Лекция 14
Функции нескольких переменных

Определение. Всякий упорядоченный набор из n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначается $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и называется ***точкой*** *n-мерного пространства* $\mathbb{R}^n$; числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются ***координатами*** точки P.

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ - произвольное множество точек. Если каждой точке $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ поставлено в соответствие некоторое определенное действительное число $f(P) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то говорят, что на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ задана ***числовая функция*** f от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Множество D называется ***областью определения функции*** и обозначается $D(f)$ или просто D. Число $u = f(P)$ называется *значением функции* f *в точке* P. Множество всех значений функции обозначается $E(f)$ или просто E.

Геометрическими изображениями пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ являются (координатная) плоскость и (координатное) пространство соответственно, поэтому в случае двух (трех) переменных область определения функции $z = f(x, y)$, (функции $u = f(x, y, z)$ соответственно) геометрически представляет собой некоторое множество точек на плоскости (в пространстве).

Определение. *Графиком функции* $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется множество точек $(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, таких, что $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$, а $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Обычно график функции двух переменных $z = f(x, y)$ представляет собой некоторую поверхность.

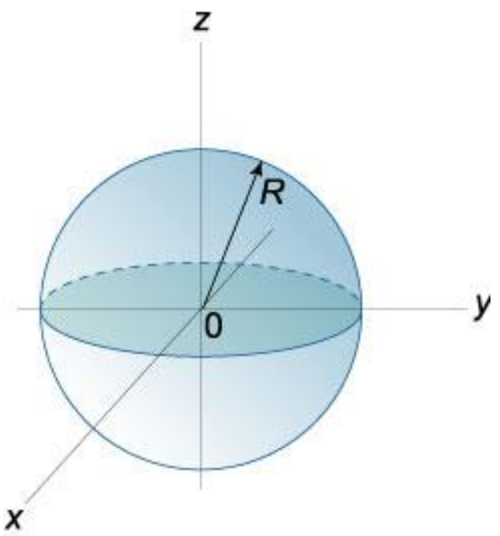
Пример. Найти область определения функции $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $R>0$, и построить ее график.

◄ Найдем область допустимых значений:

$$R^2-x^2-y^2\geq 0, \text{ или } x^2+y^2\leq R^2.$$

Найденная область определения представляет собой круг радиуса R с центром в начале координат.

Поскольку $z^2+x^2+y^2=R^2$, $z\geq 0$, то график представляет собой верхнюю часть сферы радиуса R с центром в начале координат. ►



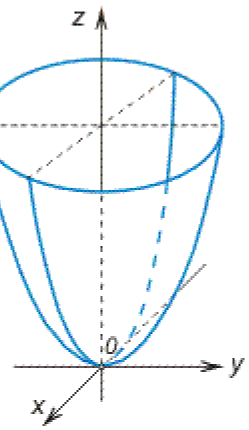
Пример. Найти область определения функции $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

◀ Найдем область допустимых значений:

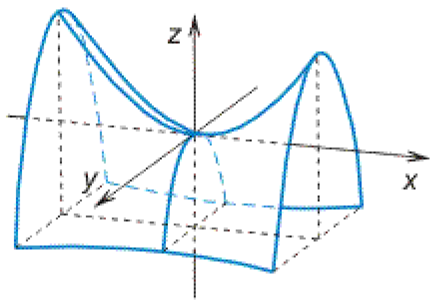
$$1-x^2-y^2-z^2\geq 0 \text{ или } x^2+y^2+z^2\leq 1.$$

Найденная область определения представляет собой шар радиуса 1 с центром в начале координат. ▶

Пример. Построить график функции $z=x^2+y^2$.



Пример. Построить график функции $z=x^2-y^2$.



К простейшим функциям нескольких переменных относятся линейные и квадратичные функции.

Определение. ***Линейной*** *называется функция* вида

$$u = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + b,$$

при этом постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ называются коэффициентами линейной функции.

Если $b = 0$, то такая функция называется линейной формой.

Определение. ***Квадратичной*** *называется функция* вида

$$u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c$$

Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = c = 0$ и хотя бы одно из чисел a_{ij} отлично от нуля, то функция называется ***квадратичной формой.***

Примеры.

1. Линейная функция двух переменных имеет вид

$z = Ax + By + C$, $A = \text{const}$, $B = \text{const}$, $C = \text{const}$.

Графиком такой функции является плоскость.

2. Квадратичная форма от двух переменных имеет вид

$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, $A = \text{const}$, $B = \text{const}$, $C = \text{const}$.

3. Квадратичная форма от трех переменных имеет вид

$u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$,

где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$, $C = \text{const}$, $D = \text{const}$, $E = \text{const}$, F=const.

Определение. δ- *окрестностью* U_δ точки (x_0, y_0) называется круг (без границы) радиуса $\delta > 0$ с центром в точке (x_0, y_0): $U_\delta = \left\{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\right\}$.

Замечание. В случае функции трех и более переменных δ- *окрестность* U_δ точки (x_0, y_0, z_0) будет шаром (без границы) радиуса $\delta > 0$ с центром в точке (x_0, y_0, z_0).

Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Пусть функция $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ определена в некоторой окрестности точки $P_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, за исключением, быть может, самой точки P_0.

Определение. Число A называется ***пределом*** функции $f\left(P\right)$ при стремлении точки $P\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ к точке $P_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что из условия $0 < \rho\left(P, P_0\right) < \delta$ следует $\left|f\left(P\right) - A\right| < \varepsilon$.

При этом пишут $A = \lim\limits_{P \to P_0} f\left(P\right)$.

Справедливы теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций.

Определение. ***Предел*** функции $f\left(P\right)$ равен бесконечности при стремлении точки $P\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ к точке $P_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, если для любого числа $N > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что из условия $0 < \rho\left(P, P_0\right) < \delta$ следует $\left|f\left(P\right)\right| > N$.

При этом пишут $\lim\limits_{P \to P_0} f\left(P\right) = \infty$.

Аналогично можно определить $\lim\limits_{P \to P_0} f\left(P\right) = +\infty$ и $\lim\limits_{P \to P_0} f\left(P\right) = -\infty$.

.

Определение. Функция $u = f(P)$ называется *непрерывной* в точке P_0, если выполнены следующие три условия:

1) $P_0 \in D(f)$;

2) $\exists \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$;

3) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Определение. Функция $u = f(P)$ называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Справедливы теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных в данной точке функций, а также теорема о непрерывности сложной функции.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0, \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{3 - \sqrt{9 + xy}}$.

$$◀\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}}\frac{xy}{3-\sqrt{9+xy}}=\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}}\frac{xy\left(3+\sqrt{9+xy}\right)}{\left(3-\sqrt{9+xy}\right)\left(3+\sqrt{9+xy}\right)}=-\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}}\left(3+\sqrt{9+xy}\right)=-6▶.$$

Определение частных производных первого порядка

Пусть функция $u=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ определена в некоторой окрестности точки $P_0\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\right)$. Рассмотрим точку $P_1\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_k^0+\Delta x_k,\ldots x_n^0\right)$ из той же окрестности.

Определение. *Частной производной* (первого порядка) $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ функции $u=f\left(P\right)$ по переменной x_k в точке P_0 называется следующий предел:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{P_0}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f\left(P_1\right)-f\left(P_0\right)}{\Delta x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_k^0+\Delta x_k,\ldots x_n^0\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\right)}{\Delta x_k},$$

если этот предел существует и конечен.

Здесь $k=1,\ldots,n$.

Другие обозначения: $f_{x_k}{}'\left(P_0\right),u_{x_k}\left(P_0\right)$.

Если P_0— переменная точка, то частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ становится новой функцией от этой точки.

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования; при этом все переменные, кроме x_k, рассматриваются как постоянные.

Примеры.

1. $z = x^y$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$$◀\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.▶$$

2. $u = \operatorname{arctg}(xyz)$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

$$◀\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2y^2z^2}\cdot(yz), \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2y^2z^2}\cdot(xz), \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{1+x^2y^2z^2}\cdot(xy).▶$$

3. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

$$◀\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} .▶$$

Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных

Пусть функция $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ определена в некоторой окрестности точки $P_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$. Рассмотрим точку $P\left(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_k^0 + \Delta x_k, \ldots x_n^0 + \Delta x_n\right)$ из той же окрестности.

Определение. ***Полным приращением*** функции $u = f\left(P\right)$ в точке $P_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, называется разность

$$\Delta u = f\left(P\right) - f\left(P_0\right) = f\left(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_k^0 + \Delta x_k, \ldots x_n^0 + \Delta x_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right).$$

Определение. Функция $u = f\left(P\right)$ называется ***дифференцируемой*** в точке P_0, если всюду в некоторой окрестности этой точки полное приращение может быть представлено в виде:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + o\left(\rho\left(P, P_0\right)\right),$$

где $o\left(\rho\left(P, P_0\right)\right)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\rho\left(P, P_0\right)$,

$$\rho\left(P, P_0\right) = \sqrt{\left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\Delta x_2\right)^2 + \ldots + \left(\Delta x_n\right)^2},$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ – постоянные, зависящие от точки P_0 (и не зависящие от $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$).

Определение. ***Дифференциалом (первого порядка)*** du функции $u = f(P)$ называется главная (при условии, что не все коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равны нулю) часть полного приращения функции в данной точке, линейная относительно $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, т.е.

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n.$$

Таким образом

$$\Delta u = du + o\left(\rho\left(P, P_0\right)\right).$$

Пусть $u = x_k$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда $\Delta u = \Delta x_k = dx_k$, $k = 1, \ldots, n$. Поэтому можно записать

$$du = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n.$$

Замечание. Дифференциал является линейной формой по переменным $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Теорема 1. *Если функция* $u = f(P)$ *дифференцируема в точке* P_0, *то функция непрерывна в точке* P_0.

Теорема 2. *Если функция* $u = f(P)$ *дифференцируема в точке* P_0, *то в точке* P_0 *существуют все частные производные* $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, *причем* $A_k = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, $k = 1, \ldots, n$.

Следствие. *Если функция* $u = f(P)$ *дифференцируема в точке* P_0, *то ее дифференциал в этой точке имеет вид*

$$du = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{P_0} dx_1 + \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{P_0} dx_2 + \ldots + \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{P_0} dx_n .$$

Теорема 3. *Если функция $u = f(P)$ имеет в точке P_0 непрерывные частные производные первого порядка, то функция $u = f(P)$ дифференцируема в точке P_0 и ее дифференциал в этой точке имеет вид*

$$du = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{P_0} dx_1 + \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{P_0} dx_2 + \ldots + \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{P_0} dx_n .$$

В частном случае функции двух переменных $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta z = dz + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right).$$

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Дифференциал используется для приближенных вычислений приращения функции и значения функции в точке. Например, в случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ при малых приращениях аргументов Δx и Δy справедливы приближенные равенства для полного приращения функции Δz и для значения самой функции в точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

$$\Delta z \approx dz, \; f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + dz.$$

В развернутом виде

$$\Delta z \approx \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \Delta y,$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} \Delta y.$$

Предполагается при этом, что значение функции в точке $(x_0,)$ легко вычислить точно.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{(4,05)^2+(3,07)^2}$.

◄ Рассмотрим функцию $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Положим

$$x_0=4,\ y_0=3,\ \Delta x=0,05,\ \Delta y=0,07.$$

Имеем

$$f(4,3)=5,\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ dz=\frac{x\Delta x+y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\Delta z\big|_{(4,3)}\approx dz\big|_{(4,3)}=\frac{4\cdot 0,05+3\cdot 0,07}{5}\approx 0,08,$$

$$\sqrt{(4,05)^2+(3,07)^2}\approx 5+0,08=5,08.$$