Фильтрация в частотной обрасти –

применение операций над частотным образом изображения. Такой образ может быть получен в результате применения дискретного преобразования Фурье к пикселям изображения. Так как изображение является двумерным сигналом, то для него проводится двумерное преобразования, которое, в свою очередь, делается через совокупность одномерных.

Одномерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ, DFT)

Входные данные – последовательность чисел $x_0, x_1, ... x_{N-1}$.

Для такой последовательности ДПФ можно провести по следующей формуле

$$G_u = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{i\frac{-2\pi uk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \left[\cos\left(\frac{-2\pi uk}{N}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{-2\pi uk}{N}\right)\right],$$

в показательной и тригонометрической формах, где N – количество элементов входной последовательности, $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, G_u – комплексная амплитуда с частотой $\frac{u}{N}$, $u = \overline{0, N-1}$ – индекс комплексной амплитуды (гармоника, синусоида). G_u с меньшим номером описывают низкочастотные гармоники, чем выше u, тем выше частота $\omega = \frac{u}{N}$. Модуль комплексного числа $|G_u|$ определяет амплитуду гармоники, аргумент комплексного числа определяет фазу гармоники.

G_u, x_k, $e^{i\frac{-2\pi uk}{N}}$ являются комплексными числами. Если входная последовательность является действительными числами, то их можно считать комплексными с нулевой мнимой частью.

Выходной массив $G_1, G_2, ..., G_{N-1}$ является Фурье-образом изначальной последовательности чисел и является входным для процедур фильтрации и обратного преобразования.

Обратное преобразование, выглядит так:

$$x_u = \sum_{k=0}^{N-1} G_k \cdot e^{i\frac{2\pi uk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left[\cos\left(\frac{2\pi uk}{N}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{2\pi uk}{N}\right)\right],$$

Двумерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ, DFT)

Входные данные – двумерный массив X размером N строк M столбцов. Это значение пикселей изображения. В цветных изображений Фурье-анализу подвергается **каждый цветовой канал по отдельности**, т.е. придется выполнить столько преобразований, сколько каналов.

<u>Двумерное ДПФ можно выполнить через одномерное следующим образом:</u>

$$G_{uw} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} X_{mn} e^{i\frac{-2\pi mw}{N}}\right] e^{i\frac{-2\pi nu}{N}},$$

где выражение в скобках – построчное одномерное ДПФ. Таким образом алгоритм получения двумерного преобразования следующий:

1. Домножить все элементы массива X на $(-1)^{n+m}$, для центрирования Фурье – образа (низкие частоты в центре, высокие по краям).

2. Отдельно для каждой i-ой **строки** выполнить ДПФ, результат записать в i-ю строку временного двумерного массива X^1. В результате каждая строка X^1 будет содержать Фурье-образы строк исходного массива.

3. Отдельно для каждого j-го **столбца** матрицы X^1 выполнить ДПФ, результат записать в j-й столбцы матрицы G.

Изображение и его Фурье-образ (яркость увеличена в 3 раза)

Изображение и его Фурье-образ (яркость увеличена в 3 раза)
***без домножения** исходных данных на $(-1)^{n+m}$. Так не делают – не удобно накладывать фильтры*

G – содержит искомый Фурье-образ двумерного сигнала. Все операции частотной фильтрации нужно делать с ним. Каждый элемент массива – комплексное число G_{uw} (точка на Фурье-образе), если отсчитывать u и w от центра массива, то чем ближе номер элемента к нулю, тем меньше частота гармоники, что он представляет. Чем ярче точка на Фурье-образе, тем выше амплитуда гармоники, представленная этой точкой.

<u>Кратное описание фильтров:</u>

Низкочастотный фильтр (размывающий): обнуление комплексных чисел **вне** некоего радиусе r относительно центра массива G, r – порог фильтра.

Высокочастотный фильтр (выявляющий контуры): обнуление комплексных чисел **в** некоем радиусе r относительно центра массива G, r – порог фильтра.

Режекторный фильтр: обнуление комплексных чисел **между** двумя радиусами r1, r2 относительно центра массива G. r1 < r2, r1, r2 – пороги фильтра.

Полосовой фильтр: обнуление комплексных чисел между двумя **в** радиусе r1 **и вне** r2 относительно центра массива G. r1 < r2, r1, r2 – пороги фильтра.

Узкополосный режекторный фильтр: обнуление комплексных чисел **внутри** неких областей. Форма области может задана кругом, но может быть любой. Все области должны быть симметрично отражены относительно центра.

Узкополосный полосовой фильтр: обнуление комплексных чисел **везде кроме** некий областей. Форма области может задана кругом, но может быть любой. Все области должны быть симметрично отражены относительно центра.

После получения Фурье-образа изображения и его изменения фильтром необходимо провести обратное преобразование, чтобы увидеть результат. Если к образу не применять фильтр, то обратное преобразование вернет изначальный массив X.

Обратное двумерное ДПФ можно выполнить следующим образом:

1. Отдельно для каждой **строки** массива **G** выполнить **обратное** ДПФ, результат записать в строку временный двумерного массив X^1.

2. Отдельно для каждого **столбца** матрицы X^1 выполнить **обратное** ДПФ, результат записать в столбцы двумерного массива X.

3. Домножить все элементы массива X на $(-1)^{n+m}$.

Теперь в X находится восставленный изначальный массив.

Для обратного ДПФ можно использовать ту же формулу, что и для прямого, предварительно заменив все числа G На их комплексно-сопряженные (т.е. домножив мнимые части на -1) и без умножения суммы на $\frac{1}{N}$.

Визуализация Фурье-образа

Комплексные числа Фурье-образа не пригодны для визуализации (а как сделать картинку из комплексных чисел?) но модули чисел вполне пригодны.

Самый простой вариант визуализации это из двумерного массива G комплексных чисел сделать изображение это:

1. Создать битмап той же размерности, что и G.

2. Рассчитать каждый пиксель изображения I как модуль этого комплексного числа:

$$I(x, y) = |G_{yx}|$$

(помним, в элементах массива первым указывается номер строки, затем столбца),

Однако, такой Фурье образ будет достаточно темным. Это можно всегда исправить, повысив яркость изображения.

В картинке с тигром выше примере визуализация происходила так:

$$I(x,y) = \ln\left(|G_{yx}|+1\right)\cdot\frac{m}{255},$$

где $m = \max\left[\ln\left(|G_{yx}|+1\right)\right]$ для всех $y = \overline{0, N-1},\ x = \overline{0, M-1}$.

Задание на лабораторную работу

Фильтрация делается по каждому цветовому каналу. Не фильтруйте большие изображения! (512*512 максимум для сильных компьютеров) Фурье-анализ без оптимизаций делается долго!

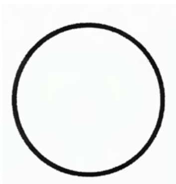
30: сформировать по изображению Фурье-образ и визуализировать его (т.е. превратив действительную часть комп. чисел образа в цвета пикселей).

40: произвести высокочастотную и низкочастотную фильтрацию над Фурье-образом. Программа должна будет вывести сам Фурье-образ, и результат частотной обработки изображения. Параметр фильтра (порог) должен быть задаваемым пользователем.

50: реализовать высокочастотный, низкочастотный, режекторный, полосовой, узкополосный полосовой и узкополосный режекторный фильтры. Параметры фильтров пользователь может менять. Перед применением фильтр должен быть визуализирован на окне. (например ч/б каринка, показывающая, какая окрестность или окрестности частотной области подлежат фильтрации, как на рисунках ниже). К лабораторной работе приложено изображение wash_me.png. Используя разработанную программу и только частотную фильтрацию выявить параметры шума, которым она была испорчена и постараться восстановить (полностью вряд ли получится). Приложить к ответу на задание отчищенное изображение и параметры частотных фильтров, которые дали результат.

Для низкочастного

для полосового



и.т.д.

- **Бонус ко всем оценкам:** реализовать алгоритм Кули-Тьюки быстрого преобразования Фурье (БПФ, FFT), а то так оно считает долго. Пока делается картинка в 12 мегапикселей (фотография с среднестатистического мобильного телефона), успеете ужин приготовить.