

Семинар №4  
**Затухающие колебания с вязким трением.  
Вынужденные колебания и явление резонанса**

Рассмотренные на семинаре №3 свободные незатухающие гармонические колебания происходят в малой окрестности устойчивого положения равновесия под действием консервативной возвращающей силы, величина которой линейно растёт со смещением частицы относительно положения равновесия.

Если учесть действия на частицу силы вязкого трения

$$\vec{F}_{\text{в.тр.}} = -\Gamma \times \vec{v} , \quad (4.0.1)$$

где  $\vec{v}$  - скорость частицы и  $\Gamma > 0$  - константа, зависящая от свойств частицы и среды, то уравнение движения частицы вдоль оси  $x$  с учетом возвращающей силы записывается следующим образом:

$$m\ddot{x} + kx + \Gamma\dot{x} = 0 , \quad (4.0.2)$$

где точка сверху означает производную смещения  $x$  по времени  $t$ . Смещение  $x$  отсчитывается от устойчивого положения равновесия частицы в точке  $x=0$ .

Уравнение движения гармонического осциллятора с вязким трением можно записать в стандартной формуле:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} = \omega_0^2 = 0 . \quad (4.0.3)$$

где  $2\gamma = \frac{\Gamma}{m}$  и  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Это однородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по времени. Для однозначного решения данного уравнения необходимо в начальный момент времени задать два начальных условия: положение частицы и её скорость.

Если выполняется условие  $\gamma < \omega_0$ , решение полученного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0) , \quad (4.0.4)$$

где  $A(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$  и  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ . Постоянные  $A_0 > 0$  и  $\varphi_0$  находятся с помощью двух начальных условий.

Таким образом, наличие силы вязкости трения приводит к экспоненциальному уменьшению во времени амплитуды колебаний гармонического осциллятора и сдвигу частоты собственных колебаний. Полная механическая энергия гармонического осциллятора уменьшается во времени по экспоненциальному закону:

$$E(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E^0 e^{-2\gamma t} , \quad (4.0.5)$$

где  $E_0$  - полная механическая энергия гармонического осциллятора в начальный момент времени и  $\gamma \ll \omega_0$  (слабое затухание). Уменьшение во время амплитуды колебаний описывается с помощью коэффициента затухания  $\gamma$  и логарифмического декремента затухания

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T_0)} = \gamma T_0 , \quad (4.0.6)$$

где  $T_0$  - период гармонических колебаний при  $\gamma = 0$  и  $\gamma \ll \omega_0$ .

Уменьшение во время полной механической энергии гармонического осциллятора определяется добротностью

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t + T_0)} = \frac{\pi}{\gamma T_0}, \quad (4.0.7)$$

где  $E(t)$  – полная механическая энергии осциллятора в момент времени  $t$  и  $\gamma \ll \omega_0$ . Механическая энергия преобразуется в энергию теплового движения за счёт работы силы вязкого трения.

#### Задача 10

Амплитуда гармонических колебаний груза массой  $m=0,1$ кг, подвешенного на пружине с жесткостью  $k=20$ Н/м уменьшилась в 2 раза за 1 минуту. Определите добротность  $Q$  этой колебательной системы.

Решение.

Согласно определению добротности  $Q$  как характеристики уменьшения во времени энергии  $E$  колебательной системы

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{|E(t + T_0) - E(t)|}, \quad (4.1.1)$$

где  $E(t)$  – энергия колебательной системы в момент времени  $t$ ,  $T_0$  – период колебаний.

В случае слабого затухания, когда коэффициент затухания  $\gamma \ll \omega_0$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  – круговая частота колебаний, полная энергия уменьшается со временем по экспоненциальному закону

$$E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}. \quad (4.1.2)$$

Здесь  $E_0$  – энергия колебательной системы в момент времени  $t=0$ .

С помощью (4.1.2) выражение (4.1.1) для добротности преобразуется к виду

$$Q = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\gamma t}}{|E_0 e^{-2\gamma(t+T_0)} - E_0 e^{-2\gamma t}|} = 2\pi \frac{1}{|e^{-2\gamma T_0} - 1|} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\gamma T_0}} \approx \frac{\pi}{\gamma T_0}. \quad (4.1.3)$$

Здесь использовалась приближенная формула  $e^{-2\gamma T_0} \approx 1 - 2\gamma T_0$ , поскольку  $\gamma T_0 = \gamma \frac{2\pi}{\omega_0} \ll 1$ .

Таким образом, для вычисления добротности необходимо найти коэффициент затухания  $\gamma$  и период  $T_0$  собственных колебаний груза.

2. В случае слабого затухания смещение  $x$  гармонического осциллятора описывается формулой

$$x(t) = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4.1.4)$$

где

$$a(t) = a_0 e^{-\gamma t} \quad (4.1.5)$$

– амплитуда колебаний и  $\varphi_0$  – начальная фаза.

Согласно (4.1.5) амплитуды колебаний в произвольные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  связаны соотношением

$$a_1 = a_0 e^{-\gamma t_1}, \quad a_2 = a_0 e^{-\gamma t_2}, \quad \frac{a_1}{a_2} = e^{-\gamma(t_2 - t_1)}. \quad (4.1.6)$$

По условию задачи

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \quad t_2 - t_1 = \Delta t = 1 \text{ мин}, \quad (4.1.7)$$

поэтому получаем

$$\frac{1}{2} = e^{-\gamma(t_2 - t_1)}, \quad (4.1.8)$$

$$\ln \frac{1}{2} = -\ln 2 = \ln e^{-\gamma \Delta t} = -\gamma \Delta t, \quad (4.1.9)$$

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\Delta t}. \quad (4.1.10)$$

3) Период собственных колебаний груза, подвешенного на пружине, в случае слабого затухания описывается формулой

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (4.1.11)$$

4) С помощью формул (4.1.3), (4.1.10) и (4.1.11) получаем

$$Q = \frac{\pi \Delta t}{\ln 2} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 60 \frac{\sqrt{200}}{2 \ln 2} = \frac{600}{\sqrt{2} \ln 2} \approx 624.$$

Ответ:  $Q=624$ .

#### Вынужденные колебания.

Предположим, что на частицу действуют три силы:

1) возвращающая сила  $F_1 = -kx$ ;

2) сила вязкого трения  $F_2 = -\Gamma v = -\Gamma \dot{x}$ ;

3) внешняя сила  $F_3$ , меняющаяся по гармоническому закону  $F_0 \cos \omega t$ , где  $F_0 > 0$  – постоянная амплитуда и  $\omega$  – циклическая частота внешней силы.

Уравнение движения гармонического осциллятора принимает вид

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^3 F_i \quad (4.0.8)$$

или

$$m\ddot{x} = -kx - \Gamma \dot{x} + F_0 \cos \omega t. \quad (4.0.9)$$

Разделив левую и правую части на  $m$  и сделав замены  $2\gamma = \Gamma/m$ ,  $\omega^2 = k/m$  и  $f_0 = F_0/m$ , получим дифференциальное уравнение в стандартной форме

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t. \quad (4.0.10)$$

Это неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Неоднородность уравнения связана с тем, что в него кроме перемещения, скорости и ускорения  $(x, \dot{x}, \ddot{x})$  входит слагаемое  $f_0 \cos \omega t$ , не зависящее от  $x$ . Общее решение однородного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2}} \cos(\omega t + \varphi_1), \quad (4.0.11)$$

где  $A_0$  и  $\varphi_{10}$  - постоянные, определяемые с помощью двух начальных условий, а  $\varphi_1$  определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi_{20} = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \pi < \varphi_{20} \leq 0. \quad (4.0.12)$$

При  $\gamma t \gg 1$  первым слагаемым, стоящим в правой части выражения  $x(t)$  и описывающим собственные колебания гармонического осциллятора на частоте  $\omega_0$ , можно пренебречь и оставить только второе слагаемое, которое описывает вынужденные колебания осциллятора на частоте  $\omega$  внешней силы.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней силы показана на рис. 4.1

$$A_{\text{вын}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad (4.0.12)$$

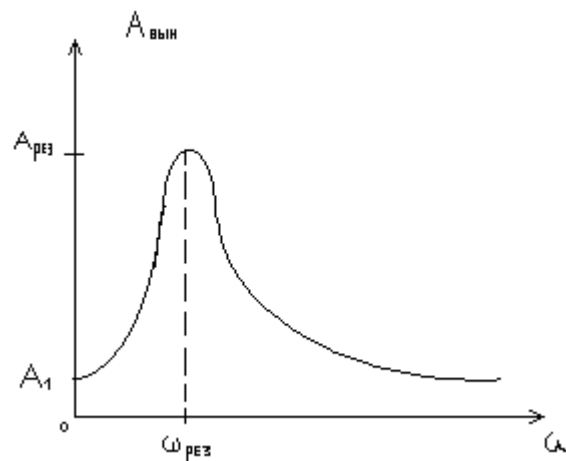


Рис. 4.1.

На частоте  $\omega = \omega_{\text{рез}}$  наблюдается явление резонанса – резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний, которая принимает максимальное значение

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega_0} Q A_0. \quad (4.0.12)$$

Здесь  $Q$  - добротность осциллятора и  $A_1 = \frac{f_0}{\omega_0^2}$  - смещение осциллятора под действием постоянной силы  $F_0$ . При резонансе сдвиг фаз между колебаниями осциллятора и внешней силы равен

$$\varphi_{1\text{рез}} = -\frac{\pi}{2}. \quad (4.0.13)$$

Такой сдвиг фазы обеспечивает наибольшую эффективность передачи энергии от внешнего источника осциллятору.

### Задача №11

Тело, подвешенное на пружине, имеет период собственных колебаний  $T_0 = 1\text{с}$ . Величина силы вязкого трения пропорциональна скорости тела  $v$ :

$F_{тр.вяз.} = \Gamma v$ ,  $\Gamma > 0$  – постоянный коэффициент. Если колебания тела возбуждаются внешней гармонической силой с амплитудой  $F_0 = 1\text{Н}$ , то амплитуда установившихся колебаний в резонансе  $A_{рез} = 0,05\text{м}$ . Определите коэффициент  $\Gamma$  в формуле для силы вязкого трения.

Решение.

1. Колебания тела, подвешенного на пружине, под действием силы тяжести, силы вязкого трения и внешней силы, меняющейся во времени по гармоническому закону, описываются неоднородным дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} = -kx + mg - \Gamma\dot{x} + F_0 \cos \omega t, \quad (4.2.1)$$

где ось  $x$  направлена вертикально вниз, причем точка  $x=0$  соответствует низшему концу пружины в свободном (недеформированном состоянии),  $g$  – ускорение свободного падения.

Перепишем уравнение (4.2.1) в стандартной форме

$$m\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + kx = mg + F_0 \cos \omega t \quad (4.2.2)$$

или

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = g + f_0 \cos \omega t, \quad (4.2.3)$$

где  $\gamma = \Gamma / 2m$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  и  $f_0 = F_0 / m$ .

Общее решение  $x(t)$  уравнения (4.2.3) состоит из трех слагаемых, описывающих три разных движения тела под действием рассматриваемых сил:

$$x(t) = x_1 + x_2(t) + x_3(t). \quad (4.2.4)$$

где

$$x_1 = \frac{g}{\omega_0^2} \quad (4.2.5)$$

– статическое смещение вниз конца пружины, определяющее положение равновесия тела, в котором сила упругости пружины  $-kx$ , уравновешивает силу тяжести  $mg$ ,

$$x_2 = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (4.2.6)$$

– динамическое смещение тела, связанное с его свободными (собственными) колебаниями,

$$x_3 = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (4.2.7)$$

– динамическое смещение тела, связанное с его вынужденными колебаниями.

Амплитуда  $A$  вынужденных колебаний определяется формулой

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}. \quad (4.2.8)$$

При резонансе, когда частота  $\omega$  внешней силы равна частоте собственных колебаний  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  тела на пружине, амплитуда вынужденных колебаний принимает максимальное значение

$$A_{\max} = A_{\text{вын}} = \frac{F_0}{2\gamma m \omega_0} = \frac{F_0}{\Gamma \omega_0} = \frac{F_0 T_0}{2\pi \Gamma}. \quad (4.2.9)$$

Отсюда получаем, что

$$\Gamma = \frac{F_0 T_0}{2\pi A_{\max}} = 3,2 \frac{H \cdot c}{m}. \quad (4.2.10)$$

Ответ:  $\Gamma = 3,2 \frac{H \cdot c}{m}.$

### Задача №12

Неподвижное тело, подвешенное на пружине, увеличивает ее длину на  $\Delta \ell = 7$  см. Считая массу пружины пренебрежимо малой, определите период  $T_0$  малых вертикальных колебаний тела. Ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ . Сопротивление воздуха не учитывать.

### Решение

Уравнение движения тела под действием силы упругости пружины и силы тяжести имеет вид (см. решение задачи №17)

$$m\ddot{x} = -kx + mg \quad (4.3.1)$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g, \quad (4.3.2)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

Решение уравнения (4.3.2) записывается следующим образом

$$x(t) = \frac{g}{\omega_0^2} + a \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.3.3)$$

Здесь первое слагаемое описывает статическое смещение нижнего конца пружины под действием веса тела, которое согласно условиям задачи равно

$$\frac{g}{\omega_0^2} = \Delta \ell \quad (4.3.4)$$

Второе слагаемое в правой части (4.3.3) описывает собственные (свободные) колебания тела с периодом

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (4.3.5)$$

Из формул (4.3.4) и (4.3.5) следует, что

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta \ell}{g}} \approx 0,53 \text{ с}. \quad (4.3.6)$$

Ответ:  $T_0 = 0,53 \text{ с}$