Семинар №2

## Законы сохранения энергии и импульса в механике

В классической нерелятивистской физике импульс $\vec{p}$ и механическая энергия $E$ материальной точки, имеющей инертную массу $m$ и скорость $\vec{V}$, определяются следующими формулами:

$$\vec{p} = m\vec{V}, \tag{2.1.1}$$

и

$$E = \frac{mV^2}{2} + u(\vec{r}), \tag{2.1.2}$$

Здесь $mV^2/2$ и $u(\vec{r})$ – кинетическая и потенциальная энергии материальной точки соответственно, $\vec{r}$ - радиус-вектор материальной точки.

Полный импульс системы из ***n*** материальных точек есть векторная сумма импульсов всех материальных точек, образующих данную систему:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V_i}, \tag{2.1.3}$$

где $m_i$ и $\vec{V_i}$ соответственно инертная масса и скорость ***i***-ой материальной точки.

Полная механическая энергия системы из ***n*** материальных точек есть сумма механических энергий всех материальных точек, входящих в данную систему.

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{m_i V_i^2}{2} + u_i(\vec{r_i}) \right), \tag{2.1.4}$$

где $mV_i^2/2$ и $u_i(\vec{r_i})$ – соответственно кинетическая и потенциальная энергии ***i***-ой материальной точки, имеющей массу $m_i$, скорость $\vec{V_i}$ и радиус-вектор $\vec{r_i}$.

Отметим, что в потенциальной энергии каждой частицы учитывается ее взаимодействие как с другими частицами системы, так и с внешними силовыми полями. Силы взаимодействия между частицами системы называются внутренними силами, а силы взаимодействия частиц системы с внешними физическими полями и частицами, не входящими в данную систему, называются внешними силами.

**Закон сохранения полного импульса системы материальных точек**

Если суммарная внешняя сила, действующая на систему материальных точек, равна нулю, то полный импульс этой системы материальных точек сохраняется постоянным. Иными словами, внутренние силы системы материальных точек не могут изменить полный импульс системы. Этот результат получается с помощью ***II****ого* и ***III****его* законов Ньютона.

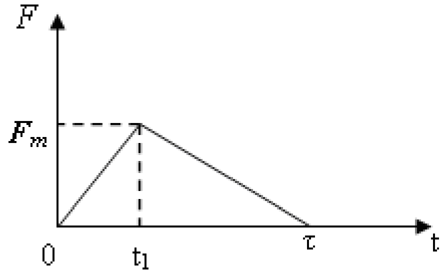
**Закон сохранения энергии в механике**

Если в замкнутой системе материальных точек действуют только консервативные (потенциальные) силы, то ее полная механическая энергия сохраняется постоянной. Консервативной силой называется сила, работа которой по любому замкнутому пути (контуру) равна нулю. Только для консервативных сил можно ввести потенциальную энергию. Для диссипативных сил, работа которых определяет преобразование механической энергии во внутреннюю (тепловую) энергию, ввести потенциальную энергию нельзя. В случае действия диссипативных сил необходимо использовать общефизический закон сохранения энергии, где учитываются механическая и внутренняя (тепловая) энергии системы.

Следует сказать, что в классической нерелятивистской механике законы сохранения импульса и энергии получаются как следствие законов динамики Ньютона. В действительности законы сохранения являются обобщением опыта, а сами законы динамики должны формулироваться таким образом, чтобы установленные законы сохранения выполнялись. В настоящее время законы сохранения энергии и импульса связывают с однородностью времени и пространства.

Задача №4

Какую скорость мячу может сообщить футболист при ударе, если максимальная сила удара $\boldsymbol{F_m}$ = 3500 Н, а время удара $\boldsymbol{\tau}$ = $8\cdot10^{-3}$с? Считать, что при ударе сила нарастает и спадает во времени по линейному закону (см. рис.). Масса мяча $\boldsymbol{m}$ =0.5 кг. Начальная скорость мяча равна нулю.




Решение

1. Запишем для мяча ***II<sup></sup>*** закон Ньютона в векторной форме

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,, \qquad (2.4.1)$$

где $\vec{p} = m\vec{V}$ - импульс мяча, $\vec{V}$ – скорость мяча и $\vec{F}$ – сила, с которой футболист бьет по мячу.

2. Перейдем от векторной формы записи к скалярной, используя проекцию на направление силы $\vec{F}$, которая в процессе удара не меняет направление,

$$\frac{dp}{dt} = F\,. \qquad (2.4.2)$$

3. Определим полное изменение импульса мяча при ударе футболиста, применяя метод разделения переменных,

$$\int_0^{p(\tau)} dp = \int_0^{\tau} F(t)dt\,. \qquad (2.4.3)$$

Выполняя интегрирование, используем геометрический смысл интеграла. Величина интеграла равна площади поверхности между кривой зависимости силы удара от времени удара и осью времени, поэтому импульс $p(\tau)$ равен площади треугольника, то есть произведению основания $\tau$ на полувысоту $\frac{1}{2}F_m$:

$$p(\tau)=\frac{1}{2}F_m\tau \tag{2.4.4}$$

4. На основе определения импульса

$$\vec{p}(\tau)=m\vec{V}(\tau) \tag{2.4.5}$$

находим конечную скорость мяча:

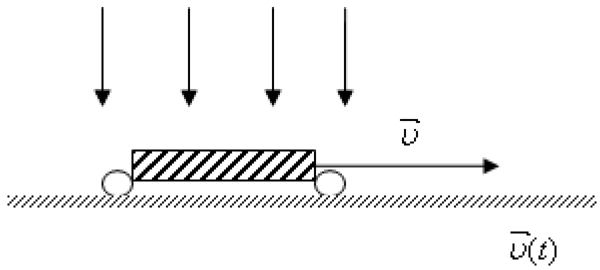
$$V(\tau)=\frac{p(\tau)}{m}=\frac{F_m\tau}{2m}=28\,м/с \tag{2.4.6}$$

Такую скорость $\approx 100\,км/ч$ приобретает мяч после удара профессионального футболиста.

Ответ: $V=28\,м/с$ .

Задача №5

Тележка массой $m$ движется по горизонтальной поверхности со скоростью $\overrightarrow{\upsilon_0}$. В момент времени t=0 начинает идти снег, падающий вертикально. Определите зависимость скорости тележки $\upsilon(t)$ от времени, если на тележку ежесекундно выпадает снег массой $\mu$**.** Снег с тележки не слетает. Трением между тележкой и поверхностью можно пренебречь.




Решение

1. Определим все внешние силы, действующие на тележку: сила тяжести $m\vec{g}$, где $m$ – масса тележки, $\vec{g}$ – ускорение свободного падения, и $\vec{N}$ – сила реакции, действующая на тележку со стороны горизонтальной поверхности. При этом, согласно условиям задачи:

$$m\vec{g}+\vec{N}=0\ . \tag{2.5.1}$$

2. Отсюда следует, что в процессе движения импульс тележки с выпавшим на нее снегом сохраняется постоянным:

$$\vec{p}=(m+\mu t)\vec{\upsilon}(t)=const\ , \tag{2.5.2}$$

где t>0. В начальный момент времени t=0 скорость тележки без снега

$$\vec{\upsilon}(t=0)=\overrightarrow{\upsilon_0}\ , \tag{2.5.3}$$

поэтому постоянная в выражении (2.5.2) равна начальному импульсу тележки:

$$\vec{p}(t=0)=\vec{p}_0=m\vec{\upsilon}_0\ . \tag{2.5.4}$$

3. Из формул (2.5.2) и (2.5.3) следует, что скорость тележки со снегом в любой момент времени t>0

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{\vec{p}(t)}{m+\mu t} = \frac{\vec{p}_0}{m+\mu t} = \frac{m}{m+\mu t}\vec{\upsilon}_0 \quad . \tag{2.5.5}$$

Отметим, что здесь не учитывается действие сил трения качения и сопротивления воздуха, которые остановят движение тележки за конечное время.

Ответ: $\vec{\upsilon}(t) = \dfrac{m}{m+\mu t}\vec{\upsilon}_0$ .

## Задача №6

Небольшой шарик массой ***m***, подвешенный на невесомой и нерастяжимой нити, отвели в сторону так, что нить образовала прямой угол с вертикалью, а затем отпустили с нулевой начальной скоростью. Определите ускорение шарика $\vec{a}$ и силу натяжения $\vec{T}$ нити в тот момент, когда нить образует угол $\alpha$ с вертикалью.

### Решение

1. Определим все силы, действующие на шарик согласно условию задачи: сила тяжести $m\vec{g}$, где $m$ – масса шарика и $\vec{g}$ – ускорение свободного падения, и сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная вдоль нити.

2. Запишем в векторной формуле уравнение движения шарика на основе ***II***$^{\textit{ого}}$ закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \quad . \tag{2.6.1}$$

В силу нерастяжимости нити шарик движется по окружности радиусом *l*, где *l* – длина нити.

Представим вектор полного ускорения $\vec{a}$ в виде векторной суммы тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ и нормального ускорения $\vec{a}_n$ :

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \tag{2.6.2}$$

и перепишем уравнение (2.6.1) следующим образом:

$$m\vec{a}_\tau = m\vec{g}_\tau + \vec{T}_\tau \quad , \tag{2.6.3}$$

$$m\vec{a}_n = m\vec{g}_n + \vec{T}_n \quad , \tag{2.6.4}$$

где индексы $\tau$ и $n$ обозначают тангенциальные и нормальные компоненты соответственно векторов $\vec{a}$, $\vec{g}$ и $\overline{T}$.

3. Рассмотрим проекцию уравнения (2.6.3) на направление единичного вектора касательной к траектории движения шарика $\vec{\tau}$

$$ma_\tau = mg\sin\alpha \tag{2.6.5}$$

и проекцию уравнения (2.6.4) на направление единичного вектора нормали траектории $\vec{n}$

$$ma_n = T - mg\cos\alpha \quad . \tag{2.6.6}$$

Величину нормального ускорения удобно выразить через линейную скорость шарика $\upsilon$ и длину нити $l$, равную радиусу окружности, по которой движется шарик.

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{l}\ . \qquad (2.6.7)$$

4. Из выражения (2.6.5) следует, что тангенциальное ускорение шарика

$$a_\tau = g \sin\alpha\ . \qquad (2.6.8)$$

Для нахождения величины нормального ускорения по формуле (7) необходимо определить скорость шарика. С этой целью используем закон сохранения механической энергии (согласно условиям задачи, на шарик действуют только консервативные силы)

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} + mgl(1-\cos\alpha) = E_0 = mgl\ . \qquad (2.6.9)$$

Здесь $E_o$ – начальная энергия шарика при отклонении нити на угол $\alpha = 90^{\circ}$ от вертикали. Потенциальная энергия шарика при вертикальном положении нити, когда $\alpha = 0$, считается равной нулю. Из уравнения (2.6.9) находим, что

$$\upsilon^2 = 2gl\cos\alpha\ . \qquad (2.6.10)$$

Подставляя это значение квадрата скорости в (2.6.7), получим

$$a_n = 2g\cos\alpha\ . \qquad (2.6.11)$$

5. Сила натяжения нити согласно формулам (2.6.6) и (2.6.11) равна

$$T = 3mg\cos\alpha\ . \qquad (2.6.12)$$

Наибольшая величина силы натяжения нити достигается при прохождении нити через вертикаль, когда $\alpha = 0$,

$$T_{\max} = 3mg\ . \qquad (2.6.13)$$

Ответ: $a_\tau = g\sin\alpha$, $a_n = 2g\cos\alpha$, $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = g\sqrt{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha}$; $T_{\max} = 3mg\cos\alpha$.