ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Понятие имитационного моделирования

Статистическое моделирование – метод исследования сложных систем, основанный на описании процессов функционирования отдельных элементов в их взаимосвязи с целью получения множества частных результатов, подлежащих обработке методами математической статистики для получения конечных результатов. В основе статистического моделирования лежит *метод статистических испытаний – метод Монте-Карло*.

Имитационная модель – универсальное средство исследования сложных систем, представляющее собой логико-алгоритмическое описание поведения отдельных элементов системы и правил их взаимодействия, отображающих последовательность событий, возникающих в моделируемой системе.

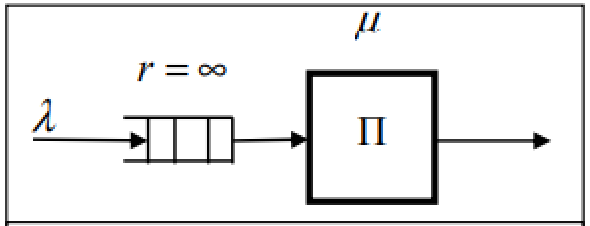
Если статистическое моделирование выполняется с использованием имитационной модели, то такое моделирование называется имитационным.

Временная диаграмма – графическое представление последовательности событий, происходящих в системе. Для построения временных диаграмм необходимо достаточно четко представлять взаимосвязь событий внутри системы. Степень детализации при составлении диаграмм зависит от свойств моделируемой системы и от целей моделирования.

Имитационное моделирование - процесс реализации диаграммы функционирования исследуемой системы на основе сведений о характере функционирования отдельных элементов и их взаимосвязи.

Принципы организации имитационного моделирования

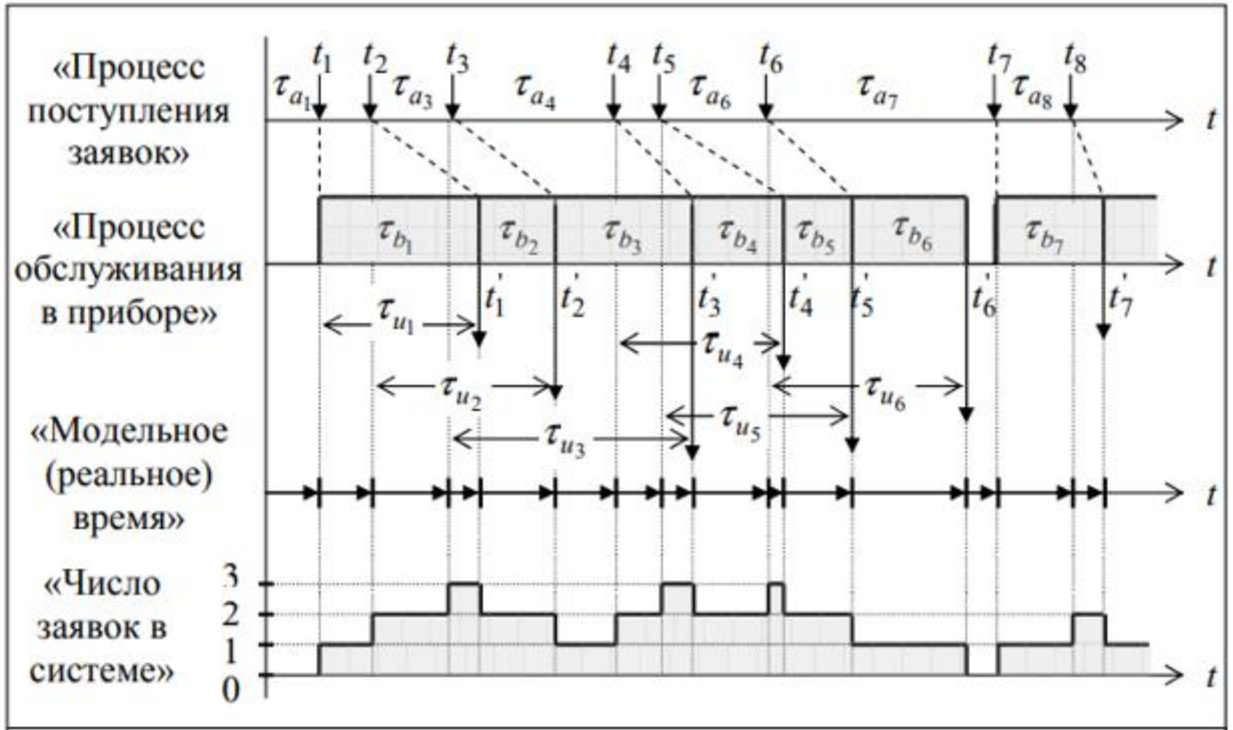
Пример. Одноканальная СМО с однородным потоком заявок, в которую поступает случайный поток заявок с интервалами между соседними заявками, распределёнными по закону $A(\tau)$, а длительность обслуживания заявок в приборе распределена по закону $B(\tau)$ ($G/G/1$).



СМО с накопителем неограниченной ёмкости

Процесс функционирования такой системы может быть представлен в виде временных диаграмм, на основе которых могут быть измерены и рассчитаны характеристики обслуживания заявок. Поскольку процессы поступления и обслуживания заявок в системе носят случайный характер, то для построения диаграмм необходимо иметь *генераторы случайных чисел.*

Положим, что в нашем распоряжении имеются генераторы случайных чисел, формирующие значения соответствующих случайных величин с заданными законами распределений $A(\tau)$ и $B(\tau)$. Тогда можно построить временные диаграммы, отображающие процесс функционирования рассматриваемой системы.



Диаграммы функционирования одноканальной СМО

1) «процесс поступления заявок» в виде моментов t_i поступления заявок в систему, формируемых по правилу: $t_i = t_{i-1} + \tau_{a_i}$ $(t_0 = 0)$, где τ_{a_i} (i =*1,2,...*) – интервалы между поступающими в систему заявками, значения которых вырабатываются с помощью генератора случайных величин *A(τ)* ;

2) «процесс обслуживания в приборе», представленный в виде длительностей обслуживания τ_{bi} , которые вырабатываются с помощью генератора случайных величин B(τ) , и моментов завершения обслуживания заявок в приборе t_i' , определяемых по следующему правилу:

$t_i' = t_i + \tau_{b_i}$, если на момент поступления *i*-й заявки обслуживающий прибор был свободен;

$t_i' = t_{i-1}' + \tau_{b_i}$,если на момент поступления *i*-й заявки обслуживающий прибор был занят обслуживанием предыдущей заявки.

3) «модельное или реальное время», показывающее дискретное изменение времени в реальной системе, каждый момент которого или поступлению заявки в систему или завершение обслуживания заявки в приборе;

4) «число заявок в системе», описывающее состояние дискретной системы и изменяющееся по правилу: увеличение на 1 в момент поступления заявки в систему и уменьшение на 1 в момент завершения обслуживания.

При соблюдении выбранного временного масштаба представленные диаграммы позволяют путем измерения определить значения вероятностно-временных характеристик функционирования моделируемой системы, в частности, время нахождения (пребывания) каждой заявки в системе: $\tau_{u_i}\ (i=1,2,...)$.
Очевидно, что время пребывания заявок в системе – величина случайная. В простейшем случае, применяя методы математической статистики, можно оценить два первых момента распределения времени пребывания:

- математическое ожидание:

$$u=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tau_{u_i}\ ;$$

- второй начальный момент:

$$u^{(2)}=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\tau_{u_i}^2\ ,$$

где N - количество значений времени пребывания заявок, полученных на диаграмме, то есть количество заявок, отображенных на диаграмме как прошедшие через систему и покинувшие её. Отсюда легко могут быть получены значения дисперсии, среднеквадратического отклонения и коэффициента вариации времени пребывания заявок в системе.
Точность полученных числовых моментов распределения и качество гистограмм существенно зависит от количества значений N времени пребывания заявок, на основе которых они рассчитываются: чем больше N , тем точнее результаты расчета. Значение N может составлять от нескольких тысяч до десятков миллионов. Конкретное значение N зависит от многих факторов, влияющих на скорость сходимости результатов к истинному значению, основными среди которых при моделировании систем и сетей массового обслуживания являются законы распределений интервалов между поступающими заявками и длительностей обслуживания, загрузка системы, сложность модели, количество классов заявок и т.д.

Принципы реализации временной диаграммы:

- простейший случай: сначала формируются моменты поступления всех заявок в систему, а затем для каждой заявки определяются длительности обслуживания в приборе и формируются моменты завершения обслуживания. Недостаток - даже для простой системы придётся хранить в памяти ЭВМ одновременно много значений моментов поступления и завершения обслуживания заявок, а также других переменных, причём с увеличением количества классов заявок и количества обслуживающих приборов это число увеличится многократно;
- *пошаговое построение* диаграммы: следует сформировать переменную для модельного времени и выбрать шаг Δt его изменения. В каждый такой момент времени необходимо проверять, какое событие (поступление в систему или завершение обслуживания заявки) произошло в системе за предыдущий интервал Δt . Недостаток – проблема выбора длины интервала Δt;
- подход с *переменным шагом* продвижения модельного времени (до ближайшего события). Принцип *«продвижения модельного времени до ближайшего события»* заключается в следующем. По всем процессам, параллельно протекающим в исследуемой системе, в каждый момент времени формируются моменты наступления «ближайшего события в будущем». Затем модельное время продвигается до момента наступления ближайшего из всех возможных событий. На третьей диаграмме «Модельное (реальное) время» продвижение времени в соответствии с этим принципом показано в виде стрелок. Для того чтобы обеспечить правильную временную последовательность событий в имитационной модели, используются *системные часы*, хранящие значение текущего модельного времени. И

Кроме рассмотренной службы времени в имитационной модели необходимо реализовать процедуры, связанные с формированием потоков заявок и имитацией обслуживания, с организацией очередей заявок, с организацией сбора и статистической обработки результатов моделирования.

Таким образом, имитационное моделирование дискретных систем со стохастическим характером функционирования, таких как системы и сети массового обслуживания, предполагает использование следующих типовых процедур, обеспечивающих реализацию соответствующих имитационных моделей:

1) выработка (генерирование) случайных величин:

- равномерно распределенных;
- с заданным законом распределения;

2) формирование потоков заявок и имитация обслуживания;

3) организация очередей заявок;

4) организация службы времени;

5) сбор и статистическая обработка результатов моделирования.

Методы формирования случайных чисел с заданным законом распределения

Для формирования случайных чисел с заданными законами распределений в качестве исходных используют случайные числа, выработанные программными генераторами равномерно распределенных случайных чисел в интервале (0,1), встроенные практически во все языки программирования. Специализированные программные средства, предназначенные для вероятностного моделирования, обычно имеют специальные встроенные процедуры генерирования случайных величин с разными законами распределений.

Разыгрывание ДСВ.

Пусть R - непрерывная случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0, 1); r_j (j = 1, 2, ...)— случайные числа (возможные значения R).

Правило. Для того чтобы разыграть дискретную случайную величину X, заданную рядом распределения

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

надо:

1. Разбить интервал (0,1) оси *0r* на *n* частичных интервалов:

$$\Delta_1 — (0;\ p_1),\ \Delta_2 — (p_1;\ p_1+p_2),\ \ldots,\ \Delta_n — (p_1+p_2+\ldots+p_{n-1};\ 1).$$

2. Выбрать (например, из таблицы случайных чисел) случайное число r_j , Если r_j попало в частичный интервал Δ_i, то разыгрываемая величина приняла возможное значение x_i.

Пример 1. Пусть требуется разыграть 6 значений ДСВ, заданной законом распределения

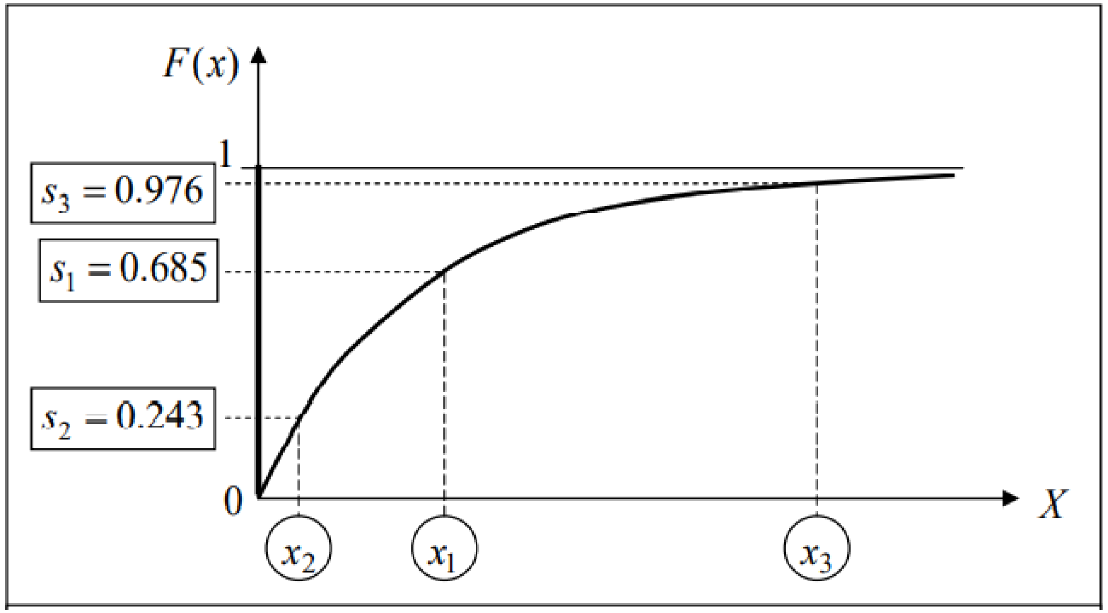
X	2	10	18
p	0,22	0,17	0,61

Решение:

Δ_1=	(0; 0,22)
Δ_2=	(0,22; 0,39)
Δ_3=	(0,39;1)

r_i	0,38	0,10	0,60	0,90	0,88	0,96
X	10	2	18	18	18	18

Наибольшее распространение получили следующие методы:
• аналитический (метод обратной функции);
• табличный;
•метод композиций, основанный на функциональных особенностях генерируемых распределений.



<u>Аналитический метод (метод обратной функции).</u>
Известна функция распределения *F(x)* непрерывной случайной величины *X*. Для того чтобы разыграть возможное значение x_i непрерывной случайной величины *X*, зная ее функцию распределения *F(x)*, надо выбрать случайное число r_i, приравнять его функции распределения и решить относительно x_i полученное уравнение $F(x_i) = r_i$.

Пример 2. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, заданному функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ($\lambda > 0$).

Решение.

$$F(x_i) = r_i \;\rightarrow\; F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \;\rightarrow\; F(x_i) = 1 - e^{-\lambda x_i} = r_i \;\rightarrow\; e^{-\lambda x_i} = 1 - r_i \;\rightarrow x_i = -ln(1 - r_i)/\lambda \rightarrow x_i = -ln(q_i)/\lambda$$

Достоинства аналитического метода:

• высокая точность метода;

• не требуется составления и хранения в памяти таблиц, как в табличном методе.

Недостатки аналитического метода:

•метод распространяется только на те функции, которые позволяют вычислить интеграл от функции плотности аналитически;

• использование численных методов вычисления интегралов приводит к погрешностям и большим затратам машинного времени;

• выражение, используемое для вычислений, содержит в себе функции вычисления логарифмов, возведения в степень, вычисления радикалов, что требует значительных затрат машинного времени.

Табличный метод заключается в формировании таблицы, содержащей пары чисел: значение функции распределения *F(x)* и соответствующее ему значение *x* случайной величины. В качестве аргумента при обращении к таблице используется значение $r \in (0;1)$ равномерно распределенной случайной величины *R*. Значение случайного числа, находящегося между узлами табуляции, обычно рассчитывается методом линейной интерполяции.

Достоинства табличного метода:

• существует принципиальная возможность построения таблицы для формирования случайных последовательностей с любым законом распределения, в том числе полученного экспериментальным путём;

•можно обеспечить любую заданную точность генерирования случайных чисел за счет увеличения количества интервалов табуляции (уменьшения шага табуляции);

• для генерирования случайных величин с заданным законом распределения вероятностей требуется только генератор равномерно распределенных случайных чисел и выполнение несложных операций, занимающих мало времени.

Недостатки табличного метода:

• значительные затраты памяти для хранения большого числа таблиц с разными законами распределений;

• наличие погрешности, обусловленной применением линейной интерполяции для определения значений случайных чисел, находящихся между узлами табуляции;

• для уменьшения методической погрешности формирования случайных последовательностей при использовании линейной интерполяции следует увеличивать количество точек табуляции, что приводит к увеличению размера таблиц и, как следствие, к дополнительным затратам памяти и времени;

• в связи с неодинаковой скоростью изменения функции распределения для обеспечения высокой точности формирования случайных последовательностей табулирование должно выполняться с переменным шагом, выбор которого связан с определёнными проблемами.

Метод композиций основан на функциональных особенностях вероятностных распределений, таких как распределение Эрланга, гипоэкспоненциальное и гиперэкспоненциальное распределения.
Метод используется, как правило, в тех случаях, когда не удаётся получить аналитическим методом решение в явном виде. Например, значения случайных величин, распределённых по закону Эрланга и гипоэкспоненциальному закону могут быть получены путём сложения нескольких экспоненциально распределённых случайных величин, а значения случайных величин, распределённых по гиперэкспоненциальному закону – путём вероятностного формирования смеси из нескольких экспоненциально распределённых случайных величин с разными математическими ожиданиями.

Для оценки качества случайных последовательностей с заданным законом распределения наиболее часто используют тест проверки частот и метод доверительного интервала для математического ожидания.