Лекция 3

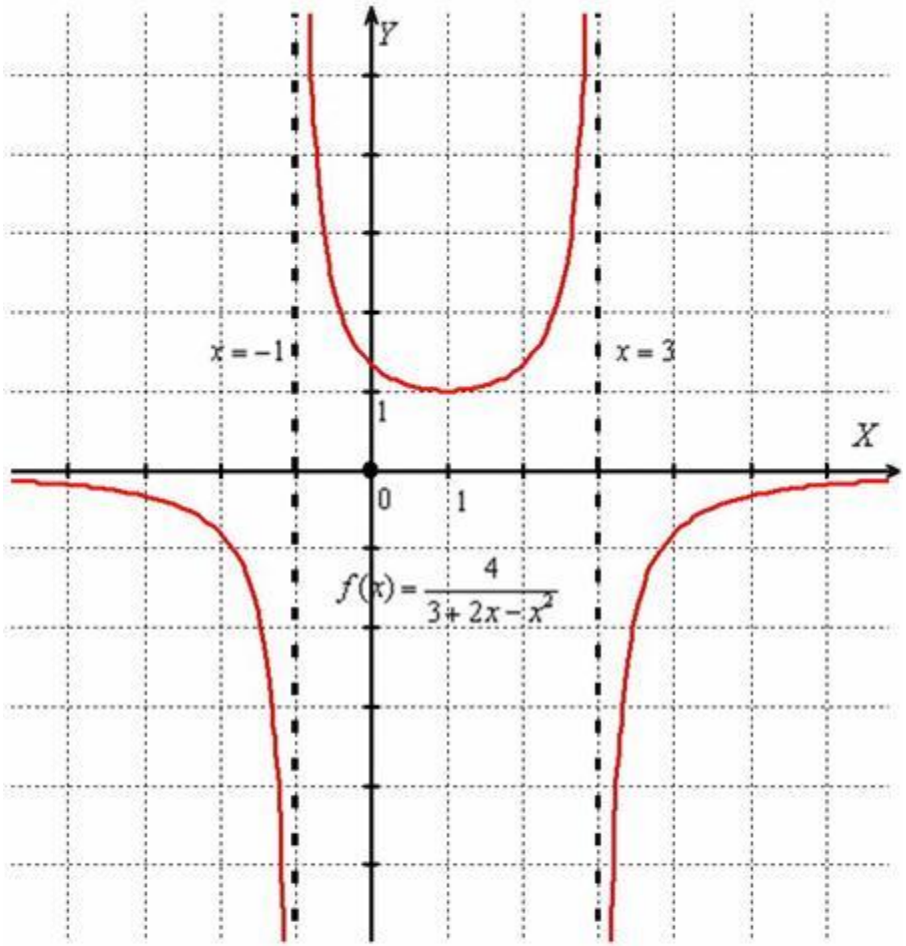
Асимптота кривой. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции

Определение. Прямая l называется *асимптотой* данной кривой, если расстояние от точки M этой кривой до прямой l стремится к нулю при неограниченном удалении точки M по кривой (т.е. при $OM \to +\infty$, где O – некоторая фиксированная точка).

График функции $y = f(x)$ может иметь вертикальные асимптоты $x = a$ и наклонные асимптоты $y = kx + b$. Если $k = 0$, то наклонные асимптоты превращаются в горизонтальные с уравнением $y = b$.

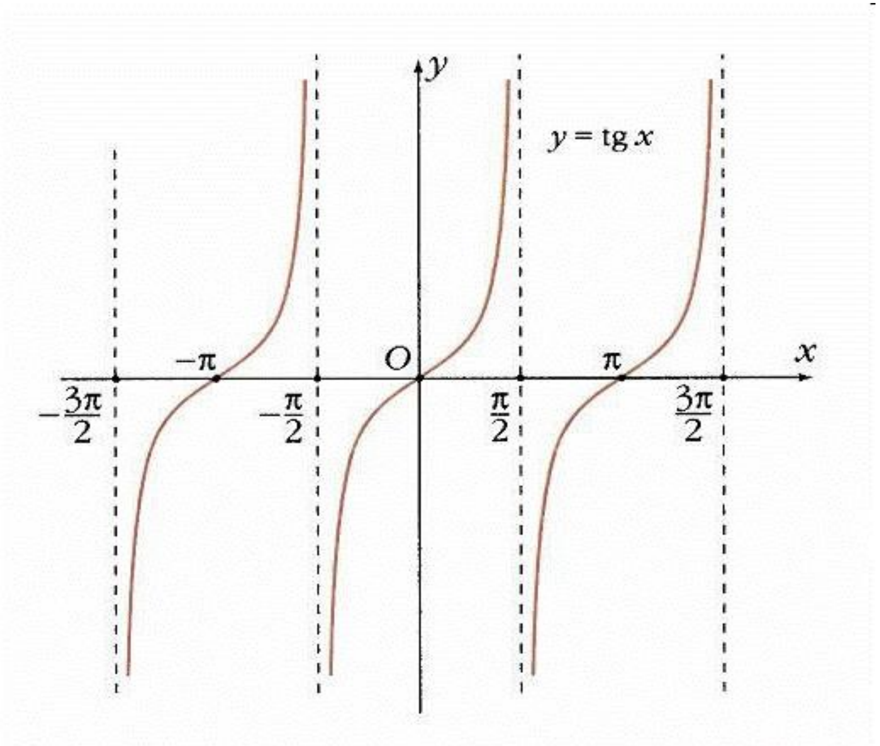
Для существования вертикальной асимптоты $x = a$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$ был равен ∞. При этом либо в точке a функция $y = f(x)$ имеет разрыв второго рода, либо точка a является граничной точкой области определения функции.

Пример. $y=\dfrac{4}{(3-x)(x+1)}$. Вертикальные асимптоты $x=-1$, $x=3$.



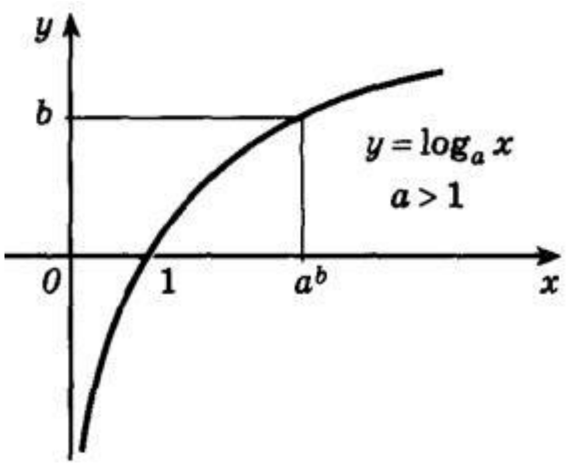
Пример. $y = \operatorname{tg} x$.

Вертикальные асимптоты $x = \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.



Пример. $y = \log_a x$, $a > 1$.

$\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = -\infty$, асимптота $x = 0$, $x = 0$ является граничной точкой области определения функции.



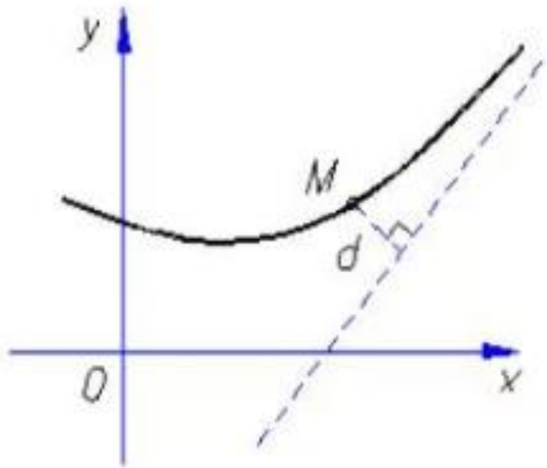
Теорема.

1) *Для существования правой (при* $x \to +\infty$*) наклонной асимптоты* $y = kx + b$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ *и* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right) = b.$

2*) Для существования левой (при* $x \to -\infty$*) наклонной асимптоты* $y = kx + b$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ *и* $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - kx \right) = b.$

Замечание. Если хотя бы один из указанных пределов не существует или является бесконечным, то график функции не имеет соответствующей асимптоты.

Замечание. Указанные в пунктах 1) и 2) теоремы пределы различны, вообще говоря, при $x \to +\infty$ (для правой асимптоты) и при $x \to -\infty$ (для левой асимптоты)



Доказательство. Пусть существует правая асимптота $y = kx + b$ кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Расстояние d от точки $M(x, f(x))$ до прямой $y - kx - b = 0$ равно $\dfrac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1+k^2}}$ и стремится к нулю в силу определения асимптоты. Условие $d \to 0$ при $x \to +\infty$ эквивалентно существованию предела $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (kx + b) \right] = 0$, или представлению $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to +\infty$. Тогда $\dfrac{f(x)}{x} = k + \dfrac{b}{x} + \dfrac{\alpha(x)}{x}$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k+\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x}=k.$$ Если k конечно, то $b+\alpha(x)=f(x)-kx$, откуда, переходя к пределу получаем, что $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2-8x+20}{x-4}$.

- Так как $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+20}{x-4}=\infty$, то прямая $x=4$ является вертикальной асимптотой графика.

Найдем наклонную асимптоту:

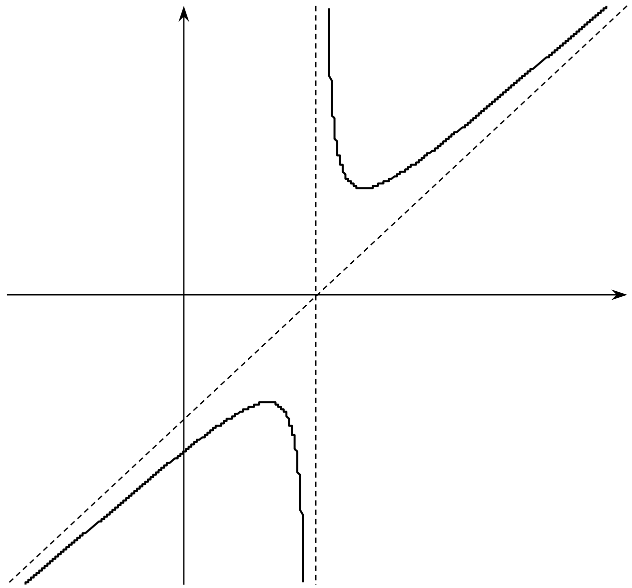
- $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-8x+20}{x(x-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-8x+20}{x^2-4x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-8x+20}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-8x+20-x^2+4x}{x-4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+20}{x-4}=-4.$$

Таким образом, $y = x - 4$ – наклонная асимптота графика.

Ответ: $x = 4$, $y = x - 4$. ▸



Пример. Найти асимптоты графика функции $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$.

Функция является непрерывной на всей числовой прямой и ее график не имеет вертикальных асимптот.

Найдем наклонную асимптоту.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\underset{x\to\infty}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)}}-1\right)==\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(-\frac{1}{3}x\right)=-\frac{1}{3}.$$

Мы воспользовались здесь эквивалентностью

$$\left(1+t\right)^{\alpha}-1\sim\alpha t,\ t\to 0,\ \text{где } \alpha=\frac{1}{3}, t=-\frac{1}{x}.$$

Таким образом, график функции имеет наклонную асимптоту $y=x-1/3$.

Пример . $y=\dfrac{4}{(3-x)(x+1)}$.

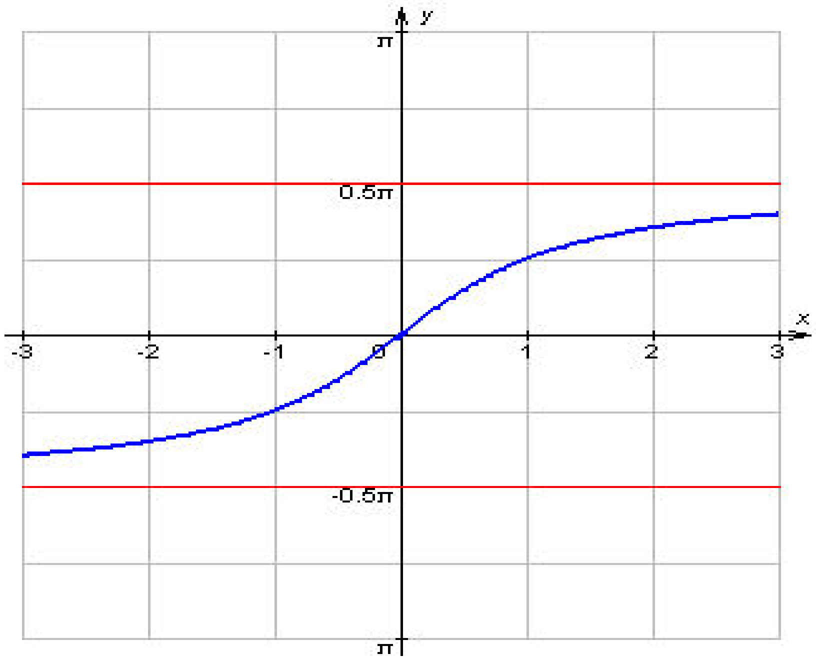
Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{(3-x)(x+1)}=0$, график имеет горизонтальную асимптоту $y=0$.

Пример. $y=e^{1/x}$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}e^{1/x}=1$, график имеет горизонтальную асимптоту $y=1$.

Пример. $y = \operatorname{arctg} x$.

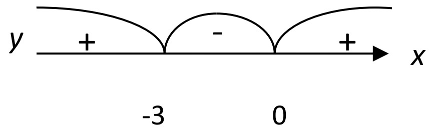
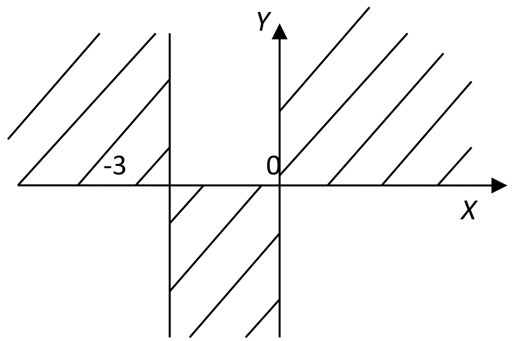
Поскольку $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\dfrac{\pi}{2}$, то график функции имеет левую асимптоту $y = -\dfrac{\pi}{2}$ и правую асимптоту $y = \dfrac{\pi}{2}$.

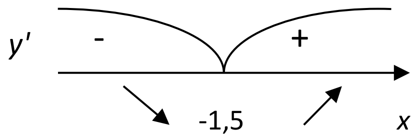


План исследования функции с помощью производной и построение графика по данному исследованию

Для построения графика функции используем следующий план исследования. В левом столбце таблицы предложен общий план. В правом столбце таблицы приведен пример исследования конкретной функции $y = x^2 + 3x$.

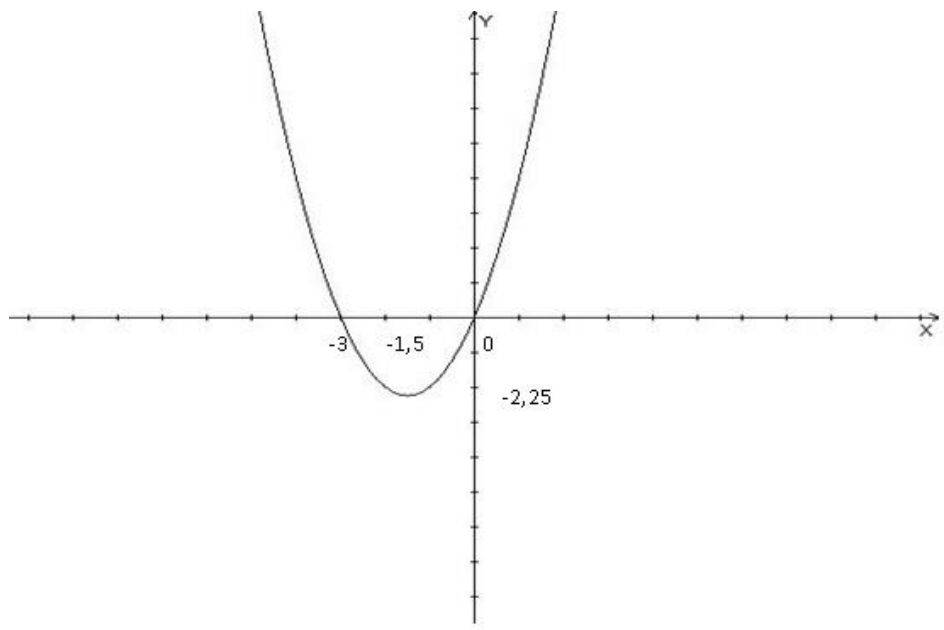
	$y = f(x)$	$y = x^2 + 3x$
1.	Область определения функции.	$x \in R$.
2.	Свойства функции: четная или нечетная, периодическая.	$f(-x) = (-x)^2 - 3x = x^2 - 3x$ $f(-x) \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$ значит, функция общего вида.
3.	Нули функции и интервалы ее знакопостоянства.	Находим нули функции: $x^2 + 3x = 0$; $x(x+3) = 0$; $x = 0 \quad x = -3$ Интервалы знакопостоянства:

		 Следовательно, график функции при $x \in (-\infty; -3);\ x \in (0; +\infty)$ лежит выше оси Ox, а при $x \in (-3; 0)$ график функции лежит ниже оси Ox. 
4.	Вертикальные асимптоты.	Точек разрыва нет, поэтому вертикальных асимптот нет
5.	Наклонные асимптоты.	$y = kx + b$

		Найдем k: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+3x}{x} = \infty$, значит, наклонных асимптот нет. (Функция является многочленом, следовательно, асимптот нет)
6.	Критические точки, интервалы монотонности, точки экстремума, экстремумы	Вычислим первую производную: $f'(x) = 2x+3$. Найдем критические точки $2x+3=0$. $x=-1{,}5$. Определим интервалы возрастания и убывания:  Значит, $x=-1{,}5$ - точка минимума. $f(-1{,}5) = -2{,}25$ - минимум функции.

7.	Интервалы выпуклости вниз (вверх), точки перегиба	Для нахождения интервалов выпуклости вниз (вверх) исследуем знак второй производной: $f''(x) = 2 > 0$, значит, график функции выпуклый вниз на всей области определения функции, точек перегиба нет.

По результатам исследования построим график функции $y = x^2 + 3x$.



Пример. Исследовать функцию $y=\dfrac{(x-1)^2}{x-3}$ и построить ее график.

1) Область определения функции: $x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$

2) Выясним, является ли функция четной или нечетной:

$f(-x)=\dfrac{(-x-1)^2}{-x-3}$;

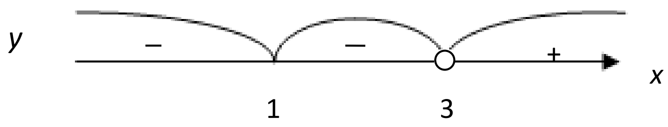
$f(-x)\neq f(x)$; $f(-x)\neq -f(x)$, значит, функция общего вида.

3) Найдем нули функции:

$\dfrac{(x-1)^2}{x-3}=0$;

$x=1$

Найдем интервалы знакопостоянства функции:



4) Найдем вертикальные асимптоты.

Так как $x=3$ точка разрыва, найдем $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{(x-1)^2}{x-3}=\pm\infty$,

значит, $x=3$ - вертикальная асимптота.

5) Найдем наклонные асимптоты:

Общий вид уравнения асимптоты $y=kx+b$

Найдем k:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{(x-3)x}=1,$$

найдем b:

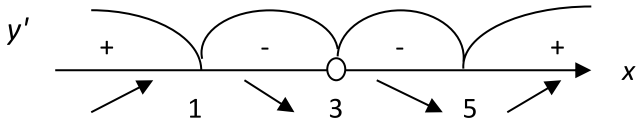
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)^2}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1-x^2+3x}{x-3}=1.$$

значит, $y=x+1$ - наклонная асимптота.

6) Найдем критические точки:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x-3)-(x-1)^2}{(x-3)^2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}=0;$$

$x=1$; $x=5$



Следовательно, функция возрастает при $x \in (-\infty; 1);\ x \in (5; +\infty)$ и убывает при $x \in (1; 3);\ \ x \in (3; 5)$.

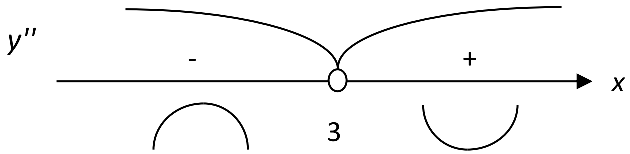
$x = 1$ - точка максимума, $f(1) = 0$ - максимум функции.

$x = 5$ - точка минимума, $f(5) = 8$ - минимум функции.

7) Найдем интервалы выпуклости вниз и вверх графика функции:

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - 2(x-3)(x^2-6x+5)}{(x-3)^4} = \frac{8}{(x-3)^3} \neq 0,$$

значит, точек перегиба нет.



Из этого следует, что график выпуклый вверх при $x \in (-\infty; 3)$ и выпуклый вниз при $x \in (3; +\infty)$.

Построим график функции.