1. Электромагнитные и акустические волны

Электромагнитное излучение наблюдается при ускоренном движении электрических зарядов. Рассмотрим излучение **электрического точечного диполя**, совершающего гармонические колебания на частоте ω,

$$\vec{P}(t) = q\vec{l}(t) = q\vec{l}_0 \cos\omega t = \vec{P}_0 \cos\omega t\,,$$

где постоянный вектор $\vec{l}_0$ проведен от отрицательного заряда -q к положительному заряду +q. Полный заряд диполя равен нулю. Диполь считается точечным, если $l_0 << \lambda$, где λ - длина волны излучения диполя.

Согласно системе уравнений Максвелла в линейной среде частота электромагнитного излучения равна частоте колебаний диполя, поэтому $\lambda = 2\pi c/\omega$, где c – скорость электромагнитных волн. Если диполь находится в вакууме, **мгновенная мощность электромагнитного излучения**

$$N(t) = \oint_S (\vec{\Pi}(t)\vec{n})ds = \frac{\ddot{\vec{p}}^{\,2}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,,$$

где $\vec{\Pi} = \left[\vec{E}\vec{H}\right]$ - вектор Пойнтинга, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - векторы напряженности электрического и магнитного поля соответственно, S – замкнутая поверхность, охватывающая диполь, $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности ds, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м - электрическая постоянная и $c = 3 \cdot 10^8$ м/с - скорость света в вакууме. Точка сверху обозначает производную по времени.

Усредненный по интервалу времени $\Delta t >> T$, где T — период колебаний, вектор Пойнтинга определяет **интенсивность *J* излучения**

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \left\langle \left[\vec{E}\vec{H}\right] \right\rangle = J\vec{n}\,.$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по интервалу времени Δt, а $\vec{n}$ - единичный вектор, задающий направление вектора Пойнтинга. Излучение диполя является анизотропным, поскольку величина интенсивности J зависит от направления наблюдения. В **дальней (волновой) зоне** диполя, где

$$r >> l_0,\;\; \lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega}\,,$$

угловое распределение интенсивности описывается формулой

$$J = \frac{3}{8\pi}\frac{\langle N \rangle}{r^2}\sin^2\theta\,.$$

Здесь $\langle N \rangle$ - средняя мощность излучения, $\vec{r}$ - вектор, проведенный из центра диполя в точку наблюдения, θ - угол между векторами $\vec{l}_0$ и $\vec{r}$. Таким образом, интенсивность излучения обращается в нуль при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ (вдоль прямой, на которой лежит вектор $\vec{l}_0$) и принимает максимальное значение при $\theta = \pi/2$ (в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{l}_0$ и проходящей через точку, в которой находится диполь).

Анизотропию излучения источника удобно представлять с помощью **диаграммы направленности**. Для получения диаграммы направленности в волновой зоне необходимо построить сферу с центром в точке нахождения источника. Вдоль прямой, соединяющий источник с некоторой точкой сферы, откладывается отрезок, длина которого равна интенсивности излучения в данном направлении согласно выбранному масштабу. Если перебрать все точки сферы, то конец откладываемого отрезка опишет замкнутую поверхность, охватывающую источник. Данная поверхность является диаграммой направленности.

В случае излучения рассматриваемого диполя диаграмма направленности имеет ось симметрии – это прямая, по которой направлен вектор $\vec{l}_0$. При повороте вокруг этой оси на любой угол диаграмма направленности не меняется. В сечении, проходящем через ось симметрии, диаграмма направленности дает замкнутую кривую типа «восьмерки», ориентированной перпендикулярно вектору $\vec{l}_0$ (см. рис.1.1). Эта кривая позволяет сразу понять характер зависимости интенсивности излучения точечного диполя от угла наблюдения θ.

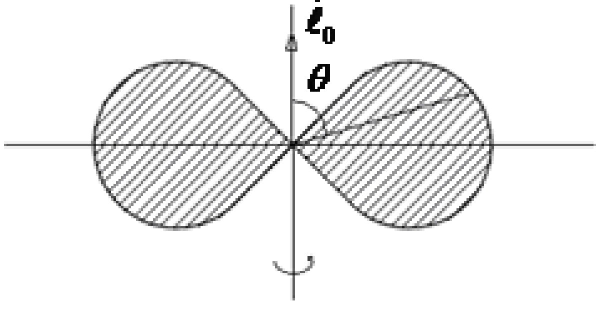

Рис.1.1

Для получения полной диаграммы направленности эту замкнутую кривую необходимо повернуть на угол π вокруг вектора $\vec{l}_0$. Описанная при повороте замкнутой кривой поверхность есть диаграмма направленности диполя.

Задача № 1

Электрический дипольный момент, направленный по оси x , изменяется во времени согласно выражению

$$P(t) = P_0 \cos(\omega t) e^{-\gamma t} \ ,$$

где P_0 - постоянная, ω - частота колебаний диполя и γ - коэффициент затухания колебаний ($\gamma << \omega$ - случай слабого затухания). Считая, что диполь находится в вакууме, определить: 1) зависимость мощности $N(t)$ излучения диполя от времени, 2) среднюю за период $T = 2\pi/\omega$ колебаний мощность $\langle N(t) \rangle$ и 3) нарисовать диаграмму направленности.

Решение

Мгновенная мощность излучения диполя в вакууме

$$N(t) = \frac{\ddot{\vec{p}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \ , \tag{1}$$

где $\vec{p} = (p, 0, 0), \ \ p(t) = p_0 \cos(\omega t) e^{-\gamma t}, \ \ \dot{p} = -\omega p_0 \sin(\omega t) e^{-\gamma t} - \gamma p_0 \cos(\omega t) e^{-\gamma t}$,

$\ddot{p} = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t) e^{-\gamma t} + 2\gamma\omega p_0 \sin(\omega t) e^{-\gamma t} + \gamma^2 p_0 \cos(\omega t) e^{-\gamma t} \approx -\omega^2 p_0 \cos(\omega \cdot t) e^{-\gamma t}$,

поскольку $\omega >> \gamma$. Следовательно, мгновенная мощность излучения описывается формулой

$$N(t) \approx \frac{p_0{}^2 \omega^4 \cos^2(\omega t) e^{-2\gamma t}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}. \tag{2}$$

Средняя за период T мощность

$$\begin{aligned}\langle N(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} N(t) dt = \frac{p_0^2 \omega^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t) \cdot e^{-2\gamma t} dt \right) \approx \\ &\approx \frac{p_0^2 \omega^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3} e^{-2\gamma t} \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt \right) = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} e^{-2\gamma t}.\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь использован тот факт, что ω >> γ и относительно медленно меняющуюся функцию $e^{-2\gamma t}$ можно вынести за знак интеграла. Из формул (2) и (3) видно, что мощность излучения диполя пропорциональна четвертой степени частоты его колебаний и монотонно уменьшается во времени в соответствии с законом уменьшения во времени квадрата амплитуды этих колебаний.

Диаграмма направленности имеет вид, показанный на рис.1. Для ее получения необходимо в плоскости *xoz* нарисовать замкнутую кривую в виде «восьмерки», расположенной вдоль оси *z* и затем повернуть эту кривую вокруг оси симметрии *x* на угол

π. Полученная таким образом замкнутая поверхность есть диаграмма направленности электрического диполя, совершающего гармонические колебания вдоль оси x.

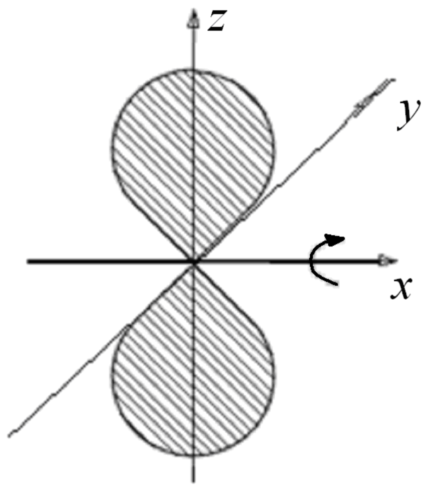

Рис.1

Ответ: $N(t) \approx \dfrac{p_0{}^2\omega^4\cos^2(\omega t)e^{-2\gamma t}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$, $\langle N(t)\rangle = \dfrac{p_0{}^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}e^{-2\gamma t}$.

В дальней волновой зоне локальная пространственная структура излучения может быть описана с помощью **плоской монохроматической электромагнитной волны**. Рассмотрим плоскую монохроматическую электромагнитную волну, линейно поляризованную по оси y и распространяющуюся в положительном направлении оси x в вакууме. Из системы уравнений Максвелла следует, что векторы напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей описываются формулами:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{e}_E E_0 \cos(kx - \omega t + \Phi_0), \quad \vec{H}(x,t) = \vec{e}_H H_0 \cos(kx - \omega t + \Phi_0).$$

Здесь $\vec{e}_E = (0,1,0)$ и $\vec{e}_H = (0,0,1)$ - единичные векторы, определяющие направления векторов напряженности электрического и магнитного поля волны соответственно, при этом вектор $\vec{e}_E$ задает поляризацию волны и называется **вектором поляризации**, E_0 – амплитуда электрического поля, имеющая размерность В/м, H_0 – амплитуда магнитного поля, имеющая размерность А/м, причем для данной волны они связаны между собой соотношением

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}},$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м - электрическая постоянная и $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, $\vec{k} = (k,0,0)$ - волновой вектор, задающий направление распространения волны, $\vec{k}$, $\vec{e}_E$ и $\vec{e}_H$ образуют правую тройку векторов, величина волнового вектора называется **волновым числом** и определяет длину волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k},$$

отношение частоты ω волны к ее волновому числу *k* равно **фазовой скорости волны**

$$\upsilon_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

где $T = 2\pi/\omega$ - период колебаний.

Из этих характеристик видно, что рассматриваемая волна является **поперечной**, поскольку векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ совершают колебания в плоскости, перпендикулярной к волновому вектору $\vec{k}$, задающему направление распространения волны.

Мгновенная плотность энергии электромагнитной волны определяется выражением

$$w = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0 \vec{H}^2}{2} .$$

Отсюда следует, что средняя за период колебаний *T* плотность энергии плоской монохроматической волны в вакууме имеет вид:

$$\langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} + \frac{\mu_0 H_0^2}{4} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{\mu_0 H_0^2}{2} .$$

Интенсивность (средняя плотность потока энергии, переносимой волной через плоскость, перпендикулярную к направлению распространения волны) для плоской монохроматической волны в вакууме имеет вид:

$$J = c\langle w \rangle = c\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = c\frac{\mu_0 H_0^2}{2} .$$

Наряду с энергией плоская монохроматическая волна переносит **импульс**, плотность потока которого описывается формулой

$$\vec{I} = \frac{J}{c}\frac{\vec{k}}{k} = \langle w \rangle \frac{\vec{k}}{k} .$$

Модель плоской монохроматической волны часто используется для оценки характеристик других видов электромагнитного излучения.

Задача № 2

Импульс лазерного излучения, распространяющийся в вакууме, имеет длину волны λ = 1мкм, длительность τ = 1мкс, площадь поперечного сечения σ = 1мм^2 и энергию W = 1Дж. Определить для лазерного импульса: 1)среднюю плотность энергии $\langle w \rangle$, 2) интенсивность *J,* 3) амплитуду E_0 электрического поля и 4) амплитуду H_0 магнитного поля.

Решение

Поскольку продольный и поперечный размеры импульса много больше длины волны излучения, то для приближенной оценки можно считать, что электромагнитное поле равномерно заполняет круговой цилиндр с длиной $l = c\tau$ и площадью поперечного сечения σ (геометрическая модель импульса). Объем *V* этого цилиндра, движущегося со скоростью света в вакууме, равен

$$V = l\sigma = c\tau\sigma = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3. \tag{1}$$

Средняя плотность энергии, распределенной по всему объему цилиндра,

$$\langle w \rangle = \frac{W}{V} = 3{,}3 \cdot 10^3 \text{ Дж/м}^3. \tag{2}$$

Для оценки других характеристик излучение можно рассматривать как ограниченную в пространстве плоскую монохроматическую волну (физическая модель импульса), поэтому интенсивность

$$J = c\langle w \rangle = 10^{12} \text{ Вт/м}^2, \tag{3}$$

амплитуда электрического поля

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\langle w \rangle}{\varepsilon_0}} = 2 \cdot 10^7 \text{ В/м} \tag{4}$$

и амплитуда магнитного поля

$$H_0 = \sqrt{\frac{2\langle w \rangle}{\mu_0}} = 7 \cdot 10^4 \text{ А/м}. \tag{5}$$

Ответ: $\langle w \rangle = 3{,}3 \cdot 10^3$ Дж/м^3, $J = 10^{12}$ Вт/м^2, $E_0 = 2 \cdot 10^7$ В/м, $H_0 = 7 \cdot 10^4$ А/м.

В газах и жидкостях **звуковые волны**, переносящие механические колебания элементов среды, являются продольными и описываются скалярной волновой функцией, которая в случае плоской монохроматической волны, бегущей в положительном направлении оси *x,* имеет вид:

$$\psi = a\cos(kx - \omega t + \Phi_0),$$

где $a = const > 0$ - амплитуда волны, ω - частота волны, λ - длина волны, $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, Φ_0 - начальная фаза волны, $\omega/k = \upsilon_{зв}$ - фазовая скорость звука. При возбуждении звуковой волны в среде возникает дополнительное к постоянному равновесному давлению среды давление

$$p_{зв} = \rho\upsilon_{зв}\frac{\partial\psi}{\partial t} ,$$

действующее вдоль прямой, по которой распространяется волна. Здесь ρ - плотность среды в отсутствие звуковой волны. Это давление обусловлено вынужденными колебаниями частиц среды.

Звуковая волна переносит энергию и соответствующая интенсивность описывается формулой

$$J = \upsilon_{зв}\langle w\rangle = \frac{1}{2}\upsilon_{зв}\rho\omega^2 a^2 ,$$

где $\langle w\rangle = \rho\omega^2 a^2/2$ - средняя плотность энергии звуковой волны, связанная с потенциальной энергией деформированной среды и кинетической энергией, обусловленной колебательным движением элементов среды.

Задача № 3

При какой интенсивности *J* звуковая волна создает в воде амплитуду давления $p_{зв} = 100$ Па, если скорость звука в воде $\upsilon_{зв} = 1500$ м/с и плотность воды ρ = 1г/см^3?

Решение

Для оценки примем, что звуковая волна является плоской монохроматической волной, для которой смещение элементов среды описывается функцией

$$\psi = a\cos(kx - \omega t + \Phi_0) . \qquad (1)$$

В этом случае интенсивность волны

$$J = \frac{1}{2}\upsilon_{зв}\rho\omega^2 a^2 , \qquad (2)$$

а возникающая волна давления имеет вид:

$$p_{зв} = \rho\upsilon_{зв}\frac{\partial\psi}{\partial t} . \qquad (3)$$

Из формул (1) – (3) следует, что амплитуда давления $p_{зв}$, т. е. максимальное изменение давления среды, вызванное звуковой волны, и интенсивность *J* связаны между собой соотношением:

$$J = \frac{p^2_{зв}}{2\rho\upsilon_{зв}}. \qquad (4)$$

Подставляя в формулу (4) $p_{зв} = 100$ Па, $\rho = 10^3$ кг/м^3, $\upsilon_{зв} = 1500$ м/с, получаем

$$J = 3{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/м}^2. \qquad (5)$$

Ответ: $J = 3{,}3 \cdot 10^{-3}$ Вт/м^2.