Лекция 7
Интегрирование рациональных дробей

Определение. ***Рациональной*** функцией или ***рациональной дробью*** называется функция, являющаяся отношением двух многочленов

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1 x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1 x+b_0},\ a_m\neq 0,\ b_n\neq 0.$$

Если $m<n$, то дробь называется *правильной*, а если $m\geq n$, то *неправильной*.

Всякая неправильная рациональная дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ - многочлен степени $m-n$, а $R(x)$ - многочлен степени меньшей n.

Многочлены $M(x)$ и $R(x)$ можно найти путем деления «уголком» многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$.

Пример. $\dfrac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\dfrac{4x+6}{x^2+2x+1}$, $M(x)=x^2-2x+3$, $R(x)=-4x-6$.

Определение. Назовем простейшими правильные рациональные дроби следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$, $A \neq 0$;

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $A \neq 0$, $k = 2, 3, \ldots$;

3) $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$, $BC \neq 0$, $p^2 - 4q < 0$;

4) $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$, $BC \neq 0$, $p^2 - 4q < 0$, $k = 2, 3, \ldots$

Интегрирование простейших дробей.

1) $f(x)=\dfrac{A}{x-a}$, $A\neq 0$.

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C,\ C=\text{const}.$$

2) $f(x)=\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $A\neq 0,\ k=2,3,\ldots$.

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C,\ C=\text{const}.$$

3) $f(x)=\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$, $BC\neq 0,\ p^2-4q<0$.

Пусть $B=0$. Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2=(x+b)^2+a^2.$$

$$\int \frac{dx}{(x+b)^2+a^2} = \int \frac{d(x+b)}{(x+b)^2+a^2} = \left|x+b=t\right| = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{a} + C.$$

Получаем, что

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Пусть $B \neq 0$. Найдем производную знаменателя дроби и выделим производную знаменателя в числителе:

$$\left(x^2+px+q\right)' = 2x+p,\; Bx+C = \frac{B}{2}(2x+p) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right).$$

Представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Второй интеграл уже вычислен, найдем первый интеграл:

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\left(x^2+px+q\right)'}{x^2+px+q}dx = \int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} = \ln\left(x^2+px+q\right) + C.$$

Объединим полученные результаты:

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{3x+7}{x^2+4x+5}dx$.

Находим производную знаменателя: $\left(x^2+4x+5\right)' = 2x+4$.

Выделим производную знаменателя в числителе: $3x+7 = \frac{3}{2}\left(2x+4\right)+1$.

Представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int \frac{3x+7}{x^2+4x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx + \int \frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

Выделим полный квадрат в знаменателе: $x^2+4x+5 = \left(x+2\right)^2+1$.

Находим первый интеграл:

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{\left(x^2+4x+5\right)'}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{d\left(x^2+4x+5\right)}{x^2+4x+5} = \left|t = x^2+4x+5\right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln\left(x^2+4x+5\right) + C.$$

Находим второй интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{\left(x+2\right)^2+1} = \int \frac{d\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)^2+1} = \left|t = x+2\right| = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\left(x+2\right) + C.$$

Окончательно,

$$\int \frac{3x+7}{x^2+4x+5}dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+4x+5\right) + \operatorname{arctg}\left(x+2\right) + C.$$

4) $f\left(x\right)=\dfrac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $BC\neq 0,\ p^2-4q<0,\ k=2,3,\ldots$

Представляем интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}.$$

Находим первый интеграл:

$$\int\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\int\frac{\left(x^2+px+q\right)'}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\left|t=x^2+px+q\right|=\int\frac{dt}{t^k}=$$

$$=\frac{1}{\left(1-k\right)t^{k-1}}+C=\frac{1}{\left(1-k\right)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+C.$$

Для нахождения второго интеграла выделяем полный квадрат в знаменателе:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \left| t = x+\frac{p}{2},\, a^2 = q-\frac{p^2}{4} \right| = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = I_k.$$

Можно показать, что выполняется рекуррентное соотношение

$$I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} I_{k-1},$$

причем $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$.

Таким образом, интеграл от дроби четвертого типа выражается через элементарные функции.

Мы получаем следующее утверждение.

Теорема. *Неопределенный интеграл от рациональной функции выражается через элементарные функции.*

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_l$ — действительные корни многочлена $Q(x)$ кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_l$ соответственно. Пусть многочлен $Q(z)$ имеет s пар комплексно сопряженных корней кратностей $k_{l+1}, \ldots, k_{l+s}$ соответственно. Тогда

$$Q_n(x) = b_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_l)^{k_l} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{k_{l+1}} \ldots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{k_{l+s}},$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_l + 2(k_{l+1} + \ldots + k_{l+s}) = n,\ D_j = \left(p_j\right)^2 - 4q_j < 0,\ j = 1, \ldots, s.$$

Теорема. Всякая правильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена, причем единственным образом, в виде суммы простейших дробей указанных выше четырех типов. Каждому действительному корню x_r кратности k_r многочлена $Q(x)$ соответствует набор слагаемых вида

$$\frac{A_1}{x - x_r} + \frac{A_2}{(x - x_r)^2} + \ldots + \frac{A_{k_r}}{(x - x_r)^{k_r}}.$$

Каждому квадратичному множителю $x^2+p_jx+q_j$ степени k_{l+j} в разложении многочлена $Q(x)$ соответствует набор слагаемых вида

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^2}+\ldots+\frac{B_{k_{l+j}}x+C_{k_{l+j}}}{\left(x^2+px+q\right)^{k_{l+j}}}.$$

Коэффициенты разложения A, B, C находят методом неопределенных коэффициентов.

Примеры.

1. $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x+1)^2}$.

$$\frac{2x+3}{(x+1)^2}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}=\frac{A_1(x+1)+A_2}{(x+1)^2}=\frac{A_1x+(A_1+A_2)}{(x+1)^2}.$$

Получаем, что $2x+3=A_1x+(A_1+A_2)$, откуда находим, что $A_1=2$, $A_1+A_2=3$, т.е. $A_2=1$. Таким образом,

$$\frac{2x+3}{(x+1)^2}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}.$$

2. $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2+2x+13}{\left(x-2\right)\left(x^2+1\right)}$.

$$\frac{2x^2+2x+13}{\left(x-2\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)\left(x^2+1\right)}.$$

Получаем, что

$$2x^2+2x+13=A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)\left(x-2\right)=\left(A+B\right)x^2+\left(C-2B\right)x+\left(A-2C\right).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=2, \\ C-2B=2, \\ A-2C=13. \end{cases}$$

Решив систему, найдем, что $A=5,\ B=-3,\ C=-4$.

Таким образом,

$$\frac{2x^2+2x+13}{\left(x-2\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{5}{x-2}+\frac{-3x-4}{x^2+1}.$$

3. $f(x)=\dfrac{2x+13}{(x-2)(x+1)}$.

$$\frac{2x+13}{(x-2)(x+1)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+1}=\frac{A_1(x+1)+A_2(x-2)}{(x-2)(x+1)}.$$

Приравняв числители дробей, получим, что

$$2x+13=A_1(x+1)+A_2(x-2).$$

Подставим значение $x=-1$ и найдем $2(-1)+13=A_2(-1-2)\Rightarrow A_2=-11/3$.

Подставим значение $x=2$ и найдем $2\cdot 2+13=A_1(2+1)\Rightarrow A_1=17/3$.

Следовательно,

$$\frac{2x+13}{(x-2)(x+1)}=\frac{17/3}{x-2}+\frac{-11/3}{x+1}.$$