Лекция 13

Несобственные интегралы с бесконечными пределами

При рассмотрении определённых интегралов мы предполагали, что 1) область интегрирования конечна (более конкретно, является отрезком $[a,b]$); 2) подынтегральная функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Будем называть определённые интегралы, для которых выполняются оба эти условия (ограниченность и области интегрирования, и подынтегральной функции) ***собственными***; интегралы, для которых нарушаются эти требования (т.е. не ограничена либо подынтегральная функция, либо область интегрирования, либо и то и другое вместе) ***несобственными***.

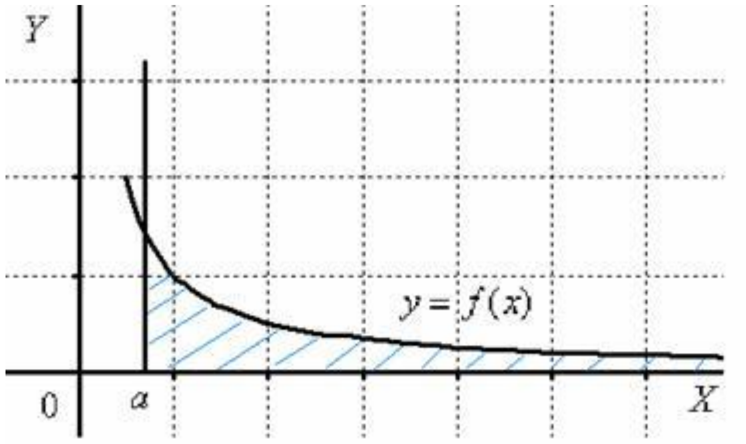
Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Определение (несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом). Пусть функция $f(x)$ определена на полуоси $[a,+\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[a,b]$, принадлежащему этой полуоси. Предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ называется несобственным интегралом функции $f(x)$ от $\boldsymbol{a}$ до $+\infty$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Итак, по определению,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся; если предел не существует или бесконечен, интеграл называется расходящимся.



Аналогично интегралу с бесконечным верхним пределом интегрирования определяется интеграл в пределах от $-\infty$ до $\boldsymbol{b}$**.**

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, интеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ называется сходящимся; если предел не существует или бесконечен, интеграл называется расходящимся.

Определение (несобственного интеграла с бесконечными верхним и нижним пределами). Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и интегрируема по любому отрезку $[a,b]$; ***c*** - произвольная (конечная) точка числовой оси. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.$$

Интеграл называется сходящимся, если существуют и конечны оба входящих в определение предела.

Замечание. Пользуясь свойством аддитивности определённого интеграла, можно показать, что существование конечных пределов и их сумма не зависят от выбора точки ***c***.

Другими словами,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

если оба интеграла справа сходятся.

Примеры.

1. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \cos x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin b;$

этот предел не существует; следовательно, исследуемый интеграл расходится.

2. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \pi/2.$

Следовательно, интеграл сходится и равен $\pi/2$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^{0} e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 = \lim\limits_{a\to-\infty} (1 - e^a) = 1$. Интеграл сходится и равен 1.

Теорема (признак сравнения). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы по любому отрезку* $[a,b]$ *и при* $x \geq a$ *удовлетворяют неравенствам* $0 \leq f(x) \leq g(x)$. *Если сходится интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, *то сходится и интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$; если *расходится интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, *то расходится и интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Замечание. Эти утверждения имеют простой смысл: если сходится интеграл от большей функции, то сходится интеграл от меньшей функции; если расходится интеграл от меньшей функции, то расходится интеграл от большей функции; в случаях, когда сходится интеграл от меньшей функции или расходится интеграл от большей функции, никаких выводов о сходимости второго интеграла сделать нельзя.

Примеры.

1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Функция e^{-x^2} не имеет первообразной, выражающейся через элементарные функции, поэтому исследовать сходимость с помощью предельного перехода невозможно. При $x \geq 1$ имеют место неравенства $-x^2 \leq -x, e^{-x^2} \leq e^{-x}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = e^{-1}$ сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ также сходится.

В качестве "стандартного" интеграла, с которым сравнивается данный, обычно берётся интеграл типа $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, часто называемый интегралом Дирихле.

Лемма. *Интеграл* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ *сходится, если p > 1, и расходится, если* $p \le 1$.

◀Доказательство. Пусть $p \neq 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, \; p > 1, \\ +\infty, \; p < 1. \end{cases}$$

В случае $p = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty. \blacktriangleright$$

Примеры.

1. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^7+1} dx$.

На всём промежутке интегрирования $\frac{1}{x^7+1} < \frac{1}{x^7}$; интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^7} dx$ сходится, так как $p = 7 > 1$. Поэтому исходный интеграл сходится.

2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

При $x \geq 3$ выполняется неравенство $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$; интеграл $\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ расходится.

Следовательно, $\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ расходится и $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ также расходится.

Абсолютная сходимость несобственных интегралов по бесконечному промежутку.

Теорема . *Если сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} \left| f(x) \right| dx$*, то обязательно сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Замечание. Обратное утверждение неверно, т.е. при сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left| f(x) \right| dx$ может расходиться.

Введём важное понятие **абсолютной сходимости**.

Определение. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left| f(x) \right| dx$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся абсолютно. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left| f(x) \right| dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся условно.

Пример. Исследовать на абсолютную сходимость интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

Выполняется неравенство $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$. Интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится, следовательно, $\int_{1}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ сходится по признаку сравнения, исходный интеграл сходится абсолютно.

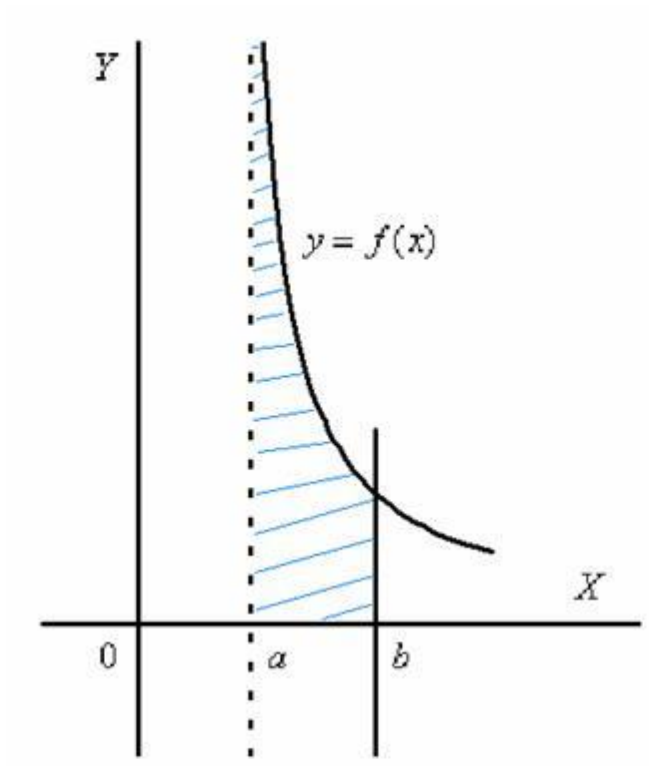
Несобственные интегралы от неограниченных функций

Определение (особенность на левом конце промежутка интегрирования). Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a,b]$, интегрируема по любому отрезку $[a+\varepsilon,b]$, $0<\varepsilon<b-a$, и функция $f(x)$ не ограничена на $(a,b]$. Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ по полуинтервалу $(a,b]$ называется

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Если предел справа конечен, говорят, что интеграл сходится; если предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

Примером функции, неограниченной на промежутке $(a,b]$, может служить функция $f(x)$, непрерывная на $(a,b]$ и такая, что $\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$.



Примеры.

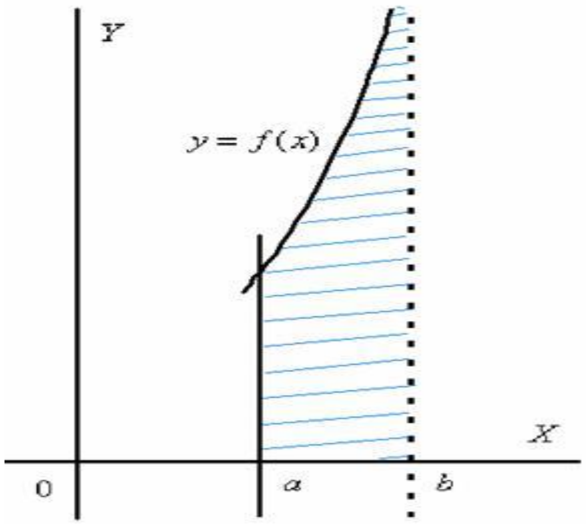
1. $\int\limits_0^2 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^2 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to +0}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\Bigg|_\varepsilon^2\right) = \infty$ - Интеграл расходится.

2. $\int\limits_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1+\varepsilon}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to +0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^0 = \frac{\pi}{2}$. Интеграл сходится.

Определение (особенность на правом конце промежутка интегрирования). Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a,b)$, интегрируема по любому отрезку $[a,b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a$, и функция $f(x)$ не ограничена на $[a,b)$. Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ по полуинтервалу $[a,b)$ называется

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел справа конечен, говорят, что интеграл сходится; если предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.



Определение (особенность во внутренней точке промежутка интегрирования). Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервалах $[a,c)$ и $(c,b]$ где $\boldsymbol{c}$ — внутренняя точка этого отрезка. Пусть функция $f(x)$ не ограничена на $[a,c)$ и функция $f(x)$ не ограничена на $(c,b]$. Пусть функция $f(x)$интегрируема на каждом отрезке $[a,c-\varepsilon]$ и на каждом отрезке $[c+\delta,b]$, $\delta>0$. Несобственным интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ по отрезку $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ называется

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx.$$

Интеграл сходится, если оба предела справа существуют и конечны, в противном случае интеграл расходится.

Примером функции, удовлетворяющей условиям определения 3, служит такая функция $f(x)$, что $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$.

Признаки сходимости для интегралов от неограниченных функций. Как и для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования, для интегралов от неограниченных функций справедливы признаки сходимости, понятие абсолютной и условной сходимости, а также рассматриваются аналогичные признаки сравнения для таких интегралов.