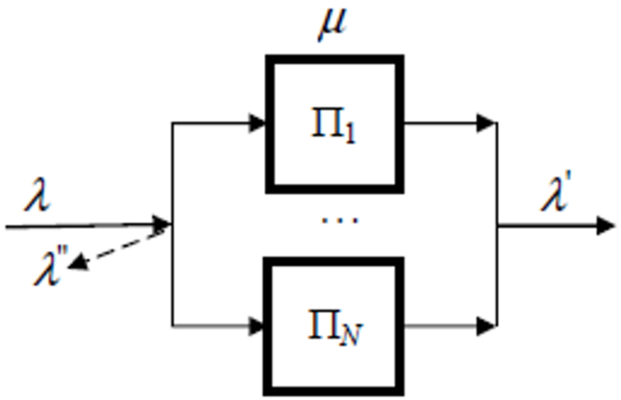
АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Многоканальные СМО с однородным потоком заявок

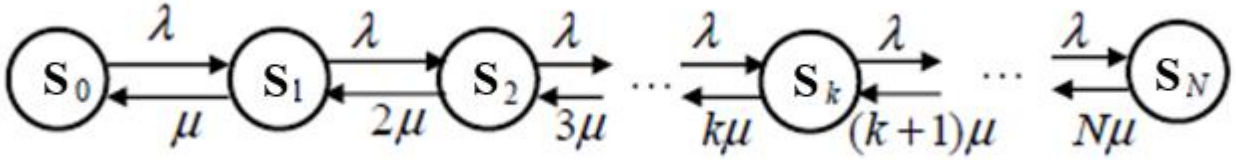
- СМО содержит N обслуживающих приборов $П_1,\ldots,П_N$;
- заявки поступают в СМО с интенсивностью λ ;
- все приборы идентичны, то есть любая заявка может быть обслужена любым прибором за одно и то же случайное время;
- обслуживающие приборы не простаивают, если в системе (накопителе) имеется хотя бы одна заявка, причем после завершения обслуживания очередной заявки мгновенно из накопителя выбирается следующая заявка;
- в системе существует стационарный режим, предполагающий отсутствие перегрузок.

Многоканальная экспоненциальная СМО без накопителя (M/M/N/0)

- Поступающие в систему заявки образуют простейший поток с интенсивностью λ .
- Длительность обслуживания заявок в любом приборе распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью μ = 1/ b , где b – средняя длительность обслуживания.
- Перед приборами не предусмотрены места для ожидания заявок, то есть в системе отсутствует накопитель.
- Дисциплина буферизации – с отказами: заявка, поступившая в систему и заставшая все приборы занятыми обслуживанием других заявок, теряется.
- Дисциплина обслуживания – в естественном порядке: заявка, поступившая в систему принимается на обслуживание, если есть хотя бы один свободный прибор. Если заявка застала свободными несколько приборов, то она направляется в один из них случайным образом.

Замечание: в СМО с отказами всегда будет существовать установившийся режим, поскольку даже при больших значениях нагрузки (y >> 1) число заявок в системе не может вырасти до бесконечности (с ростом нагрузки увеличивается доля заявок, получающих отказ в обслуживании).





В качестве параметра, описывающего состояние случайного процесса, будем рассматривать количество заявок k, находящихся в СМО. При этом система в любой момент времени может находиться в одном из (N +1) состояний:
S_0 : k = 0 – в системе нет ни одной заявки;
S_1: k = 1 – в системе находится 1 заявка (один прибор работает, остальные – простаивают);
S_2: k = 2 – в системе находятся 2 заявки (два прибора работают, остальные – простаивают);
…
S_N: k =N в системе находятся N заявок (все приборы работают).

В один и тот же момент времени в системе может произойти только одно из двух событий, которые приводят к изменению состояния случайного процесса.
1. Поступление заявки в систему с интенсивностью λ . При этом:
- если случайный процесс находится в состоянии S_k, причем $k < N$, то произойдет переход в состояние S_{k+1}, причем интенсивность перехода равна интенсивности поступления λ ;
- если случайный процесс находится в состоянии S_N, то состояние случайного процесса не изменится, что будет соответствовать отказу в обслуживании поступившей заявки.

2. Завершение обслуживания заявки в одном из приборов с интенсивностью μ . Это событие может наступить только в том случае, если в системе на обслуживании находится хотя бы одна заявка. Если в СМО на обслуживании находится k =1,2,..., N заявок (случайный процесс находится в состоянии S_k), то интенсивность перехода в состояние S_{k-1} будет равна $k\mu$.

Система уравнений для определения стационарных вероятностей:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ (\lambda + \mu) p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2 \\ \ldots \\ (\lambda + k\mu) p_k = \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} \\ \ldots \\ N\mu p_N = \lambda p_{N-1} \\ p_0 + p_1 + \ldots + p_N = 1 \end{cases}.$$

Финальные вероятности (формулы Эрланга): $p_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=0}^{N} \dfrac{y^i}{i!}}$ $\quad p_k = \dfrac{y^k}{k!} p_0 \quad (k = \overline{0, N})$,

где $y = \lambda b$ – нагрузка системы

Замечание. Формулы Эрланга остаются справедливыми и тогда, когда поток заявок — простейший, а время обслуживания имеет произвольное распределение с математическим ожиданием 1 /μ.

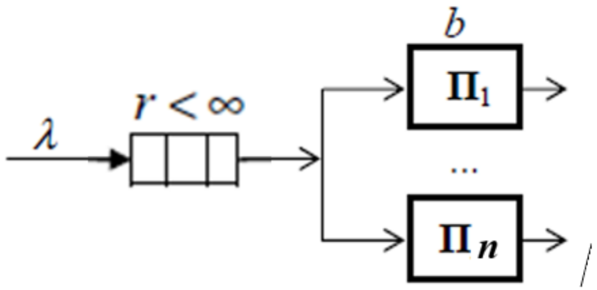
Характеристики СМО M/M/N/0

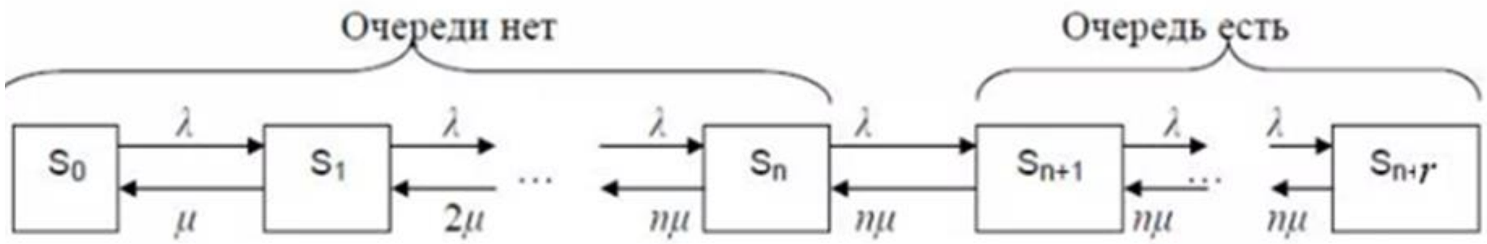
- нагрузка $y = \lambda / \mu = \lambda b$;
- загрузка $\rho = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} k p_k$, учитывающая долю k/N работающих приборов;
- коэффициент простоя системы $\eta = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} (N-k) p_k = 1 - \rho$;
- вероятность потери заявок, вероятность отказа в обслуживании $\pi_n = p_N = \frac{y^N}{N!} \Big/ \sum_{i=0}^{N} \frac{y^i}{i!}$;
- вероятность обслуживания заявки (относительная пропускная способность СМО): $\pi_0 = 1 - \pi_n$
- производительность системы $\lambda' = \lambda(1 - \pi_n)$;
- интенсивность потока потерянных заявок $\lambda'' = \lambda\pi_n$;
- среднее число заявок в системе (среднее число работающих приборов): $m = \sum_{k=1}^{N} k p_k = N\rho$;
  или $m = \lambda' / \mu = y\pi_0$;
  (среднее число простаивающих приборов: $N\hat{} = N - m$);
- среднее время пребывания заявки в системе: $u = b$

Многоканальная экспоненциальная СМО с накопителем ограниченной емкости (M/M/n/r)

- Поступающие в систему заявки образуют простейший поток с интенсивностью λ .
- Длительность обслуживания заявок в любом приборе распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью $\mu = 1/b$, где b – средняя длительность обслуживания.
- Все n приборов – идентичны, и любая заявка может быть обслужена любым прибором;
- В системе имеется накопитель ёмкости r.
- Дисциплина буферизации – с потерями: заявка, поступившая в систему и заставшая накопитель заполненным, теряется.
- Дисциплина обслуживания – в порядке поступления по правилу «первым пришел – первым обслужен» (FIFO).

Замечание: в СМО с накопителем ограниченной ёмкости всегда существует установившийся режим, поскольку длина очереди не будет расти до бесконечности даже при больших значениях нагрузки.





S_0 : в системе нет ни одной заявки;
S_1: в системе находится 1 заявка (занят 1 канал);
S_2: в системе находятся 2 заявки (заняты 2 канала);
…
S_j: в системе находятся $j \le n$ заявок (заняты j каналов);
……
S_{n+r}: в системе находятся $n+r$ заявок (заняты n каналов и r заявок – в накопителе).

Финальные вероятности существуют для всех λ и μ:

При $\chi = y/n \ne 1$

$$p_0 = \left\{1 + \frac{y}{1!} + \ldots + \frac{y^n}{n!} + \frac{y^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1-\chi^r}{1-\chi}\right\}^{-1};$$

$$p_k = \frac{y^k}{k!} p_0 \ (1 \le k \le n); \qquad p_{n+i} = \frac{y^{n+i}}{n^i \cdot n!} p_0 \ (1 \le i \le r)$$

При $\chi = y/n = 1$

$$p_0 = \left\{1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^n}{n!} + \frac{r y^n}{n!}\right\}^{-1};$$

$$p_k = \frac{y^k}{k!} p_0 \ (1 \le k \le n); \quad p_{n+i} = \frac{y^n}{n!} p_0 \ (1 \le i \le r);$$

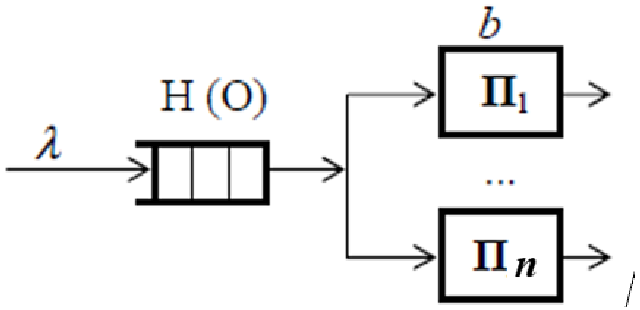
Характеристики СМО M/M/n/r

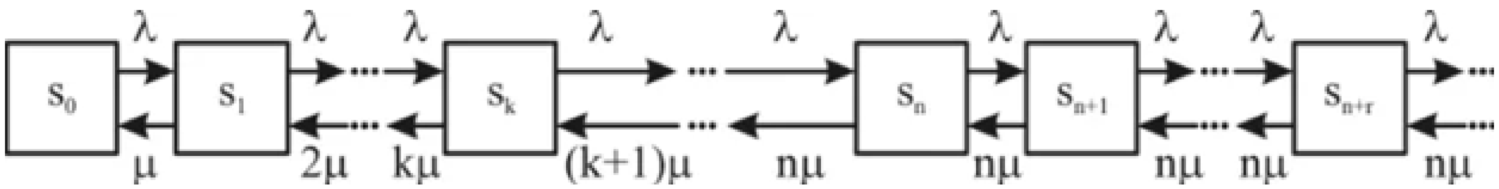
- нагрузка: $y=\lambda /\mu= \lambda b;$
- вероятность потери заявок: $\pi_n = p_{r+n}$;
- загрузка: $\rho= y(1- \pi_n)/n$;
- коэффициент простоя системы: $\eta =1-\rho$;
- производительность системы $\lambda' =\lambda(1- \pi_n)$;
- интенсивность потока потерянных заявок $\lambda'' =\lambda\pi_n$;
- среднее число занятых каналов: $k= y(1-p_{n+r});$
- среднее число заявок в очереди: $l =\dfrac{y^{n+1}p_0}{n\cdot n!}\dfrac{1-(r+1)\chi^{r}+r\chi^{r+1}}{(1-\chi)^2};$
- среднее число заявок в системе: $m=l+k$;
- среднее время ожидания заявок в очереди $w = l /\lambda'$;
- среднее время пребывания заявок в системе $u = m/\lambda' = w + b$

Многоканальная простейшая СМО с неограниченной очередью (M/M/n/∞)

- Поступающие в систему заявки образуют простейший поток с интенсивностью λ .
- Длительность обслуживания заявок в любом приборе распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью $\mu = 1/b$, где b – средняя длительность обслуживания.
- Все n приборов – идентичны, и любая заявка может быть обслужена любым прибором;
- В системе имеется накопитель неограниченной ёмкости: $r = \infty$, то есть любая заявка, поступившая в систему, найдет место для ожидания в очереди и не будет потеряна.
- Дисциплина буферизации отсутствует, поскольку накопитель имеет неограниченную ёмкость.
- Дисциплина обслуживания – в порядке поступления по правилу «первым пришел – первым обслужен» (FIFO).

- В системе отсутствуют перегрузки, то есть загрузка системы $\rho = \lambda b/n<1$.





S_0 : в системе нет ни одной заявки;
S_1: в системе находится 1 заявка (занят 1 канал);
S_2: в системе находятся 2 заявки (заняты 2 канала);
…
S_j: в системе находятся $j \le n$ заявок (заняты j каналов);
……
S_{n+r}: в системе находятся $n+r$ заявок (заняты n каналов и r заявок – в накопителе).
……

Финальные вероятности существуют только при $\rho = y/n < 1$:

$$p_0 = \left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{y^n}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{n-y}\right)^{-1} = \left[\frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^i}{i!}\right]^{-1}$$

$$p_k = \frac{y^k}{k!} p_0, \ \left(k = \overline{1,n}\right); \ p_{n+i} = \frac{y^{n+i}}{n^i n!} p_0, \ (i = 1, 2\ldots).$$

Характеристики СМО $M/M/n/\infty$

- нагрузка $y = \lambda / \mu = \lambda b$;
- загрузка $\rho = y/n = \lambda b/n$;
- коэффициент простоя системы $\eta = 1 - \rho$;
- вероятность потери заявок $\pi_n = 0$;
- производительность системы при отсутствии потерь совпадает с интенсивностью поступления заявок в систему: $\lambda' = \lambda$;
- интенсивность потерянных заявок $\lambda'' = 0$;
- среднее время ожидания заявок в очереди: $w = \frac{Pb}{n(1-\rho)}$, где $P = \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} P_0$ – вероятность того, что все n приборов заняты обслуживанием заявок
- среднее время пребывания заявок в системе: $u = w + b$;
- среднее число заявок в очереди: $l = \lambda' w$ или $l = \frac{y^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \frac{1}{(1-\chi)^2}$
- среднее число заявок в системе: $m = \lambda' u$.

Задача. В стоматологическом кабинете три кресла (n = 3), а в коридоре имеются три стула (r = 3) для ожидающих приема. Поток клиентов — простейший с интенсивностью λ = 12 клиент/ч. Время обслуживания (приема клиента) — показательное со средним значением 20 мин. Если все три стула в коридоре заняты, клиент в очередь не становится. Определить среднее число клиентов, обслуживаемых за час, среднюю долю обслуженных клиентов из числа пришедших, среднее число занятых стульев в коридоре, среднее время, которое клиент проведет в коридоре и в кабинете при условии, что клиент будет обслужен.

Найти также решение задачи при отсутствии очереди (СМО с отказами) и для случая неограниченной очереди.