Семинар №6

Динамика вращательного движения твердого тела. Закон сохранения момента импульса

Для описания вращения твердого тела вокруг неподвижной оси используется уравнение моментов относительно этой оси

$$\frac{dL}{dt} = M^{внешн}, \quad (6.0.1)$$

где

$$L = I\omega \quad (6.0.2)$$

- момент импульса твердого тела относительно оси вращения, I – момент инерции твердого тела относительно этой оси, ω - угловая скорость вращения твердого тела и $M^{внешн}$ - момент всех внешних сил, действующих на тело, относительно рассматриваемой оси. Согласно третьему закону Ньютона, суммарный момент всех внутренних сил относительно произвольной оси всегда равен нулю.

Если при вращении твердого тела его момент инерции сохраняется постоянным, уравнение моментов относительно неподвижной оси упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon = M^{внешн}, \quad (6.0.3)$$

где

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (6.0.4)$$

-угловое ускорение твердого тела и φ- угол поворота твердого тела вокруг оси вращения.

Из уравнения моментов относительно неподвижной оси следует, что момент импульса относительно этой оси сохраняется постоянным

$$L = I\omega = const, \quad (6.0.5)$$

если полный момент всех внешних сил, действующих на твердое тело, относительно рассматриваемой оси равен нулю

$$M^{внешн} = 0. \quad (6.0.6)$$

Кинетическая энергия K твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, описывается выражением

$$K = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}. \quad (6.0.7)$$

Изменение кинетической энергии K может быть обусловлено работой как внешних, так и внутренних сил.

$$\Delta K = \Delta A^{внешн} + \Delta A^{внутр}. \quad (6.0.8)$$

При повороте абсолютно твердого тела на бесконечно малый угол $\Delta\varphi$ работа внешних сил

$$\Delta A^{внешн} = M^{внешн}\Delta\varphi. \quad (6.0.9)$$

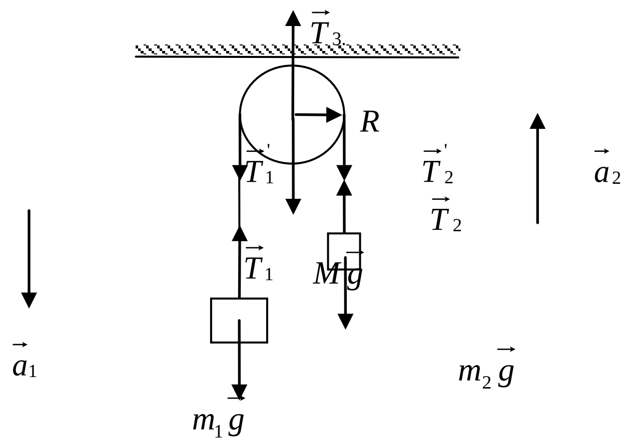
Если полный момент внешних сил, действующих на тело равен нулю, то изменение кинетической энергии вращающегося тела возможно за счет работы внутренних сил, которая меняет момент инерции твердого тела

$$\Delta K = \Delta A^{внутр} = \Delta \frac{L^2}{2I} = -\frac{L^2}{2I^2}\Delta I\,. \tag{6.0.10}$$

Здесь $L = const$, поскольку $M^{внешн} = 0$.

Задача №16

В устройстве, показанном на рисунке, определите ускорения тел с массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), связанных невесомой, нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Блок представляет собой однородный цилиндр с массой M и радиусом R. Нить по блоку не проскальзывает, трение в оси блока пренебрежимо мало. Ускорение свободного падения g.



Решение

1. Определим все силы, действующие на тела системы с отличной от нуля массой: силы тяжести $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $M\vec{g}$, силы натяжения нити $\vec{T}_1, \vec{T}_1', \vec{T}_2, \vec{T}_2', \vec{T}_3$.

2. Запишем в векторной форме уравнения поступательного движения тел 1 и 2

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1, \tag{6.1.1}$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2. \tag{6.1.2}$$

Для блока поступательное движение отсутствует, поэтому

$$M\vec{g} + \vec{T}_1' + \vec{T}_2' + \vec{T}_3 = 0. \tag{6.1.3}$$

Уравнение моментов относительно оси вращения блока, совпадающей с его осью симметрии, имеет вид

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = I\varepsilon = (T_1' - T_2')R, \tag{6.1.4}$$

где момент инерции однородного блока относительно его оси симметрии

$$I = \frac{1}{2}MR^2. \tag{6.1.5}$$

3. Перейдем от векторной фотрмы записи уравнений (1) - (2) к скалярной, используя проекции этих уравнений на направления ускорений тел $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \tag{6.1.6}$$

$$m_2a_2 = -m_2g + T_2 \ , \qquad (6.1.7)$$

$$I\varepsilon = (T_1^{'} - T_2^{'})R \ , \qquad (6.1.8)$$

которая содержит 7 неизвестных величин: $a_1, a_2, \varepsilon, T_1, T_1^{'}, T_2, T_2^{'}$.

4. Получим полную систему из 7 независимых уравнений, используя законы физики и условия задачи.

Благодаря нерастяжимости нити величины ускорений тел одинаковые:

$$a_1 = a_2 = a > 0 \ . \qquad (6.1.9)$$

Поскольку нить не проскальзывает по поверхности блока, то в каждой точке контакта линейные скорости элементов нити υ и поверхности блока ωR равны по величине

$$\upsilon = \omega R \ . \qquad (6.1.10)$$

Отсюда получаем, что величины ускорения a тел и углового ускорения ε блока связаны соотношением

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon \ . \qquad (6.1.11)$$

Согласно условию задачи нить невесомая, поэтому во всех точках нити слева от блока

$$T_1^{'} = T_1 \ , \qquad (6.1.12)$$

и во всех точках нити справа от блока

$$T_2^{'} = T_2 \ . \qquad (6.1.13)$$

На основе уравнений (6.1.6) – (6.1.13) приходим к полной системе из 4 уравнений

$$m_1a_1 = m_1g - T_1, \qquad (6.1.14)$$

$$m_2a_2 = -m_2g + T_2 \ , \qquad (6.1.15)$$

$$I\varepsilon = (T_1^{'} - T_2^{'})R \ , \qquad (6.1.16)$$

$$a = \varepsilon R, \qquad (6.1.17)$$

которая содержит 4 неизвестные величины: $a, \ \varepsilon, \ T_1 \ и \ T_2$.

5. Решая систему уравнений (6.1.14) – (6.1.17), получим

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}g = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \ . \qquad (6.1.18)$$

Согласно полученному результату учет массы блока уменьшает ускорение тел.

Ответ: $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}g$.

Задача №17

Маховик в виде однородного диска массой *m=10 кг* и радиусом *R=0,2* вращается вокруг своей оси симметрии с начальной угловой скоростью $\omega_o = 100 рад/с$. В момент времени *t = 0 к* маховику начинают прижимать две тормозные колодки с силой $F = 50H$ каждая. Коэффициент трения скольжения между маховиком и тормозными колодками $\mu = 0{,}3$. Определите изменение во времени угловой скорости $\omega(t)$ вращения маховика. Через какое время t_1 маховик остановиться?

Решение

Уравнение моментов относительно оси вращения маховика имеет вид

$$I\frac{d\omega}{dt} = -2\mu FR, \tag{6.2.1}$$

где

$$I = \frac{1}{2}mR^2 \tag{6.2.2}$$

-момент инерции маховика относительно его оси симметрии.

Разделим переменные ω и t в дифференциальном уравнении (6.2.1)

$$d\omega = -\frac{2\mu FR}{I}dt \tag{6.2.3}$$

и проинтегрируем левую часть полученного равенства по ω от начальной угловой скорости ω_o до текущей угловой скорости $\omega(t)$, а правую часть по t от начального момента времени $t=0$ до текущего момента t

$$\int_{\omega_o}^{\omega(t)} d\omega = -\frac{2\mu FR}{I}\int_o^t dt \quad . \tag{6.2.4}$$

Выполняя интегрирование, получим зависимость угловой скорости маховика от времени

$$\omega(t) = \omega_o - \frac{2\mu FR}{I}t \quad . \tag{6.2.5}$$

Время t_1, через которое маховик остановится, находится с помощью уравнения

$$\omega(t_1) = 0 \quad . \tag{6.2.6}$$

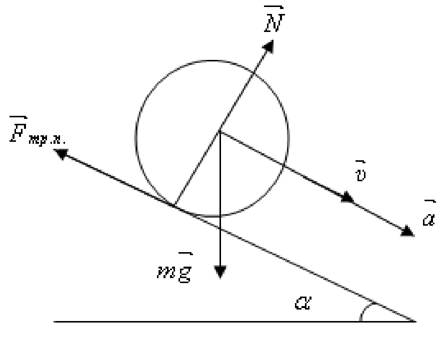
Отсюда следует, что время остановки маховика

$$t_1 = \frac{\omega_o I}{2\mu FR} = \frac{\omega_o mR}{4\mu F} = 3{,}3c \quad . \tag{6.2.7}$$

Ответ: $\omega(t) = \omega_o - \frac{2\mu FR}{I}t$, $t_1 = \frac{\omega_o mR}{4\mu F} = 3{,}3c$

Задача №18

Однородный цилиндр массой m и радиусом R скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона α. Определите ускорение a центра масс цилиндра. Как со временем будет изменяться скорость υ центра масс цилиндра, если его начальная скорость была равна нулю? Ускорение свободного падения g.



Решение

1.Определим все силы, которые действуют на цилиндр согласно условиям задачи: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр.п.}$, поскольку цилиндр скатывается без проскальзывания.

2. Запишем уравнение движения центра масс цилиндра в векторной форме

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр.п.} \ . \qquad (6.3.1)$$

Кроме поступательного движения цилиндр совершает вращение вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью *ω,* которая меняется со временем. Соответствующий вращающий момент создает только сила трения покоя, поскольку векторы силы тяжести и силы реакции опоры проходят через ось вращения и поэтому их вращающие моменты равны нулю.

Поскольку ось вращения перемещается в пространстве таким образом, что все время остается параллельной самой себе в разные моменты времени, то уравнение моментов записывается точно так же, как для неподвижной оси

$$I\frac{d\omega}{dt} = F_{тр.п.}R, \qquad (6.3.2)$$

где

$$I = \frac{1}{2}mR^2 \qquad (6.3.3)$$

- момент инерции однородного цилиндра относительно его оси симметрии.

3. Перейдем от векторной формы записи уравнения (1) к скалярной, используя проекции на направление вектора ускорения $\vec{a}$,

$$ma = mg\sin\alpha - F_{тр.п.}. \qquad (6.3.4)$$

При этом выполняется равенство

$$0 = mg\cos\alpha - N, \qquad (6.3.5)$$

поскольку центр масс цилиндра не имеет ускорения в направлении, перпендикулярном к наклонной плоскости.

Уравнения поступательного (6.3.4), (6.3.5) и вращательного (6.3.2) движения цилиндра содержат 4 неизвестных величины: $a, N, F_{тр.п.}$ и $\varepsilon = d\omega/dt$. Следовательно, на основе условий задачи и законов физики необходимо найти четвертое уравнение, связывающее неизвестные величины.

4. Согласно условиям задачи цилиндр скатывается без проскальзывания, поэтому в области касания поверхности цилиндра с наклонной плоскостью скорость элементов поверхности цилиндра равна нулю

$$\upsilon - \omega R = 0, \qquad (6.3.6)$$

где υ-скорость поступательного движения цилиндра, равная скорости движения центра масс, и ωR- линейная скорость элементов поверхности цилиндра, связанная с его вращением вокруг оси симметрии.

Дифференцируя уравнение (6) по времени, получим связь между величинами линейного ускорения a и углового ускорения цилиндра ε

$$a - \varepsilon R = 0. \qquad (6.3.7)$$

Таким образом, полная система уравнений для 4 неизвестных величин имеет вид:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{тр.п.} \tag{6.3.8}$$

$$0 = mg\cos\alpha - N, \tag{6.3.9}$$

$$I\varepsilon = F_{тр.п.}R, \tag{6.3.10}$$

$$a = \varepsilon R. \tag{6.3.11}$$

5. Решая систему уравнений (6.3.8) – (6.3.11), получим

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{2}{3}g\sin\alpha, \tag{6.3.12}$$

Сила трения покоя не должна превышать силу трения скольжения

$$F_{тр.п.} = \frac{\frac{I}{R^2}mg\sin\alpha}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{1}{3}mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha, \tag{6.3.13}$$

или

$$tg\alpha \le 3\mu \;. \tag{6.3.14}$$

Только при выполнении условия (6.3.14) возможно скатывание цилиндра без проскальзывания.

Ответ: $a = \frac{2}{3}g\sin\alpha$, $tg\alpha \le 3\mu$, μ – коэффициент трения скольжения между цилиндром и наклонной плоскостью.