Семинар № 3

Гармонические колебания. Кинематика гармонических колебаний. Свободные незатухающие колебания

Рассмотрим одномерное движение частицы массой m вдоль оси x под действием консервативной силы:

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx}, \tag{3.0.1}$$

где $U(x)$ – потенциальная энергия частицы.

Согласно II-ому закону Ньютона уравнение движения частицы имеет вид:

$$F_x = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU(x)}{dx}\ . \tag{3.0.2}$$

Нас интересуют возможные положения равновесия частицы, где скорость, ускорение и действующая на частицу сила равны нулю:

$$\frac{dx}{dt} = 0,\quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0,\quad F_x = 0\ . \tag{3.0.3}$$

Согласно (3.0.2) в положении равновесия производная потенциальной энергии по координате обращается в ноль,

$$F = 0 = -\frac{dU(x)}{dx}\ , \tag{3.0.4}$$

поэтому потенциальная энергия $U(x)$ в этих точках имеет экстремум и принимает либо максимальное, либо минимальное значение точки перегиба здесь не рассматривается. Максимум потенциальной энергии соответствует неустойчивому положению равновесия, поскольку при сколь угодно малом отклонении частицы от данного положения равновесия частица под действием силы F_x будет удаляться от исходного положения. В точке минимума потенциальной энергии имеет место устойчивое положение равновесия. В этом случае частица, выведенная из положения равновесия внешним воздействием, стремится вернуться в исходное положение под действием возвращающей силы. При любом смещении частицы из положения устойчивого равновесия возвращающая сила всегда направлена к точке равновесия.

Наше рассмотрение ограничено важным частным случаем движения частицы в малой окрестности устойчивого положения равновесия в точке x=0, когда потенциальная энергия описывается формулой:

$$U = \frac{1}{2}kx^2\ . \tag{3.0.6}$$

Здесь k>0 – постоянная величина.

Для этого случая уравнение движения частицы записывается следующим образом:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU(x)}{dx} = -kx\ , \tag{3.0.7}$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \ . \tag{3.0.8}$$

Перенесем член -*kx* в левую часть равенства с изменением знака и получим следующее уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \ . \tag{3.0.9}$$

Разделим левую и правую части полученного уравнения на массу *m*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0 \ , \tag{3.0.10}$$

и введем обозначение $\omega_0^2 = k/m$. В результате приходим к дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \ . \tag{3.0.11}$$

Данное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по времени описывает механическую систему, которая называется гармоническим осциллятором. Примером гармонического осциллятора может служить шарик, подвешенный на вертикальной пружине.

Общее решение полученного дифференциального уравнения может быть записано в виде:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \ , \tag{3.0.12}$$

где $A > 0$ – амплитуда гармонических колебаний, ω_0 – круговая, или циклическая частота колебаний, связанная с частотой колебаний $\nu_0 = \omega_0/2\pi$. Аргумент косинуса называется фазой колебаний, а постоянная φ_0 - начальной фазой. При подстановке функции (3.0.12) в дифференциальное уравнение (3.0.11) это уравнение превращается в числовое тождество $0 \equiv 0$.

Неизвестные величины *A* и φ_0 находятся с помощью двух начальных условий, определяющих начальное состояние частицы и обычно задаваемых для момента времени *t*=0,

$$x\big|_{t=0} = x(0) = A\cos\varphi_0 \ , \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = V_0 = -\omega_0 A\sin\varphi_0 \ . \tag{3.0.13}$$

Из начальных условий (3.0.13) следует, что

$$A = \sqrt{x^2(0) + \frac{V^2(0)}{\omega_0^2}} \ , \qquad \varphi_0 = arctg\left(-\frac{V(0)}{\omega \times x(0)}\right) . \tag{3.0.14}$$

Число начальных условий должно равняться числу неизвестных постоянных в общем решении обыкновенного дифференциального уравнения. В свою очередь число произвольных постоянных в общем решении обыкновенного дифференциального уравнения равно порядку этого уравнения, который определяется высшей производной искомой функции по времени.

Приведённое выше решение уравнения гармонического осциллятора описывает свободные незатухающие колебания. Смещение *x*, скорость *V* и ускорение *a* данных колебаний определяются формулами:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \ , \tag{3.0.15}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \ , \qquad (3.0.16)$$

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x \ . \qquad (3.0.17)$$

В случае свободных незатухающих гармонических колебаний полная механическая энергия осциллятора E сохраняется постоянной. Она равна сумме его кинетической

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (3.0.18)$$

и потенциальной

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (3.0.19)$$

энергий. С учетом (3.0.12) выражение для полной энергии принимает вид:

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = const \ . \qquad (3.0.20)$$

Здесь использовано соотношение $\omega_0^2 = k/m$.

Задача №7

Найти результирующее движение $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ в случае двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящий вдоль оси x с амплитудами A и B.

Решение

1. Задача решается методом векторных диаграмм. Будем рассматривать смещение x как проекцию на ось x вектора постоянной длины A, который вращается с постоянной угловой скоростью ω в плоскости $X0Y$ вокруг точки $x=y=0$

$$x = A\cos\varphi \ , \qquad (3.1.1)$$

где $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$. Формула (3.1.1) описывает гармонические колебания с циклической частотой ω, амплитудой A и начальной фазой φ_0 вдоль оси x.

2. Если частица одновременно участвует в двух гармонических колебаниях вдоль оси x, то для начального момента времени t=0 из одной точки $x=y=0$ строятся два вектора, положение и длина которых определяются соответственно амплитудой и начальной фазой этих колебаний. Суммарное движение частицы описывается вектором, равным сумме этих двух векторов.

3. Найдем графически сумму двух гармонических колебаний

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t = A\cos\omega t + B\cos(\omega t - \pi/2) \ . \qquad (3.1.2)$$

Из точки О, как показано на рис.3.1, построим два вектора, соответствующие гармоническим колебаниям в начальный момент времени t=0. Суммарный вектор $\vec{C}$ имеет длину

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad (3.1.3)$$

и начальную фазу

$$tg\varphi_0 = -\frac{B}{A} \ . \qquad (3.1.4)$$

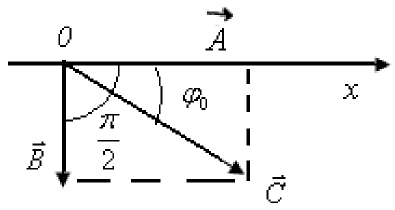


Рис 3.1

При t>0 все три вектора $\vec{A}$, $\vec{B}$ *и* $\vec{C}$ вращаются с одинаковой угловой скоростью ω, равной частоте гармонических колебаний. Проекция вектора $\vec{C}$ на ось x описывает результирующее движение частицы в виде

$$x = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\left(\omega t + arctg\left(-\frac{B}{A}\right)\right) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\left(\omega t - arctg\left(\frac{B}{A}\right)\right). \qquad (3.1.5)$$

Ответ: $x = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\left(\omega t - arctg\left(\frac{B}{A}\right)\right)$.

Задача №8

Частица совершает гармонические колебания около положения равновесия x=0 с циклической частотой $\omega = 4$ рад/с так, что в начальный момент времени t=0 её координата $x_0 = 0{,}25$ м, а скорость $V_0 = 1$ м/с. Найдите смещение частицы x(t) как функцию времени t.

Решение

1. Общее выражение, описывающее гармонические незатухающие колебания, имеет вид:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (3.2.1)$$

где A, ω и φ_0 - постоянные величины. Согласно условиям задачи известны циклическая частота

$$\omega = 4 \text{ рад/с} \qquad (3.2.2)$$

и состояние частицы в момент времени t=0:

$$x(0) = A\cos\varphi_0 = x_0 = 0{,}25\,м, \qquad (3.2.3)$$

$$V(0) = -\omega A\sin\varphi_0 = V_0 = 1\,м/с^2. \qquad (3.2.4)$$

2. Из (3.2.3) и (3.2.4) получаем, что амплитуда колебаний

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}} = 0{,}36\,м \qquad (3.2.5)$$

и начальная фаза

$$\varphi_0 = arctg\left(-\frac{V_0}{\omega\cdot x_0}\right) = -arctg\left(\frac{V_0}{\omega\cdot x_0}\right) = -\frac{\pi}{4}. \qquad (3.2.6)$$

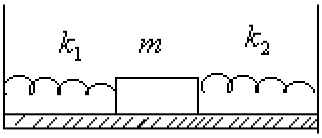
3. С учётом (3.2.5) и (3.2.6) выражение (3.2.1) принимает вид

$$x = 0{,}36\cos\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)м. \qquad (3.2.7)$$

Ответ: $x = 0{,}36\cos\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)м$, где время t измеряется в секундах.

Задача №9

Рассмотреть движение тела массой *m*=1 кг в колебательных системах 1 и 2, показанных на рисунках. Коэффициенты жёсткости пружины $k_1 = 200\,H/м$ и $k_2 = 300\,H/м$. Массами пружин и трением можно пренебречь. Определите периоды T_1 и T_2 гармонических колебаний тела в этих системах.



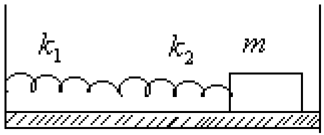


Рис.3.2.

Решение

Для расчёта механической колебательной системы необходимо: 1) найти положение равновесия системы, 2) проанализировать его устойчивость, записав выражение для силы, возникающей при смещении тела из положения равновесия и 3) получить уравнение движения тела в малой окрестности устойчивого положения равновесия, записав его в стандартной форме уравнения движения гармонического осциллятора.

Определим все силы, действующие на тело согласно условиям задачи: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, силы упругости деформированных пружин $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. В нашем случае достаточно рассмотреть только горизонтальное движение тела, поскольку вертикально направленные силы взаимно скомпенсированы.

Очевидно, что в обеих системах имеются положения равновесия, причем будем считать, что для системы 1 в положении равновесия обе пружины не деформированы. Для каждой системы введём ось *x*, вдоль которой происходит движение тела, и направим её слева направо. При этом примем, что положение равновесия находится в точке *x=0*.

Система 1

1. Определим устойчивость положения равновесия. При смещении тела относительно равновесия пружины деформируется таким образом, что возникающие силы упругости обеих пружин направлены в одну сторону – к положению равновесия тела. Следовательно, формируется возвращающая сила и положение равновесия устойчивое.

2. Если смещение тела относительно положения равновесия *x*, полная сила упругости, действующая на тело,

$$F = F_1 + F_2 = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x \ . \qquad (3.3.1)$$

Здесь учитывается то обстоятельство, что смещения тела и прикреплённых к нему концов пружины одинаковые.

3. Согласно II закону Ньютона уравнение движения тела имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x \qquad (3.3.2)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x = 0 \ , \qquad (3.3.3)$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \qquad (3.3.4)$$

- циклическая частота и

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 0{,}28c \qquad (3.3.5)$$

- период гармонических колебаний тела в системе 1.

Система 2

1. Определим устойчивость положения равновесия. При смещении тела относительно положения равновесия пружины деформируются таким образом, что возникающие силы упругости обеих пружин направлены в одну сторону – к положению равновесия тела. Следовательно, формируется возвращающая сила и положение равновесия устойчивое.
2. Смещение x тела относительно положения равновесия равно сумме смещений правых концов обеих пружин

$$x = x_1 + x_2 \ , \qquad (3.3.6)$$

при этом на тело действует сила упругости только пружины 2

$$F_2 = -k_2 x_2 \ . \qquad (3.3.7)$$

3. Согласно II закону Ньютона уравнение движения тела запишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx_2 \ . \qquad (3.3.8)$$

4. Поскольку пружины считаются невесомыми, то согласно III закону Ньютона для сил упругости пружин выполняется равенство

$$F_1 = -k_1 x_1 = F_2 = -k_2 x_2 \qquad (3.3.9)$$

и

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1} x_2 \ . \qquad (3.3.10)$$

Тогда из (3.3.6) следует, что

$$x_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x \ . \qquad (3.3.11)$$

5. С учётом (3.3.11) уравнение движения тела (3.3.8) запишется следующим образом

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x \qquad (3.3.12)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_2^2 x = 0 \ , \qquad (3.3.13)$$

где

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} \qquad (3.3.14)$$

- циклическая частота и

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\frac{(k_1+k_2)m}{k_1 k_2}} = 0{,}57\,c \qquad (3.3.15)$$

- период гармонических колебаний тела в системе 2.

Согласно полученным результатам эквивалентная жёсткость k пружин в системе 1 определяется формулой

$$k = k_1 + k_2 \;,$$

а в системе 2 - формулой

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \;.$$

Ответ: $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}} = 0{,}28c$, $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\frac{(k_1+k_2)m}{k_1 k_2}} = 0{,}57\,c$.