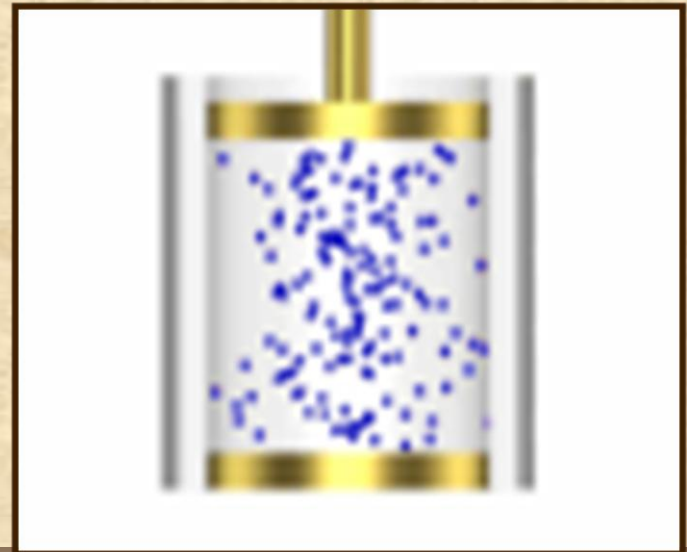
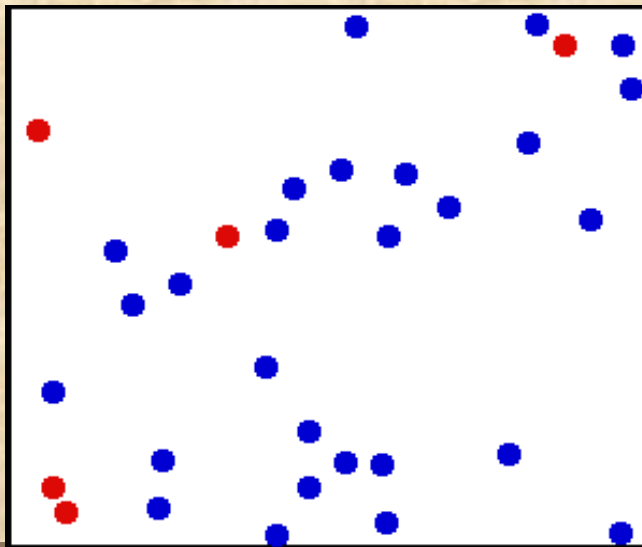


Термодинамика и статистическая физика



Лекция № 7

Процессы переноса: диффузия, теплопроводность и вязкость.

1. Диффузия. Закон Фика. Коэффициент диффузии. Броуновское движение.
2. Теплопроводность. Закон Фурье.
Коэффициент теплопроводности для газов.
3. Вязкость. Коэффициент вязкости (внутреннего трения).

В процессе диффузии происходит перенос вещества, а при теплопроводности и при внутреннем трении — перенос энергии.

В основе этих явлений лежит один и тот же механизм — *хаотическое движение молекул*. Общность механизма, обуславливающего все эти явления переноса, приводит к тому, что их закономерности должны быть похожи друг на друга.

Диффузия газов

Диффузия от латинского *diffusio* – **распространение, растекание** – взаимное проникновение соприкасающихся веществ друг в друга, вследствие теплового движения частиц вещества.

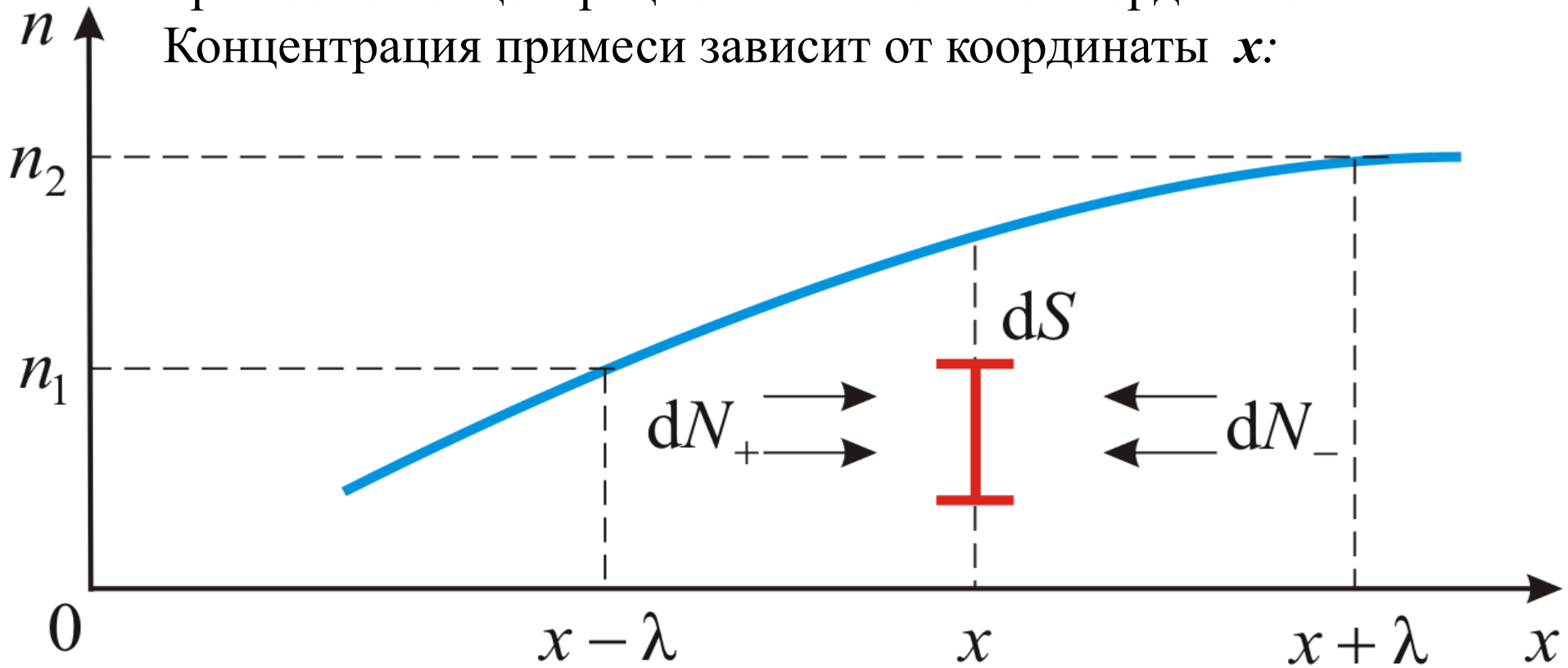
Диффузия происходит **в направлении уменьшения концентрации вещества** и ведет к его равномерному распределению по занимаемому объему.

Диффузия имеет место в газах, жидкостях и твердых телах.

Наиболее **быстро диффузия** происходит **в газах**, медленнее в жидкостях, еще медленнее в твердых телах, что обусловлено характером движения частиц в этих средах.

Для газа **диффузия** — **это** **распределение молекул примеси** **от источника** (или взаимная диффузия газа).

Решим одномерную задачу. Пусть в газе присутствует примесь с концентрацией n в точке с координатой x . Концентрация примеси зависит от координаты x :



$$\text{grad } n = \frac{dn}{dx}$$

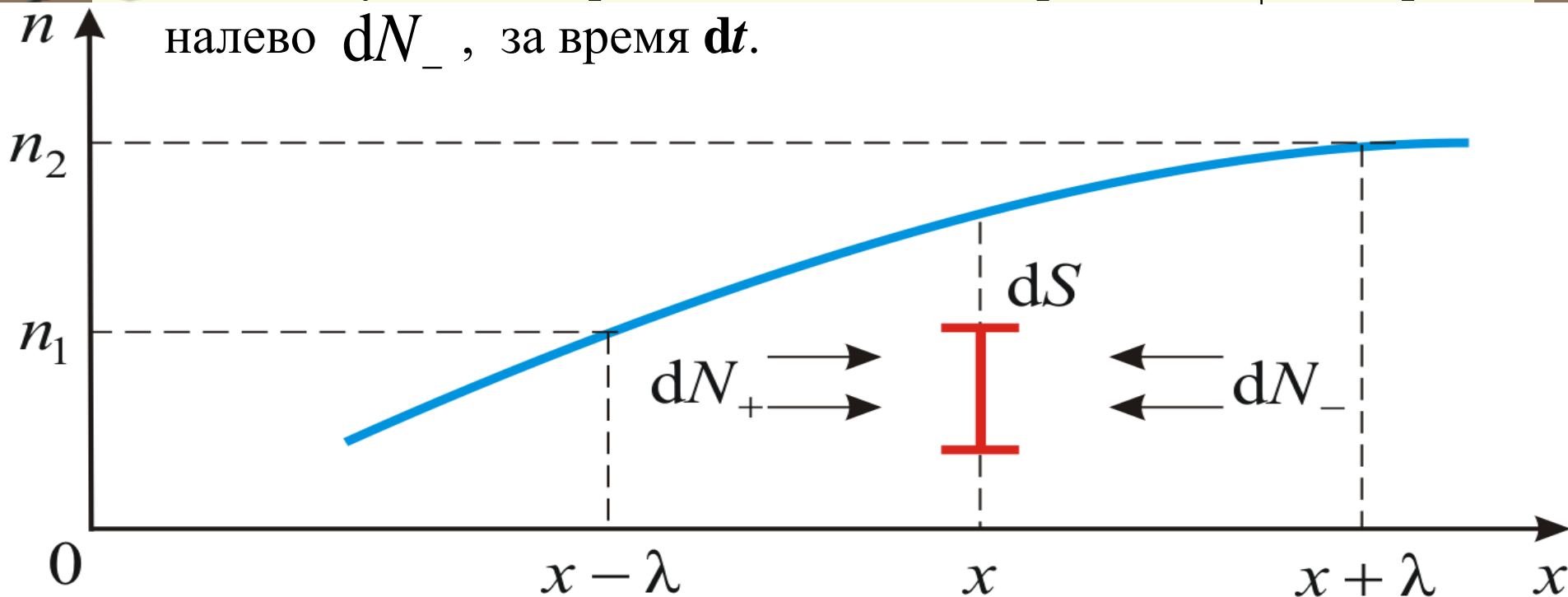
Градиент концентрации, в общем случае равен:

$$\text{grad } n = \frac{dn}{dx} \vec{i} + \frac{dn}{dy} \vec{j} + \frac{dn}{dz} \vec{k}$$

Так как у нас **одномерная задача**, то (модуль): $\text{grad } n = \frac{dn}{dx}$

При наличии $\text{grad } n$, хаотическое движение будет более направленным и **возникнет поток молекул** примеси, **направленный от мест с большей концентрацией к местам с меньшей концентрацией**. Найдём этот поток.

Подсчитаем число молекул, проходящих через единичную площадку dS в направлении слева на право dN_+ и справа налево dN_- , за время dt .



$$dN_+ = \frac{1}{6} n_1 \langle v \rangle dS dt; \quad dN_- = \frac{1}{6} n_2 \langle v \rangle dS dt,$$

$$dN = dN_+ - dN_-$$

где n_1 – концентрация молекул слева от площадки dS , а n_2 – концентрация справа.

$$dN = dN_+ - dN_-$$

Результирующий диффузионный

поток через единицу площади в единицу времени:

$$J = \frac{dN}{dSdt} = \frac{1}{6} (n_1 - n_2) \langle v \rangle$$

$$J = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \frac{n_2 - n_1}{2\lambda},$$

но $n_2 - n_1 = dn$; $2\lambda = dx$, тогда

$$\frac{n_2 - n_1}{2\lambda} = \frac{dn}{dx}, \quad J = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \frac{dn}{dx}$$

Обозначим: $D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle$ – **коэффициент диффузии.**

Тогда **диффузионный поток** будет равен:

$$J = -D \frac{dn}{dx}$$

– закон Фика
(одномерный вид)

или в общем случае (в трёхмерный случай):

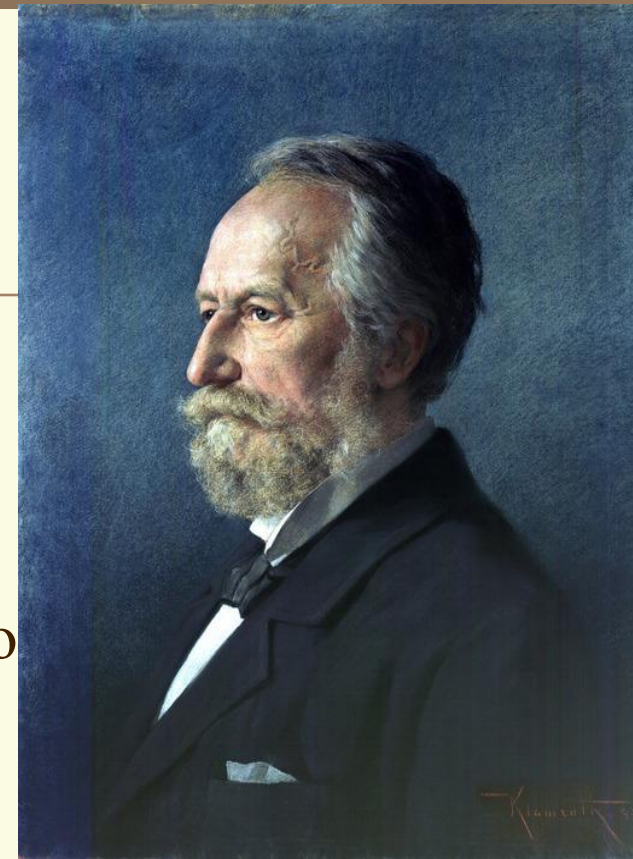
$$J = -D \operatorname{grad} n$$

– закон Фика
(в общем виде)

Адо́льф Фик —немецкий учёный XIX века (1829-1901), приобрел известность в 26 лет (1855 г.) благодаря своей первой работе в области физики, в которой выдвинул гипотезу о том, что **скорость диффузии газов пропорциональна градиенту их концентрации.**

Спустя год он опубликовал монографию «Die Medizinische Physik», которая на десятилетия стала энциклопедией по **медицинской физике.**

31 год Фик проработал в Вюрцбурге, где **создал институт физиологии**, ставший известным во всем мире в качестве передового центра медицинской науки. Здесь же он предложил свой метод измерения сердечного выброса, обессмертивший его имя.



$$J = -D \operatorname{grad} n$$

Из **закона Фика** видно, что

диффузионный поток, направлен в сторону уменьшения концентрации.

При этом коэффициент диффузии D численно равен диффузионному потоку через единицу площади в единицу времени при $\operatorname{grad} n = 1$

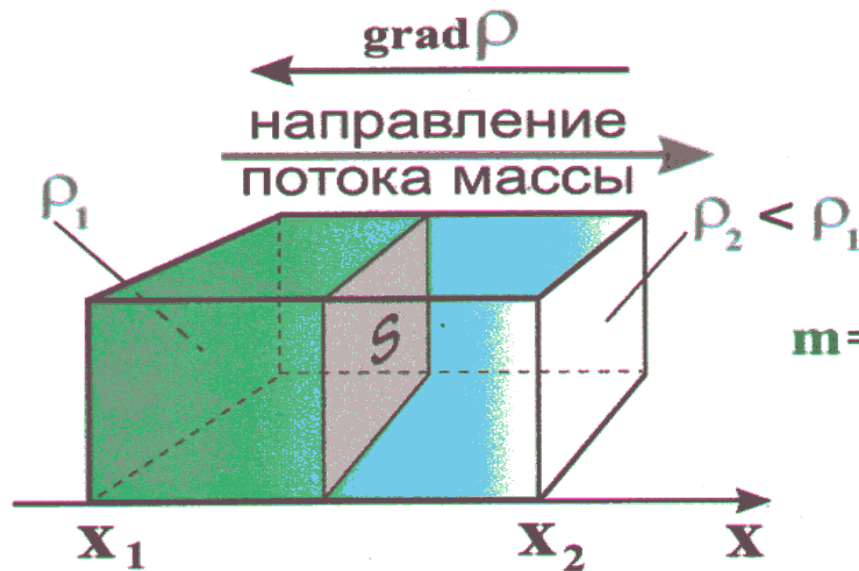
Измеряется коэффициент диффузии D в $\text{м}^2/\text{с}$.

Диффузия газа

Диффузия - явление переноса молекулами массы

Закон Фика

$$m = -D \frac{d\rho}{dx} \quad \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \right]$$



$$m = \frac{M}{S \cdot t} \quad - \text{плотность потока массы}$$

$$\frac{d\rho}{dx} \quad - \text{градиент плотности}$$

D - коэффициент диффузии газа

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \quad - \text{средняя скорость молекулы}$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad - \text{средняя длина свободного пробега молекулы}$$

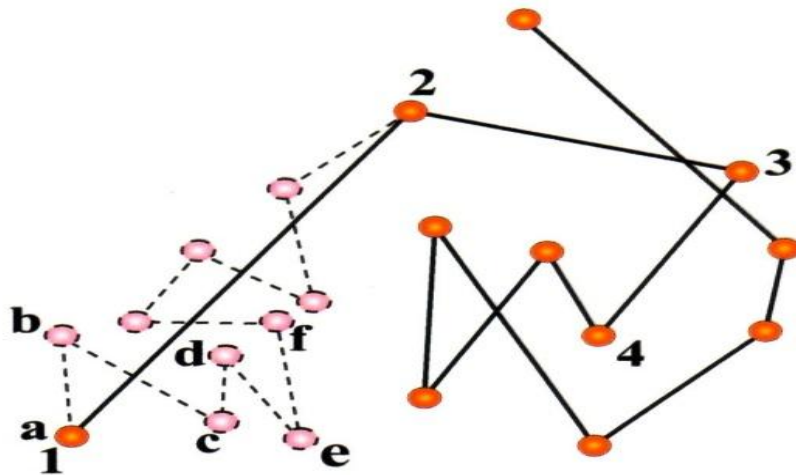
Движение молекул

Атомы и молекулы находятся в состоянии непрерывного хаотического ТЕПЛОВОГО движения

Доказательством этого являются:

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

- движение взвешенных в жидкости или газе макроскопических частиц



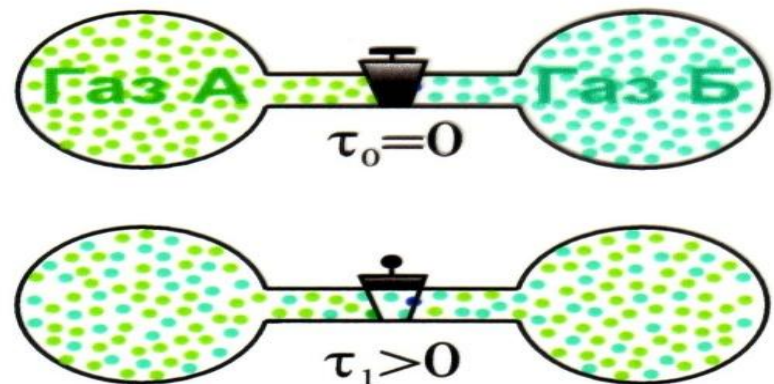
a-b-c-... - фиксация положения частицы производилась через $\Delta t = 5$ с

1-2-3- ... - через $\Delta t = 50$ с

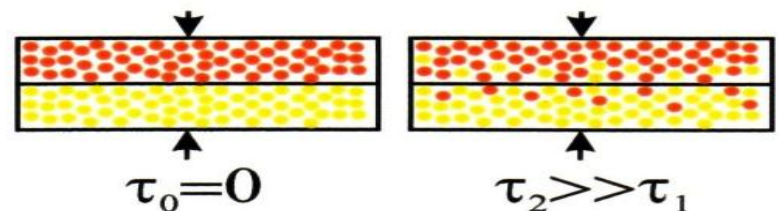
ДИФФУЗИЯ

- проникновение различных веществ друг в друга, вследствие теплового движения молекул

Диффузия в газах

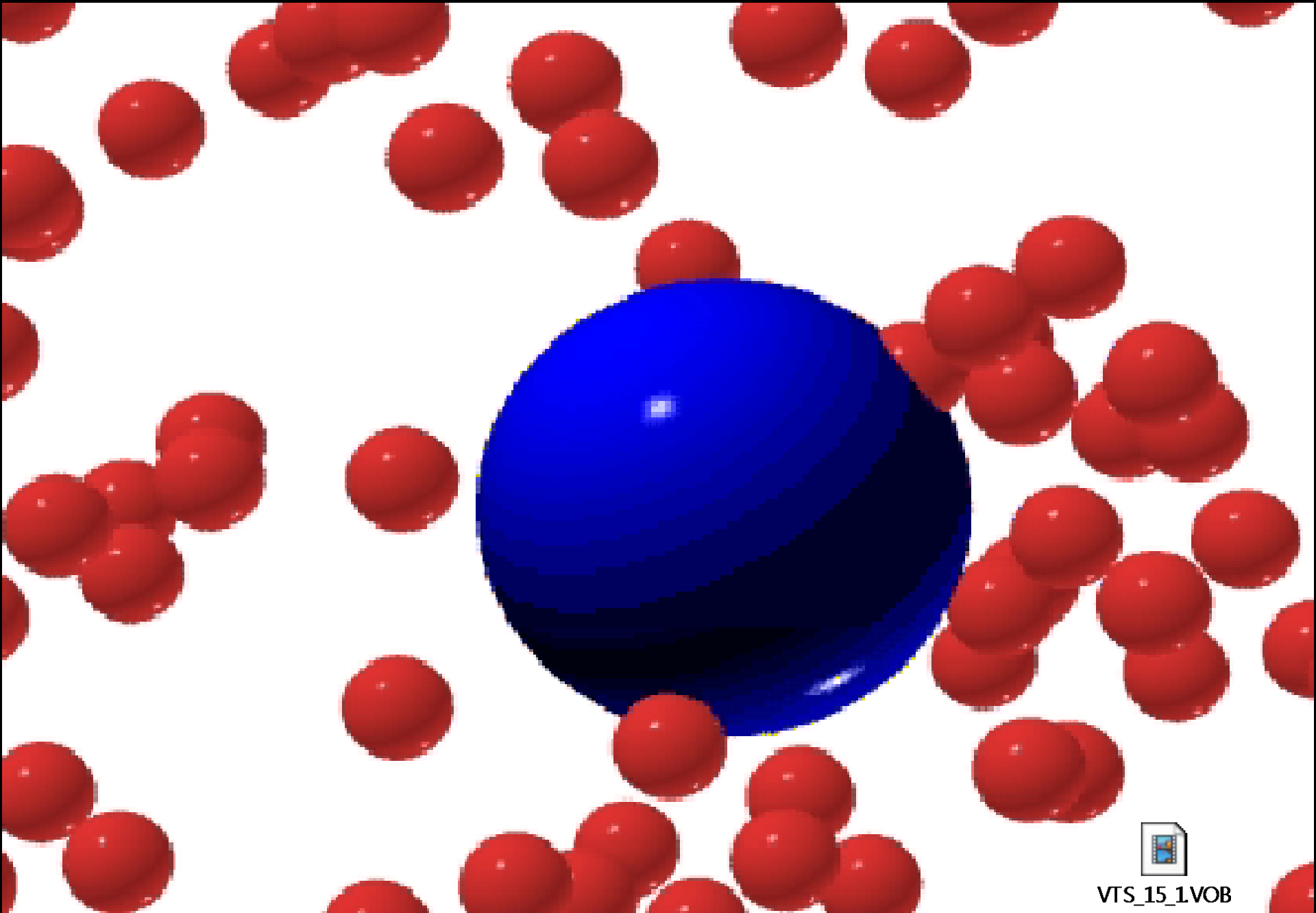


Диффузия в твердых телах



Броуновское движение

Броуновское движение в жидкости тем оживлённее, чем меньше вязкость жидкости. Его едва удаётся подметить в глицерине, а **в газах**, оно **чрезвычайно интенсивно**. Броуновское движение вызывается толчками, испытываемыми взвешенными частицами со стороны окружающих молекул, совершающих тепловое движение. Под влиянием ударов молекул окружающей среды **скорость броуновской частицы меняется**.



VTS_15_1VOB

Хаотическое движение миниатюрной частицы, подвешенной в жидкости или газе (Броуновское движение)

Пусть броуновская частица имеет форму шарика радиуса r . Если небольшой шарик равномерно движется в жидкости со скоростью v , то, как показывает опыт и теория, на него действует сила сопротивления F , пропорциональная скорости v . Коэффициент пропорциональности в формуле $v = B \cdot F$ называется **подвижностью частицы** – B .

Подвижность частицы B связана с коэффициентом диффузии **соотношением Эйнштейна**:

$$D = kT \cdot B$$

Теплопроводность газов

Учение о теплопроводности начало развиваться в XVIII в. и получило свое завершение в работах французского ученого **Ж. Фурье** (1768 – 1830), опубликовавшего в 1822 г. книгу «Аналитическая теория теплоты».



Жан Батист Жозеф Фурье
(1768-1830) — французский
математик и физик,

иностраннный почетный член
Петербургской АН (1829).

Труды по алгебре, дифферен-
циальным уравнениям и
математической физике.

В 1807 и 1811 годах он предс-

тавил Парижской АН свои первые открытия по
теории распространения тепла в твёрдом теле, а в
1822 году опубликовал работу "Аналитическая
теория тепла", сыгравшую большую роль в
последующей истории математики.

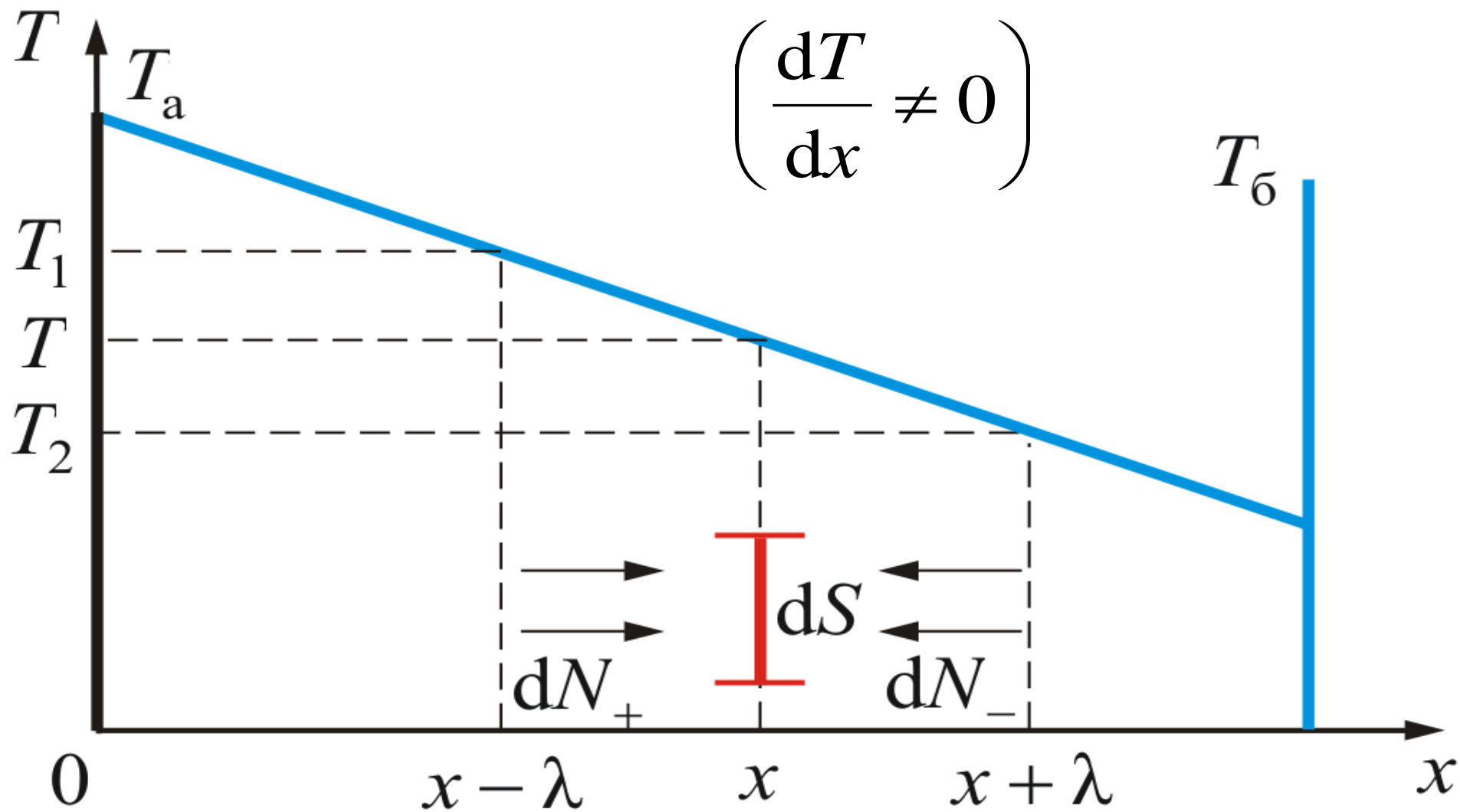
Если в соседних слоях газа создана и поддерживается разность температур, то между ними будет происходить обмен тепла. Благодаря хаотическому движению, молекулы в соседних слоях будут перемешиваться и, их средние энергии будут выравниваться. Происходит *перенос энергии от более нагретых слоев к более холодным.*

*Перенос энергии от более
нагретых слоев к более холодным
называется теплопроводностью.*

*Поток тепла пропорционален
градиенту температуры:*

$$Q \sim \frac{dT}{dx}$$

Рассмотрим газ, заключённый между двумя параллельными стенками, имеющими разную температуру T_a и T_b .



Итак, у нас имеется градиент температуры

$$\left(\frac{dT}{dx} \neq 0 \right)$$

Тогда через газ в направлении оси x будет идти поток тепла.

Хаотично двигаясь, молекулы будут переходить из одного слоя газа в другой, перенося с собой энергию. Это движение молекул приводит к перемешиванию молекул, имеющих различную кинетическую энергию :

$$E = \frac{m_0 \langle v \rangle^2}{2} = \frac{i}{2} kT$$

здесь i – число степеней свободы молекулы.

При подсчёте потока тепла
введём следующие упрощения:

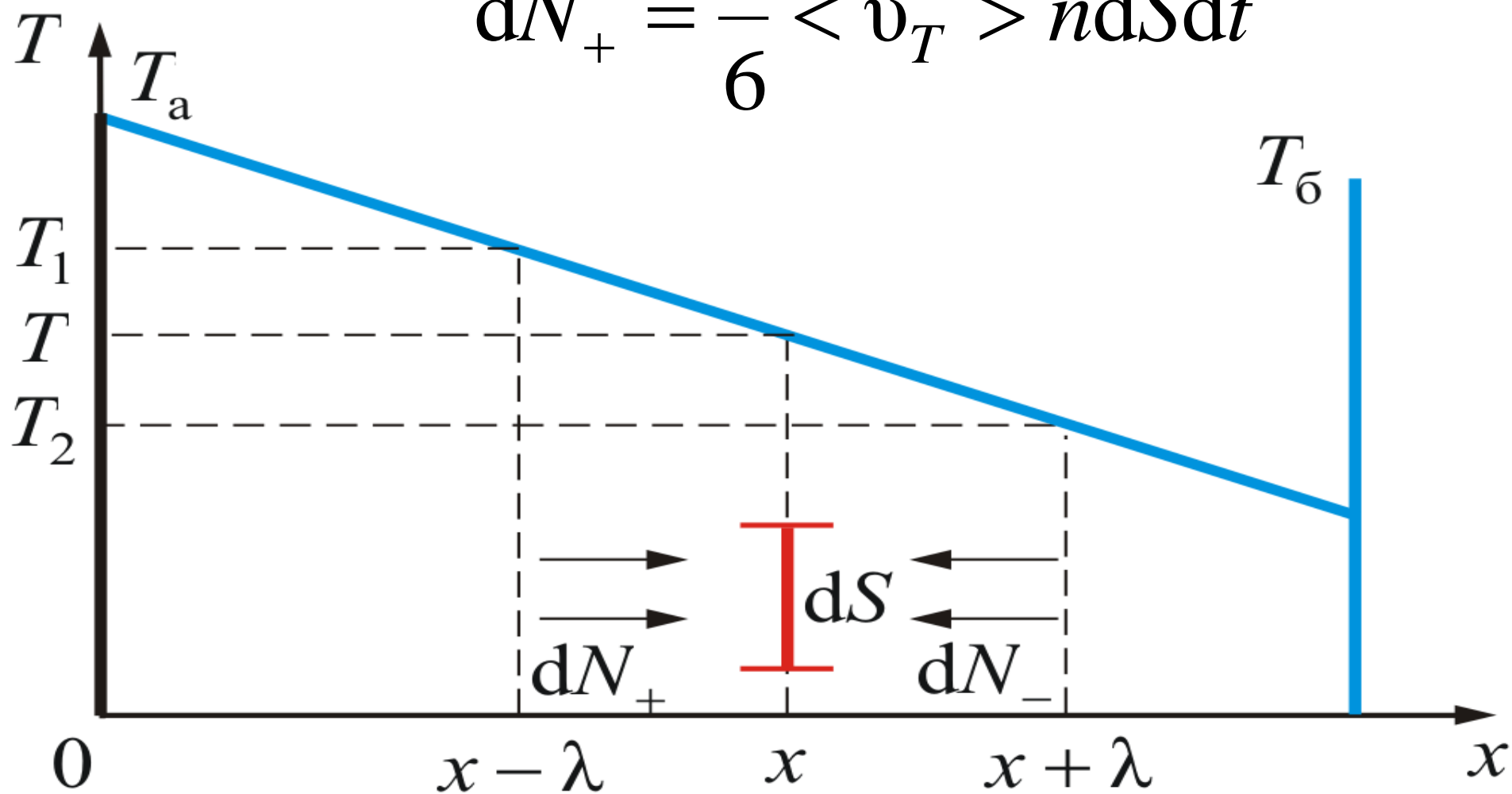
Среднеарифметическая
скорость теплового движения
молекул

$$\langle v_T \rangle = \text{const}$$

Концентрация молекул в
соседних слоях одинакова, хотя на
самом деле она различается (что
даёт ошибку $\approx 10\%$).

Через площадку dS за время dt **слева**
проходит число молекул:

$$dN_+ = \frac{1}{6} \langle v_T \rangle n dS dt$$



Средняя энергия этих молекул E – соответствует значению энергии в том месте, где они испытывают последний раз столкновение. Для одной молекулы газа:

$$E_1 = \frac{i}{2} k T_1.$$

Соответственно, **справа** проходит

$$dN_- = \frac{1}{6} n \langle v_T \rangle dS dt \quad \text{молекул.}$$

Каждая из этих молекул перенесёт энергию

$$E_2 = \frac{i}{2} k T_2.$$

Результирующий поток энергии через dS равен разности потоков dQ_+ и dQ_- , то есть

$$dQ = \frac{1}{6} n \langle v_T \rangle dS dt \frac{i}{2} k (T_1 - T_2)$$

Применяя те же рассуждения, получим: результирующий поток через единичную площадку в единицу времени равен q и направлен он в сторону противоположную направлению градиента:

$$\frac{dQ}{dS dt} = q = -\frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle n \frac{i}{2} k \frac{dT}{dx},$$

$$q = -\chi \frac{dT}{dx} \quad - \text{закон Фурье} \\ (\text{одномерный вид})$$

или

$$q = -\chi \text{ grad } T$$

– уравнение теплопроводности

Ж.Фурье. Здесь q – *тепловой поток*;

χ – коэффициент теплопроводности,
равный:

$$\chi = \frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle n \frac{i}{2} k \quad \text{или}$$

$$\chi = \frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle \rho C_{V_{\text{уд}}}$$

$$\chi = \frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle \rho C_{V_{\text{уд}}}$$

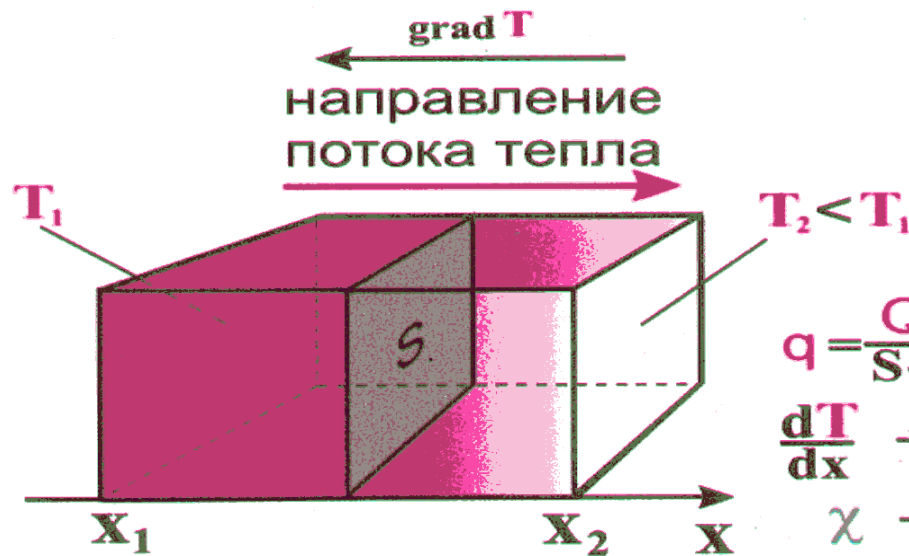
v_T – тепловая скорость молекул;
 $C_{V_{\text{уд}}}$ – удельная теплоемкость при
постоянном объеме.

Найдем размерность коэффициента
теплопроводности:

$$[\chi] = \frac{q dx}{dT} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$$

Теплопроводность газа

Теплопроводность - явление переноса молекулами энергии



Закон Фурье

$$q = - \chi \frac{dT}{dx} \quad \left[\frac{\text{кГ}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \right]$$

$q = \frac{Q}{S \cdot t}$ - плотность потока энергии

$\frac{dT}{dx}$ - градиент температуры

χ - коэффициент теплопроводности

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle C_v$$

$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$ - средняя скорость молекулы

$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$ - средняя длина свободного пробега молекулы

$C_v = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}$ - удельная теплоемкость при постоянном объеме

Внутреннее трение. Вязкость газов.

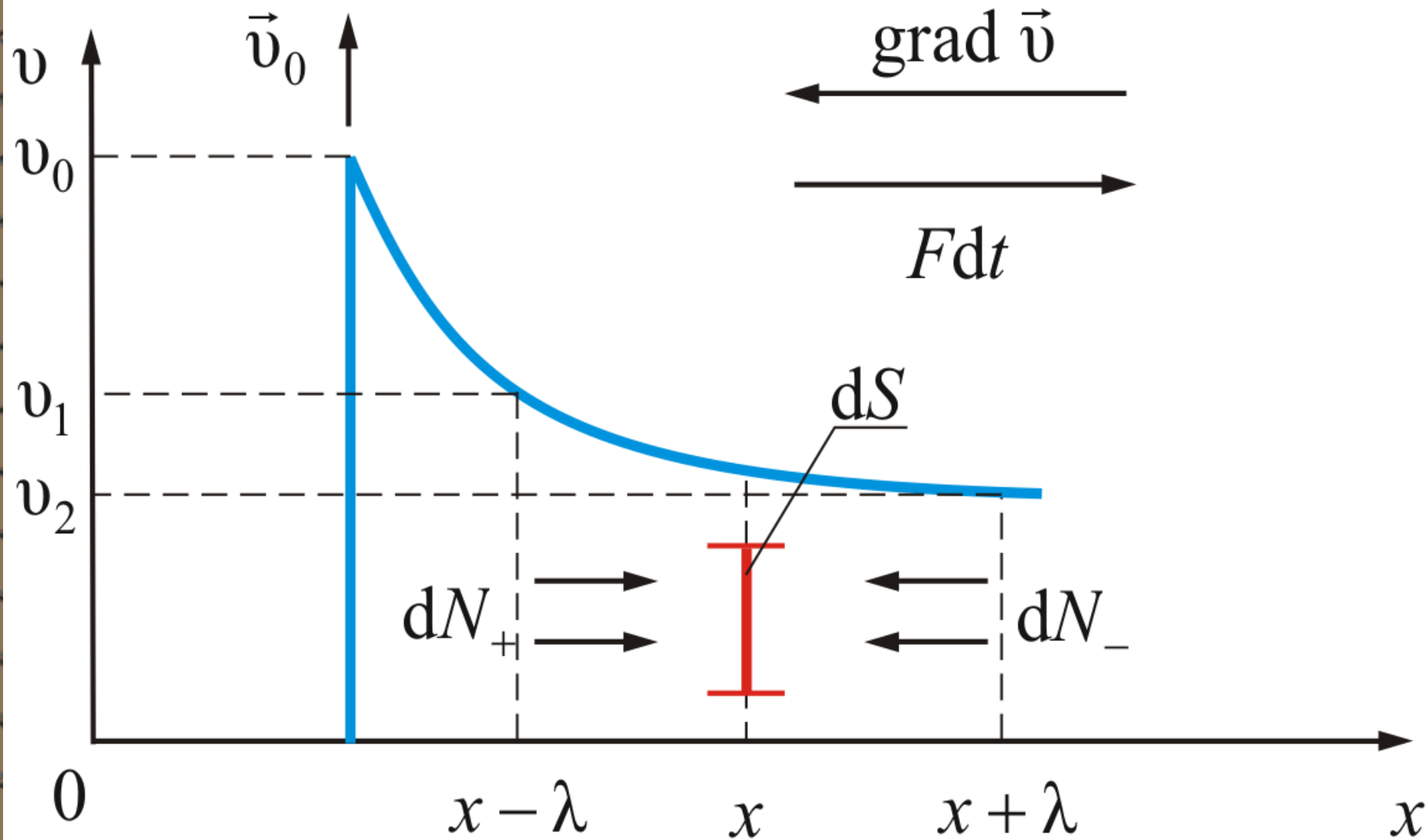
Если какое либо тело движется в газе, то оно сталкивается с молекулами газа и сообщает им импульс. С другой стороны, тело тоже будет испытывать соударения со стороны молекул, и получать собственный импульс, но направленный в противоположную сторону. Газ ускоряется, тело тормозится, то есть, *на тело действуют силы трения.*

Такая же сила трения будет действовать и между двумя соседними слоями газа (или жидкости), движущимися с разными скоростями.

Это явление носит название внутреннее трение или вязкость газа, причём *сила трения пропорциональна градиенту скорости:*

$$F_{\text{тр}} \sim \frac{dv}{dx}$$

Рассмотрим систему координат v от x



Пусть в покое газе вверх, перпендикулярно оси x движется пластинка со скоростью v_0 , причём $v_0 \ll v_T$ (v_T — скорость теплового движения молекул). Пластинка увлекает за собой прилегающий слой газа, тот соседний слой и так далее. Весь газ делится, как бы на тончайшие слои, скользящие вверх тем медленнее, чем дальше они от пластинки.

Раз **слои газа движутся с разными скоростями, возникает трение.**

Выясним причину трения в газе.

Каждая молекула газа в слое принимает участие в двух движениях:
тепловом и направленном.

Так как направление теплового движения хаотически меняется, то **в среднем вектор тепловой скорости равен нулю**

$$\langle \vec{v}_T \rangle = 0$$

При **направленном движении** вся совокупность молекул будет дрейфовать с **постоянной скоростью** U .

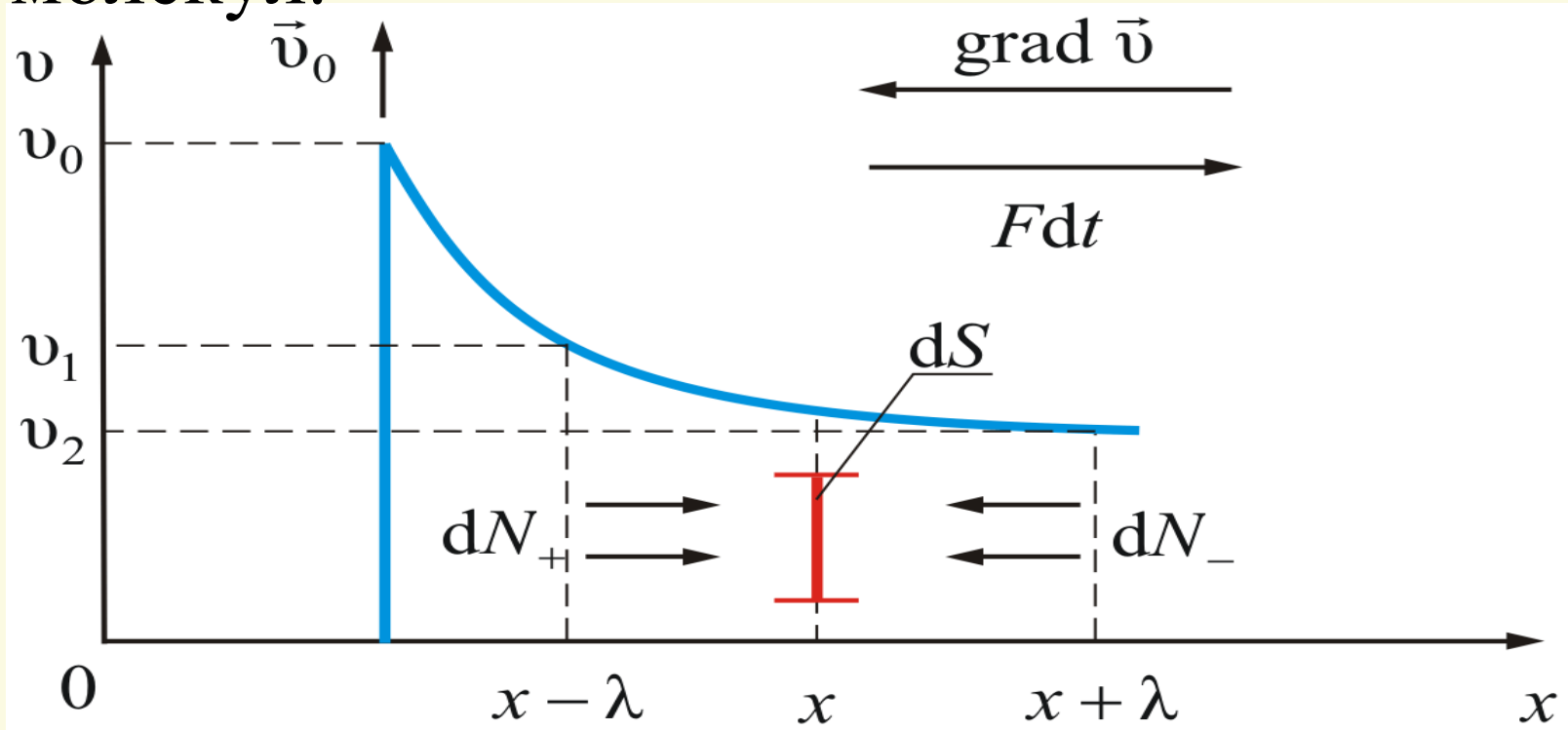
Средний импульс отдельной молекулы в слое определяется только дрейфовой скоростью u :

$$p_0 = m_0 u.$$

Но так как молекулы участвуют в тепловом движении, они будут переходить из слоя в слой. При этом они будут переносить с собой добавочный импульс, который будет определяться молекулами того слоя, куда перешла молекула.

*Перемешивание молекул разных слоёв приводит к выравниванию дрейфовых скоростей разных слоёв, что и проявляется макроскопически как **действие сил трения между слоями.***

Рассмотрим элементарную площадку dS перпендикулярно оси x . Через эту площадку за время dt влево и вправо переходят потоки молекул.



$$dN_+ = dN_- = \frac{1}{6} n \langle v \rangle dS dt.$$

Но эти потоки переносят разный импульс: $m_0 v_1 dN_+$ и $m_0 v_2 dN_-$

При переносе импульса от слоя к слою происходит изменение импульса этих слоёв. Это значит, что на каждый из этих слоёв действует сила, равная изменению импульса.

Сила эта есть не что иное, как **сила трения между слоями газа**, движущимися с различными скоростями. Отсюда и название – **внутреннее трение**.

Закон вязкости был открыт **И. Ньютоном** в 1687 г.

Переносимый за время dt импульс равен: $d(m_0 v)$ или

$$F dt = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m_0 (v_1 - v_2) dS$$

Отсюда получим силу, действующую на единицу площади поверхности, разделяющей два соседних слоя газа:

$$\frac{F}{dS} = f = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle n m_0 \left(\frac{v_1 - v_2}{2\lambda} \right) = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle m_0 n \frac{v_2 - v_1}{2\lambda}$$

Сила, действующая на единицу площади поверхности, разделяющей два соседних слоя газа:

$$f = -\eta \frac{dv}{dx} - \text{уравнение Ньютона}$$

Или, в общем виде:

$$\vec{f} = -\eta \operatorname{grad} \vec{v}$$

уравнение Ньютона.

Здесь η – коэффициент вязкости:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle n m_0 = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \rho = D \rho$$

где D – коэффициент диффузии;

ρ – плотность газа.

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \rho$$

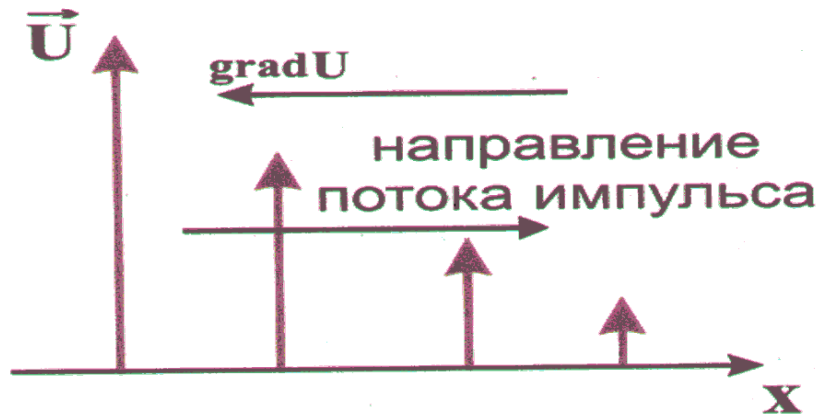
- коэффициент
вязкости

Физический смысл **коэффициента вязкости** η в том, что он численно равен импульсу, переносимому в единицу времени через единицу площади при градиенте скорости равном единице.

Вязкость газа

Вязкость - явление переноса молекулами импульса направленного движения

Сила внутреннего трения



$$F = \eta \left| \frac{dU}{dx} \right| S$$

$$j = -\eta \frac{dU}{dx}$$

$\frac{dU}{dx}$ - градиент скорости направленного движения молекул

$j = \frac{F}{S}$ - плотность потока импульса

η - коэффициент вязкости газа

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$$

$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$ - средняя скорость теплового движения молекулы

$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$ - средняя длина свободного пробега молекулы

Уравнения и коэффициенты переноса

Сопоставим уравнения переноса

$$J = -D \text{grad } n$$

$$J = -D \frac{dn}{dx}$$

Уравнение Фика для диффузии.

Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle$$

$$q = -\chi \operatorname{grad} T$$

или

$$q = -\chi \frac{dT}{dx}$$

Уравнение Фурье
для теплопроводности.

Коэффициент теплопроводности:

$$\chi = \frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle \rho C_{V_{yy}} = D \rho C_{V_{уд}}$$

$$f_{\text{тр}} = -\eta \operatorname{grad} v$$

$$f_{\text{тр}} = -\eta \frac{dv}{dx}$$

- Уравнение Ньютона
для трения.

Коэффициент вязкости:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle \rho = D \cdot \rho$$

Лекция закончена!