Лекция 13. Функциональные ряды

Определение. Пусть действительные или комплексные функции $f_n(x)$, $n \in \mathrm{N}$, определены на множестве D, где D – множество действительных или комплексных чисел. Выражение

$$\boxed{f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in D} \qquad (1)$$

называется *функциональным рядом*, а функции $f_1(x)$, $f_2(x)$,…, $f_n(x)$,…– *членами этого функционального ряда*.

Определение. Если для $x_0 \in D$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится, то говорят, что функциональный ряд (1) *сходится в точке* x_0.

Определение. Если в каждой точке $x_0 \in D_1 \subset D$ числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходятся, то ряд (1) называется *сходящимся на множестве* D_1.

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется *абсолютно сходящимся на множестве* D, если на множестве D сходится функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ из модулей его членов.

Определение. Множество $D_0 \subset D$ всех точек x из D, в которых функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, называется *областью сходимости* этого ряда, а область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ называют *областью абсолютной сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Определение. Функция $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ называется *суммой*, а разность $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ – *остатком ряда.*

Для определения области абсолютной сходимости функционального ряда (1) следует воспользоваться либо признаком Даламбера, либо признаком Коши.

Именно, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = l(x) \text{ или } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|} = l(x), \text{ то}$$

при $l(x) < 1$ ряд (1) сходится абсолютно,
при $l(x) > 1$ ряд (1) расходится,
при $l(x) = 1$ требуются дополнительные исследования.

Пример. Найти область сходимости и абсолютной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+1)^n}$.

Пример. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n\cdot\sqrt{(x+3)^n}}$, $x > -3$.

◀ Так как $|f_n(x)| = \frac{1}{n\cdot 2^n\cdot\sqrt{(x+3)^n}}$ и $x > -3$, то, применяя признак Коши, имеем $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 2^n\cdot\sqrt{(x+3)^n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 2\cdot\sqrt{x+3}} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$.

Следовательно, ряд сходится абсолютно, если $\frac{1}{2\sqrt{x+3}} < 1$, т.е. при $x > -\frac{11}{4}$. Ряд расходится, если $\frac{1}{2\sqrt{x+3}} > 1$, т.е. при $-3 < x < -\frac{11}{4}$.

При $x = -\frac{11}{4}$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n \cdot \sqrt{\left(-\frac{11}{4}+3\right)^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n \cdot \frac{1}{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, который сходится по признаку Лейбница. Таким образом, область сходимости ряда – полуинтервал $\left[-\frac{11}{4}; +\infty\right)$. ▶

Равномерная сходимость. Мажорируемый ряд

Определение. Сходящийся в области D_1 функциональный ряд $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* к функции $f(x)$ в этой области, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n \ge N(\varepsilon)$ и $x \in D_1$

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Определение. Функциональный ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

называется *мажорируемым* в области D_1, если существует такой сходящийся числовой ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

с положительными членами, что $\forall x \in D_1$ выполняются соотношения:

$$|f_1(x)| \le a_1,\ |f_2(x)| \le a_2,\ldots,\ |f_n(x)| \le a_n,\ldots$$

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда). *Пусть функции* $f_n(x)$, $n \in \mathrm{N}$ *определены в области* D_1, *и пусть существует числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *такой, что:*

1) $\forall n \geq n_0 \;\; \forall x \in D_1 : |f_n(x)| \leq a_n$;

2) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Тогда функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится абсолютно и равномерно в области* D_1.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорирующим* для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Из теоремы Вейерштрасса следует, что мажорируемый ряд является равномерно сходящимся.

Пример. Исследовать на абсолютную и равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in \mathrm{R}$.

◀ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно и абсолютно при всех $x \in \mathrm{R}$, поскольку для него существует мажорирующий сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, так как $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ при $x \in \mathrm{R}$. ▶

Пример. Исследовать на абсолютную и равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} nx}{x^6 + n\sqrt[3]{n}}$, $x \in \mathrm{R}$.

◀ Так как для всех $x \in \mathrm{R}$: $|\operatorname{arctg} nx| < \frac{\pi}{2}$, то $\forall x \in \mathrm{R}$ и $\forall n \in \mathrm{N}$ имеем $|f_n(x)| = \frac{|\operatorname{arctg} nx|}{x^6 + n\sqrt[3]{n}} \le \frac{\pi}{2\left(x^6 + n\sqrt[3]{n}\right)} \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^{4/3}}$. Из сходимости мажорирующего ряда $\frac{\pi}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} nx}{x^6 + n\sqrt[3]{n}}$ на R. ▶

Степенные ряды

Определение. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad (9)$$

где $a_{0,\ldots,}$ a_n – произвольные постоянные , называется *степенным рядом по степеням* $(x - x_0)$. Числа a_n , n = 0, 1, 2,… называются *коэффициентами степенного ряда*, x_0 – *центром степенного ряда*.

В частности, ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (10)$$

является *степенным по степеням x*. С помощью замены $x - x_0 = X$ ряд (9) сводится к ряду (10).

Придавая x различные числовые значения, будем получать различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися. Множество тех значений x, при которых ряд (10) сходится, называется *областью сходимости степенного ряда*. Это множество всегда не пусто, так как любой степенной ряд (10) сходится при $x = 0$.

Теорема Абеля. *Если степенной ряд* (10) *сходится в точке* $x = x_1 \neq 0$*, то он абсолютно сходится для всех* x *таких, что* $|x| < |x_1|$. *Если же ряд* (10) *расходится в точке* $x = x_2 \neq 0$*, то он расходится и для всех* x *таких, что* $|x| > |x_2|$.

Радиус сходимости степенного ряда

Теорема. *Для всякого степенного ряда* (10) *справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *существует число* $R > 0$*, такое, что при всех* x*, таких, что* $|x| < R$ *, ряд сходится абсолютно, а при* $|x| > R$ *– расходится;*
2) *ряд сходится только в точке* $x = 0$*;*
3) *ряд сходится для всех* x.

Определение. Пусть задан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Если R – неотрицательное число или $+\infty$, обладает тем свойством, что при всех x, для которых $|x| < R$, этот ряд сходится, а при всех x, для которых $|x| > R$ – расходится, то число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Интервал $(–R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда.

Замечание: На концах интервала, то есть при $x = R$ и при $x = -R$ может иметь место как сходимость ряда, так и его расходимость.