Лекция 2
Решение некоторых типов дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Уравнения с разделяющимися переменными

Общий вид: Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{y' = f(x)g(y)} \tag{1}$$

(т.е. если функцию $f(x,y)$ в уравнении $y' = f(x,y)$ можно разложить в произведение функций, зависящих только от одной переменной), называется ***уравнением с разделяющимися переменными***.

Метод решения: Так как

$$y' = \frac{dy}{dx}, \tag{2}$$

то путем деления обеих частей равенства $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ на $g(y)$ (при $g(y) \neq 0$) и умножения на dx уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

(этот переход называется ***разделением переменных***). Интегрируя обе части этого равенства (левую часть по *y*, а правую по *x*)

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx,$$

получаем общий интеграл данного уравнения в виде

$$G(y) = F(x) + C,$$

откуда, если это возможно, выражаем общее решение.

Замечание: если какое-либо число y_0 – нуль функции $g(y)$, т.е. $g(y_0) = 0$, то, очевидно, функция $y = y_0$ также является решением уравнения (1).

Пример. Решить уравнение

$$(2y^2+1)y' = 2xy\ .$$

◀ Данное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными ($f(x) = 2x$, $g(y) = \dfrac{y}{2y^2+1}$).

Полагая $y' = \dfrac{dy}{dx}$, получим: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{2y^2+1}$

разделяем переменные:

$$\frac{(2y^2+1)dy}{y} = 2xdx\ ,$$

и интегрируем

$$\int (2y + \frac{1}{y})\,\mathrm{dy} = \int 2xdx$$

$$y^2+\ln|y|=x^2+C$$ - общий интеграл уравнения;

кроме того, при разделении переменных потеряно решение $y=0$, которое не может быть получено из общего интеграла ни при каком значении C. Таким образом, все решения данного уравнения задаются неявно общим интегралом $y^2+\ln|y|=x^2+C$,

(выразить отсюда общее решение в явном виде невозможно) и уравнением $y=0$.

Ответ: $y^2+\ln|y|=x^2+C$; $y=0$ ►

Пример. Решить задачу Коши:

$$(y+1)^2dx+xdy=0,\quad y(e)=0.$$

◄ Найдем сначала общее решение. Разделяем переменные:

$$-\frac{dy}{(y+1)^2}=\frac{dx}{x}$$

(теряемые решения $y=-1$ и $x=0$ начальному условию не удовлетворяют). В результате интегрирования получим

$$\frac{1}{y+1} = \ln|x| + C \text{, откуда } y = \frac{1}{\ln|x| + C} - 1.$$

Находим C из начального условия:

$$0 = \frac{1}{1+C} - 1 \;\Rightarrow\; C = 0.$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{\ln x} - 1$ ($x > 1$).

Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Определение: Функция $M(x, y)$ называется *однородной степени* α (или *измерения* α), если

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} M(x, y)$$

тождественно относительно x, y и $\lambda > 0$. Степень α может быть любым действительным числом. В частности, если

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y),$$

то $f(x,y)$ – однородная функция нулевой степени.

<u>Пример.</u> 1) функция $M(x,y)=3xy+y^2$ является однородной 2-й степени, т.к. $M(\lambda x,\lambda y)=3(\lambda x)(\lambda y)+(\lambda y)^2=\lambda^2(3xy+y^2)=\lambda^2 M(x,y)$,

2) функция $f(\mathrm{x},\mathrm{y})=\dfrac{x^2}{y^2}-\sin\dfrac{y}{x}$ – однородная функция нулевой степени, т.к.

$$\frac{(\lambda x)^2}{(\lambda y)^2}-\sin\frac{\lambda y}{\lambda x}=\frac{x^2}{y^2}-\sin\frac{y}{x}.$$

Общий вид: Уравнение $y'=f(x,y)$ называется *однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка*, если $f(x,y)$ есть однородная функция нулевой степени.

Это определение эквивалентно следующему определению:

однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right)}. \qquad (4)$$

Метод решения: Для решения однородного дифференциального уравнения введем новую неизвестную функцию $u(x)$, положив

$$u = \frac{y}{x},$$

т.е. $y = u \cdot x$. Тогда при подстановке в уравнение (4)

$$y = ux, \quad y' = u'x + u$$

оно принимает вид

$$u'x + u = g(u) \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx}x = g(u) - u,$$

т.е. преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными. Решая это уравнение, получаем (произвольная постоянная для удобства потенцирования представлена в логарифмической форме)

$$\int \frac{du}{g(u)-u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow G(u) = \ln|x| + \ln C_1$$

или $G(u) = \ln Cx$ $(C = \pm C_1)$,

откуда, подставляя $\dfrac{y}{x}$ вместо *u*, получим общий интеграл уравнения (4) вида

$G(\frac{y}{x}) = \ln Cx$ $(C \neq 0)$.

Замечание: если u_0 – корень уравнения $g(u) - u = 0$, то $u = u_0$ – решение преобразованного уравнения, а $y = u_0 x$ – решение исходного уравнения.

Замечание: Если уравнение $y' = f(x, y)$ – однородное, то для решения не обязательно приводить его к виду (4) – после подстановки $y = ux$ переменная *x* из правой части уравнения исчезает в результате сокращения и $f(x, y)$ преобразуется в $g(u)$.

Пример. Решить уравнение

$$(x+y)dy - ydx = 0.$$

◀ Данное уравнение однородное, т.к. функции $M(x,y) = -y$ и $N(x,y) = x + y$ – однородные 1-го порядка (или по другому – приведя уравнение к виду, разрешенному относительно производной $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+y}$, обнаруживаем, что функция $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y}$ – однородная нулевой степени; либо, наконец, $f(x,y) = \dfrac{y/x}{1+y/x} = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где $g(u) = \dfrac{u}{1+u}$).

Положим $y = ux$. Тогда $y' = u'x + u$. Подставив эти выражения в уравнение $y' = \dfrac{y}{x+y}$, получим $u'x + u = \dfrac{ux}{x+ux}$, или, после преобразований, уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{u^2}{1+u}.$$

Разделяем переменные

$$-\frac{(1+u)du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

и интегрируем:

$$\frac{1}{u} - \ln|u| = \ln|x| + \ln C_1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{u} = \ln C_1|ux| \text{ или } \frac{1}{u} = \ln Cux \quad (C = \pm C_1).$$

Возвращаясь к функции *y* ($u = \dfrac{y}{x}$), получим общий интеграл:

$$x = y \ln Cy.$$

Кроме этого, при разделении переменных теряется решение $u=0$, а, следовательно, исходное уравнение имеет решение $y=0$.

Ответ: $x=y\ln Cy$ ($C\neq 0$); $y=0$. ▶

Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Общий вид: *Линейным дифференциальным уравнением* 1-*го порядка* называется уравнение вида

$$\boxed{y'+a(x)y=b(x)} \qquad (5)$$

(т.е. содержит *y* и y' в первой степени), где $a(x)$ и $b(x)$ – функции, непрерывные на интервале *I*.

Метод решения.

1) При $b(x)\equiv 0$ уравнение (5) принимает вид $y'+a(x)y=0$, называется *однородным* линейным, является уравнением с разделяющимися переменными и легко решается:

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = -A(x) + \ln C_1,$$

откуда общее решение

$$y = Ce^{-A(x)}, \qquad (6)$$

где $A(x)$ – одна из первообразных функции $a(x)$ ($C = \pm C_1$).

2) Неоднородное линейное уравнение (5) обычно решают *методом подстановки*, а именно, будем искать его решение в виде произведения

$$y = u(x) \cdot v(x).$$

Подставив $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ в уравнение (5) получим

$$u'v + uv' + a(x)uv = b(x)$$ или

$$u'v + u(v' + a(x)v) = b(x). \qquad (7)$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выражение в скобке обратилось в нуль, т.е. выберем какое-нибудь (ненулевое) частное решение однородного линейного уравнения $v' + a(x)v = 0$; в качестве такового можно взять $v = e^{-A(x)}$. Подставляя эту функцию вместо v в уравнение (7), получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно функции u:

$$u'v(x) = b(x).$$

Находим общее решение этого уравнения $u = u(x) + C$, после чего, перемножая найденные функции $v(x)$ и $u(x) + C$, получаем общее решение исходного уравнения (5):

$$y = v(x)(u(x) + C).$$

Пример. Решить уравнение

$$xy' = \cos x - y.$$

◄ Данное уравнение приводится к линейному:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}.$$

Полагая здесь $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\cos x}{x} \quad \text{или} \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\cos x}{x}. \qquad (8)$$

Найдем какую-нибудь функцию $v(x)$ ($\neq 0$), решая уравнение $v' + \frac{v}{x} = 0$:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| \ (C = 0) \Rightarrow v = \frac{1}{x}.$$

Подставляя $v(x)$ в уравнение (8), получим:

$$\frac{u'}{x} = \frac{\cos x}{x} \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = \cos x.$$

Общее решение этого уравнения:

$$u = \sin x + C.$$

Так как $y = uv$, то перемножая теперь найденные *u* и *v*, получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = \frac{\sin x + C}{x}. \blacktriangleright$$

<u>Пример</u>. Решить задачу Коши: $(x^2 y + e^x)dx - x^2 dy = 0$, $y(1) = 0$.

◄ Уравнение приводится к линейному:

$$x^2 y + e^x - x^2 \frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; y' - y = \frac{e^x}{x^2}.$$

(Решение $x = 0$, теряемое при разрешении исходного уравнения относительно y', начальному условию не удовлетворяет).

Выполнив подстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим

$$u'v + u(v' - v) = \frac{e^x}{x^2}.$$

Из $v' - v = 0$ следует

$$\frac{dv}{dx} = v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = dx \;\Rightarrow\; \ln|v| = x \;\Rightarrow\; v = e^x.$$

Далее

$$u'e^x = \frac{e^x}{x^2} \;\Rightarrow\; u' = \frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; u = C - \frac{1}{x}$$

и общее решение $y = e^x\left(C - 1/x\right)$. Из начального условия $0 = e(C-1)$, откуда $C = 1$ и $y = \dfrac{e^x(x-1)}{x}$ ($x > 0$) – искомое частное решение. ►

Замечание: Аналогично линейному уравнению решается *уравнение Бернулли*:

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}}$$, где , $\alpha \neq 1$

(при $\alpha = 0$ это уравнение является линейным, а при $\alpha = 1$ – уравнением с разделяющимися переменными). Уравнение Бернулли можно также свести к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-\alpha}$. Отметим, что при $\alpha > 0$ у уравнения Бернулли есть решение $x = 0$.

Пример. $xy' - y = \ln x \cdot y^2$. Замена $z = y^{1-2} = \dfrac{1}{y}$. Тогда $y = \dfrac{1}{z}$; $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$