تعریف استقرایی و استقرای ساختاری

نگارنده: **امید یعقوبی**

می‌توان یک مجموعه را به وسیله‌ی تعداد متناهی از عملگرها که روی یک مجموعه‌ی اولیه اعمال می‌شوند تعریف کرد. تعریف استقرایی مجموعه سه جز بنیادی دارد:

۱. جهان سخن که به آن *domain set* هم می‌گویند و آن را با S نشان می‌دهیم.

۲. مجموعه اولیه $A \subseteq S$ که به آن *Core set* می‌گوییم و ساخت مجموعه را با آن شروع می‌کنیم.

۳. مجموعه متناهی از عملگرها که هر یک به شکل $f : S^m \to S$ می‌باشند. به بیانی هر f یک تابع *m-arry* می‌باشد. این مجموعه‌ی متناهی را با P می‌شناسیم.

مجموعه به شکل استقرایی از S و A و P ساخته می‌شود. آن را با $I(A,P)$ می‌شناسیم. $I(A,P)$ کوچکترین زیرمجموعه از S است به شکلی که شامل A باشد و نسبت به عملگرهای P بسته باشد.

مثال ۱ *فرض کنیم $S = \mathbb{R}$ و $P = \{f_1, f_2\}$ به شکلی که $f_1 : X \mapsto X + 1$ و $f_2 : X \mapsto X - 1$ و هم‌چنین بگذاریم $A = \{2\}$ باشد. آن‌گاه $I(A,P)$ برابر کوچکترین مجموعه‌ای است که شامل 2 بوده و نسبت به P بسته است. روشن است که در این‌جا $I(A,P) = \mathbb{Z}$ می‌باشد.*

می‌خواهیم نشان دهیم که $I(A,P)$ با تعریف گفته شده همواره وجود دارد.

ادعا ۱ *ادعا می‌کنیم که*

$$I(A,P) \coloneqq \bigcap\{B \subseteq S | A \subseteq B \ and\ B\ is\ closed\ under\ P\}$$

با تعریف گفته شده تطابق دارد.

(اثبات) ابتدا نشان می‌دهیم که مجموعه تعریف شده‌ی بالا شامل A است. توجه شود که مجموعه‌ای که تعریف کردیم اشتراک همه‌ی مجموعه‌های B است به شکلی که $A \subseteq B$ برقرار است. پس برای هر $x \in A$ از آن‌جا که برای هر کدام از B های تعریف بالا که در اشتراک وجود دارند $A \subseteq B$ برقرار است پس $x \in B$ برقرار است. پس مجموعه‌ی تعریف شده شامل A است.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که مجموعه‌ی تعریف شده نسبت به عملگرهای P بسته است. فرض کنیم b_1 و b_2 عضوی دلخواه از مجموعه تعریف شده‌اند. هم‌چنین بگذاریم $f \in P$ یک عملگر دلخواه در P باشد. بر اساس تعریف اشتراک، b_1 و b_2 عضو تمام مجموعه‌های $B \subseteq S$ هستند که $A \subseteq B$ و B تحت عملگرهای درون P بسته است. از آن‌جا که b_1 و b_2 در اشتراک این B ها می‌باشند، پس برای هر B' دلخواه که $B' \subseteq S$ و $A \subseteq B'$ و B' نسبت به عملگرهای P بسته است، $b_1, b_2 \in B'$ برقرار است. از آن‌جا که B' نسبت به عملگرهای P بسته است پس $f(b_1, b_2) \in B'$ برقرار است و از آن‌جا که B' دلخواه بود پس $f(b_1,b_2) \in \bigcap\{B \subseteq S | A \subseteq B \text{ and } B \text{ is closed under } P\}$ برقرار است. در نهایت نشان دادیم که این مجموعه نسبت به اعمال P بسته است.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که مجموعه تعریف شده کوچکترین مجموعه با این دو شرط است. برای راحتی به جای عبارت $\{B \subseteq S | A \subseteq B \text{ and } B \text{ is closed under } P\}$ از کوتاه‌نوشت $\phi(A,P,S)$ استفاده می‌کنیم. بگذارید ابتدا منظورمان را از کوچکترین مشخص کنیم. می‌گوییم مجموعه‌ای که تعریف کردیم کوچکترین مجموعه با دو خاصیتِ شامل A بودن و بسته بودن نسبت به اعمال P است، اگر هر مجموعه‌ی دیگر که این دو خاصیت را دارد ابرمجموعه‌ی آن‌چه تعریف کردیم باشد. پس کافیست نشان دهیم اگر مجموعه‌ای این دو خاصیت را دارد $\bigcap \phi(A,P,S)$ زیرمجموعه‌ای از آن می‌باشد. بگذاریم D مجموعه‌ای دلخواه باشد که دو خاصیت شامل A بودن و بسته بودن نسبت به P را داشته باشد. پس D یکی از

مجموعه‌هایی است که در اشتراک $\bigcap \phi(A,P,S)$ وجود دارد. به بیانی D یکی از B هایی است که از آن‌ها اشتراک گرفتیم. حال برای عضو دلخواه $x \in \bigcap \phi(A,P,S)$ براساس تعریف اشتراک x در تمام مجموعه‌هایی که از آن اشتراک گرفته شده وجود دارد. از آن‌جا که D یکی از آن‌هاست پس $x \in D$ برقرار است. از آن‌جا که x دلخواه بود $\bigcap \phi(A,P,S) \subseteq D$ برقرار است. از آن جا که D یک مجموعه‌ی دلخواه با این دو خاصیت بود، پس $\bigcap \phi(A,P,S)$ زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است که این دو خاصیت را دارد. پس $\bigcap \phi(A,P,S)$ کوچکترین مجموعه با این دو خاصیت است.
■

ادعا ۲ *$\bigcap \phi(A,P,S)$ تنها مجموعه‌ای است که این سه خاصیت را دارد.*

(اثبات) فرض کنیم که E_1 و E_2 هر دو مجموعه‌ای باشند که شامل A بوده و تحت اعمال P بسته باشند و هر دو نیز کوچکترین مجموعه‌ای باشند که این دو خاصیت را دارند. از آن‌جا که E_1 مینیمال است پس هر مجموعه با دو خاصیت گفته شده شامل E_1 می‌باشد. پس $E_1 \subseteq E_2$ برقرار است. به همین ترتیب هم $E_2 \subseteq E_1$ برقرار است. پس بنا به اصل گسترش این دو مجموعه برابرند.
■

حال می‌خواهیم به وسیله‌ی این ابزار قدرتمند زبان جبر گزاره‌ها را تعریف کنیم. بگذاریم $\{\neg, \to, \vee, \wedge, (,)\}$ مجموعه‌ی سمبول‌های منطقی باشد و $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ مجموعه‌ی اتم‌ها باشد. آن‌گاه هر رشته که ترکیبی متناهی از این سمبول‌ها است را عضوی از EXP می‌دانیم. برای مثال $)(\wedge p_1$ عضوی از EXP یا مجموعه عبارات است.

حال مجموعه فرمول‌های خوش‌ساخت را به وسیله‌ی $I(A,P)$ تعریف می کنیم. بگذاریم $S := EXP$ باشد و A یا Core set مجموعه‌ی اتم‌ها باشد. هم‌چنین بگذاریم $P := \{f_{\text{and}}, f_{\text{or}}, f_{\text{imp}}, f_{\text{neg}}\}$ باشد به شکلی که $f_{\text{and}}(\alpha,\beta) = (\alpha \wedge \beta)$ و $f_{\text{or}}(\alpha,\beta) = (\alpha \vee \beta)$ و $f_{\text{imp}}(\alpha,\beta) = (\alpha \to \beta)$ و $f_{\text{neg}}(\alpha) = (\neg\alpha)$ باشد. توجه شود که هر تابع یک یا دو رشته را به عنوان ورودی می‌گیرید و رشته‌ی دیگری را به عنوان خروجی بیرون می‌دهد. به بیانی هیچ نگاه معناشناسانه‌ای به هیچ‌کدام از آن‌ها وجود ندارد.

ادعا ۳ *تعریف PR در کتاب دکتر اردشیر با $I(A,P)$ برابر است.*

(اثبات) برای شرط الف مشاهده شود که $I(A,P)$ این خاصیت را دارد. چرا که مجموعه اتم‌ها همان مجموعه‌ی مرکزی A است و $I(A,P)$ شامل آن است. برای شرط ب مشاهده شود که $I(A,P)$ این شرط را هم برآورده می‌کند چون برای $b_1, b_2 \in I(A,P)$ و هر ادات دودویی این شرط مانند $\circ$ که $\circ \in \{\wedge, \to, \vee\}$ تابع متناظر آن در P وجود دارد، بگذاریم تابع متناظر آن $f_\circ$ باشد. حال چون $I(A,P)$ تحت اعمال P بسته است پس $f_\circ(b_1,b_2) \in I(A,P)$ برقرار است. شرط ج نیز به مشابه شرط ب با وجود تابع f_{neg} در P برآورده می‌شود. هم‌چنین بر اساس ادعای شماره‌ی ۱ و ۲ در همین نوشتار $I(A,P)$ کوچکترین و تنها مجموعه دارای این خاصیت‌هاست. به این ترتیب $I(A,P)$ با تعریف PR کتاب برابر است.
■

اگر بخواهیم نشان دهیم برای $\alpha \in EXP$ رشته‌ی α خوش‌ساخت نیست، کافیست نشان دهیم $\alpha \notin I(A,P)$ برقرار است. چراکه $I(A,P)$ همان مجموعه‌ی فرمول‌های خوش‌ساخت می‌باشد. یکی از روش‌های نشان دادن خوش‌ساخت نبودن یک فرمول پیدا کردن خاصیت تمایز دهنده است به شکلی که بدانیم هر فرمول خوش‌ساخت آن را دارد ولی برای α که می‌خواهیم نشان دهیم خوش‌ساخت نیست این خاصیت برقرار نمی‌باشد. برای آن که نشان دهیم خاصیتی برای همه‌ی اعضای $I(A,P)$ برقرار است از استقرای تعمیم یافته یا استقرای ساختاری استفاده می‌کنیم.

استقرای ساختاری به این نحو است که ابتدا نشان می‌دهیم خاصیت T برای مجموعه اولیه A برقرار است. این بخش از استقرا را پایه استقرا می‌نامیم. سپس نشان می‌دهیم اگر خاصیت برای ورودی‌های یک عملگر درون P برقرار باشد آن‌گاه خاصیت گفته شده برای خروجی این تابع‌ها نیز برقرار است. این بخش را نیز با قدم استقرا می‌شناسیم. برای روشن شدن قدم استقرا، بدون از دست دادن عمومیت فرض کنیم که تابع مورد نظرمان f_1 یک تابع دودویی است. به این ترتیب برای قدم استقرا کافیست فرض کنیم برای $b_1, b_2 \in I(A,P)$ خاصیت گفته شده برقرار است و اثبات کنیم که برای $f_1(b_1,b_2)$ نیز چنین خاصیتی برقرار است.

ادعا ۴ *اگر برای خاصیت دلخواه T این خاصیت برای مجموعه اولیه برقرار باشد یا به بیانی داشته باشیم $A \subseteq T$ و برای هر $f \in P$ که f یک تابع با m ورودی با نام‌های $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ است، با فرض برقرار بودن خاصیت برای ورودی‌ها یا به بیانی با داشتن $\alpha_i \in T$ برای $i \in \{1, \ldots, m\}$ داشته باشیم $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in T$ آن‌گاه $I(A, P) \subseteq T$ برقرار بوده و به اصطلاح می‌گوییم خاصیت T برای همه‌ی اعضای $I(A, P)$ برقرار است.*

(اثبات) با توجه به ادعا، T یکی از مجموعه‌هایی است که از آن اشتراک می‌گیریم. مشاهده شود که اگر برای اعضای A خاصیت T برقرار باشد آن‌گاه $A \subseteq T$ پس T شامل A است. هم‌چنین مشاهده شود که اگر برای هر تابع m-arry درون P با فرض $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T$ داشته باشیم $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in T$ آن‌گاه T نسبت به اعمال P بسته است. پس T یکی از مجموعه‌هایی است که در اشتراک $\bigcap \phi(A, P, S)$ وجود دارد. حال برای عنصر دلخواه $x \in \bigcap \phi(A, P, S)$ بر اساس تعریف اشتراک، x در تمام مجموعه‌هایی که از آن اشتراک گرفته شده وجود دارد. از آن جا که T یکی از آن‌هاست پس $x \in T$ برقرار است. از آن‌جا که x دلخواه بود پس $I(A, P) \subseteq T$ برقرار است. پس هر عضو از $I(A, P)$ خاصیت T را دارد.
■

آن‌چه به عنوان ادعا و اثبات شماره‌ی ۴ گفته شد در یک جمله قابل بیان است: " *از آن‌جا که $I(A, P)$ کوچکترین مجموعه‌ای است که شامل A بوده و تحت اعمال P بسته است، پس برای T که این دو شرط را برآورده می‌کند خواهیم داشت $I(A, P) \subseteq T$ که یعنی اعضای $I(A, P)$ این خاصیت را دارند.* "

توجه شود که استفاده از $I(A, P)$ در جاهای متنوعی مطرح می‌شود و تنها استفاده‌ی آن در منطق نیست. برای نمونه می‌توان به مبحث *زبان‌های فرمال و گرامرها* اشاره کرد که این روش تعریف در آن کاربرد فراوان دارد. توجه به اشتراک این دو مبحث نیز کمک کننده است. مشاهده شود که در هر دو مبحث، یعنی ۱ــ زبان مورد مطالعه در منطق و ۲ــ بررسی زبان‌ها و گرامرها، استدلال‌های صوری روی رشته‌های تولیدی زبان انجام می‌شود. در نتیجه استفاده از ابزاری عادی مانند آن‌چه در این نوشتار به آن پرداخته شده البته با توضیح درست بودن آن امری غیرقابل انتظار به شمار نمی‌آید. هم‌چنین زمانی که برای نمونه استنتاج هیلبرتی موضوع مورد مطالعه است مشاهده شود که مجموعه فرمول‌های قابل اثبات در آن قابل تعریف به شکل $I(A, P)$ است. کافیست A را اصل‌ها یا $Axioms$ بگیریم و P را $Modus\ Ponens$ یا MP ، حال مشاهده شود که در این‌جا $I(Axioms, \{MP\}) = Thm(Axioms)$ است.

در ادامه یک مثال ساده از استقرای ساختاری برای نشان دادن یک خاصیت تمایزدهنده را بررسی می‌کنیم.

مثال ۲ *نشان دهید برای هر فرمول همواره تعداد پرانتزهای چپ و راست برابرند. سپس به کمک این خاصیت تمایزدهنده نشان دهید عبارت $((p_1) \wedge \wedge$ یک فرمول خوش‌ساخت نمی‌باشد.*

برای پایه‌ی استقرا کافیست نشان دهیم این خاصیت برای هر عضو A یا مجموعه اولیه برقرار است. در این‌جا مجموعه‌ی اولیه همان اتم‌ها می‌باشند. برای هر اتم دلخواه p_i که $i \in \mathbb{N}$ روشن است که $\#_((p_i) = \#_)(p_i) = 0$ که در این‌جا منظور از $\#_((\alpha)$ تعداد پرانتزهای باز α و منظور از $\#_)(\alpha)$ تعداد پرانتزهای بسته α می‌باشد.

برای قدم استقرا، به ازای هر $f \in P$ که f یک تابع m-arry است فرض می‌کنیم که خاصیت برای $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ برقرار است سپس نشان می‌دهیم که خاصیت برای $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ نیز برقرار است. در این‌جا $P = \{f_{and}, f_{or}, f_{imp}, f_{neg}\}$ می‌باشد. مشاهده شود که P شامل سه ادات دودویی و یک ادات تک‌تکی f_{neg} می‌باشد. قدم استقرا برای هر تابع دودویی در این‌جا مشابه است. پس کافیست آن را برای یکی از $\{f_{and}, f_{or}, f_{imp}\}$ نشان دهیم آن‌گاه بدون از دست دادن عمومیت برای بقیه‌ی اداتِ دودویی نیز برقرار است. حال فرض کنیم که خاصیت برای α و β برقرار است. پس $\#_((\alpha) = \#_)(\alpha) = k_1$ و $\#_((\beta) = \#_)(\beta) = k_2$ برقرار است. بدون از دست دادن عمومیت فرض کنیم ادات دودویی f_{and} باشد. حال مشاهده شود که $f_{and}(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)$ پس $\#_(\Big((\alpha \wedge \beta)\Big) = \#_((\alpha) + \#_((\beta) + 1$ در نتیجه خواهیم داشت $\#_(\Big((\alpha \wedge \beta)\Big) = k_1 + k_2 + 1$ هم‌چنین برای پرانتز بسته هم $\#_)\Big((\alpha \wedge \beta)\Big) = \#_)(\alpha) + \#_)(\beta) + 1$ برقرار است پس داریم $\#_)\Big((\alpha \wedge \beta)\Big) = k_1 + k_2 + 1$ در نهایت حکم اثبات می‌شود چراکه $\#_(\Big((\alpha \wedge \beta)\Big) = \#_)\Big((\alpha \wedge \beta)\Big) = k_1 + k_2 + 1$ می‌باشد.

همچنین برای تنها ادات تک‌تکی، یعنی f_{neg} فرض می‌کنیم خاصیت برای α برقرار است. پس $\#_{(}(\alpha) = \#_{)}(\alpha) = k$ حال مشاهده شود که $f_{neg}(\alpha) = (\neg\alpha)$ پس $\#_{(}\Big((\neg\alpha)\Big) = k+1$ و $\#_{)}\Big((\neg\alpha)\Big) = k+1$ به این ترتیب حکم اثبات می‌شود.

■

می‌خواهیم نشان دهیم $((p_1) \wedge \wedge$ یک فرمول خوش‌ساخت نیست. فرض خلف که $((p_1) \wedge \wedge$ خوش‌ساخت باشد. آن‌گاه $((p_1) \wedge \wedge \in I(A,P)$ برقرار است. پس براساس حکم بالا $\#_{(}\Big(((p_1) \wedge \wedge\Big) = \#_{)}\Big(((p_1) \wedge \wedge\Big)$ ولی $\#_{(}\Big(((p_1) \wedge \wedge\Big) = 2$ و $\#_{)}\Big(((p_1) \wedge \wedge\Big) = 1$ که این تناقض است. پس $((p_1) \wedge \wedge$ خوش‌ساخت نیست.

■