Лабораторная работа №2

ИЗУЧЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Введение

Цель работы: изучение гармонических колебаний на примере пружинного и математического маятников.

Приборы и принадлежности: лабораторные установки пружинного и математического маятников, секундомер.

Колебаниями называют такие движения или изменения состояния физической системы, при которых система неоднократно возвращается в исходное состояние, например, в состояние равновесия.

Колебательные движения широко распространены в природе. Это волнение на море, колебания струн, вибрации фундаментов зданий, колебания маятника часов - примеры можно было бы продолжать до бесконечности. Разнообразные по природе колебания могут иметь общие закономерности, описываться однотипными математическими методами. Такая общность составляет основу для изучения самых различных колебаний, встречающихся в разнообразных физических явлениях и технических устройствах.

Колебательные процессы, с которыми приходится встречаться, подразделяют на периодические и непериодические в зависимости от характера изменения со временем физических величин, характеризующих состояние системы. По причине своего возникновения колебания подразделяют на свободные и вынужденные.

Свободными (собственными) колебаниями называются колебания, которые возникают в системе в результате однократного начального выведения ее из состояния устойчивого равновесия. При свободных колебаниях в системе всегда действуют силы (в общем случае причины), стремящиеся возвратить систему в положение равновесия. **(**В случае колебания груза на пружине возвращающей силой будет сила упругости пружины.)

Если в системе отсутствуют силы трения и любые другие причины, препятствующие свободным колебаниям, то нет потерь механической энергии, и колебания могут происходить сколь угодно долго с постоянной амплитудой. Такие свободные колебания называются незатухающими. Незатухающие колебания представляют идеализированный случай колебаний. Свободные колебания реальных систем всегда затухающие. Затухание колебаний связано, главным образом, с действием в системе сил трения. Незатухающие колебания в реальной системе могут возбуждаться воздействием на нее переменной внешней силы. В этом случае колебания называются вынужденными.

Периодическими называют колебания, при которых значения всех физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. Наименьший такой промежуток времени T**,** по истечении, которого повторяются значения всех величин, характеризующих колебательное движение, называется периодом колебаний. За это время, говорят, совершается одно колебание.

Частотой f периодических колебаний называют число колебаний в единицу времени. Если за время t система совершает N колебаний, то частота колебаний равна: $f = \frac{N}{t}$.

Учитывая, что за время, равное периоду $(t = T)$ совершается одно колебание $(N = 1)$, приходим к связи частоты f с периодом T**:**

$$f = 1/T$$

Частоту измеряют в герцах (Гц). За 1 Гц принимают частоту такого колебательного процесса, при котором за одну секунду совершается одно полное колебание (Гц=1/с).

Частным случаем периодических колебаний являются гармонические колебания, в которых колеблющаяся физическая величина X (например, координата груза на пружине) изменяется со временем по закону косинуса (или синуса):

$$x = A\cos\left(\Omega t + \psi_0\right), \qquad (1)$$

где величина A, равная наибольшему абсолютному значению колеблющейся величины x, называются амплитудой колебаний. Выражение $\psi = \Omega t + \psi_0$ определяет значение x в любой момент времени t и называется фазой колебания. В начальный момент времени $(t=0)$ фаза ψ равна начальной фазе ψ_0.

Величину Ω называют циклической частотой гармонического колебания.
Периодом функции (1), как известно из математики, является

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

- это и будет период колебаний. Для частоты f гармонического колебания имеем:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi}.$$

Заметим, что функция (1) является решением дифференциального уравнения:

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = 0, \qquad (2)$$

где $\ddot{X}$ - вторая производная функции $x(t)$ по времени.

В самом деле :

$$\dot{X} = -\Omega A\sin\left(\Omega t + \psi_0\right);$$

$$\ddot{X} = \left(\dot{X}\right)'_t = -\Omega^2 A\cos\left(\Omega t + \psi_0\right) = -\Omega^2 X$$

и при подстановке $\ddot{X}$ в уравнение (2) оно обращается в верное равенство, что и требовалось доказать.

В математике доказывается, что функция (1) является единственным решением дифференциального уравнения (2). Таким образом, если при колебаниях для колеблющейся физической величины X в любой момент времени имеет место соотношение (2) , то колебания являются гармоническими и происходят с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Значения постоянных A и ψ_0 определяются, как правило, из начальных условий.

В лабораторной работе 2 Вам предстоит экспериментально исследовать свободные колебания пружинного и математического маятников.

Математический маятник. Методика эксперимента

Рассмотрим простой маятник – тяжелый шарик, подвешенный на длинной нити. Если размеры шарика много меньше длины нити l, то этими размерами можно пренебречь и рассматривать шарик как материальную точку. Растяжением нити также можно пренебречь, так как оно очень мало. Можно пренебречь и массой нити по сравнению с массой шарика m. Таким образом, вместо реального маятника - шарика определенного размера на нити, которая, конечно, немного деформируется при движении и имеет массу, мы вправе рассматривать простую модель - материальную точку, подвешенную на нерастяжимой невесомой нити, называемую математическим маятником.

Выведем маятник из положения равновесия и отпустим без толчка. Возникнут колебания, проходящие в некоторой вертикальной плоскости. Траекторией движения шарика будет дуга окружности радиусом l. На шарик при движении будут действовать две силы: сила тяжести mg, направленная вертикально вниз и сила упругости нити $\overline{F}$, направленная вдоль нити (рис.1). Конечно, при движении маятника на него еще действует сила сопротивления воздуха, но мы будем считать её пренебрежимо малой.

Рассмотрим маятник в произвольный момент времени t в процессе колебаний.

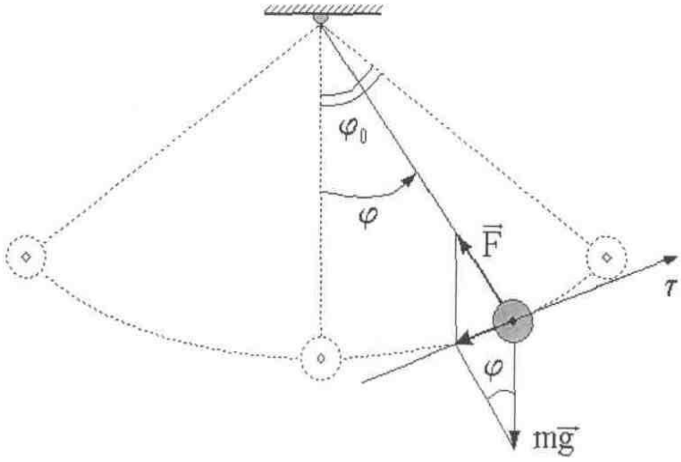

Рис.1

Пусть φ - угол отклонения от вертикали в этот момент. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекции на касательную ось τ, показанную на рис.1

$$ma_\tau = -mg\sin\varphi.$$

Принимая во внимание связь линейного a_τ и углового $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ ускорений

$$a_\tau = \varepsilon l = \ddot{\varphi} l$$

приходим к уравнению

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0, \qquad (3)$$

в котором неизвестная функция $\varphi(t)$ стоит под знаком производной. Такие уравнения в математике называют дифференциальными. Они часто встречаются при решении различных физических задач.

Решение уравнения (3) при произвольном начальном отклонении $0<\varphi_0<\pi/2$ может быть либо найдено только численными методами с применением компьютера, либо записано с помощью специальных функций.

Ограничимся случаем малых колебаний, когда $\varphi_0<<1$.

Как известно из математики, для малых углов φ $(\varphi<0.1\,рад)$ можно воспользоваться соотношением

$$\sin\varphi\approx\varphi \text{ (в радианах).} \qquad (4)$$

Заметим, что соотношение (4) может быть использовано и при углах порядка 30 °

$$\varphi=\frac{\pi}{6}=\frac{3.14}{6}\approx\frac{1}{2}; \qquad \sin\varphi=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

С учетом соотношения (4) уравнение (3) примет вид

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0. \qquad (5)$$

Уравнения, подобные этому, носят названия уравнений гармонического осциллятора. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi=\varphi_0\cos(\Omega t+\alpha),$$

где φ_0 - угловая амплитуда колебаний, α - начальная фаза (в случае, описанном выше $\alpha=0$),

$\Omega=\sqrt{g/l}$ - циклическая частота собственных колебаний.

Для периода колебаний математического маятника имеем

$$T=\frac{2\pi}{\Omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (6)$$

Из полученного нами соотношения (6) вытекает, что период колебаний T при малых колебаниях $(\varphi<<1)$ не зависит от амплитуды φ_0. Это свойство маятника получило название изохронности колебаний.

В ходе эксперимента Вам предстоит определить диапазон изохронности колебаний и экспериментально проверить зависимость периода малых колебаний T от длины маятника l, описываемую теоретически полученным соотношением (6). Соотношение (6) можно преобразовать:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g}. \qquad (7)$$

Для экспериментальной проверки соотношения (7) Вам предстоит измерить периоды малых колебаний маятника при различных значениях длины нити и по результатам измерений построить график зависимости $y = f(x)$, где $y = T^2$, а $x = l$.

Если в пределах точности измерений экспериментальные точки ложатся на прямую, то это может являться экспериментальным подтверждением зависимости (6).

Соотношение (7) может быть использовано для определения ускорения свободного падения. Для этого следует измерить период колебаний маятника T для выбранного значения длины нити l и рассчитать ускорение свободного падения по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

После оценки погрешности полученное значение g сравнивается с известным Вам табличным значением $g = 9.8 м/с^2$.

Математический маятник

1. Докажите, что период колебания не зависит от амплитуды. Для этого измерьте периоды колебаний для двух разных углов $(\varphi << 1)$.

2. Измерьте периоды колебаний для 5 различных значений l,оцените погрешности измерений. Не забудьте, что амплитуда колебаний φ_0 должна быть малой, т.е. находиться в найденном раньше диапазоне изохронности, а длина нити должна быть много больше размеров шарика. Результаты измерений занесите в таблицу 1:

Таблица 1

$X = l$					
$\sigma_x = \sigma_l$					
t					
σ_t					
n					

$T = \frac{t}{n}$					
$\sigma_T = \frac{\sigma_t}{n}$					
$y = T^2$					
σ_y					

Здесь t - время n колебаний, $T = \frac{t}{n}$. Число колебаний выберите таким, чтобы погрешность в определении периода была не более 1% (не менее 20).

3. На миллиметровой бумаге постройте график зависимости $y = f(x)$ и сделайте соответствующие выводы.

4. Экспериментально определите ускорение свободного падения и сравните полученное значение с известным вам табличным значением.