Лекция 11. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если $\forall n \in \mathrm{N}$ $u_n \geq 0$ ($u_n > 0$), то ряд называется *рядом с неотрицательными членами* (*с положительными членами*).

Теорема (признак сравнения). *Пусть даны два ряда с неотрицательными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

и пусть выполняются неравенства $u_n \leq v_n$ *для всех* $n \in \mathrm{N}$, *тогда из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *следует сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, *а из расходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *следует расходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Доказательство. а) Обозначим через S_n и σ_n соответственно частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Из неравенства $u_n \le v_n$ следует, что $S_n \le \sigma_n$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то $\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. Из того, что члены рядов неотрицательны, следует, что $\sigma_n \le \sigma$, и тогда в силу неравенства $S_n \le \sigma_n$ получается $S_n \le \sigma$. Мы доказали, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена. Заметим также, что $\{S_n\}$ – неубывающая последовательность, так как $S_n - S_{n-1} = u_n \ge 0$. Таким образом, из того, что последовательность частичных сумм не убывает и ограничена, следует, что она имеет предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, причем $S \le \sigma$.

б) Из условия $u_n \le v_n$ следует, что $S_n \le \sigma_n$. Так как члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ неотрицательны, то его частичная сумма S_n не убывает при возрастании n, а так как он расходится, то $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Но тогда в силу неравенства $S_n \le \sigma_n$ $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится. ■

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$.

◀ Заметим, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $u_n = \frac{1}{n\cdot 3^n} \le \frac{1}{3^n} = v_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ сходится, так как его члены образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{3}$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$ сходится по признаку сравнения. ▶

Теорема (предельный признак сравнения). *Пусть даны два ряда с положительными членами* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, *и существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = k$, $0 < k < +\infty$. *Тогда ряды* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Теорема (признак Даламбера). *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *с положительными членами и существует предел* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *Тогда:*

при $l < 1$ *ряд сходится,*
при $l > 1$ *ряд расходится,*
при $l = 1$ *требуется дополнительное исследование.*

Доказательство. а) Пусть $l < 1$. Докажем, что ряд сходится. По определению предела числовой последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon$. Это неравенство может быть записано в виде

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon \qquad (7)$$

Так как $l < 1$, то ε можно взять настолько малым, что будет выполнено неравенство $l + \varepsilon < 1$. Обозначая $l + \varepsilon = q$ из правой части неравенства (7) имеем $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, или $u_{n+1} <$

qu_n для всех $n = N, N+1, N+2, \ldots$ Придавая n эти значения, из последнего неравенства получаем

$$u_{N+1} < qu_N,$$
$$u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N,$$
$$u_{N+3} < qu_{N+2} < q^3 u_N,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

т.е. члены ряда

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots \qquad (8)$$

меньше соответствующих членов ряда, составленного из элементов геометрической прогрессии:

$$qu_N + q^2 u_N + q^3 u_N + \ldots \qquad (9)$$

Так как $q < 1$, то ряд (9) сходится . Тогда согласно признаку сравнения ряд (8) тоже сходится. Но ряд (8) получен из данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ в результате отбрасывания конечного числа первых членов, т.е. ряд (8) – остаток данного ряда, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по свойству 1 сходящихся рядов.

б) Пусть теперь $l > 1$. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. Возьмем ε настолько малым, чтобы $l - \varepsilon > 1$. Тогда при $n \geq N$ в силу левого неравенства (7) выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ или $u_{n+1} > u_n > 0$. Таким образом, члены ряда, начиная с некоторого номера N, возрастают с увеличением их номеров, т.е. общий член ряда u_n не стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, по необходимому признаку сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. ■

Заметим, что при $l = 1$ ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. Например, для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $l = 1$, т.к. и для первого ряда $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, и для второго ряда $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. Тем не менее, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$.

◀ Имеем $u_n = \frac{n^4}{2^n}$, u_{n+1} получим, заменив n на $n+1$: $u_{n+1} = \frac{(n+1)^4}{2^{n+1}}$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 2^n}{2^{n+1} n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 = \frac{1}{2} < 1$. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$ сходится по признаку Даламбера. ▶

Теорема (признак Коши). *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *с неотрицательными членами и существует предел* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. *Тогда*

при $l < 1$ *ряд сходится,*

при $l > 1$ *ряд расходится,*

при $l = 1$ *требуется дополнительное исследование.*

Доказательство. По определению предела числовой последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство $\left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| < \varepsilon$. Это неравенство может быть записано в виде

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon \tag{10}$$

а) Пусть $l < 1$. Возьмем $0 < \varepsilon < 1 - l$ и обозначим $l + \varepsilon = q$, $q < 1$. Согласно (10) $\sqrt[n]{u_n} < q$ и $u_n < q^n$ для всех $n \geq N$. Рассмотрим теперь два ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots \tag{11}$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots \tag{12}$$

Ряд (12) сходится, так как его члены образуют убывающую геометрическую прогрессию. Члены ряда (11), начиная с u_N, меньше членов ряда (12). Следовательно, ряд (11) сходится по признаку сравнения.

б) Пусть теперь $l > 1$. Возьмем ε такое, что $0 < \varepsilon < l - 1$, следовательно, $l - \varepsilon > 1$. Тогда согласно (10) для любого $n \geq N$ в силу левого из неравенств $\sqrt[n]{u_n} > 1$ и $u_n > 1$. Таким образом, члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ не стремятся к нулю при $n \to \infty$, поэтому ряд расходится. ■

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{2n+1} \right)^n$.

◂ Имеем $u_n = \left(\frac{3n-2}{2n+1} \right)^n$, поэтому

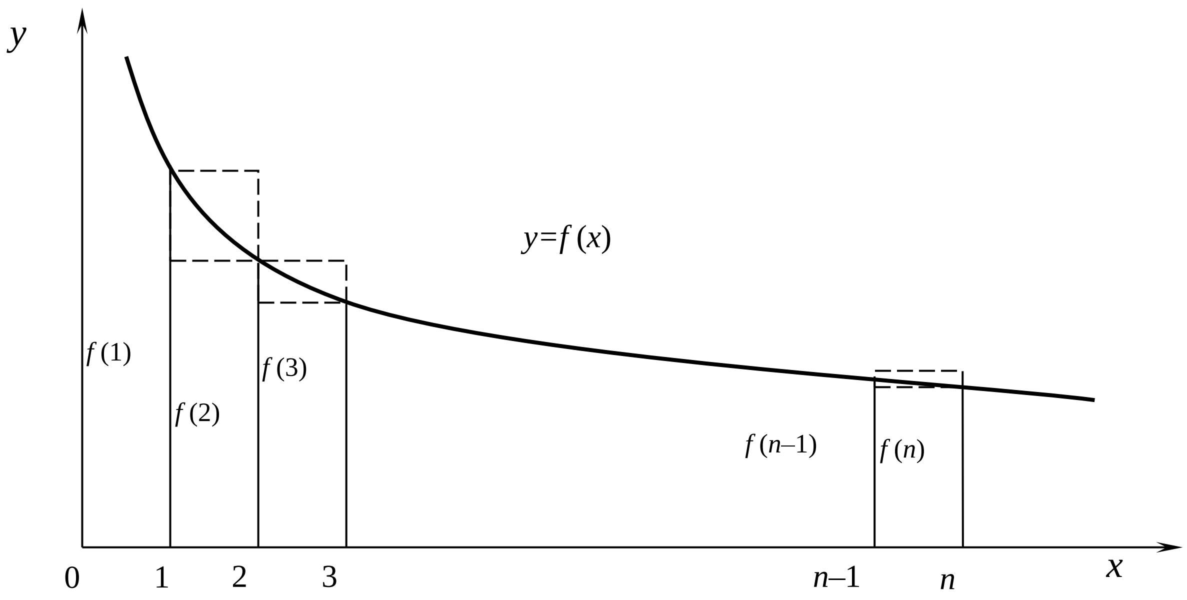
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-2}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1.$$

Следовательно, по признаку Коши ряд расходится. ▸

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.

◂ Имеем $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{3} e < 1$, т.е. по признаку Коши ряд сходится. ▸

Теорема (интегральный признак Коши). *Если функция* $f(x)$*, определенная при всех* $x \geq 1$ *неотрицательна, непрерывна и убывает на промежутке* $[1, +\infty)$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*



Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, с боковых сторон прямыми $x = 1$ и $x = n$, снизу осью OX, как изображено на рисунке.

Впишем в эту трапецию и опишем около нее две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников с основаниями $[1,2]$, $[2,3]$,…,$[n - 1, n]$ и высотами $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$,…, $f(n - 1)$, $f(n)$. Тогда, учитывая геометрический смысл определенного интеграла, имеем:

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) < \int_1^n f(x)dx < f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1),$$

или $$S_n - f(1) < \int_1^n f(x)dx < S_n - f(n).$$

Отсюда получаем:

$$S_n < f(1) + \int_1^n f(x)dx \qquad (13)$$

$$S_n > f(n) + \int_1^n f(x)dx \qquad (14)$$

где S_n – частичные суммы рассматриваемого ряда.

Пусть интеграл $\int_1^n f(x)dx$ сходится. Это значит, что существует $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx = I$.

Так как $f(x) > 0$, то последовательность $\int_1^n f(x)dx$ возрастает с увеличением n и ограничена сверху своим пределом: $\int_1^n f(x)dx < I$. Из неравенства (13) следует, что $S_n < f(1) + I$, т.е. последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ограничена. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ с положительными членами, то его частичные суммы образуют возрастающую последовательность. Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится, следовательно, последовательность $\{S_n\}$ сходится, а значит, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Пусть теперь $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ расходится. В этом случае $\int\limits_{1}^{n} f(x)dx \to +\infty$ при $n \to \infty$ (как монотонно возрастающая неограниченная последовательность). Из неравенства (14) следует, что $S_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, т.е. последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится и, следовательно, ряд расходится. ■

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

◀ Функция $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши: она положительна, непрерывна и убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Находим

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{d\ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \lim_{b\to+\infty} \ln\ln(x+1)\Big|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln\ln(b+1) - \ln\ln 2\right) = +\infty$$

Так как исследуемый несобственный интеграл расходится, то и исследуемый ряд расходится. ▶

Сходимость ряда Дирихле

Ряд Дирихле (*обобщенный гармонический ряд*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in R$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Доказательство. Если $\alpha \le 0$, то $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} \ne 0$, т.е. не выполнен необходимый признак сходимости ряда, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится. Так как при $\alpha > 0$ функция $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ в промежутке $[1;+\infty)$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши, то исследование ряда Дирихле сводится к исследованию сходимости интеграла $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ при различных значениях α.

1) При $0 < \alpha < 1$ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-\alpha}-1\right)=\infty$. Следовательно, согласно интегральному признаку Коши ряд расходится.

2) При $\alpha = 1$ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln|b|-\ln 1\right)=\infty$. Значит, как и в предыдущем случае, ряд расходится.

3) При $\alpha > 1$ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{b \to +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{b \to +\infty} \left(b^{1-\alpha} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha - 1}$. Следовательно, согласно интегральному признаку Коши ряд сходится. ▶