ИЗМЕРЕНИЯ. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ

Измерения. Прямые и косвенные измерения

В основе точных естественных наук, к числу которых относится и физика, лежат измерения. Измерения - это процедура, которая ставит в соответствие физической величине некоторое число. Мы говорим, что физическая величина **А** измерена, если известно сколько раз в **А** содержится некоторая единица **а**. Это и есть числовое значение а величины **А**. Само по себе число **а** не несет никакой информации. Указывая число **а**, необходимо указать и единицу измерения **а**. Тогда можно записать $\mathbf{A}=\alpha\,\mathbf{a}$. Например, если масса m тела в пять раз больше 1кг, значит $m = 5$ ***кг.***

Полученные в результате измерений значения различных величин могут зависеть друг от друга. Физика устанавливает связь между такими величинами и выражает ее в виде формул, которые показывают, как числовые значения одних величин могут быть найдены по числовым значениям других.

Измерения делятся на прямые и косвенные. Прямые измерения проводят с помощью приборов, которые измеряют саму исследуемую величину. Так, массу тел можно найти с помощью весов, длину измерить линейкой, а время - секундомером. Те же величины в других случаях могут быть найдены только с помощью косвенных измерений - пересчетом других величин, значения которых получены в результате прямых измерений. Так находят массу Земли, расстояние от Земли до Солнца, продолжительность геологических периодов. Измерение плотности тел по их массе и объему, скорости поезда - по величине пути, пройденного за известное время, также принадлежат к косвенным измерениям.

Получение надежных числовых значений физических величин отнюдь не является простой задачей из-за многочисленных погрешностей, неизбежно возникающих при измерениях. Ниже мы отметим эти погрешности и приведем формулы для их оценки, а также обратим внимание на запись окончательного результата измерений.

Случайные и систематические погрешности. Обработка результатов прямых измерений. Запись окончательного результата

Говоря о погрешностях измерений, следует, прежде всего, упомянуть о грубых погрешностях (промах), возникающих вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры. Такие погрешности происходят, если, например, экспериментатор неправильно прочтет номер деления на шкале, если в электрической цепи произойдет замыкание и вследствие других подобных причин. Грубых погрешностей следует избегать. Если установлено, что они имеют место, соответствующие измерения нужно отбрасывать.

Не связанные с вышеупомянутыми погрешности эксперимента делятся на случайные и систематические. Многократно повторяя одни и те же измерения, можно заметить, что довольно часто их результаты не в точности равны друг другу, а "пляшут" вокруг некоторого среднего. В подобных случаях мы имеем дело со случайными погрешностями.

Случайные погрешности могут быть связаны с сухим трением (из-за которого стрелка прибора вместо того, чтобы останавливаться в правильном положении, "застревает" вблизи него), с люфтами в механических приспособлениях, с тряской, которую в городских условиях трудно исключить, с несовершенством объекта измерений (например, при измерении диаметра проволочки, которая из-за случайных причин, возникающих при ее изготовлении, имеет не вполне круглое сечение). Рассмотрим последний случай.

Пусть измерения диаметра проволочки в различных ее местах, полученные при помощи микрометра, имеют следующие результаты:

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7
диаметр (мм)	0,36	0,36	0,35	0,34	0,36	0,34	0,35

Вместо одного нужного нам результата мы получили семь. Что делать с полученными цифрами? Как оценить погрешности?

В качестве наилучшего значения для измеренной физической величины **X** обычно принимают среднее арифметическое из всех полученных результатов

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \ . \qquad (1)$$

В нашем случае получим

$$\overline{d} = \frac{1}{7}(0.35 + 0.36 + 0.35 + 0.34 + 0.36 + 0.3 + 0.35) = 0.35\textit{мм}\,.$$

Этому результату следует приписать случайную погрешность, определяемую формулой

$$\sigma_{x_{сл}} = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \ . \qquad (2)$$

В нашем случае

$$\sigma_{d_{сл}} = \frac{1}{7}\sqrt{(0.36-0.35)^2\cdot 3 + (0.34-0.35)^2\cdot 2 + (0.35-0.35)^2\cdot 2} = 0.0029мм.$$

Отсутствие случайной погрешности отнюдь не означает, что измерение проведено абсолютно точно, так как на ряду со случайными погрешностями имеют место систематические.

Систематические погрешности могут быть связаны с несовершенством методики эксперимента (например, пренебрегая силами трения при колебании маятника, мы уже допускаем неточность), с ошибками приборов (неправильная шкала, неравномерно растягивающаяся пружина, неравномерный шаг микрометрического винта и т.д.).
Систематические погрешности сохраняют свои значения во время эксперимента.

Оценку систематической погрешности $\sigma_{x_{сист}}$ экспериментатор проводит, анализируя особенности методики эксперимента, паспортную точность приборов и делая контрольные опыты.

В дальнейшем в качестве систематической погрешности $\sigma_{x_{сист}}$ мы будем брать приборную погрешность, которая, как правило, равна половине цены деления шкалы измерительного прибора.
В рассматриваемом примере с проволочкой цена деления шкалы микрометра Δ = 0.01*мм.* Следовательно,

$$\sigma_{x_{сист}} = \frac{\Delta}{2} = 0.005мм.$$

Полная погрешность определения физической величины σ_x находится через случайную $\sigma_{x_{сл}}$ и систематическую $\sigma_{x_{сист}}$ погрешности по формуле

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_{x_{сл}}{}^2 + \sigma_{сист}{}^2} \ .$$

В нашем случае имеем:

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_{d_{сл}}{}^2 + \sigma_{d_{сист}}{}^2} = \sqrt{(0.0024)^2 + (0.005)^2} = 0.0058мм$$

Как записать теперь окончательный результат измерений?

Пусть в результате расчетов по формулам (1), (2) и (3) для $\overline{X}$ и σ_x получены следующие значения:

$$\overline{X} = 1.992205 \text{ (ед. измерения)}$$

$$\sigma_x = 0.003691 \text{ (ед. измерения)}$$

Окончательный результат измерения физической величины X записывается в виде

$$X = \overline{X} + \sigma_x . \qquad (4)$$

Имейте в виду, что прежде чем подставлять в формулу (4) численные значения $\overline{X}$ и σ_x**,** необходимо провести округления.

Значение погрешности σ_x округляются до двух значащих цифр, если первая из них является единицей, и до одной значащей цифры во всех остальных случаях. С учетом этого σ_x =0,004 (ед. измерения). Анализируя значение погрешности, можно сделать вывод, что значение должно быть округлено до третьей цифры после запятой, т.е.

$$\overline{X} = 1.992 \text{ (ед. измерений).}$$

Таким образом, окончательным результатом измерения является:

$$X = 1.992 \pm 0.004 \text{ (ед. измерений).}$$

В рассматриваемом примере с изменением диаметра проволочки можно записать

$$d = (0.350 \pm 0.006) \text{ мм.}$$

Обработка результатов косвенных измерений

Пусть интересующая нас физическая величина ***X*** связана с величинами ***a*** и ***b*** некоторым физическим соотношением

$$X = f(a, b),$$

причем величины ***a*** и ***b*** определены в результате прямых измерений, т.е. нам известны $\overline{a}, \overline{b}, \sigma_a, \sigma_b$.

Результат косвенного измерения величины ***X*** записывается в виде

$$X = \overline{X} \pm \sigma_x ,$$

где в качестве наилучшего значения для ***X*** принимается

$$\overline{X} = f\left(\overline{a,b}\right), \qquad (5)$$

а погрешность σ_x рассчитывается через погрешности σ_a и σ_b по формуле

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2}, \qquad (6)$$

где $\frac{\partial f}{\partial a}$ и $\frac{\partial f}{\partial b}$ - частные производные функции ***f*** по переменным ***a*** и ***b***.

Применение формулы (6) для конкретных функций $f(a,b)$ приводит к следующим формулам для оценки погрешностей:

$$X = a \pm b : \qquad \sigma_x = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}\ ;$$

$$X = \frac{a}{b} : \qquad \frac{\sigma_x}{\overline{X}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{\overline{a}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{\overline{b}}\right)^2}\ ;$$

$$X = a^n b^m : \qquad \frac{\sigma_x}{\overline{X}} = \sqrt{n^2\left(\frac{\sigma_a}{\overline{a}}\right)^2 + m^2\left(\frac{\sigma_b}{\overline{b}}\right)^2}\ ; \qquad (7)$$

Рассмотрим следующий пример. Предположим, что Вы хотите определить ускорение свободного падения ***g***. Пренебрегая сопротивлением воздуха для свободно падающего стального шарика, можно записать:

$$h = \frac{gt^2}{2},$$

где ***t***- время падения, а ***h***- высота, с которой падает шарик. Таким образом, измеряя высоту ***h*** и время падения ***t,*** можно рассчитать ускорение свободного ***g*** падения по формуле

$$g = \frac{2h}{t^2}.$$

Вы пять раз сбрасываете шарик с одной и той же высоты и измеряете время ***t***. Пусть результаты измерений времени следующие:

$t_1 = 2.0\,c;$ $t_2 = 1.9\,c;$ $t_3 = 2.1\,c;$ $t_4 = 2.1\,c;$ $t_5 = 1.9\,c.$

Измерение времени проводится секундомером, цена деления шкалы которого

$$\Delta = 0.1\,c.$$

Измеряя высоту ***h***, получили $h = (20.0 \pm 0.1)$ м.

Обработаем результаты измерений в соответствии с формулами (1),(2),(3),(5),(7) и определим ускорение свободного падения:

$$\bar{t} = \frac{1}{5}\left(2.0+1.9+2.1+2.1+1.9\right) = 2.0c$$

$$\sigma_{t_{сист}} = \frac{1}{5}\sqrt{(2.0-2.0)^2+(1.9-2.0)^2+K+(1.9+2.0)^2} = 0.04c$$

$$\sigma_{t_{сист}} = \frac{\Delta}{2} = 0.05c$$

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma^2_{t_{сл}} + \sigma^2_{t_{сист}}} = 0.06c$$

$$\bar{h} = 20.0м \qquad \sigma_h = 0.1м$$

$$\bar{g} = \frac{2\bar{h}}{\bar{t}^2} = 10.0м/c^2$$

$$\frac{\sigma_g}{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_t}{\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{\bar{h}}\right)^2} = \sqrt{4\left(\frac{0.06}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.1}{20}\right)^2} \approx 0.06$$

$$\sigma_g = \bar{g}\cdot 0.06 \approx 0.6м/c^2$$

Таким образом, в рассмотренном эксперименте результатом измерения свободного падения является $g = (10.0 \pm 0.6)\, м/с^2$.

Изображение экспериментальных результатов на графиках. Использование графиков для обработки результатов измерений

Для наглядного представления полученных результатов измерений, сравнения экспериментальных данных с теоретической зависимостью, а также с целью быстрого и простого определения некоторых величин, используют графики.

При построении графической зависимости $y = f(x)$ каждая экспериментальная точка (x_i, y_i) обозначается крестом. Полуразмер креста по горизонтали должен быть равен погрешности σ_x, а его вертикальный полуразмер - погрешности σ_y (рис.1).

Для графиков следует использовать миллиметровую бумагу. При построении графиков следует разумно выбирать масштабы, чтобы измеренные точки располагались по всей площади листа.

По осям графика удобно откладывать такие величины, чтобы теоретически ожидаемая зависимость являлась достаточно простой, например, описывалась бы прямой линией. Поясним сказанное на следующем примере. Допустим, что

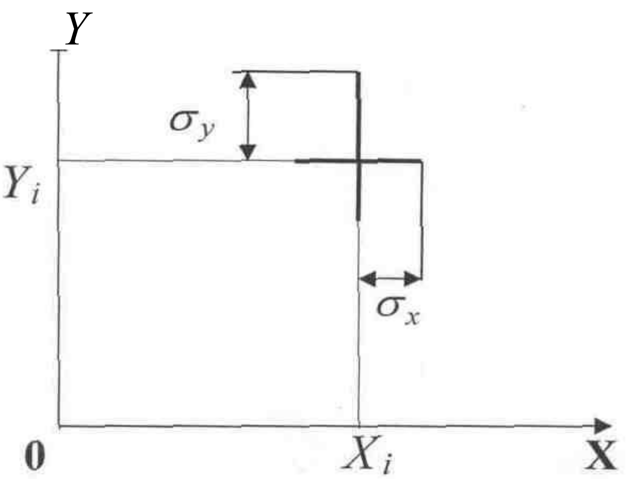


Рис.1.

изучается движение тела с постоянным ускорением $\bar{a}$. Измеряя в различные моменты времени t величину перемещения тела S, мы хотим определить величину a ускорения. Если начальная скорость движения тела равна нулю, то зависимость перемещения S от времени t записывают по формуле

$$S = \frac{at^2}{2}.$$

Экспериментальные результаты (t_i, S_i) удобно представить графически в виде зависимости $y = f(x)$, где $x = t^2/2$, а $y = S$. Соответствующий график представляет собой прямую $y = ax$, проходящую через начало координат (рис.2). По наклону графика можно найти ускорение

$$a = \frac{y_0}{x_0}$$

где x_0 и y_0 координаты точки на прямой, проведенной наилучшим образом через экспериментально полученные точки (x_i, y_i).

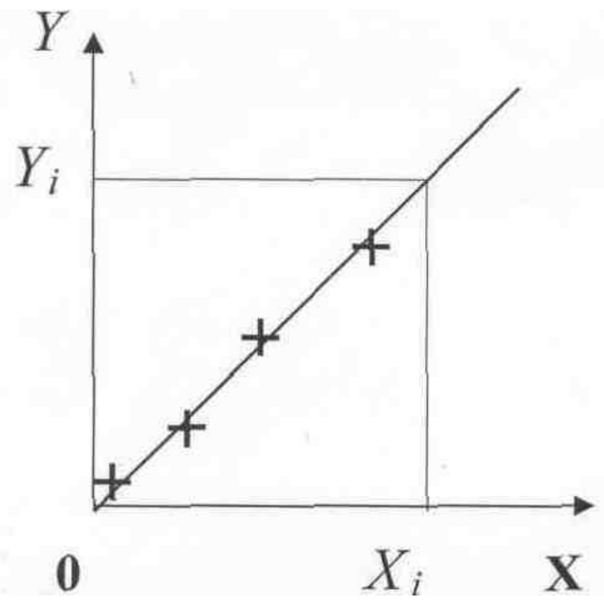


Рис.2

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИЗМЕРЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ РАЗМЕРОВ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ.

Цель работы: определение погрешностей при измерениях физических величин; обработка результатов измерений.

Измерение линейных размеров штангенциркулем и микрометром.

Приборы и принадлежности: штангенциркуль, микрометр, измеряемый объект.

Введение.

Одним из приборов, предназначенных для точного измерения линейных размеров является штангенциркуль. Большая точность при измерениях штангенциркулем достигается при помощи нониуса.

Линейный нониус представляет собой небольшую линейку, скользящую вдоль масштаба (рис.1).

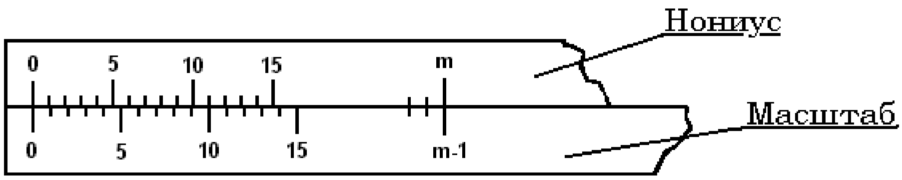


Рис.1

На нониусе нанесена маленькая шкала из m делений (например m=10).
Деление нониуса m совпадает с (m-1) делением основного масштаба, т.е.

$$mX=(m-1)Y \qquad (1)$$

где X-цена деления нониуса (длина одного деления нониуса), Y-цена деления масштаба.

На основании (1) имеем:

$$X=Y-Y/m \qquad (2)$$

Разность $\Delta X=Y-X$ называется точностью нониуса и равна:

$$\Delta X=Y/m. \qquad (3)$$

Рассмотрим процесс измерения при помощи линейного нониуса.

Пусть L-измеряемый отрезок (рис.2). Совместим его начало с нулевым делением масштаба. Пусть при этом его конец окажется между k и (k+1) делениями масштаба.

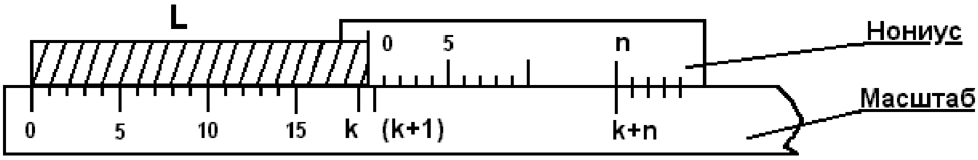


Рис.2

Тогда можно написать:

$$L=kY+\Delta L.$$

Где ΔL пока неизвестная доля k-го деления масштаба.
Теперь расположим нониус так, чтобы его начало (деление 0) совпало с концом измеряемого отрезка L.

Так если деления нониуса не равны делениям масштаба, то обязательно на нониусе найдется такое деление, которое совпадет с (k+n)-ым делением масштаба. В соответствии с рис.2 найдем:

$$\Delta L=nY\text{-}nX=n(Y\text{-}X)=n\Delta X$$

и соответственно $L=kY+n\Delta X$ или согласно (3):

$$L=kY+n(Y/m) \qquad (4)$$

Полученный результат можно сформулировать так:
Длина отрезка, измеряемого при помощи нониуса, равна числу целых делений масштаба плюс точность нониуса, умноженная на номер деления нониуса, совпадающего с некоторым делением масштаба. При этом погрешность связана с неточным совпадением n-го деления нониуса с (k+n)-ым делением масштаба и её величина не будет превышать ½ΔX, т.к. при большом несовпадении этих делений одно из соседних делений (слева или справа) имело бы несовпадение, меньшее чем на ½ΔX и тогда мы бы произвели расчёт по нему. Поэтому погрешность нониуса равна половине его точности.

Другим прибором, применяемым для более точных измерений линейных размеров, является микрометр.

Он имеет вид тисков, в которых зажимают измеряемый объект с помощью винта. Основным элементом в микрометре является микрометрический винт, шаг которого составляет 0.5 мм. На стержне винта расположен барабан, на котором нанесена шкала с 50-ю делениями. Таким образом за один оборот барабана винт перемещается на 0.5мм. и ,следовательно, цена деления на барабане соответствует 0.01мм.. По линейной шкале микрометра отсчитывают миллиметры, а по шкале барабана—сотые доли миллиметра. Результат измерения зависит от того, с какой силой сжимают измеряемый объект штангенциркулем или микрометром, поэтому микрометр имеет приспособление, не допускающее слишком сильного нажатия. При измерении объект помещают между винтом и упором и вращением барабана подводят торец винта к поверхности измеряемого объекта. Дальнейшее нажатие винтом на поверхность нужно сделать специальной головкой, находящейся на конце рукоятки микрометра, до момента нажатия который фиксируется слабым треском.

Проведение измерений и обработка их результатов.

1. С помощью штангенциркуля определите геометрические размеры трубки: её длину L, внутренний d_1 и внешний d_2 диаметры. Точность штангенциркуля 0.1мм. Измерение каждого параметра провести не менее 4-5 раз. По результатам измерений вычислить объем V трубки. Оценить погрешность ΔV при вычислении объема, зная плотность ρ вещества, оценить массу m и Δm.

Результаты занести в таблицу.

	L	**ΔL**	d_1	d_2	Δd_1	Δd_2	**V**	ΔV	m	Δm
1										
2										
3										
4										
5										

Представить окончательный результат в виде:

$$V = (\ \bar{V} \pm \Delta V\ )\ м^3 \quad и \quad m = (\ \bar{m} \pm \Delta m\ )\ кг,$$

$$\rho_{Al} = 2{,}7\cdot 10^{3}\ кг/м^3,\ \ \rho_{ст.} = 7{,}8\cdot 10^{3}\ кг/м^3.$$

2. Измерьте диаметр $\boldsymbol{d}$ шарика с помощью микрометра. Измерение шарика повторите не менее 5 раз, каждый раз поворачивая шарик. Определите объем шарика V и погрешность ΔV.Плотность стали ρ=7,8·10^3 кг/м³.Оцените массу m шарика и погрешность Δm.

Результаты занести в таблицу:

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	$\bar{d}$	Δd	V	ΔV	m	Δm

Результат представить в виде:

$$V=(\ \bar{V} \pm \Delta V\ )\,м^3 \quad и \quad m=(\ \bar{m} \pm \Delta m\ )\,кг.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ПОЛЕ ЗЕМНОГО ТЯГОТЕНИЯ НА МАШИНЕ АТВУДА

Введение

Цель работы: исследовать законы движения тел в поле земного тяготения.

Приборы и принадлежности: лабораторная установка (“машина Атвуда”), набор грузов, секундомер.

Если камень или кусок бумаги начали падать с одинаковой высоты одновременно без начальной скорости, то камень достигнет земли раньше, чем комок. Из подобных повседневных наблюдений, казалось бы, следует, что под действием силы тяжести тяжелые тела падают быстрее легких. Такое неверное заключение и было сделано еще в древности великим греческим философом Аристотелем (384-322 гг. до нашей эры), и это воззрение продержалось в науке в течение почти двух тысяч лет. Только в 1583 г. Галилей на основании более глубокого опытного изучения законов падения опроверг мнение Аристотеля. Галилей выяснил, что в обычных условиях тела падают под действием не только силы тяжести, но и силы сопротивления воздуха. Галилей установил, что в отсутствии этого сопротивления все тела падают равноускоренно и, что весьма важно, в данной точке Земли ускорение всех тел при падении одно и то же. Если сопротивление воздуха так мало, что им можно пренебречь, то тело, освобожденное от подставки или подвеса будет падать, находясь все время под действием практически только силы притяжения Земли. Сила Земного притяжения F не остается строго постоянной при падении тела. Она зависит от высоты h тела над Землей. В соответствии с законом Всемирного тяготения

$$F = G\frac{mM}{(R+h)^2},$$

где $G = 6.67\times10^{-11}\frac{H\cdot м^2}{кг^2}$ - гравитационная постоянная, m - масса тела, M и R - масса и радиус Земли, соответственно.

Однако, если падение происходит не с очень большой высоты (так, что изменение высоты тела очень мало по сравнению с радиусом Земли 6400 км), то силу земного притяжения практически/можно считать постоянной. Поэтому можно считать, что в отсутствии силы сопротивления воздуха ускорение свободно падающего тела остается постоянным и свободное падение есть равноускоренное движение. Ускорение свободного падения принято обозначать буквой g. В различных точках земного шара (на различных широтах) числовое значение g оказывается не одинаковым, изменяясь примерно от $9.83 м/с^2$ на полюсе до $9.78 м/с^2$ на экваторе. На широте Москвы: $g = 9{,}815 м/с^2$. Значение, равное $9.807 м/с^2$, соответствующее 45° широты, условно принимается за "нормальное". Все эти числа относятся к движению тела на уровне моря.

В лабораторной работе 1 Вам предстоит экспериментально определить ускорение свободного падения при помощи машины Атвуда.

Машина Атвуда. Методика эксперимента

Машина Атвуда предназначена для исследования закона движения тела в поле земного тяготения. Естественнее всего, конечно, изучить этот закон, исследуя свободное падение тел. Этому мешает, однако, большая величина ускорения свободного падения. Такой опыт возможен только при очень большой высоте прибора (большей, чем высота комнаты) или при помощи специальных методов, позволяющих точно измерить небольшие промежутки времени (доли секунды). Так, например, время свободного падения тела с высоты $h = 1 м$, составляет порядка $0.45 с$.

Машина Атвуда позволяет избежать этих трудностей и замедлить движение до удобных скоростей. Схема машины Атвуда, являющейся составной частью комплексной лабораторной установки, показана на рис.1. Через легкий блок, свободно вращающийся вокруг оси, перекинута нить, на которой закреплены грузы массой M каждый. На один из грузов кладется перегрузок массой m, в результате чего система грузов выходит из равновесия и начинает двигаться ускоренно. Найдем ускорение

движения грузов, пренебрегая действием сил трения и предполагая, что блок и нить невесомы.
Согласно второму закону Ньютона имеем:

$$\begin{cases} Ma = T - Mg \\ (M+m)a = (M+m)g - T \end{cases} \quad (1)$$

где a - ускорение движения грузов, T - сила натяжения нити.
Из уравнений (1) получаем:

$$a = g\frac{m}{2M+m}. \quad (2)$$

Таким образом, движение грузов при наших предположениях равноускоренно. Из формулы (2) видно, что если массы грузка m много меньше массы грузов $2M$, то ускорение движения будет существенно меньше ускорения свободного падения g (при $m = 0.1M$; $a \approx 0.05g$).

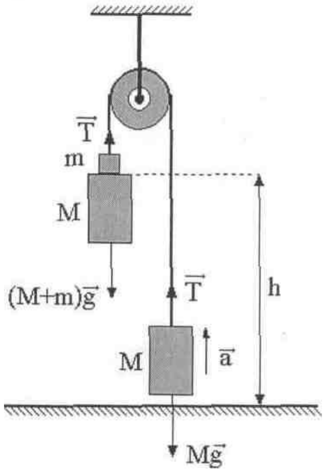


Рис.1

Ускорение a движения грузов можно определить экспериментально. Для этого следует измерить время t, за которое груз M поднимется на высоту h, после чего рассчитать ускорение по формуле

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (3)$$

Указанные изменения времени t можно провести для различных значений высоты h (масса перегрузка m при этом не меняется). Результаты измерений удобно представить, графически в виде зависимости

$$y = f(x), \text{ где } x = \frac{t^2}{2}, \; y = h. \quad (4)$$

Если экспериментальные точки в пределах точности измерений ложатся на прямую (рис.2), то это может являться экспериментальным подтверждением равноускоренного характера движения. (Теоретическая зависимость $y=f(x)$, согласно (3) и (4) имеет вид: $y=ax$).

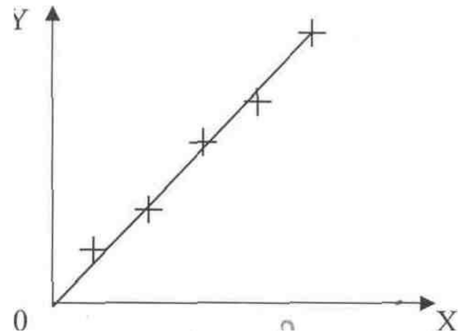


Рис. 2.

Убедившись в равноускоренности движения, можно воспользоваться формулой (2) и определить ускорение свободного падения для перегрузков, разной массы m. Таким образом, можно, установить на опыте равноускоренный характер движения грузов, определить ускорение a и рассчитать ускорение свободного падения g по формуле:

$$g=\frac{2M+m}{m}a. \qquad (5)$$

Обратим внимание на то, что при выводе формулы (2) мы пренебрегли трением в системе, а также массами блока и нити. Последнее пренебрежение правомочно, если масса блока и нити много меньше массы грузов. Это условие можно выполнить, если повесить тяжелые грузы. Однако в этом случае увеличивается давление на ось блока и, следовательно, возрастает сила трения в оси.

Силу трения можно оценить, определяя наибольшую величину перегрузка m_0, еще не вызывающего движения системы. Этот способ не может быть применен для точного измерения силы трения скольжения, поскольку мешающая опыту сила трения скольжения отнюдь не равна силе трения покоя.

Ясно, что пренебрежение силой трения возможно, если масса перегрузка m, вызывающего движение системы, во много раз больше массы "страгивающего" перегрузка m_0. Величину перегрузка следует максимально увеличить, однако, m не может быть выбрана очень большой, так как движение при этом становится слишком быстрым и точность измерения времени оказывается невысокой. В соответствии с вышеупомянутым значение массы перегрузка должно удовлетворять неравенствам

$$m_0 \ll m \ll M \qquad (6)$$

Измерения. Обработка результатов измерений

1. Определите массу "страгивающего" перегрузка. Для этого, постепенно увеличивая массу m перегрузка, определите значение, начиная с которого блок приходит в движение. Измерения повторите при четырех положениях блока, каждый раз поворачивая блок примерно на 90° по отношению к предыдущему положению. В качестве m_0 следует принять наибольшее из найденных значений.

2. Определить экспериментально зависимость времени движения t груза от высоты h. Измерения проведите при определенном значении массы перегрузки m. (Не забывайте о неравенствах (6)). Определите время движения t для четырех-пяти высот h, повторяя измерения для каждого значения по четыре раза. Результаты занесите в таблицу 1:

Таблица 1

h	σ_h	t_1	t_2	t_3	t_4	t	σ_t

По полученным данным постройте график зависимости $y=f(x)$, где $y=h$, $x=\frac{t^2}{2}$, предварительно заполнив таблицу 2:

Таблица 2

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
x					
σ_x					
y					
σ_y					

Сделайте вывод, является ли движение равноускоренным.

3. Определите опытным путем время движения t для трех значений масс m перегрузка. Измерения проводите при наибольшей возможной высоте

h. Для каждого значения m повторите измерения четыре раза. Рассчитайте по формулам (1) и (5) ускорение движения a, ускорение свободного падения g и оцените погрешности полученных результатов. Результаты занесите в таблицу 3:

Таблица 3

m	t_1	t_2	t_3	t_4	t	σ_t	a	σ_a	g	σ_g

4. Сравните полученные Вами значения ускорения свободного падения с известным табличным значением $g \approx 9.8 м/с^2$ и проанализируйте причины возможного несовпадения.

Контрольные вопросы

1 . Какое движение называется свободным падением? От чего зависит и чему равно ускорение свободного падения?
2. Оцените массу Земли.
3. В чем преимущество и в чем недостатки предложенного метода исследования движения тел в поле земного тяготения?
4. При каких упрощающих предположениях выведена формула (2)?
5. Какие погрешности называют случайными, а какие систематическими? Чем обусловлены эти погрешности в проделанной лабораторной работе?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ИЗУЧЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКОВ

Введение

Цель работы: изучение гармонических колебаний на примере пружинного и математического маятников.

Приборы и принадлежности: лабораторные установки пружинного и математического маятников, секундомер.

Колебаниями называют такие движения или изменения состояния физической системы, при которых система неоднократно возвращается в исходное состояние, например, в состояние равновесия.

Колебательные движения широко распространены в природе. Это волнение на море, колебания струн, вибрации фундаментов зданий, колебания маятника часов - примеры можно было бы продолжать до бесконечности. Разнообразные по природе колебания могут иметь общие закономерности, описываться однотипными математическими методами. Такая общность составляет основу для изучения самых различных колебаний, встречающихся в разнообразных физических явлениях и технических устройствах.

Колебательные процессы, с которыми приходится встречаться, подразделяют на периодические и непериодические в зависимости от характера изменения со временем физических величин, характеризующих состояние системы. По причине своего возникновения колебания подразделяют на свободные и вынужденные.

Свободными (собственными) колебаниями называются колебания, которые возникают в системе в результате однократного начального выведения ее из состояния устойчивого равновесия. При свободных колебаниях в системе всегда действуют силы (в общем случае причины), стремящиеся возвратить систему в положение равновесия. **(**В случае колебания груза на пружине возвращающей силой будет сила упругости пружины.)

Если в системе отсутствуют силы трения и любые другие причины, препятствующие свободным колебаниям, то нет потерь механической энергии, и колебания могут происходить сколь угодно долго с постоянной амплитудой. Такие свободные колебания называются незатухающими. Незатухающие колебания представляют идеализированный случай колебаний. Свободные колебания реальных систем всегда затухающие. Затухание колебаний связано, главным образом, с действием в системе сил трения. Незатухающие колебания в реальной системе могут возбуждаться воздействием на нее переменной внешней силы. В этом случае колебания называются вынужденными.

Периодическими называют колебания, при которых значения всех физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. Наименьший такой промежуток времени T**,** по истечении, которого повторяются значения всех величин, характеризующих колебательное движение, называется периодом колебаний. За это время, говорят, совершается одно колебание.

Частотой f периодических колебаний называют число колебаний в единицу времени. Если за время t система совершает N колебаний, то частота колебаний равна: $f = \frac{N}{t}$. Учитывая, что за время, равное периоду $(t = T)$ совершается одно колебание $(N = 1)$, приходим к связи частоты f с периодом T**:**

$$f = 1/T$$

Частоту измеряют в герцах (Гц). За 1 Гц принимают частоту такого колебательного процесса, при котором за одну секунду совершается одно полное колебание (Гц=1/с).

Частным случаем периодических колебаний являются гармонические колебания, в которых колеблющаяся физическая величина X (например, координата груза на пружине) изменяется со временем по закону косинуса (или синуса):

$$x = A\cos\left(\Omega t + \psi_0\right), \qquad (1)$$

где величина A, равная наибольшему абсолютному значению колеблющейся величины x, называются амплитудой колебаний. Выражение $\psi = \Omega t + \psi_0$ определяет значение x в любой момент времени t и называется фазой колебания. В начальный момент времени $(t=0)$ фаза ψ равна начальной фазе ψ_0.

Величину Ω называют циклической частотой гармонического колебания.

Периодом функции (1), как известно из математики, является

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

- это и будет период колебаний. Для частоты f гармонического колебания имеем:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi}.$$

Заметим, что функция (1) является решением дифференциального уравнения:

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = 0, \qquad (2)$$

где $\ddot{X}$ - вторая производная функции $x(t)$ по времени.

В самом деле :

$$\dot{X} = -\Omega A \sin\left(\Omega t + \psi_0\right);$$

$$\ddot{X} = \left(\dot{X}\right)'_t = -\Omega^2 A\cos\left(\Omega t + \psi_0\right) = -\Omega^2 X$$

и при подстановке $\ddot{X}$ в уравнение (2) оно обращается в верное равенство, что и требовалось доказать.
В математике доказывается, что функция (1) является единственным решением дифференциального уравнения (2). Таким образом, если при колебаниях для колеблющейся физической величины X в любой момент времени имеет место соотношение (2) , то колебания являются гармоническими и происходят с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Значения постоянных A и ψ_0 определяются, как правило, из начальных условий.
В лабораторной работе 2 Вам предстоит экспериментально исследовать свободные колебания пружинного и математического маятников.

Пружинный маятник. Методика эксперимента

Пружинным маятником называют тело, подвешенное на пружине. Пусть на пружине жесткостью A подвешен груз массой m (рис.1)

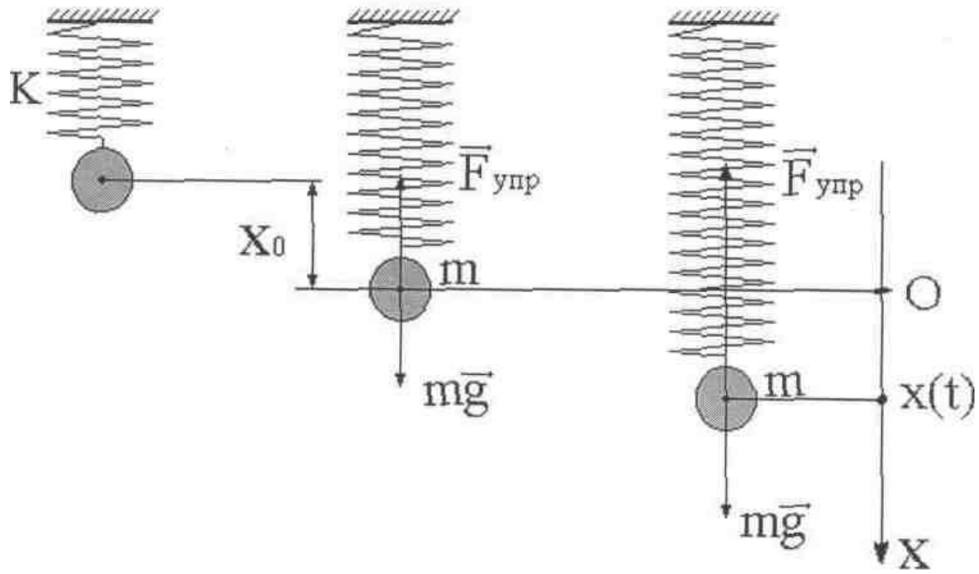


Рис.1

Рассмотрим вертикальное движение груза, которое будет происходить после небольшого толчка под действием силы упругости пружины $\overline{F}_{упр}$ *и* силы тяжести mg. Пружину предполагаем легкой и ее массой пренебрегаем. Также пренебрегаем силой сопротивления воздуха, считая ее малой.

Колеблющейся физической величиной в данном примере является координата x груза. Поместим начало отсчета по оси OX в точку, соответствующую равновесному положению груза (рис.1). В этом положении пружина уже растянута на величину x_0, определяемую из условия равновесия

$$mg - Kx_0 = 0. \qquad (3)$$

При смещении груза из положения равновесия, например вниз, на расстояние x, на него кроме силы тяжести mg действует сила упругости, равная согласно закону Гука $F_{упр} = K(x + x_0)$ так, как показано ни рис.1.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для груза в проекции на ось OX:

$$ma_x = mg - F_{упр} = mg - k(x + x_0). \qquad (4)$$

С учетом соотношения (3) уравнение второго закона Ньютона приводится к виду

$$a_x + \frac{K}{m}X = 0,$$

где проекция ускорения на ось OX есть не что иное, как вторая производная по времени от координаты x груза, т.е. $a_x = \ddot{X}$. Таким образом, мы получим, что в произвольный момент времени при колебаниях груза для его координаты имеет место соотношение

$$\ddot{X} + \frac{K}{m}X = 0.$$

Следовательно, рассматриваемые колебания являются гармоническими и происходят с циклической частотой $\Omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

и периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$. (5)

В ходе эксперимента вы должны убедиться, что период не зависит от амплитуды колебаний груза и по измеренному периоду колебаний T и известному значению массы груза m рассчитать жесткость пружины K в соответствии с соотношением (5) по формуле

$$K = \frac{4\pi^2 m}{T^2}. \qquad (6)$$

Определить жесткость пружины можно и другим методом. Для этого надо измерить деформацию пружины в положении равновесия груза и воспользоваться уравнением (3), согласно которому

$$K = \frac{mg}{X_0}. \qquad (7)$$

После оценки погрешностей, полученные значения K следует сопоставить друг с другом и объяснить, в случае необходимости, причины возможного несоответствия.

Математический маятник. Методика эксперимента

Рассмотрим простой маятник – тяжелый шарик, подвешенный на длинной нити. Если размеры шарика много меньше длины нити l, то этими размерами можно пренебречь и рассматривать шарик как материальную точку. Растяжением нити также можно пренебречь, так как оно очень мало. Можно пренебречь и массой нити по сравнению с массой шарика m. Таким образом, вместо реального маятника - шарика определенного размера на нити, которая, конечно, немного деформируется при движении и имеет массу, мы вправе рассматривать простую модель - материальную точку, подвешенную на нерастяжимой невесомой нити, называемую математическим маятником.

Выведем маятник из положения равновесия и отпустим без толчка. Возникнут колебания, проходящие в некоторой вертикальной плоскости. Траекторией движения шарика будет дуга окружности радиусом l. На шарик при движении будут действовать две силы: сила тяжести mg, направленная вертикально вниз и сила упругости нити $\overline{F}$, направленная вдоль нити (рис.2). Конечно, при движении маятника на него еще действует сила сопротивления воздуха, но мы будем считать её пренебрежимо малой.

Рассмотрим маятник в произвольный момент времени t в процессе колебаний.

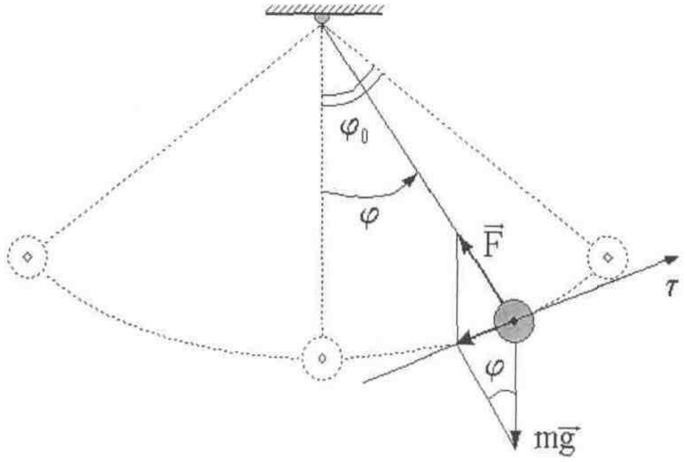


Рис.2

Пусть φ - угол отклонения от вертикали в этот момент. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекции на касательную ось τ, показанную на рис.2

$$ma_\tau = -mg\sin\varphi.$$

Принимая во внимание связь линейного a_τ и углового $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ ускорений

$$a_\tau = \varepsilon l = \ddot{\varphi} l$$

приходим к уравнению

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \qquad (8)$$

в котором неизвестная функция $\varphi(t)$ стоит под знаком производной. Такие уравнения в математике называют дифференциальными. Они часто встречаются при решении различных физических задач.

Решение уравнения (8) при произвольном начальном отклонении $0 < \varphi_0 < \pi/2$ может быть либо найдено только численными методами с применением компьютера, либо записано с помощью специальных функций.

Ограничимся случаем малых колебаний, когда $\varphi_0 << 1$.

Как известно из математики, для малых углов φ $(\varphi < 0.1 рад)$ можно воспользоваться соотношением

$$\sin\varphi \approx \varphi \text{ (в радианах).} \qquad (9)$$

Заметим, что соотношение (9) может быть использовано и при углах порядка 30 °

$$\varphi = \frac{\pi}{6} = \frac{3.14}{6} \approx \frac{1}{2}; \qquad \sin\varphi = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

С учетом соотношения (9) уравнение (8) примет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0. \qquad (10)$$

Уравнения, подобные этому, носят названия уравнений гармонического осциллятора. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решение уравнения (9) имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\Omega t + \alpha),$$

где φ_0 - угловая амплитуда колебаний, α - начальная фаза (в случае, описанном выше $\alpha = 0$), $\Omega = \sqrt{g/l}$ - циклическая частота собственных колебаний.

Для периода колебаний математического маятника имеем

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (11)$$

Из полученного нами соотношения (11) вытекает, что период колебаний T при малых колебаниях $(\varphi << 1)$ не зависит от амплитуды φ_0. Это свойство маятника получило название изохронности колебаний.

В ходе эксперимента Вам предстоит определить диапазон изохронности колебаний и экспериментально проверить зависимость периода малых колебаний T от длины маятника l, описываемую теоретически полученным соотношением (11). Соотношение (11) можно преобразовать:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g}. \qquad (12)$$

Для экспериментальной проверки соотношения (12) Вам предстоит измерить периоды малых колебаний маятника при различных значениях длины нити и по результатам измерений построить график зависимости $y = f(x)$, где $y = T^2$, а $x = l$.

Если в пределах точности измерений экспериментальные точки ложатся на прямую, то это может являться экспериментальным подтверждением зависимости (11).

Соотношение (12) может быть использовано для определения ускорения свободного падения. Для этого следует измерить период колебаний маятника T для выбранного значения длины нити l и рассчитать ускорение свободного падения по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

После оценки погрешности полученное значение g сравнивается с известным Вам табличным значением $g = 9.8\, м/с^2$.

Измерения. Обработка результатов измерения. Пружинный маятник

1. Прикрепите к подвешенной пружине груз известной массы m и измерьте деформацию пружины x_0. Рассчитайте жесткость пружины по формуле (7) и оцените погрешность.
2. Сместите груз из положения равновесия на некоторое расстояние $x < x_0$ и отпустите. Определите период колебаний для трех различных начальных смещений, измеряя время t, за которое груз совершает n колебаний. Число колебаний n выберите таким, чтобы погрешность в определении периода была не больше 1 %. Результаты измерения занесите в таблицу 1:

Таблица 1

x			
t			
$T = t/n$			
σ_T			

Сделайте вывод, зависит ли период от амплитуды колебаний?

3. Рассчитайте жесткость пружины по формуле (6) и оцените погрешность.
4. Проведите аналогичную процедуру измерений и расчетов для грузов другой массы. Сопоставьте полученные значения жесткости пружины. Объясните причины возможного несоответствия.

Математический маятник

Определите диапазон изохронности колебаний. Для этого измерьте период колебаний маятника для шести значений амплитуды в пределах от 0°до 30°. Результаты измерений занесите в таблицу 2:

Таблица 2

φ_0	5º	10º	15º	20º	25º	30º
t						
T						

Здесь t - время n колебаний, $T = \dfrac{t}{n}$. Число колебаний выберите таким, чтобы погрешность в определении периода была не более 1%.

Исходя из полученных результатов, выясните, в каком диапазоне амплитуд колебания можно считать изохронными.

2. Убедитесь в том, что колебания маятника являются слабо затухающими. Для этого выведите маятник из положения равновесия и определите приближенно число колебаний, за которое их амплитуда уменьшается в 2-3 раза. Если $N \geq$ 10, то можно считать, что затухание колебаний маятника мало и пользоваться (в диапазоне изохронности) формулой (11) для периода колебаний (напомним, что при выводе формулы (11) мы пренебрегали действием силы сопротивления воздуха, обуславливающей затухание колебаний).

3. Измерьте периоды колебаний для 5 различных значений l,оцените погрешности измерений. Не забудьте, что амплитуда колебаний φ_0 должна быть малой, т.е. находиться в найденном раньше диапазоне изохронности, а длина нити должна быть много больше размеров шарика. Результаты измерений занесите в таблицу 3:

Таблица 3

X = l					
$\sigma_x = \sigma_l$					
t					
σ_t					

n					
$T=\frac{t}{n}$					
$\sigma_T=\frac{\sigma_t}{n}$					
$y=T^2$					
σ_y					

4. На миллиметровой бумаге постройте график зависимости $y=f(x)$ и сделайте соответствующие выводы.
5. Экспериментально определите ускорение свободного падения и сравните полученное значение с известным вам табличным значением.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называют гармоническими? Дайте определение амплитуды, периода и частоты колебаний.
2. При каких упрощающих предположениях выведены формулы (5) и (11)?
3. Как изменятся периоды колебаний пружинного и математического маятников, если их переместить с Земли на Луну?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Теоретическое введение

Цель работы: изучение законов твердого тела относительно неподвижной оси на примере физического маятника.

Приборы и принадлежности: лабораторная установка “Физический маятник”, секундомер.

Физическим маятником называется твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной оси. Рассмотрим малые колебания маятника. Положение тела в любой момент времени можно характеризовать углом его отклонения из положения равновесия (рис.1.)

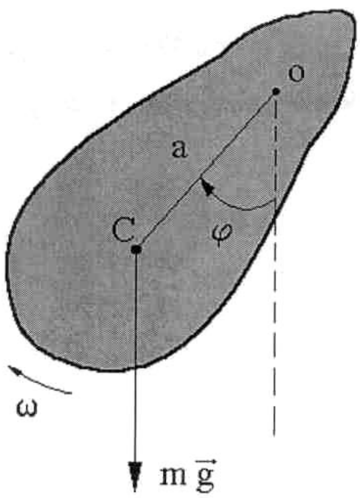


Рис. 1

Запишем уравнение моментов относительно оси вращения oz (ось проходит через точку подвеса o перпендикулярно плоскости рисунка "от нас"), пренебрегая моментом сил трения

$$I\frac{d\omega}{dt} = -mga\sin\varphi, \qquad (1)$$

где I - момент инерции маятника относительно оси oz вращения, ω - угловая скорость вращения маятника, $M_z = -mga\sin\varphi$ - момент силы тяжести $m\bar{g}$ относительно оси oz, a - расстояние от центра тяжести тела C до оси вращения.

Учитывая, что $\omega = {d\varphi}/{dt} = \dot{\varphi}$ и, принимая во внимание малость колебаний, перепишем уравнение (1) в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I}\varphi = 0. \qquad (2)$$

(мы учли, что при малых колебаниях $\sin\varphi \approx \varphi$, где угол выражен в радианах).

Уравнение (2) описывает гармонические колебания с циклической частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} \text{ и периодом } T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}. \qquad (3)$$

Частным случаем физического маятника является математический маятник. Вся масса математического маятника практически сосредоточена в одной точке - центре инерции маятника. Примером математического маятника может служить маленький массивный шарик, подвешенный на длинной легкой нерастяжимой нити. Для математического маятника $a=l$, $I=ml^2$, где l - длина нити, и формула (3) переходит в известную формулу

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (4)$$

Сравнивая формулы (3) и (4), заключаем, что период колебаний физического маятника равен периоду колебаний математического маятника с длиной l, называемой приведенной длиной физического маятника:

$$l=\frac{I}{ma}. \qquad (5)$$

Экспериментальная установка. Методика эксперимента

В данной работе в качестве физического маятника используется однородный металлический стержень длины L. На стержне закреплена опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя, таким образом, расстояние a от точки опоры маятника O до его центра масс C (рис.2)

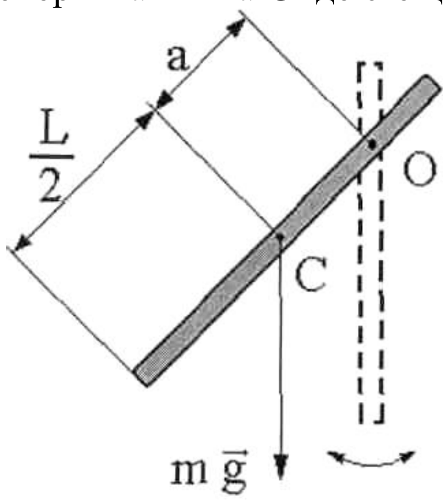


Рис. 2

Согласно теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника:

$$I=\frac{1}{12}mL^2+ma^2, \qquad (6)$$

где m - масса стержня. С учетом выражения (6) формула (3) для периода колебаний примет вид

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}mL^2+ma^2}{mga}}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\left(\frac{a}{L}+\frac{L}{12a}\right)}$$

или

$$T = T_0 \sqrt{\varepsilon + \frac{1}{12\varepsilon}}\,, \qquad (7)$$

где

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}\,,\ \varepsilon = \frac{a}{L}\,.$$

В соответствии с формулой (5) приведенная длина маятника:

$$l = \frac{I}{ma} = a + \frac{L^2}{12a}\,. \qquad (8)$$

Целью лабораторной работы является изучение колебательного движения физического маятника и, в частности, экспериментальная проверка теоретических соотношений (7) и (8). Для экспериментальной проверки зависимости периода T от величины $\varepsilon = \frac{a}{L}$, следует измерить периоды колебаний маятника при разных положениях опорной призмы. Результаты измерений удобно представить графиком зависимости $y = f(x)$, где $x = \varepsilon = \frac{a}{L}$, а $y = \frac{T}{T_0}$. В соответствии с формулой (7) эта зависимость имеет вид

$$y = \sqrt{x + \frac{1}{12x}}\,. \qquad (9)$$

График этой функции представлен на рис.3. Нетрудно показать, что функция (9) имеет минимум при $x = \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0.29$

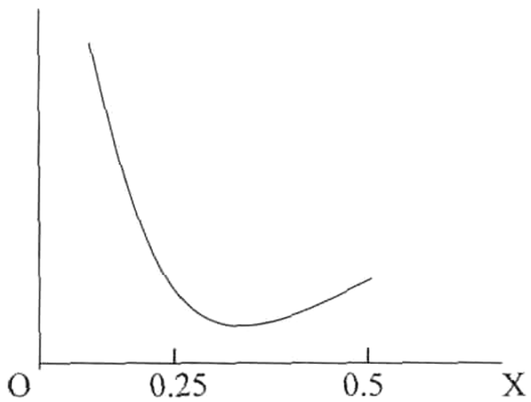


Рис.3

Измерения. Обработка результатов измерений

1.Определите диапазон изохронности колебаний. Напомним, что изохронностью колебаний называется свойство независимости периода от амплитуды колебаний. К изохронности колебаний мы приходим исходя из предположения их малости, что выражается заменой $\sin\varphi \approx \varphi$.

В связи с этим, формулой (3) для периода колебаний можно пользоваться в некотором диапазоне амплитуд колебаний φ_0, называемым диапазоном изохронности. Для этого измерьте период колебаний для 5-6 значений амплитуды в пределах от 0° до 30°. Измерения проводите для одного положения опорной призмы, например соответствующему $a = L/2$. Результаты измерений занесите в таблицу 1:

Таблица 1

φ_0	5°	10°	15°	20°	25°	30°
T						

Выясните, в каком диапазоне амплитуд колебания являются изохронными.

2. Убедитесь в том, что колебания маятника являются слабо затухающими. (Напомним, что при выводе формулы (3), мы пренебрегали моментом сил трения). Для этого выведите маятник из положения равновесия и определите число колебаний, за которое их амплитуда уменьшается в 2-3 раза. Если $N \geq 10$, то можно считать, что затухание маятника мало и пользоваться (в диапазоне изохронности) формулой (3).

3. Постройте по точкам график теоретической зависимости $y = f(x)$описываемой уравнением (9). Для построения графика найдите с помощью микрокалькулятора значения по формуле (9) не менее чем при 10 различных значениях в интервале $0 < x \leq 0.5$. Результаты измерений занесите в таблицу 2:

Таблица 2

x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
y										

4. Проведите экспериментальную проверку соотношений (7) и (9). Для этого, исходя из построенного графика, выберите 8-10 значений параметра $x = \varepsilon = \frac{a}{L}$, для которых целесообразно провести измерение

соответствующего им периода колебаний T. Проведите измерение периода колебаний T для выбранных значений x. При измерении периода колебаний (особенно в области малых x) следует внимательно следить за тем, чтобы амплитуда колебаний не выходила за пределы найденного выше диапазона изохронности. Результаты измерений занесите в таблицу3:

Таблица 3

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a										
T										
$x=a/L$										
$y=T/T_0$										
σ_x										
σ_y										

Полученные результаты с учетом погрешности нанесите на ранее построенный график. Сделайте вывод о совпадении экспериментальных результатов с предсказанными теорией. Проанализируйте причины возможного их несоответствия.

5. Экспериментально найдите приведенную длину маятника для некоторого положения опорной призмы, используя шарик на нити. Для этого подберите длину математического маятника так, чтобы в пределах точности измерений периоды колебаний обоих маятников совпадали. Измерьте длину математического маятника и сравните ее с приведенной длиной физического маятника, вычисленной по формуле (8).

Контрольные вопросы

1. Что называется физическим маятником?
2. При каких упрощающих положениях выведена формула (3)?
3. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса-Штейнера.
4. Выведите формулу для момента инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его середину и перпендикулярной стержню.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА КРЕСТООБРАЗНОМ МАЯТНИКЕ ОБЕРБЕКА

Введение

Цель работы: изучение законов движения твердого тела относительно неподвижной оси.

Приборы и принадлежности: лабораторная установка “Крестообразный маятник”, набор грузов, секундомер.

Явления природы очень сложны. Даже такое обычное явление как движение тела, на самом деле оказывается совсем не простым. Чтобы понять главное в физическом явлении, не отвлекаясь на второстепенные детали, физики прибегают к моделированию, т. е. к выбору или построению упрощенной схемы явления. Вместо реального явления (или тела) изучают более простое фиктивное (не существующее) явление, похожее на действительное в главных чертах. Такое фиктивное явление (тело) называют моделью.

Одной из важнейших моделей, с которой имеют дело в механике, является абсолютно твердое тело. В природе нет недеформируемых тел. Всякое тело под действием приложенных к нему сил деформируется в большей или меньшей степени. Однако в тех случаях, когда деформация тела мала и не влияет на его движение, рассматривают модель, называемую абсолютно твердым телом.

Можно сказать, что абсолютно твердое тело - это система материальных точек, расстояние между которыми остается неизменным во время движения.

Одним из простых видов движения твердого тела является его вращение относительно неподвижной оси. Напомним, что вращение твердого тела вокруг неподвижной оси описывается уравнением моментов.

$$I\frac{d\omega}{dt}=M_z, \qquad (1)$$

где I - момент инерции тела относительно оси вращения, ω - угловая скорость вращения, M_z - сумма проекций моментов внешних сил на ось вращения OZ. Это уравнение по виду напоминает уравнение второго закона Ньютона:

$$m\frac{d\overline{V}}{dt}=\overline{F}.$$

Роль массы m играет момент инерции I, роль ускорения $\overline{a}=\frac{d\overline{V}}{dt}$ угловое ускорение, а роль силы F играет момент силы M_z.

Уравнение (1) является прямым следствием законов Ньютона, поэтому его экспериментальная проверка является в то же время проверкой основных положений механики.

Как уже отмечалось, в работе изучается динамика вращательного движения твердого тела. В частности, экспериментально проверяется уравнение (1) - уравнение моментов для вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Экспериментальная установка. Методика эксперимента

Экспериментальная установка, схема которой представлена на рис.1, известна как маятник Обербека. Хотя на маятник эта установка совсем не похожа, мы по традиции и для краткости будем называть ее маятником.

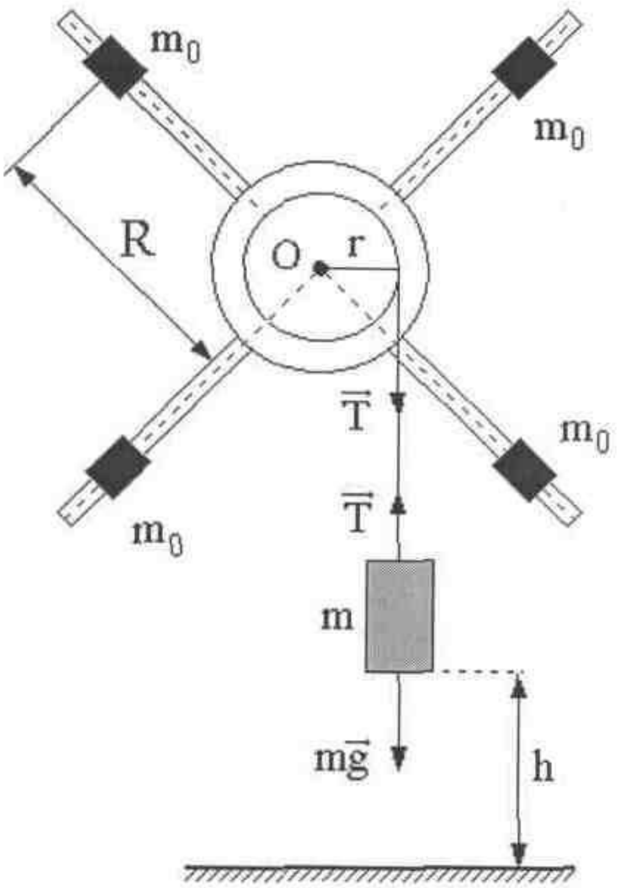


Рис.1

Маятник Обербека состоит из четырех спиц, укрепленных на втулке под прямым углом друг к другу. На той же втулке имеется шкив радиусом r. Вся эта система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Момент инерции системы можно менять, передвигая грузы m_0 вдоль спиц.

Вращающий момент, создаваемый силой натяжения нити T, равен $M_h = Tr$. Кроме того, на маятник действует момент сил трения в оси - M_{mp} учетом этого уравнение (1) примет вид

$$I\varepsilon = Tr - M_{mp}. \qquad (2)$$

Согласно второму закону Ньютона для движения груза m имеем

$$ma = mg - T, \qquad (3)$$

где ускорение a поступательного движения груза связано с угловым ускорением ε маятника кинематическим условием

$$a = \varepsilon r \qquad (4)$$

выражающим разматывание нити со шкива без проскальзывания.

Решая уравнения (2) - (4) совместно, не трудно получить угловое ускорение

$$\varepsilon=\frac{mgr-M_{тр}}{I+mr^2}. \qquad (5)$$

Угловое ускорение, с другой стороны, можно довольно просто определить экспериментально. Действительно, измеряя время t, в течение, которого груз m опускается на расстояние h, можно найти ускорение a: $a=2h/t^2$, и, следовательно, угловое ускорение

$$\varepsilon=\frac{a}{r}=\frac{2h}{rt^2}. \qquad (6)$$

Формула (5) дает связь между угловым ускорением, которую можно измерить, и моментом инерции I. В формулу (5) входит неизвестная величина $M_{тр}$.Хотя момент сил трения мал, тем не менее он мал не настолько, чтобы им в уравнении (5) можно было пренебречь. Уменьшить относительную роль момента сил трения при данной конфигурации установки можно было бы, увеличивая массу груза m. Однако здесь приходится принимать во внимание 2 обстоятельства:

1) увеличение массы m ведет к увеличению давления маятника на ось, что в свою очередь вызывает возрастание сил трения;

2) с увеличением m уменьшается время движения t и снижается точность измерения времени, а значит, ухудшается точность измерения углового ускорения ε.

Момент инерции, входящий в выражение (5),согласно теореме Гюйгенса-Штейнера и свойства аддитивности момента инерции может быть записан в виде

$$I=I_0+4m_0R^2, \qquad (7)$$

где I_0 - момент инерции маятника, при условии, что центр масс каждого груза m_0 находится на оси вращения. R - расстояние от оси до центров грузов m_0.

В уравнение (5) также входит величина mr^2. В условиях опыта $\frac{mr^2}{I}<0.01$ (убедитесь в этом!). Пренебрегая этой величиной в знаменателе (5), получаем простую формулу, которую можно проверить экспериментально

$$\varepsilon = \frac{1}{I}\left(mgr - M_{тр}\right). \qquad (8)$$

Экспериментально исследуем две зависимости:

1. Зависимость углового ускорения ε от момента внешней силы $M = mgr$ при условии, что момент инерции I остается постоянным. Если построить график зависимости $\varepsilon = f(M)$, то согласно (8) экспериментальные точки должны ложиться на прямую (рис.2), угловой коэффициент которой равен $\frac{1}{I}$, а точка пересечения с осью OM дает $M_{тр}$.

2. Зависимость момента инерции I расстояния R грузов до оси вращения маятника (см. соотношение (7)).

Выясним, как проверить эту зависимость экспериментально. Для этого преобразуем соотношение (8), пренебрегая в нем моментом сил трения $M_{тр}$ по сравнению с моментом $M = mgr$ (подобное пренебрежение будет правомочно, если величина груза такова, что $mgr >> M_{тр}$). Из уравнения (8) имеем:

$$\varepsilon = \frac{a}{r} \approx \frac{mgr}{I_0 + 4m_0R^2}.$$

Следовательно

$$\frac{g}{a} = \frac{I_0}{mr^2} + 4\frac{m_0}{m}\left(\frac{R}{r}\right)^2. \qquad (9)$$

Из полученного выражения понятно, как экспериментально проверить зависимость (7): нужно, выбрав постоянную массу груза m, измерять ускорение a при различных положениях R_0 грузов m_0 на спицах.

ε

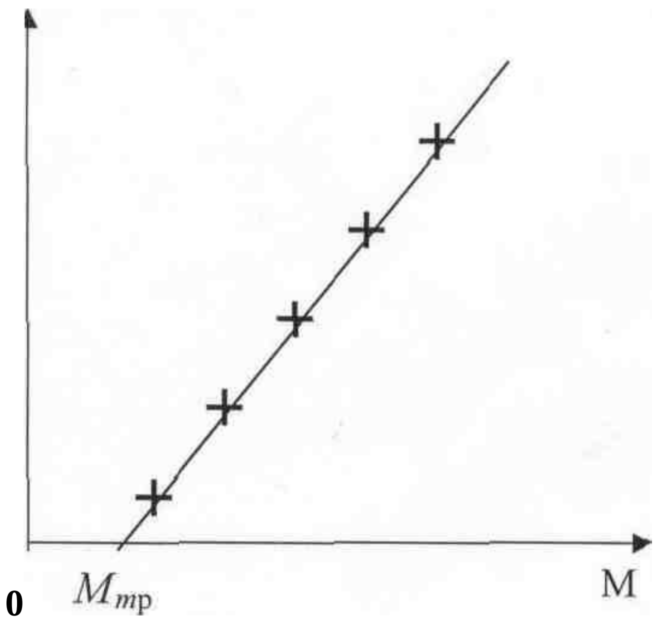


Рис.2

Результаты удобно изобразить в виде точек на координатной плоскости XOY, где

$$x=\left(\frac{R}{r}\right)^2, \quad y=\frac{g}{a}.$$

Если экспериментальные точки в пределах точности измерений ложатся на прямую (рис.3), то это подтверждает зависимость (9), а значит и формулу

$$I=I_0+4m_0R^2.$$

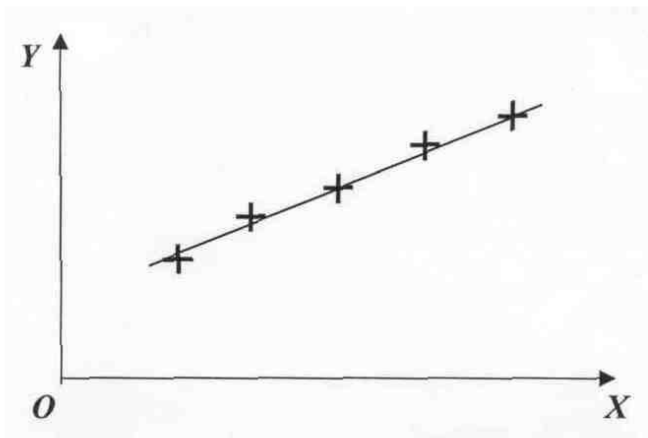


Рис.3

Измерения. Обработка результатов измерений

1. Сбалансируйте маятник. Установите грузы m_0. на некотором расстоянии R от оси маятника. При этом маятник должен находиться в состоянии безразличного равновесия. Проверьте, хорошо ли сбалансирован маятник. Для этого маятник следует несколько раз привести во вращение и дать возможность остановиться. Если маятник останавливается в различных отличающихся друг от друга положениях, то он сбалансирован.

2. Оцените момент сил трения. Для этого, увеличивая массу груза m, найдите минимальное ее значение m_1, при котором маятник начинает вращаться. Повернув маятник на 180° по отношению к начальному положению, повторите описанную процедуру и найдите здесь минимальное значение m_2.(Может оказаться, что $m_1 \neq m_2$ причине неточной балансировки маятника). Оцените по этим данным момент сил трения

$$M_{mp} = 0.5gr(m_1 + m_2).$$

3. Экспериментально проверьте зависимость (8). (В этой серии измерений момент инерции маятника должен оставаться постоянным $I = const$). Укрепите на нити некоторый груз $m > m_i \quad (i = 1{,}2)$ и измерьте время t, за которое груз опускается на расстояние h. Измерение времени t для каждого груза при постоянном значении h повторить 3 раза. Затем найдите среднее значение времени падения груза по формуле

$$\bar{t} = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$$

и определите среднее значение углового ускорения

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2h}{rt^2}.$$

Подумайте, как оценить и оцените погрешность σ_ε полученного значения $\bar{\varepsilon}$.

Описанные в этом пункте измерения повторите для 5 значений массы груза m, удовлетворяющих неравенству $m > m_i \quad (i = 1{,}2)$. Результаты измерений занесите в таблицу 1:

Таблица 1

	m	r	t_1	t_2	t_3	$\bar{t}$	σ_t	h	σ_h	$\bar{\varepsilon}$	σ_ε	M	σ_M
1													
2													
3													
4													
5													

По полученным данным постройте график зависимости $\varepsilon = f(M)$. По графику зависимости определите момент инерции маятника I и момент сил трения $M_{тр}$.

4. Проверьте экспериментально зависимость (7). Для этого, взяв постоянную массу груза m, определите ускорение a груза m при 5 различных положениях на спицах грузов m_0. В каждом положении R измерения времени падения t груза m с высоты h повторите 3 раза. Найдите среднее значение времени падения: $\bar{t} = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$

и определите среднее значение ускорения груза

$$a = \frac{2h}{t^2}$$

Результаты измерений занесите в таблицу 2:

Таблица 2

	R	t_1	t_2	t_3	$\bar{t}$	σ_t	h	σ_h	$\bar{a}$	σ_a
1										
2										
3										
4										

5										

По полученным данным рассчитайте величины $x = \left(\frac{R}{r}\right)^2$, $y = \frac{g}{a}$ и постройте график $y = f(x)$. Для построения графика удобно сначала заполнить таблицу 3:

Таблица 3

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
x					
σ_x					
y					
σ_y					

5. Объясните полученные результаты.

Сделайте выводы, находятся ли результаты экспериментов в соответствии с теорией.

Контрольные вопросы

1. Что мы называем абсолютно твердым телом? Какое уравнение описывает вращение твердого тела относительно неподвижной оси?
2. Получите выражение для момента импульса и кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
3. Что называется моментом инерции твердого тела относительно некоторой оси? Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса-Штейнера.
4. Какие измерения в проведенных вами экспериментах вносили наибольшую погрешность? Что необходимо сделать для уменьшения этой погрешности?

УЧЕБНЫЕ ЗАДАНИЯ

Кинематика материальной точки

1. Точка движется в плоскости по закону $\bar{r} = At\bar{i} + Bt^2\bar{j}$, где А=3м/с, В=1м/с^2 , $\bar{i}$ и $\bar{j}$- единичные базисные векторы декартовой системы координат. Нарисуйте траекторию движения и определите модули скорости и ускорения точки в момент времени t =2с.

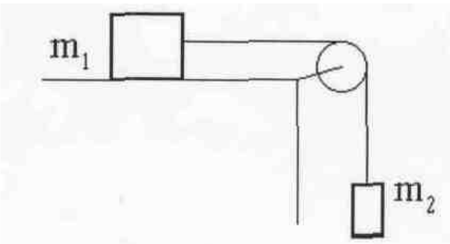
2. Материальная точка движется в плоскости XOY с ускорением $\bar{a}$, зависящим от времени по закону $\bar{a} = At\bar{i} + B\bar{j}$.

Найдите закон движения точки (уравнение зависимости радиуса - вектора точки от времени), если в начальный момент времени (t = 0) точка находилась в начале координат и имела скорость $\overline{V_0} = C\bar{i} + D\bar{j}$,где A, B, C, D - постоянные величины, $\bar{i}$ и $\bar{j}$- единичные базисные векторы декартовой системы координат.

3. Точка движется по окружности радиусом R=2м с угловым ускорением $\varepsilon = A + Bt$, где A=0,5 рад/с^2 и B=1 рад/с^3. Определите, как со временем t изменяются величина нормального, тангенциального и полного ускорений, если начальная скорость точки равна нулю. Какой путь пройдет точка за вторую секунду движения?

Динамика материальной точки

4. Два тела массами m_1 и m_2 связаны нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения скольжения между первым телом и горизонтальной плоскостью μ=0,2. Нить и блок невесомы, трение в оси блока пренебрежимо мало. Определите ускорения тел, если в начале они были неподвижны, для случаев: 1) m_1=10кг и m_2=5кг, 2) m_1=10кг и m_2=1кг

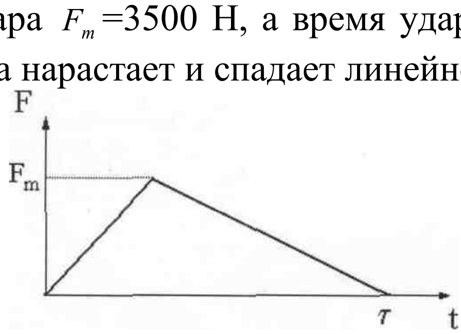


5. На краю горизонтального диска радиусом R=0,1м лежит маленькая шайба. Диск начинает вращаться вокруг вертикальной оси с угловым ускорением ε = 1рад/с^2. Через какое время шайба соскользнет с диска, если коэффициент трения скольжения μ = 0,2?

6. Автомобиль массой m=2000кг двигался со скоростью V_0=72 км/час. В момент времени t= 0 на него начинает действовать тормозящая сила, линейно нарастающая со временем, $F_T = kt$, где k=10^3 Н/с. Определите тормозной путь и время до полной остановки автомобиля.

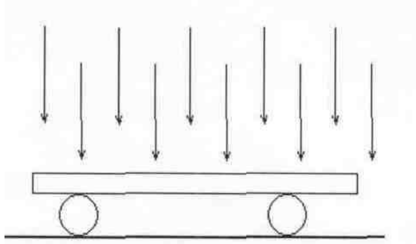
Импульс. Закон сохранения импульса

7. Какую скорость может сообщить мячу футболист при ударе, если максимальная сила удара F_m=3500 Н, а время удара $t = 8 \cdot 10^{-3}$ с? Считать, что сила во время удара нарастает и спадает линейно. Масса мяча m=0,5кг



8. Тележка массой M движется по горизонтальной поверхности со скоростью V_0. В момент времени t=0 начинает идти снег, падающий вертикально. Определите зависимость скорости тележки от времени, если

на тележку ежесекундно падает масса снега μ. Снег с тележки не слетает. Трением пренебречь.



Работа, мощность, энергия. Закон сохранения энергии

9. Небольшой шарик массой m, подвешенный на нити, отвели в сторону так, что она образовала прямой угол с вертикалью, а затем отпустили без толчка. Определите ускорение шарика и силу натяжения нити в тот момент, когда нить образует угол α с вертикалью.

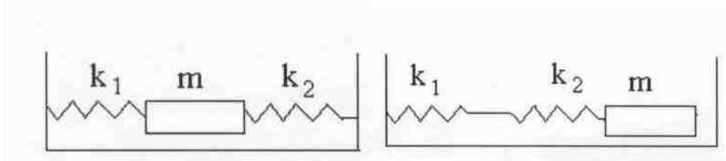
10. Два пластилиновых шарика одинаковой массы m=0,1кг, двигаясь во взаимно перпендикулярных направлениях с одинаковыми скоростями V_0=10 м/с, не упруго сталкиваются и прилипают друг к другу. Определите скорость образовавшегося комка и теплоту, выделившуюся в результате столкновения.

Гармонические колебания

11. Найти сумму двух колебаний $X = A\cos wt + B\sin wt$.

12. Частица совершает гармонические колебания около положения равновесия x=0 с циклической частотой ω=4 рад/с так, что в начальный момент времени ее координата x_0=0,25м, а скорость V_0=1 м/с. Найдите закон движения частицы.

13. Рассмотреть движение тела массой m=1кг в системах показанных на рисунках. Массами пружин и трением пренебречь. Коэффициенты жесткости пружин k_1=200 Н/м и k_2=300 Н/м. Определите период колебаний тела.



Система 1 Система 2

14. Амплитуда колебаний груза массой m=0,1кг на пружине жесткостью k=20 Н/м уменьшилась в два раза за одну минуту. Определите добротность системы.

15. Амплитуда колебаний математического маятника длиной l=1м уменьшилась в два раза за N=100 колебаний. Определите коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания маятника.

16. Тело, подвешенное на пружине, имеет период собственных колебаний T=1c. Сила трения пропорциональна скорости. Если колебания возбуждаются внешней гармонической силой с амплитудой F_0=1 Н, то

амплитуда установившихся колебаний в резонансе A= 0,05м. Определите коэффициент силы трения.

Механика твердого тела. Момент инерции. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

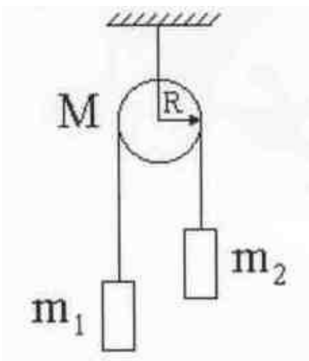
17. Вычислите момент инерции однородного тонкого стержня массой m и длиной l относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей через его конец. Каков будет момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через середину стержня?

18. Вычислите момент инерции однородного диска массой m и радиусом R относительно оси его симметрии. Каков он будет относительно параллельной оси, проходящей через край диска.

19. Горизонтально расположенный покоящийся стержень массой M=10 кг и длиной l=2 м может легко вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. В конец стержня попадает и застревает в нем пуля массой m=10 г, летевшая перпендикулярно к оси и к стержню со скоростью V_0=500 м/с. Определите угловую скорость, с которой начнет вращаться стержень, когда пуля застрянет в нем.

Вращательное движение твердого тела

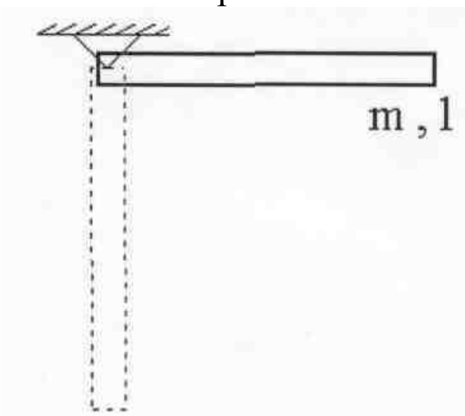
20. В устройстве, показанном на рисунке, определите ускорение тел массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) связанными невесомой, нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Блок представляет собой однородный цилиндр массой M и радиусом R. Нить по блоку не проскальзывает, трение в оси блока пренебрежимо мало.



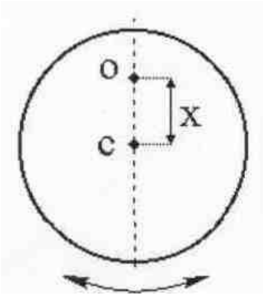
21. Маховик, представляющий собой диск массой m=10 кг и радиусом R=0.2 м, вращается относительно своей оси с угловой скоростью ω_0=100 рад/с. В момент времени t=0 к нему начинают прижиматься две тормозные колодки с силой F=50 Н каждая. Коэффициент трения скольжения между маховиком и колодками μ= 0,3. Определите, как со временем будет изменяться угловая скорость вращения маховика. Через какое время он остановится?

22. Однородный цилиндр массой m и радиусом R скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона α. Определите ускорение центра цилиндра. Как со временем будет изменяться скорость цилиндра, если его начальная скорость была равна нулю?

23. Однородный стержень массой m и длиной l может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно через его конец. Стержень отклоняют, придавая ему горизонтальное положение, и отпускают без толчка. Определите скорость нижнего конца стержня в момент прохождения им положения равновесия.



24. Однородный диск радиусом R совершает колебания в вертикальной плоскости относительно оси, проходящей через точку О, удаленную от центра диска С на расстояние x. Определите период малых колебаний. Трением пренебречь.

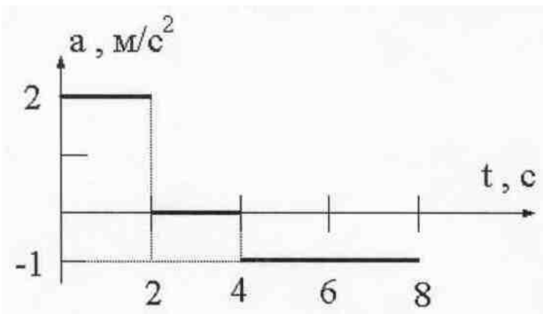


ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Кинематика материальной точки

25. Материальная точка движется в плоскости XOY так, что ее декартовы координаты X и Y зависят от времени по законам $X = A\sin wt$, $Y = B\cos wt$, где A, B, w - постоянные величины. Нарисуйте траекторию движения и покажите, что вектор ускорения точки в любой момент времени направлен к началу координат.

26. Точка движется вдоль прямой с ускорением, представленным на графике:



Постройте графики зависимости скорости и перемещения точки от времени, если ее начальная скорость V_0=0 и начальная координата x_0=0.

27. Тело бросили с поверхности земли под углом α_0 к горизонту с начальной скоростью V_0. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите:

1) время движения;

2) максимальную высоту подъема и горизонтальную дальность полета, а также углы α_0, при которых это произойдет;

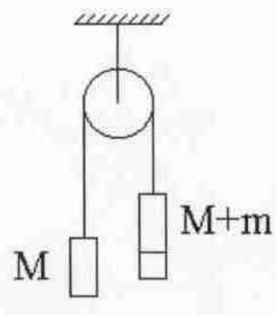
3) уравнение траектории;

4) радиусы кривизны в начале и в вершине траектории.

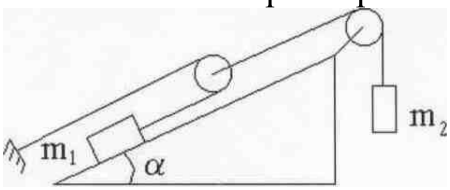
28. Ракета стартует вертикально с ускорением a=30 м/с^2 на расстоянии l=100 м от пушки, начальная скорость снарядов которой V_0= 200 м/с. Под каким углом к горизонту надо выстрелить из пушки в момент старта ракеты, чтобы поразить ее? Всегда ли это возможно? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Динамика материальной точки

29. В устройстве, показанном на рисунке, определите ускорение тел, натяжение нити и силу, действующую на ось невесомого блока. Массой нити, ее растяжением и трением в устройстве пренебречь.



30. В устройстве, показанном на рисунке, груз m_1 скользит без трения по наклонной плоскости, связанный невесомой и нерастяжимой нитью с грузом m_2. Определите ускорения грузов m_1 и m_2, если угол наклона плоскости α, а массами блоков можно пренебречь.



31. Шарик, подвешенный на легкой нити длиной l, вращается в горизонтальной плоскости с постоянным углом отклонения от вертикали α (конический маятник). Определите период вращения шарика и его линейную скорость.

32. Определите период вращения спутника Земли, находящегося на круговой орбите на расстоянии 400 км от земной поверхности. Радиус Земли R=6400 км.

33. В момент выключения двигателя моторная лодка массой m=200 кг шла по озеру со скоростью V_0= 3 м/с. Считая силу сопротивления воды

движению лодки пропорциональной скорости $F_c= кV$, где k=10 Нс/м, определите, как со временем изменяется скорость лодки после выключения двигателя. Какой путь пройдет лодка до полной остановки?

34. Камень массой m падает вблизи поверхности земли без начальной скорости. Считая, что сила сопротивления воздуха движению камня пропорциональна скорости $F_c = кV$, где к - известная постоянная, определите зависимость скорости камня V от времени.

Импульс. Закон сохранения импульса

35. Пуля массой m=9 г, выпущенная из винтовки, попадает в свободно подвешенную болванку и застревает в ней, сообщая скорость 1 м/с. Масса болванки М = 7 кг. Определите скорость пули.

36. Лодка массой М=160 кг и длиной l =4м стоит в неподвижной воде. Мальчик массой m=40кг переходит с носа лодки на корму со скоростью V_0=2 м/с (относительно лодки). Определите скорость мальчика относительно берега. На какое расстояние переместится лодка. Сопротивлением воды можно пренебречь.

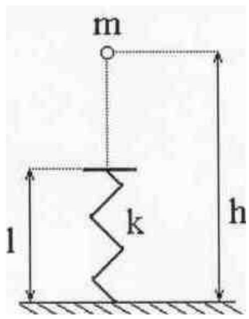
Работа, мощность, энергия. Закон сохранения энергии

37. Система состоит из двух последовательно соединенных пружин с коэффициентами жесткости k_1 и k_2. Определите работу, которую необходимо совершить, чтобы растянуть эту систему на расстояние l .

38. С какой скоростью лебедка мощностью Р может тянуть груз массой m по гладкой доске, наклоненной под углом α к горизонту.

39. С какой скоростью вылетит из детского пружинного пистолета пуля при выстреле вертикально вверх. Для выстрела пружина с коэффициентом жесткости k=10 Н/см сжимается на величину x=4 см, масса пули m=10 г. Трением пренебречь.

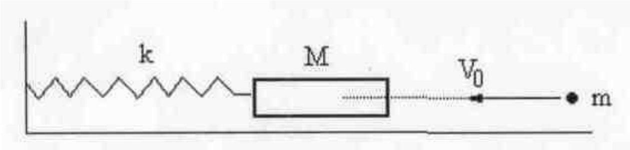
40. Легкая пружина с жесткостью k и длиной l стоит вертикально на столе. С высоты h над столом на нее падает небольшой шарик массой m. Какую максимальную скорость будет иметь шарик при своем движении вниз. Трением можно пренебречь.



41. Определите угол разлета двух одинаковых гладких шаров после упругого нецентрального соударения, если один из них до удара покоился.

Гармонические колебания

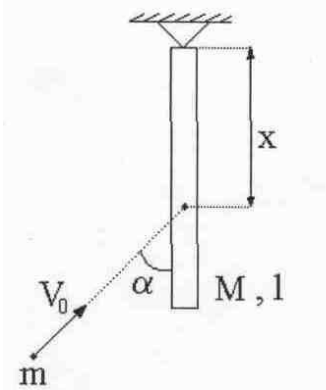
42. Пуля массой m, летевшая горизонтально со скоростью V_0, застревает в деревянном кубике массой M, покоившемся на гладкой горизонтальной поверхности. Определите период и амплитуду колебаний, если кубик соединен со стенкой пружиной жесткостью k.



43. Частица массой m находится в одномерном потенциальном поле, где потенциальная энергия зависит от координаты как $U(x) = U_0 \sin^2(\alpha x)$, где U_0 и α- положительные постоянные. Определите период малых колебаний частицы около точки x = 0.

Механика твердого тела. Момент инерции. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

44. Однородный стержень массой M и длиной l подвешен за конец в шарнире. Пуля массой m, летевшая со скоростью V_0 перпендикулярно к оси шарнира и под углом α к стержню, застревает в нем на расстоянии x от оси шарнира. С какой начальной скоростью станет двигаться нижний конец стержня? Трением в шарнире можно пренебречь.

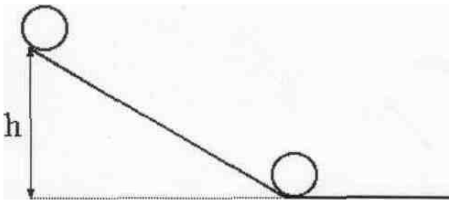


45. Горизонтальный диск массой M и радиусом R может без трения вращаться вокруг своей вертикальной оси. На краю стоит человек массой m. Вначале диск и человек неподвижны. Затем человек начинает идти по краю диска со скоростью относительно диска. С какой угловой скоростью u относительно земли будет вращаться при этом диск? Размерами человека по сравнению с радиусом диска можно пренебречь.

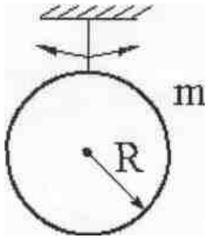
Вращательное движение твердого тела

46.Тонкий обруч радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω и положили на горизонтальный стол. Через какое время обруч остановится, если коэффициент трения скольжения между обручем и столом равен μ.

47.Обруч скатывается без проскальзывания с горки высотой h. Определите скорость центра обруча у основания горки.



48. Однородный шар массой m = 5кг и радиусом R = 0.1м жестко скреплен с тонким стержнем, другой конец которого закреплен. Шар может совершать крутильные колебания. Определите период малых крутильных колебаний, если коэффициент кручения стержня k = 3Нм/рад. Трением пренебречь.



Литература

1. Д. В. Сивухин, Общий курс физики, т. 1, Механика, “Наука”, М. 1979.
2. И. В. Савельев, Курс общей физики, т. 1, Механика, “Наука”, М. 1987.

СОДЕРЖАНИЕ