حل تمرین گروه دوم
جلسه‌ی ۳
امید یعقوبی

روش‌های توصیف زبان:

- DFA } هم ارزند
- NFA

⋮

Concatination

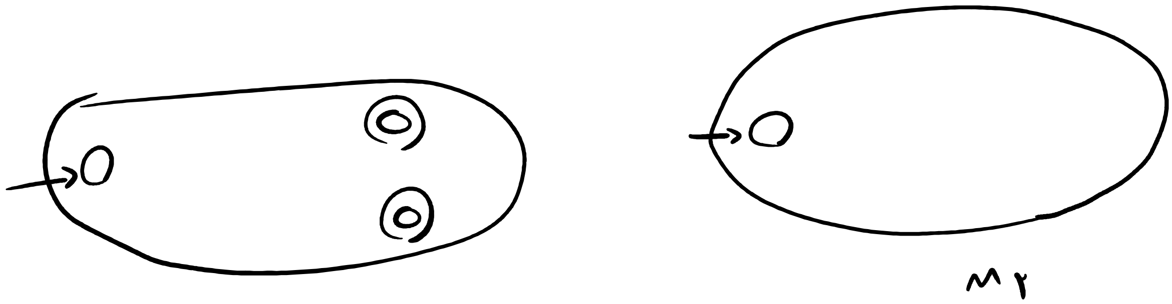
* نشان دهید زبان‌های منظم تحت الحاق بسته‌اند.

$L_3 = L_1 L_2 \rightsquigarrow \{w, x, y \dots\} \ \{z, \dots$

$wz \in L_3 \qquad xz \in L_3$

w ―――?――― $\qquad w \overset{?}{\in} L_3$

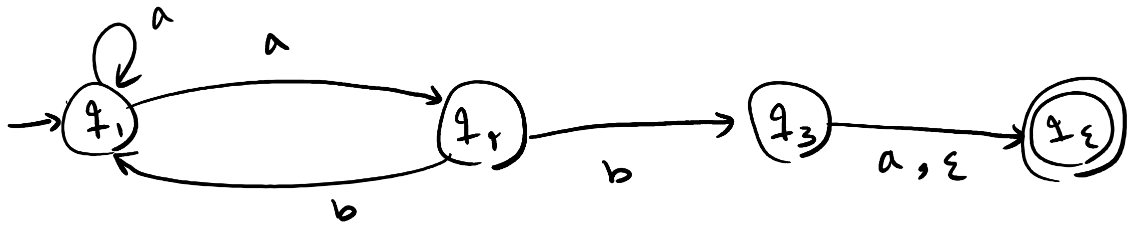
آیا نقطه برشی وجود دارد که $w = x|y \quad x \in L_1 , \ y \in L_2$?



$M_1 \qquad M_2$

$L(M_1) = L_1 \qquad L(M_2) = L_2$

ε-NFA



N_1

* در q_1 برای حرف a حالت بعدی ۲ انتخاب دارد : q_1, q_2
* در q_1 برای حرف b حالت بعدی نداریم : |انتخاب‌ها| = ۰

خواص NFA

① انتخاب‌های ممکن متفاوت : (انتخاب‌ها برای حالت بعدی بین ۰ تا |Q|)
به ازای هر حالت و سمبول.

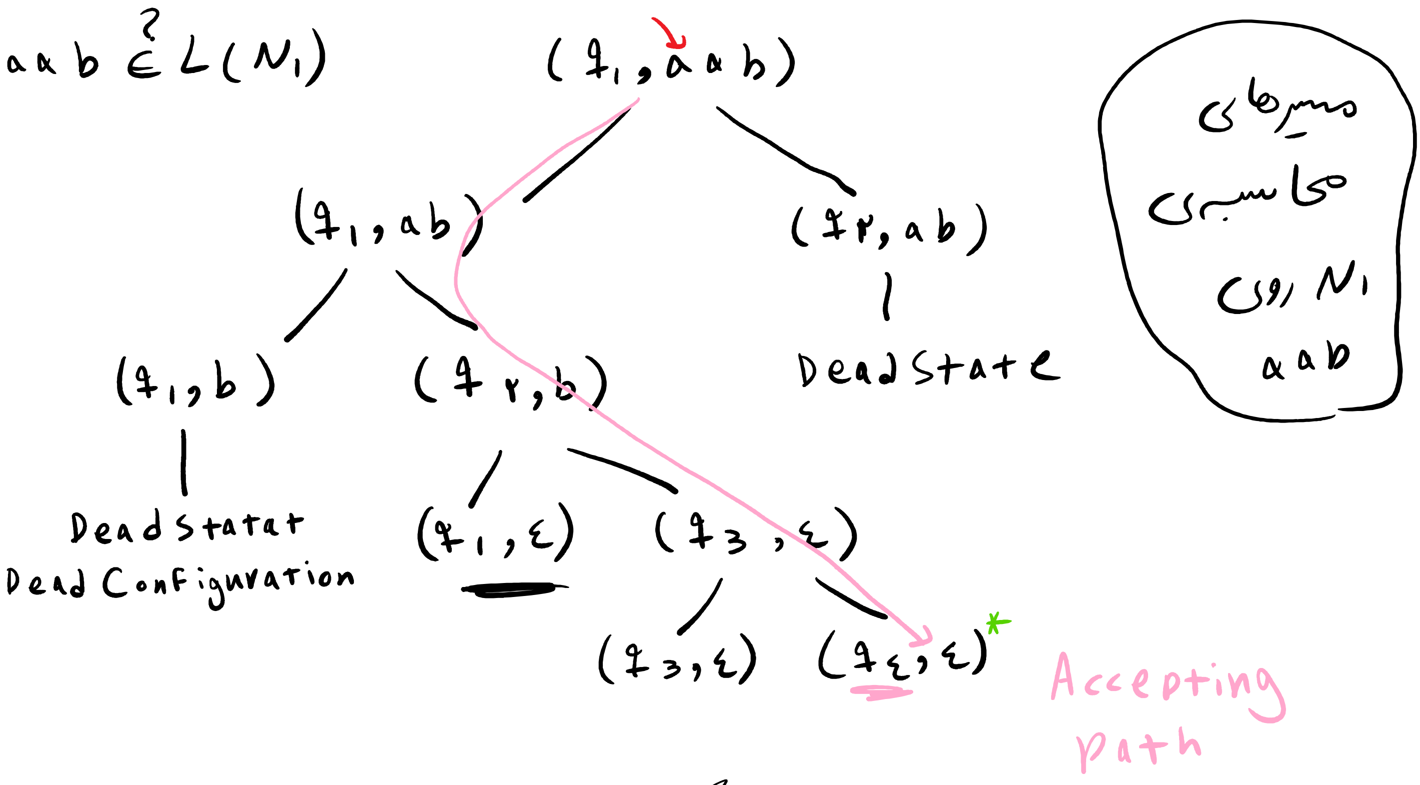
Nondeterminism

② [ε-NFA] حرکت برای رشته‌ی پوچ ε داریم. (ε_Transition)

Optional

اثبات می‌شود که حرکات ε قابل حذفند.

③ برای انتخاب‌های ممکن مسیرهای متفاوتی داریم. ورودی را می‌پذیرد اگر مسیری وجود داشته باشد که به accept برسد.



* دنباله‌ای از انتخاب‌ها داریم که ما را به یکی از حالات نهایی می‌رساند.
* اگر وجود داشته باشد انتخاب‌های ممکن که به یکی از حالات نهایی منجر شود ← ما را می‌پذیرد
* در غیر این صورت نمی‌پذیرد.

Note : تابع حالت ماشین Nondeterministic در دنیای فیزیکی ما تعریف نشده. ← مدل ریاضیاتی

مفهوم: فرض می‌کنیم در هر لحظه حدس می‌زند مسیر منتهی به یک حالت نهایی کدام است. و این حدس را به شکل جادویی می‌زند.

$$N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

ساختار تابع δ متفاوت با DFA است.

Reminder $\{R \mid R \subseteq Q\}$

$$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$$

$$\delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_1, b) = \{\}$$

$\boxed{\text{NFA}}$

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$$

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$$

$$\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{s \in \hat{\delta}(q, w)} \delta(s, a)$$

برای هر NFA یک DFA معادل داریم ← Subset Construction

مجموعه حالت ها: $Q' = \mathcal{P}(Q)$

برچسب نود $\leftarrow R \in Q'$

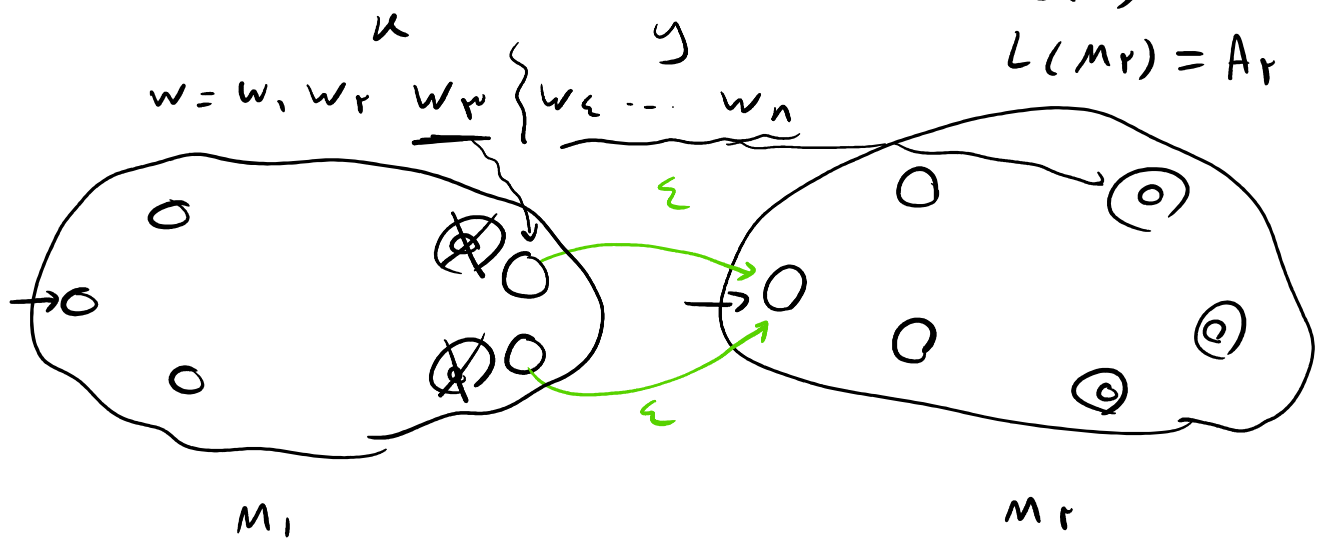
تابع انتقال: $\delta'(R, a) = \bigcup_{P \in R} \delta(P, a)$

* بسته بودن تحت الحاق زبان های منظم (Proof Sketch)

وجود دارد M_1 و M_2 که DFA هستند و $\xrightarrow[\text{چون منظمند}]{}$ $A_1, A_2 \in \text{Regular}$

$L(M_1) = A_1$

$L(M_2) = A_2$



* تمام حالات پایانی M_1 از پایانی درآورده می‌شوند

* از هر حالت قبلی پایانی M_1 یک یال با برچسب ε به حالت آغازین M_2 داریم.

یادآوری: ε-closure یعنی از حالت q بدون خواندن سمبول به کجا می‌توان رفت. (شودی)

* $q \in \underline{Eclose}(q)$

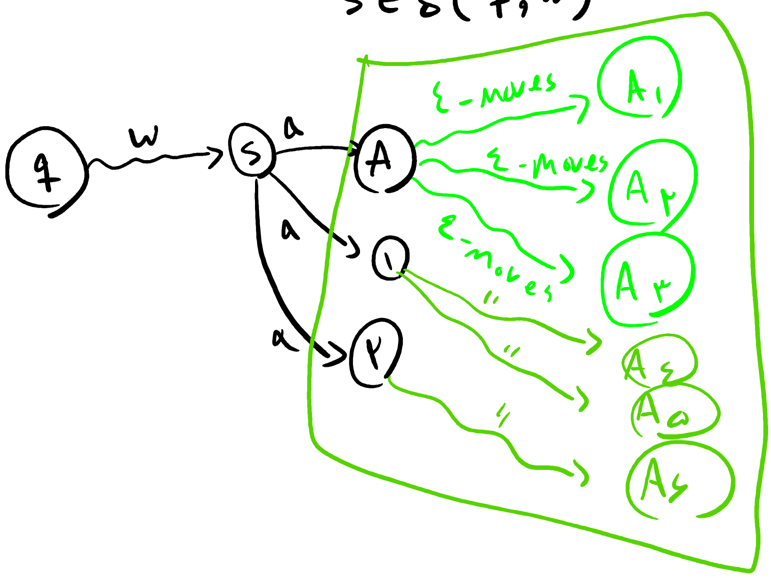
* $P \in Eclose(q) \wedge \underline{r \in \delta(P, \varepsilon)} \Rightarrow \underline{r \in Eclose(q)}$

$$q \xrightarrow{\varepsilon\text{-Moves}} P \xrightarrow{\varepsilon} r \implies q \xrightarrow{\varepsilon\text{-moves}} r$$

$\underline{\varepsilon\text{-NFA}}$ $\hat{\delta}$

* $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = Eclose(q)$
* $\hat{\delta}(q, w\underline{a}) = \bigcup_{s \in \hat{\delta}(q,w)} Eclose(\underbrace{\delta(s, a)}_{})$

یک مجموعه است ←



$\underline{Eclose(\delta(s, a))}$

مثال: N_1 در $\to$ $Eclose(q_3) = \{q_3, q_4\}$

$$Eclose(q_x) = \{q_x, q_y, q_z\}$$

$$q_x \xrightarrow{\varepsilon} q_y \xrightarrow{\varepsilon} q_z$$

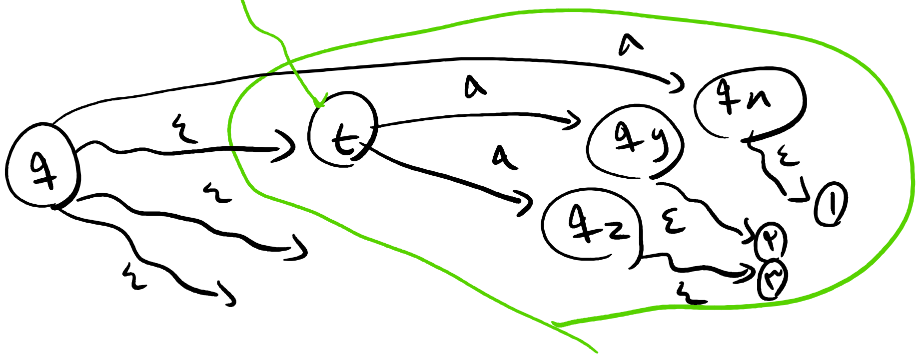
$$t \in Eclose(p) : \quad p \xrightarrow{\varepsilon\text{-Moves}} t$$

تعمیم ε-closure روی مجموعه حالت ها

اگر $S \subseteq Q$ $\longleftarrow$ $Eclose(S) = \bigcup_{q \in S} Eclose(q)$

تبدیل ε-NFA به DFA :

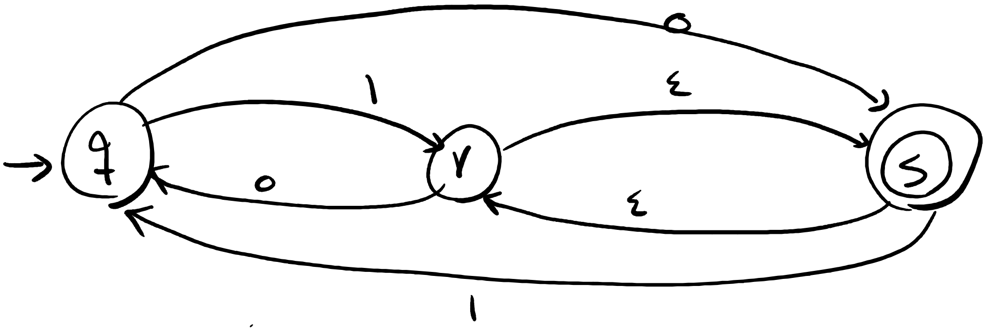
$$\delta'(q,a) = \bigcup_{t \in Eclose(q)} Eclose(\underbrace{\delta(t,a)}_{\text{مجموعه}})$$



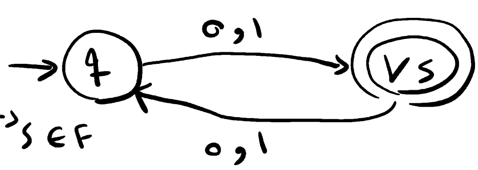
$$F' = \{S \subseteq Q \mid Eclose(S) \cap F \neq \emptyset\}$$

وجود یک حالت نهایی در زیرمجموعه $S \subseteq Q$، منجر به نهایی شدن S می شود.

مثال : ε-NFA ⟵ DFA



DFA



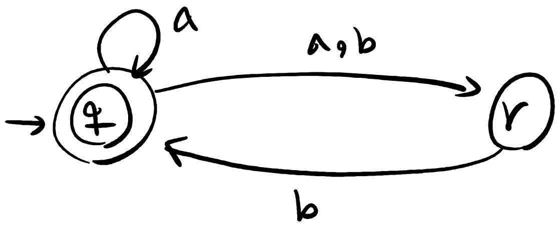
$\delta(q,1) = \{r\} \longrightarrow Eclose(\{r\}) = \{r,s\}$

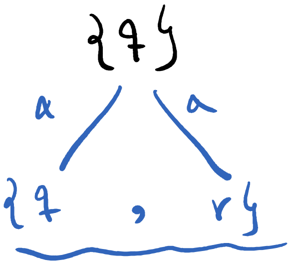
$\delta(q,0) = \{s\} \longrightarrow Eclose(\{s\}) = \{r,s\}$ $s \in F$

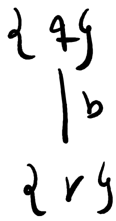
$(\delta(r,1) = \{\}) \cup (\delta(s,1) = \{q\}) = \{q\}$

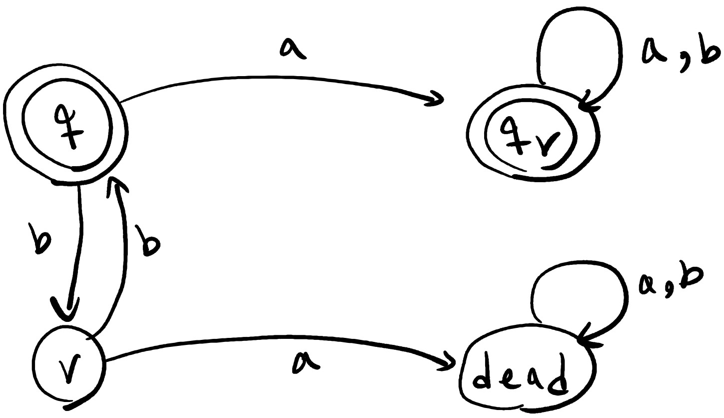
$(\delta(r,0) = \{q\}) \cup \{\delta(r,1) = \{\}) = \{q)$

مثال : NFA ⟵ DFA









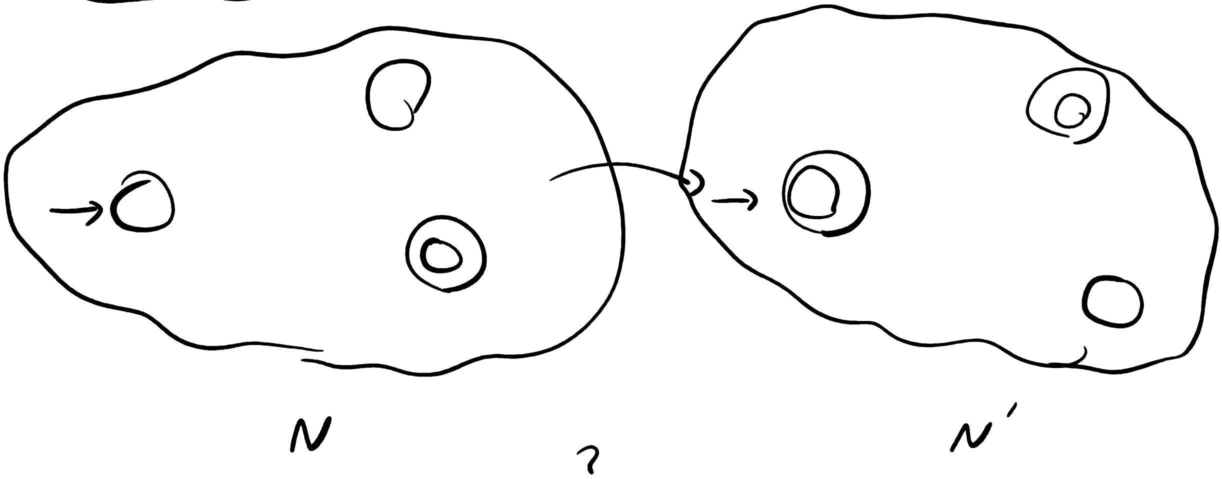
$\delta(q,b) \cup \delta(r,b) = \{q,r\}$

$\delta(q,a) = \{q,r\}$

$\delta(r,a) = \{\}$

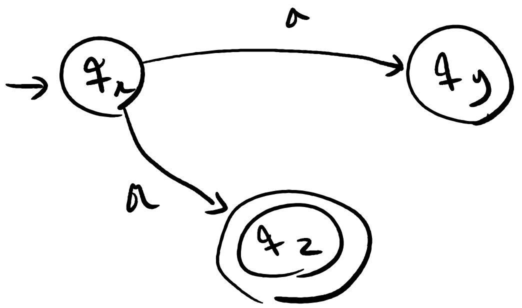
$\delta(r,b) = \{q)$

* سوال: اگر N یک NFA باشد و N' از تعویض حالت های پایانی و غیر پایانی به دست آمده باشد. آیا $L(N') = \overline{L(N)}$ ؟



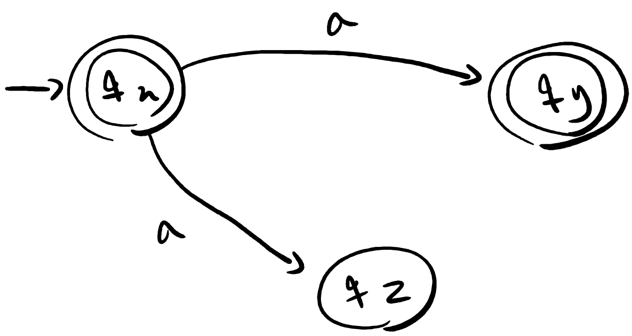
$$L(N) \xrightarrow{?} \overline{L(N)} = L(N')$$

مثال نقض:



M_1 $\quad L(M_1) = \{a\}$

M_2

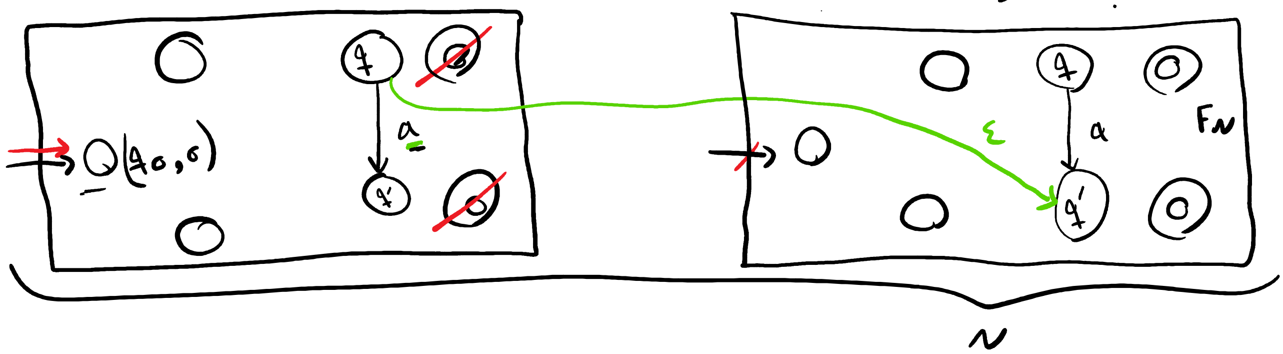


$L(M_2) = \{a, \varepsilon\}$

برای هر زبان L تعریف می‌کنیم $D(L) = \{xy | xay \in L \text{ and } a \in \Sigma\}$. به بیانی $D(L)$ زبانی است که از پاک کردن دقیقا یک سمبول از رشته‌های درون L به دست می‌آید. اثبات کنید که اگر L منظم باشد $D(L)$ نیز منظم است.

از آن جا که L منظم است پس برای آن DFA با نام M وجود دارد.
حال برای $D(L)$ یک ϵ-NFA با نام N طراحی می کنیم که $L(N) = D(L)$.

کپی ۰ از M کپی ۱ از M



$Q_N = Q \times \{0,1\}$ $\text{Initial State}_N = (q_0, 0)$

$F_N = F \times \{1\}$ $\delta(q,\alpha) = q' \longleftrightarrow ((q,\alpha),q') \in \delta$

For every $\alpha \in \Sigma$ $\forall ((q,\alpha),q') \in \delta$:

$$\delta'((q,0),\epsilon) = (q',1)$$

برش از یک حرف

$\{a,b,c\} \times \{0,1\} = \{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1)\dots\}$

یادآوری

برای هر $\alpha \in \Sigma$: $\forall ((q,\alpha), q') \in \delta \Rightarrow$

$$\delta'((q,0),\alpha) = (q',0)$$
$$\wedge \ \delta'((q,1),\alpha) = (q',1)$$

① NFA با نام N شامل ۲ کپی از DFA با نام M است که به آن یک یال با برچسب ε از کپی صفرم به کپی یکم اضافه شده

② حالت آغازین در کپی صفرم و حالات‌های پایانی در کپی یکم است.

③ از ① و ② نتیجه می‌شود که هر مسیر منتهی به حالت پایانی (accepting path) شامل دقیقاً یک حرکت ε است.

④ هر حرکت ε از کپی صفرم به کپی یکم متناظر حذف دقیقاً یک سمبل از یک رشته در $L(M)$ است. چراکه هر حرکت $q \xrightarrow{\alpha} q'$ یک حرکت با ε به شکل $(q,0) \xrightarrow{\varepsilon} (q',1)$ دارد. به بیانی اگر برای هر $\alpha \in \Sigma$

$((q,\alpha),q') \in \delta$ آن‌گاه $\delta'((q,0),\varepsilon) = (q',1)$

⑤ رفتار دو کپی غیر از موارد بالا دقیقاً مانند M است. به بیانی اگر $((q,\alpha), q') \in \delta$ آن‌گاه برای هر α و $i \in \{0,1\}$ داریم

$$\delta'((q,i),\alpha) = (q',i)$$

⑥ N دقیقاً $D(L(M))$ را می‌پذیرد و چون N یک NFA است پس $D(L(M)) \in Reg$.

⑦ از آن جا که L زبان منظم دل‌خواه بود، حکم به طور کلی برقرار است.

Q.E.D

نشان دهید اگر M یک NFA باشد، آن‌گاه یک NFA با نام N موجود است که خاصیت‌های زیر را دارد:

- تعداد حالت‌های N با M برابر است.
- N هیچ حرکت با رشته‌ی پوچی [1] ندارد.
- $L(N) = L(M)$

: Proof idea

* شبیه‌سازی رفتار M توسط N.

① حرکات ε را حذف می‌کنیم.

② $p \xrightarrow{\varepsilon\text{-moves}} q$ ، p را حالت نهایی می‌کنیم.

③ $p \xrightarrow{\varepsilon\text{-moves}} q \xrightarrow{a} r$ آن‌گاه $\underline{(p, a) \in \delta'(p, a)}$

به جای $\underline{p \xrightarrow{a} r}$ به قوانین انتقال اضافه می‌کنیم.

فرمان: $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$. حال N را تعریف می‌کنیم

$N=(Q,\Sigma,\delta',q_0,F')$

داریم:

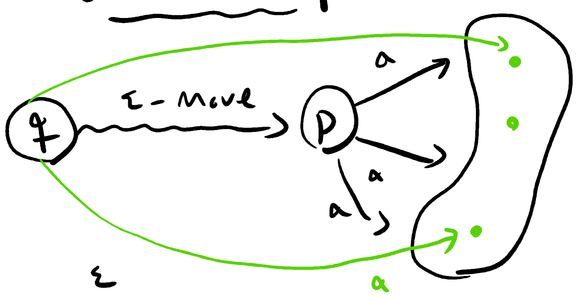
(۲) $F'=\{q\in Q \mid Eclose(q)\cap F\neq\emptyset\}$

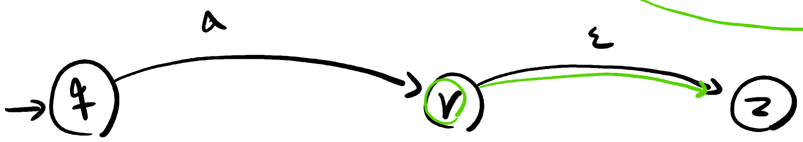
(۳),(۱)

$$\underline{\delta'(q,a)} = \begin{cases} \emptyset & a=\varepsilon \\ \bigcup\{\underline{\delta(p,a)} \mid p\in Eclose(q)\} & \end{cases}$$

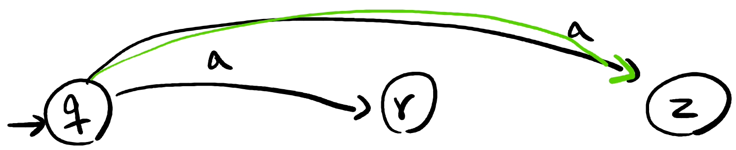
$q\in Q$

$a\in\Sigma$





ε-NFA



NFA

(می‌شود اثبات دقیق‌تر هم بشود)

۱. اگر M زبانی نامتناهی را بپذیرد، آن‌گاه M دارای یک دور است.

~~۲. اگر M دارای یک دور باشد، آن‌گاه M زبانی نامتناهی را می‌پذیرد~~

تحویلی

رابطه‌ی تمایز ناپذیری https://people.csail.mit.edu/rrw/6.045-2019/notemindfa.pdf

indistinguishable relation

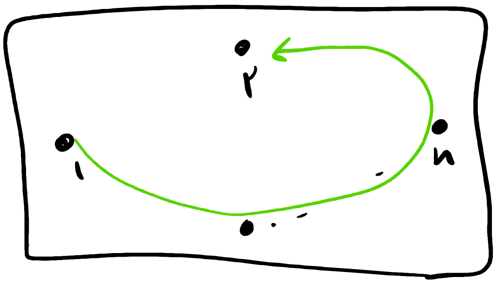
[برای آقای خرام]

① درست است.

PF. با برهان خلف فرض کنیم $L(M)$ نامتناهی است ولی M فاقد دور است. از آن جا که $L(M)$ نامتناهی است طبق لم ۱ در آن رشته‌ای با نام w وجود دارد که $|w|>|Q|$ که Q حالات M است. حال مسیر ها سبه‌ی w روی M را در نظر بگیرید. طبق اصل لانه کبوتری وجود دارد $q \in Q$ که دوبار در این مسیر آمده است. پس دور در M وجود دارد که این تناقض است.

Note: رشته‌ای با طول ∞ نداریم. (در این درس مقدماتی)

ایده



$|Q| = n$

زبان نامتناهی یعنی

$\underline{|L| = \infty}$

$L = \{w, n, \dots\}$

لم ۱: برای هر عدد طبیعی n اگر L نامتناهی باشد وجود دارد w که

$$|w| > n$$

با برهان خلف فرض کنیم همه ی رشته های درون L از n اندازه‌ای کمتر دارند. مجموعه ی همه ی رشته های با طول کمتر از n را در نظر بگیریم:

$$L' = \{w \mid |w| < n\}$$

به روشنی $L \subseteq L'$ ولی

تمام رشته های به طول

$\|w\| = 0$	$\|w\| = 1$	$\|w\| = 2$
ε	$0, 1$	$00, 01 \ldots$
1	2	2^2
2^0	2^1	2^2

$$|L'| = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i < 2^n$$

پس L' متناهی است. چون $L \subseteq L'$ پس L متناهی است که این تناقض است. ⨳