امید یعقوبی

گروه ۲ و ۱ج

رشته ε

رشته : دنباله‌ای متناهی از سمبول های داخل الفبا

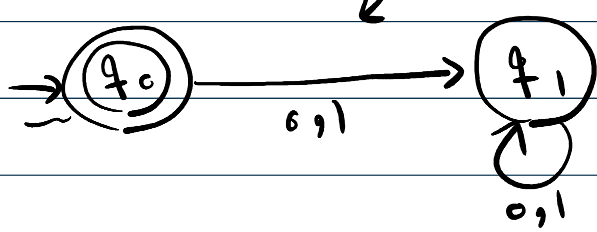
زبان: مجموعه‌ای از رشته ها

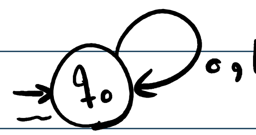
زبان $\leftarrow \{\varepsilon\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

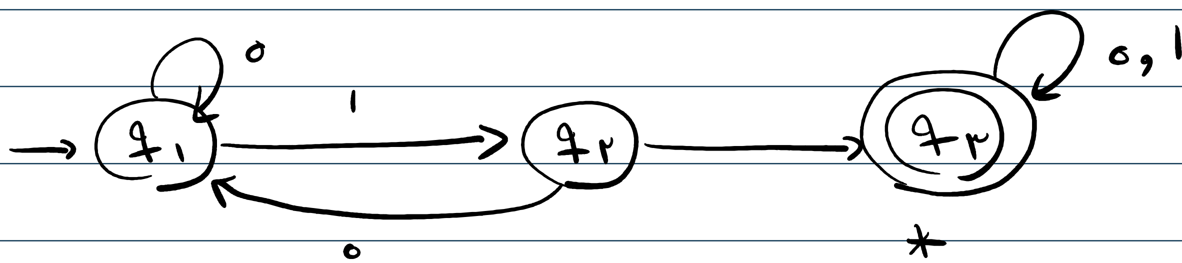
$\Sigma = \{0, 1\}$

$L_1 = \{\varepsilon\}$ $\quad$ $L_2 = \{\}$





M_1



زبان L ← زبان منظم ← **Transition Graph**

DFA A $\rightsquigarrow (\underbrace{Q}_{\text{حالت ها}}, \underbrace{\Sigma}_{\text{الفبا}}, \delta, q_0, F)$

$F \subseteq Q$

Input A $\quad A \in \underline{\Sigma^*}$

Σ^*	
Accept	Reject
$\in L$	$\notin L$

$\underline{L(M_1) = A}$

M_1 زبان A را می‌پذیرد.

Lookup-Table

δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	...
q_3	...	...

$\hookrightarrow \delta : \underset{q_x}{Q} \times \underset{a}{\Sigma} \to \underset{q_y}{Q}$

$\delta : \overset{q_x}{Q} \times \overset{a}{\Sigma} \longrightarrow \overset{q_y}{Q}$

$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \longrightarrow Q$

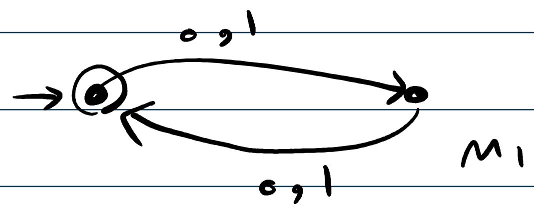
$\Sigma^* . \{w\} = \varepsilon w, 0w, 1w, ...$

$\hookrightarrow \Sigma = \{0,1\}$

w

$\Sigma^* . \{w, z\} = \varepsilon w, \varepsilon z$

$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|$ زوج $\}$



$\underline{L(m_1) = L}$

* برای هر $1 \le i \le n$ $\underline{w_i \in \Sigma}$ و رشته ی

$w = w_1 \; w_2 \; w_3 \; w_4 \; ... \; w_n$

m رشته ی w را می‌پذیرد اگر دنباله‌ای از حالت ها به شکل

$\delta(r_0, w_1) = r_1$ $\qquad r_0 \, r_1 \, ... \, r_{n-1} \in Q$

وجود داشته باشد که

1. $r_0 = q_0$
2. $r_i = \delta(r_{i-1}, w_i)$ $\qquad 1 \le i \le n$
3. $r_{n-1} \in F$

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \underbrace{M \text{ Accepts } w}_{\hat{\delta}(q_0, w) \in F}\}$$

$$\hat{\delta}(q_n, \varepsilon) = q_n$$

$$\hat{\delta}(q_n, wa) = \delta(\hat{\delta}(q_n, w), a)$$

زبان منظم: زبان L منظم است اگر DFA با نام M وجود داشته باشد که $\underline{L(M) = L}$

الفبا نیست ← $\underline{\Sigma = \{00, 0, 1\}}$

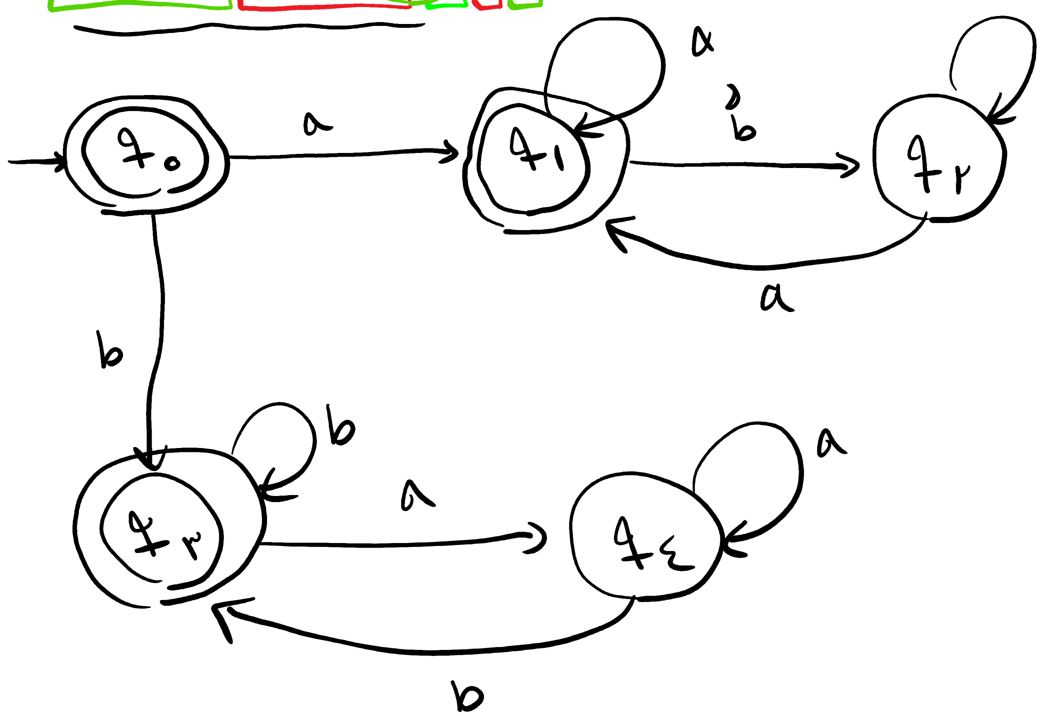
خاصیت مهم برای هر الفبا Σ :

دو دنباله‌ی متناهی ساخته شده از Σ برابرند اگر و تنها اگر که المان‌های که از آن ساخته شده به ترتیب برابر باشند

$$\underset{\in \Sigma}{\underline{00}} = \underbrace{0\ 0}_{\Sigma}$$ ولی $\rightarrow 00 \neq 0$

$$L_1 = \{ W \in \{a,b\}^* \mid \#_{ab} W = \#_{ba} W \}$$

$$w = aa \ldots abb \ldots baba$$



یادآوری:

M accept $w \Rightarrow w \in L \Leftarrow L(M) \subseteq L$

$w \in L \Rightarrow M$ accept $w \Leftarrow L \subseteq L(M)$

اثبات $L(M) = L$

$\underbrace{\hat{\delta}}_{①}$, $\underbrace{r_0 \ldots r_{n-1}}_{②}$

*

برای هر w

$\hat{\delta}(q_0, w) \in F \Leftarrow w \in L$ (A)

$\hat{\delta}(q_0, w) \in F^c \Leftarrow w \notin L$ (B)

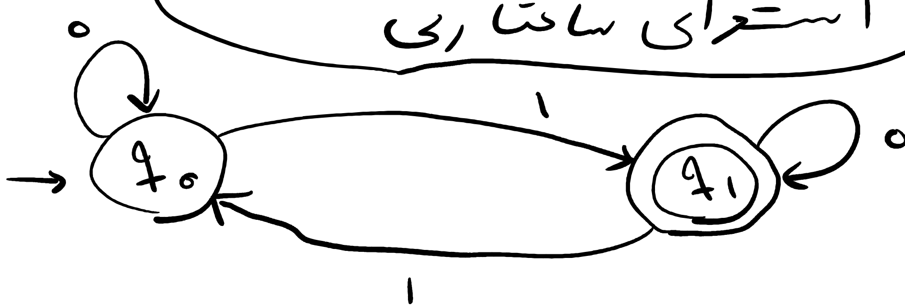
$(F^c = Q \underbrace{\setminus}_{\text{setminus}} F)$

یادآوری : $A \Rightarrow B \xleftrightarrow{\text{عکس نقیض}} \neg B \Rightarrow \overbrace{\neg A}^{\notin F}$

سوال: اثبات کنید که زبان DFA زیر رشته هایی است که تعداد رخداد 1 در آن ها فرد است.

Structural Induction

استقرای ساختاری



$w \in L \Leftrightarrow w \in L(M)$

Thursday, February 24, 2022 8:00 PM

(A) برای هر $w \in \Sigma^*$ اگر $w \in L$ $\Leftarrow$ $\hat{\delta}(q_0, w) = q_1$

(B) " " $w \in \Sigma^*$ اگر $w \notin L$ $\Leftarrow$ $\hat{\delta}(q_0, w) = q_0$

استقرا روی طول w

Base Case $\leftsquigarrow$ $|w| = 0$ $w = \varepsilon$

(A) $\varepsilon \notin L$ (به انتفای مقدم برقرار است)

یادآوری انتفای مقدم : $A \Rightarrow B$ اگر $A = F$ درست است.

(B) $\varepsilon \notin L$, $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = q_0$

Ind. Step

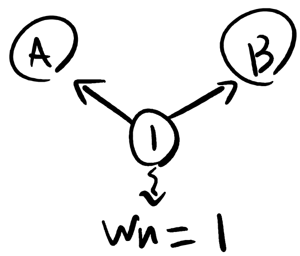
(A) اگر $w \in L$ (یعنی $\#_1(w) \% 2 = 1$)

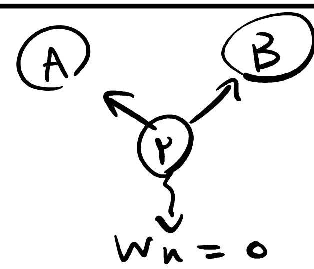
باقی‌مانده

$|w|_1$

اگر $w = w_1 w_2 \dots w_n$ ۲ حالت داریم :

حالت ① $w_n = 1$ حالت ② $w_n = 0$





(1) (A) اگر $w \in L$ پس $\#_1(w) \% 2 = 1$ پس اگر $w = w'1$

آن‌گاه $\#_1(w') \% 2 = 0$ حال طبق فرض

استقرا $\hat{\delta}(q_0, w') = q_0$ و براساس تعریف

$\hat{\delta}$ داریم: $\hat{\delta}(q_0, w'1) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w'), 1)$

پس با جایگذاری داریم: $\hat{\delta}(q_0, w) = \delta(q_0, 1) = q_1$

پس $w \in L(M)$ $\underbrace{[w \in L \Rightarrow w \in L(M)]}$

$L \subseteq L(M)$ (1) (A)

(1) (B) $w \notin L$ پس $\#_1(w) \% 2 = 0$ پس اگر $w = w'1$

آن‌گاه $\#_1(w) \% 2 = 1$ حال طبق فرض استقرا

$\hat{\delta}(q_0, w') = q_1$ براساس تعریف $\hat{\delta}$:

$$\hat{\delta}(q_0, w'1) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w'), 1) = \delta(q_1, 1) = q_0$$

پس $w \notin L(M)$ $[w \notin L \Rightarrow w \notin L(M)]$

حالت ② $w_n = 0$

(A) $w \in L \Leftarrow \#_1(w)\%2 = 1 \Leftarrow w = w'0$

آن‌گاه $\#_1(w')\%2 = 1$ با فرض استقرا

$\hat{\delta}(q_0, w') = q_1$

با تعریف $\hat{\delta}$: $\hat{\delta}(q_0, w'0) = \delta(q_1, 0) = q_1$

$w \in L(M)$ $\quad [w \in L \Rightarrow w \in L(M)]$

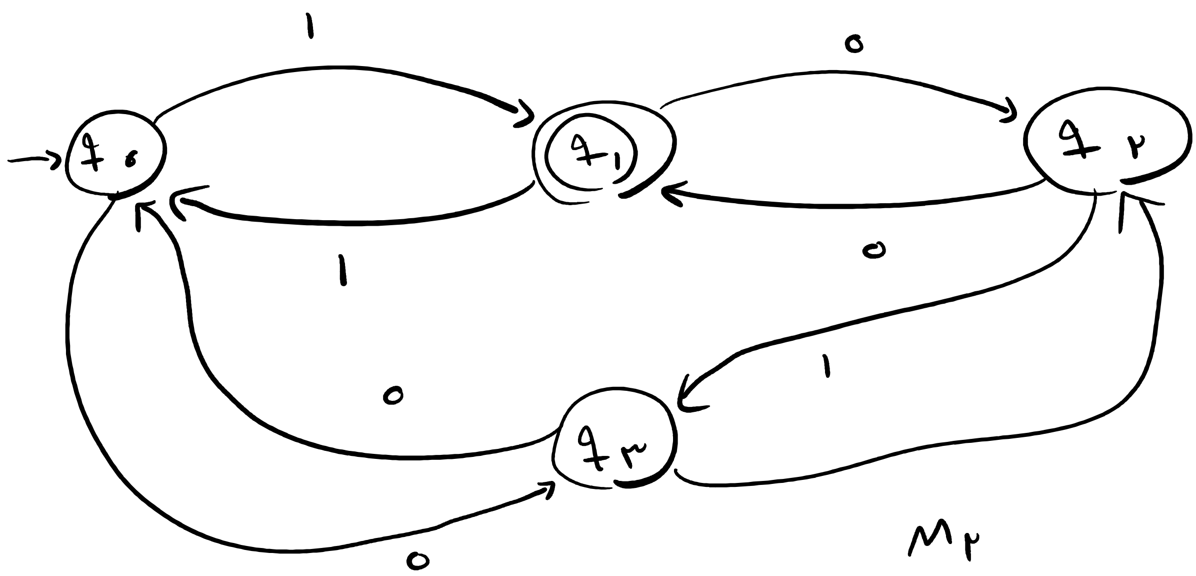
(B) $w \notin L \quad \#_1(w)\%2 = 0 \Leftarrow w = w'0$

آن‌گاه $\#_1(w')\%2 = 0$ با فرض استقرا

$\hat{\delta}(q_0, w') = q_0$ با تعریف $\hat{\delta}$

$\hat{\delta}(q_0, w'0) = \delta(q_0, 0) = q_0 \ [q_0 \notin F]$

$[w \notin L \Rightarrow w \notin L(M)] \Leftarrow w \notin L(M)$



L(M۲) زبانی است که تعداد رخداد ۰ در هر رشته‌ی آن زوج و
تعداد رخداد ۱ در هر رشته‌ی آن فرد است.

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F \}$$

$\begin{cases} \wedge = \text{and} \\ \vee = \text{or} \end{cases}$

ادعا: برای هر $w \in \{0,1\}^*$ داریم:

$$\#_0(w) \% 2 = 0 \wedge \#_1(w) \% 2 = 1 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, w) = q_1$$

$$\#_0(w) \% 2 = 1 \vee \#_1(w) \% 2 = 0 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \neq q_1$$

$\#_0(w) \% 2 = 0 \wedge \#_1(w) \% 2 = 0 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, w) = \underline{q_0}$ (زیرا ادعا ۱)

$\#_0(w) \% 2 = 0 \wedge \#_1(w) \% 2 = 1 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, w) = q_1$ (۲) ״

$\in F$

$\#_0(w)\,\%\,2 = 1 \wedge \#_1(w)\,\%\,2 = 1 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, w) = q_2$:(۳)

$\#_0(w)\,\%\,2 = 1 \wedge \#_1(w)\,\%\,2 = 0 \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, w) = q_3$:(۴)

$w = \varepsilon$

: BaseCase $\quad \#_0(\varepsilon) = \#_1(\varepsilon) = 0$

تعریف $\hat{\delta}$ $\quad \hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = q_0$

: Ind. Step

حالت ۱ ، $\quad W = w'0$

(A) $\quad w \in L \Leftarrow \#_0(w)\,\%\,2 = 0 \wedge \#_1(w)\,\%\,2 = 1$

پس $\Leftarrow \#_0(w')\,\%\,2 = 1 \wedge \#_1(w')\,\%\,2 = 1$

فرض استقرا : $\quad \hat{\delta}(q_0, w') = q_2$

با تعریف : $\quad \hat{\delta}(q_0, w'0) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w'), 0)$

جایگذاری : $\quad \hat{\delta}(q, w) = \delta(q_2, 0) = q_1$

وچون $q_1 \in F$: $\quad \underline{w \in L(M)}$

Ⓑ $w \notin L$ پس

۳ زیر حالت

① $\#_0(w) \% 2 = 1 \wedge \#_1(w) \% 2 = 0$

② $\#_0(w) \% 2 = 1 \wedge \#_1(w) \% 2 = 1$

③ $\#_0(w) \% 2 = 0 \wedge \#_1(w) \% 2 = 0$

تمرین: برای هر زیر حالت به صورت جداگانه بررسی شود که:

$$\hat{\delta}(q_0, w'0) \in \underbrace{\{q_0, q_2, q_3\}}_{F^c}$$

حالت ② $w = w'1$

Ⓐ و Ⓑ را مانند قبلی ها به دست بیاورید (تمرین)

* سوال: نشان دهید: $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y)$

$$q_x = \hat{\delta}(q, x)$$

$$w = \underbrace{w_1 w_2 w_3}_{x} \cdots \underbrace{w_n}_{y}$$

$$\hat{\delta}(x\ y, q_0)$$

$$\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y)$$

استقرا روی طول y

BaseCase ⟵ $y = \varepsilon$

① $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(q, x)$

② $\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), \varepsilon) = \hat{\delta}(q, x)$

$\underline{x\varepsilon = xy = x}$

$\hat{\delta}$ تعریف
$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$

③ $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), \varepsilon)$ از ① و ②

Ind. Step : $\underline{y = y'a}$ $\Sigma = \{a, b\}$

فرض : ① $\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y'a)$

تعریف $\hat{\delta}$: ② $\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y'a) = \delta(\underbrace{\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y')}_{\text{در فرض استقرا}}, a)$

فرض استقرا : ③ $\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y'a) = \delta(\hat{\delta}(q, xy'), a)$

④ $\delta(\hat{\delta}(q, xy'), a) = \hat{\delta}(q, xy'a) = \underline{\hat{\delta}(q, xy)}$

∎ Q.E.D

بگذاریم D یک DFA و 0 یک سمبول در الفبای D باشد به شکلی که برای هر حالت q_x عبارت $\delta(q_x, a) = q_x$ برقرار باشد. با استقرا روی n نشان دهید که برای هر $n \geq 0$ عبارت $\hat{\delta}(q_x, a^n) = q_x$ برقرار است به شکلی که a^n همان تکرار n بار پشت‌سر هم a است.

$n=0$: Base Case

① $\hat{\delta}(q_x, \varepsilon) = q_x$: $\hat{\delta}$ تعریف

: Ind.step

① $\hat{\delta}(q_x, a^{n+1}) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_x, a^n), a)$: مساله قبل

② $\qquad " \qquad = \hat{\delta}(q_x, a)$: فرض استقرا

③ $\underbrace{\hat{\delta}(q_x, a)}_{\hat{\delta}\ \text{تعریف}} = \underbrace{\delta(q_x, a)}_{\text{صورت سوال}} = q_x$: تعریف $\hat{\delta}$ و صورت سوال