Лекция 1. **Дифференциальные уравнения. Основные понятия.**

В случае прямолинейного движения материальной точки массой m и с координатой x, если учесть, что ускорение

$$a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

есть вторая производная координаты по времени t, и предположить, что суммарная сила F, действующая вдоль оси движения, зависит известным образом в общем случае от времени, координаты и скорости $v = \dot{x}$, то, поскольку по 2-ому закону Ньютона $F = ma$, получаем равенство

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}),$$

связывающее время, функцию $x(t)$ и ее производные и представляющее собой, таким образом, *дифференциальное уравнение*. Чтобы найти закон движения $x = x(t)$, необходимо решить это уравнение.

Основные определения

<u>Определение 1</u>. (*Обыкновенным*) *дифференциальным уравнением* называется равенство вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ до производной некоторого порядка n включительно.

<u>Определение 2</u>. Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого уравнения.

<u>Пример</u>. Дифференциальное уравнение

$$y' \sin x + xy^4 - (y''')^2 = 0$$

<u>Определение 3</u>. *Решением* (*частным решением*) дифференциального уравнения на интервале I называется всякая функция $y = \varphi(x)$, при подстановке которой в это уравнение вместе с ее производными, уравнение обращается в тождество относительно $x \in I$.

Если решение дифференциального уравнения задается неявно уравнением $\Phi(x, y) = 0$, то это равенство называют *интегралом* (*частным интегралом*) дифференциального уравнения.

Решить (или, как иногда говорят, *проинтегрировать*) дифференциальное уравнение – означает найти все его решения.

Определение 4. График всякого решения дифференциального уравнения (или кривая на плоскости *xy*, заданная его интегралом) называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Пример. Показать, что кривая, заданная уравнением $y = 3x - \sin 2x$, является интегральной кривой дифференциального уравнения $y'' + 4y = 12x$.

Дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия)

Общий вид *дифференциального уравнения 1-го порядка*:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Выразим из этого уравнения y', если это возможно. В результате придем к уравнению

$$y' = f(x, y), \qquad (2)$$

которое называется *дифференциальным уравнением 1-го порядка, разрешенным относительно производной*.

<u>**Определение 5.**</u> *Начальным условием* для уравнения (2) называется равенство вида

$$y(x_0) = y_0 \qquad (3)$$

(используется также запись $y|_{x=x_0} = y_0$), где x_0, y_0 – заданные числа (*начальные значения*). Геометрически начальные значения определяют точку (x_0, y_0) на плоскости *xy*. Выполнение начального условия (3) для функции $y = y(x)$ означает, что ее график проходит через эту точку.

Определение 6. Задача отыскания решения уравнения (2), удовлетворяющего заданному начальному условию (3), называется *задачей Коши* для этого уравнения.

Геометрически задача Коши состоит в отыскании интегральной кривой уравнения (2), проходящей через заданную точку (x_0, y_0).

Теорема 1 (существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$). *Если функция* $f(x, y)$ *и ее частная производная* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны в некоторой области* D, *то для любой точки* $(x_0, y_0) \in D$ *задача Коши для дифференциального уравнения* $y' = f(x, y)$ *с начальным условием* $y(x_0) = y_0$ *имеет и притом единственное решение*.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что при выполнении ее условий через каждую точку области D (речь идет о геометрическом образе области D на плоскости xy) проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения. Из теоремы следует, что такое дифференциальное уравнение имеет бесконечно много различных решений.

<u>Определение 7</u>. Функция $y=\varphi(x,C)$, зависящая от параметра (произвольной постоянной) C, называется *общим решением* уравнения (2), если:

1) при любом допустимом значении C она является решением этого уравнения;

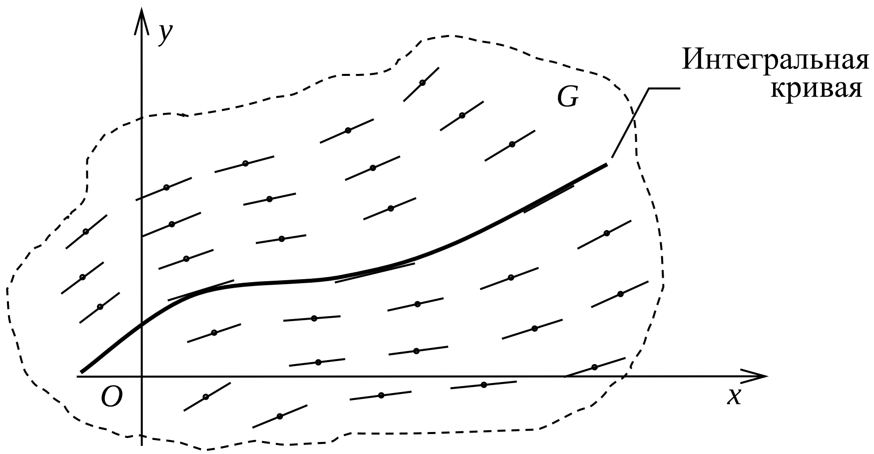
2) любое частное решение уравнения (2) представимо в виде $y=\varphi(x,C_0)$ при некотором значении C_0 этого параметра.

Уравнение $\Phi(x,y,C)=0$, определяющее общее решение уравнения (2) неявно, называют *общим интегралом* дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) представляет собой *семейство* интегральных кривых, зависящее от одного параметра C и «заполняющее» область D.

Графический метод построения интегральных кривых

Пусть G – область определения функции $f(x,y)$ в дифференциальном уравнении $y' = f(x,y)$, точка $P(x,y) \in G$ и $y = y(x)$ – интегральная кривая, проходящая через эту точку. Согласно геометрическому смыслу производной равенство $y' = f(x,y)$ означает, что число $f(P) = f(x,y)$ равно угловому коэффициенту $k = \operatorname{tg}\alpha$ касательной к интегральной кривой в точке P (α – угол наклона касательной). Таким образом, функция $f(x,y)$ определяет в каждой точке множества G направление касательной к проходящей через эту точку интегральной кривой. Небольшой отрезок прямой, проходящий через точку P с углом наклона α, определяемым равенством $\operatorname{tg}\alpha = f(P)$, называют *линейным элементом*. Совокупность всех линейных элементов во множестве G образует *поле направлений*.



Множество всех точек плоскости, в которых направление поля, определяемого уравнением $y' = f(x, y)$, одно и то же, т.е. $y' = k = \text{const}$, называется *изоклиной*. Всякая изоклина задается уравнением $f(x, y) = k$, где k – число, и обычно является некоторой кривой. Построив несколько изоклин для различных значений k и линейные элементы в точках каждой изоклины, направление которых определяется равенством $\operatorname{tg}\alpha = k$, получим поле направлений. Этот способ построения поля направлений, а затем и интегральных кривых, носит название «*метод изоклин*».

Пример. Для уравнения $y' = y + 2 - x^2$ найти изоклину, проходящую через точку $(-1, 0)$, и выяснить направление поля в ее точках.

◀ Уравнение семейства изоклин имеет вид

$$y + 2 - x^2 = k, \text{ где } k \text{ – любое число.}$$

Положив $x = -1$, $y = 0$, найдем $k = 1$, и, следовательно, уравнение искомой изоклины $y + 2 - x^2 = 1$, т.е. изоклиной является парабола $y = x^2 - 1$. Поскольку $k = 1$, то линейные элементы в каждой точке найденной изоклины образуют угол $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 = 45°$ с осью x. ▶

Пример. Методом изоклин построить поле направлений для уравнения $y' = x^2 + y^2$. Построить приблизительно интегральную кривую, проходящую через начало координат.

◀ Уравнение семейства изоклин имеет вид

$$x^2 + y^2 = k \quad (k \geq 0),$$

т.е. изоклины (при $k > 0$) – окружности радиуса $\sqrt{k}$ с центром в начале координат. Зададим для параметра k значения 0, ¼, 1, 4.

Соответствующие изоклины – начало координат и окружности радиусами $\frac{1}{2}$, 1 и 2 соответственно. В начале координат $\operatorname{tg}\alpha = 0$, т.е. линейный элемент направлен по оси x. В точках окружности радиуса $\frac{1}{2}$ из уравнения $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$ находим $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} \approx 14°$; соответственно, для остальных двух окружностей $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = 45°$ и $\alpha = \operatorname{arctg} 4 \approx 76°$. Построив в точках изоклин линейные элементы, получаем поле направлений. Интегральную кривую, проходящую через начало координат, проводим таким образом, чтобы она касалась оси x и, пересекая каждую из построенных окружностей, имела в точках пересечения соответствующий угол α наклона касательной (рис. 4). ►