

Вариант 1

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{4}(x-3)(x^2 + 3x + 6)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(2x+1)(x-1)^2}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \ln(x^2 + 1)$ и построить её график.
4. Расход электропроводника на километр $W = Ar + \frac{B}{r}$, где r – сопротивление в омах, A и B – постоянные. При каком сопротивлении проводник будет наиболее экономным?
5. Найти наибольшее значение функции $y = (x-3)\sqrt{x^2 - 2}$ на отрезке $[\sqrt{2}, 4]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{1+x^3}$ и построить её график.
7. Расстояние между городами A и B равно 160 км. Из них одновременно выезжают два автобуса с одинаковой скоростью 80 км/ч. Первый идет из A в B , а второй – по направлению, составляющему с направлением движения первого угол 60° . Через какое время расстояние между автобусами будет наименьшим?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 2

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = (2-x)(x^2 - x - 2)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(x-3)^2}{x-2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \sqrt{x}(\ln x - 2)$ и построить её график.
4. При подъеме тяжести x человеком на максимально возможную для него высоту мускулы совершают работу $A = bx(1 - \frac{x}{a})$, где a и b – положительные постоянные. При какой тяжести x работа будет наибольшей?
5. Найти наименьшее значение функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ на отрезке $[-4, 2]$.
6. Исследовать функцию $y = \frac{2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{2 - 4x^2}$ и построить её график.
7. Из трех одинаковых досок изготавливается желоб с равнонаклоненными (под углом α) к плоскости дна боками. При каком значении α его объем будет наибольшим?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 3

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}x^2(x+6)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = (x-1)\left(\frac{x+2}{x}\right)^2$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = (x+1)e^{1-x}$ и построить её график.
4. Газовая смесь состоит из окиси азота и кислорода. Найти концентрацию кислорода, при которой окись азота, содержащаяся в смеси, окисляется с максимальной скоростью. Скорость реакции выражается формулой $V = k(100x^2 - x^3)$, где x — концентрация окиси азота (в объемных процентах).
5. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 + 2x + 5}$ на отрезке $[-5, 1]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}$ и построить её график.
7. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью в 294 м^2 и разделить затем этот участок забором на две равные прямоугольные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 4

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = 9x - 6x^2 + x^3$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \ln^2 x$ и построить её график.
4. Сопротивление f дороги движению автомобиля при скорости V км/ч на булыжной мостовой выражается формулой $f = 29 - \frac{2}{3}V + \frac{1}{15}V^2$. Определить скорость V , при которой сопротивление будет наименьшим.
5. Найти наименьшее значение функции $y = e^{2x}(4x^2 - 12x + 9)$ на отрезке $[1, 2]$.
6. Исследовать функцию $y = \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}$ и построить её график.
7. Угол наклона φ наклонной плоскости может меняться от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Найти наименьшую силу, которая удержит груз на этой плоскости при любом φ . Коэффициент трения груза о плоскость равен μ . Масса груза равна m .

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 5

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x-8)(x-2)^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{1+x^2-2x^3}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ и построить её график.
4. В коническом сосуде, заполненном водой, напряжение p , стремящееся разорвать его по образующей, выражается формулой $p = ay(h-y)$, где h – высота сосуда, y – расстояние до уровня жидкости, a – постоянная. На какой глубине y это напряжение будет наибольшим?
5. Найти наименьшее значение функции $y = (x-6)\sqrt{2x^2-16}$ на отрезке $[3, 6]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{2x^3-3x^2}$ и построить её график.
7. Каким должно быть сопротивление r электронагревательного прибора, включенного в цепь тока сопротивлением R , чтобы в нем выделилось максимальное количество тепла?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровне В, С.

Вариант 6

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = (x+1)(x^2+5x+4)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \ln(x+1) + x$ и построить её график.
4. Объем газов, удаляемых из топки котла в дымовую трубу благодаря тяге, может быть выражен формулой $V = a\sqrt{\frac{T_0}{T} - \frac{T_0^2}{T^2}}$, где T – средняя температура газов в трубе, T_0 – (абсолютная) температура воздуха вне трубы, a – постоянная. При каком значении T тяга будет наиболее выгодной?
5. Найти наименьшее значение функции $y = -2x^3 - 9x^2 + 24x + 12$ на отрезке $[0, 2]$.
6. Исследовать функцию $y = \frac{4x^3-3x}{4x^2-1}$ и построить её график.
7. Из листа жести, имеющего форму круга радиуса R , вырезать такой сектор, из которого получается коническая воронка наибольшего объема.

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровне В, С.

Вариант 7

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x-4)(x^2 - 2x - 8)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(x+1)(x-2)^2}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{1}{1+e^x}$ и построить её график.
4. В коническом сосуде, заполненном водой, напряжение q , стремящееся разорвать его по кругу, параллельному основанию, выражается формулой $q = b(h-y)(h+2y)$, где h – высота сосуда, y – расстояние до уровня жидкости, b – постоянная. На какой глубине y это напряжение будет наибольшим?
5. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{3}{2x+3} - \frac{3}{2x-1} + 1$ на отрезке $[-1, 0]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x - 3)^2}$ и построить её график.
7. В точках A и B находятся источники света, один из которых в 8 раз сильнее другого. Найти отношение, в котором отрезок AB делится наименее освещенной его точкой.

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровне В, С.

Вариант 8

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = (x-1)(x+2)^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{2x^2 + 4x + 4}{x+1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \ln(x-1) + \ln(x+1)$ и построить её график.
4. Сопротивление f дороги движению автомобиля при скорости V км/ч на плохом шоссе выражается формулой $f = 28 - 0,25V + 0,02V^2$. Определить скорость V , при которой сопротивление будет наименьшим.
5. Найти наименьшее значение функции $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$ на отрезке $[-2, 5]$.
6. Исследовать функцию $y = \frac{8+4x-x^2}{x^2-4x+16}$ и построить её график.
7. С высоты H над уровнем пола маленький металлический шарик скатывается по гладкому криволинейному желобу. На высоте h желоб обрывается и шарик в дальнейшем совершает свободное падение. В момент отрыва скорость шарика горизонтальна. При каком значении h дальность полета шарика будет наибольшей? Найти её.

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровне В, С.

Вариант 9

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x+2)(8x-x^2-16)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{x^3+x^2+4}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{e^{x-1}}{x}$ и построить её график.
4. Токпроводящий кабель состоит из медного провода с изоляцией. Если через x обозначить отношение радиуса медного провода к толщине изоляции, то скорость телеграфирования $V = Ax \ln \frac{1}{x}$. При каком значении x скорость будет наибольшей?
5. Найти наименьшее значение функции $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$ на отрезке $[0, 4]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$ и построить её график.
7. Окно имеет форму прямоугольника, завершеного сверху полукругом. Периметр окна равен p . Какой должна быть ширина окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 10

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{4}(x-6)(x^2-3x+6)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(x-2)^2}{x-1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = x(\ln x - 1)$ и построить её график.
4. КПД электродвигателя вычисляется по формуле $\eta = \frac{UI - I^2 R - a}{UI}$, где R (Ом) – внутреннее сопротивление, U (В) – напряжение и a (Вт) – потери холостого хода (при напряжении U). При какой величине тока I КПД будет наибольшим?
5. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x+5}$ на отрезке $[-4, -2]$.
6. Исследовать функцию $y = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}$ и построить её график.
7. Бревно длиной в 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна соосную с ним балку с квадратным поперечным сечением, объем которой был бы наибольшим. Какие размеры будет иметь такая балка?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 11

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x^3 - 12x^2 + 36x)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = (1 - x)e^x$ и построить её график.
4. Измерения, произведенные в различных местах реки, покрытой льдом, показали, что скорость воды для разной глубины x реки изменяется по закону $V = bM \ln x + a + kM \ln(t - x)$. На какой глубине скорость течения наибольшая?
5. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{2(x^2 - 5x + 1)}{x^2 + 1}$ на отрезке $[0, 3]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{(x^2 + 4x)^2}$ и построить её график.
7. Прямоугольное кирпичное помещение должно иметь полезную площадь 80 м^2 , толщину одной из стен 60 см , а остальных трех стен – по 40 см . Каковы должны быть наружные размеры этого помещения, чтобы общая занимаемая им площадь была наименьшей?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 12

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = (x + 2)(x - 1)^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = x - \ln(x + 1)$ и построить её график.
4. Если из круглого бревна диаметром d вырезать балку с прямоугольным сечением, основание которого равно x , опереть её на концах и равномерно нагрузить, то её стрела прогиба будет равна $f = \frac{k}{x(d^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Найти значение x , при котором балка обладает наибольшей жесткостью (стрела прогиба f наименьшая).
5. Найти наибольшее значение функции $y = e^{-x}(x^2 + 6x + 9)$ на отрезке $[-2, 0]$.
6. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 + 2x - 35}{x^2 + 2x + 13}$ и построить её график.
7. Каково соотношение между высотой и диаметром основания цилиндрической консервной банки заданного объема V , на изготовление которой затрачено наименьшее количество жести?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 13

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x+2)^2(x+8)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = (x-2)\left(\frac{x+4}{x}\right)^2$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{e^x}{1-e^x}$ и построить её график.
4. Сопротивление f дороги движению автомобиля при скорости V км/ч на хорошем шоссе выражается формулой $f = 24 - \frac{2}{3}V + \frac{1}{30}V^2$. Определить скорость V , при которой сопротивление будет наименьшим.
5. Найти наибольшее значение функции $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 12$ на отрезке $[-2, 5]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x(x+1)^2}$ и построить её график.
7. Требуется вырезать из круглого бревна диаметром d балку прямоугольного сечения наибольшей прочности. Предполагается, что балка будет оперта на концах и равномерно нагружена, а тогда предельная нагрузка, которую она выдерживает, пропорциональна ah^2 (a – основание, h – высота балки).

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 14

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = x^3 + 3x^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{1}{(x-1)e^x}$ и построить её график.
4. Сила натяжения каната, удерживающего груз на наклонной плоскости, равна $F = mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)$, где α – угол наклона плоскости, m – масса груза, μ – коэффициент трения. При каком значении α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) сила натяжения будет наибольшей?
5. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-3} + 2$ на отрезке $[0, 2]$.
6. Исследовать функцию $y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}$ и построить её график.
7. Торшер стоит в углу комнаты размерами 4×3 (метров). Какой высоты должен быть торшер, чтобы освещенность центра пола комнаты была наибольшей?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 15

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x^3 + 6x^2) - 4$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(1-x)(x+2)^2}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = x + \ln x - 1$ и построить её график.
4. Зависимость управленческих расходов R на предприятии от продукции P выражается формулой $R = aP + \frac{b}{c+P} + d$, где a, b, c, d – положительные постоянные. При каком значении P расходы R достигают минимума?
5. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$ на отрезке $[-2, 1]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ и построить её график.
7. Сумма высоты и длины окружности основания цилиндрической почтовой посылки не должна превышать 150 см. Найти размеры наибольшей по объему цилиндрической посылки, которую можно послать почтой.

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 16

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = (x-4)(x-1)^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{2x^2-4x+4}{x-1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \ln(x+1) - \ln(2x)$ и построить её график.
4. Сопротивление f дороги движению автомобиля при скорости V км/ч на мягкой грунтовой дороге выражается формулой $f = 36,5 - \frac{3}{4}V + \frac{1}{30}V^2$. Определить скорость V , при которой сопротивление будет наименьшим.
5. Найти наибольшее значение функции $y = (9-x)\sqrt{2x^2-36}$ на отрезке $[3\sqrt{2}, 8]$.
6. Исследовать функцию $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ и построить её график.
7. Сигнал с корабля можно различить в море на расстоянии 1 мили. Корабль A идет на юг, делая 6 миль в час, и в настоящее время находится в 5 милях к западу от корабля B , который идет на запад со скоростью 8 миль в час. Будут ли корабли на расстоянии, достаточном для приема сигнала?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 17

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(6x - x^2)(x - 6)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{4 + x^2 - x^3}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = x \ln x$ и построить её график.
4. Мощность P , отдаваемая электрическим элементом, определяется формулой $P = \frac{E^2 R}{(r + R)^2}$, где E – постоянная электродвижущая сила элемента, r – постоянное внутреннее сопротивление, R – внешнее сопротивление. Каким должно быть внешнее сопротивление R чтобы мощность P была наибольшей?
5. Найти наименьшее значение функции $y = e^x(x^2 - 6x + 9)$ на отрезке $[0, 2]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ и построить её график.
7. Картина повешена на стене. Нижний её конец на b см, а верхний – на a см выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы рассмотреть картину под наибольшим углом?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровне В, С.

Вариант 18

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = (x - 2)(x^2 - x - 2)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = (x - 1)e^{x+1}$ и построить её график.
4. Сила, которую нужно приложить к лежащему на горизонтальной плоскости грузу, чтобы сдвинуть его с места, вычисляется по формуле $F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$, где α – угол, под которым приложена сила, m – масса груза, μ – коэффициент трения. Под каким углом следует приложить силу, чтобы её величина была наименьшей?
5. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{3}{2x - 1} - \frac{3}{2x - 5}$ на отрезке $[1, 2]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}$ и построить её график.
7. Рычаг второго рода имеет точку опоры в A ; в точке B ($|AB| = a$) подвешен груз P . Вес единицы длины рычага равен k ($P > \frac{ak}{2}$). При какой длине рычага груз P будет уравниваться наименьшей силой?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровне В, С.

Вариант 19

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{4}x(x^2 + 9x + 24)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = (2x - 1)\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = e^{x - \frac{1}{2}x^2}$ и построить её график.
4. Освещенность границы круглой площадки радиуса R помещенным на высоте h над ее центром источником света равна $E = \frac{kh}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$, где k – постоянная. Найти значение h , при котором освещенность границы будет наибольшей.
5. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{2(x^2 - 7x + 7)}{x^2 - 2x + 2}$ на отрезке $[1, 4]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{3x^2 - 2x^3}$ и построить её график.
7. Миноносец стоит на якоре в 9 км от берега. С миноносца посылают гонца в лагерь, расположенный на берегу в 15 км от ближайшей к миноносцу точки берега. Скорость гонца на веслах – 4 км/ч, а на берегу – 5 км/ч. В какой точке берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь как можно быстрее?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 20

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x^3 - 12x - 16)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{2(x^2 - 4x + 5)}{x - 2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$ и построить её график.
4. Объем цилиндрической балки длины l , вырезанной из бревна (имеющего форму усеченного конуса) и соосной с ним, равен $V = al(l - b)^2$, где a и b – положительные постоянные, зависящие от размеров бревна (длина бревна меньше, чем b , но больше, чем $\frac{b}{3}$). При каком значении l объем такой балки будет наибольшим?
5. Найти наименьшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 10$ на отрезке $[-2, 6]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ и построить её график.
7. Нужно огородить плитами цветник, прилегающий к стене. Имеется 400 плит длиной 0,5 м. Ограда делается в форме прямоугольника. Какими должны быть размеры цветника, чтобы его площадь была наибольшей?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 21

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = (x - 3)(3x - x^2)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(2 - x)(x + 4)^2}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = x - x \ln x$ и построить её график.
4. Полезная мощность электродвигателя вычисляется по формуле $P = UI - I^2 R - a$, где R (Ом) - внутреннее сопротивление, U (В) - напряжение и a (Вт) - потери холостого хода (при напряжении U). При какой величине тока I полезная мощность будет наибольшей?
5. Найти наибольшее значение функции $y = e^x(x^2 - x - 1)$ на отрезке $[-3, 0]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{3x - x^3}$ и построить её график.
7. На странице книги печатный текст должен занимать S см². Поля сверху и внизу должны быть по a см, а справа и слева по b см. Найти наиболее экономные размеры бумаги.

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 22

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(x + 2)^2}{x + 1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ и построить её график.
4. Если из круглой пластинки жести радиуса R вырезать сектор с углом α и свернуть из него коническую воронку, то её объем будет равен $V = \frac{R^3 \alpha^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$. При каком значении α объем будет наибольшим?
5. Найти наименьшее значение функции $y = \sqrt[3]{2x(x + 3)^2}$ на отрезке $[-4, 3]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$ и построить её график.
7. Если балка прямоугольного сечения с основанием a и высотой h оперта на концах и равномерно нагружена, то её стрела прогиба обратно пропорциональна ah^3 . Вырезать (т.е. найти a и h) балку из круглого бревна диаметром d наибольшей жесткости (с наименьшей стрелой прогиба).

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 23

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = (x - 2)(x + 1)^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{1}{e^x - 1}$ и построить её график.
4. Площадь застекленной части окна, имеющего форму прямоугольника, завершеного сверху полукругом, равна $S = \frac{1}{2}a\left(p - \frac{\pi + 4}{4}a\right)$, где a – ширина окна, p – его периметр. Меняя a (и сохраняя p постоянным) можно добиться того, что окно будет пропускать наибольшее количество света. Найти соответствующее значение a .
5. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{6}{x - 5} - \frac{6}{x + 3} + 6$ на отрезке $[-1, 3]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$ и построить её график.
7. К бруску, лежащему на горизонтальной плоскости, приложена под углом α сила, обеспечивающая равномерное его движение. При каком значении α величина такой силы будет наименьшей? Коэффициент трения бруска о плоскость равен μ .

Вариант 24

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(12 - x^2)x - 2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{x - 1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{e^{-x}}{1 - x}$ и построить её график.
4. Если в цепь тока сопротивлением R включен электронагревательный прибор сопротивлением r , то количество выделенного в нем тепла находится по формуле $Q = \frac{E^2 r}{(R + r)^2}$ (E – постоянная ЭДС). При каком значении r Q будет наибольшим?
5. Найти наибольшее значение функции $y = -x^3 - 6x^2 - 9x + 6$ на отрезке $[-5, 2]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x)^2}$ и построить её график.
7. Автомобиль выезжает из A в B со скоростью 50 км/ч. В тот же момент из B в перпендикулярном направлении выезжает другой автомобиль с той же скоростью. Найти наименьшее расстояние между автомобилями, если $AB = 100$ км.

Вариант 25

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = x^3 - 3x^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(x+2)(x-4)^2}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = x - 1 - \ln x$ и построить её график.
4. Если из квадратного листа жести со стороной a вырезать по углам равные квадраты со стороной x и, сгибая края, сделать прямоугольную открытую коробку, то её объем равен $V = x(a - 2x)^2$. Найти значение x , при котором объем коробки будет наибольшим.
5. Найти наименьшее значение функции $y = e^{2x}(4x^2 - 2x - 1)$ на отрезке $[-\frac{3}{2}, 1]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x(x-2)^2}$ и построить её график.
7. Транспортное средство поднимает груз вверх по наклонной плоскости с постоянной скоростью. Коэффициент трения груза о плоскость равен μ . При каком угле α наклона плоскости к горизонту необходимая сила тяги будет наибольшей?

Вариант 26

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x^3 + 12x^2 + 36x)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(x+1)^2}{x+2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{e^x}{x+1}$ и построить её график.
4. Затраты на 1 км рейса морского транспорта выражаются формулой $G = \frac{1}{1,85}(\frac{a}{V} + bV^2)$, где V – скорость транспорта (в узлах), a и b – положительные постоянные (они зависят от вида транспорта и стоимости топлива). Найти значение V , при котором затраты на рейс будут наименьшими.
5. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{2(2x^2 - x - 1)}{x^2 + 2x + 2}$ на отрезке $[-1, 2]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x(x-4)}$ и построить её график.
7. В полусферу радиуса a опущен стержень длины $3a$. Найти угол наклона стержня в его положении равновесия (середина стержня занимает самое низкое положение).

Вариант 27

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = 3x - x^3 - 2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \ln(x^2 + 4x + 5)$ и построить её график.
4. Полная поверхность цилиндрической консервной банки заданного объема V равна $S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$, где r – радиус банки. Найти значение r , при котором на изготовление банки пойдет наименьшее количество материала.
5. Найти наибольшее значение функции $y = e^{-x}(x^2 + x - 1)$ на отрезке $[0, 1]$.
6. Исследовать функцию $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ и построить её график.
7. Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты $H = 500$ м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k = 100$ кг/с. Считая, что начальная скорость $V_0 = 0$, ускорение $g = 10$ м/с², и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 28

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x-2)(x^2 + 2x - 8)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{2(x^2 + 4x + 5)}{x + 2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = xe^{2-x}$ и построить её график.
4. Дальность полета x шарика, скатившегося по кривому жёлобу с высоты H до высоты h , вычисляется по формуле $x = 2\sqrt{h(H-h)}$. При каком h дальность x будет наибольшей?
5. Найти наибольшее значение функции $y = \sqrt[3]{2x^2(3-x)}$ на отрезке $[-1, 6]$.
6. Исследовать функцию $y = (x-1)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}$ и построить её график.
7. Цистерна заданного объема V имеет форму (вертикального) цилиндра, завершённого сверху полушаром того же радиуса. При каком радиусе на ее изготовление пойдет наименьшее количество материала?

Задачи 1–5 на уровень А, они обязательны; задачи 6–7 на уровни В, С.

Вариант 29

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{4}(x+2)(x^2 - 5x + 10)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(1-2x)(x+1)^2}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \ln(2x) - \ln(x+2)$ и построить её график.
4. Площадь поперечного сечения специального трубопровода выражается формулой $S = a \sin \alpha (1 + \cos \alpha)$, где a – постоянная, а α – параметр, принимающий значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$. При каком значении α пропускная способность трубопровода будет наибольшей?
5. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}$ на отрезке $[-3, 3]$.
6. Исследовать функцию $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ и построить её график.
7. Какую длину имеет цилиндрическая балка наибольшего объема, которую можно вырезать из бревна (выдержав целостность), имеющего форму усеченного конуса длины 15 м и радиусами оснований 80 см и 30 см?

Вариант 30

РГР «Графики»

1. Исследовать функцию $y = x^3 + 6x^2 + 9x$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{x+1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{e^{-(x+1)}}{x}$ и построить её график.
4. Если из круглого бревна диаметром d вырезать балку с прямоугольным сечением, основание которого равно b , то предельная нагрузка, которую сможет выдержать эта балка (будучи опертой на концах и равномерно нагруженной), равна $P = kb(d^2 - b^2)$, где k – постоянная. Найти значение b , при котором балка обладает наибольшей прочностью (предельная нагрузка P максимальна).
5. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{3}{2x+1} - \frac{3}{2x-3} - 2$ на отрезке $[0, 1]$.
6. Исследовать функцию $y = x\sqrt[3]{x-4}$ и построить её график.
7. На какой высоте нужно пробить отверстие в бочке, наполненной водой, чтобы бьющая из него струя имела наибольшую дальность?