قضیه فشردگی

نگارنده: **امید یعقوبی**

قضیه ۱ (فشردگی) *اگر Γ مجموعه‌ای شمارا از فرمول‌ها باشد. Γ مدل دارد اگر و تنها اگر برای هر $\Gamma' \subseteq \Gamma$ که Γ' متناهی است، Γ' مدل داشته باشد.*

برای اثبات قضیه‌ی فشردگی به لِم زیر نیاز داریم.

لم ۲ (König) *اگر T یک درخت ریشه‌دار باشد که هر گره‌ی آن دارای متناهی فرزند است (finitely-branching)، آن‌گاه T نامتناهی است اگر و تنها اگر که شاخه‌ای نامتناهی داشته باشد.*

اثبات لم. یک جهت آن روشن است. اگر درخت دارای شاخه‌ای نامتناهی باشد به روشنی اندازه‌ی آن نامتناهی است. برای جهت نابدیهی، فرض کنیم که v_0 ریشه‌ی این درخت است. از آن‌جا که هر گره متناهی فرزند دارد، حداقل یکی از این فرزندها دارای نامتناهی گره در زیر خود است. اگر این طور نبود، یعنی هر گره در زیر خود متناهی گره دارد پس جمع تعداد گره‌های درخت متناهی می‌شود که تناقض با فرض نامتناهی بودن T است. یکی از فرزندان که زیر خود نامتناهی گره دارد را انتخاب نام آن را v_1 می‌گذاریم. فرض کنیم شاخه‌ی $v_0, v_1, \ldots, v_n$ که زیر هر v_i نامتناهی گره است ساخته شده است. بر اساس فرض، تعداد فزندان v_n نامتناهی است، با همان استدلال، یک فرزند که زیر خود بی‌نهایت گره دارد را انتخاب و آن را با v_{n+1} نام‌گذاری می‌کنیم. به همین ترتیب به شکل استقرایی شاخه‌ی با اندازه‌ی بی‌نهایت ساخته می‌شود.

■

تعریف ۱ *تابع $\mathcal{A} : D \to \{0,1\}$ به شکلی که $D \subseteq \{p_1, p_2, \ldots\}$ باشد را یک partial assignment می‌نامیم و از این پس D را با دامنه‌ی $\mathcal{A}$ و با نماد $dom(\mathcal{A})$ می‌شناسیم. هم‌چنین می‌گوییم $\mathcal{A}'$ گسترشی از $\mathcal{A}$ است اگر $dom(\mathcal{A}) \subseteq dom(\mathcal{A}')$ و برای هر $p \in dom(\mathcal{A})$ داشته باشیم $\mathcal{A}[\![p]\!] = \mathcal{A}'[\![p]\!]$.*

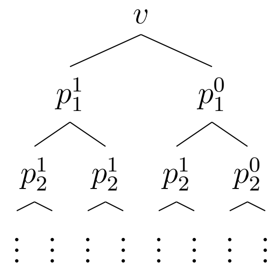
حال به اثبات قضیه‌ی فشردگی می‌پردازیم. یک سمت آن آشکار است. اگر Γ مدل داشته باشد به روشنی هر زیرمجموعه از آن نیز مدل دارد. چراکه اگر Γ مدل داشته باشد پس وجود دارد ارزش‌دهی v به شکلی که برای هر $\phi \in \Gamma$ خواهیم داشت $v^*(\phi) = \top$ که v^* گسترش تابع ارزش‌دهی v است. حال اگر $\Gamma' \subseteq \Gamma$ پس برای هر $\psi \in \Gamma'$ داریم $\psi \in \Gamma$ و در نتیجه $v^*(\psi) = \top$ برقرار است.

می‌گوییم یک partial assignment خوب است اگر برای هر $\phi \in \Gamma$ که $Atoms(\phi) \subseteq dom(\mathcal{A})$ داشته باشیم $\mathcal{A}^*[\![\phi]\!] = \top$ که در این‌جا $\mathcal{A}^*$ از روی $\mathcal{A}$ ساخته می‌شود به شکلی که جوابی یکتا برای فرمول ϕ داشته باشد که اتم‌های تشکیل دهنده‌ی آن زیرمجموعه‌ی $dom(\mathcal{A})$ است. می‌توان آن را شبیه به گسترشی محدود شده به $dom(\mathcal{A})$ در نظر گرفت. هم‌چنین $Atoms(\phi)$ مجموعه اتم‌های تشکیل دهنده‌ی فرمول ϕ می‌باشد.

برای جهت دیگر اثبات، اگر Γ متناهی باشد حکم بدیهی است، به همین علت فرض می‌کنیم Γ نامتناهی است. حال می‌خواهیم نشان دهیم اگر برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی از Γ یک v داشته باشیم که آن را *satisfy* کند، یک v' واحد وجود دارد که تمام گزاره‌های درون Γ را satisfy می‌کند. به این منظور نشان می‌دهیم که دنباله‌ای از partial assignment ها به شکل $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ وجود دارد به شکلی که $dom(\mathcal{A}_n) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ و برای هر n، $\mathcal{A}_{n+1}$ گسترشی از $\mathcal{A}_n$ است و هر کدام از آن‌ها هم یک تابع خوب هستند. در واقع هر $\mathcal{A}_i$ یک مسیر از گره‌ی ریشه تا گره‌ای در طبقه‌ی i ام در درخت *valuation* است که به زودی آن را معرفی می‌کنیم و دنباله‌ی $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ همان شاخه‌ی نامتناهی نتیجه شده از لِم König است.

می‌خواهیم نشان دهیم که درخت چگونه ساخته می‌شود. ابتدا درخت بزرگتری با نام T' می‌سازیم که ریشه‌ی آن با v برچسب‌گذاری شده. هر نود غیر از ریشه با برچسب q_i^1 یا q_i^0 دارای دو فرزند با برچسب‌های q_{i+1}^1 و q_{i+1}^0 می‌باشد. منظور از

q_i^0 ارزش‌دهی q_i با 0 و برای q_i^1 ارزش‌دهی آن با 1 است. هر مسیر از ریشه به هر نود به روشنی یک partial assignment است و هر partial assignment دارای یک مسیر از ریشه به یک نود است. این درخت به روشنی یک درخت نامتناهی است که شامل تمام partial assignment ها می‌شود. حال می‌خواهیم درخت را جوری هرس [1] کنیم که هر مسیر از ریشه به گره یک partial assignment خوب باشد، پس از آن نشان می‌دهیم که درخت هرس شده‌ی T یک درخت نامتناهی است و در نتیجه یک شاخه‌ی نامتناهی دارد که این شاخه‌ی نامتناهی هم‌ارز یک ارزش‌دهی یکتایِ v به Γ است که همه‌ی فرمول‌های درون آن را satisfy می‌کند.



قرارداد ۱ *از این پس منظورمان از $\mathcal{A}_{n+1} := \mathcal{A}_n \cup \{p^0_{n+1}\}$ گسترش $\mathcal{A}_n$ به شکلی است که $dom(\mathcal{A}_{n+1}) = dom(\mathcal{A}_n) \cup \{p_{n+1}\}$ و $\mathcal{A}_{n+1}[\![p_{n+1}]\!] = 0$ باشد و به همین ترتیب منظور از $\mathcal{A}_{n+1} := \mathcal{A}_n \cup \{p^1_{n+1}\}$ گسترش $\mathcal{A}_n$ به شکلی است که $dom(\mathcal{A}_{n+1}) = dom(\mathcal{A}_n) \cup \{p_{n+1}\}$ و $\mathcal{A}_{n+1}[\![p_{n+1}]\!] = 1$ برقرار باشد.*

درخت T درخت هرس‌شده‌ی T' است به شکلی که برای هر گره $p_i^{(0/1)}$ مسیر از ریشه به آن گره معادل یک partial assignment خوب باشد. به این شکل که برای گره‌ی دلخواه $p_i^{(0/1)}$ فرض می‌کنیم که مسیر از ریشه به آن معادل یک partial assignment خوب با نام $\mathcal{A}_i$ باشد. حال فرزند گره‌ی گفته شده با نام p^1_{i+1} در درخت T وجود دارد اگرکه $\mathcal{A}_i \cup \{p^1_{i+1}\}$ یک partial assignment خوب باشد و به همین ترتیب فرزند گره‌ی گفته شده با نام p^0_{i+1} وجود دارد اگرکه $\mathcal{A}_i \cup \{p^0_{i+1}\}$ یک partial assignment خوب باشد. به عبارتی هر گره گسترشی خوب از گره‌ی پدرش است. مشاهده شود که برای گره‌ی دلخواه $p_i^{(0/1)}$ این گره می‌تواند دو فرزند داشته باشد، یا یک فرزند داشته باشد و یا این‌که هیچ فرزندی نداشته باشد. غیر از این‌ها حالتی ممکن نیست.

مشاهده ۱ *هر شاخه‌ی بی‌انتها در این درخت یک ارزش‌دهی v است. توجه شود که برای هر p_i در این شاخه یا به راست رفته‌ایم یا به چپ و نه هر دو، پس برای هر p_i یا آن را با 0 ارزش‌دهی کرده‌ایم یا با 1 و نه هر دو.*

ادعا ۱ *درخت T یک درخت نامتناهی است.*

اثبات ادعا. فرض کنیم که این‌طور نباشد. می‌خواهیم نشان دهیم که زیرمجموعه‌ی متناهی از Γ وجود دارد که satisfiable نیست. از آن‌جا که T متناهی است، هر شاخه از آن نیز متناهی است. حال مجموعه‌ی Θ را از روی برگ‌های T این گونه می‌سازیم: برای هر برگ دلخواه $p_k^{(0/1)}$ ، این برگ فرزندی ندارد، می‌دانیم که مسیر از ریشه به این برگ معادل یک $\mathcal{A}_k$ خوب است. پس گسترشی برای $\mathcal{A}_k$ با اضافه کردن p_{k+1} به $dom(\mathcal{A}_k)$ وجود نداشته است که خوب باشد. بگذاریم $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k \cup \{p^1_{k+1}\}$ باشد و $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{A}_k \cup \{p^0_{k+1}\}$ باشد. حال مشاهده شود که وجود داشته یک $\psi \in \Gamma$ که $Atoms(\psi) \subseteq \{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}\}$ و هردوی $\mathcal{A}^*_{k+1}[\![\psi]\!] = 0$ و $\mathcal{B}^*_{k+1}[\![\psi]\!] = 0$ نیز برقرار است. پس هر ارزش‌دهی v که از این گره می‌گذرد نمی‌تواند ψ را satisfy کند. حال برای هر برگ بگذاریم ψ عضوی از Θ باشد. مشاهده شود که $|\Theta| \leq |leaves(T)|$ است که $leaves(T)$ برگ‌های T و در نتیجه متناهی است. روشن است که $\Theta \subseteq \Gamma$ چون هر ψ انتخاب شده یک عضو از Γ بود. حال مشاهده شود که Θ، satisfiable نیست. چراکه برای یک ارزش‌دهی دلخواه v این ارزش‌دهی دست‌کم در مسیر یکی از برگ‌های T بوده است. *(به یاد بیاورید که هر ارزش‌دهی v یک شاخه‌ی نامتناهی از T' بوده است و T درخت هرس شده‌ی T' است، در نتیجه هر ارزش‌دهی از یکی از برگ‌های T می‌گذرد.)* پس برای

[1] Pruning

هر ارزش‌دهی با نام v یک فرمول $\psi \in \Theta$ وجود دارد که $v^*(\psi) = \bot$ خواهد بود. در نتیجه زیرمجموعه‌ی متناهی Θ، satisfiable نیست که این تناقض با فرض است. در نهایت اثبات کردیم که T نامتناهی است.
■

مشاهده کنید که T در فرض لِم König می‌گنجد. چون T یک درخت دودویی [۲] و در نتیجه finitely-branching است و هم‌چنین اثبات کردیم که T یک درخت نامتناهی است. پس T دارای یک شاخه‌ی نامتناهی با نام b_v است به شکلی که مسیر از ریشه به هر گره از آن براساس تعریف یک partial assignment خوب است. هم‌چنین مشاهده کردیم که هر شاخه‌ی بی‌انتها در T یک ارزش‌دهی v است. پس b_v معادل یک ارزش‌دهی v است. حال کافیست نشان دهیم که برای هر فرمول $\phi \in \Gamma$، $v^*(\phi) = \top$ برقرار است.

ادعا ۲ *برای هر $\phi \in \Gamma$ و ارزش‌دهی معادل یک شاخه‌ی نامتناهی b_v در T با نام v داریم $v^*(\phi) = \top$.*

اثبات ادعا. فرض کنیم این‌طور نباشد. پس وجود دارد $\phi \in \Gamma$ که $v^*(\phi) = \bot$ خواهد بود. حال اتم‌های تشکیل دهنده‌ی ϕ را در نظر بگیریم. می‌دانیم که ϕ متناهی است و در نتیجه $Atoms(\phi)$ متناهی است. ترتیب قاموسی [۳] برای اتم‌های ϕ را در نظر بگیرید. بگذاریم بزرگترین اتم این فرمول با این ترتیب p_n باشد. به روشنی مجموعه $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ در برگیرنده‌ی همه‌ی اتم‌های ϕ است. حال $n-1$ امین گره از b_v را در نظر بگیرید. مسیر از ریشه به این گره معادل یک partial assignment خوب است که نام آن را $\mathcal{A}_{n-1}$ می‌گذاریم. به روشنی n امین گره از b_v فرزند $n-1$ امین گره است. دو حالت وجود دارد. یا این فرزند p_n^1 است یا p_n^0 می‌باشد، بدون از دست دادن عمومیت *(wlog)* فرض کنیم این فرزند p_n^0 باشد. از آن‌جا که این گره هرس نشده است پس $\mathcal{A}_{n-1} \cup \{p_n^0\}$ یک partial assignment خوب است. نام آن را $\mathcal{A}_n$ می‌گذاریم. مشاهده شود که $Atoms(\phi) \subseteq dom(\mathcal{A}_n)$ و از آن‌جا که $\mathcal{A}_n$ خوب است پس $\mathcal{A}_n^*[\![\phi]\!] = \top$ برقرار است. از آن‌جا که b_v از این گره می‌گذرد پس برای هر $p \in dom(\mathcal{A}_n)$ داریم $\mathcal{A}_n[\![p]\!] = v(p)$ پس $v^*(\phi) = \mathcal{A}_n^*[\![\phi]\!] = \top$ برقرار است که این تناقض است. در نتیجه v یک ارزش‌دهی است که برای هر $\phi \in \Gamma$ داریم $v^*(\phi) = \top$ و در نهایت ادعا اثبات می‌شود. هم‌چنین مشاهده شود که گسترش v با نام v^* یک مدل برای Γ است. به این ترتیب قضیه‌ی فشردگی اثبات می‌شود.
■

[2] Binary
[3] Lexicographic