Лекции 11-12.

Односторонние (правая и левая) производные.

Бесконечные производные

Определение. *Левой производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется (конечный) предел при $\Delta x \to -0$ отношения приращения Δy функции в этой точке к приращению аргумента Δx:

$$f'_{\text{л}}(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} .$$

В других обозначениях

$$f'_{\text{л}}(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Определение. *Правой производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется (конечный) предел при $\Delta x \to +0$ отношения приращения Δy функции в этой точке к приращению аргумента Δx:

$$f'_{\text{пр}}\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} .$$

Пример. $f\left(x\right) = \left|x\right|,\ x_0 = 0,\ f'_{\text{л}}\left(0\right) = -1,\ f'_{\text{пр}}\left(0\right) = 1.$

Замечание. Если в точке x_0 существуют конечные односторонние производные $f'_{\text{л}}\left(x_0\right)$, $f'_{\text{пр}}\left(x_0\right)$ и $f'_{\text{л}}\left(x_0\right) = f'_{\text{пр}}\left(x_0\right)$, то существует и $f'\left(x_0\right) = f'_{\text{л}}\left(x_0\right) = f'_{\text{пр}}\left(x_0\right)$. Если же $f'_{\text{л}}\left(x_0\right) \neq f'_{\text{пр}}\left(x_0\right)$, то $f'\left(x_0\right)$ не существует.

Определение. Предположим, что в точке x_0 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$. Тогда говорят, что в точке x_0 производная равна $+\infty$.

Обозначение: $f'\left(x_0\right) = +\infty$.

Пример. $f\left(x\right) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 0.$

Определение. Предположим, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$ в точке x_0. Тогда говорят, что в точке x_0 производная равна $-\infty$.

Обозначение: $f'(x_0) = -\infty$.

Пример. $f(x) = -\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$.

Правила дифференцирования

Теорема (о производной суммы, разности, произведения и частного двух функций)**.** *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *определены в некоторой окрестности точки* x_0 *и существуют производные* $u'(x_0)$ *и* $v'(x_0)$. *Тогда существуют производные суммы, разности и произведения этих функций в точке* x_0, *причем*

1)$(u+v)'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0)$;

Доказательство:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u(x)+v(x))}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)-v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=u'+v'$$

2) $(u-v)'(x_0)=u'(x_0)-v'(x_0)$;

3) $(uv)'(x_0)=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0)$.

Доказательство:

$$(uv)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-v(x)u(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}*v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}*u(x)=$$

$$=vu'+v'u$$

Если $v(x_0)\neq 0$*, то существует производная частного, причем*

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x_0)=\dfrac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$.

Доказательство:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x * v(x+\Delta x) * v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - v(x)u(x) - u(x)v(x+\Delta x) + v(x)u(x)}{\Delta x * v(x+\Delta x) * v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x+\Delta x) * v(x)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Следствие. Пусть $C = \text{const}$, тогда $C' = 0$ и $(Cu)'(x_0) = Cu'(x_0)$.

Короткая запись:

$(u \pm v)' = u' \pm v'$;

$(Cu)' = Cu'$;

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0.$$

Примеры.

$$f(x) = x^2.$$

$$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}.$$

$$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Теорема (о производной сложной функции). *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* x_0 *и существует производная* $f'(x_0)$. *Пусть функция* $z = g(y)$ *определена в некоторой окрестности точки* $y_0 = f(x_0)$ *и существует производная* $g'(y_0)$. *Тогда сложная функция* $z = g(f(x))$ *определена в* *некоторой окрестности точки* x_0 *и имеет производную в точке* x_0*:* $\left[g\left(f\right)\right]'\left(x_0\right)=g'\left(y_0\right)\cdot f'\left(x_0\right).$

Короткая запись: $\left[g\left(f\left(x\right)\right)\right]'=g'\left(f\left(x\right)\right)\cdot f'\left(x\right)$.

Пример.

$y=\sin\left(x^2\right).$

Теорема (о производной обратной функции). *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна и монотонно возрастает (убывает) в некоторой окрестности точки* x_0. *Пусть существует производная* $f'(x_0) \neq 0$. *Тогда в некоторой окрестности точки* $y_0 = f(x_0)$ *определена функция* $x = \varphi(y)$, *обратная к функции* $y = f(x)$, *также непрерывная и монотонно возрастающая (убывающая). При этом существует производная* $\varphi'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Таблица производных основных элементарных функций

С помощью правил дифференцирования можно получить производные всех основных элементарных функций.

Производные тригонометрических функций

Мы уже показали, что $(\sin x)' = \cos x$.

$$(\cos x)' = (\sin(x + \pi/2))' = \cos(x + \pi/2) = -\sin x.$$

$$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\left(\sin x\right)' \cos x - \sin x \left(\cos x\right)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Производные показательной и логарифмической функций

Ранее было показано, что $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

$$\left(\log_a x\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$\left(e^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \Delta x}{\Delta x} = e^x.$$

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot \left(x \ln a\right)' = a^x \cdot \ln a.$$

Производная степенной функции

$$\left(x^{\alpha}\right)'=\left(e^{\alpha\ln x}\right)'=e^{\alpha\ln x}\cdot\left(\alpha\ln x\right)'=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Производные обратных тригонометрических функций

$$y=\arcsin x,\ x=\sin y,\ x\in\left(-1,1\right),\ y\in\left(-\pi/2,\pi/2\right),$$

$$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\left(\sin y\right)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y=\arccos x,\ x=\cos y,\ x\in\left(-1,1\right),\ y\in\left(0,\pi\right),$$

$$\left(\arccos x\right)'=\frac{1}{\left(\cos y\right)'}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y=\operatorname{arctg} x,\ x=\operatorname{tg} y,\ x\in\left(-\infty,+\infty\right),\ y\in\left(-\pi/2,\pi/2\right),$$

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)'=\frac{1}{\left(\operatorname{tg} y\right)'}=\frac{1}{1/\cos^2 y}=\cos^2 y=\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y+\sin^2 y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

$$y=\operatorname{arcctg} x,\ x=\operatorname{ctg} y, x\in\left(-\infty,+\infty\right),\ y\in\left(0,\pi\right),$$

$$\left(\mathrm{arcctgx}\right)' = \frac{1}{\left(\mathrm{tg}\, y\right)'} = \frac{1}{-1/\sin^2 y} = -\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = -\frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2\, y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Таблица производных

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x},\ \left(a^{x}\right)' = a^{x}\cdot\ln a,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a},$$

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x,\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ \ (\operatorname{arcctgx})' = -\frac{1}{1+x^2}.$$