АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Замкнутые экспоненциальные СеМО с однородным потоком заявок

Основные предположения:

- замкнутая СеМО (ЗСеМО) произвольной топологии содержит n узлов;
- после завершения обслуживания в каком-либо узле передача заявки в другой узел происходит мгновенно;
- все узлы замкнутой СеМО *одноканальные*;
- в СеМО циркулирует постоянное число заявок;
- длительности обслуживания заявок во всех узлах сети представляют собой случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону;
- ёмкость накопителя в каждом узле СеМО *достаточна* для хранения всех заявок, циркулирующих в сети, что означает отсутствие отказов поступающим заявкам при их постановке в очередь любого узла (в частности, можно считать, что ёмкость накопителя в каждом узле равна числу заявок, циркулирующих в сети);
- обслуживающий прибор любого узла не простаивает, если в его накопителе имеется хотя бы одна заявка, причем после завершения обслуживания очередной заявки мгновенно из накопителя выбирается следующая заявка;
- в каждом узле сети заявки из накопителя выбираются в соответствии с бесприоритетной дисциплиной обслуживания в порядке поступления (ОПП) по правилу «первым пришел – первым обслужен» (FIFO – First In First Out).

Для описания линейных замкнутых однородных экспоненциальных СеМО необходимо задать следующую *совокупность параметров*:

- число узлов в сети: n;
- число обслуживающих приборов в узлах сети: $K_1,\ldots, K_n$;
- матрицу вероятностей передач: $\mathbf{P} = [p_{ij} \mid i, j = 0, 1, \ldots, n]$, где вероятности передач p_{ij} должны удовлетворять условию: сумма элементов каждой строки должна быть равна 1;
- число заявок M, циркулирующих в ЗСеМО;
- средние длительности обслуживания заявок в узлах сети: $b_1,\ldots, b_n$.

На основе перечисленных параметров могут быть рассчитаны *узловые и сетевые характеристики*, описывающие эффективность функционирования соответственно узлов и РСеМО в целом.
Расчёт характеристик функционирования линейных замкнутых однородных экспоненциальных СеМО с одноканальными узлами базируется на так называемой «теореме о прибытии» и проводится с использованием метода средних значений в два этапа:

- расчет коэффициентов передач в узлах замкнутой СеМО;
- расчет характеристик ЗСеМО.

Расчет коэффициентов передач в узлах ЗСеМО

Интенсивности потоков заявок в узлах ЗСеМО не могут быть рассчитаны, как в РСеМО, поскольку для ЗСеМО изначально неизвестна интенсивность λ_0, которая является не параметром, задаваемым в составе исходных данных, а характеристикой, представляющей собой производительность ЗСеМО и определяемой в процессе анализа эффективности функционирования ЗСеМО.

Для расчёта коэффициентов передач $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ можно воспользоваться системой линейных алгебраических уравнений:

$$\lambda_j = \sum_{i=0}^{n} p_{ij} \lambda_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

В левой и правой части выражения представим интенсивности в виде $\lambda_j = \alpha_j \lambda_0$ и разделим их на λ_0. Тогда

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^{n} p_{ij} \alpha_i \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Полагая $\alpha_0 = 1$, можно найти корни системы уравнений, численно определяющие значения α_j.

Расчет характеристик ЗСеМО

Характеристики ЗСеМО могут быть рассчитаны с использованием марковских процессов, поскольку количество состояний марковского процесса, в отличие от РСеМО, не бесконечно. Основная трудность - определение вероятностей состояний сети в случае большой ее размерности (n > 5; M > 5), когда число состояний оказывается значительным. От указанного недостатка свободен *метод средних значений*, позволяющий вычислять средние характеристики функционирования экспоненциальных СеМО на основе сравнительно простых рекуррентных соотношений.

Метод средних значений

Пусть замкнутая однородная СеМО содержит *n* **одноканальных** узлов, длительности обслуживания заявок в которых распределены по экспоненциальному закону со средними значениями $b_1,\dots, b_n$ соответственно. Пусть для каждого узла *i* сети известно среднее число попаданий заявки в данный узел за время ее нахождения в сети, то есть коэффициент передачи α_i, который, если конфигурация сети задана матрицей вероятностей передач, определяется в результате решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^{n} p_{ij}\alpha_i \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

u_i - среднее время пребывания заявки в узле *i* за время пребывания в сети;
m_i - среднее число заявок в узле *i*;
λ_0 - производительность замкнутой сети.
Эти величины зависят от числа заявок *M*, циркулирующих в замкнутой сети, то есть $u_i = u_i(M)$, $m_i = m_i(M)$, $\lambda_0 = \lambda_0(M)$.

Можно показать, что имеют место следующие соотношения:

$$u_i(M) = b_i[1 + m_i(M-1)];$$

$$U(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(M);$$

$$\lambda_0(M) = \frac{M}{U(M)};$$

$$m_i(M) = \alpha_i \lambda_0(M) u_i(M),$$

где *U(M)* – среднее время пребывания заявок в сети при условии нахождения в ней *M* заявок; $m_i(0)=0$.

Первое выражение получено на основе так называемой *теоремы о прибытии*, утверждающей, что в замкнутой экспоненциальной сети с одноканальными узлами, в которой циркулируют *M* заявок, стационарная вероятность состояния любого узла в момент поступления в него новой заявки совпадает со стационарной вероятностью того же состояния рассматриваемого узла в сети, в которой циркулирует на одну заявку меньше, то есть $(M-1)$ заявок. Это означает, что в сети с *M* заявками среднее число заявок $m_i(M)$, находящихся в узле *i* в момент поступления в этот узел новой заявки, равно $m_i(M-1)$. Тогда среднее время пребывания в узле *i* поступившей заявки будет складываться из среднего времени обслуживания всех $m_i(M-1)$ ранее поступивших и находящихся в узле *i* заявок и средней длительности обслуживания рассматриваемой заявки:

$$u_i(M) = b_i m_i(M-1) + b_i = b_i[1 + m_i(M-1)].$$

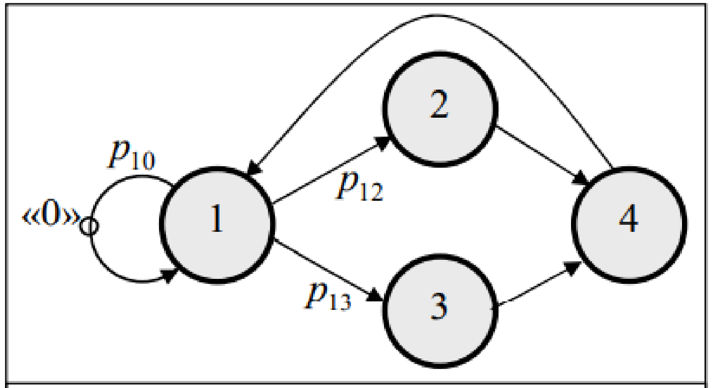
При выводе учтено, что среднее время дообслуживания заявки, находящейся в приборе на момент поступления рассматриваемой заявки, равно средней длительности обслуживания b_i в силу свойства отсутствия последействия, присущего экспоненциальному закону.

Приведенный метод расчета является *точным* для замкнутых экспоненциальных СеМО с одноканальными узлами.

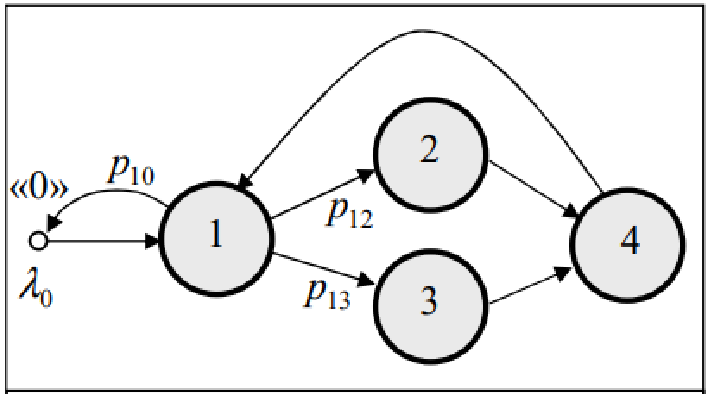
Пример 1. Рассчитать характеристики замкнутой однородной экспоненциальной СеМО, полученной путём преобразования разомкнутой СеМО (см. пример пред. лекция) в замкнутую.

ЗСеМО содержит n = 4 одноканальных узла, связи между которыми описываются той же матрицей вероятностей передач:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0{,}7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



Граф замкнутой СеМО



Граф разомкнутой СеМО

Коэффициенты передач для всех узлов будут иметь те же самые значения: α_1 =10, α_2 =2, α_3 =7, α_4 =9.

В ЗСеМО циркулирует M заявок, средние длительности обслуживания которых в узлах равны:
b_1 =0,8 с; b_2 = 2 с; b_3 = 0,4 с; b_4 =0,3 с.

В таблице представлены значения времени пребывания $u_i\ (M)$ и числа заявок $m_i(M)$ в узлах сети, а также среднего времени пребывания $U(M)$ заявок в сети и производительности $\lambda_0\ (M)$, рассчитанные по формулам

$$u_i(M) = b_i[1 + m_i(M-1)];$$

$$U(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(M);$$

$$\lambda_0(M) = \frac{M}{U(M)};$$

$$m_i(M) = \alpha_i \lambda_0(M) u_i(M),$$

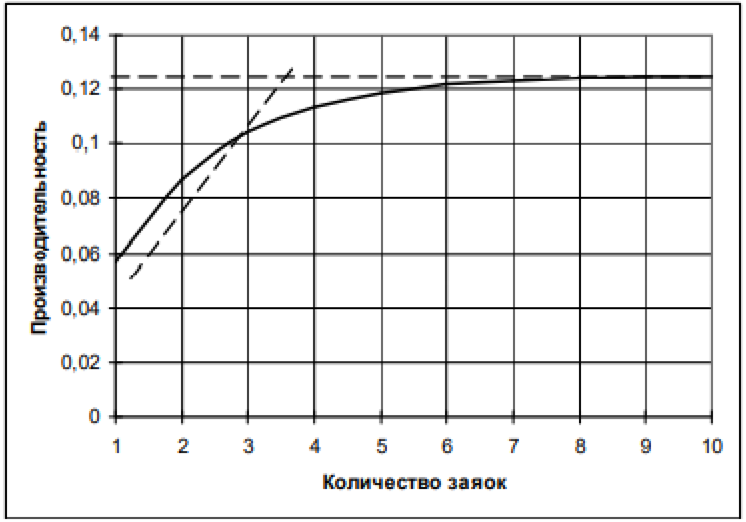
для числа циркулирующих в сети заявок M =1, 2,…, 6.

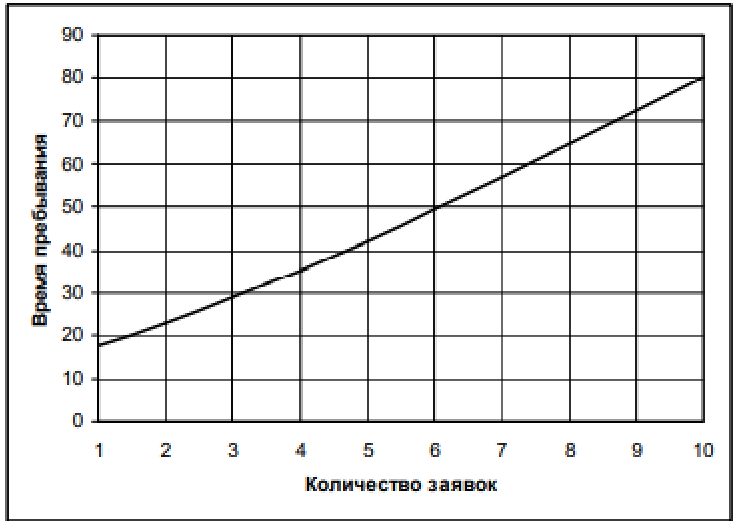
Корректность выполненных расчетов подтверждается тем, что для всех M = 1, 2,…, 6 выполняется проверочное условие:

$$\sum_{i=1}^{4} m_i(M) = M.$$

M	i	$u_i(M)$	$U(M)$	$\lambda_0(M)$	$m_i(M)$
1	1	0,8			0,46
	2	2,0			0,23
	3	0,4			0,16
	4	0,3	17,5	0,057	0,15
2	1	1,17			1,02
	2	2,46			0,43
	3	0,46			0,28
	4	0,35	22,94	0,087	0,27
3	1	1,61			1,68
	2	2,86			0,59
	3	0,51			0,37
	4	0,38	28,87	0,104	0,36
4	1	2,14			2,43
	2	3,19			0,72
	3	0,55			0,44
	4	0,41	35,29	0,113	0,42
5	1	2,74			3,25
	2	3,45			0,82
	3	0,57			0,48
	4	0,42	42,14	0,119	0,45
6	1	3,40			4,14
	2	3,63			0,88
	3	0,59			0,50
	4	0,44	49,35	0,122	0,48

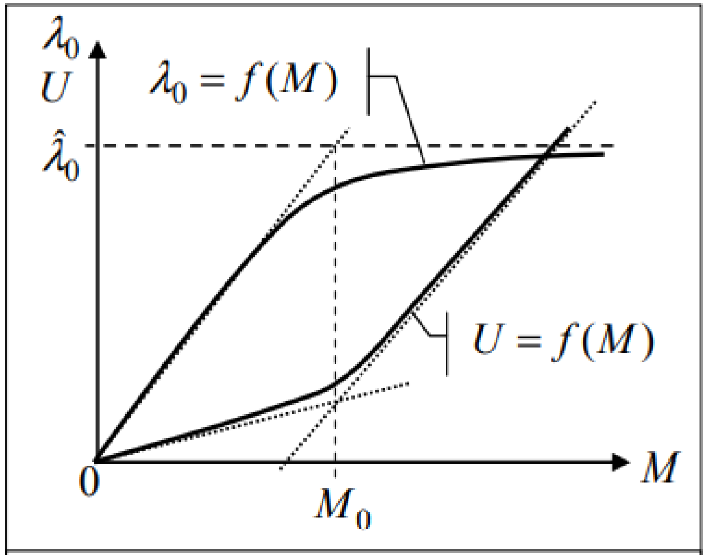
Все характеристики ЗСеМО, включая производительность λ_0 , растут с увеличением M.





Производительность сети асимптотически приближается к максимально возможной производительности (пропускной способности ЗСеМО), совпадающей с предельно допустимой интенсивностью поступления заявок в аналогичной разомкнутой СеМО, при которой в сети отсутствуют перегрузки, и равна λ_0 =0,125 с$^{-1}$.

Среднее время пребывания заявок в ЗСеМО растёт неограниченно с увеличением количества заявок в сети.



Характеристики ЗСеМО

1. Точка M_0 характеризует некоторое граничное значение числа заявок в ЗСеМО. Когда число заявок в ЗСеМО достигает значения M_0, загрузка одного из узлов становится близкой к 1, при этом практически
прекращается рост производительности, которая при М → ∞ достигает своего предельного значения – пропускной способности. Такой узел представляет собой «узкое место» сети, а значение пропускной способности определяется пропускной способностью узкого места из условия, что загрузка узла равна 1:

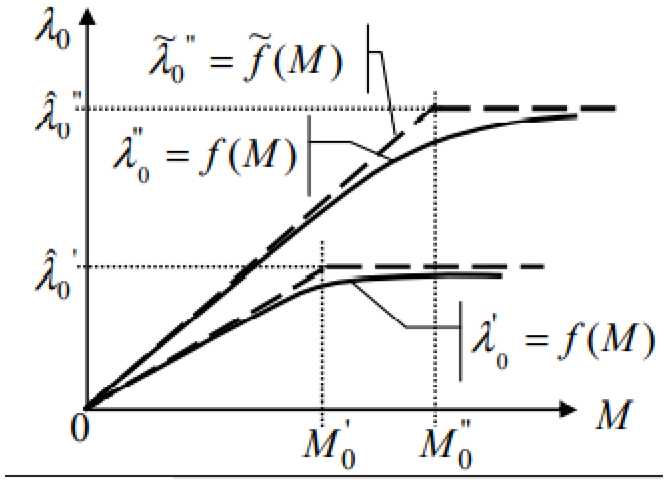
$$\rho_y = \frac{\alpha_y \lambda_0 b_y}{K_y} = 1.$$

Отсюда пропускная способность замкнутой СеМО: $\hat{\lambda}_0 = \dfrac{K_y}{\alpha_y b_y}$

3. Для увеличения производительности ЗСеМО, как и в РСеМО, необходимо разгрузить узкое место, что при одной и той же производительности может быть достигнуто:

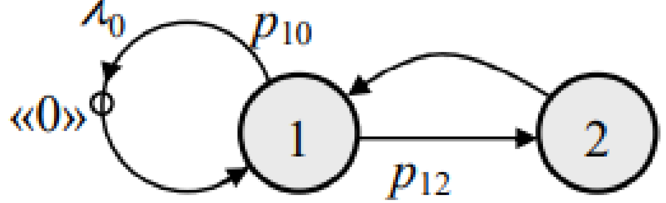
- уменьшением длительности обслуживания заявок;
- увеличением числа обслуживающих приборов в узле;
- уменьшением коэффициента передачи или, что то же самое, вероятности передачи заявок к узлу, являющемуся узким местом.

2. СеМО, в которой загрузки всех узлов равны, называется *сбалансированной*. Сбалансированная СеМО обладает наилучшими характеристиками по сравнению с несбалансированной.



Разгрузка «узкого места»

Пример 2: Замкнутая экспоненциальная СеМО



1. Описание замкнутой СеМО

- Сеть массового обслуживания (СеМО) – замкнутая двухузловая.
- Поток заявок однородный.
- Количество приборов в узлах: узел 1 – одноканальный, узел 2 – двухканальный.
- В СеМО постоянно циркулируют $M = 3$ заявки.

2. Предположения и допущения.

- Длительности обслуживания заявок в узлах 1 и 2 распределены по экспоненциальному закону с интенсивностями $\mu_1 = 1/b_1$ и $\mu_2 = 1/b_2$ соответственно.
- Приборы в двухканальном узле 2 идентичны и любая заявка может обслуживаться в любом приборе.
- Заявка после обслуживания в узле 1 с вероятностью p_{12} переходит в узел 2 и с вероятностью $p_{10} = 1 - p_{12}$ возвращается в этот же узел 1.
- Дуга, выходящая из узла 1 и входящая обратно в этот же узел, рассматривается как внешняя по отношению к СеМО, и на ней выбирается нулевая точка «0».

В замкнутой СеМО всегда существует стационарный режим, так как число заявок в сети ограничено и не может быть бесконечных очередей. Случайный процесс, протекающий в замкнутой экспоненциальной сети, является марковским.

Под состоянием марковского процесса будем понимать распределение заявок по узлам СеМО.

S_0: (3, 0) – все три заявки находятся в узле 1, причем одна заявка находятся на обслуживании в приборе и две заявки ожидают в накопителе;

S_1 : (2, 1) – две заявки находятся в узле 1 (одна на обслуживании в приборе и одна в накопителе) и одна – на обслуживании в одном из приборов узла 2;

S_2 : (1, 2) – одна заявка находится на обслуживании в узле 1 и две – в узле 2 (на обслуживании в обоих приборах);

S_3 : (0, 3) – все три заявки находятся в узле 2, причем две заявки находятся на обслуживании в обоих приборах узла 2 и одна заявка ожидает в накопителе.

$$
S_0(3,0) \underset{\mu_2}{\overset{p_{12}\mu_1}{\rightleftarrows}} S_1(2,1) \underset{2\mu_2}{\overset{p_{12}\mu_1}{\rightleftarrows}} S_2(1,2) \underset{2\mu_2}{\overset{p_{12}\mu_1}{\rightleftarrows}} S_3(0,3)
$$

Граф экспоненциальной ЗСеМО

$$
\begin{cases}
p_{12}\mu_1 p_0 = \mu_2 p_1 \\
(p_{12}\mu_1 + \mu_2) p_1 = p_{12}\mu_1 p_0 + 2\mu_2 p_2 \\
(p_{12}\mu_1 + 2\mu_2) p_2 = p_{12}\mu_1 p_1 + 2\mu_2 p_3 \\
2\mu_2 p_3 = p_{12}\mu_1 p_2 \\
p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1
\end{cases}
$$

Расчет характеристик ЗСеМО

1) загрузка узлов:

$\rho_1 = p_0 + p_1 + p_2; \quad \rho_2 = 0{,}5p_1 + p_2 + p_3;$

2) коэффициенты простоя узлов:

$\eta_1 = 1 - \rho_1; \quad \eta_2 = 1 - \rho_2;$

3) средние длины очередей заявок в узлах:

$l_1 = 2p_0 + p_1; \quad l_2 = p_3;$

4) среднее число заявок в узлах:

$m_1 = 3p_0 + 2p_1 + p_2; \quad m_2 = p_1 + 2p_2 + 3p_3;$

5) производительность замкнутой СеМО:

$$\lambda_0 = \frac{\rho_1}{\alpha_1 b_1} = \frac{\rho_2}{\alpha_2 b_2};$$

6) среднее время ожидания заявок в узлах СеМ(

$$w_1 = \frac{l_1}{\alpha_1 \lambda_0}; \quad w_2 = \frac{l_2}{\alpha_2 \lambda_0};$$

7) среднее время пребывания заявок в узлах СеМО:

$$u_1 = \frac{l_1}{\alpha_1 \lambda_0}; \quad u_2 = \frac{l_2}{\alpha_2 \lambda_0};$$

8) нагрузка в узлах сети:

$y_1 = \alpha_1 \lambda_0 b_1; \quad y_2 = \alpha_2 \lambda_0 b_2;$

9) среднее число параллельно работающих *узлов* сети, определяемое как суммарная *загрузка* всех узлов СеМО:

$R = \rho_1 + \rho_2;$

10) среднее число параллельно работающих *приборов* во всех узлах сети, определяемое как суммарная *нагрузка* всех узлов СеМО:

$Y = y_1 + y_2;$

11) суммарное число заявок во всех очередях СеМО:

$L = l_1 + l_2;$

12) суммарное (полное) время ожидания заявок в СеМО :

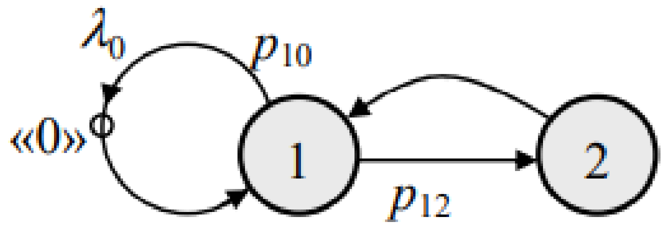
$W = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2;$

13) время пребывания заявок в СеМО:

$U = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2;$

Суммарное число заявок, циркулирующих в ЗСеМО должно совпадать с заданным числом заявок М = 3. Временные характеристики обслуживания заявок в узлах СеМО и в сети могут быть рассчитаны только после определения производительности замкнутой СеМО, вычисляемой через найденные значения загрузок узлов.

Пример 3: Замкнутая СеМО с эрланговским обслуживанием



1. Описание замкнутой СеМО

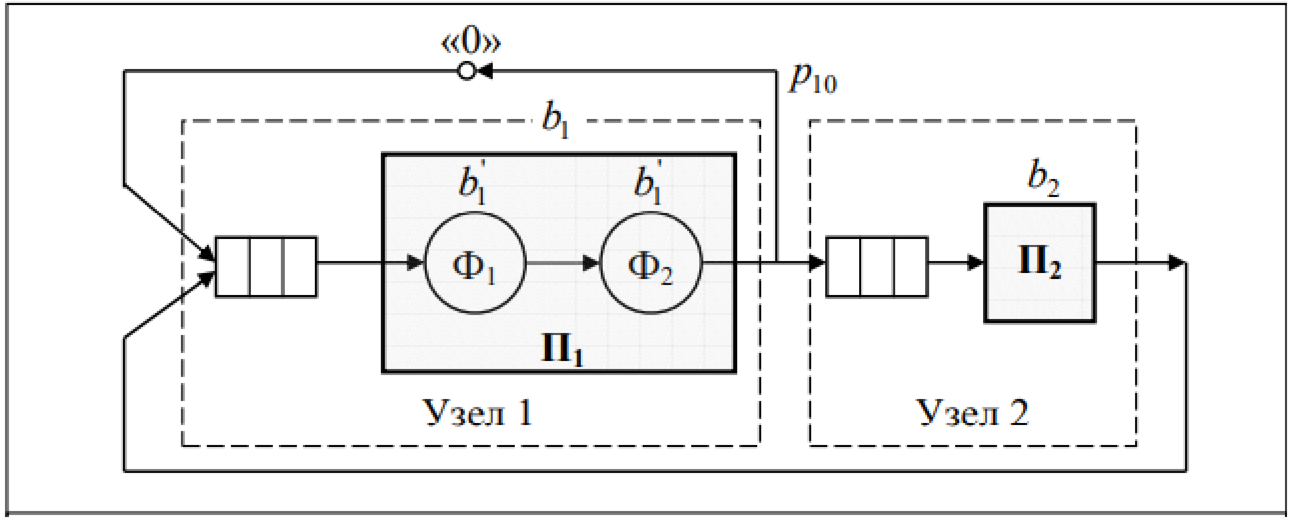
- Сеть массового обслуживания (СеМО) – замкнутая двухузловая.
- Поток заявок однородный.
- Количество приборов в узлах: узлы 1 и 2 – одноканальные.
- В СеМО постоянно циркулируют $M = 3$ заявки.

2. Предположения и допущения.

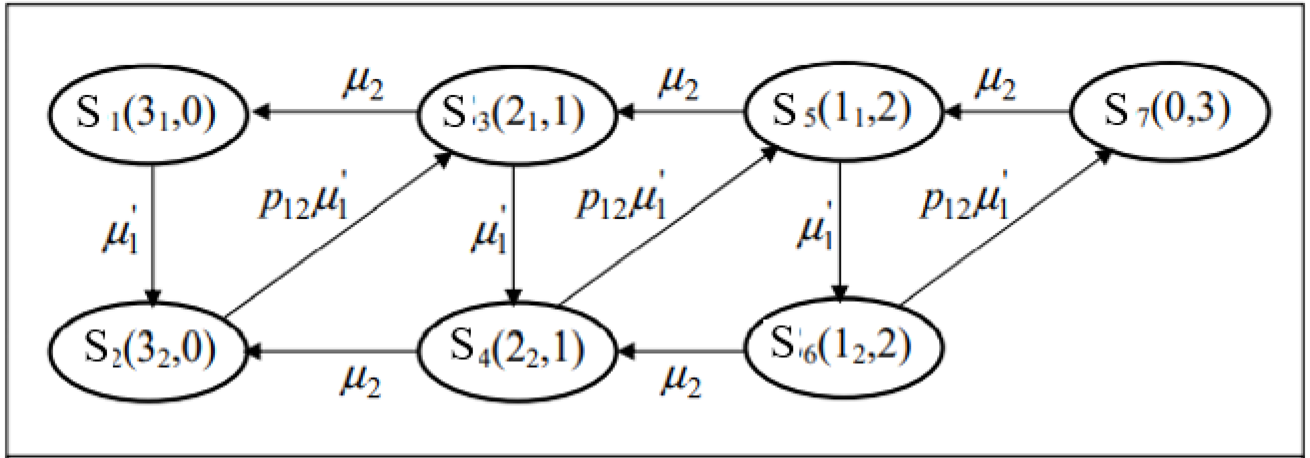
- Длительность обслуживания заявок в узле 1 распределена по закону Эрланга 2-го порядка с параметром $\mu_1=1/b_1$ а в узле 2 – по экспоненциальному закону со средним временем $b_2 = 1/\mu_2$.
- Заявка после обслуживания в узле 1 с вероятностью p_{12} переходит в узел 2 и с вероятностью $p_{10}= 1- p_{12}$ возвращается в этот же узел 1.
- Дуга, выходящая из узла 1 и входящая обратно в этот же узел, рассматривается как внешняя по отношению к СеМО, и на ней выбирается нулевая точка «0».

Случайный процесс, протекающий в замкнутой неэкспоненциальной сети, не является марковским.

ЗСеМО с двухфазным представлением распределения Эрланга



Обслуживание заявки в СеМО можно представить как двухфазное обслуживание в первом узле и однофазное – во втором узле. Длительности обслуживания в фазах Ф1 и Ф2 первого узла ЗСеМО распределены по экспоненциальному закону с одним и тем же параметром $\mu_1'=2/b_1$ и с параметром $\mu_2 = 1/b_2$ – в единственной фазе второго узла. Моменты завершения обслуживания в каждой из фаз образуют цепь Маркова, так как времена нахождения в них распределены по экспоненциальному закону.



. Граф переходов ЗСеМО с эрланговским обслуживанием

$$
\begin{cases}
\mu_1' p_1 = \mu_2 p_3 \\
p_{12}\mu_1' p_2 = \mu_1' p_1 + \mu_2 p_4 \\
(\mu_1' + \mu_2) p_3 = p_{12}\mu_1' p_2 + \mu_2 p_5 \\
(p_{12}\mu_1' + \mu_2) p_4 = \mu_1' p_3 + \mu_2 p_6 \\
(\mu_1' + \mu_2) p_5 = p_{12}\mu_1' p_4 + \mu_2 p_7 \\
(p_{12}\mu_1' + \mu_2) p_6 = \mu_1' p_5 \\
\mu_2 p_7 = p_{12}\mu_1' p_6 \\
p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1
\end{cases}
$$

S_1: $(3_1,0)$ – все три заявки находятся в узле 1, причем одна заявка находятся на обслуживании в приборе на первой фазе, и две заявки ожидают в накопителе;
S_2: $(3_2,0)$ – все три заявки находятся в узле 1, причем одна заявка находятся на обслуживании в приборе на второй фазе, и две заявки ожидают в накопителе;
S_3: $(2_1,1)$ – две заявки находятся в узле 1 (одна на обслуживании в приборе на первой фазе и одна в накопителе) и одна – на обслуживании в узле 2;
S_4: $(2_2,1)$ – две заявки находятся в узле 1 (одна на обслуживании в приборе на второй фазе и одна в накопителе) и одна – на обслуживании в узле 2;
S_5: $(1_1,2)$ – одна заявка находится в узле 1 на обслуживании в приборе на первой фазе и две заявки находятся в узле 2, причем одна из них находится на обслуживании в приборе, а вторая заявка ожидает в накопителе;
S_6: $(1_2,2)$ – одна заявка находится в узле 1 на обслуживании в приборе на второй фазе и две заявки находятся в узле 2, причем одна из них находится на обслуживании в приборе, а вторая заявка ожидает в накопителе;
S_7: $(0,3)$ – все три заявки находятся в узле 2, причем одна заявка находится на обслуживании в приборе, а две другие – ожидают в накопителе.

Расчет характеристик ЗСеМО

1) загрузка и коэффициенты простоя узлов:

$$\rho_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6; \quad \rho_2 = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7;$$
$$\eta_1 = 1 - \rho_1; \quad \eta_2 = 1 - \rho_2;$$

2) среднее число параллельно работающих узлов сети, или суммарная загрузка всех узлов СеМО:

$$R = \rho_1 + \rho_2;$$

3) среднее число заявок в очередях и в узлах СеМО:

$$l_1 = 2(p_1 + p_2) + p_3 + p_4; \quad l_2 = p_5 + p_6 + 2p_7;$$
$$m_1 = 3(p_1 + p_2) + 2(p_3 + p_4) + p_5 + p_6; \quad m_2 = p_3 + p_4 + 2(p_5 + p_6) + 3p_7$$

4) суммарное число заявок во всех очередях СеМО:

$$L = l_1 + l_2;$$

5) производительность замкнутой СеМО:

$$\lambda_0 = \frac{\rho_1}{\alpha_1 b_1} = \frac{\rho_2}{\alpha_2 b_2};$$

6) средние времена ожидания и пребывания заявок в узлах СеМО:

$$w_1 = \frac{l_1}{\alpha_1 \lambda_0}; \quad w_2 = \frac{l_2}{\alpha_2 \lambda_0};$$
$$u_1 = \frac{l_1}{\alpha_1 \lambda_0}; \quad u_2 = \frac{l_2}{\alpha_2 \lambda_0};$$

7) суммарное (полное) время ожидания и время пребывания заявок в СеМО:

$$W = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2;$$
$$U = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2;$$

8) нагрузка в узлах сети:

$$y_1 = \alpha_1 \lambda_0 b_1; \quad y_2 = \alpha_2 \lambda_0 b_2;$$

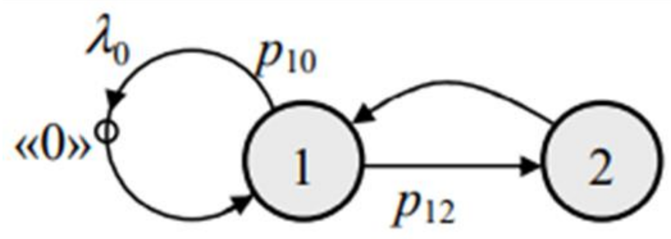
9) среднее число параллельно работающих приборов во всех узлах сети, определяемое как суммарная нагрузка всех узлов СеМО:

$$Y = y_1 + y_2;$$

Суммарное число заявок, циркулирующих в СеМО должно совпадать с заданным числом заявок в замкнутой сети: M = 3.

Пример 4: Замкнутая СеМО с гиперэкспоненциальным обслуживанием

1. Описание замкнутой СеМО



- Сеть массового обслуживания (СеМО) – замкнутая двухузловая.
- Поток заявок однородный.
- Количество приборов в узлах: узлы 1 и 2 – одноканальные.
- В СеМО постоянно циркулируют $M = 3$ заявки.

2. Предположения и допущения.

- Длительность обслуживания заявок в узле 1 распределена по гиперэкспоненциальному закону со средней длительностью обслуживания $b_1 = 1/\mu_1$, и коэффициентом вариации $v_{b1} = 2$, а в узле 2 – по экспоненциальному закону со средним временем $b_2 = 1/\mu_2$.
- Заявка после обслуживания в узле 1 с вероятностью p_{12} переходит в узел 2 и с вероятностью $p_{10} = 1 - p_{12}$ возвращается в этот же узел 1. Дуга, выходящая из узла 1 и входящая обратно в этот же узел, рассматривается как внешняя по отношению к СеМО, и на ней выбирается нулевая точка «0».

В замкнутой СеМО всегда существует стационарный режим. Случайный процесс, протекающий в замкнутой неэкспоненциальной сети, не является марковским.

Закон распределения случайной величины T называется ***гиперэкспоненциальным***, если ее плотность имеет вид

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \quad (\text{при } t > 0) \qquad \text{причем} \qquad q_1 + \ldots + q_n = 1.$$

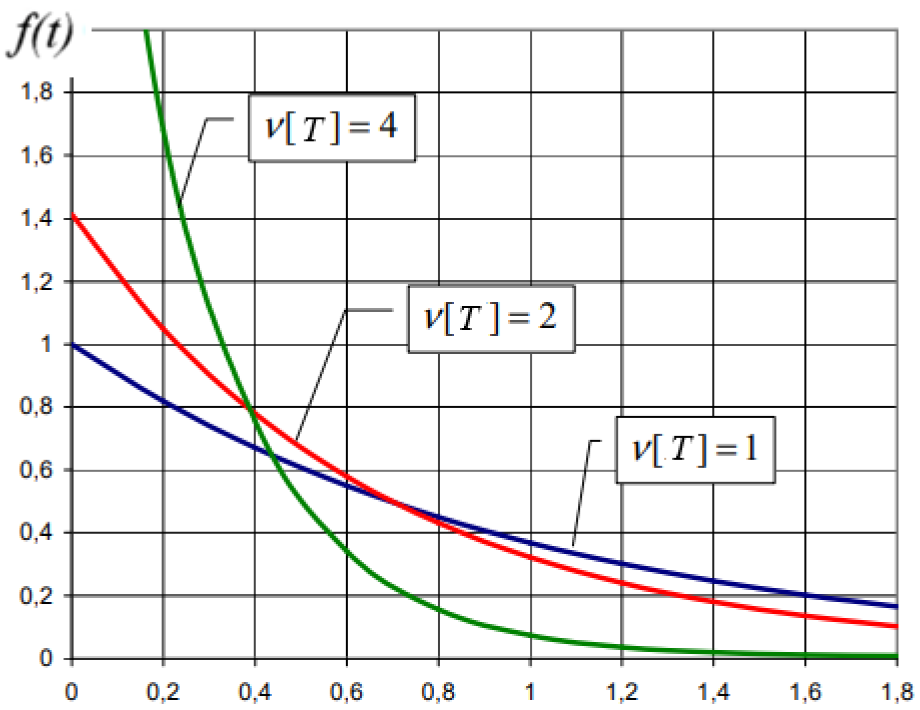
$$F(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n} q_i e^{-\lambda_i t}$$

Гиперэкспоненциальное распределение может использоваться в тех случаях, когда некоторое реальное распределение непрерывной случайной величины, принимающей неотрицательные значения, имеет *коэффициент вариации больше единицы*. Гиперэкспоненциальное распределение содержит (2n-1) параметров.

В простейшем варианте случайные величины с гиперэкспоненциальным распределением могут быть получены с использованием только двух экспоненциальных распределений: n=2. Тогда функция и плотность гиперэкспоненциального распределения будут иметь вид:

$$F(t) = q\,(1 - e^{-\lambda_1 t}) + (1-q)(1 - e^{-\lambda_2 t})$$

$$f(t) = q \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-q)\, \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$



Пример.

- $\lambda_1 = 0{,}183$; $\lambda_2 = 1{,}506$ для распределения с $\nu[T] = 2$
- $\lambda_1 = 0{,}091$; $\lambda_2 = 4{,}022$ для распределения с $\nu[T] = 4$

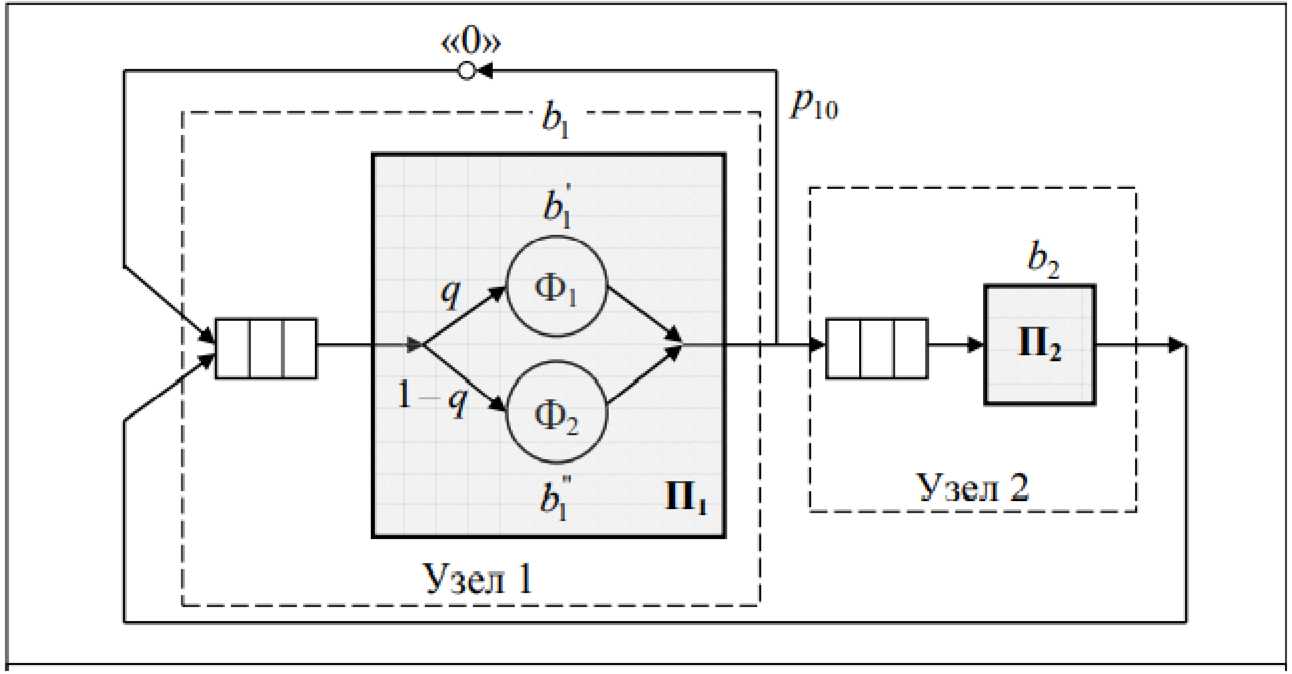
q=0,07; MT=1

Случайная величина, распределенная по гиперэкспоненциальному закону, может быть представлена в виде композиции двух экспоненциально распределенных случайных величин, каждая из которых появляется с вероятностями q и $(1-q)$ соответственно. В первом узле ЗСеМО такое представление реализуется в виде двух параллельных экспоненциальных фаз, обслуживающих заявки по следующей схеме:

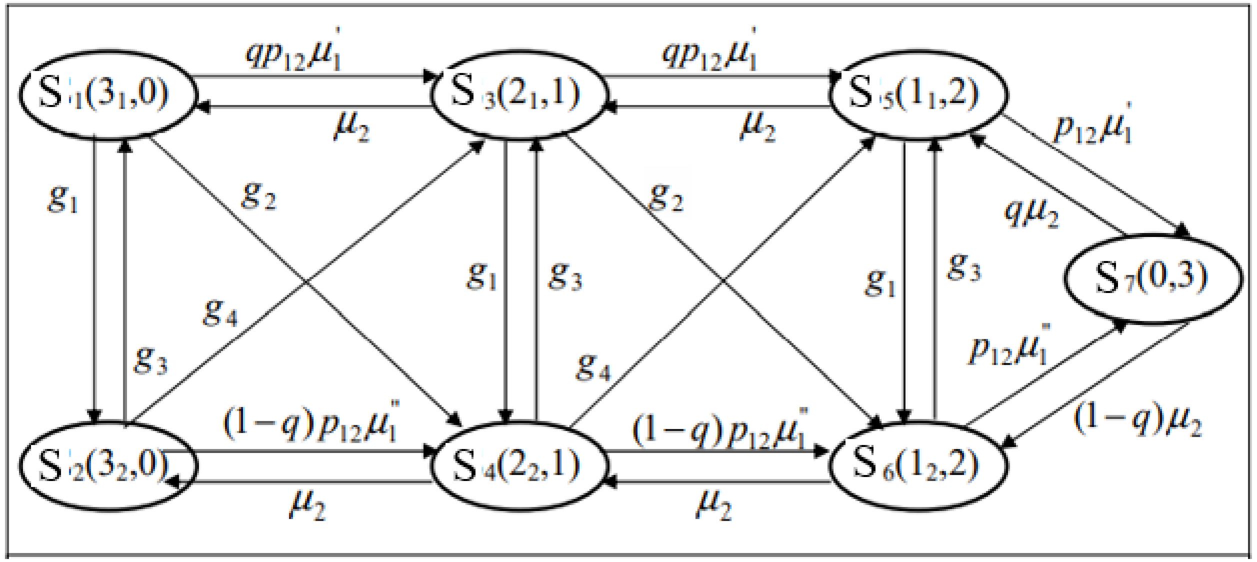
•заявка с вероятностью $q = 0{,}1$ попадает на обслуживание в первую фазу, длительность обслуживания в которой распределена по экспоненциальному закону со средним значением b_1', после чего покидает узел;

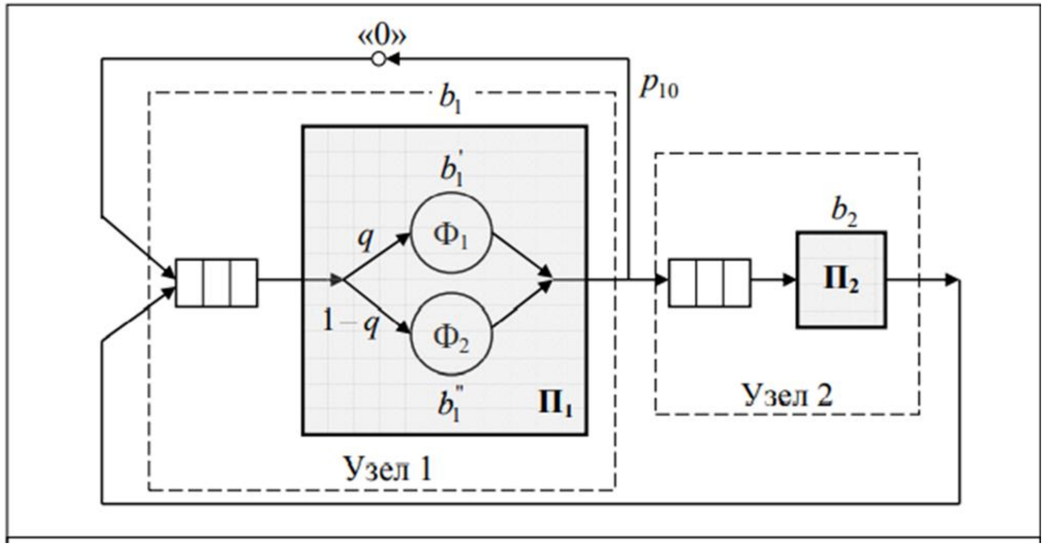
•заявка с вероятностью $(1-q) = 0{,}9$ попадает на обслуживание во вторую фазу, длительность обслуживания в которой распределена по экспоненциальному закону со средним значением b_1'', после чего покидает первый узел.

Значения длительностей обслуживания в этих двух фазах таковы, что выполняется условие: $qb_1' + (1-q)b_1'' = b_1$.



S1: $(3_1, 0)$ - все три заявки находятся в узле 1, причем одна заявка находятся на обслуживании в приборе на первой фазе, и две заявки ожидают в накопителе;
S2: $(3_2, 0)$ - все три заявки находятся в узле 1, причем одна заявка находятся на обслуживании в приборе на второй фазе, и две заявки ожидают в накопителе;
S3: $(2_1, 1)$ - две заявки находятся в узле 1 (одна на обслуживании в приборе на первой фазе и одна в накопителе) и одна - на обслуживании в узле 2;
S4: $(2_2, 1)$ - две заявки находятся в узле 1 (одна на обслуживании в приборе на второй фазе и одна в накопителе) и одна - на обслуживании в узле 2;
S5: $(1_1, 2)$ - одна заявка находится в узле 1 на обслуживании в приборе на первой фазе и две заявки находятся в узле 2, причем одна из них находится на обслуживании в приборе, а вторая заявка ожидает в накопителе;
S6: $(1_2, 2)$ - одна заявка находится в узле 1 на обслуживании в приборе на второй фазе и две заявки находятся в узле 2, причем одна из них находится на обслуживании в приборе, а вторая заявка ожидает в накопителе;
S7: (0, 3) - три заявки находятся в узле 2, причем одна заявка – на обслуживании в приборе, а две другие - ожидают в накопителе.





Состояние S1

Если случайный процесс находится в состоянии S1, то по завершению обслуживания заявки случайный процесс может перейти в одно из трёх состояний: S2, S3 и S4 или остаться в том же состоянии. Если случайный процесс остаётся в том же состоянии, то это никак не отображается на графе переходов.

Случайный процесс перейдёт из состояния S1 в состояние S2 при выполнении следующих условий:

•завершится обслуживание заявки, находящейся на обслуживании в фазе Ф1; интенсивность этого события $\mu_1' = 1/b_1'$;

• заявка, завершившая обслуживание в узле 1, вернётся в этот же узел и встанет в конец очереди; вероятность этого события равна $p_{10} = 1 - p_{12}$;

•в узле 1 очередная заявка, которая поступит на обслуживание из очереди в прибор П1, попадёт на обслуживание в фазу Ф2; вероятность этого события равна $(1 - q)$.

Таким образом, интенсивность перехода из состояния S1 в состояние S2 будет равна $g_1 = (1-q)(1-p_{12})\mu_1'$.

Случайный процесс перейдёт из состояния S1 в состояние S3 при выполнении следующих условий:

•завершится обслуживание заявки, находящейся на обслуживании в фазе Ф1; интенсивность этого события $\mu_1' = 1/b_1'$;

• заявка, завершившая обслуживание в узле 1, перейдёт в узел 2; вероятность этого события равна p_{12};

•в узле 1 новая заявка, которая поступит на обслуживание из очереди в прибор П1, попадёт на обслуживание в фазу Ф1; вероятность этого события – q.

Таким образом, интенсивность перехода из состояния S1 в состояние S3 будет равна $qp_{12}\mu_1'$.

Случайный процесс перейдёт из состояния S1 в состояние S4 при выполнении следующих условий:

•завершится обслуживание заявки, находящейся на обслуживании в фазе Ф1; интенсивность этого события $\mu_1' = 1/b_1'$;

•заявка, завершившая обслуживание в узле 1, перейдёт в узел 2; вероятность этого события равна p_{12};

•в узле 1 новая заявка, которая поступит на обслуживание из очереди в прибор П1, попадёт на обслуживание в фазу Ф2; вероятность этого события – $(1 - q)$.

Таким образом, интенсивность перехода из состояния S1 в состояние S4 будет равна $g_2 = (1-q)p_{12}\mu_1'$.

Состояние S2

Случайный процесс из состояния S2 по завершению обслуживания заявки также может перейти в одно из трёх состояний: S1, S3 и S4 или остаться в том же состоянии.

Случайный процесс перейдёт из состояния S2 в состояние S1 при выполнении следующих условий:

•с интенсивностью $\mu_1'' = 1/b_1''$ завершится обслуживание заявки в фазе Ф2;

•с вероятностью $p_{10} = 1 - p_{12}$ заявка, завершившая обслуживание в узле 1, вернётся в этот же узел и встанет в конец очереди;

•с вероятностью q в узле 1 очередная заявка, которая поступит из очереди в прибор П1, попадёт на обслуживание в фазу Ф1.

Таким образом, интенсивность перехода из состояния S2 в состояние S1 будет равна $g_3 = q(1 - p_{12})\mu_1''$.

Случайный процесс перейдёт из состояния S2 в состояние S3 при выполнении следующих условий:

•с интенсивностью $\mu_1'' = 1/b_1''$ завершится обслуживание заявки в фазе Ф2;

•с вероятностью p_{12} заявка, завершившая обслуживание в узле 1, перейдёт в узел 2;

•с вероятностью q в узле 1 очередная заявка, которая поступит из очереди в прибор П1, попадёт на обслуживание в фазу Ф1.

Таким образом, интенсивность перехода из S2 в S3 будет равна $g_4 = qp_{12}\mu_1''$.

Случайный процесс перейдёт из состояния S2 в состояние S4 при выполнении следующих условий:

•с интенсивностью $\mu_1'' = 1/b_1''$ завершится обслуживание заявки в фазе Ф2;

•с вероятностью p_{12} заявка, завершившая обслуживание в узле 1, перейдёт в узел 2;

•с вероятностью $(1 - q)$ в узле 1 очередная заявка, которая поступит из очереди в прибор П1, попадёт на обслуживание в фазу Ф2.

Таким образом, интенсивность перехода из S2 в S4 будет равна $(1 - q)p_{12}\mu_1''$.

Состояния S3 и S4

Если случайный процесс находится в состоянии S3 или S4, то кроме аналогичных переходов, связанных с завершением обслуживания заявки в узле 1, имеется ещё один переход в состояния S1 и S2 соответственно, связанный с завершением обслуживания заявки в узле 2. Интенсивность перехода из S3 в S1 и из S4 в S2 равна интенсивности обслуживания μ_2 в узле 2. Переходы из S3 в S2 и из S4 в S1 отсутствуют, так как заявка, находящаяся на обслуживании в первом узле, остаётся в той же фазе обслуживания, которая была в момент завершения обслуживания заявки в узле 2.

Состояния S5 и S6

Переходы из состояний S5 и S6 аналогичны переходам из S3 и S4 за исключением переходов в состояние S7. Интенсивности переходов из S5 и S6 в S7 определяются как произведение интенсивности обслуживания в соответствующей фазе узла 1 на вероятность того, что заявка, завершившая обслуживание в узле 1, перейдёт в узел 2: $p_{12}\mu_1'$ и $p_{12}\mu_1''$.

Состояние S7

Переходы из состояния S7 связаны с завершением обслуживания с интенсивностью μ_2 заявки в узле 2, которая переходит в узел 1 и с вероятностью q попадает на обслуживание в фазу Ф1 или с вероятностью (1− q) – в фазу Ф2. Соответственно интенсивности переходов будут равны $q\mu_2$ и $(1-q)\mu_2$

Расчет характеристик ЗСеМО

1) загрузка и коэффициенты простоя узлов:

$\rho_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6;\quad \rho_2 = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7;$

$\eta_1 = 1 - \rho_1;\quad \eta_2 = 1 - \rho_2;$

2) среднее число параллельно работающих *узлов* сети, определяемое как суммарная *загрузка* всех узлов СеМО:

$R = \rho_1 + \rho_2;$

3) среднее число заявок в очередях и в узлах СеМО:

$l_1 = 2(p_1 + p_2) + p_3 + p_4;\quad l_2 = p_5 + p_6 + 2p_7;$

$m_1 = 3(p_1 + p_2) + 2(p_3 + p_4) + p_5 + p_6;$

$m_2 = p_3 + p_4 + 2(p_5 + p_6) + 3p_7;$

4) суммарное число заявок во всех очередях СеМО:

$L = l_1 + l_2;$

5) производительность замкнутой СеМО:

$$\lambda_0 = \frac{\rho_1}{\alpha_1 b_1} = \frac{\rho_2}{\alpha_2 b_2};$$

где α_1 и α_2 - коэффициенты передачи соответственно узла 1 и узла 2;

6) средние времена ожидания и пребывания заявок в узлах СеМО:

$$w_1 = \frac{l_1}{\alpha_1 \lambda_0};\quad w_2 = \frac{l_2}{\alpha_2 \lambda_0};$$

$$u_1 - \frac{l_1}{\alpha_1 \lambda_0};\quad u_2 - \frac{l_2}{\alpha_2 \lambda_0};$$

7) суммарное (полное) время ожидания и время пребывания заявок в СеМО:

$W = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2;$

$U = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2;$

8) нагрузка в узлах сети:

$y_1 = \alpha_1 \lambda_0 b_1; \quad y_2 = \alpha_2 \lambda_0 b_2;$

9) среднее число параллельно работающих *приборов* во всех узлах сети, определяемое как суммарная *нагрузка* всех узлов СеМО:

$Y = y_1 + y_2 .$

Суммарное число заявок, циркулирующих в СеМО, рассчитываемое как $M = m_1 + m_2$, должно совпадать с заданным числом заявок в замкнутой сети: $M = 3$.