Физические основы механики

Семестр 1

Механические колебания

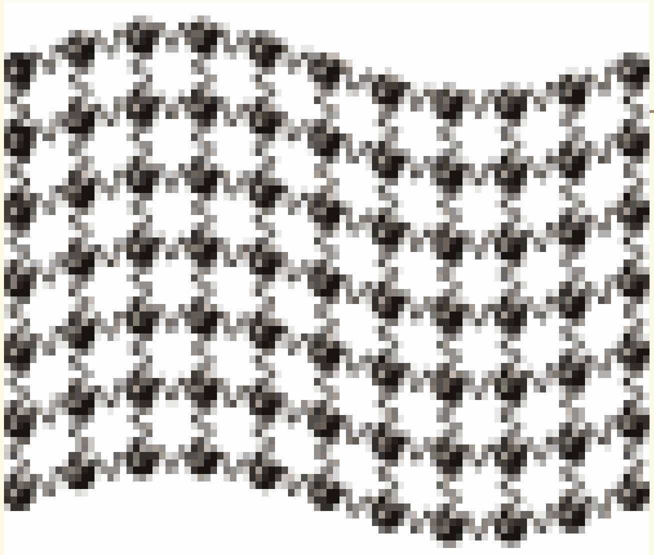
Лекция № 5

1. Равновесия устойчивое, неустойчивое, безразличное.
2. Модель гармонического осциллятора.
3. Свободные незатухающие колебания.
    3.1. Пружинный маятник.
    3.2. Математический маятник.
4. Сложение гармонических колебаний.
    4.1. Метод векторных диаграмм.
5. Свободные затухающие колебания
    5.1. Дифференциальное уравнение
    5.2. Основные характеристики колебаний
6. Вынужденные колебания
    6.1. Дифференциальное уравнение
    6.2. Амплитуда и фаза
    6.3. Резонанс и резонансные кривые.

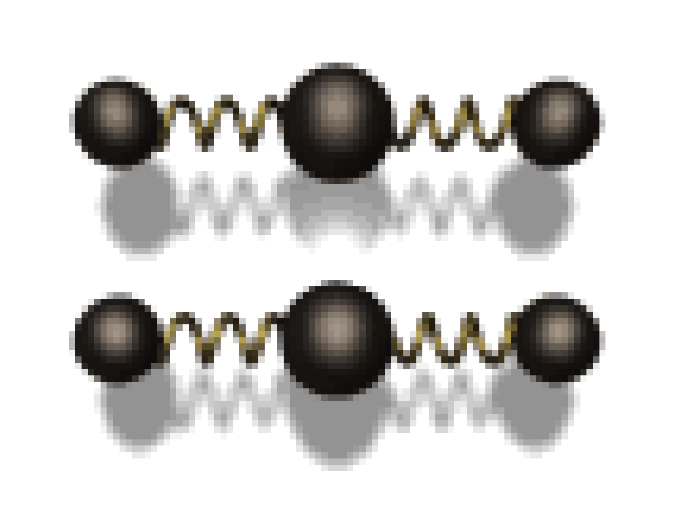
Колебаниями ***называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.***

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике (качание маятника часов, переменный электрический ток и т.д.).При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи. Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания механические, электромагнитные и др. Однако различные колебательные процесс описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями. Отсюда следует целесообразность единого подхода к изучению колебаний различной физической природы.

Примеры колебательных процессов

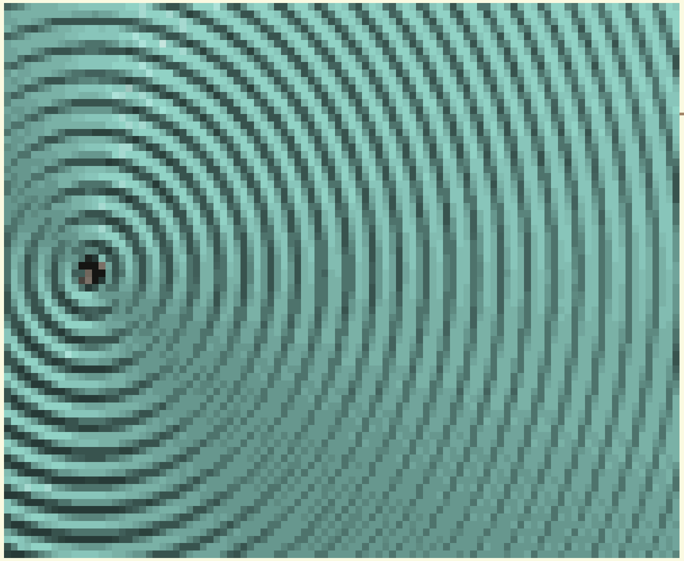


Поперечная волна в сетке, состоящей из шариков, скреплённых пружинками. Колебания масс происходят перпендикулярно направлению распространения волны.

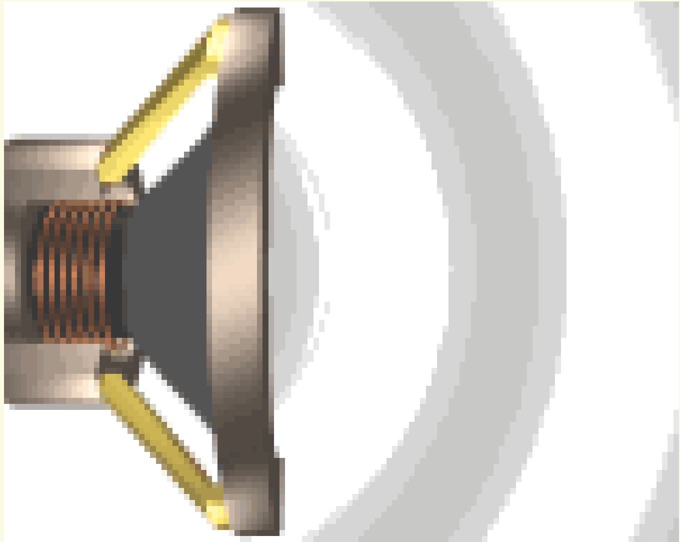


Возможные типы колебаний атомов в кристалле.

Примеры колебательных процессов



Круговая волна на поверхности жидкости, возбуждаемая точечным источником (гармонически колеблющимся шариком).

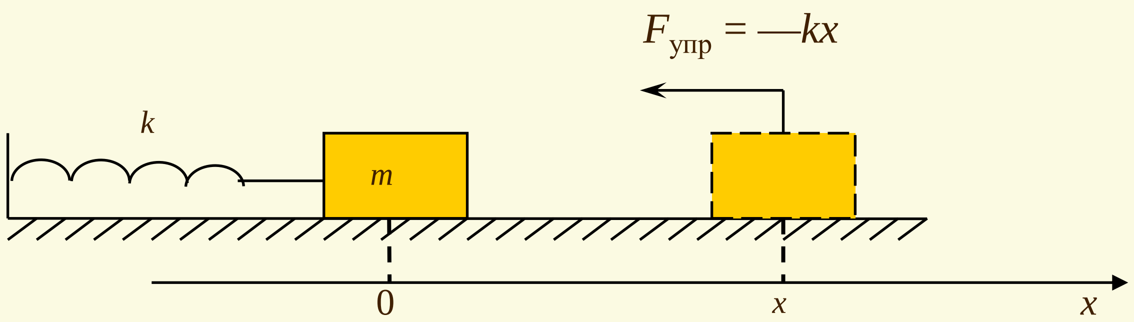


Генерация акустической волны громкоговорителем.

Равновесия устойчивое, неустойчивое и безразличное

Рассмотрим ***одномерное движение*** частицы массой m вдоль оси x под действием ***консервативной силы.***

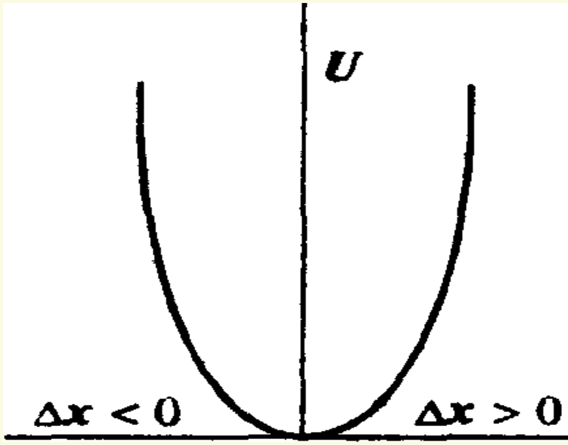
В качестве примера можно рассмотреть тело, которое прикреплено к концу пружины и может ***без трения*** скользить в горизонтальном направлении.



На тело действует ***консервативная сила – упругая сила*** деформации пружины : $F_{УПР} = -kx$. ***Потенциальная энергия*** -

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

График потенциальной энергии имеет вид:



Нас интересуют ***положения равновесия***, в которых сила, действующая на тело, обращается в нуль. Поскольку

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

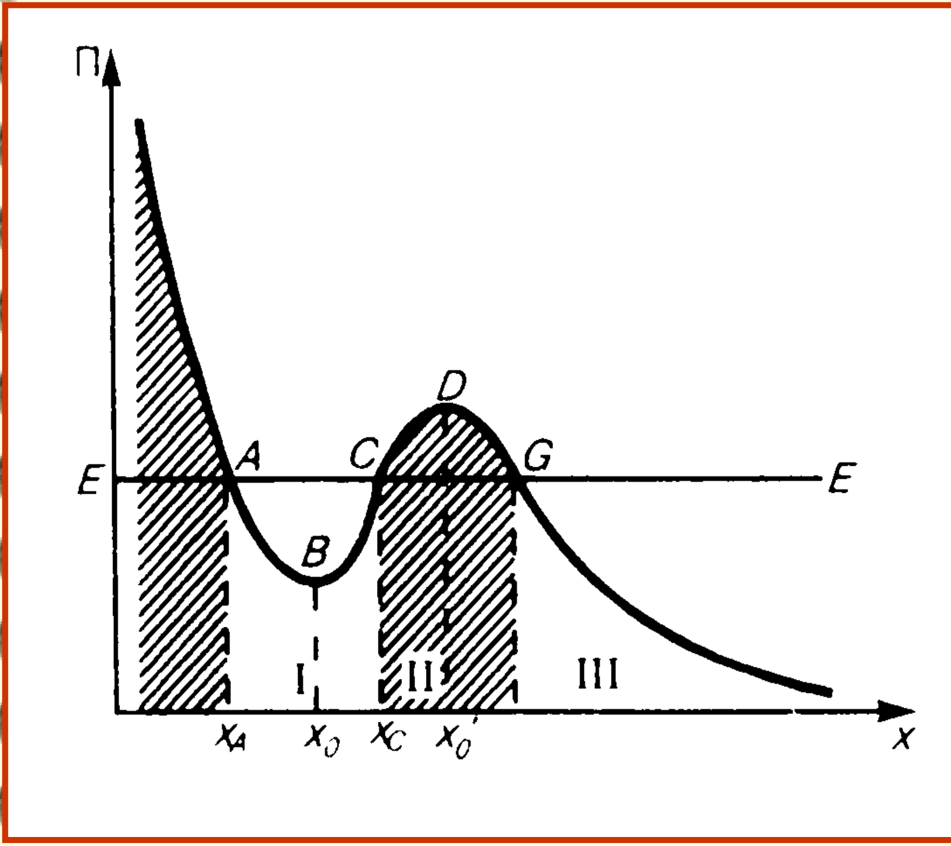
то для этих положений должно выполняться: условие:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Это означает, что ***сила равна нулю, а потенциальная энергия имеет экстремум***: либо минимум, либо максимум, либо точку перегиба. На приведенном графике при x=0 U=min=0. Это положение ***устойчивого равновесия.*** При отклонении тела из этого положения возникает сила

$F_{УПР} = -kx$, которая возвращает тело в положение равновесия. Эта сила называется ***возвращающей силой***.

На рассмотренном графике отсутствует случай, когда $U=max$, однако с таким случаем мы имеем дело, когда исследуем *одномерное движение частицы в потенциальном поле*: т.к. в точке x'_0: $U = max$, то



$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

но любое отклонение частицы от этого положения уводит ее от x'_0 еще дальше. Такое положение называется положением ***неустойчивого равновесия* (т. D).**

Существует еще положение ***безразличного равновесия*:** это когда смещение частицы из положения равновесия не приводит к возникновению новой силы.

Колебания могут происходить ***только около положения устойчивого равновесия***, где $F_x = 0$, а $U = \min = 0$.

Проанализируем процесс колебаний с позиции потенциальной энергии. Разложим функцию U(x) по степеням **x**, причем ограничимся рассмотрением ***малых колебаний (x - мало)***, то есть высшими степенями ***x*** можно пренебречь. По формуле Маклорена:

$$U(x) = U(0) + U'(0)\cdot x + \frac{1}{2}U''(0)\cdot x^2 + \ldots.$$

$U(0) = 0$ наш выбор,

$U'(0) = 0$ экстремум функции,

$U''(0) > 0$ минимальное значение функции.

В результате ***потенциальная энергия*** принимает вид:

$$U(x) \approx \frac{1}{2} U''(0) \cdot x^2 = \frac{1}{2} k x^2 ,$$

где $k = U''(0) > 0$.

Найдем силу, действующую на частицу:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$$

Это выражение тождественно выражению для упругой силы. Поэтому силы такого вида независимо от их природы называются ***квазиупругими***. Она направлена к положению устойчивого равновесия, то есть является ***возвращающей силой.***

Модель гармонического осциллятора

Колебания называются ***свободными (или собственными)***, если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем ***отсутствии внешних воздействий*** на колебательную систему (систему, совершающую колебания). Простейшим типом колебаний являются ***гармонические колебания*** - колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем ***по закону синуса (или косинуса).***

Пусть материальная точка совершает ***прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат*** x ***около положения устойчивого равновесия, принятого за начало координат.***

Тогда зависимость ***координаты*** x от времени описываются уравнением следующего вида:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

где A - ***амплитудой колебания***, максимальное значение колеблющейся величины,

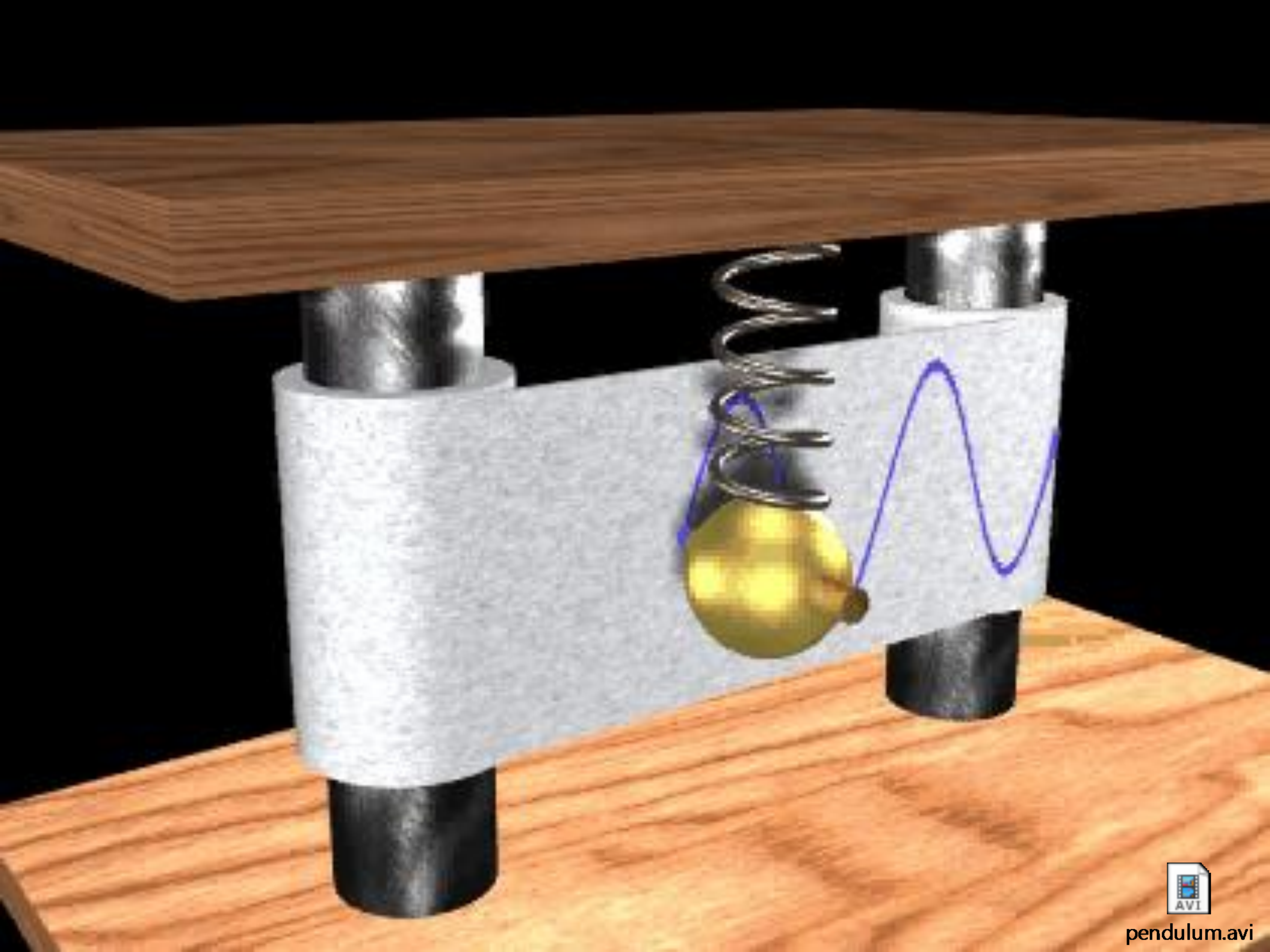
ω_0 - ***круговая (циклическая) частота***,

φ_0 - ***начальная фаза колебания*** в момент времени $t = 0$

$(\omega_0 t + \varphi_0)$ - ***фаза колебания*** в момент времени t

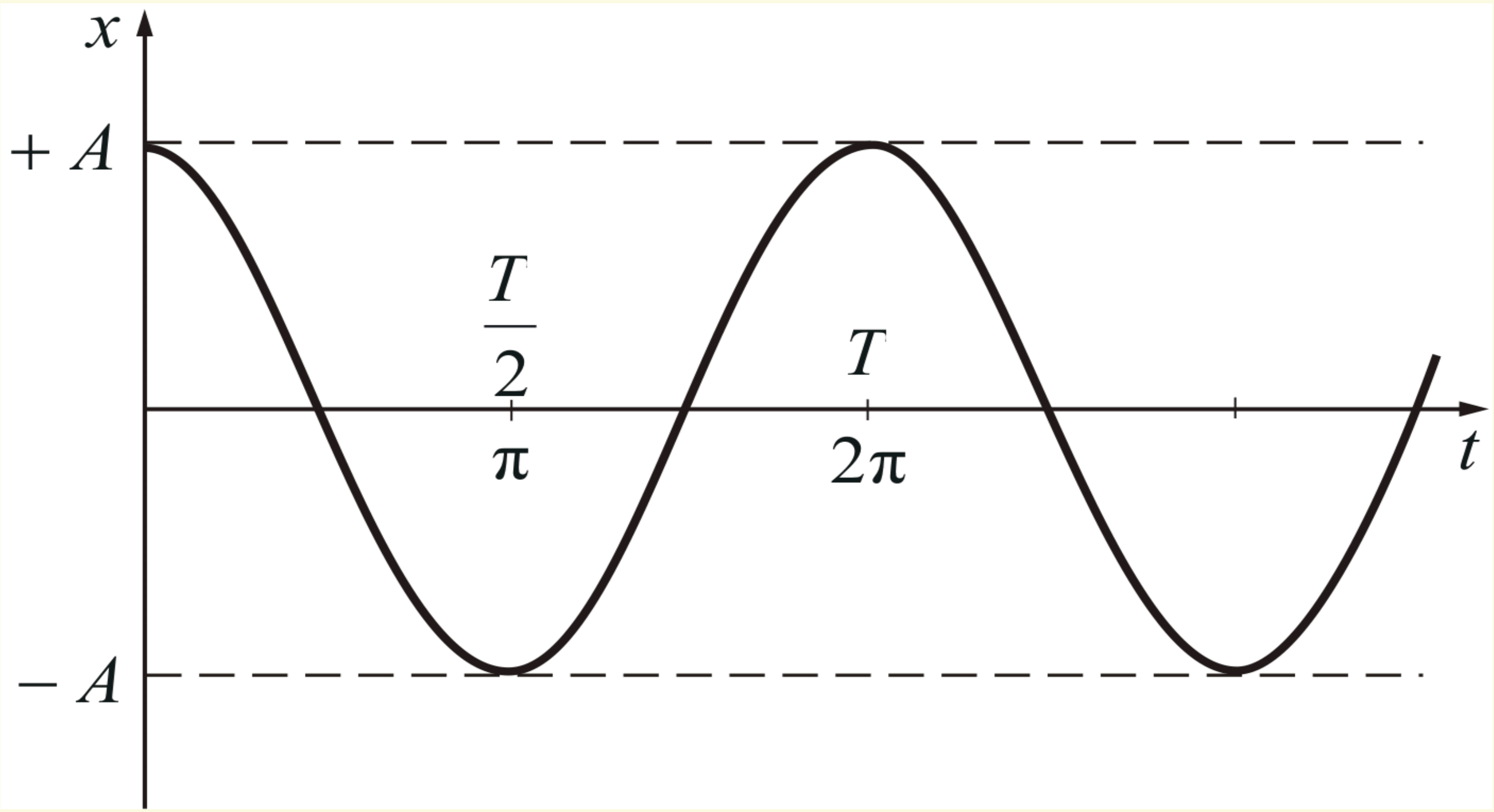
Так как косинус изменяется в пределах от +1 до -1, то x может принимать значения от $+A$ до $-A$.


СПОСОБЫ ЗАПИСИ КОЛЕБАНИЙ
ЛИСТ 1
x
T
A
t
T
P
$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$



pendulum.avi

График этой функции для случая $x = A\cos(\omega_0 t)$
представлен на рисунке



Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени T, называемый ***периодом колебаний***, за который фаза колебания получает приращение 2π т.е.

$$(\omega_0 t+\varphi_0)+2\pi=\omega_0(t+T)+\varphi_0$$ откуда

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

Величина, обратная периоду колебаний,

$$\nu=\frac{1}{T}$$

т.е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется ***частотой колебаний***.
Нетрудно видеть, что $\omega_0=2\pi\nu$ (рад/с)

Единица частоты **ν** - **Герц (Гц).**

Найдем ***дифференциальное уравнение***, которое описывает гармонические колебания. Для этого вычислим производные функции $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ по времени.

Первая производная по времени:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Вторая производная по времени:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 \cdot x$$

Из сравнения полученных выражений следует дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

- уравнение гармонического осциллятора без затухания

Скорость , ускорение.

Согласно определению, первая производная от x по времени является **скоростью**:

$$V_x = dx/dt = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

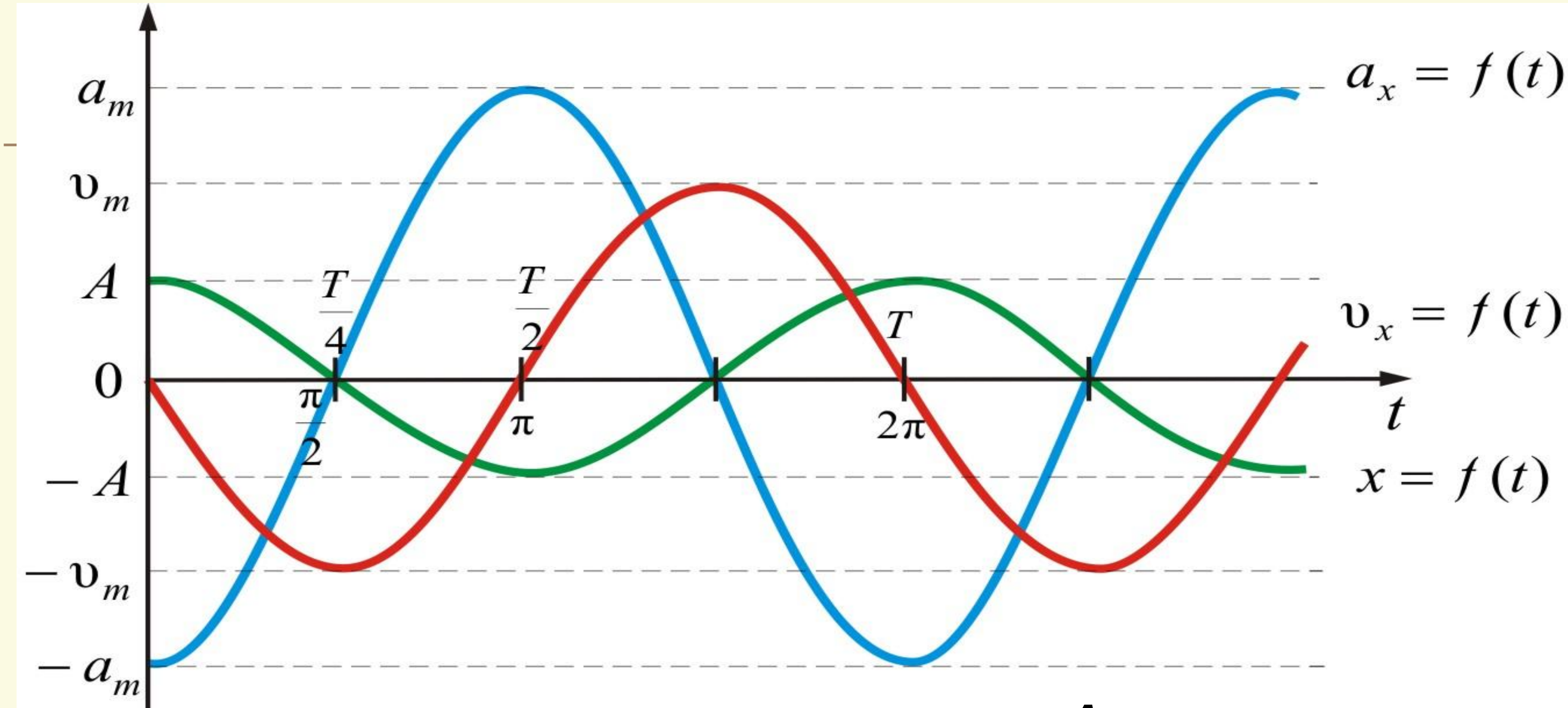
Вторая производная - **ускорением**:

$$a_x = d^2x/dt^2 = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Имеем гармонические колебания с той же циклической частотой. **Амплитуды скорости** и **ускорения** соответственно равны $A\omega_0 = V_m$ и $A\omega_0^2 = a_m$

Фаза полученных величин отличается от фазы величины $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ на $\pi/2$ и π соответственно.

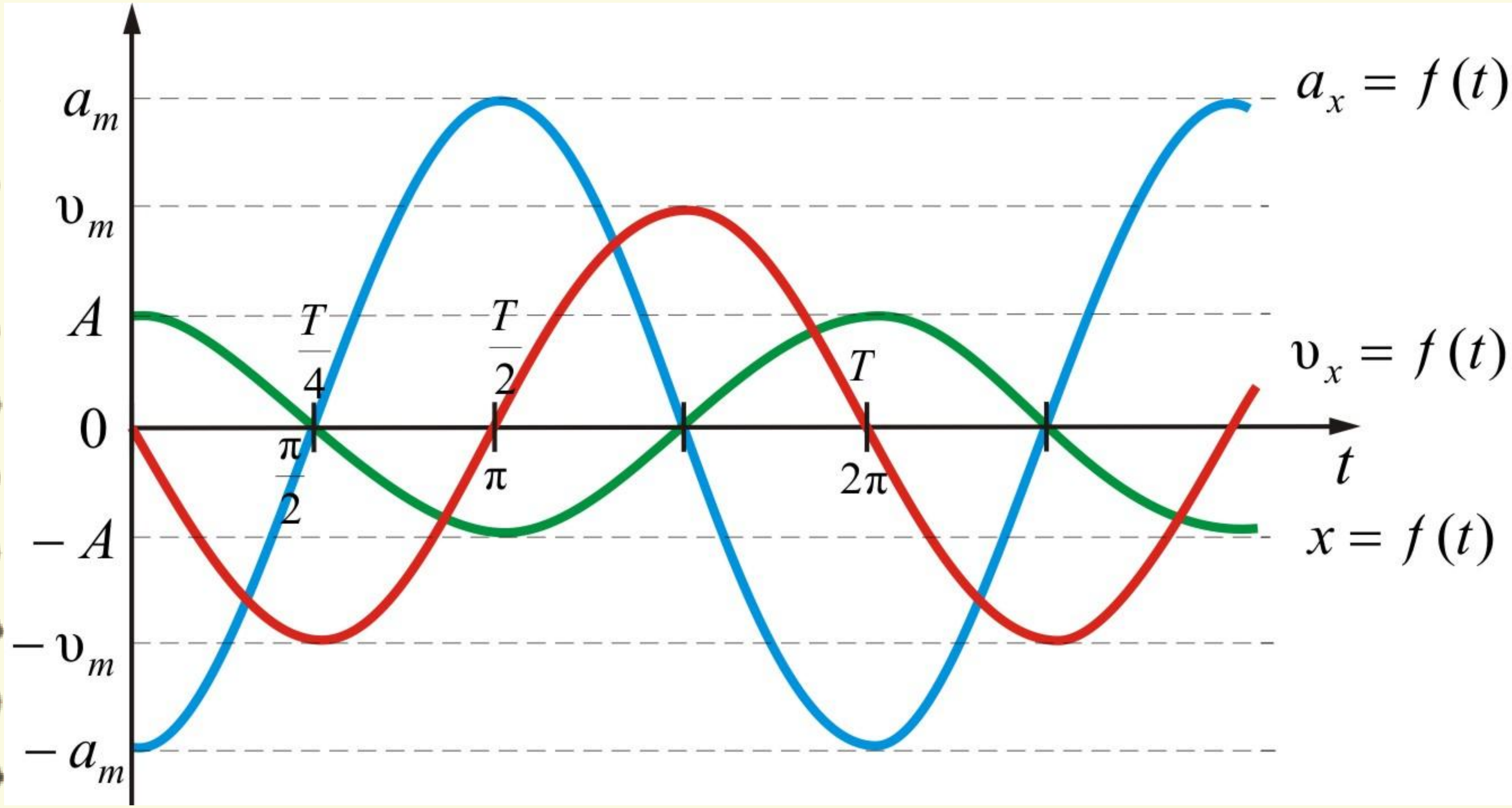
Рассмотрим графики x , υ_x , a_x



При ***максимальном смещении*** ($x = \pm A$) ***скорость*** равна нулю.

Скорость колебаний тела максимальна и равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия ($x = 0$), то есть ***скорость*** опережает ***смещение*** на $\pi / 2$

xva.avi



Ускорение равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при ***наибольших смещениях***, то есть ***смещение*** и ***ускорение*** находятся в противофазе (***ускорение*** опережает ***смещение*** на π).

Основное уравнение динамики гармонических колебаний

Исходя из второго закона, $F = ma$, можно записать:

$$F_x = -m\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -m\omega_0^2 x \quad (1)$$

сила ***F*** пропорциональна ***x*** и всегда направлена к положению равновесия (поэтому ее и называют ***возвращающей силой***).

Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

Примером сил, удовлетворяющих (1) являются ***упругие силы***. Силы же имеющие иную природу, но удовлетворяющие (1), называются ***квазиупругими.***

Квазиупругая сила $F_x = -kx,$

где k – коэффициент ***квазиупругой силы***.

Сравнивая , видим, что $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

Получим ***основное уравнение динамики гармонических колебаний***, вызываемых упругими силами:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx\ ; \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

Основное уравнение динамики гармонических колебаний (гармоничес-кого осциллятора)

Решение этого уравнения всегда будет выражение вида:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Круговая частота колебаний $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, но так

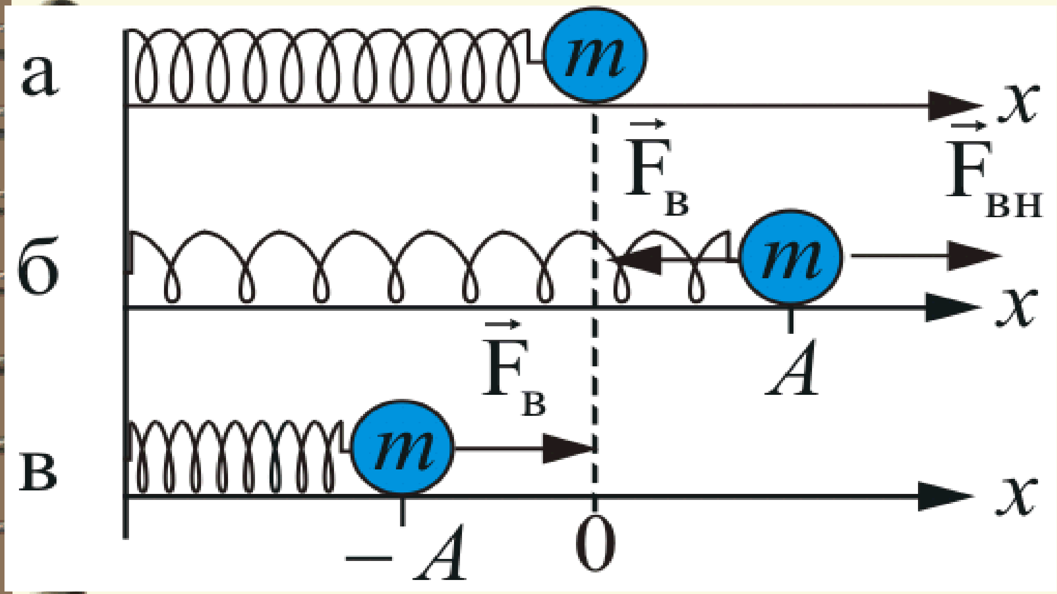
как $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, то $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Период колебаний груза на пружине:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Энергия гармонических колебаний

Потенциальная энергия тела **U** измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила $F_x = -kx$. Так как



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$dU = -F_x dx = kx dx$$

$$U = k\int_0^x x dx$$ или

потенциальная энергия выражается следующим образом:

$$\boxed{U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

или

$$U = \frac{1}{4}kA^2\left[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)\right]$$

Кинетическая энергия

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

или

$$K = \frac{kA^2}{4}\left[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)\right]$$

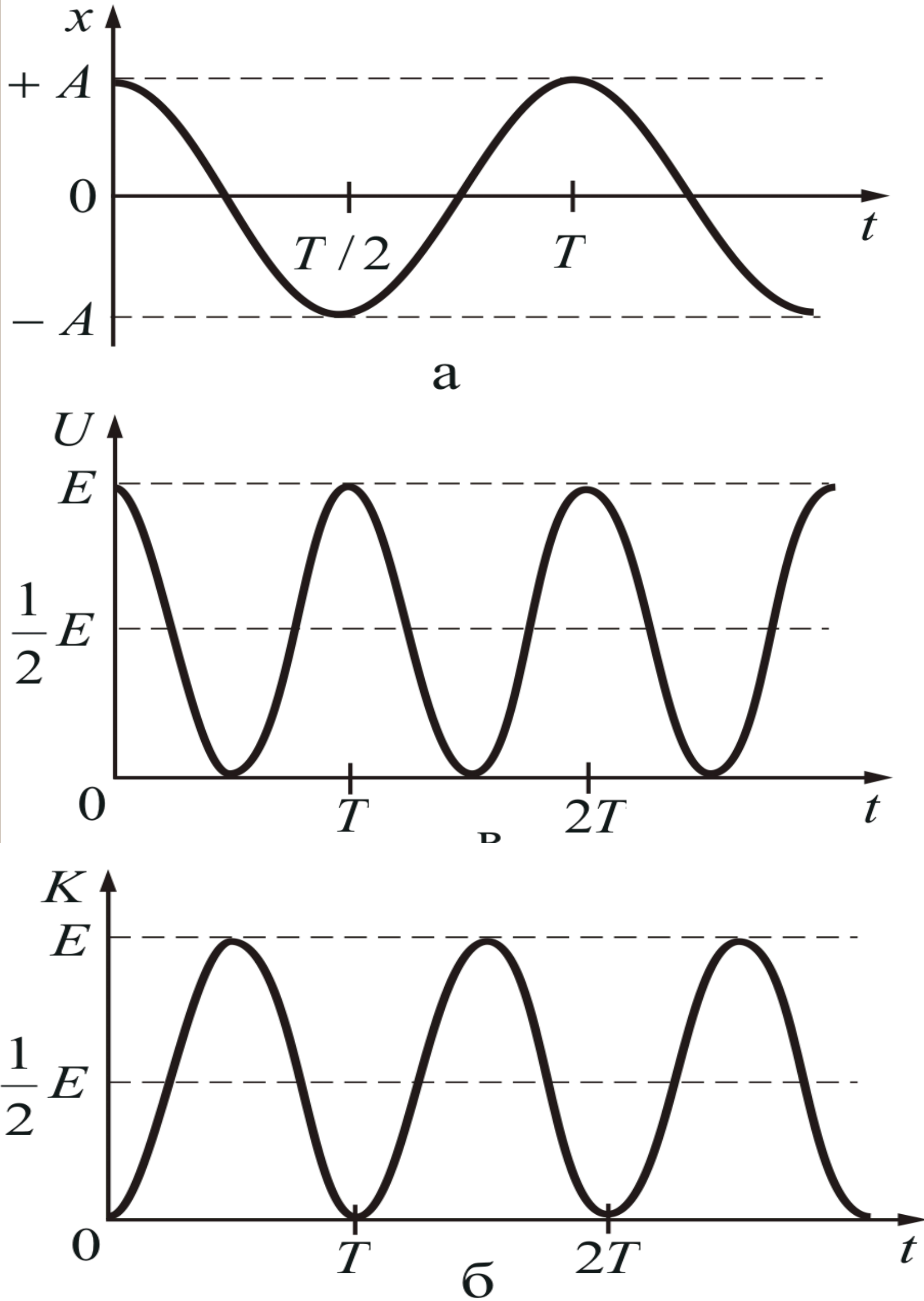
Из формул, приведенных в рамках следует, что U и K ***изменяются с частотой*** $2\omega_0$ ***, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания.***

Сложив выражения для **U** и **K**, получим формулу для ***полной энергии***:

$$\boxed{E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = const}$$

***Полная энергия* остается *постоянной*, так как при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна.**

На рисунках представлены графики зависимости x, U и K от времени.



Из графиков видно, что ***происходит переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот***, ***но*** их ***<u>сумма в любой момент времени постоянна.</u>***

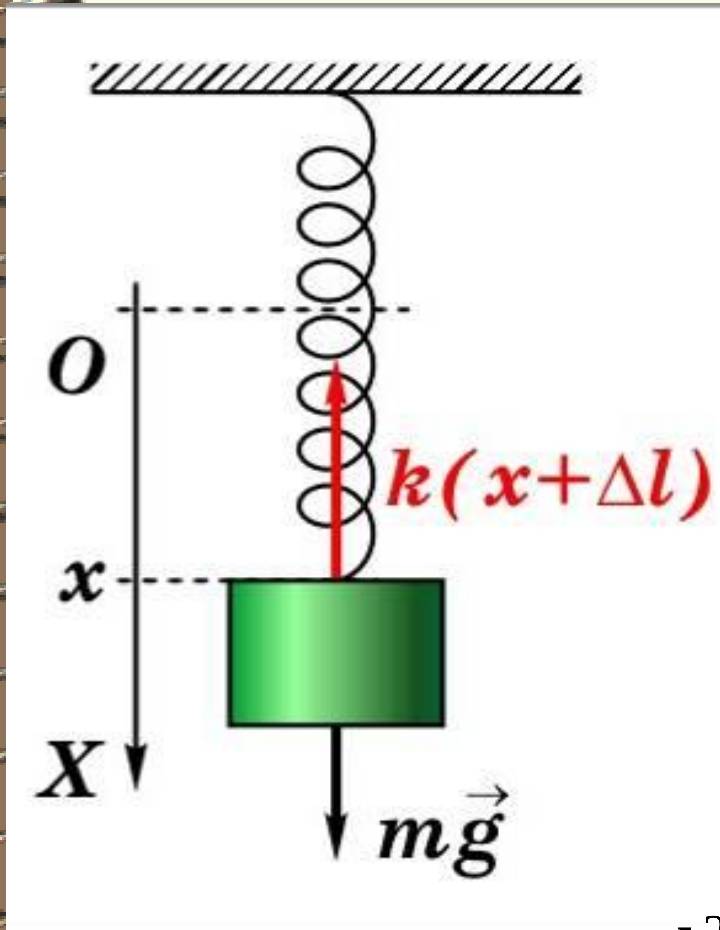
Из ранее полученных формул для U и K (а также учитывая, что

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2}$$

следует:

$$\boxed{\langle K \rangle = \langle U \rangle = \frac{E}{2}}$$

Свободные незатухающие колебания



Пружинный маятник – это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью k, совершающий гармонические колебания под действием **упругой силы** $F_x = -kx$

Из второго закона Ньютона

$F = ma$ или $F = -kx$ получим

уравнение движения маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

Решение этого уравнения – гармонические колебания вида:

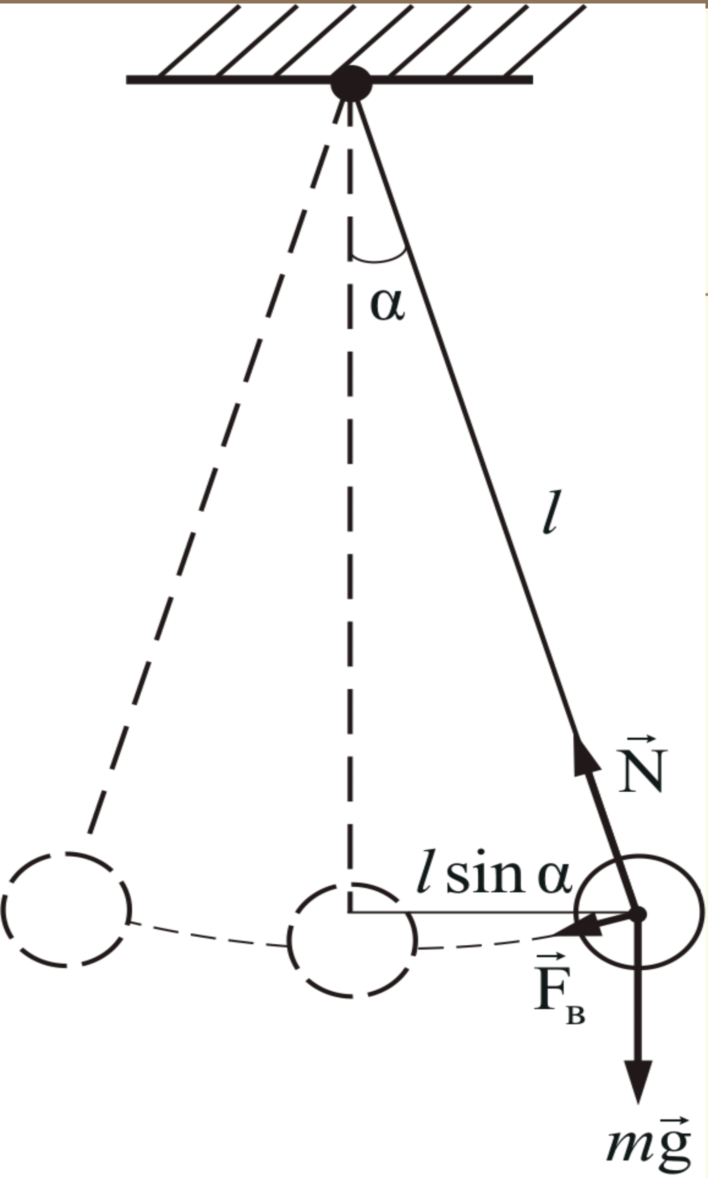
$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

циклическая частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



Математический маятник – *идеализированная система, состоящая из невесомой, нерастяжимой нити (**l**), на которую подвешена масса (**m**), сосредоточенная в одной точке* (шарик на длинной тонкой нити). *При отклонении маятника от вертикали, возникает* ***возвращающая сила*** $F = mg\sin\alpha$ *и уравнение движения принимает вид:*

$$ma_\tau = -mg\sin\alpha$$

где $a_\tau = \dot{v} = l\ddot{\alpha}$ *- тангенциальное ускорение*

Уравнение движения маятника:

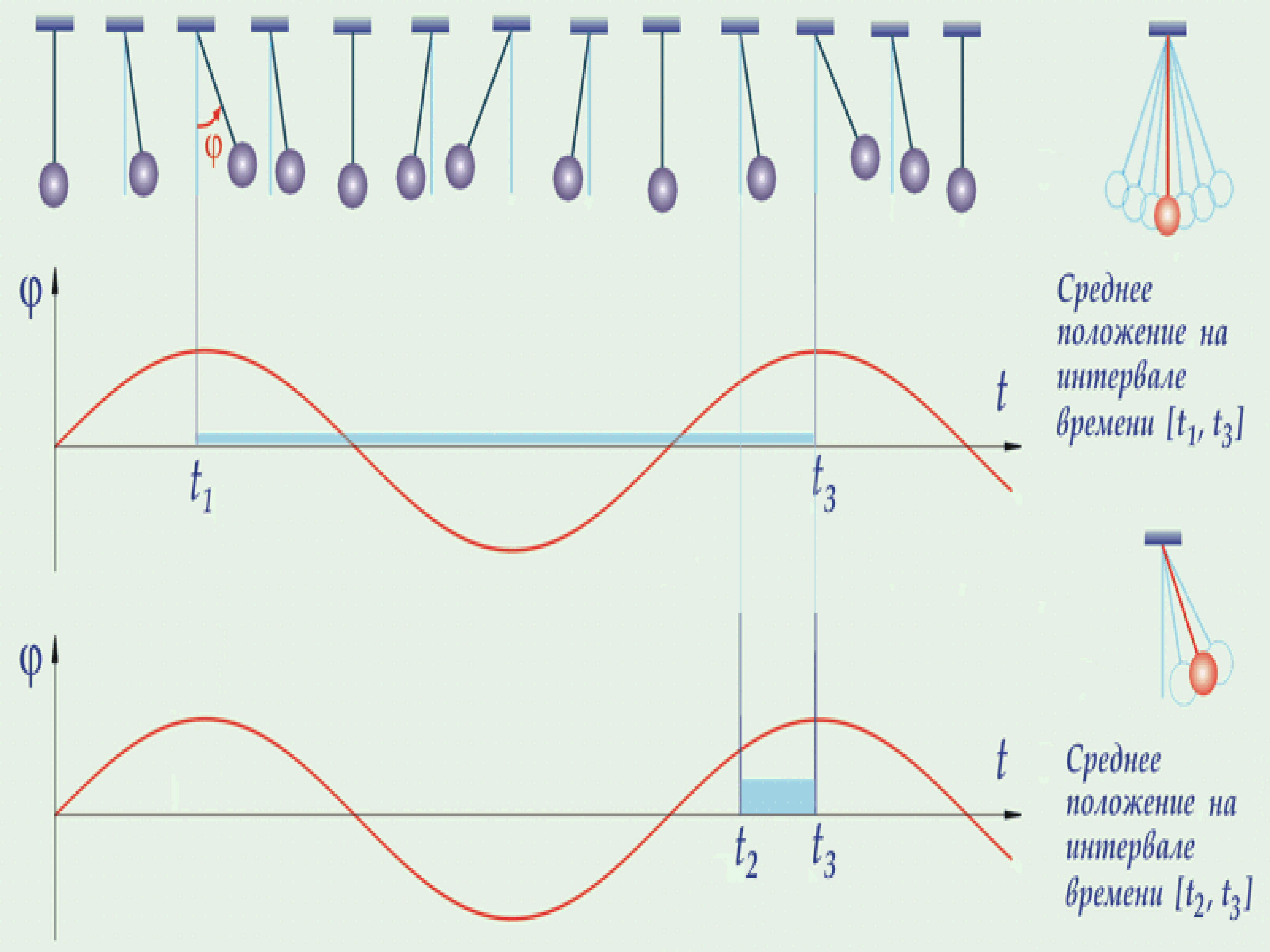
$$ml\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha \qquad \ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha$$

Так как рассматриваются только малые отклонения ($\sin\alpha \approx \alpha$), **уравнение движения маятника:**

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0}$$

Решение этого уравнения - гармонические колебания: $\alpha = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$; **периодом** $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$



φ
φ
t
t_1
t_3
Среднее положение на интервале времени $[t_1, t_3]$
φ
t
t_2
t_3
Среднее положение на интервале времени $[t_2, t_3]$

СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ И ОДИНАКОВОЙ ЧАСТОТЫ

Колеблющееся тело может участвовать в нескольких колебательных процессах. Тогда необходимо найти результирующее колебание, иными словами, колебания необходимо сложить. Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$$

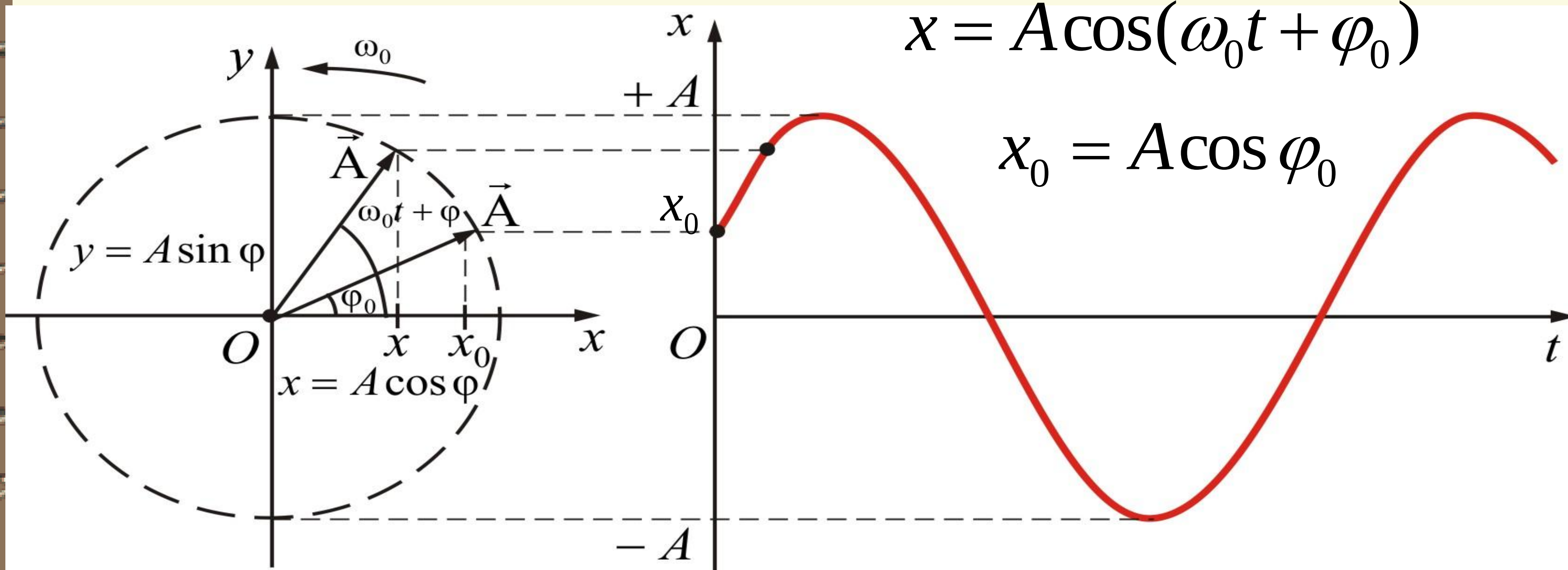
Для этого воспользуемся ***геометрическим*** способом – ***методом векторных диаграмм***

Метод векторных диаграмм

Гармонические колебания можно представить несколькими способами: аналитически, графически, геометрически с помощью вектора амплитуды – ***метода векторных диаграмм***. В последнем случае колебание представляется в виде вектора, вращающегося с частотой ω_0, длина которого равна амплитуде колебаний ***A***, а сам вектор составляет с опорной осью Ox угол φ_0, равный начальной фазе при $t = 0$.

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

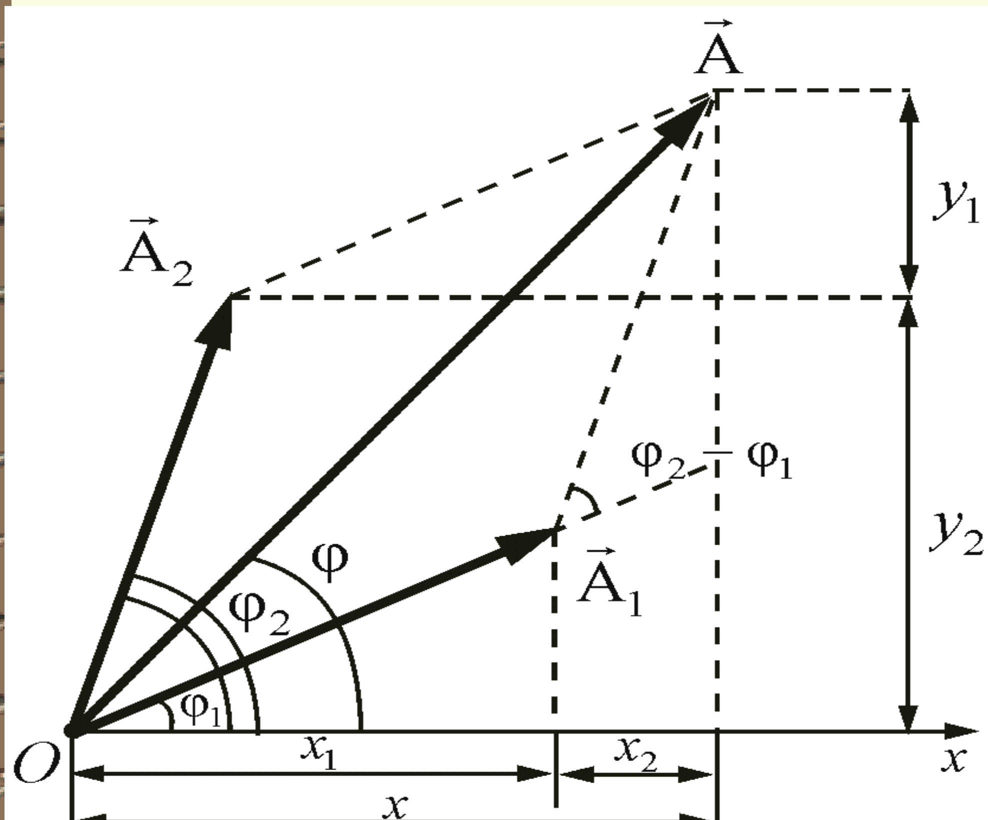
$$x_0 = A\cos\varphi_0$$



Проекция этого вектора на ось Ох описывает гармоническое колебание $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

Пусть ***точка*** одновременно ***участвует в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, направленных вдоль одной прямой:***

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$



$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

-результирующее колебание, тоже гармоническое, с частотой ω_0

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

По правилу сложения векторов найдем суммарную амплитуду, результирующего колебания (теорема косинусов):

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Амплитуда ***A*** результирующего колебания зависит от разности начальных фаз. ***Их разность фаз не зависит от времени:*** $\varphi_2 - \varphi_1 = \mathrm{const}$

Такие два колебания называются <u>когерентными.</u>

Начальная фаза результирующего колебания определяется из соотношения:

$$\boxed{\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}}$$

Рассмотрим несколько простых случаев

1. Разность фаз равна нулю или четному числу π, то есть

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$$ где $$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

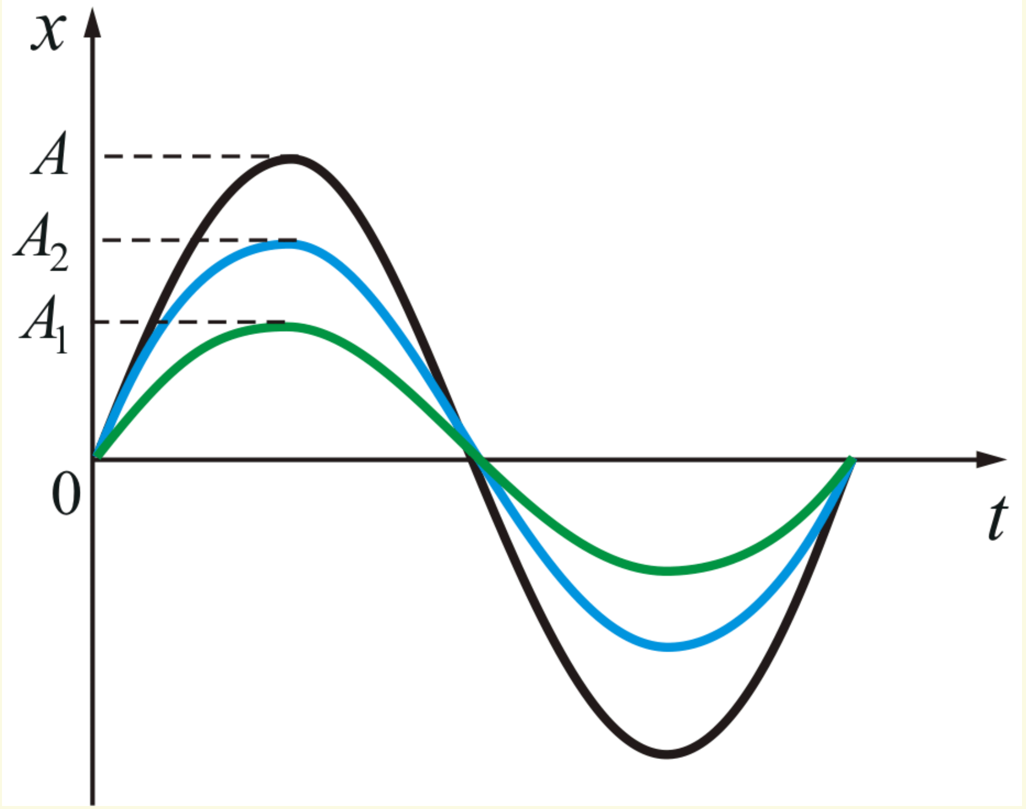
Тогда

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$$

и

$$A = A_1 + A_2$$

колебания синфазны и будет max



2. Разность фаз равна нечетному числу π, то есть

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2n+1)$$ где $$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

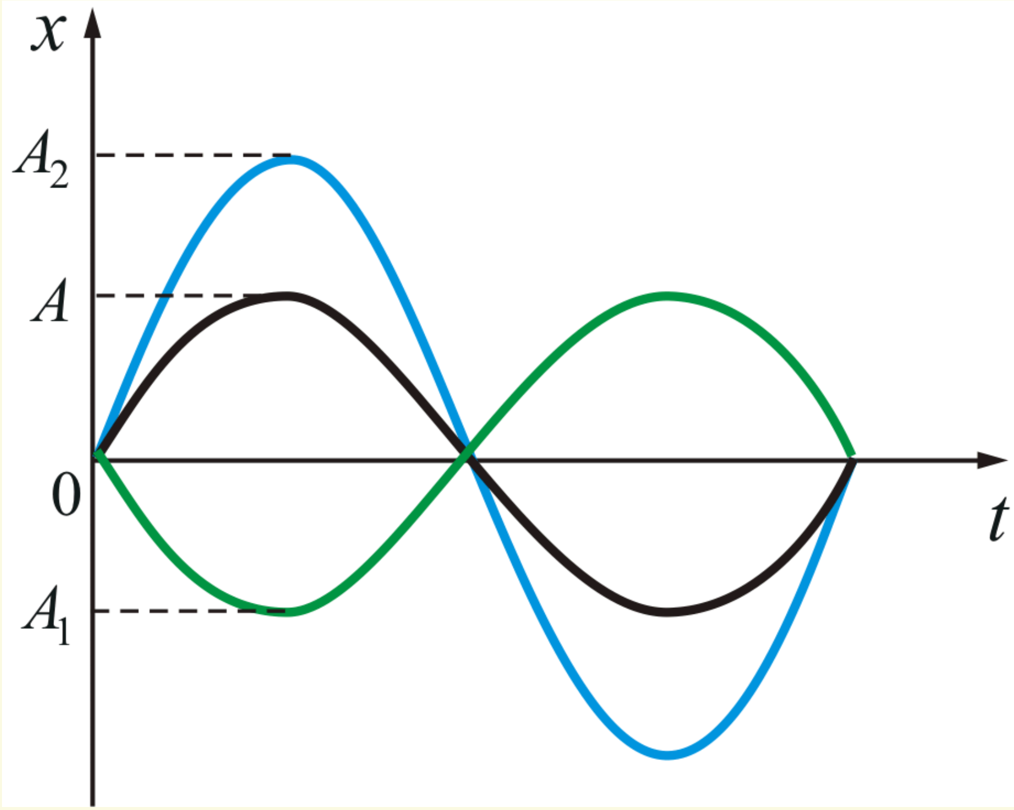
Тогда

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$$

Отсюда

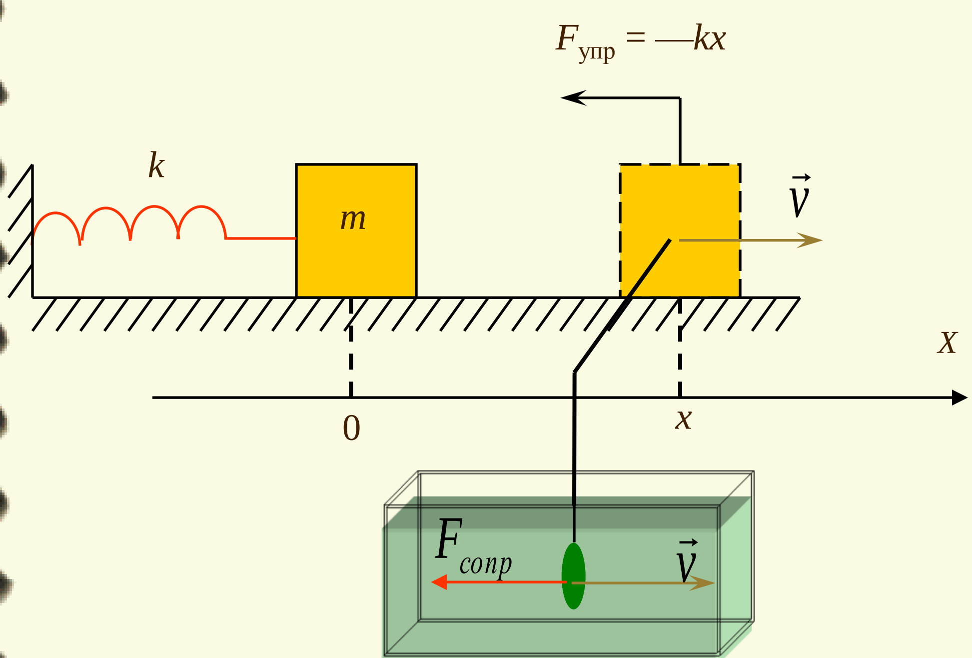
$$A = |A_2 - A_1|$$

колебания в противофазе и будет <u>min</u>



Свободные затухающие механические колебания

Все реальные колебания являются ***затухающими***. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против ***сил трения*** и амплитуда колебаний уменьшается.



Сила трения (или ***сопротивления***):

$$\boxed{\vec{F}_{тр} = -r\vec{\upsilon}}$$

где $\boldsymbol{r}$ – коэффициент сопротивления

$\vec{\upsilon}$ – скорость движения

Второй закон Ньютона для затухающих ***прямолинейных*** колебаний вдоль оси **x**:

$$\boxed{ma_x = -kx - r\upsilon_x}$$

где **kx** – ***возвращающая сила***, $r\upsilon_x$ – ***сила трения***.

После несложных преобразований имеем:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введем обозначения:

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega_0^2}$$

квадрат собственной частоты незатухающих колебаний

$$\boxed{\frac{r}{2m} = \delta}$$

коэффициент затухания

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Решение этого уравнения (при $\delta \le \omega_0$) имеет вид:

$$\boxed{x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

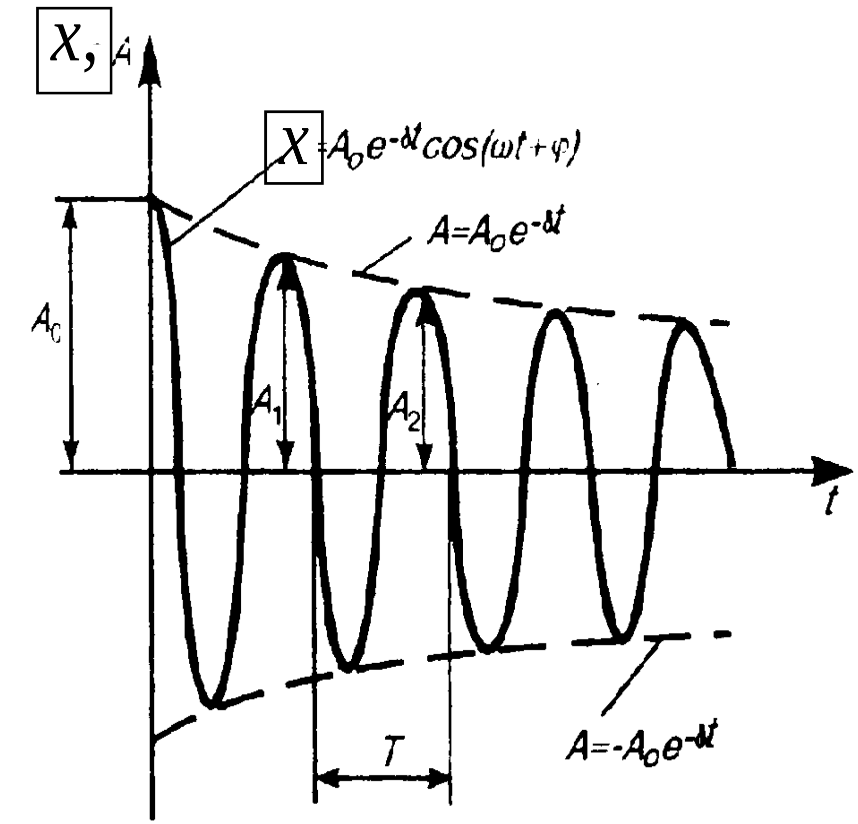
Частота колебаний:

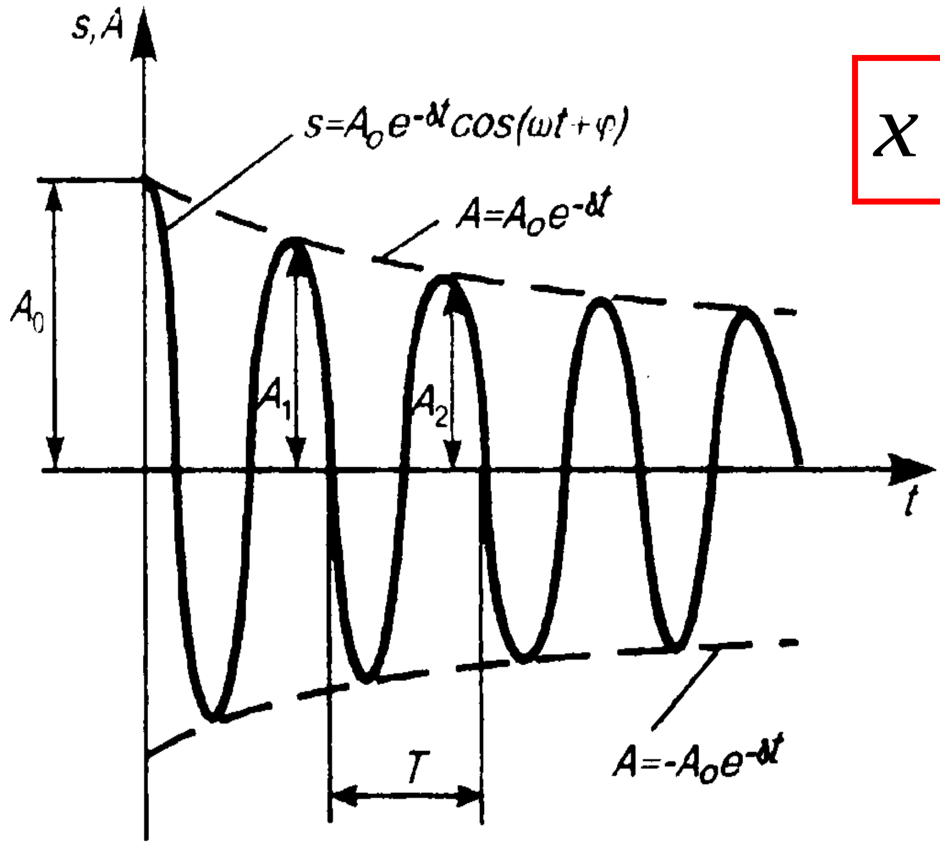
$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Условный период:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},}$$

Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому ***затухающие колебания не являются периодическими*** и, строго говоря, к ним неприменимо понятие периода или частоты. Однако, если ***затухание мало***, то можно условно пользоваться понятием ***периода как промежутка времени между двумя последовательными максимумами (или минимумами)*** колеблющейся физической величины.





Зависимость

$$\boxed{x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

(на рисунке показана сплошной линией) можно рассматривать как ***гармоническое колебание с амплитудой, изменяющейся во времени по закону***:

$$\boxed{A(t) = A_0 e^{-\delta t}}$$

Здесь A_0 - начальное значение амплитуды.

Зависимость $A(t)$ на рисунке показана пунктирными линиями.

Основные параметры (характеристики) затухающих колебаний

Время релаксации - τ - время, за которое ***амплитуда уменьшается в*** e раз.

$$\frac{A_0}{A_0 \ell^{-\delta\tau}} = e \Rightarrow e^{\delta\tau} = e$$ тогда $$\boxed{\tau = 1/\delta}$$

Последнее выражение дает: $$\boxed{\delta = 1/\tau}$$

Следовательно, ***коэффициент затухания*** δ – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого ***амплитуда уменьшается в*** $e = 2{,}7$ ***раз***.

Число колебаний N_e - число колебаний, по истечении которых, амплитуда уменьшается e раз.

$$\tau = N_e T \qquad \boxed{N_e = \tau / T = 1/\delta T}$$

Логарифмическим декрементом затухания **d** называется ***натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T***.

$$\boxed{d = \delta T}$$

$$d = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\delta T} = \delta T$$

$$\boxed{d = 1/N_e}$$

То есть можно записать:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^d$$

Это означает, что ***логарифмический декремент характеризует, насколько убывает амплитуда колебаний за период***

Добротность Q является важнейшей характеристикой колебательной системы, которая при малых значениях коэффициента затухания равна

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{d} = \pi \cdot N_e = \frac{\pi}{\delta \cdot T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}}$$

(так как ***затухание мало*** ($\delta^2 << \omega_0^2$), то T принято равным T_0).

Для определения ***физического смысла добротности*** рассмотрим, ***как изменяется энергия колебаний***.

Полная энергия складывается из ***кинетической энергии и потенциальной:*** **E = K + U**

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2}$$

При малом затухании:

$$E = \frac{1}{2} k A_0^{\,2} e^{-2\delta t}$$

Среднее значение энергии за период:

$$< E > = \frac{1}{T}\int_0^T E dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\delta t} dt \approx \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\delta t}$$

Средняя энергия, которая теряется в единицу времени:

$$\frac{d}{dt} < E > = -\frac{1}{2} k A_0^2 2\delta e^{-2\delta t} = -2\delta < E >$$

Тогда убыль энергии за период:

$$-\Delta E_T = -\frac{d}{dt} < E > T = 2\delta T < E >$$

Физический смысл добротности:

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{< E >}{< -\Delta E_T >}}$$

Добротность пропорциональна отношению средней энергии, запасенной осциллятором за период, к средним потерям энергии за период.

Приведенное определение позволяет получить выражения для добротности через рассмотренные параметры осциллятора:

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{< E >}{2\delta < E > T} = \frac{1}{2\delta}\frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\delta}\frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{d}}$$

или:

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{d} = \pi \cdot N_e = \frac{\pi}{\delta \cdot T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}}$$

Вынужденные колебания гармонического осциллятора

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, **надо компенсировать потери энергии.** Такая компенсация возможна с помощью какого-либо периодически действующего фактора $X(t)$, изменяющегося по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 \cos(\omega \cdot t)$$

Если рассматривать механические колебания, то роль $X(t)$ играет **внешняя вынуждающая сила**

$$\boxed{F(t) = F_0 \cos(\omega \cdot t)}$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний под действием гармонической силы

Рассмотрим систему, на которую кроме ***упругой силы*** $(-kx)$ и ***сил сопротивления*** $(-r\upsilon_x)$ действует добавочная ***периодическая сила*** $\mathbf{F}_x$ ***– вынуждающая сила:***

$$\boxed{ma_x = -kx - r\upsilon_x + F_x}$$

– основное уравнение колебательного процесса при вынужденных колебаниях с силой: $F_x = F_0 \cos \omega t.$

С учетом обозначений для собственной частоты колебаний системы и коэффициента затухания приходим к уравнению:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t}$$

Решение уравнения равно ***сумме общего решения однородного уравнения*** и ***частного решения неоднородного уравнения:*** $x = x_1 + x_2$

Где *общее решение однородного уравнения:*

$$\boxed{x_1 = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)} \qquad \boxed{\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет общий вид:

$$\boxed{x_2 = B\cos(\omega t - \varphi)}$$

где ω ***- частота вынуждающей силы***, а B - амплитуда и φ - фаза задаются соответственно формулами:

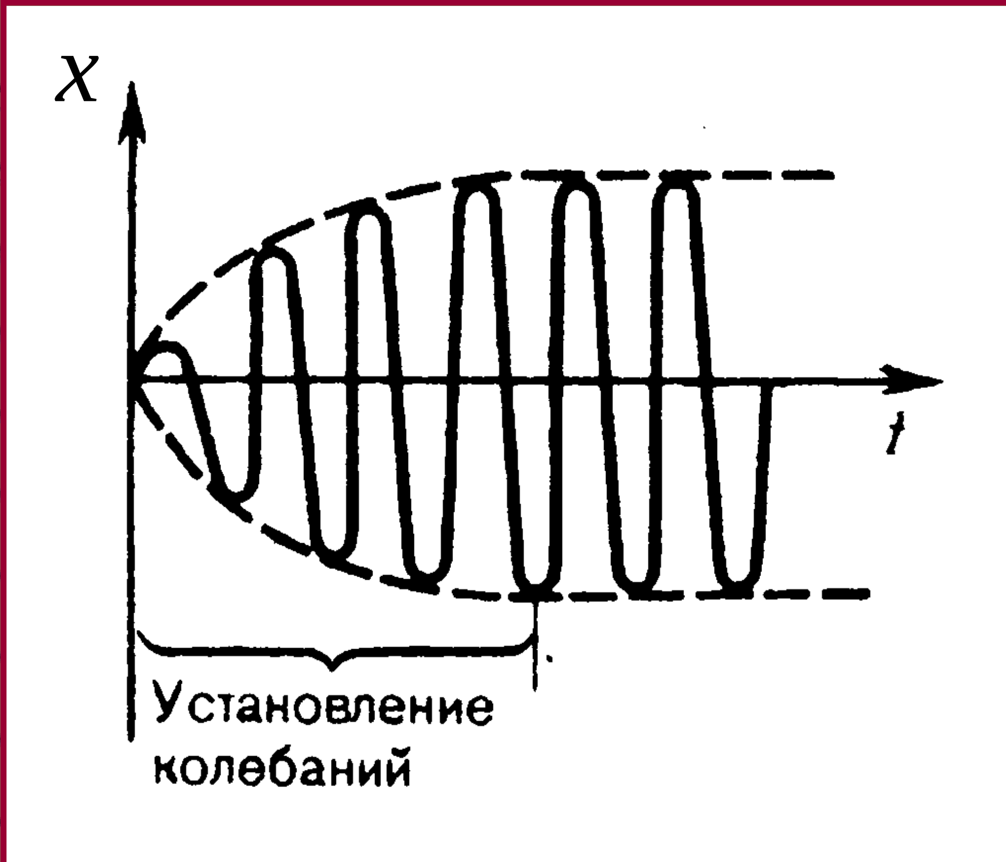
$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\varphi = arctg\,\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Итак, ***частное решение неоднородного уравнения:***

$$x_2 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - arctg\,\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Слагаемое x_1 играет существенную роль только в начальной стадии процесса (***при установлении колебаний***) до тех пор, пока амплитуда вынужденных колебаний не достигнет значения, определяемого равенством для B.



Следовательно, в ***установившемся режиме*** вынужденные колебания происходят с частотой ω и ***являются гармоническими***.

Амплитуда B и ***фаза*** φ колебаний также зависят от частоты ω .

Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс.

Рассмотрим зависимость **амплитуды** вынужденных колебаний от частоты ω.

Из формулы:

$$\boxed{B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}}$$

видно, что

при $\omega = 0$

$$\boxed{B_{\text{ст}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0 m}{mk} = \frac{F_0}{k}}$$

статическая амплитуда, ***<u>колебания не совершаются</u>***

при $\omega \to \infty$ $\quad B \to 0$

$$B=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}$$

Видно, что ***амплитуда смещения*** имеет ***максимум*** при некоторой частоте, которую называют ***резонансной*** $\omega_{рез}$

Чтобы определить ***резонансную частоту,*** нужно найти ***максимум функции*** $B(\omega)$, или, что то же самое, ***минимум подкоренного выражения*** в знаменателе.

Продифференцировав подкоренное выражение по ω и приравняв его нулю, получим условие, определяющее $\omega_{рез}$.

$$\frac{\partial}{\partial\omega}[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2]=-4(\omega_0^2-\omega^2)\omega+8\delta^2\omega=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2]=-4(\omega_0^2-\omega^2)\omega+8\delta^2\omega=0$$

Это равенство выполняется при: $\omega=0;\pm\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$

Физический смысл имеет лишь ***положительный корень***.

Следовательно, ***резонансная частота***:

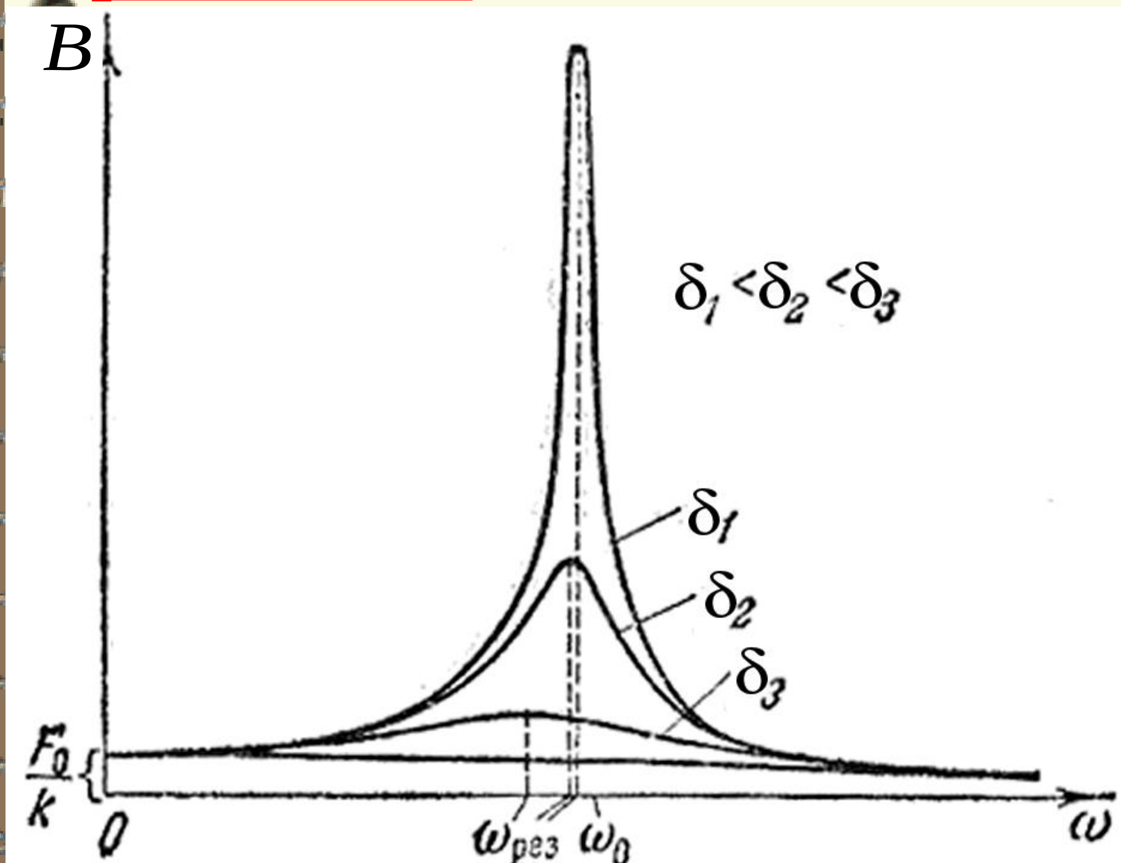
$$\boxed{\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}}$$

Значение ***резонансной амплитуды***:

$$\boxed{B_{рез}=\frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}}$$

Отсюда: при $\delta=0 \quad \omega_{рез}=\omega_0 \quad B_{рез}\to\infty$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется механическим резонансом.



На рисунке представлены ***резонансные кривые*** , то есть зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты для разных коэффициентов затухания.

При ***малом затухании***: $\delta^2 << \omega_0^2$, $\boxed{B_{\text{рез}} = \dfrac{F_0/m}{2\delta\omega_0}}$

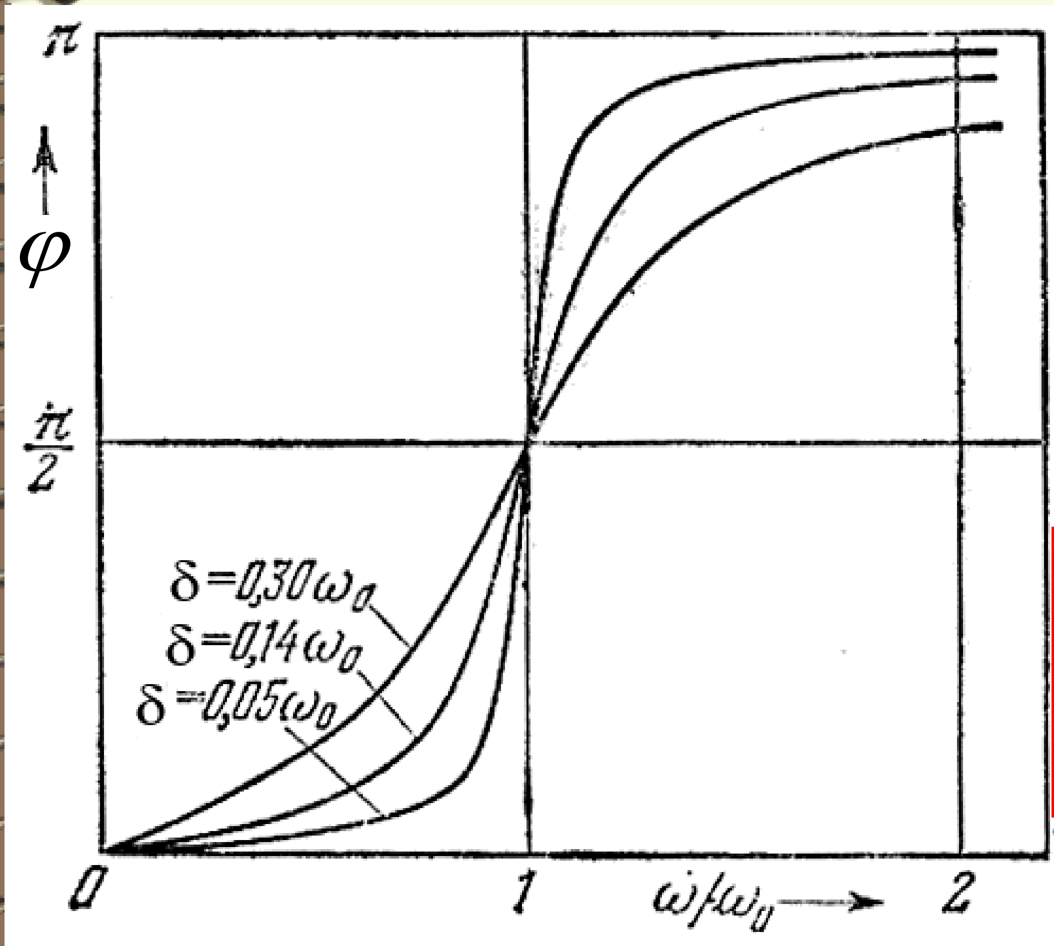
Разделим полученную ***резонансную амплитуду*** на ***статическое смещение*** системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины

$$\boxed{B_{\text{ст}} = F_0/m\omega_0^2}$$

$$\boxed{\frac{B_{\text{рез}}}{B_{\text{ст}}} = \frac{F_0}{m2\delta\omega_0}\cdot\frac{m\omega_0^2}{F_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0 T}{2\delta T} = \frac{2\pi}{2d} = \frac{\pi}{d} = Q}$$

<u>Добротность</u> показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает статическое смещение системы при одинаковой силе.

Зависимость сдвига фазы вынужденных колебаний относительно вынуждающей силы для различных коэффициентов затухания :



$$\boxed{\varphi = arctg\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

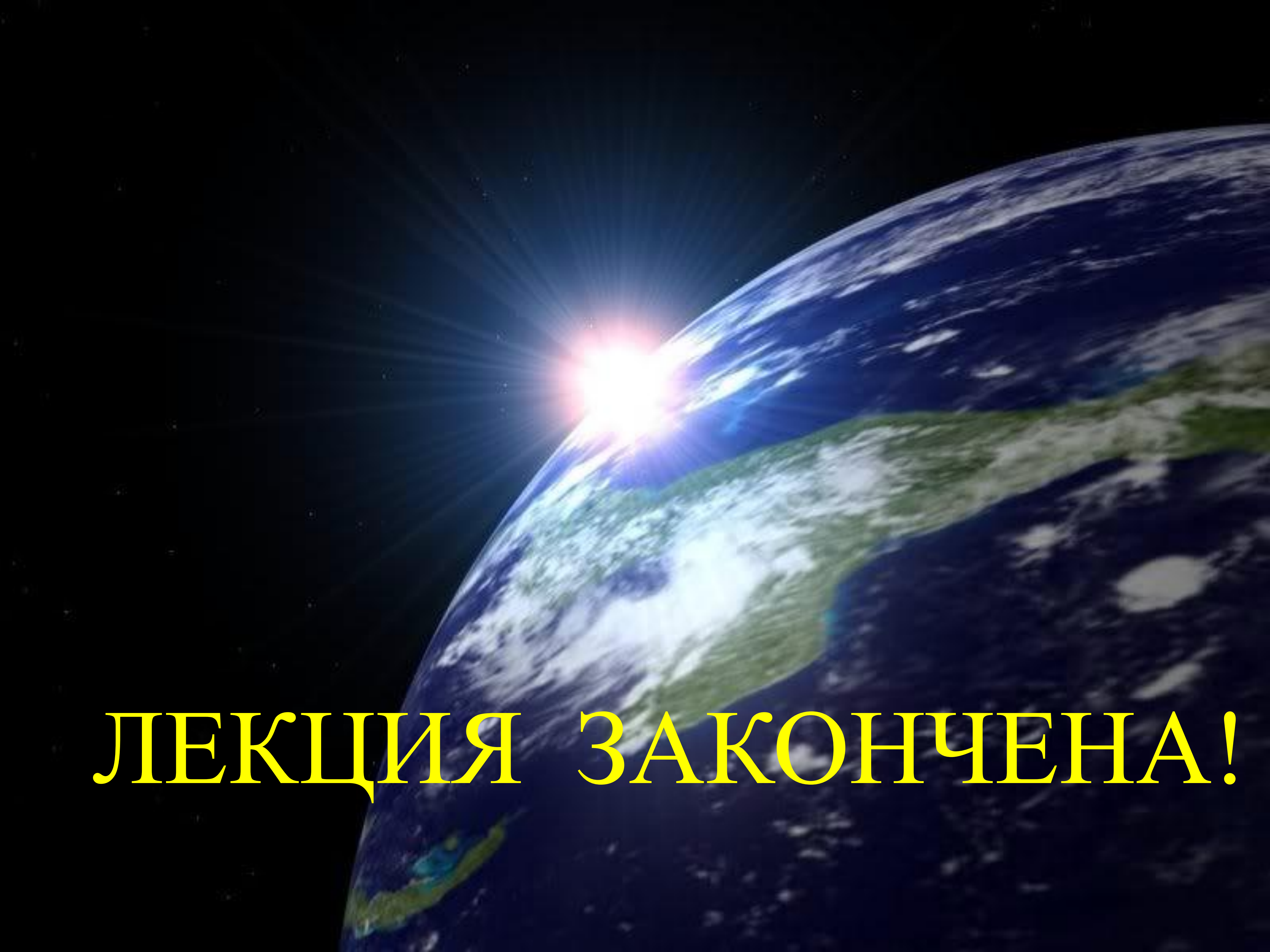
1. $\omega = 0$ $\quad \varphi = 0$

2. $\omega = \omega_{рез}$

$$\boxed{\varphi_{рез} = arctg\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\delta}}$$

$\omega_{рез} \le \omega_0$, $\varphi \le \pi/2$

3. $\delta = 0$; $\omega_{рез} = \omega_0$; $\varphi \to \pi/2$.


ЛЕКЦИЯ ЗАКОНЧЕНА!