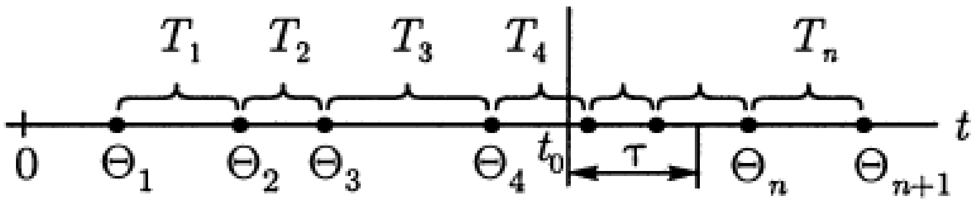
ПОТОКИ СОБЫТИЙ.

Определение. *Потоком событий* называется последовательность *однородных* событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени.

Если интервал между событиями равен константе или определен какой-либо формулой в виде: $t_j = f(t_{j-1})$, то поток называется *детерминированным* (*регулярным при* $t_j = const$), иначе поток называется *случайным*.

Примеры: поток вызовов на телефонной станции; поток забитых шайб при игре в хоккей; поток сбоев ЭВМ; поток заявок на проведение регламентных работ в вычислительном центре и т.п.



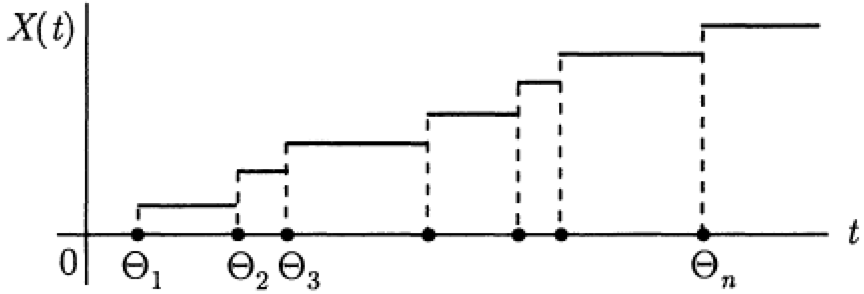
Поток событий (реализация) наглядно изображается рядом точек с абсциссами $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n, \ldots$ с интервалами между ними: $T_1 = \Theta_2 - \Theta_1, T_2 = \Theta_3 - \Theta_2$, $T_n = \Theta_{n+1} - \Theta_n$. При его вероятностном описании поток событий может быть представлен как последовательность случайных величин: $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n, \ldots$.

Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от выбора начала отсчета, т.е., если вероятность попадания того или другого числа событий на любой интервал времени зависит только от длины τ этого интервала и не зависит от того, где именно на оси $0t$ он расположен.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на элементарный интервал времени Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Практически ординарность потока означает, что события в нем появляются «поодиночке», а не группами по два, по три и т.д. (точное совпадение моментов появления двух событий теоретически возможно, но имеет нулевую вероятность).

Ординарный поток событий можно интерпретировать как случайный процесс *X(t)* — число событий, появившихся до момента *t*.



Случайный процесс X(t) скачкообразно возрастает на одну единицу в точках $\Theta_1, \Theta_2,..., \Theta_n,...$.

Поток событий называется потоком *без последствия (без последействия*), если число событий, попадающих на любой интервал времени τ, не зависит от того, сколько событий попало на любой другой не пересекающийся с ним интервал.

Практически отсутствие последствия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга.

Определение. Поток событий называется ***простейшим***, если он стационарен, ординарен и не имеет последействия.
Интервал времени T между двумя соседними событиями простейшего потока имеет показательное распределение

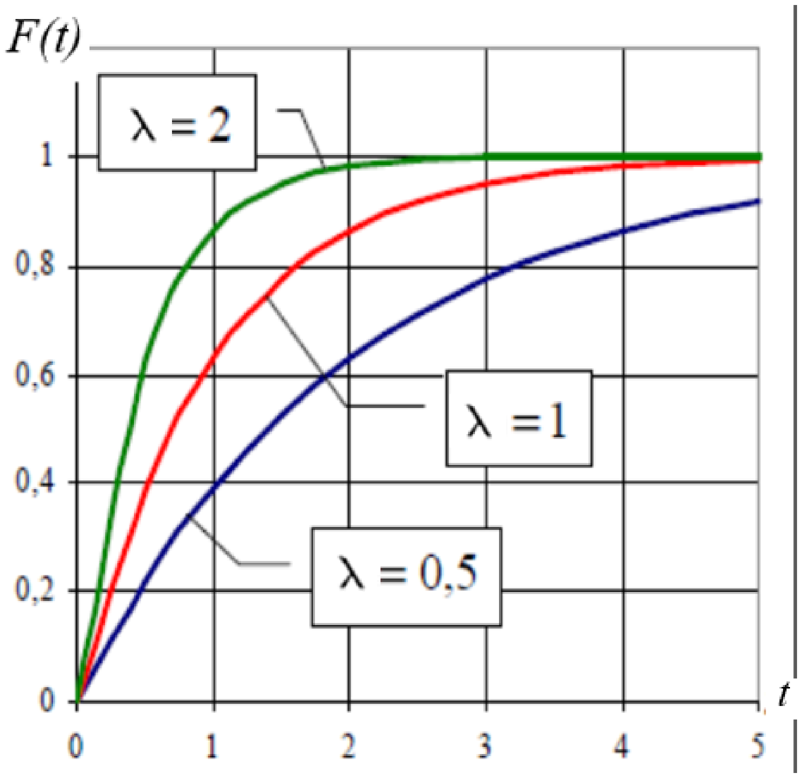
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\text{при} \quad t > 0),$$

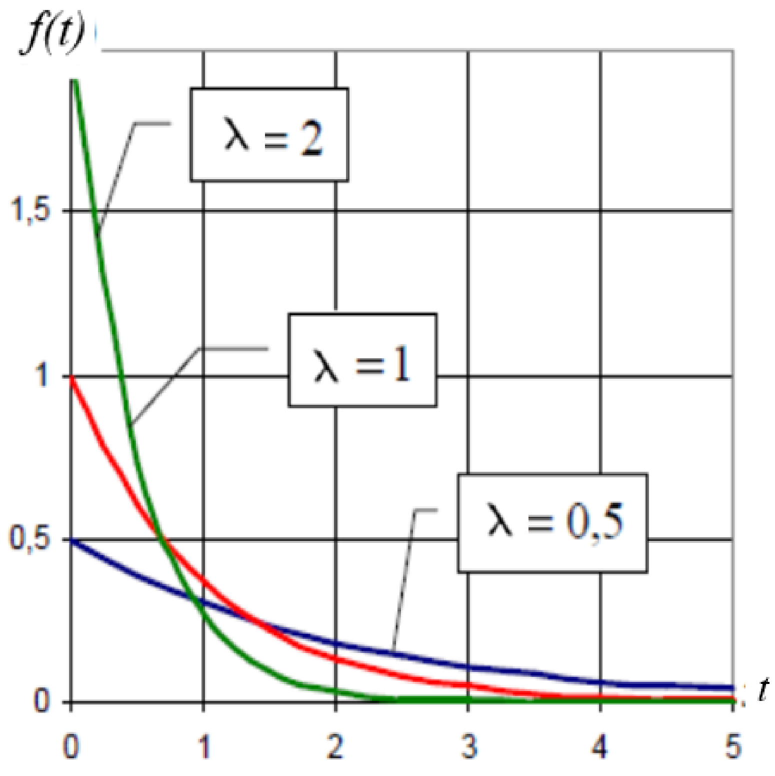
где $\lambda = 1 / M[T]$ — величина, обратная среднему значению интервала T.

Ординарный поток событий без последствия называется ***пуассоновским***. Простейший поток есть частный случай пуассоновского (а именно *стационарный пуассоновский поток*).

Интенсивностью λ потока событий называется среднее число (математическое ожидание числа) событий, приходящееся на единицу времени. Для стационарного потока $\lambda = const$; для нестационарного потока интенсивность в общем случае зависит от времени: $\lambda = \lambda(t)$.
Мгновенная интенсивность потока $\lambda(t)$ определяется как предел отношения среднего числа событий, которые произошли за элементарный интервал времени $(t, t + \Delta t)$, к длине Δt этого интервала, когда она стремится к нулю. Среднее число событий, наступающих на интервале времени τ, следующем непосредственно за моментом t_0, равно

$$a(t_0, \tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)\, dt.$$





$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

$$m_t = \frac{1}{\lambda}; D_t = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Показательное (экспоненциальное) распределение

Замечание. Для простейшего потока число событий, попадающих на любой участок длины τ, распределено по закону Пуассона с параметром $a = \lambda\tau$.

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

Ординарный поток событий называется ***потоком Пальма*** *(или рекуррентным* потоком, или потоком с ограниченным последствием), если интервалы времени T_1, T_2, T_n ... между последовательными событиями представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины.

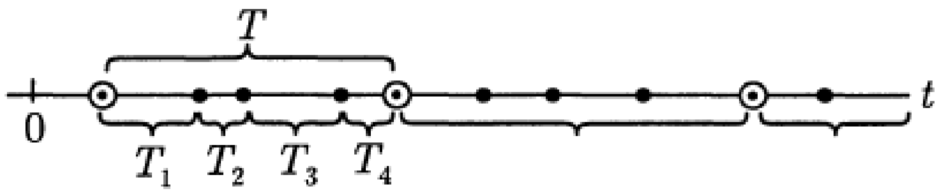
В связи с одинаковостью распределений T_1, T_2, T_n ... поток Пальма всегда стационарен. Простейший поток является частным случаем потока Пальма; в нем интервалы между событиями распределены по показательному закону.

Пример. Некоторые элементы технического устройства (например, электронные элементы оборудования) работают непрерывно до своего отказа, после чего они мгновенно заменяется новыми. Срок работы элемента случаен. Если отдельные элементы выходят из строя независимо друг от друга, то поток отказов или поток восстановлений представляет собой поток Пальма. Если к тому же срок работы элемента распределен по показательному закону, поток Пальма превращается в простейший (стационарный пуассоновский) поток.

Многие потоки событий, встречающиеся на практике, хотя и не являются в точности потоками Пальма, но не могут быть ими приближенно заменены.

Для экспоненциального закона распределения случайных величин, определенных в области положительных значений, коэффициент вариации, описывающий разброс значений случайной величины, равен единице. Если реальные временные интервалы имеют значения коэффициента вариации, отличающиеся от единицы, использование экспоненциального распределения может привести к значительным погрешностям конечных результатов. В этих случаях в качестве аппроксимирующих функций законов распределений могут использоваться мультиэкспоненциальные распределения, представляющие собой композицию экспоненциальных распределений, а именно: распределение Эрланга, когда коэффициент вариации временного интервала меньше единицы, $v<1$, и гиперэкспоненциальное распределение, когда коэффициент вариации временного интервала больше единицы, $v>1$. При этом аппроксимация реального распределения в простейшем случае может выполняться по двум первым моментам распределения – математическому ожиданию и коэффициенту вариации.

Потоком Эрланга k-го порядка называется поток событий, получающийся «прореживанием» простейшего потока, когда сохраняется каждая k-я точка (событие) в потоке, а все промежуточные выбрасываются.
Пример. Получение потока Эрланга 4-го порядка из простейшего потока



Интервал времени между двумя соседними событиями в потоке Эрланга k-го порядка представляет собой сумму k независимых случайных величин T_1, T_2,T_k, имеющих показательное распределение с параметром λ:

$$T = \sum_{i=1}^{k} T_i .$$

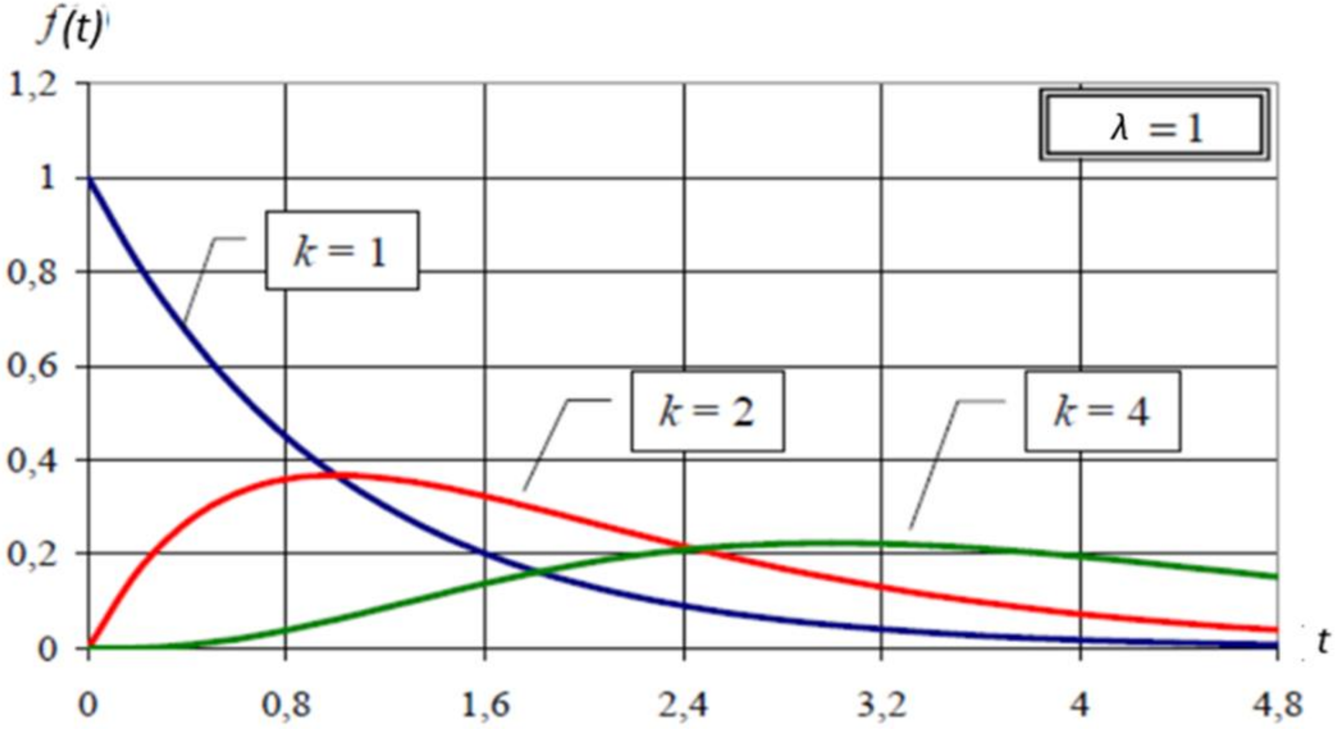
Закон распределения случайной величины T называется ***законом Эрланга k-го порядка*** и имеет плотность

$$f_k(t) = \frac{\lambda\,(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda t} \quad (\text{при } t > 0).$$

Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации T равны:

$$m_t = k / \lambda; \quad D_t = k / \lambda^2; \quad \sigma_t = \sqrt{k} / \lambda; \quad v_t = \sigma_t / m_t = 1 / \sqrt{k};$$

$v_t \to 0$ при $k \to \infty$, т.е. при увеличении порядка потока Эрланга «степень случайности» интервала между событиями стремится к нулю.



Плотность распределения Эрланга k порядка

$$f_k(t) = \frac{\lambda\,(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-\lambda t} \quad (\text{при } t > 0)$$

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

Замечание. Интенсивность потока Эрланга k -го порядка $\Lambda_k = \lambda/k,\ \lambda = k\Lambda_k$. Тогда

$$m_t^{(k)} = \frac{1}{\Lambda_k};\quad D_t^{(k)} = \frac{1}{k\Lambda_k^{\,2}};\quad \sigma_t^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}\,\Lambda_k}.$$

Пример. В результате статистической обработки интервалов времени между событиями в некотором потоке получены следующие характеристики:

• среднее значение интервала времени между событиями в исходном потоке М = 2 мин;

• среднее квадратическое отклонение интервала σ_t = 0,9 мин.

Требуется подобрать поток Эрланга, обладающий приблизительно теми же характеристиками, найти его интенсивность и порядок к.

Решение.

Интенсивность исходного потока Λ есть величина, обратная среднему интервалу времени между событиями:

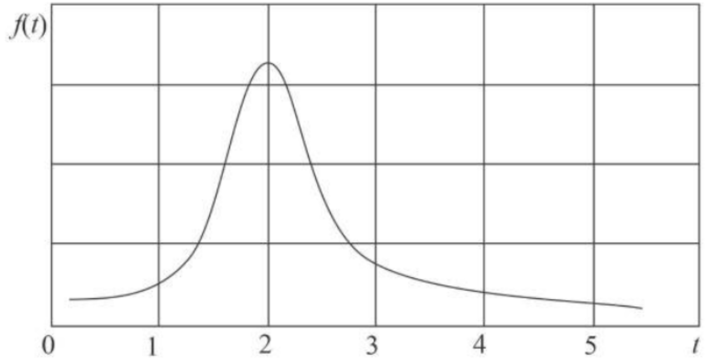
$$\Lambda = 1/M = 0{,}5 \text{ (событий/мин)}.$$

Из формулы $\sigma_t^{(k)} = \dfrac{1}{\sqrt{k}\,\Lambda_k}$ находим порядок k потока Эрланга $k = \left(\dfrac{1}{\sigma_t \Lambda}\right) = \left(\dfrac{1}{0{,}9 \cdot 0{,}5}\right) \approx 4{,}9$.

Выбирая в качестве k ближайшее целое число, получаем k = 5.

Итак, данный в примере реальный поток можно приближенно заменить потоком Эрланга 5-го порядка с законом распределения плотности вероятностей вида

$$f_5(t) = 4{,}1 t^4 e^{-2{,}5t}, (t > 0)$$



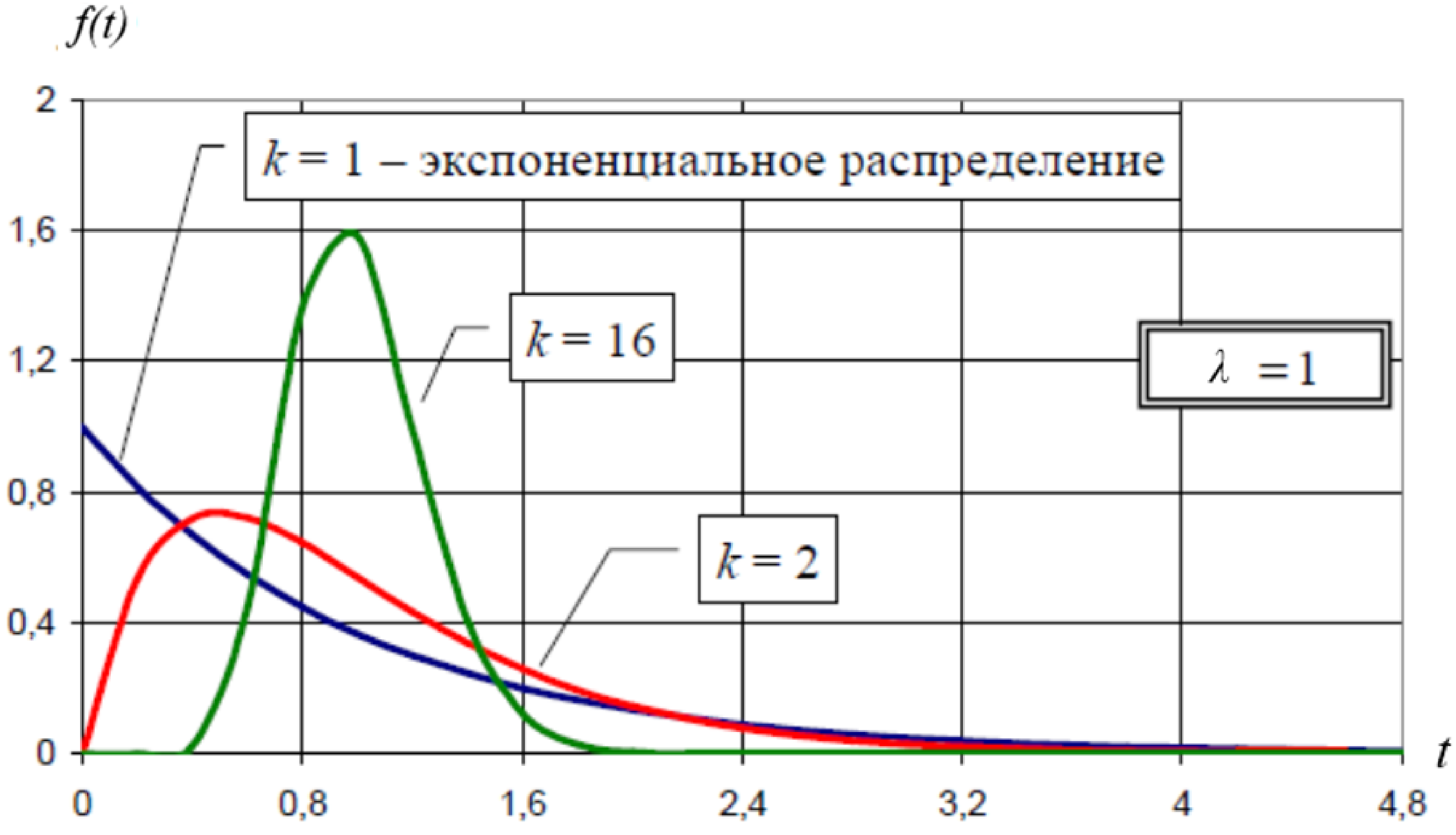
Если одновременно с «прореживанием» простейшего потока изменять масштаб по оси 0t (делением на *k*), получится ***нормированный поток Эрланга k -го порядка***, интенсивность которого не зависит от *k*. Интервал времени $\tilde{T}$ между соседними событиями в нормированном потоке Эрланга *k* -го порядка имеет плотность

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{k\lambda\,(k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-k\lambda t} \quad (\text{при} \quad t > 0).$$

Числовые характеристики случайной величины $\tilde{T} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} T_i$ равны

$$M\,|\tilde{T}| = 1\,/\,\lambda; \quad D\,|\tilde{T}| = 1\,/\,k\lambda^2; \quad \tilde{\sigma}_t = 1\,/\,(\lambda\sqrt{k}); \quad v_t = 1\,/\,\sqrt{k}.$$

При увеличении к нормированный поток Эрланга неограниченно приближается к регулярному потоку с постоянным интервалом *l* = 1 / λ между событиями.



$$\tilde{f}_k(t) = \frac{k\lambda\,(k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-k\lambda t} \quad (\text{при} \quad t > 0).$$

$$F_k(t) = 1 - e^{-k\lambda t}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k\lambda t)^i}{i!}$$

Плотность нормированного распределения Эрланга k порядка

Распределение Эрланга представляет собой серию из k экспоненциальных распределений с параметром λ.
Гипоэкспоненциальное распределение - сумма из k экспоненциальных распределений , каждое из которых имеет собственный параметр $\lambda_i=1/t_i$, где t_i - математическое ожидание интервала времени между событиями в потоке i фазы.

$$T = \sum_{i=1}^{k} T_i .$$

В случае $i= 1,2$ функция и плотность распределения будут иметь вид:

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}$$

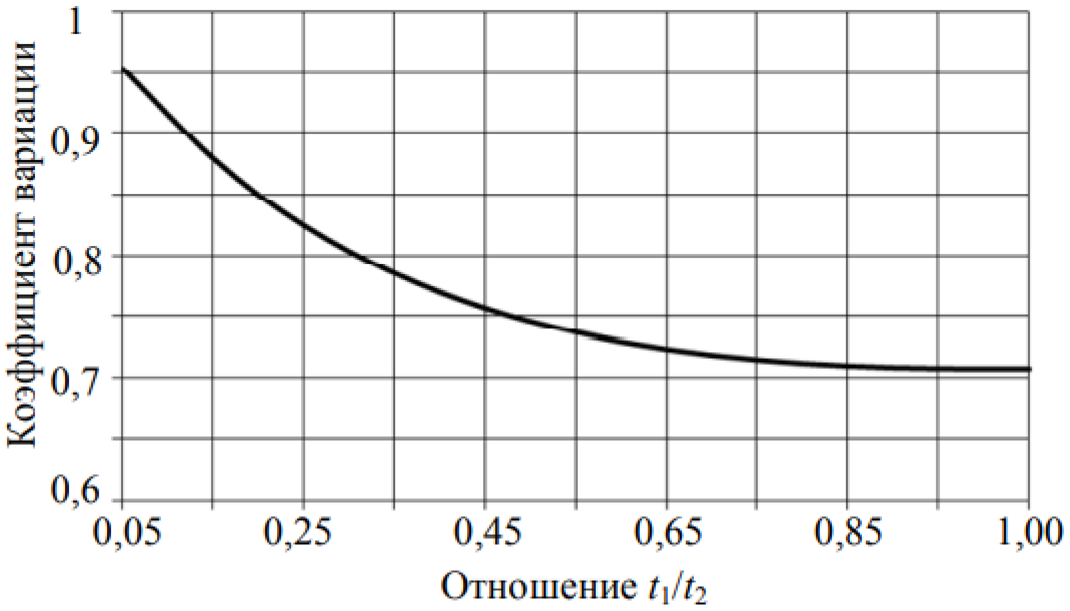
$$f(x) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-t\,\lambda_2} - e^{-t\,\lambda_1})$$

$$MT=t_1+t_2;\ DT=t_1^2+t_2^2;\ v=(t_1^2+t_2^2)^{0.5}/(t_1+t_2)$$

Для увеличения интервала изменения коэффициента вариации гипоэкспоненциального распределения необходимо вместо двухфазного использовать многофазное (k-фазное, k>2) представление. Математическое ожидание и коэффициент вариации гипоэкспоненциального распределения k-го порядка будут равны

$$MT=\sum_{i=1}^{k} t_i; \quad v=\sqrt{\sum_{i=1}^{k} t_i^2} \Big/ \sum_{i=1}^{k} t_i .$$

Коэффициент вариации гипоэкспоненциального распределения k-го порядка лежит в интервале $(1/k^{0,5};1)$



Закон распределения случайной величины T называется ***гиперэкспоненциальным***, если ее плотность имеет вид

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \quad (\text{при } t > 0), \qquad \text{причем} \qquad q_1 + \ldots + q_n = 1.$$

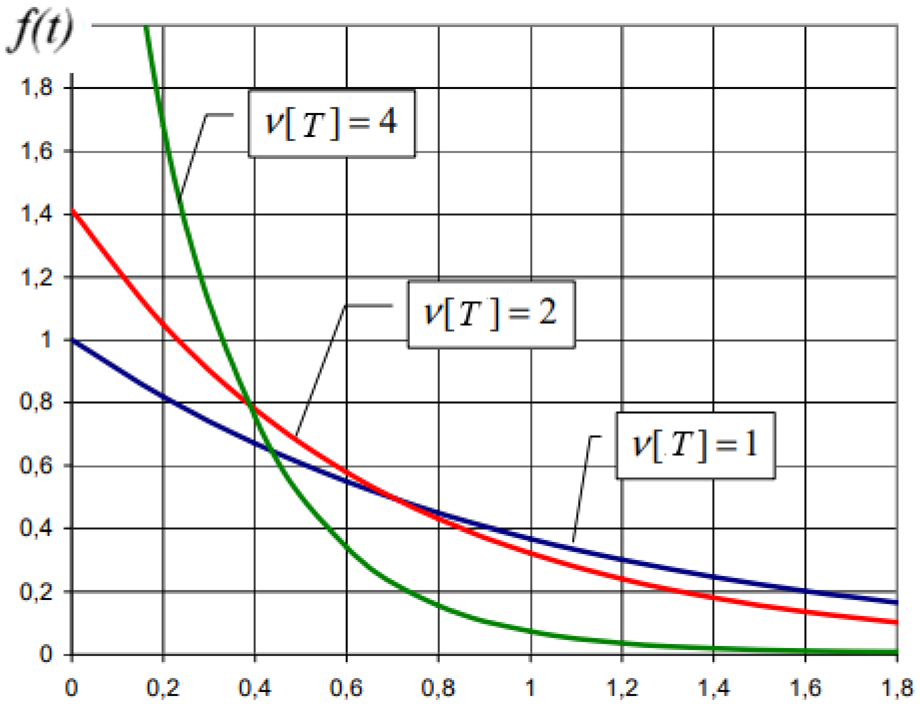
$$F(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n} q_i e^{-\lambda_i t}$$

Гиперэкспоненциальное распределение может использоваться в тех случаях, когда некоторое реальное распределение непрерывной случайной величины, принимающей неотрицательные значения, имеет *коэффициент вариации больше единицы*. Гиперэкспоненциальное распределение содержит (2n-1) параметров.

В простейшем варианте случайные величины с гиперэкспоненциальным распределением могут быть получены с использованием только двух экспоненциальных распределений: n=2. Тогда функция и плотность гиперэкспоненциального распределения будут иметь вид:

$$F(t) = q\,(1 - e^{-\lambda_1 t}) + (1-q)(1 - e^{-\lambda_2 t})$$

$$f(t) = q \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-q)\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$



Пример.

- $\lambda_1 = 0{,}183$; $\lambda_2 = 1{,}506$ для распределения с $\nu[\bar{T}] = 2$
- $\lambda_1 = 0{,}091$; $\lambda_2 = 4{,}022$ для распределения с $\nu[\bar{T}] = 4$

q=0,07; MT=1

Наиболее общим распределением неотрицательных непрерывных случайных величин является ***гиперэрланговское распределение***, которое представляет собой аддитивную смесь нормированных распределений Эрланга и имеет коэффициент вариации в интервале от 0 до ∞ :

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{k_i \lambda_i (k_i \lambda_i t)^{k_i - 1}}{(k_i - 1)!} e^{-k_i \lambda_i t} \qquad (\text{при } t > 0).$$

Вывод. Если реальные временные интервалы имеют значения коэффициента вариации, значительно отличающиеся от единицы, использование экспоненциального распределения может привести к большим погрешностям конечных результатов. В этих случаях в качестве аппроксимирующих функций законов распределений могут использоваться вероятностные законы, представляющие собой композицию экспоненциальных распределений, при этом аппроксимация реального распределения, в простейшем случае, выполняется по двум первым моментам: математическому ожиданию *t* и коэффициенту вариации *v*.

Алгоритм аппроксимации реального потока с помощью гипоэкспоненциального распределения

1. По заданному значению коэффициента вариации v определить минимально необходимое число экспоненциальных фаз k в аппроксимирующем распределении как ближайшее большее целое по отношению к $1/v^2$

$$k \geq \frac{1}{\nu^2};$$

2. Выбрать значение $k_1<k$ и рассчитывается $k_2 = k - k_1$;

3. По формулам

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{t}{k}\left[1+\sqrt{\frac{k_2}{k_1}\left(k\nu^2-1\right)}\right] \\ t_2 &= \frac{t}{k}\left[1-\sqrt{\frac{k_1}{k_2}\left(k\nu^2-1\right)}\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{t}{k}\left[1-\sqrt{\frac{k_2}{k_1}\left(k\nu^2-1\right)}\right] \\ t_2 &= \frac{t}{k}\left[1+\sqrt{\frac{k_1}{k_2}\left(k\nu^2-1\right)}\right] \end{aligned}\right\}.$$

рассчитать значения t_1 и t_2.

4. Вычислить интенсивности образующих простейших потоков.

Пример. Пусть математическое ожидание и коэффициент вариации аппроксимируемого выражения соответственно равны: t= 10 и v = 0,4.

1) минимально необходимое число экспоненциальных фаз в аппроксимирующем распределении:

$$k = 7 \ \left(k \geq \frac{1}{0{,}16} = 6{,}25\right);$$

2) выберем значение $k_1 = 3$, тогда $k_2 = 7 - 3 = 4$ и рассчитаем значения $t_1 = 2$ и $t_2 = 1$.

Таким образом, в качестве аппроксимирующего распределения выбираем семифазное гипоэкспоненциальное распределение, в котором три экспоненциальные фазы имеют математическое ожидание, равное 2, и четыре фазы - математическое ожидание, равное 1.

Алгоритм аппроксимации реального потока с помощью гиперэкспоненциального распределения (n=2).

1. Выбрать $q \le \dfrac{2}{1+\nu^2}$.

2. Вычислить $t_1 = \left[1 + \sqrt{\dfrac{1-q}{2q}(\nu^2 - 1)}\right] t$. $\quad t_2 = \left[1 - \sqrt{\dfrac{q}{2(1-q)}(\nu^2 - 1)}\right] t$.

3. Вычислить интенсивности образующих простейших потоков.