حل تمرین گروه دوم
جلسه ی ۷
امید یعقوبی

CFG

$G = (V, \Sigma, P, S)$

Terminals

Variable

product... Rules

Start Variable

V : مجموعه ی متناهی از متغیرها

Σ : مجموعه ی متناهی از نمادها

P : $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ [قوانین تولید] $\underbrace{A \to aBaB}$

$(A, \underbrace{aBaB}_{(V \cup \Sigma)^*})$

$A \in V$ $a \in \Sigma$ $B \in V$ $\to (V \cup \Sigma)^*$

S : متغیر شروع

اشتقاق (Derivation)

$u\underline{A}v \Rightarrow u\underline{w}v$

$A \in V, \quad A \to w \in P$

اشتقاق چند مرحله‌ای (مکرر)

$u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_n \qquad u_1 \overset{*}{\Rightarrow} u_n$

$u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow u_3 \rightsquigarrow u_1 \overset{2}{\Rightarrow} u_3$

فرض کنیم G یک گرامر مستقل از متن است.

$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w \}$

(Left Hand side) LHS RHS

مثال ۱: $G_1 : \; S \rightarrow \underbrace{aS}_{①} \mid \underbrace{Sb}_{②} \mid a \mid b$

نشان دهید $w \in L(G)$ وجود ندارد که شامل ba باشد.

استقرا روی تعداد قدم‌های اشتقاق (Number of derivation steps)

پایه: $n=1$: $\quad S \Rightarrow a$ ✓ $\quad S \Rightarrow b$ ✓

قدم: فرض می‌کنیم رشته‌هایی که با K قدم اشتقاق تولید شوند شامل ba نباشند، حال بگذاریم w رشته‌ای باشد که با $K+1$ قدم تولید شده است.

۲ حالت داریم:

① اولین قدم به شکل $S \Rightarrow aS$

② اولین قدم به شکل $S \Rightarrow Sb$

اگر در حالت ① باشیم. براساس فرض استقرا $S \xRightarrow{i} w'$
برای هر $K \geq i$ شرط نداشتن زیررشته‌ی ba در w' برآورده
می‌شود. [w' شامل ba نیست]

$$S \xRightarrow{K+1} w \quad , \quad S \Rightarrow aS \xRightarrow{K} aw'$$

w' شامل ba نیست در نتیجه aw' هم شامل ba نیست.

حالت دوم: در این حالت $S \Rightarrow Sb$ اولین قدم اشتقاق است.
مانند قبل داریم:

$$S \xRightarrow{K+1} w \quad , \quad S \Rightarrow Sb \xRightarrow{K} w'b$$

w' طبق فرض استقرا شامل ba نیست. پس $w'b$
هم شامل ba نیست.

مثال: $G_2 : S \to aSb \mid ab$

$L_2 = \{a^i b^i \mid i \geq 1\}$

* نشان دهید $L(G_2) \subseteq L_2$

استقرا روی تعداد قدم های اشتقاق

* پایه: $K=1$ ، $S \Rightarrow ab$, $ab \in L_2$ ✓

[فرض استقرا] برای $w \in \Sigma^*$ که $S \xRightarrow{K} w$ آن‌گاه $w \in L_2$

[هدف] برای هر $w \in \Sigma^*$ که $S \xRightarrow{K+1} w$ آن‌گاه $w \in L_2$

قدم . اولین قدم اشتقاق ۱ حالت دارد:

$$S \Rightarrow aSb$$

برای w تولید شده با $K+1$ قدم اشتقاق داریم:

$$S \Rightarrow aSb \xRightarrow{K} aw'b = w$$

از فرض استقرا می‌دانیم $w' \in L_2$ پس $w' = a^j b^j$ برای یک $j \geq 1$.

درنتیجه $w = a^{j+1} b^{j+1}$ و به روشنی $w \in L_2$. ✓

مثال

$G_3: S \to BC$

$B \to aBb \mid ab$

$C \to bCc \mid bc$

(توجه B و C مستقل از بقیه‌ی متغیرها هستند)

$L_3 = \{a^i b^{i+j} c^j \mid i,j > 1\}$

* نشان دهید $L(G_3) \subseteq L_3$

زیرادعا:

① برای هر $u \in \Sigma^*$ که $B \xRightarrow{*} u$ داریم $u \in \{a^i b^i \mid i \geq 1\}$

② برای هر $v \in \Sigma^*$ که $C \xRightarrow{*} v$ داریم $v \in \{a^j b^j \mid j \geq 1\}$

③ برای هر $w \in \Sigma^*$ که $S \xRightarrow{*} w$ داریم $w \in L_3$

اثبات ① و ② نتیجه‌ی مستقیم اثبات ص قبل [$L(G_2) \subseteq L_2$]

③ از آن که $S \Rightarrow BC$ اولین قدم اشتقاق پس w از اشتقاق زیر به دست می‌آید:

$$S \Rightarrow BC \xRightarrow{*} uC \xRightarrow{*} uv$$

از ① و ② داریم $u = a^i b^i$ و $v = b^j c^j$ برای $i,j \geq 1$.

در نتیجه $\underline{w = a^i b^{i+j} c^j}$ که به روشنی $w \in L_3$.

Saturday, April 23, 2022 3:58 PM

$G_\varepsilon:\ S \to aB \mid a$

$\quad\ \ B \to bS \mid b$

$S \xleftrightarrow{\text{dependency}} B$

Mutually Dependent Variables

$L_\varepsilon = (ab)^*(a+ab)$

* نشان دهید $L(G_\varepsilon) \subseteq L_\varepsilon$

(Mutual Induction)

* استقرا دو حکم همزمان دارد.

① اگر $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ آنگاه $w \in L_\varepsilon$

② اگر $B \overset{*}{\Rightarrow} x$ آنگاه $x \in (ba)^*(b+ba)$

پایه: $K=1$

✓ $S \Rightarrow a,\quad a \in L_\varepsilon$

✓ $B \Rightarrow b,\quad b \in (ba)^*(b+ba)$

فرض های استقرا:

① $\forall w \in \Sigma^*,\ S \overset{K}{\Longrightarrow} w \xrightarrow{\text{آنگاه}} w \in L_\varepsilon$

② $\forall x \in \Sigma^*,\ B \overset{K}{\Longrightarrow} x \xrightarrow{\text{آنگاه}} x \in (ba)^*(b+ba)$

حکم های استقرا:

① $\forall w \in \Sigma^*,\ S \overset{K+1}{\Longrightarrow} w \xrightarrow{\text{آنگاه}} w \in L_\varepsilon$

② $\forall x \in \Sigma^*,\ B \overset{K+1}{\Longrightarrow} x \xrightarrow{\text{آنگاه}} x \in (ba)^*(b+ba)$

دوم) استقرا

اولین قدم اشتقاق برای تولید w به شکل $S \Rightarrow aB$ است.

درنتیجه $aw' = w \xLeftarrow{k} S \Rightarrow aB$ با $w' \in \Sigma^*$. از فرض استقرا می‌دانیم که

$w' \in (ba)^*(b+ba)$. پس $w \in a(ba)^*(b+ba)$

Abuse notation: $w' \in L((ba)^*(b+ba))$

یک عضو: $a(ba\,ba\,ba\,ba\,ba)$ ← $(ba)^*$

$(ab\,ab\,ab\,ab\,ab)a$ ← $(ab)^*$

مشاهده: $(ab)^*a = a(ba)^*$ پس داریم:

$$a(ba)^*(b+ba) = (ab)^*a(b+ba) \quad \text{(مشاهده)}$$

$$= (ab)^*(ab+aba)$$

$$= (ab)^*ab + (ab)^*aba$$

می‌دانیم $w \in (ab)^*ab + (ab)^*aba$ پس $w \in (ab)^*ab$

یا $w \in (ab)^*aba$. کافیست نشان دهیم در هر دو حالت

$w \in L_4$.

Case 1: $w \in (ab)^* ab$ Case 2: $w \in (ab)^* aba$

case1 :

① $w \in (ab)^* ab$

② $w = (ab)^i ab$ [i وجود دارد که] (تعریف *)

③ $w = (ab)^{i+1}$

* ④ $w \in (ab)^*(a + ab)$ از ① و ③

case2 :

① $w \in (ab)^* aba$

② $w = (ab)^i aba$ (مانند قبل)

③ $w = (ab)^{i+1} a$

* ④ $w \in (ab)^*(a + ab)$

از آن جا که در هر دو حالت $w \in L_4$ ، پس حکم ① اثبات شد.

اثبات حکم ②:

می‌دانیم که اولین قدم اشتقاق $B \Rightarrow bS$ است.

پس داریم: $B \Rightarrow bS \xRightarrow{k} b x' = x$.

براساس فرض استقرا $x' \in L_4$. پس $x \in b(ab)^*(a+ab)$

مانند قبل نتیجه می‌شود: $x \in (ba)^* b(a+ab)$ [ادامه ص بعد]

پس $x \in (ba)^*(ba+bab)$ و درنتیجه

$\underline{x \in (ba)^* ba + (ba)^* bab}$. حال داریم

یا $x \in (ba)^* ba$ یا $x \in (ba)^* bab$.

نشان میدهیم که در هردوحالت $\underline{x \in (ba)^*(b+ba)}$.

اگر $x \in (ba)^* ba$ پس $x \in (ba)^{i+1}$ درنتیجه
$x \in (ba)^*(b+\underline{ba})$. اگر هم $x \in (ba)^* bab$ آنگاه
پس $\underline{x \in (ba)^{j+1} b}$ $x \in (ba)^*(\underline{b}+ba)$.
ازآن جا که درهردوحالت $x \in (ba)^*(b+ba)$ حکم نتیجه می‌شود.

[$\varepsilon = \lambda$]

$G_5: \quad S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$

$L_5 = \{ w \mid w = w^R \}$

* نشان دهید $L(G_5) = L_5$

① $L_5 \subseteq L(G_5)$

استقرا روی طول w [note: پایه برابر کوچکترین رشته‌های است که در زبان است]

پایه $|w| = 0 \Leftarrow w = \varepsilon \ , \ S \Rightarrow \varepsilon$ ✓

$|w| = 1 \Leftarrow w \in \{0,1\} \ , \ S \Rightarrow 1 \ , \ S \Rightarrow 0$ ✓

قدم: فرض کنیم برای رشته های باطول کمتر مساوی از n برقرار است.
یعنی برای هر رشته ی y که $|y| \leq n$ که $y = y^R$
وجود دارد K به شکلی که $S \xRightarrow{K} y$. حال نشان
می دهیم برای رشته های به طول $n+2$ هم برقرار است.

اگر $y = y^R$ و $|y|>1$ ، دو حالت داریم:

case1 $\quad y = 0y'0 \quad$ s.t $\quad y' = y'^R$

case2 $\quad y = 1y'1 \quad$ s.t $\quad y' = y'^R$

اگر حالت 1 برقرار باشد آن گاه با فرض استقرا میدانیم
که برای y' وجود دارد k به شکلی که $S \xRightarrow{k} y'$ پس
اگر اولین قدم اشتقاق $S \Rightarrow 0S0$ داریم:

$$S \Rightarrow 0S0 \Rightarrow 0y'0$$

که نشان میدهد حکم برقرار است.
اگر حالت 2 هم برقرار باشد، به همین ترتیب داریم:

$$S \Rightarrow 1S1 \Rightarrow 1y'1$$

پس $L_5 \subseteq L(G_5)$.

2 $\underbrace{L(G_5) \subseteq L_5}$ [با استقرا روی تعداد قدم های اشتقاق]

تمرین.

$G_4: \; S \rightarrow \underbrace{Sa}\, |\, \underbrace{bSS}\, |\, \underbrace{SSb}\, |\, SbS\, |\, a$

* نشان دهید برای هر $w \in L(G)$، $n_a(w) > n_b(w)$

پایه: $S \Rightarrow a$ ✓

قدم استقرا: ٤ حالت

اولین قدم $\equiv S \Rightarrow Sa$

حال داریم: $\underbrace{S \Rightarrow Sa \overset{k}{\Rightarrow} w'a}$

با فرض استقرا $n_a(w') > n_b(w')$ پس
$n_a(w'a) > n_b(w'a)$

حالت ۲ اولین قدم $\equiv S \Rightarrow bSS$

داریم $S \Rightarrow bSS \overset{k}{\Rightarrow} \underbrace{bw'w''}$

$S \Rightarrow bSS \xRightarrow{k} bw'w''$

۱ $n_a(w') > n_b(w')$, $n_a(w'') > n_b(w'')$ فرض استقرا

۲ $n_a(w') = \underline{n_b(w') + K}$ s.t $K \geq 1$

۳ $n_a(w'') = \underline{n_b(w'') + K'}$ s.t $K' \geq 1$

۴ $n_a(bw'w'') = n_b(w') + n_b(w'') + K + K'$

۵ $K, K' \geq 1 \Rightarrow K + K' \geq 2$

۶ $n_a(bw'w'') = n_b(bw'w'') + K''$, $K'' \geq 1$ (۱,۴)

۷ $n_a(bw'w'') > n_b(bw'w'')$ ✓

$S \Rightarrow SbS$ و حالت $S \Rightarrow SSb$ حالت ۳
مشابه به همین حالت است.

$G_v: \quad S \to aS \mid a \mid bbS$

$L_v = \{a^i : i \geq 1\}$

مشاهده $L(G_v) \not\subseteq L_v$

$$\boxed{\begin{array}{c} bba \in L(G_v) \\ bba \notin L_v \end{array}}$$

* نشان دهید: $L_v \subseteq L(G_v)$

استقرا روی طول w:

پایه $|w|=1$ [کوچکترین رشته‌های درون L_v باید اند]

تنها $|w|=1$ در L_v همان a است پس داریم:

$$S \Rightarrow a \quad ✓$$

فرض استقرا: برای هر $w \in L_v$ که $|w| < K$ داریم $S \overset{*}{\Rightarrow} w$

قدم استقرا: می خواهیم نشان دهیم که برای هر رشته $|w|=K$ حکم برقرار است. به بیانی $S \overset{*}{\Rightarrow} a^K$

$$S \Rightarrow Sa \overset{*}{\Rightarrow} a^{K-1}a = a^K \quad ✓$$

با فرض استقرا: $S \overset{*}{\Rightarrow} a^{K-1}$