The background of the image is a spiral-bound notebook with a light beige, textured cover. The metal spiral binding is visible on the left side. The text is written in a bold, green, serif font with a slight shadow effect.

Физика колебаний и волн. Квантовая физика.

Лекция № 14

*Основные определения,
законы и формулы
изученные в этом
семестре.*

Виды и признаки колебаний

В физике особенно выделяют колебания двух видов – механические и электромагнитные и их электромеханические комбинации, поскольку они чрезвычайно актуальны для жизнедеятельности человека.

Для колебаний характерно превращение одного вида энергии в другую – кинетической в потенциальную, магнитной в электрическую и т.д.

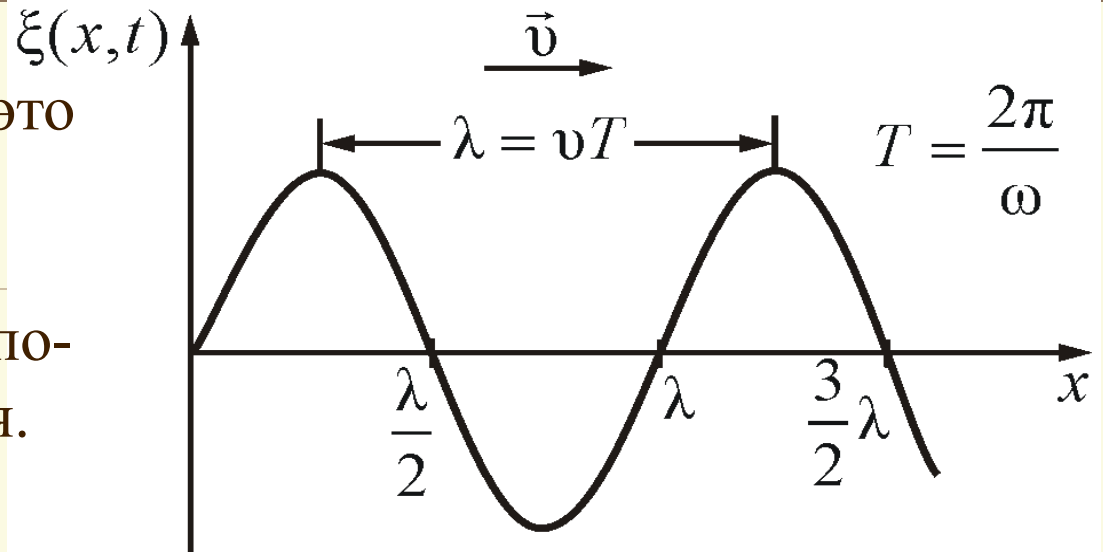
Колебательным движением (или просто колебанием) называются процессы, повторяющиеся во времени.

Существуют общие закономерности этих явлений.

Волновая функция-это

$$\xi = \xi(x, y, z, t)$$

смещение точек из положения равновесия.



Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны λ** : $\lambda = vT$

$$T = \frac{1}{\nu} \quad \begin{array}{l} \text{— период,} \\ \nu \text{ — частота.} \end{array}$$

$$v = \lambda \nu \quad \text{— скорость распространения волны.}$$

В среде без дисперсии **скорость распространения волны v** есть **фазовая скорость** или **скорость распространения поверхности постоянной фазы**.

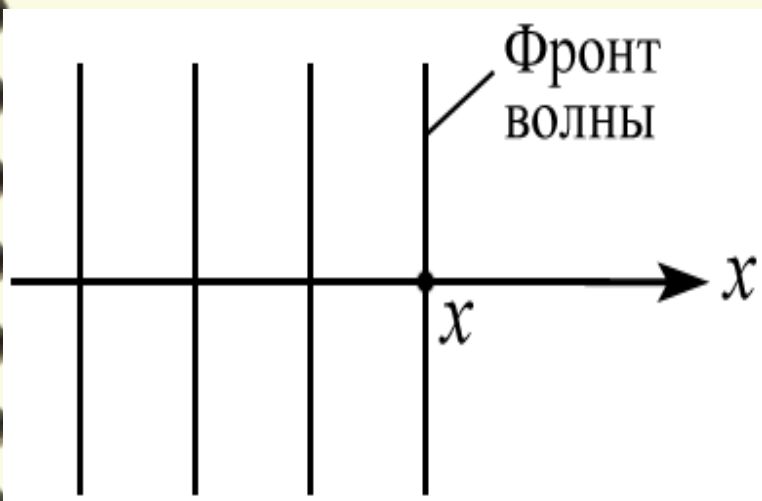
Уравнение плоской волны

Найдем вид волновой функции, ξ в случае плоской волны предполагая, что колебания источника носят гармонический характер:

$$\xi = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Пусть $\varphi_0 = 0$ $\xi = \xi(0, t) = A \cos \omega t$

Чтобы пройти волне путь x нужно время: $\tau = \frac{x}{v}$



$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

— ЭТО **уравнение плоской волны**
(смещение частиц в волне).

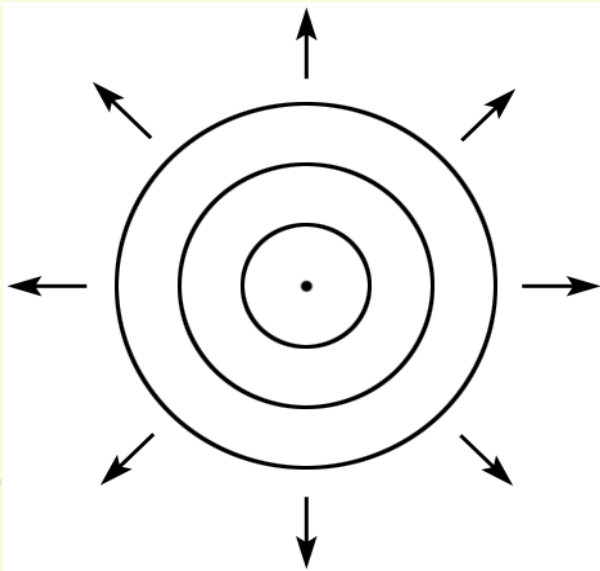
Уравнение сферической волны

Пусть начальная фаза $\varphi_0 = 0$

Амплитуда колебаний убывает по закону

$$A \sim \frac{1}{r}$$

Уравнение сферической волны:



или

$$k = \frac{\omega}{v}$$

$$\xi = \frac{A}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right)$$

$$\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$$

При поглощении средой энергии волны:

$$\xi = \frac{A}{r} e^{-\beta r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

β – коэффициент затухания.

Волновое уравнение

Распространение волн в однородной среде в общем случае *описывается волновым уравнением* — дифференциальным уравнением в частных производных (скалярное волновое уравнение):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

или

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Всякая функция, удовлетворяющая этому уравнению, описывает некоторую волну, причем v - фазовая скорость волны.

Решением волнового уравнения

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

является уравнение *любой волны*, например:

сферической: $\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$

или *плоской*: $\xi = A \cos(\omega t - kr)$

Для *плоской волны*, распространяющейся
вдоль оси x , *волновое уравнение* упрощается:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

где $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Волновое уравнение ЭМВ

Векторы напряженности \vec{E} и \vec{H} электромагнитного поля удовлетворяют векторным волновым уравнениям :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = 0$$

Решение уравнений (плоск. волн):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \vec{H}}{dt^2} = 0$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

где \vec{E}_0 и \vec{H}_0 - амплитуды; φ_0 - начальная фаза колебаний;
 ω - круговая частота; $k = \frac{\omega}{v}$ - волновое число.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad - \text{ оператор Лапласа}$$

**Объемная плотность энергии в электро-
магнитной волны**

$$\omega = \omega_{\text{э}} + \omega_{\text{м}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H_0^2}{2}$$

**Поток энергии через единичную площадку,
перпендикулярную направлению распростране-
ния волны в единицу времени:**

$$P = \omega \cdot \nu = E \cdot H$$

**Вектор плотности потока
электромагнитной энергии называется
вектором Умова – Пойнтинга или чаще
вектором Пойнтинга:**

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]$$

Интенсивность электромагнитной волны **I** :

$$I = |\overline{P}| = \frac{1}{T} \left| \int_0^T P dt \right|$$

Для **плоской монохроматической** электромагнитной волны **интенсивность** равна:

$$I = |\overline{P}| = c\varepsilon_0 |\overline{E}|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{c\varepsilon_0 E_o^2}{2}$$

т.к. $E = E_o \cos(\omega t - kx + \varphi_o)$ и

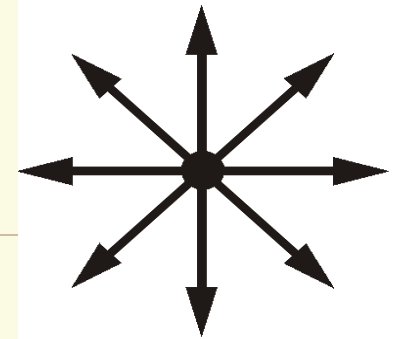
$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kx + \varphi_o) dt = \frac{1}{2}$$

Интерференция наблюдается в результате наложения **когерентных** волн **линейно поляризованных в одной плоскости**. При этом происходит либо ослабление, либо усиление интенсивности света в зависимости от соотношения фаз складываемых волн.

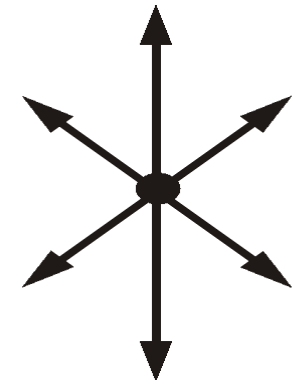
Условия интерференции света:

1. **Когерентность** волн , т. е. у этих волн разность фаз не зависит от времени (сохраняется за время наблюдения). Этому условию удовлетворяют монохроматические электромагнитные волны, частоты которых одинаковы.
2. **Волны** должны быть **линейно поляризованы в одной плоскости**.

*Естественный свет —
неполяризованный:*



*Свет с преимущественным
направлением колебаний вектора \vec{E}
называют **частично
поляризованным светом:***



Линейная поляризация:

*Электромагнитная волна в этом
случае называется **полностью
поляризованной.***



Интенсивность результирующей волны от двух точечных источников в точке наблюдения A будет :

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\cos\Delta\varphi(x)$$

где $I_1(x)$ и $I_2(x)$ - интенсивность каждого поля по отдельности, $\Delta\varphi(x) = k\Delta x$ - пространственное распределение разности фаз этих полей вдоль оси x . Если $I_1(x) = I_2(x) = I_0(x) = I_0$, то

$$I_p = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \left[\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) \right] \right\}$$

т.к. $\cos \Delta\varphi = \cos \left[\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] = \cos [k(r_2 - r_1)]$

и источники синфазны, то

$$I_p = 2I_0 (1 + \cos(kd \sin \varphi))$$

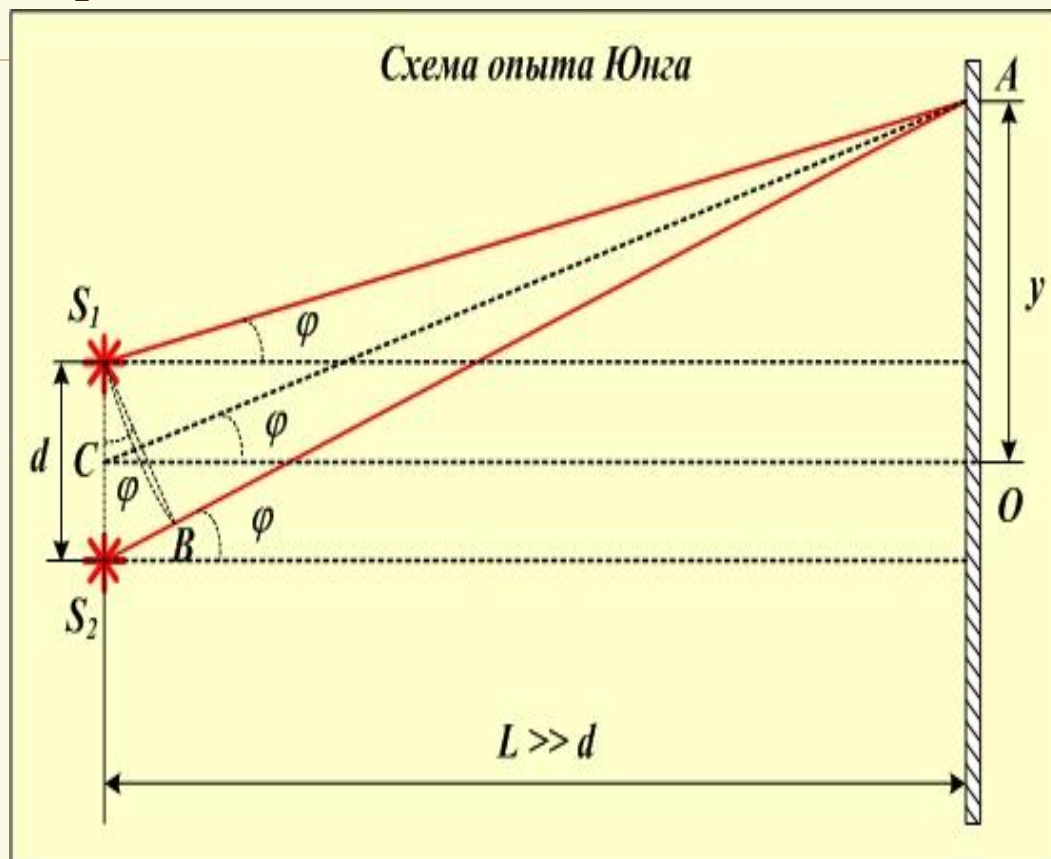
Определим положение интерференционных **минимумов** на экране. Пусть минимум находится в точке A. Тогда оптическая разность хода между лучами S_1A и S_2A должна быть равна нечётному числу длин полуволн.

$$\delta = d \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Итак, условия наблюдения интерференционных максимумов и минимумов в опыте Юнга:

максимум $d \sin \varphi = m\lambda,$

минимум $d \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}.$



Дифракция – совокупность явлений, обусловленных волновой природой света и связанных с перераспределением интенсивности излучения, возникающих при распространении волн в средах с резкими неоднородностями (например, при прохождении через отверстия в непрозрачных экранах, вблизи границ непрозрачных тел или прозрачных тел).

Дифракция приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрич. тени.

Различают два вида дифракции:

- **дифракция Френеля** – дифракция в сходящихся лучах;
- **дифракция Фраунгофера** (дифракция в параллельных лучах) - источник света и точка наблюдения расположены от препятствия далеко, падающие на препятствие и идущие в точку наблюдения лучи образуют практически параллельные пучки.

Первое объяснение дифракции света принадлежит французскому физiku **Френелю** (1818 г.). Он показал, что количественное описание дифракции возможно на основе построений **Гюйгенса**, если их дополнить принципом интерференции вторичных волн.

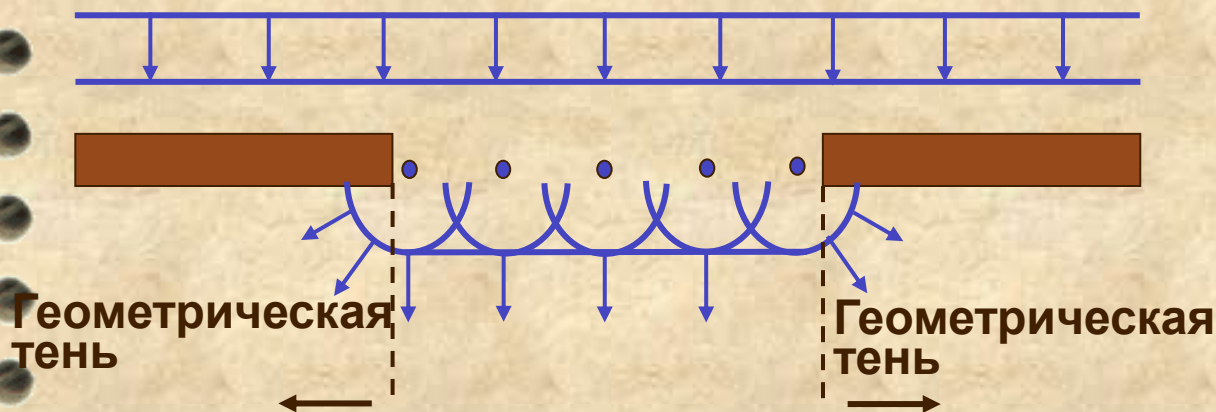
Принцип Гюйгенса-Френеля.

Проникновение световых волн в область геометрической тени объясняется с помощью принципа Гюйгенса.

В соответствии с этим принципом каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром *вторичных* волн; огибающая этих волн дает положение фронта волны в следующий момент.

Пусть на плоскую преграду с отверстием падает параллельный ей фронт волны.

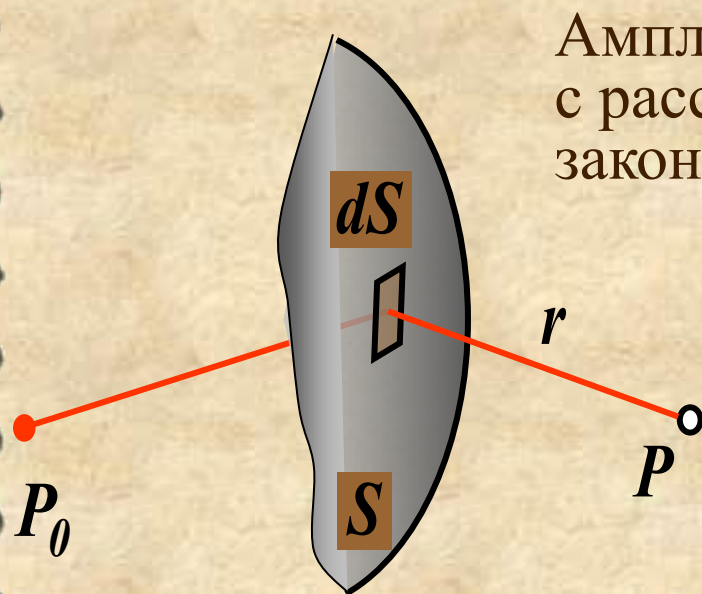
По Гюйгенсу каждая точка выделяемого отверстием участка волнового фронта служит центром вторичных волн, которые в однородной изотропной среде будут сферическими.



За отверстием волна, огибая края преграды, проникает в область геометрической тени.

Принцип Гюйгенса позволяет решать задачу о направлении распространения волнового фронта. Вопрос об интенсивности световой волны за преградой не затрагивается. Этот недостаток был устранен Френелем.

В соответствии с **принципом Гюйгенса–Френеля** каждый элемент dS волновой поверхности S служит источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна величине элемента dS .



Амплитуда сферической волны убывает с расстоянием r от источника по закону $1/r$

Следовательно, от каждого участка dS волновой поверхности в точку P , лежащую перед этой поверхностью, приходит колебание с напряжённостью:

$$dE = \frac{E_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0) f(\alpha) dS$$

Зоны Френеля

Определим амплитуду светового колебания, возбуждаемого в точке P сферической волной, распространяющейся в изотропной однородной среде из точечного источника P_0 .

Волновые поверхности такой волны симметричны относительно прямой P_0P .



Разобьем волновую поверхность на кольцевые зоны так, чтобы расстояния от краев каждой зоны до P точки отличались друг от друга на половину длины волны $\lambda/2$.

Обладающие таким свойством зоны называются **зонами Френеля**.

b - расстояние от вершины волновой поверхности до точки P .

Зоны Френеля

$$r_m^2 = 2ah_m - h_m^2$$

При малых m высота сегмента $h_m \ll a$, тогда, или $r_m^2 = 2ah_m$

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)} m \lambda}$$

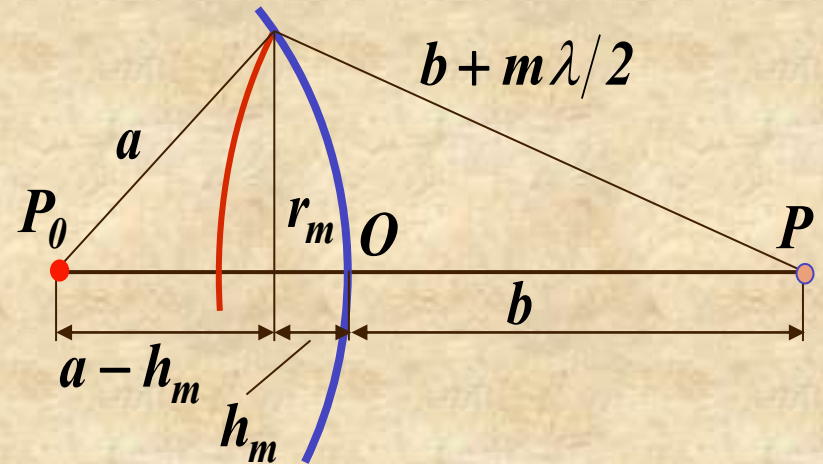
Площадь m -ой зоны равна:

$$\Delta S_m = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \pi \left[\frac{ab}{(a+b)} m \lambda - \frac{ab}{(a+b)} (m-1) \lambda \right] = \frac{\pi ab}{a+b} \lambda$$

Полученное выражение не зависит от m . Это значит, что при малых m площади зон Френеля примерно одинаковы.

Расстояние b_m от внешнего края m -ой зоны до точки P равно $b_m = b + m\lambda/2$ и медленно растет с номером зоны.

Поскольку волна сферическая, то ее амплитуда зависит от b_m .



Зоны Френеля

Следовательно, амплитуда A_m колебания, возбуждаемого m -ой зоной в точке P , монотонно убывает с ростом m .

Итак, амплитуды колебаний, возбуждаемых зонами Френеля в точке P , образуют **монотонно убывающую**

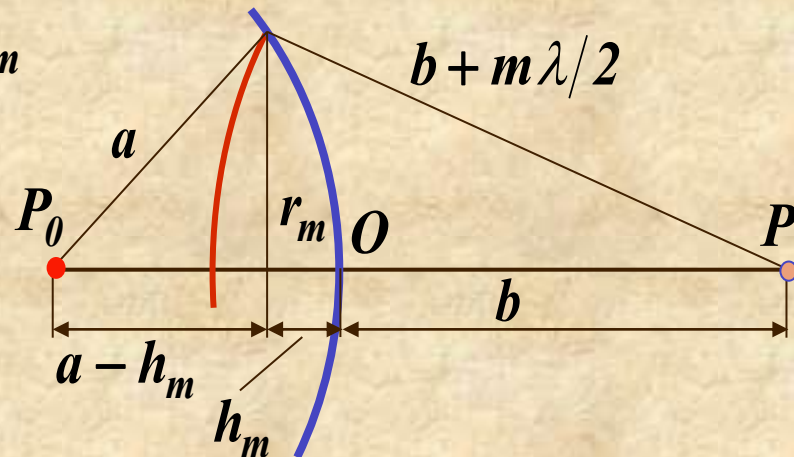
последовательность: $A_1 > A_2 > A_3 > \dots A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$

Фазы колебаний, возбуждаемых соседними зонами, различаются на π .

Следовательно, амплитуда результирующего колебания в точке P может быть представлена в виде:

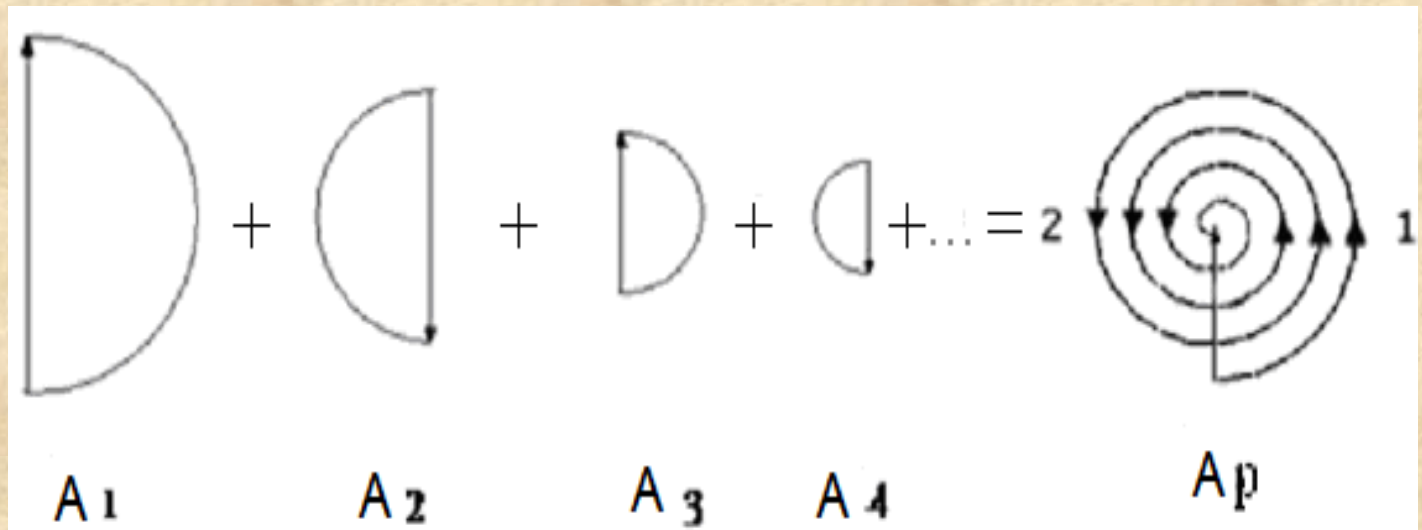
$$A_p = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$$

Все амплитуды от нечетных зон входят в это выражение с одним знаком, от четных — с другим.



Метод векторных диаграмм.

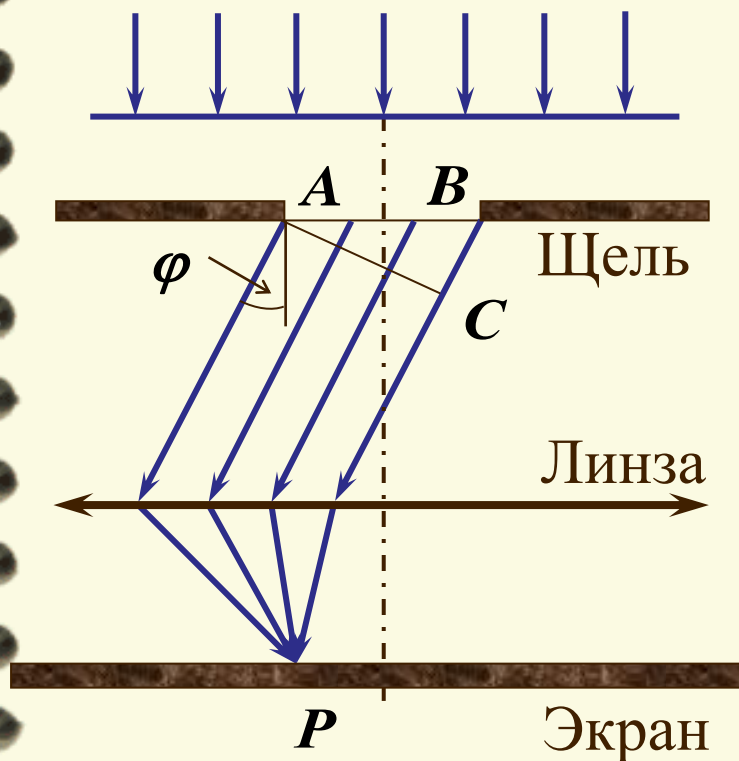
Количественные результаты для осесимметричных задач дифракции получаются с помощью векторных диаграмм на основе специально построенной спирали, которая более детально описывает волновые поля отдельных зон Френеля. С целью получения этой спирали каждый вектор нечетной зоны Френеля дополняется полуокружностью, расположенной справа от него, а каждый вектор четной зоны Френеля – полуокружностью, расположенной слева от него



Образуется непрерывная спираль (спираль Френеля), которая накручивается на конец результирующего вектора A_r , описывающего суммарное волновое поле в точке наблюдения P . Напомним, что длина вектора A_r в два раза меньше длины вектора A_1 .

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Схема дифракции Фраунгофера (1821-1822): точечный источник света помещается в фокусе собирающей линзы; дифракционная картина исследуется в фокальной плоскости второй собирающей линзы, установленной за препятствием. Дифракция на щели.



Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на непрозрачное препятствие с узкой щелью AB шириной b и длиной $l \gg b$ (бесконечно длинная щель). L - расстояние от щели до экрана.

Дифракционная картина наблюдается на экране, который находится в фокальной плоскости собирающей линзы.

Линза установлена за препятствием. Плоскость щели и экран параллельны друг другу.

Условия приближения геометрической оптики, дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера.

Вид дифракционной картины на экране зависит от величины волнового параметра

$$p = \sqrt{\frac{\lambda \cdot L}{b^2}} = \frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b}$$

1) Если $p \ll 1$ (“широкая” щель)

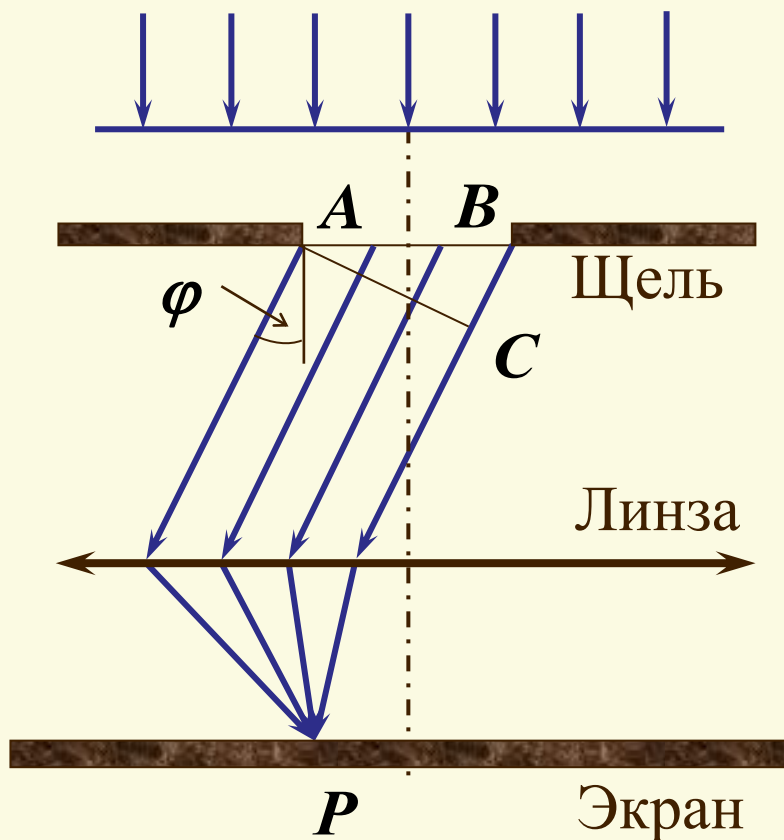
$\frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b} \ll 1$ или $b \gg \sqrt{\lambda \cdot L}$ - широкая щель много больше размеров первой зоны Френеля и распределение интенсивности света за щелью можно получить с помощью обыкновенной геометрической оптики.

Число Френеля $N_\phi = \frac{b^2}{\lambda \cdot L} \sim m$; $N_\phi = p^{-2}$,

где m – число открытых зон Френеля. $N_\phi \gg 1$.

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Дифракция на щели



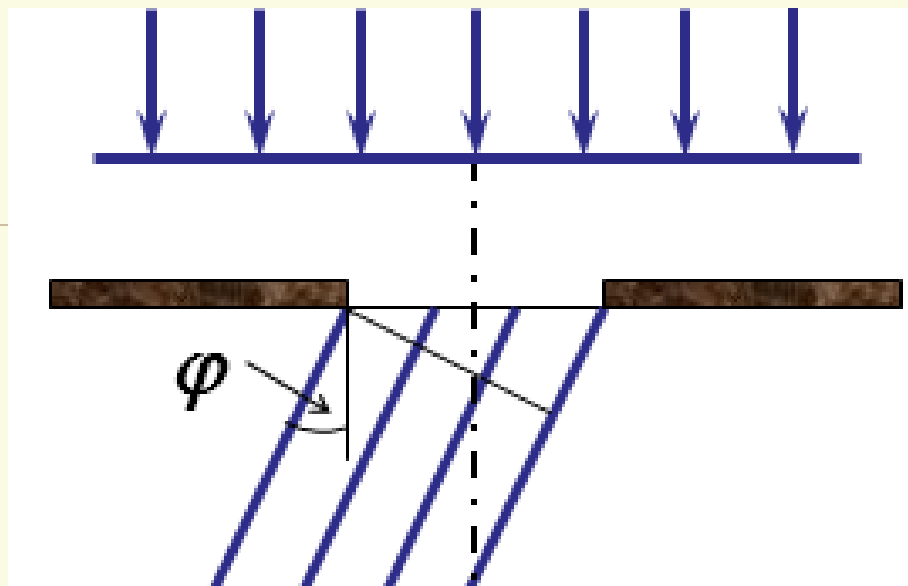
Запишем условия для минимумов и максимумов дифракционной картины на экране (для точки P):

а) **Дифракционный минимум** (полная темнота) наблюдается тогда, когда число зон Френеля в плоскости щели *четное*, т.е.

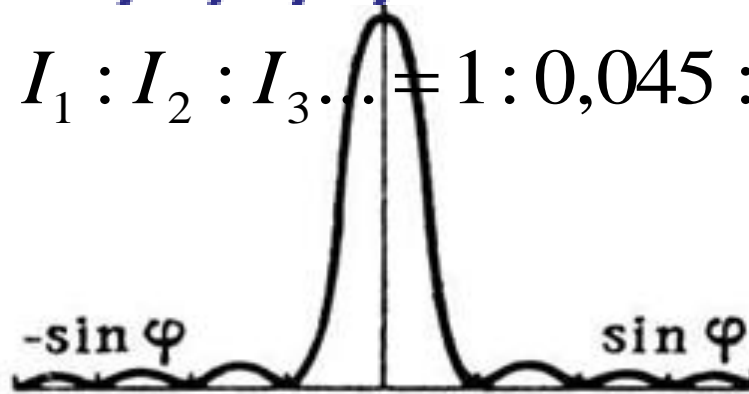
$$b \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

б) **Дифракционный максимум** наблюдается тогда, когда число зон Френеля в плоскости щели *нечетное*, имеется одна некомпенсированная зона, т.е.

$$b \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$



$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 \dots = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008 \dots$$

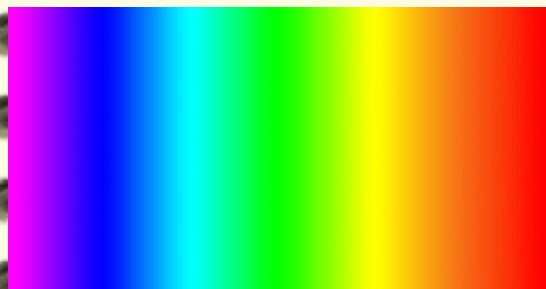


Угловой размер
центрального
max :

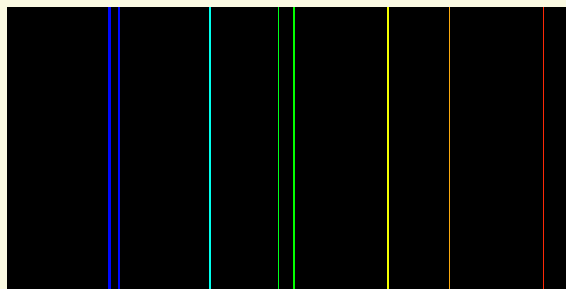
$$\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{b}$$

Виды спектров

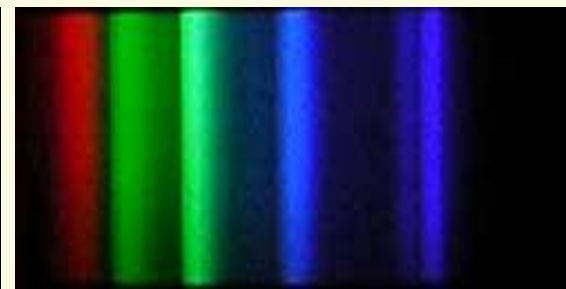
Непрерывные



Линейчатые



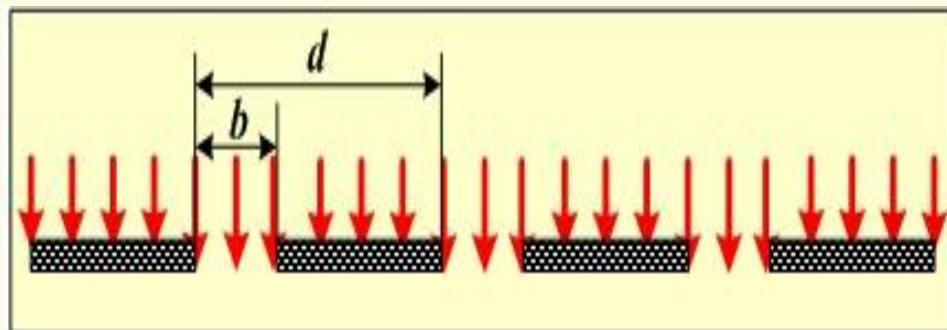
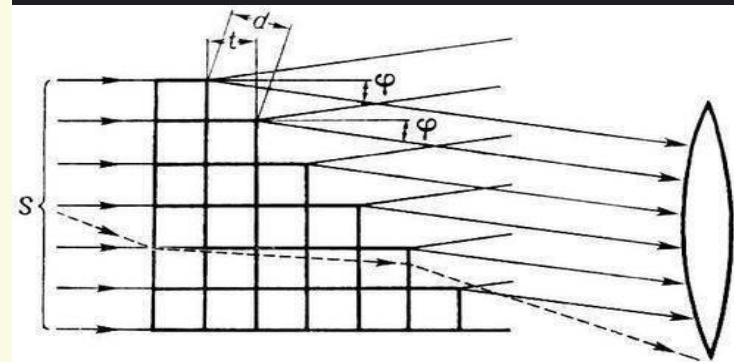
Полосатые



Спектральные приборы

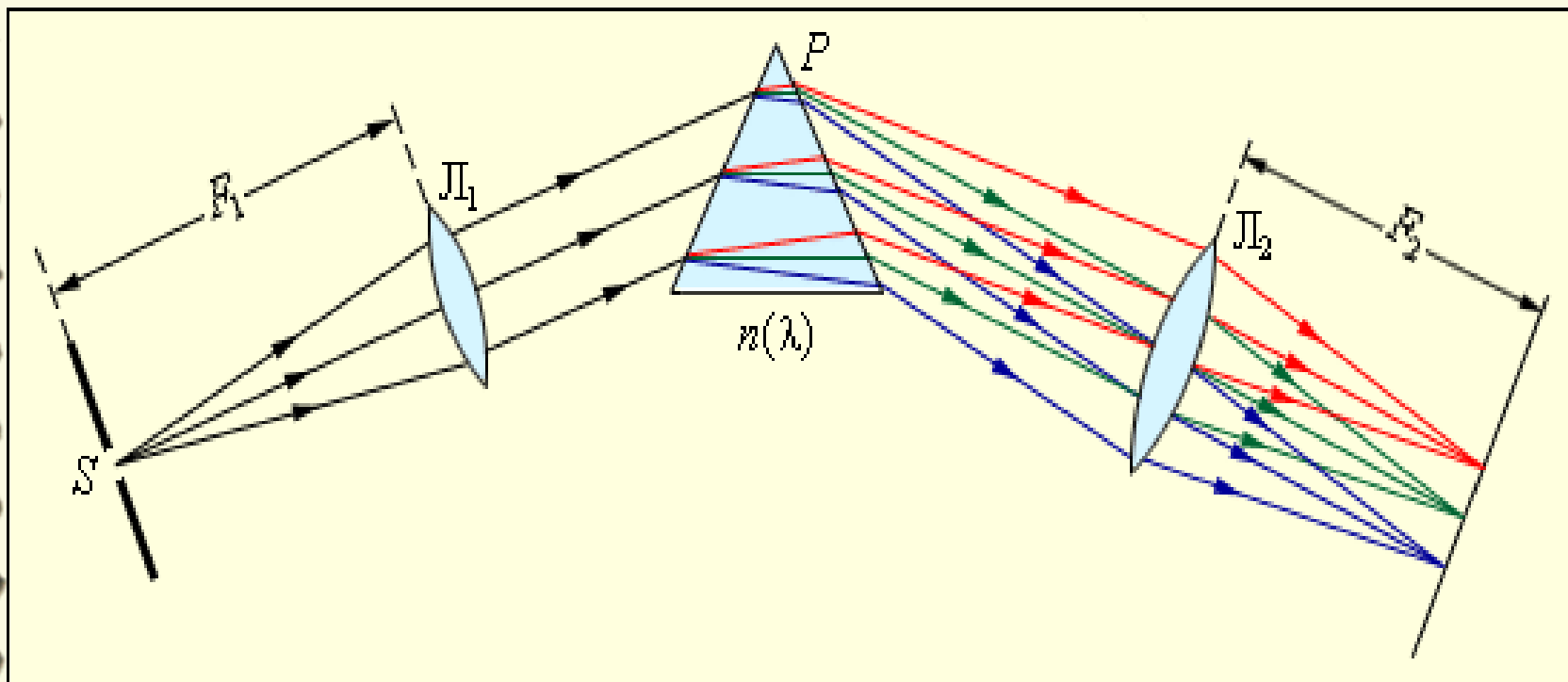
делятся на:

- а) призмные (призма в качестве диспергирующего элемента)
- б) интерференционные (эшелон Майкельсона, эталон Фабри-Перо)
- в) дифракционные (дифракционные решётки).



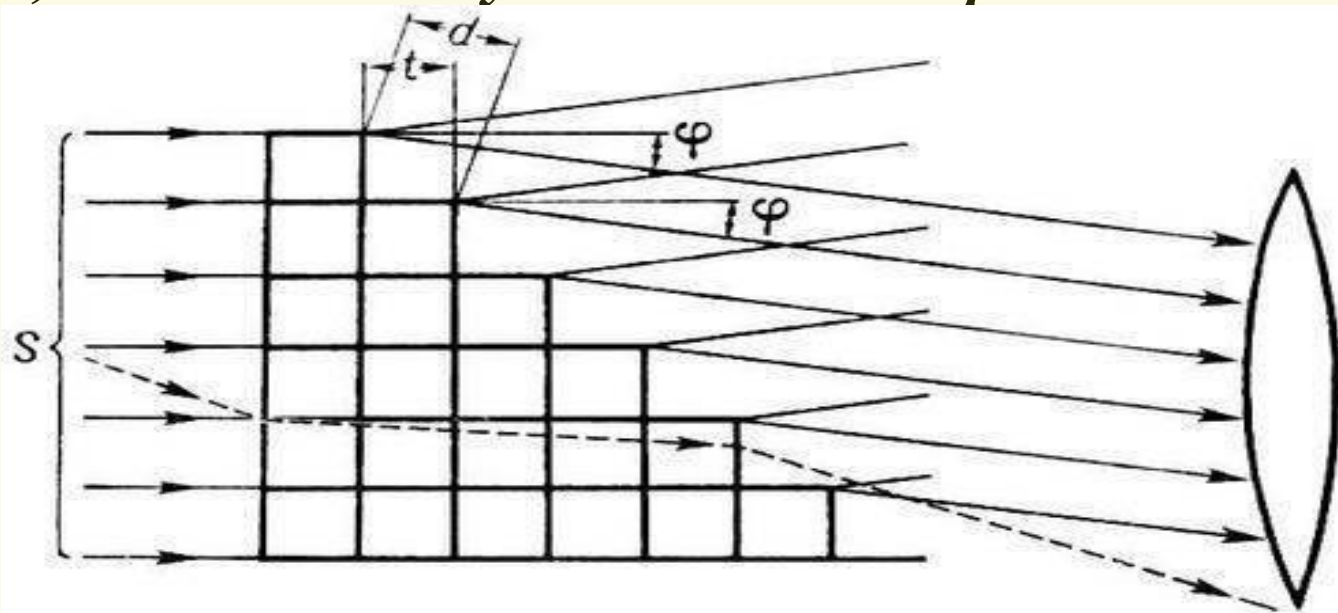
а) Призменные спектральные приборы.

Для разложения излучения в спектр в простейшем **спектральном приборе** используется **призма**. Действие призмы основано на явлении дисперсии, то есть зависимости показателя преломления n вещества от длины волны света λ (в прозрачных средах n растёт с уменьшением длины волны).



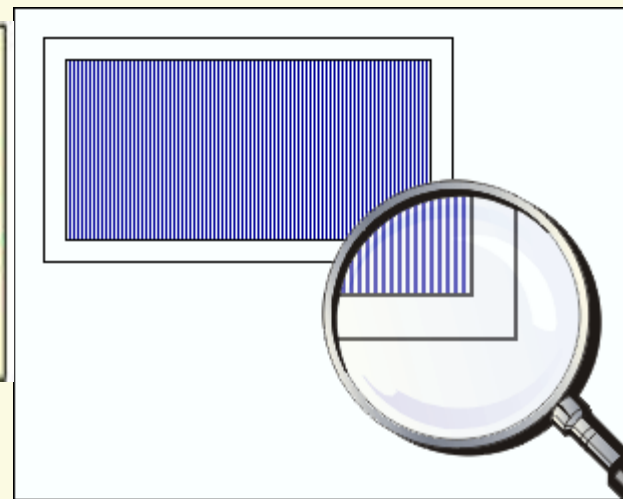
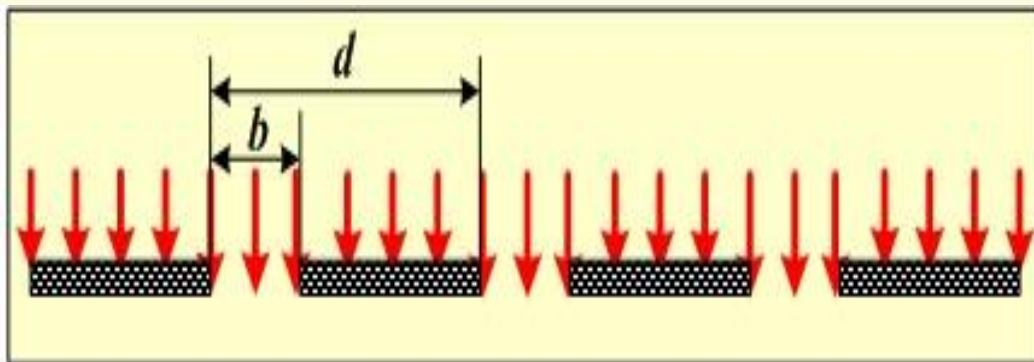
б) интерференционные спектральные приборы.

Эшелон Майкельсона - спектральный прибор, представляющий собой стопу стеклянных или кварцевых пластин одинаковой толщины, сложенных на оптический контакт так, что их концы образуют "лестницу" со ступеньками равной высоты. Впервые построен А. Майкельсоном в 1898. Разность хода двух соседних лучей в э. М. составляет десятки тысяч длин волн света, а число этих лучей обычно не превышает 30—40.



в) дифракционные спектральные приборы.

Дифракционная решётка.



Дифракционная решётка — совокупность большого числа регулярно расположенных штрихов (канавок, щелей, выступов), нанесённых на плоскую или сферическую поверхность. На практике обычно щели — это прозрачные участки стеклянных пластинок, разделенные непрозрачными штрихами, наносимыми с помощью алмазных резцов. Современные решетки имеют свыше 1000 штрихов на длине в 1 мм.

Разрешающая способность

Разрешающей способностью спектрального прибора называют величину:

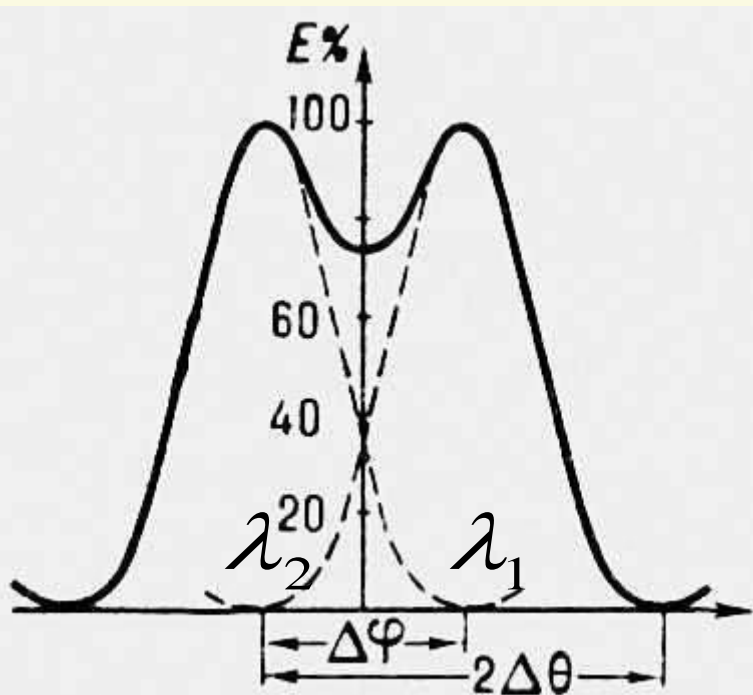
$$R = \frac{\lambda_{cp}}{\delta\lambda}$$

где $\delta\lambda$ – минимальная разность $\delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ в длинах волн, при которой две спектральные линии воспринимаются раздельно.

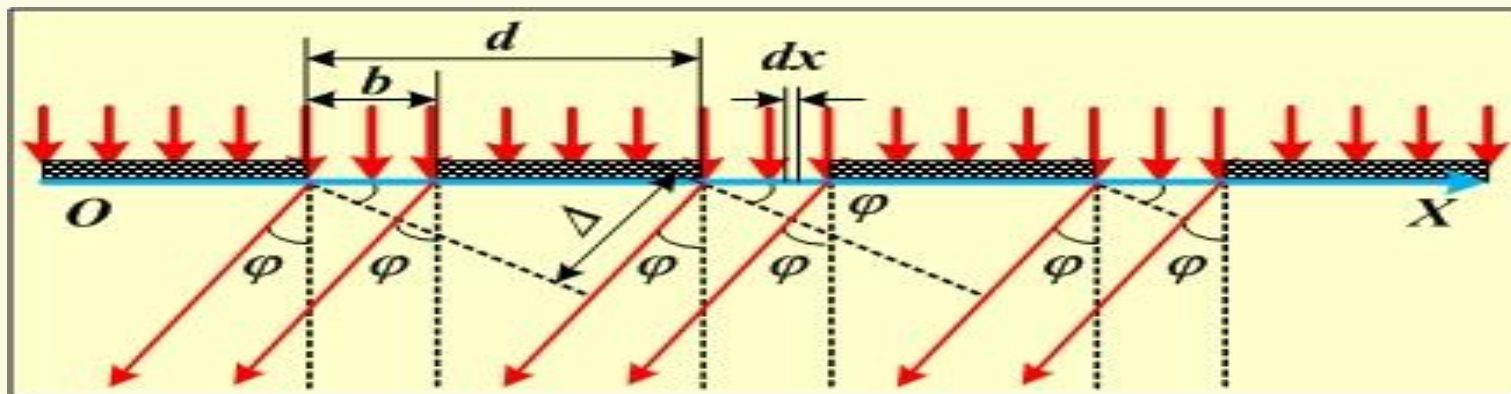
$$\lambda_{cp} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

Критерий Рэля.

По критерию Рэля разрешение считают полным, если максимум первой спектральной линии λ_1 совпадает с минимумом второй λ_2 спектральной линии.



Дифракционная решётка.



Разности хода лучей, идущих от двух соседних щелей, будут для данного направления φ одинаковы в пределах всей дифракционной решетки:

$$\Delta = (a + b) \sin \varphi = d \sin \varphi.$$

Результат интерференции этих лучей на экране зависит от разности фаз складывающихся колебаний. Если она составит $\Delta = \pm 2m \frac{\lambda}{2}$, ($m = 1, 2, 3, \dots$), т.е. лучи придут в одной фазе, то они усилят друг друга, если разность хода составит $\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$, то лучи ослабят друг друга.

Таким образом, *условие главных максимумов для дифракционной решетки* следует записать в виде (m – порядок максимума):

$$d \sin \varphi_{\max} = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

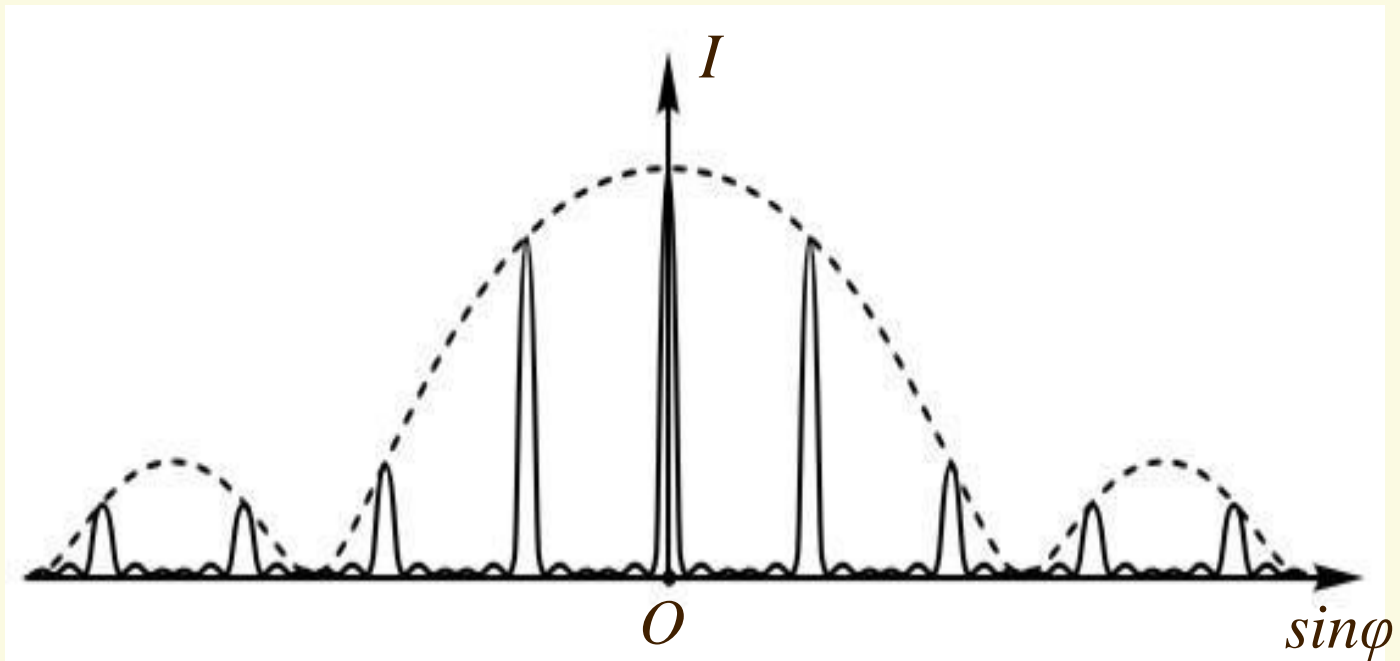
Условие *прежних минимумов* при дифракции на одной щели имеет вид:

$$b \sin \varphi_{\min} = \pm n\lambda \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Чем больше щелей N , тем большее количество световой энергии пройдет через решетку, тем больше минимумов (дополнительных) образуется между соседними главными максимумами, тем, следовательно, более интенсивными и более острыми будут максимумы.

*Дифракционная картина от решётки с
 $N = 6$ щелями.*

*$(N - 1)$ дополнительных минимумов
между главными максимумами*



*Условие дополнительных минимумов для
дифракционной решетки :* $d \sin \varphi = \frac{\lambda}{N} m$

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda_{cp}}{\delta\lambda}$$

$$d \sin \varphi_{\max} = m\lambda_1$$

$$d \sin \varphi_{\min} = m\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{N}$$

Для того, чтобы разрешить

две линии, нужно чтобы: $\sin \varphi_{\max} = \sin \varphi_{\min}$

$$m\lambda_1 = m\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{N}$$

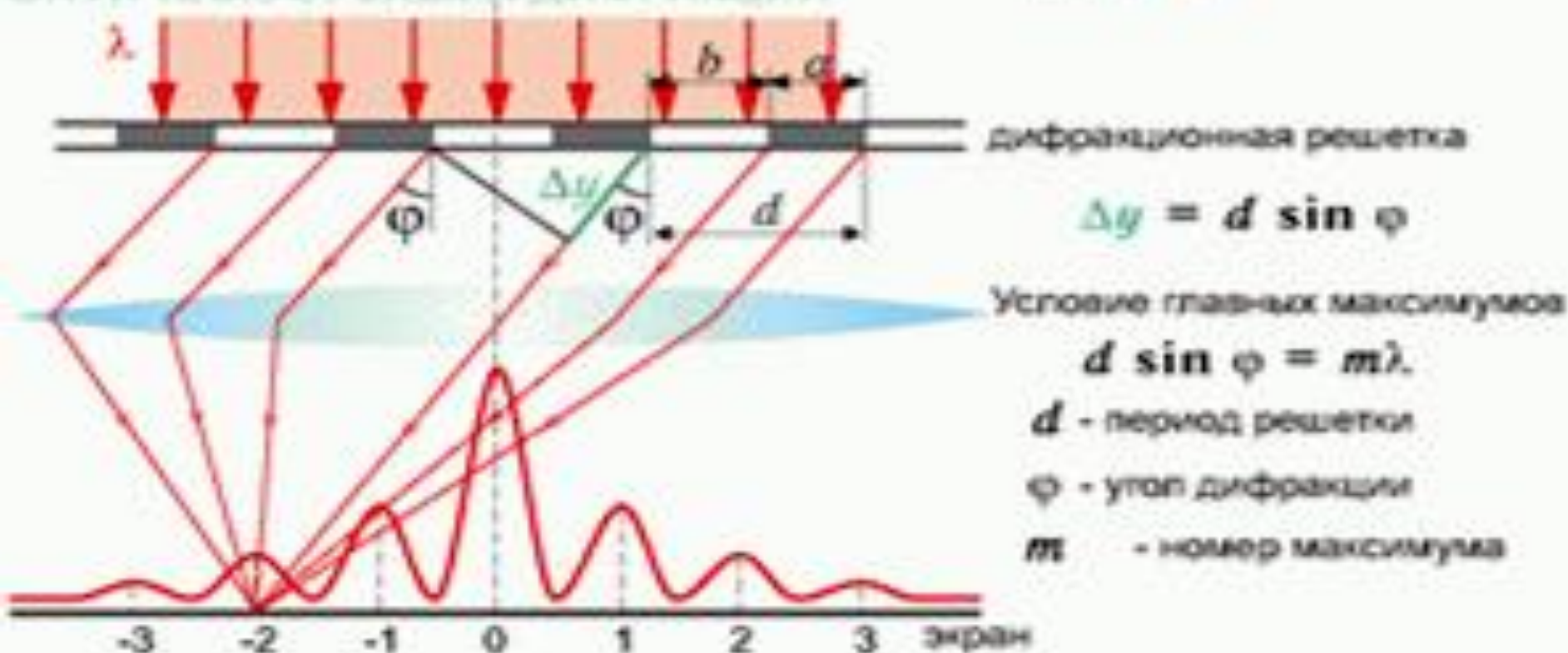
$$m(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{N}$$



$$\frac{\lambda_2}{\delta\lambda} = R = mN$$

Разрешающая
способность
дифракц.реш.

ОПТИЧЕСКАЯ СХЕМА ДИФРАКЦИИ



ДИФРАКЦИОННАЯ КАРТИНА

а) белый свет



б) красный свет $\lambda = 7,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$

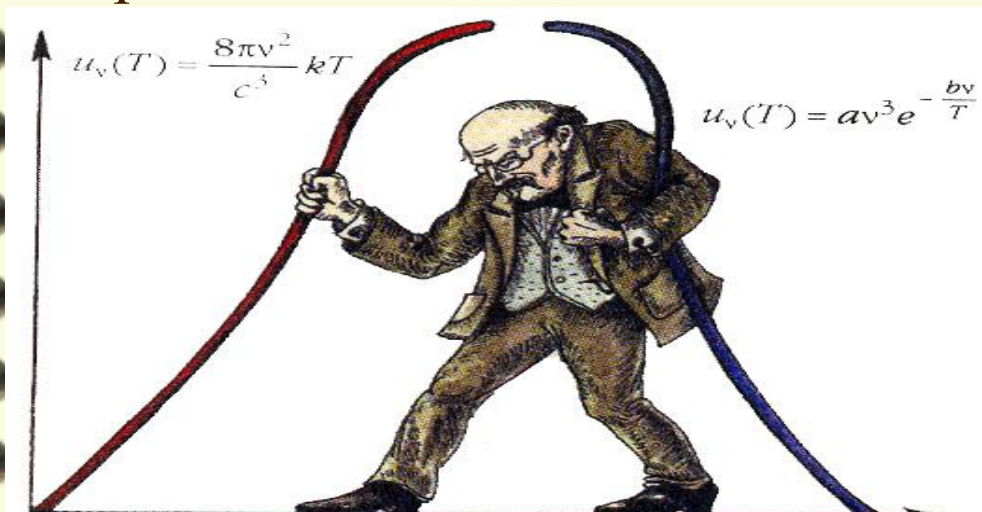


Квантовая гипотеза Планка

Для получения правильной зависимости спектральной плотности излучения от длины волны Планку пришлось отказаться в теории Рэлея и Джинса от классического предположения о равномерном распределении энергии по степеням свободы, а также предположить, что энергия может испускаться только порциями - квантами. Величина такой минимальной порции энергии: $E = h\nu$.



Макс Планк
(1858 - 1947)



Постоянная Планка
 $h = 6,626122 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$

Энергия осциллятора должна быть целым кратным некоторой единицы энергии, пропорциональной его частоте:

$$E_n = nh\nu$$

Минимальная порция энергии (квант):

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

$$\left. \begin{array}{l} h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \\ \hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \end{array} \right\} \text{квант действия -}$$

постоянная Планка.

$$\hbar = h / 2\pi$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

Виды фотоэффекта

Различают *фотоэффект* *внешний*, *внутренний*, *вентильный* и *многофотонный*.

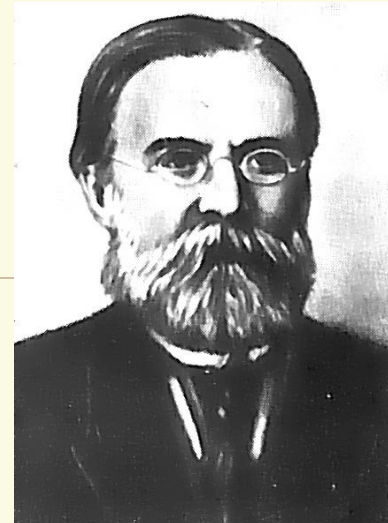
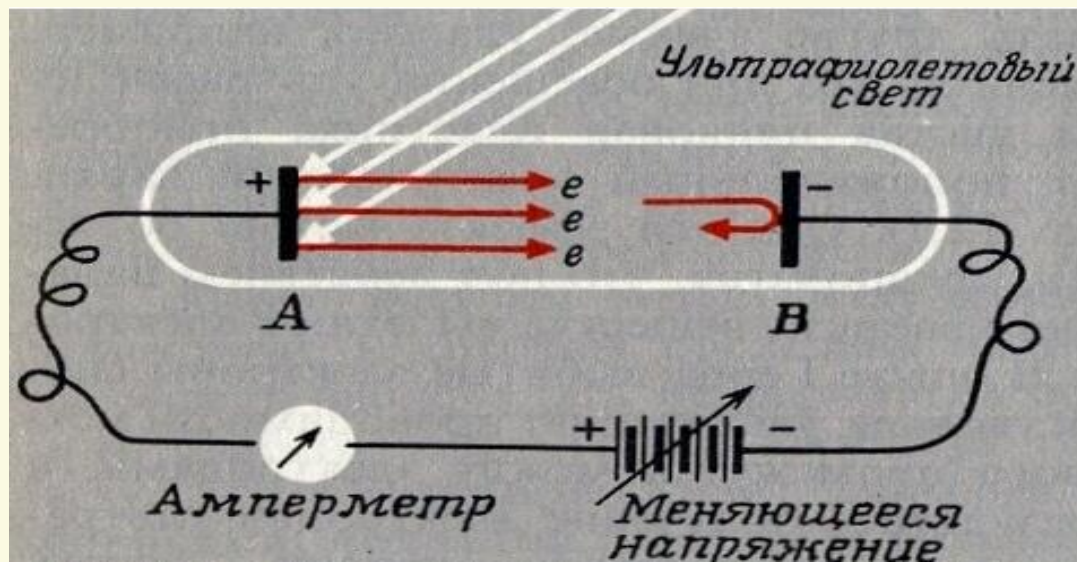
Внешним фотоэффектом называется испускание электронов веществом под действием электромагнитного излучения.

Внутренний фотоэффект – это вызванные электромагнитным излучением переходы электронов внутри полупроводника или диэлектрика из связанных состояний в свободные без вылета наружу.

Вентильный фотоэффект - возникновение эдс (фотоэдс) при освещении контакта двух разных полупроводников или полупроводника и металла (при отсутствии внешнего электрического поля).

Многофотонный фотоэффект возможен, если интенсивность света очень большая (при использовании лазерных пучков). При этом электрон, испускаемый металлом, может одновременно получить энергию не от одного, а от нескольких фотонов.

Исследования А. Г. Столетова

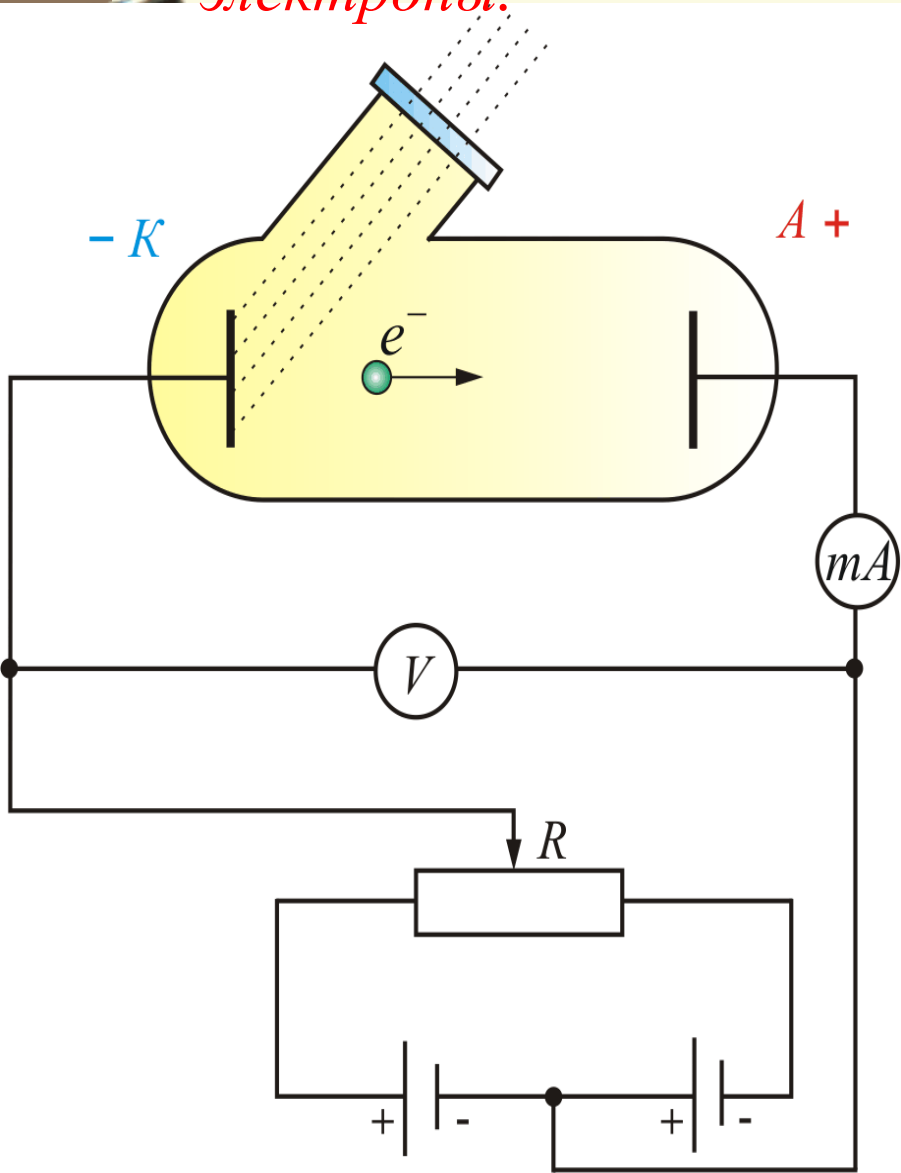


Александр Григорьевич
Столетов (1839 - 1896)

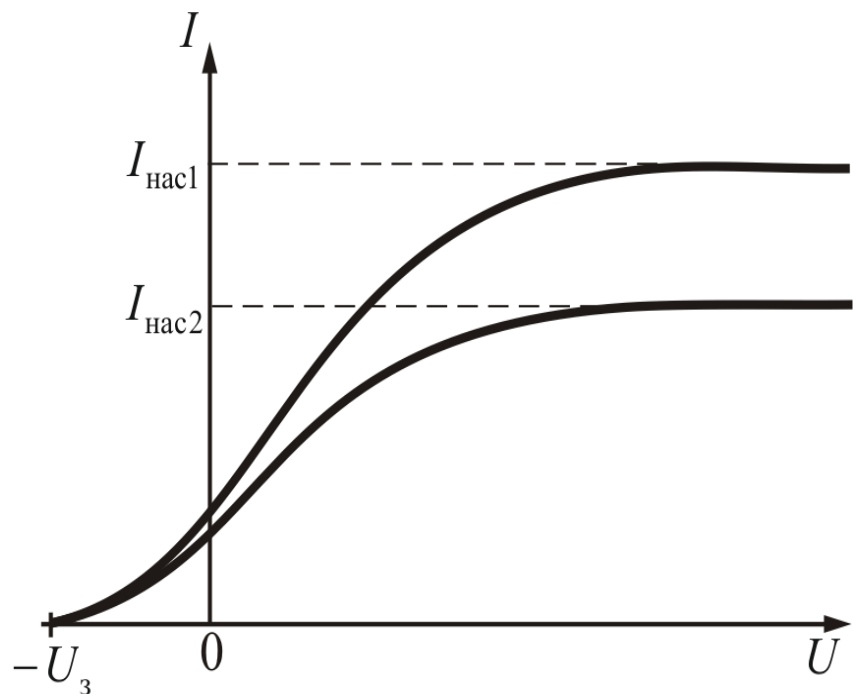
В 1888 - 1889 г. Столетов исследовал влияние излучения ртутной лампы на прохождение тока через плоский конденсатор с цинковыми пластинами. Он установил, что

- 1) на цинковые пластины действуют только УФ-лучи;
- 2) прохождение тока наблюдается только при облучении «отрицательной» пластины;
- 3) сила тока пропорциональна световому потоку;
- 4) нет никакой задержки между началом освещения пластины и возникновением тока (безинерционность фотоэффекта).

В 1899 Дж. Дж. Томпсон и Ф. Ленард доказали, что при фотоэффекте *свет выбивает из вещества электроны*.



Вольтамперная характеристика (ВАХ)



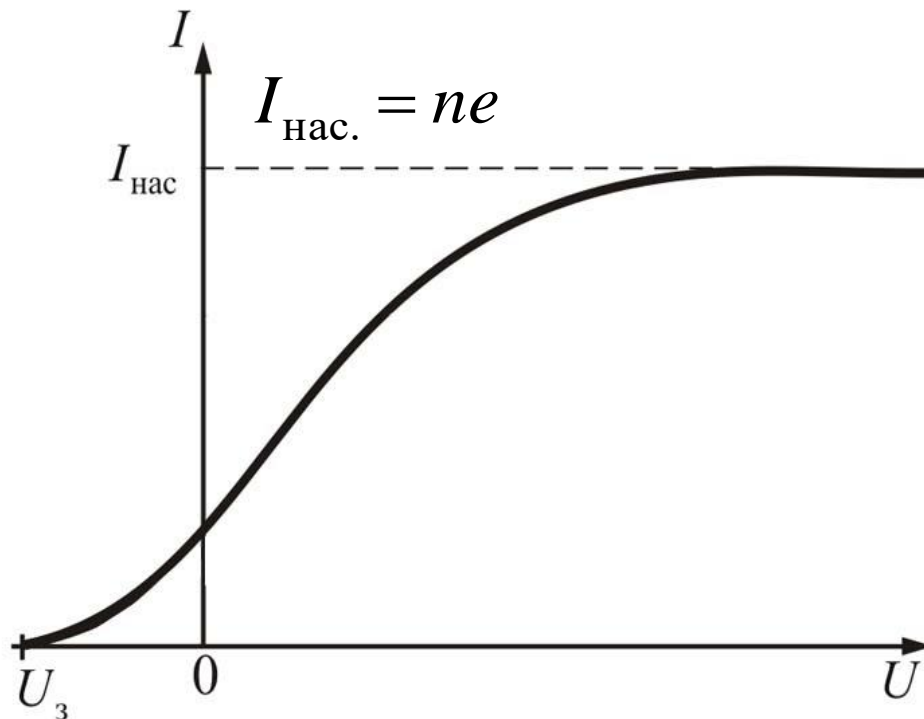
Максимальное значение тока $I_{\text{нас.}}$ — *фототок насыщения* — определяется таким значением U , при котором *все электроны, испускаемые катодом, достигают анода:*

$$I_{\text{нас.}} = ne,$$

где n — число электронов испускаемых катодом в 1 с.

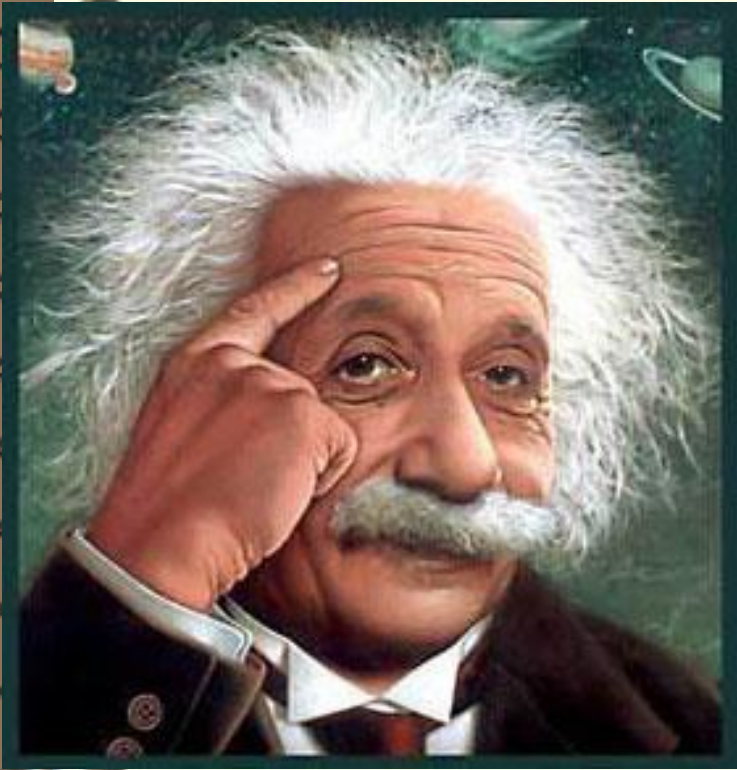
Для того чтобы фототок стал равным нулю, необходимо приложить *задерживающее напряжение U_3*

$$\frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = eU_3$$



Законы внешнего фотоэффекта:

1. **Закон Столетова:** при фиксированной частоте падающего света *число фотоэлектронов*, вырываемых из катода в единицу времени, *пропорционально интенсивности света*.
2. *Максимальная скорость фотоэлектронов не зависит от интенсивности падающего света, а определяется только его частотой ν .*
3. Для каждого вещества существует **красная граница фотоэффекта**, т.е. минимальная частота ν_0 света (зависящая от химической природы вещества и состояния его поверхности), *ниже которой фотоэффект невозможен:*
$$\nu \geq \nu_0 = \frac{A}{h}$$



Объяснение наблюдаемых экспериментально закономерностей было дано Эйнштейном:

Свет не только испускается (Планк), но и распространяется, и поглощается веществом отдельными порциями (квантами), энергия которых :

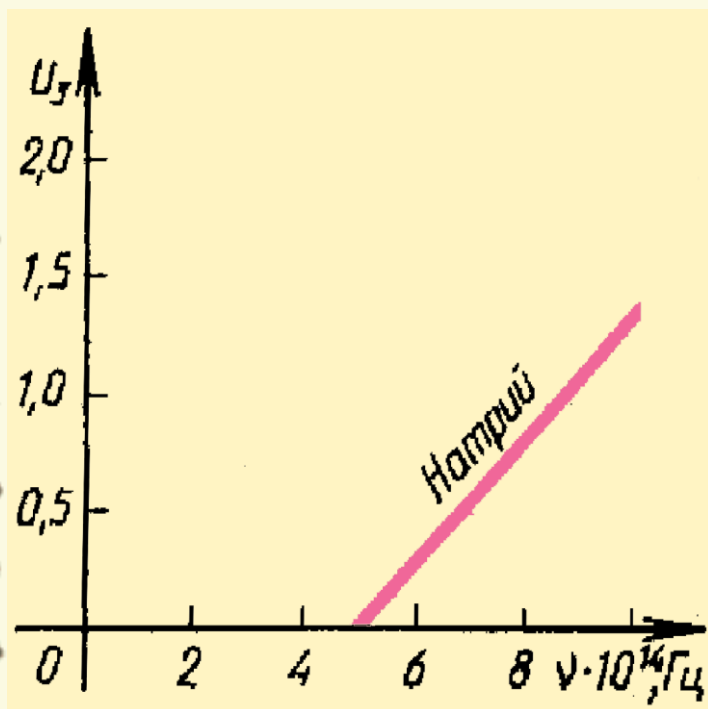
$$E = h\nu.$$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = \frac{mv_{\max}^2}{2} + A.$$

где A – работа выхода электронов.

Красная граница фотоэффекта



При $\nu < \nu_{\min}$ ни при какой интенсивности волны падающего на фотокатод света фотоэффект не произойдет!

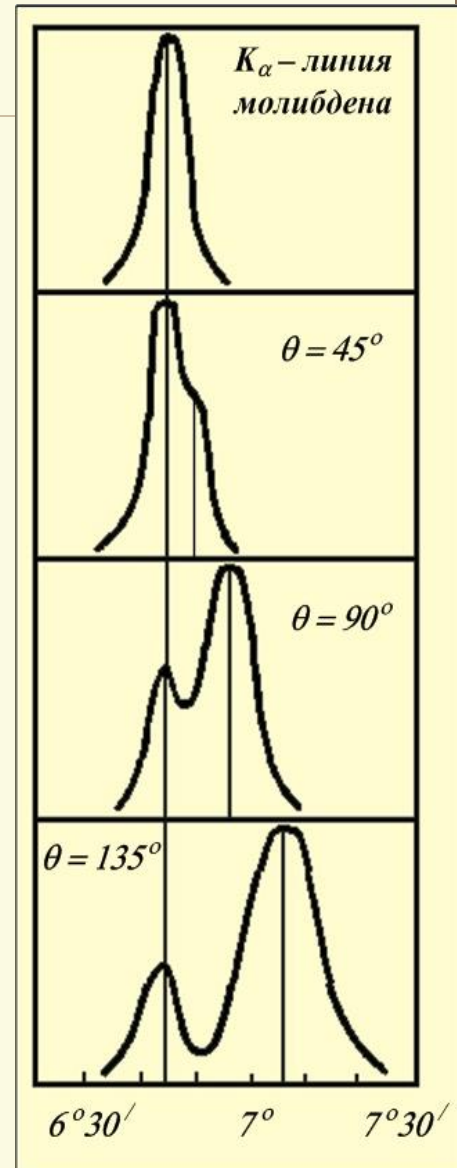
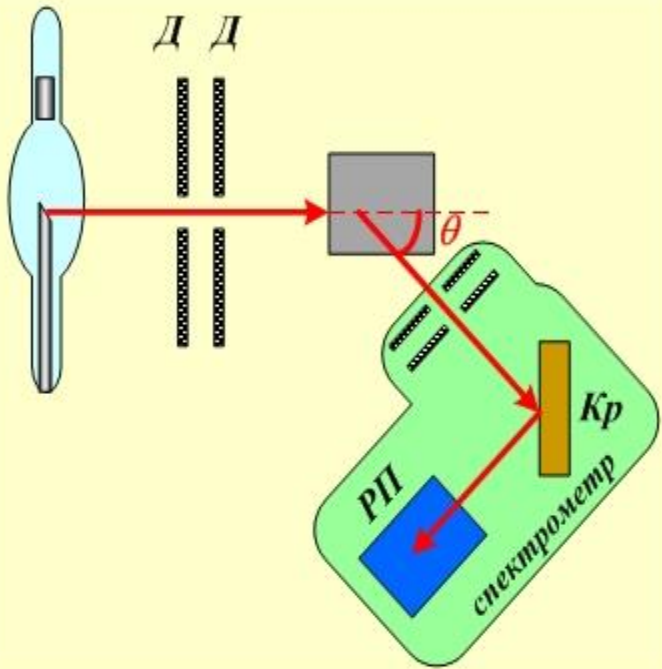
$$\nu_{\min} = \frac{A}{h}$$

Для каждого вещества
своя!!!

Эффект Комптона.

(Неупругое рассеяние рентгеновских фотонов на электронах)

Э. Комптон в 1922 - 23 г. исследовал взаимодействие характеристического рентгеновского излучения молибдена (K_α – линию) с различными веществами. Он обнаружил, что если наблюдать спектр излучения молибдена под некоторым углом к оси исходного рентгеновского пучка, то появляется дополнительная длинноволновая линия.



Экспериментально было установлено, что изменение длины волны при рассеянии рентгеновского излучения составляет $\Delta\lambda = \Lambda(1 - \cos \vartheta) = 2\Lambda \sin^2 \vartheta$,

$$\Lambda = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ (м)}.$$

Объяснить этот эффект можно, рассмотрев взаимодействие рентгеновских фотонов с электронами. (Если бы фотоны взаимодействовали с атомами вещества, результат зависел бы от рода вещества).

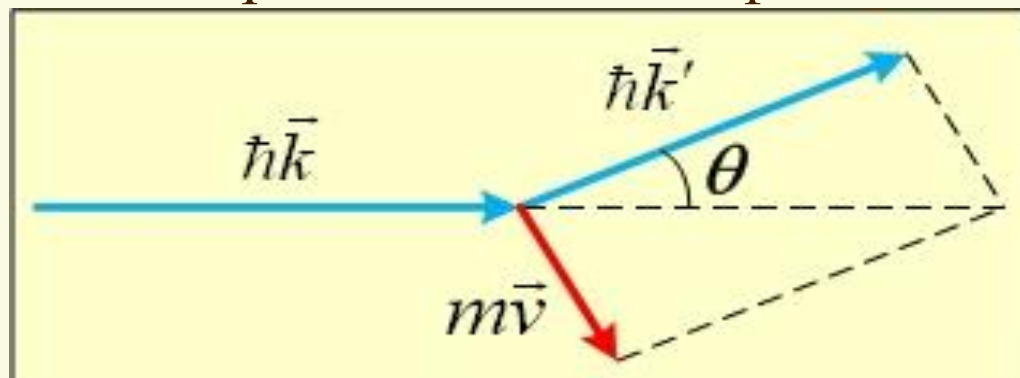
Рассмотрим столкновение рентгеновского фотона с электроном.

$m\vec{v}$ — импульс
электрона,

θ - угол рассеяния,

$\hbar\vec{k}$ — импульс фотона до столкновения,

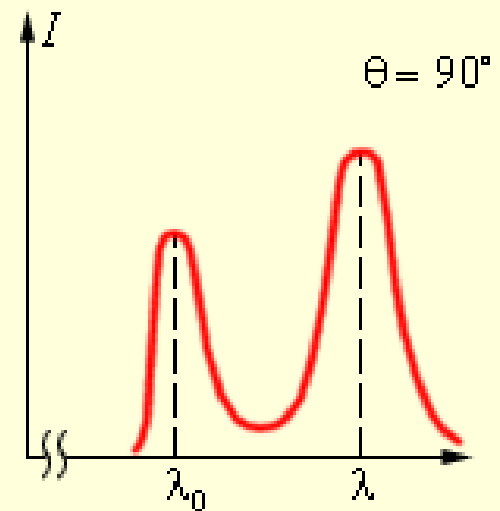
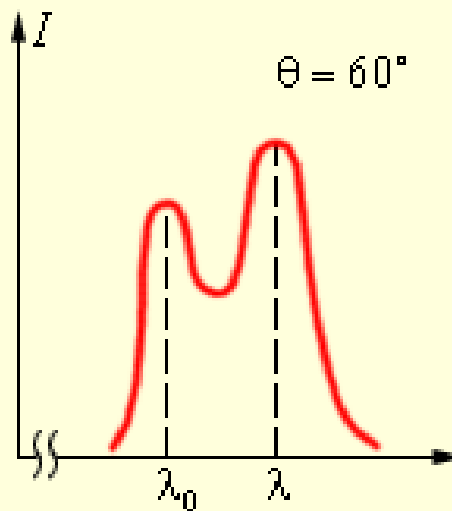
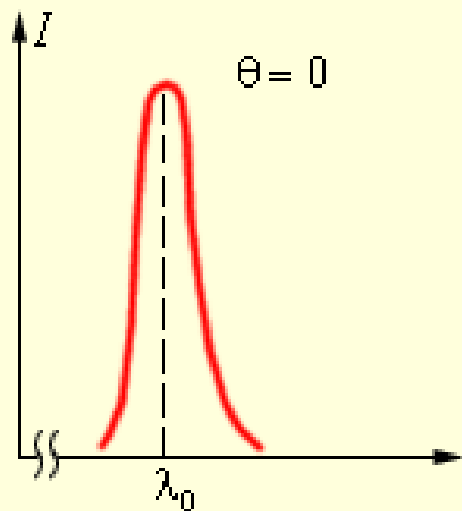
$\hbar\vec{k}'$ — импульс фотона после столкновения.



Опыты показали, что *разность* $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ *не зависит от длины волны λ падающего излучения и природы рассеивающего вещества, а определяется только углом рассеяния :*

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\Lambda \sin^2 \frac{\Theta}{2},$$

λ' — длина волны рассеянного излучения,
 Λ — комптоновская длина волны
(при рассеянии фотона на электроне $\Lambda = 2,42$ пм).



До столкновения.

Фотон: $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, $E = \hbar \omega$.

Электрон: $\vec{p} = 0$, $E = mc^2$

После столкновения.

Фотон: $\vec{p} = \hbar \vec{k}'$, $E = \hbar \omega'$.

Электрон: $\vec{p} \neq 0$, $\vec{p} = m\vec{v}$.

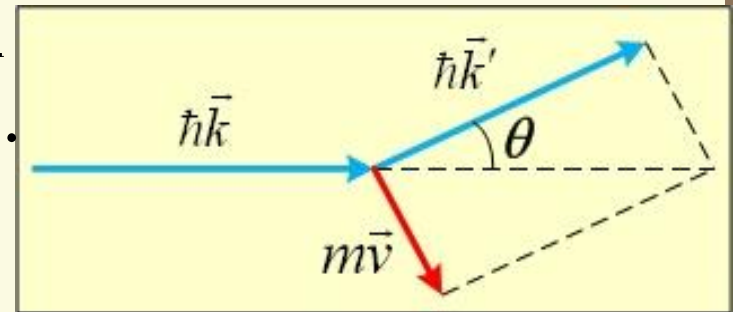
$$E = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}.$$

Закон сохранения энергии:

$$\hbar \omega + mc^2 = \hbar \omega' + c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}.$$

Закон сохранения импульса:

$$\hbar \vec{k} = \hbar \vec{k}' + \vec{p}.$$



$\left[\begin{array}{l} \hbar \omega + mc^2 = \hbar \omega' + c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}, \\ \hbar \vec{k} = \hbar \vec{k}' + \vec{p}. \end{array} \right.$ Разделим первое уравнение системы на скорость света c :

$$\hbar \frac{\omega}{c} + mc = \hbar \frac{\omega'}{c} + \sqrt{p^2 + m^2 c^2},$$

Двойственная природа излучения (Корпускулярно-волновой дуализм излучения)

Основной постулат корпускулярной теории электромагнитного излучения, звучит так:

Электромагнитное излучение (и в частности, свет) — это поток частиц, называемых фотонами.

Фотоны распространяются в вакууме со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Масса и энергия покоя фотона равны нулю.

Энергия фотона E связана с частотой электромагнитного излучения ν и длиной волны λ формулой:

$$E = h \nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Гипотеза де Бройля.

Корпускулярно-волновой дуализм вещества

Недостатки теории Бора указывали на необходимость пересмотра основ квантовой теории и представлений о природе микрочастиц (электронов, протонов и т.п.). Возник вопрос о том, насколько исчерпывающим является *представление электрона в виде малой механической частицы, характеризующейся определенными координатами и определенной скоростью.*

Мы уже знаем, что в *оптических явлениях* наблюдается *своеобразный дуализм*: наряду с явлениями дифракции, интерференции (*волновыми явлениями*) наблюдаются и явления, характеризующие *корпускулярную природу света* (фотоэффект, эффект Комптона).

Согласно де Бройлю, с каждым микрообъектом связываются, с одной стороны, корпускулярные характеристики - **энергия E** и **импульс p** , а с другой — волновые характеристики — **частота ν и длина волны λ** .

Количественные соотношения, связывающие корпускулярные и волновые свойства частиц, такие же, как для фотонов:

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

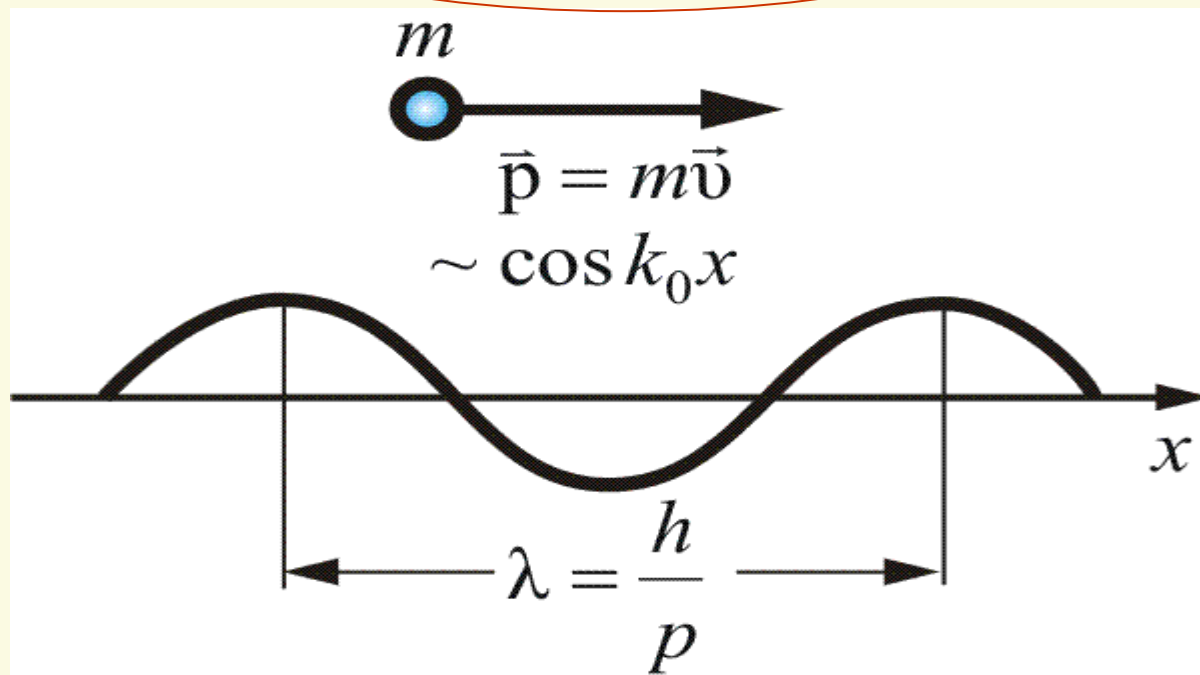
Смелость гипотезы де Бройля заключалась именно в том, что это соотношение постулировалось не только для фотонов, но и для других микрочастиц, в частности для таких, которые обладают массой покоя. А дерзость состояла в том, что никаких экспериментальных фактов в подтверждение гипотезы не было. Таким образом, любой частице, обладающей импульсом, сопоставляют волновой процесс с **длиной волны**, определяемой по формуле **де**

Бройля:
$$\lambda_B = h / mv$$

Поскольку кинетическая энергия сравнительно медленно движущейся частицы

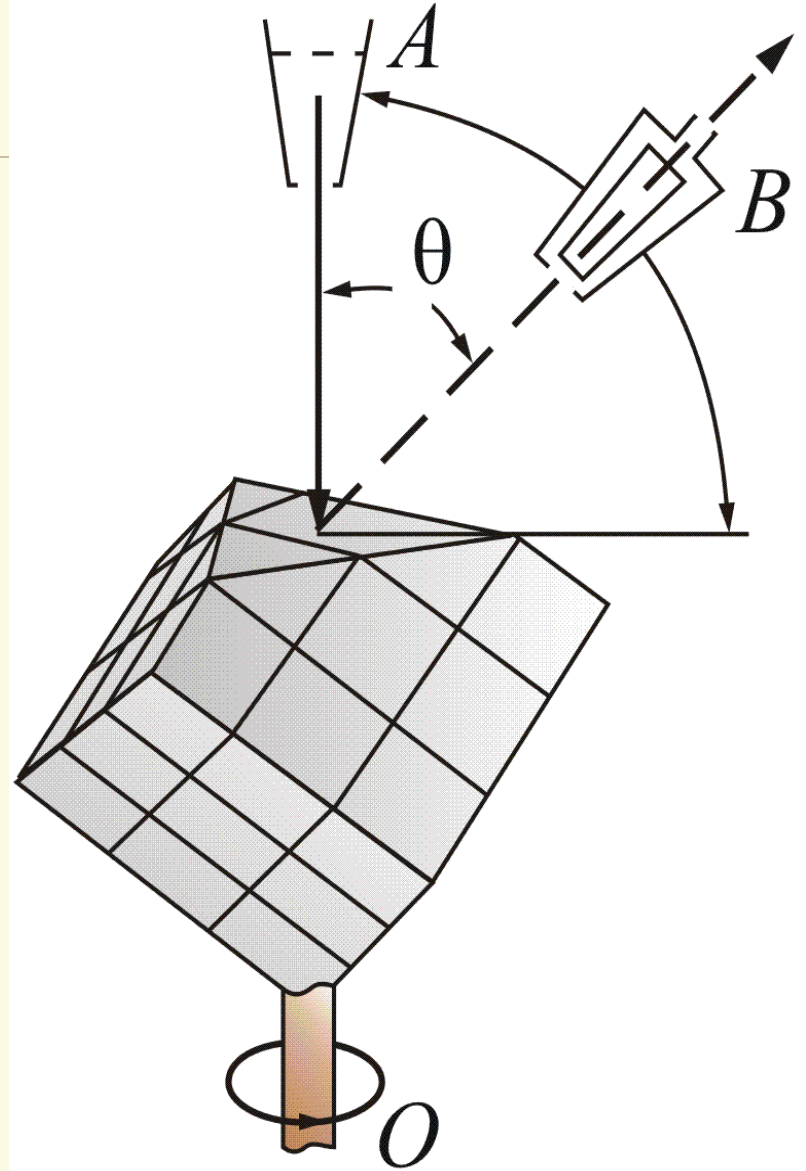
$E = mv^2/2$, то длину волны де Бройля можно выразить и через энергию или скорость:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{m \cdot v}$$



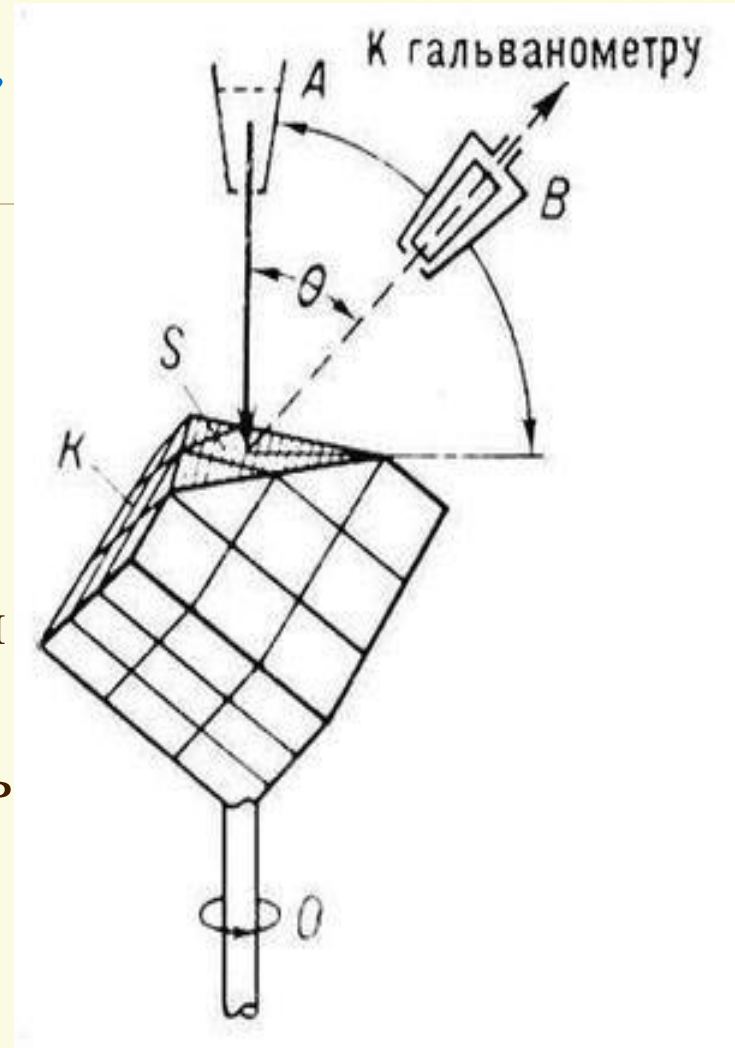
Опыт Дэвиссона и Джермера

Первым опытом по дифракции частиц, блестяще подтвердившим исходную *идею квантовой механики – корпускулярно-волновой дуализм вещества*, явился опыт американских физиков **К. Дэвиссона** и **Л. Джермера** проведенный в 1927 по дифракции электронов на **монокристаллах Ni** :



Слаботочный пучок
термоэмиссионных электронов
направлялся нормально на
поверхность среза
монокристалла никеля.

Монокристалл можно было поворачивать вокруг линии падения пучка, детектор же рассеянных электронов позволял проводить их селекцию по углу рассеяния. Имелась возможность сканировать, по отношению к монокристаллу, почти всю заднюю полусферу рассеяния — не затенённую электронной пушкой.



Дифракции электронов на монокристаллах никеля

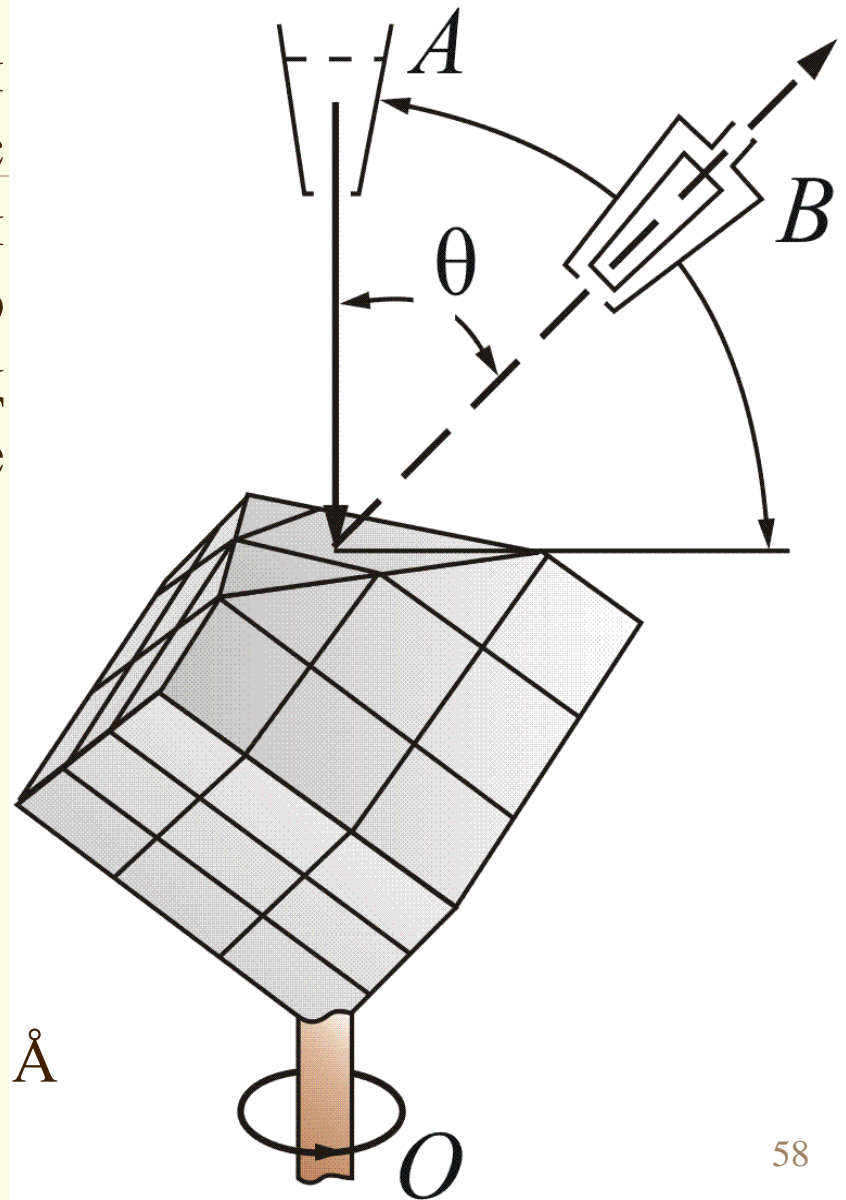
Если ускорять электроны электрическим полем с напряжением U , то они приобретут кинетическую энергию $E_{кин} = eU$, (e – заряд электрона), что после подстановки в равенство

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_{кин}}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

числовых значений даёт

$$\lambda = \frac{12,27}{\sqrt{U}}$$

Здесь U выражено в В, а λ – в \AA
($1 \text{\AA} = 10^{-10} \text{ м}$).

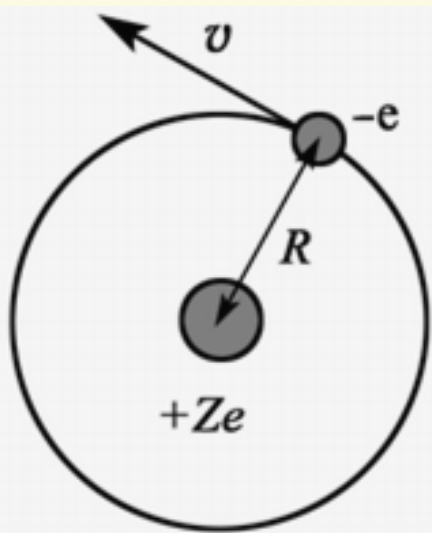


Постулаты Бора

1. Электроны движутся только по определенным (стационарным) орбитам. При этом не происходит излучения энергии.

Условие для стационарных орбит:

из всех орбит электрона **возможны только те, для которых момент импульса электрона, равен целому кратному постоянной Планка:**



$$m_e v R = n \hbar$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

главное

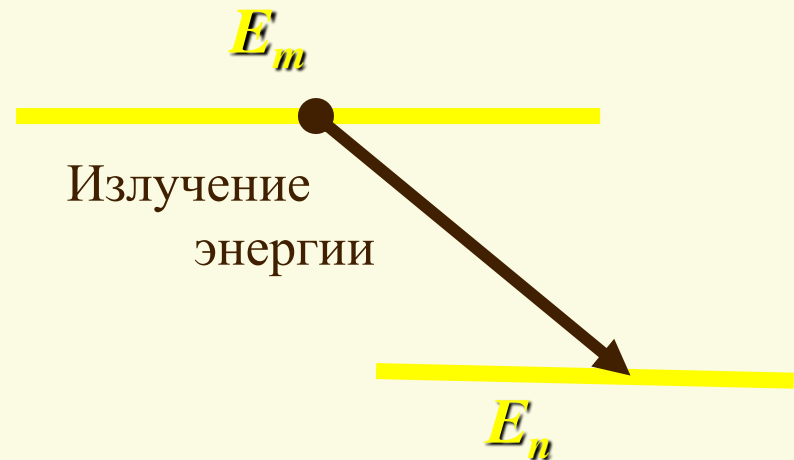
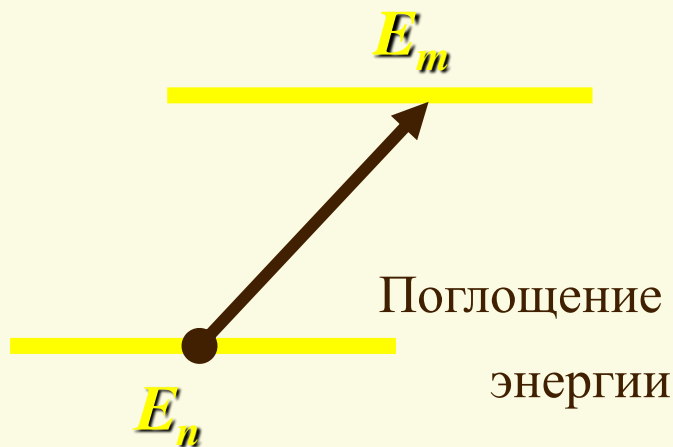
квантовое число.

2. Излучение или поглощение энергии в виде кванта энергии $h\nu$ происходит лишь при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое.

Световой квант равен разности энергий тех стационарных состояний, между которыми совершается квантовый скачок электрона:

$$h\nu = E_m - E_n$$

- Правило частот Бора
 m, n – номера состояний.



Правило квантования орбит Бора утверждает:
в стационарном состоянии атома электрон,
двигаясь по круговой орбите, должен иметь
квантованные значения момента импульса,
удовлетворяющие условию:

$$m_e v \cdot r = n \hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

где r — радиус n —ой орбиты, $m_e v \cdot r$ — момент импульса
электрона на этой орбите.

$$m_e v \cdot r = n \frac{h}{2\pi}$$

$$2\pi \cdot r = n \frac{h}{m_e v}$$

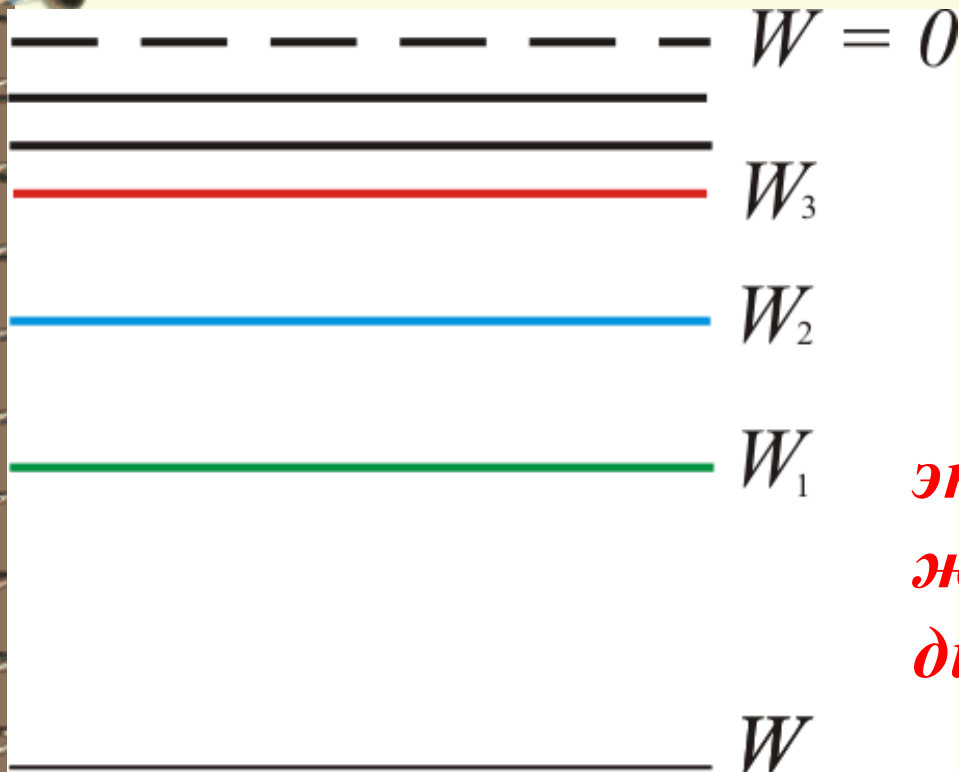
$$2\pi \cdot r = n \lambda_B$$

На длине окружности орбиты
укладывается целое число
де Бройлевских длин волн
электрона, т.е. на стационар-
ной орбите **электрон** можно
изобразить **стоячей волной**.

Внутренняя энергия атома складывается из кинетической энергии электрона и потенциальной энергией взаимодействия электрона с ядром:

$$\frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Отсюда



$$W_n = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2}$$

Отсюда видно, что:

энергия электрона может принимать только дискретные значения,

т.к. $n = 1, 2, 3, \dots$

Серии излучения атома водорода

$$E_6 = -0.38 \text{ эВ}$$

$$E_5 = -0.54 \text{ эВ}$$

$$E_4 = -0.85 \text{ эВ}$$

$$E_3 = -1.51 \text{ эВ}$$

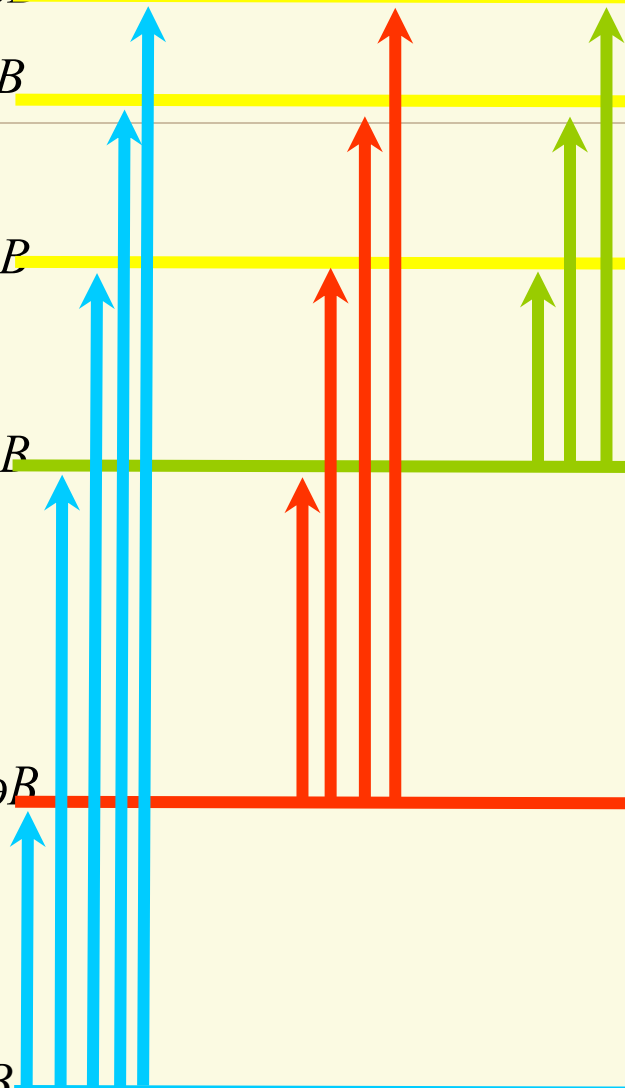
$$E_2 = -3.40 \text{ эВ}$$

$$E_1 = -13.53 \text{ эВ}$$

серия Пащенко

серия Бальмера

серия Лаймена



Экспериментальное подтверждение постулатов Бора

Опыт Франка и Герца

Существование дискретных энергетических уровней атома и доказательство правильности теории Бора подтверждается опытом Франка и Герца в 1913 г.

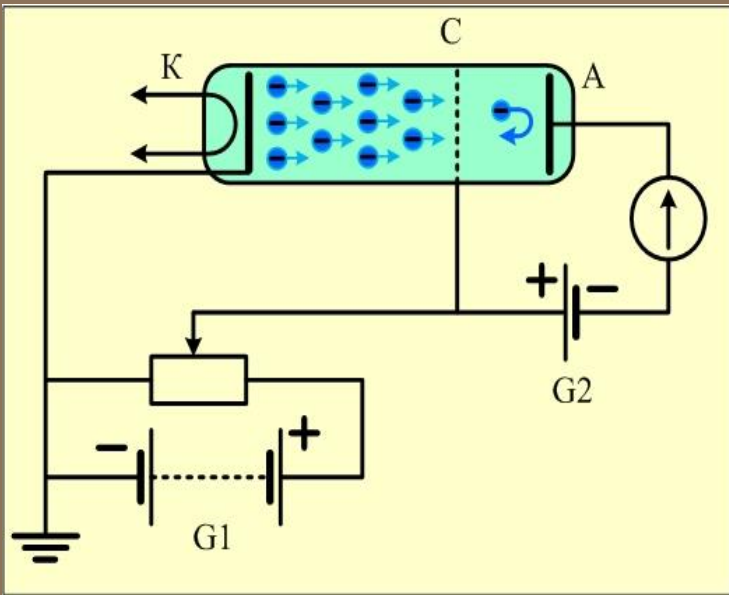
Немецкие ученые Джеймс Франк

и Густав Герц, за экспериментальные исследования дискретности энергетического уровня получили **Нобелевскую премию** в 1925 г.



James Franck.





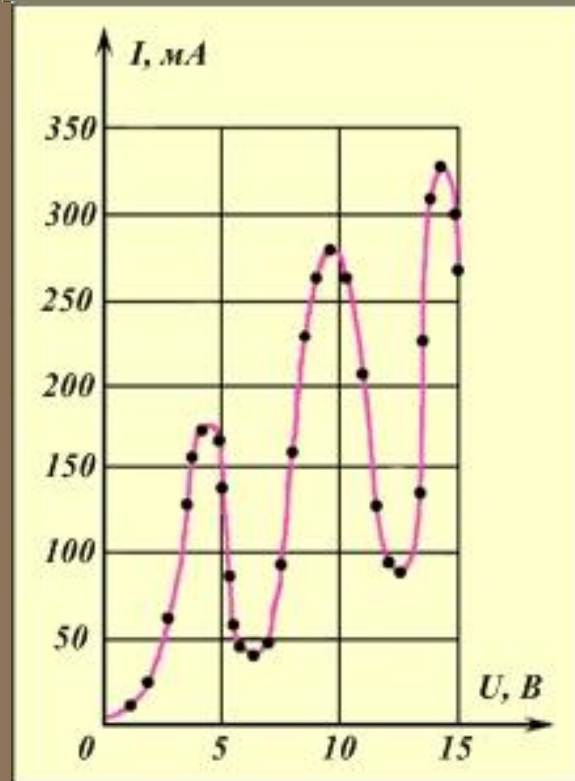
Опыт Франка и Герца.

Стеклянная колба заполнена парами ртути. Электроны вылетают из нагретого катода **К** и ускоряются напряжением U , создаваемым батареей **G1**. Между сеткой **С** и анодом **А** – слабое тормозящее поле $U_2 = 0,5$ В

На рисунке показана вольт-амперная характеристика данного устройства.

Возрастание ускоряющего напряжения U от 0 до 4,9 В сопровождается ростом силы тока. С ростом напряжения всё большее число электронов преодолевают область пространственного заряда у катода.

При достижении значения ускоряющего напряжения $U = 4,9$ В сила тока резко падает. Электроны с кинетической энергией $E = 4,9$ эВ полностью теряют её в результате столкновений с атомами ртути.

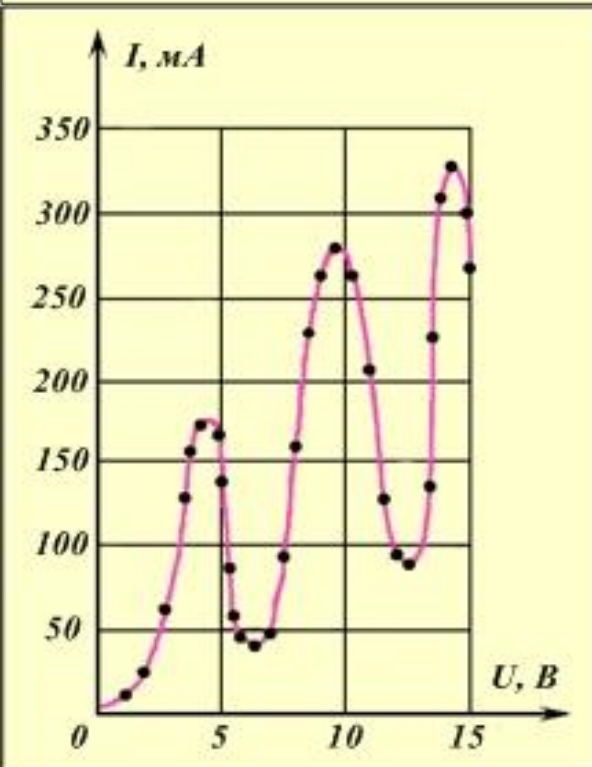
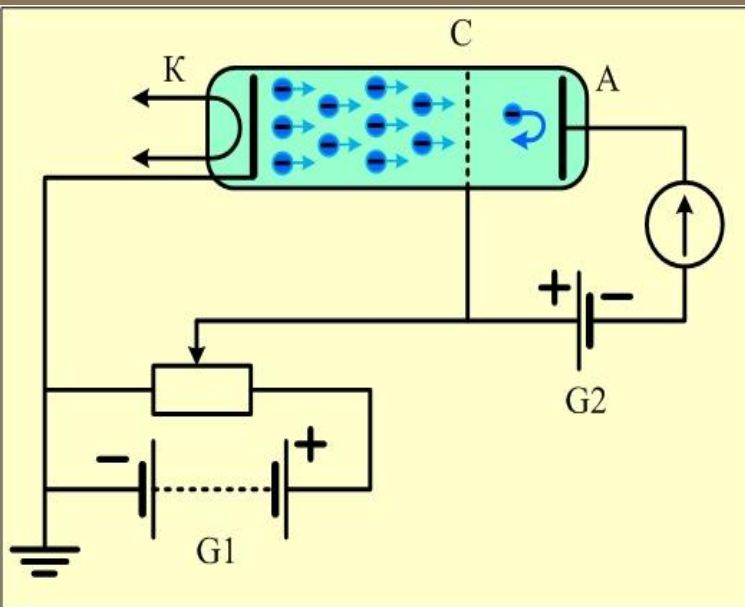


Опыт Франка и Герца.

В результате неупругих столкновений с электронами атомы ртути приобретают энергию $E = 4,9$ эВ, энергия же электронов после столкновения пренебрежимо мала и они полностью задерживаются малым напряжением U_2 .

Таким образом, расстояние между двумя энергетическими уровнями атома ртути $\Delta E = 4,9$ эВ. Этот вывод подтверждается тем, что атомы ртути начинают самопроизвольно испускать ультрафиолетовое излучение. Частота излучения совпадает с рассчитанной по формуле:

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{4,9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,625 \cdot 10^{-34}} = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ Гц}.$$



Волновая функция и её физический смысл.

Необходимость вероятностного подхода к описанию микрочастиц, является важнейшей отличительной особенностью квантовой теории.

Можно ли **волны де Бройля** истолковывать как волны **вероятности**, т.е. считать, что вероятность обнаружить микрочастицу в различных точках пространства меняется **по волновому закону**?

Такое толкование волн де Бройля уже неверно, хотя бы потому, что тогда вероятность обнаружить частицу в некоторых точках пространства **может быть отрицательна**, что не имеет смысла.

Для частицы, движущейся в свободном пространстве с постоянной скоростью v , де Бройль показал, что с ней связана плоская монохроматическая волна:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t)} \quad \text{- волна де Бройля}$$

(волновая функция)

Физический смысл имеет только квадрат модуля волновой функции, т.е. **вероятность обнаружить частицу в каком-либо месте пространства** можно представить **квадратом модуля функции** $\Psi(\vec{r}, t)$ в том же месте:

$$|\Psi|^2 = \Psi^* \cdot \Psi = \rho \quad - \text{плотность вероятности}$$

В случае плоской волны де Бройля этот квадрат модуля равен:

$$\rho = |\Psi|^2 = \Psi^* \cdot \Psi = \Psi_o^* \cdot \Psi_o = \text{const} ,$$

т.е. равновероятно обнаружить частицу в любой месте пространства. Всякий другой результат для равномерно движущейся частицы в течение бесконечного времени несовместим с однородностью пространства.

Волновая функция удовлетворяет принципу суперпозиции: если система может находиться в различных состояниях, описываемых волновыми функциями $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$, то она может находиться в состоянии, описываемом линейной комбинацией этих функций

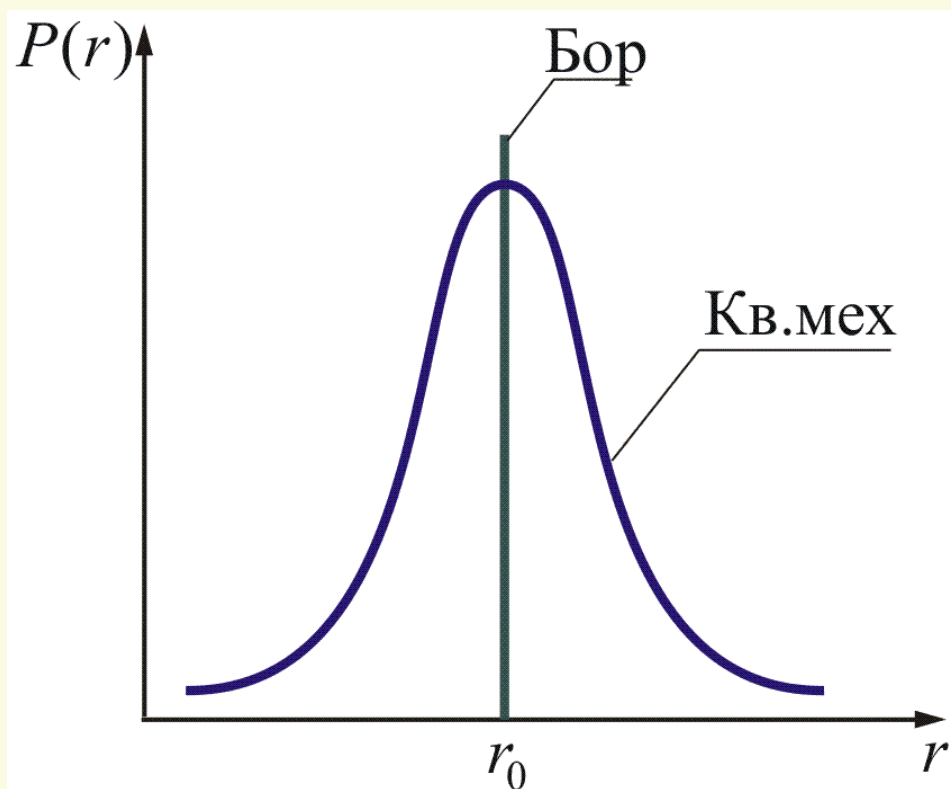
$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n$$

где C_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) – произвольные, комплексные числа.

Волновая функция Ψ является основной характеристикой состояния микрообъектов.

Например, **среднее расстояние $\langle r \rangle$** электрона от ядра вычисляется по формуле

$$\langle r \rangle = \int r |\Psi|^2 dV$$



Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Согласно *двойственной корпускулярно-волновой природе частиц вещества*, для описания микрочастиц используются то *волновые*, то *корпускулярные представления*.

Поэтому приписывать им все свойства частиц и все свойства волн нельзя.

Естественно, что *необходимо внести некоторые ограничения в применении к объектам микромира понятий классической механики*.

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar / 2$$

- соотношение неопределённостей Гейзенберга для координаты и импульса

Аналогично:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar / 2 \quad ; \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar / 2$$

Соотношение неопределённостей определяет допустимый принципиальный предел неточностей Δx и Δp_x , с которыми состояние частицы можно характеризовать классически, т.е. координатой и импульсом.

В квантовой механике широко используется понятие — **оператор**. Под оператором понимают *правило*, посредством которого одной функции φ сопоставляется другая функция f т. е. :

$$f = \hat{Q} \varphi$$

\hat{Q} — символ обозначения оператора.

Есть операторы координат, импульса, кинетической и потенциальной энергии, оператор полной энергии и т.д.

$\frac{d}{dt}$ — оператор скорости;

$\frac{d^2}{dt^2}$ — ускорения.

Если S — путь, то $\frac{dS}{dt} = v$ — скорость и т.д.

Выражение для среднего значения координаты x :

$$\langle x \rangle = \int x \Psi^* \Psi dx$$

Обычно записывают:

$$\langle x \rangle = \int \Psi^* \hat{x} \Psi dx$$

где $\hat{x} = x$ - **оператор координат**. Действие оператора координаты сводится к умножению на саму координату.

Среднее значение импульса:

$$\langle p \rangle = \int \Psi^* \hat{p} \Psi dV$$

где $\hat{p} = -i\hbar \nabla$ - **оператор импульса**,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad - \text{градиент.}$$

$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ - оператор проекции импульса на ось x .

Оператор кинетической энергии:

$$\hat{E}_{кин} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

Средняя кинетическая энергия:

$$\langle E_{кин} \rangle = \int \Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \Psi dV$$

Найдём **оператор полной энергии**, который представляет собой сумму операторов кинетической и потенциальной энергии:

$$\hat{H} = \hat{E}_{кин} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U$$

- оператор Гамильтона
или Гамильтониан

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(оператор полной энергии)

- оператор Лапласа

Уравнение Шредингера

Толкование *волн де Бройля* и *соотношение неопределенностей Гейзенберга* привели к выводу, что уравнением движения в квантовой механике, описывающей движение микрочастиц в различных силовых полях, должно быть уравнение, из которого бы вытекали наблюдаемые на опыте *волновые свойства частиц*.

Уравнение Шредингера в общем виде
(временное нестационарное) запишется:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ - постоянная Планка,

∇^2 - оператор Лапласа $\left(\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right),$

i - мнимая единица,

$U(x, y, z, t)$ - потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором она движется,

Ψ - искомая волновая функция. m - масса частицы.

Уравнение Шредингера в отсутствие силовых полей ($U = 0$), т.е. **для свободной частицы:**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Решение этого уравнения - **плоская монохроматическая волна де Бройля:**

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Эта волна является специальным волновым образованием, соответствующим **свободному равномерному движению частицы** в определённом направлении и с определённым импульсом.

Стационарные состояния - это состояния, в которых все наблюдаемые физические параметры не меняются с течением времени. Сама волновая функция Ψ не относится к этим параметрам. Она принципиально не наблюдаема. Не должны меняться во времени только физически наблюдаемые величины, которые могут быть образованы из Ψ по правилам квантовой механики. В стационарных состояниях волновая функция распадается на два сомножителя, один из которых зависит только от координаты $\Psi(\vec{r})$, а другой – только от времени:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r})e^{-i\omega t} = \Psi(\vec{r})e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

где ω постоянна и равна $\omega = E / \hbar$

Получим *уравнение Шредингера для стационарных состояний* :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= i\hbar \left(\Psi(\vec{r}) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \right) = \\ &= i\hbar \Psi(\vec{r}) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \cdot \left(-i\frac{E}{\hbar} \right) = E \cdot \Psi \end{aligned}$$

Получаем:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \cdot \Psi, \text{ но т.к. } i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \text{ имеем:}$$

$$E\Psi = \hat{H} \Psi$$

- уравнение Шредингера для стационарных состояний

Уравнение Шредингера для стационарных состояний (с учётом определения Гамильтониана):

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0$$

E - полная энергия частицы

U - потенциальная энергия

Ψ - волновая функция частицы

$$\Psi = \Psi(x, y, z)$$

Движение свободной частицы

Свободная частица – частица, движущаяся в *отсутствие внешних полей*.

Т.к. на свободную частицу (пусть она движется вдоль оси x) силы не действуют, то *потенциальная энергия частицы* $U(x)=const$ и ее можно принять равной нулю: $(U=0)$

Тогда *полная энергия частицы совпадает с ее кинетической энергией*.

В таком случае *уравнение Шредингера для стационарных состояний примет вид:*

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0$$

В общем виде уравнение Шредингера для свободной частицы в стационарном состоянии:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2} E\Psi = 0$$

Его решение – плоская монохроматическая волна де Бройля:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_o e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Таким образом, **свободная частица описывается плоской монохроматической волной де Бройля.**

Этому способствует *не зависящая от времени плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства.*

$$|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi = \Psi_o^2$$

т.е. **все положения свободной частицы являются равновероятными.**



ЛЕКЦІЯ ЗАКОНЧЕНА!