1. В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система S, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: s1 — ЭВМ полностью исправна; s2 — ЭВМ имеет незначительные неисправности в оперативной памяти, при которых она может решать задачи; s3 - ЭВМ имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач; s4 — ЭВМ полностью вышла из строя. В начальный момент времени ЭВМ полностью исправна (состояние s1). Проверка ЭВМ производится в фиксированные моменты времени t1 t2, t3. Процесс, протекающий в системе S, может рассматриваться как однородная марковская цепь с тремя шагами (первая, вторая, третья проверки ЭВМ). Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\left\|\mathbf{P}_{ij}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{matrix}\right\|.$$

Определить вероятности состояний ЭВМ после трех проверок. Ответ: (0,027; 0,076; 0,217; 0,680).

2. Система S — техническое устройство, состоящее из 3 узлов и время от времени (в моменты t1, t2, …, tk), подвергающееся профилактическому осмотру и ремонту. После каждого шага (момента осмотра и ремонта) система может оказаться в одном из следующих состояний: s0 — все узлы исправны (ни один не заменялся новым); s1 — один узел заменен новым, остальные исправны; s2 — два узла заменены новыми, остальные исправны; s3 - все 3 узла заменены новыми. Вероятность того, что в момент профилактики узел придется заменить новым, равна р (независимо от состояния других узлов). Рассматривая состояния системы S как марковскую цепь, найти переходные вероятности для р= 0,4 вычислить вероятности состояний системы S после трех шагов (в начальный момент все узлы исправны). Ответ: (0,010; 0,110; 0,398; 0,482).**

3. Точка S «блуждает» по оси абсцисс 0х по следующему закону: на каждом шаге она с вероятностью 0,5 27остается на месте, с вероятностью 0,3 перескакивает на единицу вправо и с вероятностью 0,2 — влево. Состояние системы S после *k* шагов определяется одной координатой (абсциссой) точки S. Начальное положение точки — начало координат. Рассматривая последовательность положений точки S как цепь Маркова, найти вероятность того, что она после четырех шагов окажется от начала координат не дальше, чем на расстоянии, равном единице. Ответ: ≈0,693

4. Пусть целые числа m > 0, M> 0 – начальные капиталы соответственно первого и второго игроков. Проводятся последовательно игры, в результате каждой из которых с вероятностью p капитал первого игрока увеличивается на 1 и с вероятностью q =1− p уменьшается на 1 Результаты любой игры не зависят от результатов любых других игр. Пусть S (k) капитал первого игрока после k игр. Предполагается, что в случае S (k) = 0 или S (k) = L = m + M игра прекращается (ситуация разорения одного из игроков). Показать, что S (k) – цепь Маркова, найти переходную матрицу и построить граф цепи.**

5. Имеется предприятие, выпускающее некоторый товар А. Вероятность того, что этот товар будет пользоваться достаточным спросом, равна 0,5. Если в течение недели товар пользуется спросом, то выпуск его продолжается. В противном случае на следующей неделе предприятие выпускает другой товар В, имеющий вероятность достаточного спроса 0,7. Если спрос на товар В становится недостаточным, то с новой недели опять выпускается товар А, и т.д.

А). С какой вероятностью предприятие будет выпускать товар А через неделю?

Б). Через две недели?

Для производства товара А требуется 100 болтов в неделю, для товара В – 200 болтов в неделю. Рассмотрим случайный процесс X(t)- еженедельный расход болтов.

В). Привести примеры возможных реализаций и сечений случайного процесса

Г). Найти математическое ожидание, дисперсию, СКО и корреляционную функцию случайного процесса

Д). Является ли случайный процесс стационарным? Эргодическим?

Е). Какую долю времени в целом предприятие будет выпускать товар А, и какую — товар В?

6. Решить задачу 5 в предположении, что в начальный момент времени предприятие выпускает товар В.

7. Две автомашины А и В сдаются в аренду по одной и той же цене. Каждая из них может находиться в одном из двух состояний: S1 - машина работает хорошо, S2 - машина требует ремонта, которые образуют цепь Маркова. Матрицы вероятностей переходов между состояниями за сутки для этих машин равны соответственно:

$$P_A = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix} \quad P_B = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

Определить финальные вероятности состояний для обеих автомашин. Какую автомашину стоит арендовать?

8. В городе N каждый житель имеет одну из трех профессий А, В. С. Дети отцов, имеющих профессии А, В, С сохраняют профессии отцов с вероятностями 3/5, 2/3, 1/4 соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий.

Найти:

1) распределение по профессиям в следующем поколении, если в данном поколении профессию А имело 20%, профессию В - 30%, профессию С - 50%;

2) распределение по профессиям, не меняющееся при смене поколений.