Лекция 8.

Бесконечно малые функции

Определение. Пусть $a \in \mathbb{R}$, либо $a = \infty, -\infty, +\infty$. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.) *при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Замечание. В данном определении предел может быть и односторонним.

Примеры.

1) $\alpha(x) = x,\ x \to 0$.

2) $\alpha(x) = \sin x,\ x \to 0$.

3) $\alpha(x) = \cos x,\ x \to \pi/2$.

4) $\alpha(x) = 1/x,\ x \to \infty$.

5) $\alpha(x) = e^x,\ x \to -\infty$.

6) $\alpha(x) = \operatorname{arcctg} x,\ x \to +\infty$.

7) $\alpha(x) = \sqrt{x},\ x \to +0$.

Теорема. Равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b, b \in \mathbb{R}$, выполняется *тогда и только тогда, когда функцию* $f(x)$ *можно представить в виде* $f(x) = b + \alpha(x)$, *где* $\alpha(x)$ — *б.м. при* $x \to a$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{R}$. По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Положим $\alpha(x) = f(x) - b$, или $f(x) = b + \alpha(x)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, т.е. функция $\alpha(x)$ является б.м. при $x \to a$ согласно определению, ч.т.д.

Теорема. *Сумма (разность) двух бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Пусть $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое. Тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon/2,\ \ \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(x)| < \varepsilon/2.$$

Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда, если $0 < |x-a| < \delta$, то $|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x) + \beta(x)) = 0$ и функция $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая.

Теорема. *Пусть функция* $\alpha(x)$ – *бесконечно малая при* $x \to a$, *а функция* $f(x)$ *ограничена в некоторой (проколотой) окрестности точки* a. *Тогда функция* $\alpha(x) f(x)$ *является бесконечно малой при* $x \to a$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Существует число $M > 0$ такое, что $|f(x)| \le M$ $\forall x$ из окрестности точки a. По условию $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ – любое. Тогда $\exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon/M$. Следовательно, если $0 < |x-a| < \delta$, то $|\alpha(x) f(x)| < (\varepsilon/M) \cdot M = \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) f(x) = 0$.

Следствие. *Произведение двух бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.*

Примеры.

1)Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$, следовательно, по теореме $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$.

2) Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \cos x^2}{x-1}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x-1} = 0$, $\left|\cos x^2\right| \le 1$,

следовательно, по теореме

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \cos x^2}{x-1} = 0$.

Теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций

Теорема. *Пусть* $a \in \mathbb{R}$*, либо* $a = \infty, -\infty, +\infty$*. Пусть существуют* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$*,* $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ *. Тогда*

1)существует $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = A + B$*;*

2)существует $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) - g(x) \right) = A - B$*;*

3)существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) g(x) = A \cdot B$*;*

4)если $B \neq 0$*, то существует* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Следствие. $\lim\limits_{x \to a} Cf(x) = C \cdot A, C = \text{const}$.

Короткая формулировка теоремы: *если пределы конечны, то предел суммы двух функций равен сумме пределов, предел разности равен разности пределов, предел произведения равен произведению пределов; если предел делителя отличен от нуля, то предел частного равен частному пределов*.

Доказательство пункта 1. По ранее доказанной теореме

$$f(x) = A + \alpha(x), \;\; g(x) = B + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. при $x \to a$. Тогда

$$f(x) + g(x) = (A + B) + (\alpha(x) + \beta(x)).$$

Значит, функция $\alpha(x) + \beta(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) + g(x)\right) = A + B$.

Примеры.

1) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+3}{x^3+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x+3\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+1\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}2x+\lim\limits_{x\to 1}3}{\lim\limits_{x\to 1}x^3+\lim\limits_{x\to 1}1} = \frac{1+2+3}{1+1} = \frac{6}{2} = 3.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{3x^3-5} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(4-2/x^2+1/x^3\right)}{x^3\left(3-5/x^3\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{4-2/x^2+1/x^3}{3-5/x^3} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-2/x^2+1/x^3\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-5/x^3\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}\left(2/x^2\right)+\lim\limits_{x\to\infty}\left(1/x^3\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\left(5/x^3\right)} = \frac{4}{3}.$$

Сравнение бесконечно малых функций

Определение. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$.

а) Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, где $A \neq 0$ и $A \neq \infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми *одного порядка*. В частности, при $A=1$ бесконечно малые называют *эквивалентными* и пишут $\alpha(x) \sim \beta(x),\ x \to a$.

б) Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой *более высокого порядка*, чем $\beta(x)$ и пишут $\alpha(x) = o(\beta(x)),\ x \to a$ (читается “α есть о малое от β при $x \to a$”).

Замечание. Введенное отношение обладает всеми свойствами отношения эквивалентности, т.е.

1) $\alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $x \to a$;

2) $\alpha(x) \sim \beta(x),\ x \to a \Leftrightarrow \beta(x) \sim \alpha(x),\ x \to a$;

3) Если $\alpha(x) \sim \beta(x),\ x \to a$ и $\beta(x) \sim \gamma(x),\ x \to a$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x),\ x \to a$.

Примеры.

1) $\sin x \sim x,\ x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$(первый замечательный предел).

2) $\operatorname{tg} x \sim x,\ x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

3) $x^2 = o(x),\ x \to 0$.

4) $x^3 = o(x^2),\ x \to 0$.

Теорема (о замене бесконечно малых эквивалентными). *Пусть* $\alpha(x), \alpha_1(x), \beta(x), \beta_1(x)$ – *бесконечно малые при* $x \to a$ *и* $\alpha(x) \sim \alpha_1(x),\ \beta(x) \sim \beta_1(x),\ x \to a$. *Предположим, что существует* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ *(конечный или бесконечный). Тогда существует и* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, *причем*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Доказательство. Поскольку $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1, \ \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1.$$

По ранее доказанной теореме

$$\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1+\gamma(x), \quad \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1+\eta(x), \text{ где } \gamma(x) \text{ и } \eta(x) - \text{б.м. при } x \to a.$$

Следовательно,

$$\alpha(x) = \left(1+\gamma(x)\right)\alpha_1(x), \ \beta(x) = \left(1+\eta(x)\right)\beta_1(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\left(1+\gamma(x)\right)\alpha_1(x)}{\left(1+\eta(x)\right)\beta_1(x)} = \lim_{x\to a}\frac{1+\gamma(x)}{1+\eta(x)}\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

$x \to a$

Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\sin x \sim x,\ x \to 0$	$1-\cos x \sim x^2/2,\ x \to 0$
$\arcsin x \sim x,\ x \to 0$	$\ln(1+x) \sim x,\ x \to 0;$ $\log_a(1+x) \sim x/\ln a,\ x \to 0$
$\operatorname{tg} x \sim x,\ x \to 0$	$e^x - 1 \sim x,\ x \to 0;$ $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a,\ x \to 0$
$\operatorname{arctg} x \sim x,\ x \to 0$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x,\ x \to 0$

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{\arcsin 3x \cdot \sin\left(x/2\right)}$.

◀ Так как $\arcsin 3x \sim 3x$; $\operatorname{arctg} x^2 \sim x^2$; $\sin(x/2) \sim x/2$ при $x \to 0$ (см. таблицу эквивалентных бесконечно малых),
то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{\arcsin 3x \cdot \sin\left(x/2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x \cdot x/2} = \frac{2}{3}.$$ ▶

2)Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\ln\left(1+\sin\left(x/2\right)\right)\left(\sqrt{1+2x}-1\right)}$.

◀ Так как $e^{x^2}-1\sim x^2$, $\ln\left(1+\sin\left(x/2\right)\right)\sim\sin\left(x/2\right)$, $\sqrt{1+2x}-1\sim\dfrac{1}{2}2x=x$

при $x\to 0$,

то

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln\left(1+\sin\left(x/2\right)\right)\left(\sqrt{1+2x}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin\left(x/2\right)\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\left(x/2\right)\cdot x}=2.$$ ▶

Бесконечно большие функции

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки a. Говорят, что функция $f(x)$ имеет *бесконечный предел в точке* a (или $f(x)$ стремится к бесконечности, когда x стремится к a), если для любого числа $N>0$ существует число $\delta>0$(зависящее от N) такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>N$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, или $f(x)\to\infty$ при $x\to a$.

В символической записи:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall N>0\ \exists\delta=\delta(N)>0: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|>N.$$

Аналогично определяются пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, а также бесконечные пределы при $x\to\infty$.

Примеры.

1) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\to 0.$

2) $f(x)=\ln x,\ x\to +0$.

3) $f(x)=2^x,\ x\to +\infty$.

4) $f(x)=(1/2)^x,\ x\to -\infty$.

5) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x\to \infty$.

Определение. Пусть $a\in\mathbb{R}$ или $a=\infty,-\infty,+\infty$. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$, где $A\neq 0$ и $A\neq\infty$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называют бесконечно большими *одного порядка.* В частности, при $A=1$ бесконечно большие функции $f(x)$ и $g(x)$ называют *эквивалентными* и пишут $f(x)\sim g(x)$, $x\to a$.

Пример: при $a_n\neq 0$

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0 \sim a_n x^n,\ x\to\infty.$$

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{h(x)}=\infty$, где $g(x)$ и $h(x)$ – бесконечно большие функции при $x\to a$, то функцию $g(x)$ называют бесконечно большой *более высокого порядка*, чем функция $h(x)$, при $x\to a$.

Теорема (о связи между б.б. и б.м. функциями). *Если* $f(x)$ – *бесконечно большая функция при* $x\to a$*, то функция* $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ *будет бесконечно малой при* $x\to a$. *Обратно, если* $f(x)$ *является бесконечно малой функцией при* $x\to a$ *и* $f(x)\neq 0$*, то функция* $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ *будет бесконечно большой при* $x\to a$.