Лекция 5
Интегральное исчисление функции одной переменной

Отыскание производной функции является одной из основных задач математического анализа, но наряду с этим многие задачи приводят к обратной операции – отысканию функции по ее производной.

Определение. Функция $F(x)$, определенная на некотором промежутке X, называется *первообразной* функции $f(x)$ на этом промежутке, если $\forall x \in X$, выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

***Примеры*:**

1) $f(x) = x^3$; $F(x) = \frac{x^4}{4}$, т. к. $\forall x \in \mathbb{R}$ $F'(x) = x^3$;

2) $f(x) = \frac{1}{x}$; $F(x) = \ln x$ $\forall x \in (0; +\infty)$, т. к. $\forall x \in (0; +\infty)$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $D(y) = (-1; 1)$; $F(x) = \arcsin x$, т. к. $\forall x \in (-1; 1)$ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

но $F(x) = \frac{x^4}{4} + 5$ тоже первообразная функции $f(x) = x^3$, т. к. $\left(\frac{x^4}{4} + 5\right)' = x^3$ и вообще $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

Теорема (об общем виде первообразной).

Пусть $F(x)$ − первообразная функции $f(x)$ на промежутке X, тогда

1) любая функция $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – $const$, тоже первообразная $f(x)$;
2) любая другая первообразная функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на постоянную величину, т.е. $\Phi(x) - F(x) = C, \ \forall x \in X$.

Доказательство. 1) $F(x)$ – первообразная $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$. Тогда

$\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$, т. е. по определению первообразной $\Phi(x)$ тоже первообразная $f(x)$.

2) Дано: $F(x)$, $\Phi(x)$ – первообразные $f(x)$. Докажем, что $\Phi(x) - F(x) = C$.

Обозначим $G(x) = \Phi(x) - F(x)$,

$G'(x) = (\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$,

$G'(x) = 0$, значит по теореме о постоянной функции $G(x) = C$ $(const)$.

Отсюда $\Phi(x) - F(x) = C$. ►

Из этой теоремы следует, что если у функции $f(x)$ есть первообразная $F(x)$, то любая другая первообразная этой функции имеет вид $F(x) + C$, где C – произвольная $const$.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на промежутке I называется *неопределённым интегралом* функции $f(x)$ на I и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функции $f(x)$, а С – произвольная постоянная.

Здесь символ $\int$ называется знаком неопределенного интеграла, $f(x)$ подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

Операция нахождения первообразной данной функции называется *интегрированием*.

Интегрирование – действие, обратное дифференцированию.

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

◄ $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$ ►

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

◄ $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = f(x)dx$ ►

3. $\int dF(x) = F(x) + C.$

◄ $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$ ►

4. $\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

◄ Найдем производные правой и левой частей этого равенства:

$(\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx)' = f(x) \pm g(x).$

$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x).$

Т.к. производные от левой и правой частей равенства равны, значит, интегралы задают множество первообразных одной и той же функции $f(x) \pm g(x)$. ►

5. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx,$ если $A = const \neq 0.$

◄Найдем производные правой и левой частей этого равенства:

$(\int Af(x)dx)' = Af(x)$

$(A\int f(x)dx)' = A(\int f(x)dx)' = Af(x).$

Т.е. интегралы из левой и правой частей равенства выражают одно и то же множество функций – множество первообразных функции $Af(x)$. ►

Свойства 4 и 5 называются *свойствами линейности неопределенного интеграла.*

Зная таблицу производных, можно составить таблицу интегралов.

Таблица основных неопределенных интегралов.

1. $\int 0dx = C.$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ \ n \neq -1.$

(в частности, $\int 1dx = \int dx = x + C,$ $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$).

3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1),$ $\int e^x \, dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg \ x + C.$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg \ x + C.$

9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \ arctg \frac{x}{a} + C, \ (a \neq 0)$

10. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0).$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \ \ (a > 0),$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \quad (a \neq 0).$

Все указанные формулы справедливы в тех промежутках, в которых определены соответствующие функции.