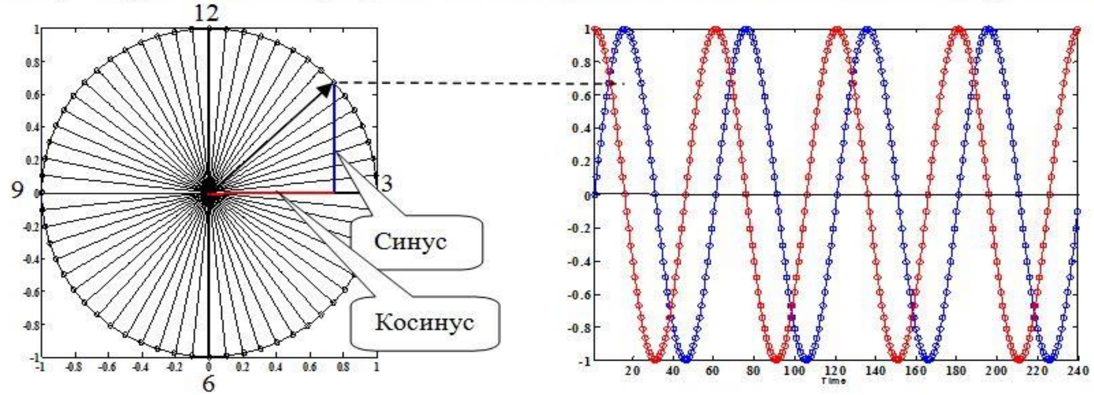
Лекция 16. Ряды Фурье

Жан Бати́ст Жозе́ф Фурье́
21 марта 1768, Осер, Франция - 16 мая 1830, Париж),
французский математик и физик.

Разложение функции в ряд - это один из вариантов разбиения целого на составные части, а конкретно это представление функции в виде суммы некоторых стандартных, то есть заранее известных, функций. Их еще называют базисными. При разложение в ряд Фурье в качестве базисных функций используются так называемые синусоидальные и косинусоидальные функции.

Часы и синусоидальная (синии линии) косинусоидальная (красные линии) функции. Кружки на линиях соответствуют кружкам на левом рисунке, обозначающим последовательные положения стрелки часов



Если при движении стрелки часов измерять расстояние от конца стрелки до горизонтальной линии, проходящей через цифры 9 и 3, то это расстояние меняется как синусоидальная функция времени, а расстояние конца стрелки до вертикальной оси, проходящей через цифры 12 и 6, меняется как косинусоидальная функция времени.

Преобразование Фурье используется почти везде, где есть волны. MP3 формат использует преобразование Фурье для достижения огромного сжатия по сравнению с файлами WAV, которые были до него. MP3 разбивает песню на короткие сегменты. В каждом сегменте преобразование Фурье разбивает аудио волну на составляющие ноты, которые хранятся вместо исходной волны. Преобразование Фурье также говорит нам, сколько и какой ноты используется в песне, чтобы знать, какие ноты важны. Очень высокие ноты не так важны (наши уши едва слышат их), поэтому MP3 выбрасывает их, добиваясь еще большего сжатия данных. Поэтому меломанам не нравится MP3.

Вы можете использовать преобразование Фурье для изображений. Вот отличное видео (https://www.youtube.com/watch?v=QVuU2YCwHjw&feature=youtu.be&t=1m), которое показывает, как можно нарисовать лицо Гомера Симпсона с помощью кругов.

Ученые используют преобразование Фурье для изучения

- ✓ колебаний погружаемых конструкций, взаимодействующих с жидкостями,
- ✓ для предсказывания землетрясений,
- ✓ для определения составных частей очень далеких галактик,
- ✓ для поиска новых физических процессов в тепловых остатках Большого Взрыва,
- ✓ для определения структуры белков,
- ✓ для анализа цифровых сигналов НАСА,
- ✓ для изучения акустики музыкальных инструментов,
- ✓ для уточнения модели круговорота воды,
- ✓ для поиска пульсаров (вращающихся нейтронных звезд),
- ✓ для определения структуры молекул с помощью ядерного магнитного резонанса,
- ✓ для определения фальшивых картин через распознавание химических веществ в краске и т.д.

Определение. *Тригонометрическим рядом* называется функциональный ряд вида

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)} \quad (1)$$

где действительные числа a_0, a_n, b_n (n = 1,2,…) называются *коэффициентами ряда*.

Теорема. *Тригонометрическая система функций*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx \quad (2)$$

является ортогональной на отрезке [–π; π], *т.е. интеграл по этому отрезку от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю, а интеграл по отрезку* [–π; π] *от квадрата любой функции этой системы отличен от нуля.*

Доказательство. Действительно, для любых целых k, $n \neq 0$ ($k \neq n$) имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+n)x}{k+n} + \frac{\sin(k-n)x}{k-n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0. \tag{4}$$

Аналогично

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,dx = 0 \text{ и } \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx = 0. \tag{5}$$

Наконец, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2k}\sin 2kx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2k}\sin 2kx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi, \tag{6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1\,dx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi. \ \blacksquare$$

Теорема. *Если функция* $f(x)$, *интегрируемая на отрезке* $[-\pi;\ \pi]$, *разлагается в тригонометрический ряд*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (7)$$

который можно интегрировать почленно, то это разложение единственно.

Коэффициенты a_0, a_n, b_n ряда (7) определяются по формулам (8), (10), (11) единственным образом.

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,} \qquad (8)$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots} \qquad (10)$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots} \qquad (11)$$

Определение. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$. Тогда числа a_0 , a_n , b_n , найденные по формулам (8), (10), (11), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$. Тригонометрический ряд (1), коэффициенты которого определяются по формулам (8), (10), (11), называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

Для интегрируемой на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции $f(x)$ записывают

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и говорят: функции $f(x)$ соответствует (поставлен в соответствие) её ряд Фурье. Если ряд Фурье сходится, то знак соответствия заменяется знаком равенства.

Определение. Функция $f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на интервалы (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$ так, что на каждом из интервалов функция монотонна.

Теорема (достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье: признак Дирихле). *Если* 2π *периодическая функция* $f(x)$ *является кусочно-монотонной и ограниченной на отрезке* $[-\pi;\ \pi]$ *, то её ряд Фурье сходится во всех точках. Сумма этого ряда равна значению функции* $f(x)$ *в точках непрерывности функции и значению* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ *в точках разрыва.*

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

1) Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. Если функция *четная*, т.е. $f(-x) = f(x)$, то её ряд Фурье имеет вид

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx}, \qquad (12)$$

где $$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n \in \mathrm{N},$$

а коэффициенты Фурье $b_n = 0$.

2) Пусть теперь функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, *нечетная*, т.е. $f(-x) = -f(x)$ то её ряд Фурье имеет вид

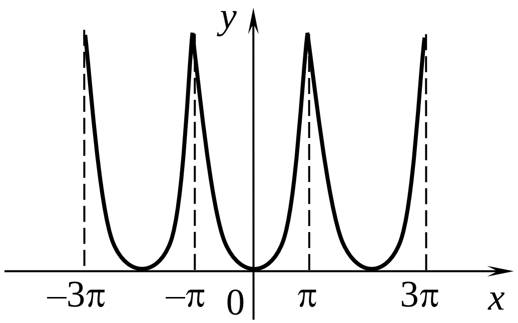
$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,}$$

где $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (13)$$

а коэффициенты Фурье $a_n = 0$.

Таким образом, если функция $f(x)$ четная, то ряд Фурье содержит только косинусы, а если нечетная, то только синусы.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.



◀ Продолжая периодически функцию $f(x)$ на всю вещественную ось, получим функцию $\tilde{f}(x)$, график которой изображен на рисунке. Эта функция 2π-периодическая, непрерывная и ограниченная, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Так как она четная, то её коэффициенты Фурье $b_n = 0$, а a_n находится по формулам (11):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\left. \frac{x^2 \sin nx}{n} \right|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Значит, ряд Фурье данной функции имеет вид

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots \right).$$

Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом

Пусть теперь функция $f(x)$ является периодической с произвольным периодом $2l$, $l \neq 0$. Отметим, что признак Дирихле, сформулированный для 2π-периодических функций, справедлив и для функций с произвольным периодом.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-l; l]$ (где $l > 0$). Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)}, \qquad (14)$$

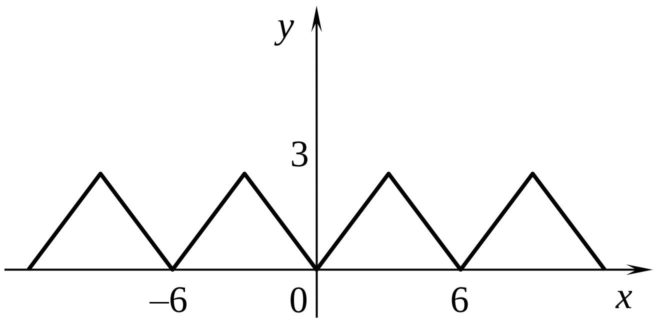
где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1,2,...,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1,2,...$$

Пример. На отрезке [–3; 3] найти тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = |x|$.



◀ Продолжая периодически функцию $f(x)$ на всю вещественную ось, получим функцию $\tilde{f}(x)$, график которой изображен на рисунке. Эта функция периодическая с периодом $2l = 6$, непрерывная и ограниченная, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Кроме того, функция $f(x) = |x|$ – четная, следовательно, все коэффициенты Фурье $b_n = 0$, а коэффициенты a_n вычисляются следующим образом:

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 x dx = \frac{2}{3}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 = 3,$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 x\cos\frac{\pi n x}{3}dx = \frac{2}{3}\left[\left.\frac{3x\sin\frac{\pi n x}{3}}{\pi n}\right|_0^3 - \frac{3}{\pi n}\int_0^3 \sin\frac{\pi n x}{3}dx\right] = \frac{6}{(\pi n)^2}\left.\cos\frac{\pi n x}{3}\right|_0^3 =$$

$$= \frac{6}{(\pi n)^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ четном;} \\ -\dfrac{12}{(\pi n)^2}, & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке [–3; 3] имеет вид:

$$|x| = \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{3} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{3} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{3} + \ldots\right] = \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}}{(2n-1)^2}.$$

Так как функция $\tilde{f}(x)$ удовлетворяет условиям признака Дирихле, то ряд Фурье этой функции во всех точках сходится к значению функции. ▶