Лекция 15
Дифференцирование сложных функций.

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена в окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$..

Теорема. *Пусть функция* $f(x, y, z)$ *дифференцируема в точке* $P_0(x_0, y_0, z_0)$, *а функции* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, *зависящие от скалярного параметра* t , *имеют производную в точке* t_0 *такой, что* $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, $z_0 = \varphi(t_0)$. *Тогда производная по* t *в точке* t_0 *от сложной функции* $u = F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ *вычисляется по формуле*

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t_0} = F'(t_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \varphi'(t_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \psi'(t_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} \chi'(t_0).$$

Замечание. Заменим t_0 на t в формуле (1). Более короткая запись формулы (1) имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Следствие 1. Пусть $z = f(x, y)$– дифференцируемая функция переменных x и y, а $x = x(t),\ y = y(t)$ – дифференцируемые функции независимой переменной t. Тогда сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ является дифференцируемой функцией переменной t, производная которой находится по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Следствие 2. Если $z = f(x, y),\ \ y = y(x)$ – дифференцируемая функция, то для производной сложной функции $z = f(x, y(x))$ получаем формулу

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Производная $\frac{dz}{dx}$ в левой части формулы (5) называется ***полной производной*** функции $z = f(x, y)$ по переменной x (в отличие от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$).

Замечание. Если $z = f(u,v)$ – дифференцируемая функция переменных u и v, которые сами являются дифференцируемыми функциями $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ переменных x и y, то $z = f\left(u(x,y), v(x,y)\right)$ становится сложной функцией переменных x и y. Частные производные первого порядка вычисляются тогда по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

При этом выражение для дифференциала первого порядка

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

сохраняет свой вид – ***свойство инвариантности формы первого дифференциала.***

Пример. $z = u + v^2$, $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x+y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и dz.

◀Воспользуемся формулой (6).

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = du + 2v dv = (2x dx + \cos y dy) + 2\ln(x+y)\left(\frac{1}{x+y} dx + \frac{1}{x+y} dy\right) =$$

$$= \left(2x + \frac{2\ln(x+y)}{x+y}\right) dx + \left(\cos y + \frac{2\ln(x+y)}{x+y}\right) dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2\ln(x+y)}{x+y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + \frac{2\ln(x+y)}{x+y}. ▶$$

Дифференцирование неявных функций

Пусть $F(x,y)$ – произвольная функция двух переменных x и y. Рассмотрим уравнение

$$F(x,y)=0. \qquad (1)$$

Теорема. *Пусть задано уравнение (1). Пусть функция* $F(x,y)$ *определена в окрестности U точки* (x_0,y_0) *и непрерывна в U вместе со своими частными производными первого порядка* $\frac{\partial F}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial F}{\partial y}$. *Пусть* $F(x_0,y_0)=0$ *и*

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\neq 0. \qquad (2)$$

Тогда $\forall x\in(x_0-a,x_0+a)$

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}.$$

Пример . $x^2+y^2-1=0$(уравнение окружности).

◀ $F(x,y)=x^2+y^2-1$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2y$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ при $y\neq 0$.

$y'(x)=f'(x)=-\dfrac{2x}{2y}=-\dfrac{x}{y}$ при $y\neq 0$.▶

Пример. $e^x-e^y+xy=0$, $(x_0,y_0)=(0,0)$.

◀ $F(x,y)=e^y-e^x+xy$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-e^x+y$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=e^y+x$, $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,0)}=1$.

$y'(x)=f'(x)=-\dfrac{-e^x+y}{e^y+x}=\dfrac{e^x-y}{e^y+x}$.▶

Пусть $F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$ — произвольная функция переменных $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и y. Рассмотрим уравнение

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=0. \tag{5}$$

Теорема. Пусть уравнение $F(x,y,z)=0$ задает неявную функцию $z=f(x,y)$ в окрестности U точки $P_0(x_0,y_0,z_0)$, где $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Пусть функции $F(x,y,z)$, F_x', F_y', F_z' непрерывны в окрестности U, причем $F_z'(P_0)\neq 0$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}. \tag{10}$$

Пример. $z^3-4xz+y^2-4=0$, $P_0(1,-2,2)$.

◄ Здесь $F(x,y,z)=z^3-4xz+y^2-4$, неявная функция $z=f(x,y)$. Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $P_0(1,-2,2)$ по формулам (10)

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}=-\frac{F_x'(P_0)}{F_z'(P_0)},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}=-\frac{F_y'(P_0)}{F_z'(P_0)}.$$

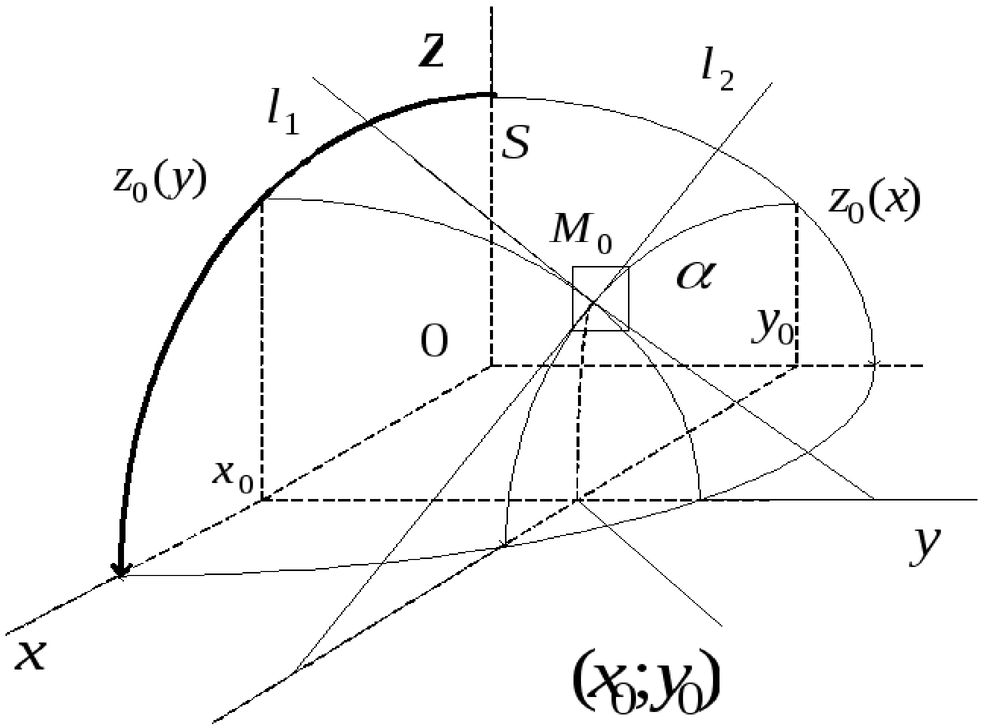
Вычисляем

$$F_x'=-4z,\ F_y'=2y,\ F_z'=3z^2-4x,$$

$$F_x'(P_0) = -8,\ F_y'(P_0) = -4,\ F_z'(P_0) = 8,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = 1,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности



Определение. ***Касательной плоскостью*** к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в ее точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (точка касания) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Определение. ***Нормалью*** к поверхности $F(x,y,z)=0$ называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z)=0$ в ее точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид:

$$F_x'(P_0)(x-x_0)+F_y'(P_0)(y-y_0)+F_z'(P_0)(z-z_0)=0 .$$

Уравнения нормали к поверхности $F(x,y,z)=0$ в ее точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{F_x'(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(P_0)}.$$

Пример. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2-y^2+2z^2+xy+xz-3=0$ в точке $P_0(1,2,1)$.

◄ Находим частные производные:

$F_x'=4x+y+z$, $F_x'(1,2,1)=7$;

$F_y{}' = -2y + x$, $F_y{}'(1,2,1) = -3$;

$F_z{}' = 4z + x$, $F_z{}'(1,2,1) = 5$;

Уравнение касательной плоскости:

$$7(x-1) - 3(y-2) + 5(z-1) = 0.$$

Уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{5}. \blacktriangleright$$

Производная по направлению. Градиент, его направление и модуль

Все рассмотрения проводим в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовыми прямоугольными координатами x, y, z. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты координатных осей.

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна в области D. Тогда е частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}$ выражают скорость изменения функции по направлению координатных осей. Представляет интерес скорость изменения функции $u = f(x, y, z)$ по любому заданному направлению.

Пусть $\vec{s} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$ — единичный вектор заданного направления $\vec{s}$, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы этого вектора, $|\vec{s}| = 1$. Предположим, что функция $u = f(x, y, z)$ определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Определение. *Производной* $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{P_0}$ *функции* $u = f(x, y, z)$ *в точке* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *по направлению* $\vec{s}$ *называется предел*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{P_0} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f\left(P_1\right)-f\left(P_0\right)}{t},$$

где $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP} + t\vec{s}$ *(точка* P_1 *получена из точки* P_0 *сдвигом на вектор* $t\vec{s}$ *).*

Замечание. Производная $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{P_0}$ характеризует скорость изменения функции $u = f\left(x,y,z\right)$ в точке $P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ в направлении орта $\vec{s}$.

Теорема. *Если функция* $u = f\left(P\right)$ *дифференцируема в точке* P_0*, то в этой точке существует производная по направлению любого орта* $\vec{s} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$ *, причем*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\cos\gamma.$$

Определение. ***Градиентом*** функции $u = f\left(x,y,z\right)$, обозначаемым символом $\operatorname{grad}u$, называется вектор, координатами которого являются соответствующие частные производные функции $u = f\left(x,y,z\right)$, т.е.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k} \,.$$

Следствие. Производная по направлению $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{P_0}$ равна скалярному произведению градиента на единичный вектор данного направления:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{s} \,.$$

Теорема. Пусть $\left.\operatorname{grad} u\right|_{P_0} \neq 0$. *Тогда вектор* $\left.\operatorname{grad} u\right|_{P_0}$ *направлен в сторону наибыстрейшего возрастания функции в точке* P_0. *Модуль градиента* $\left|\left.\operatorname{grad} u\right|_{P_0}\right|$ *(длина вектора* $\left.\operatorname{grad} u\right|_{P_0}$*) равен величине максимальной скорости возрастания функции в точке* P_0.

◄Доказательство. Действительно,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{s} \leq \left|\operatorname{grad} u\right| \cdot \left|\vec{s}\right| = \left|\operatorname{grad} u\right|,$$

причем равенство достигается, когда вектор $\operatorname{grad} u$ сонаправлен с вектором $\vec{s}$. ►

Замечание. Если $\operatorname{grad} u\big|_{P_0} = 0$, то $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}\Big|_{P_0} = 0$ для любого направления.