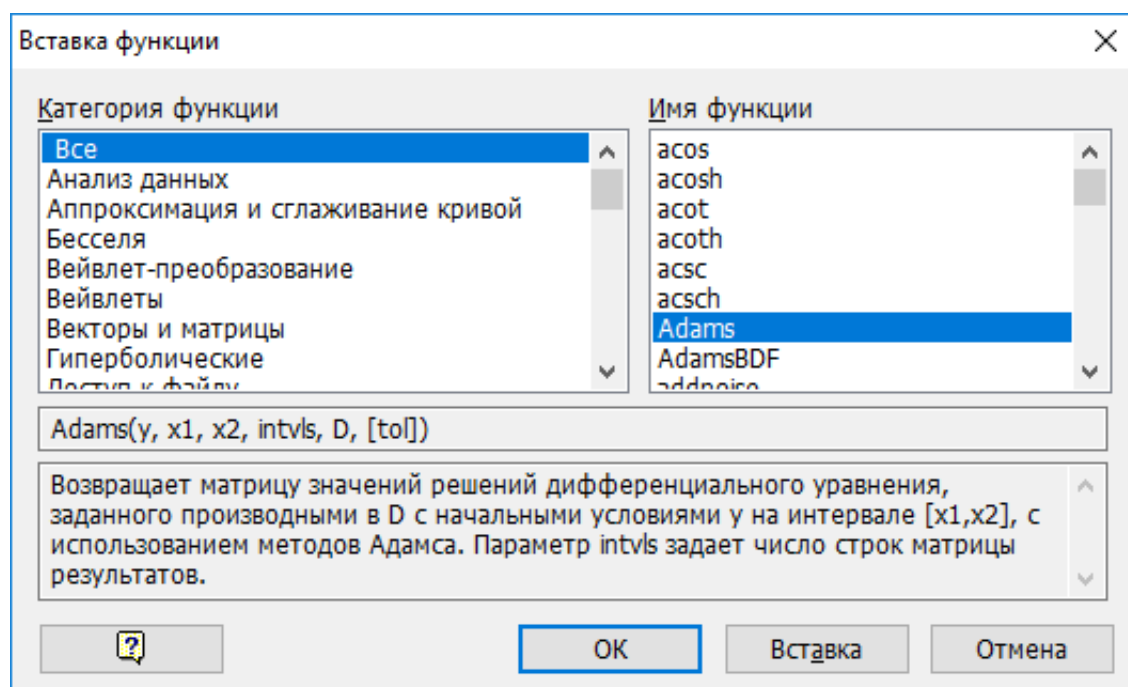


Рис. 7.13. Диалоговое окно ввода стандартных функций

Стандартные функции можно вставлять в *Mathcad* – документ и без использования диалогового окна *Вставить Функцию* (*Insert Function*). Для этого в нужном месте документа набирают имя функции со списком аргументов в круглых скобках.

7.3.3. Собственные функции пользователя

Помимо широкого набора стандартных функций, в *Mathcad* возможно определение собственных функций пользователя. В простейшем случае функция определяется формулой пользователя следующим образом:

имя_функции(аргументы) := формула,

где *имя_функции* – любой уникальный для данного документа идентификатор; *аргументы* – список аргументов функции через запятую; *формула* – любая формула с использованием констант, стандартных функций и функций пользователя. В *Mathcad* имя функции должно быть уникальным идентификатором среди всех других идентификаторов.

7.3.4. Формулы с векторами и матрицами

Работа с векторами и матрицами осуществляется по аналогии с обычными константами и переменными, т.е. векторы и матрицы можно использовать в операциях присваивания и в формулах. Вектор и матрица, как и переменная, задаются своим идентификатором.

Для ввода числовых значений матрицы используют кнопку $\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$ подпанели *Матрица (Matrix)*. При этом вызывается диалоговое окно *Вставить Матрицу (Insert Matrix)*, в котором необходимо задать размер матрицы: число ее строк и число столбцов.

На месте меток шаблона необходимо ввести константы или формулы, как это показано в примере:

$$a := 2 \quad b := 4$$

$$M := \begin{pmatrix} a+b & 1 & 2 \\ 3 & a*b & 4 \\ 5 & 6 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 20 \end{pmatrix}$$

При работе с векторами и матрицами необходимо помнить, что нумерация столбцов и строк в них (по умолчанию) начинается с нуля.

Для задания нумерации с единицы необходимо предварительно локальным или глобальным присваиванием изменить значение системной переменной *ORIGIN* на 1:

$$m := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{ORIGIN} := 1 \quad m^{\{1\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Помимо операций над матрицами в *Mathcad* возможны операции над элементами матриц по аналогии с переменными. Элементы матрицы определяются с помощью индексированных переменных. Индексами здесь могут быть целые константы и неотрицательные переменные. При использовании в качестве индекса идентификатора *i* необходимо помнить, что этот идентификатор используется также для указания мнимой единицы комплексного числа, поэтому в выражениях типа $2i$ не надо забывать указывать в явном виде операцию умножения (в противном случае $2i$ будет восприниматься как мнимая часть комплексного числа).

Нестандартные операции над элементами матриц выполняются с использованием всех операций и функций непосредственно над элементами матриц. При этом часто используют ранжированные переменные, которые определяются следующим образом: вводится имя переменной и знак присваивания. Затем кнопкой *m..n* подпанели *Матрица* вводится шаблон и на месте появившихся меток вводится начальное и конечное значение переменной, при этом шаг изменения переменной будет равен 1.

При определении ранжированной переменной можно задавать любой шаг ее изменения, отличный от единицы. Для этого кнопкой *m..n* подпанели *Матрица* (*Matrix*) вводится шаблон $i := \dots$, в котором после первой метки вводится запятая: $i := \dots$.

На месте первой метки нового шаблона вводится первое значение ранжированной переменной, на месте второй метки – второе значение ранжированной переменной, а на месте третьей метки – последнее значение ранжированной переменной.

Операция векторизации позволяет поэлементно оперировать векторами и матрицами одинакового размера. Эта операция проводится с помощью клавиши $\overrightarrow{f(M)}$ подпанели *Матрица* (*Matrix*). Пусть, например, даны векторы $\vec{a} := (2, 4, 6)$, $\vec{b} := (2, 8, 3)$, $\vec{c} := (3, 4, 5)$ и требуется определить вектор \vec{d} , i -я координата \vec{d}_i которого будет равна $\frac{\vec{a}_i}{\vec{b}_i} \vec{c}_i$, где a_i, b_i, c_i – соответственно i -е координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Для этого в нужном месте рабочего листа введите выражение $d := \frac{a}{b} \cdot c$ и синим курсором ввода выделите выражение, стоящее справа от знака присваивания:

$$d := \frac{a}{b} \cdot c$$

После щелчка по кнопке $\overrightarrow{f(M)}$ произойдет векторизация $d := \left(\frac{a}{b} \cdot c \right)$, в результате которой будет получен искомый вектор $\vec{d} = (3, 2, 10)$.

Рассмотрим другой пример. Пусть дана матрица:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M^2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 16 & 25 & 36 \\ 49 & 64 & 81 \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что не векторизованный квадрат воспринимается *Mathcad* как матричное умножение, а операция $\overrightarrow{M^2}$ определяет поэлементное умножение.

В *Mathcad* допускается использование так называемых "гнездовых" матриц, т.е. матриц, элементами которых являются также матрицы.

Например:

$$a := (1 \quad 2 \quad 3) \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$m := (a \quad b \quad c) \quad m = (\{1,3\} \quad \{2,1\} \quad \{2,2\})$$

Это означает, что элемент m_0 является, в свою очередь, матрицей размера 1×3 , элемент m_1 – матрицей размера 2×1 , а элемент m_2 – матрицей размера 2×2 . Отобразить все подэлементы элемента m можно так:

$$m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Гнездовые матрицы не допускают многих матричных операций, например, операцию обращения:

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad s := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad t := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$M := (v \quad s \quad t)$$

$$M = (\{3,1\} \quad \{3,1\} \quad \{3,1\})$$

$$M^{-1} = \blacksquare$$

В этом примере обратная матрица не вычисляется, о чем свидетельствует отсутствие решения и выделенный на экране красным цветом идентификатор матрицы M . Однако операции сложения и вычитания для гнездовых матриц одинакового размера допускаются.

7.3.5. Обработка формул в символьном виде

Mathcad имеет набор команд для преобразования и упрощения символьных выражений. Для их отображения на панели *Математика* откройте подпанель *Символьные* (*Symbolic*) (рис. 7.14). Команды подпанели *Символьные*:

1. Простейшим примером символьных вычислений является вычисление неопределенных интегралов. Для этого с помощью кнопки \int подпанели *Исчисление* (*Calculus*) введите требуемый неопределенный интеграл.

Затем кнопкой \rightarrow подпанели *Символьные* введите знак символьного вывода. Пример вычисления в символьном виде неопределенного интеграла:

$$\int x dx \rightarrow \frac{1}{2}x^2.$$

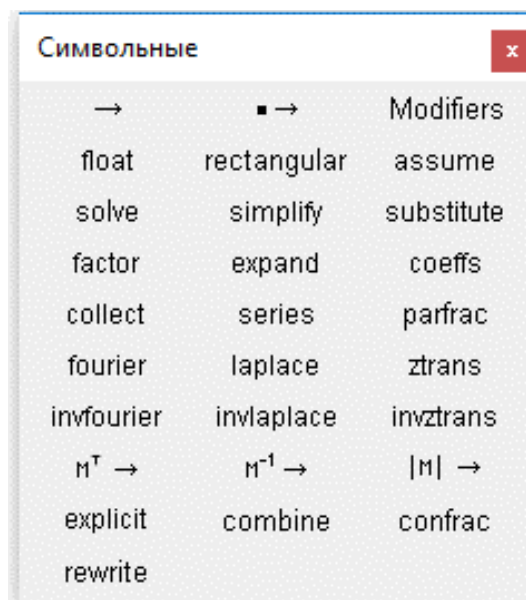


Рис. 7.14. Подпанель Символьные (Symbolic) для выполнения символьных операций

- Команда simplify используется для упрощения выражений. В нужном месте рабочего листа введите формулу, выделите всю формулу и щелкните simplify кнопкой подпанели *Символьные* (*Symbolic*); справа от знака символьного вывода появится выражение в упрощенном виде:

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} - ab + \left(\frac{b}{3}\right)^2 \text{ simplify } \rightarrow a^2 + \frac{10}{9}b^2.$$

- Команда expand предназначена для представления формулы в развернутом виде (то есть в некотором смысле она противоположна команде simplify) относительно выражения, записанного на месте метки:

$$\begin{aligned} \sin 5x \text{ expand}, x &\rightarrow 16 \sin x \cos x^4 - 12 \sin x \cos x^2 + \sin x \\ \sin 5x \text{ expand}, 5x &\rightarrow \sin 5x. \end{aligned}$$

- Команда factor предназначена для разложения целых чисел или выражений на множители:

$$\begin{aligned} a^3 - 6a^2 + 9a \text{ factor} &\rightarrow a(a - 3)^2 \\ a^2 - b^2 \text{ factor} &\rightarrow (a - b)(a + b). \end{aligned}$$

- Команда collect разлагает формулу по степеням переменной, указанной в этой команде на месте метки:

$$\begin{aligned} (a + b)^5 \text{ collect}, a &\rightarrow a^5 + 5ba^4 + 10b^2a^3 + 10b^3a^2 + 5b^4a + b^5 \\ (x - a)(x - b)(x - c) \text{ collect}, x &\rightarrow \\ &\rightarrow x^3 + (-a - b - c)x^2 + [ab - (-a - b)c]x - abc. \end{aligned}$$

6. Команда coeffs используется для вычисления коэффициентов полинома относительно переменной, указанной в команде на месте метки:

$$(4x^3 + 3x^2)(x + 1) \text{ coeffs, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(x - b)(x + b) \text{ coeffs, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -b^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. Команда solve позволяет решить уравнение или неравенство с нулевой правой частью относительно переменной, указанной в этой команде на месте метки:

$$x^2 + ax + b \text{ solve, } x \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(a^2 - 4b)^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(a^2 - 4b)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$e^x - a \text{ solve, } x \rightarrow \ln a.$$

Команда solve позволяет также решать системы линейных и нелинейных уравнений с нулевой правой частью:

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 7 \\ 2x - y \end{pmatrix} \text{ solve, } x, y \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}35^{\frac{1}{2}} & \frac{2}{5}35^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2}35^{\frac{1}{2}} & -\frac{2}{5}35^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

8. Команда substitute используется для подстановки значений переменных в формулу с последующим вычислением этой формулы:

$$ax^2 + bx + c \text{ substitute, } x = 5 \rightarrow 25a + 5b + c.$$

7.3.6. Задание функций и формул с помощью программных модулей

Формирование программных модулей осуществляется в *Mathcad* с помощью подпанели *Программирование (Programming)* (рис. 7.15).

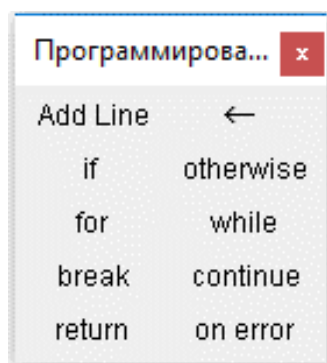



Рис. 7.15. Подпанель Программирование

Программный модуль обозначается в *Mathcad* вертикальной чертой, справа от которой последовательно записываются операторы языка программирования. Чтобы создать программный модуль, необходимо:

- ✓ ввести часть выражения, которая будет находиться слева от знака присваивания, и сам знак присваивания;
- ✓ нажать на подпанели *Программирование* кнопку *Add Line* (*Добавить линию*);
- ✓ если приблизительно известно, сколько строк кода будет содержать программа, можно создать нужное количество линий повторным нажатием кнопки *Add Line* соответствующее число раз;
- ✓ ввести желаемый программный код, используя программные операторы.

Пример:

$$\begin{array}{l} a := 3 \\ \left| \begin{array}{l} x \leftarrow a + 4 \\ x^2 \end{array} \right. \end{array}$$

В этой цепочке формул вычисляется выражение $(a + 4)^2$. Как видно из примера, программный модуль ограничивается слева вертикальной линией. Внутри программного модуля могут присутствовать внешние (a) и внутренние (x) переменные. В программном модуле значения внешних переменных определяются в соответствии с общими правилами операций локального и глобального присваивания (значение 3 для переменной a). Внутренняя переменная программного модуля определяется с момента присваивания ей числового значения операцией внутреннего присваивания (кнопка  подпанели *Программирование*). Если идентификаторы внутренней и внешней переменной совпадают, то в пределах программного модуля действует внутренняя переменная. Результатом вычисления программного модуля считается последняя выполняемая формула (в данном примере это x^2).

В отличие от правил записи формул на рабочем листе *Mathcad* – документа, внутри программного модуля в одной строке можно записать только один оператор или формулу.

Очень часто программные модули используются для определения функций пользователя. В конце программного модуля должна быть указана формула, являющаяся результатом вычисления функции.

Пример:

$$\begin{array}{l} f(x) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow (x + 1) \cdot 2 \\ a^2 + x \end{array} \right. \\ f(0.5) = 9.5 \end{array}$$

7.3.7. Операторы программирования

Условный оператор *if* предназначен для выполнения вычислений в зависимости от условия. При вызове оператора *if* появляется шаблон с двумя метками. На месте правой метки вводится логическое выражение. На месте левой метки вводится или формула, или операция внутреннего присваивания для указанной переменной.

Оператор *otherwise* используется совместно с одним или несколькими условными операторами *if* и указывает на выражение, которое будет выполняться, если ни одно из условий не оказалось истинным.

Пример:

$f(x) :=$	if $x < 5$ <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; margin-left: 10px;"> $y \leftarrow 2$ $x \leftarrow x^2$ </div> otherwise <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; margin-left: 10px;"> $y \leftarrow 4$ $x \leftarrow x^3$ </div>	
	$x \cdot y$	$f(3) = 18$ $f(8) = 2.048 \times 10^3$

В *Mathcad* имеются два оператора цикла: *for* и *while*. Первый из них дает возможность организовать цикл по некоторой переменной, заставляя ее пробегать некоторый диапазон значений. Второй создает цикл с выходом из него по некоторому логическому условию.

Для ввода оператора *for* необходимо выполнить следующие действия:

- выбрать кнопку *for* подпанели *Программирование*. На экране появятся поля ввода, изображенные на рис. 7.16.

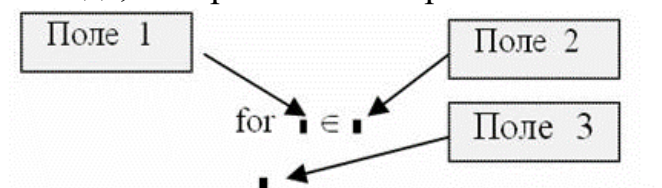


Рис. 7.16. Поля оператора цикла *for*

- в поле ввода 1 ввести имя переменной, являющейся параметром цикла;
- в поле 2 – закон изменения параметра цикла, используя для этого описание дискретной переменной или описание массива;
- в поле 3 – операторы, составляющие тело цикла. Если одной строки недостаточно, то дополнительные поля ввода (дополнительные строки) создаются щелчком по кнопке *Add line* подпанели *Программирование*, и тогда слева от тела цикла появляется вертикальная черта, охватывающая тело цикла.

Пример реализации:

$$\text{form}(n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad z_i \leftarrow \frac{1}{i^2 + 1} \\ z \end{array} \right. \quad \text{form}(5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.059 \\ 0.038 \end{pmatrix}$$

При программировании итерационных циклов используется оператор цикла *while*. Для этого необходимо:

- ❖ выбрать кнопку *while* подпанели *Программирование*. На экране появляются элементы, показанные на рис. 7.17:

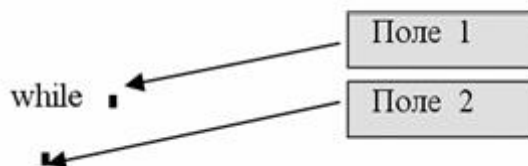


Рис. 7.17. Структура оператора цикла *while*

- ❖ в поле 1 ввести условие выполнения цикла;
- ❖ в поле 2 ввести операторы тела цикла. В теле цикла должны присутствовать операторы, которые могут изменить значение условия цикла, иначе цикл будет продолжаться бесконечно.

Оператор цикла *while* выполняется следующим образом: обнаружив оператор *while*, *Mathcad* проверяет указанное в операторе условие. Если оно равно 1 (т.е. выполняется), то выполняется тело цикла, и снова проверяется условие. Если условие принимает значение 0, то цикл заканчивается.

Пример реализации:

$$\text{sh}(a, d) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow a \\ \text{while } |x^2 - a| > d \\ \quad \left| \begin{array}{l} y \leftarrow x \\ x \leftarrow \frac{y + \frac{a}{y}}{2} \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

$$\text{sh}(9, 0.1) = 3$$

Организация итерационного цикла с помощью оператора *while* без дополнительных средств контроля может привести к заикливанию. Поэтому в *Mathcad* имеется специальный оператор *break*, который позволяет выйти из цикла или приостановить исполнение программы при выполнении заданного в операторе *break* условия.

Оператор *break* используется в левом поле ввода условного оператор *if*, а в правом размещается условие, при выполнении которого происходит прекращение работы цикла или программы. Поэтому первоначально вводится оператор *if*, а затем заполняются поля этого оператора.

Оператор *continue* обычно используется для продолжения выполнения цикла возвратом в начало тела цикла.

Оператор *return* прерывает выполнение модуля и возвращает значение операнда, стоящего в поле 1 (рис. 7.18).

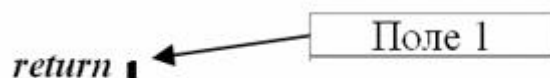


Рис. 7.18. Структура оператора *return*

Оператор *on error* является обработчиком возникающих при выполнении тех или иных вычислений ошибок и записывается в виде:

$\langle \text{конструкция } 1 \rangle \text{ on error } \langle \text{конструкция } 2 \rangle$

Если при выполнении $\langle \text{конструкция } 2 \rangle$ возникает ошибка, то выполняется $\langle \text{конструкция } 1 \rangle$. Если ошибка не возникает, то выполняется $\langle \text{конструкция } 2 \rangle$.

Контрольные вопросы:

1. В чем состоит отличие Mathcad от других аналогичных систем
2. Каковы возможности системы Mathcad
3. Дайте характеристику составных частей Mathcad
4. Перечислите условные операторы и назовите особенности их ввода в математическое выражение
5. Что называется идентификатором в системе Mathcad и каковы правила его формирования
6. Что называется оператором в системе Mathcad?
7. Как формируется и используется функция пользователя?
8. Что такое массив в системе Mathcad и каковы способы задания массива.
9. Назовите векторные и матричные операторы в системе Mathcad.
10. Как построить двухмерный график в декартовой системе координат?

8. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

8.1. Явные разностные схемы

Явные разностные схемы используют для решения уравнений, в которые вводят производные по времени. Для решения данных задач используют явные разностные схемы, с которыми познакомимся на примере *явной схемы бегущего счета для уравнения теплопроводности*.

Рассмотрим следующую задачу: **Процесс передачи тепла**

Дан длинный стержень. Его длина $0 < x < L$. В точке $x = 0$ температура T_0 , а в точке $x = L$ температура T_L .

В момент $t = 0$ распределение температуры вдоль стержня задается функцией $f(x)$, тогда распределение температуры в каждый момент времени:

$$U_{xx} = aU_t.$$

Здесь $a = c\rho/k$, где c – теплоемкость; ρ – плотность; k – теплопроводность стержня.

Пусть $a = 1$, тогда

$U_{xx} = U_t$ – параболическое дифференциальное уравнение (уравнение теплопроводности) (8.1)

$$U(0, t) = T_0,$$

$$U(L, t) = T_L \quad \text{– граничные условия,}$$

$$U(x, 0) = f(x) \quad \text{– начальные условия.}$$

Рассмотрим решение смешанной краевой задачи для уравнения (8.1):

$$U_{xx} = U_t \quad \text{при } 0 < x < L, t > 0$$

$$U(0, t) = 1,$$

$$U(L, t) = -[U(L, t) - g(t)] \quad \text{– граничные условия,}$$

$$U(x, 0) = 0 \quad 0 < x < L \quad \text{– начальные условия.}$$

Рассматриваемое уравнение в частных производных описывает распределение температуры в стержне, начальная температура которого равна нулю. Левый конец стержня находится при постоянной температуре, на правом конце стержня происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой определяется функцией $g(t)$.

Для решения задачи методом конечных разностей построим прямоугольную сетку (рис. 8.1), узлы которой определяются формулами

$$x_j = jh \quad j = 0, \dots, n.$$

$$y_i = ik \quad i = 0, \dots, m.$$

Отметим, что значения $U_{i,j}$ на левой и нижней сторонах сетки известны из начальных и граничных условий, на правой границе известно значение частной производной решения уравнения по переменной x .

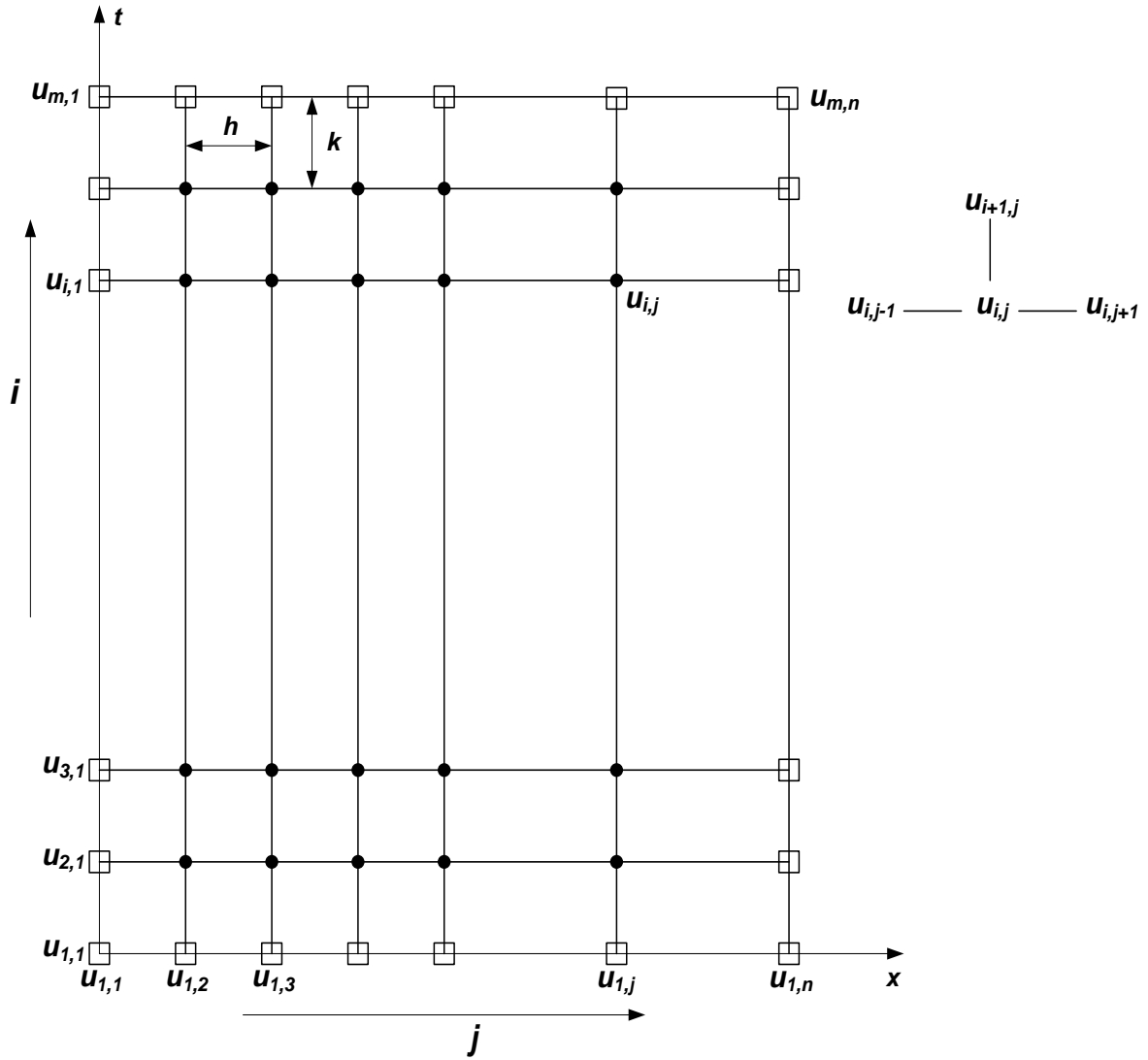


Рис. 8.1. Сетка для решения задачи методом конечных разностей

Заменим в уравнении (8.1) частные производные их конечноразностными аппроксимациями (приращениями):

$$U_t = (1/k)[U(x, t + k) - U(x, t)] = (1/k)[U_{i+1,j} - U_{i,j}].$$

$$U_{xx} = (1/h^2)[U(x + h, t) - 2U(x, t) + U(x - h, t)] =$$

$$= (1/h^2)[U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}].$$

Подставим выведенные выражения в исходное уравнение $U_{xx} = U_t$ и разрешим получившееся уравнение относительно значений функции на верхнем временном слое. В результате получим

$$U_{i+1,j} = U_{i,j} + (k/h^2)[U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}]. \quad (8.2)$$

По формуле (8.2) решается поставленная задача, поскольку она выражает решение в данный момент времени через решение в предыдущий момент времени.

Для решения смешанной краевой задачи необходимо аппроксимировать производную в граничном условии на правом конце

$$U(L, t) = -[U(L, t) - g(t)].$$

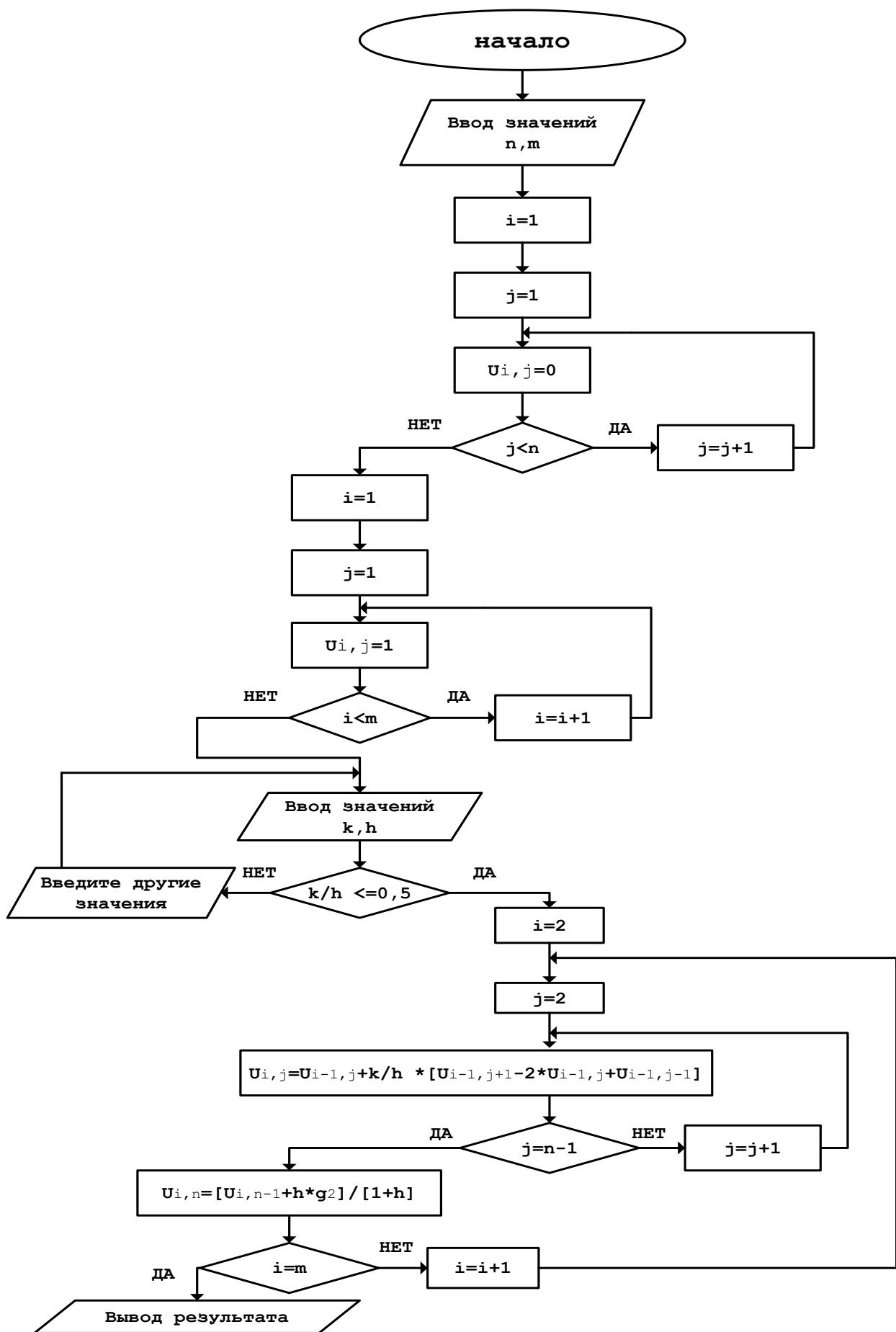


Рис. 8.2. Алгоритм решения дифференциальных уравнений по явной схеме

Используя конечно-разностную аппроксимацию, получаем

$$(1/h)[U_{i,n} - U_{i,n-1}] = -[U_{i,n} - g_i].$$

Следовательно,

$$U_{i,n} = \frac{(U_{i,n-1} - hg_i)}{(1 + h)}. \quad (8.3)$$

Формулы (8.2) и (8.3) позволяют начать вычисления по явной схеме.

Пример.

Решение краевой задачи теплопроводности в пакете MathCAD

1. Задание начальных и граничных условий:

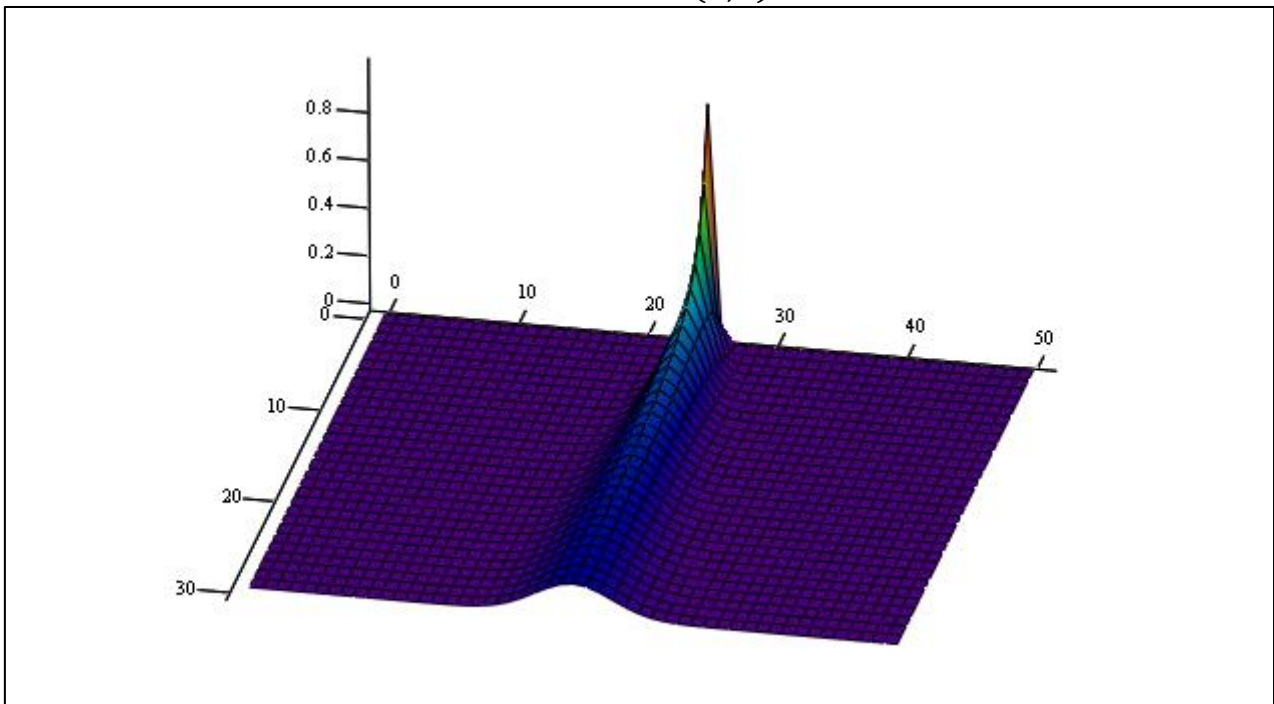
$$\begin{aligned} t &:= 0 \dots 29 \\ x &:= 1 \dots 49 \\ f_{0,x} &:= 0 & f_{t,0} &:= 0 \\ f_{0,50} &:= 0 & f_{0,25} &:= 1 \\ f_{0,0} &:= 0 \\ k &:= 0.15 \end{aligned}$$

2. Вычисление решения в последовательные моменты времени:

$$\text{solve2}(x, t) := \left. \begin{array}{l} \text{for } t \in 0 \dots 29 \\ \text{for } x \in 1 \dots 49 \\ f_{t+1,x} \leftarrow f_{t,x} + k(f_{t,x-1} - 2f_{t,x} + f_{t,x+1}) \end{array} \right| f$$

3. Визуализация численного решения уравнения теплопроводности:

$$S := \text{solve2}(x, t)$$



S

Рис. 8.3. Визуализация решения задачи

8.2. Лабораторная работа 1

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток

Цель работы: ознакомиться с теорией дифференциальных уравнений в частных производных и их применением в различных областях физики и техники; получить представление о существовании краевых и смешанных задач и их решениях; выработать навыки решения смешанной задачи для уравнения Лапласа методом сеток.

Пример.

Используя метод сеток, составить функцию, реализующую решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа (или уравнения эллиптического типа), удовлетворяющее на эллипсе (граница области Γ), который задан уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, условию $u(x, y)_{\Gamma} = 0,5(|x| + |y|)$ с шагом $h = 1$. Решение уточнять до сотых долей с помощью процесса Либмана.

Решение.

1. Используя симметрию заданных начальных условий (НУ), будем искать значение функции $u = u(x, y)$ только в I четверти. Для построения области G , которая ограничена контуром Γ , составим таблицу значений y от x (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Координаты выбранных точек, принадлежащих эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

x	0	1	2	3	4
y	3	2,90	2,60	1,98	0

2. Построим часть этого эллипса в I четверти (рис. 8.4).

$$y(x) := 3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$$

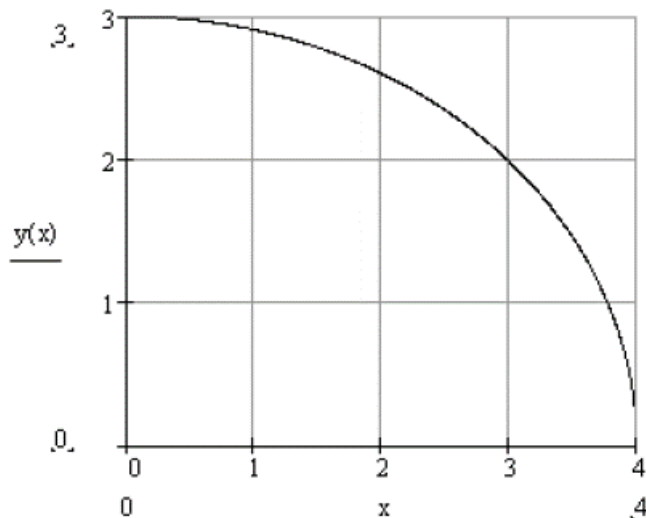


Рис. 8.4. Визуализация граничного условия

3. Построим сетку с шагом $h = 1$ (рис. 8.4). Точки на оси y : 1 и 2, точки на оси x : 0,1,2,3 будут внутренними точками (отмечены на рис. 8.5 белыми кружками), т.к. все они лежат внутри контура Γ . Граничные точки I рода обозначены на рис. 8.5 черными кружками и буквами $A_h, B_h, C_h, D_h, E_h, F_h$. Все точки (и граничные, и внутренние) являются расчетными точками. Граничных узлов II рода в данном случае нет.

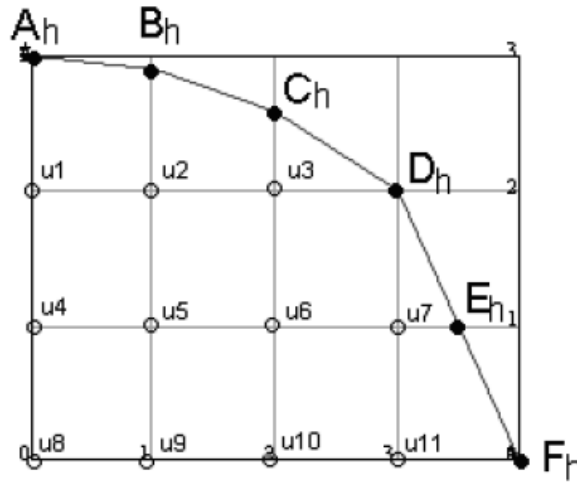


Рис. 8.5. Визуализация узлов координатной сетки

4. Ищем значения функции на границе, т.е. в точках $A_h, B_h, C_h, D_h, E_h, F_h$, где граничная функция задана в начальных условиях:

$$U_{0,0} := U_{\Gamma}(0,3) \text{ значение искомой функции в граничной точке } (0; 3) \quad U_{0,0} = 1,5$$

$$U_{0,1} := U_{\Gamma}(1, y(1)) \text{ значение искомой функции в граничной точке } (1; 2,9) \quad U_{0,1} = 1,95$$

$$U_{0,2} := U_{\Gamma}(2, y(2)) \text{ значение искомой функции в граничной точке } (2; 2, 6) \quad U_{0,2} = 2,3$$

$$U_{1,3} := U_{\Gamma}(3, y(3)) \text{ значение искомой функции в граничной точке } (3; 1,98) \quad U_{1,3} = 2,49$$

$$U_{2,4} := U_{\Gamma}(x(1), 1) \text{ значение искомой функции в граничной точке } (3,78; 1) \quad U_{2,4} = 2,39$$

$$U_{3,4} := U_{\Gamma}(4,0) \text{ значение искомой функции в граничной точке } (4; 0) \quad U_{3,4} = 2$$

$$U = \begin{pmatrix} 1,5 & 1,95 & 2,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,49 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Определим начальные значения функции $u(x, y)$ во внутренних точках. Для этого заменим уравнение Лапласа в каждой такой точке (рис. 8.4) конечно-разностными уравнениями; замену проведем согласно формуле

$$u(x, y) = \frac{1}{4} (u(x - h, y) + u(x + h, y) + u(x, y - h) + u(x, y + h)).$$

Каждое такое уравнение получается приравниванием значения функции во внутренней точке среднему арифметическому четырех значений функции в соседних точках:

$$u_1(0,2) = \frac{1}{4} (u(A) + u_4 + 2u_2) \quad (2u_2 - \text{в силу симметричности условий}).$$

Таким образом, $u_1 = \frac{1}{4}(u(0,3) + u_4 + 2u_2) = \frac{1}{4}(1,5 + u_4 + 2u_2)$, т.е. уравнение в конечных разностях во внутренней точке u_1 выглядит так:

$$u_1 = \frac{1}{4}(1,5 + u_4 + 2u_2)$$

$$\begin{array}{llll} u_1 = 0; & u_2 = 0; & u_3 = 0; & u_4 = 0; \\ u_5 = 0; & u_6 = 0; & u_7 = 0; & u_8 = 0; \\ u_9 = 0; & u_{10} = 0; & u_{11} = 0; & \end{array}$$

Given

$$\begin{array}{ll} u_1 = \frac{1}{4}(u_{0,0} + 2u_2 + u_4) & u_2 = \frac{1}{4}(u_{0,1} + u_1 + u_3 + u_5) \\ u_3 = \frac{1}{4}(u_{0,2} + u_{1,3} + u_2 + u_6) & u_4 = \frac{1}{4}(u_1 + 2u_5 + u_8) \\ u_5 = \frac{1}{4}(u_2 + u_4 + u_6 + u_9) & u_6 = \frac{1}{4}(u_3 + u_5 + u_7 + u_{10}) \\ u_7 = \frac{1}{4}(u_{1,3} + u_{2,4} + u_6 + u_{11}) & u_8 = \frac{1}{4}(2u_3 + 2u_9) \\ u_9 = \frac{1}{4}(2u_5 + u_8 + u_{10}) & u_{10} = \frac{1}{4}(2u_6 + u_9 + u_{11}) \\ u_{11} = \frac{1}{4}(u_{3,4} + 2u_7 + u_{10}) & \\ t := Find(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}) & \end{array}$$

6. Из 11-и уравнений, представленных выше, составим систему и найдем первое приближение к решению. Приближения будем искать до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность (т.е. пока разность между координатами последующей точки и предыдущей не станет меньше 0,01):

	0	$u_{1,0} := t_0$	$u_{1,1} := t_1$
0	1.9374		
1	2.0782	$u_{1,2} := t_2$	$u_{2,0} := t_3$
2	2.2785		
3	2.0929	$u_{2,1} := t_4$	$u_{2,2} := t_5$
$t = 4$	2.1448		
5	2.2446	$u_{2,3} := t_6$	$u_{3,0} := t_7$
6	2.3363		
7	2.1448	$u_{3,1} := t_8$	$u_{3,2} := t_9$
8	2.1633		
9	2.2188	$u_{3,3} := t_{10}$	
10	2.2229		

7. Заполняем матрицу, которую будем использовать далее, для сохранения значений, полученных при усреднении по Либману, а также для визуализации решения задачи.

$$U = \begin{pmatrix} 1,5 & 1,952 & 2,299 & 0 & 0 \\ 1,937 & 2,078 & 2,279 & 2,492 & 0 \\ 2,093 & 2,145 & 2,245 & 2,336 & 2,386 \\ 2,145 & 2,163 & 2,219 & 2,223 & 2 \end{pmatrix}$$

Найденные значения функции $u(x,y)$ есть грубое приближение решения уравнения Лапласа. Полученная матрица значений функции U получила название шаблон №1.

8. Уточняем значения решения в граничных точках, используя для этого формулу линейной интерполяции:

$$\delta_B = 2.90 - 3 = -0.1, \text{ тогда } u(B_h) = 1.95 - \frac{0.1 \cdot (2.05 - 1.95)}{0.9} = 1.94$$

Таким образом, для всех граничных точек получим уточнение значения функции U с помощью линейной интерполяции (шаблон №2):

$$\delta_C = 2.60 - 3 = -0.4, u(C_h) = 2.3 - \frac{0.4 \cdot (2.1 - 2.3)}{0.6} = 2.43$$

$$\delta_D = 1.98 - 2 = -0.02, u(D_h) = 2.49 - \frac{0.02 \cdot (2.34 - 2.49)}{0.98} = 2.49$$

$$\delta_E = 3.77 - 4 = -0.23, u(E_h) = 2.49 - \frac{0.23 \cdot (2.34 - 2.39)}{0.77} = 2.40$$

$$h := 1$$

$$u_{0,0} := 1.5 \quad \text{для точки A}$$

$$\delta := y(1) - 3$$

$$\delta := -9.526 \times 10^{-2}$$

$$u_{0,1} := u_{0,1} + \delta \cdot \left(\frac{u_{1,1} - u_{0,1}}{h + \delta} \right) \quad u_{0,1} = 1.952 \quad \text{для точки B}$$

$$\delta := y(2) - 3$$

$$\delta := -0.402$$

$$u_{0,2} := u_{0,2} + \delta \cdot \left(\frac{u_{1,2} - u_{0,2}}{h + \delta} \right) \quad u_{0,2} = 2.299 \quad \text{для точки C}$$

$$\delta := y(3) - 2$$

$$\delta := -1.596 \times 10^{-2}$$

$$u_{1,3} := u_{1,3} + \delta \cdot \left(\frac{u_{2,3} - u_{1,3}}{h + \delta} \right) \quad u_{1,3} = 2.492 \quad \text{для точки D}$$

$$\delta := x(1) - 4$$

$$\delta := -0.229$$

$$u_{2,4} := u_{2,4} + \delta \cdot \left(\frac{u_{3,4} - u_{2,4}}{h + \delta} \right) \quad u_{2,4} = 2.39 \quad \text{для точки E}$$

$$\delta := y(4) - 0$$

$$\delta := 0$$

$$u_{3,4} := u_{3,4} + \delta \cdot \left(\frac{u_{3,3} - u_{3,4}}{h + \delta} \right) \quad u_{3,4} = 2 \quad \text{для точки F}$$

Так как точки F и F_h совпадают, то $\delta_F = 0$, значит, $u(F_h) = u(F) = 2$ (так же и в случае A и A_h).

Заметим, что все граничные точки не принадлежат области G, поэтому во всех случаях $\delta < 0$, кроме частных случаев с точками A и F.

Аналогично строим шаблоны № 3, 4, 5 и т.д., пока последовательные два шаблона не совпадут с заданной точностью (до сотых долей). Функцию, реализующую построение шаблонов, составить самостоятельно.

Решая задачу, замечаем, что шаблоны № 10 и № 11 совпадают до сотых долей, поэтому итерационный процесс заканчивается.

Значения в шаблоне № 11 являются численным решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Задание

Используя метод сеток, составить функцию, реализующую решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа (табл. 8.2) эллиптического вида $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ с заданными НУ и с шагом $h = 1$ (исходные параметры заданы в табл. 8.2). Уточнение решения проводится до сотых с помощью процесса Либмана.

Отчет о лабораторной работе должен содержать: порядок ее выполнения, программу-функцию, графическую иллюстрацию.

Таблица 8.2

Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы

№ варианта	Γ	$u(x, y) _{\Gamma}$
1	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$ x + y $
2	$x^2 + y^2 = 16$	$ x + y $
3	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	$ x \cdot y $
4	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$2 x + y $
5	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	$2(x + y)$
6	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$	$ x \cdot y $
7	$x^2 + y^2 = 25$	$ x + y $
8	$x^2 + y^2 = 16$	$0,5 \cdot x + y $
9	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	$0,5 \cdot x + y $
10	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$	$ x + y $
11	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$2 x + 0,5 y $
12	$x^2 + y^2 = 16$	$0,5 x + 2 y $
13	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$	$ x + 2 y $
14	$x^2 + y^2 = 16$	$0,5 \cdot (x + 2 y)$

№ варианта	Γ	$u(x, y) _{\Gamma}$
15	$x^2 + y^2 = 9$	$ x + 3 y $
16	$(x + 5) \cdot (y + 5) = 45$	$ x + 0,5 y $
17	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$	$ x + 0,5 y $
18	$x^2 + y^2 = 25$	$2 \cdot x \cdot y $
19	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$3 \cdot (x + y)$
20	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$2 x + 0,5 y $
21	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$	$2 x + y $
22	$x^2 + y^2 = 9$	$ x \cdot y $
23	$(x + 2) \cdot (y + 2) = 12$	$ x \cdot y $
24	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	$ x + 0,5 y $
25	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$2 x + y $
26	$x^2 + y^2 = 25$	$0,5 \cdot (x + 3 y)$
27	$x^2 + y^2 = 16$	$0,4 \cdot x \cdot y $
28	$(x + 2) \cdot (y + 2) = 12$	$2 x + y $
29	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$	$3 x + 2 y $
30	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1$	$2 x + 0,2 y $
31	$(x + 2) \cdot (y + 2) = 12$	$2 x + 0,5 y $
32	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{ x }{ y }$
33	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$	$0,2 \cdot x \cdot y $
34	$(x + 2) \cdot (y + 3) = 18$	$2 x + 0,5 y $

№ варианта	Γ	$u(x, y) _{\Gamma}$
35	$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$	$ x \cdot y $
36	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$ x \cdot y $
37	$x^2 + y^2 = 16$	$ x + y $
38	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$0,8 \cdot x \cdot y $
39	$(x + 3) \cdot (y + 3) = 16$	$2 x + 0,4 y $
40	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$	$0,5 \cdot x \cdot y $

8.3. Лабораторная работа 2

Решение уравнения теплопроводности методом сеток

Цель работы: ознакомиться с применением дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа в различных областях физики и техники; выработать навыки решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом сеток.

Пример.

Используя метод сеток, решить уравнение теплопроводности (уравнение параболического типа): $\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2}$ при заданных НУ: $u(x, 0) = f(x)$, $u(x, t) = \varphi(t)$, $u(0, 6; t) = \psi(x)$, где $x \in [0; 0,6]$.

Решение найти при $h=0,1$ для $t \in [0; 0,01]$ с четырьмя десятичными знаками, считая $\delta = \frac{1}{6}$, $u(x, 0) = 0,3 + x \cdot (x + 0,4)$; $u(0, t) = 0,3 + t$; $u(0,6, t) = 0,9$.

Решение.

Это уравнение решают методом сеток постепенным переходом от значений функции $u(x_i, t_j)$ к значениям $u(x_i, t_{j+1})$.

Причём

$$t_{j+1} = t_{j+k},$$

где

$$k = h \cdot \frac{h}{6} = \frac{0,01}{6} = 0,0017.$$

1. Строим сетку по оси Ox с шагом h , по оси Ot – с шагом k :

$$ORIGIN := 1$$

$$h := 0.1 \quad \delta := \frac{1}{6} \quad k := h^2 \cdot \delta \quad k = 1.667 \times 10^{-3}$$

$$n := \frac{0.6}{h} + 1 \quad m := \frac{0.01}{k} + 1$$

$$n = 7 \quad m = 7$$

$$i := 2..8 \quad j := 2..8$$

$$x_1 := 0 \quad t_1 := 0$$

$$x_i := (i - 1) \cdot h \quad t_j := (j - 1) \cdot k$$

2. Решение уравнения удобно оформлять в виде матрицы. Сначала заполним её, исходя из начальных условий – заданными значениями температуры стержня в начальный момент времени по всей его длине:

$$i := 1..7 \quad j := 1..7$$

$$\phi(x) := 0.3 + x \cdot (x + 0.4)$$

$$tab_{1,i} := \phi(x_i)$$

3. Теперь заполним её, используя краевые условия:

$$\psi_1(t) := 0.3 + t \quad \psi_2(t) := 0.9$$

$$tab_{j,1} := \psi_1(t_j) \quad tab_{j,7} := \psi_2(t_j)$$

4. Получаем начальную матрицу:

$$tab = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.35 & 0.42 & 0.51 & 0.62 & 0.75 & 0.9 \\ 0.302 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.303 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.305 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.307 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.308 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Строка таблицы $j=0$ заполняется на основе заданных начальных условий:

$$u(x_i; 0) = 0.3 + x_i \cdot (x_i + 0.4) \quad \text{при } i = 1, 2, \dots;$$

$$u(0; 0) = 0.3 + 0 \cdot (0 + 0.4) = 0.3;$$

$$u(0.1; 0) = 0.3 + 0.1 \cdot (0.1 + 0.4) = 0.35;$$

$$u(0.2; 0) = 0.3 + 0.2 \cdot (0.2 + 0.4) = 0.42 \text{ и т.д. до } u(0.6; 0).$$

В первый ($i = 0$) и последний ($i = 6$) столбцы вписывают данные граничных условий:

$$u(0; t_j) = 0.3 + t_j, \text{ где } j = 1, 2, \dots, 6;$$

$$u(0; 0) = 0.3 + 0 = 0.3;$$

$$u(0; 0.0017) = 0.3 + 0.0017 = 0.302; \text{ и т.д. до } j = 6.$$

В столбец ($i = 6$) записываем из условия второй границы $u(0.6; t) = 0.9$, для всех $j = 1, 2, \dots, 6$.

5. Заполняем оставшуюся часть таблицы:

$$j := 2 \dots 7 \quad i := 2 \dots 6$$

$$tab_{j,i} := \frac{1}{6} \cdot (tab_{j-1,i-1} + 4 \cdot tab_{j-1,i} + tab_{j-1,i+1})$$

$$tab = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.35 & 0.42 & 0.51 & 0.62 & 0.75 & 0.9 \\ 0.302 & 0.353 & 0.423 & 0.513 & 0.623 & 0.753 & 0.9 \\ 0.303 & 0.356 & 0.427 & 0.517 & 0.627 & 0.756 & 0.9 \\ 0.305 & 0.359 & 0.43 & 0.52 & 0.63 & 0.759 & 0.9 \\ 0.307 & 0.362 & 0.433 & 0.523 & 0.633 & 0.761 & 0.9 \\ 0.308 & 0.365 & 0.436 & 0.527 & 0.636 & 0.763 & 0.9 \\ 0.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Численным решением уравнения теплопроводности с заданными начальными условиями являются значения, записанные в матрице *tab*.

6. Визуализация решения уравнения теплопроводности методом сеток показана на рис. 8.6.

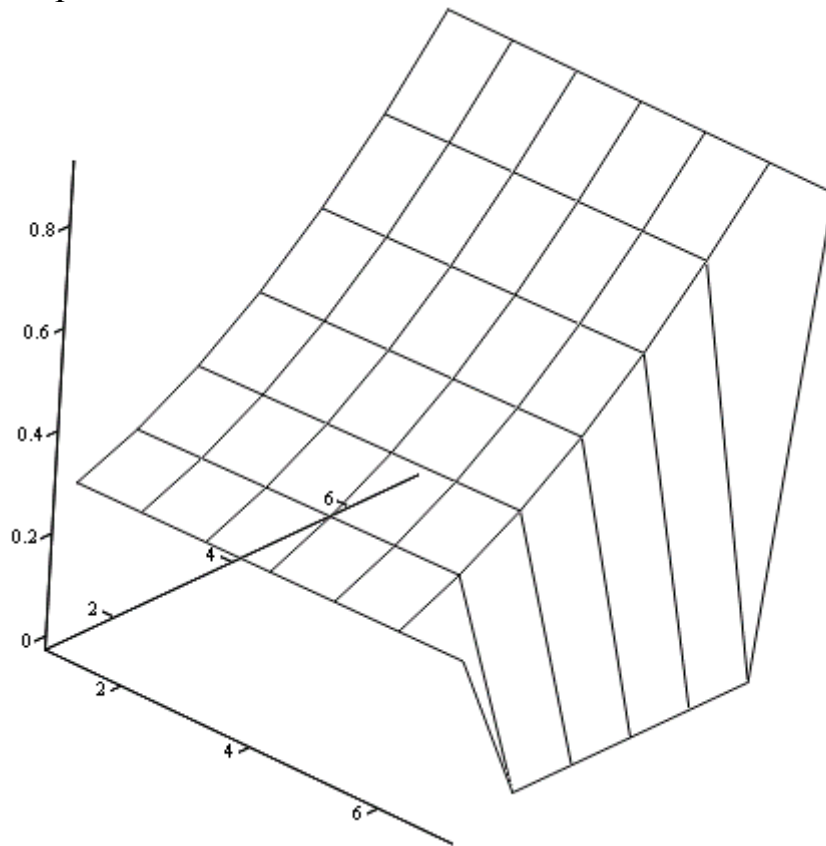


Рис. 8.6. Визуализация решения уравнения теплопроводности методом сеток

Задание

Используя метод сеток, составить функцию, реализующую решение смешанной задачи для дифференциального уравнения (ДУ) параболического типа: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при заданных НУ: $u(x, 0) = f(x)$, $u(0, t) = \varphi(t)$; $u(0.6; t) = \psi(t)$, где $x \in [0; 0.6]$ (исходные параметры заданы в табл. 8.3). Решение

выполнить при $h = 0,1$ для $t \in [0; 0.1]$ с тремя десятичными знаками, считая $\delta = \frac{1}{6}$.

Таблица 8.3

Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы

№ варианта	$f(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
1	$\cos(2x)$	$1 - 6t$	0,3624
2	$x(x + 1)$	$2t + 0,96$	0,96
3	$1,3 + \ln(x + 0,4)$	$0,8 + t$	1,2
4	$\sin(2x)$	$2t$	0,932
5	$3x(2 - x)$	$t + 2,52$	2,52
6	$\sin(0,55x + 0,33)$	$t + 0,33$	0,354
7	$2x(1 - x) + 0,2$	$0,2 + t$	0,68
8	$\sin x + 0,08$	$0,08 + 2t$	0,6446
9	$\cos(2x + 0,19)$	0,932	0,1798
10	$2x(x + 0,2) + 0,4$	$2t + 0,4$	1,36
11	$\ln(x + 0,25) + 1$	$0,415 + t$	0,9345
12	$\sin(x + 0,45)$	$0,435 - 2t$	0,8674
13	$3x(1 - x) + 0,12$	$2(t + 0.06)$	0.84
14	$(x - 0,2)(x + 1) + 0,2$	$6t$	0,84
15	$x(0,3 + 2x)$	t	0,9
16	$\sin(x + 0,02)$	$3t + 0,02$	0,581
17	$\cos(x + 0,48)$	$6t + 0,887$	0,4713
18	$\ln(263 - x)$	$3(0,14 - t)$	0,3075
19	$1,5 - x(1 - x)$	$3(0,5 - t)$	1,26
20	$\cos(x + 0,845)$	$6(t + 0,11)$	0,1205
21	$0,6 + x(0,8 - x)$	$0,6 + t$	0,72
22	$\cos(x + 0,66)$	$3t + 0,79$	0,3058
23	$0,9 + 2x(1 - x)$	$3(0,3 - 2t)$	1,38
24	$\ln(1,95 + x)$	$0,29 + 6t$	0,4065
25	$x(1 - x) + 0,2$	$0,2t$	0,44

№ варианта	$f(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
26	$1 - \lg(x + 4)$	$t + 1$	1,4
27	$2\cos(x + 0,55)$	$0,8179 + 3t$	1,705
28	$\sin(0,9 + x)$	$0,02 + 3t$	0,581
29	$\sin(0,48 + x)$	$0,882 + 3t$	0,4618
30	$\sin(3x)$	$3t$	0,932
31	$3x(1 - x) + 0,12$	$2(t + 0,06)$	0,84
32	$\cos(x + 0,45)$	$3t + 0,9$	0,058
33	$2x(x - 0,2) + 0,54$	$2t + 0,4$	5,36
34	$x(x + 3)$	$2t + 0,86$	0,94
35	$\ln(x + 0,4)$	$0,6 + t$	1,2
36	$\sin(3x)$	$2t - 0,2$	0,532
37	$3x(2 + x)$	$2t - +2,5$	2,78
38	$\cos(x - 0,45)$	$0,123 - 2t$	0,485
39	$x(x + 0,4)$	$0,6 + 2t$	0,49
40	$(x + 0,2)(x + 1)$	$6t + 1,6$	0,41

8.4. Лабораторная работа 3

Решение уравнения колебания струны методом сеток

Цель работы: ознакомиться с применением дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа в различных областях физики и техники; выработать навыки решения смешанной задачи для уравнения колебания струны методом сеток.

Пример.

Используя метод сеток, составить решение уравнения смешанной задачи для уравнения колебания струны (уравнения гиперболического типа): $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с НУ: $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=\Phi(x)$, $(0 \leq x \leq 1)$ и ГУ: $u(0,t)=\varphi(t)$, $u(1,t)=\psi(t)$.

Решение выполнить с шагом $h = 0.1$, определяя значения функции $u(x, t)$ с четырьмя десятичными знаками, причем $0 \leq t \leq 0.5$.

$$f(x) = (x + 2) \cdot (0.5x - 2), \Phi(x) = 3 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \varphi(t) = 2, \psi(t) = 4.5 - 3t$$

Решение.

Воспользуемся соотношением:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1},$$

где $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots$, при этом $u_{i,0} = f_i$, а для определения $u_{i,1}$ можно использовать один из возможных приёмов, например:

$$u_{i,1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + h\Phi_i,$$

причём

$$x_i = 0 + ih (i = 0, 1, \dots, n), n = \frac{1-0}{h} = 10;$$

$$t_j = 0 + jh (j = 0, 1, \dots, 5).$$

Кроме того,

$$u_{0,j} = \varphi(t_j); \quad u_{n,j} = \psi(t_j).$$

Решение по указанным формулам удобно выполнять в матрице, которая и является решением данной задачи.

1. Вычисляем значения $x_i = 0.1 \cdot i$ и заполняем ими первую строчку (для значения $t_0 = 0$), исходя из НУ:

ORIGIN := 1

h := 0.1

i := 2..11 *j* := 2..6

$x_1 := 0$ $t_1 := 0$

$x_i = h \cdot (i - 1)$ $t_j := (j - 1) \cdot h$

i := 1..11 *j* := 1..6

$\phi(x) := (x + 2) \cdot (0.5 \cdot x - 2)$

$tab_{1,i} = \phi(x_i)$

2. Вычисляем значения $u_{0,j} = \varphi(t_j) = 2$ при $t_j = 0.1$ и заполняем ими первый столбец таблицы (он соответствует значению $x_0 = 0$). Последний столбец заполняем значениями $u_{10,j} = \psi(t_j) = 0$:

$\psi_1(t) := 2$ $\psi_2(t) := 4.5 - 3t$

$tab_{j,1} := \psi_1(t_j)$ $tab_{j,11} := \psi_2(t_j)$

tab =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	-4.095	-4.18	-4.255	-4.32	-4.375	-4.42	-4.455	-4.48	-4.495	4.5
2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.2
3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.9
4	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.6
5	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.3
6	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

3. Вычисляем значения $u_{i,1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + h\Phi_i$, где f_{i+1} и f_{i-1} берут из первой строки таблицы, а $\Phi_i(x) = 3 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; $x_i = 0.1 \cdot i$ ($i = 1, 2, \dots, 9$); $h = 0.1$. Результаты записываем во вторую строку таблицы.

4. Вычисляем значения $u_{i,j}$ в последующих строках по формуле $u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}$, где значения $u_{i+1,j}, u_{i-1,j}, u_{i,j-1}$ берут из двух предыдущих строк таблицы:

$$i := 2..10$$

$$\theta(x) := 3 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$tab_{2,i} := \frac{1}{2} \cdot (tab_{1,i+1} + tab_{1,i-1} + h \cdot \theta(x_i))$$

$$i := 3..6 \quad j := 2..10$$

$$tab_{i,j} := tab_{i-1,j-1} + tab_{i-1,j+1} - tab_{i-2,j}$$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
tab =	1	2	-4.095	-4.18	-4.255	-4.32	-4.375	-4.42	-4.455	-4.48	-4.495	4.5
	2	2	-0.817	-3.891	-3.957	-4.017	-4.07	-4.116	-4.155	-4.186	0.289	4.2
	3	2	2.204	-0.594	-3.653	-3.708	-3.758	-3.805	-3.847	0.614	4.509	3.9
	4	2	2.223	2.442	-0.344	-3.394	-3.442	-3.49	0.964	4.848	4.225	3.6
	5	2	2.238	2.472	2.701	-0.079	-3.125	1.327	5.205	4.575	3.939	3.3
	6	2	2.25	2.497	2.738	2.97	4.69	5.57	4.938	4.297	3.65	3

5. Строим сеточную область решения задачи (интегральную плоскость) (рис. 8.7).

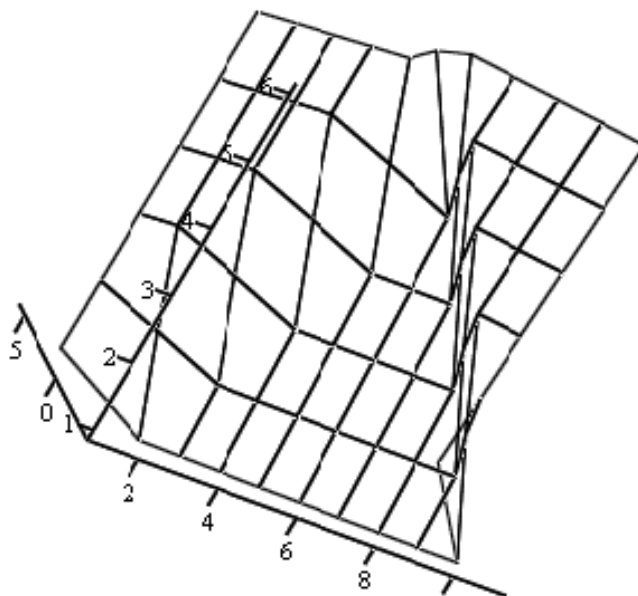


Рис. 8.7. Область решения задачи

Задание

Используя метод сеток, составить функцию, реализующую решение смешанной задачи для уравнения колебания струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с НУ: $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = \Phi(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) и граничные условия (ГУ): $u(0, t) = \varphi(t)$, $u(1, t) = \psi(t)$ (исходные параметры заданы в табл. 8.4). Решение выполнить с шагом $h = 0.1$, определяя значения функции $u(x, t)$ с четырьмя десятичными знаками, причем $0 \leq t \leq 0.5$.

Таблица 8.4

Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы

№ варианта	НУ и ГУ	№ варианта	НУ и ГУ
1	$f(x) = (x + 0,2) \sin \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 1 + x^2$ $\varphi(t) = 0$ $\psi(t) = 1,2(t + 1)$	2	$f(x) = (x^2 + 0,5) \cos \pi x$ $\Phi(x) = (x + 0,4)^2$ $\varphi(t) = 0,4$ $\psi(t) = t - 2,5$
3	$f(x) = (x + 0,5)(x - 1)$ $\Phi(x) = \sin(x + 0,2)$ $\varphi(t) = t - 0,5$ $\psi(t) = 3t$	4	$f(x) = (x + 2)(0,5x + 1)$ $\Phi(x) = 2 \cos(x + \frac{\pi}{6})$ $\varphi(t) = 2$ $\psi(t) = 4,5 - 3t$
5	$f(x) = 0,5(x + 1)$ $\Phi(x) = (x + 0,5) \cos \pi x$ $\varphi(t) = 0,5$ $\psi(t) = 2 - 3t$	6	$f(x) = (x + 0,5) \sin \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 1 + x^2$ $\varphi(t) = 1$ $\psi(t) = 1,2(t + 0,2)$
7	$f(x) = (x + 1) \sin \pi x$ $\Phi(x) = x^2 + x$ $\varphi(t) = 0$ $\psi(t) = 0,5t$	8	$f(x) = (2x + 0,5)(x - 1)$ $\Phi(x) = \sin(2x + 0,2)$ $\varphi(t) = t - 0,5$ $\psi(t) = 2t$
9	$f(x) = (x + 0,2) \sin \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 1 + x^2$ $\varphi(t) = 0,6t$ $\psi(t) = 1,2$	10	$f(x) = 2x(1 - x^2)$ $\Phi(x) = (x + 0,4) \cos(x + 0,3)$ $\varphi(t) = 0,5t^2$ $\psi(t) = 0$
11	$f(x) = (1 - x^2) \cos \pi x$ $\Phi(x) = 2x + 0,6$ $\varphi(t) = 1 + 0,4t$ $\psi(t) = 0$	12	$f(x) = 0,5(x^2 + 1)$ $\Phi(x) = x \sin x$ $\varphi(t) = 0,5 + 3t$ $\psi(t) = 1$
13	$f(x) = (x + 0,4) \cos \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 0,3(x^2 + 1)$ $\varphi(t) = 0,4$ $\psi(t) = 1,2t$	14	$f(x) = 0,5x(x + 1)$ $\Phi(x) = x \cos x$ $\varphi(t) = 2t^2$ $\psi(t) = 1$

№ варианта	НУ и ГУ	№ варианта	НУ и ГУ
15	$f(x) = (x^2 + 0,5) \cos \pi x$ $\Phi(x) = (x + 0,7)^2$ $\varphi(t) = 0,5$ $\psi(t) = 2t - 1,5$	16	$f(x) = x(2x - 0,5)$ $\Phi(x) = \cos 2x$ $\varphi(t) = t^2$ $\psi(t) = 1,5$
17	$f(x) = 3x(1 - x)$ $\Phi(x) = \cos(x + 0,5)$ $\varphi(t) = 2t$ $\psi(t) = 0$	18	$f(x) = (x + 0,5)(x + 1)$ $\Phi(x) = \cos(x + 0,3)$ $\varphi(t) = 0,5$ $\psi(t) = 3 - 2t$
19	$f(x) = 1,2x - x^2$ $\Phi(x) = (x + 0,6) \sin x$ $\varphi(t) = 0$ $\psi(t) = 0,2 + 0,5t$	20	$f(x) = (1 - x^2) + x$ $\Phi(x) = 2 \sin(x + 0,4)$ $\varphi(t) = 0,4t$ $\psi(t) = (t + 1)^2$
21	$f(x) = (1 - x) \cos \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 2x + 1$ $\varphi(t) = 2t + 1$ $\psi(t) = 0$	22	$f(x) = (2 + x) \sin \pi x$ $\Phi(x) = (x + 0,3)^2$ $\varphi(t) = 0,4t$ $\psi(t) = 0$
23	$f(x) = (x + 0,5)^2$ $\Phi(x) = (x + 1) \sin x$ $\varphi(t) = 0,5(0,5 + t)$ $\psi(t) = 2,25$	24	$f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = x^2$ $\varphi(t) = 1 + 2t$ $\psi(t) = 0$
25	$f(x) = (x + 0,4) \sin \pi x$ $\Phi(x) = (x + 1)^2$ $\varphi(t) = 0,5t$ $\psi(t) = 0$	26	$f(x) = 2x(x + 1)$ $\Phi(x) = 2 \sin x$ $\varphi(t) = 0,3$ $\psi(t) = 4,3 + t$
27	$f(x) = (2 - x) \sin \pi x$ $\Phi(x) = (x + 0,6)^2$ $\varphi(t) = 0,5t$ $\psi(t) = 0$	28	$f(x) = x \cos \pi x$ $\Phi(x) = x(2 - x)$ $\varphi(t) = 2t$ $\psi(t) = -1$

№ варианта	НУ и ГУ	№ варианта	НУ и ГУ
29	$f(x) = 0,4(x + 0,5)^2$ $\Phi(x) = x \sin(x + 0,6)$ $\varphi(t) = 0,1 + 0,5t$ $\psi(t) = 0,9$	30	$f(x) = x(x + 1)$ $\Phi(x) = \cos x$ $\varphi(t) = 2$ $\psi(t) = 2(t + 3)$
31	$f(x) = (x^2 + 1)(1 - x)$ $\Phi(x) = 1 - \sin x$ $\varphi(t) = 1$ $\psi(t) = 0,5t$	32	$f(x) = x^2 \cos \pi x$ $\Phi(x) = x^2(x + 1)$ $\varphi(t) = 0,5t$ $\psi(t) = t - 1$
33	$f(x) = (x + 1) \sin \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 1 - x^2$ $\varphi(t) = 0,5t$ $\psi(t) = 2$	34	$f(x) = x \sin \pi x$ $\Phi(x) = (x + 1)^2$ $\varphi(t) = 2t$ $\psi(t) = 0$
35	$f(x) = x \cos \pi x$ $\Phi(x) = x(4 - x)$ $\varphi(t) = 3t$ $\psi(t) = 2$	36	$f(x) = x(x + 1)$ $\Phi(x) = \cos x$ $\varphi(t) = 0$ $\psi(t) = 2(t + 1)$
37	$f(x) = 2x(x + 5)$ $\Phi(x) = 2 \sin x$ $\varphi(t) = 0,6$ $\psi(t) = 4 + t$	38	$f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = x^2$ $\varphi(t) = 3 + 2t$ $\psi(t) = 1$
39	$f(x) = x \cos \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 2x^2$ $\varphi(t) = 0$ $\psi(t) = t^2$	40	$f(x) = (x + 0,5)^2$ $\Phi(x) = (x + 1) \sin x$ $\varphi(t) = 0,4(0,6 + t)$ $\psi(t) = 2,5$

8.5. Лабораторная работа 4

Изучение решения дифференциального уравнения методом конечных разностей на примере одномерного нестационарного уравнения теплопроводности

Цели работы:

1. Изучить основные понятия метода конечных разностей.
2. Провести анализ свойств разностных схем аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных.

Предмет исследований: одномерное нестационарное уравнение теплопроводности.

В стержне длиной L с теплоизолированной боковой поверхностью торцы поддерживаются при постоянных температурах T_0 и T_L ; температуропроводность материала стержня постоянна и равна ν^2 ; в начальный момент времени $t = 0$ стержень нагрет до температуры $U_{\text{нач}}(x)$ (координата x отсчитывается от левого торца стержня (рис. 8.8)). Найти распределение температуры по стержню в любой момент времени, т.е. найти функцию $U(x, t)$ для $0 < x < L$ и $t > 0$.

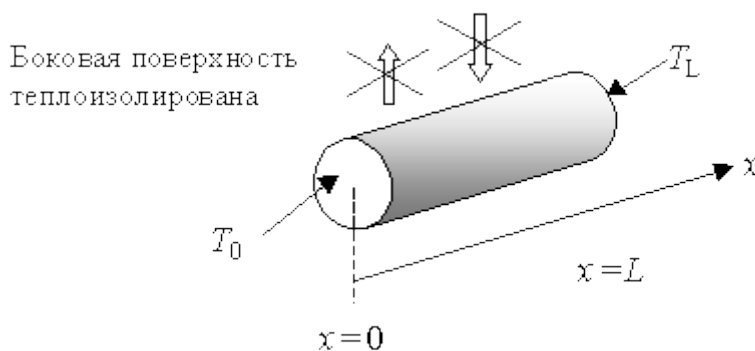


Рис. 8.8. Стержень

Искомая функция $U(x, t)$ является решением одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Начальные условия: $U(x, 0) = U_{\text{нач}}(x)$ при $0 \leq x \leq L$.

Постоянные граничные условия (условия Дирихле):

$$\begin{cases} U(0, t) = T_0, \\ U(L, t) = T_L, \end{cases} \quad \text{при } 0 < t < \infty$$

Заданы следующие параметры:

- 1) температура, которая подводится к концам стержня $T_0 = T_1 = T$;
- 2) коэффициент температуропроводности ν^2 ;
- 3) длина стержня L ;
- 4) начальное распределение температуры по стержню $\varphi(x)$;
- 5) моделируемое время time.

Необходимо:

- Смоделировать процесс теплопроводности и проследить как изменяется температура в конкретных точках стержня с течением времени четырьмя различными способами:
 - явная разностная схема;
 - неявная разностная схема;
 - смешанная разностная схема;
 - точное аналитическое решение.

Построить графики для начального, среднего и конечного моментов времени.

- Рассчитать погрешность для явной, неявной и смешанной разностных схем. Сделать выводы о точности метода и обосновать их. Изменить величину шага для времени и пространства (количество интервалов по времени и пространству оставить тем же). Указать, как изменится величина погрешностей.
- Рассчитать через какое время процесс теплопроводности в стержне станет стационарным, т.е. температура в точке с течением времени (даже через большой промежуток) будет изменяться на очень малую величину. Расчет вести по точному методу решения. Количество слагаемых уменьшить до 10. Малую величину принять равной $\varepsilon = 0,1$.

Таблица 8.5

Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы

№ варианта	T	ν^2 , м ² /с	L , м	$\varphi(x)^1$	time, с
1	100°C	0,5	3,5	$22+5x$	0,45
2	150°C	0,6	3,4	$32-5\sin(x)$	0,5
3	200°C	0,7	3,3	$20+10\cos(x)$	0,55
4	250°C	0,8	3,2	23	0,6
5	300 K	0,9	3,1	$280+2x+5\cos(x)$	0,65
6	350 K	1,0	3,0	$250-4x$	0,7
7	400 K	1,1	2,9	$290+2x$	0,75
8	450 K	1,2	2,8	$800+4x$	0,8
9	180°C	1,3	2,7	$3\sin^2(x)+5\cos^2(x)$	0,85
10	-60°C	1,4	2,6	$\sin^2(x)+\cos(5x)$	0,9
11	250 K	1,5	2,5	$12(2\sin(2x)+8\cos(6x))+273$	0,95
12	372 K	1,6	2,4	$\sin(x)+273$	1

¹ единицы измерения те же, что у T

№ варианта	T	v^2 , м ² /с	L , м	$\varphi(x)^2$	time, с
13	-64°C	1,7	2,3	$44-5\cos^6(2x)$	1,05
14	182 K	1,8	2,2	$300-13x$	1,1
15	284°C	1,9	2,1	16	1,15
16	712 K	2,0	2,0	$\sin^2(4x)+32$	1,2
17	614°C	2,1	1,9	$\cos^2(4x)+45$	1,25
18	283°C	2,2	1,8	0	1,3
19	312 K	2,3	1,7	$280+8x$	1,35
20	144 K	2,4	1,6	$250+\sin(x)$	1,4
21	-42°C	2,5	1,5	$\sin(x)$	1,45
22	185 K	2,6	1,4	340	1,5
23	264°C	2,7	1,3	$100-15\sin^4(3x)$	1,55
24	241°C	2,8	1,2	$13+2\sin(x)$	1,6
25	354 K	2,9	1,1	225	1,65
26	-120° C	3,0	0,9	$15-2x$	1,7
27	720 K	3,1	0,8	$14\cos(12x)+350$	1,75

8.6. Лабораторная работа 5

Исследование двойственных задач линейного программирования

Цель работы: научиться составлять и решать двойственные задачи математического программирования. Используя теорию двойственности, освоить методы анализа задач.

Пример.

Для изготовления 2 видов продукции P_1 и P_2 предприятие использует 3 вида ресурсов S_1, S_2, S_3 (материалы, сырьё, топливо). Запасы ресурсов каждого вида ограничены. На изготовление единицы продукции j -го вида ($j = 1, 2$) расходуется a_{ij} единиц i -го ресурса ($i = 1, 2, 3$). При реализации единицы j -й продукции предприятие получает C_j единиц прибыли (табл. 8.6). Составить прямую и двойственную задачу, провести анализ решения.

² единицы измерения те же, что у T

Исходные данные

Ресурсы	Расход ресурсов на ед. продукции		Запасы ресурсов
	продукция P_1	продукция P_2	
Материалы	2	4	2000
Сырье	4	1	1400
Топливо	2	1	800
Прибыль на ед. продукции	40	60	

Пусть x_1 – количество продукции P_1 ; x_2 – количество продукции P_2 . Математическая модель прямой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} 40x_1 + 60x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 2000, \\ 4x_1 + x_2 \leq 1400, \\ 2x_1 + x_2 \leq 800, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

После решения задачи получаем оптимальные значения переменных $x_1^* = 200$, $x_2^* = 400$, целевая функция при этом равна 32000. Таким образом, рационально выпускать 200 единиц продукции P_1 и 400 единиц продукции P_2 , при этом суммарная прибыль составит 32000.

Для составления двойственной задачи введем переменные y_1, y_2, y_3 , которые назовем двойственными оценками ресурсов. Они имеют смысл предельных стоимостей единицы каждого вида сырья в случае, если предприятие решит реализовать его вместо готовой продукции. Тогда математическая модель двойственной задачи:

$$\begin{cases} 2000y_1 + 1400y_2 + 800y_3 \rightarrow \min, \\ 4y_1 + y_2 + y_3 \geq 60, \\ 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 40, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Применив принцип дополняющей нежесткости, получаем результаты

$$y_1^* = 13.3333, \quad y_2^* = 0, \quad y_3^* = 6.6666.$$

Оптимальные значения переменных также позволяют определить оценки ценности ресурсов. Дефицитный ресурс, полностью используемый в оптимальном плане, имеет положительную ценность. Недефицитный ресурс имеет нулевую ценность, в нашем примере это S_2 , т.к. $y_2^* = 0$.

В результате производства недефицитные ресурсы остаются, а дефицитные вырабатываются полностью. Среди дефицитных ресурсов более ценным является тот, у которого двойственная оценка выше. В нашем примере S_1 дефицитнее, чем S_3 , т.к. $y_1^* > y_3^*$. Двойственные оценки также позволяют определять целесообразность включения в ассортимент новых видов продукции.

Для решения этой задачи нужно рассчитать сумму произведений расхода ресурсов a_{ij} на их двойственные оценки $D = \sum a_{ij}y_i$. Эта сумма имеет смысл общих затрат на производство. Если $D > C_j$, то данную продукцию производить

не выгодно. Например, предприятие планирует выпускать еще два типа продукции P_3 и P_4 (табл. 8.7).

Таблица 8.7

Расход ресурсов на производство дополнительной продукции

Ресурсы	Расход ресурсов на ед. продукции	
	продукция P_3	продукция P_4
Материалы	6	4
Сырье	2	1
Топливо	3	1
Прибыль на ед. продукции	80	70

Для продукции P_3 :

$D = 13.3333 * 6 + 0 * 2 + 6.6666 * 3 = 100$, $C_3 = 80$, $D > C_3$,
следовательно, продукцию P_3 выпускать не выгодно.

Для продукции P_4 :

$D = 13.3333 * 4 + 0 * 1 + 6.6666 * 1 = 60$, $C_4 = 70$, $D < C_3$,
следовательно, продукцию P_4 выпускать выгодно.

Задание

Составить и решить прямую и двойственную задачи, провести анализ решения. Проанализировать ценности ресурсов. Определить, целесообразно ли включать в план продукцию P_{n+1} , если цена единицы этой продукции составляет $\sum_{i=1}^n C_{P_i} / n$, а на ее производство расходуется по 2 ед. ресурсов каждого вида. Если продукцию P_{n+1} выпускать не выгодно, привести пример дополнительной продукции, которую целесообразно включить в план.

Отчет о лабораторной работе должен содержать математическую модель прямой задачи, ее решение, полученное с помощью надстройки Поиск решений MS Excel / PTC Mathcad / программы на языке C++, математическую модель двойственной задачи, оптимальные значения ее переменных и значение целевой функции. Сделать выводы:

- 1) сколько продукции каждого вида следует выпускать и чему при этом будет равна прибыль?
- 2) провести оценку ценности каждого ресурса: какие ресурсы дефицитные, а какие нет?
- 3) провести анализ двойственных оценок;
- 4) каковы общие затраты на производство продукции $n + 1$ вида и целесообразно ли планировать ее выпуск?

Варианты 1 - 14

Для изготовления 3 видов продукции P_1 , P_2 и P_3 предприятие использует 3 вида ресурсов: материалы, сырьё, топливо. Запасы ресурсов каждого вида

ограничены. На изготовление единицы продукции j -го вида ($j = 1, 2$) расходуется a_{ij} единиц i -го ресурса ($i = 1, 2, 3$). При реализации единицы j -й продукции предприятие получает C_j единиц прибыли (табл. 8.8). Составить прямую и двойственную задачу, провести анализ решения.

Таблица 8.8

Варианты 1-14 для самостоятельной работы

Ресурсы	Расход ресурсов на ед. продукции			Запасы ресурсов
	продукция P_1	продукция P_2	продукция P_3	
Материалы	$a / 5$	4	3	200
Сырье	1	1	$6 / b$	$100 + 5a$
Топливо	$1 + b$	2	2	130
Прибыль на ед. продукции	$40 + 3(a - b)$	60	80	

Значение неизвестного параметра a взять равным номеру варианта.

Значение неизвестного параметра b взять равным последней цифре студенческого билета.

Полученные дробные значения округлить по правилам математики.

Варианты 15 - 30

Для изготовления n видов продукции P_1, P_2, \dots, P_n предприятие использует m видов ресурсов S_1, S_2, \dots, S_m (сырьё, топливо, материалы и т. д.). Запасы ресурсов каждого вида ограничены и равны b_1, b_2, \dots, b_m . На изготовление единицы продукции j -го вида ($j = 1, 2, \dots, n$) расходуется a_{ij} единиц i -го ресурса ($i = 1, 2, \dots, m$). При реализации единицы j -й продукции предприятие получает C_j единиц прибыли (табл. 8.9). Составить прямую и двойственную задачу, провести анализ решения.

Таблица 8.9

Варианты 15-30 для самостоятельной работы

№ варианта	Виды ресурсов	Расход ресурсов на единицу продукции					Запасы ресурсов	Доходы от реализации единицы продукции				
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5		C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}	C_{P_4}	C_{P_5}
15	S_1	2	5	1	0	5	300	32	37	11	15	50
	S_2	3	1	1	0	5	250					
	S_3	1	5	0	1	5	200					
	S_4	0	3	0	1	3	100					

№ варианта	Виды ресурсов	Расход ресурсов на единицу продукции					Запасы ресурсов	Доходы от реализации единицы продукции				
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5		C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}	C_{P_4}	C_{P_5}
16	S_1	1	2	1	2	1	50	12	15	11	7	9
	S_2	2	0	1	1	1	40					
	S_3	0	2	1	2	2	52					
	S_4	1	1	2	2	2	60					
	S_5	2	2	1	1	2	66					
	S_6	1	1	0	0	0	15					
	S_7	0	1	1	0	0	20					
17	S_1	1	1	0	0	-	10	7	5	9	8	-
	S_2	0	2	1	0	-	15					
	S_3	0	1	2	1	-	20					
	S_4	3	1	1	1	-	30					
	S_5	1	2	2	3	-	35					
	S_6	1	1	3	2	-	35					
	S_7	3	0	3	3	-	24					
18	S_1	15	12	18	14	10	300	4	6	8	7	11
	S_2	2	3	2	2	1	50					
	S_3	6	4	3	1	0	90					
	S_4	1	1	3	3	5	45					
19	S_1	2	5	7	1	0	60	32	13	61	15	3
	S_2	22	14	18	5	2	500					
	S_3	10	14	8	3	0	328					
20	S_1	5	4	1	0	5	100	95	40	32	21	18
	S_2	3	1	2	5	1	95					
	S_3	7	3	4	2	0	50					

№ варианта	Виды ресурсов	Расход ресурсов на единицу продукции				Запасы ресурсов	Доходы от реализации единицы продукции			
		P_1	P_2	P_3	P_4		C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}	C_{P_4}
21	S_1	1	20	0	2	150	40	71	13	37
	S_2	5	15	5	4	160				
	S_3	1	3	1	1	50				
	S_4	14	3	6	10	250				
	S_5	0	0	1	0	10				
	S_6	1	3	0	2	50				
22	S_1	2	1	1	-	25	6	5	5	8
	S_2	1	1	1	-	14				
	S_3	0	4	2	-	19				
	S_4	3	0	1	-	24				
	S_5	0	0	1	-	4				
23	S_1	1	1	0	0	10	7	5	9	8
	S_2	0	2	1	0	15				
	S_3	0	1	2	1	20				
	S_4	3	1	1	1	30				
	S_5	1	2	2	3	35				
	S_6	1	1	3	2	35				
	S_7	3	0	3	3	24				
24	S_1	8	5	9	0	152	8	12	15	5
	S_2	1	3	5	7	123				
	S_3	7	5	3	1	130				
	S_4	0	2	2	0	30				
	S_5	4	2	6	8	200				

№ варианта	Виды ресурсов	Расход ресурсов на единицу продукции				Запасы ресурсов	Доходы от реализации единицы продукции			
		P_1	P_2	P_3	P_4		C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}	C_{P_4}
25	S_1	15	20	13	-	170	2	5	9	-
	S_2	17	19	21	-	200				
	S_3	0	5	7	-	50				
	S_4	60	23	0	-	600				
26	S_1	1	1	2	0	16	16	23	19	10
	S_2	2	1	1	1	25				
	S_3	0	3	2	0	20				
27	S_1	80	15	20	34	500	4	2	3	3
	S_2	42	54	30	51	600				
	S_3	15	19	32	12	540				
	S_4	47	74	23	32	800				
28	S_1	1	3	4	0	34	5	3	3	2
	S_2	7	5	2	5	80				
	S_3	2	2	1	1	28				
	S_4	0	1	1	7	36				
29	S_1	2	1	1	-	25	6	5	5	-
	S_2	1	1	1	-	14				
	S_3	0	4	2	-	19				
	S_4	3	0	1	-	24				
30	S_1	1	20	0	-	150	40	71	13	-
	S_2	5	15	5	-	160				
	S_3	1	3	1	-	50				
	S_4	14	3	6	-	250				

8.7. Лабораторная работа 6

Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ

Цель работы: овладение практическими навыками проверки гипотез.

Имеется n городов. Выезжая из исходного города A_1 , коммивояжер должен побывать во всех остальных городах по одному разу и вернуться в город A_1 . Задача заключается в определении последовательности объезда городов, при которой коммивояжеру требуется минимизировать некоторый критерий эффективности – стоимость проезда, время в пути, суммарное расстояние и т.д.

Математическая модель задачи коммивояжера имеет и другие интерпретации, например, задача о перенастройке оборудования, задача о прокладке коммуникаций и другие. Среди современных практических приложений задачи можно выделить: доставку продуктов в магазин со склада, работу почтальона по разному корреспонденции, мониторинг объектов (нефтяные вышки, базовые станции сотовых операторов), изготовление отверстий на специализированном станке.

Пусть задана матрица T , в которой задано время, затрачиваемое на переезд между городами, и требуется минимизировать время в пути.

Введем булевы переменные:

- $\delta_{ij} = 1$, если коммивояжер переезжает из города A_i в город A_j , $i \neq j$;
- $\delta_{ij} = 0$, в противном случае.

Целевая функция представляет собой суммарное время в пути:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} \delta_{ij} \rightarrow \min.$$

Ограничения означают, что коммивояжер выезжает из каждого города один раз и что он въезжает один раз в каждый город:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} = 1, i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n \delta_{ij} = 1, j = \overline{1, n}.$$

Так как нельзя непосредственно возвращаться из города i в город i , то $t_{ii} = \infty, i = \overline{1, n}$.

Исключение подциклов длины, меньшей n , обеспечивает связность маршрута коммивояжера и задается условием:

$$\tau_i - \tau_j + (n - 1)\delta_{ij} \leq n - 2, \quad i \neq j, i = \overline{2, n}, j = \overline{2, n},$$

где τ_i – неограниченные действительные переменные.

Задание

Зная расстояния между населенными пунктами, коммивояжеру надо так составить маршрут путешествия, чтобы каждый пункт посещался только один раз и затраты времени на путешествие были бы минимальными.

Ход выполнения:

- 1) получить сгенерированную матрицу расстояний у преподавателя (рис. 8.9);
- 2) составить математическую модель задачи;
- 3) составить маршрут коммивояжера, реализовав метод ветвей и границ с помощью надстройки *Поиск решений MS Excel / Mathcad / программы на языке C++*;
- 4) проанализировать решение и сделать выводы.

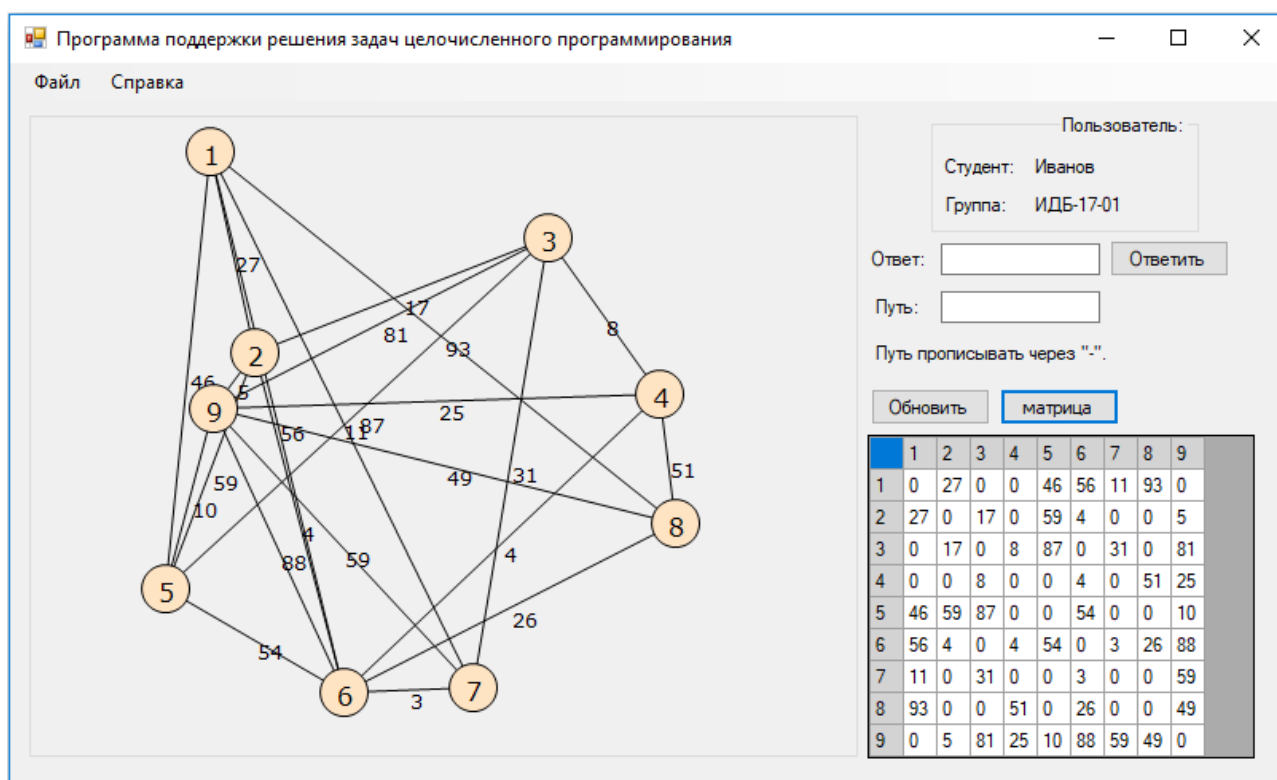


Рис. 8.9. Пример сгенерированного задания

8.8. Лабораторная работа 7

Решение задачи о рюкзаке методом отсекающих плоскостей

Цель работы: рассмотреть постановки и математические модели задачи о загрузке рюкзака.

В современном мире задача о рюкзаке (задача оптимальной загрузки) крайне актуальна. Алгоритмы ее решения применяются в криптографии, экономике, информатике, математике, вычислительной лингвистике, генетике и логистике. Применение алгоритмов решения расширяется за счёт того, что задача о рюкзаке является NP-полной, то есть к ней можно свести множество задач того же класса.

Общая постановка задачи о рюкзаке выглядит следующим образом:

имеется n предметов, обладающих размером (w_i) и полезностью (p_i), из которых необходимо собрать рюкзак. Данный набор должен обладать максимальной полезностью при условии соблюдения ограничений по допустимому размеру рюкзака (W). Обычно все параметры – целые, не отрицательные числа.

Постановка задачи допускает большое количество обобщений, в зависимости от условий, наложенных на рюкзак, предметы или их выбор. Наиболее популярными разновидностями являются следующие:

1. Рюкзак 0-1 (*0-1 Knapsack Problem*): каждый предмет можно взять только один раз:
задача выбрать число x_i предметов каждого типа так, чтобы максимизировать общую стоимость $\sum_{i=1}^N p_i x_i$ при выполнении условия совместности $\sum_{i=1}^N w_i x_i \leq W$, где $x_i \in [0, 1]$.
2. Ограниченный рюкзак (*Bounded Knapsack Problem*): любой предмет может быть взят некоторое (k_i) количество раз:
задача выбрать число x_i предметов каждого типа так, чтобы максимизировать общую стоимость $\sum_{i=1}^N p_i x_i$ при выполнении условия совместности $\sum_{i=1}^N w_i x_i \leq W$, где $x_i \in [0, k_i]$.
3. Неограниченный рюкзак (*Unbounded Knapsack Problem*): любой предмет может быть выбран любое количество раз:
задача выбрать число x_i предметов каждого типа так, чтобы максимизировать общую стоимость $\sum_{i=1}^N p_i x_i$ при выполнении условия совместности $\sum_{i=1}^N w_i x_i \leq W$, где $x_i \in [0, \infty)$.
4. Непрерывный рюкзак (*Continuous knapsack problem*): можно брать любую часть от предмета при сохранении удельной полезности (по понятным причинам решить такую разновидность задачи методами целочисленного программирования не удастся):
задача выбрать часть x_i каждого предмета так, чтобы максимизировать общую стоимость $\sum_{i=1}^N p_i x_i$ при выполнении условия совместности $\sum_{i=1}^N w_i x_i \leq W$, где $0 \leq x_i \leq 1$ – дробное число.
5. Задача о размене (*Change-Making problem*): у неисчерпаемого количества предметов есть только характеристика размера (популярная формулировка задачи: дать сдачу наименьшим количеством монет):
задача выбрать количество x_i предметов так, чтобы минимизировать количество взятых предметов $\sum_{i=1}^N x_i$ при условии равенства суммы размеров взятых предметов размеру рюкзака $\sum_{i=1}^N w_i x_i = W$, где $x_i \geq 0$.

6. Задача об упаковке (*Bin Packing Problem*): имеются n рюкзаков вместимости W и столько же предметов с размерами w_i :
задача распределить все предметы, задействовав минимальное количество рюкзаков $\sum_{i=1}^n y_i$ при выполнении условия совместности $\sum_{i=1}^n w_i x_{ij} \leq W y_j$, где $x_{ij} = 1$ если j предмет положили в i рюкзак, $y_i = 1$ если i рюкзак используется.
7. Множественный рюкзак (*Multiple Knapsack Problem*): имеются m рюкзаков, каждый со своим максимальным размером, и n предметов ($m \leq n$):
задача распределить все или часть предметов между рюкзаками так, чтобы суммарная полезность была максимальна $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_j x_{ij}$ при выполнении условий совместности $\sum_{i=1}^m w_i x_{ij} \leq W_i$ и $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1$, где $x_{ij} = 1$ если j предмет положили в i рюкзак.
8. Рюкзак с мультिवыбором (*Multiple-choice Knapsack Problem*): предметы разделены на группы G_i , и из каждой группы требуется выбрать только один предмет:
задача максимизировать $\sum_{i=1}^N \sum_{j \in G_i} p_{ij} x_{ij}$ при выполнении условий совместности $\sum_{i=1}^N \sum_{j \in G_i} w_{ij} x_{ij} \leq W$ и $\sum_{j \in G_i} x_{ij} = 1$.
9. Многомерный рюкзак (*Multy-dimensional knapsack problem*): вместо размера дано несколько разных ресурсов (например, масса, объём и время укладки). Каждый предмет тратит заданное количество каждого ресурса. Надо выбрать подмножество предметов так, чтобы общие затраты каждого ресурса не превышали максимума по этому ресурсу, и при этом общая ценность предметов была максимальна.

Задание

Составить рюкзак, реализовав метод отсекающих плоскостей с помощью надстройки Поиск решений MS Excel / Mathcad / программы на языке C++, сделать выводы.

Варианты 1 – 9

Имеется 10 элементов с полезностью u_i и размером v_i соответственно ($i = 1, \dots, 10$). Составить рюкзак, размер которого не должен превышать M (табл. 8.10).

Таблица 8.10

Варианты 1-9 для самостоятельной работы

Вариант	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
№ 1	93	18	55	86	48	32	85	31	89	91	12
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	
	7	7	6	2	1	6	2	6	3	9	

Вариант № 2	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	15	36	20	35	88	22	79	73	89	48	16
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	
	9	9	6	6	5	6	1	7	8	1	
Вариант № 3	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	29	19	31	48	50	86	44	71	80	33	16
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	
	6	9	6	2	3	3	5	4	8	5	
Вариант № 4	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	21	64	45	73	87	86	91	64	44	85	21
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	
	8	1	8	4	5	10	6	9	3	8	
Вариант № 5	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	73	14	75	39	39	65	32	68	89	47	24
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	
	7	3	8	9	7	2	7	4	9	8	
Вариант № 6	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	57	30	91	12	39	54	75	78	52	15	18
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	
	8	8	8	6	5	7	5	5	10	4	
Вариант № 7	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	45	31	26	86	58	80	85	57	13	32	14
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	
	9	1	8	10	2	3	8	3	2	4	
Вариант № 8	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	78	90	60	59	27	41	66	84	55	37	13
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	
	8	4	4	7	7	8	3	4	2	2	
Вариант № 9	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	20	33	99	71	97	44	15	98	80	87	19
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	
	10	10	6	3	6	8	7	6	1	8	

Варианты 10 – 15

Имеется 10 элементов с полезностью u_i и размером v_i соответственно ($i = 1, \dots, 10$). Каждый элемент имеется в количестве k_i . Составить рюкзак, размер которого не должен превышать M (табл. 8.11).

Таблица 8.11

Варианты 10-15 для самостоятельной работы

Вариант № 10	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	51	42	99	73	17	63	33	57	83	82	
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	36
	7	2	1	6	1	4	6	3	7	4	
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	
	3	2	1	8	4	5	4	7	9	2	
Вариант № 11	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	43	45	75	99	15	90	90	57	57	40	
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	40
	5	3	8	5	7	10	2	4	9	8	
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	
	4	6	4	2	3	1	3	5	4	5	
Вариант № 12	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	28	77	27	18	13	56	53	41	57	22	
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	173
	6	7	7	1	7	4	8	6	3	2	
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	
	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
Вариант № 13	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	13	52	36	32	96	76	47	60	71	53	
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	47
	3	4	4	6	5	2	3	4	9	4	
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	
	9	2	4	3	1	2	5	3	3	2	
Вариант № 14	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	81	78	59	98	86	44	42	93	85	42	
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	181
	8	6	9	3	5	2	9	4	4	2	
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	
	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
Вариант № 15	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	M
	63	19	59	85	76	61	75	34	32	43	
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	53
	8	7	9	5	8	10	9	3	9	3	
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	
	2	9	1	2	3	4	2	3	6	3	

Варианты 16 – 21

После закупки в большом универмаге Маше досталась сдача в размере 17 рублей. Она получила одну десятирублевую монету, одну пятирублевую и 2 монеты по 1 рублю. Позже, в этот же день, Медведь делал покупки в мини-маркете, где тоже получил сдачу в размере 17 рублей. Он получил две монеты по 5 рублей и 7 монет по 1 рублю. Тогда Маша и Медведь задались вопросом: «Как много магазинов можно посетить и получить сдачу 17 рублей различным набором монет?» После небольшого мозгового штурма, они определили, что ответ 28. Тогда они бросили вызов Вам для решения более общего случая.

Напишите программу, которая определит количество различных комбинаций монет/купюр, которые могут сложиться в определенную сумму (табл. 8.12), а также определите наименьшее количество монет для сдачи (не забудьте использовать метод отсекающих плоскостей).

Входные данные: ввод будет состоять из множества чисел между 0 и 30000 включительно, по одному в каждой строке.

Выходные данные: на каждое входное число, нужно определить число комбинаций и минимальный набор.

Пример:

Input:

17
11
4
1

Output:

There are 28 ways to produce 17 rubles change. The minimum set includes a coin of 10, 5 and 2 rubles.

There are 12 ways to produce 11 rubles change. The minimum set includes a coin of 10 and 1 rubles.

There are 3 ways to make changes to 4 rubles. The minimum set includes 2 coins of 2 rubles.

There is only 1 way to produce 4 rubles change.

Таблица 8.12

Варианты 16-21 для самостоятельной работы

№ варианта	Номинал монет/купюр		№ варианта	Номинал монет/купюр
16	10, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000 и 5000 рублей		17	1, 5, 10, 50 копеек 1, 2, 5, 10 рублей
18	1, 5, 10, 50, 200, 500 рублей		19	100, 200, 1000, 2000 рублей
20	1, 5, 10, 50 копеек		21	2, 5, 50, 500, 5000 рублей

Варианты 22 – 26

При наличии n предметов разного размера и рюкзаков, каждый из которых имеет емкость c , определите каждый предмет в рюкзаки таким образом, чтобы общее количество использованных рюкзаков было минимальным (табл. 8.13).

Пример:

Input: $wieght[] = \{4, 8, 1, 4, 2, 1\}$

Bin Capacity $c = 10$

Output: 2

We need minimum 2 bins to accommodate all items

First bin contains $\{4, 4, 2\}$ and second bin $\{8, 2\}$

Таблица 8.13

Варианты 22-26 для самостоятельной работы

№ варианта	Размер предметов	Объем рюкзака
22	9, 8, 2, 2, 5, 4	10
23	2, 5, 4, 7, 1, 3, 8	12
24	9, 2, 7, 1, 3, 4	14
25	4, 5, 1, 15, 12, 13, 3, 9	17
26	3, 6, 7, 11, 16, 14, 9, 5	18

Варианты 27 – 30

Написать программу для решения задачи множественного рюкзака, используя метод отсекающих плоскостей. Входные данные даны в табл. 8.14.

Пример:

Input:

$n = 9; m = 2;$

$(p_j) = (80, 20, 60, 40, 60, 60, 65, 25, 30);$

$(w_j) = (40, 10, 40, 30, 50, 50, 55, 25, 40);$

$(W_i) = (100, 150).$

Output:

$(y_j) = (1, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 2, 0)$ with $(\overline{W}_i) = (0, 0), \quad z = 350.$

Выходные данные в примере показывают как распределить предметы по двум рюкзакам (0 – не брать предмет, 1 – положить в первый рюкзак, 2 – во второй), неиспользованный объем обоих рюкзаков равен 0, общая польза оценивается в 350 единиц.

Таблица 8.14

Варианты 27-30 для самостоятельной работы

Вариант № 27	p_j	78, 35, 89, 36, 94, 75, 74, 79, 80, 16		
	w_j	18, 9, 23, 20, 59, 61, 70, 75, 76, 30		
	W_i	103, 156		
	n	10	m	2
Вариант № 28	p_j	80, 20, 60, 40, 60, 60, 65, 25, 30		
	w_j	40, 10, 40, 30, 50, 50, 55, 25, 40		
	W_i	60, 110, 80		
	n	10	m	3
Вариант № 29	p_j	20, 35, 15, 45, 12, 30, 84, 24		
	w_j	15, 20, 10, 30, 5, 55, 75, 15		
	W_i	45, 80, 75		
	n	8	m	3
Вариант № 30	p_j	13, 52, 36, 32, 96, 76, 47, 60, 71, 53		
	w_j	3, 4, 4, 6, 5, 2, 3, 4, 9, 4		
	W_i	12, 8, 13, 4		
	n	10	m	4

Приложение 1

Требования к оформлению отчета о лабораторной работе

В отчет о лабораторной работе входят:

1. **Титульный лист** установленного образца (Приложение 2).
2. **Оглавление.**
3. На третьем листе отчета повторяется название лабораторной работы, после которого в обязательном порядке указывается **общая информация, использованная в ходе выполнения работы** (задание, определения и краткое описание представленных в отчете данных, особенности реализации и другая дополнительная информация, индивидуально характеризующая работу).
4. **Полный текст отчета**, включающий поясняющие рисунки, графики и программный код, оформленные с соблюдением общих требований и рекомендаций к их содержанию и стилям форматирования.

Отчет о лабораторной работе выполняют с помощью компьютерных средств реализации (*MS Office 2016* (или *MS Office 2013*), *Mathcad* (не ниже 10 версии (2001i) и др.) на листах формата А4 книжной ориентации. Допускается оформление рисунков большого размера в альбомном режиме. При этом колонтитулы страницы должны быть сохранены по меньшим сторонам листа, а правильное расположение рисунка для его просмотра должно обеспечиваться одним поворотом листа на 90° по часовой стрелке.

Отчет оформляют с использованием следующих стилей:

- размеры полей страницы:
 - ✓ левое – 3 см;
 - ✓ правое – 2 см;
 - ✓ верхнее – 2 см;
 - ✓ нижнее – 2 см;
- текстовая информация:
 - ✓ шрифт – Times;
 - ✓ начертание шрифта – обычный;
 - ✓ размер шрифта – 14 пунктов;
 - ✓ межстрочный интервал – 1,5 строки;
 - ✓ метод выравнивания – по ширине;
 - ✓ отступ первой строки – 1,25 см;
- программный код:
 - ✓ шрифт – Courier (моноширинный);
 - ✓ начертание шрифта – обычный;
 - ✓ размер шрифта – 12 пунктов;
 - ✓ межстрочный интервал – 1,5 строки;
 - ✓ метод выравнивания – по левому краю;
 - ✓ отступ первой строки – отсутствует;

- комментарии к отчету:
 - ✓ шрифт – Monotype Corsiva;
 - ✓ начертание шрифта – полужирный;
 - ✓ размер шрифта – 12 пунктов;
 - ✓ межстрочный интервал – 1,5 строки;
 - ✓ отступ первой строки – отсутствует;
- встречающиеся в отчете заголовки выравнивают по центру, печатают с прописной (заглавной) буквы без точки в конце, используемый шрифт – Times, 16 пунктов, полужирный;
- верхний колонтитул отчета выравнивают по правому краю, используемый шрифт – Times, 10 пунктов, обычный;
- в верхнем колонтитуле указывают номер и название лабораторной работы, номер группы, фамилия и инициалы студента;
- нижний колонтитул оформляют в том же стиле, что и верхний;
- в нижнем колонтитуле указывают дату оформления отчета и приводят сквозную нумерацию страниц;
- титульный лист учитывают в нумерации, но номера страниц и колонтитулы на нем не проставляют.

Для сдачи лабораторной работы отчет распечатывают на белой односторонней бумаге формата А4 с одной стороны листа. После распечатки отчет скрепляют степлером в левом верхнем углу таким образом, чтобы обеспечить надежное соединение всех листов, не препятствующее свободному просмотру отдельных страниц.

Рукописные тексты, рисунки, оформленные вручную (в том числе, частично), а также напечатанные с двух сторон, на черновиках или неправильно скрепленные отчеты **не допускаются**.

Приложение 2

Шаблон титульного листа для отчетов о лабораторных работах



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
(ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН»)

**Институт
информационных систем
и технологий**

**Кафедра
информационных технологий
и вычислительных систем**

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ
ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«Избранные главы алгебры и анализа»

СТУДЕНТА 2 КУРСА бакалавриата ГРУППЫ ИДБ - -
(уровень профессионального образования)

ФИО

НА ТЕМУ

(наименование лабораторной работы)

Направление: 09.03.01 Информатика и вычислительная техника
Профиль подготовки: Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем

Отчет сдан « » 20 г.

Оценка

Преподаватель

(Ф.И.О., должность, степень, звание.)

(подпись)

МОСКВА 20

Библиографический список

1. Воробьева Г.Н. Практикум по численным методам: Учебное пособие/ Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова. – М.: Высш. школа, 1979. – 184 с.
2. Демидович Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения/ Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: ЁЁ Медиа, 2012. – 368 с.
3. Ефромеев Н.М., Ефромеева Е.В. Информатика и информационно-телекоммуникационные технологии : учебное пособие/ Н.М. Ефромеев, Е.В. Ефромеева – М.: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2015. – 175 с.
4. Ефромеев Н.М., Ефромеева Е.В. Информатика и информационно-телекоммуникационные системы: учеб. пособие/ Н.М. Ефромеев, Е.В. Ефромеева – М.: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2018. – 167 с.
5. Ефромеев Н.М., Ефромеева Е.В. Методы исследования операций в машиностроении: учебное пособие. – 2-е издание, перераб. и доп. / Н.М. Ефромеев, Е.В. Ефромеева. – М.: ФГБОУ ВО «МГТУ «Станкин», 2018. – 155 с.
6. Ефромеева Е.В. Метод конечных разностей в инженерных задачах машиностроения: учебное пособие. – 2-е издание, перераб. и доп./ Е.В. Ефромеева. – М.: ФГБОУ ВО «МГТУ «Станкин», 2018. – 111 с.: ил.
7. Ефромеева Е.В., Ефромеев Н.М. Методы исследования операций в машиностроении: примеры, задачи : учебное пособие – 2-е издание, перераб. и доп. / Е.В. Ефромеева, Н.М. Ефромеев. – М.: ГОУ ВПО МГТУ «Станкин», 2015. – 175 с.
8. Кудрявцев Е. М. Mathcad 11. – М.: ДМК, 2005. – 592 с.
9. Поршнев С.В. Численные методы на базе Mathcad/ С.В. Поршнев, И.В. Беленкова. – Спб.: БВХ-Петербург, 2005. – 464 с.
10. Правила оформления курсовой работы по дисциплине «Модели и методы анализа проектных решений»: методические указания/ сост. Е.В. Ефромеева. – М.: ФГБОУ ВПО МГТУ «Станкин», 2013. – 31 с.
11. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Лань, 2009. – 288 с.
12. Черняк А.А. Высшая математика на базе Mathcad. Общий курс/ А.А. Черняк, Ж.А. Черняк, Ю.А. Доманова. – Спб.: БВХ-Петербург, 2004. – 608 с.
13. Шарма Дж. Н., Сингх К. Уравнения в частных производных для инженеров. – М.: Техносфера, 2002. – 320 с.