

# Электричество и магнетизм

*Семестр 2*

# ЛЕКЦИЯ № 12

## Система уравнений Максвелла

1. Полная система уравнений Максвелла и их физический смысл.
2. Свойства уравнений Максвелла.
2. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга.

# *Полная система уравнений Максвелла и их физический смысл*

---

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений — *макроскопическую теорию электромагнитного поля.*

Теория Максвелла не только объясняла с единой точки зрения все разрозненные явления электричества и магнетизма, но и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии.

В основе теории - **четыре фундаментальных уравнения.** В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

## Уравнения Максвелла в интегральной форме.

1.  $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$  или  $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$

**Теорема Гаусса** о потоке вектора напряженности электрического поля. Источником электростатического поля являются электрические заряды.

*Поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность в произвольной среде равен заряду, заключенному внутри поверхности.*

Это постулат Максвелла, выражающий закон создания электрических полей действием зарядов в произвольных средах. Постулат записан в общем виде, для заряда, распределенного внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью  $\rho$ .

$$q = \int_V \rho dV$$

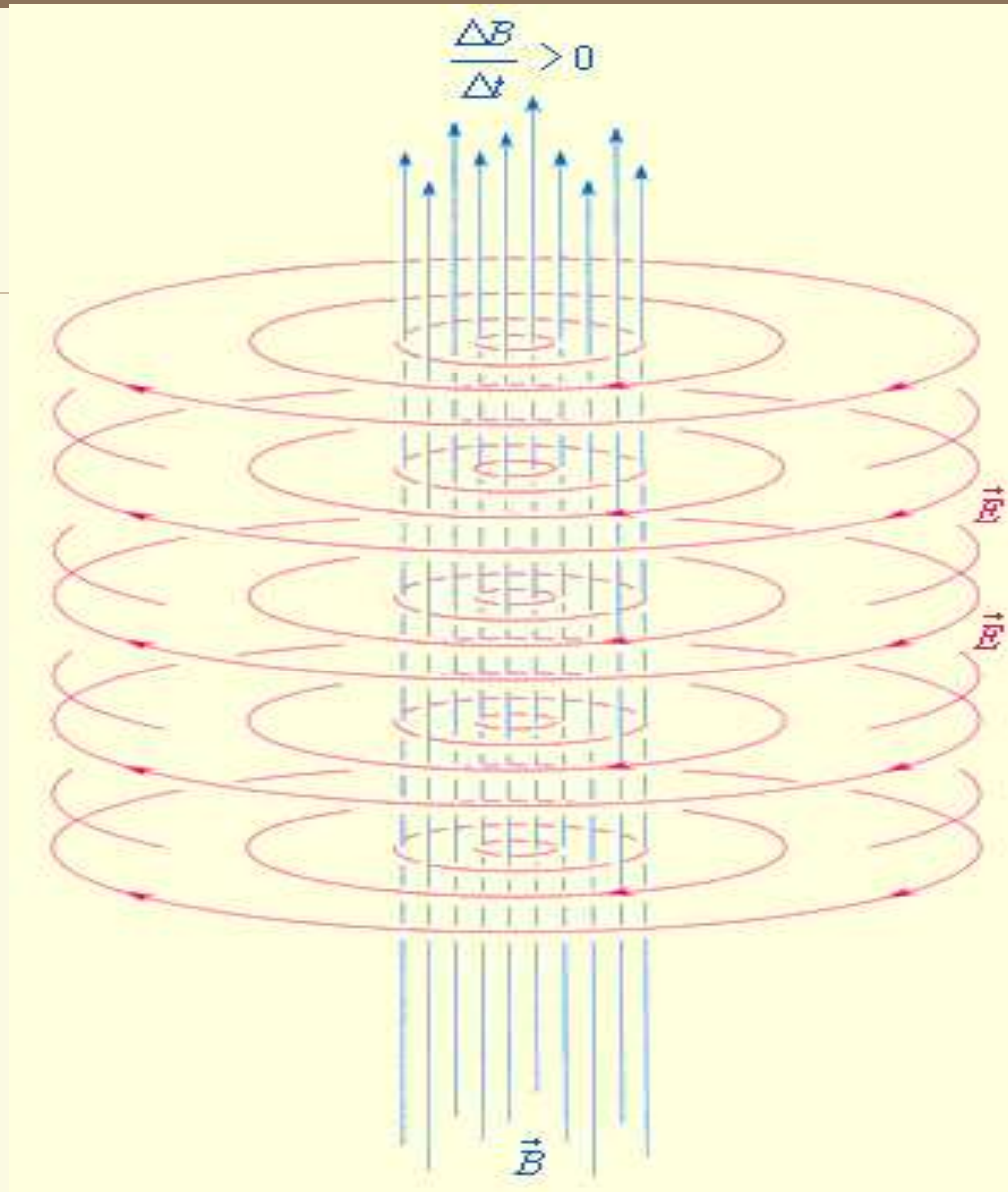
2. Второе уравнение – это по сути, закон Фарадея:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

*Циркуляция вектора  $\vec{E}$  по любому замкнутому контуру равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через произвольную поверхность, ограниченную этим контуром.*

Это уравнение показывает, что источником электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля.

**По существу это уравнение выражает фарадеевский закон электромагнитной индукции в трактовке Максвелла.**



Закон электромагнитной индукции в трактовке Максвелла.



3.  $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$  - теорема Гаусса для магнитного поля.

*Поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.*

Магнитное поле не имеет стоков и истоков, линии поля не имеют ни начала ни конца. Магнитное поле называют *соленоидальным* или *вихревым*.

**Физический смысл этого уравнения:  
в природе не существуют магнитные заряды.**

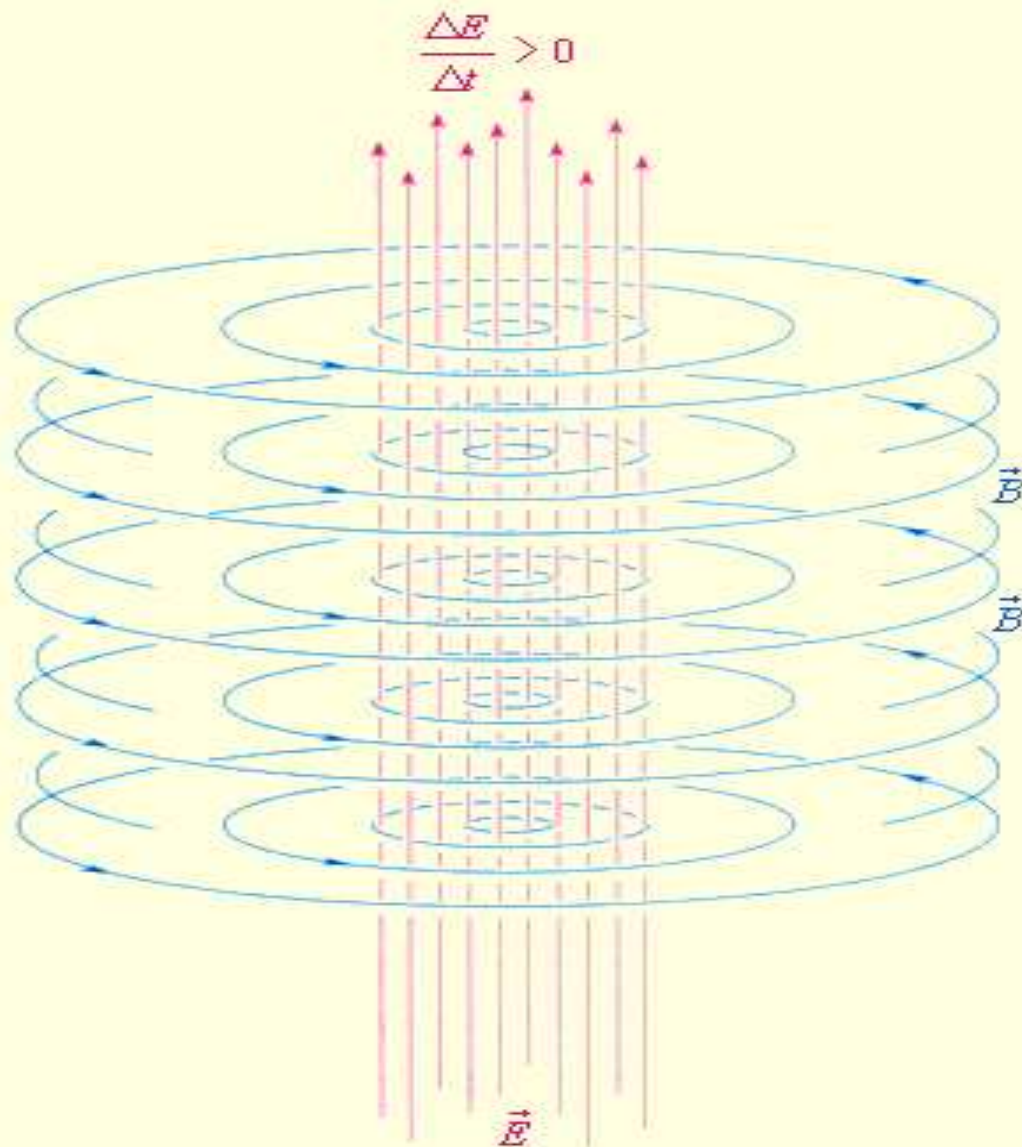
$$4. \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

### Теорема о циркуляции магнитного поля.

*Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по любому замкнутому контуру равна полному току через произвольную поверхность, ограниченную этим контуром.*

Под полным током понимается сумма токов проводимости и смещения. Уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями (токами смещения).





Гипотеза Максвелла. Изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле.

Из уравнений Максвелла следует:

- источниками электрического поля являются электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля.

- источниками магнитного поля являются движущиеся электрические заряды (электрические токи), либо переменные электрические поля.

Уравнения Максвелла не симметричны относительно магнитных и электрических полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

Для *стационарных полей* (  $E = const$  и  $B = const$  ) уравнения Максвелла примут вид:

$$1. \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q \quad 2. \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad 3. \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$4. \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$$

В уравнении 2 подчёркивается потенциальный характер электростатических полей:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Уравнение 4 означает, что источником стационарного магнитного поля являются только токи проводимости:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$$

Получаем, что в основе максвелловской теории классической электродинамики лежат следующие четыре **уравнения Максвелла** в интегральном виде:

---

$$1. \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$$

$$2. \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

$$3. \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$4. \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Величины, входящие в уравнения Максвелла, не являются независимыми. Между ними существуют следующие связи:

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

Здесь:  $\mu$ ,  $\epsilon$  — магнитная и диэлектрическая проницаемость вещества;  $\vec{j}$  — вектор плотности тока проводимости;  $\sigma$  — удельная электропроводность среды.

Последние уравнения называются **материальными**, поскольку величины  $\mu$ ,  $\epsilon$  и  $\sigma$  входят в уравнения Максвелла как материальные константы.

## Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

В электродинамике наряду с интегральными уравнениями Максвелла применяются и уравнения в дифференциальной форме.

Вспомним некоторые сведения из векторного анализа. В лекции 3, определяя связь между напряженностью поля  $\vec{E}$  и потенциалом  $\varphi$ , мы ввели в рассмотрение оператор  $\nabla$  (набла) или оператор градиента (*grad*):

$$\vec{E} = - \text{grad} (\varphi) = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = -\nabla \varphi$$

Рассмотрим подробнее свойства этого оператора.

Оператор набла - это вектор с

компонентами  $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$   $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$



Оператор набла имеет смысл в сочетании со скалярной или векторной величиной, на которую он умножается.

Если умножить этот вектор на скаляр  $\varphi$ , получится вектор, представляющий собой градиент функции  $\varphi$  -  $\text{grad}(\varphi)$

Если вектор  $\nabla$  умножить скалярно на вектор  $\vec{D}$ , получится скаляр, который имеет смысл дивергенции ( $\text{div}$ ) вектора  $\vec{D}$  :

$$(\nabla \cdot \vec{D}) \equiv \nabla \vec{D} = \nabla_x D_x + \nabla_y D_y + \nabla_z D_z = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \text{div } \vec{D}$$

Если умножить вектор  $\nabla$  на вектор  $\vec{E}$  векторно  $[\nabla \times \vec{E}]$ , получится вектор с компонентами  $[\nabla \times \vec{E}]_x, [\nabla \times \vec{E}]_y, [\nabla \times \vec{E}]_z$

Этот вектор называют «ротор вектора  $\vec{E}$ » -  $\text{rot } \vec{E}$

Теоремы векторного анализа, которые позволят осуществить переход от интегральных величин к дифференциальным:

1. Теорема Остроградского – Гаусса. Устанавливает связь между дивергенцией вектора  $\vec{D}$  и потоком этого вектора через замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ :

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV$$

2. Теорема Стокса. Устанавливает связь между ротором вектора  $\vec{E}$  в каждой точке некоторой поверхности  $S$  и циркуляцией этого вектора по контуру  $L$ , ограничивающему  $S$ :

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

## Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

1. 
$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

В соответствии с теоремой  
Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV$$

В итоге можно записать: 
$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV = \int_V \rho dV$$

Из сравнения подынтегральных выражений получим  
окончательно:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$2. \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

В соответствии с теоремой Стокса:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

В итоге можно записать:

$$\int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Из сравнения подынтегральных выражений получим окончательно:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$3. \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

В соответствии с теоремой  
Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dV$$

В итоге можно записать:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dV = 0$$

Окончательно получим:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$4. \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

В соответствии с теоремой Стокса:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

В итоге можно записать:

$$\int_S \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Из сравнения подынтегральных выражений получим окончательно:

$$\text{rot} \vec{H} = \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$



Таким образом, получили полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

---

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

**Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах имеет вид:**

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

- теорема Гаусса

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

- закон Фарадея

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

- отсутствие магнитных зарядов

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

- обобщенный закон Б-С-Л

**Материальные уравнения:**

$$1. \quad \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad 2. \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad 3. \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

## Свойства уравнений Максвелла.

1. Уравнения Максвелла линейны. Свойство линейности уравнений Максвелла непосредственно связано с принципом суперпозиции: если два каких-нибудь поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, то это относится и к сумме этих полей.
2. Уравнения Максвелла содержат уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения электрического заряда.
3. Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета. Уравнения релятивистски инвариантны. Их вид не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, хотя величины в них преобразуются по определенным правилам. Отдельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет относительный смысл.

4. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это обусловлено тем, что в природе существуют электрические заряды, но не обнаружены магнитные.

5. Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов. Изменение состояния этого поля имеет волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами. В вакууме они всегда распространяются со скоростью, равной скорости света. Этот вывод и теоретическое исследование электромагнитных волн привели Максвелла к созданию электромагнитной теории света, в соответствии с которой свет также представляет собой электромагнитные волны.

## *Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга.*

*Объемная плотность энергии  $\omega$  электро-  
магнитного поля:*

$$\omega = \omega_{\text{эл}} + \omega_{\text{маг}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H_0^2}{2}$$

*Полная энергия:  $W = \omega \cdot V$ , где  $V$  – объём.*

*Поток энергии через единичную площадку,  
перпендикулярную направлению  
распространения волны в единицу времени:*

$$P = \omega \cdot v = EH, \text{ где } v \text{ – скорость.}$$

*Вектор плотности потока  
электромагнитной энергии  
называется вектором Умова –  
Пойнтинга или чаще вектором  
Пойнтинга:*

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]$$

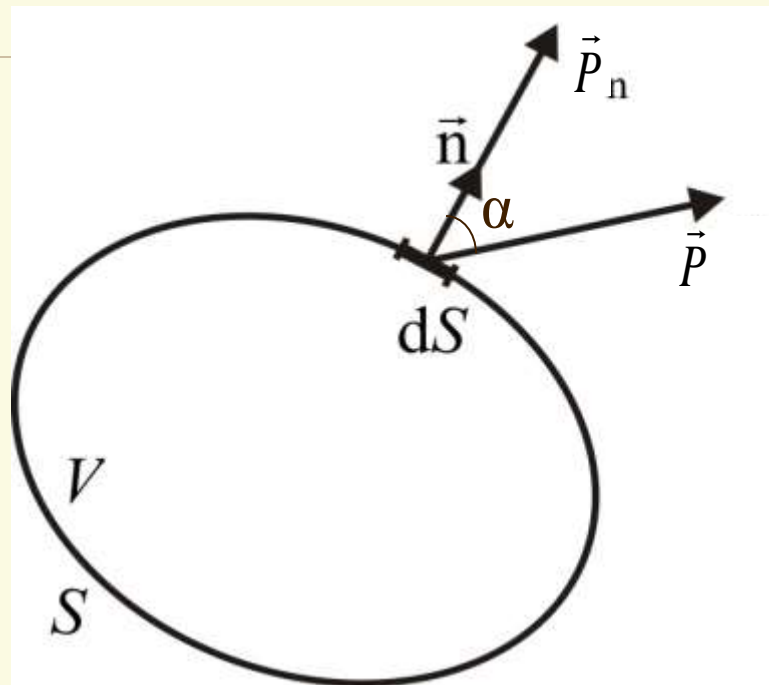


Поток энергии через площадку  $dS$ :

$$d\Phi = P_n \cdot dS, \text{ где } P_n = P \cdot \cos \alpha$$

### Теорема Умова - Пойнтинга:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S P_n dS$$



- уменьшение полной энергии внутри объема  $V$  за единицу времени должно быть равно энергии, выходящей через поверхность  $S$  за единицу времени наружу – **закон сохранения э/м энергии.**



Лекция закончена!