

Программа КР «Производная»

Теория

Механический смысл производной.

Касательная и нормаль к кривой. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции.

Правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций. Частные случаи: производные функций Cu , $\frac{u}{C}$, $\frac{C}{u}$ (u – функция, C – постоянная). Правило дифференцирования сложной функции.

Производные основных элементарных функций (таблица производных).

Производная параметрически заданной функции.

Тренировочные варианты на уровень А

Вариант 1

1. Найти угловой коэффициент нормали к графику функции $\frac{2}{x^2}$ в точке $(-1, 2)$. (Ответ: $-\frac{1}{4}$)
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}} = ?$ (Ответ: $-\infty$)
3. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. $y' = ?$ (Ответ: $\frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$)
4. $y = (2+x)\sqrt{1-x}$. $y' = ?$ (Ответ: $\frac{-3x}{2\sqrt{1-x}}$)
5. $y = 1 - \frac{(\operatorname{ctg} x)^3}{3}$. $y' = ?$ (Ответ: $\frac{(\cos x)^2}{(\sin x)^4}$)
6. $x = \ln(1+t^2)$, $y = \operatorname{arctg} t$. $y'_x = ?$ (Ответ: $\frac{1}{2t}$)
7. Составить уравнение касательной к кривой $y = \sin \frac{x}{2}$ в точке с абсциссой $x = 0$. (Ответ: $y = \frac{1}{2}x$)

Вариант 2

1. $y = \frac{2}{3x-4}$. $y' = ?$ (Ответ: $-\frac{6}{(3x-4)^2}$)
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = ?$ (Ответ: $\frac{1}{4}$)
3. $y = x(2x-1)^5$. $y' = ?$ (Ответ: $(12x-1)(2x-1)^4$)
4. $y = \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}$. $y' = ?$ (Ответ: $\frac{2}{\sqrt{2x+1}(\sqrt{2x+1}+1)^2}$)
5. $y = 1 - \frac{\arcsin(x^3)}{3}$. $y' = ?$ (Ответ: $-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$)
6. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$. $y'_x = ?$ (Ответ: $\frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$)
7. Составить уравнение нормали к кривой $y = \ln x$ в точке ее пересечения с осью x . (Ответ: $x + y - 1 = 0$)

Вариант 3

1. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{3}$. $y' = ?$ (Ответ: $-\frac{1}{3(\sin x)^2}$)
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n-1)^2}{3n^2-1} = ?$ (Ответ: 3)
3. $y = (1+4x^2) \operatorname{arctg} 2x$. $y' = ?$ (Ответ: $8x \operatorname{arctg} 2x + 2$)
4. $y = \frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$. $y' = ?$ (Ответ: $\frac{6 \cos 3x}{(1-\sin 3x)^2}$)
5. $y = \frac{1}{1-\ln x}$. $y' = ?$ (Ответ: $\frac{1}{x(1-\ln x)^2}$)
6. $x = \sqrt{1-t}$, $y = t\sqrt{1-t}$. $y'_x = ?$ (Ответ: $3t-2$)
7. Составить уравнение касательной к кривой $y = e^x$ в точке ее пересечения с осью y . (Ответ: $x - y + 1 = 0$)

Тренировочные варианты на уровни В,С

Вариант 1

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\operatorname{ctg} x} = ?$ (Ответ: e^2)
2. Функция y задана уравнением $e^y + xy = e$. Доказать, что $y'_x = \frac{y}{xy - x - e}$.
3. Найти точку кривой $y = \ln(5-2x)$, в которой касательная параллельна прямой $2x + y - 1 = 0$. (Ответ: $(2, 0)$)

Вариант 2

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+2} - n + 5}{\sqrt{n^2+5} - n + 2} = ?$ (Ответ: $\frac{5}{2}$)
2. Найти угол между кривыми $y = \sin x$ и $y = \cos x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) в точке их пересечения. (Ответ: $\operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$)
3. Найти точку параболы $y = 2x^2 - 3x + 5$, в которой касательная перпендикулярна прямой $x + 3y - 5 = 0$. (Ответ: $(\frac{3}{2}, 5)$)

Вариант 3

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x-1} \right)^{x+2} = ?$ (Ответ: e^{-4})
2. $y = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$. $y'(0) = ?$. (Ответ: $\frac{1}{4}$)
3. Найти точку кривой $y = \sqrt{3x-5}$, в которой касательная параллельна прямой $3x - y + 4 = 0$. (Ответ: $(\frac{7}{4}, \frac{1}{2})$)