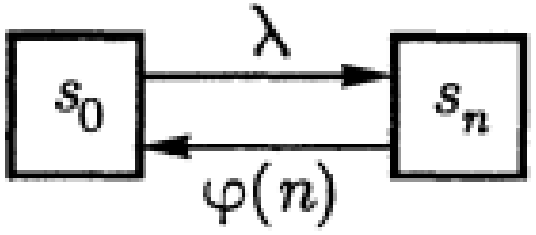
АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Простейшие СМО со «взаимопомощью»

Простейшая СМО без очереди с неограниченной взаимопомощью между каналами. На n-канальную СМО *с отказами* поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Каналы работают со «взаимопомощью» — если в момент обслуживания очередной заявки в СМО есть свободные каналы, то все они подключаются к обслуживанию данной заявки. Интенсивность простейшего потока обслуживаний заявки есть некоторая функция φ(j) числа j каналов, одновременно обслуживающих ее. Построить граф состояний СМО и найти финальные вероятности состояний. Выразить через них характеристики эффективности СМО: вероятность отказа $P_{\text{отк}}$, относительную пропускную способность Q, среднее число занятых каналов k.

Подсчитать эти характеристики при n =4, λ=1, φ(j)= $j\mu$, μ=0,5 и сравнить их с теми же характеристиками в случае отсутствия взаимопомощи между каналами.



Простейшая СМО без очереди с равномерной взаимопомощью между каналами. Имеется простейшая n-канальная СМО *с отказами*, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ. Между каналами осуществляется «равномерная» взаимопомощь: Если заявка приходит в момент, когда все n каналов свободны, то все каналы принимаются за ее обслуживание; если в момент обслуживания заявки приходит еще одна, часть каналов переключается на ее обслуживание; если, пока обслуживаются эти две заявки, приходит еще заявка, часть каналов переключается на ее обслуживание и т.д., пока не окажутся занятыми все и каналов; если они все заняты, вновь пришедшая заявка получает отказ. Функция $\varphi(j)= j\mu$, т.е. обслуживание j каналами в j раз быстрее обслуживания одним каналом.

Составить размеченный граф состояний СМО, определить финальные вероятности состояний и характеристики эффективности: Q, A, k. Подсчитать их при n =4, λ=1, μ=0,5 и сравнить с тем, что получается без взаимопомощи.

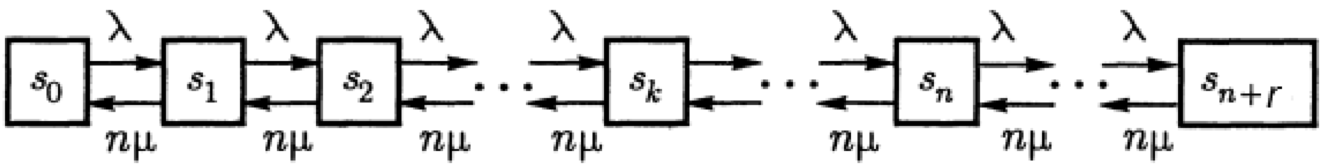
Простейшая СМО с неограниченной очередью и со взаимопомощью между каналами

Имеется простейшая n-канальная СМО, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ; время обслуживания заявки одним каналом - показательное с параметром μ. Интенсивность потока обслуживании заявки к каналами пропорциональна их числу: $\varphi(j)= j\mu$. Каналы распределяются по заявкам, находящимся в СМО, произвольным образом, но при условии, что если в СМО находится хотя бы одна заявка, все n каналов заняты обслуживанием.

Построить граф состояний, найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО.

Простейшая СМО с ограниченной очередью и равномерной взаимопомощью между каналами.

Рассматривается простейшая СМО с n каналами и равномерной взаимной помощью между каналами. На СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; поток обслуживании одного канала - простейший с интенсивностью μ; j каналов, обслуживающих одну заявку, дают суммарный поток обслуживании с интенсивностью $\varphi(j)= j\mu$. Каналы распределяются между заявками «равномерно» в том смысле, что каждая вновь пришедшая заявка начинает обслуживаться, если только есть возможность выделить для этого канал. Заявка, пришедшая в момент, когда все n каналов заняты, становится в очередь. Число мест в очереди r; если они все заняты, заявка получает отказ.



Финальные вероятности:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{r+1} y^k} = \begin{cases} \frac{1-y}{1-y^{r+2}}, & y \neq 1 \\ \frac{1}{r+2}, & y = 1 \end{cases} \qquad p_k = y^k p_0 = \begin{cases} \frac{y^k(1-y)}{1-y^{r+2}}, & y \neq 1 \\ \frac{y^k}{r+2}, & y = 1 \end{cases}$$

Характеристики СМО M/M/1/r

- нагрузка: $y=\lambda/\mu=\lambda b$;
- загрузка: $\rho = \sum_{k=1}^{r+1} p_k = 1 - p_0$;
- коэффициент простоя системы: $\eta = p_0 = 1-\rho$;
- среднее число заявок в очереди: $l = \sum_{k=2}^{r+1} (k-1) p_k = \frac{y^2(1-y^r(r+1-ry))}{(1-y^{r+2})(1-y)}$.
- среднее число заявок в системе: $m = \sum_{k=1}^{r+1} k p_k = l + \rho$;
- вероятность потери заявок: $\pi_n = p_{r+1}$;
- производительность системы $\lambda' = \lambda(1-\pi_n)$;
- интенсивность потока потерянных заявок $\lambda'' = \lambda\pi_n$;
- среднее время ожидания заявок в очереди $w = l/\lambda'$;
- среднее время пребывания заявок в системе $u = m/\lambda' = w + b$

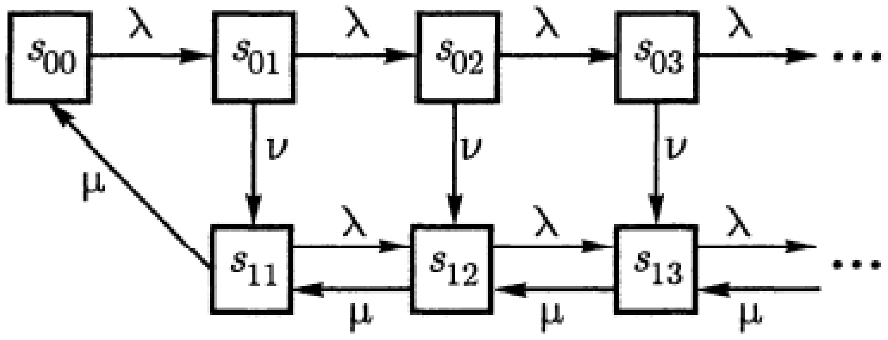
Простейшая СМО без очереди и с «разогревом» каналов

На вход n-канальной СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания - показательное с параметром μ, Перед тем как начать обслуживание заявки, канал должен подготовиться («разогреться»). Время «разогрева» имеет показательное распределение с параметром ν и не зависит от того, как давно канал прекратил работу. Заявка, заставшая канал свободным, «занимает» его и ждет, пока он разогреется, после чего поступает на обслуживание. Заявка, заставшая все каналы занятыми (обслуживаемой или ожидающей заявкой), покидает СМО и остается необслуженной. Найти финальные вероятности СМО и характеристики ее эффективности: вероятность отказа, относительную пропускную способность, абсолютную пропускную способность, среднее число занятых каналов.

Простейшая одноканальная СМО с очередью и «разогревом» канала

На одноканальную СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания - показательное с параметром μ ($\mu>\lambda$). Перед тем, как приступить к обслуживанию заявки, свободный до того канал должен «разогреться». Время «разогрева» — показательное с параметром ν и не зависит от того, как давно канал закончил работу. Если обслуживание начинается сразу же после окончания обслуживания предыдущей заявки, «разогрева» не нужно. Составить граф состояний СМО, написать уравнения для финальных вероятностей состояний; выразить через эти вероятности характеристики эффективности СМО.

s_{00} - канал свободен, не разогрет;
s_{01} - пришла одна заявка и ждет, канал разогревается;
s_{11} - канал разогрет, одна заявка обслуживается, очереди нет;
s_{02} - канал разогревается, в очереди две заявки;
……………………………………….....;
s_{0l} - канал разогревается, в очереди *l* заявок;
s_{1l} - канал обслуживает одну заявку, *l*-1 заявка стоит в очереди;
....



$$\lambda p_{00} = \mu p_{11}; \quad (\lambda+\nu)\, p_{01} = \lambda p_{00}; \quad (\lambda+\mu)\, p_{11} = \nu p_{01} + \mu p_{12};$$
$$(\lambda+\nu)\, p_{02} = \lambda p_{01}; \quad (\lambda+\mu)\, p_{12} = \nu p_{02} + \lambda p_{11} + \mu p_{13}; \ldots;$$
$$(\lambda+\nu)\, p_{0,l} = \lambda p_{0,l-1};$$
$$(\lambda+\mu)\, p_{1,l} = \nu p_{0,l} + \lambda p_{1,l\text{-}1} + \mu\, p_{1,l+1}; \ldots;$$