Лекция 2.
Комплексные числа

Определение. *Комплексным числом* называется выражение вида $x+iy$, где $x\in\mathbb{R}$ и $y\in\mathbb{R}$ — действительные числа, а i — символ, называемый *мнимой единицей*, такой, что $i^2=-1$.

Числа $x\in\mathbb{R}$ и $y\in\mathbb{R}$ называются *действительной* и *мнимой частью* комплексного числа $z=x+iy$ и обозначаются $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ соответственно.

Определение. Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются *равными*, если равны как их действительные части, так и их мнимые части: $x_2=x_1$, $y_2=y_1$.

Операции сложения и умножения комплексных чисел $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ определяются следующим образом:

$$z_1+z_2=\left(x_1+x_2\right)+i\left(y_1+y_2\right),$$

$$z_1z_2=\left(x_1x_2-y_1y_2\right)+i\left(x_1y_2+x_2y_1\right).$$

Очевидно,

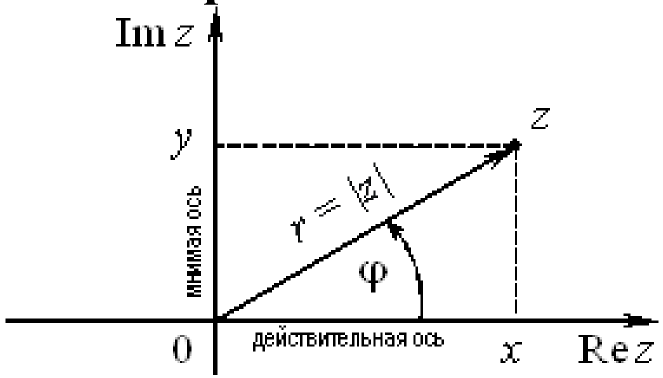
$$z+0=(x+iy)+(0+i0)=z$$

и

$$(x+iy)+(-x+i(-y))=0+i=0,$$

т.е. $-z=-x-iy$ — противоположный элемент относительно операции сложения.

Геометрическое изображение комплексных чисел.



Комплексные числа допускают геометрическое изображение: число $z=x+iy$ изображается точкой (x,y) (или радиус-вектором этой точки) на координатной плоскости xy. При этом рядом с точкой вместо “$M(x,y)$” (“(x,y)”, “M”) пишут “$z=x+iy$” (“$x+iy$”, “z”), а саму плоскость называют *комплексной плоскостью*.

Примеры: Изобразить на комплексной плоскости множество точек, соответствующих числам z, таким, что:
1) $1 \le |z - 2 + i| < 2$; 2) $|\arg z| < \pi/4$; 3) $\operatorname{Im} z = 3$.

Операции сложения двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ соответствует сложение радиус-векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ по правилу параллелограмма.

По определению

$$i^2 = (0+i1)(0+i1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1) + i(0\cdot 1 + 1\cdot 0) = -1 + i\cdot 0 = -1.$$

Легко проверить, что

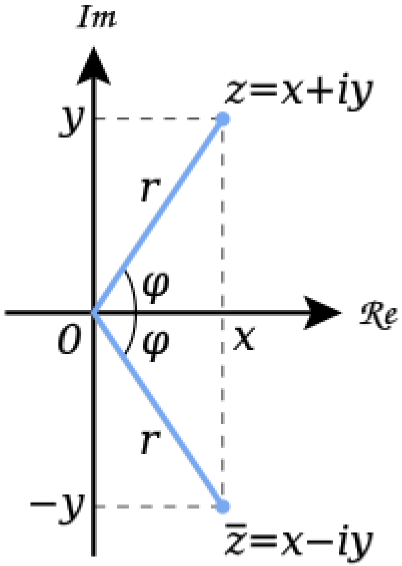
$$z\cdot 1 = (x+iy)\cdot(1+i0) = z,$$

т.е. 1 — нейтральный элемент относительно операции умножения.

Любое выражение, составленное с их помощью из комплексных чисел, можно преобразовывать по обычным алгебраическим правилам, учитывая при этом, что $i^2 = -1$.

Определение. Представление $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ называется алгебраической формой комплексного числа. Множество всех комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

Определение. Комплексные числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$ называются комплексно *сопряженными*.



Свойства операции комплексного сопряжения:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ **;**

2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ **;**

3. $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$, $z_2 \neq 0$**;**

4. $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$**. (**Доказать**)**

Свойство 4 используется при делении комплексных чисел и позволяет получить число, обратное любому комплексному числу, не равному нулю.

$$\frac{1}{x+iy}=\frac{(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2},\ z=x+iy\neq 0.$$

Пример. Выполнить деление $\frac{2+i}{1-i}$.

◀ Умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{2+i}{1-i}=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+3i}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{3}{2}$$ ▶

Ответ: $\frac{1}{2}+i\frac{3}{2}$.

Модуль и аргумент комплексного числа.

Определение. Действительное число $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z=x+iy$ и обозначается символом $|z|$.

Свойства $|z|$:

1. $|z|\geq 0; |z|=0 \Leftrightarrow z=0$;

2. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$; (неравенство треугольника)

3. $|z_1 z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$;

4. $|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|$, $z_2\neq 0$;

5. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

Геометрический смысл модуля

Модуль числа $z=x+iy$ равен расстоянию точки $M(x,y)$, изображающей это число на комплексной плоскости, от точки $O(0,0)$.

Величина $|z_1-z_2|$ равна расстоянию на комплексной плоскости между точками M_1, M_2, изображающими комплексные числа z_1, z_2.

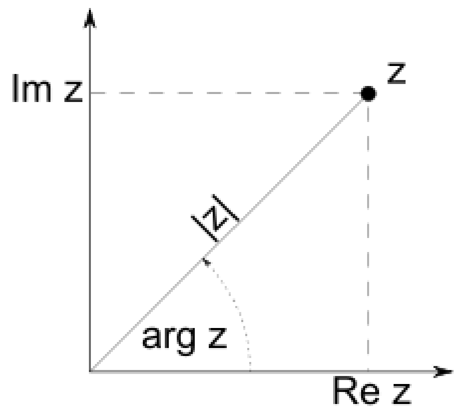
Определение. *Аргументом* комплексного числа $z = x + iy,\ z \neq 0$ называется угол φ, образованный радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ точки $M(x, y)$ и осью X на комплексной плоскости $\mathbb{C}$**.**

При этом $\varphi > 0$, если ось X можно совместить с $\overrightarrow{OM}$ поворотом против часовой стрелки и $\varphi < 0$ в противном случае.

Таким образом, r, φ – это полярные координаты точки $M(x, y)$**.**

Все аргументы $z = x + iy$ различаются на $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и обозначаются символом $\operatorname{Arg} z$. Значение $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющее условию $0 \leq \varphi < 2\pi$ называется *главным значением* аргумента и обозначается символом $\arg z$.

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = x/r,\ \sin\varphi = y/r. \qquad (1)$$



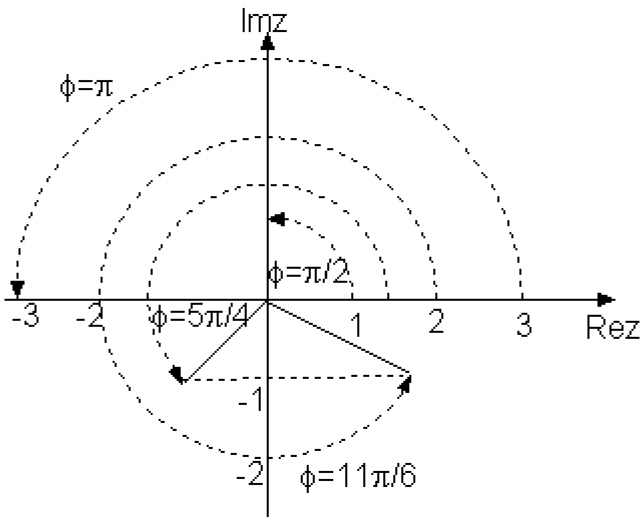
Пример. Найти главное значение аргумента следующих комплексных чисел: $i, -3, -1-i,\ \sqrt{3}-i$.

Для нахождения аргумента первых трех чисел удобно воспользоваться комплексной плоскостью. Очевидно, точки с координатами (0,1), (-3,0), (-1,-1) изображают соответственно $i, -3, -1-i$, следовательно, $\arg i = \pi/2, \arg 3 = \pi, \ \arg(-1-i) = 5\pi/4$.

Для нахождения $\arg\left(\sqrt{3}-i\right)$ воспользуемся формулами (1). Так как в нашем случае

$$x = \sqrt{3}, \ y = -1, \ r = \sqrt{3+1} = 2, \cos\varphi = \sqrt{3}/2, \sin\varphi = -1/2$$

то, очевидно, $\varphi = 11\pi/6$.



Тригонометрическая форма комплексного числа.

Из соотношений (1) следует, что любое комплексное число z может быть записано в виде

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (2)$$

Равенство (2) называется *тригонометрической формой* числа z.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ – комплексные числа, записанные в тригонометрической форме. Тогда в силу формул тригонометрии

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),\ z_2 \neq 0,$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),\ z \neq 0,$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbb{Z}$$ **(формула Муавра).** **(3)**

Показательная форма комплексного числа

Пусть $\varphi \in \mathbb{R}$ — произвольное вещественное число. Введем обозначение

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \textbf{(формула Эйлера)}. \tag{4}$$

С учетом обозначения (4) формула (2) может быть переписана в виде:

$$z = |z|e^{i\varphi}, \tag{5}$$

Равенство (5) называется *показательной формой* комплексного числа.

Отметим, что

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

В показательной форме удобно выполнять операции умножения, деления и возведения в степень. Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ z_2 \neq 0,$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi},\ z \neq 0,$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi},\ n \in \mathbb{Z} \quad \textbf{(формула Муавра).} \tag{6}$$