

4. Дифракция скалярной плоской монохроматической волны в приближении Фраунгофера

Задача о распространении волны при наличии в пространстве каких-либо объектов есть дифракционная задача. Решение дифракционных задач базируется на моделях волнового распространения в пустом пространстве и взаимодействия волны с объектом. При решении рассматриваемых ниже задач распространение волны описывается с помощью **принципа Гюйгенса-Френеля**, а все объекты считаются непрозрачными. Отражение и рассеяние волн на поверхности объектов не учитываются.

Пусть монохроматическая волна распространяется в пустом пространстве. В некоторый момент времени t_1 выберем волновую поверхность S_1 , где во всех точках пространства фаза волны $\Phi = \Phi_1 = \text{const}$. Для каждой точки этой поверхности амплитуда, частота и фаза колебаний считаются известными. В момент времени $t_2 > t_1$ выбранная волновая поверхность есть S_2 и занимает новое положение в пространстве. Задача заключается в том, чтобы найти амплитуду, частоту и фазу колебаний во всех точках поверхности S_2 .

Принцип Гюйгенса-Френеля сводит задачу дифракции к интерференционной задаче (рис. 4.1.) Согласно принципу Гюйгенса-Френеля каждый бесконечно малый элемент dS_{1i} исходной волновой поверхности S_1 можно рассматривать как **вспомогательный источник вторичных волн** $d\psi_{1i}$. Результирующее волновое поле в любой точке P волновой поверхности S_2 равно **сумме всех вторичных волн**, пришедших от вспомогательных источников в эту точку,

$$\psi_P = \int_{S_1} d\psi_1 = \int_{S_1} \psi_1 ds_1.$$

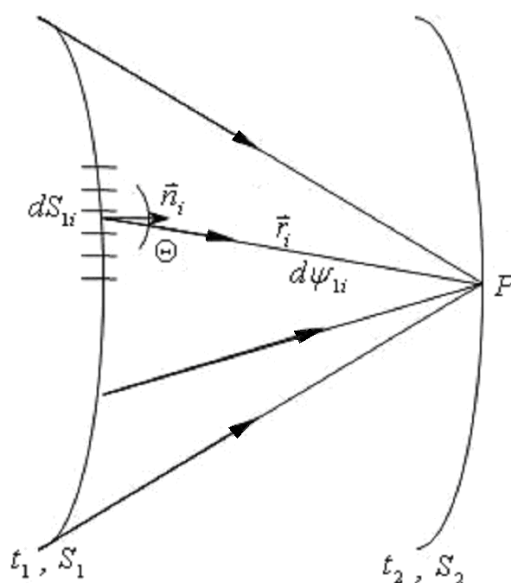


Рис. 4.1.

Для сложения вторичных волн необходимо задать их характеристики. В общем случае каждая вторичная волна есть сферическая монохроматическая волна с центром в точке нахождения соответствующего элемента dS_1 волновой поверхности S_l . Амплитуда этой волны пропорциональна амплитуде волны, пришедшей от источника в точку нахождения элемента волновой поверхности, и площади dS_1 этого элемента. Кроме того, амплитуда вторичной волны зависит от угла θ между вектором внешней нормали \vec{n} к элементу поверхности и направлением на точку наблюдения P . С ростом угла θ амплитуда вторичной волны уменьшается и обращается в нуль, когда $\theta = \pi$. Частота вторичных волн равна частоте волны, пришедшей от источника. Начальная фаза вторичных волн равна фазе волны, пришедшей от источника в рассматриваемый элемент поверхности S_l . В точке P сложения всех вторичных волн каждая волна имеет дополнительный набег фазы $\Delta\Phi = kr = 2\pi r/\lambda$, где r - расстояние от элемента dS_1 до точки P , $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число вторичной волны, λ - длина волны.

Объект на пути распространения исходной волны, идущей от источника, просто исключает из суммы определенные вспомогательные источники вместе с их вторичными волнами, которые не попадают в точку наблюдения P в силу непрозрачности объекта. В результате излучения вторичных волн незакрытыми вспомогательными источниками возникает огибание волной непрозрачного объекта.

Необходимо отметить, что дифракция – отклонение от закона прямолинейного распространения – наблюдается не только при наличии непрозрачных объектов, но и в пустом пространстве. Для этого необходимо, чтобы распределение интенсивности на волновой поверхности излучения было неоднородным.

Характер интерференции в точке наблюдения P зависит от соотношения между длиной волны λ , линейным размером b объекта, на котором происходит дифракция, и расстоянием r между объектом и точкой наблюдения P . Если **волновой параметр**

$$P_b = \sqrt{\frac{\lambda r}{b^2}} \gg 1,$$

распределение волнового поля в достаточно малой области наблюдения можно приближенно описывать как суперпозицию вторичных плоских монохроматических волн. Это приближение называется **приближением Фраунгофера**, а дифракция – **дифракцией Фраунгофера**. При этом приходящие в точку наблюдения плоские монохроматические волны можно приближенно считать распространяющимися в одном направлении, поэтому дифракцию Фраунгофера называют также дифракцией в параллельных лучах.

Рассмотрим дифракцию плоской монохроматической волны, падающей нормально на плоский непрозрачный экран, в котором имеется прямая щель шириной $b \gg \lambda$, где λ - длина волны (см. рис. 4.2.). Данное условие необходимо для того, чтобы излучение свободно проходило через щель. Непрозрачный экран \mathcal{E} с щелью находится в плоскости xOy . Щель расположена параллельно оси y . Расстояние между экраном с щелью и плоскостью наблюдения Π равно L .

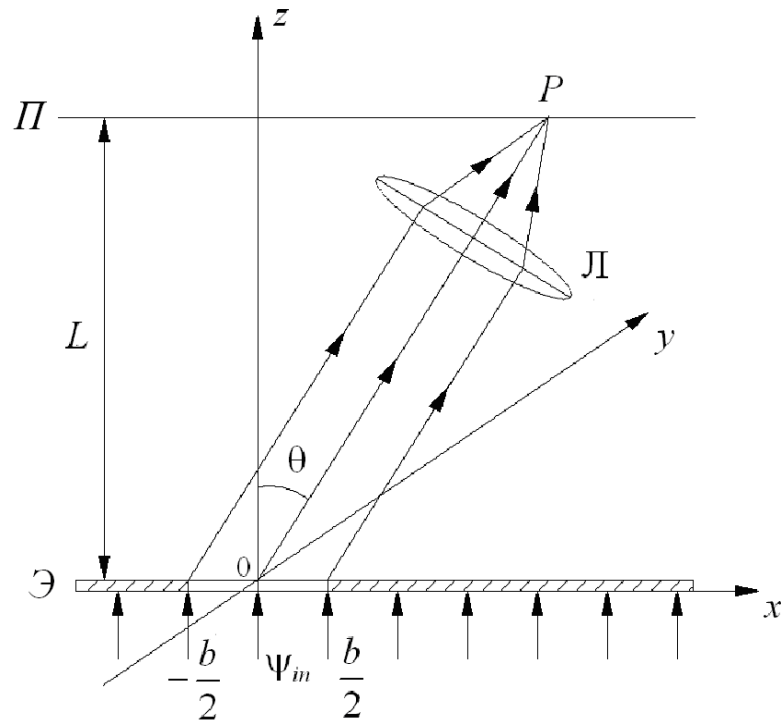


Рис. 4.2.

Точка наблюдения P задается с помощью угла θ . Параллельные вторичные лучи, идущие от поверхности щели $-b/2 < x < b/2$, собираются в точке P с помощью фокусирующей линзы L .

Волна, падающая на экран с щелью, имеет вид:

$$\psi_{in}(z, t) = A e^{i(kz - \omega t)},$$

где $A > 0$ – постоянная амплитуда, $k = 2\pi/\lambda$, $\omega/k = c$, $i = \sqrt{-1}$. Предполагается, что волновой параметр

$$P_s = \sqrt{\frac{\lambda L}{b^2}} \gg 1,$$

поэтому задачу можно решать в приближении Фраунгофера.

Все вторичные волны на плоскости щели имеют одинаковые частоту, амплитуду и начальную фазу. В точке наблюдения P приходящие вторичные волны отличаются только набегом фазы

$$\Delta\Phi(x) = \Delta\Phi(0) - kx \sin \theta ,$$

где $\Delta\Phi(0)$ - набег фазы вторичной волны, приходящей от центрального элемента щели, $-b/2 < x < b/2$.

Параллельные вторичные плоские волны (лучи) собираются в точке P с помощью фокусирующей линзы L . Суммарное волновое поле находится путем суммирования всех вторичных волн с учетом разности набег фазы

$$\Psi_P = \int_{-b/2}^{b/2} c e^{i(\Delta\Phi(x) - \omega t)} dx = c e^{i(\Delta\Phi(0) - \omega t)} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikx \sin \theta} dx = \frac{bc}{2} e^{i(\Delta\Phi(0) - \omega t)} \frac{\sin(kb \sin \theta / 2)}{(kb \sin \theta / 2)}$$

где c – постоянная, одинаковая для всех вторичных волн.

Соответствующая интенсивность описывается выражением

$$J_P(\theta) = J_P(0) \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} ,$$

где $\alpha = kb \sin \theta / 2$ и $J_P(0)$ - максимальная интенсивность дифрагированной волны при угле наблюдения $\theta = 0$. График зависимости $J_P(\alpha)$ приведен на рис.4.3. Дифракционная картина представляет собой чередование светлых и темных полос, расположенных параллельно щели в экране.

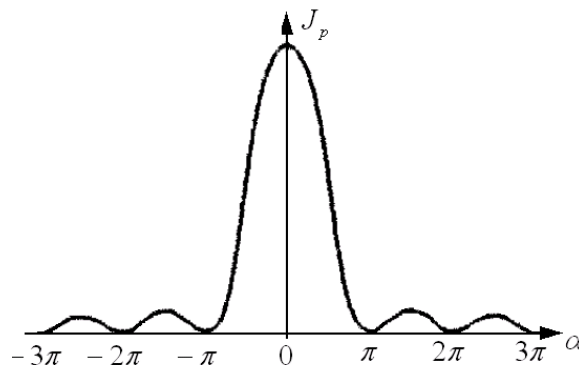


Рис. 4.3.

а) Положения дифракционных минимумов (темные полосы) определяются следующими углами:

$$\alpha_{\min.m} = \pi m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

или

$$\frac{kb \sin \theta_{\min.m}^{\text{диф.}}}{2} = \pi m, \quad \sin \theta_{\min.m}^{\text{диф.}} = \frac{2\pi}{kb} m = \frac{\lambda}{b} m, \quad \theta_{\min.m}^{\text{диф.}} = \frac{\lambda}{b} m,$$

где использованы соотношения

$$\frac{\lambda}{b} m \ll 1 \quad \text{и} \quad \sin \theta \approx \theta.$$

б) Положение главного дифракционного максимума (центральная светлая полоса) соответствует углу наблюдения

$$\alpha_{\max.0} = 0, \quad \theta_{\max.0}^{\text{диф.}} = 0.$$

Здесь используется известный предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Другие дифракционные максимумы описываются формулами

$$\theta_{\max.m}^{\text{диф.}} \approx \frac{\theta_{\min.m}^{\text{диф.}} + \theta_{\min.m+1}^{\text{диф.}}}{2} = \frac{\lambda}{b} \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

или

$$\theta_{\max.m}^{\text{диф.}} \approx \frac{\lambda}{b} \left(m - \frac{1}{2} \right), \quad m = -1, -2, -3, \dots$$

Отметим, что на центральный дифракционный максимум приходится свыше 90% всей энергии волны, прошедшей через щель.

Задача №10

Постройте график зависимости угловой ширины $\Delta\theta$ главного (центрального) дифракционного максимума от ширины b щели в непрозрачном плоском экране для случая нормального падения на экран плоской монохроматической волны с длиной волны λ .

Решение

Согласно определению угловая ширина главного дифракционного максимума

$$\Delta\theta = \theta_{\min.1}^{\text{диф.}} - \theta_{\min.-1}^{\text{диф.}} = 2 \frac{\lambda}{b}, \quad b > \lambda, \quad (1)$$

монотонно уменьшается с увеличением ширины щели. Соответствующий график зависимости угловой ширины главного дифракционного максимума от ширины щели $b > \lambda$ приведен на рис. 1. Если ширина щели $b < \lambda$, эффективность прохождения волны через щель резко уменьшается, а формулы,

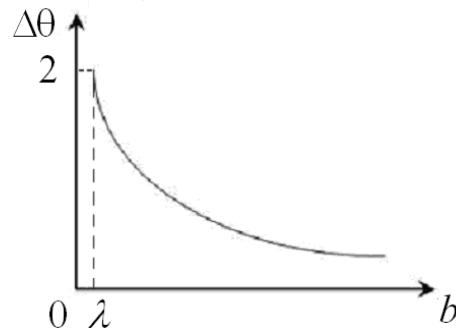


Рис. 1

определяющие положения дифракционных минимумов и максимумов (за исключением главного дифракционного максимума), становятся неприменимыми.

Отметим, что если для получения интерференции используются дифрагированные волны, идущие от щелей в экране, интерференционную картину обычно можно наблюдать только в пределах их общего главного дифракционного максимума.

Задача №11

Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ нормально падает на непрозрачный плоский экран с двумя параллельными щелями шириной b , находящимися на расстоянии d друг от друга. При каком условии дифракционный минимум первого порядка ($m=1$) совпадает с интерференционным максимумом порядка m ? Ширина щели $b > \lambda$.

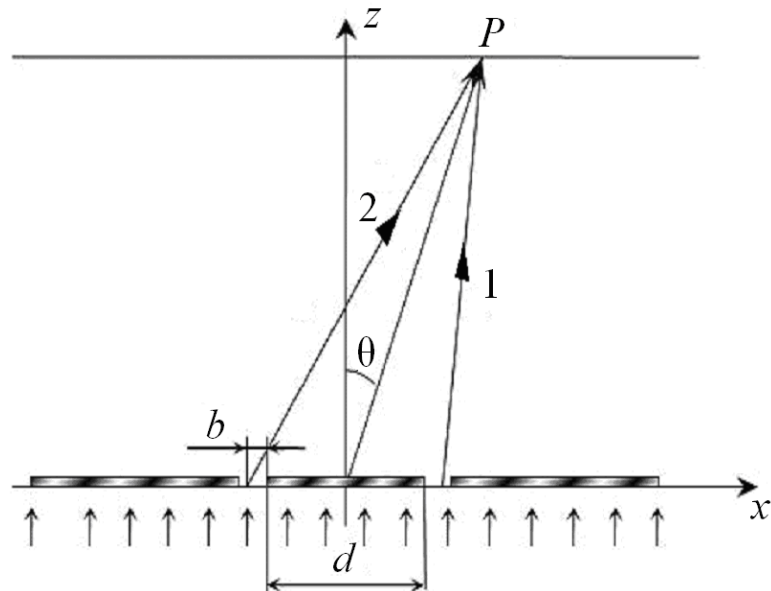


Рис. 1

Решение

Будем считать, что наблюдение ведется в дальней зоне дифракции, где справедливо приближение Фраунгофера. Распределение интенсивности $J_p(\theta)$ на экране наблюдения z

$= L$ определяется пространственным наложением интерференционной и дифракционной картин, поскольку наблюдается интерференция дифрагированных волн, идущих от щелей.

Рассчитаем интерференционную картину. Две щели рассматриваются как когерентные источники вторичных плоских монохроматических волн, приходящих в точку наблюдения P с разностью хода

$$\Delta r = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta, \quad (1)$$

поэтому их разность фаз

$$\Delta \Phi = k(r_2 - r_1) \approx kd \sin \theta, \quad |\theta| \ll 1, \quad \sin \theta \approx \theta. \quad (2)$$

Интерференционные максимумы (светлые полосы) наблюдаются в точках P , где

$$\Delta \Phi = 2\pi m, \quad \theta_{\max, m}^{\text{инт.}} \cong \frac{\lambda}{d} m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Интерференционные минимумы (темные полосы) наблюдаются в точках P , где

$$\Delta \Phi = \pi + 2\pi m, \quad \theta_{\min, m}^{\text{инт.}} \cong \frac{\lambda}{d} \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

Если считать, что интенсивность интерферирующих волн не зависит от угла наблюдения θ , то интерференционная картина представляет собой чередование одинаковых по ширине светлых и темных параллельных полос. Соответствующее распределение интенсивности $J_p^{\text{инт.}}$ показано на рис.1, где $\beta = kd \sin \theta$.

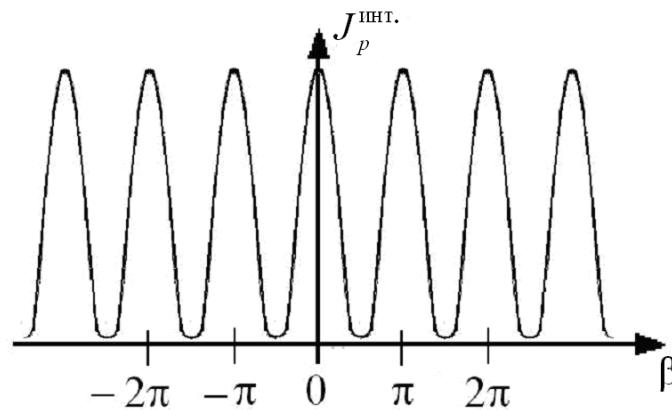


Рис. 1

Однако интенсивность каждой волны, дифрагированной на щели, зависит от их угла распространения θ согласно формуле

$$J_p^{\text{диф.}}(\theta) = J_p(0) \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}, \quad \alpha = \frac{1}{2} kb \sin \theta. \quad (5)$$

Распределение интенсивности $J_p^{\text{диф.}}$ дифрагированной волны (5), приведенное на рис. 2, модулирует интерференционное распределение интенсивности на рис. 1. В

результате наблюдаемая интенсивность волны для любого угла θ не превышает $4J_p^{\text{диф}}(\theta)$, а распределение интенсивности интерференционных полос лежит между осью α и кривой интенсивности $J_p^{\text{диф}}$.

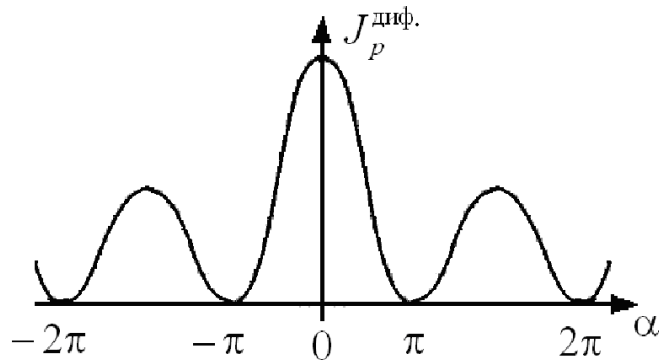


Рис. 2

Согласно условиям задачи

$$\theta_{\min.1}^{\text{диф.}} = \frac{\lambda}{b} = \theta_{\max.m}^{\text{инт.}} = m \frac{\lambda}{d}. \quad (6)$$

Отсюда находим, что должно выполняться условие

$$d = m \cdot b. \quad (7)$$

Под углом, определяемым формулой (6), наблюдается темная полоса, поскольку в эту область не попадают дифрагированные лучи.

Ответ: $d = m \cdot b$.

Задача №12

Как изменится интерференционная картина, наблюдаемая при нормальном падении плоской монохроматической волны на непрозрачный плоский экран с двумя длинными прямыми и параллельными щелями, если 1) расстояние d между щелями увеличить в 2 раза; 2) ширину b каждой щели уменьшить в 2 раза? Наблюдение ведется в дальней зоне дифракции.

Решение

Расстояние d между щелями определяет ширину Δ наблюдаемых интерференционных полос

$$\Delta = L(\theta_{\max.m+1}^{\text{инт.}} - \theta_{\max.m}^{\text{инт.}}) = L(\theta_{\min.m+1}^{\text{инт.}} - \theta_{\min.m}^{\text{инт.}}) = L \frac{\lambda}{d}, \quad (1)$$

а ширина b щели – линейный размер l главного дифракционного максимума на экране наблюдения

$$l = L(\theta_{\min.1}^{\text{диф.}} - \theta_{\min.-1}^{\text{диф.}}) = 2L \frac{\lambda}{b}. \quad (2)$$

Здесь λ – длина волны и L – расстояние между экраном с щелями и плоскостью наблюдения.

Интерференционные полосы наблюдаются только в области главного дифракционного максимума, где видность интерференционных полос достаточно высокая, поэтому можно считать, что полное N число наблюдаемых интерференционных полос описывается формулой

$$N = \frac{l}{\Delta} = 2 \frac{d}{b}. \quad (3)$$

При увеличении расстояния d в два раза и постоянной величине b ширина интерференционных полос уменьшится в два раза, а размер главного дифракционного максимума не изменится. Следовательно, полное число интерференционных полос увеличится в два раза.

Если ширину b каждой щели уменьшить в два раза, то размер главного дифракционного максимума увеличится в два раза, а ширина интерференционных полос при неизменном расстоянии d останется постоянной. Таким образом, полное число интерференционных полос снова увеличится в два раза.

Ответ: 1) ширина интерференционных полос уменьшится в два раза, размер главного дифракционного максимума не изменится, число наблюдаемых интерференционных полос увеличится в два раза; 2) ширина интерференционных полос не изменится, размер главного дифракционного максимума увеличится в два раза, число наблюдаемых интерференционных полос увеличится в два раза.