Лекция 5

(Бесконечная числовая) последовательность, ее геометрическое изображение

Определение. Числовой последовательностью называется функция натурального аргумента $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ (или $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$).

Число $f(n), n\in\mathbb{N}$, называется n-м членом последовательности и обозначается символом x_n, а формула $x_n = f(n)$ называется формулой общего члена последовательности x_n.

Члены последовательности могут изображаться точками числовой прямой.

Примеры.

1. $x_n = b$, $b\in\mathbb{R}$ (постоянная последовательность).
2. $x_n = n$; $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.
3. $x_n = \dfrac{1}{n}$; $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$.
4. $x_n = (-1)^n$; $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$.
5. $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$; $\left\{-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots, (-1)^n \dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$.

6. $x_n = \left(1+(-1)^n\right)n$; $\{0,2,0,4,0,6,\ldots\}$.

7. $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$; $\left\{0,\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{4},0,\dfrac{1}{6},\ldots\right\}$.

8. $x_n = \sqrt{n}$; $\{1,\sqrt{2},\ldots,\sqrt{n},\ldots\}$.

9. $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4,\ x_4 = 1,\ x_5 = 5,\ x_6 = 9,\ \ldots$(десятичные знаки числа π)

Определение. Последовательность x_n называется *ограниченной*, если существуют два действительных числа m, M, такие, что для всех элементов последовательности выполняется неравенство $m \le x_n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Примеры: $x_n = \dfrac{1}{n}$; $x_n = (-1)^n$; $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$; $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

Можно дать другое определение ограниченной последовательности, эквивалентное первоначальному определению.

Определение. Последовательность x_n называется *ограниченной*, если существует число $M \ge 0$ такое, что выполняется неравенство $|x_n| \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Определение. Последовательность x_n называется *возрастающей* (*убывающей*), если $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$) для всех $n \in \mathbb{N}$.

Примеры: $x_n = n$; $x_n = \sqrt{n}$; $x_n = \dfrac{1}{n}$.

Определение. Последовательность x_n называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

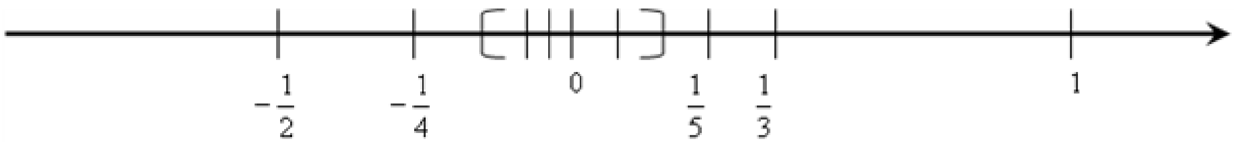
Всякая возрастающая (убывающая) последовательность является неубывающей (невозрастающей).

Определение. Неубывающая или невозрастающая последовательность называется *монотонной*.

Последовательность

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots,$$

общий член которой $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, изображена на рисунке.



Наблюдая за расположением точек последовательности, легко заметить, что они все ближе и ближе подходят к нулю, накапливаются около нуля.

Предел последовательности, сходящаяся последовательность

Определение. Число b называется *пределом* последовательности x_n при стремлении n к бесконечности, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon) > 0$ (зависящее от ε) такое, что при всех натуральных числах $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*.

Говорят, что последовательность x_n стремится (сходится) к числу b.

Обозначения: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$; $x_n \to b$ при $n \to \infty$.

С помощью кванторов утверждение, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, можно записать так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N = N(\varepsilon) > 0 : n > N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon.$$

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$. ε-окрестностью действительного числа b называется интервал $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

Можно сказать, что все члены сходящейся последовательности x_n, за исключением конечного их числа, попадают в ε-окрестность числа b, причем размер ε этой окрестности может быть сколь угодно малым.

Определение. Последовательность называется *расходящейся*, если она не имеет конечного предела.

Примеры сходящихся последовательностей.

1. Постоянная последовательность $x_n = b$ сходится к b.

2. $x_n = \frac{1}{n}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, т.е. $b = 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$ принимает вид $|x_n| < \varepsilon$, или $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Решая его, находим, что $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, в данном случае можно положить $N = N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$.

3. $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Такие же рассуждения показывают, что $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = 0$.

4. $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n} = 0$.

Теорема. *Если последовательность имеет конечный предел, то только один.*

Теорема(о пределе суммы, разности, произведения и частного двух сходящихся последовательностей). *Если последовательности* x_n *и* y_n *сходятся, то сходятся и последовательности* $x_n \pm y_n$, $x_n y_n$, *а при условии* $y_n \neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ *сходится и последовательность* x_n / y_n, *причем:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n / y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Big/ \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Замечание. Все пределы в формулировке теоремы являются конечными!

Пример. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5n + 1}{2n^2 + 4n - 3}$.

Сначала проведем тождественные преобразования выражения, стоящего под знаком предела, чтобы сделать возможным применение теоремы 2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 1}{2n^2 + 4n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3 - 5/n + 1/n^2\right)}{n^2\left(2 + 4/n - 3/n^2\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 5/n + 1/n^2}{2 + 4/n - 3/n^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - 5/n + 1/n^2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + 4/n - 3/n^2\right)} =$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\left(5/n\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(1/n^2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\left(4/n\right)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(3/n^2\right)}=\frac{3}{2}.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-n\right)$.

Выполняем тождественные преобразования:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n-2}+n\right)\left(\sqrt{n^2+3n-2}-n\right)}{\sqrt{n^2+3n-2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-2-n^2}{\sqrt{n^2+3n-2}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n\sqrt{1+3/n-2/n^2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3-2/n\right)}{n\left(\sqrt{1+3/n-2/n^2}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2/n}{\sqrt{1+3/n-2/n^2}+1}=\frac{3}{2}$$

Бесконечный предел. бесконечно большая последовательность

Определение. Говорят, что предел последовательности x_n равен ∞, если для любого числа $M > 0$ существует число $N = N\left(M\right) > 0$ (зависящее от M) такое, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $\left|x_n\right| > M$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Геометрический смысл: все члены последовательности x_n, за исключением конечного их числа, располагаются вне интервала $\left(-M, M\right)$, т.е. либо левее точки $-M$, либо правее точки M . Здесь число M может быть сколь угодно большим.

Определение. Говорят, что предел последовательности x_n равен $+\infty$, если для любого числа $M > 0$ существует число $N = N\left(M\right) > 0$ (зависящее от M) такое, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $x_n > M$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Геометрический смысл: все члены последовательности x_n, за исключением конечного их числа, располагаются правее точки M . Здесь число M может быть сколь угодно большим.

Определение. Говорят, что предел последовательности x_n равен $-\infty$, если для любого числа $M>0$ существует число $N=N(M)>0$ (зависящее от M) такое, что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство $x_n<-M$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$.

Геометрический смысл: все члены последовательности x_n, за исключением конечного их числа, располагаются левее точки $-M$. Здесь число M может быть сколь угодно большим.

Определение. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty(-\infty,+\infty)$, то последовательность x_n называется *бесконечно большой (б.б.)*.

Примеры бесконечно больших последовательностей.

1. $x_n = n$; $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$.

2. $x_n = \sqrt{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

   Действительно, пусть $M > 0$ — любое. Чтобы найти $N = N(M) > 0$ решаем неравенство $\sqrt{n} > M$. Получаем, что $n > M^2$, и можно взять $N = M^2$.

3. $x_n = (-1)^n n$; $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty$.

   Действительно, пусть $M > 0$ — любое. Чтобы найти $N = N(M) > 0$ решаем неравенство $\left|(-1)^n n\right| > M$. Получаем, что $n > M$, и можно взять $N = M$.

Последовательность $x_n = \left(1 + (-1)^n\right)n$ не является бесконечно большой, потому что существуют члены последовательности со сколь угодно большими номерами, равные нулю.

Теорема о сходимости монотонной последовательности

Теорема. *Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b, b \in \mathbb{R}$. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) > 0: \ n > N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$ и $N = N(1) > 0$. Тогда $|x_n - b| < 1$ при $n > N$, т.е. $b-1 < x_n < b+1$ при $n = n_0, n_0+1, \ldots$. Рассмотрим $M = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |b-1|, |b+1|\right\}$. Тогда $|x_n| < M \ \forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, последовательность x_n является ограниченной.

Обратное теореме 1 утверждение, очевидно, неверно. Существуют ограниченные последовательности, не имеющие предела. Например, $x_n = (-1)^n$.

Теорема Вейерштрасса (достаточное условие сходимости последовательности). *Всякая монотонная и ограниченная последовательность сходится.*

Возможны две ситуации.

1. Пусть x_n — неубывающая последовательность и ограничена сверху числом M: $x_n \le M$. Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \le M$.

2. Пусть x_n – невозрастающая последовательность и ограничена снизу числом m: $x_n \geq m$. Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \geq m$.

Замечание. Если последовательность x_n – неубывающая и неограниченная, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Если последовательность x_n – невозрастающая и неограниченная, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Число e. натуральные логарифмы

Теорема. Последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ является монотонной и ограниченной: $2 \le x_n < 3$.

Следствие. По теореме Вейерштрасса существует конечный предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, обозначаемый буквой e.

Итак, по определению

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e приближенно равно 2,7182818284… и является иррациональным.

Логарифм $\log_e x$ числа $x > 0$ по основанию числа e называется натуральным и обозначается $\ln x$.

Функции $y = e^x$ и $y = \ln x$ являются монотонно возрастающими и взаимно обратными.

Примеры:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+1}+3^{n+2}}{4^{n+2}+5}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n\sqrt{n}-2}{5n^2-7\sqrt[3]{n}+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}-\sqrt{n^4-3n^2+5})$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$.