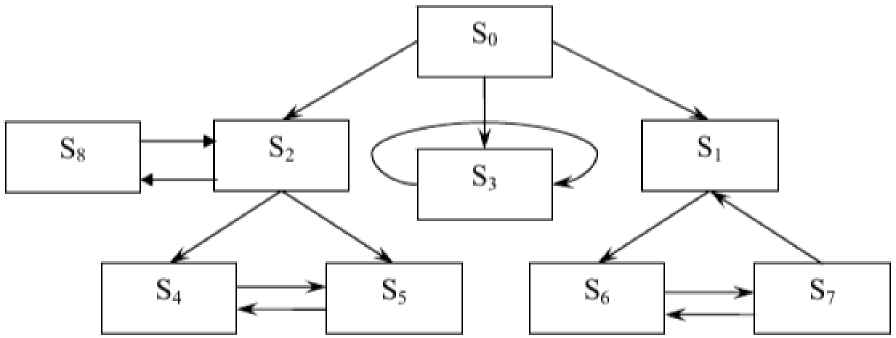
Классификация состояний

Состояние s_i называется *несущественным*, если найдется такое состояние s_j $(i \neq j)$, что из s_i в s_j перейти можно, а из s_j в s_i — нельзя. Иначе говоря, имеется такой переход из несущественного состояния s_i , который приведёт к тому, что в s_i нельзя будет вернуться. Состояние s_i называется *существенным*, если оно не является несущественным. Любой переход из существенного состояния допускает возможность возврата в это состояние.

Два состояния s_i и s_j называются *сообщающимися*, если из s_i можно попасть в s_j и наоборот.

Если, попав в состояние s_i , система не может из него выйти, то s_i называется состоянием *поглощения*. Оно может быть обозначено на графе петлей. Состояние поглощения относится к существенным состояниям.

Пример.



Состояния s_0 , s_2 и s_8 являются несущественными . Состояния s_8 и s_2 являются сообщающимися. Состояния s_1 , s_3 , s_4 , s_5 , s_6 , s_7 являются существенными, причем из них состояния s_1 , s_6 , s_7 , а также s_4 и s_5 являются сообщающимися между собой. Состояние s_3 является состоянием поглощения.

Состояния системы объединяются в *классы сообщающихся состояний (замкнутые, неразложимые классы)*. В примере имеются три класса существенных состояний: s_3; s_4 и s_5 ; s_1 , s_6 , s_7 и два класса несущественных состояний: s_0; s_2 и s_8 .

Если число состояний конечно, то система рано или поздно выйдет из класса несущественных состояний и после этого окажется (и останется) в одном из классов существенных состояний. Такая цепь называется *приводимой*. Если же цепь состоит из одного класса существенных сообщающихся состояний, то она называется *неприводимой*.

Распределение вероятностей состояний называется *стационарным*, если оно не изменяется от шага к шагу, т.е.

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} P_j P_{ji} \text{ и } \sum_{i=1}^{n} P_i = 1. \qquad \left(p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1)\, P_{ji} \right)$$

Вопросы:
Существует ли такое распределение? Является ли оно единственным? Зависит ли оно от начального распределения? Устанавливается ли оно при большом времени работы системы (иначе говоря, является ли оно предельным распределением)?

Условие случайного эргодического процесса: $\lim\limits_{u \to \infty} P_i(u) = P_i$

Теорема 1. Случайный процесс с дискретным временем обладает эргодическим свойством, если матрица вероятностей переходов не является *периодической* или *разложимой*.
Определение. Матрица является *разложимой*, если она может быть приведена к одному из следующих видов:

$$1)\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \qquad 2)\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \qquad 3)\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

где **A**, **B**, **C**, **D**– ненулевые квадратные подматрицы; **0** – нулевая подматрица. В первом случае состояния, соответствующие подмножествам **A** и **D**, являются замкнутыми, так как система, находясь в каком-то состоянии одного из этих подмножеств, никогда не сможет перейти в какое-либо состояние другого подмножества. Состояния, соответствующие подмножеству **D** во втором случае и подмножеству **A** в третьем случае, являются невозвратными, поскольку после того, как процесс покинет эти состояния, невозможен обратный переход в эти состояния из состояний, соответствующих другим подмножествам.

Определение.
Матрица является *периодической*, если она может быть приведена к виду: $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Случайный процесс в этом случае будет по очереди переходить из состояний, соответствующих **B**, в состояния, соответствующие **C**.

1) $\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}8 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix}$

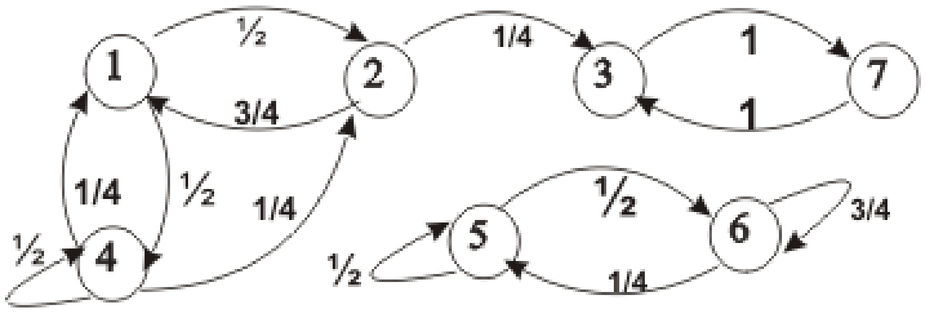
4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Пример 1. Классифицировать состояния цепи Маркова, заданной матрицей вероятностей переходов за один шаг.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Решение.

Граф переходов:

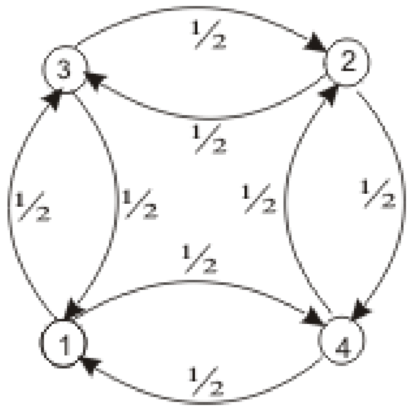


Каноническая форма матрицы переходов:

$$P = \begin{array}{c} \\ S5 \\ S6 \\ S3 \\ S7 \\ S1 \\ S2 \\ S4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S5 & S6 & S3 & S7 & S1 & S2 & S4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

У рассматриваемой цепи состояния 1,4,2 – несущественные, 3,5,6,7 –существенные, класс1 –{3,7} , класс 2 -{5,6}.

Пример 2.



$$P = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Возвращение в каждое состояние возможно лишь за четное число шагов, переход в соседнее состояние – за нечетное число шагов, а матрица вероятностей переходов имеет блочную структуру.
Отсюда видно, что класс X ={1,2,3,4} разбивается на два подкласса C_0 = {1,2} и C_1 = {3,4 } , обладающих следующим свойством цикличности: за один шаг цепь Маркова из C_0 непременно переходит в C_1 , а из C_1 – в C_0 , но за два шага возвращается в исходный класс. Этот пример показывает возможность разбиения неразложимых классов на циклические подклассы.

Теорема 2. Для того, чтобы однородная марковская цепь с конечным числом состояний имела единственное стационарное предельное распределение вероятностей необходимо и достаточно, чтобы все существенные состояния были сообщающимися.

Замечание 1. Предельная стационарная вероятность несущественного состояния всегда оказывается равной нулю: рано или поздно система выходит из этого состояния и уже в него не возвращается.
Замечание 2. Предельная стационарная вероятность единственного состояния поглощения (при отсутствии других классов существенных состояний) всегда оказывается равной единице: рано или поздно система придёт в это состояние и уже из него не выйдет.
Замечание 3. При вычислениях вероятностей надо в формулах учитывать не все состояния s_j, а только те, для которых переходные вероятности отличны от нуля, т.е. те, из которых на графе состояний ведут стрелки в состояние s_i.

Пример 3. Матрица перехода цепи Маркова имеет вид $P=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент характеризуется вектором $\boldsymbol{p}(0) = (0{,}1;\ 0{,}9)$. Найти:

1) матрицу перехода за 2 шага;
2) распределение вероятностей по состояниям после 2-го шага;
3) вероятность того, что после 1-го шага состоянием цепи будет s_1;
4) стационарное распределение вероятностей по состояниям.

Решение.

1) $P(2)= P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix}$. *2)* $\boldsymbol{p}(2) = \boldsymbol{p}(0)\, P^2 = (0{,}1;\, 0{,}9)\begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix} = (0{,}331;\ 0{,}669)$.

3) $\boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{p}(0)\, P = (0{,}1;\ 0{,}9)\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. $p_1(1) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}31$.

4) $$\begin{cases} (P_1, P_2)\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = (P_1, P_2), \\ P_1 + P_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}4P_1 + 0{,}3P_2 = P_1, \\ 0{,}6P_1 + 0{,}7P_2 = P_2, \\ P_1 + P_2 = 1. \end{cases} \to P_1 = 1/3,\ P_2 = 2/3.$$

Вероятностно-временные характеристики цепи Маркова

Вероятность перехода из несущественного состояния в замкнутый класс.

Пусть $\Pi_i(S_k)$ - вероятность перехода цепи Маркова из несущественного состояния i в замкнутый класс S_k , p_{ij}– вероятности перехода из i-го состояния в j-е. Тогда $\Pi_i\ (S_k)$ является решением неоднородной системой линейных алгебраических уравнений следующего вида.

$$\Pi_i(S_k) = \sum_{j\in T} p_{ij}\Pi_j(S_k) + \sum_{j\in S_K} p_{ij}\ ,$$

где T – множество несущественных состояний.

Среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс.

Пусть для цепи Маркова единственный замкнутый класс S. Обозначим $m_i(S)$ – среднее значение времени перехода цепи Маркова из несущественного состояния i в замкнутый класс S. Учитывая, что если из состояния i можно сразу попасть в класс S , то время перехода равно единице, а если этот переход выполняется в несущественное состояние j, тогда суммарное время перехода составляет $1+m_j\,(S)$, где первое слагаемое, равное единице, определяет первый шаг, а второе: $m_j\,(S)$– среднее значение времени перехода из состояния j в класс S.

В силу формулы полной вероятности для условных математических ожиданий, можно записать систему линейных неоднородных уравнений для определения $m_i(S)$:

$$m_i(S) = \sum_{j\in S} p_{ij} \times 1 + \sum_{j\in T} p_{ij}\left(1 + m_j(S)\right)$$

Если цепь Маркова содержит k замкнутых классов, то для нахождения среднего времени перехода из несущественного состояния в k-й замкнутый класс S_k , необходимо учитывать вероятность перехода в этот замкнутый класс, то есть находить условное время перехода $m_i\ (S_k / H_k)$, где H_k– событие, состоящее в том, что из i-го состояния мы перешли в k-й замкнутый класс. Это время перехода определяется равенством:

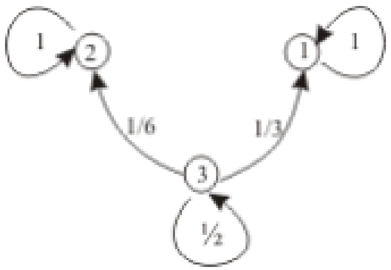
$$m_i(S_k / H_k) = \frac{m_i(S_k, H_k)}{\Pi_i\ (H_k)},$$

где $m_i\ (S_k\,, H_k)$ определяется аналогично $m_i(S)$ для цепи Маркова с единственным замкнутым классом состояний.

Пример 4. Найти вероятность и условное среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутый класс для цепи Маркова, заданных матрицей переходов за один шаг $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Решение.

Граф состояний для заданной цепи Маркова имеет вид



Состояние 3 – несущественное, есть два неразложимых класса $S_1=\{1\}$, $S_2=\{2\}$. Рассмотри две гипотезы: H_1 – произошел переход в замкнутый S_1 ; H_2 – произошел переход в замкнутый S_2 . Тогда условное среднее время перехода из несущественного состояния в замкнутые классы S_1 и S_2 определяется по формулам:

$$m_3(S_1 / H_1) = \frac{m_3(S_1, H_1)}{\Pi_3(H_1)},\ m_3(S_2 / H_2) = \frac{m_3(S_2, H_2)}{\Pi_3(H_2)},$$

где $\Pi_3(H_i)$ – вероятность H_i , то есть вероятность перехода из несущественного состояния 3 в i-й замкнутый класс.

Вероятности перехода из несущественного состояния 3 в замкнутые классы S_1, и S_2 определяем по формулам

$$\Pi_3(S_1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\Pi_3(S_1) \quad \rightarrow \Pi_3(S_1)=2/3; \quad \Pi_3(S_2)=1/3 \quad . \left(\Pi_i(S_k)=\sum_{j\in T} p_{ij}\Pi_j(S_k)+\sum_{j\in S_K} p_{ij} \right)$$

$$\Pi_3(S_2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\Pi_3(S_2)\,.$$

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Среднее время перехода из несущественного состояния 3 в замкнутые классы S_1, и S_2 находим из системы уравнений

$$m_3(S_1,H_1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\big(1+m_3(S_1,H_1)\big), \Rightarrow\ m_3(S_1,H_1)=\frac{5}{3}; \qquad \left(m_i(S)=\sum_{j\in S} p_{ij}\times 1+\sum_{j\in T} p_{ij}\big(1+m_j(S)\big) \right)$$

$$m_3(S_2,H_2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\big(1+m_3(S_2,H_2)\big), \Rightarrow\ m_3(S_2,H_2)=\frac{4}{3}\,.$$

Тогда условное среднее время перехода из несущественного состояния 3 в замкнутые классы S_1, и S_2 составляет:

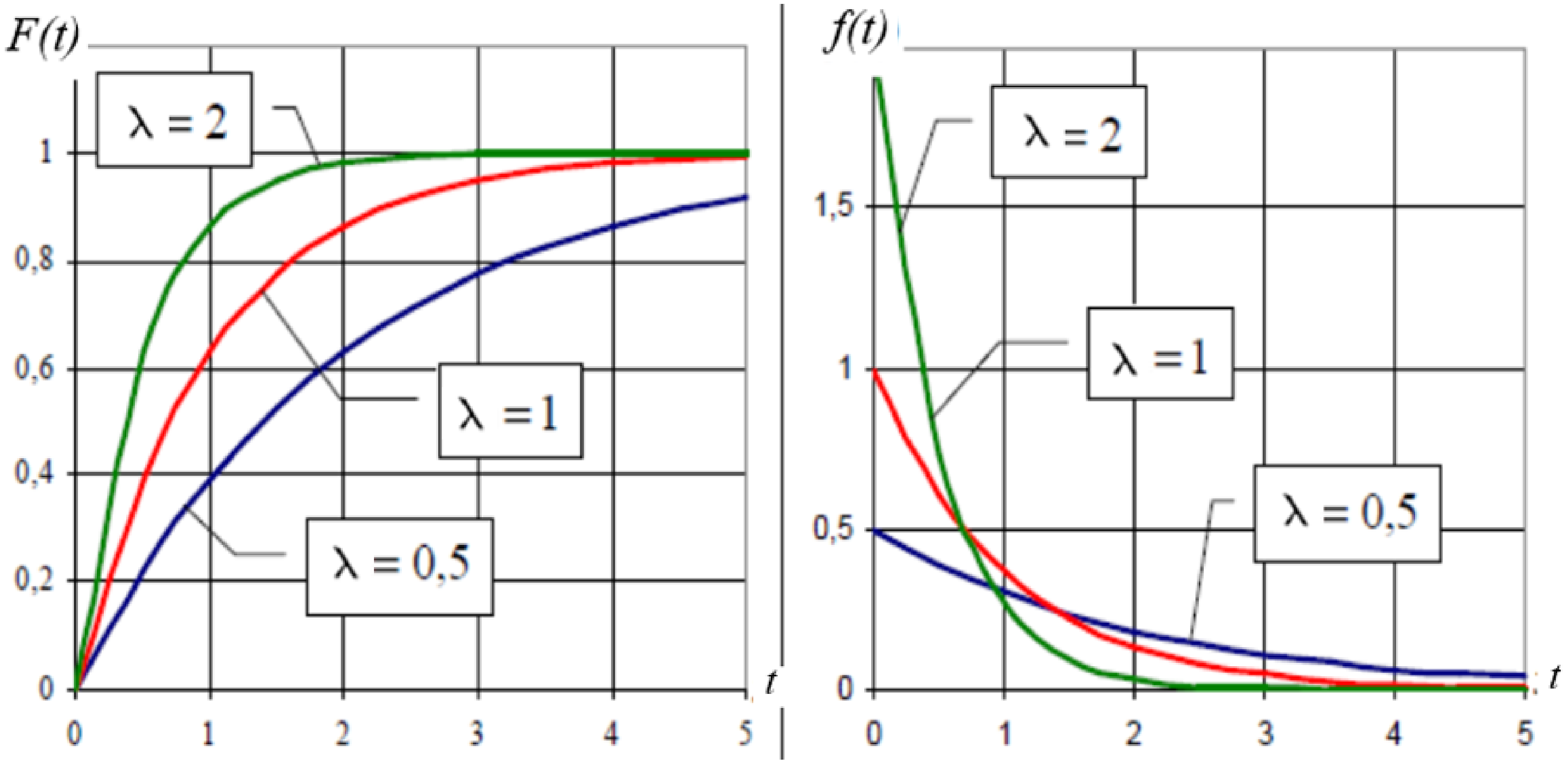
$$m_3(S_1/H_1)=\frac{5/3}{2/3}=\frac{5}{2},\ m_3(S_2/H_2)=\frac{4/3}{1/3}=4\,.$$

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем иногда называют «*непрерывной цепью Маркова*». Для того чтобы случайный процесс с непрерывным временем был марковским, необходимо, чтобы интервалы времени между соседними переходами из состояния в состояние были распределены по экспоненциальному закону.

Пусть время нахождения случайного процесса в некотором состоянии s_i до его перехода в другое состояние s_j распределено по экспоненциальному закону с функцией распределения $F_{ij}(\tau)=1\text{-}\exp\{-\lambda_{ij}\tau\}$, где λ_{ij} - параметр распределения, характеризующий частоту перехода из состояния s_i в состояние s_j и определяемый как величина, обратная среднему времени нахождения случайного процесса в состоянии s_i до момента его перехода в состояние s_j. Вычислим вероятность того, что случайный процесс перейдет в состояние s_j в течение интервала времени $\Delta\tau$ при условии, что в состоянии s_i процесс уже находится в течение времени τ_0 . Эта условная вероятность равна

$$P_{ij}(\Delta\tau|\tau\geq\tau_0)=\frac{F(\tau_0+\Delta\tau)-F(\tau_0)}{1-F(\tau_0)}=1\text{-}\exp\{-\lambda_{ij}\,\Delta\tau\}$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

$$m_t = \frac{1}{\lambda}; D_t = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Показательное (экспоненциальное) распределение

Вероятность перехода из одного состояния в другое зависит только от исходного состояния s_i и не зависит от интервала времени τ_0, то есть от того, как долго находился процесс в состоянии s_i , а также от того, какие состояния предшествовали состоянию s_i. Другими словами, поведение случайного процесса не зависит от предыстории и определяется только его состоянием в настоящий момент, то есть процесс является марковским.

Следствие 1. Если время нахождения случайного процесса в некотором состоянии s_i до его перехода в другое состояние s_j распределено по экспоненциальному закону с параметром λ_{ij} , то интервал времени от любого случайного момента времени до момента перехода в состояние s_j имеет такое же экспоненциальное распределение с тем же параметром λ_{ij} .

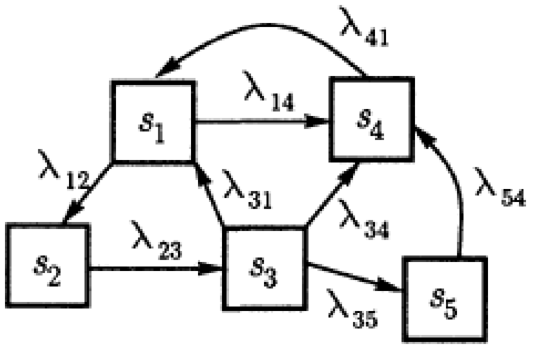
Следствие 2. Безусловная $P_{ij}(\Delta\tau)$ и условная $P_{ij}(\Delta\tau/\ \tau \geq \tau_0)$ вероятности перехода в другое состояние за время $\Delta\tau$ для марковского процесса одинаковы и равны 1-exp{- $\lambda_{ij}\ \Delta\tau$}. Если интервал времени $\Delta\tau$ достаточно мал, то разлагая exp{- $\lambda_{ij}\ \Delta\tau$} в ряд по степеням $\lambda_{ij}\ \Delta\tau$ при $\Delta\tau \to 0$ и пренебрегая величинами высшего порядка малости, получим вероятность перехода из одного состояния в другое за бесконечно малый интервал времени:

$P_{ij}(\Delta\tau)=1-(1- \lambda_{ij}\ \Delta\tau\ )= \lambda_{ij}\ \Delta\tau$

Поскольку для такого процесса вероятность перехода из состояния s_i в s_j для любого момента времени равна нулю, то вместо вероятности перехода P_{ij} рассматривают *плотность вероятности перехода* λ_{ij} , которая определяется как предел отношения вероятности перехода из состояния s_i в s_j за малый промежуток времени Δt, примыкающий к моменту t, к длине этого промежутка, когда она стремится к нулю. Плотность вероятности перехода может быть как постоянной (λ_{ij} = const), так и зависящей от времени [$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$]. В первом случае марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется *однородным.* Пример такого процесса - случайный процесс $X(t)$, представляющий собой число появившихся до момента t событий в простейшем потоке.

При рассмотрении случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно представлять себе переходы системы S из состояния в состояние как происходящие под влиянием некоторых потоков событий; при этом плотности вероятностей перехода получают смысл интенсивностей λ_{ij} соответствующих потоков событий (как только происходит первое событие в потоке с интенсивностью λ_{ij} , система из состояния s_i скачком переходит в s_j. Если все эти потоки пуассоновские (т.е. ординарные и без последствия, с постоянной или зависящей от времени интенсивностью), то процесс, протекающий в системе S, будет марковским.

Рассматривая марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, очень удобно пользоваться графом состояний, на котором против каждой стрелки, ведущей из состояния s_i в s_j, проставлена интенсивность λ_{ij} потока событий, переводящего систему по данной стрелке. Такой граф состояний называют *размеченным*.



Вероятность того, что система S, находящаяся в состоянии s_i за элементарный промежуток времени $(t, t+ dt)$ перейдет в состояние s_j, есть вероятность того, что за это время dt появится хотя бы одно событие потока, переводящего систему S из s_i в s_j. С точностью до бесконечно малых высших порядков эта вероятность равна $\lambda_{ij}\, dt$.

Потоком вероятности перехода из состояния s_i в s_j называется величина $\lambda_{ij}\, p_i(t)$ (здесь интенсивность λ_{ij} может быть как зависящей, так и независящей от времени).

Рассмотрим случай, когда система S имеет конечное число состояний $s_1, s_2, \ldots s_n$. Для описания случайного процесса, протекающего в этой системе, применяются вероятности состояний

$$p_1(t),\ p_2(t),\ \ldots,\ p_n(t),$$

где $p_i(t)$ - вероятность того, что система S в момент t находится в состоянии s_i

$$p_i(t) = \mathrm{P}\{S(t) = s_i\}. \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1.$$

Для нахождения вероятностей нужно решить систему дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), имеющих вид

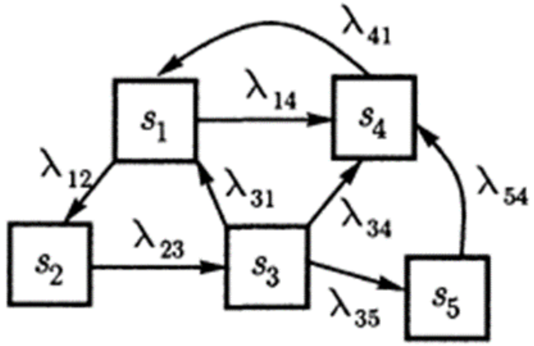
$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

или, опуская аргумент *t*,

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} p_j - p_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Уравнения удобно составлять, пользуясь размеченным графом состояний системы и следующим мнемоническим правилом: *производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, переводящих из других состояний в данное, минус сумма всех потоков вероятности, переводящих из данного состояния в другие.*

Пример.



$$dp_1 / dt = \lambda_{31} p_3 + \lambda_{41} p_4 - (\lambda_{12} + \lambda_{14})\, p_1;$$

$$dp_2 / dt = \lambda_{12} p_1 - \lambda_{23} p_2;$$

$$dp_3 / dt = \lambda_{23} p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{34} + \lambda_{35})\, p_3;$$

$$dp_4 / dt = \lambda_{14} p_1 + \lambda_{34} p_3 + \lambda_{51} p_5 - \lambda_{41} p_4;$$

$$dp_5 / dt = \lambda_{35} p_1 - \lambda_{54} p_5.$$

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний $p_i(t)$, нужно задать начальное распределение вероятностей

$$p_1(0),\ p_2(0),\ \ldots,\ p_i(0),\ \ldots,\ p_n(0)$$

Во многих случаях, когда процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, возникает вопрос о предельном поведении вероятностей $p_i(t)$ при $t \to \infty$. Если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются простейшими (т.е. стационарными пуассоновскими с постоянными интенсивностями λ_{ij}), в некоторых случаях существуют *финальные* (или предельные) вероятности состояний.

$$p_i = \lim_{t \to \infty} p_i(t) \; (i = 1, \ldots, n),$$

не зависящие от того, в каком состоянии система S находилась в начальный момент. Это означает, что с течением времени в системе S устанавливается *предельный стационарный режим,* в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности состояний уже не меняются. В этом предельном режиме каждая финальная вероятность может быть истолкована *как среднее относительное время* пребывания системы в данном состоянии.

Система, для которой существуют финальные вероятности, называется *эргодической* и соответствующий случайный процесс — *эргодическим*.

Для существования финальных вероятностей состояний одного условия λ_{ij} = const недостаточно, требуется выполнение еще некоторых условий, проверить которые можно по графу состояний, выделив на нем «существенные» и «несущественные » состояния. Состояние s_i называется *существенным,* если нет другого состояния s_j такого, что, перейдя однажды каким-то способом из s_i в s_j система уже не может вернуться в s_i. Все состояния, не обладающие таким свойством, называются *несущественными*

Например, для системы S, граф состояний которой дан на рисунке 1, состояния s_1 и s_2 несущественны, а состояния s_3, s_4, s_5, s_6, s_7 — существенны

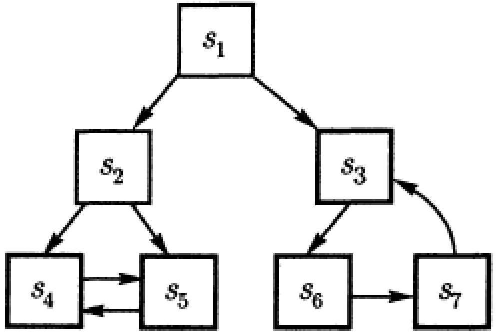


Рис.1

При конечном числе состояний n для существования финальных вероятностей *необходимо и достаточно,* чтобы *из каждого существенного состояния можно было {за какое-то число шагов) перейти в каждое другое существенное.* Граф, представленный на рисунке 1, этому условию не удовлетворяет (например, из существенного состояния s_4 нельзя перейти в существенное состояние s_6); для графа, показанного на рисунке 2, финальные вероятности существуют (из каждого существенного состояния возможен переход в каждое другое существенное). Несущественные состояния потому так и называются, что из каждого такого состояния система рано или поздно уйдет в какое-то из существенных и больше не вернется. Естественно, финальные вероятности для несущественных состояний равны нулю.

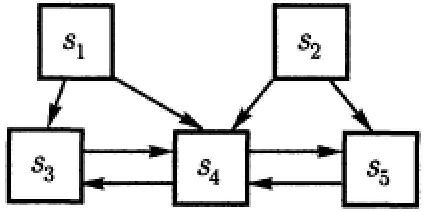
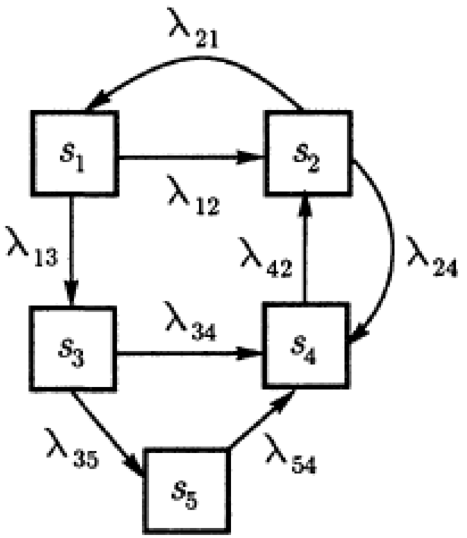


Рис.2

Если система S имеет конечное число состояний s_1, s_2, ...s_n, то для существования финальных вероятностей *достаточно,* чтобы *из любого состояния системы можно было* (за какое-то число шагов) *перейти в любое другое.* Если число состояний s_1, s_2, ...s_n,... бесконечно, то это условие перестает быть достаточным, и существование финальных вероятностей зависит не только от графа состояний, но и от интенсивностей λ_{ij} .

Финальные вероятности состояний (если они существуют) могут быть получены решением *системы линейных алгебраических уравнений,* они получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если положить в них левые части (производные) равными нулю. Однако удобнее составлять эти уравнения непосредственно по графу состояний, пользуясь мнемоническим правилом: *для каждого состояния суммарный выходящий поток вероятности равен суммарному входящему.*

Пример.



$$(\lambda_{12} + \lambda_{13})\, p_1 = \lambda_{21} p_2;$$

$$(\lambda_{21} + \lambda_{24})\, p_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{42} p_4;$$

$$(\lambda_{34} + \lambda_{35})\, p_3 = \lambda_{13} p_1;$$

$$\lambda_{42}\, p_4 = \lambda_{24} p_2 + \lambda_{34} p_3 + \lambda_{54} p_5;$$

$$\lambda_{54}\, p_5 = \lambda_{35} p_3.$$

По аналогии с дискретными процессами для однородных непрерывных марковский цепей можно ввести понятие матрицы интенсивностей.

Матрицей интенсивностей переходов называется матрица вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \dots & \lambda_{kk} \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы этой матрицы неположительны, остальные элементы – неотрицательны: $\lambda_{ij} \le 0$ при $i = j$; $\lambda_{ij} \ge 0$ при $i \ne j$.

Сумма элементов каждой строки равна нулю, т.е.

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} = 0, \quad i = \overline{1,k} .$$

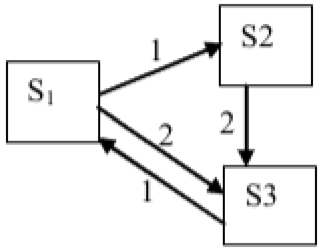
Матрица, в которой сумма элементов в каждой строке равна нулю, называется *дифференциальной*.

Пример.

По матрице интенсивностей $\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ а) построить размеченный граф состояний; б) записать систему уравнений Колмогорова; в) найти финальные вероятности.

Решение.

а)



б)

$$\begin{cases} P_1'(t) = -3P_1(t) + P_3(t), \\ P_2'(t) = P_1(t) - 2P_2(t), \\ P_3'(t) = 2P_1(t) + 2P_2(t) - P_3(t) \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} -3P_1 + P_3 = 0, \\ P_1 - 2P_2 = 0, \\ 2P_1 + 2P_2 - P_3 = 0, \\ P_1 + P_2 + P_3 = 1. \end{cases} \quad P_1 = \frac{2}{9}, \; P_2 = \frac{1}{9} \; P_3 = \frac{2}{3}.$$