Лекция 4. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)}, \qquad (3)$$

где *коэффициенты* $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$, а также *правая часть* $b(x)$, предполагаются далее непрерывными функциями на некотором интервале I (коэффициент при $y^{(n)}$ полагается равным 1, т.к. в противном случае все члены уравнения можно на него поделить на интервале, где он отличен от нуля).

Пример. Уравнение

$$\frac{2}{y''' - x^2 y'} = \frac{e^x}{\sin x - xy}$$

приводится к линейному дифференциальному уравнению 3-го порядка

$$y''' - x^2 y' + 2xe^{-x}y = 2e^{-x}\sin x\,. \ \blacktriangleright$$

При изучении линейных уравнений весьма удобно использовать понятие *линейного дифференциального оператора*.

Дифференциальный оператор определяется равенством

$$\boxed{L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y}. \qquad (4)$$

Докажем, что оператор L обладает свойствами *линейности*:

а) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$ для любых y_1 и y_2 из множества всех функций, определенных на интервале I и имеющих на этом интервале непрерывные производные до порядка n включительно;

б) $L(\lambda y) = \lambda L(y)$ для любого y из указанного множества и любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказательство: а) Действительно, ввиду линейности операции дифференцирования

$$(y_1 + y_2)^{(k)} = y_1^{(k)} + y_2^{(k)} \text{ и } (\lambda y)^{(k)} = \lambda y^{(k)} \text{ при } k = 1, 2, \dots n.$$

Поэтому

$$L(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)^{(n)} + a_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + a_n(x)(y_1 + y_2) =$$

$$= y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + a_1(x)(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}) + \dots + a_n(x)(y_1 + y_2) =$$

$$= (y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_1) + (y_2^{(n)} + a_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_2) =$$

$$= L(y_1) + L(y_2)$$

б) $$L(\lambda y)=(\lambda y)^{(n)}+a_1(x)(\lambda y)^{(n-1)}+\ \dots\ +a_n(x)\lambda y=$$
$$=\lambda y^{(n)}+a_1(x)\lambda y^{(n-1)}+\ \dots\ +a_n(x)\lambda y=\lambda(y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ \dots\ +a_n(x)y)=$$
$$=\lambda L(y).\ \blacksquare$$

Оператор, удовлетворяющий условиям а) и б), называется *линейным*. Таким образом, оператор L является *линейным дифференциальным оператором*.

Используя обозначение линейного дифференциального оператора, уравнение

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ \dots\ +a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=b(x)$$

можно теперь записать короче в виде

$$L(y)=b(x).$$

Однородные линейные дифференциальные уравнения

Если $b(x)\equiv 0$ на I, то уравнение (3) имеет вид

$$\boxed{y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ \dots\ +a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0} \qquad (5)$$

(или короче $L(y)=0$) и называется *однородным*; в противном случае это уравнение называется *неоднородным*.

Свойства множества решений однородного линейного дифференциального уравнения (о.л.д.у.):

1) *если* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *– какие-нибудь два решения о.л.д.у., то их сумма* y_1+y_2 *также есть решение этого уравнения*;

Доказательство: Действительно, если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – какие-нибудь два решения уравнения (5), то $L(y_1)\equiv 0$ и $L(y_2)\equiv 0$ на *I*; поэтому, ввиду линейности оператора *L*

$$L(y_1+y_2)\equiv L(y_1)+L(y_2)\equiv 0+0\equiv 0,$$

т.е. y_1+y_2 – решение уравнения (5).

2) *если* $y(x)$ *– какое-нибудь решение о.л.д.у. и C – любое число, то их произведение* Cy *также есть решение этого уравнения*.

Доказательство: Если $y(x)$ – какое-нибудь решение уравнения (5), то $L(Cy)\equiv CL(y)\equiv C\cdot 0\equiv 0$, т.е. Cy – решение уравнения (5).

Следствие 1. *Если* $y_1,y_2,\dots,y_m$ *– решения о.л.д.у. и* $C_1,C_2,\dots,C_m$ *– произвольные числа, то функция* $C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_my_m$ *также является решением этого уравнения.*

Линейная зависимость системы функций.

Пусть дана совокупность (*система*) m функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$, определенных на некотором промежутке *I*.

Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – произвольные числа, то функция

$$\boxed{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k}$$

называется *линейной комбинацией* функций $y_1, y_2, \cdots, y_m$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – *коэффициентами* этой линейной комбинации.

<u>Определение</u>. Система функций $y_1, y_2, \cdots, y_m$ называется *линейно зависимой на промежутке I*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не все равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m = 0 \quad \forall x \in I \;;$$

если же это равенство возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то система называется *линейно независимой*.

Необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы функций.

Для линейной зависимости системы, содержащей более одной функции, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из этих функций являлась линейной комбинацией остальных.

Две функции y_1 и y_2 ($y_2 \neq 0$), в частности, тогда и только тогда линейно зависимы, когда $\frac{y_1}{y_2} = \text{const}$.

<u>Пример</u>. а) Система функций $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = 2x - 5$ линейно зависима на любом промежутке, поскольку, например, при $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 1$ имеем $5y_1 - 2y_2 + y_3 \equiv 0$ (или y_3 является линейной комбинацией y_1 и y_2: $y_3 = 2y_2 - 5y_1$);

б) функции $0, \sin x, \ln x$ линейно зависимы на $(0, +\infty)$, так как $1 \cdot 0 + 0 \cdot \sin x + 0 \cdot \ln x = 0$ $\forall x \in (0, +\infty)$ (или $y_1 = 0 = 0 \cdot \sin x + 0 \cdot \ln x$). ▶

Предположим теперь, что функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ дифференцируемы $(m-1)$ раз.

<u>Определение</u>. *Вронскианом* (*определителем Вроньского*) *системы функций* $y_1, y_2, \cdots, y_m$ называется функциональный определитель, составленный из этих функций и их производных до $(m-1)$-го порядка включительно, вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_m' \\ . & . & . & . \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}.$$

<u>**Теорема 1**</u> (необходимое условие линейной зависимости системы функций). *Если система* $y_1, y_2, \cdots, y_m$ $(m-1)$ *раз дифференцируемых функций линейно зависима на интервале I, то ее вронскиан тождественно равен нулю на этом интервале.*

Доказательство: Если система $y_1, y_2, \cdots, y_m$ линейно зависима на интервале *I*, то $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m \equiv 0$ на *I*, где среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ есть неравные нулю. Продифференцировав это тождество $(m-1)$ раз, получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_m y_m' \equiv 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \alpha_1 y_1^{(m-1)} + \alpha_2 y_2^{(m-1)} + \ldots + \alpha_m y_m^{(m-1)} \equiv 0. \end{cases}$$

Если рассматривать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ как неизвестные, то эта система при каждом $x \in I$ является однородной системой m линейных уравнений с m неизвестными, которая имеет ненулевое решение. Но тогда ее определитель, совпадающий с вронскианом $W(x)$, согласно условию существования ненулевого решения у однородной системы $m \times m$ равен нулю. ■

<u>Следствие 1</u> (достаточное условие линейной независимости системы функций). *Если хотя бы в одной точке интервала I вронскиан системы* $y_1, y_2, \cdots, y_m$ *отличен от нуля, то эта система линейно независима на I.*

Замечание: Тождественное равенство вронскиана нулю является лишь необходимым условием линейной зависимости, т.е. из $W(x) \equiv 0$ на интервале *I*, вообще говоря, не следует, что система линейно зависима на этом интервале.

Замечание: если система функций не произвольна, а состоит из решений однородного линейного дифференциального уравнения, то, как показывает следующая теорема, обращение вронскиана в нуль даже хотя бы в одной точке необходимо и достаточно для ее линейной зависимости.

Теорема 2 (необходимые и достаточные условия линейной зависимости решений однородного линейного дифференциального уравнения). *Пусть функции* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *являются решениями некоторого однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка, коэффициенты которого непрерывны на интервале I, и* $W(x)$ *– их вронскиан. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *функции* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *линейно зависимы на интервале I*;

2) $W(x)$ *равен нулю тождественно на I*;

3) $W(x)$ *равен нулю хотя бы в одной точке* $x_0 \in I$.

Следствие 2 (необходимое и достаточное условие линейной независимости решений однородного линейного дифференциального уравнения). *Для того чтобы n решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка были линейно независимы на интервале I непрерывности коэффициентов этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан не обращался в нуль на этом интервале.*

Вывод: Таким образом, для вронскиана n решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка возможны лишь две альтернативы – либо он тождественно равен нулю на интервале I (и в этом случае решения линейно зависимы), либо он не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала (и в этом случае решения линейно независимы).