Семинар №5

Момент инерции. Момент импульса. Момент силы

Для описания вращения тела вокруг неподвижной оси используются следующие физические величины:

1. Момент инерции тела J относительно заданной оси, характеризующий инертность тела в отношении вращательного движения.
2. Момент импульса тела $L=J\omega$ относительно заданной оси, являющийся количественной мерой вращательного движения тела, ω – угловая скорость вращения тела вокруг оси.
3. Момент силы M относительно заданной оси, который действует на тело и определяет скорость изменения во времени его момента импульса относительно оси вращения

$$M = \frac{dL}{dt}. \qquad (5.0.1)$$

Если при вращении момент инерции тела остается постоянным, то уравнение вращательного движения преобразуется к виду:

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M\,, \qquad (5.0.2)$$

где $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение тела.

При описании вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной точки используется момент импульса относительно точки, который определяется с помощью векторного произведения

$$\vec{L} = [\vec{r}\cdot\vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (yp_z - zp_y)\vec{i} - (xp_z - zp_x)\vec{j} + (xp_y - yp_x)\vec{k}\,, \qquad (5.0.3)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из выбранной точки в ту точку, где находится начало вектора импульса $\vec{p}$ (в точку нахождения частицы).

Аналогично можно определить вектор момента $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно заданной точки

$$\vec{M} = [\vec{r}\cdot\vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} - (xF_z - zF_x)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}\,. \qquad (5.0.4)$$

Момент импульса $\vec{L}$ или силы $\vec{F}$ относительно точки О обозначается как $\vec{L}_0$ или $\vec{M}_0$ (см. рис. 5.1)

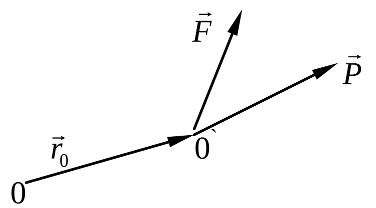

Рис. 5.1. Точка O – начало координат, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки $O`$, где находится начало вектора $\vec{P}$ и точка приложения силы $\vec{F}$.

Рассмотрим проекцию вектора $\vec{M}_0$ на ось z, проходящую через точку O. Из выражения (5.0.4) получим:

$$M_z = xF_y - yF_x. \qquad (5.0.5)$$

Величина M_z называется моментом силы $\vec{F}$ относительно заданной оси z. Важно отметить, что M_z не зависит от координаты z точки приложения силы и определяется только той компонентой силы, которая лежит в плоскости, перпендикулярной оси z. Эта компонента обозначается $\vec{F}_{\perp}$. Соответственно, $\vec{F}_{\parallel}$ обозначает компоненту силы, параллельную оси z (см. рис. 5.2). Таким образом, полная сила

$$\vec{F} = \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel}. \qquad (5.0.6)$$

Момент силы $\vec{F}$ относительно оси z есть проекция момента силы относительно произвольной точки на эту ось:

$$M_z = d \cdot |\vec{F}_{\perp}|. \qquad (5.0.7)$$

Длина отрезка $d = r\sin\varphi$, перпендикулярного к его компоненте силы $F_{\perp}$, называется плечом силы $\vec{F}$, φ – угол между радиусом-вектором $\vec{r}$ и компонентой силы $\vec{F}_{\perp}$.

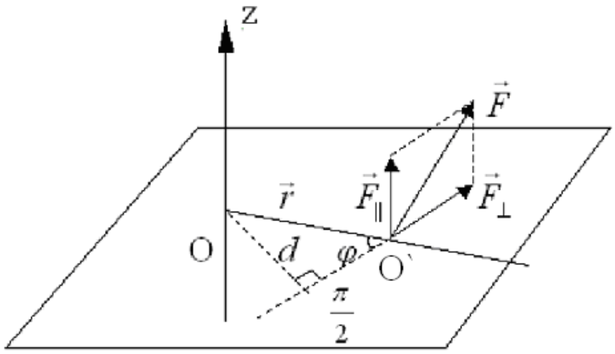

Рис. 5.2. Точка О – точка пересечения плоскости, проходящей через точку О\` приложения силы $\vec{F}$ перпендикулярно оси z.

Задача №13

Сила $\vec{F}$, имеющая проекции $F_x=1H$, $F_y=2H$, $F_z=3H$, приложена в точке O с координатами (x,y,z) = (4м,5м,6м). Определить момент силы $\vec{M}_0$ относительно начала системы координат (x,y,z) = (0,0,0), момент силы M_z относительно оси z и плечо силы d относительно оси z.

Решение

Согласно определению момент силы относительно точки (0,0,0):

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} - (xF_z - zF_x)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}. \qquad (5.1.1)$$

Подставляя значения из условий задачи, получим

$$\vec{M}_0 = (5\times3-6\times2)\vec{i} - (4\times3-6\times1)\vec{j} + (4\times2-5\times1)\vec{k} = (3\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k})\, H \cdot м. \qquad (5.1.2)$$

Момент силы относительно оси z:

$$M_z = xF_y - yF_x = 4\cdot2 - 5\cdot1 = 3H \cdot м. \qquad (5.1.3)$$

Плечо *d* силы $F_\perp$ относительно оси *z* находится с помощью формулы

$$d = \frac{M_z}{F_\perp}, \tag{5.1.4}$$

где величина $F_\perp$ определяется по теореме Пифагора:

$$F_\perp = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}\,. \tag{5.1.5}$$

Из (5.1.4) и (5.1.5) следует, что плечо силы

$$d = \frac{M_z}{F_\perp} = \frac{M_z}{\sqrt{F_x^2 - F_y^2}} = \frac{3}{\sqrt{1+4}} = \frac{3}{2{,}24} \approx 1{,}34\,м. \tag{5.1.6}$$

Ответ: $\vec{M}_0 = (3\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k})H \cdot м$; $M_z = 3H \cdot м$; d=1,34*м*.

Задача №14

Частица массой m=10*г* движется с постоянной скоростью *υ=18км/ч* в положительном направлении оси *x* по закону $x = \upsilon t$. Определить: момент импульса частицы $\vec{L}$ относительно точки с координатами $(x_1, y_1, z_1) = (0{,}1{,}0)\,м$, и момент импульса частицы L_y относительно оси *y* для *t>0*.

Решение:

Момент импульса частицы $\vec{L}$ относительно заданной точки 1 определяется формулой:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{1p} & y_{1p} & z_{1p} \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (y_{1p} p_z - z_{1p} p_y)\vec{i} - (x_{1p} p_z - z_{1p} p_x)\vec{j} + (x_{1p} p_y - y_{1p} p_x)\vec{k}\ , \tag{5.2.1}$$

где согласно условиям $x_{1p} = x_p - x_1 = \upsilon t$, $y_{1p} = y_p - y_1 = -1м$, $z_{1p} = z_p - z_1 = 0$, $\vec{r}_p = (\upsilon \mathrm{t}, 0, 0)$ - радиус-вектор частицы, проведенный из точки 1, $p_x = m\upsilon$, $p_y = 0$, $p_z = 0$.

Таким образом,

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ m\upsilon & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + (0 + 1 \cdot m\upsilon)\vec{k} = m\upsilon\vec{k} = 0{,}05\vec{k}\ Дж \cdot с\ . \tag{5.2.2}$$

Момент импульса частицы L_y относительно оси *y* есть проекция на эту ось момента импульса $\vec{L}$ частицы относительно произвольной точки *O*, принадлежащей данной оси. Согласно (5.2.2)

$$L_y = 0. \tag{5.2.3}$$

Ответ: $\vec{L}$=(0;0;0,05) $Дж \cdot с$, $L_y = 0$.

Задача №15

Вычислите момент инерции *J* однородноготонкого стержня массой *m* и длиной *l* относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей 1)через конец стержня, 2)через середину стержня.

Решение:

Выберем ось *z* перпендикулярную стержню и проходящую через конец стержня, при этом ось *x* направим вдоль стержня (рис. 5.3).

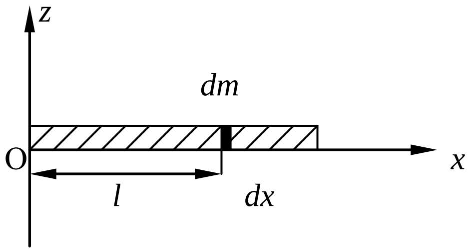

Рис. 5.3.

Согласно определению момента инерции

$$J=\int_0^m r^2dm=\int_0^m x^2dm=\int_0^l x^2\rho dx=\int_0^l x^2\frac{m}{l}dx=\frac{m}{l}\int_0^l x^2dx=\frac{m}{l}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^l=\frac{ml^2}{3}. \qquad (5.3.1)$$

Во втором случае выберем ось z, проходящую через центр стержня. В результате момент инерции стержня определяется выражением:

$$J=\int_0^m r^2dm=\int_0^m x^2dm=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2\rho dx=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2\frac{m}{l}dx=\frac{m}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2dx=\frac{m}{l}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}=\frac{ml^2}{12}. \qquad (5.3.2)$$

Ответ: а) $J=\frac{ml^2}{3}$, б) $J=\frac{ml^2}{12}$.