Лекции 6-7. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения.

Общий вид *неоднородного линейного дифференциального уравнения*:

$$\boxed{y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ \ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=b(x)}, \tag{1}$$

или, в краткой записи, $L(y)=b(x)$ (здесь правая часть $b(x)$ отлична от тождественного нуля на интервале I).

Для данного неоднородного уравнения (1) уравнение

$$\boxed{y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ \ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0} \tag{2}$$

(с той же левой частью) называется *соответствующим* однородным линейным дифференциальным уравнением.

Свойства множества решений неоднородного линейного дифференциального уравнения (н.л.д.у.):

1) *если* $y_1(x)$ *– какое-нибудь решение н.л.д.у., а* $y_0(x)$ *– какое-нибудь решение соответствующего о.л.д.у., то их сумма* y_1+y_0 *есть решение н.л.д.у.*;

Доказательство: если $y_1(x)$ – решение уравнения (1), а $y_0(x)$ – решение уравнения (2), то $L(y_1)\equiv b(x)$, а $L(y_0)\equiv 0$ на I; поэтому, ввиду линейности оператора L

$$L(y_1+y_0)\equiv L(y_1)+L(y_0)\equiv b(x)+0\equiv b(x),$$

т.е. y_1+y_0 – решение уравнения (1).

2) *если* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *– какие-нибудь два решения н.л.д.у., то их разность* y_1-y_2 *есть решение соответствующего о.л.д.у.*

Доказательство: если $y_1(x)$ – решение уравнения (1), а $y_0(x)$ – решение уравнения (2), то $L(y_1)\equiv b(x)$, а $L(y_0)\equiv 0$ на *I*; поэтому, ввиду линейности оператора *L*

$$L(y_1+y_0)\equiv L(y_1)+L(y_0)\equiv b(x)+0\equiv b(x),$$

т.е. y_1+y_0 – решение уравнения (1). Если же $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – какие-нибудь решения уравнения (1), то

$$L(y_1-y_2)\equiv L(y_1)-L(y_2)\equiv b(x)-b(x)\equiv 0,$$

т.е. y_1-y_2 – решение уравнения (2). ■

Из этих свойств следует

Теорема 1 (о структуре общего решения н.л.д.у.). *Общее решение н.л.д.у. равно сумме любого частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего о.л.д.у.*

Доказательство: Пусть $\tilde{y}$ – любое фиксированное решение уравнения (1), а y_0 – общее решение уравнения (2). Тогда, во-первых, при любых значениях параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$, входящих в y_0, функция $y = \tilde{y} + y_0$ согласно первому свойству будет решением уравнения (1). С другой стороны, пусть y_1 – произвольное частное решение уравнения (1). Согласно второму свойству разность $y_1 - \tilde{y}$ является решением уравнения (2), а значит $y_1 - \tilde{y} = y_0$ или $y_1 = \tilde{y} + y_0$ при некоторых значениях параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$. А это и означает, что функция $y = \tilde{y} + y_0$ является общим решением уравнения (1). ■

Пример. Проверить, что функция $y = 3x - 2$ является решением уравнения $y'' - y' - 2y = 1 - 6x$ и найти общее решение этого уравнения.

◄ Данное уравнение является н.л.д.у. 2-го порядка. Подставляя в него $y = 3x - 2$, $y' = 3$, $y'' = 0$, получаем тождество $1 - 6x = 1 - 6x$. Соответствующее о.л.д.у. имеет вид

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Найдем его общее решение y_0: характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$; его корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$; фундаментальная система решений – $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{2x}$; отсюда $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$. Складывая теперь данное частное решение н.л.д.у. и общее решение о.л.д.у., согласно теореме 1 получаем общее решение данного уравнения

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 3x - 2 .$$ ▶

При решении неоднородных линейных дифференциальных уравнений бывает часто полезна также следующая теорема.

<u>Теорема 2</u> (принцип суперпозиции решений). *Если правая часть н.л.д.у.* $L(y) = b(x)$ *есть сумма двух функций, т.е.*

$$b(x) = b_1(x) + b_2(x),$$

а $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *– какие-нибудь частные решения уравнений* $L(y) = b_1(x)$ *и* $L(y) = b_2(x)$ *соответственно, то* $y_1 + y_2$ *есть решение исходного уравнения.*

Доказательство: Ввиду линейности оператора L

$$L(y_1 + y_2) \equiv L(y_1) + L(y_2) \equiv b_1(x) + b_2(x) \equiv b(x),$$

т.е. $y_1 + y_2$ – решение уравнения $L(y) = b(x)$. ■

Очевидно, теорема остается справедливой и в случае, когда правая часть н.л.д.у. является суммой нескольких функций.

Нахождение частного решения н.л.д.у.

Пусть $n=2$, т.е. н.л.д.у. имеет вид:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

1. *Метод вариации произвольных постоянных*.

Будем искать частное решение $\tilde{y}$ н.л.д.у.

в виде $\tilde{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, где y_1 и y_2 – какая-нибудь фундаментальная система решений соответствующего о.л.д.у.

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \qquad (4)$$

а $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – функции, подлежащие нахождению (этот вид получается, если в выражении общего решения $y = C_1y_1 + C_2y_2$ уравнения (4) произвольные постоянные считать функциями от x – отсюда название метода).

Для того чтобы функция $\tilde{y}$ была решением уравнения (3), достаточно, чтобы функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяли системе из уравнений

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = b(x). \end{cases} \qquad (7)$$

Эта система линейных уравнений относительно C_1' и C_2' имеет единственное решение, поскольку ее определитель является вронскианом фундаментальной системы решений y_1, y_2 и, следовательно, не равен нулю. Решив эту систему, далее путем интегрирования найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}.$$

◄ Найдем сначала общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda_{1,2} = 1$; отсюда

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Частное решение $\tilde{y}$ данного неоднородного уравнения найдем методом вариации произвольных постоянных. Полагаем

$$\tilde{y} = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x.$$

Найдя $y_1' = e^x$ и $y_2' = (1 + x) e^x$, составим систему уравнений (7) относительно C_1' и C_2':

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0, \\ C_1' e^x + C_2' (1 + x) e^x = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}, \end{cases}$$

решив которую, получим $C_1' = -\dfrac{x}{x^2 + 1}$, $C_2' = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. Путем интегрирования этих равенств находим $C_1(x) = -\ln\sqrt{x^2 + 1}$, $C_2(x) = \operatorname{arctg} x$ (для нахождения *частного* решения данного уравнения достаточно найти по одной из первообразных функций C_1' и C_2'). Следовательно,

$$\tilde{y} = -e^x \ln\sqrt{x^2+1} + xe^x \operatorname{arctg} x .$$

Складывая в заключение y_0 и $\tilde{y}$, получаем общее решение данного уравнения

$$y = e^x(C_1 + C_2 x - \ln\sqrt{x^2+1} + x \operatorname{arctg} x) . \blacktriangleright$$

2. *Метод неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения н.л.д.у. с постоянными коэффициентами*

Рассмотрим уравнение 2-го порядка $y'' + py' + qy = b(x)$ с характеристическим уравнением $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ соответствующего о.л.д.у.

Обозначим λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения.

I. Пусть $b(x) = P(x)e^{\alpha x}$, где $P(x)$ – многочлен *n*-й степени.

Тогда возможны следующие частные случаи:

1) $\alpha \neq \lambda_1$ и $\alpha \neq \lambda_2$, т.е. число α не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение следует искать в виде, аналогичном функции $b(x)$, т.е. $\tilde{y} = Q(x)e^{\alpha x}$, где

$$Q(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n \tag{8}$$

– некоторый многочлен той же *n*-й степени, записанный в общем виде, т.е. с неопределенными (буквенными) коэффициентами.

Подставляя $\tilde{y} = Q(x)e^{\alpha x}$ вместе со своими производными в уравнение $y'' + py' + qy = b(x)$ и приравнивая соответствующие коэффициенты, найдем $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Пример: Решить уравнение $y'' + y' - 2y = e^{3x}$

2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\alpha = \lambda_1$ или $\alpha = \lambda_2$, т.е. α – простой (однократный) корень характеристического уравнения. Частное решение следует искать в виде $\tilde{y} = xQ(x)e^{\alpha x}$, где многочлен $Q(x)$ некоторый многочлен той же *n*-й степени, записанный в общем виде.

Пример: Решить уравнение $y'' + y' - 2y = e^{-2x}$

3) $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2$, т.е. α – двукратный корень характеристического уравнения. Частное решение следует искать в виде $\tilde{y} = x^2 Q(x) e^{\alpha x}$, где $Q(x)$ некоторый многочлен той же *n*-й степени, записанный в общем виде.

Пример: Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 5xe^x$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' - 2y = e^x(6x + 2).$$

II. Пусть $b(x) = (P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены.

Возможны следующие два частных случая:

1) Комплексное число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение ищется в виде, аналогичном $b(x)$, т.е. $\tilde{y} = (Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$, где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены одинаковой степени, равной высшей из степеней многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$, записанные в общем виде (т.е. с неопределенными (буквенными) коэффициентами).

2) Число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения. Тогда $\tilde{y} = x(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$.

Пример 4. Найти решение уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 8\sin 2x,$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' + y = 2(\cos x - 5e^{-3x})$.