Лекция 3. Дифференциальные уравнения высших порядков

Основные понятия

Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (1)$$

Определение. *Начальными условиями* для уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ называются n равенств вида

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (2)$$

, где x_0, $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа (*начальные значения*).

Замечание: *число начальных условий совпадает с порядком дифференциального уравнения*.

Определение. Задача отыскания решений уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющих заданным начальным условиям, называется *задачей Коши* для этого уравнения.

Теорема 1 (существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$). *Если функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *и ее частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$, …, $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *непрерывны в некоторой области* $D \subset R^{n+1}$ *, то для любой точки* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ *задача Коши для дифференциального уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *с заданными начальными условиями* (2) *имеет и притом единственное решение*.

В частности, при $n = 2$ уравнение (1) имеет вид

$$y'' = f(x, y, y'),$$

а начальные условия –

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'.$$

Равенство $y(x_0) = y_0$ геометрически означает, что кривая $y = y(x)$ проходит через точку (x_0, y_0),

Равенство $y'(x_0) = y'_0$ геометрически означает, что касательная к кривой в точке $(x_0, y(x_0))$ имеет угол наклона α, определяемый равенством

$$\operatorname{tg}\alpha = y'_0,$$

т.е. определяет направление кривой в этой точке.

Геометрический смысл Коши для уравнения $y'' = f(x, y, y')$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ состоит в отыскании интегральных кривых этого уравнения, проходящих через точку (x_0, y_0) в направлении, определяемом равенством $\operatorname{tg}\alpha = y'_0$.

Геометрический смысл теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ при $n = 2$

состоит в том, что при выполнении ее условий через точку (x_0, y_0) на плоскости xy **<u>в заданном направлении</u>** проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения. Таким образом, в отличие от уравнения 1-го порядка через точку (x_0, y_0) проходит бесконечно много интегральных кривых (в различных направлениях).

<u>Определение</u>. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящая от n параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$, называется *общим решением* уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, если:

1)при любых допустимых значениях $C_1, C_2, \ldots, C_n$ она является решением этого уравнения;

2)любое частное решение уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ представимо в виде $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ при некоторых значениях параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Уравнение $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$, неявно определяющее общее решение уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, называют *общим интегралом* этого уравнения.

Замечание: *число параметров* (*произвольных постоянных*) *в общем решении* (*общем интеграле*) *совпадает с порядком дифференциального уравнения*.

Пример. Показать, что функция $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ является общим решением уравнения $y'' - y = 0$. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

◄ Проверим выполнение условий из определения общего решения.

1) Число произвольных постоянных в данной функции равно 2, что совпадает с порядком уравнения.

2) При любых значениях C_1 и C_2 эта функция является решением уравнения:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \Rightarrow y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \Rightarrow y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x};$$

подставляя y'' и y в уравнение, получим тождество:

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x} - (C_1 e^x + C_2 e^{-x}) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3) Каковы бы ни были начальные значения x_0, y_0, y_0' (для данного уравнения область D существования и единственности решения совпадает с $\mathbb{R}^3$), система уравнений

$$\begin{cases} y_0 = C_1 e^{x_0} + C_2 e^{-x_0}, \\ y_0' = C_1 e^{x_0} - C_2 e^{-x_0} \end{cases}$$

имеет (притом единственное) решение относительно C_1 и C_2, т.к. ее определитель $\Delta = \begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, т.е. для любых начальных условий значения параметров C_1 и C_2, обеспечивающие их выполнение, существуют.

Поскольку все условия, входящие в определение общего решения выполнены, то данная функция действительно является общим решением данного уравнения.

Для нахождения частного решения после подстановки начальных значений $x = 0$, $y = 0$ и $y' = 1$ в общее решение и его производную получим систему

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 1 = C_1 - C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 1/2$, $C_2 = -1/2$ и, следовательно, искомое частное решение $y = 1/2(e^x - e^{-x})$. ▶

Уравнения, допускающие понижение порядка

В некоторых случаях удается свести дифференциальное уравнение *n*-го порядка к уравнению более низкого порядка.

а) Уравнение вида

$$\boxed{y^{(n)} = f(x)}.$$

Метод решения: Общее решение этого уравнения получается путем *n*-кратного интегрирования (при каждом интегрировании порядок уравнения понижается на 1).

<u>Пример.</u> Решить уравнение

$$y'' = x + 8\cos 4x.$$

б) Уравнение 2-го порядка вида

$$\boxed{F(x, y', y'') = 0}$$

(не содержащее явно искомую функцию *y*).

Метод решения: Положим $y' = z(x)$; тогда $y'' = z'$ и уравнение сводится к уравнению 1-го порядка: $F(x, z, z') = 0$. Если последнее уравнение решается аналитически и $z = z(x, C_1)$ – его общее решение, то, интегрируя равенство

$y' = z(x, C_1)$, получаем общее решение данного уравнения вида $y = Z(x, C_1) + C_2$, где $Z(x, C_1)$ – одна из первообразных функции $z(x, C_1)$.

Пример. Решить уравнение

$$xy'' + 2y' = 6x.$$

в) Уравнение 2-го порядка вида

$$\boxed{F(y, y', y'') = 0}$$

(не содержащее явно независимую переменную x).

Метод решения: Положим $y' = p$, причем p будем считать функцией от y, т.е. $y' = p(y)$. Тогда $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$. Подставляя в данное уравнение выражения для y' и y'' получим уравнение 1-го порядка относительно функции $p(y)$:

$$F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0.$$

Если $p = p(y, C_1)$ – общее решение последнего уравнения, то, решая уравнение с разделяющимися переменными $y' = p(y, C_1)$, получаем общий интеграл данного уравнения: $\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$ $\Rightarrow$ $\int \frac{dy}{p(y, C_1)} = \int dx$ $\Rightarrow$ $P(y, C_1) = x + C_2$

Замечание: если $p(y_0, C_1) = 0$, то $y = y_0$ также является решением уравнения $F(y, y', y'') = 0$.

<u>Пример.</u> Решить уравнение

$$yy'' + y'^2 = 0.$$

<u>Пример.</u> Найти частное решение уравнения

$$(y+1)\,y'' - y'^2 = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1;\;\; y'(0) = 2$

Пример. Найти частное решение уравнения $y'y'' = y^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = -1$.