Analiza dynamiki

Analiza dynamiki

- **Cel - analiza rozwoju zjawiska w czasie**
- **Podstawą są szeregi dynamiczne:**

  - momentów (średnia chronologiczna)

  - okresów (średnia arytmetyczna)
- **Porównywalność danych przedstawionych w postaci szeregów dynamicznych wymaga aby:**

  - zjawiska były wyrażone w tych samych miarach

  - rodzaje porównywanych szeregów były identyczne

  - badane zjawiska dotyczyły tego samego terytorium

  - przedziały czasowe były tej samej rozpiętości
- **Metody:**

  - indeksowe

  - tendencji rozwojowej

  - analizy sezonowości

Mierniki, kryteria klasyfikacji

- **Mierniki:**

  - absolutne (przyrosty absolutne, średnia chronologiczna, średnia geometryczna)

  - względne (przyrosty względne, wskaźniki dynamiki)

- **Podział indeksów:**

  - według kryterium podstawy:

  łańcuchowe

  jednopodstawowe

  - według stopnia złożoności zjawiska:

  indywidualne

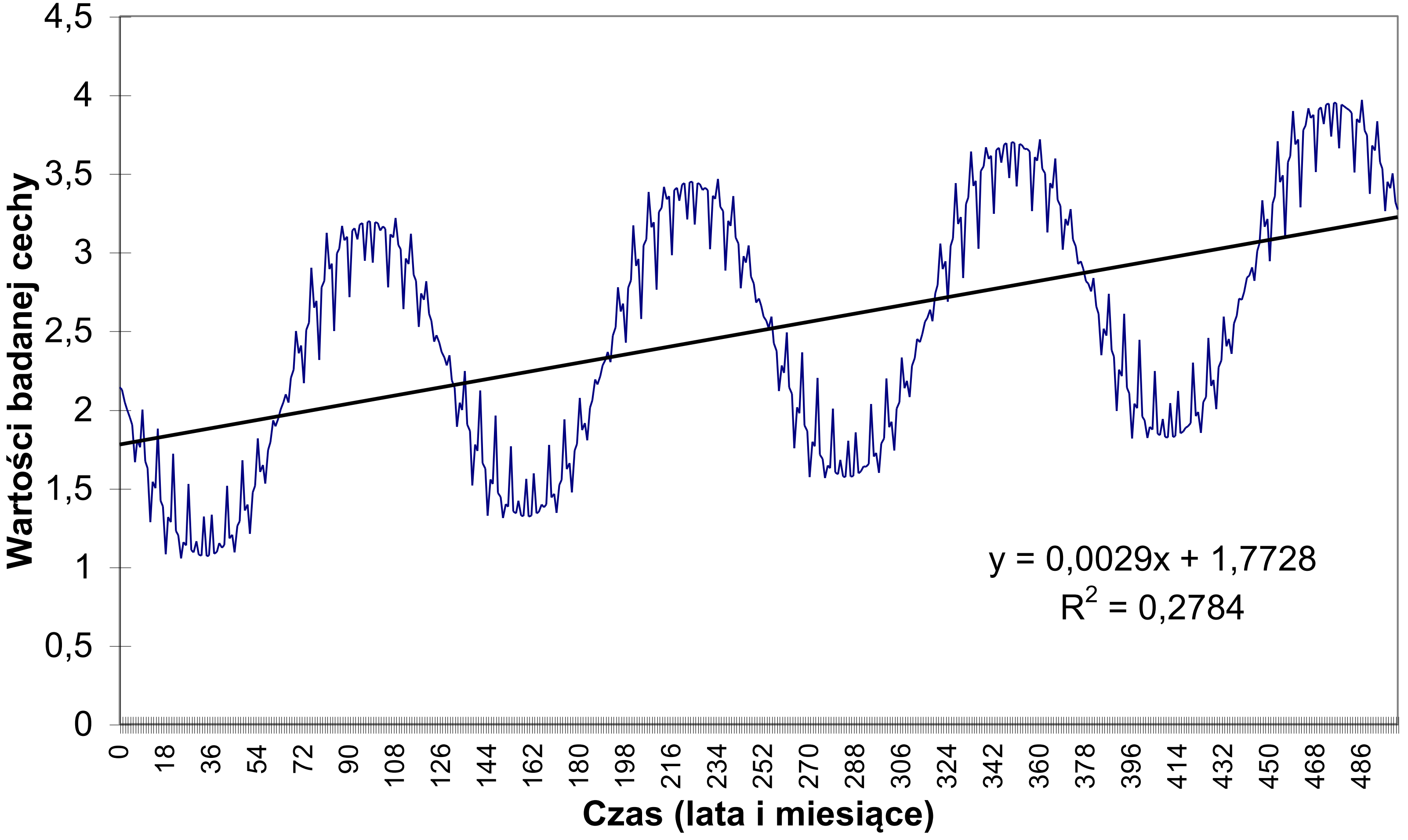
  agregatowe

  - według rodzaju liczby opisującej zjawisko:

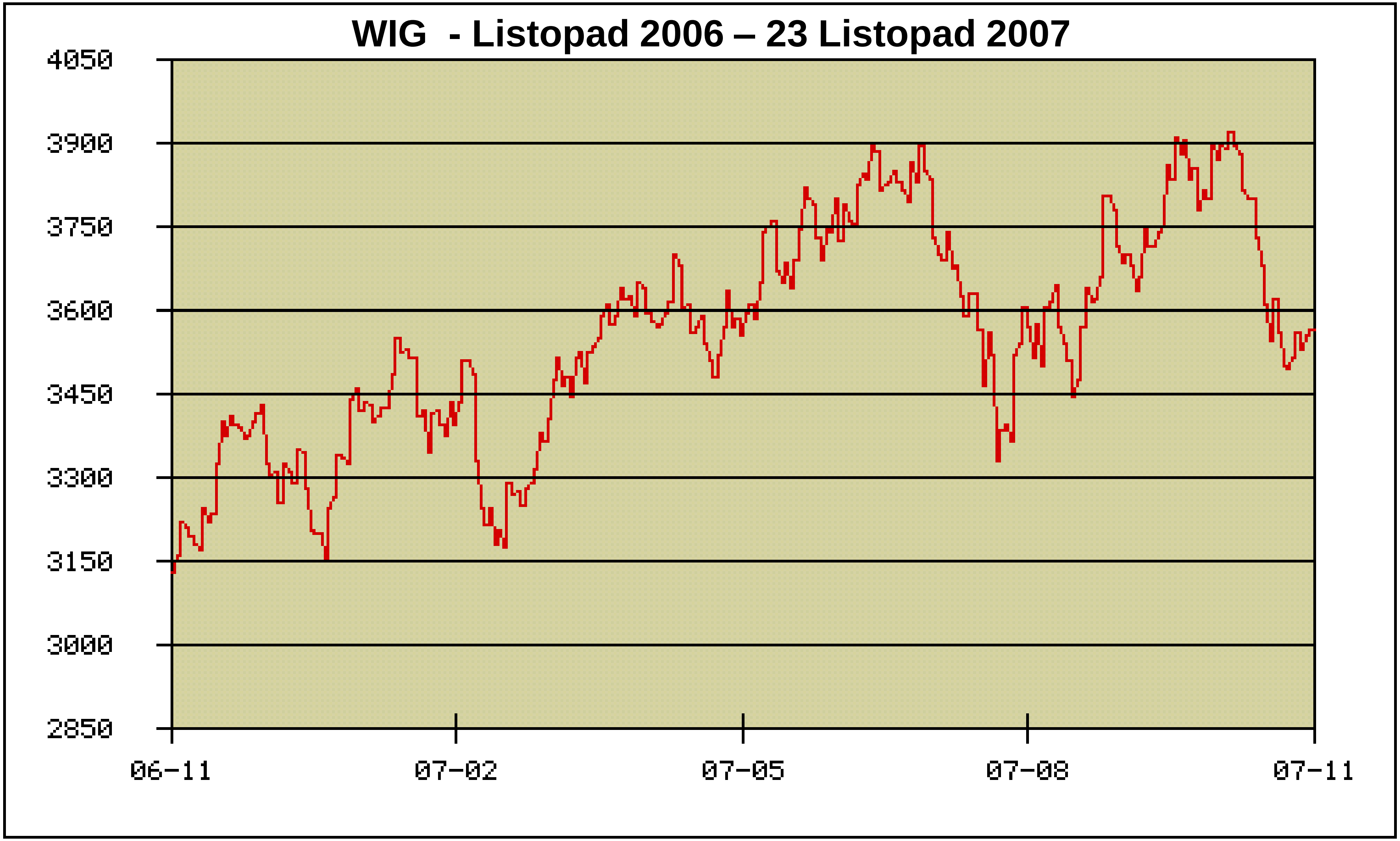
  wielkości absolutnych

  wielkości stosunkowych

Dekompozycja szeregu czasowego



Dekompozycja szeregu czasowego



Dekompozycja szeregu czasowego

- **Tendencja rozwojowa**
- **Wahania okresowe**
- **Wahania sezonowe**
- **Wahania koniunkturalne**
- **Wahania przypadkowe**

Prawidłowości rozwoju zjawisk wykryte w szeregach czasowych opisuje się metodami statystycznymi, które pozwalają wyrazić zależność poziomu zjawiska od czasu .

Nie oznacza to, iż czas jest przyczyną zmian zachodzących w poziomie zjawiska ale, że zmiany czasu są wyrazem zmiany warunków w jakich rozwija się dane zjawisko !

Model wahań w czasie

I rodzaju $Y_t = F(t) + S(t) + C(t) + \xi(t)$ **addytywny**

$Y_t = F(t) \bullet S(t) \bullet C(t) \bullet 10^{\xi(t)}$ **multiplikatywny**

gdzie: ***F(t)*** **funkcja tendencji rozwojowej**

S(t) **funkcja wahań sezonowych**

C(t) **funkcja wahań cyklicznych (okresowych)**

ξ(t) **składnik losowy**

$E[\xi(t)] = 0 \qquad D^2[\xi(t)] = const \qquad s^2[e(t)] > D^2[\xi(t)]$

II rodzaju $y_t = f(t) + s(t) + c(t) + e(t)$

$y_t = f(t) \bullet s(t) \bullet c(t) \bullet 10^{e(t)}$

Wyrównywanie szeregów czasowych

- **Wyodrębnianie tendencji rozwojowej zjawiska przez eliminację wahań przypadkowych i okresowych nazywamy <u>wyrównywaniem</u> bądź <u>wygładzaniem</u> szeregu czasowego**

- **Metody:**

- mechaniczne

Metoda średniej arytmetycznej ruchomej

- analityczne

Klasyczna Metoda Najmniejszych Kwadratów

Metoda Mechaniczna

Metoda średniej arytmetycznej ruchomej - zastępowanie danych empirycznych średnimi poziomami zjawiska z okresu badanego i kilku sąsiednich

Średnie ruchome mogą być obliczane z nieparzystej liczby okresów (**zwykłe**) bądź parzystej (**scentrowane**).

Średnie ruchome zwykłe (np. trzyokresowe k = 3) obliczamy następująco:

np.

$$\bar{y}_{n-1} = \frac{y_{n-2} + y_{n-1} + y_n}{3}$$

Średnie ruchome scentrowane:

np.

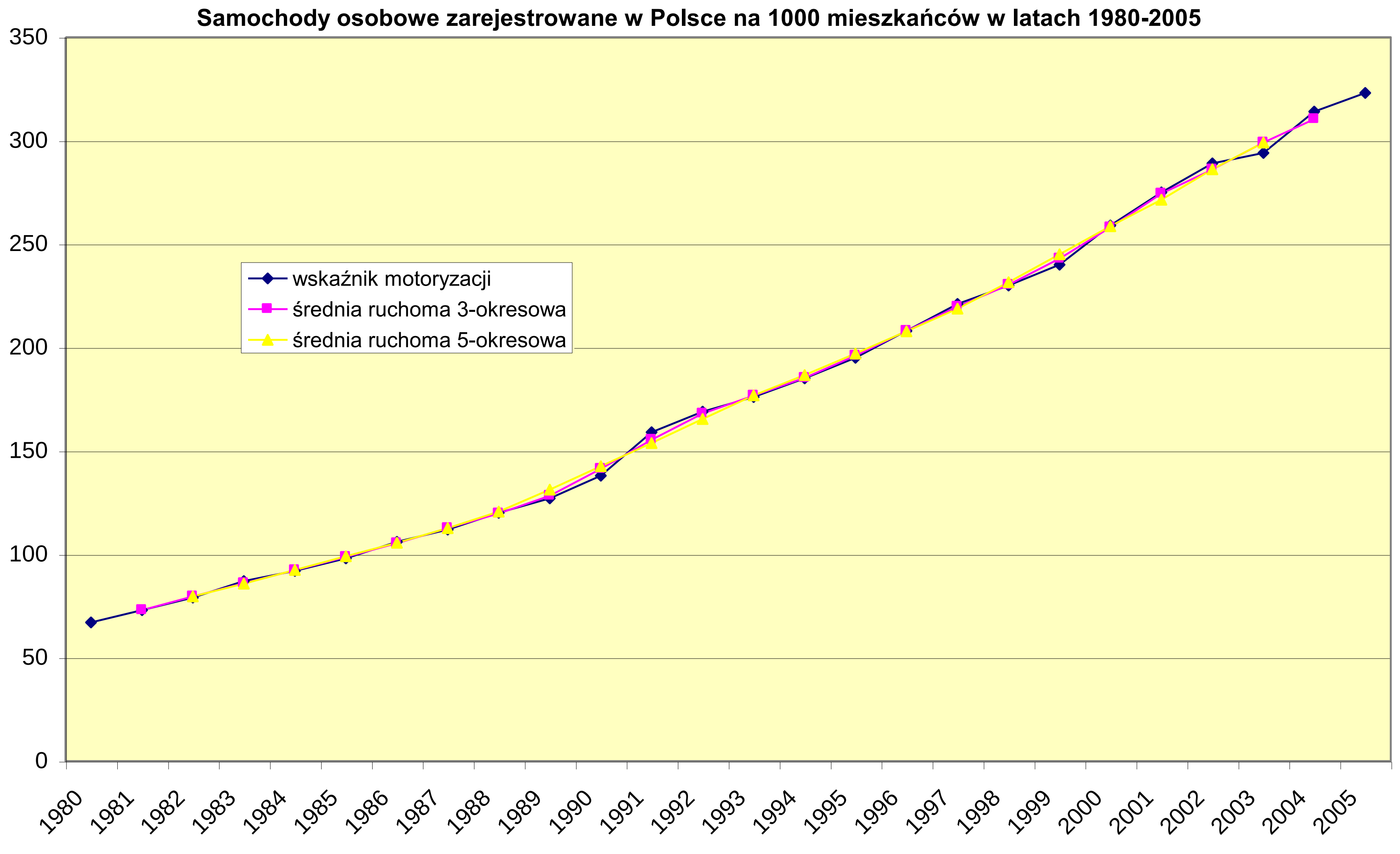
$$\bar{y}_{n-2} = \frac{\frac{1}{2} y_{n-4} + y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n}{4}$$

$$\bar{y}_3 = \frac{\frac{1}{2} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2} y_5}{4} \qquad \bar{y}_4 = \frac{\frac{1}{2} y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \frac{1}{2} y_6}{4}$$

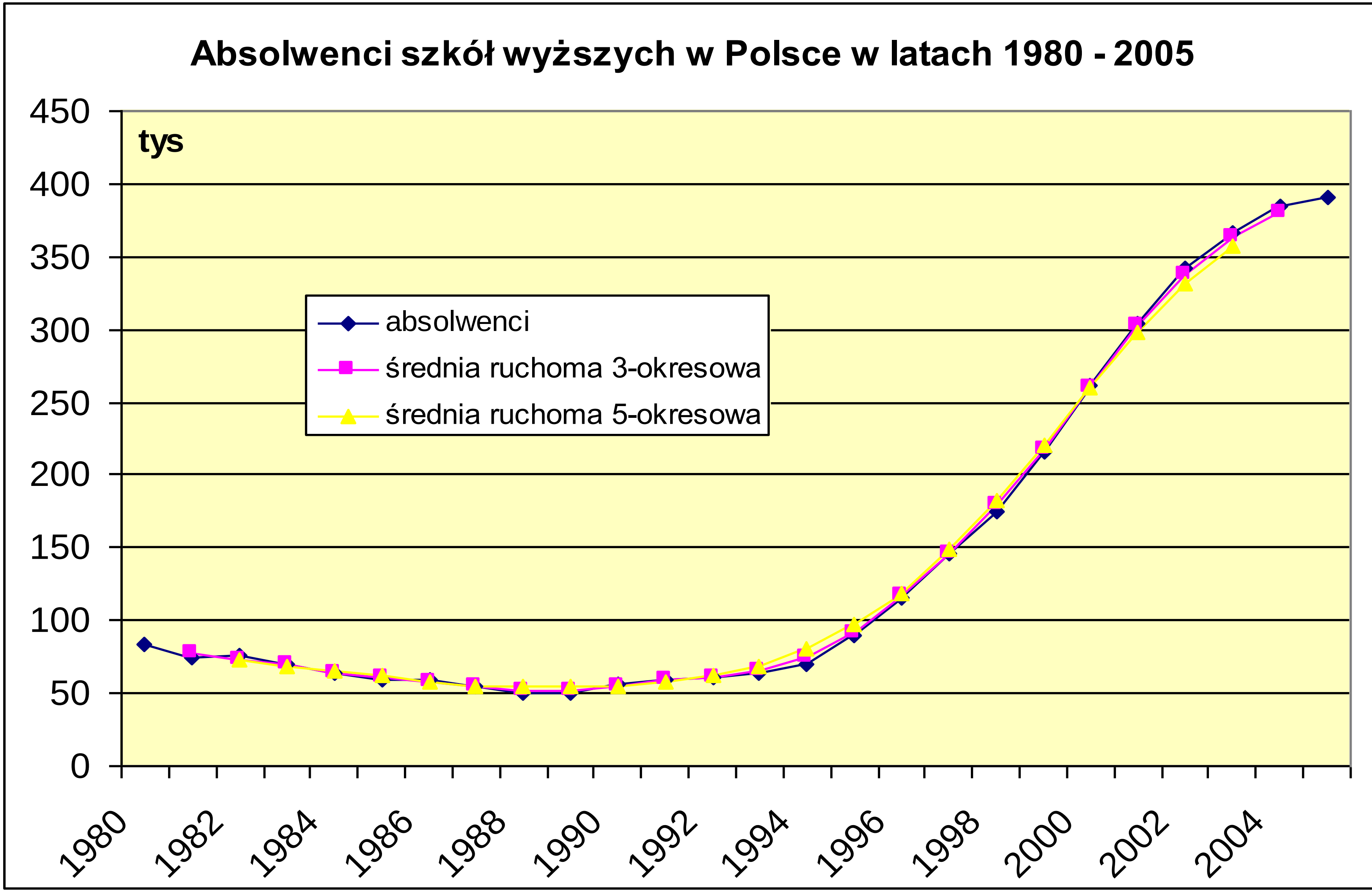
Zaletą mechanicznej metody wyodrębniania tendencji rozwojowej jest **prostota obliczeń**.

Wadą jest natomiast **skracanie** wyrównanego szeregu czasowego.

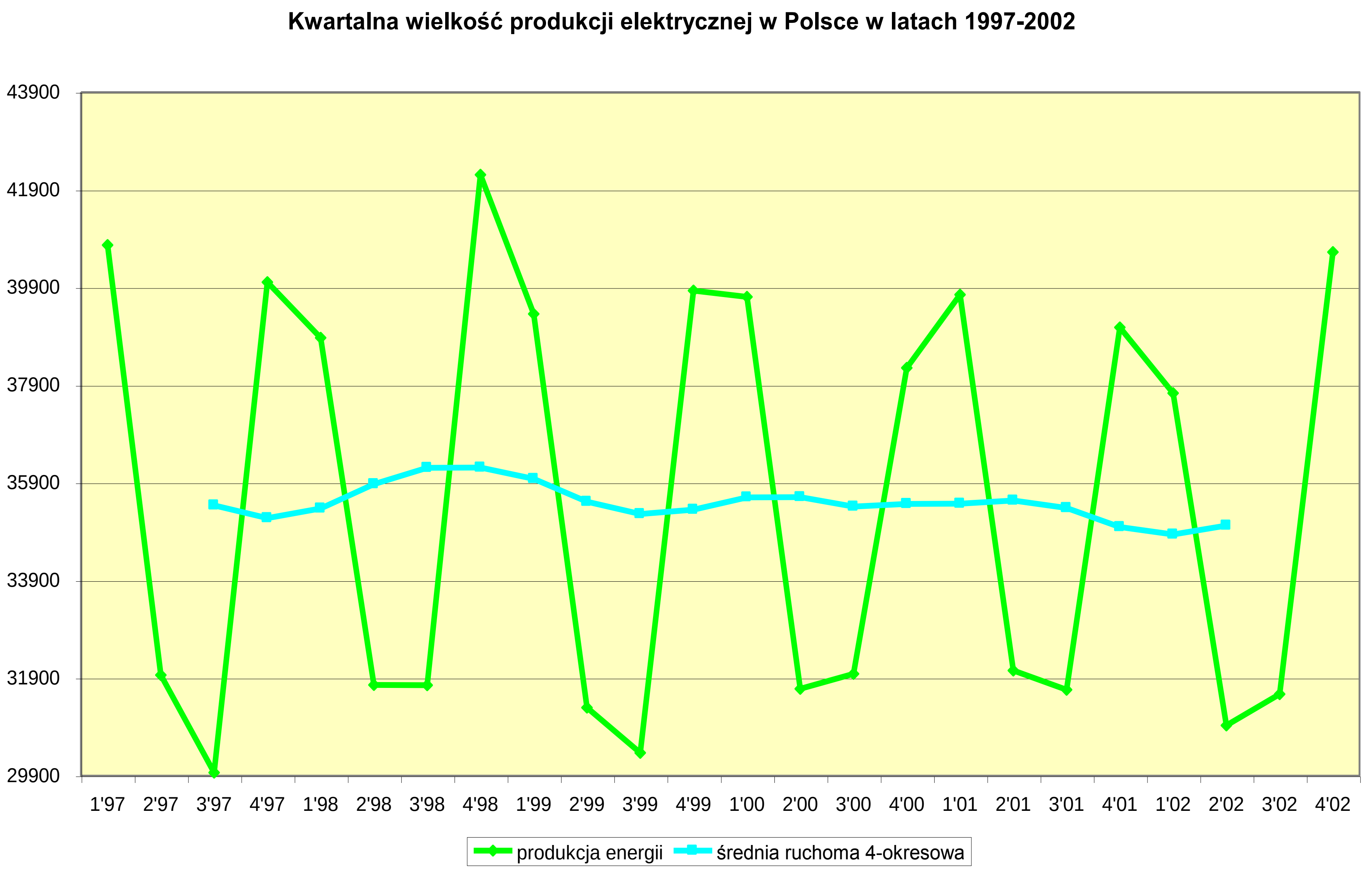
Metoda Mechaniczna



Metoda Mechaniczna



Metoda Mechaniczna



Metoda Analityczna

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 \cdot t_i$$

Liniowa funkcja trendu (równanie prostej)

Liniowy model tendencji rozwojowej

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot t_i + z_i$$

gdzie: y_i – empiryczne wartości zmiennej,

a_0, a_1 – parametry funkcji trendu,

t_i – zmienna czasowa,

z_i – składnik resztowy

Estymatory a_0 i a_1 parametrów liniowej funkcji trendu I rodzaju α_0 i α_1 szacujemy za pomocą **klasycznej metody najmniejszych kwadratów (KMNK)**. Funkcja kryterium KMNK określona jest jako suma kwadratów odchyleń wartości empirycznych od teoretycznych:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 \cdot t_i\right)^2 = \min$$

Minimalizacja funkcji kryterium sprowadza się do rozwiązania układu równań normalnych:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i t_i = a_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \end{cases}$$

Metoda Analityczna

Ostatecznie parametry liniowej funkcji trendu dane są następującymi wzorami:

$$a_1 \frac{n\sum_{i=1}^{n} t_i y_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2} = \frac{12\sum_{i=1}^{n} y_i t_i}{n^3 - n} - \frac{6\sum_{i-1}^{n} y_i}{n^2 - n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(t_i - \bar{t})}{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2}$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \bar{y} - a_1 \bar{t}$$

Jakość dopasowania funkcji trendu

Wariancja składnika resztowego (nieobciążony estymator wariancji składnika losowego $D^2(\xi)$)

$$s^2(z_j) = s^2_{y(t)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j^2}{n-k} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (y_j - \hat{y}_j)^2}{n-k}$$

Współczynnik zmienności resztowej

$$V_{s_z} = V_{s_{y(t)}} = \frac{s_z}{\bar{y}}$$

Jakość dopasowania funkcji trendu

Współczynnik zbieżności:

$$\varphi^2 = \frac{(n-2)\cdot s_z^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}}$$

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \overline{y})^2}$$

$$0 \le \varphi^2 \le 1$$

Jakość dopasowania funkcji trendu

Współczynnik determinacji

$$R^2 = 1 - \varphi^2$$

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

Jakość dopasowania funkcji trendu

Błędy standardowe ocen parametrów a_0 i a_1 :

$$s_{(a_0)} = s_z \sqrt{A} = \sqrt{\frac{s^2_{y(t)} \sum_{i=1}^{n} t_i^2}{n\left(\sum t_i^2 - n\bar{t}^2\right)}}$$

$$s_{(a_1)} = s_z \sqrt{B} = \frac{s_{y(t)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n\bar{t}^2}}$$

Współczynniki zmienności :

$$V_{(a_0)} = \frac{s_{(a_0)}}{a_0} \cdot 100\% \qquad V_{(a_1)} = \frac{s_{(a_1)}}{a_1} \cdot 100\%$$

Jakość dopasowania funkcji trendu

Ostatecznie pełen zapis funkcji i modelu trendu jest następujący:

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 t_i$$
$$(S_{a_0})\ (S_{a_1})$$

$$y_i = a_0 + a_1 t_i + z_i$$
$$(s_{a_0})(s_{a_1})(s_{z_i})$$