

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Анализ свойств СМО с неограниченной очередью

Одноканальная СМО с однородным потоком заявок

1. Среднее время ожидания заявок в очереди минимально при постоянной (детерминированной) длительности обслуживания заявок, когда коэффициент вариации длительности обслуживания $v_b = 0$, и увеличивается с ростом коэффициента вариации (дисперсии) длительности обслуживания.

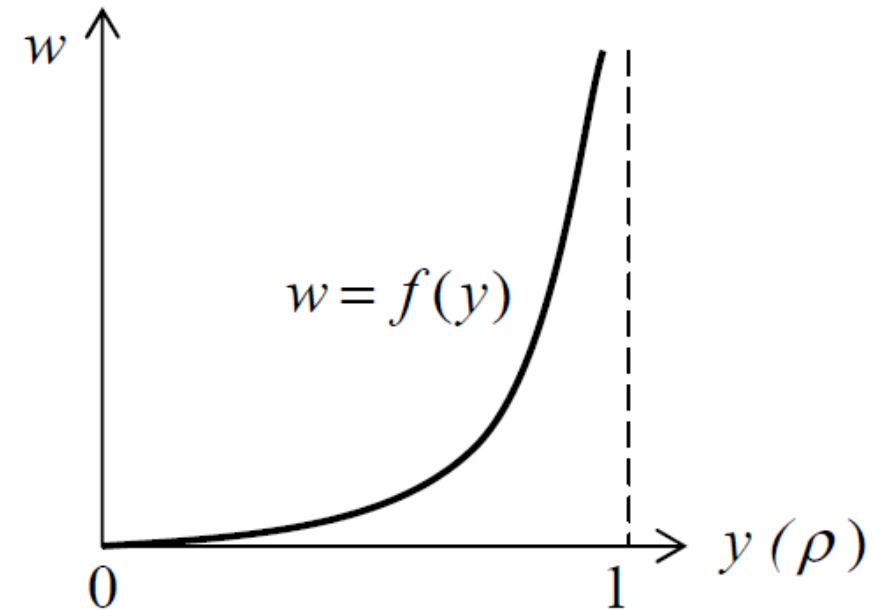
$$\tilde{w} \approx \frac{\rho b (v_a^2 + v_b^2)}{2(1-\rho)} f(v_a), \quad f(v_a) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{2(1-\rho)(1-v_a^2)^2}{3\rho(v_a^2 + v_b^2)}\right], & v_a < 1 \\ \exp\left[-(1-\rho)\frac{v_a^2 - 1}{v_a^2 + 4v_b^2}\right], & v_a \geq 1. \end{cases}$$

Пример 1. Одноканальная СМО - ЭВМ, на которую поступают заявки (требования на расчеты). Поток заявок - простейший со средним интервалом между заявками $t = 10$ мин. Время обслуживания распределено по закону Эрланга 3-го порядка с математическим ожиданием $b = 8$ мин. Определить среднее число m заявок в СМО и среднее число l заявок в очереди, а также средние времена пребывания заявки в системе u и в очереди w .

Пример 2. Условия предыдущего примера изменены: поток заявок уже не простейший, а пальмовский, причем интервал между событиями в потоке распределен по обобщенному закону Эрланга 2-го порядка с параметрами $\lambda_1 = 1/2$; $\lambda_2 = 1/8$. Найти приближенно характеристики эффективности СМО.

2. Для беспriorитетных дисциплин обслуживания в обратном порядке (ООП) и обслуживания в случайном порядке (ОСП) средние времена ожидания заявок будут такими же, как и при обслуживании в порядке поступления, но дисперсии времени ожидания будут больше. Это обусловлено, в частности для дисциплины ООП, тем, что часть заявок, поступивших последними, будут ожидать незначительное время, в то время как заявки, попавшие в начало очереди, могут ожидать обслуживания достаточно долго, то есть увеличивается разброс значений времени ожидания относительно среднего значения.

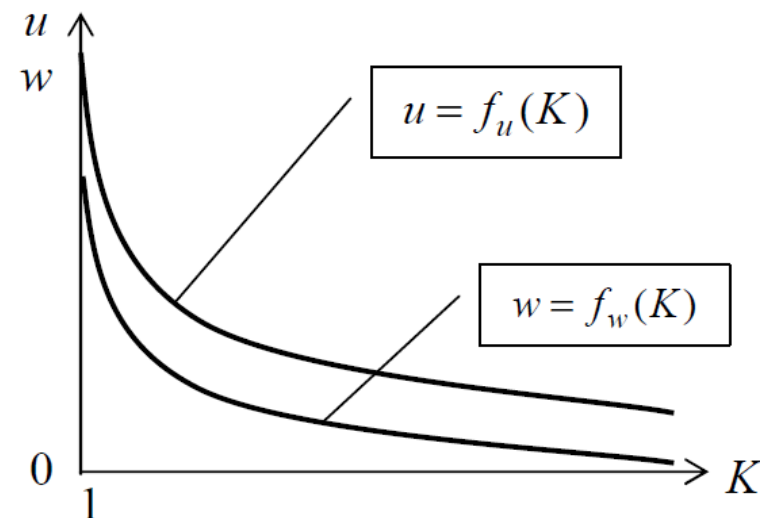
3. Среднее время ожидания заявок существенно зависит от нагрузки y (загрузки ρ) системы. При $y \geq 1$ ($\rho \rightarrow 1$) время ожидания заявок возрастает неограниченно: $w \rightarrow \infty$, т.е. заявки могут ожидать обслуживания сколь угодно долго. Увеличение нагрузки может быть обусловлено двумя факторами: увеличением интенсивности поступления заявок в систему или увеличением длительности обслуживания заявок (например, в результате уменьшения скорости работы обслуживающего прибора).



Пример 3. Имеется одноканальная СМО с отказами. Поток заявок - простейший с интенсивностью λ . Время обслуживания - не случайное и в точности равно $t_{\text{обсл.}} = 1/\mu$. Найти относительную и абсолютную пропускную способность СМО в предельном стационарном режиме.

Многоканальная СМО с однородным потоком заявок

1. Зависимость среднего времени ожидания w и среднего времени пребывания u заявок в системе от числа обслуживающих приборов K : с увеличением числа обслуживающих приборов времена ожидания и пребывания заявок уменьшаются, при этом в пределе при $K \rightarrow \infty$ время ожидания стремится к нулю, а время пребывания достигает своего наименьшего значения, равного длительности обслуживания заявок.



2. Среднее время ожидания заявок, как и для одноканальных систем, существенно зависит от нагрузки y (загрузки ρ) системы. При $y \geq K$ ($\rho \rightarrow 1$) время ожидания заявок возрастает неограниченно: $w \rightarrow \infty$, то есть заявки могут ожидать обслуживания сколь угодно долго.

Пример 4. Рассматривается простейшая СМО с практически неограниченным числом каналов ($n \rightarrow \infty$). На вход СМО поступает поток заявок с интенсивностью λ ; интенсивность потока обслуживаний (для одного канала) равна μ . Найти финальные вероятности состояний СМО и среднее число занятых каналов k .

3. Зависимость среднего времени ожидания w и среднего времени пребывания u заявок в системе от числа обслуживающих приборов K при условии, что при увеличении числа обслуживающих приборов K их суммарная производительность (скорость работы) остается постоянной, т.е. $V_{\Sigma} = KV_K = \text{const}$, где V_K – производительность одного прибора при наличии в системе K обслуживающих приборов. Среднее время ожидания w заявок, как и в предыдущем случае, уменьшается с увеличением числа приборов, однако время пребывания u заявок в системе увеличивается. Последнее объясняется тем, что с увеличением числа приборов K производительность каждого из них для сохранения суммарной производительности системы уменьшается пропорционально K и, следовательно, линейно увеличивается длительность обслуживания заявки в приборе. При этом скорость увеличения длительности обслуживания больше скорости уменьшения времени ожидания, что в сумме приводит к увеличению времени пребывания заявок в системе. В пределе при $K \rightarrow \infty$ время пребывания заявок асимптотически стремится к длительности обслуживания заявок.

4. Таким образом, при проектировании систем обслуживания следует иметь в виду, что с точки зрения задержек (времени пребывания заявок) более эффективной является одноканальная система, чем многоканальная, при равенстве суммарной производительности. Основным достоинством многоканальной системы является более высокая надёжность, проявляющаяся в том, что при выходе из строя одного или даже нескольких обслуживающих приборов система продолжает функционировать, хотя и с меньшей эффективностью, что заключается в увеличении времени пребывания заявок в системе.

