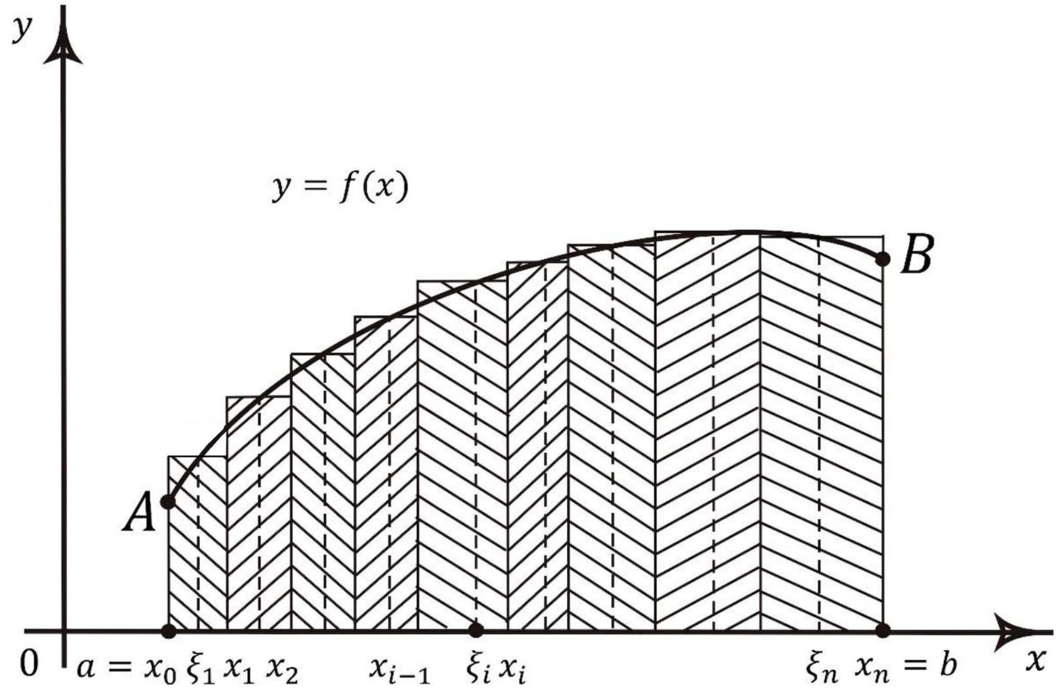
Лекция 9

Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, $a<b$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей промежуточными точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

и выберем в каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку $\xi_i : x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = 1, \ldots, n$.



Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через λ наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$: $\lambda = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$

Определение. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i \tag{2}$$

называется ***интегральной суммой*** функции $f\left(x\right)$ для данного разбиения (1) и данного выбора точек ξ_i.

Определение. Пусть существует конечный предел интегральных сумм (2), когда $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $\left[a,b\right]$ на части промежуточными точками $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, ни от выбора точек $\xi_1, \xi_{2,} \ldots, \xi_n$. Тогда этот предел называется ***определенным интегралом*** функции $f\left(x\right)$ на отрезке $\left[a,b\right]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f\left(x\right)dx.$$

Таким образом,

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i.$$

Определение. Функция $f\left(x\right)$ называется при этом ***интегрируемой*** (по Риману) на отрезке $\left[a,b\right]$. Числа a и b называются ***нижним*** и ***верхним*** пределами интеграла, соответственно.

Определение. Пусть $a > b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Определение. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

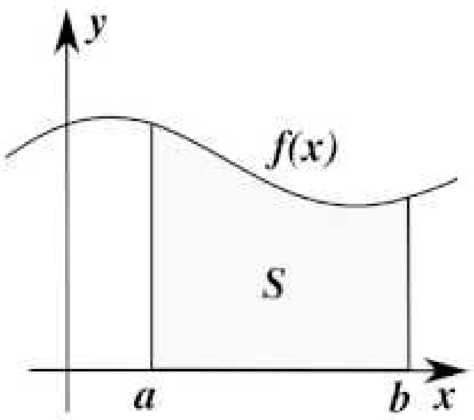
Теорема (необходимое условие интегрируемости функции). *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$*, то функция* $f(x)$ *ограничена на этом отрезке.*

Это условие не является достаточным для интегрируемости функции по Риману.

Теорема (достаточное условие интегрируемости функции). *Непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *интегрируема на этом отрезке.*

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *имеет конечное число точек разрыва на отрезке* $[a,b]$ *и ограничена на* $[a,b]$*, то* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$.

Пусть $f(x) \geq 0$. Геометрически частичная сумма выражает площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда вытекает



Геометрический смысл определенного интеграла.

Если неотрицательная функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

равен площади криволинейной фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, *снизу осью Ох и с боков отрезками прямых* $x = a$ *и* $x = b$.

Механический смысл определенного интеграла.

Пусть дан линейный неоднородный стержень, лежащий на оси Ox в пределах отрезка $[a,b]$. Пусть плотность распределения массы вдоль стержня (линейная плотность) есть некоторая непрерывная функция $\rho(x) \geq 0$. Требуется определить массу стержня. Для этого разобьем стержень на n произвольных мелких частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Будем считать, что плотность $\rho(x)$ постоянна на части $[x_{i-1}, x_i]$ и равна $\rho(\xi_i)$ для некоторой точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\ldots,n$. Тогда масса отрезка стержня $[x_{i-1}, x_i]$ равна $\rho(\xi_i)\Delta x_i$, а масса всего стержня приближенно равна $\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i$. Точное значение массы m получим в пределе, когда $\max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i \to 0$:

$$m = \lim_{\max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Основные свойства определенного интеграла.

0) Нормировка.

$$\int_a^b 1dx = b - a.$$

Следствие. $\int_a^b Cdx = C(b-a), C = \text{const}$

1) **Линейность.**

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, A и B – константы, то функция

$Af(x) + Bg(x)$ также интегрируема на $[a,b]$ и выполняется равенство

$$\int_a^b Af(x) + Bg(x)dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx.$$

2) Монотонность.

Если $a<b$, $f(x)\le g(x)$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Следствие 1. Если $f(x)\ge 0$ на $[a,b]$, $a<b$, и $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

Следствие 2. Если $a<b$, $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $m\le f(x)\le M$ на $[a,b]$, где $m=\text{const}$, $M=\text{const}$, то

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Следствие 3. Если $a<b$, функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a,b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Замечание. Из интегрируемости функции $|f(x)|$ не следует интегрируемость функции $f(x)$.

3) **Аддитивность**.

Для любых трех чисел a,b,c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

при условии, что функция $f(x)$ интегрируема на объемлющем отрезке.

Определение. Средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется число

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Пусть $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, где $m = \mathrm{const}$, $M = \mathrm{const}$, тогда $m \le \mu \le M$.

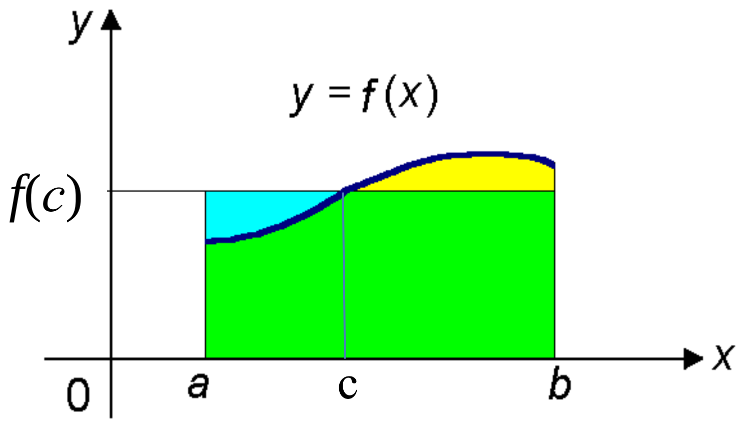
Теорема (о среднем). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется такая точка с, что* $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $m \le f(x) \le M$, где $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. По определению среднего значения $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, $m \le \mu \le M$. По теореме о переходе непрерывной функции через промежуточные значения найдется точка $c \in [a,b]$ такая, что $\mu = f(c)$ и, следовательно, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Замечание. Условие непрерывности функции является существенным.

Геометрический смысл теоремы о среднем значении

Среднее значение неотрицательной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ — это высота прямоугольника с основанием $b-a$, и высотой $f(c)$ площадь которого равна площади криволинейной трапеции.



Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,x]$ $\forall x\in[a,b]$. Построим новую функцию

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\ x\in[a,b].$$

Такую функцию называют ***интегралом с переменным верхним пределом***.

Теорема (о производной интеграла по переменному верхнему пределу). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то функция* $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\ x\in[a,b]$ *является первообразной функции* $f(x)$ *на* $[a,b]$, *т.е.* $\exists\Phi'(x)=f(x),\ x\in[a,b]$.

◄Доказательство. Зафиксируем $x_0\in[a,b]$ и рассмотрим разностное отношение для функции $\Phi(x)$ в точке x_0:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\frac{\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt\right)=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt.$$

Воспользуемся непрерывностью функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_0+\Delta x]$ и применим теорему о среднем значении. Тогда

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x,$$

где точка *c* расположена между x_0 и $x_0+\Delta x$. Следовательно,

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c),\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x_0),\text{ ч.т.д.}\blacktriangleright$$

Замечание. Мы доказали, что всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразную**.**

Замечание. Теорема распространяется и на случай ***интеграла с переменным нижним пределом***

$$\Phi(x) = \int\limits_{x}^{b} f(t)dt,\ x\in[a,b].$$

Поскольку $\int\limits_{x}^{b} f(t)dt = -\int\limits_{b}^{x} f(t)dt$, то $\Phi'(x) = -f(x)$.