Семинар №1

Динамика материальной точки

В классической нерелятивистской механике, где скорость движения тел считается много меньше скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8\, м/с$, основным законом динамики является II-ой закон Ньютона. Согласно этому закону в инерциальной системе отсчета первая производная импульса $\vec{p}$ тела по времени t равна полной силе $\vec{F}$, действующей на это тело,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \ . \qquad (1.0.1)$$

Здесь $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$, m – инертная масса тела, $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$ - мгновенная скорость тела, $\vec{r}(t)$ - радиус-вектор тела, определяющий его положение в выбранной инерциальной системе отсчета.

При определении мгновенной скорости тела рассматривается как материальная точка, т.е. линейные размеры тела считаются малыми по сравнению с характерными расстояниями решаемой задачи и не учитывается вращательное движение тела.

Если масса тела m при движении сохраняется постоянной, уравнение (1.0.1)упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}) = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \ , \qquad (1.0.2)$$

где $d^2\vec{r}/dt^2$ - мгновенное ускорение тела. Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по времени. Для однозначного определения решения уравнение (1.0.2), т.е. нахождения функции $\vec{r}(t)$, необходимо в некоторый момент времени $t = t_0$ задать два начальных условия:

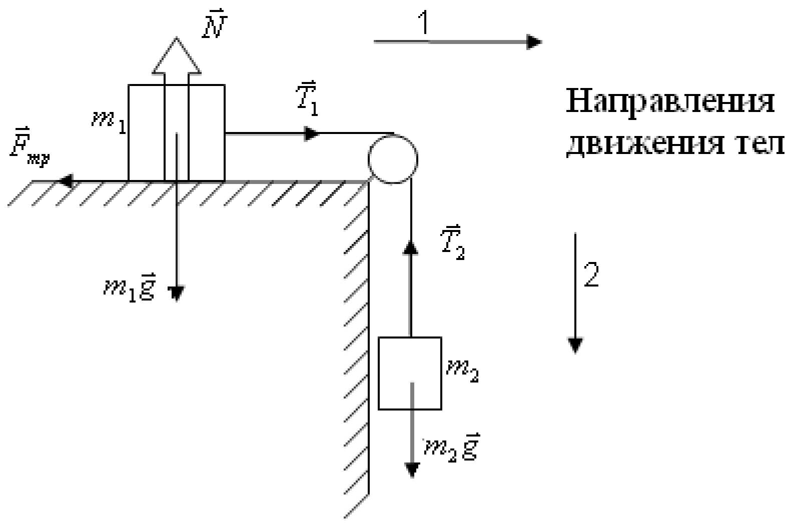
$$\vec{r}\big|_{t=t_0} = \vec{r}_0 \ , \qquad \vec{\upsilon}\big|_{t=t_0} = \vec{\upsilon}_0 \ . \qquad (1.0.3)$$

В этом случае при заданной силе $\vec{F}$ все последующие состояния тела $\vec{r}(t)$, $\vec{\upsilon}(t)$ для $t > t_0$ находятся однозначно.

Определение движения тела по заданным начальным условиям и известной силе называется прямой задачей динамики. В обратной задаче требуется найти силу, которая обеспечивает необходимые характеристики движения тела (это задача управления движением тела).

Задача № 1

Два тела с массами m_1 и m_2 связаны между собой нерастяжимой и невесомой ($m = 0$) нитью, перекинутой через невесомый блок. Коэффициенты трения скольжения между телом 1 и горизонтальной поверхностью $\mu = 0{,}2$. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8\, м/c^2$. Блок считается невесомым. Трением в блоке можно пренебречь. Определить ускорения тел a_1 и a_2, если в начальный момент времени $t = 0$ они были неподвижны. Рассмотреть два случая: 1) $m_1 = 10кг, m_2 = 5кг$;   2) $m_1 = 10кг, m_2 = 1кг$.



Решение

Это прямая задача динамики, где по заданным действующим силам необходимо рассчитать движение тел в системе с кинематическими связями. Решение задачи выполняется с помощью следующего алгоритма.

1. Укажем все силы, которые согласно условиям задачи действуют на тела системы с отличной от нуля массой (движение невесомых тел определяется связями): силы тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$, силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$.

2. Согласно II-ому закону Ньютона запишем в векторной форме уравнения движения тел 1 и 2:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} , \tag{1.1.1}$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + m_2\vec{g} . \tag{1.1.2}$$

3. Поскольку тела движутся вдоль прямых, то удобно перейти от векторных уравнений к одномерным скалярным уравнениям, используя проекции уравнений (1.1.1)-(1.1.2) на направления соответствующих движений:

$$m_1a_1 = T_1 - F_{тр} , \tag{1.1.3}$$

$$0 = m_1g - N , \tag{1.1.4}$$

$$m_2a_2 = m_2g - T_2 . \tag{1.1.5}$$

В полученные 3 уравнения входят 6 неизвестных величин: a_1, a_2, T_1, T_2, N и $F_{тр}$. Для однозначного нахождения всех 6 неизвестных систему уравнений (1.1.3)-(1.1.5) необходимо дополнить еще тремя независимыми уравнениями.

4. Для получения дополнительных уравнений воспользуемся условиями задачи и законами физики.

Поскольку нить нерастяжима, то величины ускорений должны быть одинаковыми

$$a_1 = a_2 = a > 0 \quad . \tag{1.1.6}$$

Нить и блок считаются невесомыми, трение в блоке не учитывается, поэтому величины сил натяжения равны друг другу во всех точках нити

$$T_1 = T_2 = T \quad . \tag{1.1.7}$$

Сила трения имеет различную физическую природу и величину в зависимости от того, движется тело 1 относительно поверхности или нет:

$$F_{тр} = \begin{cases} F_{тр.п.} \ \text{(тело 1 неподвижно)} , \\ F_{тр.ск.} \ \text{(тело 1 движется)} . \end{cases} \tag{1.1.8}$$

Здесь $F_{тр.п.}$ – сила трения покоя и $F_{тр.ск.}$ – сила трения скольжения.

В зависимости от условий задачи возможны два решения.

I. Допустим, что действующие силы обеспечивают движение тел и

$$F_{тр} = F_{тр.ск.} = \mu N \quad . \tag{1.1.9}$$

В этом случае полная система уравнений принимает вид:

$$m_1 a = T - \mu N \quad , \tag{1.1.10}$$

$$0 = m_1 g - N \quad , \tag{1.1.11}$$

$$m_2 a = m_2 g - T \quad . \tag{1.1.12}$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g, \tag{1.1.13}$$

$$T = (1+\mu) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g, \tag{1.1.14}$$

$$N = m_1 g \quad . \tag{1.1.15}$$

Данное решение справедливо, если $a > 0$ или $m_2 > \mu m_1$.

Физический смысл последнего условия заключается в том, что сила тяжести $m_2 g$, действующая на тело 2, должна превышать максимальное значение силы трения покоя $F_{тр.п.} = F_{тр.ск.} = \mu N = \mu m_1 g$, действующей на тело 2 и препятствующей движению.

II. Если $m_2 < \mu m_1$, тела остаются в состоянии покоя и

$$F_{тр} = F_{тр.п.} \quad . \tag{1.1.16}$$

Соответствующая полная система уравнений принимает вид ($a_1 = a_2 = 0$):

$$0 = T - F_{тр.п.} \quad , \tag{1.1.17}$$

$$0 = m_1 g - N \quad , \tag{1.1.18}$$

$$0 = m_2 g - T \quad . \tag{1.1.19}$$

Решение этой системы дает:

$$T = F_{тр.п.} = m_2 g \quad , \tag{1.1.20}$$

$$N = m_1 g \quad .$$

Для $m_1 = 10кг$, $m_2 = 5кг$ и $\mu = 0{,}2$ справедливо условие $m_2 > \mu m_1$, поэтому тела движутся с ускорением

$$a_1 = a_2 = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g = 1{,}96\, м/с^2 \quad . \tag{1.1.21}$$

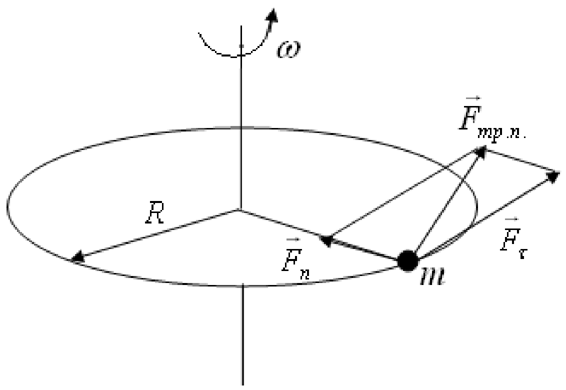
При $m_1 = 10кг$, $m_2 = 1кг$ и $\mu = 0{,}2$ выполняется условие $m_2 < \mu m_1$, сила трения покоя $F_{тр.п.} = m_2 g$ и тела остаются в состоянии покоя

$$a_1 = a_2 = 0 \quad . \tag{1.1.21}$$

Ответ: 1) $a_1 = a_2 = \dfrac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g = 1{,}96\, м/с^2$; 2) $a_1 = a_2 = 0$.

Задача №2

На краю горизонтального диска радиусом $R = 0{,}1м$ неподвижно лежит маленькая шайба. В момент времени $t = 0$ диск начинает вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, с угловым ускорением $\varepsilon = 1\, рад/с^2$. Через какое время t_1 шайба соскользнет с диска, если коэффициент скольжения между шайбой и поверхностью диска $\mu = 0{,}2$?



Угловая скорость ω и угловое ускорение ε определяются следующим образом

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \tag{1.2.1}$$

где φ - угол поворота диска вокруг вертикальной оси.

Шайба совершает ускоренное движение по окружности, где её ускорение $\vec{a}$ удобно представить в виде векторной суммы.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \ . \qquad (1.2.2)$$

Здесь $\vec{a}_\tau$ – тангенциальное ускорение, направленное по касательной к окружности

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} \ . \qquad (1.2.3)$$

где $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к окружности, направленный по вектору скорости $\vec{\upsilon}$. Это ускорение определяет скорость изменения величины скорости υ. Ускорение $\vec{a}_n$ – нормальное ускорение, перпендикулярное к касательной окружности в точке нахождения шайбы и направленное к центру окружности

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n} \ . \qquad (1.2.4)$$

Единичный вектор нормали $\vec{n}$ перпендикулярен к вектору $\vec{\tau}$ и направлен к центру окружности. Нормальное ускорение определяет скорость изменения направления направление $\vec{\upsilon}$.

Решение

Это пример обратной задачи динамики, где по заданному ускорению тела требуется найти необходимую силу.

1. Определим все силы, которые действуют на шайбу согласно условиям задачи: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр.п.}$ (шайба считается неподвижной относительно поверхности диска).

2. Запишем в векторной форме уравнение движения шайбы в лабораторной системе отсчета

$$m\vec{a} = +m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр.п.} \ . \qquad (1.2.5)$$

Поскольку ускорение шайбы в вертикальном направлении равно нулю, то

$$m\vec{g} + \vec{N} = 0 \qquad (1.2.6)$$

и уравнение (1.2.5) упрощается

$$m\vec{a} = \vec{F}_{тр.п.} \ . \qquad (1.2.7)$$

Используя разложение полного ускорения шайбы на тангенциальное $\vec{a}_\tau$ и нормальное $\vec{a}_n$ ускорения, запишем уравнение (1.2.7) в виде

$$m \cdot \vec{a}_\tau = \vec{F}_\tau, \quad m \cdot \vec{a}_n = \vec{F}_n \ , \qquad (1.2.8)$$

где $\vec{F}_{тр.п.} = \vec{F}_n + \vec{F}_\tau$.

3. Перейдем от векторной формы записи уравнения (1.2.8) к скалярной, используя проекции на направления ускорений $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$,

$$ma_\tau = F_\tau, \quad ma_n = F_n \ . \qquad (1.2.9)$$

4. Определим зависимость величины полного ускорения шайбы

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \tag{1.2.10}$$

от времени. Согласно определению

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon \ . \tag{1.2.11}$$

Здесь использована известная формула для линейной скорости материальной точки, движущейся по окружности, $\upsilon = \omega R$. Нормальное ускорение определяется выражением

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R \ ,$$

(1.2.12)

в которое входит неизвестная угловая скорость $\omega(t)$. Для нахождения $\omega(t)$ используем определение углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \ . \tag{1.2.13}$$

Разделим в этом дифференциальном уравнении относительно угловой скорости переменные ω и t

$$\varepsilon \cdot dt = d\omega \tag{1.2.14}$$

и проинтегрируем левую часть по времени от $t = 0$ до текущего момента времени t, а правую часть по угловой скорости от начального значения 0 до текущего значения $\omega(t)$

$$\int_0^t \varepsilon \cdot dt = \int_0^{\omega(t)} d\omega \ . \tag{1.2.15}$$

Выполняя интегрирование

$$\varepsilon \cdot t = \omega(t) \tag{1.2.16}$$

и подставляя (1.2.16) в (1.2.10), найдем, что

$$a_n(t) = \varepsilon^2 R t^2 \ . \tag{1.2.17}$$

Из (1.2.10), (1.2.11) и (1.2.17) следует, что величина полного ускорения

$$a(t) = \sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\varepsilon^4 t^2} \tag{1.2.18}$$

монотонно растет со временем.

5. В соответствии с ростом величины ускорения должна расти сила трения покоя, обеспечивающая это ускорение,

$$F_{тр.п.} = ma(t) = m\sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\varepsilon^4 t^2} \ . \tag{1.2.19}$$

Однако величина силы трения покоя ограничена сверху величиной силы трения скольжения $F_{тр.ск.} = \mu N = \mu mg$

$$F_{тр.п.} \le \mu mg \ , \tag{1.2.20}$$

поэтому условие движения шайбы вместе с диском принимает вид

$$m\sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\varepsilon^4 t^2} \le \mu mg \ . \tag{1.2.21}$$

Отсюда находим, что в момент времени t_1, когда

$$m\sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\varepsilon^4 t_1^2} = \mu mg\ , \qquad (1.2.22)$$

шайба слетит с диска. Таким образом,

$$t_1 = \sqrt[4]{\frac{\mu^2 g^2 - R^2\varepsilon^2}{\varepsilon^4 R^2}} = 4{,}5c. \qquad (1.2.23)$$

Отметим, что при $\mu g < R\varepsilon$ шайба слетит с диска сразу после начала вращения.

Ответ: $t_1 = 4{,}5c.$

Задача №3

Автомобиль массой $m = 2000кг$ движется прямолинейно со скоростью $\upsilon_0 = 72\,км/ч$. В момент времени $t = 0$ на него начинает действовать тормозящая сила, линейно растущая со временем согласно формуле $F_m = \kappa t$, где $\kappa = 10^3\ H/c$. Определите время t_1, необходимое для полной остановки автомобиля, и соответствующий тормозной путь S_1.

Решение

Это прямая задача механики, где по заданной силе необходимо определить движение тела.

1. При $t > 0$ на автомобиль действует единственная горизонтальная сила $\vec{F}_m$, направленная против вектора скорости автомобиля. Векторное уравнение движения автомобиля в горизонтальной плоскости запишется следующим образом:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_m\ . \qquad (1.3.1)$$

2. Перейдем к скалярной форме записи с помощью проекции уравнения (1.3.1) на направление вектора скорости $\vec{\upsilon}$:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -F_m = -\kappa t\ . \qquad (1.3.2)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка по времени относительно неизвестной функции υ.

3. Дифференциальное уравнение (1.3.2) решается методом разделения переменных υ и t:

$$d\upsilon = -\frac{\kappa}{m}tdt\ . \qquad (1.3.3)$$

Проинтегрируем левую часть по скорости от её начального значения υ_0 до текущей величины $\upsilon(t)$, а правую часть по времени от начального момента $t = 0$ до текущего момента времени t

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon(t)} d\upsilon = \int_0^t -\frac{\kappa}{m} t dt = -\frac{\kappa}{m}\int_0^t t dt \quad . \qquad (1.3.4)$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\upsilon(t) - \upsilon_0 = -\frac{\kappa}{m}\frac{t^2}{2} \qquad (1.3.5)$$

или

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 - \frac{\kappa}{m}\frac{t^2}{2} \quad . \qquad (1.3.6)$$

4. В момент остановки автомобиля $t = t_1$

$$\upsilon(t_1) = 0 \ , \qquad (1.3.7)$$

поэтому из (1.3.6) находим, что

$$t_1 = \sqrt{\frac{2m\upsilon_0}{\kappa}} = 8{,}94c \quad . \qquad (1.3.8)$$

5. Тормозной путь S_1 находится с помощью определения величины скорости для прямолинейного движения

$$\upsilon = \frac{dS}{dt}, \qquad (1.3.9)$$

$$dS = \upsilon dt, \qquad (1.3.10)$$

$$\int_0^{S_1} dS = S_1 = \int_0^{t_1} \upsilon \cdot dt = \int_0^{t_1} (\upsilon_0 - \frac{\kappa}{m}\frac{t^2}{2}) dt = \int_0^{t_1} \upsilon_0 dt - \int_0^{t_1} \frac{\kappa}{m}\frac{t^2}{2} dt = \upsilon_0 \int_0^{t_1} dt - \frac{\kappa}{2m}\int_0^{t_1} t^2 dt =$$

$$= \upsilon_0 t_1 - \frac{\kappa}{2m}\frac{t_1^3}{3} = \frac{2}{3}\upsilon_0\sqrt{\frac{2m\upsilon_0}{\kappa}} = 119\text{м}. \qquad (1.3.11)$$

Ответ: $t_1 = 8{,}94c$; $S_1 = 119\text{м}$.