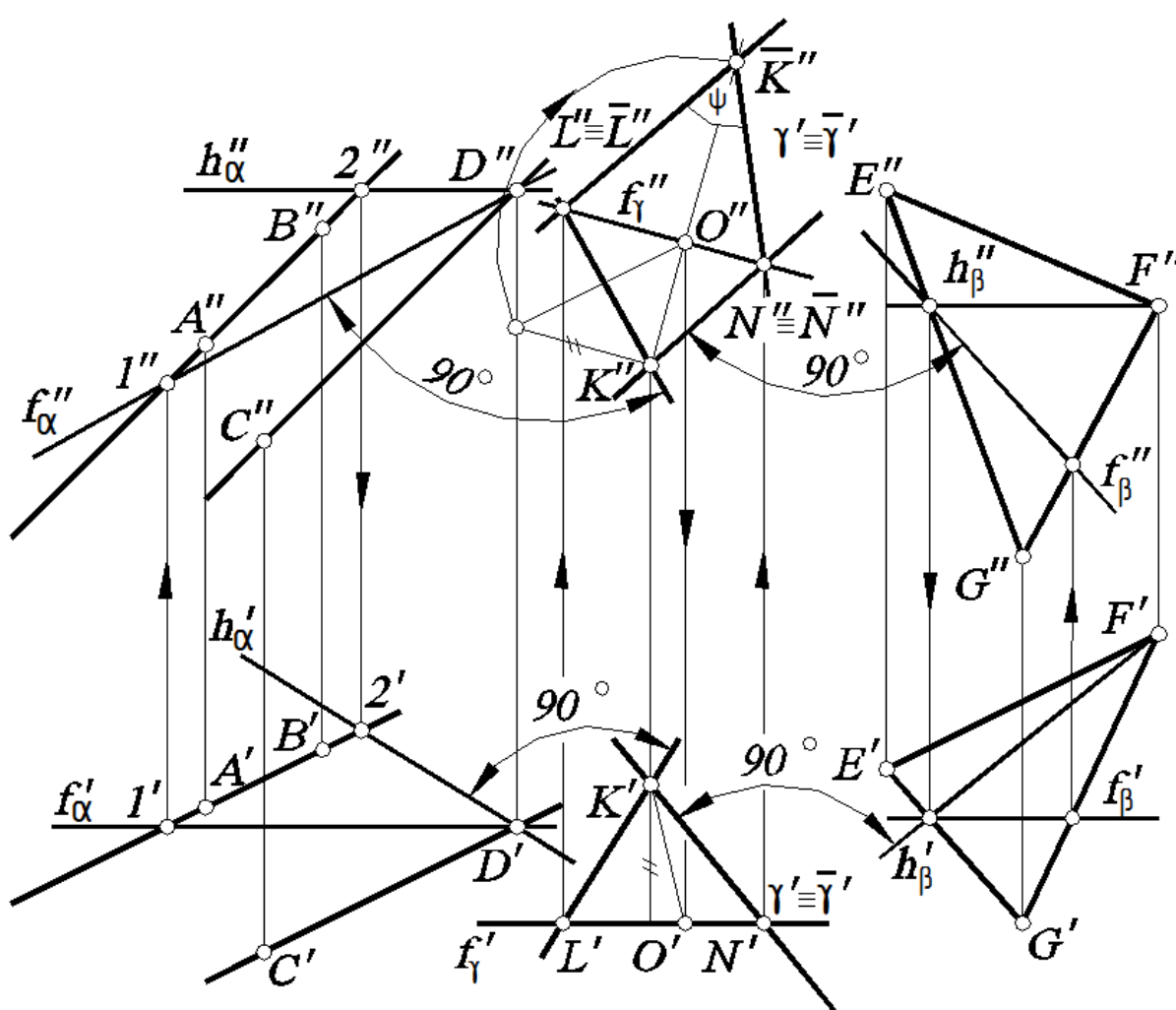


В.А. Гончарова, И.А. Гущин, Е.В. Голова

## НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Сборник задач и методика решений



Москва  
2019

Министерство науки и образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технологический университет  
«СТАНКИН»

**В.А. Гончарова, И.А. Гущин, Е.В. Голова**

## **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**Сборник задач и методика решений**

Рекомендовано кафедрой инженерной графики МГТУ «СТАНКИН» в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: 15.03.01 «Машиностроение», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 15.05.01 «Проектирование технологических машин и комплексов», 27.03.01 «Стандартизация и метрология», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.03 «Прикладная информатика».

Москва  
2019

УДК 514.7(075)  
ББК 22.151.3  
Г65

Рецензент: зав. кафедрой «Инженерная графика» РТУ МИРЭА  
к.т.п. В.И. Вышнепольский.

**В.А. Гончарова, И.А. Гушин, Е.В. Голова**

Г65 Начертательная геометрия. Сборник задач и методика решений: учеб.  
пособие. / В.А. Гончарова, И.А. Гушин, Е.В. Голова — М.: ФГБОУ ВО  
«МГТУ «СТАНКИН», 2019 - 114 с.: ил.

ISBN

В учебное пособие вошли позиционные и метрические задачи, охватывающие по своему содержанию основные разделы курса начертательной геометрии. Учебное пособие предназначено для студентов первого курса технических специальностей вузов.

УДК 514.7 (075)  
ББК 22.151.3

© В.А. Гончарова, И.А. Гушин, Е.В. Голова 2019  
© ФГБОУ ВО «МГТУ «Станкин», 2019

## Введение

Учебное пособие соответствует программе, утвержденной Министерством науки и образования Российской Федерации для машиностроительных, приборостроительных и механико-технологических специальностей вузов.

Начертательная геометрия – одна из дисциплин, составляющих фундаментальную основу общетехнического образования. Ее изучение развивает пространственное воображение и логическое мышление, без которого невозможна творческая деятельность инженера. Приобретению этих навыков в наибольшей степени способствует решение задач. Активизировать этот процесс, сделать его таким, чтобы учащиеся овладевали навыками анализа условий задач и приемами их решения – цель настоящего издания.

Учебное пособие предназначено для решения задач по начертательной геометрии на занятиях в аудитории и для самостоятельного решения дома. Затруднения при решении задач возникают из-за слабого пространственного представления, неумения анализировать условия задач и правильного выбора алгоритма их решения.

Учебное пособие состоит из введения, семи разделов, и приложений. В разделах подобраны типовые позиционные задачи на проецирование геометрических фигур (точки, прямой линии, плоскости), на их взаимное положение, на способы преобразования проекций геометрических фигур и метрические задачи. Содержание задач охватывает основные разделы курса начертательной геометрии.

Все задачи сгруппированы по темам. Их отличительная особенность – структура, образованная из трех взаимно связанных частей. В первой части кратко изложены теоретические положения темы и вывод, что необходимо знать и уметь для решения задач. Вторая часть состоит из вопросов и упражнений для самопроверки.

Третья часть – основная составляющая тем пособия – содержит задачи, решение которых позволит учащимся освоить основы начертательной геометрии. Обобщенные приемы решений задач приведены в приложении.

При решении задач все надписи, буквенные обозначения и знаки должны быть выполнены чертежным шрифтом по ГОСТ 2.304-81. Это относится в равной степени к русскому, латинскому и греческому алфавитам.

## Принятые обозначения

- $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  - горизонтальная, фронтальная и профильная плоскости проекций;
- $X, Y, Z$  - оси координат;
- $OX, OY, OZ$  - оси проекций;
- $O$  - точка пересечения осей проекций или начало координат;
- $\pi_1/\pi_2, \pi_2/\pi_3$  - система плоскостей проекций;
- $\pi_4, \pi_5$  - дополнительные плоскости проекций;
- $X_1, X_2$  - новые оси проекций;
- $\pi_1/\pi_4, \pi_4/\pi_5$  - новые системы плоскостей проекций;
- $A, B, C, \dots$  - точки в пространстве;
- $1, 2, 3, \dots$  - вспомогательные точки;
- $a, b, c, \dots$  - прямые линии;
- $h, f, p$  - горизонтальная, фронтальная, профильная линии уровня;
- $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  - плоскости;
- $A', a', \alpha'$  - горизонтальные проекции геометрических фигур;
- $A'', a'', \alpha''$  - фронтальные проекции геометрических фигур;
- $A''', a''', \alpha'''$  - профильные проекции геометрических фигур;
- $A^{IV}, a^{IV}, \alpha^{IV}$  - проекции геометрических фигур на дополнительной плоскости  $\pi_4$ ;
- $\underline{i}, \underline{i}_1, \underline{i}_2$  - оси вращения;
- $A', a', \alpha'$  - проекции геометрических фигур на плоскости  $\pi_1$  после первого поворота;
- $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  - углы наклона прямой или плоскости к плоскостям проекций  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ ;
- $\varphi$  - угол между двумя геометрическими фигурами;
- $\psi$  - дополнительный угол;
- $l$  - расстояние между двумя геометрическими фигурами;
- $||$  - абсолютная величина;
- $|a|$  - длина отрезка прямой линии;
- $|A, B|$  - расстояние между точками  $A$  и  $B$ ;
- $|A, a|$  - расстояние от точки  $A$  до прямой  $a$ ;
- $|A, \alpha|$  - расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ ;
- $a \wedge b$  - угол между прямыми линиями  $a$  и  $b$ ;
- $||$  - параллельность;
- $\perp$  - перпендикулярность;
- $\cap$  - пересечение;
- $\in$  - принадлежность:  $A \in a$  - точка  $A$  принадлежит прямой  $a$ ;
- $\supset$  - содержит, включает:  $a \supset A$  - прямая  $a$  содержит или проходит через точку  $A$ ;  $\alpha \supset b$  - плоскость  $\alpha$  содержит или проходит через прямую  $b$ ;

- $\equiv$  - совпадение, тождественность:  $a' \equiv b'$  – горизонтальные проекции прямых  $a$  и  $b$  совпадают;
- $\uparrow$  – видимость:  $A \uparrow \pi_1$  – точка  $A$  видима на плоскости  $\pi_1$ ;
- $\updownarrow$  - конкурирующие фигуры:  $(A \updownarrow B) \pi_1$  – точка  $A$  конкурирует с точкой  $B$  относительно плоскости проекций  $\pi_1$ ;
- $=$  - равенство;
- $\rightarrow$  - отображается, проецируется:  $A \rightarrow \pi_2$  – точку  $A$  отображают (проецируют) на плоскость  $\pi_2$ ;
- $\pi_1/\pi_2 \rightarrow \pi_1/\pi_4$  – переход от основной системы плоскостей проекций к новой системе плоскостей проекций;
- $\nparallel$  - отрицание:  $a \nparallel b$  – прямая  $a$  не параллельна прямой  $b$ ,  $A \notin b$  – точка  $A$  не принадлежит прямой  $b$ ;
- $\Rightarrow$  - следует; если, то:  $a' \parallel b'$  и  $a'' \parallel b'' \Rightarrow a \parallel b$ ;
- $\wedge$  - союз «и»;
- $\vee$  - союз «или».

### **Общие рекомендации по решению задач**

Задачи следует решать с помощью чертежных инструментов. При графическом решении задачи рекомендуется воспользоваться цветными карандашами: синим карандашом чертить заданные проекции геометрических фигур, черным – все вспомогательные построения и красным - выделить ответ. Соблюдение этих рекомендаций облегчит, при необходимости, восстановление хода решения задачи.

При подготовке к решению задач необходимо придерживаться следующего порядка:

- 1) выполнить анализ данных задачи;
- 2) определить способ решения задачи;
- 3) составить план или алгоритм решения задачи.

Анализ данных задачи состоит из:

- 1) определения вида задачи – простая или комплексная, т.е. содержащая две и более самостоятельных задач;
- 2) установления положения геометрических фигур относительно плоскостей проекций – частное или общее;
- 3) выяснения необходимости вспомогательных построений при решении задач на исходных или преобразованных проекциях геометрических фигур.

Способ решения задачи зависит от:

- 1) содержания задачи;
- 2) положения заданных геометрических фигур;
- 3) вспомогательных построений, необходимых для решения задачи.

При выборе способа решения задачи необходимо анализировать возможные варианты ее решения.

*Если при решении задачи необходимо выполнить преобразование проекций геометрических фигур, то прежде чем приступить к графическим построениям, следует мысленно представить конечное простейшее положение фигур, позволяющее решить задачу.*

План и алгоритм содержат последовательное описание графических построений при решении задачи: первый - словами, а второй – условными знаками.

Для составления плана или алгоритма решения задачи необходимо:

- 1) представить последовательность решения задачи;
- 2) разделить графическое решение задачи на его отдельные составляющие;
- 3) записать последовательность каждого графического построения словами или условными знаками.

Под отдельным графическим построением следует понимать одно законченное графическое действие. Например, построение проекций точки, прямой линии или задание положения дополнительной плоскости и другие построения.

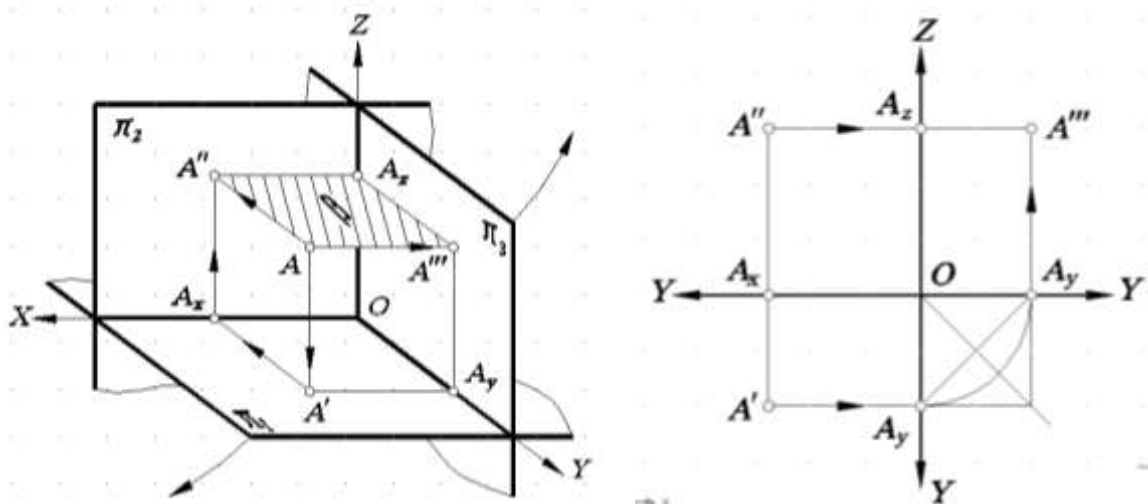
Примеры описания графических построений	
Словесное	Условными знаками
Построить горизонтальную проекцию точки $A$	отобразить $A \rightarrow \pi_1$
Провести в плоскости $\alpha$ произвольную прямую $a$	провести $a \in \alpha$
Провести горизонтальную прямую $h_\alpha$ в плоскости $\alpha$ , проходящую через ее точку $B$	провести $h_\alpha \in \alpha$ и $h_\alpha \supset B$
Задать дополнительную плоскость, перпендикулярную к плоскости $\pi_1$ и параллельную прямой $a$	задать $\pi_4 \perp \pi_1$ и $\pi_4 \parallel a \Rightarrow X_I \parallel a'$

## 1. Проецирование точки

Совокупность правил, с помощью которых строят на плоскости изображения геометрических фигур, расположенных в пространстве, называют методом проекций. Плоское изображение фигуры называют её проекцией, а процесс получения проекций – проецированием. При прямоугольном проецировании система плоскостей проекций представляет собой две взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Одну из плоскостей проекций условились располагать горизонтально, а другую – вертикально.

Плоскость проекций, расположенную горизонтально, называют горизонтальной плоскостью проекций и обозначают её буквой  $\pi_1$ , а плоскость, ей перпендикулярную, – фронтальной плоскостью проекций и обозначают буквой  $\pi_2$ . Саму систему плоскостей проекций обозначают  $\pi_1/\pi_2$ . Линию пересечения плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$  называют осью проекций  $OX$ .

Третью плоскость проекций  $\pi_3$ , называемую профильной, располагают перпендикулярно к плоскостям  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Плоскость  $\pi_3$  пересекает плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$  по прямым, которые являются осями проекций  $OY$  и  $OZ$ .



Через точку  $A$  проводят три проецирующие прямые, перпендикулярные к плоскостям проекций  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $\pi_3$ . Точки пересечения этих прямых с плоскостями проекций определяют соответственно горизонтальную  $A_x$ , фронтальную  $A_y$  и профильную  $A_z$ , проекции точки  $A$ .

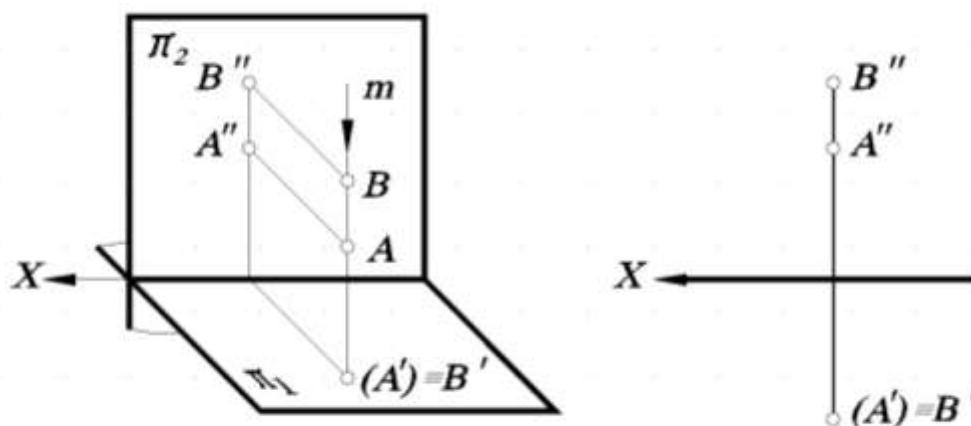
Две проекции одной и той же точки лежат на общем перпендикуляре к оси проекции. Этот перпендикуляр, соединяющий две проекции одной и той же точки, называют линией проекционной связи.

**Точка общего положения** не принадлежит ни одной из плоскостей проекций.



**Точка частного положения** расположена на одной из плоскостей проекций или осей проекций.

**Конкурирующие точки** расположены на одном и том же перпендикуляре к плоскости проекций. Точки называют конкурирующими относительно той плоскости проекций, на которой их проекции совпадают.



Представленные на рисунке точки  $A$  и  $B$ , расположенные на общей проецирующей прямой  $m$ , являются конкурирующими относительно плоскости проекций  $\pi_1$ . Это условие записывают следующим образом:  $(A \uparrow B)\pi_1$ . Горизонтальные проекции точек совпадают:  $(A_9) \equiv B_9$ . Но точка  $B$  расположена выше точки  $A$ , следовательно, её проекция  $B_9$  является видимой, а проекция  $A_9$  – невидимой и поэтому она заключена в скобки. Кратко это условие может быть записано так:  $z_B > z_A \Rightarrow B \uparrow \pi_1, A \nearrow \pi_1$ .

Под **положением точки** понимают ее расстояние до плоскостей проекций. Они известны, если имеются *две проекции* точки, которые могут быть заданы: а) графически (чертежом), б) цифрами (координатами), в) словесным описанием, г) комбинацией перечисленных выше способов.

Содержание задач на проецирование точки сводится к *определению* ее положения по заданным проекциям или к *построению* проекций точки по ее заданному положению.

### Вопросы и упражнение для самопроверки

1. Как называют и как обозначают основные плоскости проекций?
2. Какие параметры определяют положение точки в пространстве?
3. Как обозначают проекции точки на плоскостях проекций  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ ?
4. Как расположены линии проекционной связи относительно осей проекций?
5. Какие точки называют точками частного положения?
6. По какой проекции точки можно судить о ее положении относительно фронтальной плоскости проекций?
7. Какие точки называют конкурирующими?

8. Какой знак (символ) пишут между проекциями точек, если они совпадают?
9. В каких случаях проекцию точки заключают в скобки?

*Упражнение 1.* Прочитать чертежи заданных точек общего и частных положений (рис.1.1), т.е. определить расположение каждой точки относительно плоскостей проекций  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $\pi_3$ .

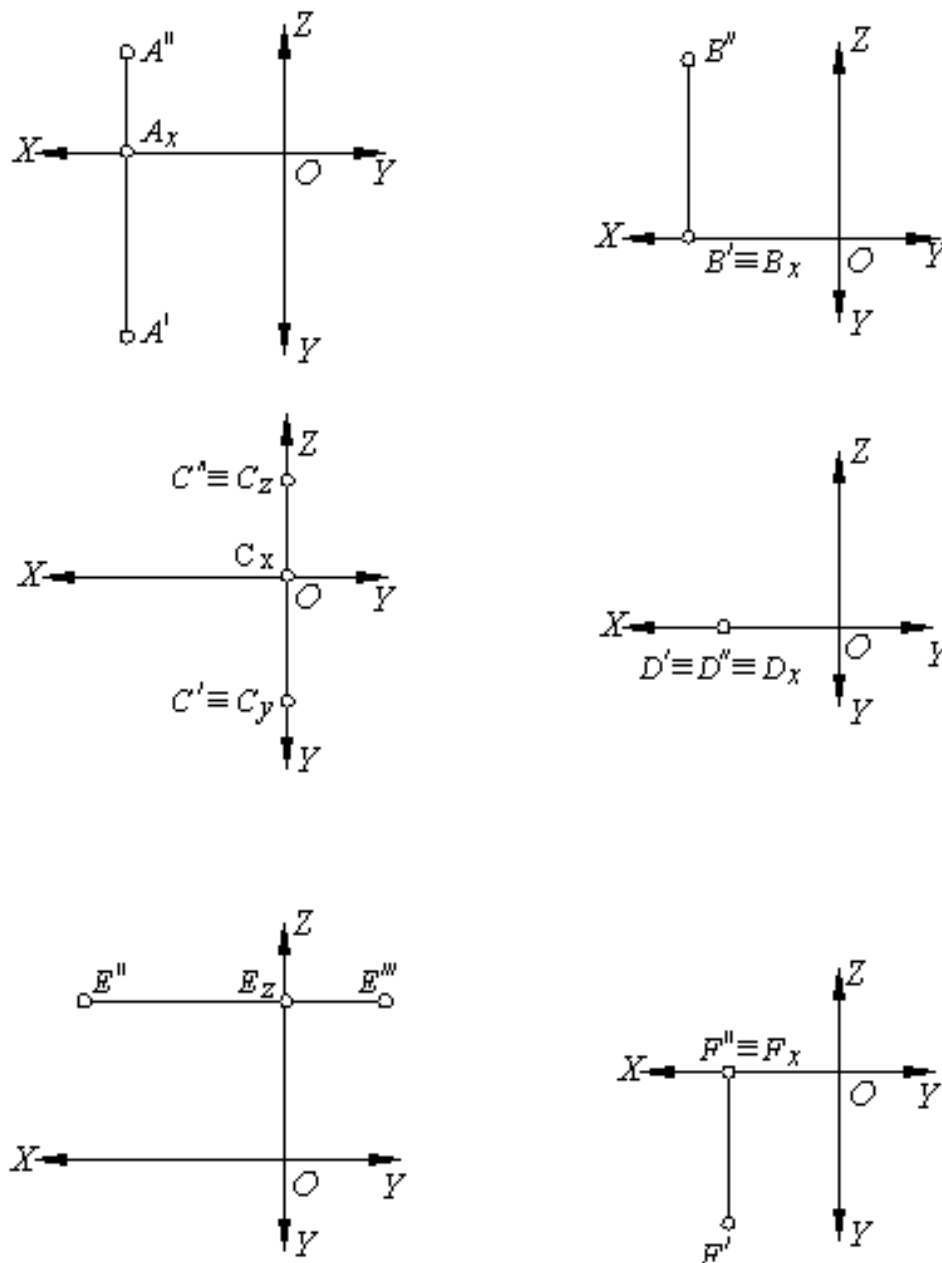


Рис.1.1.

### Задачи:

- 1.1. Построить три проекции точки  $A$ , занимающей общее положение, на наглядном изображении (рис.1.2) и на эюре, если ее расстояние от горизонтальной плоскости проекций равно 20 мм. Записать координаты точки  $A$ .

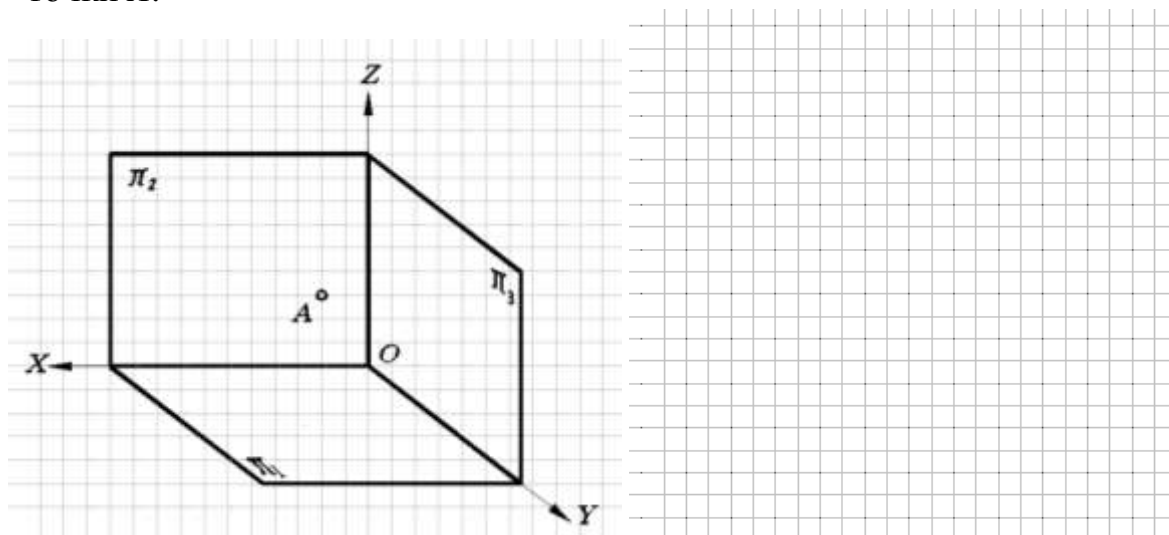


Рис.1.2

- 1.2. По заданным проекциям точки  $A$  (рис.1.3) построить ось проекций  $OZ$ .

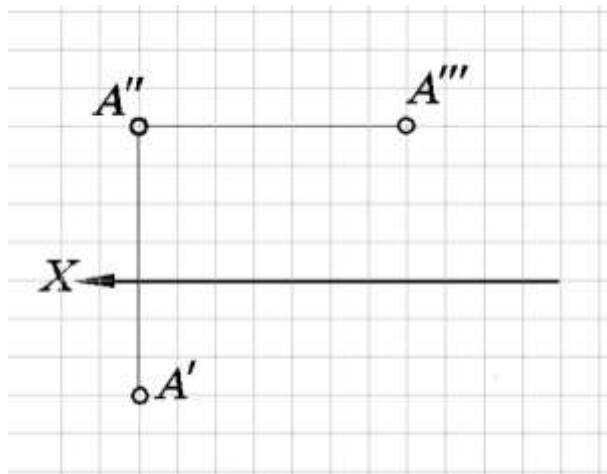


Рис.1.3

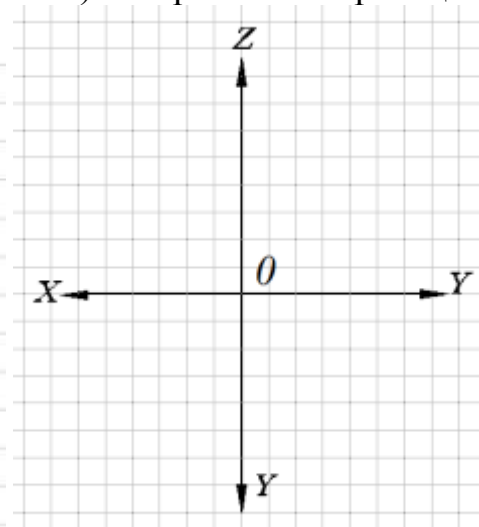


Рис.1.4

- 1.3. Построить три проекции точки  $A$  (10,20,30) и определить от какой из плоскостей проекций ( $\pi_1$ ,  $\pi_2$  или  $\pi_3$ ) точка  $A$  находится дальше (рис.1.4).
- 1.4. Построить три проекции точки  $B$ , принадлежащей плоскости  $\pi_3$  и находящейся от плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$  соответственно на расстояниях 20 и 30 мм. Записать координаты точки  $B$  (рис.1.4).

- 1.5. Построить профильные проекции заданных точек (рис.1.5) и записать в символической форме их положение относительно плоскостей проекций  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$ .

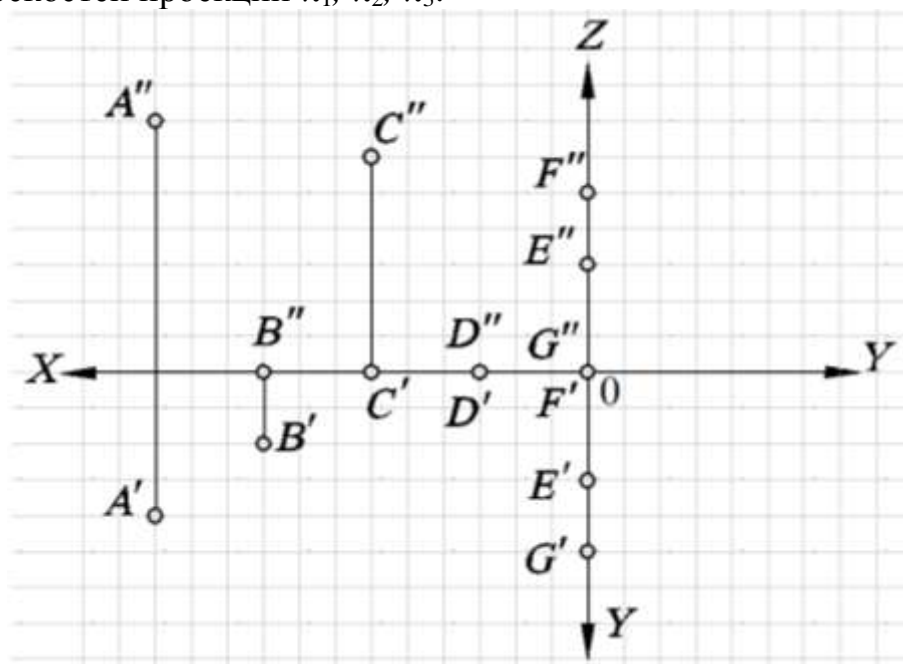


Рис.1.5

- 1.6. Построить горизонтальную и профильную проекции точки  $A$   $(20,?,25)$ , равноудаленной от плоскостей проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$  (рис.1.6).

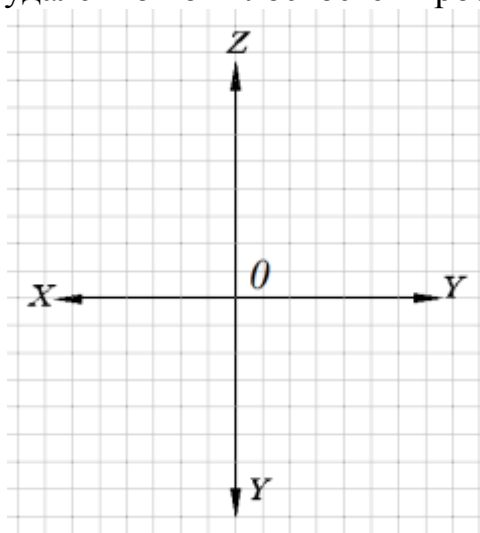
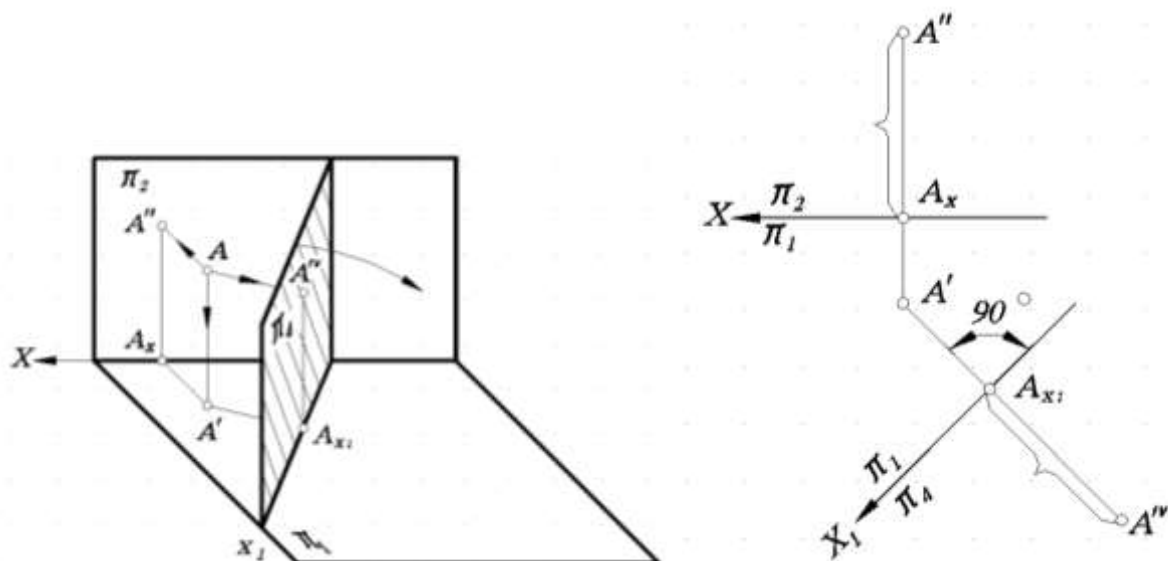


Рис.1.6

Для решения многих задач достаточно иметь две плоскости проекций. В большинстве случаев ими являются плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Если же для решения задачи необходимо иметь третью проекцию и основных плоскостей недостаточно, то должна быть задана дополнительная плоскость, перпендикулярная к одной из основных плоскостей  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  или

$\pi_3$ . Введение дополнительной плоскости проекций и составляет сущность способа замены плоскостей проекций.



Этот способ заключается в том, что изображаемый объект (отрезок, плоскую фигуру, тело), не изменяя его положения в пространстве, проецируют на новую дополнительную плоскость проекций, заменившую одну из основных плоскостей. Новая дополнительная плоскость проекций, положение которой выбирают в зависимости от поставленной задачи, образует с одной из основных плоскостей новую систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. При этом используют следующие условные обозначения и записи:  $\pi_4$  – дополнительная плоскость, перпендикулярная плоскости  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  или  $\pi_3$ ;  $X_1$  – новая ось проекций;  $A^{IV}$ ,  $B^{IV}$ ,  $C^{IV}$  – проекции точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  на дополнительную плоскость  $\pi_4$ .

Условная запись замены фронтальной плоскости проекций:  $\pi_1/\pi_2 \rightarrow \pi_1/\pi_4$ , а условная запись замены горизонтальной плоскости проекций:  $\pi_1/\pi_2 \rightarrow \pi_2/\pi_4$ .

Если по ходу решения задачи требуется двойная, тройная и т.д. замена плоскостей проекций, то каждой новой дополнительной плоскости присваивается следующий индекс, например,  $\pi_5$ ,  $\pi_6$  и т.д.

1.7. Построить проекции точек  $A$  на дополнительную плоскость проекций  $\pi_4$ , а  $B$ ,  $C$  и  $D$  - на плоскость  $\pi_1$  (рис.1.7).

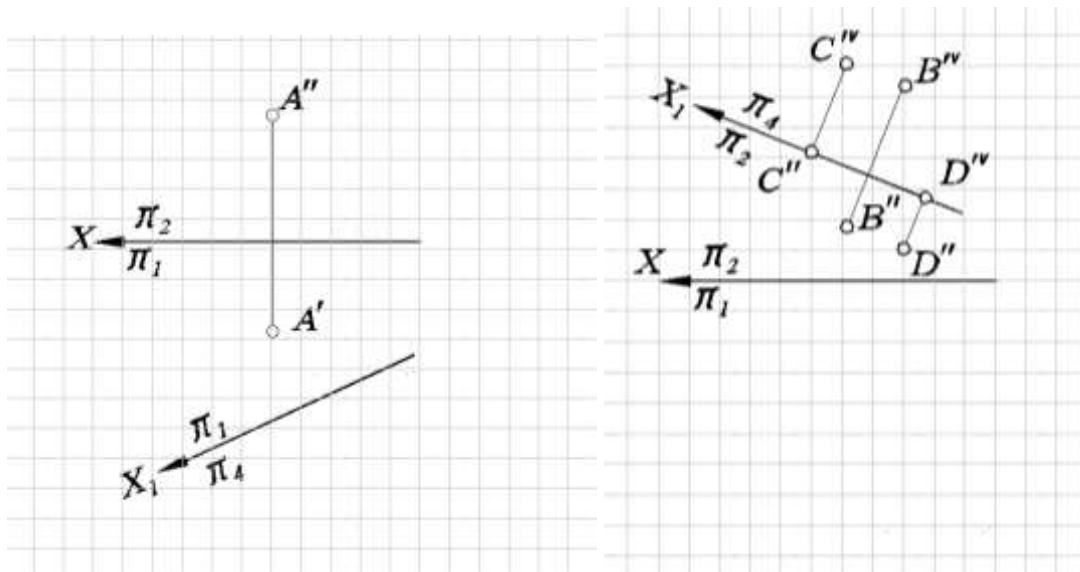


Рис.1.7

- 1.8. Построить проекции точек  $B$  и  $C$ , равноудаленных от плоскостей проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$  и конкурирующих с заданной точкой  $A$  (рис. 1.8):  $(B \uparrow A)\pi_1$  и  $(C \uparrow A)\pi_2$ .

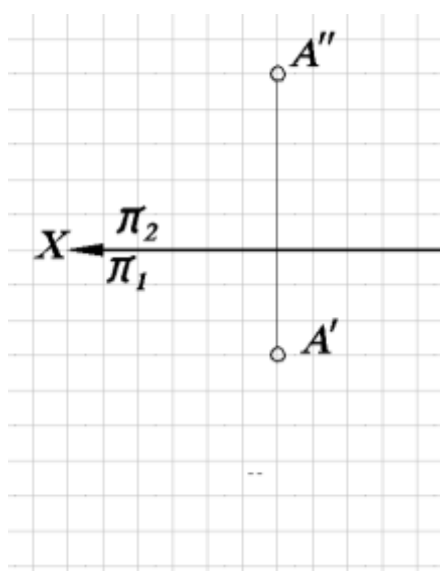


Рис.1.8

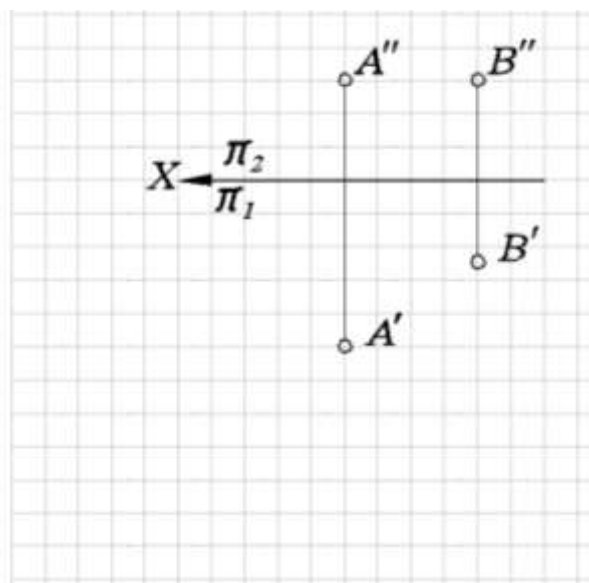


Рис.1.9

- 1.9. На расстоянии 10 мм от точки  $A$  расположить дополнительную плоскость проекций  $\pi_4$ , относительно которой  $B \uparrow A$  (рис. 1.9) при условии, что  $|z_A| = |z_B|$ .

### Задачи для самостоятельной работы

- 1.10. Построить проекции точек  $A$  и  $B$  на дополнительную плоскость  $\pi_4$ , проходящую через заданные точки перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций. Координаты точек:  $A(45,15,25)$ ,  $B(20,5,15)$  (рис.1.10).

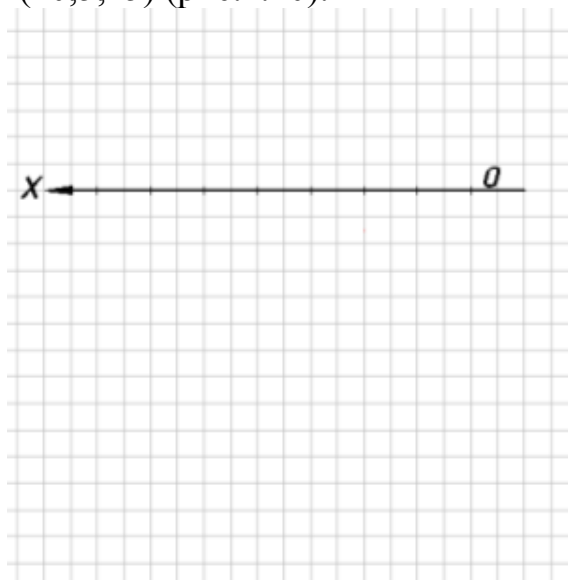


Рис.1.10

- 1.11. Построить проекции точки  $A$  в указанных на эюре системах плоскостей проекций (рис. 1.11).

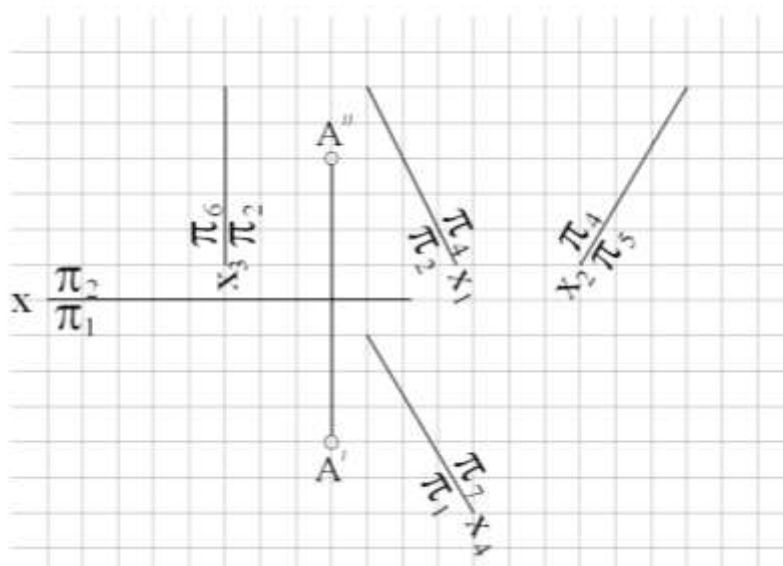


Рис.1.11

- 1.12. Построить проекции точки  $B$ , расположенной на 15 мм ближе к плоскости  $\pi_3$  при условии, что  $(B \uparrow A)\pi_3$ . Координаты точки  $A$  (45,25,15) (рис.1.12).

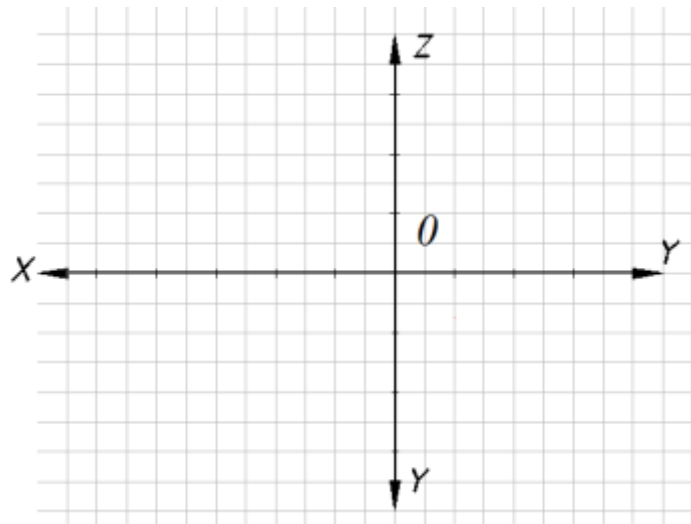


Рис.1.12



## 2. Проекции прямой линии. Взаимное положение точки и прямой, прямых линий. Проекции прямого угла

Положение прямой линии в пространстве определяется положением двух её точек. Поэтому для построения проекций прямой линии достаточно построить проекции двух точек, принадлежащих этой прямой, и соединить между собой их одноименные проекции.

**Прямая линия безгранична** и при необходимости может быть продолжена с обеих сторон.

**Отрезок прямой линии** это ее часть, ограниченная с двух сторон.

Прямая линия может занимать относительно плоскостей проекций *общее* и *частные* положения:

**Прямая линия общего положения** не параллельна ни одной из основных плоскостей проекций.

**Прямая линия уровня** параллельна одной из плоскостей проекций и наклонена к двум другим.

**Проецирующая прямая линия** перпендикулярна к одной из плоскостей проекций и параллельна двум другим.

Понятие о **положении прямой линии** подразумевает ее ориентацию относительно плоскостей проекций (перпендикулярность, параллельность, наклон) и величину удаления от них (расстояния).

Точка принадлежит прямой, если её проекции расположены на одноименных проекциях прямой линии.

Параллельные проекции имеют следующее свойство: отношение отрезков прямой линии равно отношению их проекций.

Отрезок прямой линии можно разделить в заданном отношении, разделив в том же отношении любую его проекцию.

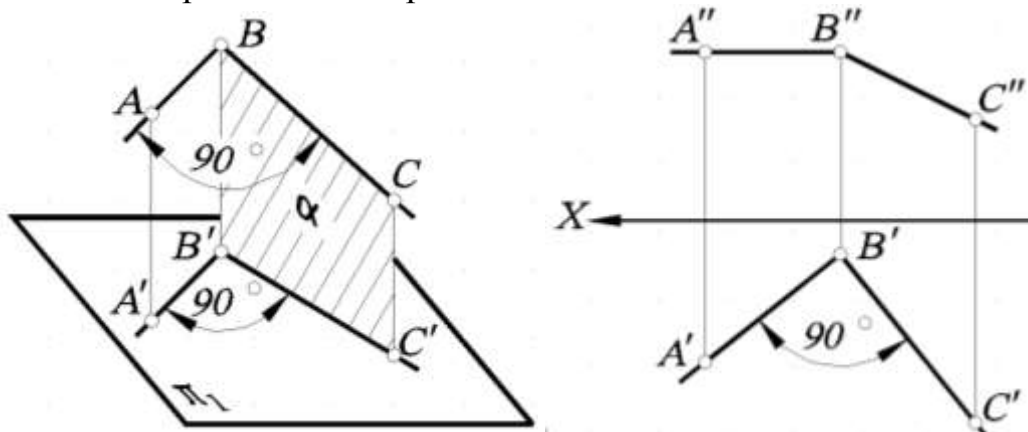
**Пересекающиеся прямые линии.** У двух пересекающихся прямых на чертеже пересекаются одноименные проекции и точки их пересечения лежат на одной и той же линии проекционной связи для каждой пары одноименных проекций.

**Параллельные прямые линии.** Если две прямые параллельны друг другу, то их одноименные проекции также параллельны.

**Скрещивающиеся прямые линии.** Скрещивающимися прямыми называют прямые, не параллельные друг другу и не пересекающиеся. Одноименные проекции скрещивающихся прямых могут пересекаться, но точки пересечения их не лежат на общей линии проекционной связи.

**Прямой угол** — плоский угол между двумя взаимно перпендикулярными пересекающимися прямыми линиями. Прямой

угол проецируется на плоскость проекций без искажения, если одна сторона его параллельна этой плоскости.



Горизонтальная прямая и прямая общего положения перпендикулярны, если перпендикулярны их горизонтальные проекции.

Фронтальная прямая и прямая общего положения перпендикулярны, если перпендикулярны их фронтальные проекции.

Профильная прямая и прямая общего положения перпендикулярны, если перпендикулярны их профильные проекции.

### Вопросы для самопроверки

1. Какие существуют способы задания на эпюре прямых линий?
2. Как называют и обозначают прямые, параллельные одной из основных плоскостей проекций? Какими признаками можно охарактеризовать положения проекций этих прямых на эпюре?
3. Как называют прямые, перпендикулярные плоскостям проекций? Какими признаками можно охарактеризовать положения проекций этих прямых на эпюре?
4. Натуральные величины отрезков каких прямых могут быть определены непосредственно по эпюру?
5. Как следует расположить дополнительные плоскости проекций, чтобы по проекциям прямой общего положения определить углы наклона ее к плоскостям проекций и натуральную величину отрезка этой прямой?
6. Какую прямую называют прямой общего положения?
7. При каких положениях прямых углы их наклона к плоскостям проекций проецируются без искажения?
8. Как могут быть расположены друг относительно друга точка и прямая? Как определить их относительное положение по эпюру?
9. Какие взаимные положения могут занимать прямые в пространстве?
10. При каком расположении прямых относительно плоскости проекций угол  $90^\circ$  между пересекающимися прямыми проецируется в натуральную величину?

**Задачи:**

- 2.1. Построить проекции и определить длину отрезка  $AB$  горизонтали, наклоненной под углом  $60^\circ$  к фронтальной плоскости проекций.  $A(35,30,20)$ ,  $B \in \pi_2$  (рис.2.1). Сколько ответов имеет задача?

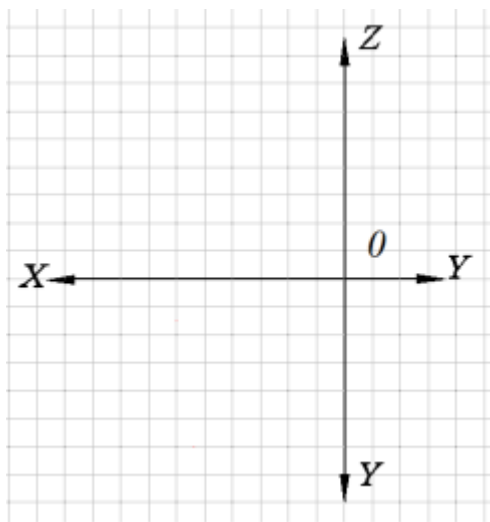


Рис.2.1

- 2.2. Определить положение осей, если точка  $A$  отстоит от плоскости  $\pi_2$  на расстоянии 10 мм.

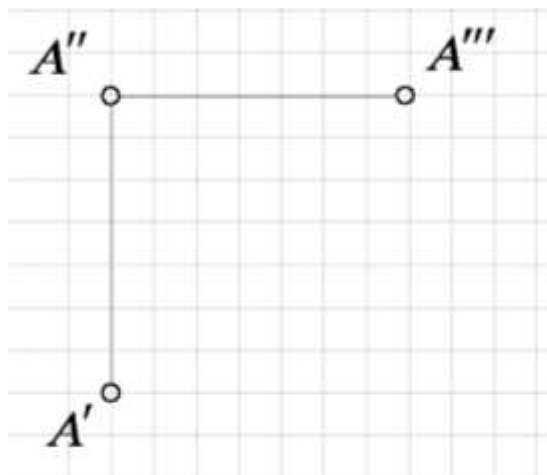


Рис.2.2

- 2.3. Построить три проекции проецирующих прямых, проходящих через точку  $A$  (рис. 2.3):  $a \perp \pi_1$ ,  $b \perp \pi_2$ ,  $c \perp \pi_3$ .

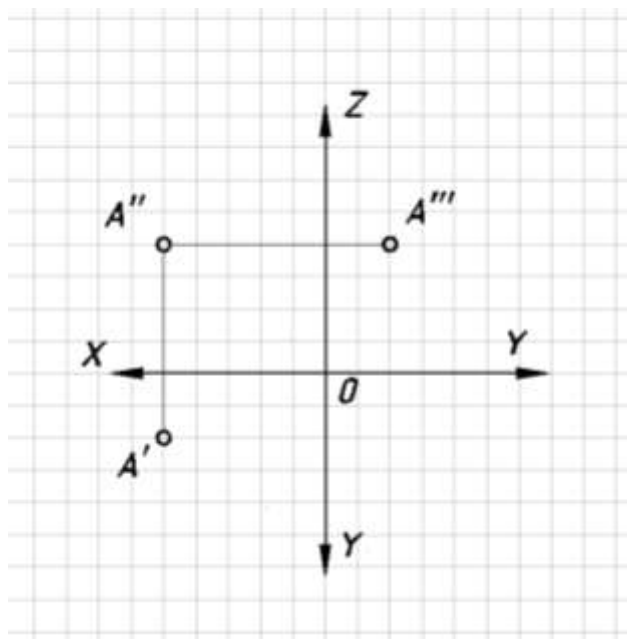


Рис.2.3

- 2.4. Построить проекции профильной прямой, равнонаклоненной к плоскостям проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$  и пересекающей прямые  $AB$  и  $CD$  (рис.2.4). Координаты точек:  $A (50,15,10)$ ,  $B (15,35,45)$ ,  $C (60,40,15)$ ,  $D (5,40,15)$ .

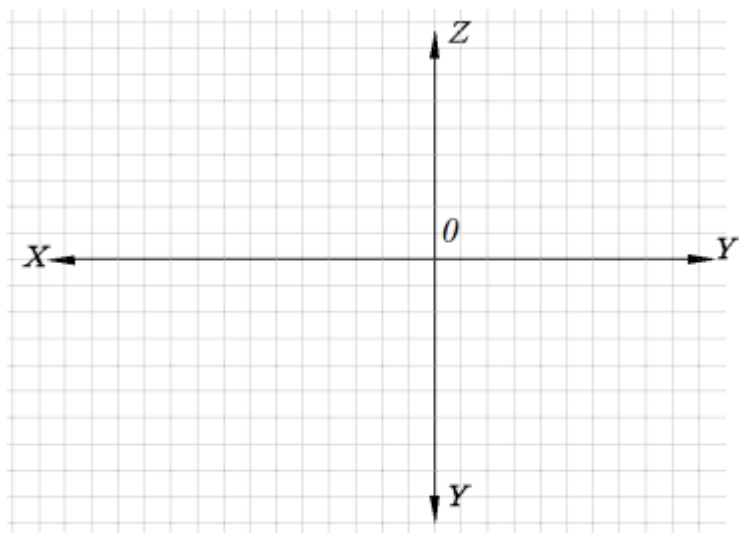


Рис.2.4

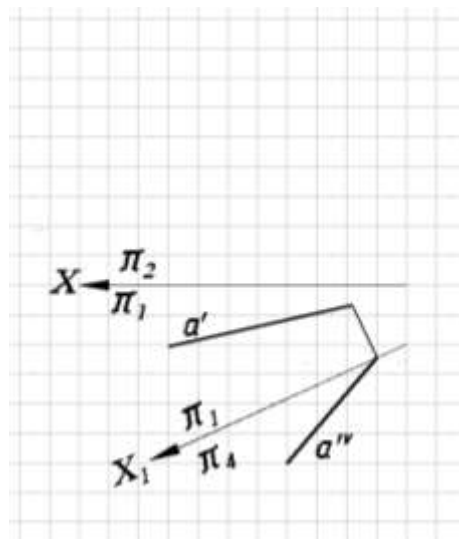


Рис.2.5

- 2.5. Построить фронтальную проекцию прямой  $a$  в системе плоскостей проекций  $\pi_1/\pi_2$  (рис. 2.5).
- 2.6. Определить натуральную величину и углы наклона отрезка  $AB$  к плоскостям проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$  способами дополнительного

проецирования и прямоугольного треугольника (рис.2.6).  
Координаты точек:  $A(45,15,10)$ ,  $B(10,10,30)$ .

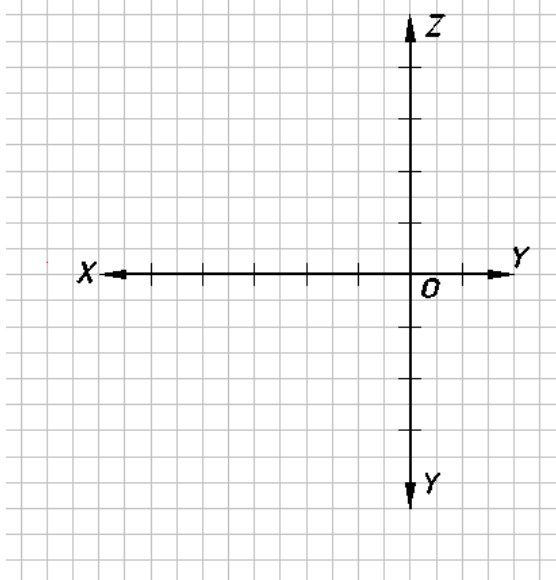


Рис.2.6

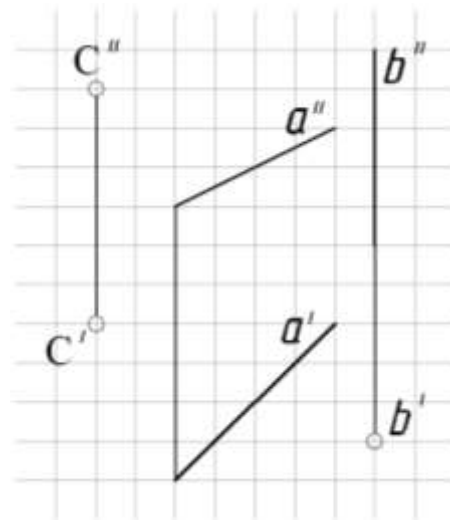


Рис.2.7

- 2.7. Построить проекции прямой, проходящей через точку  $C$  и пересекающей прямые  $a$  и  $b$  (рис. 2.7).
- 2.8. Построить проекции прямой  $c$ , параллельной оси  $X$  и пересекающей прямые  $a$  и  $b$  (рис. 2.8).

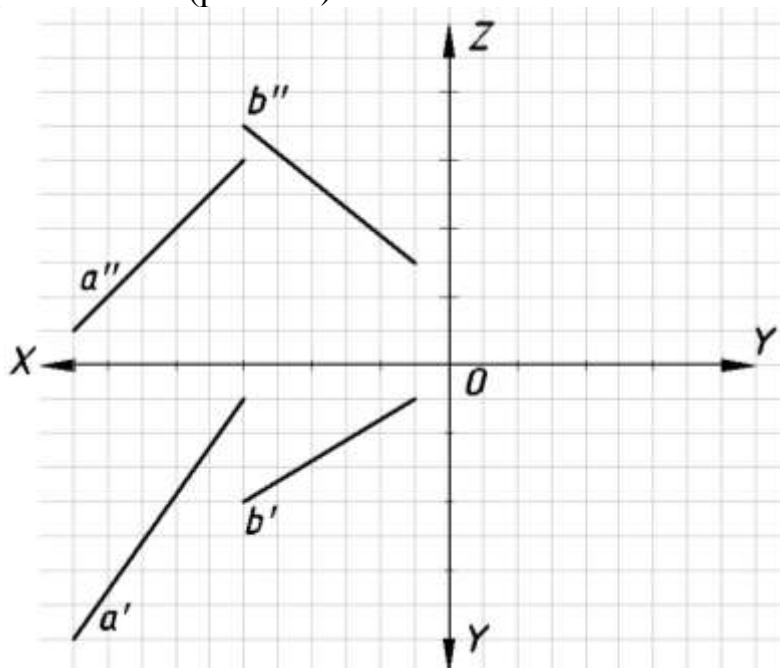


Рис.2.8

- 2.9. Построить проекции точки  $C$ , принадлежащей прямой  $AB$  и равноудаленной от плоскостей проекций  $\pi_2$  и  $\pi_3$  (рис.2.9).  
Координаты точек:  $A(40,15,5)$ ,  $B(10,30,30)$ .

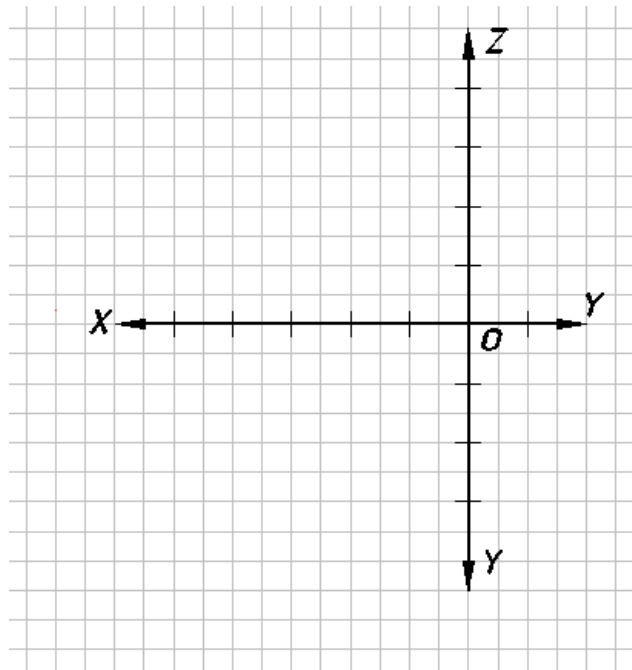


Рис.2.9

- 2.10. Построить проекции прямой  $EF$ , пересекающей прямые  $AB$  и  $CD$  под прямым углом (рис.2.10). Координаты точек:  $A(10,35,20)$ ,  $B(60,35,20)$ ,  $C(20,40,40)$ ,  $D(60,10,20)$ .

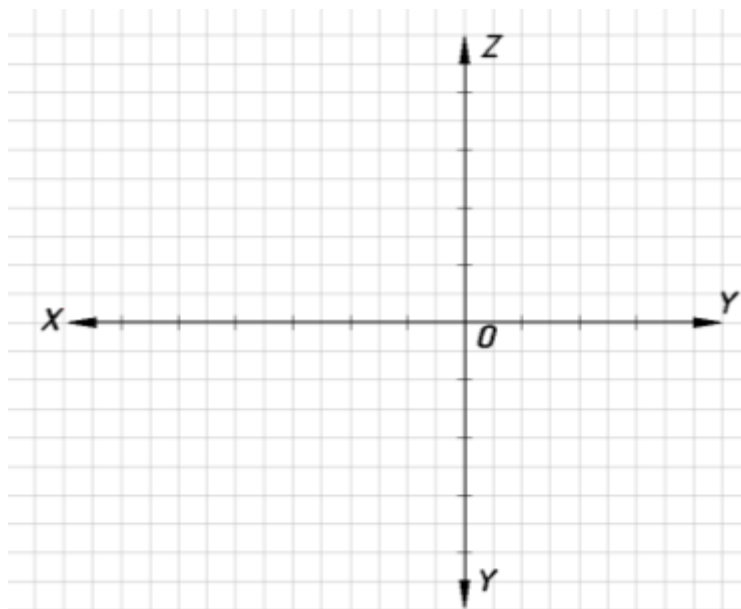


Рис.2.10

## Задачи для самостоятельной работы

- 2.11. Построить наглядное изображение и проекции отрезков прямых линий  $AB$  и  $CD$  (рис.2.11). Координаты точек:  $A(50,40,10)$ ,  $B(25,10,30)$ ,  $C(40,40,30)$ ,  $D(10,10,10)$ .

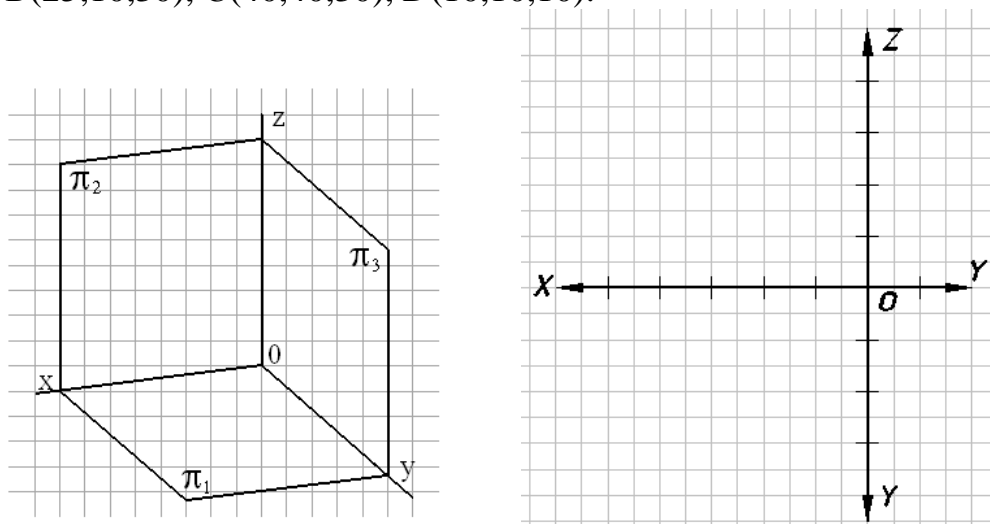


Рис.2.11

- 2.12. Построить проекции отрезка  $AB$  фронтали, если известно, что  $AB = 45$ ,  $|f, \pi_2| = 25$ ,  $X_A = 50$ ,  $X_B = 10$ ,  $|Z_B| = |Y_B|$  (рис.2.12). Сколько ответов имеет задача?

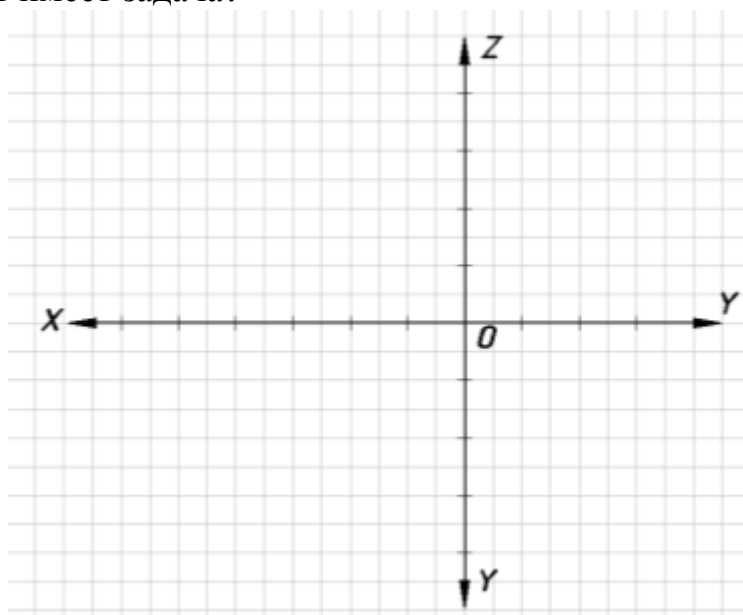


Рис.2.12

- 2.13. Построить проекции горизонтально проецирующей прямой, удаленной от плоскостей проекций  $\pi_2$  и  $\pi_3$  на 20 мм (рис.2.13).

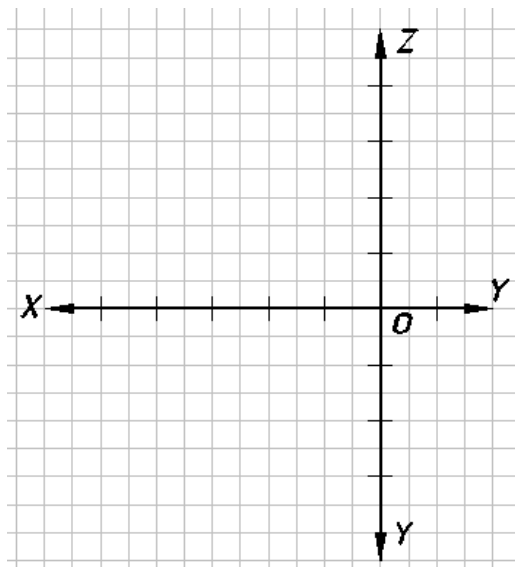


Рис.2.13

- 2.14. Построить три проекции отрезка  $AB \perp \pi_2$  и ( $A \in \pi_2$ ), длина которого равна 30 мм, удаленного от плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_3$  на расстояния, равные соответственно 15 и 20 мм (рис.2.14).

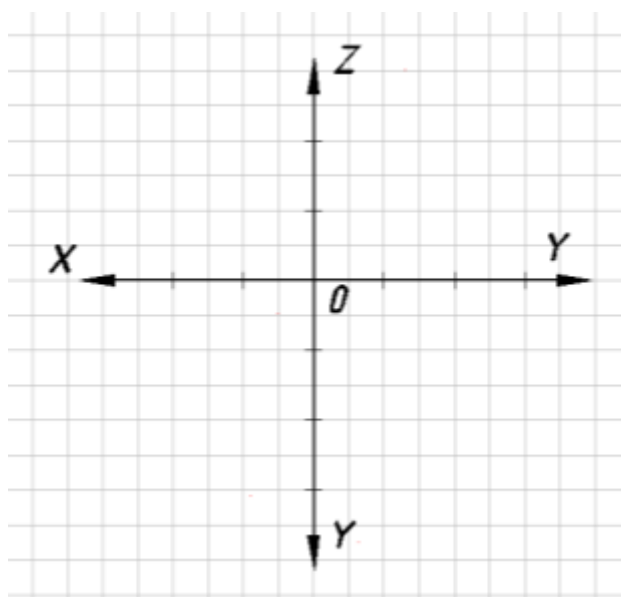


Рис.2.14

- 2.15. Определить положение точек  $A, B, C, D$  относительно прямой  $a$  (рис. 2.15). Для точек, не принадлежащих прямой  $a$ , определить их видимость на плоскостях проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$ .



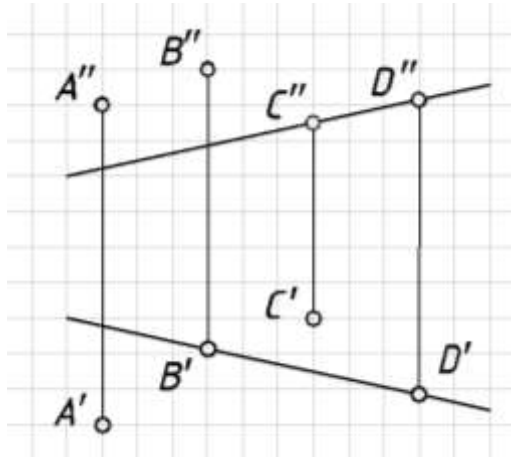


Рис.2.15

- 2.16. Построить фронтальную проекцию точки  $K$ , принадлежащей прямой  $EF$  (варианты решений) (рис.2.16). Координаты точек:  $E(15,10,35)$ ,  $F(15,30,10)$ ,  $K(15,20,?)$ .

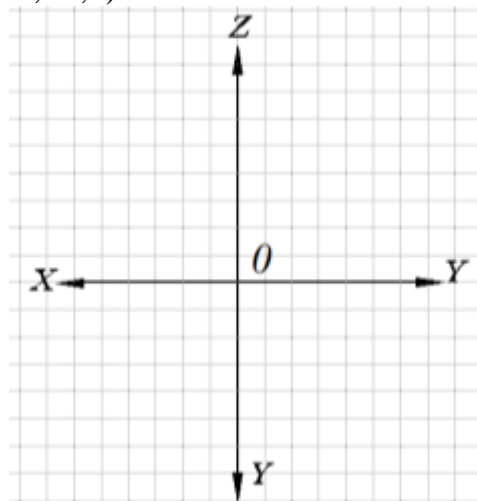


Рис.2.16

- 2.17. Построить проекции точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , принадлежащих прямой  $a$  (рис. 2.17) при условии, что  $Z_A=15$ ,  $Z_B=Y_A$  и  $Z_C=Y_C$ .

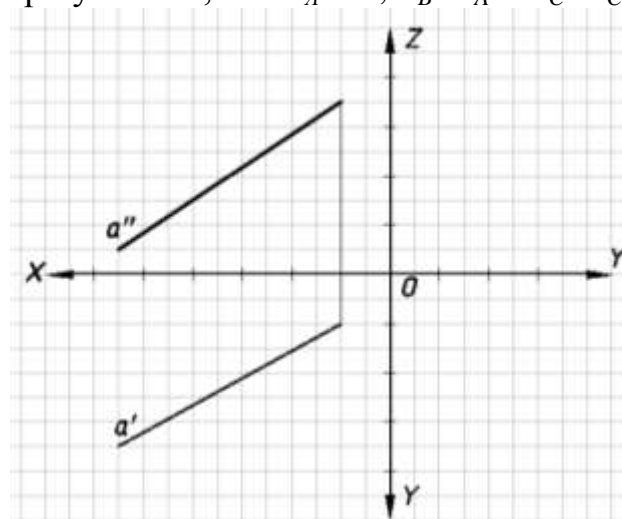


Рис.2.17

- 2.18. Определить натуральную величину отрезка  $AB$  профильной прямой и углы наклона его к плоскостям проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$  (рис.2.18). Координаты точек:  $A(15,0,0)$ ,  $B(15,30,25)$ . (Задачу решить тремя способами).

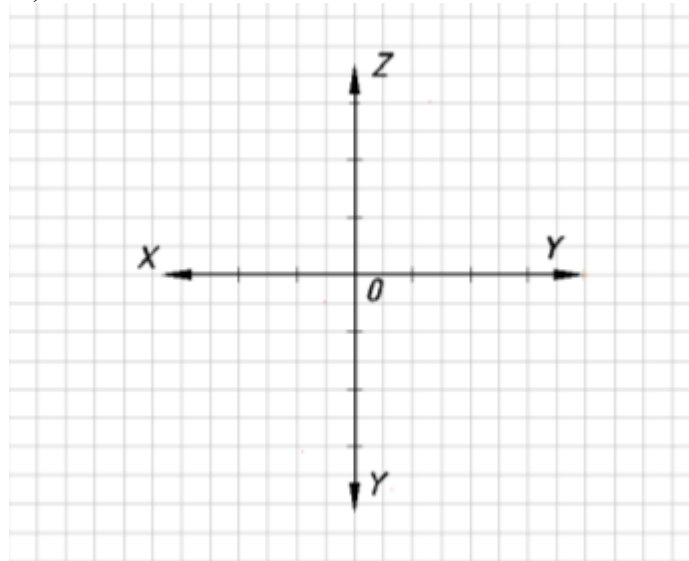


Рис.2.18

- 2.19. Определить и записать в символической форме взаимное положение прямых  $a$  и  $b$  (рис. 2.19).

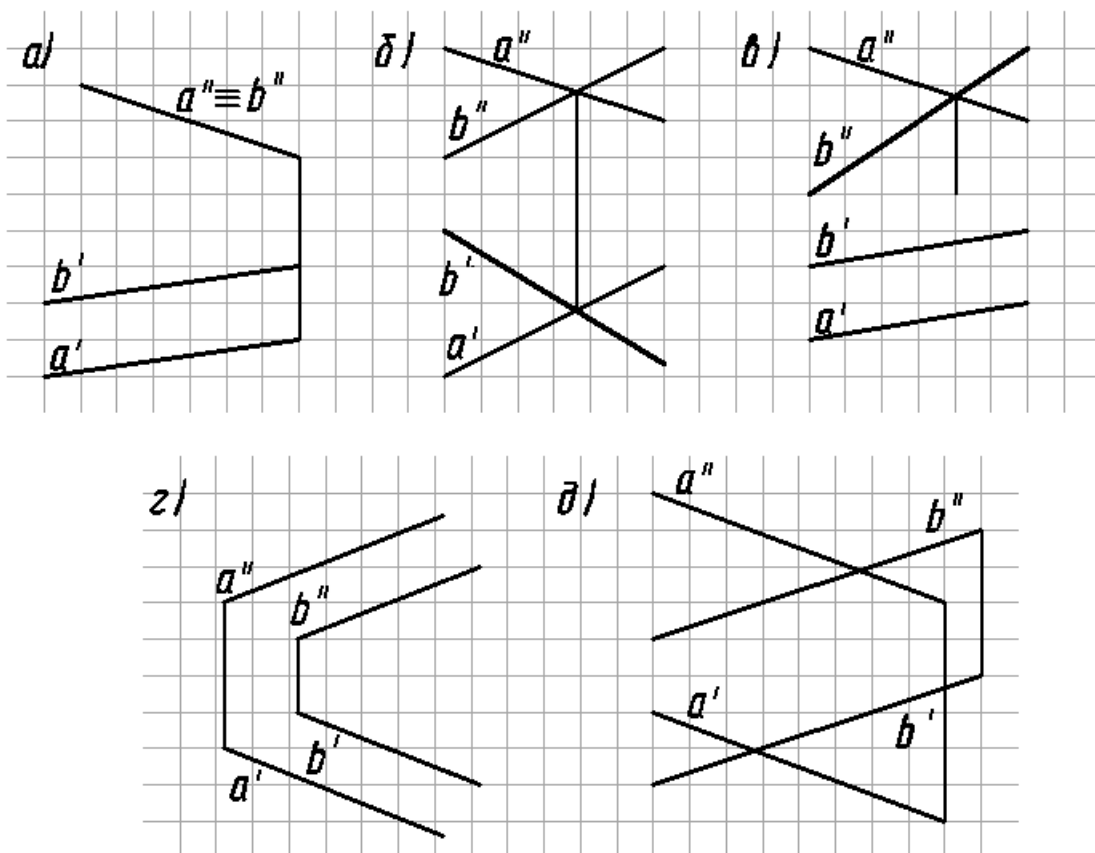


Рис.2.19

2.20. Пересечь прямые  $a$  и  $h$  (рис.2.20) прямой  $f$ , отстоящей от фронтальной плоскости проекций на расстоянии 20 мм.

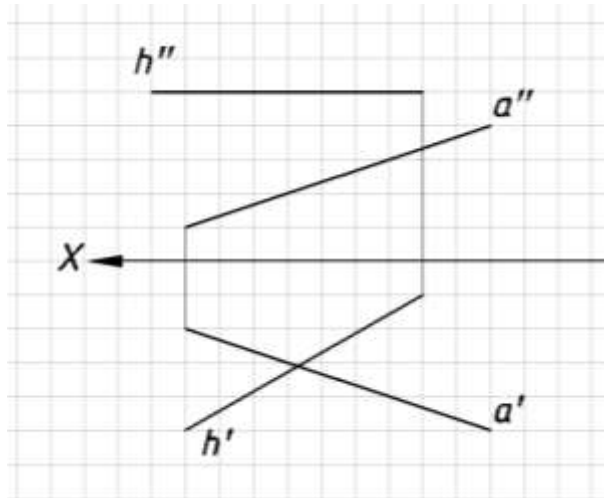


Рис.2.20

2.21. Построить проекции прямой  $b$ , проходящей через точку  $A$  и пересекающей прямую  $a$  и ось  $X$  (рис. 2.21).

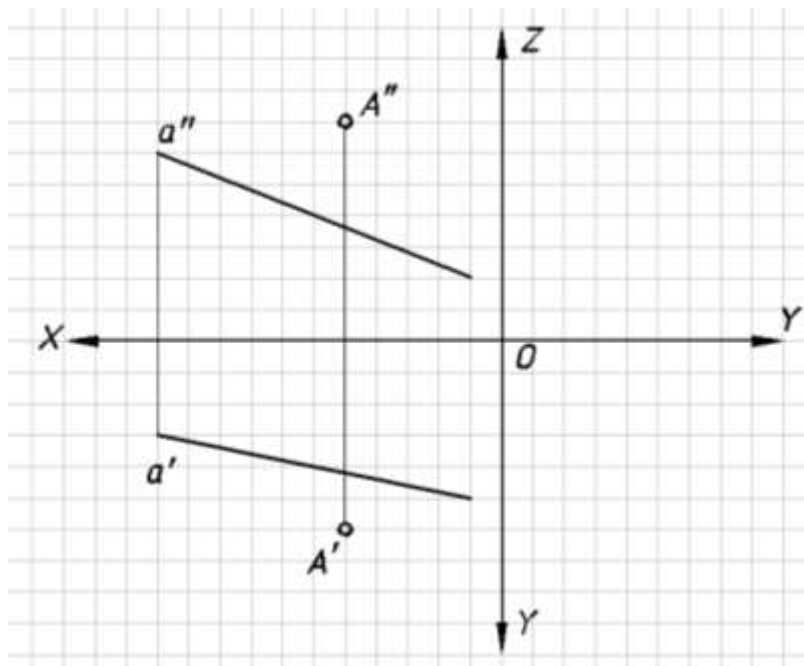


Рис.2.21

2.22. Построить проекции точки  $D$ , симметричной точке  $C$  относительно прямой  $AB$  (рис.2.22). Координаты точек:  $A(50,40,30)$ ,  $B(20,15,10)$ ,  $C(40,10,30)$ .

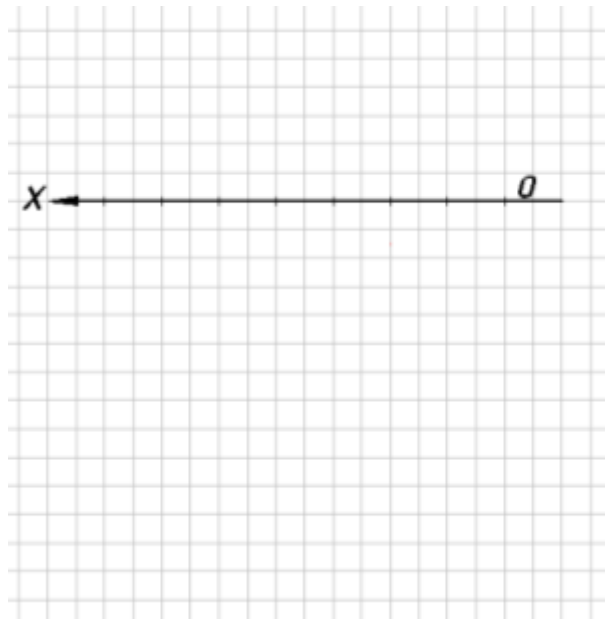


Рис.2.22

- 2.23. Построить проекции прямой  $c$ , пересекающей обе скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  под прямым углом (рис. 2.23). Отметить точки пересечения прямых.

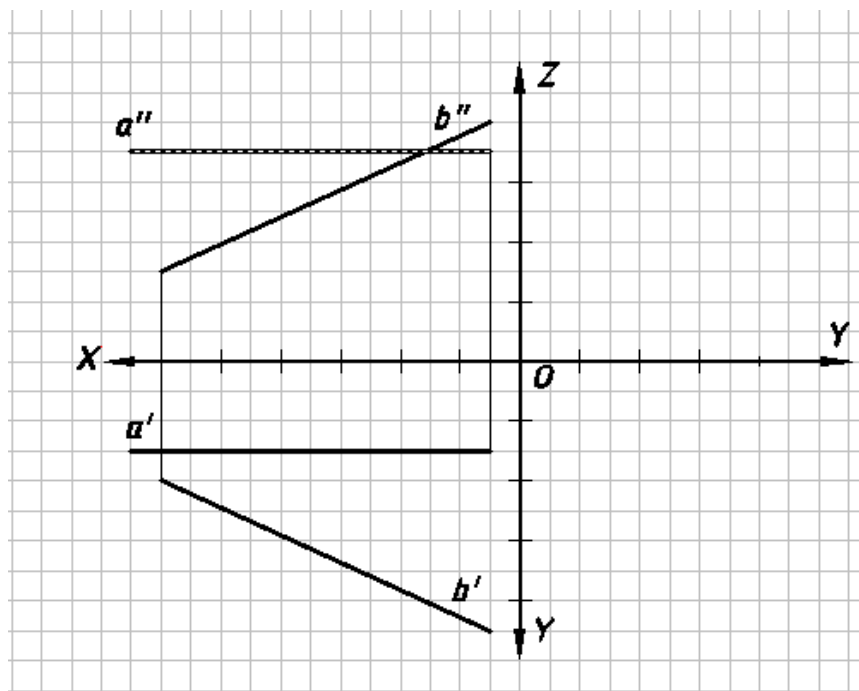


Рис.2.22

- 2.24. Построить проекции прямой, проходящей через точку  $C$  и пересекающей прямую  $AB$  под прямым углом (рис. 2.24). Отметить точку пересечения прямых.

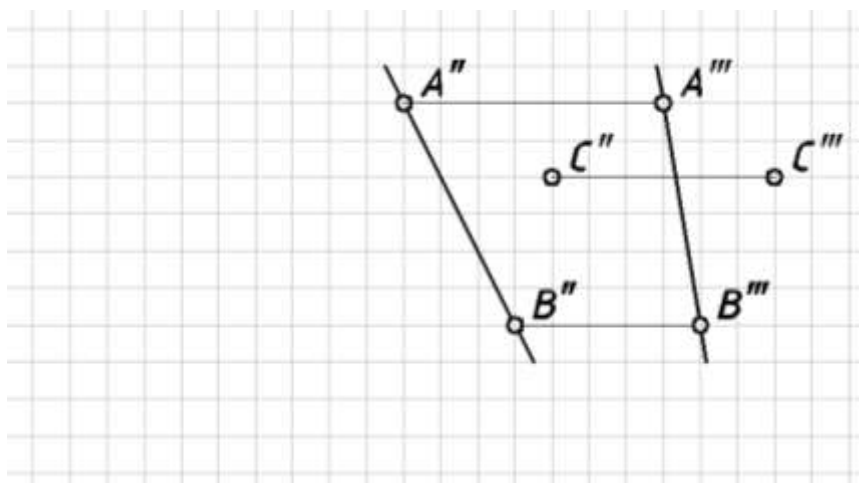


Рис.2.24

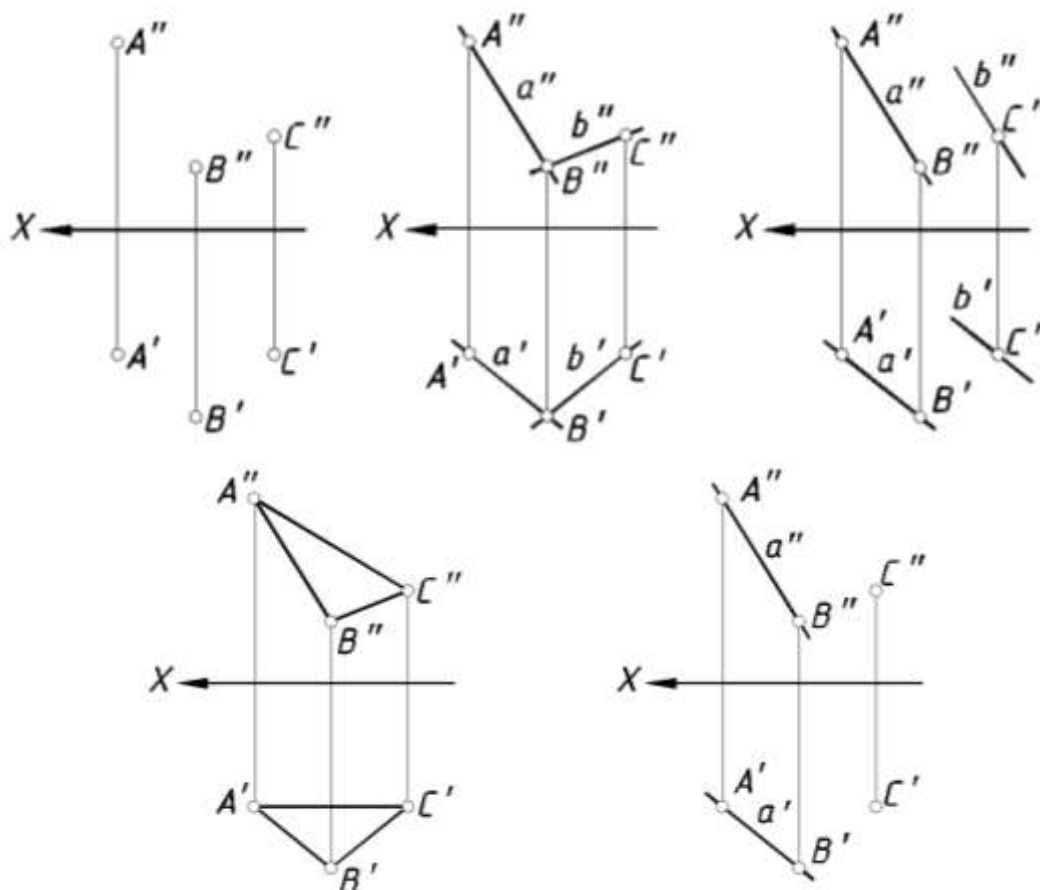
### 3. Проецирование плоскости

Плоскость представляет собой простейшую поверхность, которая обладает тем свойством, что любая прямая, соединяющая две ее точки, целиком принадлежит плоскости.

Плоскость безгранична, поэтому построить проекции всей плоскости невозможно. На чертеже плоскость задают теми фигурами, которые определяют ее положение в пространстве. Такими фигурами являются три точки плоскости, не лежащие на одной прямой.

Плоскость может быть задана пятью способами и записана в виде условного обозначения:

- тремя точками, не лежащими на одной прямой,  $\alpha(A, B, C)$ ;
- двумя пересекающимися прямыми  $\alpha(a \cap b)$ ;
- двумя параллельными прямыми  $\alpha(a \parallel b)$ ;
- плоской фигурой  $\alpha(\triangle ABC)$  или  $\alpha(ABC)$ ;
- прямой и точкой, взятой вне прямой  $\alpha(a, C)$ .



Различают плоскости общего и частных положений.

**Плоскость общего положения** наклонена ко всем плоскостям проекций.

### ***Плоскости частных положений:***

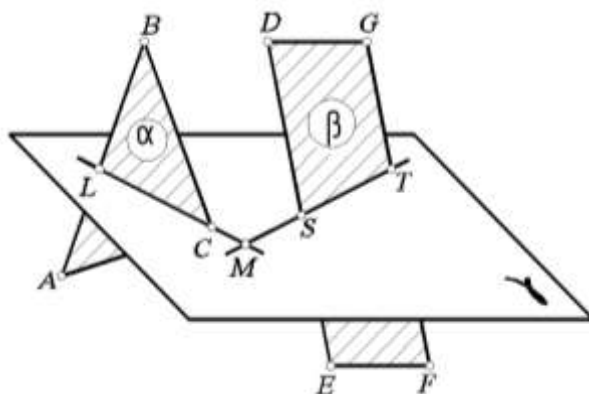
**1. Проецирующие плоскости.** Плоскости, перпендикулярные к одной плоскости проекций и наклоненные к двум другим.

**2. Плоскости уровня** – плоскости, параллельные одной плоскости проекций и перпендикулярные к двум другим.

**Линиями уровня плоскости** называют горизонтальные, фронтальные и профильные прямые, принадлежащие заданной плоскости.

Плоскости в пространстве могут пересекаться или быть параллельными.

*Общий план решения задач на построение линии пересечения двух плоскостей общего положения  $\alpha$  и  $\beta$ :*



- Выбирают положение вспомогательной плоскости  $\gamma$ .
- Строят линию пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\gamma$ .
- Строят линию пересечения плоскостей  $\beta$  и  $\gamma$ .
- Определяют точку  $M$ , являющуюся точкой пересечения построенных линий.
- Вводят вторую вспомогательную плоскость  $\sigma$  и, повторив предыдущие построения, находят точку  $N$ .
- Соединив точки  $M$  и  $N$ , получают линию пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ .

### ***Параллельность двух плоскостей***

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Чтобы задать на чертеже две параллельные плоскости, необходимо построить проекции двух пересекающихся и взаимно параллельных прямых.

За две пересекающиеся прямые, определяющие положение плоскости, можно взять линии уровня плоскости. Тогда у параллельных плоскостей будут параллельны **о д н о и м е н н ы е** **л и н и**  
**у р о в н я**. На основании этого положения можно судить о параллельности двух плоскостей.

## ***Взаимное положение прямой линии и плоскости, плоскостей***

Прямые линии, не принадлежащие плоскости, могут пересекаться с ней (в том числе и под прямым углом) или быть ей параллельными.

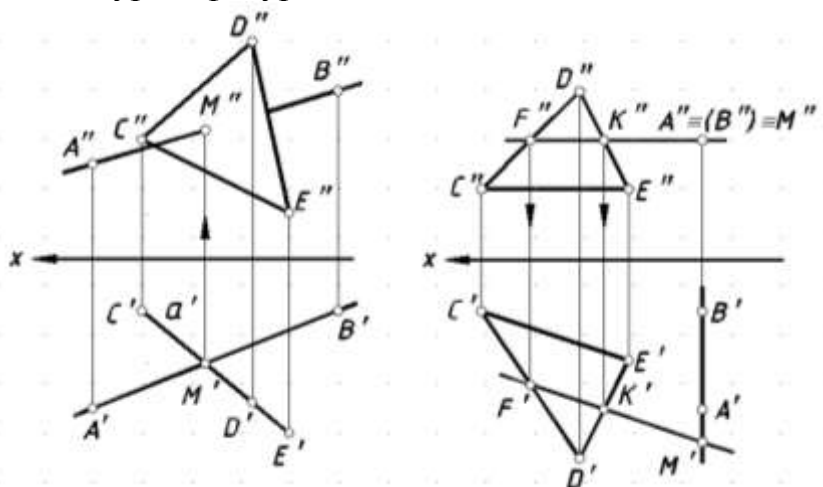
### ***1. Пересечение прямой с плоскостью***

Задачи на пересечение прямой линии с плоскостью можно разделить на три группы в зависимости от положения прямой и плоскости относительно плоскости проекций. Для каждой группы характерна своя методика решения задач.

*К первой группе* относят задачи на пересечение прямой линии с проецирующими плоскостями или с плоскостями, параллельными плоскостям проекций (плоскостями уровня).

В задачах первой группы одна проекция точки пересечения прямой и плоскости уже задана на исходном чертеже, а вторую проекцию находят без дополнительных построений с помощью одной линии проекционной связи.

Если плоскость задана плоской фигурой, то на чертеже следует отметить видимые и невидимые части прямой, считая плоскость ограниченной контуром фигуры.



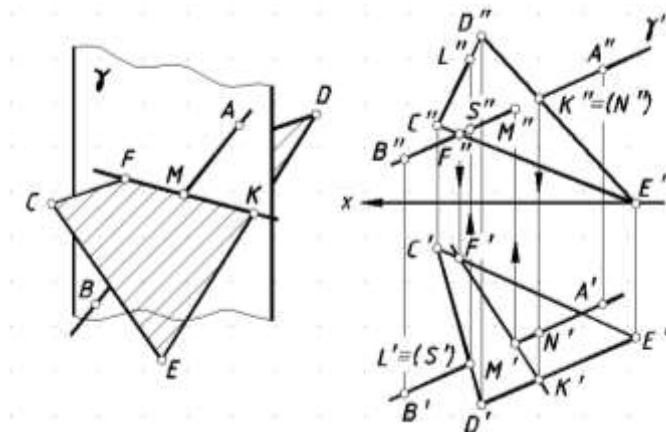
*Ко второй группе* относят задачи на пересечение проецирующих прямых с плоскостями, занимающими общее или частное положение относительно плоскостей проекций.

В задачах второй группы точку пересечения прямой с плоскостью находят с помощью вспомогательной прямой, проведенной в заданной плоскости через известную проекцию точки пересечения.

*В третью группу* включены задачи на пересечение прямых общего положения или горизонтальных, фронтальных и профильных прямых с плоскостью общего положения.

При решении задач третьей группы используют вспомогательную плоскость, которую проводят через заданную прямую. В качестве вспомогательных плоскостей проще всего брать проецирующие плоскости.

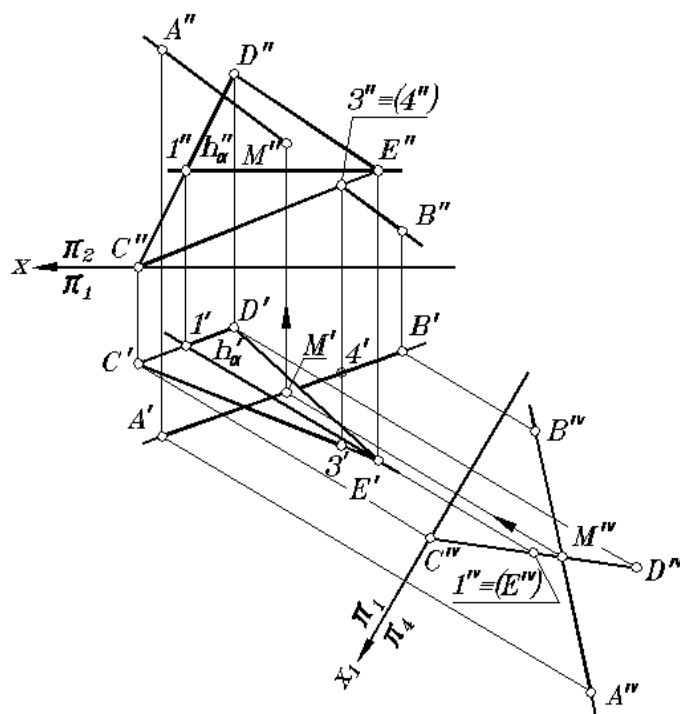




При решении задач третьей группы руководствуются следующим планом:

- Проводят через заданную прямую  $AB$  вспомогательную проецирующую плоскость  $\gamma$ .
- Определяют линию пересечения заданной и вспомогательной плоскостей (прямая  $FK$ ).
- Находят точку пересечения заданных прямой  $AB$  и построенной линии пересечения  $FK$ . Отмечают искомую точку  $M$ .

Решение задач на пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения упрощается при использовании способа замены плоскостей проекций. Новую плоскость  $\pi_4$  задают перпендикулярно линии уровня плоскости. В новой системе плоскостей проекций плоскость общего положения займет проецирующее положение и задача на пересечение прямой с плоскостью может быть тогда отнесена к первой группе.

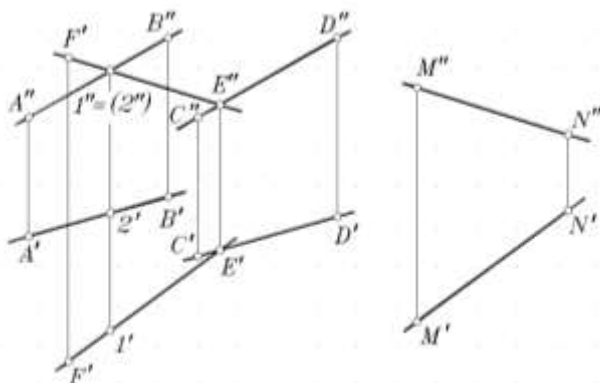


## 2. Параллельность прямой и плоскости

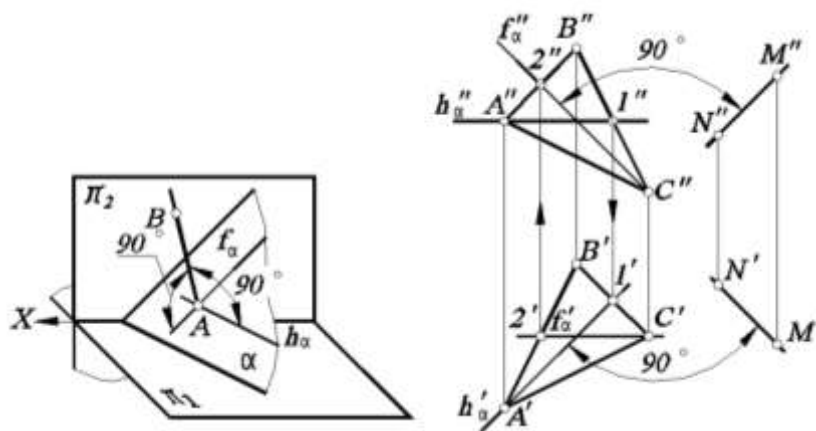
Если прямая параллельна какой – нибудь прямой, расположенной в плоскости, то она параллельна самой плоскости.

Если требуется определить параллельны ли прямая  $MN$  и плоскость  $\alpha$  ( $AB \parallel CD$ ), то руководствуются следующим планом решения задачи:

В плоскости задают произвольную точку  $E$  или используют одну из точек, определяющих положение плоскости. Через эту точку проводят прямую  $EF$ , параллельную заданной прямой  $MN$  и определяют, принадлежит ли построенная прямая плоскости.



## 3. Перпендикулярность прямой и плоскости



Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости. Известно, что построить две взаимно перпендикулярные прямые можно только тогда, когда одна из прямых параллельна какой – либо плоскости проекций. Поэтому о перпендикулярности прямой и плоскости судят по линиям уровня, принадлежащим заданной плоскости.

Прямую, перпендикулярную к заданной плоскости, можно проводить через точку, расположенную на плоскости или вне ее.

При построении прямой, перпендикулярной к плоскости общего положения, в заданной плоскости  $\alpha$  проводят произвольные горизонтальную  $h_\alpha$  и фронтальную  $f_\alpha$  прямые, пересекающиеся в точке  $A$ .

Далее строят прямую  $AB \perp h_\alpha$  и  $AB \perp f_\alpha$ . Построенная прямая  $AB$  будет перпендикулярна к плоскости  $\alpha$ .

Горизонтальная проекция прямой, перпендикулярной к заданной плоскости  $\alpha$ , должна быть перпендикулярна к  $h_\alpha'$ , а её фронтальная проекция проведена перпендикулярно к  $f_\alpha''$ . Первое условие обеспечивает перпендикулярность между искомой прямой и горизонтальной прямой плоскости, а второе - между искомой прямой и фронтальной прямой плоскости.

Для того, чтобы найти точку пересечения построенного перпендикуляра и плоскости, нужно решить задачу на пересечение прямой с плоскостью.

В тех случаях, когда плоскость является проецирующей, перпендикуляр к ней будет прямой частного положения.

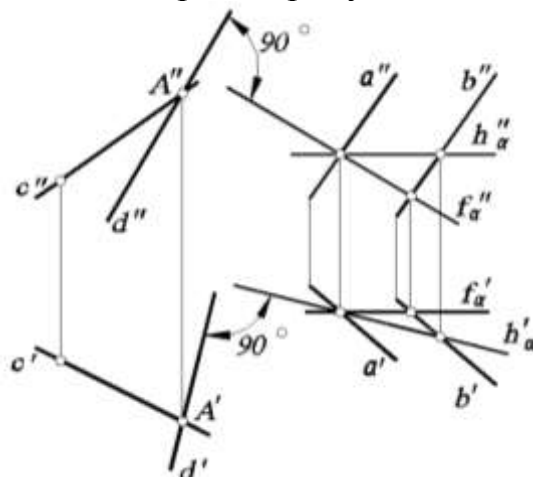
Плоскость, перпендикулярную к заданной прямой, обычно задают горизонтальной и фронтальной прямыми, перпендикулярными к ней.

При построении геометрического места точек пространства, равноудаленного от концов отрезка  $AB$  будет плоскость, проведенная через середину отрезка  $AB$  перпендикулярно к нему и заданная горизонтальной  $h \perp AB$  и фронтальной  $f \perp AB$  прямыми.

#### 4. Перпендикулярность двух плоскостей

Две плоскости перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости.

Для построения плоскости, перпендикулярной к заданной плоскости  $\alpha(a|b)$  и проходящей через прямую общего положения  $c$ , строят перпендикуляр  $d$  к плоскости  $\alpha$ . Его проводят через произвольную точку на прямой  $c$ , например, точку  $A$ . Фронтальную проекцию прямой  $d$  строят перпендикулярно к фронтальной проекции фронтальной прямой  $f_\alpha$ , а горизонтальную – перпендикулярно к горизонтальной проекции горизонтальной прямой  $h_\alpha$ . Плоскость  $\beta(c \cap d)$  будет перпендикулярна к плоскости  $\alpha(a|b)$ , так как содержит прямую, к ней перпендикулярную.



### **Вопросы для самопроверки:**

1. Какими способами могут быть заданы плоскости на эпюре?
2. Какие плоскости называют плоскостями общего и частных положений?
3. По каким признакам на эпюре может быть определена принадлежность прямой плоскости?
4. В каких случаях точка принадлежит плоскости?
5. Как построить проекции точки, принадлежащей плоскости общего положения, по заданным координатам  $y$  и  $z$ ?
6. Как проверить, является ли заданный многоугольник плоской фигурой?
7. Как расположены проекции линий уровня в плоскостях общего и частных положений?
8. Как построить проекции линии наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций?
9. Как построить проекции прямой, параллельной заданной плоскости?
10. Как построить проекции плоскости, проходящей через заданную прямую и параллельную другой прямой?
11. Как установить по эпюру, параллельны ли заданные прямая и плоскость?
12. Как построить проекции плоскости, параллельной заданной плоскости?
13. Как определить по эпюру, параллельны ли две заданные плоскости?
14. Как расположены на эпюре проекции прямой, перпендикулярной плоскости?
15. Как задать плоскость, перпендикулярную к заданной прямой?
16. Как задать плоскость, перпендикулярную к заданной плоскости?
17. Как определить по эпюру, перпендикулярны ли друг к другу две заданные плоскости?
18. Как построить точку пересечения прямой с плоскостью частного положения?
19. Каков алгоритм определения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения?
20. Как построить проекции линии пересечения плоскостей общего и частного положений?
21. Каким образом определяют взаимную видимость пересекающихся прямой и плоскости, плоскостей?
22. Какие способы существуют для определения линии пересечения плоскостей общего положения?

**Задачи:**

- 3.1 Определить, принадлежат ли точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  одной плоскости (рис.3.1). Координаты точек:  $A(65,25,25)$ ,  $B(55,10,10)$ ,  $C(40,35,40)$ ,  $D(15,20,15)$ .

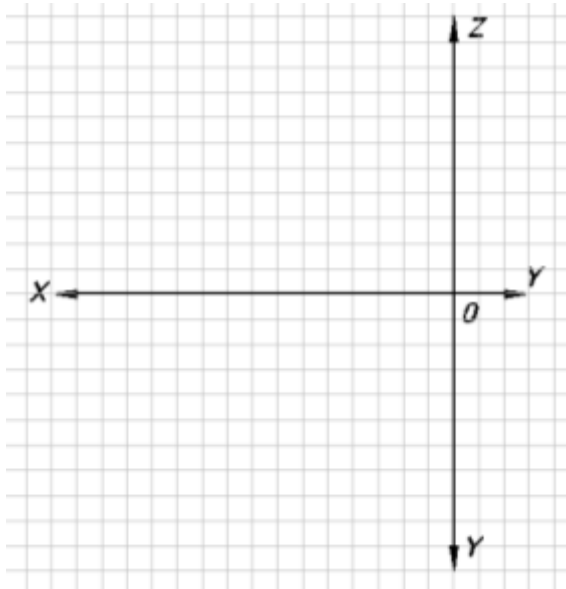


Рис.3.1

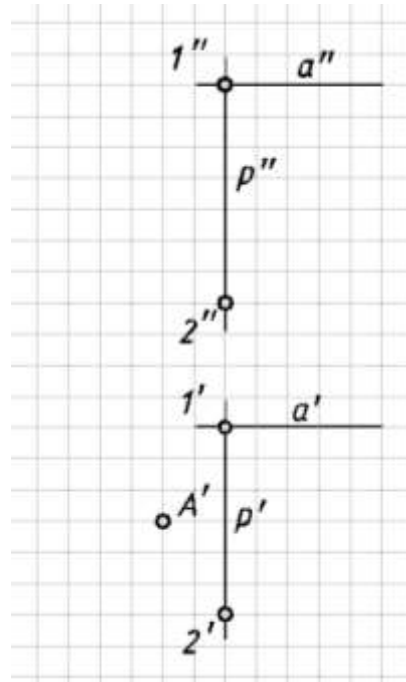


Рис.3.2

- 3.2. Построить фронтальную проекцию точки  $A$  (рис.3.2), принадлежащей плоскости  $\alpha(a \cap p)$ .
- 3.3. Как расположена точка  $M$  (рис.3.3) относительно плоскости  $\alpha(a \cap b)$ : принадлежит ей, находится перед или за ней?

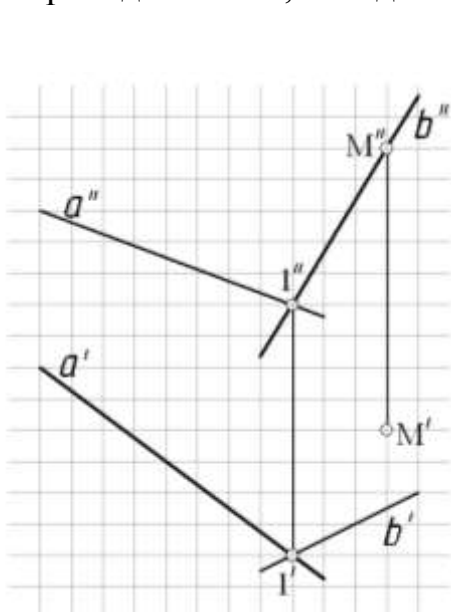


Рис.3.3

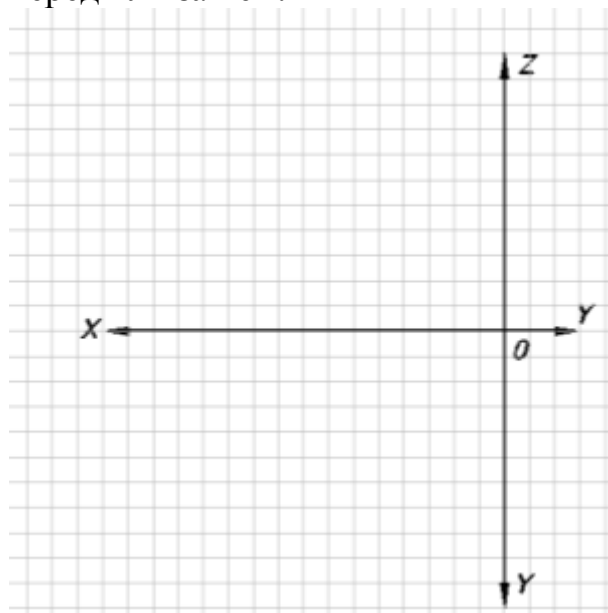


Рис.3.4

3.4. Определить положение точки  $E$  относительно параллелограмма  $ABCD$  и отметить ее видимость (рис.3.4). Координаты точек:  $A(50,10,35)$ ,  $B(5,25,35)$ ,  $C(20,45,10)$ ,  $D(?, ?, 10)$ ,  $E(35,30,15)$ .

3.5. Построить фронтальную проекцию треугольника  $DEF$  (рис.3.5), принадлежащего плоскости  $\alpha(a \cap b)$ , если  $DE \parallel b$ .

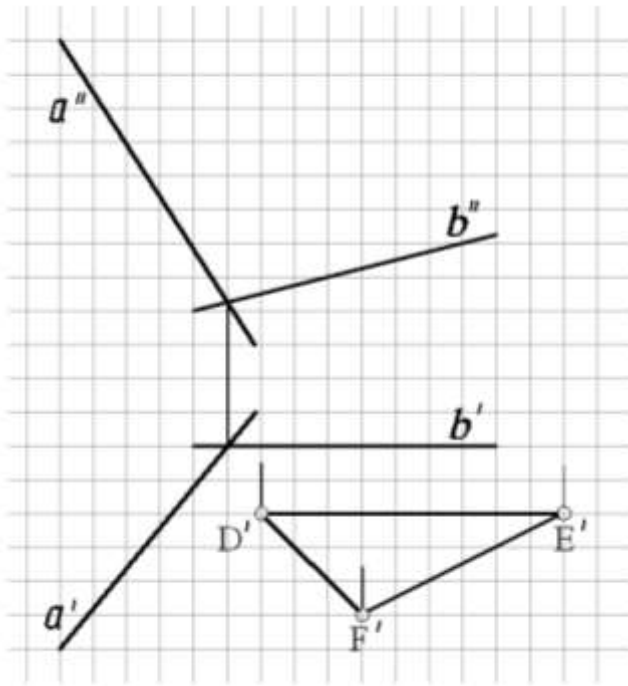


Рис.3.5

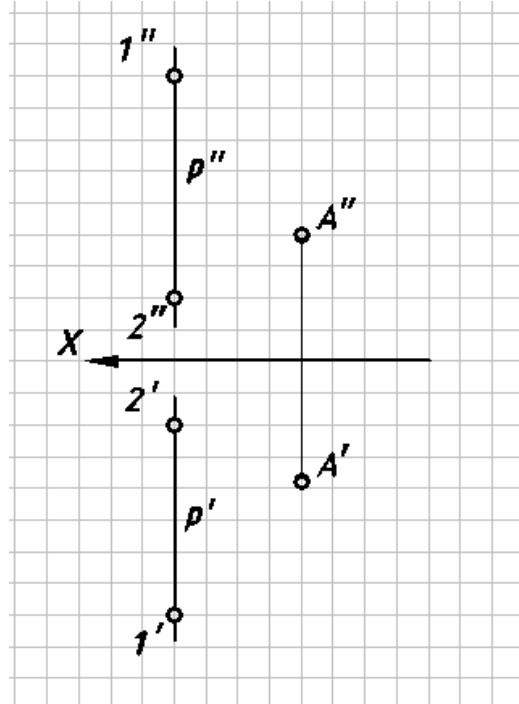


Рис.3.6

3.6. Через точку  $A$  провести прямую  $s$  (рис.3.6), параллельную прямой  $p$  (варианты решений).

3.7. В плоскости  $\alpha(ABC)$  построить три проекции горизонтали, фронтали и профильной прямых, проходящих соответственно через точки  $A(70,10,25)$ ,  $C(20,25,10)$ ,  $B(35,45,45)$  (рис.3.7).

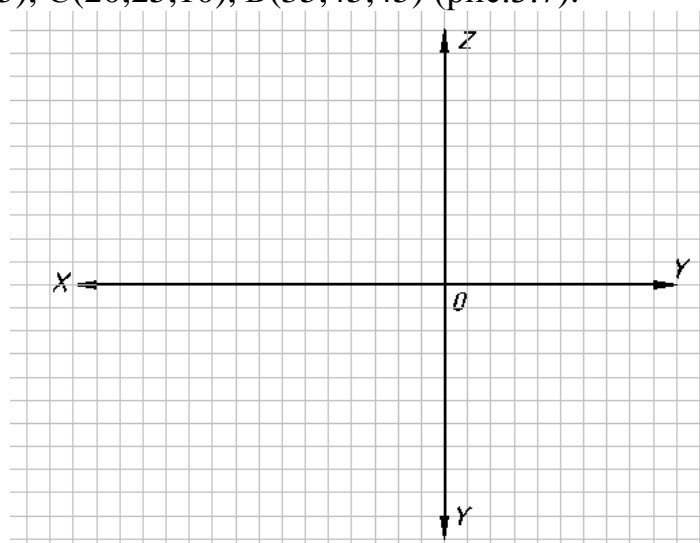


Рис.3.7

- 3.8. Построить проекции горизонталей, фронталей и профильных прямых (рис.3.8), произвольно расположенных в проецирующих плоскостях  $\alpha(a \parallel b)$ ,  $\beta(ABC)$  и  $\gamma(\gamma''')$ .

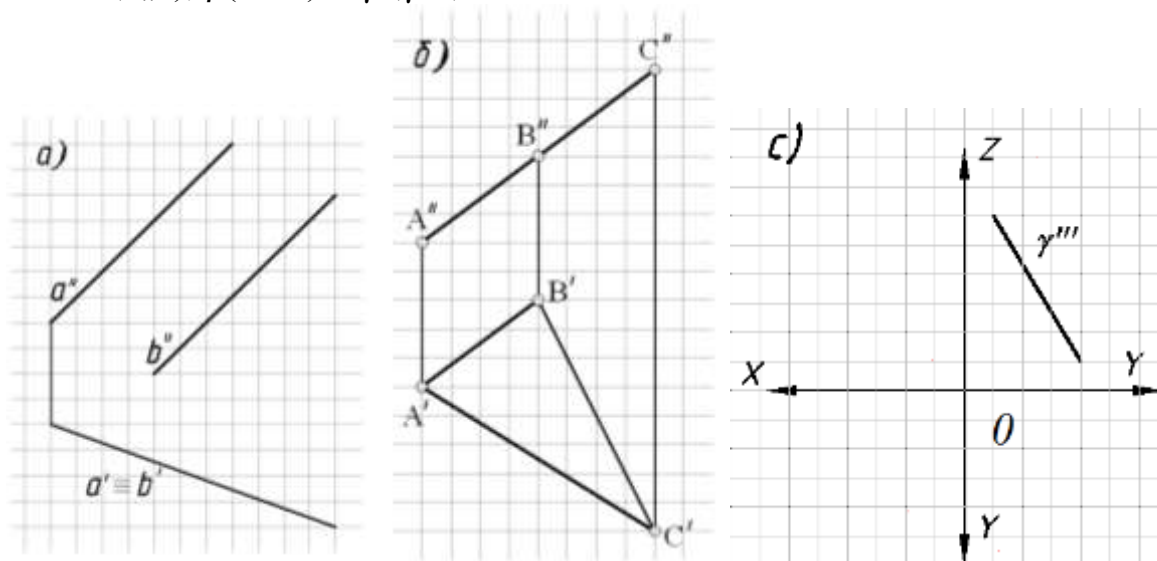


Рис.3.8

- 3.9. Построить дополнительную проекцию треугольника  $ABC$  на плоскость, перпендикулярную его горизонтали (рис.3.9). Спроецировать треугольник  $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$  на плоскость ему параллельную. Координаты точек:  $A(50,0,10)$ ,  $B(25,45,30)$ ,  $C(10,20,0)$ .

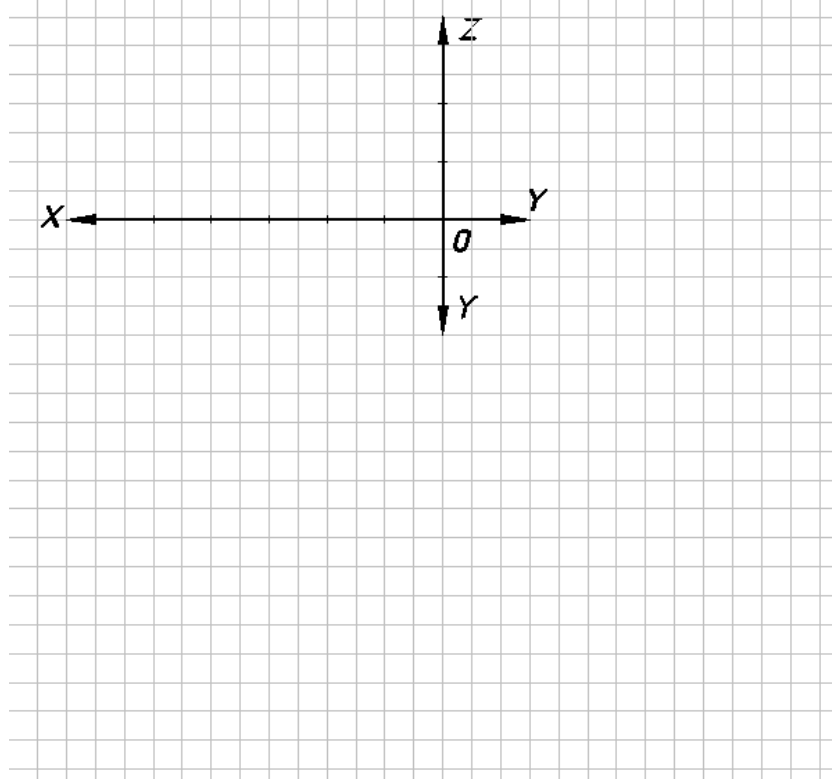


Рис.3.9

- 3.10. Задать произвольную плоскость, проходящую через прямую  $a$  и параллельную прямой  $b$  (рис.3.10).

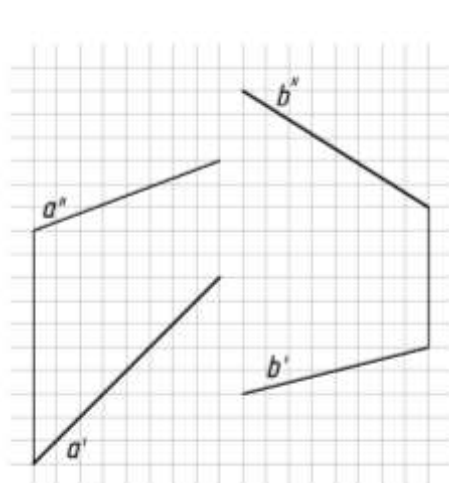


Рис.3.10

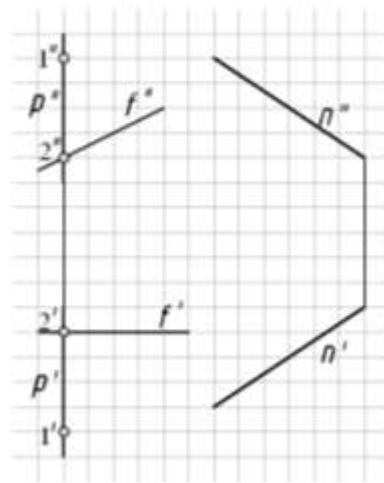


Рис.3.11

- 3.11. Определить, параллельны ли заданные плоскость  $\alpha(f \cap p)$  и прямая  $n$  (рис.3.11).
- 3.12. Построить проекции горизонтально проецирующей плоскости (рис.3.12), проходящей через точку  $M$  параллельно плоскости  $\alpha(a \parallel b)$ .

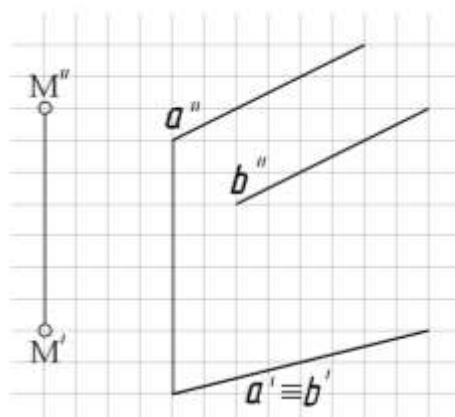
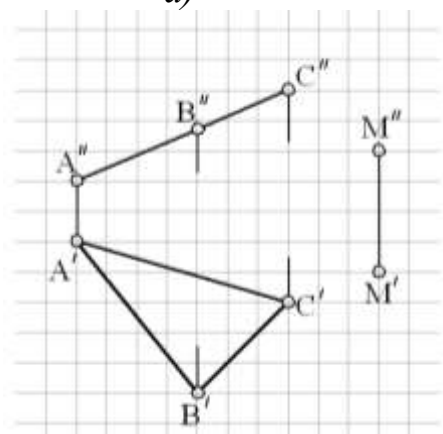


Рис.3.12

- 3.13. Построить проекции плоскости, проходящей через точку  $M$  параллельно плоскости  $\alpha$  (рис.3.13).

а)



б)

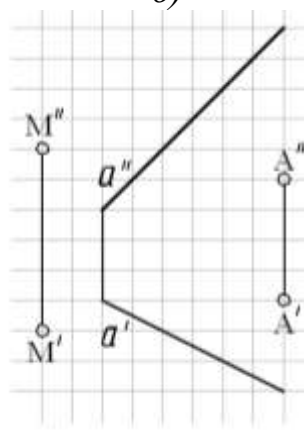


Рис.3.13



- 3.14. Построить проекции прямой (рис.3.14), проходящей через точку  $M$  параллельно плоскости  $\alpha(A, a)$  и пересекающей прямую  $b$ .

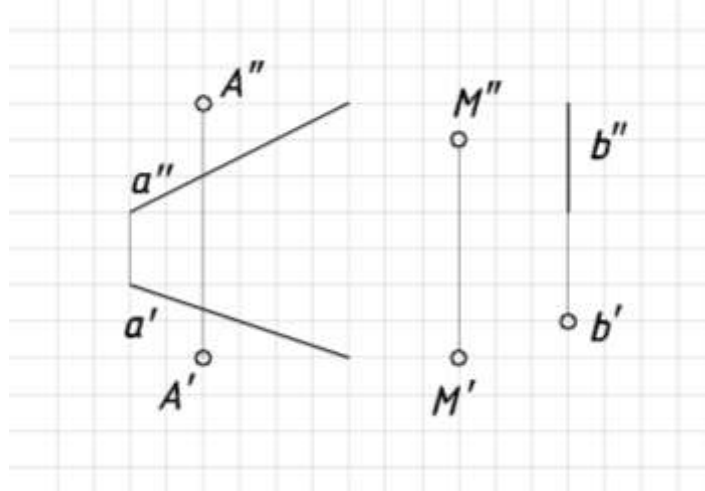


Рис.3.14

- 3.15. Построить проекции перпендикуляра к плоскости треугольника  $ABC$ , проходящего через точку пересечения его медиан (рис.3.15). Координаты точек:  $A(65,10,25)$ ,  $B(40,40,60)$ ,  $C(10,10,10)$ .

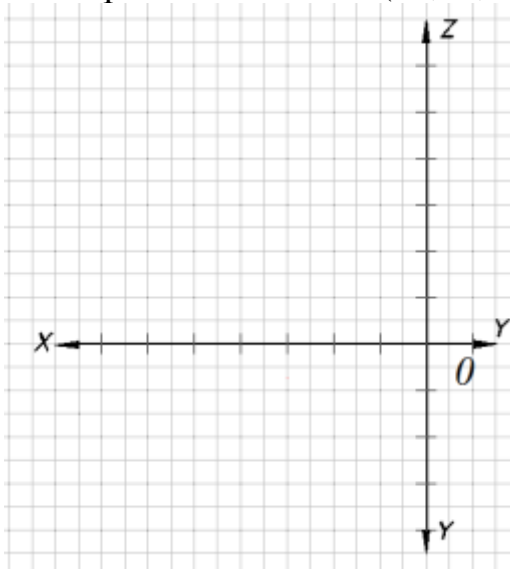


Рис.3.15

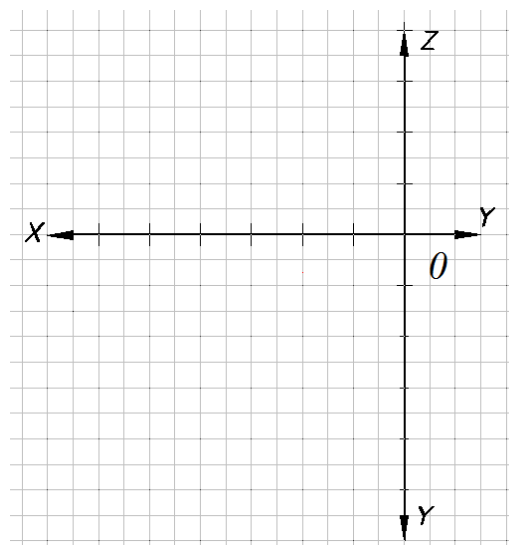


Рис.3.16

- 3.16. Построить проекции прямой, проходящей через точку  $D$  и перпендикулярной к фронтально проецирующей плоскости  $\alpha(ABC)$  (рис.3.16) Координаты точек:  $A(60,35,10)$ ,  $B(35,15,30)$ ,  $C(15,50,?)$ ,  $D(10,10,10)$ .
- 3.17. Построить проекции плоскости (рис.3.17), проходящей через точку  $A$  перпендикулярно прямой  $a$ . Плоскость задать горизонталью и фронталью.

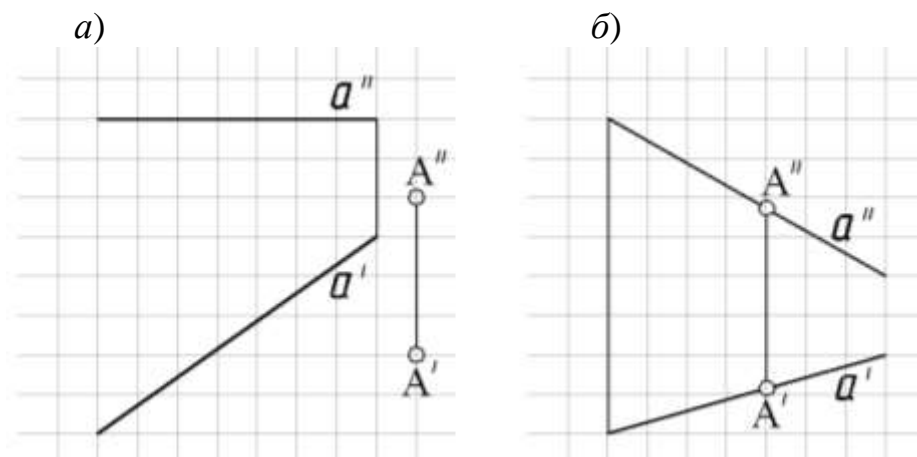


Рис.3.17

3.18. Построить проекции перпендикуляра к плоскости  $\alpha$ , проходящего через точку  $M \in \alpha$  (рис.3.18).

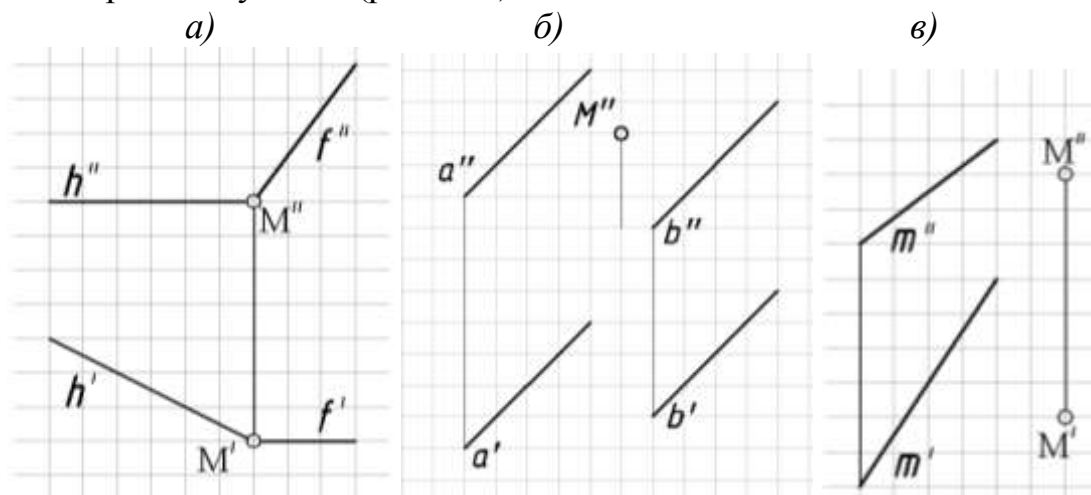


Рис.3.18

3.19. Задать профильно проецирующую плоскость, проходящую через точку  $D$  перпендикулярно плоскости  $\Delta ABC$  (рис.3.19). Координаты точек:  $A(40,5,10)$ ,  $B(20,30,25)$ ,  $C(10,20,10)$ ,  $D(5,15,15)$ .

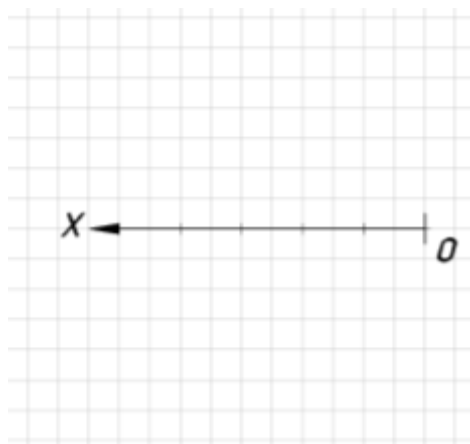


Рис.3.19

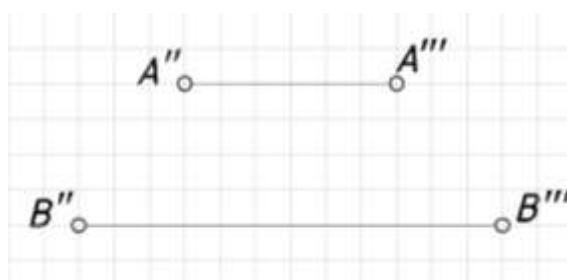


Рис.3.20

3.20. Задать множество точек, равноудаленных от заданных точек  $A$  и  $B$  (рис.3.20).

3.21. Построить проекции точки пересечения прямой  $b$  с плоскостью  $\beta$  ( $m \parallel n$ ). Определить видимую часть прямой (рис. 3.21).

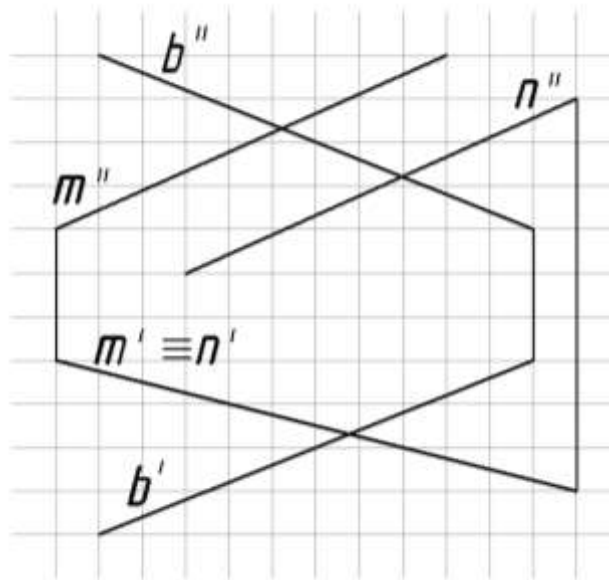


Рис.3.21

3.22. Построить проекции линии пересечения плоскостей (рис.3.22). В задаче б) определить видимые части фигур.

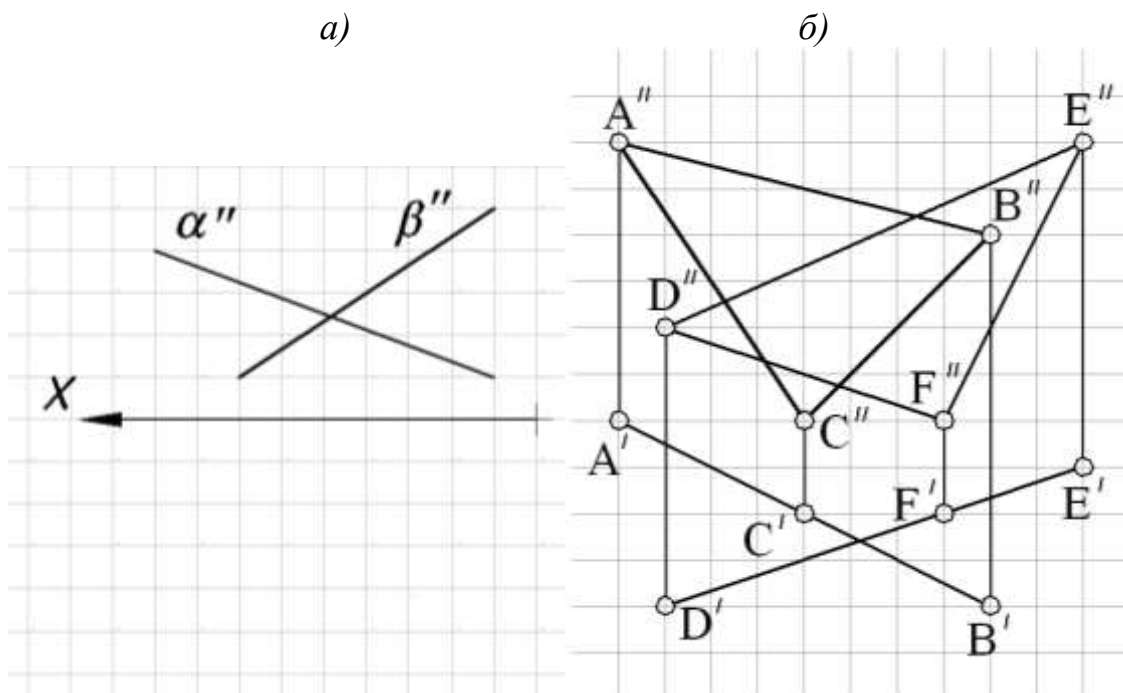


Рис.3.22

3.23. Построить проекции точки пересечения прямой  $a$  (рис.3.23) с плоскостью  $\beta$  ( $B, b$ ).

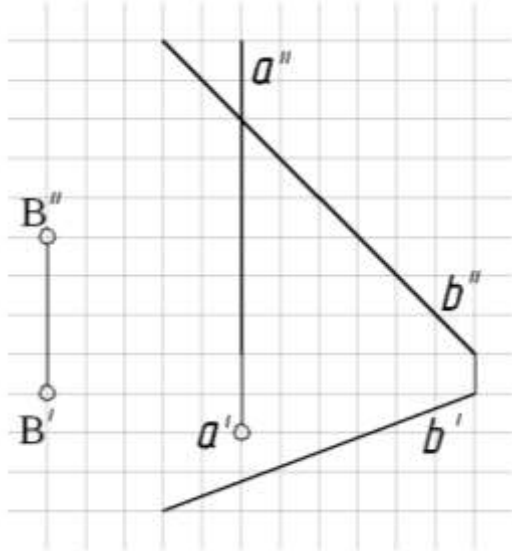


Рис.3.23

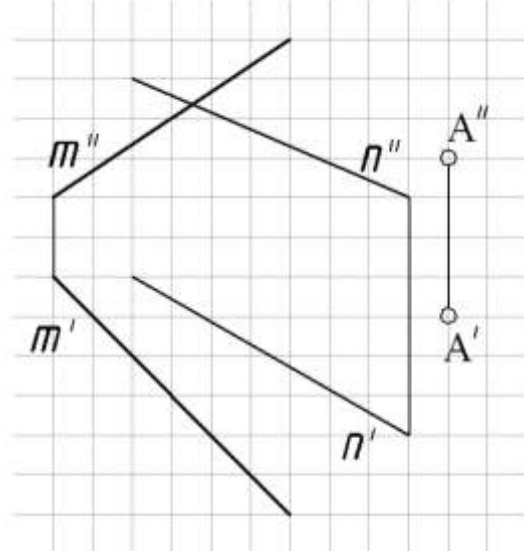


Рис.3.24

3.24. Построить проекции прямой  $a$ , проходящей через точку  $A$  и пересекающей прямые  $m$  и  $n$  (рис.3.24).

### Задачи для самостоятельной работы

3.25. Построить проекции точки  $D$ , принадлежащей плоскости  $\alpha(ABC)$  и расположенной на расстоянии 10 мм от горизонтальной и 30 мм от фронтальной плоскостей проекций (рис.3.25). Координаты точек:  $A(55,40,20)$ ,  $B(10,30,35)$ ,  $C(35,10,0)$ .

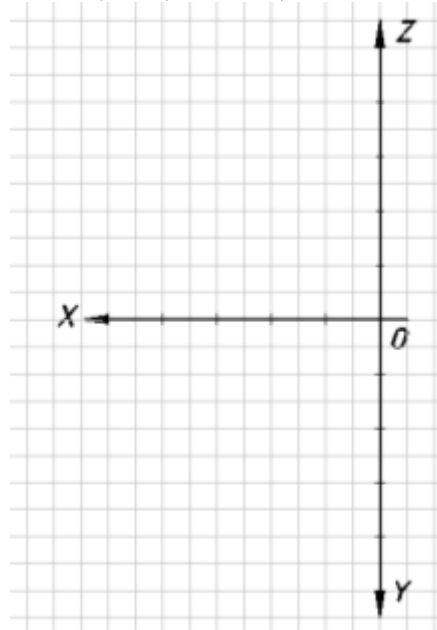


Рис.3.25

- 3.26. Построить фронтальную проекцию прямой  $c$  (рис.3.26), принадлежащей плоскости  $\alpha(a \parallel b)$ , если  $c \parallel a$ .

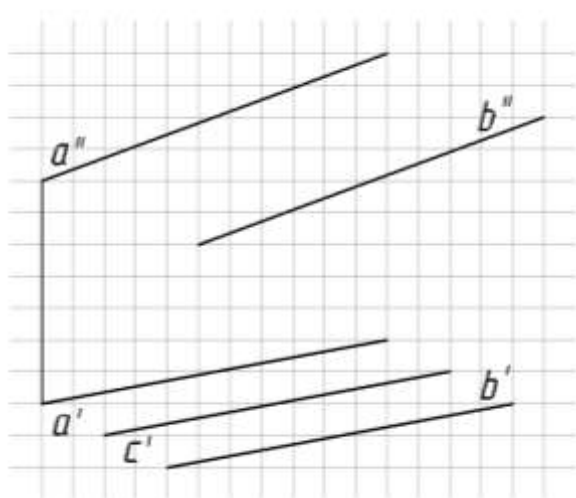


Рис.3.26

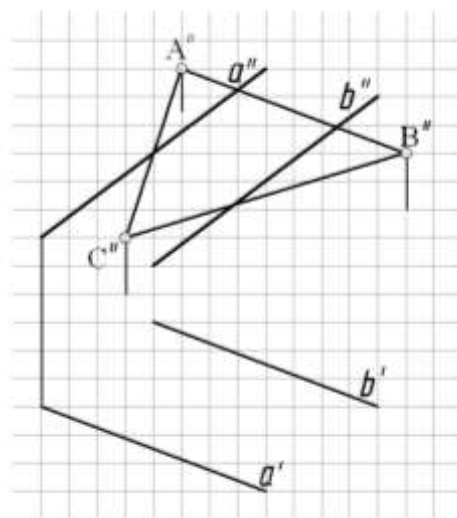


Рис.3.27

- 3.27. Построить горизонтальную проекцию треугольника  $ABC$  (рис.3.27), принадлежащего плоскости  $\alpha(a \parallel b)$ .

- 3.28. Построить фронтальную проекцию пятиугольника  $ABCDE$  (рис.3.28), принадлежащего плоскости  $\alpha(a \cap b)$ .

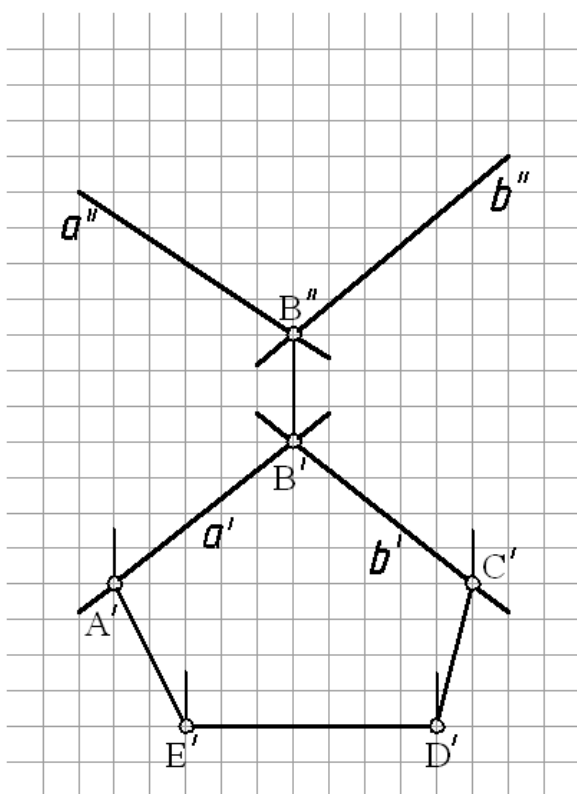


Рис.3.28

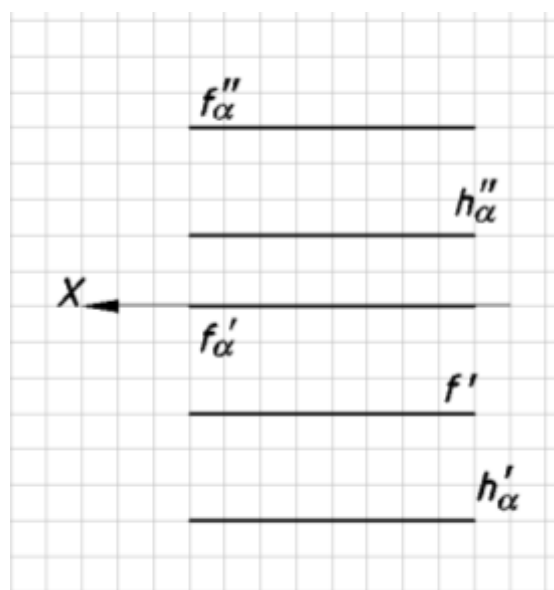


Рис.3.29

3.29. Построить фронтальную проекцию фронтали  $f$  (рис.3.29), принадлежащей плоскости  $\alpha(h_\alpha \parallel f_\alpha)$ .

3.30. В плоскости  $\alpha(A, h)$  провести через точку  $A$  горизонталь  $h_I$ , а через точку  $B$  - фронталь  $f$  (рис.3.30).

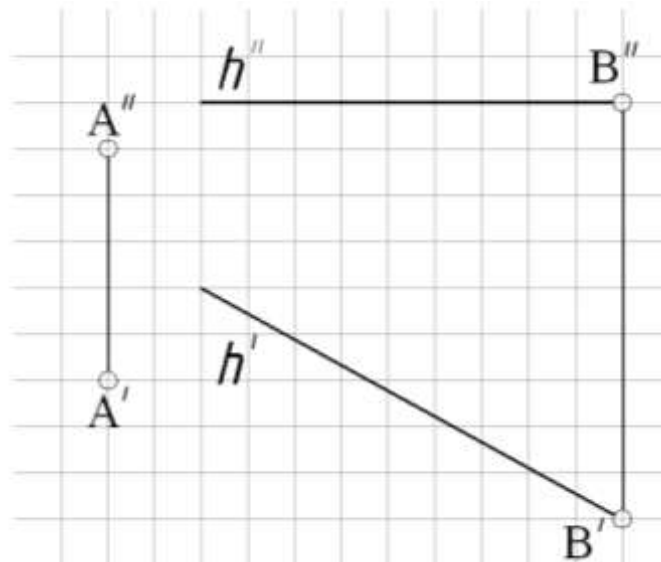


Рис.3.30

3.31. Построить проекции линии наибольшего наклона плоскости треугольника  $ABC$  к плоскостям проекций  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  и определить углы наклона треугольника к плоскостям проекций (использовать способ прямоугольного треугольника) (рис.3.31). Координаты точек:  $A(65,10,35)$ ,  $B(15,50,35)$ ,  $C(65,50,5)$ .

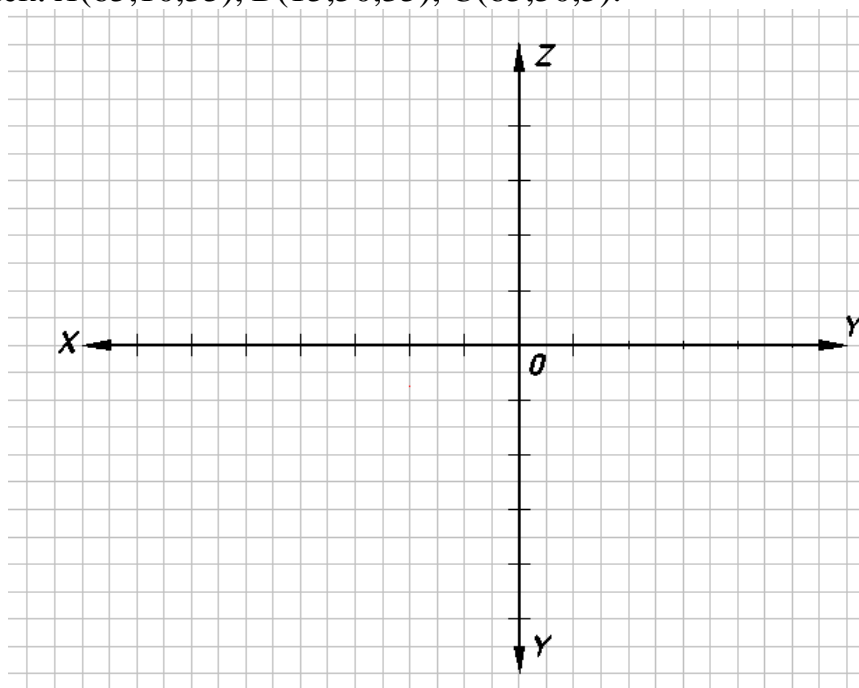


Рис.3.31

3.32. Построить проекции профильно проецирующей плоскости, проходящей через точку  $A$  параллельно прямой  $a$  (рис.3.32).

а)

б)

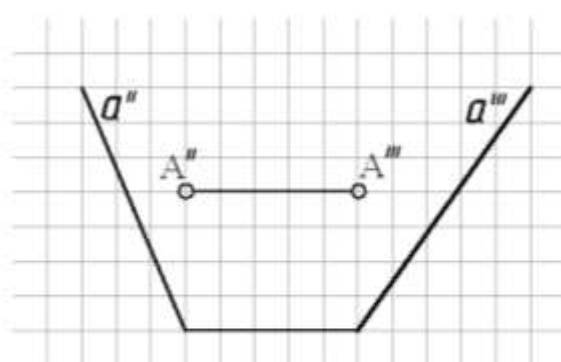
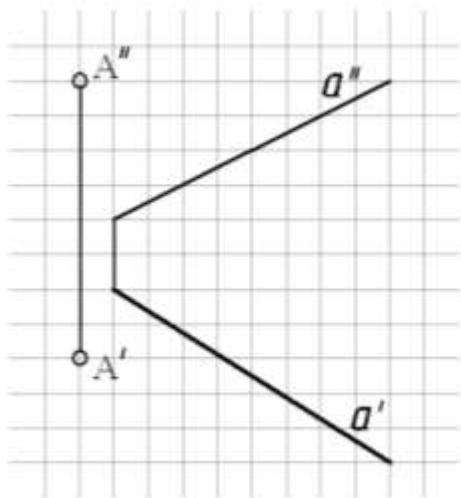


Рис.3.32

3.33. Определить (рис.3.33), параллельна ли прямая  $p$  плоскости  $\alpha(A,B,C)$ ?

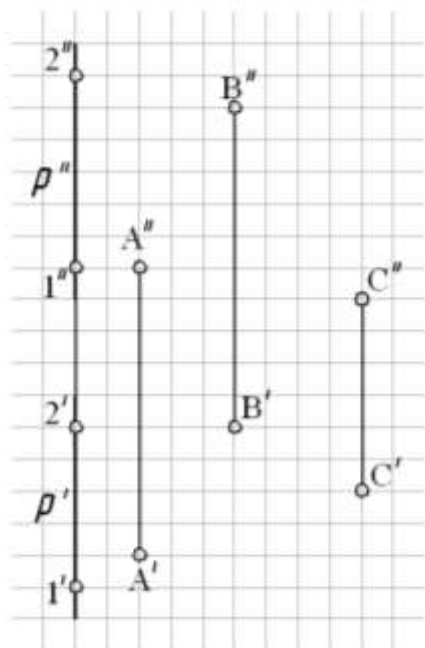


Рис.3.33

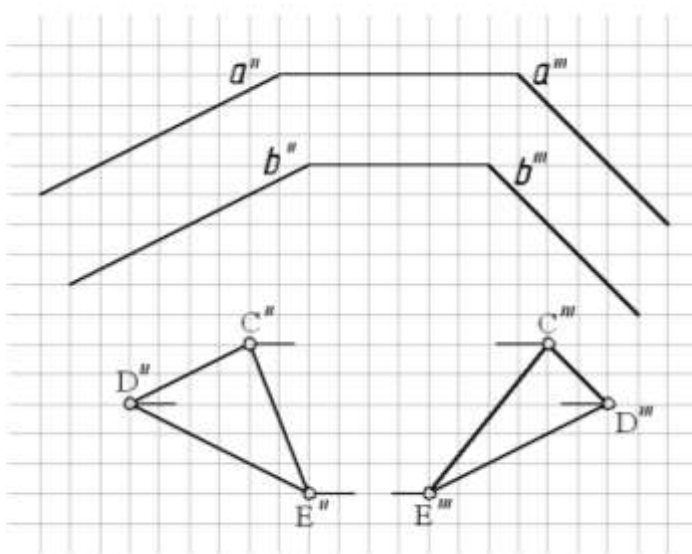


Рис.3.34

3.34. Определить, параллельны ли плоскости  $\alpha(a||b)$  и  $\beta(CDE)$ , если  $a||DC$  (рис.3.34).

3.35. Построить проекции произвольных взаимно параллельных плоскостей, проходящих через прямые  $a$  и  $b$  (рис.3.35).

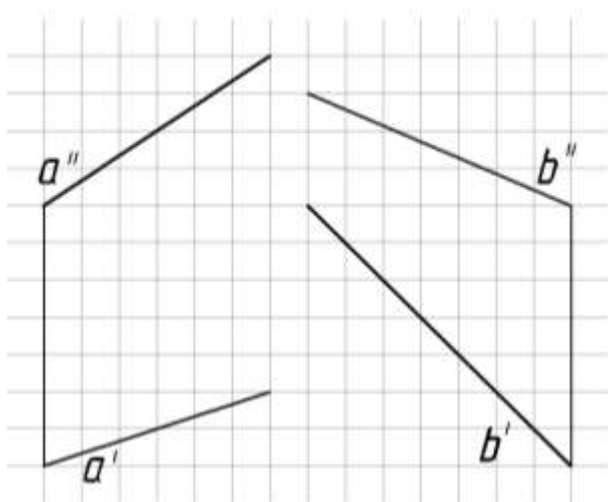


Рис.3.35

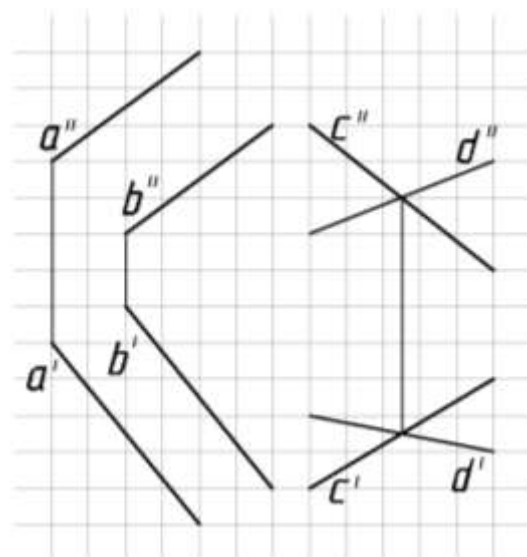


Рис.3.36

3.36. Определить (рис.3.36), параллельны ли плоскости  $\alpha(a||b)$  и  $\beta(c \cap d)$ .

3.37. Задать плоскость, проходящую через точку  $A$  перпендикулярно  $\triangle BCD$  и перпендикулярную одной из сторон этого треугольника (рис.3.37). Координаты точек:  $A(10,25,20)$ ,  $B(60,15,15)$ ,  $C(40,40,35)$ ,  $D(20,20,10)$ .

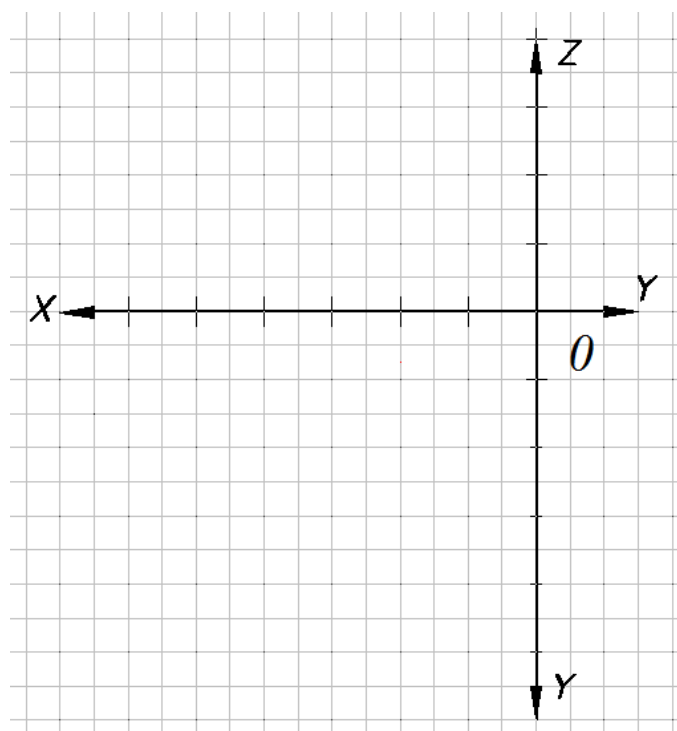


Рис.3.37



3.38. Задать плоскость (рис.3.38), проходящую через точку  $M$  и перпендикулярную плоскостям  $\alpha (a \cap b)$  и  $\beta (c \cap d)$ .

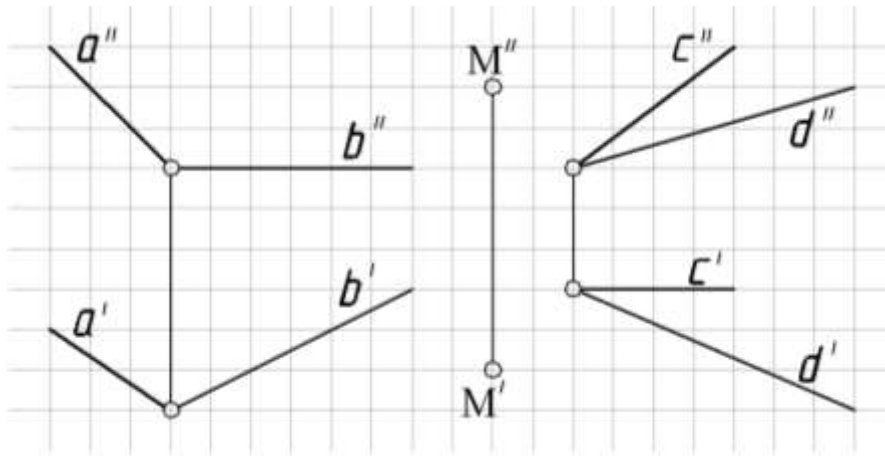


Рис.3.38

3.39. Определить (рис.3.39), перпендикулярна ли прямая  $b$  плоскости  $\alpha(A, a)$ .

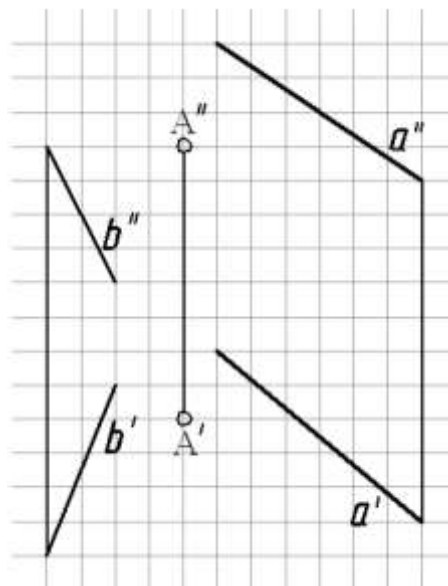


Рис.3.39

3.40. Задать плоскость  $\beta$  (рис.3.40), проходящую через точку  $A$ , перпендикулярную плоскости  $\alpha(a \parallel b)$  и параллельную прямой  $c$ .

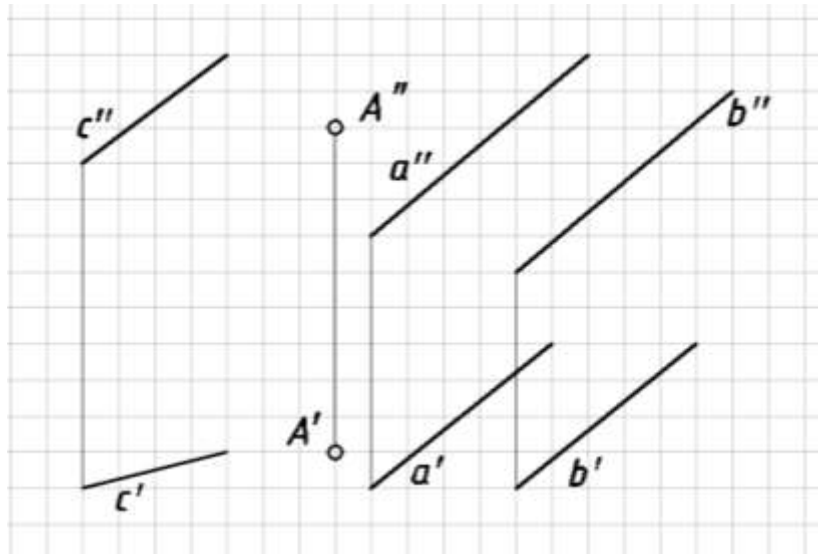


Рис.3.40

3.41. Построить проекции линии пересечения плоскостей  $\alpha$  ( $a \parallel b$ ) и  $\beta \perp \pi_2$  (рис.3.41).

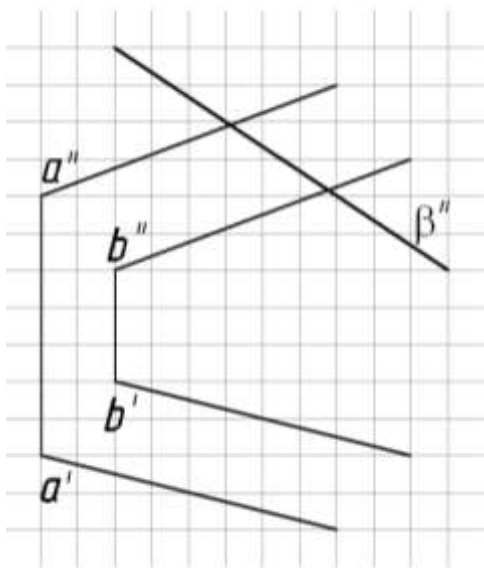


Рис.3.41

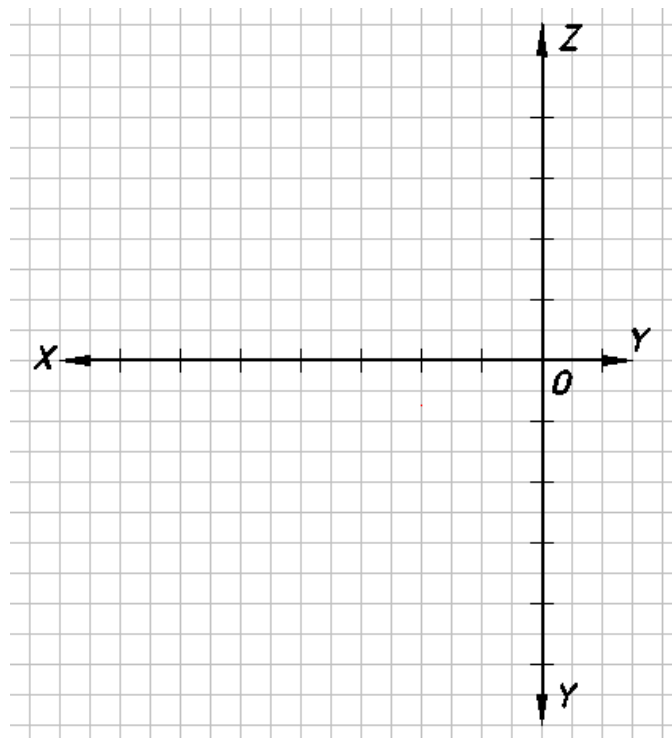


Рис.3.42

3.42. Построить проекции линии пересечения плоскостей  $\alpha$  ( $ABC$ ) и  $\beta$  ( $DEF$ )  $\perp \pi_1$ . Определить видимые части фигур (рис.3.42). Координаты точек:  $A(70,0,10)$ ,  $B(30,35,45)$ ,  $C(10,15,5)$ ,  $D(60,20,40)$ ,  $E(0,10,30)$ ,  $F(40,?,0)$ .

- 3.43. Построить проекции точки пересечения прямой  $m$  (рис.3.43) с плоскостью  $\alpha(a||b)$ . Определить видимую часть прямой  $m$ .

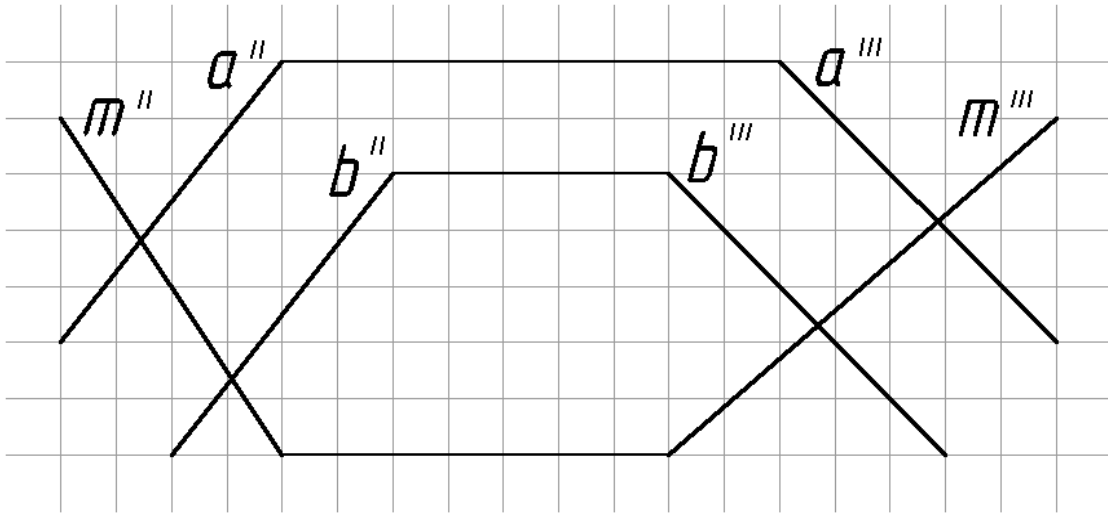


Рис.3.43

- 3.44. Построить проекции точки пересечения прямой  $m$  с треугольником  $ABC$  (рис.3.44). Отметить видимую часть прямой.  $A'B' || m'$ ,  $B''C'' || m''$ .

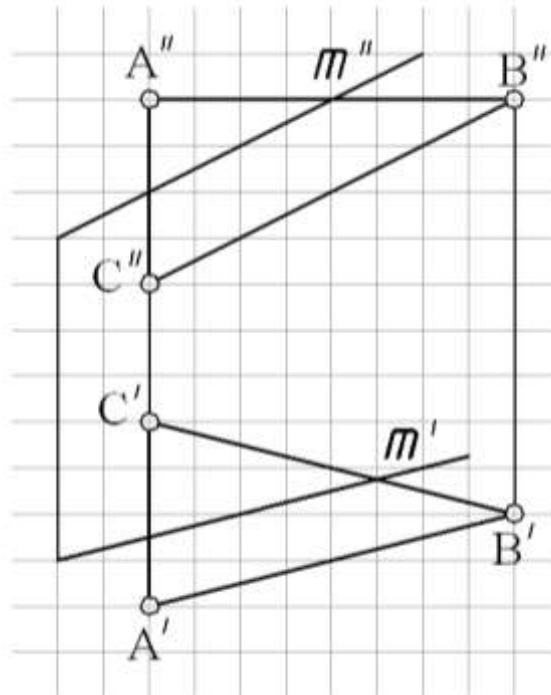


Рис.3.44

- 3.45. Построить проекции точки пересечения отрезка прямой  $DE$  с плоскостью  $\alpha$  ( $A, B, C$ ). Определить видимую часть прямой (рис.3.45). Координаты точек:  $A(55,25,25)$ ,  $B(25,0,45)$ ,  $C(10,25,10)$ ,  $D(40,35,45)$ ,  $E(40,0,10)$ . (Варианты решений).

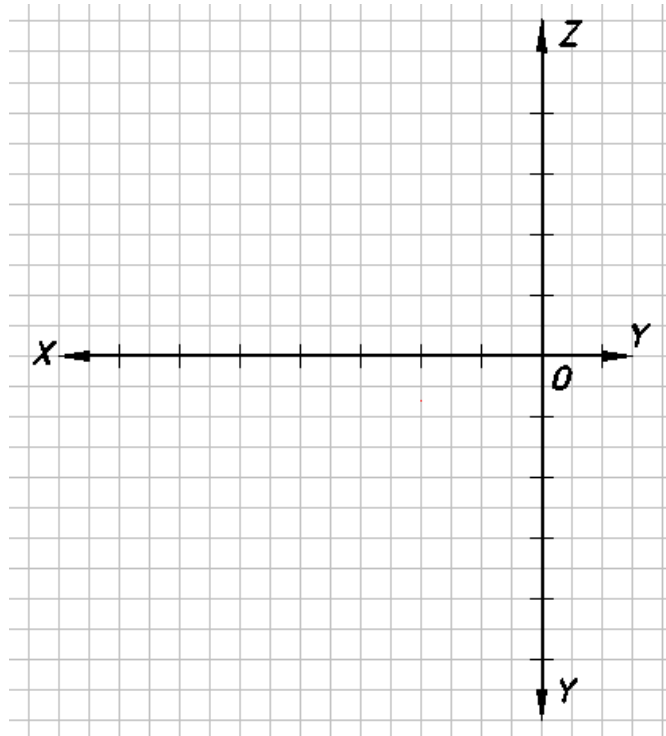


Рис.3. 45

3.46. Построить проекции линии пересечения плоскостей  $\alpha(A,b)$  и  $\beta(c||d)$  и точку пересечения прямой  $c$  с плоскостью  $\alpha$  (рис.3.46).

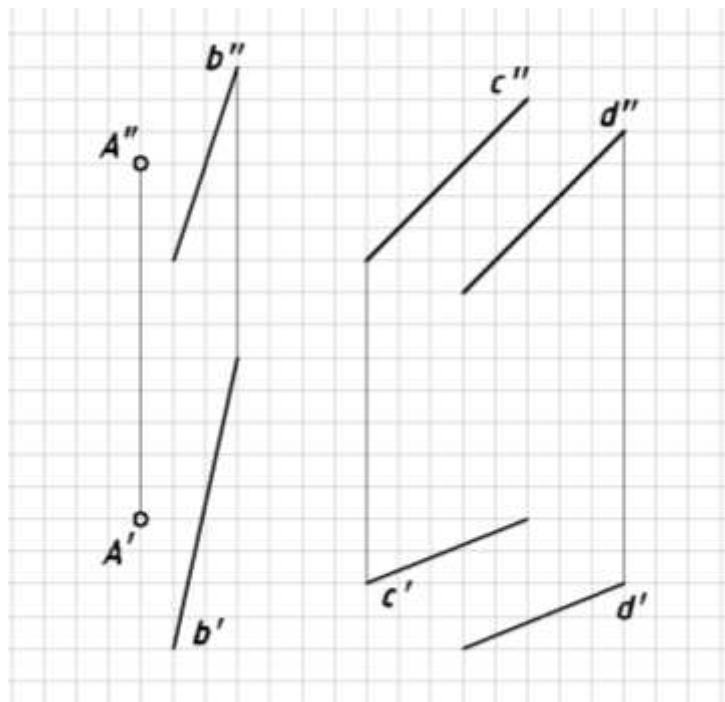


Рис.3.46

3.47. Построить проекции отрезка прямой линии пересечения треугольника  $ABC$  и параллелограмма  $DEFG$ . Определить взаимную видимость фигур (рис.3.47). Задачу решить двумя способами. Координаты точек:  $A(75,35,45)$ ,  $B(30,50,50)$ ,  $C(50,0,0)$ ,  $D(85,10,40)$ ,  $E(10,10,35)$ ,  $F(25,40,5)$ ,  $G(100,40,?)$ .

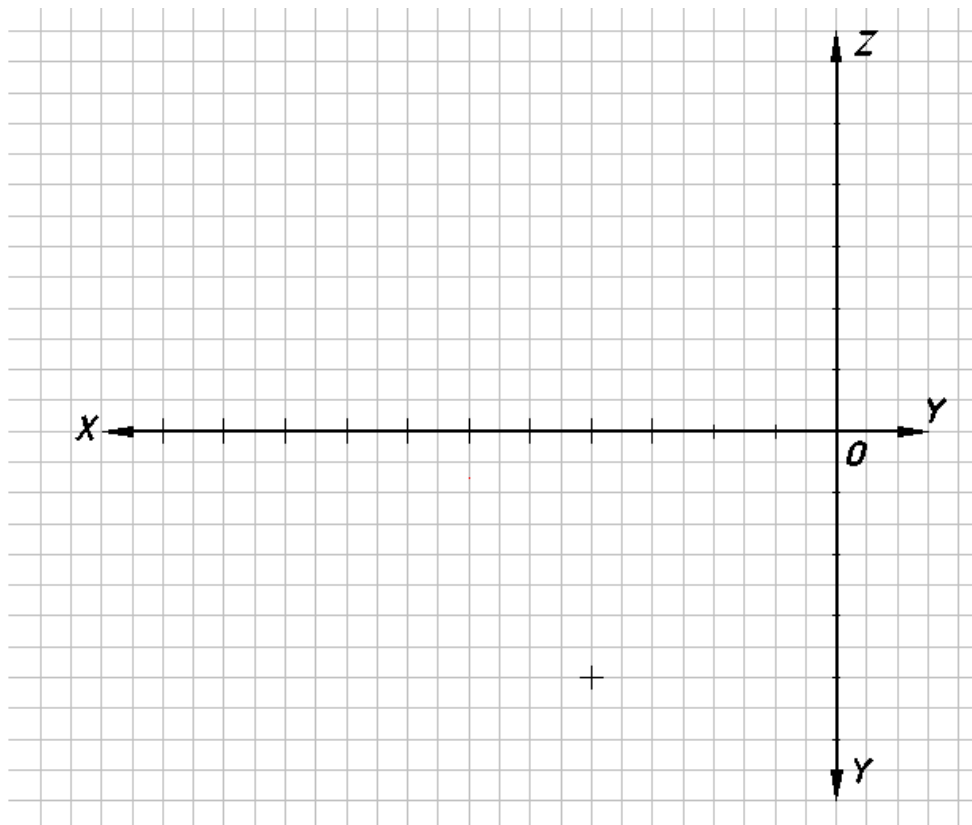


Рис.3.47

3.48. Построить проекции линии пересечения плоскостей  $\alpha(a \cap b)$  и  $\beta(c \cap d)$ , изображенных на рис.3.48.

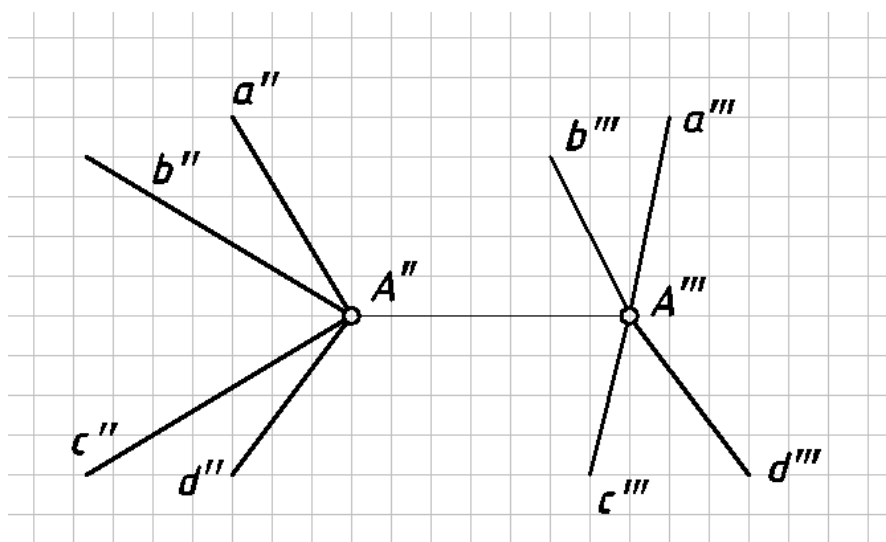


Рис.3.48

#### 4. Способы преобразования чертежа. Проецирование на дополнительные плоскости проекций. Поворот вокруг проецирующих прямых и линий уровня

##### Способ замены плоскостей проекций

Для решения многих задач достаточно иметь две плоскости проекций. В большинстве случаев ими являются плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Однако геометрические фигуры могут быть также заданы проекциями на плоскости  $\pi_2$  и  $\pi_3$  или  $\pi_1$  и  $\pi_3$ . Если же для решения задачи необходимо иметь третью проекцию и основных плоскостей недостаточно, то должна быть задана дополнительная плоскость, перпендикулярная к одной из основных плоскостей  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  или  $\pi_3$ .

Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что изображаемый объект (отрезок, плоскую фигуру, тело), не изменяя его положения в пространстве, проецируют на новую дополнительную плоскость проекций, заменившую одну из основных плоскостей. Новая дополнительная плоскость проекций, положение которой выбирают в зависимости от поставленной задачи, образует с одной из основных плоскостей новую систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. При этом используют следующие условные обозначения и записи:

$\pi_4$  – дополнительная плоскость, перпендикулярная плоскостям  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ , или  $\pi_3$ ;

$X_I$  – новая ось проекций;

$A^{IV}, B^{IV}, C^{IV}, \dots$  – проекции точек  $A, B, C, \dots$  на дополнительную плоскость  $\pi_4$ .

Условная запись замены фронтальной плоскости проекций:  $\pi_1/\pi_2$   
 $\rightarrow \pi_1/\pi_4$ .

Условная запись замены горизонтальной плоскости проекций:  $\pi_1/\pi_2$   
 $\rightarrow \pi_2/\pi_4$ .

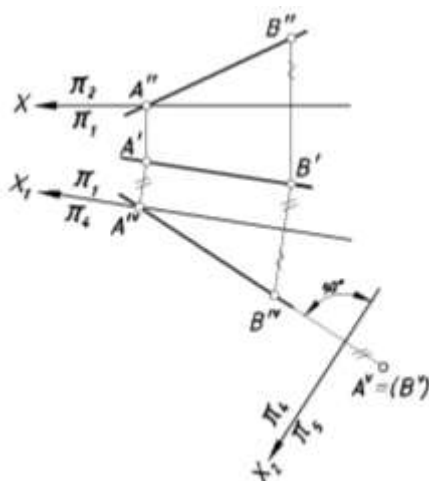
Если по ходу решения задачи требуется двойная, тройная и т.д. замена плоскостей проекций, то каждой новой дополнительной плоскости присваивается следующий индекс, например,  $\pi_5$ ,  $\pi_6$  и т.д. При любом количестве замен плоскостей проекций сохраняются: перпендикулярность между двумя смежными плоскостями и метод прямоугольного параллельного проецирования.

*Двойная замена плоскостей проекций для прямой линии* позволяет прямую линию, занимающую общее положение, преобразовать в проецирующую. Для этого первую дополнительную плоскость задают параллельно прямой, а вторую – перпендикулярно к ней. При первой замене прямая становится прямой уровня, а после второй получают проекцию прямой в виде точки.

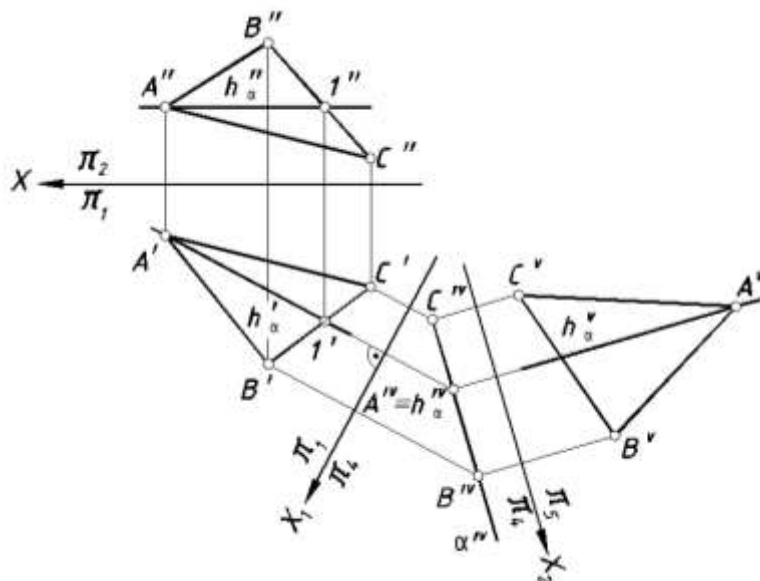
Ниже приведена условная запись двух замен плоскостей проекций для прямой общего положения  $AB$  при преобразовании в проецирующую прямую:

$$\pi_1/\pi_2 \rightarrow \pi_1/\pi_4, \text{ где } \pi_4 \perp \pi_1 \text{ и } \pi_4 \parallel AB;$$

$$\pi_1/\pi_4 \rightarrow \pi_4/\pi_5, \text{ где } \pi_5 \perp \pi_4 \text{ и } \pi_5 \perp AB.$$



*Двойную замену плоскостей проекций для плоскости*  
чаще всего используют для того, чтобы плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня. Первой заменой добиваются того, что в новой системе плоскостей проекций заданная плоскость, например,  $\alpha(ABC)$ , становится проецирующей. При этом дополнительная плоскость проекций  $\pi_4$  должна быть перпендикулярна к одной из линий уровня плоскости  $\alpha$ , например  $h_\alpha$ , и ось  $X_1 \perp h_\alpha'$ . При последующей замене дополнительную плоскость проекций  $\pi_5$  задают параллельно плоскости  $\alpha$ , преобразованной в проецирующую плоскость  $\alpha^{IV}$ .



Произведенная двойная замена плоскостей проекций для плоскости общего положения в виде условной записи может быть представлена следующим образом:

$\pi_1/\pi_2 \rightarrow \pi_1/\pi_4$ , где  $\pi_4 \perp h_\alpha$  и  $\pi_4 \perp \alpha$ ;

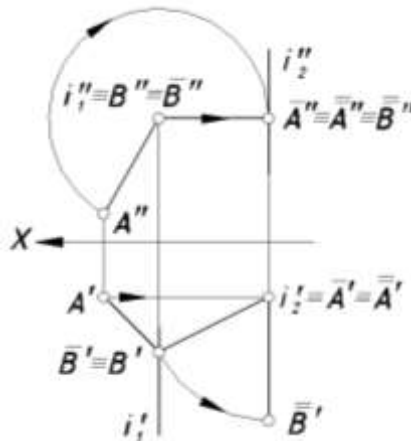
$\pi_1/\pi_4 \rightarrow \pi_4/\pi_5$ , где  $\pi_5 \parallel \alpha$ .

При заменах плоскостей проекций полученные при этом новые проекции не являются конечной целью задачи. На новых проекциях производят требуемые построения и возвращаются в первоначальную систему плоскостей проекций. Поэтому необходимо хорошо усвоить как переходы от основной системы плоскостей проекций к дополнительным, так и от дополнительных – к основной.

### Способ вращения вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций

Само название способа говорит о том, что оси вращения представляют собой проецирующие прямые. При двойном повороте оси вращения чередуют, задавая их перпендикулярно то к одной плоскости проекций, то к другой плоскости проекций. Способ вращения рекомендуется применять при наличии одной геометрической фигуры.

Точка, вращаясь вокруг любой прямой, описывает окружность, расположенную в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Радиус вращения точки равен её расстоянию до оси вращения. При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, одна проекция точки перемещается по дуге окружности, причем угол поворота точки проецируется без искажения, а другая проекция точки перемещается по прямой, параллельной оси проекций.



Прямую линию или отрезок прямой общего положения можно повернуть до положения, параллельного плоскости проекций (первое вращение) или перпендикулярного ей (второе вращение). Как правило, оси вращения проводят через концы отрезков или через точки, расположенные на прямой. Поворот отрезка можно осуществлять по или против часовой стрелки.

При вращении плоскости ось вращения задают проходящей через одну из точек плоскости. Для плоской фигуры за такую точку обычно



принимают одну из её вершин, через которую проводят линию уровня плоскости.

*Рекомендации.* При повороте треугольника, расположенного в плоскости общего положения  $\alpha$ , до положения фронтально проецирующего, через одну из вершин проводят горизонтальную прямую  $h_\alpha$  и ось вращения  $i \perp \pi_1$  задают проходящей также через эту вершину. При повороте горизонтальной прямой до положения, при котором  $h_\alpha \perp \pi_2$ , плоскость треугольника займет фронтально проецирующее положение.

При повороте треугольника, расположенного в плоскости общего положения  $\alpha$ , до положения горизонтально проецирующего, через одну из вершин проводят фронтальную прямую  $f_\alpha$  и ось вращения  $i \perp \pi_2$  задают проходящей также через эту вершину. При повороте фронтальной прямой до положения, при котором  $f_\alpha \perp \pi_1$ , плоскость треугольника займет горизонтально проецирующее положение.

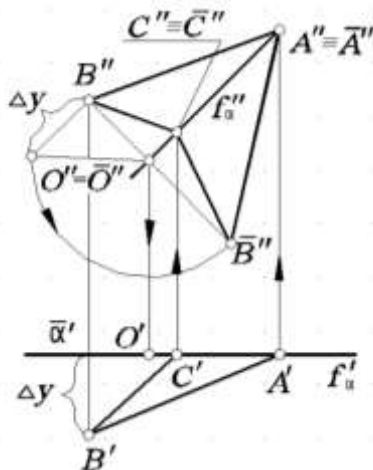
При двойном вращении плоскости общего положения вначале её поворачивают до проецирующего положения, а затем до положения плоскости уровня.

Методика решения задач способом вращения аналогична методике решения задач способом замены плоскостей проекций: одним или двумя поворотами добиваются тех же результатов, что одной или двумя заменами плоскостей проекций.

В задачах с использованием двойного вращения для получения более четкого графического решения необходимо: а) проводить первую и вторую оси вращения через разные и крайние точки геометрической фигуры; б) выбирать направление вращения для наглядности с наибольшим углом поворота.

### Вращение вокруг линий уровня плоскости

Этот способ вращения применяют в том случае, когда все поворачиваемые фигуры принадлежат одной плоскости. За оси вращения принимают прямые линии уровня плоскости. Поворот осуществляют до тех пор, пока плоскость не станет параллельной одной из плоскостей проекций.



Положение плоскости определяется по трем ее точкам, поэтому при повороте плоскости нужно знать новое положение этих точек. Но

плоскость поворачивают вокруг ее собственной линии уровня, следовательно, две точки, принадлежащие этой линии плоскости, зафиксированы и для определения нового положения плоскости нужно повернуть только одну её точку.

При вращении плоскости вокруг ее линии уровня необходимо выполнить два независимых одинарных преобразования – определить величину радиуса вращения одной из точек заданной фигуры и осуществить ее поворот.

### **Проецирование плоских многоугольников**

Плоской называют геометрическую фигуру, все точки которой принадлежат одной плоскости.

Плоская фигура проецируется на плоскость проекций без искажения, если она расположена параллельно этой плоскости. В общем случае для определения истинной величины плоской фигуры применяют один из способов преобразования проекций.

Для определения истинной величины плоской геометрической фигуры, расположенной в проецирующей плоскости, выполняют одну замену плоскостей проекций или один поворот вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций.

Если плоская геометрическая фигура расположена в плоскости общего положения, то ее истинную величину определяют с помощью двойной замены плоскостей проекций, двойного поворота вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям проекций, или вращением вокруг линий уровня.

### **Вопросы для самопроверки:**

1. В чем заключается смысл преобразования чертежа способом проецирования заданных фигур на дополнительные плоскости проекций?
2. Какое положение относительно исходной системы плоскостей проекций занимает дополнительная плоскость?
3. С помощью каких линий плоскости общего положения задают дополнительную плоскость, преобразуя ее в проецирующую?
4. Как располагают дополнительные плоскости проекций относительно плоской фигуры общего положения при определении ее натуральной величины?
5. В чем заключается смысл преобразования чертежа способом поворота заданных фигур (отрезка прямой и плоскости общего положения) вокруг проецирующих прямых?
6. В виде каких фигур проецируется на плоскости проекций траектория точки, вращающейся вокруг проецирующей прямой?

7. В виде каких фигур проецируется на плоскости проекций траектория точки, вращающейся вокруг линии уровня?
8. Как обозначают проекции точек при втором повороте геометрической фигуры?
9. Как должны быть расположены первая и вторая оси вращения относительно основных плоскостей проекций, чтобы после поворота прямой общего положения она стала фронтально проецирующей?
10. В чем заключается смысл преобразования чертежа способом поворота заданных фигур вокруг линий уровня?
11. Как проецируется траектория вращения точки на плоскости проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$  при ее повороте вокруг фронтальной прямой плоскости?
12. Какими способами можно определить действительную величину радиуса вращения точки, принадлежащей плоскости общего положения, при ее повороте вокруг линии уровня той же плоскости?

### **Задачи:**

- 4.1. Отрезок прямой  $AB$  спроецировать на дополнительную плоскость проекций, относительно которой он будет занимать проецирующее положение (рис.4.1). Координаты точек:  $A(55,0,25)$ ,  $B(5,40,0)$ .

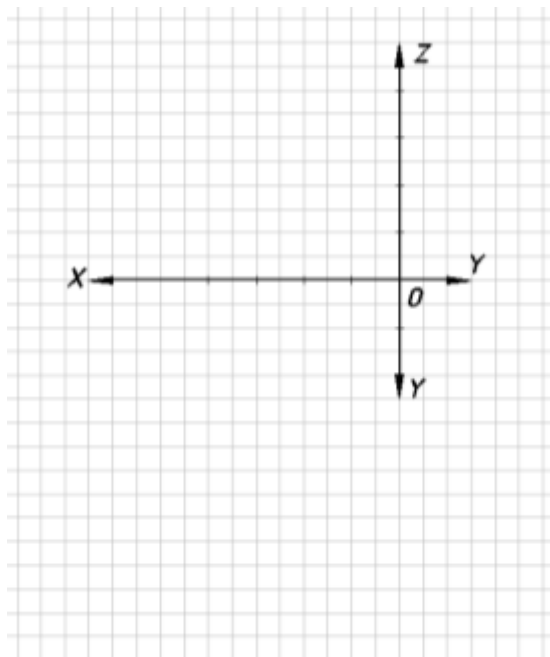


Рис.4.1

- 4.2. Построить проекции равнобедренного треугольника  $ABC$  с вершиной  $C$  на прямой  $DE$  (рис.4.2). Координаты точек:  $A(50,20,25)$ ,  $B(10,40,0)$ ,  $D(40,5,10)$ ,  $E(10,20,30)$ .

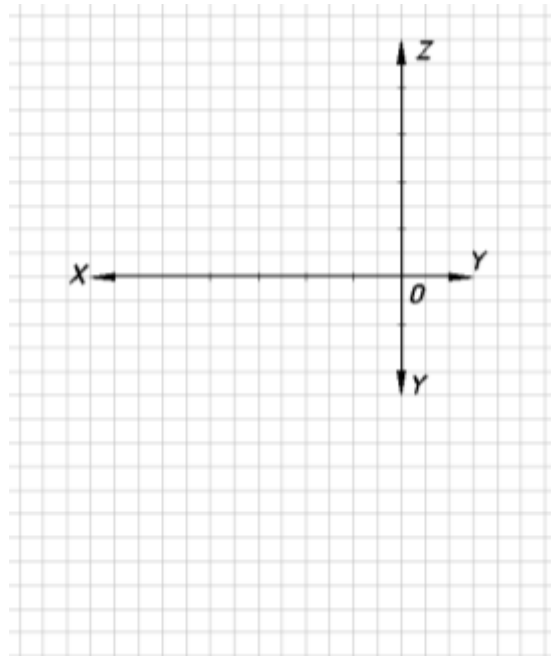


Рис.4.2

- 4.3. Построить недостающую проекцию точки  $M$ , расположенной на расстоянии 15 мм от плоскости треугольника  $ABC$  (рис.4.3). Координаты точек:  $A(45,25,35)$ ,  $B(25,30,15)$ ,  $C(5,10,45)$ ,  $M(50,?,20)$ .

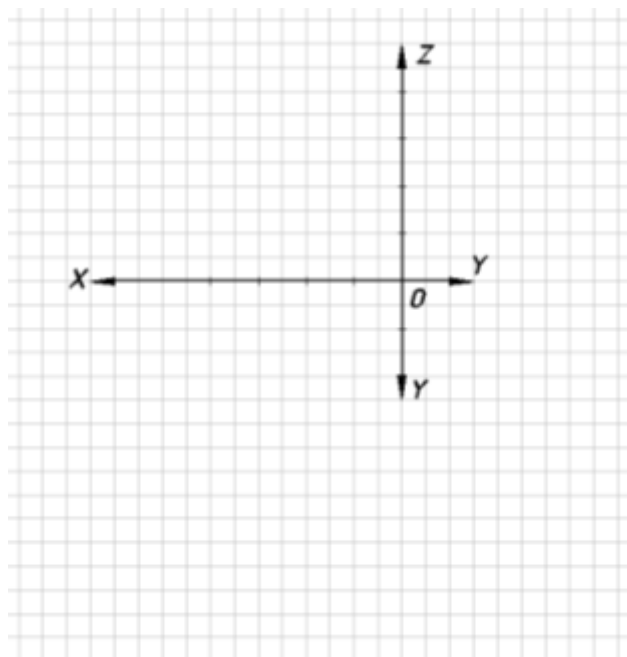


Рис.4.3

- 4.4. Построить проекции прямой, проходящей через точку  $M$  и пересекающей прямые  $AB$  и  $CD$  (рис.4.4). Координаты точек:  $A(0,20,0)$ ,  $B(30,50,40)$ ,  $C(15,30,0)$ ,  $D(50,10,30)$ ,  $M(60,20,10)$ .

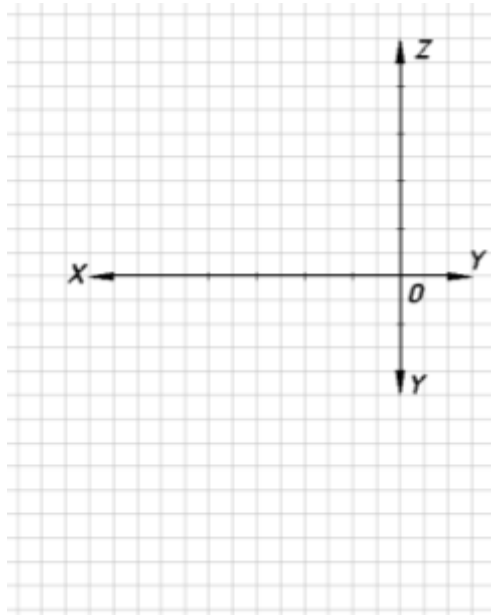


Рис.4.4

- 4.5. Построить проекции точки  $D$ , симметричной точке  $E$  относительно плоскости треугольника  $ABC$  (рис.4.5). Координаты точек:  $A(50,20,10)$ ,  $B(15,30,25)$ ,  $C(35,0,40)$ ,  $E(30,0,0)$ .

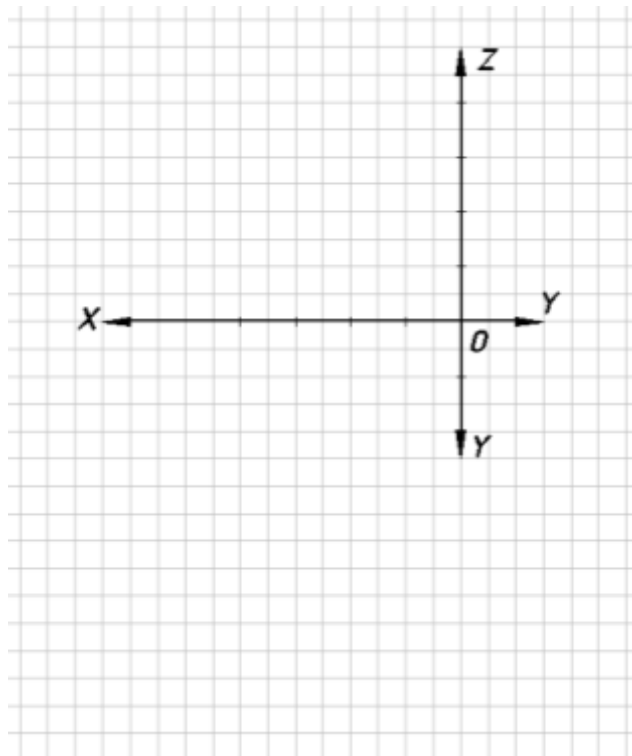


Рис.4.5

- 4.6. Отрезок прямой  $AB$  повернуть вокруг проецирующих прямых до горизонтально проецирующего положения (рис.4.6). Координаты точек:  $A(80,30,25)$ ,  $B(50,15,45)$ .

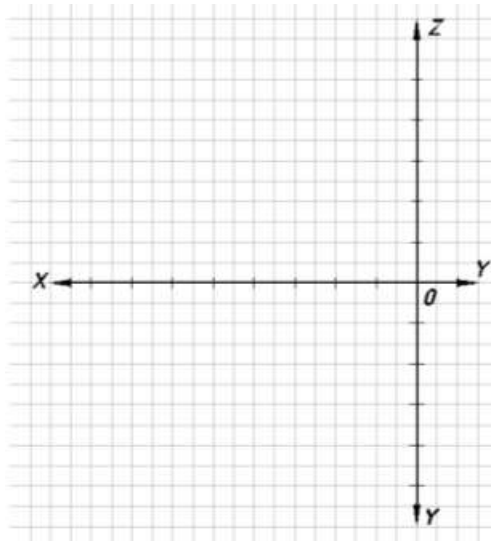


Рис.4.6

- 4.7. Отрезок прямой  $AB$  повернуть вокруг горизонтально проецирующей прямой так, чтобы в новом положении она прошла через точку  $C$  (рис.4.7). Координаты точек:  $A(80,25,35)$ ,  $B(50,5,5)$ ,  $C(10,30,25)$ .

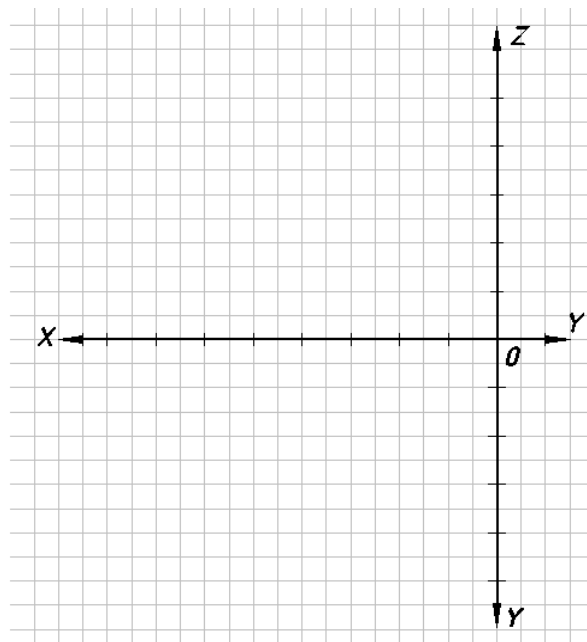


Рис.4.7

- 4.8. Последовательными поворотами вокруг проецирующих прямых расположить треугольник  $ABC$  параллельно фронтальной плоскости проекций (рис.4.8). Координаты точек:  $A(60,5,40)$ ,  $B(30,15,55)$ ,  $C(10,35,30)$ . (При решении задачи фронталь следует провести через точку  $B$ ).

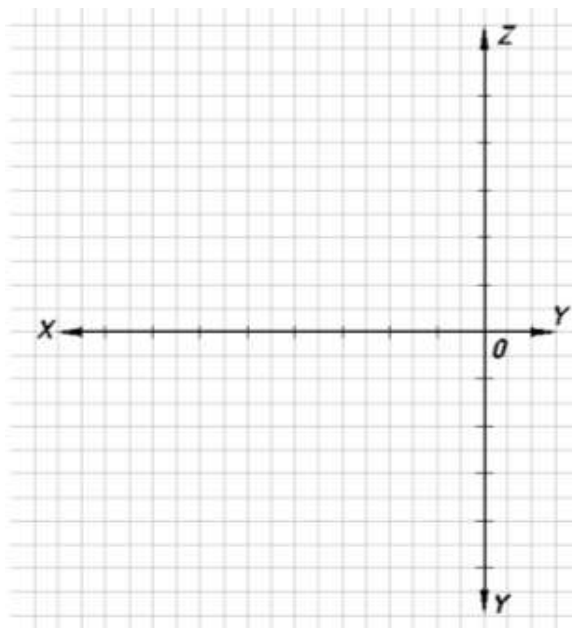


Рис.4.8

- 4.9. Точку  $M$  повернуть вокруг проецирующей прямой, перпендикулярной плоскости проекций  $\pi_1$  и проходящей через точку  $C$ , до совмещения с плоскостью треугольника  $ABC$  (рис.4.9). Координаты точек:  $A(70,0,10)$ ,  $B(45,50,35)$ ,  $C(30,10,0)$ ,  $M(10,20,15)$ .

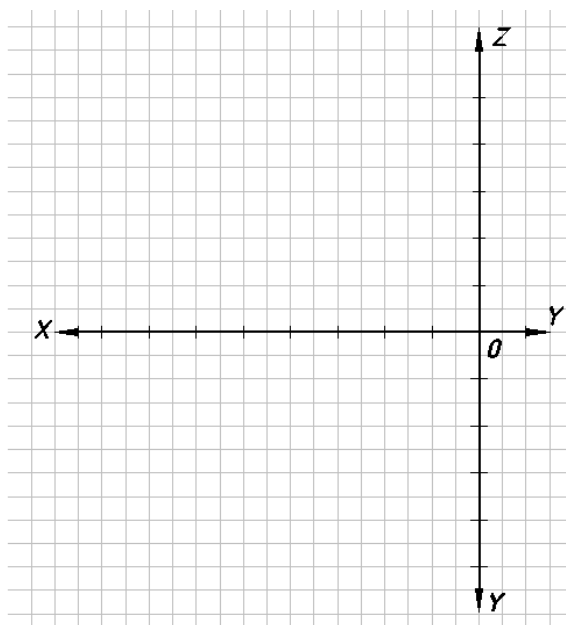


Рис.4.9

- 4.10. Поворотом вокруг проецирующей прямой, проходящей через точку  $C$  и перпендикулярной плоскости проекций  $\pi_1$ , совместить точку  $A$  с поверхностью шара с центром в точке  $B$  (рис.4.10). Радиус шара 25 мм. Координаты точек:  $A(80,40,40)$ ,  $B(30,30,25)$ ,  $C(60,10,10)$ .

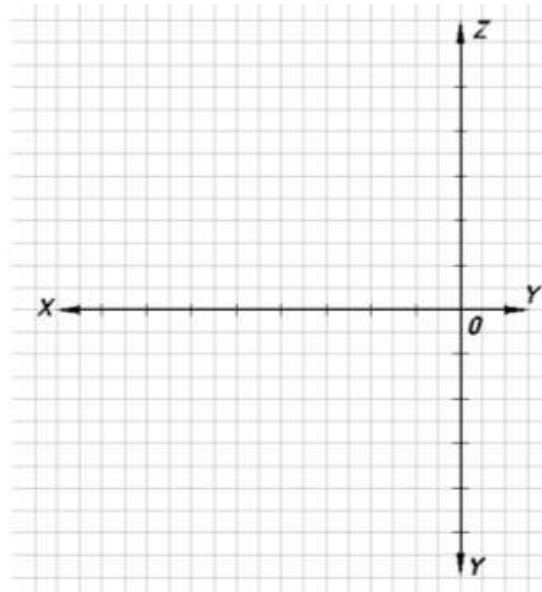


Рис.4.10

- 4.11. Треугольник  $ABC$  повернуть вокруг линии уровня до положения, параллельного фронтальной плоскости проекций (рис.4.11). Координаты точек:  $A(60,15,35)$ ,  $B(40,45,50)$ ,  $C(10,25,20)$ .

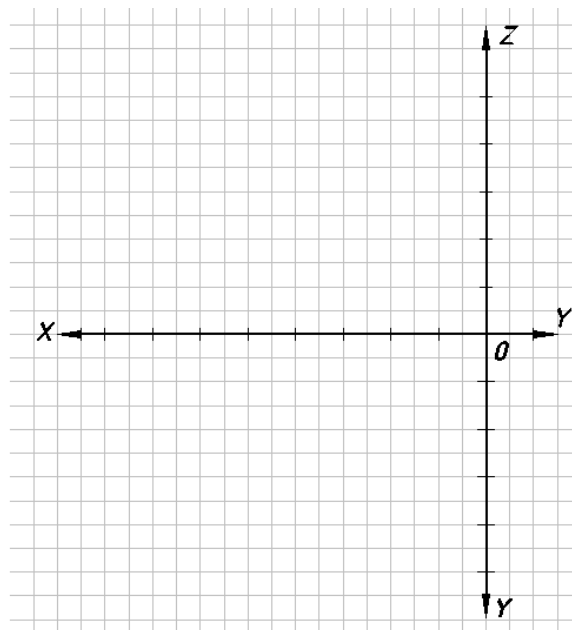


Рис.4.11

- 4.12. Построить проекции равностороннего треугольника  $ABC$  со стороной  $BC$  на прямой  $DE$  (рис.4.12). Координаты точек:  $A(30,55,35)$ ,  $D(70,30,10)$ ,  $E(0,10,10)$ . Решить вращением вокруг линии уровня.



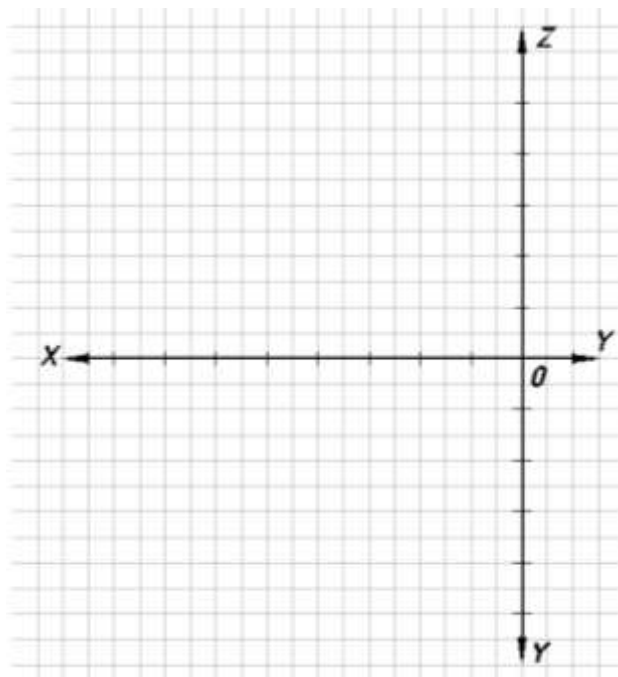


Рис.4.12

- 4.13. Построить проекции параллелограмма ABCD с основанием BC на прямой DE при условии, что  $BC = 50$  мм, а длина боковой стороны равна 30 мм. Координаты точек:  $A(50, 45, 40)$ ,  $D(60, 20, 25)$ ,  $E(0, 50, 25)$ . Решить вращением вокруг линии уровня.

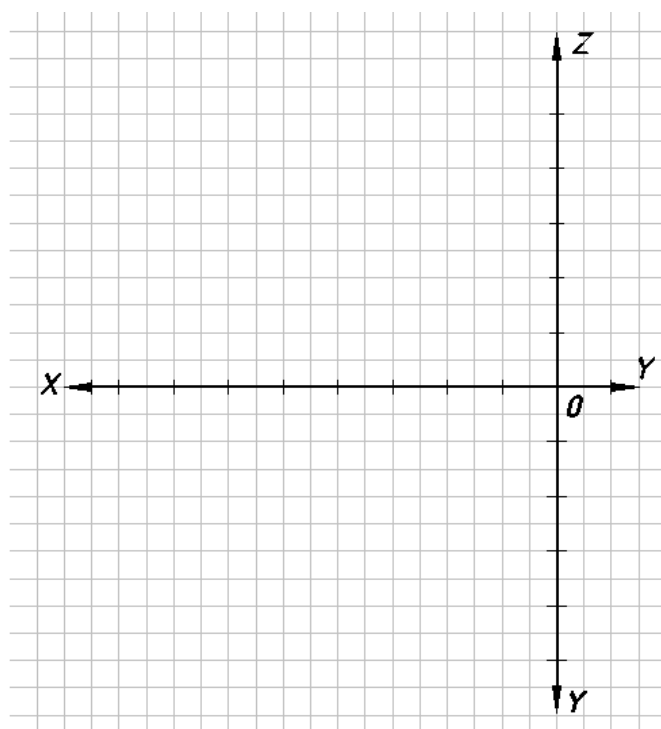


Рис.4.13

### Задачи для самостоятельной работы

- 4.14. Точку  $A$  спроецировать на дополнительную плоскость проекций  $\pi_4 \perp \pi_1$ , расположенную под углом  $60^\circ$  к плоскости  $\pi_2$ , так, чтобы точка  $A$  оказалась в биссекторной плоскости системы плоскостей  $\pi_1, \pi_4$ . Координаты точки:  $A(50, 15, 25)$  (рис.4.14).

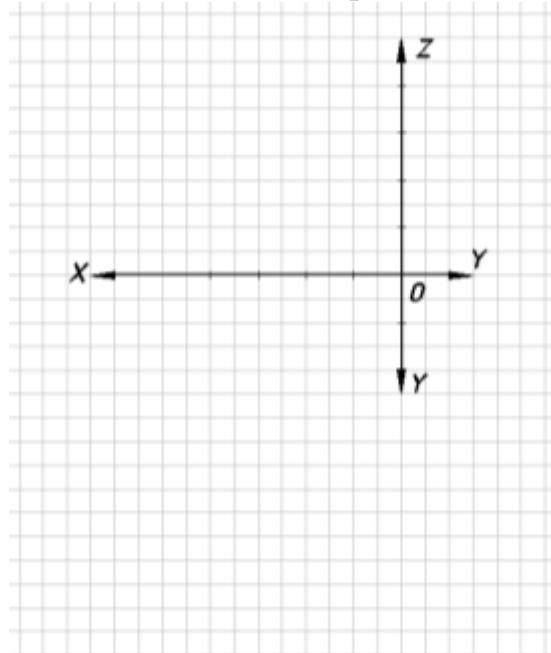


Рис.4.14

- 4.15. Построить проекции отрезка прямой, по которому пересекаются параллелограмм  $KLMN$  и треугольник  $ABC$ . Отметить взаимную видимость их частей (рис.4.15). Координаты точек:  $A(70, 40, 45)$ ,  $B(20, 55, 45)$ ,  $C(40, 0, 0)$ ,  $K(75, 10, 60)$ ,  $L(0, 10, 30)$ ,  $M(15, 45, 5)$ ,  $N(90, ?, ?)$ .

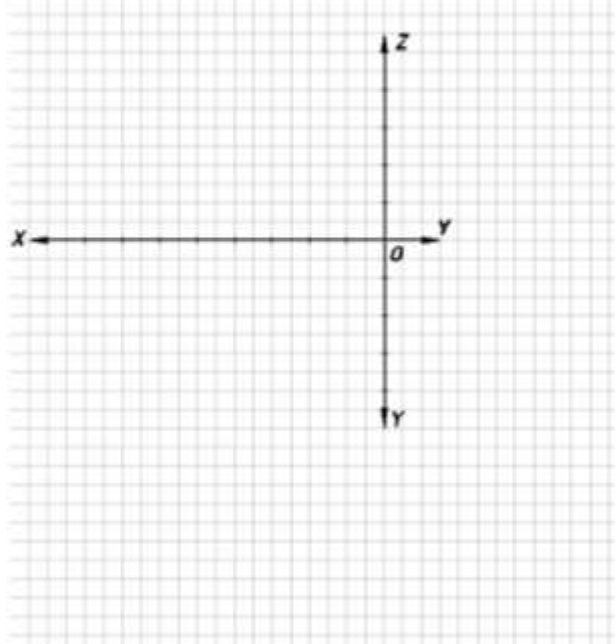


Рис.4.15

- 4.16. Построить проекции точек  $D$  и  $E$ , принадлежащих соответственно горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций и расположенных на равных расстояниях от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  (рис.4.16). Координаты точек:  $A(55,30,50)$ ,  $B(0,30,30)$ ,  $C(30,0,10)$ .

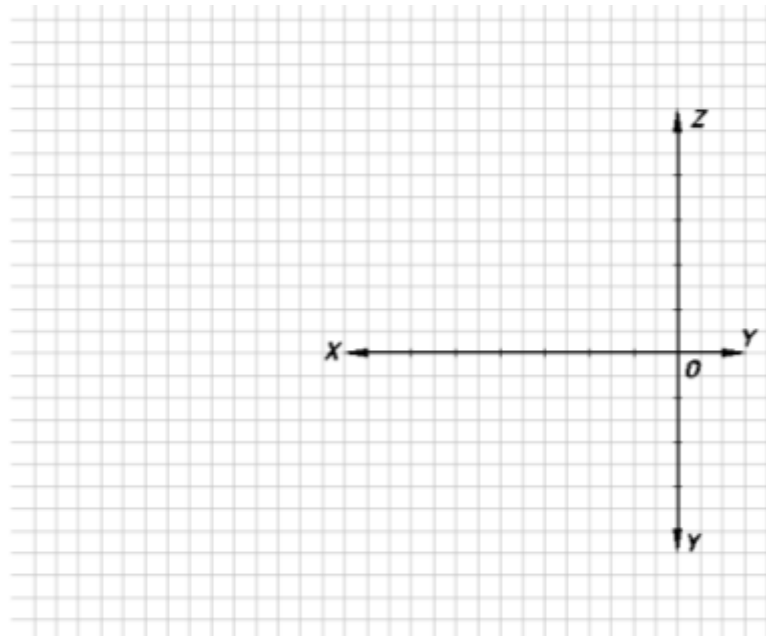


Рис.4.16

- 4.17. Построить проекции и натуральный вид сечения пирамиды  $SKLMN$  ( $S$ -вершина пирамиды) плоскостью  $\alpha$  ( $A,B,C$ ) (рис.4.17). Отметить видимость отрезков контура сечения. Координаты точек:  $A(60,45,55)$ ,  $B(15,5,30)$ ,  $C(70,5,10)$ ,  $K(20,25,10)$ ,  $L(40,50,10)$ ,  $M(60,25,10)$ ,  $N(40,0,10)$ ,  $S(40,25,55)$ .

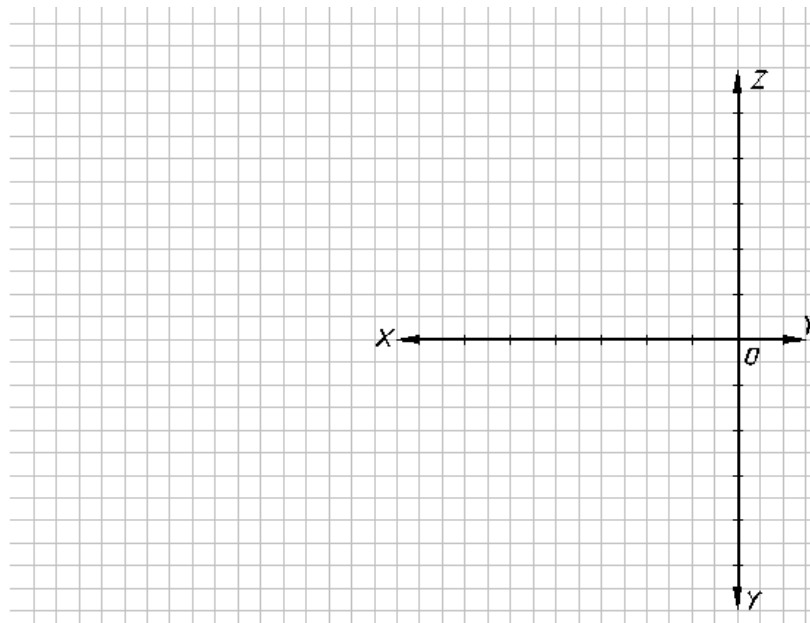


Рис.4.17

- 4.18. Поворотом вокруг фронтально проецирующей прямой совместить прямую  $AB$  с плоскостью  $\alpha(CD \parallel EF)$  (рис.4.18). Координаты точек:  $A(65,35,45)$ ,  $B(10,15,20)$ ,  $C(70,15,30)$ ,  $D(25,45,50)$ ,  $E(65,0,10)$ ,  $F(15,?,?)$ .

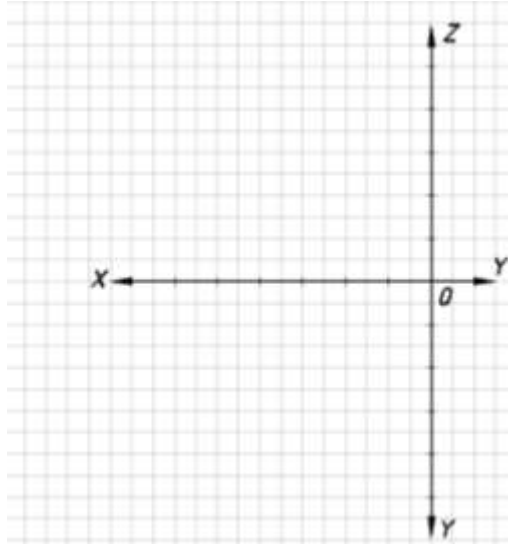


Рис.4.18

- 4.19. Используя способ поворота вокруг линии уровня, построить проекции биссектрисы угла  $A$  треугольника  $ABC$  (рис.4.19). Координаты точек:  $A(15,20,0)$ ,  $B(45,25,20)$ ,  $C(0,60,45)$  (Решить вращением вокруг горизонтали).

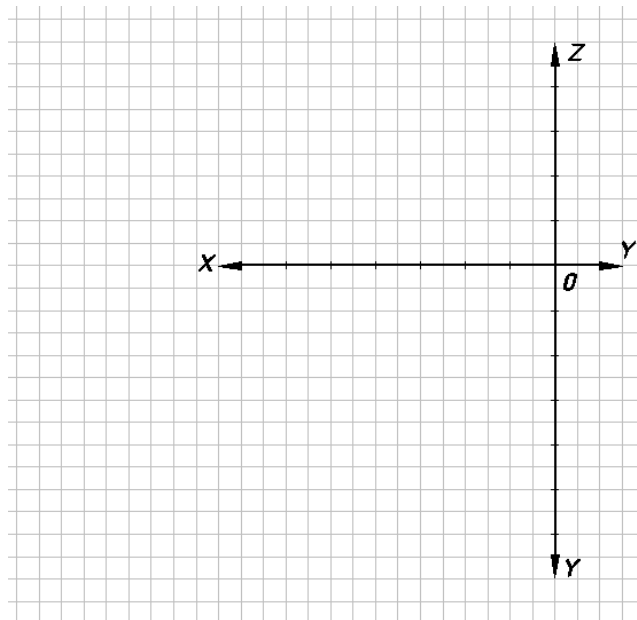


Рис.4.19

- 4.20. Поворотом вокруг проецирующей прямой совместить прямую  $KL$  с плоскостью треугольника  $ABC$  (рис.4.20). Координаты точек:  $A(70,10,0)$ ,  $B(15,45,20)$ ,  $C(40,45,35)$ ,  $K(70,45,25)$ ,  $L(15,25,10)$ .

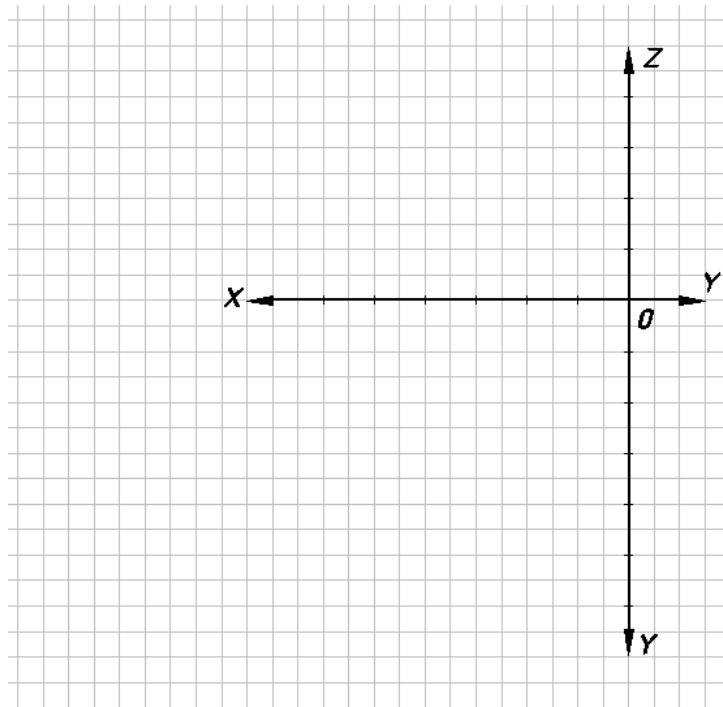


Рис.4.20

- 4.21. Треугольник  $ABC$  повернуть вокруг произвольной проецирующей прямой до горизонтально проецирующего положения (рис.4.21). Координаты точек:  $A(60,20,40)$ ,  $B(40,40,15)$ ,  $C(25,10,30)$ .

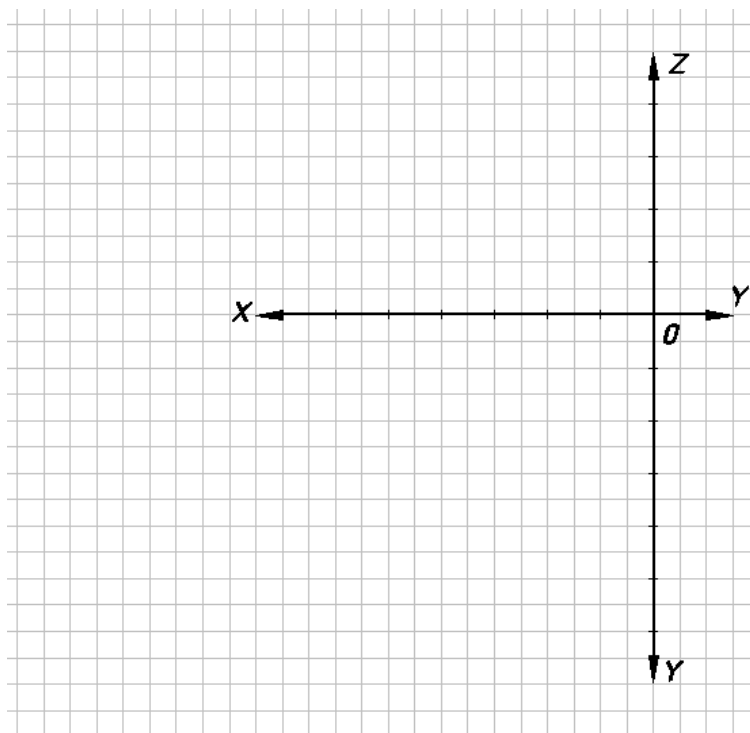


Рис.4.21

- 4.22. Построить проекции пирамиды  $SABC$ . Вершина  $S$  принадлежит прямой  $MN$ . Высота пирамиды 35 мм. Решить без преобразования чертежа. Координаты точек:  $A(15, 15, 20)$ ,  $B(60, 45, 10)$ ,  $C(75, 10, 35)$ ,  $M(30, 60, 50)$ ,  $N(15, 45, 35)$ .

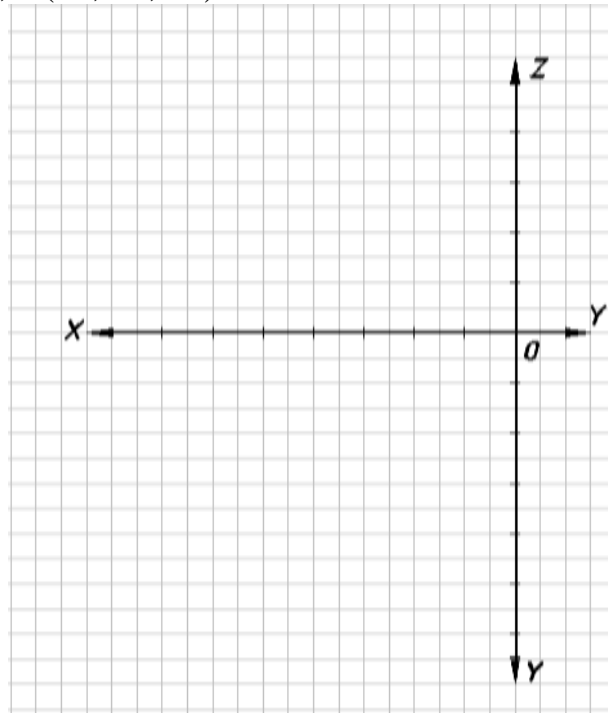


Рис. 4.22

- 4.23. Построить проекции прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$ . В основании равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB=AC$ ). Вершина принадлежит прямой  $MN$ . Высота призмы 35 мм. Решить без преобразования чертежа. Координаты точек:  $B(50, 40, 5)$ ,  $C(30, 15, 20)$ ,  $M(80, 35, 30)$ ,  $N(60, 5, 40)$ .

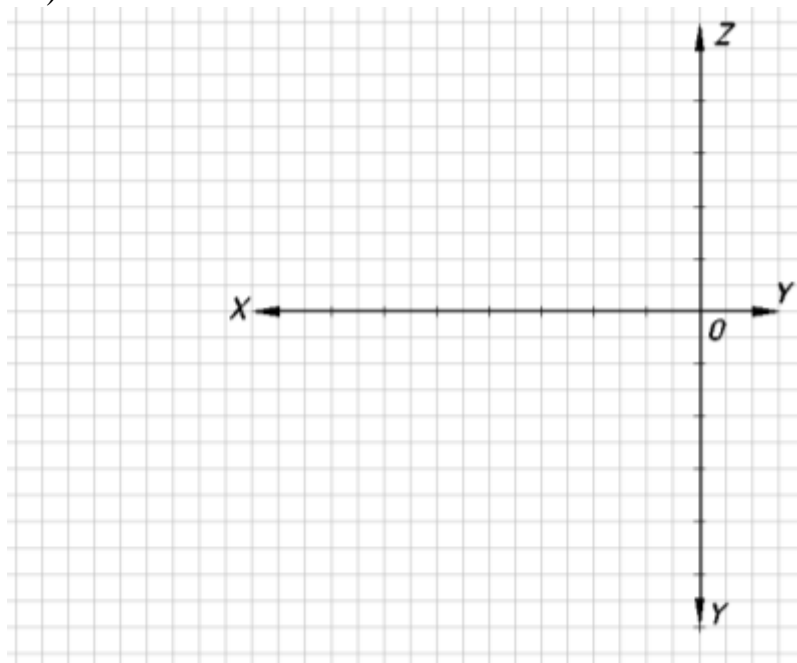


Рис.4.23

## 5. Метрические задачи

Метрическими задачами называют задачи на определение значений величин, измеряющих расстояние или угол между двумя геометрическими фигурами, а также задачи на построение геометрических фигур по заданному между ними расстоянию (в мм) или углу (в градусах).

В зависимости от положения двух геометрических фигур относительно плоскостей проекций расстояние или угол между ними можно измерить непосредственно на чертеже или после преобразования их проекций.

### Определение расстояний между двумя геометрическими фигурами

- Расстояние можно определять между следующими геометрическими фигурами:
- двумя точками;
- точкой и прямой линией;
- двумя параллельными прямыми линиями;
- двумя скрещивающимися прямыми линиями;
- точкой и плоскостью;
- прямой линией и плоскостью, ей параллельной;
- двумя параллельными плоскостями.

Решение всех перечисленных выше задач сводится к определению истинной величины отрезка, которым измеряется нужное расстояние.

**Расстояние между двумя точками** измеряется длиной отрезка, соединяющего данные точки.

Расстояние между точками определяют с помощью одной замены плоскости проекций или одним поворотом вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций.

**Расстояние от точки до прямой линии** измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Если прямая линия занимает проецирующее положение, то искомое расстояние проецируется без искажения.

Если прямая линия занимает положение, параллельное какой-либо плоскости проекций, то отрезок, измеряющий нужное расстояние, проецируется на основные плоскости проекций с искажением. Для определения истинной величины отрезка применяют один из способов преобразования проекций, например, способ замены плоскостей проекций или используют способ вращения вокруг проецирующих прямых, а также линий уровня плоскости, так как точка и прямая представляют собой плоскость.

**Расстояние между двумя параллельными прямыми линиями** сводится к определению расстояния от точки, взятой на одной прямой, до другой прямой. Таким образом, методика решения этой задачи аналогична рассмотренной выше.

**Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми линиями** измеряется отрезком прямой, перпендикулярной к двум заданным. Наиболее просто задача решается тогда, когда одна из прямых занимает проецирующее положение. В этом случае перпендикуляр к прямым занимает частное положение и равен кратчайшему расстоянию между прямыми.

В общем случае задачу решают при помощи двойной замены плоскостей проекций. Замену плоскостей производят с таким расчетом, чтобы одна из прямых спроецировалась в точку. Например, можно воспользоваться такой заменой:

$$\pi_1/\pi_2 \rightarrow \pi_1/\pi_4, \text{ где } \pi_4 \parallel AB, \text{ и}$$

$$\pi_1/\pi_4 \rightarrow \pi_4/\pi_5, \text{ где } \pi_5 \perp AB.$$

Для определения кратчайшего расстояния между двумя скрещивающимися прямыми можно также воспользоваться плоскостями *параллелизма*. Такие плоскости получаются тогда, когда через две скрещивающиеся прямые проводят параллельные плоскости. В этом случае задача сводится к определению расстояний между двумя параллельными плоскостями.

**Расстояние между точкой и плоскостью** определяется перпендикуляром, опущенным из точки на плоскость.

Если плоскость занимает проецирующее положение, то задачу решают без дополнительных построений.

В общем случае задачу решают одной заменой плоскостей проекций. Плоскость  $\alpha$  и точку проецируют на плоскость  $\pi_4 \perp h_\alpha$  или  $\pi_4 \perp f_\alpha$ . Из точки опускают перпендикуляр на проекцию плоскости  $\alpha^{IV}$  и находят его основание. Этот перпендикуляр равен искомому расстоянию, так как параллелен плоскости  $\pi_4$ .

**Расстояние между прямой линией и плоскостью, ей параллельной.** Для определения расстояния от прямой линии до плоскости, ей параллельной, на этой прямой берут любую точку и определяют расстояние от нее до плоскости, т.е. решение этой задачи сводят к решению предыдущей задачи.

**Расстояние между двумя параллельными плоскостями.** Для определения расстояния между двумя параллельными плоскостями, в одной из них задают произвольную точку и определяют расстояние от нее до другой плоскости. Решение такой задачи было рассмотрено выше. Задачи на определение расстояний могут встречаться в различных комплексных задачах.



В большинстве случаев одну и ту же задачу на определение расстояния между двумя геометрическими фигурами можно решать с помощью разных способов преобразования проекций или их комбинаций.

### Вопросы для самопроверки:

1. Какие способы преобразования чертежа используют для определения натуральной величины расстояний между:
  - а. двумя точками;
  - б. точкой и прямой;
  - в. точкой и плоскостью;
  - г. точкой и поверхностью вращения;
  - д. параллельными прямыми;
  - е. скрещивающимися прямыми;
  - ж. параллельными плоскостями?
2. При каких положениях прямой линии и точки относительно плоскостей проекций расстояние между ними проецируется без искажения?
3. При каком положении относительно плоскостей проекций одной из двух скрещивающихся прямых можно измерить на чертеже расстояние между ними?
4. Есть ли разница в методике решения задач на определение расстояния между точкой и плоскостью или между двумя параллельными плоскостями?

### Задачи:

- 5.1. Определить расстояние от точки до прямой (рис.5.1 а, б, в).

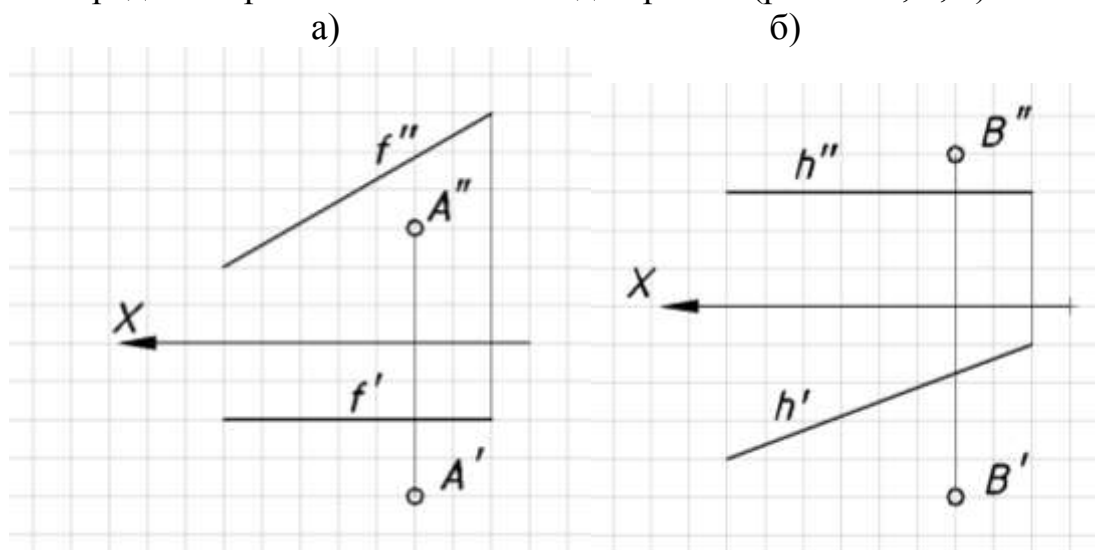


Рис.5.1, а, б

в)

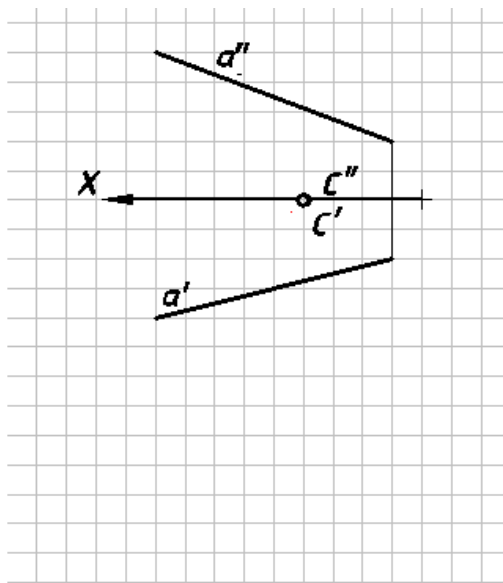


Рис.5.1, в

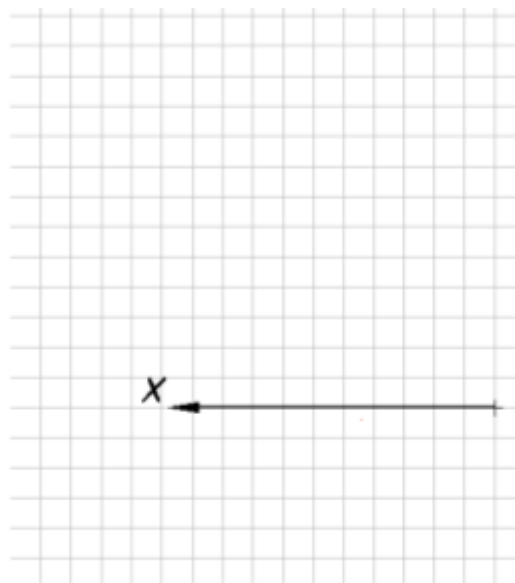
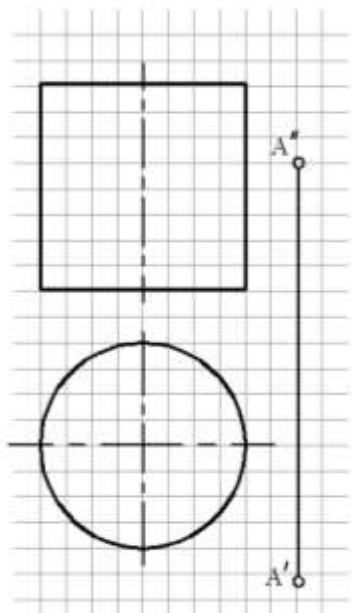


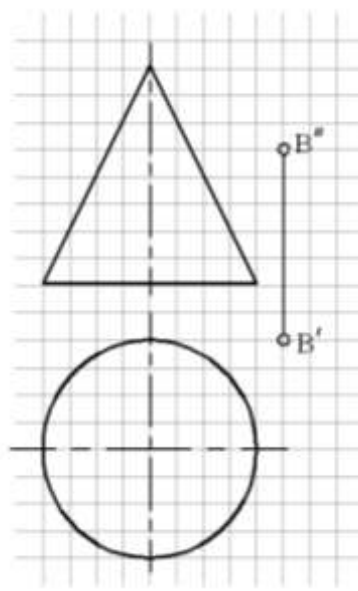
Рис.5.2

- 5.2. Построить горизонтальную проекцию точки  $A$ , отстоящей от фронтали  $BC$  на расстоянии 15 мм (рис.5.2). Координаты точек:  $A(20,?,20)$ ,  $B(40,?,30)$ ,  $C(10,15,0)$ .
- 5.3. Определить натуральную величину расстояния между точкой и поверхностью вращения. Построить проекцию точки на поверхность вращения, ближайшую к заданной точке (рис.5.3, а, б, в, г).

а)



б)



в)

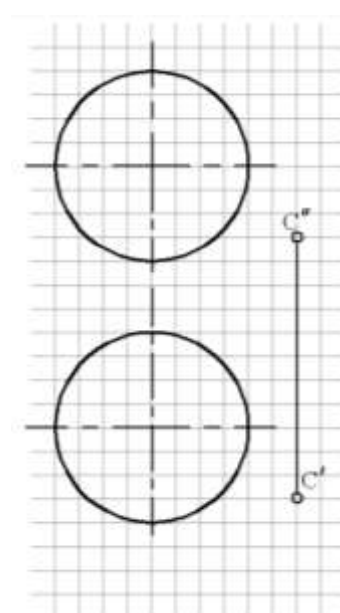


Рис.5.3, а, б, в

г)

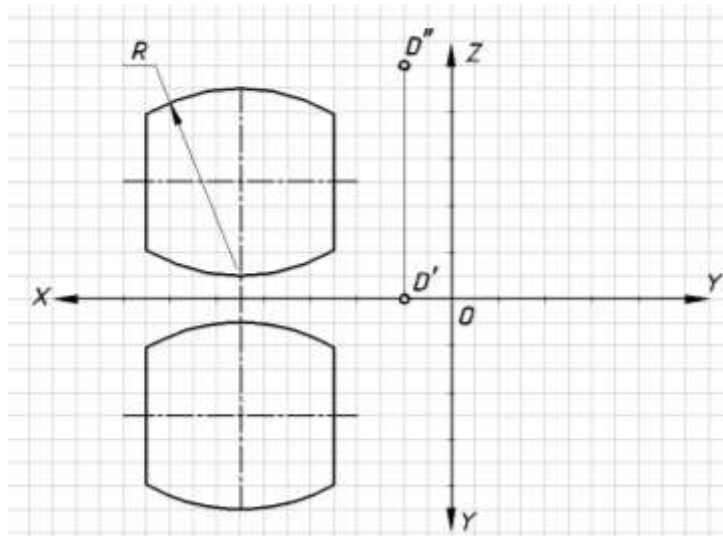


Рис.5.3, г

- 5.4. Определить расстояние от точки  $D$  до плоскости  $\alpha(A, B, C)$  (рис.5.4). Координаты точек:  $A(50, 20, 15)$ ,  $B(30, 40, 30)$ ,  $C(10, 15, 0)$ ,  $D(40, 10, 30)$ .

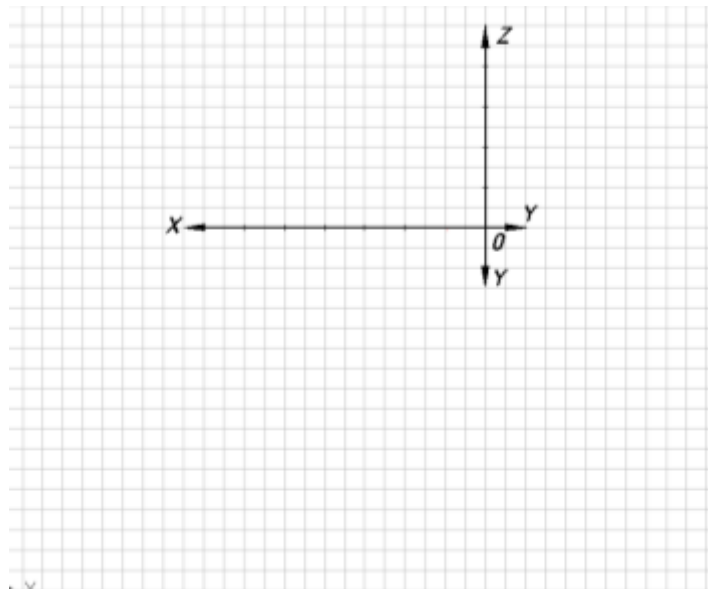


Рис.5.4

- 5.5. Определить расстояние от плоскости  $\alpha(\Delta ABC)$  до поверхности шара диаметром 40 мм с центром в точке  $D$  (рис.5.5). Координаты точек:  $A(45, 5, 15)$ ,  $B(30, 0, 30)$ ,  $C(10, 30, 15)$ ,  $D(55, 40, 25)$ .

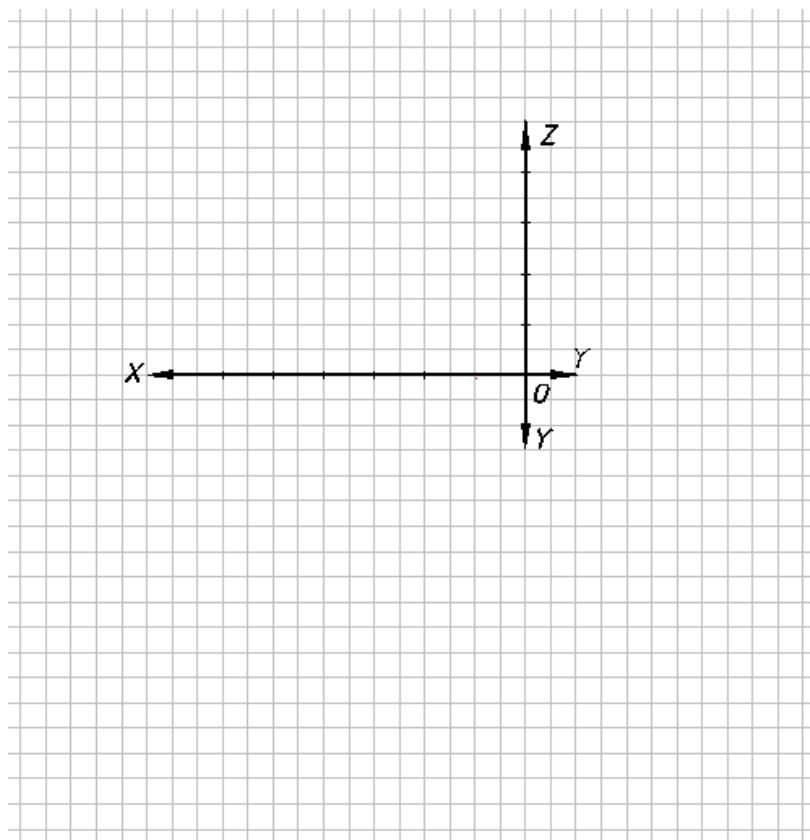


Рис.5.5

### **Определение величин углов между двумя геометрическими фигурами**

Угол между двумя любыми геометрическими фигурами измеряется плоским углом – между двумя пересекающимися прямыми линиями.

Углы можно определять между следующими геометрическими фигурами:

- двумя пересекающимися прямыми линиями;
- двумя скрещивающимися прямыми линиями;
- прямой линией и плоскостью;
- двумя плоскостями.

Этот угол проецируется без искажения лишь при следующих частных положениях двух геометрических фигур:

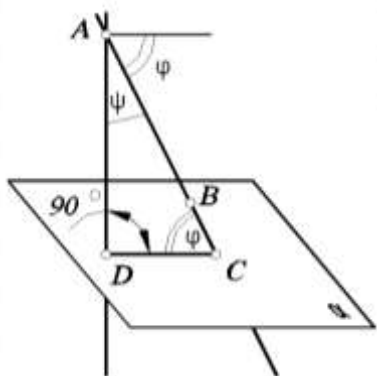
- между двумя пересекающимися прямыми, расположенными в плоскости уровня;
- между прямой уровня и плоскостью уровня, если прямая принадлежит плоскости, перпендикулярной к заданной;
- между плоскостью уровня и проецирующей плоскостью;
- между двумя проецирующими плоскостями, перпендикулярными к одной и той же плоскости проекций.

При других положениях двух геометрических фигур относительно плоскостей проекций величину угла между ними определяют с помощью одного одинарного или двух двойных преобразований их проекций.

**Угол между двумя пересекающимися прямыми** проецируется без искажения, когда плоскость, образованная этими прямыми, параллельна какой-либо плоскости проекций. В общем случае угол  $\varphi$  между двумя пересекающимися прямыми определяют с помощью преобразования проекций.

**Угол между двумя скрещивающимися прямыми** измеряется углом между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным. Таким образом, эта задача аналогична предыдущей. Для решения задачи берут произвольную точку и через нее проводят две прямые, параллельные заданным скрещивающимся прямым, и с помощью преобразования проекций определяют искомый угол.

**Угол между прямой линией и плоскостью** измеряется углом  $\varphi$  между прямой и ее проекцией на данную плоскость. Прямое решение этой задачи часто бывает сложным, так как прямая и плоскость в большинстве случаев занимают общее положение. Гораздо проще вначале определить дополнительный угол  $\psi$ , а потом уже искомый угол  $\varphi$ .

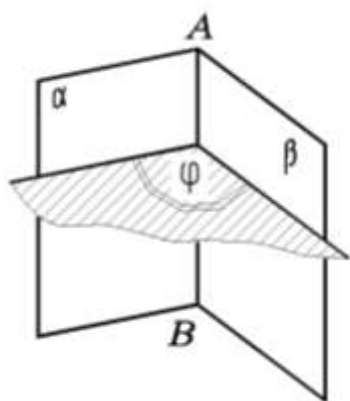


При определении угла  $\varphi$  между прямой и плоскостью с помощью дополнительного угла  $\psi$  выполняют следующие построения. Из произвольной точки на заданной прямой  $AB$  опускают перпендикуляр на данную плоскость  $\alpha$ ; определяют истинную величину угла  $\psi$  между прямой и перпендикуляром; а затем графически вычисляют угол  $\varphi$  по формуле  $\varphi = 90^\circ - \psi$ .

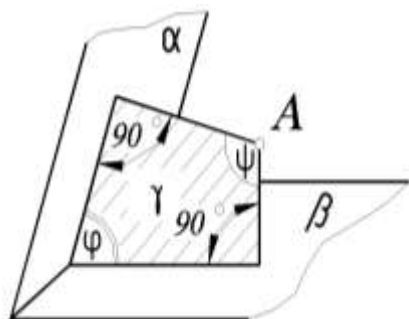
Угол между прямой линией и плоскостью, занимающими общее положение, может быть также определен следующим образом. Выполняют замену плоскостей проекций, в результате чего плоскость общего положения становится проецирующей (прямая при этом остается прямой общего положения). Из точки на прямой опускают перпендикуляр на проецирующую плоскость и находят точку пересечения перпендикуляра с проецирующей плоскостью. Определив истинную величину прямой, (например, способом прямоугольного треугольника), определяют угол между прямой и плоскостью.

**Угол между двумя плоскостями** представляет собой двугранный угол, который измеряется его линейным углом. Две пересекающиеся плоскости образуют два смежных линейных угла, но за угол между плоскостями принимают острый угол.

Чтобы построить линейный угол, нужно двугранный угол пересечь плоскостью, перпендикулярной его ребру, а, следовательно, и к линии пересечения плоскостей. Для определения двугранного угла между двумя плоскостями общего положения нужно построить их линию пересечения и с помощью способа замены плоскостей проекций или вращения спроецировать ее в точку.



Чтобы определить двугранный угол, задают дополнительную плоскость  $\pi_4$  параллельно линии пересечения плоскостей. Вторую дополнительную плоскость  $\pi_5$  задают перпендикулярно линии пересечения и находят истинную величину угла.



Иногда двугранный угол определяют с помощью дополнительного угла  $\psi$ . Чтобы построить дополнительный угол, задают в пространстве произвольную точку и опускают из нее перпендикуляры на плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ . Далее находят основания этих перпендикуляров (точки их пересечений с плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ ) и линии, по которым плоскость  $\gamma$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ .

Построенные перпендикуляры и линии пересечения образуют плоский четырехугольник, в котором два угла – прямые, а на остальные два остается  $180^\circ$ . Если угол между перпендикулярами обозначить через  $\psi$ , то угол между плоскостями  $\varphi = 180^\circ - \psi$ .

При определении дополнительного угла между двумя плоскостями следует иметь в виду, что угол  $\psi$  может получиться как острым, так и тупым. Последнее обстоятельство вызвано тем, что точку задают в произвольном месте пространства.

### Вопросы для самопроверки

1. При каком положении двух проецирующих плоскостей относительно плоскостей проекций угол между ними проецируется без искажения?
2. Какие способы преобразования проекций можно использовать для определения действительной величины угла между двумя пересекающимися прямыми линиями, расположенными в плоскости общего положения?
3. Какой прием используют при определении действительной величины угла между двумя скрещивающимися прямыми линиями?

4. Какой прием позволяет упростить определение угла между прямой линией, пересекающейся с плоскостью, если они занимают общее положение?

**Задачи:**

- 5.6. Определить натуральные величины углов наклона плоскости  $\alpha(A, a)$  к плоскостям проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$  (рис.5.6).

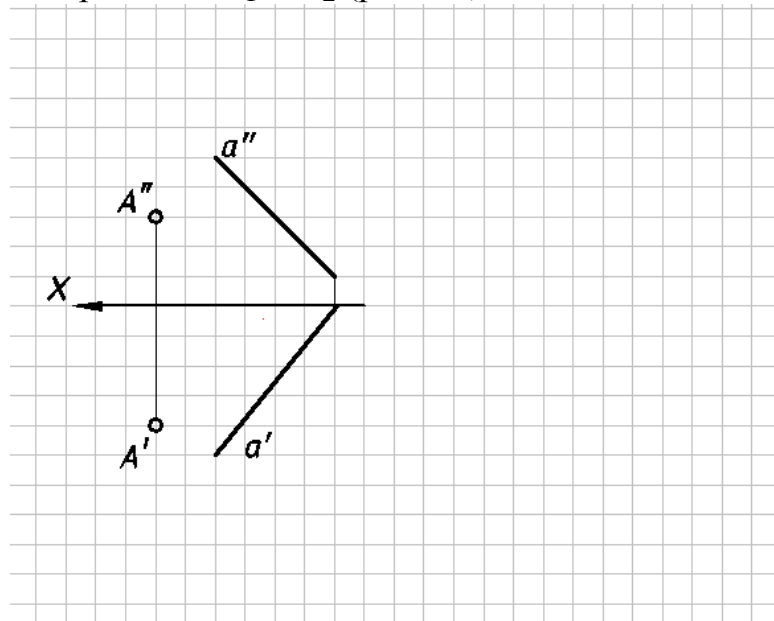


Рис.5.6

- 5.7. Определить натуральную величину угла между прямой  $m$  и плоскостью  $\alpha(A,B,C)$  (рис.5.7). Задачу решить способом вращения вокруг линии уровня.

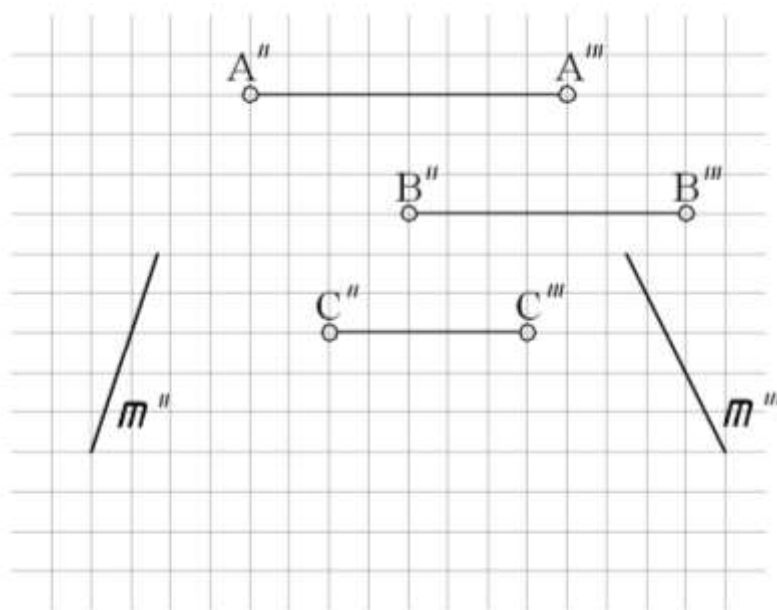


Рис.5.7

- 5.8. Определить натуральную величину угла между прямой  $AB$  и горизонтально проецирующей плоскостью, проходящей через прямую  $CD$  (рис.5.8). Координаты точек:  $A(60,45,35)$ ,  $B(30,30,15)$ ,  $C(45,10,10)$ ,  $D(10,35,35)$ .

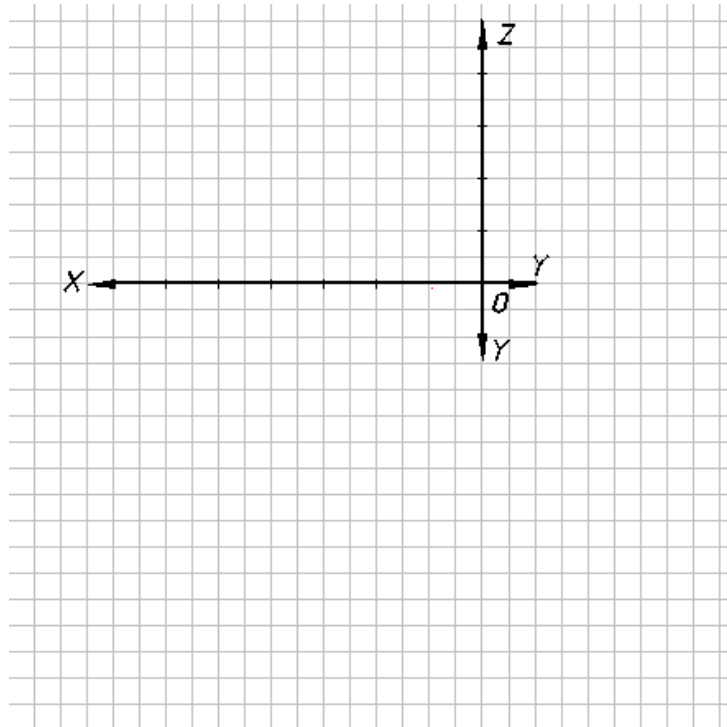


Рис.5.8

#### Задачи для самостоятельной работы

- 5.9. Вращением вокруг горизонтали определить расстояние между параллельными прямыми  $a$  и  $b$  (рис.5.9).

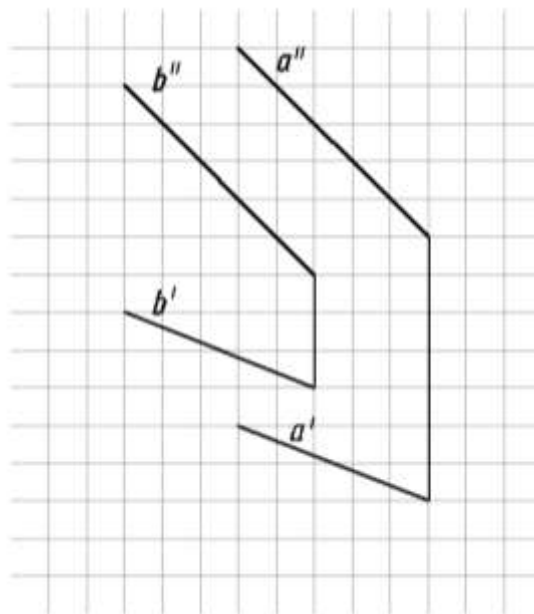


Рис.5.9



5.10. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми (рис.5.10, а, б).

а)

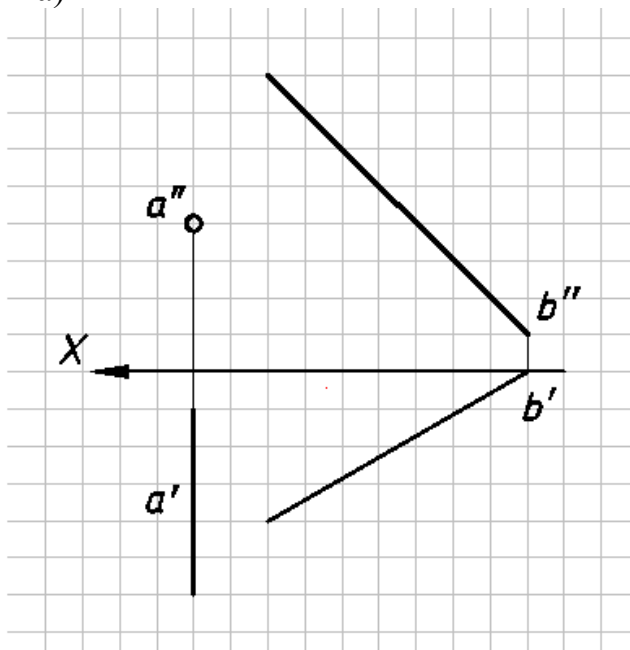


Рис.5.10, а

б)

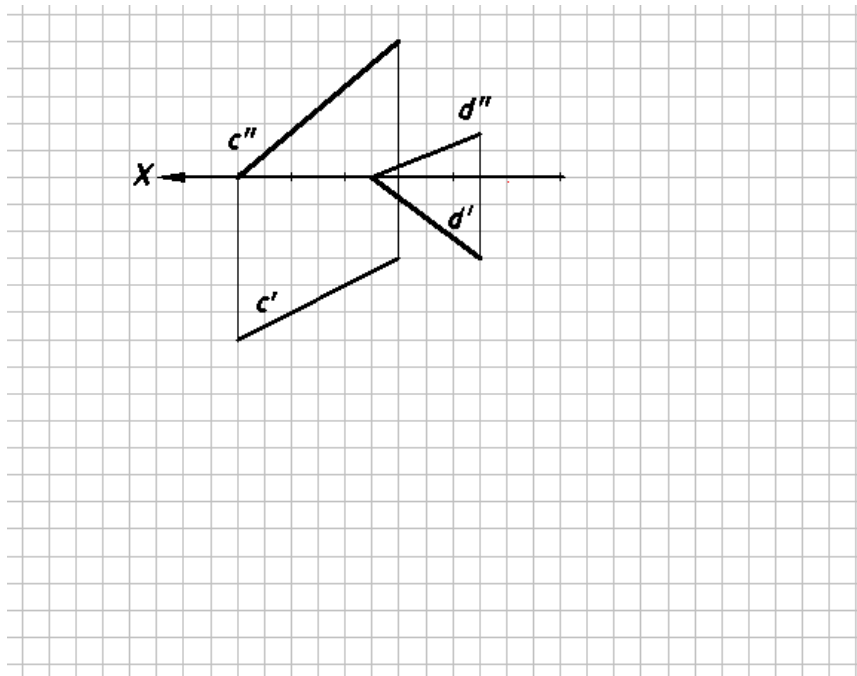


Рис.5.10, б

5.11. Определить расстояние между параллельными плоскостями, проходящими через прямые  $a$  и  $b$  (рис.5.11).

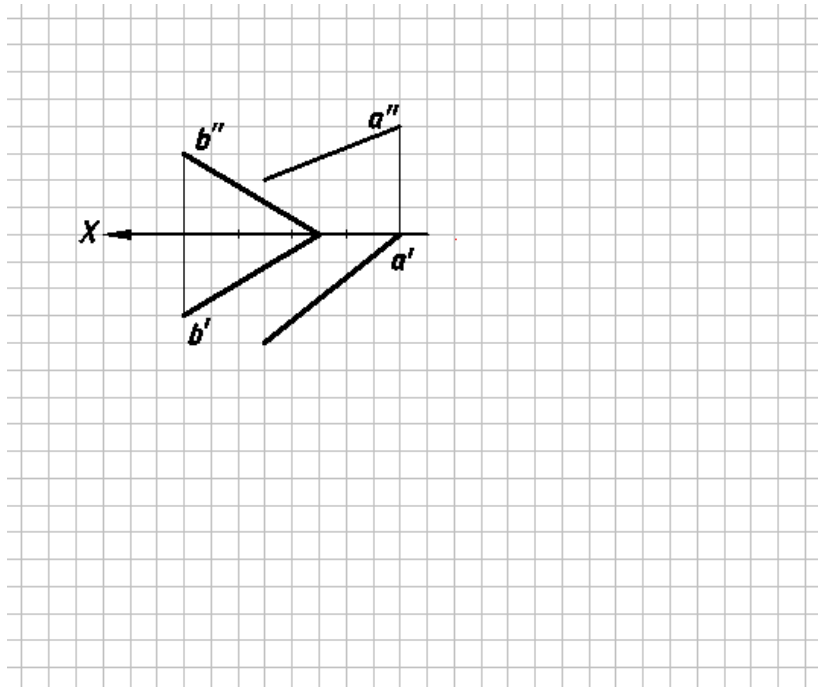


Рис.5.11

- 5.12. Определить натуральную величину расстояния от точки  $A$  до прямой  $BC$  (рис.5.12). Координаты точек:  $A(55,20,20)$ ,  $B(55,0,0)$ ,  $C(15,10,10)$ .

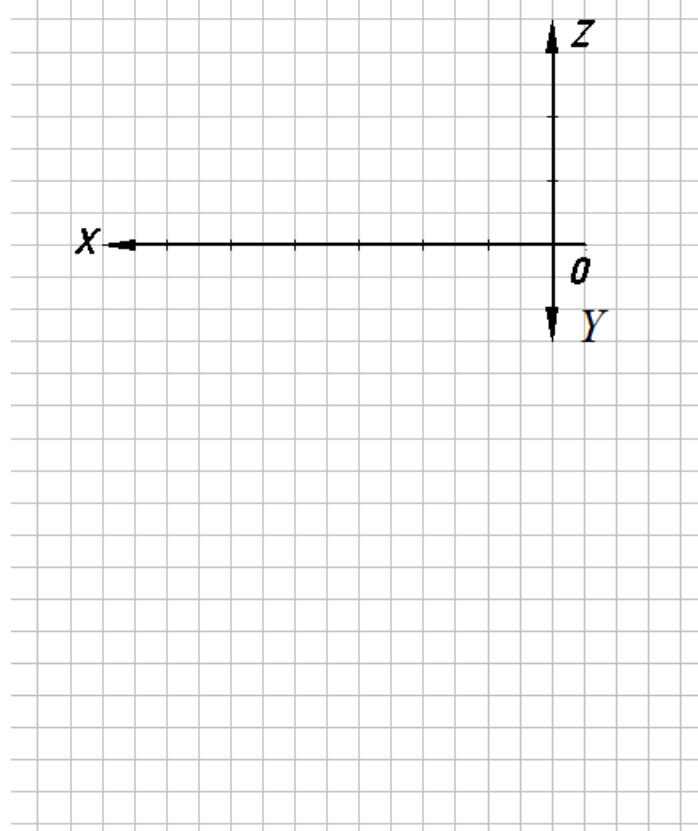


Рис.5.12

- 5.13. Определить натуральную величину отрезка  $EF$  прямой  $MN$ , заключенного внутри пирамиды  $ABCD$  (рис.5.13). Координаты точек:  $A(60,10,0)$ ,  $B(10,10,0)$ ,  $C(35,55,0)$ ,  $D(35,25,50)$ ,  $M(50,5,10)$ ,  $N(15,40,25)$ .

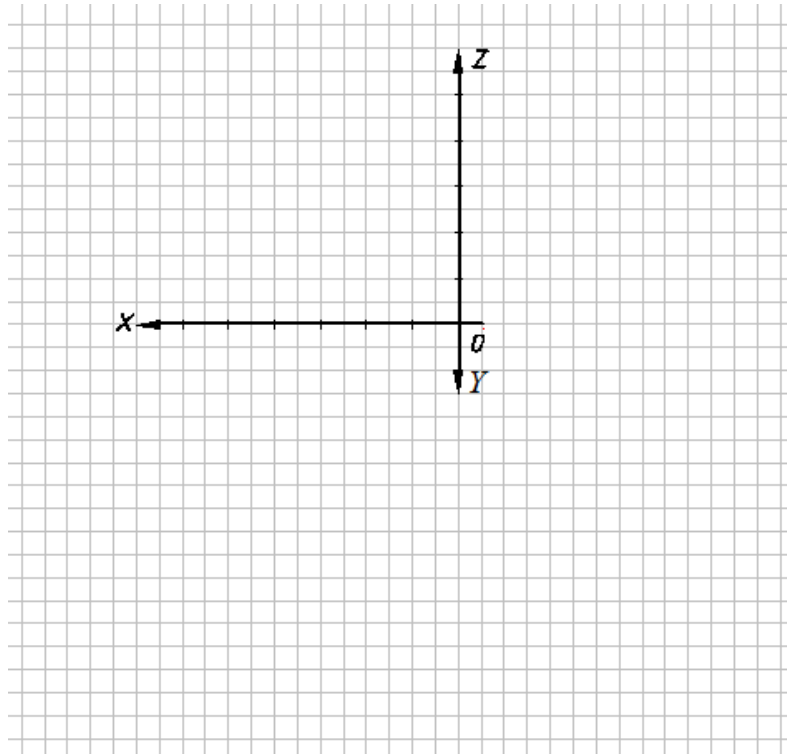


Рис.5.13

- 5.14. Поворотом вокруг проецирующих прямых определить натуральные величины отрезка  $AB$  и углов наклона его к плоскостям проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$  (рис.5.14). Координаты точек:  $A(60,0,25)$ ,  $B(15,35,10)$ .

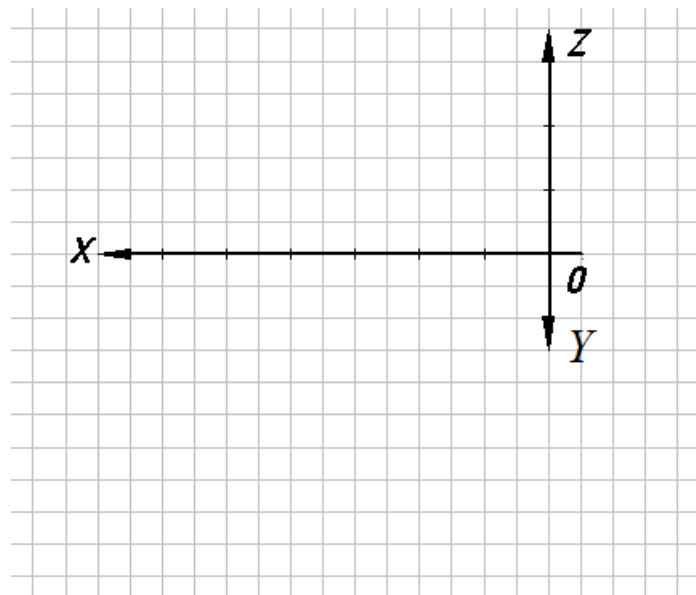


Рис.5.14

- 5.15. Определить натуральную величину двугранного угла между плоскостями  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) и  $\beta$  ( $\triangle DBC$ ) (рис.5.15).

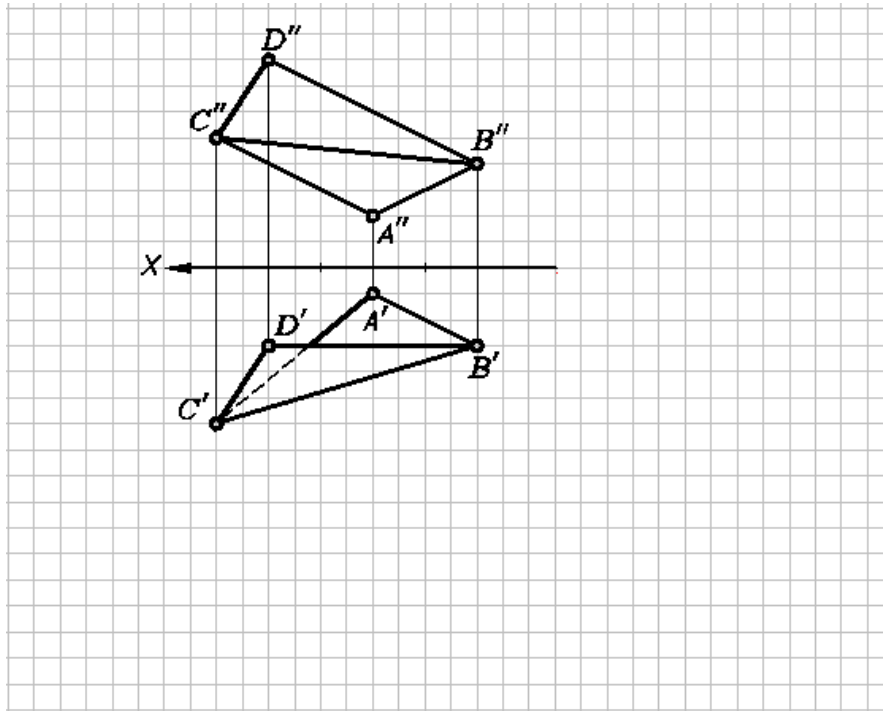


Рис.5.15

- 5.16. Построить проекции прямой  $m$ , проходящей через точку  $A$  и пересекающей прямую  $KL$  под углом  $60^\circ$  (рис.5.16). Координаты точек:  $A(45,10,30)$ ,  $K(60,35,0)$ ,  $L(15,15,35)$ .

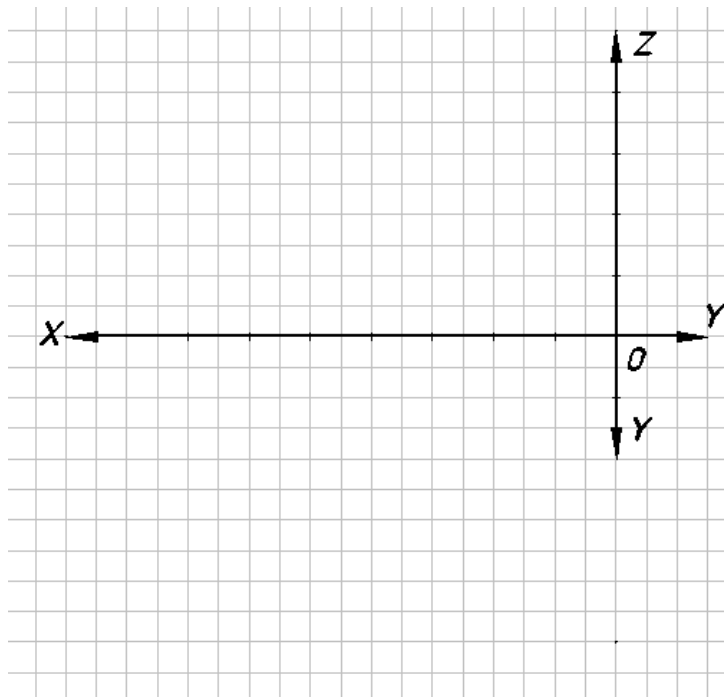


Рис.5.16

- 5.17. Определить натуральную величину угла между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha \perp \pi_2$ , проходящую через прямую  $AB$  (рис.5.17).

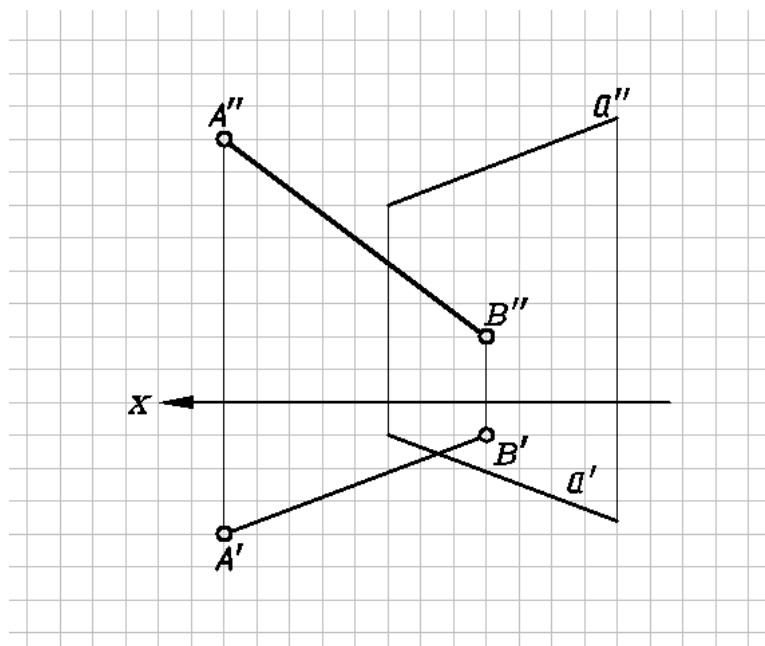


Рис.5.17

- 5.18. Определить натуральную величину угла между плоскостями  $\alpha(a \parallel b)$  и  $\beta(A, d)$  (рис.5.18).

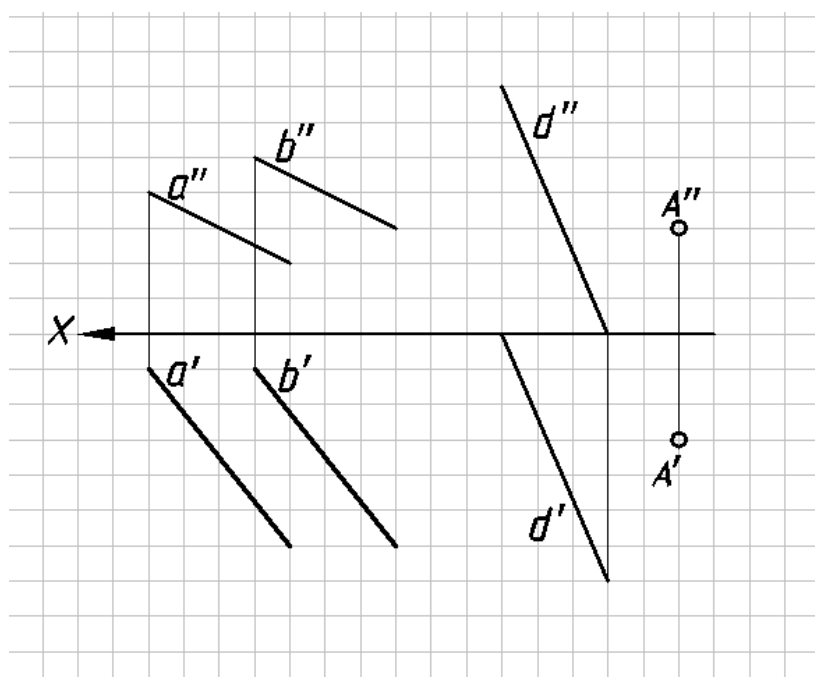


Рис.5.18

## **6. Проекция многогранников. Сечение многогранника плоскостью. Пересечение прямой линии с поверхностью многогранника**

*Многогранник – геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками.*

Плоские многоугольники, ограничивающие многогранник, называются *гранями*, прямые линии, по которым пересекаются смежные грани, — *ребрами*, а точки, в которых пересекаются ребра, — *вершинами*. При сечении многогранников плоскостями получают плоские многоугольники, число сторон которых равно числу пересеченных граней. Стороны и вершины этих многоугольников представляют собой линии и точки пересечения граней и ребер многогранников с секущими плоскостями. Видимость ребер определяют с помощью конкурирующих точек. Решение задач на построение сечений многогранников плоскостями сводится к определению линии пересечения двух плоскостей и точки пересечения прямой с плоскостью.

*Призма — это многогранник, основаниями которого являются равные многоугольники, а боковые грани представляют собой параллелограммы.*

Если ребра призмы перпендикулярны к плоскости основания, то призму называют прямой. Прямую призму с основанием в виде правильного многоугольника называют правильной.

*Пирамида — это многогранник, в основании которого располагается какой-либо многоугольник, а боковые грани представляют собой треугольники, сходящиеся в одной вершине.*

Если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник, а высота пирамиды проходит через его центр, то такую пирамиду называют правильной.

### **Вопросы для самопроверки:**

1. Как определить видимость ребер многогранника на его проекциях?
2. Как построить недостающие проекции точек, расположенных на гранях многогранника?
3. Как образуются вершины и стороны фигур сечения многогранника плоскостью?
4. Какими способами можно построить проекции фигуры сечения многогранника плоскостью?
5. Как определить видимость линии контура сечения многогранника плоскостью?

6. Как определить положение заданной своими проекциями точки относительно поверхности многогранника?
7. Как построить проекции точек пересечения прямой с гранями многогранника?
8. Как определить видимость частей прямой, пересекающейся с многогранником?

**Задачи:**

- 6.1. Построить проекции многогранника  $ABCD$  с учетом видимости ребер. Построить недостающие проекции точек  $M$  и  $N$ , расположенных на видимых гранях многогранника (рис.6.1). Координаты точек:  $A(90,50,0)$ ,  $B(70,10,50)$ ,  $C(10,40,40)$ ,  $D(40,5,10)$ ,  $M(65,?,25)$ ,  $N(45,35,?)$ .

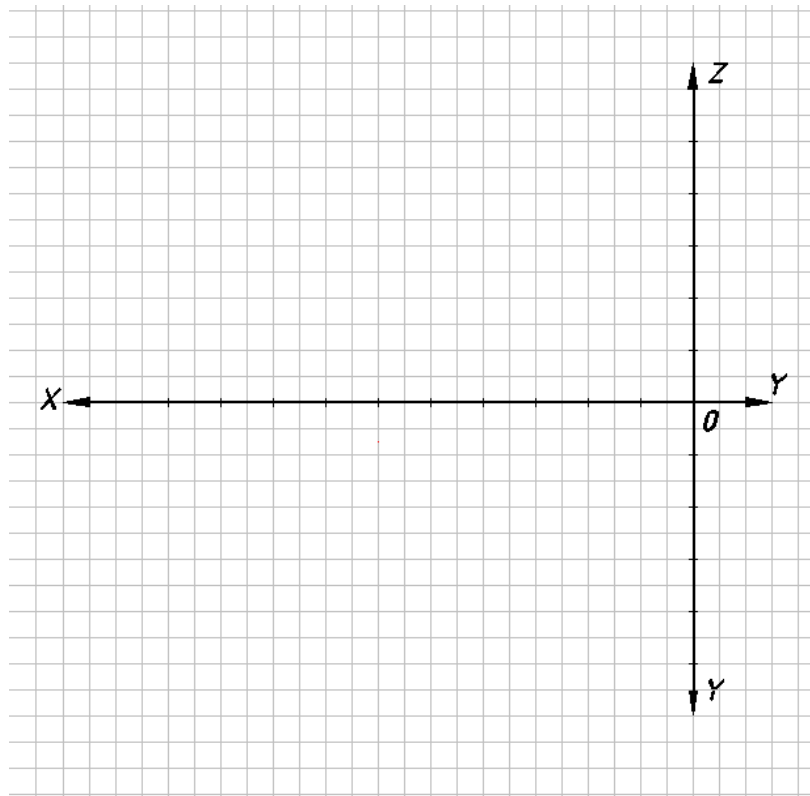


Рис.6.1

- 6.2. Построить проекции и натуральный вид контура сечения пирамиды плоскостью  $\beta$  (рис.6.2). Отметить видимые отрезки контура сечения.

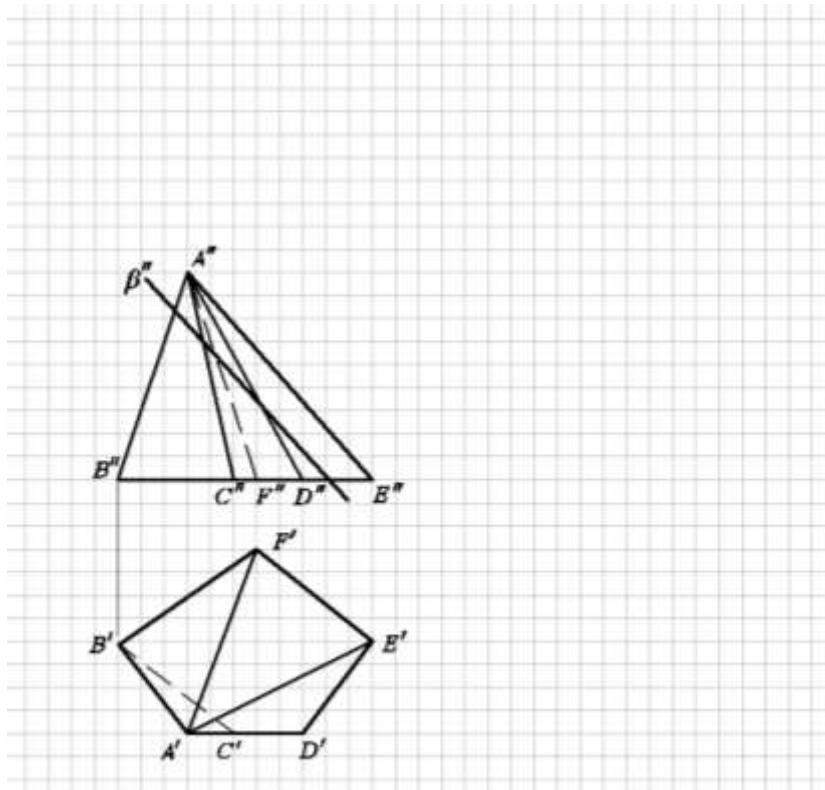


Рис.6.2

- 6.3. Построить проекции и натуральный вид контура сечения пирамиды плоскостью  $\alpha(A,B,C)$  (рис.6.3). Отметить видимость отрезков контура сечения.

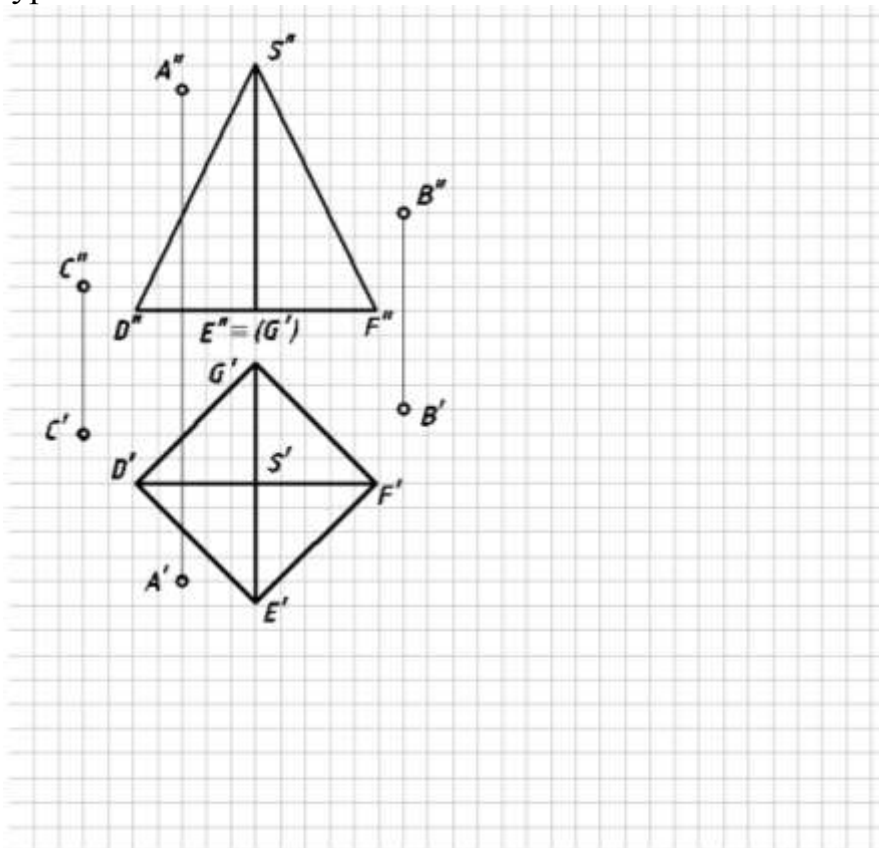


Рис.6.3



## **7. Поверхности вращения. Сечения поверхностей вращения плоскостью. Пересечение прямой линии с поверхностями вращения**

*Поверхности вращения* – это поверхности, полученные при вращении какой-либо линии (прямой или кривой), называемой образующей, вокруг неподвижной прямой -оси вращения.

Из закона образования поверхности вращения вытекают следующие основные свойства:

- Плоскость, перпендикулярная оси вращения, пересекает поверхность по окружности – параллели. Самая большая параллель – экватор, самая маленькая – горло (или горловина).
- Плоскость, проходящая через ось вращения, пересекает поверхность по двум симметричным относительно оси линиям – меридианам.
- Плоскость, проходящая через ось параллельно фронтальной плоскости проекций, называется плоскостью главного меридиана, а линия, полученная в сечении, – главным меридианом.

Телами вращения называют тела, ограниченные поверхностью вращения или поверхностью вращения и плоскостью. Простейшими и наиболее распространенными телами вращения являются прямые круговые цилиндр и конус, а также шар.

Прямые круговые цилиндр и конус образуются при вращении прямой линии вокруг оси вращения.

Шар образуется вращением окружности вокруг её диаметра. Поверхность шара – сфера.

Тор образуется при вращении окружности вокруг оси, не проходящей через центр этой окружности.

Изображения тел вращения на плоскостях, параллельных их осям вращения, ограничены образующими, называемыми очерковыми. Очерковые образующие на проекциях разграничивают видимую и невидимую части геометрических тел. При сечении поверхностей вращения плоскостями многие из полученных фигур ограничены лекальными кривыми. Проекция таких кривых строят по опорным и промежуточным точкам. Чтобы найти недостающую проекцию точки, лежащей на поверхности вращения, необходимо построить параллель, на которой лежит эта точка.

### **Вопросы для самопроверки:**

1. Какую поверхность называют поверхностью вращения?
2. Какие линии являются образующими (производящими) линиями: цилиндрической, конической, сферической, торовой и винтовой поверхности?

3. Как определяют положение точки относительно поверхностей вращения?
4. По каким линиям плоскости пересекают поверхности прямого кругового цилиндра, прямого кругового конуса, сферы?
5. Перечислите главные линии поверхности вращения.
6. Как найти недостающую проекцию точки, лежащей на поверхности вращения?

**Задачи:**

- 7.1. Назвать линии, по которым проецирующие плоскости, проходящие через точку  $A$ , пересекают цилиндрическую поверхность (рис. 7.1).

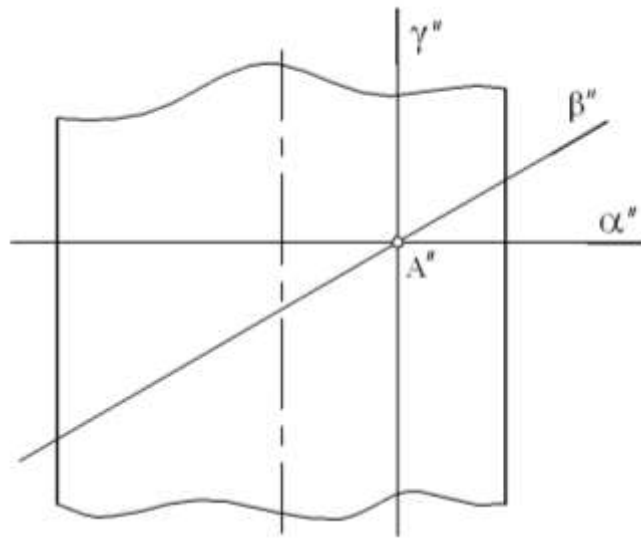


Рис.7.1

- 7.2. Назвать линии, по которым проецирующие плоскости, проходящие через точку  $B$ , пересекают коническую поверхность (рис. 7.2).

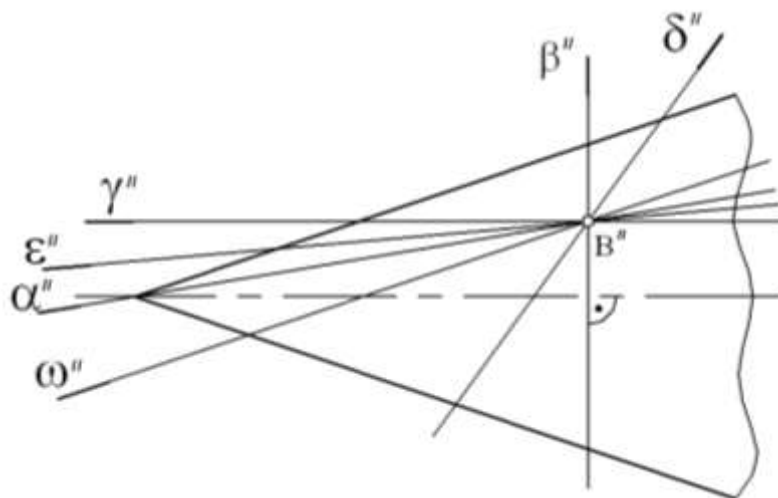


Рис.7.2

- 7.3. Построить проекции контура сечения и натуральный вид сечения цилиндра плоскостью  $\alpha$ . Задать плоскость  $\beta$ , проходящую через фронтально проецирующую прямую  $a$  и пересекающую поверхность цилиндра по линии, горизонтальной проекцией которой является окружность (рис. 7.3).

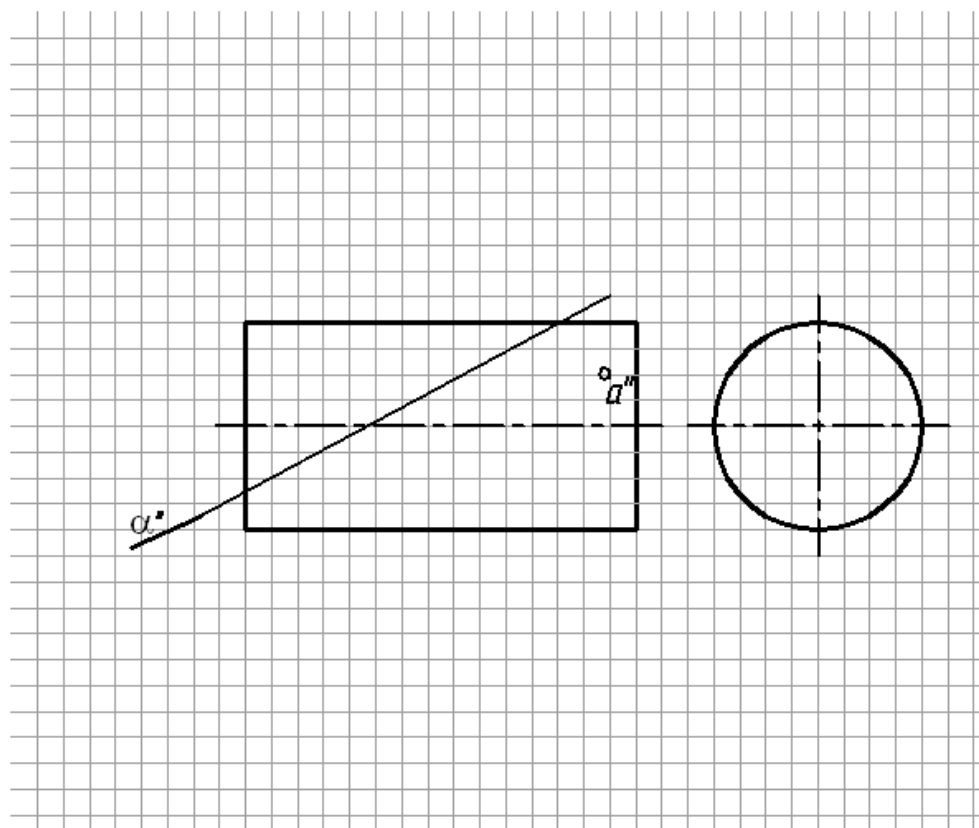


Рис.7.3

- 7.4. Построить проекции контура и натуральный вид сечения конуса фронтально проецирующей плоскостью  $\beta$  (рис.7.4).

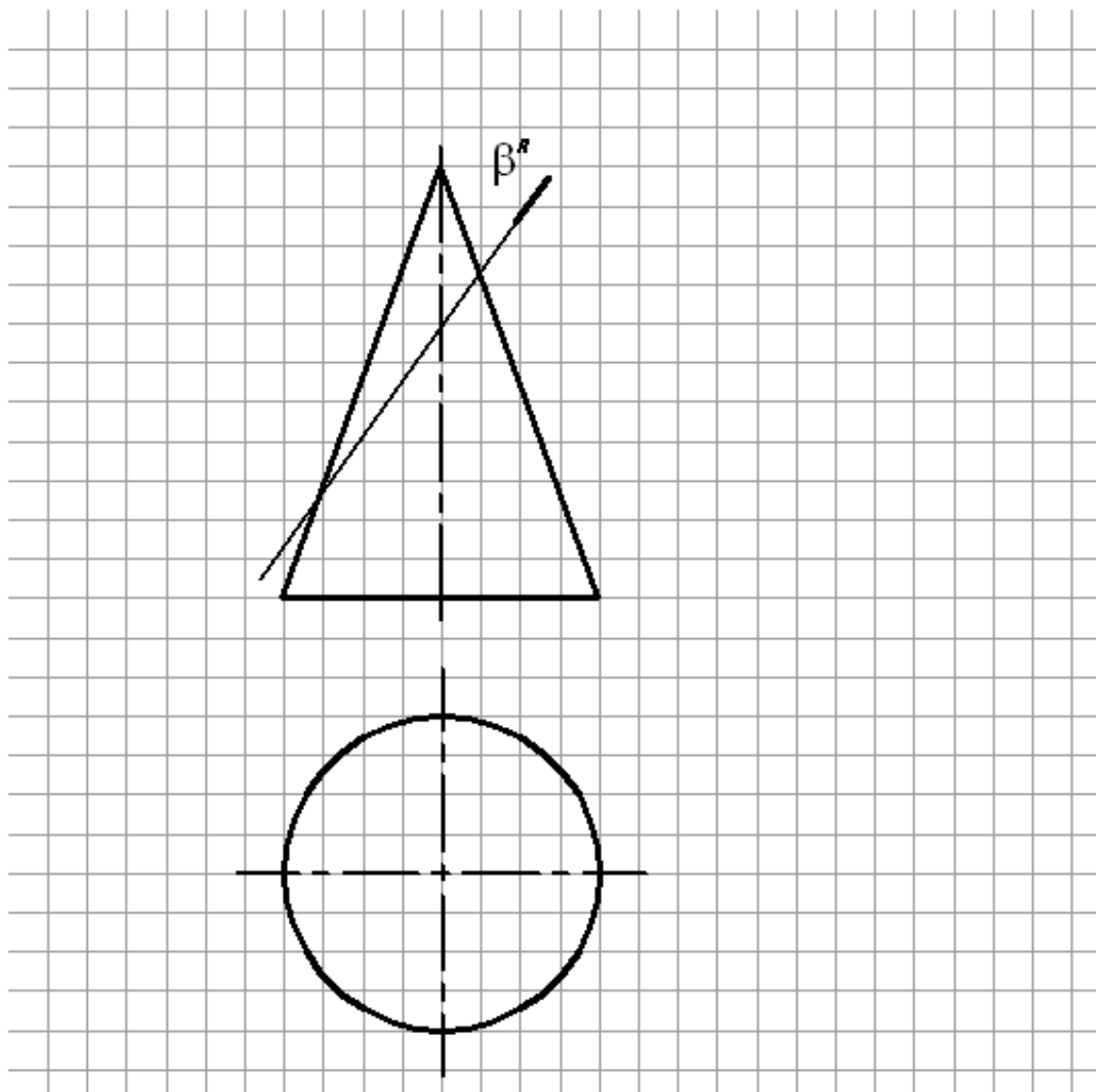


Рис.7.4

7.5. Построить проекции контура и натуральный вид сечения шара профилно проецирующей плоскостью  $\gamma$  (рис.7.5).

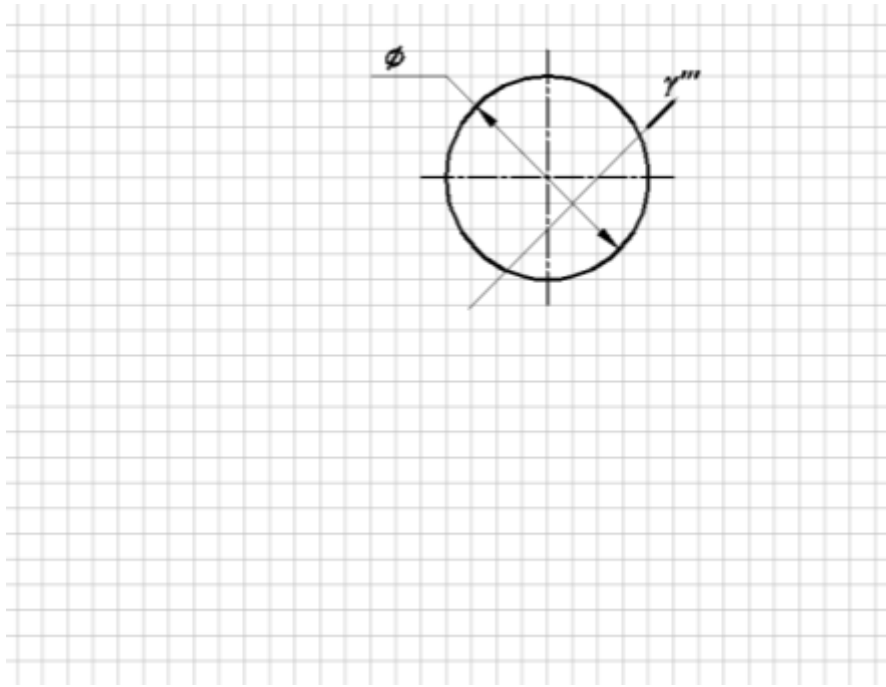


Рис.7.5

7.6. Построить три проекции линии пересечения конуса горизонтально проецирующей плоскостью, проходящей через точки  $A$  и  $B$ . Точки  $C$  - вершина конуса,  $D$  - центр окружности основания, диаметр равен 40 мм (рис.7.6). Координаты точек:  $A(50,15,0)$ ,  $B(10,45,0)$ ,  $C(25,25,40)$ ,  $D(25,25,0)$ .

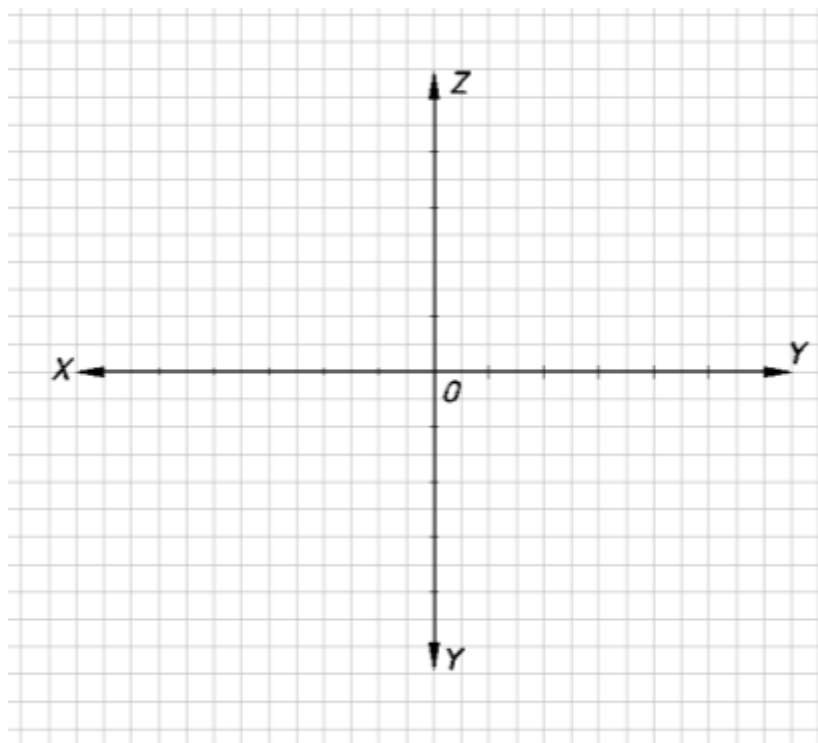


Рис.7.6

7.7. Построить проекции точек пересечения прямой  $a$  с поверхностью цилиндра (рис. 7.7), прямых  $h$  и  $b$  с поверхностью конуса (рис. 7.8), прямой  $c$  с поверхностью конуса (рис. 7.9), прямой  $d$  с поверхностью шара (рис. 7.10).

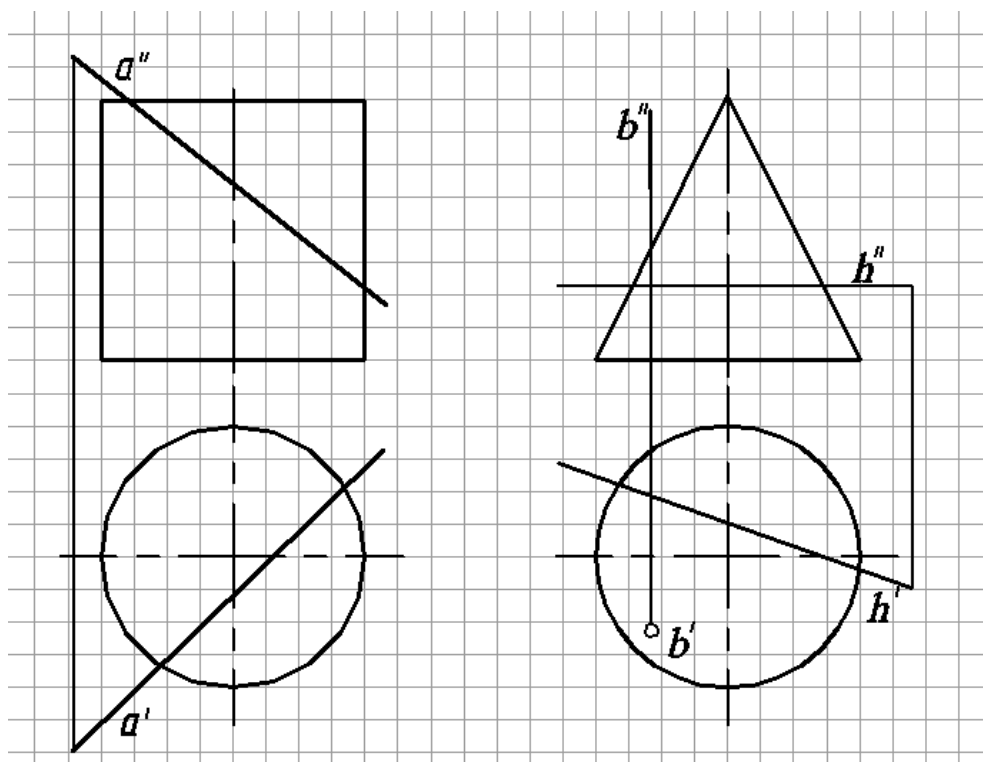


Рис.7.7

Рис.7.8

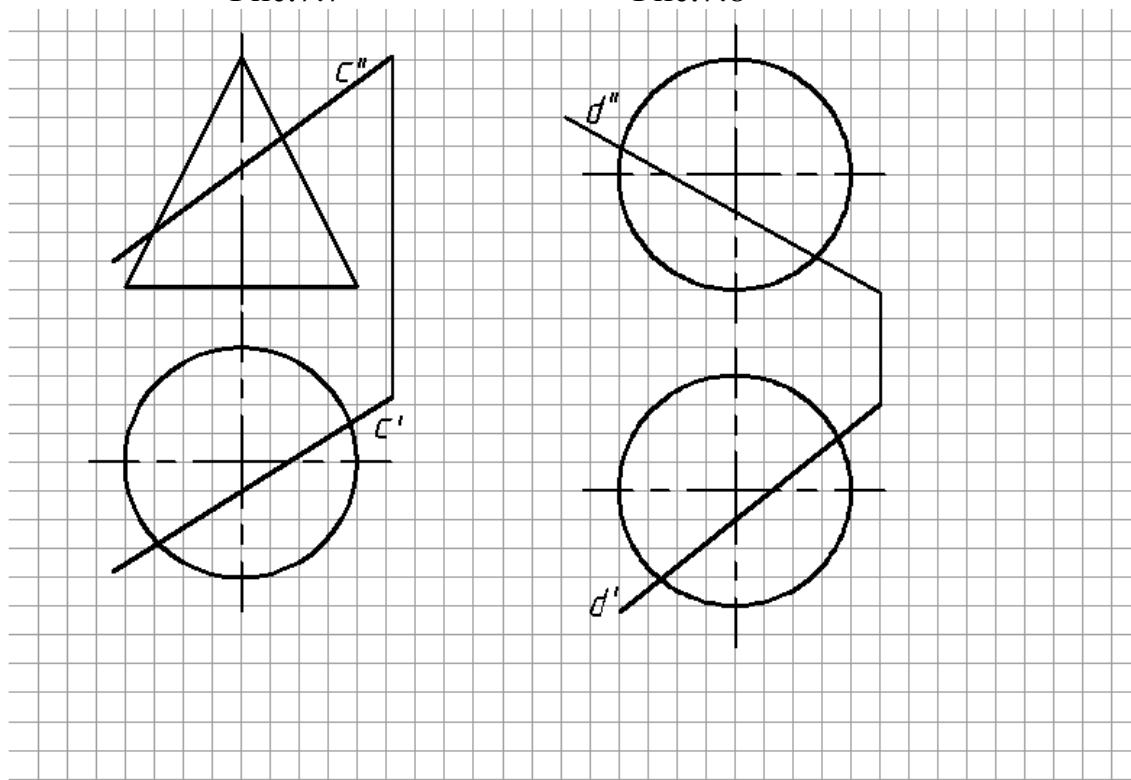


Рис.7.9

Рис.7.10

- 7.8. Построить проекции точек пересечения прямой  $AB$  с поверхностью конуса, вершина которого расположена в точке  $D$ , а центр окружности основания диаметром 50 мм в точке  $C$  (рис.7.11). Координаты точек:  $A(50,30,50)$ ,  $B(0,15,0)$ ,  $C(10,35,35)$ ,  $D(60,35,35)$ .

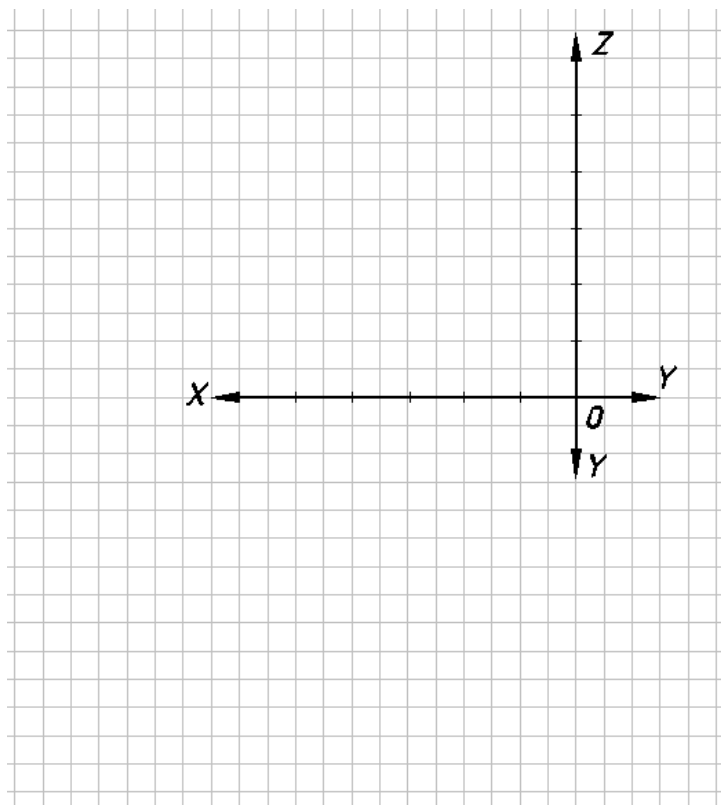


Рис.7.11

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Примеры решения задач в форме алгоритмов и графических построений

#### Приложение к главе 2

1. Построить три проекции отрезка  $AB$  профильной прямой, длина которого равна 40 мм, если задана точка  $A$  и известна координата  $z$  точки  $B$  (рис.1).

Отрезок профильной прямой не искажен на плоскости проекций  $\pi_3$ , поэтому решение задачи надо начинать с определения профильной проекции отрезка.

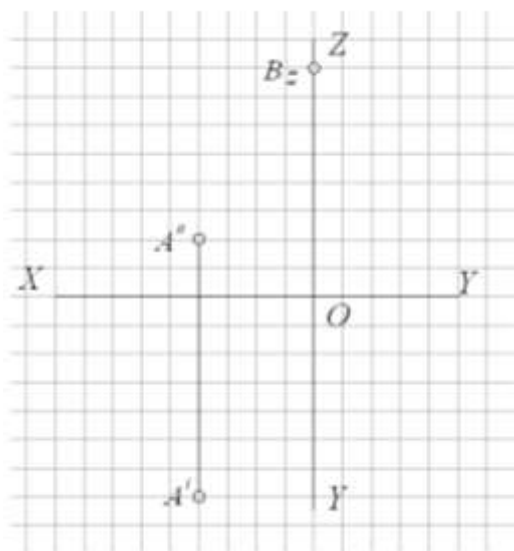


Рис.1

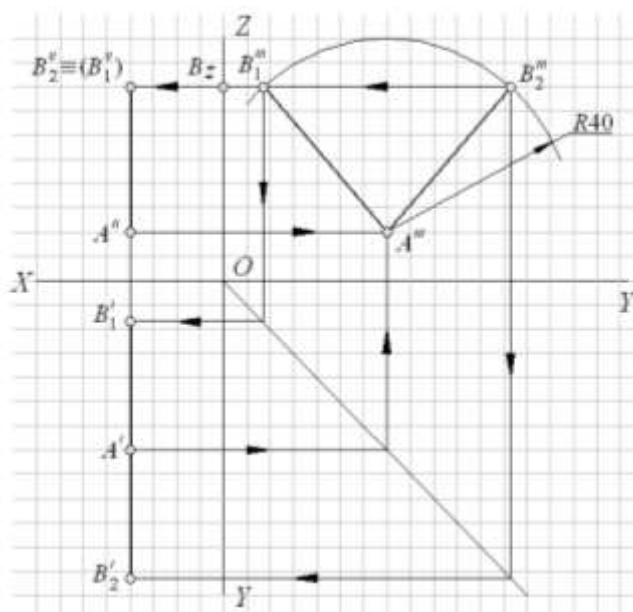


Рис.2

*План решения задачи (рис.2):*

1. Построить профильную проекцию точки  $A$  и провести через точку  $B_z$  линию проекционной связи, перпендикулярную к оси  $Z$ ;
2. Приняв точку  $A'''$  за центр, описать дугу окружности радиуса  $R=40\text{мм}$  и на пересечении ее с проведенной линией проекционной связи отметить точки  $B'''_1$  и  $B'''_2$ ;
3. Построить горизонтальные и фронтальные проекции полученных отрезков  $AB_1$  и  $AB_2$ .



### Приложение к главе 3

2. Определить взаимное положение плоскости  $\alpha$  ( $A, b$ ) и точки  $C$  (рис.3).

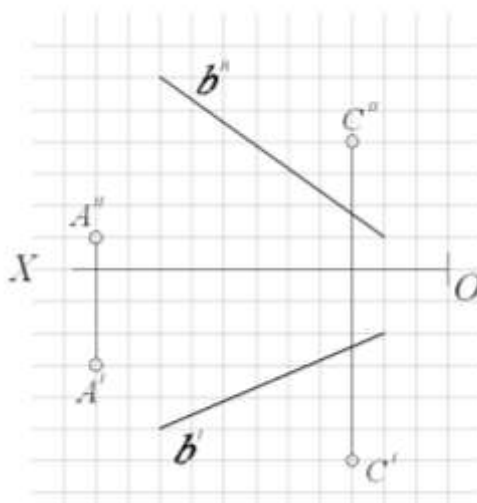


Рис.3

Вначале определяют, принадлежит ли точка  $C$  плоскости  $\alpha$  (рис.3). Это делают с помощью прямой, проведенной через точки  $A$  и  $C$ . Если прямые  $AC$  и  $b$  пересекаются, то точка  $C$  принадлежит плоскости  $\alpha$  и задача решена. Если же эти прямые скрещиваются, то точка  $C$  не принадлежит плоскости  $\alpha$ . Тогда в плоскости  $\alpha$  проводят одну прямую через точку  $C'$ , а другую через точку  $C''$ , и с помощью конкурирующих точек определяют, расположена ли точка  $C$  над или под плоскостью  $\alpha$  и за или перед плоскостью  $\alpha$ .

Решение задачи (рис.4):

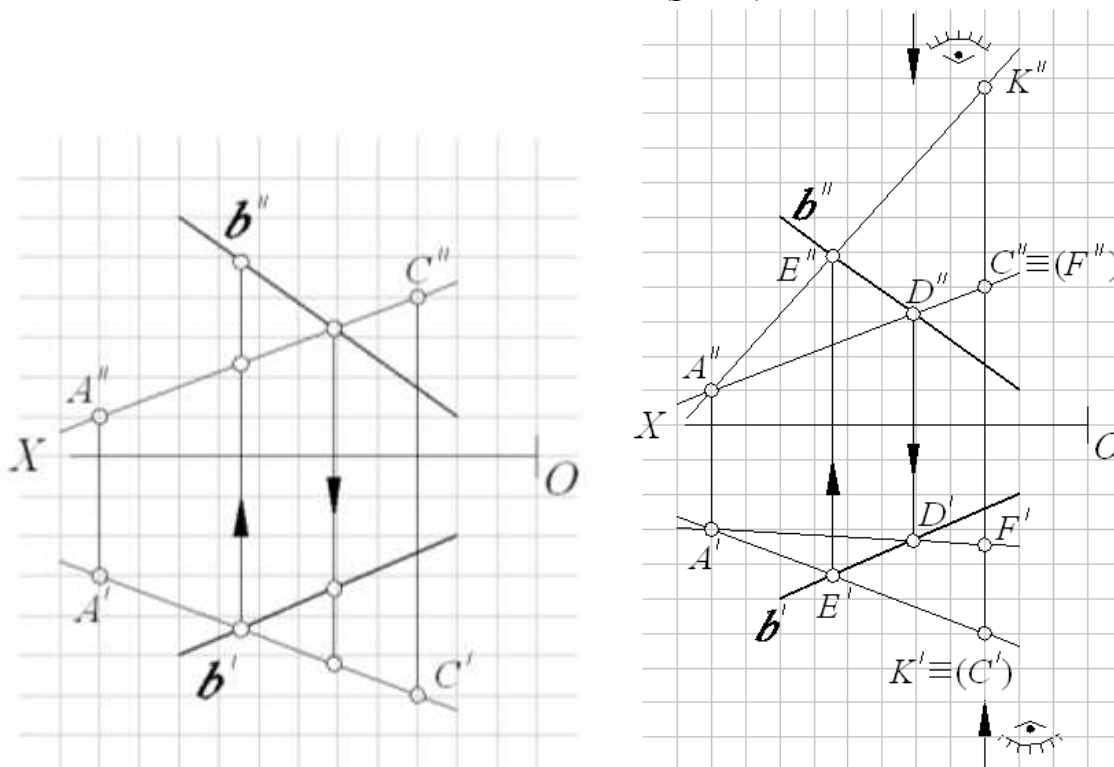


Рис.4

3. Определить, параллельны ли плоскость общего положения  $\alpha$  ( $a \cap b$ ) и профильная прямая  $AB$  (рис.5).

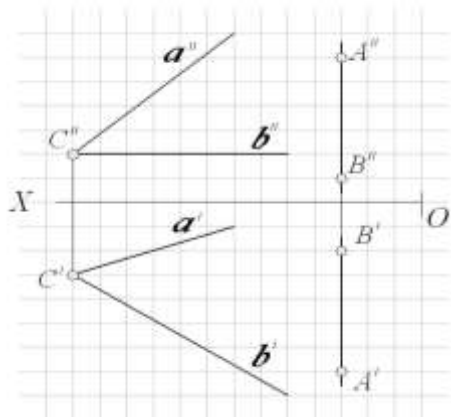


Рис.5

По заданным проекциям нельзя судить о взаимном положении прямой  $AB$  и плоскости  $\alpha$ . Следовательно, для решения задачи необходимо применить одно из вспомогательных построений.

*Первый вариант решения задачи (рис.6):*

1. Провести профильную прямую  $ED$ , принадлежащую плоскости  $\alpha$ ;
2. Спроецировать профильные прямые  $ED$  и  $AB$  на плоскость  $\pi_3$ ;
3. Определить, параллельны ли профильные проекции прямых  $E''D'''$  и  $A''B'''$ .

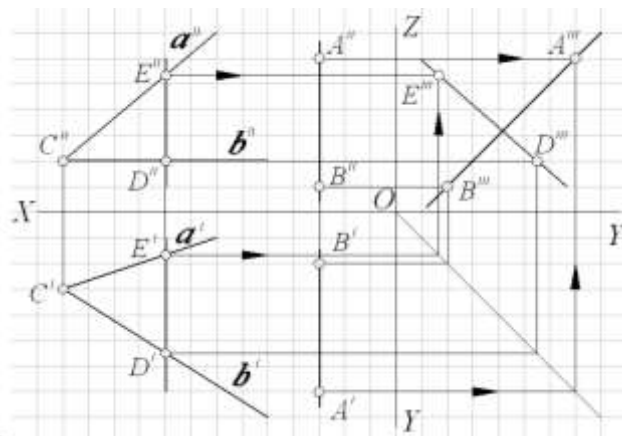


Рис.6

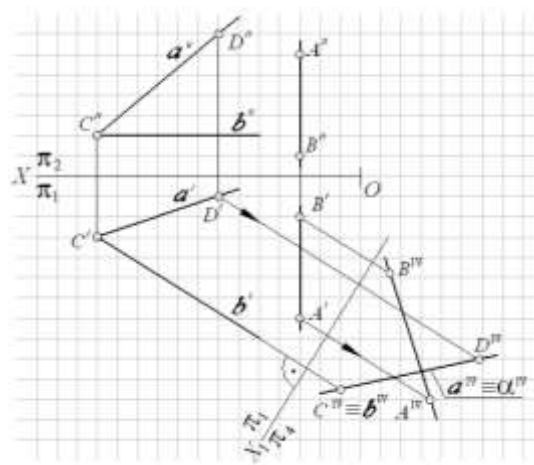


Рис.7

*Второй вариант решения задачи (рис.7):*

1. Задать дополнительную плоскость проекции  $\pi_4 \perp \alpha$  и  $\pi_4 \perp \pi_1$ ;
2. Спроецировать плоскость  $\alpha$  и профильную прямую  $AB$  на дополнительную плоскость  $\pi_4$ ;
3. Определить, параллельны ли новые проекции прямой  $AB$  и плоскости  $\alpha$ .

*Алгоритм первого варианта решения задачи:*

- провести  $ED \subset \alpha$  и  $ED \parallel \pi_3$ ,  $E \in a$  и  $D \in b$ ;
- отобразить  $ED \rightarrow \pi_3(E''' D''')$  и  $AB \rightarrow \pi_3(A''' B''')$ ;
- определить  $E''' D''' \parallel A''' B'''$  или  $E''' D''' A''' \nparallel B'''$ .

*Алгоритм второго варианта решения задачи:*

- задать  $\pi_4 \perp \alpha$ ,  $\pi_4 \perp \pi_1$  и  $\pi_4 \perp (b \parallel \pi_1)$ ,  $\Rightarrow X_1 \perp b'$ ;
- отобразить  $\alpha \rightarrow \pi_4(\alpha^{IV})$  и  $AB \rightarrow \pi_4(A^{IV} B^{IV})$ ;
- определить  $\alpha^{IV} \parallel A^{IV} B^{IV}$  или  $\alpha^{IV} \nparallel A^{IV} B^{IV}$ .

4. Построить линию пересечения плоскости общего положения  $\alpha$  ( $A, a$ ) с фронтально проецирующей плоскостью  $\beta$  (рис. 8).

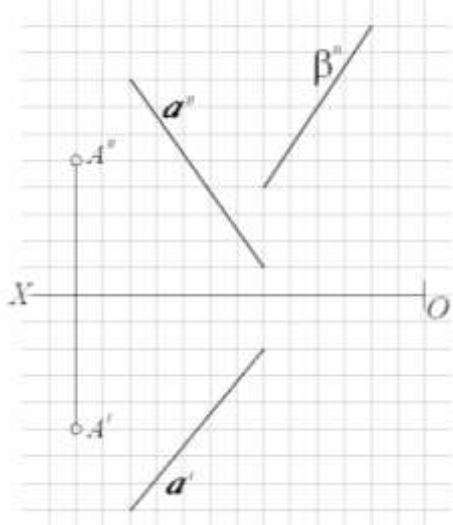


Рис.8

Плоскость  $\beta$  перпендикулярна к плоскости  $\pi_2$ , поэтому фронтальная проекция линии пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  задана и совпадает с  $\beta''$ .

Горизонтальную проекцию искомой линии пересечения строят по двум точкам, расположенным на прямых, принадлежащих плоскости  $\alpha$  и пересекающих плоскость  $\beta$ . Этими прямыми могут быть прямые общего положения плоскости  $\alpha$  (рис.9) или ее линии уровня (рис.10).

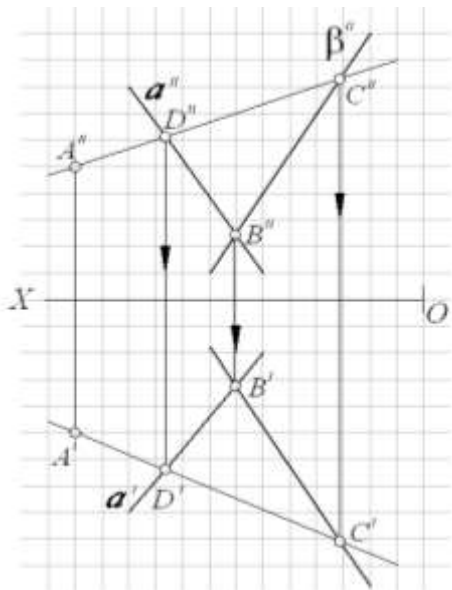


Рис.9

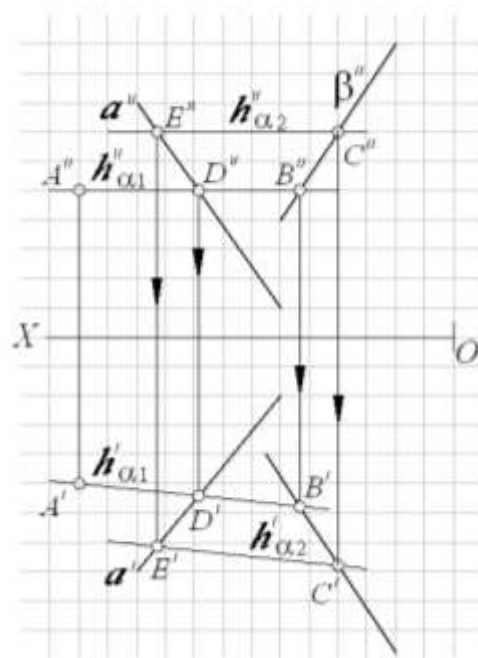


Рис.10

Алгоритм первого варианта решения задачи:

- а) определить точку  $V = a \cap \beta$  и  $V \rightarrow \pi_2$ ,  $V \rightarrow \pi_1$ , т.е. построить  $V''$  и  $V'$ ;
- б) задать точку  $D \in a$  и  $D \rightarrow \pi_2$ ,  $D \rightarrow \pi_1$ , т.е. построить  $D''$  и  $D'$ ;
- в) провести прямую  $AD \in \alpha$  и  $AD \rightarrow \pi_2$ ,  $AD \rightarrow \pi_1$ ;
- г) определить точку  $C = AD \cap \beta$  и  $C \rightarrow \pi_2$ ,  $C \rightarrow \pi_1$ ;
- д) провести прямую  $BC = \alpha \cap \beta$  и  $BC \rightarrow \pi_2$ ,  $BC \rightarrow \pi_1$ .
- Алгоритм второго варианта решения задачи:
- а) провести прямую  $h_{1\alpha} \in \alpha$  и отобразить  $h_{1\alpha} \rightarrow \pi_2$ ,  $h_{1\alpha} \rightarrow \pi_1$ ;
- б) определить точку  $D = h_{1\alpha} \cap a$ ;
- в) определить точку  $V = h_{1\alpha} \cap \beta$  и  $V \rightarrow \pi_2$ ,  $V \rightarrow \pi_1$ ;
- г) провести прямую  $h_{2\alpha} \in \alpha$ , отобразить  $h_{2\alpha} \rightarrow \pi_2$ ,  $h_{2\alpha} \rightarrow \pi_1$ ;
- д) определить точку  $E = h_{2\alpha} \cap a$ ;
- е) определить точку  $C = h_{2\alpha} \cap \beta$  и  $C \rightarrow \pi_2$ ,  $C \rightarrow \pi_1$ ;
- ж) провести прямую  $BC = \alpha \cap \beta$ .

5. Опустить перпендикуляр  $a$  из точки  $D$  на плоскость общего положения  $\alpha(ABC)$  (рис.11).

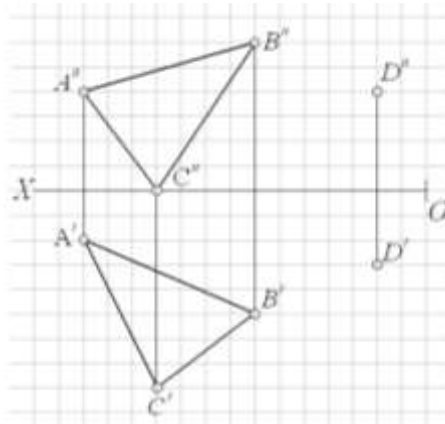


Рис.11

Из условий данной задачи следует, что ее решение можно разделить на две части:

построение прямой  $a$ , перпендикулярной к плоскости общего положения  $\alpha$ , и определение точки  $E$  пересечения прямой общего положения  $a$  и плоскости общего положения  $\alpha$ .

*Алгоритм построения проекции перпендикуляра  $a$  (рис.12):*

- провести  $h_\alpha \supset A$  и определить точку  $1 = h_\alpha \cap BC$ ;
- построить  $h_\alpha''$  и  $h_\alpha'$ ;
- провести  $a' \supset D'$  и  $a' \perp h_\alpha'$ ;
- провести фронтальную прямую  $f_\alpha \supset B$  и определить точку  $2 = f_\alpha \cap AC$ ;
- построить  $f_\alpha''$  и  $f_\alpha'$ ;
- провести  $a'' \supset D''$  и  $a'' \perp f_\alpha''$ ;
- $(a \perp h_\alpha \text{ и } a \perp f_\alpha) \Rightarrow a \perp \alpha (ABC)$ .

Первый вариант решения задачи (рис.12)

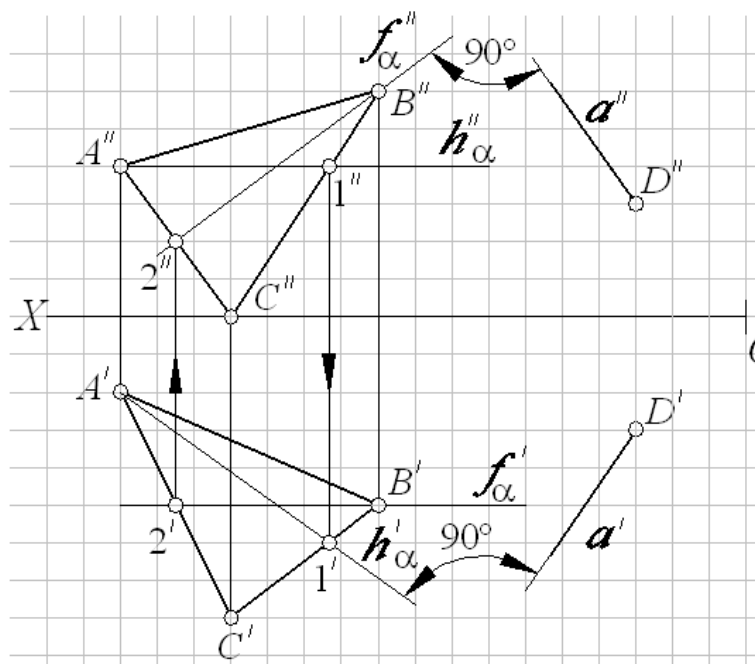


Рис.12

### Второй вариант решения задачи (рис.13)

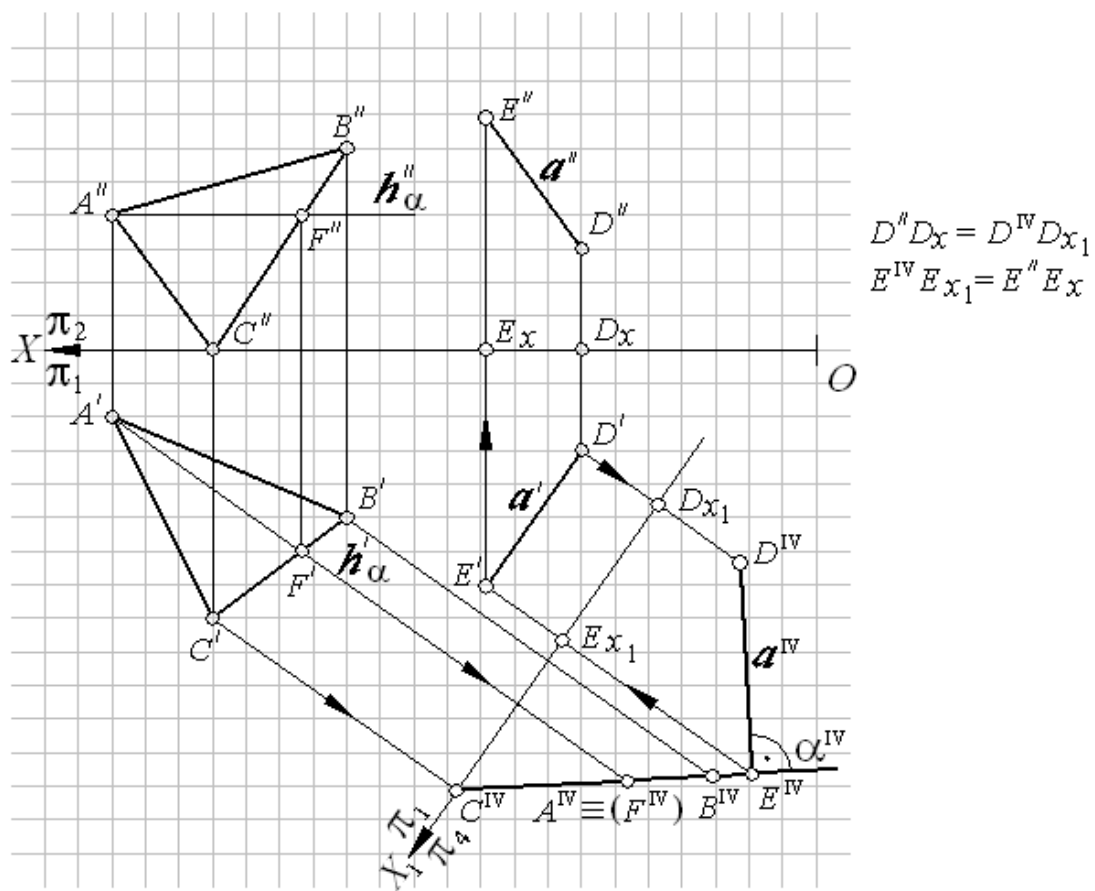


Рис.13

6. Построить геометрическое место точек пространства, равноудаленное от точек  $A$  и  $B$  (рис.14).

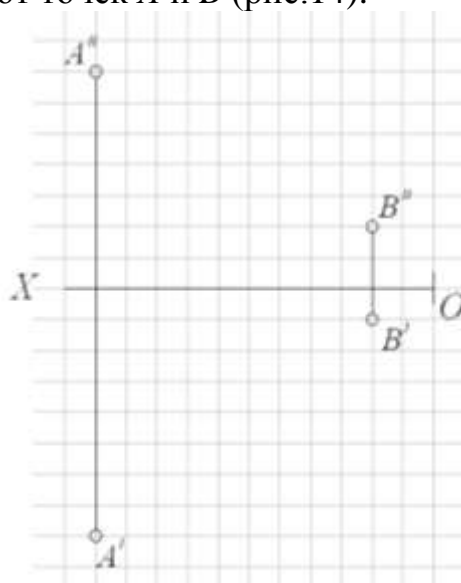


Рис.14

Искомым геометрическим местом точек является плоскость  $\alpha$  ( $h \cap f$ ), перпендикулярная к отрезку  $AB$  и проведенная через его середину – точку  $C$ . Плоскость будет перпендикулярна к прямой линии (отрезку), если содержит две пересекающиеся прямые, каждая из которых перпендикулярна к заданной прямой.

Для случая задания точек  $A$  и  $B$  в системе плоскостей проекций  $\pi_1/\pi_2$  решение приведено на рис.15. Плоскость, перпендикулярную к отрезку  $AB$ , надо задать горизонтальной  $h$  и фронтальной  $f$  прямыми, проходящими через точку  $C$ , каждая из которых составляет с отрезком  $AB$  прямой угол, т.е. провести:  $h \supset C$  и  $h' \perp A'B'$ ;  $f \supset C$  и  $f'' \perp A''B''$ .

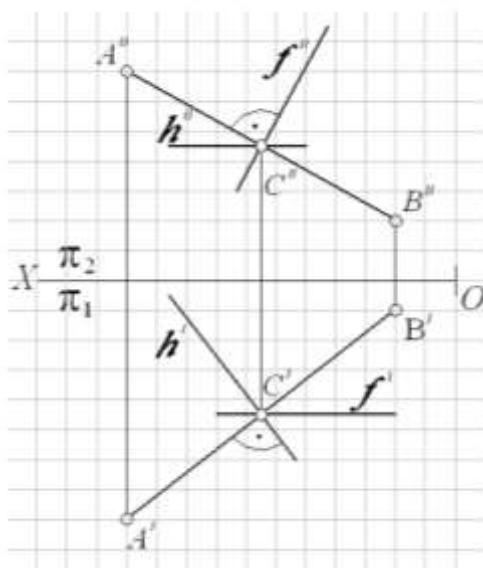


Рис.15

Для случая задания точек  $A$  и  $B$  в системе плоскостей проекций  $\pi_2/\pi_3$  решения этой задачи приведено на рис.16:

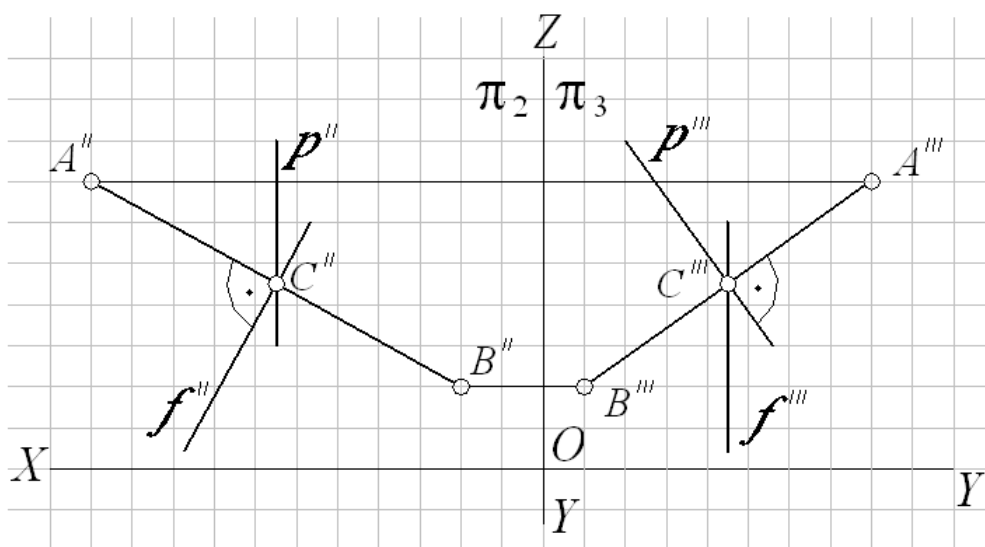


Рис.16

7. Определить, перпендикулярны ли плоскости  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) и  $\beta$  ( $a \parallel b$ ) (рис.17).

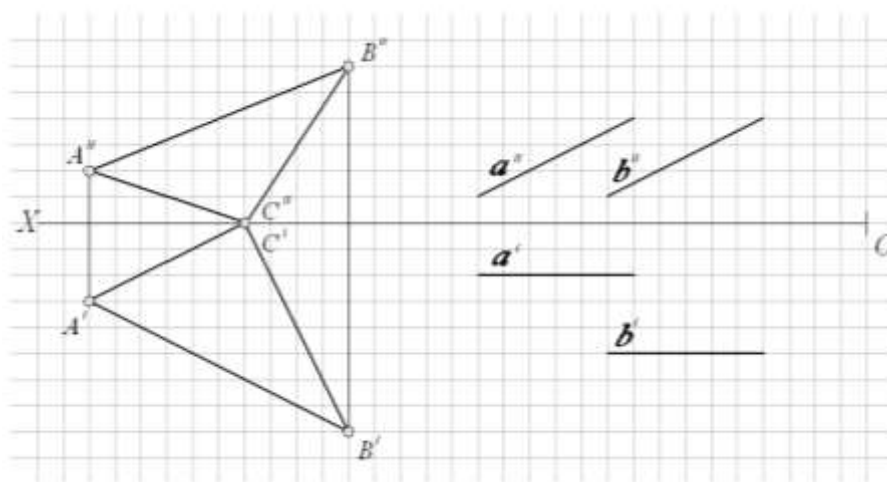


Рис.17

Задача решается на основании условия перпендикулярности двух плоскостей.

*План решения задачи:*

1. Через любую точку одной плоскости, например точку  $D \in \beta$ , провести прямую  $c \perp \beta$ ;
  2. Через любую точку другой плоскости  $\alpha$ , например точку  $C \in \alpha$ , провести прямую  $d \parallel c$ ;
  3. Определить, принадлежит ли прямая  $d$  плоскости  $\alpha$  или нет.
- Решение задачи приведено на рис.18.

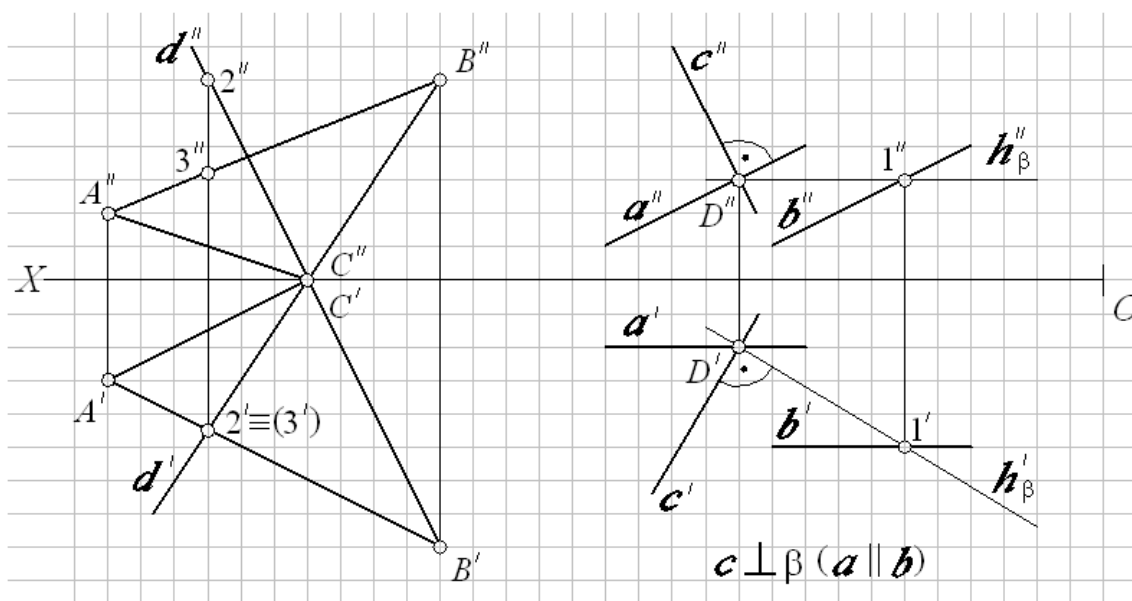


Рис.18



## Приложение к главе 4

8. Построить горизонтальную проекцию точки  $A$ , если при повороте ее вокруг оси  $i \perp \pi_2$  (рис.19) она будет расположена на прямой общего положения  $a$ .

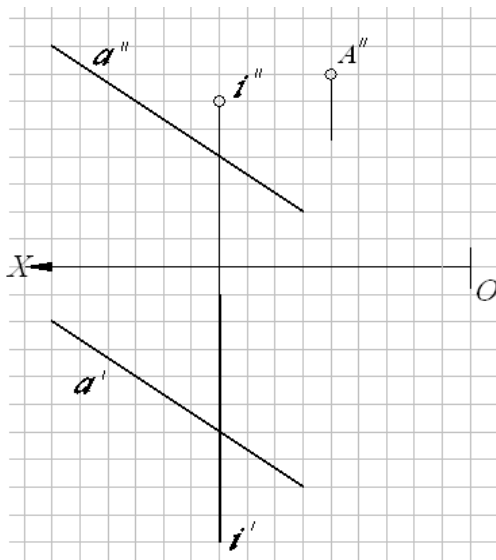


Рис.19

Решение задачи следует начинать с определения положения точки  $\bar{A}''$ , проведя дугу окружности  $R_A = i''A''$ . Эта дуга пересечет фронтальную проекцию прямой  $a$  в двух точках -  $\bar{A}''_1$  и  $\bar{A}''_2$ , т.е. задача имеет два ответа (рис.20). Точки  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  расположены на разном расстоянии от плоскости проекций  $\pi_2$ , в чем можно убедиться, построив их горизонтальные проекции: точка  $\bar{A}_1$  вращается в плоскости  $\alpha \parallel \pi_2$ , а точка  $\bar{A}_2$  - в плоскости  $\beta \parallel \pi_2$ .

1 ответ

2 ответ

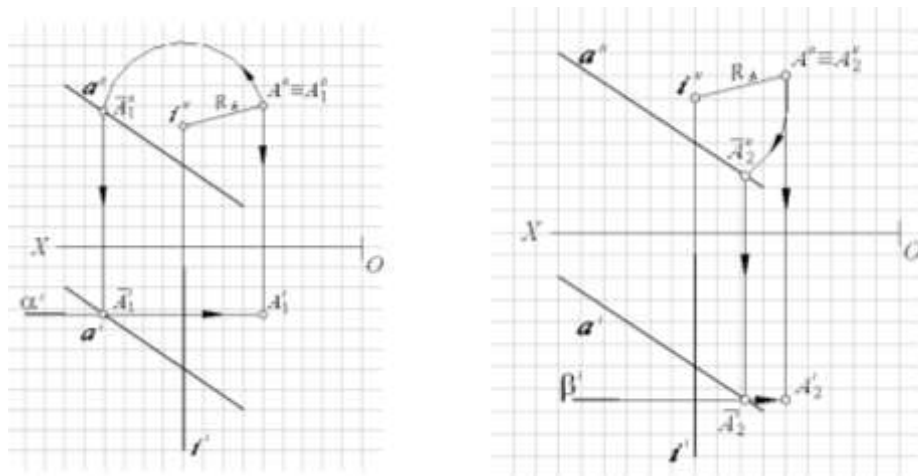


Рис.20

9. Определить длину отрезка  $AB$  прямой общего положения (рис.21) и углы наклона его к плоскостям проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$ .

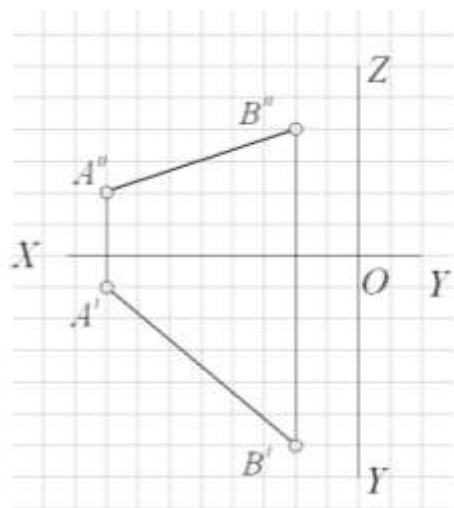


Рис.21

Задачу можно решить с помощью двух дополнительных плоскостей проекций, параллельных отрезку  $AB$ , одна из которых  $\pi_4 \perp \pi_1$ , а другая -  $\pi_5 \perp \pi_2$  (рис.22), или повернув отрезок  $AB$  вокруг осей  $i \perp \pi_1$  и  $i \perp \pi_2$  до положения, параллельного соответственно плоскостям  $\pi_2$  и  $\pi_1$  (рис.23, а, б). Две дополнительные плоскости или два поворота отрезка нужны лишь для определения его углов наклона  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , так как в одной новой системе плоскостей проекций или при одном повороте не изменится только один из углов наклона отрезка  $AB$  -  $\varphi_1$  или  $\varphi_2$ .

1-й вариант решения задачи

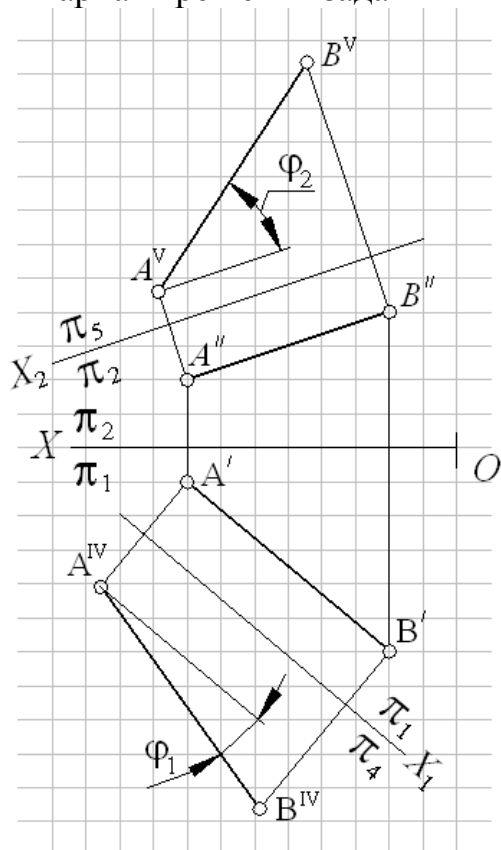


Рис.22

## 2-й вариант решения задачи

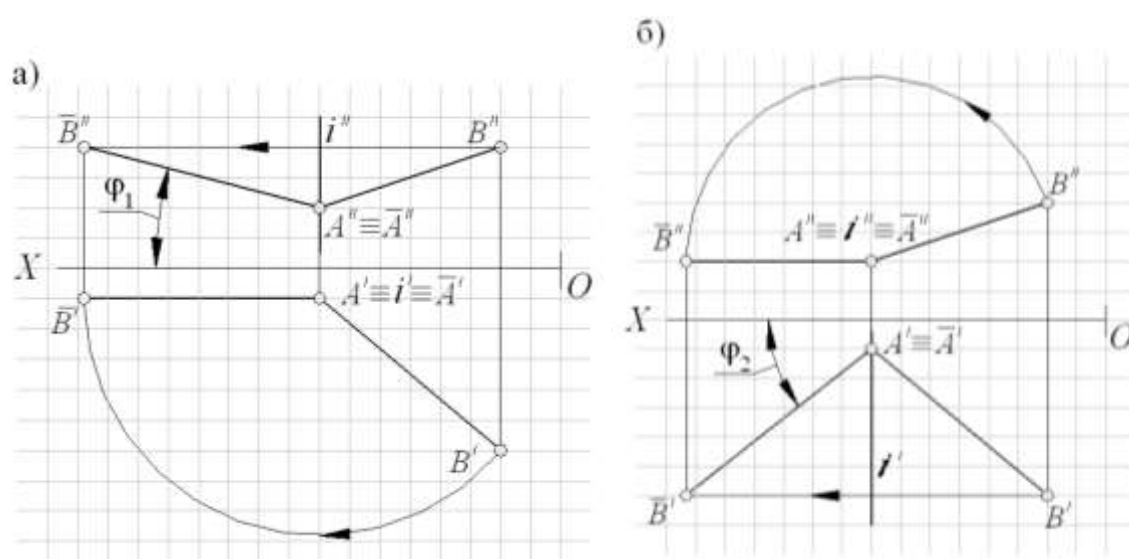


Рис.23

## Приложение к главе 5

10. С помощью способа вращения преобразовать треугольник  $ABC$  общего положения (рис.24) в положение, параллельное плоскости проекций  $\pi_1$ .

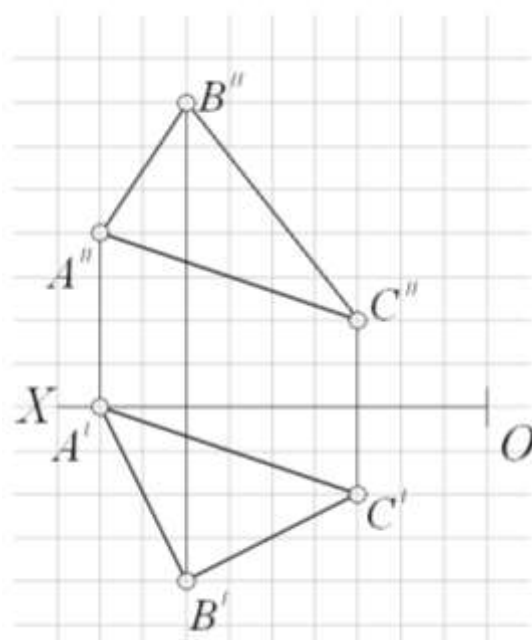


Рис.24

До графического решения задачи надо определить:

1. Перпендикулярно к какой плоскости проекций должна быть расположена первая ось вращения, чтобы после второго поворота получить заданное положение треугольника  $ABC$ ;
2. С помощью какой линии уровня плоскости треугольника  $ABC$  выполняют заданное его преобразование;
3. Через какую вершину треугольника  $ABC$  целесообразно провести ось вращения  $i_1$ , чтобы упростить графическое решение задачи.

Решение задачи показано на рис.25:

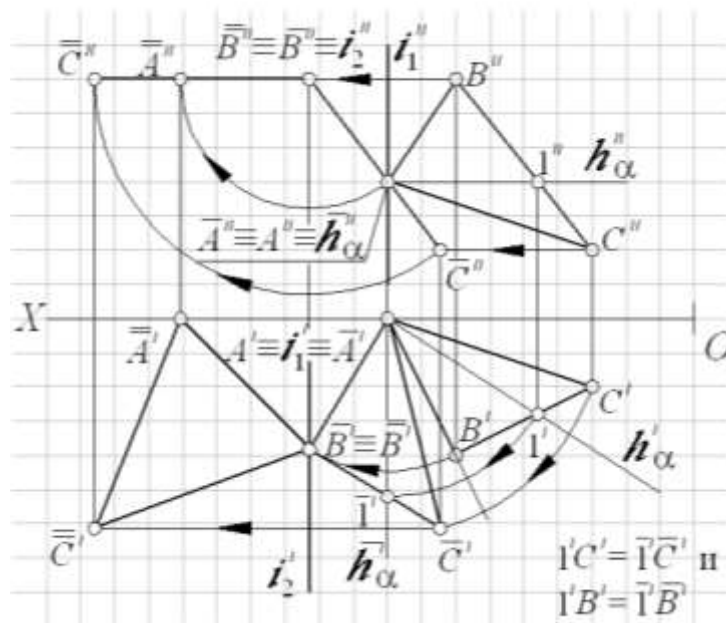


Рис.25

11. Определить фронтальную проекцию точки  $A$ , удаленной от фронтальной прямой  $BC$  на 15 мм (рис.26).

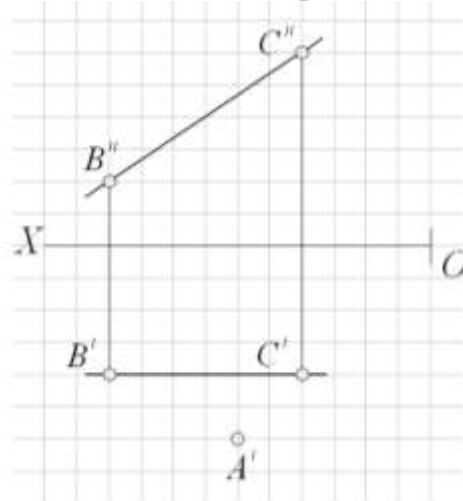


Рис.26

При решении задачи необходимо воспользоваться двумя геометрическими местами точек в пространстве:

1) удаленных от прямой  $BC$  на 15 мм – прямой круговой цилиндрической поверхностью радиуса  $R_{ц}=15$  мм, осью которой является прямая  $BC$  и

2) удаленных от плоскости проекций  $\pi_2$  на величину, равную  $y_A$  – фронтальная плоскость.

Искомая фронтальная проекция точки  $A$  определяется при пересечении этих двух геометрических мест.

Задача может быть решена с помощью одной дополнительной плоскости (рис.27) или одного вращения (рис.28):

1-й вариант

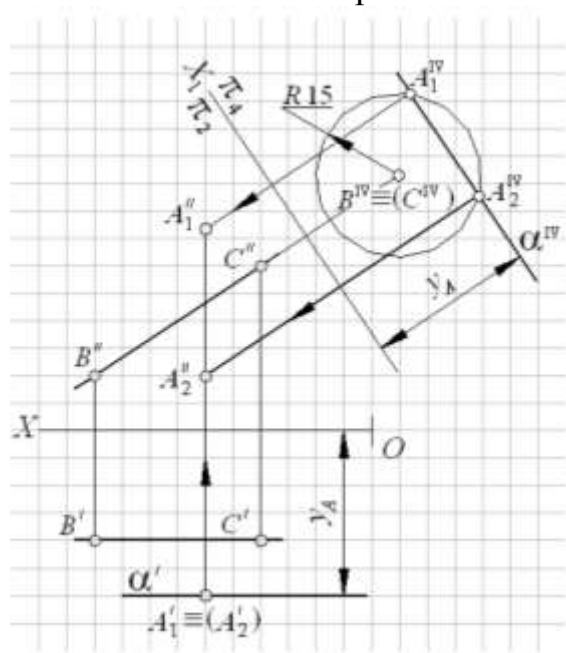


Рис.27

2-й вариант

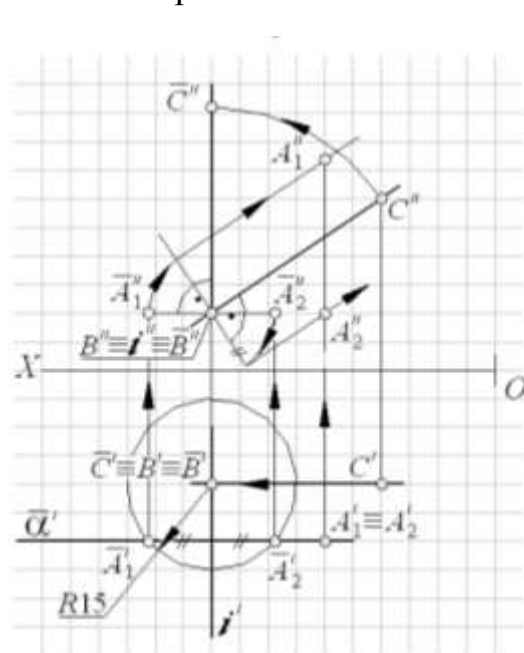


Рис.28

## **Список рекомендуемой литературы**

1. Буланже Г.В., Гуцин И.А., Гончарова В.А. Основы начертательной геометрии: Учеб. пособие – М.: Курс : ИНФРА-М, 2015. – 144с.: ил.
2. Буланже Г.В., Гуцин И.А., Гончарова В.А. Инженерная графика. Проецирование геометрических тел: Учеб. пособие – М.: Курс: ИНФРА-М, 2015. – 184с.: ил.
3. Буланже Г.В., Гуцин И.А., Стогнев А.Д. Основы начертательной геометрии. Методика решения основных позиционных и метрических задач: Учеб. пособие, – М.: Высш. шк., 2010. – 181с.: ил.

## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
Принятые обозначения .....	7
<b>1. Проецирование точки.....</b>	<b>10</b>
<i>Задачи:</i> .....	13
<b>2. Проекция прямой линии. Взаимное положение точки и прямой, прямых линий. Проекция прямого угла .....</b>	<b>19</b>
<i>Задачи:</i> .....	21
<b>3. Проецирование плоскости .....</b>	<b>32</b>
Вопросы для самопроверки: .....	38
<i>Задачи:</i> .....	39
<b>4. Способы преобразования чертежа. ....</b>	<b>56</b>
Проецирование на дополнительные плоскости проекций. Поворот вокруг проецирующих прямых и линий уровня.....	56
Вопросы для самопроверки: .....	60
<i>Задачи:</i> .....	61
<b>5. Метрические задачи.....</b>	<b>73</b>
Определение расстояний между двумя геометрическими фигурами.....	73
<i>Задачи:</i> .....	75
Определение величин углов между двумя геометрическими фигурами.....	78
<i>Задачи:</i> .....	81
<b>6. Проекция многогранников. Сечение многогранника плоскостью. Пересечение прямой линии с поверхностью многогранника .....</b>	<b>88</b>
Вопросы для самопроверки: .....	88
<i>Задачи:</i> .....	89
<b>7. Поверхности вращения. Сечения поверхностей вращения плоскостью. Пересечение прямой линии с поверхностями вращения .....</b>	<b>91</b>
Вопросы для самопроверки: .....	91
<i>Задачи:</i> .....	92
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ.....</b>	<b>98</b>
Список рекомендуемой литературы .....	112