PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

MAT1154 Equações Diferenciais e de Diferenças

Aula 4 - Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Prof. Sinésio Pesco

4 - Introdução

Vamos tratar de equações de 2a ordem com coeficientes constantes. Nosso objetivo é estudar o comportamento das soluções destas equações.

4.1 - Solução do P.V.I.

Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

A solução exata da equação pode ser obtida por:

```
clear
syms y(t) a b c
edo1 = a*diff(y(t),t,2) + b* diff(y(t),t) + c * y(t) == 0
```

edo1 =

$$a\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,y(t) + b\frac{\partial}{\partial t}\,y(t) + c\,y(t) = 0$$

```
dsolve(edo1)        % Resolve o PVI
```

ans =

$$C_6\,\mathrm{e}^{-\frac{t\left(b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}\right)}{2\,a}} + C_5\,\mathrm{e}^{-\frac{t\left(b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}\right)}{2\,a}}$$

```
expand(ans)         % Simplifica a solucao
```

ans =

$$C_5\, e^{-\frac{b\,t}{2\,a}}\, e^{\frac{t\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}} + C_6\, e^{-\frac{b\,t}{2\,a}}\, e^{-\frac{t\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}}$$

Exemplo:

Encontre a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

```
clear all
syms y(t) t
Dy = diff(y,t);
edo2 = diff(y(t),t,2) - 5* diff(y(t),t) + 6 * y(t) == 0
```

edo2 =

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, y(t) - 5\frac{\partial}{\partial t}\, y(t) + 6\, y(t) = 0$$

```
cond = [y(0)==1,Dy(0) == 2];
dsolve(edo2,cond)             % Resolve o PVI
```

ans $= e^{2\,t}$

4.2 - Exercícios Resolvidos

Exercício 01: Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

(a) Resolva o problema de valor inicial.

(b) Resolva o problema de valor inicial quando $a = 0$.

(c) Encontre o ponto de mínimo da solução do item (b).

(d) Determine os valores de a para o quais a solução não tem ponto mínimo.

Solução:

(a)

```
clear all
syms y(t) a
Dy = diff(y,t);
edo3 = diff(y(t),t,2) - diff(y(t),t) - 2 * y(t) == 0
```

edo3 =

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, y(t) - \frac{\partial}{\partial t}\, y(t) - 2\, y(t) = 0$$

```
cond1 = [y(0) == 1,Dy(0) == a];
dsolve(edo3,cond1)                    % Resolve o PVI
```

ans $= e^{2t}\left(\frac{a}{3} + \frac{1}{3}\right) - e^{-t}\left(\frac{a}{3} - \frac{2}{3}\right)$

(b)

```
cond2 = [y(0)==1,Dy(0) == 0];
dsolve(edo3,cond2)                    % Resolve o PVI
```

ans $= \frac{2\,e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3}$

(c)

```
f(t) = dsolve(edo3,cond2)
```

f(t) $= \frac{2\,e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3}$

```
df(t) = diff(f,t)
```

df(t) $= \frac{2\,e^{2t}}{3} - \frac{2\,e^{-t}}{3}$

```
ponto_critico = solve(df(t) == 0)
```

ponto_critico $= 0$

```
d2f(t) = diff(df,t)
```

d2f(t) $= \frac{2\,e^{-t}}{3} + \frac{4\,e^{2t}}{3}$

```
d2f(ponto_critico)
```

ans $= 2$

Logo, o ponto de mínimo é $x_0 = 0$, pois $h'(0) = 0$ e $h''(0) = 2 > 0$.

(d)

```
g(t) = dsolve(edo3,cond1)
```

g(t) $= e^{2t}\left(\frac{a}{3}+\frac{1}{3}\right) - e^{-t}\left(\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\right)$

```
dg(t) = diff(g,t)
```

dg(t) $= e^{-t}\left(\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\right) + 2\,e^{2t}\left(\frac{a}{3}+\frac{1}{3}\right)$

```
pontos_criticos = solve(dg(t) == 0,t)
```

pontos_criticos =

$$\frac{\log\left(-\frac{a-2}{2\,a+2}\right)}{3}$$

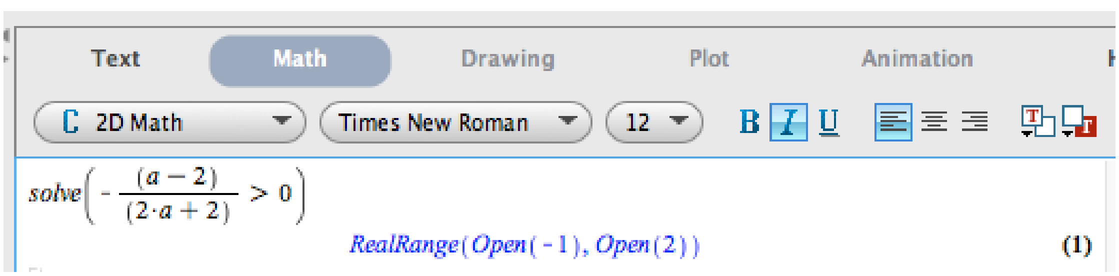
O ponto crítico está definido quando $-\frac{a-2}{2a+2} > 0$, resolvendo a inequação obtemos:

```
solve(-(a-2)/(2*a+2) > 0,a)
```

Warning: Cannot find explicit solution.

ans = Empty sym: 0-by-1

O Maple resolve esta inequação, veja o resultado:



Agora, sabemos que só existem pontos críticos no intervalo $(-1, 2)$.

Resta verificar quais destes pontos são pontos de mínimo, ou seja, verificando para quais pontos $x_0 \in (-1, 2)$ temos $h''(x_0) > 0$.

```
d2g(t) = diff(dg,t)
```

d2g(t) $= 4\,e^{2t}\left(\frac{a}{3}+\frac{1}{3}\right) - e^{-t}\left(\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\right)$

```
d2g(pontos_criticos)
```

ans =

$$4\left(\frac{a}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{a-2}{2a+2}\right)^{2/3}-\frac{\frac{a}{3}-\frac{2}{3}}{\left(-\frac{a-2}{2a+2}\right)^{1/3}}$$

Considere $C:(-1,2)\to\Re$, a função definida pela expressão acima, que nos fornece a segunda derivada para diferentes escolhas de a.

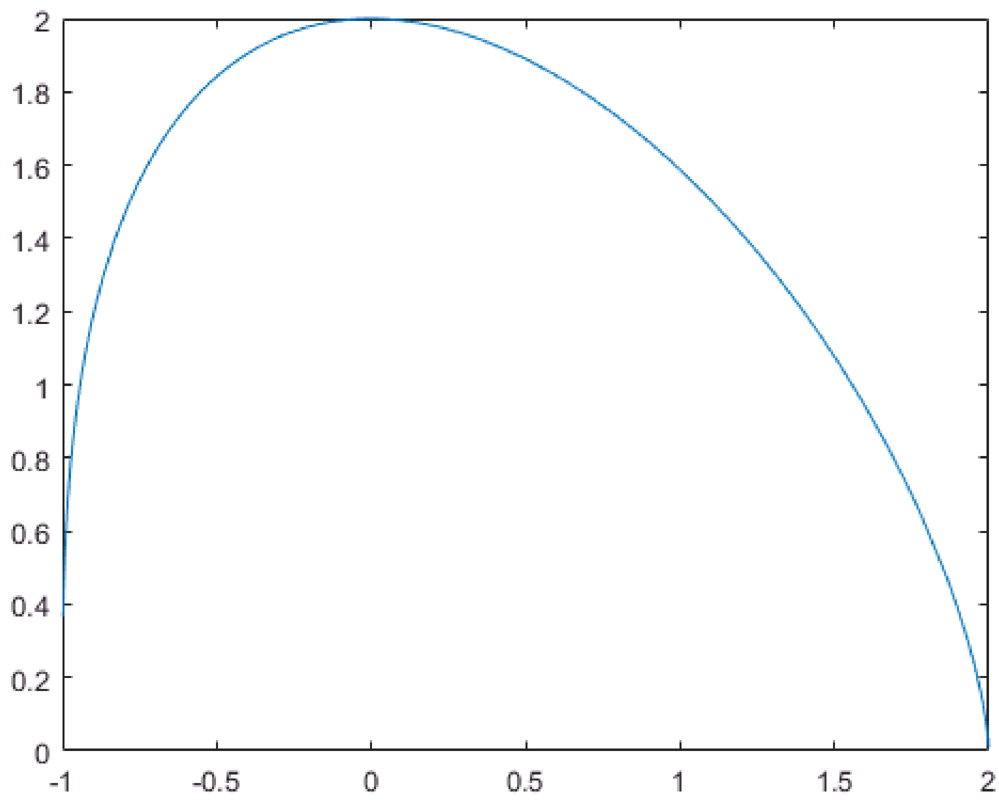
Podemos estudar esta função pelo gráfico:

```
C(a) = d2g(pontos_criticos)
```

C(a) =

$$4\left(\frac{a}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{a-2}{2a+2}\right)^{2/3}-\frac{\frac{a}{3}-\frac{2}{3}}{\left(-\frac{a-2}{2a+2}\right)^{1/3}}$$

```
fplot(C,[-1,2])
```



Logo, a função C assume somente valores positivos, e portanto para $a\in(-1,2)$ teremos um ponto de mínimo.

Obs.: Usando o Maple podemos confirmar esta solução:

$$solve\left(\frac{4\cdot\left(\left(\frac{(2-a)}{(2\cdot a+2)}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot(a+1)\right)}{3}-\frac{(a-2)}{3\cdot\left(\frac{(2-a)}{2\cdot a+2}\right)^{\frac{1}{3}}}>0\right)$$

$$RealRange(Open(-1), Open(2)) \qquad (2)$$

4.3 - Exercícios Propostos

Exercício 25 : pg 121 - Cap 3 - seção 3.1 - Boyce- DiPrima - 10^o edição.

Exercício 26 : pg 122 - Cap 3 - seção 3.1 - Boyce- DiPrima - 10^o edição.