МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

(ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН»)

Кафедра «Прикладная математика»

Виноградова Ю. А.

Лекции по дисциплине
«Математика», 2 семестр

для студентов МГТУ «СТАНКИН», обучающихся по направлениям 12.03.01 «Приборостроение», 27.03.01 «Стандартизация и метрология», 27.03.02 «Управление качеством», 27.03.03 «Управление в технических системах»

Москва 2021 г.

Лекция 1

Возрастание и убывание функции

Теорема (необходимое и достаточное условие постоянства функции на интервале (отрезке)). *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена и непрерывна на интервале* (a,b)(*или отрезке* $[a,b]$) *и дифференцируема на интервале* (a,b). *Функция* $y = f(x)$ *является постоянной на интервале* (a,b)(*или отрезке* $[a,b]$) *тогда и только тогда* $f'(x) = 0\,\forall x \in (a,b)$.

◀Доказательство. Достаточность. Зафиксируем точку $x_0 \in (a,b)$. Пусть $x \in (a,b)$(или $x \in [a,b]$). По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0$, поскольку $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$. Следовательно, $f(x) = f(x_0)\ \forall x \in (a,b)$(или $\forall x \in [a,b]$).

Необходимость. Если $f(x) = C, C = \text{const}$, $\forall x \in (a,b)$(или $\forall x \in [a,b]$), то $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$ по определению производной.▶

Теорема (достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале (отрезке)). *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена и непрерывна на интервале* (a,b) (*или отрезке* $[a,b]$) *и дифференцируема на интервале* (a,b). *Если* $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$, то *функция* $f(x)$ *возрастает на интервале* (a,b) (отрезке $[a,b]$). *Если* $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$, то *функция* $f(x)$ *убывает на интервале* (a,b) (отрезке $[a,b]$).

◄Доказательство. Пусть $x_1 \in (a,b), x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$. Если $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$, то по теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$. Значит, $f(x_2) > f(x_1)$. Аналогично, если $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$, то по теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0$ и $f(x_2) < f(x_1)$.►

Замечание. Если функция $f(x)$ возрастает на интервале (a,b) (отрезке $[a,b]$), то $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Если функция $f(x)$ убывает на интервале (a,b) (отрезке $[a,b]$), то $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a,b)$.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале (a,b). Зафиксируем точку $x_0 \in (a,b)$. Если $x > x_0$, то $f(x) > f(x_0)$, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Если $x < x_0$, то $f(x) < f(x_0)$,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Пример. Функция $y = x^3$ возрастает на $[-1,1]$, но производная $y' = 3x^2 \geq 0$

.

Правило Лопиталя

Рассмотрим вычисление предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $a\in\mathbb{R}$, $a=\infty,-\infty,+\infty$ и либо $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, либо $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

Речь идет о раскрытии неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Сформулируем несколько утверждений.

Теорема. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы в проколотой окрестности* $\dot{U}(a)$ *точки* $a\in\mathbb{R}$, *причем* $g'(x)\neq 0$. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$. *Тогда, если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, $A\in\mathbb{R}$, *то существует и* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

Короткая запись: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

◂Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ по непрерывности в точке $a: f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ g(a)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Поскольку $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то $\forall\varepsilon>0$ найдется окрестность $U_1(a)\subset U(a)$ такая, что $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon \quad \forall x\in U_1(a)$.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,x]$ и дифференцируемы на (a,x), $g'(x)\neq 0$. Следовательно, соблюдены все условия применимости теоремы Коши:

$\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, где c расположена между a и x.

Так как $f(a)=g(a)=0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Если $x\in U_1(a)$, то и $c\in U_1(a)$.

Следовательно, $\left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)}-A\right|<\varepsilon$ и $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$

►

Замечание. В теореме допустимо $A=\infty, -\infty, +\infty$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

◄Здесь $g(x)=e^x-e^{-x}-2x$, $f(x)=x-\sin x$, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

Применим теорему 1 несколько раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$ ►

Теорема. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы на интервале* $(M,+\infty)$, $M>0$, *причем* $g'(x)\neq 0$. *Пусть* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. *Тогда, если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}=A$, $A\in\mathbb{R}$, *то существует и предел*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=A.$$

◂Доказательство. Сделаем замену переменной $x=1/t, t=1/x$. Если $x\in(M,+\infty)$, то $t\in(0,1/M)$. Положим $u(t)=f(1/t)$, $v(t)=g(1/t)$. Тогда $\lim\limits_{t\to0}u(t)=0$, $\lim\limits_{t\to0}v(t)=0$. Применим теорему 1 к функциям $u(t)$ и $v(t)$. Заметим, что $u'(t)=f'(1/t)\cdot\left(-1/t^2\right)$, $v'(t)=g'(1/t)\cdot\left(-1/t^2\right)$, $v'(t)\neq 0$. Получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0}\frac{u(t)}{v(t)}=\lim_{t\to0}\frac{u'(t)}{v'(t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A,$$ ч.т.д.▸

Замечание. В теореме можно рассматривать пределы при $x \to -\infty$.
Замечание. В теореме допустимо $A = \infty, -\infty, +\infty$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}$.

Неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Применим теорему:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2\dfrac{1}{1+x^2}}{e^{3/x} \cdot \left(-\dfrac{3}{x^2}\right)} = \frac{2}{3} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{3/x}} = \frac{2}{3}.$$

Теорема. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы в проколотой окрестности* $\dot{U}(a)$ *точки* $a \in \mathbb{R}$, *причем* $g'(x) \neq 0$. *Пусть* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. *Тогда, если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A,\ A\in\mathbb{R}$, *то существует и* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

Замечание. В теореме можно рассматривать односторонние пределы.

Замечание. В теореме допустимо $A=\infty,-\infty,+\infty$.

Теорема. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы на интервале* $(M,+\infty)$, $M>0$, *причем* $g'(x)\neq 0$. *Пусть* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$. *Тогда, если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A,\ A\in\mathbb{R}$, *то существует и* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

Замечание. В теореме можно рассматривать пределы при $x\to-\infty$.

Замечание. В теореме допустимо $A=\infty,-\infty,+\infty$.

Примеры.

1) Показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^p}{a^x}=0,\ a>1,\ p>0.$

◀Очевидно, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$. Неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пусть $n-1<p<n,\ n\in\mathbb{N}$. Применим n раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{px^{p-1}}{a^x\cdot\ln a}=\ldots=\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{(\ln a)^n}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-n}}{a^x}=0.$$

Пусть $p=n,\ n\in\mathbb{N}$. Применим n раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\cdot\ln a}=\ldots=\frac{n(n-1)\ldots1}{(\ln a)^n}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x}=0.$$ ▶

2)Показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p}=0,\ p>0$. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

$$◄\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{px^{p-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{px^p}=0.►$$

3) Найти $\lim\limits_{x\to+0}x\cdot\ln x$. Неопределенность $0\cdot\infty$.

$$◄\lim_{x\to+0}x\cdot\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to+0}x=0.►$$

4) Найти $\lim\limits_{x\to+0}x^x$. Неопределенность 0^0.

◄Прологарифмируем функцию: $\ln x^x=x\ln x$. Уже нашли $\lim\limits_{x\to+0}x\cdot\ln x=0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}x^x=\lim\limits_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln x}=e^0=1$.►

5) Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln^3 x\right)$.

◀ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln^3 x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln^3 x}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^3 x}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln^3 x}{x}\right)=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln^3 x}{x}\right)=+\infty$ ▶

Замечание. Из существования $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не следует существование $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

.

Пример. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\sin x}{x}\right)=1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1-0=1.$

Однако, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\cos x}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\cos x)$ не существует.