Занятие 1

Задача 1. Сколько элементов в множестве:
а) $\{1\}$, $\{1,2,3\}$, $\{\text{Вася}\}$; б) $\{\{1\}\}$; в) $\{1,\{2,3\}\}$; г) букв слова «крокодил»; д) $\{\{1\},1\}$;
е) имен студентов в вашей группе?

Задача 2.
а) Пусть A – множество однозначных натуральных чисел. Определите подмножество четных чисел, удовлетворяющих теореме Пифагора.
б) Пусть A – множество городов России. Перечислите элементы его подмножества $\{x \in A | \text{число жителей города } x \text{ на 1 января 2003 года более 1 000 000 человек}\}$.

Задача 3. Для каждых двух из следующих множеств указать, является ли одно из них подмножеством другого: $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{\{1\},2,3\}$, $\{\{1,2\},3\}$, $\{3,2,1\}$, $\{\{2,1\}\}$.

Задача 4. Сколько элементов у каждого из следующих множеств: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{\{1\},2,3\}$, $\{\{1,2\},3\}$, $\{\varnothing\}$, $\{\{2,1\}\}$?

Задача 5. а) Для множеств из предыдущей задачи выпишите все их подмножества.
б) Сколько подмножеств у множества из одного элемента? Из двух элементов? Из трех элементов?

Задача 6. Может ли у множества быть ровно: а) 0; б) 7; в) 16 подмножеств?

Задача 7. Пусть даны множества $A=\{1,3,7,137\}$, $B=\{3,7,23\}$, $C=\{0,1,3,23\}$, $D=\{0,7,23,2004\}$. Найдите множества:
а) $A\cup B$; б) $A\cap B$; в) $(A\cap B)\cup D$; г) $C\cap(D\cap B)$; д) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$; е) $\big(A\cup(B\cap C)\big)\cap D$;
ж) $(C\cap A)\cup\big(\big(A\cup(C\cap D)\big)\cap B\big)$; з) $(A\cup B)\setminus(C\cap D)$; и) $A\setminus\big(B\setminus(C\setminus D)\big)$; к) $\big(\big(A\setminus(B\cup D)\big)\setminus C\big)\cup B$.

Задача 8. Пусть A – множество чётных чисел, а B – множество чисел, делящихся на три. Найдите $A\cap B$.

Задача 9. Верно ли, что для любых множеств A, B, C:
а) $A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cup\varnothing=A$; б) $A\cup A=A$; $A\cap A=A$;

в) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$; г) $(A \setminus B) \cup B = A$; д) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
е) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; ж) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$?

Задача 10. На окружности имеются синие и красные точки. Автомат добавляет или убирает красную точку и меняет цвета её соседей. Менее двух точек не оставляет. Если первоначально было всего две красные точки, может ли получиться картина состоящая из двух синих точек?

Задача 11. Постройте автомат, который из входной последовательности
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$$
получает арифметическую последовательность длины 7.

Задача 12. Дан уголок из $2n+1$ клетки (см рис.1.). Ваня играет с автоматом. Каждым ходом разрешается закрасить любую одну клетке, или любые две клетки, имеющие общую точку (даже вершину). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

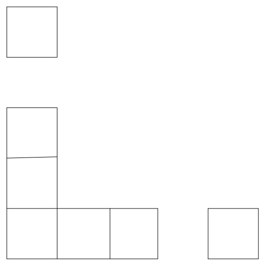

Рис.1.

Задача 13. Та же игра, что и 12. Проигрывает тот, кто сделал последний ход.