Лекция 10

Свойства функций, непрерывных на отрезке

1-я теорема Больцано–Коши (о существовании нуля функции). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет на его концах значения разных знаков (т.е. $f(a)f(b)<0$), то существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f(c)=0$.*

◀Доказательство. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам его серединой $\frac{a+b}{2}$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, то $c=\frac{a+b}{2}$ и теорема доказана; в противном случае обозначим через $[a_1,b_1]$ ту из его половин, для которой $f(a_1)f(b_1)<0$. Разделим пополам отрезок $[a_1,b_1]$ и вновь, либо его середина является нулем функции и теорема доказана, либо выберем ту из его половин $[a_2,b_2]$, для которой $f(a_2)f(b_2)<0$. Продолжим этот процесс. Тогда, либо после некоторого числа шагов середина очередного отрезка окажется нулем функции, либо получим последовательность $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset...\supset[a_n,b_n]\supset...$ вложенных отрезков, причем $f(a_n)f(b_n)<0$ и $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$. $\exists c\in[a,b]: a_n\to c, b_n\to c$, тогда переходя к пределу в неравенстве $f(a_n)f(b_n)<0$ с учетом непрерывности функции в точке c, получим $[f(c)]^2\le 0$. Так как строгое неравенство невозможно, то $f(c)=0$. ▶

Замечание. В доказательстве этой теоремы фактически описан процесс нахождения корня уравнения $f(x)=0$ с заданной точностью *методом деления отрезка пополам*. Иначе этот процесс называется *бисекцией* или *дихотомией.*

2-я теорема Больцано–Коши (о промежуточных значениях). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, $A=f(a)$, $B=f(b)$, *и* $A\neq B$, *то для любого числа* C *между* A *и* B *существует точка* $c\in(a,b)$ *такая, что* $f(c)=C$.

◄Доказательство. Пусть для определенности $A<B$, так что $A<C<B$. Положим $F(x)=f(x)-C$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах имеет значения разных знаков: $F(a)=A-C<0$, $F(b)=B-C>0$. Следовательно, по 1-й теореме Больцано–Коши $\exists c\in(a,b): F(c)=0$, т.е. $f(c)-C=0$ или $f(c)=C$. ►

Замечание. 1-я теорема Больцано–Коши является, в свою очередь, частным случаем 2-й теоремы: если числа A и B – разных знаков, то при $C=0$ получаем утверждение 1-й теоремы.

Следствие (из 2-й теоремы Больцано–Коши). Если функция f непрерывна на промежутке I (конечном или бесконечном) и не является постоянной, то множество $f(I)$ ее значений также является промежутком.

1-я теорема Вейерштрасса (об ограниченности). *Если функция непрерывна на отрезке, то она на нем ограничена.*

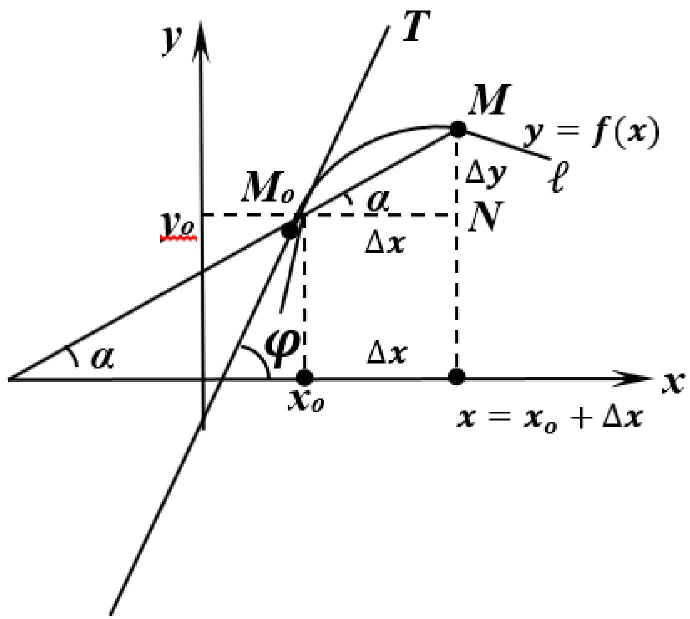
Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве D. Пусть точки $\alpha,\beta\in D$ таковы, что $f(\alpha)\leq f(x)\leq f(\beta)$ $\forall x\in D$. Тогда число $m=f(\alpha)$ называется *наименьшим*, а число $M = f(\beta)$ соответственно *наибольшим значением функции на множестве* D.

Обозначения: $m = \min\limits_{D} f(x)$, $M = \max\limits_{D} f(x)$.

2-я теорема Вейерштрасса (о существовании наименьшего и наибольшего значений). *Если функция непрерывна на отрезке, то существуют ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке.*

Следствие (из 2-й теоремы Вейерштрасса)**.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b] = I$, то множество $f(I)$ ее значений есть отрезок $[m, M]$, где $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной



Пусть функция $y = f\left(x\right)$ определена в некоторой окрестности U точки x_0.

$\begin{matrix} M_o(x_o, y_o) \\ M(x, y) \end{matrix}$ – точки графика функции $y = f(x)$.

Придадим аргументу x_0 произвольное приращение Δx такое, что точка $x_0 + \Delta x$ также принадлежит U. Функция получит приращение $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$.

Определение. Касательной к линии $\boldsymbol{\ell}$ в точке M_o называется прямая $M_o T$, т.е. предельное положение секущей $M_o\ M$, когда точка M стремится к $\mathrm{M_o}$ вдоль данной линии произвольным образом.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}$ – угол, образованный секущей с осью ох.

$\Delta M_o N M$: $tg\,\alpha = \frac{MN}{M_o N} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть $M \to M_o$ вдоль графика $y = f(x)$, тогда $\Delta x \to 0$.

φ – угол наклона касательной к оси $0x$, тогда

$tg\,\alpha \to tg\,\varphi$ при $\Delta x \to 0$

$$k = tg\,\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение. *Производной* функции $y = f\left(x\right)$ в точке x_0 называется (конечный) предел при $\Delta x \to 0$ отношения приращения Δy функции в этой точке к приращению аргумента Δx:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

В других обозначениях

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Производная функции $y=f(x)$, рассматриваемая на множестве тех точек, где она существует, сама является функцией. Процесс нахождения производной называют *дифференцированием функции.*

Обозначения производной: $f'(x),\ y'(x),\ \dfrac{dy}{dx},\ y'_x(x)$.

Касательная и нормаль к кривой.

Мы показали, что

$$\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

И показали, что существование производной функции $f\left(x\right)$ в точке x_0 эквивалентно существованию касательной к графику этой функции в точке $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, непараллельной оси y.

Геометрический смысл производной: производная функции $f'\left(x_0\right)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

Определение. Прямая, проходящая через точку касания $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к графику функции $f\left(x\right)$ в точке $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

Определение. Углом между кривыми $y = f_1\left(x\right)$ и $y = f_2\left(x\right)$ в их общей точке $\left(x_0, y_0\right)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке $\left(x_0, y_0\right)$.

Вывод уравнений касательной и нормали к графику функции

Пусть $M\left(x_0, y_0\right)$– точка графика функции $y = f\left(x\right)$, $y_0 = f\left(x_0\right)$. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M\left(x_0, y_0\right)$ с данным угловым коэффициентом k имеет вид $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$. Поскольку угловой коэффициент касательной к графику равен $f'\left(x_0\right)$, то получаем уравнение касательной

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}.$$

Поскольку нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент равен $-1/f'(x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$. Получаем уравнение нормали

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}.$$

Так же уравнение нормали имеет вид

$$f'(x_0)(y - y_0) + (x - x_0) = 0.$$

Если $f'(x_0) = 0$, то касательная параллельна оси x и имеет уравнение $y = y_0$, а нормаль параллельна оси y и имеет уравнение $x = x_0$.

Пример. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^2 + 4x$ в точке $x_0 = 1$.

Замечание. Если $f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$, то в точке $(x_0, f(x_0))$ имеем вертикальную касательную, задаваемую уравнением $x = x_0$.

Механический смысл производной

Предположим, что материальная точка M движется вдоль оси x, $s\left(t_0\right)$ – координата точки M в момент времени t_0, $s\left(t_0+\Delta t\right)$ – координата точки M в момент времени $t_0+\Delta t$. Средняя скорость движения точки на промежутке времени $\left[t_0, t_0+\Delta t\right]$ равна

$$v_{средняя}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s\left(t_0+\Delta t\right)-s\left(t_0\right)}{\Delta t},$$

а мгновенная скорость в точке t_0

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v_{средняя}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s\left(t_0+\Delta t\right)-s\left(t_0\right)}{\Delta t}=s'\left(t_0\right).$$

Таким образом, скорость есть производная от пройденного пути по времени.

По аналогии производную $f'\left(x_0\right)$ произвольной функции $f\left(x\right)$ можно считать скоростью изменения функции в точке x_0.

Примеры.

1) $f\left(x\right)=C, C=\mathrm{const}$.

2) $f\left(x\right)=x,\ f'\left(x\right)=1$.

3) $f\left(x\right)=x^2,\ f'\left(x\right)=2x$.

4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

5) $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$.

6) $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *имеет производную в точке* x_0, *то функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0.

◄Доказательство. Поскольку существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$, то

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м. при $\Delta x \to 0$. Значит,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \left(f'(x_0) + \alpha(\Delta x)\right)\Delta x.$$

Следовательно, $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, и функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.►

Обратное утверждение неверно!!!!

Пример. $f(x)=|x|$. Производная в точке $x_0=0$ не существует.

Действительно, $\Delta y=|\Delta x|=\begin{cases}\Delta x, \Delta x>0,\\ -\Delta x, \Delta x<0\end{cases}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}1, \Delta x>0,\\ -1, \Delta x<0\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует.