Лекции 15-16

Применение дифференциального исчисления.

Теоремы о дифференцируемых функциях

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. Точка x_0 называется *точкой минимума (максимума)* функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, для каждой точки $x \neq x_0$ которой выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$

($f(x) < f(x_0)$).

Точки максимума и минимума функции называются ее *точками экстремума*. Значение функции в точке минимума (максимума) называется *минимумом (максимумом)* этой функции. Минимумы и максимумы функции называются ее *экстремумами*.

Теорема (Ферма). Пусть функция $y = f(x)$ *определена на* (a,b) *Предположим, что функция* $y = f(x)$ *имеет локальный экстремум в точке* x_0

интервала (a,b). *Тогда, если в точке* x_0 *существует производная, то она равна нулю, т.е.* $f'(x_0)=0$.

◄Доказательство. Пусть в точке x_0 достигается локальный максимум. Тогда $f(x)-f(x_0)<0\ \forall x$ из окрестности x_0.

Пусть $x>x_0 \Rightarrow x-x_0>0,$ тогда $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0 \Rightarrow f'_{пр}(x_0)\le 0.$

Пусть $x<x_0 \Rightarrow x-x_0<0,$ тогда $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0 \Rightarrow f'_{л}(x_0)\ge 0.$

Поскольку $f'(x_0)=f'_{пр}(x_0)=f'_{л}(x_0)$, то $f'(x_0)=0.$►

Геометрический смысл теоремы Ферма

Если функция $y=f(x)$ на интервале (a,b) имеет локальный экстремум, то касательная, проведенная к графику функции в этой точке, параллельна оси *Ох*.

Следствие (необходимое условие экстремума). *Если* x_0 *– точка экстремума функции* $y=f(x)$, *то* $f'(x_0)=0$ *или* $f'(x_0)$ *не существует.*

Определение. Внутренние точки области определения функции $y = f(x)$, в которых $f'(x_0) = 0$ называются *стационарными точками* этой функции.

Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пример. $y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Но $x = 0$ не является точкой экстремума.

Определение. Внутренние точки области определения функции $y = f(x)$, в которых $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, называются *критическими точками* этой функции.

Пример. $y = |x|, x \in (-1,1)$. Точка $x_0 = 0$ является критической, $f'(0)$ не существует.

Таким образом, каждая точка экстремума является критической.

Теорема (теорема Ролля). *Пусть на отрезке* $[a,b]$ *определена функция* $f(x)$, *причем:*

1. $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$;
2. $f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a,b);
3. $f(a)=f(b)$.

Тогда существует точка $c\in(a,b)$, *в которой* $f'(c)=0$.

◄Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по второй теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ имеет на $[a,b]$ наименьшее и наибольшее значение: $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Если $M=m$, то $f(x)=\text{const}$ и $f'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b)$. Пусть $M>m$. Тогда, по крайней мере одно из чисел M или m отлично от числа $f(a)=f(b)$. Допустим, что $M\neq f(a)$. Тогда наибольшее значение M достигается в некоторой точке $c\in(a,b)$. Значит, c – точка локального максимума. По теореме Ферма $f'(c)=0$. Случай $m\neq f(a)$ рассматривается аналогично.►

Теорема неверна, если нарушено условие дифференцируемости.

Геометрический смысл теоремы Ролля

Геометрически теорема Ролля означает, что у графика непрерывной на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемой внутри этого отрезка функции, принимающей на его концах равные значения $f(a)=f(b)$, существует точка $(c; f(c))$, в которой касательная параллельна оси Ox.

Теорема (теорема Лагранжа).

Пусть на отрезке $[a,b]$ *определена функция* $f(x)$, *причем:*

1. $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$;
2. $f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a,b).

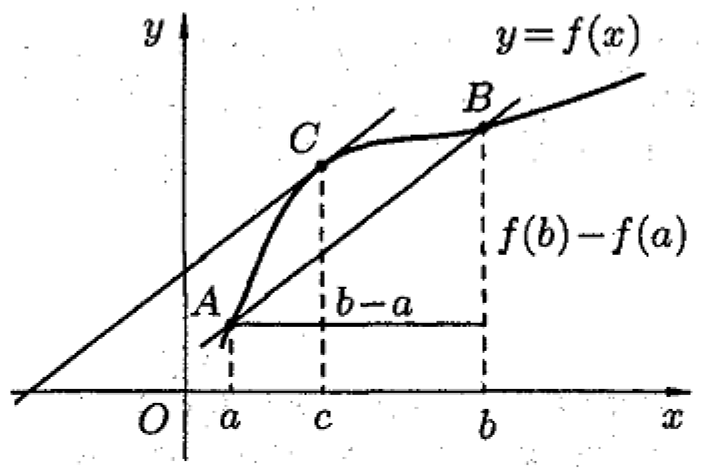
Тогда существует точка $c \in (a,b)$ *такая, что справедлива формула*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

(формула Лагранжа или формула конечных приращений).

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Величина $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ является угловым коэффициентом секущей, проходящей через точки A (*a; f(a)*) и B (*b; f (b)*) графика функции $f(x)$, а $f'(c)$— угловой коэффициент касательной к графику в точке (*c; f (c)*). Из теоремы Лагранжа следует, что существует точка "c" такая, что касательная к графику в точке C (*c; f(c)*) параллельна секущей AB. Таких точек может быть и несколько, но, по крайней мере, одна всегда существует.



Теорема (теорема Коши). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируемы на интервале* (a,b). *Пусть, кроме того,* $g'(x)\neq 0$. *Тогда существует точка* $c\in(a,b)$ *такая, что справедлива формула*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(формула Коши или обобщенная формула конечных приращений).

Замечание. Отметим, что $g(b)\neq g(a)$, так как в противном случае по теореме Ролля нашлась бы точка x_0, в которой $g'(x_0)=0$, что противоречит условию теоремы.

◀Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x)=\left[f(b)-f(a)\right]g(x)-\left[g(b)-g(a)\right]f(x).$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Легко проверить, что $F(a)=F(b)$. Следовательно, по теореме Ролля найдется точка $c\in(a,b)$ такая, что $F'(c)=0$. Очевидно,

$$F'(x)=\left[f(b)-f(a)\right]g'(x)-\left[g(b)-g(a)\right]f'(x),$$

$$F'(c)=\left[f(b)-f(a)\right]g'(c)-\left[g(b)-g(a)\right]f'(c)=0.$$

Следовательно, $\left[f(b)-f(a)\right]g'(c)=\left[g(b)-g(a)\right]f'(c)$, или

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.\blacktriangleright$$

◀Доказательство теоремы Лагранжа. Положим $g(x)=x$ в теореме Коши. Тогда

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{1},$$

т.е. $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.▶