Лекции 3-4.

Пример:

Вычислить $(1+i\sqrt{3})^{150}$.

Корни *n*-й степени из комплексного числа

Определение. Корнем *n*-ой степени из комплексного числа **z** называется комплексное число ω, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z,\ z \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим уравнение $\omega^n = z,\ z \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\omega = |\omega|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$\omega^n = z$, значит,

$$|\omega|^n(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Отсюда $\left|\omega\right|^n = \left|z\right|$ и $n\varphi_1 = \varphi + 2\pi k,\ k \in Z$. То есть $\left|\omega\right| = \sqrt[n]{\left|z\right|}$ (арифметический корень), $\varphi_1 = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k = 0,1,2...$

Поэтому $\sqrt[n]{z} = \omega$ принимает вид

$$\sqrt[n]{\left|z\right|(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\left|z\right|}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$$

$k = 0,1,2...,\ n-1$

Замечание. Число корней равно числу степени.

Пример. Найти все корни третьей степени из -1.

Решение. Представим число -1 в показательной форме. Очевидно, $\rho = \left|-1\right| = 1$, $\theta = \arg a = \pi$. Следовательно,

$$r = \sqrt[3]{\rho} = \sqrt[3]{1} = 1, \varphi_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\left(k-1\right), k = 1,2,3.$$

Таким образом, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}, \varphi_2 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = \pi, \varphi_3 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$,

$$z_1 = e^{i(\pi/3)} = \cos\left(\pi/3\right) + i\sin\left(\pi/3\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_2 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$z_3 = e^{i(5\pi/3)} = \cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Корни z_1, z_2, z_3 располагаются в вершинах правильного треугольника.

Пример. $z = -8 - 8\sqrt{3}i$. Найти $\sqrt[4]{z}$.

Многочлены в комплексной области.

Определение. *Многочленом (полиномом) n-й степени* от комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$ называется функция вида

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ a_n \neq 0. \qquad (1)$$

Число n называется *степенью* многочлена. Комплексные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами* многочлена, $a_n \neq 0$ называется *старшим коэффициентом*, слагаемое $a_n z^n$ называется *старшим членом*, a_0 называется *свободным членом*.

Примеры. $P_4(z) = z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 2z + 12$ — многочлен четвертой степени; $P_2(z) = 3z^2 + 5z + 12$ — многочлен второй степени, или квадратный трехчлен.

Замечание. Многочлен нулевой степени $P_0(z)$ равен постоянной a_0.

Определение. Уравнение

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0,\ a_n \neq 0 \qquad (2)$$

называется *алгебраическим уравнением* n-й степени.

Определение. Число z_0, для которого $P_n(z_0) = 0$, называется *корнем* многочлена (1) или уравнения (2).

Теорема Гаусса (основная теорема алгебры). *Всякий многочлен ненулевой степени имеет по крайней мере один корень (вообще говоря, комплексный).*

Теорема (Безу). *Число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ в том и только в том случае, когда $P_n(z)$ делится без остатка на двучлен $z - z_0$, т.е.*

$$P_n(z) = (z - z_0) P_{n-1}(z),\ \text{где } P_{n-1}(z) \text{ — многочлен } (n-1)\text{-й степени}.$$

Определение. Если многочлен $P_n(z)$ делится без остатка на $(z - z_0)^k$, но не делится без остатка на $(z - z_0)^{k+1}$, то z_0 называется корнем многочлена $P_n(z)$ кратности k.

Замечание. Теорема Гаусса может быть уточнена. Многочлен n-й степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Определение . Корень z_0 многочлена $P_n(z)$ имеет *кратность* $k \geq 1$, если

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z),\ Q_{n-k}(z_0) \neq 0.$$

Если $k=1$, то корень z_0 называется простым корнем.

Теорема. *Пусть многочлен* $P_n(z)$ *имеет различные корни* $z_1, z_1, \ldots, z_m, m \leq n$, *соответственно кратностей* $k_1, k_2, \ldots, k_m$, $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$. *Тогда его можно разложить на линейные множители:*

$$P_n(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(z-z_m)^{k_m}.$$

Рассмотрим многочлен

$$P_n(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ a_n\neq 0, \tag{1}$$

с действительными коэффициентами $a_0\in\mathbb{R}, a_1\in\mathbb{R},\ldots,a_n\in\mathbb{R}$.

Теорема. *Если коэффициенты* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *многочлена (1) — действительные числа и* $z_0=x_0+iy_0$ *— его комплексный корень, то сопряженное число* $\overline{z}_0=x_0-iy_0$ *— также корень этого многочлена, причем корни* z_0 *и* $\overline{z}_0$ *имеют одинаковую кратность.*

Вернемся к формуле

$$P_n(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(z-z_m)^{k_m}. \tag{2}$$

Пусть z_0– комплексный корень многочлена $P_n\left(z\right)$ кратности $k \geq 1$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 \neq 0$.

$$\left(z - z_0\right)\left(z - \overline{z_0}\right) = z^2 - \left(z_0 + \overline{z_0}\right)z + z \cdot \overline{z_0} = z^2 - 2x_0 z + \left(x_0^2 + y_0^2\right) = \left(z - x_0\right)^2 + y_0^2, \tag{3}$$

$$\left[\left(z - z_0\right)\left(z - \overline{z_0}\right)\right]^k = \left[z^2 - 2x_0 z + \left(x_0^2 + y_0^2\right)\right]^k = \left[\left(z - x_0\right)^2 + y_0^2\right]^k. \tag{4}$$

Введем обозначения $p = -2x_0 = -\left(z_0 + \overline{z}_0\right)$, $q = x_0^2 + y_0^2 = z_0 \overline{z}_0$.

Объединяя скобки с сопряженными корнями в формуле (2) и используя формулы (3), (4), заменим линейные множители с сопряженными корнями степеней k в формуле (2) на соответствующие *квадратичные множители*.

Вывод: если коэффициенты многочлена — действительные числа, то можно разложить этот многочлен в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами. Линейные множители соответствуют действительным корням многочлена. Все квадратичные множители (квадратные трехчлены) имеют отрицательные дискриминанты и соответствуют комплексно сопряженным корням многочлена.

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_l$ – действительные корни многочлена $P\left(z\right)$ кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_l$ соответственно. Пусть многочлен $P\left(z\right)$ имеет s пар комплексно сопряженных корней кратностей $k_{l+1}, \ldots, k_{l+s}$ соответственно. Тогда

$$P_n\left(z\right) = a_n\left(z - z_1\right)^{k_1}\left(z - z_2\right)^{k_2} \cdot \ldots \cdot \left(z - z_l\right)^{k_l}\left(z^2 + p_1 z + q_1\right)^{k_{l+1}} \ldots \left(z^2 + p_s z + q_s\right)^{k_{l+s}},$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_l + 2(k_{l+1} + \ldots + k_{l+s}) = n,\ D_j = \left(p_j\right)^2 - 4q_j < 0,\ j = 1,\ldots,s.$$

Деление многочлена.

Рассмотрим дробно-рациональную функцию

$$\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

где a_i и b_k - действительные коэффициенты.

Если $n \geq m$, то дробь $\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m(x)}$ называется неправильной. Из этой дроби можно выделить целую часть $M_{n-m}\left(x\right)$ и дробь представить в виде:

$$\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{P_r(x)}{Q_m(x)}$$

Примеры.

Пример. Разложить многочлен $P\left(z\right) = z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 2z + 12$ на линейные и квадратичные множители, если известен его корень $-1-i$.

◂ Так как $-1-i$ — корень многочлена с действительными коэффициентами, то $-1+i$ — также корень этого многочлена. В формуле (3) положим $z_0=-1-i$, получим:

$$(z-z_0)(z-\overline{z_0})=(z+1-i)(z+1+i)=(z+1)^2-i^2=z^2+2z+2.$$

Следовательно, многочлен $z^4-3z^3-2z^2+2z+12$ делится без остатка на квадратный трехчлен z^2+2z+2. Выполняя деление, получим

$$z^4-3z^3-2z^2+2z+12=(z^2+2z+2)(z^2-5z+6).$$

Многочлен z^2-5z+6 имеет действительные корни 2 и 3, следовательно,

$$z^2-5z+6=(z-2)(z-3).$$

Окончательно имеем:

$$z^4-3z^3-2z^2+2z+12=(z^2+2z+2)(z-2)(z-3).$$

Ответ: $P(z)=(z^2+2z+2)(z-2)(z-3)$. ▸

Пример. Разложить многочлен $P(z)=z^4+4z^3+6z^2+4z+5$ на линейные и квадратичные множители, если известен его корень $-2+i$.

◂ Так как $-2+i$ — корень многочлена с действительными коэффициентами, то $-2-i$ — также корень этого многочлена. В формуле (3) положим $z_0=-2+i$, получим:

$$(z-z_0)(z-\overline{z_0})=(z+2-i)(z+2+i)=(z+2)^2-i^2=z^2+4z+5.$$

Следовательно, многочлен $z^4+4z^3+6z^2+4z+5$ делится без остатка на квадратный трехчлен z^2+4z+5. Выполняя деление, получим

$$z^4+4z^3+6z^2+4z+5=\left(z^2+4z+5\right)\left(z^2+1\right).$$

Многочлен z^2+1 не имеет действительных корней, следовательно, полученное разложение является окончательным.

Ответ: $P(z)=\left(z^2+4z+5\right)\left(z^2+1\right)$. ▶