[=====   Семинар №1: Алгебра логики. =====]

Алгебра логики - оперирует с логическими элементами, каждый из которых может принимать 1 из 2 значений: 0 (ложь - false) и 1 (истина - true).

Константы: 0, 1 (простейшие неделимые элементы)
Переменные: x_1, x_2, x_3, a, b, ... (простейшие неделимые элементы)
Функции: $Fn = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$

Функции состоят из атомов, связанных между собой логическими операциями:

1. $y = \bar{x}$ - отрицание, инверсия, логическое НЕ
2. $y = x_1 \vee x_2$ - дизъюнкция, логическое ИЛИ
3. $y = x_1 \& x_2$ - конъюнкция, логическое И

Эти три операции являются базовыми. Через них можно выразить любую логическую функцию.

Далее идут составные операции:

4. $y = x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$ - импликация, логическое следование
5. $y = (x_1 \equiv x_2) = x_1 \& x_2 \vee \overline{x_1} \& \overline{x_2}$ - эквивалентность, тождество, логическое равенство
6. $y = (x_1 \oplus x_2) = \overline{x_1} \& x_2 \vee x_1 \& \overline{x_2}$ - не эквивалентность, исключительное ИЛИ, сложение по модулю два

$(x_1 \equiv x_2) = (\overline{x_1} \oplus x_2) = (x_1 \oplus \overline{x_2}) = \overline{(x_1 \oplus x_2)}$ - эти формулы часто экономят огромное количество усилий
$(x_1 \oplus x_2) = (\overline{x_1} \equiv x_2) = (x_1 \equiv \overline{x_2}) = \overline{(x_1 \equiv x_2)}$ - по преобразованию через простейшие операции НЕ, ИЛИ, И

Таблицы истинности:

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2$	$x_1 \to x_2$ $(x_1 \le x_2)$	$x_1 \equiv x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0

Формулы для преобразований:

$0 \& x = 0$ $\quad x \& x = x$
$0 \vee x = x$ $\quad x \vee x = x$
$1 \& x = x$ $\quad x \& \bar{x} = 0$
$1 \vee x = 1$ $\quad x \vee \bar{x} = 1$

$\bar{\bar{x}} = x$ - закон отрицания отрицания
$\overline{(x_1 \& x_2 \& x_3 \& ...)} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee ...$ - закон
$\overline{(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee ...)} = \overline{x_1} \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \& ...$ - де Моргана

$A \& x \& x \& ... = A \& x$ - тавтология (переменная входит в дизъюнкт несколько раз)
$A \& x \& \bar{x} \& ... = 0$ - противоречие (переменная входит в дизъюнкт и с отрицанием, и без)
$A \& B \vee A = A$ - поглощение (общее поглощает частное)
$A \& \bar{B} \vee B = A \vee B$ - исключение
$\boldsymbol{A \& x \vee A \& \bar{x} = A}$ - склейка

Виды представления логических функций.

1) Аналитический

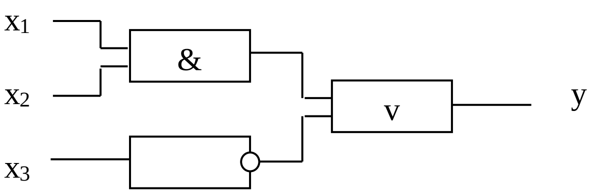
Пример: $y = x_1 \,\&\, x_2 \;v\; \overline{x_3}$

2) Табличный

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Примечание:
Для **n** переменных будет:
$\mathbf{N_1 = 2^n}$ строк в таблице истинности (2 в степени n)
$\mathbf{N_2 = 2^{2^{\wedge}n}}$ различных логических функций (2 в степени 2 в степени n).

3) Схемотехнический (в виде логической схемы)



Примечания:

- Входы во все блоки расположены строго слева, выходы – справа.
- У блоков { & ; *v* ; ⊕ } по стандарту 2 входа (но иногда допускается большее количество).
- Соединения разных проводов вне блоков запрещены.
- Скрещивание проводов (отсутствие пересечения) изображается полуокружностью.
- Разветвление одного провода изображается жирной точкой.

Нормальные формы логических функций

а) КНФ - конъюнктивная нормальная форма: y = ($\overline{x_1}$ v $\overline{x_2}$ v $\overline{x_3}$ v ...) & (x1 v $\overline{x_2}$ v $\overline{x_3}$ v ...) & ...

б) ДНФ - дизъюнктивная нормальная форма: y = x_1 & x_2 & x_3 & ... v $\overline{x_1}$ & x_2 & x_3 & ... v ...

Каждая группа, входящая в ДНФ, называется ДИЗЪЮНКТ (ЛЕКСЕМА, ТЕРМ).
Если в каждой группе присутствуют все имеющиеся переменные (с отрицаниями или без), то такая форма называется СОВЕРШЕННОЙ (ДНФ – все ТЕРМЫ имеют максимальный порядок).
ДНФ - более наглядна и удобна. У нее допускается более компактная запись: y = $x_1x_2x_3$ v $\overline{x_1}$ x_2x_3 v ...

в) АНФ - алгебраическая нормальная форма: y=1⊕ x_1⊕ x_1 & x_3⊕ x_2 & x_3⊕**...**
Полином был предложен в 1927 году Иваном Жегалкиным.

Преобразование: ДНФ <=> Таблица истинности

Если функция преобразована к виду ДНФ, то для нее можно легко и быстро записать таблицу истинности:

$y = x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3 \;v\; \overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2}$

Разбиваем ее на термы и последовательно заполняем результирующий столбец таблицы.
Сначала ставим единицы в тех строках, где первый терм (x_1&x_2&x_3) возвращает единицу:

x_1	x_2	x_3	Y
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	1

Затем, то же самое проделываем и для второго ($\overline{x_1}$ & $\overline{x_2}$):

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	1

Когда все термы исчерпаны, оставшиеся пустые ячейки заполняем нулями:

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Обратная задача: логическая функция задана таблицей истинности, записать ее формулу.

Пример в виде ДНФ:

Помечаем все строки, где функция y = 1, и выписываем соответствующие им термы:

x_1	x_2	Y	
0	0	1	- $\overline{x_1}$ & $\overline{x_2}$ - x_1=0 – значит с отрицанием, x_2=0 – с отрицанием.
0	1	1	- $\overline{x_1}$ & x_2 - x_1=0 – значит с отрицанием, x_2=1 – без отрицания.
1	0	0	
1	1	0	

Ответ: $y = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2$ = {ДНФ обычно упрощается по формулам склейки} = $\overline{x_1}$

Пример в виде КНФ:

Помечаем все строки, где функция y = 0, аналогично выписываем соответствующие им термы, делаем общее отрицание функции (чтобы перейти от 0 к 1) и далее – по де Моргану:

x_1	x_2	Y	
0	0	1	
0	1	1	
1	0	0	- $x_1 \& \overline{x_2}$
1	1	0	- $x_1 \& x_2$

Ответ: $y = \overline{(x_1\,\overline{x_2}\ v\ x_1x_2)} = (\overline{x_1\,\overline{x_2}}\ \&\ \overline{x_1x_2}) = (\overline{x_1\,\overline{x_2}}\ \&\ \overline{x_1x_2}) = (\overline{x_1} \vee x_2\ )\,\&\,(\ \overline{x_1} \vee \overline{x_2})$ = {КНФ}

Преобразование ДНФ 🡐 КНФ – достаточно раскрыть скобки по правилу перемножения.

Преобразование ДНФ ➔ КНФ – через построение таблицы истинности.

Преобразование ДНФ ➔ АНФ – через замену и раскрытие скобок по правилу перемножения
($A \vee B = A \oplus B \oplus A\&B$; $\overline{A} = A \oplus 1$; $A \oplus A = 0$; $(A \oplus B)\&C = A\&C \oplus B\&C$)

Преобразование ДНФ ➔ АНФ – через замену и раскрытие скобок по правилу перемножения
(v ➔ $\oplus$; $\overline{A} = A \oplus 1$; …)

[===== Семинар №2: Методы минимизации ДНФ. =====]

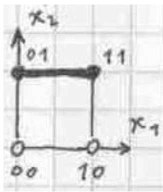
1) Графический метод (рекомендуется для функций 2-3 переменных):

В традиционной алгебре можно построить график практически для любой функции. Алгебра логики не является исключением. Необходимо лишь учесть, что все величины носят дискретный характер (0 / 1). Если функция $F_n(x_1 \ldots x_n)=0$ в какой-либо точке, то данная точка на графике остается "пустой". Если $F_n(x_1 \ldots x_n)=1$ – данная точка заштриховывается.

Пример 1: y=x

x	y
0	0
1	1

Пример 2: $y = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2$ = {склейка} = x_2



На графике две смежные вершины объединились в ребро!

Если мы посмотрим на формулу, то заметим, что она тоже поддается упрощению посредством операции склейка. Причем ребро является более высокоуровневой конструкцией, и для его описания требуется меньшее количество переменных!

В этом и заключается суть метода: нанести все точки на график и выделить наиболее крупные элементы (ребра, грани, объемы).

Правило составления формулы для сложного элемента:

Из координат любой точки данного объекта требуется исключить те переменные, осям координат которых он (элемент) параллелен!

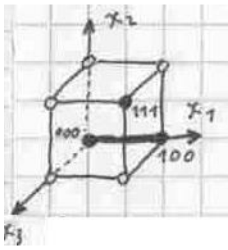
В примере 2 ребро параллельно оси $\mathbf{x_1}$ ($\overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = x_2$). Осталась только 1 координата! В случае грани из координат точки будут исключены сразу 2 координаты.

Пример 3: $y = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2\, \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\, \overline{x}_2\, \overline{x}_3$

Объединив 2 смежные вершины в ребро получим:

$y = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_2\, \overline{x}_3$ – МИН ДНФ

(нельзя соединять точки по диагонали!!!)



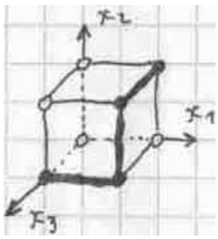
Пример 4: Записать уравнение функции по ее графику.

Как и раньше, запишем выражения для ребер:

$y = \overline{x}_2\, x_3 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2$

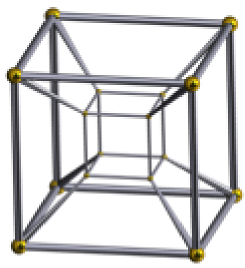
Но на самом деле достаточно лишь "охватить" все 4 точки (среднее ребро в формуле избыточно – исключаем его):

$y = \overline{x}_2\, x_3 \vee x_1 x_2$ – МИН ДНФ



В графическом методе 3 переменных у нас будут элементы: точки, ребра, грани.

В графическом методе 4 переменных вместо куба будет гиперкуб, и появится новый элемент – объем. Но работать с ним станет значительно сложнее!



2) Карты Карно (для функций 3-4 переменных).

Существует еще один прием, который позволяет довольно быстро сократить запись логической функции. Он представляет нечто среднее между графическим методом и таблицей истинности.

Пример: $y = x_1\overline{x_2}x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$

Имеем функцию 4-х переменных. Делим все переменные на 2 группы, допустим: x_1,x_2 и x_3,x_4. Нанесем разметку на оси так, чтобы соседние значения отличались на один знак (код Грея):

```
 x3,x4                                        x3,x4
    ^                                            ^
10  |     *                                  10  |   (*)
11  |          *    *                        11  |        *    *
01  |          *    *                        01  |        *    *
00  |          *                             00  |        *
    ------------------------> x1,x2              ------------------------> x1,x2
     00   01   11   10                            00   01   11   10
```

Расставив метки для всех термов (по таблице истинности), начинаем объединять их в прямоугольные контуры так, чтобы их количество в каждом контуре равнялось 2^n (1,2,4,8,16,...)

В нашем случае, получим три контура: I из 4, II из 2 и III из 1 значков соответственно. Записываем ответ. Для этого, из координат любого знака надо исключить те переменные, которые в пределах контура меняют свои значения.

Для контура из I: 1101 v 1111 v 1001 v 1011 → 1xx1 → x_1x_4 (x – это отсутствие переменой в позиции)

Для контура из II: 1100 v 1101 → 110x → $x_1x_2\overline{x_3}$

Для контура из III: 0110 → $\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$

Ответ: $y = x_1x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$

Обратите внимание, что объединять можно через края (их координаты тоже отличаются на 1 знак)

```
x3,x4
    ^
10  |     (*)  *
11  |
01  |          *    *
00  |          *
    ------------------------> x1,x2
     00   01   11   10
```

Примечание: при объединении мы стараемся выделять как можно более крупные контуры; одна звездочка может быть в нескольких контурах (как в граф. методе – вершина для неск. ребер), но нам не обязательно перебирать все возможные варианты, достаточно лишь охватить все доступные вершины, и можно записывать ответ:

```
x3,x4
    ^
10  | *    *
11  |      *    *
01  |           *    *
00  |                *
    ------------------------> x1,x2
     00   01   11   10
```

$$y = \left[\begin{array}{l} \overline{x_1}x_3\overline{x_4} \vee x_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \\ \overline{x_1}x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \end{array}\right.$$

[=====   Семинар №3: Методы минимизации ДНФ. =====]

3) Метод неопределенных коэффициентов.

Как и в алгебре, суть метода заключается в том, что мы заранее можем предугадать общий вид ответа, решение же сводится к нахождению коэффициентов при каждой компоненте.

Ввиду большой громоздкости, рассмотрим на примере небольшой функции 3 переменных:

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Запишем общий вид ответа (просто переберем все термы 1,2,3 порядков):

$$y = K_1^0\overline{x_1} \vee K_1^1 x_1 \vee K_2^0\overline{x_2} \vee K_2^1 x_2 \vee K_3^0\overline{x_3} \vee K_3^1 x_3 \vee$$

$$\vee K_{12}^{00}\overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee K_{12}^{01}\overline{x_1}x_2 \vee K_{12}^{10}x_1\overline{x_2} \vee K_{12}^{11}x_1x_2 \vee K_{13}^{00}\overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee K_{13}^{01}\overline{x_1}x_3 \vee K_{13}^{10}x_1\overline{x_3} \vee K_{13}^{11}x_1x_3 \vee K_{23}^{00}\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee K_{23}^{01}\overline{x_2}x_3 \vee K_{23}^{10}x_2\overline{x_3} \vee K_{23}^{11}x_2x_3 \vee$$

$$\vee K_{123}^{000}\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee K_{123}^{001}\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee K_{123}^{010}\overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee K_{123}^{011}\overline{x_1}x_2x_3 \vee K_{123}^{100}x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee K_{123}^{101}x_1\overline{x_2}x_3 \vee K_{123}^{110}x_1x_2\overline{x_3} \vee K_{123}^{111}x_1x_2x_3$$

K – коэффициент при каждом терме (=0, если этого терма не будет в ответе; =1, если этот терм войдет в ответ). Нижний индекс показывает номера переменных в терме, верхний – задает отрицания над ними.

Подставим все 8 вариантов значений x_1,x_2,x_3 из таблицы, получим 2 системы уравнений:

$$y=\begin{cases} K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} = 0 \\ K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} = 0 \\ K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = 0 \\ K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} = 0 \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\ K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} = 1 \\ K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} = 1 \\ K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1 \end{cases}$$

Итого 8 уравнений и 26 неизвестных!

Начинаем решение с первой системы: поскольку все уравнения =0, то и все К=0, т.к. иначе мы бы не смогли получить нули в правой части!

Мы нашли сразу 20 неизвестных коэффициентов:

$$K_1^0 = K_1^1 = K_2^0 = K_2^1 = K_3^0 = K_3^1 = 0$$

$$K_{12}^{01} = K_{12}^{10} = 0$$

$$K_{13}^{00} = K_{13}^{01} = K_{13}^{10} = K_{13}^{11} = 0$$

$$K_{23}^{00} = K_{23}^{01} = K_{23}^{10} = K_{23}^{11} = 0$$

$$K_{123}^{010} = K_{123}^{011} = K_{123}^{100} = K_{123}^{101} = 0$$

Подставим их во вторую систему, которая существенно упростится:

$$y=\begin{cases} 0 \vee 0 \vee 0 \vee K_{12}^{00} \vee 0 \vee 0 \vee K_{123}^{000} = 1 \\ 0 \vee 0 \vee 0 \vee K_{12}^{00} \vee 0 \vee 0 \vee K_{123}^{001} = 1 \\ 0 \vee 0 \vee 0 \vee K_{12}^{11} \vee 0 \vee 0 \vee K_{123}^{110} = 1 \\ 0 \vee 0 \vee 0 \vee K_{12}^{11} \vee 0 \vee 0 \vee K_{123}^{111} = 1 \end{cases} = \begin{cases} K_{12}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\ K_{12}^{00} \vee K_{123}^{001} = 1 \\ K_{12}^{11} \vee K_{123}^{110} = 1 \\ K_{12}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1 \end{cases}$$

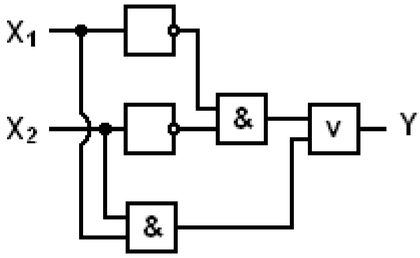
Далее нам предстоит сделать нелегкий выбор. Начнем с самого короткого уравнения, например 4-го: Нам достаточно только получить один коэффициент =1 в строке. Поэтому рассудив, что выгоднее терм из 2 переменных (чем из 3), назначаем K_{123}^{111}=0, а соответственно будет K_{12}^{11}=1. Подставим в систему:

$$y=\begin{cases} K_{12}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\ K_{12}^{00} \vee K_{123}^{001} = 1 \\ 1 \vee K_{123}^{110} = 1 \end{cases} = \begin{cases} K_{12}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\ K_{12}^{00} \vee K_{123}^{001} = 1 \end{cases} = \begin{cases} K_{12}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\ K_{123}^{001} = 0 \Rightarrow K_{12}^{00} = 1 \end{cases} = \left\{ 1 \vee K_{123}^{000} = 1 \right.$$

Здесь применяется метод исключения: мы последовательно назначаем значения 0 самым неудобным К, постепенно добираясь до последней 1. Но никак не наоборот!!!

Ответ: $K_{12}^{00} = K_{12}^{11}$=1, все остальные =0, а $y = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2$.

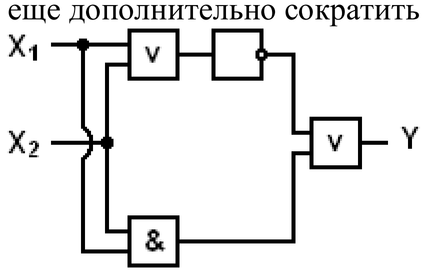
Поскольку целью минимизации является экономная аппаратная реализация, попробуем построить для получившейся функции логическую схему, и по возможности минимизируем ее дальше:



При построении логических схем необходимо соблюдать ряд стандартов:

- у блока Отрицание – 1 вход и 1 выход (инверсный – обозначается выколотой точкой)
- у остальных блоков – 2 входа и 1 выход
- входы в блок – строго слева, выход из блока – строго справа
- ответвления от проводов – обозначаются жирной точкой
- перекрещивания проводов без пересечения – обозначаются полуокружностью
- пересечения проводов – не допускаются! Сигналы могут соединяться и преобразовываться только внутри блоков!

ДНФ в данном примере минимальна, содержит 5 блоков. Они изображены на схеме. Но схему можно еще дополнительно сократить:



Итого получилось 4 блока, и это действительно минимальный вариант.
Если изобразить данную операцию в виде формул, то получится следующее преобразование:

$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} \vee x_1 x_2$

Оптимизация схем обычно производится 2 способами:

1) вынесением общей части за скобку
2) уменьшением количества отрицаний по закону де Моргана

[=====   Семинар №4: Методы минимизации ДНФ. =====]

4а) Метод Квайна (оптимален для функций с большим количеством переменных).

Целиком и полностью основан на операции «Склейка». Заключается в последовательном полном переборе всех термов и их потомков на предмет возможности данной операции.

Пример:

$$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4x_5 \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4\overline{x_5} \vee x_1x_2x_3x_4\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4x_5 \vee x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}x_5 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4x_5$$

Составим таблицу. В первую колонку перепишем все термы. Перебираем их все попарно, проверяем возможность операции «Склейка». Во вторую колонку выписываем результаты операции «Склейка», помечаем символами ***** те термы, которые образовали "потомков":

1) $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4\overline{x_5}$ * 2) $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4x_5$ * 3) $x_1\overline{x_2}x_3x_4\overline{x_5}$ * 4) $x_1x_2x_3x_4\overline{x_5}$ * 5) $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}$ 6) $x_1\overline{x_2}x_3x_4x_5$ * 7) $x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}x_5$ 8) $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4x_5$ *	$9 = 1+2)$ $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4$ * $10 = 1+3)$ $\overline{x_2}x_3x_4\overline{x_5}$ * $11 = 2+6)$ $\overline{x_2}x_3x_4x_5$ * $12 = 2+8)$ $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4x_5$ $13 = 3+4)$ $x_1x_3x_4\overline{x_5}$ $14 = 3+6)$ $x_1\overline{x_2}x_3x_4$ *	$15 = 9+14 = 1+2+3+6)$ $\overline{x_2}x_3x_4$ $15 = 10+11 = 1+3+2+6)$ $\overline{x_2}x_3x_4$	Больше нет

Повторяем эту операцию для последующих столбцов, пока не получим набор, не подлежащий дальнейшей «Склейке». Термы, не помеченные символом * (не имеющие "потомков") - претенденты для конечного решения. Из них надо выбрать такой набор, чтобы он покрывал все "родительские" термы (те, что были заданы в условии). Для этого построим таблицу наследования:

	1	2	3	4	5	6	7	8
5					*			
7							*	
12		*						*
13			*	*				
15	*	*	*			*		

Далее, выбираем незаменимые термы (столбцы с единственной меткой). Эти элементы обязательно должны присутствовать в ответе: 5,7,12,13,15. Т.е. в первой части ответа уже обязательно будет фрагмент конечного решения $y = терм5 \vee терм7 \vee терм12 \vee терм13 \vee терм15 \vee \ldots$

	1	2	3	4	5	6	7	8
5					**(*)**			
7							**(*)**	
12		*						**(*)**
13			*	**(*)**				
15	**(*)**	*	*			**(*)**		

Вычеркиваем для каждого столбец и строку, на пересечении которых находится эта единственная метка. Не забываем и про те столбцы, которые ”уходят” вместе с ”незаменимыми” (т.е. в исключаемых строках учитываем все метки, не только единственные в столбце – они-то и уносят дополнительные столбцы). Размерность таблицы уменьшается.

В нашем случае таблица уничтожилась полностью! Но если этого не произошло, необходимо выполнить следующие действия:

Если после преобразований могут появиться пустые строки - также удаляем их. Если есть одинаковые столбцы - удаляем лишние копии, оставляя только один экземпляр. Т.е. всеми способами сокращаем таблицу. Пример несократившейся таблицы:

	VII	VIII	IX	X
I				
II	*		*	
III	*	*		*
IV		*	*	*

	VII	VIII	IX	X
I				
II	*		*	
III	*	*		*
IV		*	*	*

Опять ищем незаменимые термы (если находим - повторяем те же действия). Если незаменимых термов нет, а таблица еще не вся сократилась - получена неоднозначная ситуация.

	VII	VIII	IX
II	*		*
III	*	*	
IV		*	*

Выписываем ВСЕ возможные варианты из оставшихся элементов (так, чтобы были закрыты все столбцы). Среди этих вариантов и следует выбрать наиболее приемлемое. Эта вариабельность и является второй частью ответа:

Ответ для нашего примера: $y = \ldots \vee \left[\begin{array}{l} \mathrm{II} \vee \mathrm{III} \\ \mathrm{II} \vee \mathrm{IV} \\ \mathrm{III} \vee \mathrm{IV} \end{array}\right.$

Примечание: для успешной минимизации ДНФ должна быть совершенного вида. В противном случае необходимо провести операцию, обратную СКЛЕЙКе –"расклеить" все термы до высшего порядка.

4б) Метод Квайна-Мак-Класки (небольшая модификация).

Некоторое несовершенство метода Квайна - необходим полный попарный перебор всех претендентов для операции «Склейка». Мак Класки предложил упростить первую фазу. Во-первых, заменить громоздкие буквенные обозначения термов на их двоичное представление. Во-вторых, разделить все термы на группы по количеству единиц - тогда для операции «Склейка» имеет смысл перебирать только термы из соседних групп!

Пример: y = 00000 v 00100 v 00001 v 00101 v 01101 v 00111 v 00110 v 01111 v 11111 v 10001 v 10010
Действуем аналогично, только вместо сокращающихся переменных будем ставить крестики:

0	1) 00000 *	12= 1+ 2) 00x00 * 13= 1+ 3) 0000x *	**24=12+16= 1+ 2+ 3+ 4) 00x0x** 24=13+14= 1+ 3+ 2+ 4) 00x0x	---
1	2) 00100 * 3) 00001 *	14= 2+ 4) 0010x * 15= 2+ 5) 001x0 * 16= 3+ 4) 00x01 * **17= 3+ 6) x0001**	**25=14+20= 2+ 4+ 5+ 9) 001xx** 25=15+19= 2+ 5+ 4+ 9) 001xx	---
2	4) 00101 * 5) 00110 * 6) 10001 * **7) 10010**	18= 4+ 8) 0x101 * 19= 4+ 9) 001x1 * 20= 5+ 9) 0011x *	**26=18+22= 4+ 8+ 9+10) 0x1x1** 26=19+21= 4+ 9+ 8+10) 0x1x1	---
3	8) 01101 *	21= 8+10) 011x1 *	---	---

	9) 00111 *	22= 9+10) 0x111 *		
4	10) 01111 *	**23=10+11) x1111**	**---**	**---**
5	11) 11111 *	**---**	**---**	**---**

Строим таблицу наследования:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
7							**(*)**				
17			*****			**(*)**					
23										*****	**(*)**
24	**(*)**	*****	*****	*****							
25		*****		*****	**(*)**				*****		
26				*****				**(*)**	*****	*****	

В этом случае все столбцы сократились с первого раза!
Ответ получается однозначным: y = 10010 v x0001 v x1111 v 00x0x v 001xx v 0x1x1

[=====   Семинар №5: Универсальные Логические Модули. =====]

Минимизация ДНФ – одно из направлений оптимизации процесса синтеза логических схем. Оно минимизирует аппаратную часть – количество элементов, необходимых для их реализации. Но не менее популярно и другое направление – использование уже готовых типовых блоков с последующей незначительной настройкой (программированием) логики. В этом случае оптимизируется время и усилия проектировщика схем (принцип модульности).

1. Мультиплексор:
(N + 1)-полюсная схема (N входов, 1 выход).
Работает по принципу переключателя:
Все входы разделены на адреса (m штук) и данные (2^m штук).
В зависимости от комбинации сигналов на адресных входах, на выход проходит без изменения один из сигналов по входу данных (классический пример для случая m = 2):

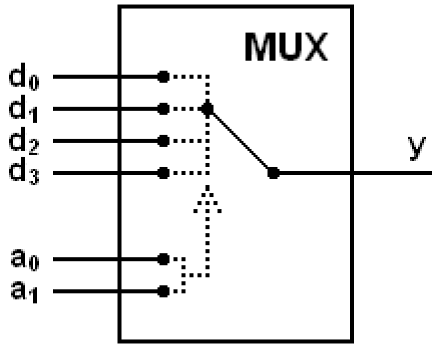


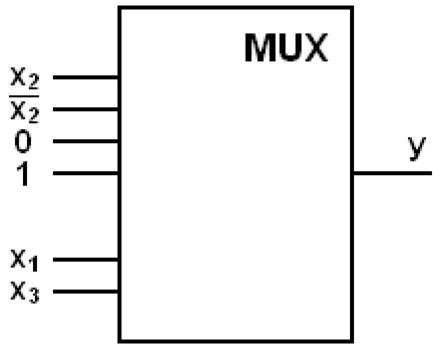
Таблица истинности Мультиплексора:

a_0	a_1	y
0	0	d_0
0	1	d_1
1	0	d_2
1	1	d_3

С помощью данного блока удается успешно реализовывать весьма широкий класс логических функций.
Задача: Реализовать на Мультиплексоре функцию $y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1x_3$
Решение:
Выбираем наиболее часто встречающиеся переменные: x_1 и x_3 (они будут поданы на адресные входы)
Составляем таблицу истинности для остаточной функции:

x_1 (a_0)	x_3 (a_1)	$y_{ост}$
0	0	$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1x_3 = 1\&\overline{x_2}\&0 \vee 1\&x_2\&1 \vee 0\&0 = x_2$
0	1	$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1x_3 = 1\&\overline{x_2}\&1 \vee 1\&x_2\&0 \vee 0\&1 = \overline{x_2}$
1	0	$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1x_3 = 0\&\overline{x_2}\&0 \vee 0\&x_2\&1 \vee 1\&0 = 0$
1	1	$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1x_3 = 0\&\overline{x_2}\&1 \vee 0\&x_2\&0 \vee 1\&1 = 1$

И подаем полученные сигналы на соответствующие входы:

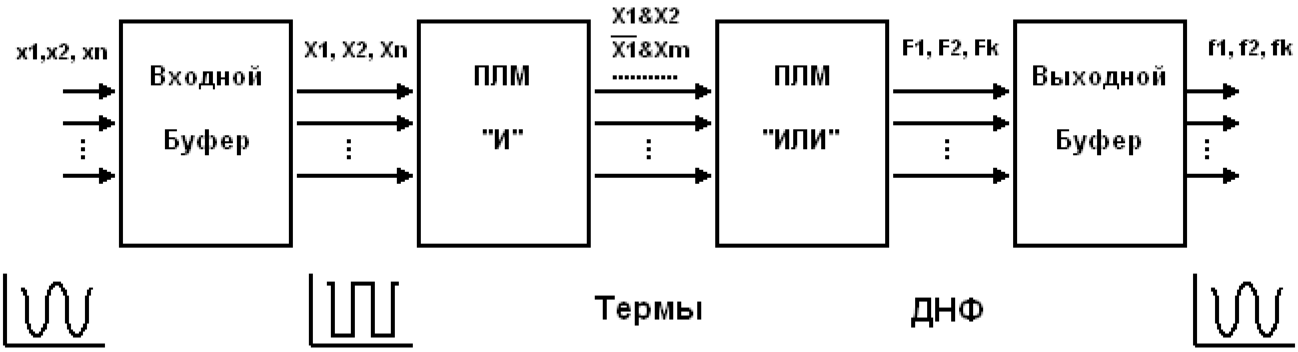


В данной задаче были успешно выбраны 2 переменные, в общем случае можно выбирать и меньшее количество.

Несмотря на кажущуюся простоту и универсальность, на исходную функцию накладывается ряд ограничений.

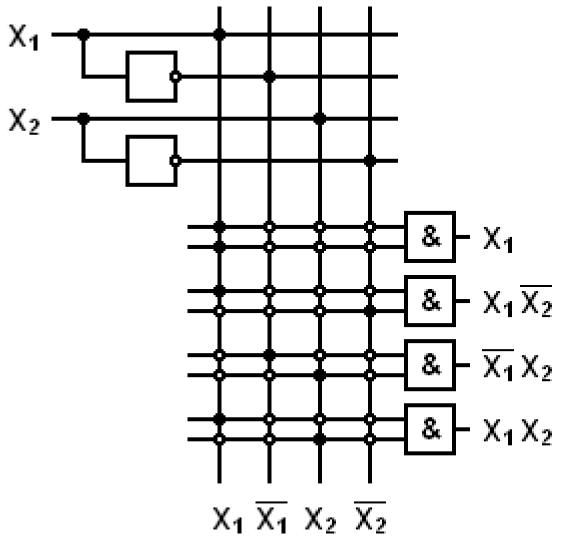
2. Программируемые Логические Матрицы (ПЛМ):
При синтезе более громоздких и сложных схем от типовых блоков требуется все большая гибкость и универсальность, достигаемые за счет все большей избыточности аппаратной части.

Для получения ДНФ в цифровых устройствах используется стандартная 4-каскадная схема:



Входной буфер – усиливает входные сигналы, преобразует к цифровому виду.
ПЛМ «И» – склеивает между собой атомарные сигналы в термы требуемого вида (через логическое И).
ПЛМ «ИЛИ» – склеивает между собой термы в ДНФ требуемого вида (через логическое ИЛИ).
Выходной буфер – преобразует полученные сигналы к требуемому на выходе схемы виду.

Особый интерес представляет ПЛМ «И»:



В данном примере на вход поступают 2 атомарных сигнала. Далее делаются отрицания, и все 4 состояния подаются на соответствующие им вертикальные линии.

Ниже находится программируемая часть матрицы. В ней задан набор термов, который требуется получить в данной задаче на выходе, а решение заключается в настройке (программировании) нужных соединений.

В промышленном варианте на схеме изначально присутствуют все возможные соединения, а настройка под конкретную задачу осуществляется пережиганием ненужных соединений посредством специального устройства-программатора.

ПЛМ «ИЛИ» реализуется аналогичным методом.