Лекция 10
Формула Ньютона–Лейбница

Теорема (о формуле Ньютона – Лейбница). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и* $F(x)$ *- ее первообразная, т.е.* $F'(x)=f(x)$*, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

◄Доказательство. По ранее доказанной теореме функция

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\ x\in[a,b]$$

является первообразной функции $f(x)$ на $[a,b]$, т.е. $\exists\Phi'(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$. По теореме об общем виде первообразной $\Phi(x)=F(x)+C,\ C=\mathrm{const}$. Следовательно,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)+C,\ x\in[a,b].$$

Положим $x=a$. Тогда $\int_a^a f(x)dx=0$, следовательно, $F(a)+C=0$, откуда $C=-F(a)$.

Значит,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a),\ x \in [a,b].$$

Положим теперь $x = b$ и получим искомую формулу

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \blacktriangleright$$

Пример. $\blacktriangleleft$ $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$. $\blacktriangleright$

Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Теорема (о замене переменной в определенном интеграле). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *функция* $x=\varphi(t)$ *имеет непрерывную производную на отрезке* $[\alpha,\beta]$, *причем* $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ *и функция* $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ *непрерывна на* $[\alpha,\beta]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. ◄Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует ее первообразная $F(x)$ и выполняется формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Рассмотрим производную функции $F(\varphi(t))$:

$$\left(F(\varphi(t))\right)'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Следовательно,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt = F\left(\varphi(t)\right)\Big|_{\alpha}^{\beta} = F\left(\varphi(\beta)\right) - F\left(\varphi(\alpha)\right) = F(b) - F(a).$$

Получаем искомое равенство

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt. \blacktriangleright$$

Пример. Найти интеграл $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$.

$\blacktriangleleft$Сделаем замену переменной:

$$t = \sqrt{e^x - 1},\ e^x = t^2 + 1,\ x = \ln\left(t^2 + 1\right),\ dx = \frac{2tdt}{t+1},\ x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \ln 2 \Rightarrow t = 1.$$

Тогда

$$\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \int_{0}^{1} \frac{t \cdot 2tdt}{t^2 + 1} = 2\int_{0}^{1} \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} = 2\int_{0}^{1} \frac{\left(t^2 + 1\right) - 1dt}{t^2 + 1} = 2\left(\int_{0}^{1} dt - \int_{0}^{1} \frac{dt}{t^2 + 1}\right) =$$

$$= 2\left(t - \operatorname{arctg} t\right)\Big|_{0}^{1} = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \blacktriangleright$$

Замечание. Пусть функция $f(x)$ – нечетная. Тогда $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Действительно,

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \left|x = -t, dx = -dt\right| =$$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{a} \left(f(-x) + f(x)\right)dx = 0.$$

Пример. Найти интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^{99} \cos x dx$.

◄Функция $f(x) = x^{99} \cos x$ является нечетной, поэтому $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^{99} \cos x dx = 0$.►

Замечание. Пусть функция $f(x)$ – четная. Тогда $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Действительно,

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \left| x = -t, dx = -dt \right| =$$

$$= -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{a} \left(f(-x) + f(x) \right) dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Замечание. Пусть функция $f(x)$ – периодическая с периодом T. Тогда

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx.$$

Теорема (об интегрировании по частям в определенном интеграле). *Если функции* $u(x)$, $v(x)$ *и их производные* $u'(x)$, $v'(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$, *то*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Пример. Найти интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos x dx$.

◂Функция $f(x) = |x|\cos x$ является четной, поэтому $\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos x dx = 2\int_0^{\pi} x\cos x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx =$$

$$= \pi \cdot \sin\pi - 0 \cdot \sin 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -2.$$

Окончательный ответ: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x dx = -4$. ►

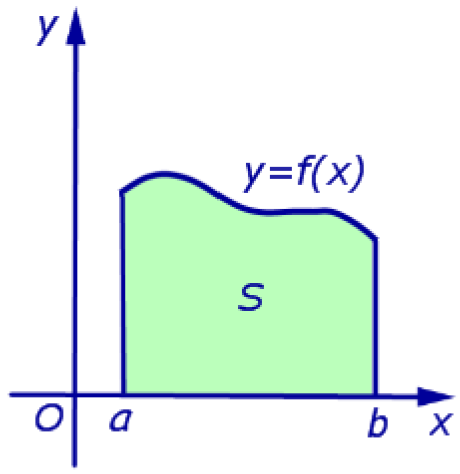
Геометрические приложения определенных интегралов.

1. Вычисление площадей плоских фигур

а) Пусть $y = f(x)$, $a \le x \le b$, где функция $f(x)$ является непрерывной и $f(x) \ge 0$

Фигура P, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox и с боков отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, называется криволинейной трапецией. Тогда площадь этой трапеции выражается формулой

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}.$$



Доказательство. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей промежуточными точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\ldots,n$. Обозначим через λ наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,\ldots,n$:

$$\lambda = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i .$$

Положим

$$m_i = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ M_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ i = 1,\ldots,n.$$

Тогда

$m_i \Delta x_i$ — площадь прямоугольника с основанием Δx_i и высотой m_i,

$M_i \Delta x_i$ — площадь прямоугольника с основанием Δx_i и высотой M_i

$$S(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i ,$$

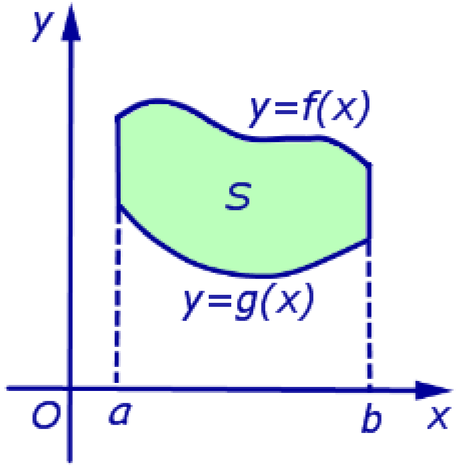
$$S(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

– площади вписанных и описанных многоугольников и одновременно интегральные суммы для интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = S(\mathrm{P}).$$

б) Пусть криволинейная трапеция Р ограничена кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$, $a \le x \le b$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ являются непрерывными и $g(x) \le f(x)$, и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Тогда

$$\boxed{S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx}.$$



Действительно, пусть сначала $0 \le g(x) \le f(x)$. Тогда

$$S(\mathrm{P}) = S(\mathrm{P}_1) - S(\mathrm{P}_2),$$

где P_1 — криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x), a \le x \le b$, и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, P_2 — криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = g(x), a \le x \le b$, и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Следовательно,

$$S(\mathrm{P}) = S(\mathrm{P}_1) - S(\mathrm{P}_2) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Рассмотрим общий случай. Предположим, что $-C = \min\limits_{x \in [a,b]} g(x) < 0$, тогда $C > 0$. Рассмотрим функции $g_1(x) = g(x) + C$, $f_1(x) = f(x) + C$ и криволинейную трапецию $\tilde{\mathrm{P}}$, ограниченную кривыми $y = f_1(x), y = g_1(x), a \le x \le b$ и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Трапеция $\tilde{\mathrm{P}}$ получена из трапеции Р сдвигом на C единиц вверх вдоль оси Oy, следовательно, $S(\mathrm{P}) = S(\tilde{\mathrm{P}})$. Поскольку $0 \le g_1(x) \le f_1(x)$, то

$$S(\mathrm{P}) = S(\tilde{\mathrm{P}}) = \int_a^b \left(f_1(x) - g_1(x) \right) dx = \int_a^b \left(\left(f(x) + C \right) - \left(g(x) + C \right) \right) dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx.$$

в) Пусть криволинейная трапеция P ограничена сверху кривой

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

где функции $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ и $\psi(t)$ являются непрерывными, $\psi(t) \geq 0$, $\varphi(t)$ монотонно возрастает ($\varphi'(t) \geq 0$), $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Пусть криволинейная трапеция P ограничена снизу осью Ox и с боков отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Тогда

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t) \varphi'(t) dt,$$

или

$$\boxed{S = \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) dt}$$

Действительно, в указанных предположениях существует обратная к $x=\varphi(t)$ функция $t=\varphi^{-1}(x)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $x\in[a,b]$, также монотонно возрастающая. Тогда $y=\psi(t)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)=f(x)$, т.е. сверху трапеция ограничена графиком функции $y=f(x), a\le x\le b$. Значит,

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

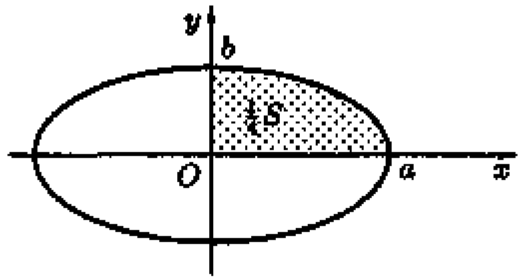
Сделаем замену переменной $x=\varphi(t)$ в интеграле и получим

$$S=\int_a^b f(x)dx=\left|\begin{array}{c} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \\ x=a\Rightarrow t=\alpha \\ x=b\Rightarrow t=\beta \end{array}\right|=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Замечание. Если функция $\varphi(t)$ монотонно убывает ($\varphi'(t) \le 0$) при $t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$, то

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b.



◀Параметрические уравнения эллипса имеют вид

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi].$$

В силу симметрии фигуры относительно координатных осей достаточно найти площадь четверти фигуры, находящейся в первом квадранте, т.е. $t \in [0, \pi/2]$.

Поскольку $x' = (a\cos t)' = -a\sin t \le 0$ для $t \in [0, \pi/2]$, то

$$\frac{1}{4}S = -\int_0^{\pi/2} b\sin t\,(a\cos t)'\,dt = ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt =$$

$$= ab\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}ab\left(\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt\right) = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Ответ: $S = \pi ab$.►