Лекция 15. Ряд Маклорена для основных функций

Рассмотрим разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

1) *Разложение функции* $f(x) = e^x$. Имеем: $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$, откуда при $x = 0$ получаем: $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$. По формуле
(22) для функции e^x составим ряд Маклорена:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{29}$$

Найдем интервал сходимости ряда (29)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!} = \infty .$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой.

Докажем теперь, что функция e^x – сумма ряда (29).
Для всех $x \in (-R; R)$ имеем $|f^{(n)}(x)| = e^x < e^R = M$, т.е. все производные в этом интервале ограничены одним и тем же числом $M = e^R$. Следовательно, по теореме о достаточном условии разложимости функции в ряд Тейлора, функция e^x разлагается единственным образом

в степенной ряд по степеням x на любом интервале $(-R; R)$, а следовательно, и на всей числовой прямой.

Итак, для функции $f(x) = e^x$ справедливо следующее разложение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathrm{R}. \tag{30}$$

2) *Разложение функции* $f(x) = \sin x$. Имеем: $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \ldots, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, откуда, полагая $x = 0$, получаем: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0, \ldots$ Составим по формуле (22) для функции $\sin x$ ряд Маклорена:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Любая производная функции $f(x) = \sin x$ по модулю не превосходит единицы, $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$ для всех $x \in \mathrm{R}$. Тогда по теореме о достаточном условии разложимости функции в ряд Тейлора, функция $\sin x$ разлагается в степенной ряд по степеням x следующим образом:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathrm{R}. \qquad (31)$$

3) *Разложение функции* $f(x) = \cos x$. Разложение функции $f(x) = \cos x$ в ряд Маклорена можно получить так же, как и разложение функции $f(x) = \sin x$. Но проще поступить иначе – почленно продифференцировать ряд Маклорена для функции $\sin x$ (см. теорему о дифференцировании степенных рядов п.5.3.):

$$\cos x = (\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(x^{2n+1}\right)'}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Причем это равенство верно во всем интервале сходимости исходного ряда, т.е. при всех $x \in \mathrm{R}$.

Итак, для функции $f(x) = \cos x$ верно следующее разложение:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathrm{R}. \qquad (32)$$

4) *Разложение функции* $f(x) = \ln(1+x)$. Рассмотрим ряд из членов геометрической прогрессии $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$, первый член которой равен единице, а знаменатель $q = x$. Как известно, при $|x| < 1$ данный ряд сходится и его сумма равна $\dfrac{1}{1-x}$. Следовательно,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \ldots \tag{33}$$

Подставляя в равенство (33) $-t$ вместо x, получаем равенство

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \ldots,$$

справедливое при $|t| < 1$. Проинтегрируем этот степенной ряд почленно (см. теорему об интегрировании степенных рядов п. 5.3) в пределах от 0 до x ($|x| < 1$). Имеем

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\Big|_0^x = \ln(1+x) = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \ldots)dt =$$

$$= \int_0^x dt - \int_0^x tdt + \int_0^x t^2 dt - \int_0^x t^3 dt + \ldots + (-1)^{n-1} \int_0^x t^{n-1} dt + \ldots =$$

$$= t\Big|_0^x - \frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \frac{t^3}{3}\Big|_0^x - \frac{t^4}{4}\Big|_0^x + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}\Big|_0^x + \ldots =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Отсюда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \qquad (34)$$

Равенство (34) является разложением функции $f(x) = \ln(1+x)$ в степенной ряд. Оно справедливо при $|x| < 1$. Можно доказать, что это равенство верно и для $x = 1$.

5) *Разложение функции* $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

Имеем

$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha - 1}$;

$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha - 1}$;

…………………………………

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\ldots(\alpha - (n - 1))\,(1 + x)^{\alpha - n}$,… $n \in \mathrm{N}$.

При $x = 0$ соответствующие значения производных будут равны:

$f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha - 1)$,… $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)$.

Подставляя найденные значения производных в формулу (22) получим ряд

$$(1+x)^{\alpha} \sim 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\ldots$$

Радиус сходимости этого ряда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(n+1)!}{n!\,\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=1,$$

т.е. ряд, составленный для функции $(1 + x)^{\alpha}$, сходится в интервале $(-1; 1)$.

Можно показать, что при $x \in (-1; 1)$ остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Итак

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\ldots \qquad (35)$$

при $x \in (-1; 1)$.

Этот ряд называется *биномиальным*.

Если $\alpha = n \in \mathrm{N}$, то все члены ряда, начиная с $(n + 1)$-го номера равны нулю, так как содержат множитель $\alpha - n = n - n = 0$. В этом случае ряд представляет собой формулу *бинома Ньютона*:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!}x^n.$$

Таблица разложений в степенной ряд (ряд Маклорена) основных элементарных функций

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x \in \mathrm{R}.$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathrm{R}$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathrm{R}$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\ x \in (-1;1].$

5. $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \quad x \in (-1;1).$$

Пример. Разложить функцию $f(x) = x^3 + 2x - 5$ по степеням $x - 1$.

◄ Воспользуемся формулой (21), в которой надо взять $x_0 = 1$, $n = 3$ (n – степень многочлена). Вычислим $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$, $f'''(1)$ и полученные числа подставим в формулу (21).

$f(1) = -2$,

$f'(x) = 3x^2 + 2$, $f'(1) = 5$,

$f''(x) = 6x$, $f''(1) = 6$,

$f'''(x) = 6$.

После подстановки в (21), в которой вместо $x - x_0$ надо писать $x - 1$, окончательно получим $x^3 + 2x - 5 = -2 + 5(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$. ►

Пример. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{1+x}$ в ряд по степеням x.

◄ По формуле суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n . \qquad (36)$$

Ряд сходится при $|x| < 1$. ►

При разложении в ряд Тейлора часто используют почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов.

Пример. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

◄ Найдем производную $f(x)$, получим

$$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Заменив в формуле (36) x на x^2, получим

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \text{ для } x \in (-1;1).$$

Интегрируя этот ряд почленно, получаем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Так как при почленном интегрировании интервал сходимости сохраняется, то $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ для любого $x \in (-1;1]$. ►

Применение степенных рядов

1) Приближенное вычисление значений функции.

Если функция $f(x)$ в интервале $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ разлагается в степенной ряд $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, то в качестве приближенного значения функции $f(x)$ в точке $x \in (x_0 - R;\ x_0 + R)$ можно взять частичную сумму этого ряда: $f(x) \approx S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$. Точность этого равенства увеличивается с ростом n. Абсолютная погрешность этого приближенного равенства равна модулю остатка ряда, т.е.

$$\left|f(x)-S_n(x)\right|=\left|R_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right|.$$

Оценивать остаток ряда можно различными способами. Можно использовать представление остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа, Коши или интегральной. В отдельных случаях можно применять признак Лейбница: если степенной ряд в некоторой точке x удовлетворяет признаку Лейбница, то

$$\left|R_n(x)\right| \le \left|a_{n+1}\left(x-x_0\right)^{n+1}\right|.$$

Пример 13. Вычислить число e с точностью до 0,001.

◀ Подставив x = 1 в формулу (12), имеем $e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$.

Оценим остаток

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ldots k}<\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{k-n}}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}.$$

Следовательно, равенство $e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ имеет абсолютную погрешность, равную $\frac{1}{n!n}$. Найдем n, для которого $\frac{1}{n!n}<0{,}001$ или $n!n > 1000$. Получаем $n \ge 6$. Вычисляя $2+\sum_{k=2}^{6}\frac{1}{k!}$ и округляя, находим ответ с требуемой точностью $e \approx 2{,}718$. ▶

2) Приближенное вычисление определенных интегралов.

Разлагая подынтегральную функцию $f(t)$ в степенной ряд, можно, используя теорему об интегрировании степенных рядов, представить интеграл $\int\limits_0^x f(t)dt$ в виде степенного ряда и подсчитать величину этого интеграла с заданной точностью при любом значении x из интервала сходимости полученного ряда.

Пример. Разложить функцию $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ в степенной ряд по степеням x.

◀ Используя разложение $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, получим $e^{-t^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}$ на всей числовой оси. Применяя почленное интегрирование, находим $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$. ▶

Пример. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\sin x^2}{x}dx$ с точностью до 0,001.

◄ Известно, что первообразная для функции $\frac{\sin x^2}{x}$ не выражается через элементарные функции. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, используя разложение (31):

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Подставляя вместо y x^2, получаем

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Тогда

$$\frac{\sin x^2}{x} = x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \frac{x^{13}}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Интегрируя обе части этого равенства, получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x^2}{x}dx = \int\limits_0^1 \left(x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \frac{x^{13}}{7!} + \ldots \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6 \cdot 3!} + \frac{x^{10}}{10 \cdot 5!} - \frac{x^{14}}{14 \cdot 7!} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6 \cdot 3!} + \frac{1}{10 \cdot 5!} - \frac{1}{14 \cdot 7!} + \ldots$$

Получили знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница. Так как $\frac{1}{6 \cdot 3!} = \frac{1}{36} > 0{,}001$, а $\frac{1}{10 \cdot 5!} = \frac{1}{1200} < 0{,}001$, то с точностью до 0,001 имеем

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{36} \approx 0{,}472.$$