Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej
Katedra Statystyki

Rozkłady dyskretnych zmiennych losowych

Marcin Szymkowiak

Spis treści

1. Zadania

1.1. Rozkład dwumianowy

Zadanie 1. Koszykarz podczas treningu oddaje 10 rzutów za 3 punkty. Prawdopodobieństwo trafienia w pojedynczym rzucie wynosi 0,4. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie celnych rzutów.

(a) Znajdź rozkład zmiennej losowej X.

(b) Sporządź wykres rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

(c) Oblicz prawdopodobieństwo, że koszykarz trafi dokładnie 6 razy za 3 punkty.

(d) Oblicz prawdopodobieństwo, że koszykarz odda co najwyżej 3 celne rzuty za 3 punkty.

Zadanie 2. Strzelec oddaje 5 strzałów do tarczy. Prawdopodobieństwo trafienia w pojedynczym strzale wynosi 0,8. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie celnych strzałów.

(a) Znajdź rozkład zmiennej losowej X.

(b) Sporządź wykres rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

(c) Oblicz prawdopodobieństwo, że strzelec trafi dokładnie 4 razy w tarczę.

(d) Oblicz prawdopodobieństwo, że strzelec trafi w tarczę co najwyżej 3 razy.

(e) Oblicz prawdopodobieństwo, że strzelec trafi w tarczę co najmniej 2 razy.

Zadanie 3. Rodzina pragnie mieć 3 dzieci. Zakładając niezależność zdarzeń oraz przyjmując, że prawdopodobieństwo urodzenia się dziewczynki wynosi 0,483 wyznacz rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej zdefiniowanej jako liczba chłopców wśród 3 urodzonych w tej rodzinie dzieci. Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję tej zmiennej losowej.

Zadanie 4. Załóżmy, że pewna zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy z prawdopodobieństwem sukcesu $p = 0.6$. Sporządź wykres rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X w zależności od liczby doświadczeń n. Przyjmij następujące wartości: $n = 5, 10, 15, 20$.

Zadanie 5. W urnie znajduje się pięć kul białych i dwie czarne. Losujemy ze zwracaniem trzy razy po jednej kuli. Podać rozkład prawdopodobieństwa liczby wylosowanych kul białych i obliczyć parametry tego rozkładu.

Zadanie 6. W firmie produkującej okna pracownik obsługuje 5 maszyn wytwarzających pewien element. Prawdopodobieństwo, że w ciągu dnia maszyna nie będzie wymagać naprawy wynosi 0,9. Maszyny pracują niezależnie od siebie.

(a) Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa liczby maszyn, które w ciągu dnia ich pracy wymagać będą naprawy.

(b) Sporządź wykres rozkładu prawdopodobieństwa tej zmiennej.

(c) Obliczyć prawdopodobieństwo, że dokładnie 2 maszyny w ciągu dnia wymagać będą naprawy.

(d) Obliczyć prawdopodobieństwo, że co najwyżej 2 maszyny w ciągu dnia wymagać będą naprawy.

(e) Obliczyć prawdopodobieństwo, że mniej niż 2 maszyny w ciągu dnia wymagać będą naprawy.

Zadanie 7. W pewnej dużej firmie w dziale księgowości pracuje 5 osób. Prawdopodobieństwo nieprzyjścia do pracy na skutek choroby każdej z nich wynosi 0.1 Obliczyć prawdopodobieństwo tego że:

(a) wszystkie osoby przyjdą do pracy.

(b) trzy osoby nie przyjdą do pracy.

(c) więcej niż dwie osoby nie przyjdą do pracy.

Zadanie 8. W partii 100 żarówek 10 jest wadliwych. Kontroler jakości pobiera w sposób niezależny $n = 8$ żarówek.

(a) Znaleźć rozkład zmiennej losowej X przyjmującej wartości równe liczbie wylosowanych wadliwych żarówek.

(b) Obliczyć $P(2 < X \leqslant 5)$.

(c) Obliczyć $P(X < 4)$.

(d) Sporządź wykres rozkładu prawdopodobieństwa tej zmiennej.

Zadanie 9. Wiadomo, że dla pewnej zmiennej losowej X

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{6-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 6, \quad p = 0.2.$$

Przedstawić rozkład tej zmiennej graficznie, obliczyć $P(X \geqslant 3)$ i $P(X = 2)$. Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję oraz odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

Zadanie 10. W pewnym towarzystwie ubezpieczeniowym 5% wszystkich zgłaszanych szkód stanowią wypadki samochodowe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród zgłoszonych 15 szkód liczba wypadków samochodowych będzie większa niż 3.

1.2. Rozkład Poissona

Zadanie 11. W pewnym salonie Opla sprzedaje się w ciągu miesiąca średnio 5 samochodów tej marki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w miesiącu sprzedane będą co najwyżej 2 auta.

Zadanie 12. Liczbę dni opuszczonych przez studentów w listopadzie w wylosowanej próbie 250 studentów charakteryzuje poniższy szereg rozdzielczy:

Liczba opuszczonych dni x_i	Liczba studentów n_i
0	30
1	110
2	50
3	40
4	15
5	5
Razem	**250**

(a) Zakładając, że liczba dni opuszczonych na uczelni w ciągu miesiąca podlega rozkładowi Poissona, ustal liczebności teoretyczne.

(b) Oblicz prawdopodobieństwo, że studenci opuszczają minimum dwa dni, a maksimum 4 dni zajęć.

Zadanie 13. Pewien młody matematyk piszący swoje artykuły w programie LaTeX stwierdził, że popełnia średnio 4 literówki na jedną stronę. Wybieramy losowo jedną z wielu stron napisanych przez tego matematyka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że znajdziemy na niej co najwyżej 3 błędy.

Zadanie 14. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 3. Wyznaczyć $P(X \leqslant 6)$ oraz $P(X \geqslant 3)$.

Zadanie 15. Dla pewnej zmiennej losowej X o rozkładzie Poissona zachodzi warunek $P(X = 0) = 0.2$. Znaleźć parametry rozkładu tej zmiennej.

Zadanie 16. Zmienna losowa X ma rozkład określony według następującej funkcji:

$$P(X = k) = \frac{e^{-4} \cdot 4^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Wyznaczyć wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe tak zdefiniowanej zmiennej losowej oraz wyznaczyć prawdopodobieństwo, że zmienna losowa:

(a) przyjmie wartość równą 1;

(b) przyjmie wartość nie większą niż 3;

(c) przyjmie wartość powyżej 5.

Zadanie 17. Liczba wypadków samochodowych w ciągu dnia w pewnym mieście ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej wynoszącej $\lambda = 2$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że w ciągu dnia w ty mieście będą miały miejsce co najwyżej 4 wypadki samochodowe.

Zadanie 18. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona, przy czym $\lambda = 4$. Obliczyć:

(a) $P(X < 3)$.

(b) $P(X > 5)$.

(c) $P(X = 2)$.

Zadanie 19. W skład pewnej skomplikowanej aparatury wchodzi 150 elementów określonego rodzaju. Prawdopodobieństwo uszkodzenia w ciągu roku każdego z tych elementów jest równe 0,004 i nie zależy od stanu pozostałych elementów. Obliczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia w ciągu roku nie mniej niż dwóch elementów.

Zadanie 20. Załóżmy, że pewna zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem λ. Sporządź wykres rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X w zależności od wartości parametru λ. Przyjmij $\lambda = 2, 5, 8, 10$.

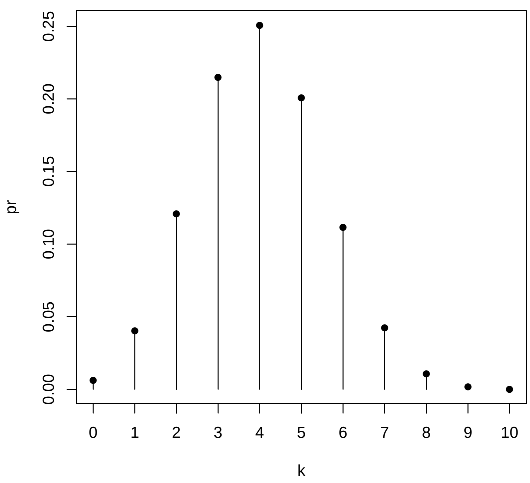
2. Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

```
> #a
> p=0.4
> n=10
> k=0:n
> pr=dbinom(k,n,p)
> rozklad=rbind(k,pr)
> print(rozklad,digits=4)
```

```
       [,1]     [,2]    [,3]  [,4]    [,5]    [,6]    [,7]
k  0.000000 1.00000 2.0000 3.000 4.0000 5.0000 6.0000
pr 0.006047 0.04031 0.1209 0.215 0.2508 0.2007 0.1115
      [,8]     [,9]     [,10]      [,11]
k  7.00000 8.00000 9.000000 1.000e+01
pr 0.04247 0.01062 0.001573 1.049e-04
```

```
> #b
> plot(k,pr,type="h",lab=c(10,5,7))
> points(k,pr,pch=16)
```




```
> #c
> dbinom(6,n,p)
```

```
[1] 0.1114767
```

```
> #d
> pbinom(3,n,p)
```

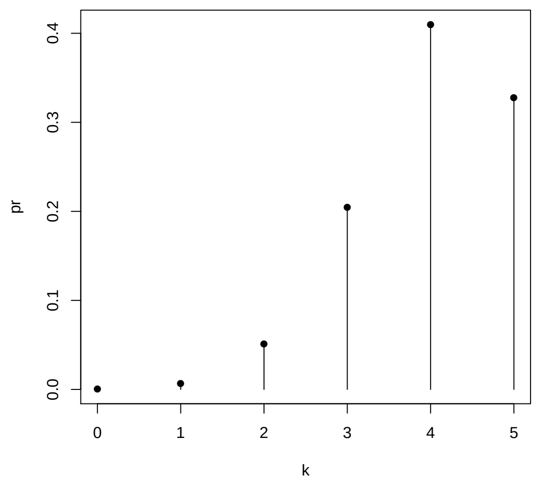
```
[1] 0.3822806
```

Zadanie 2.

```
> #a
> p=0.8
> n=5
> k=0:n
> pr=dbinom(k,n,p)
> rozklad=rbind(k,pr)
> print(rozklad,digits=4)
```

```
      [,1]    [,2]   [,3]   [,4]   [,5]   [,6]
k  0.00000 1.0000 2.0000 3.0000 4.0000 5.0000
pr 0.00032 0.0064 0.0512 0.2048 0.4096 0.3277
```

```
> #b
> plot(k,pr,type="h",lab=c(5,5,7))
> points(k,pr,pch=16)
```




```
> #c
> dbinom(4,n,p)
```

```
[1] 0.4096
```

```
> #d
> pbinom(3,n,p)
```

```
[1] 0.26272
```

```
> #e
> 1-pbinom(1,n,p)
```

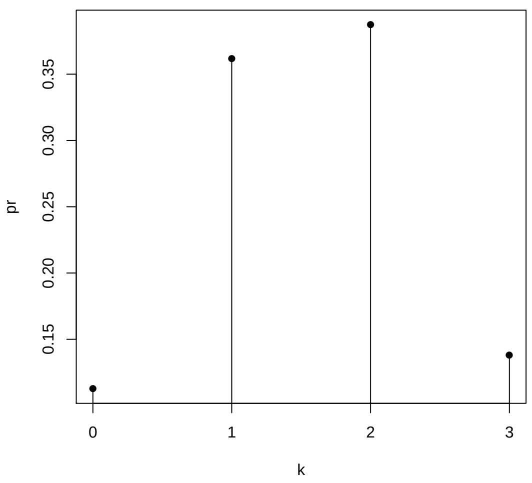
```
[1] 0.99328
```

Zadanie 3.

```
> p=0.517; n=3; k=0:n
> pr=dbinom(k,n,p)
> rozklad=rbind(k,pr)
> print(rozklad,digits=4)
```

```
     [,1]   [,2]   [,3]   [,4]
k  0.0000 1.0000 2.0000 3.0000
pr 0.1127 0.3618 0.3873 0.1382
```

```
> plot(k,pr,type="h",lab=c(4,5,7))
> points(k,pr,pch=16)
```

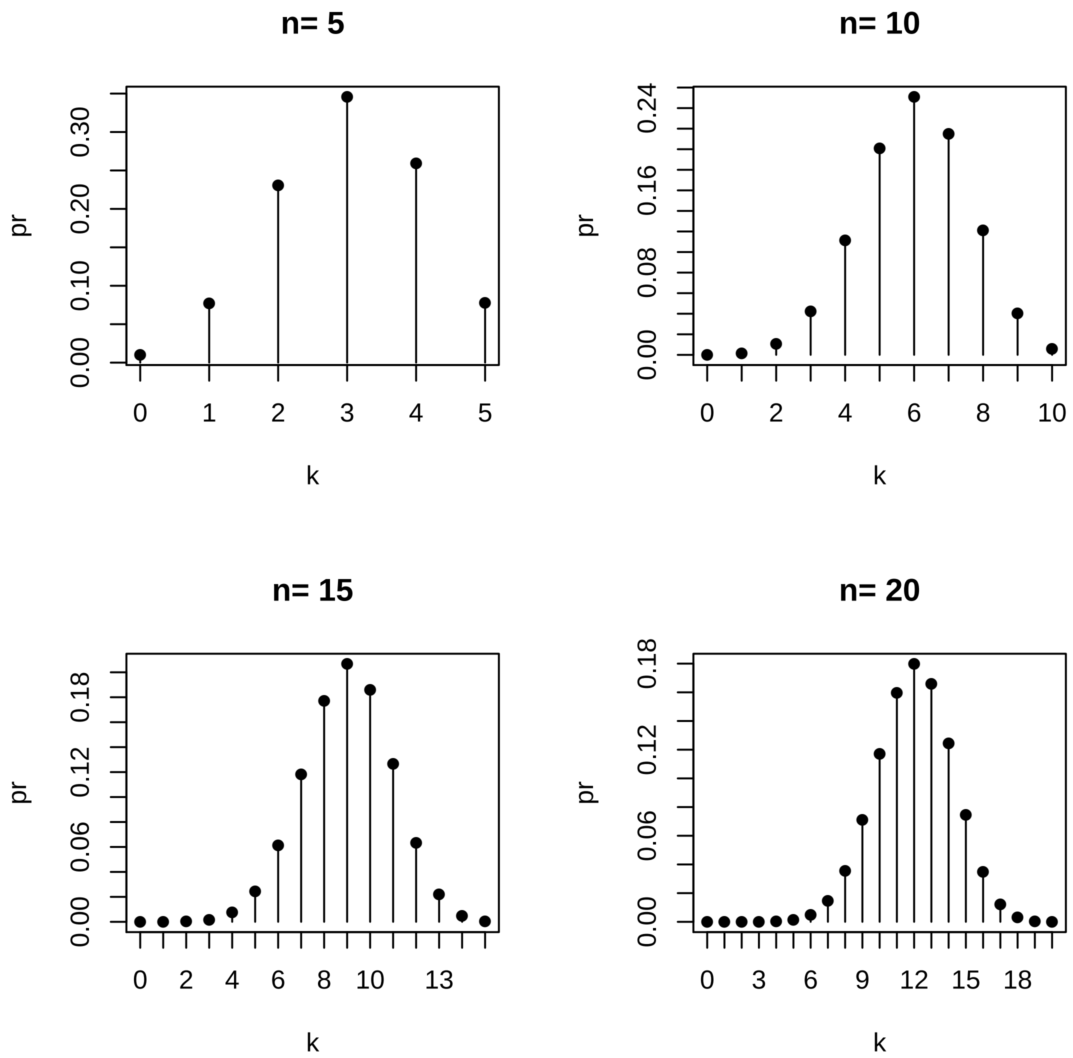



```
> print(paste("E(X)=",n*p,"Var(X)=",n*p*(1-p)),quote=FALSE)
```

```
[1] E(X)= 1.551 Var(X)= 0.749133
```

Zadanie 4.

```
> par(mfrow=c(2,2))
> p=0.6
> n=c(5,10,15,20)
> for(i in 1:4){
+   k=0:n[i]
+   pr=dbinom(k,n[i],p)
+   plot(k,pr,type="h",lab=c(n[i],10,7))
+   points(k,pr,pch=16)
+   title(paste("n=",n[i]))
+ }
```

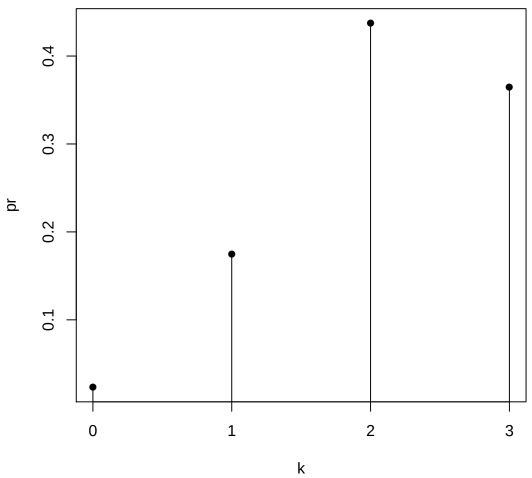


Zadanie 5.

```
> p=5/7; n=3; k=0:n
> pr=dbinom(k,n,p)
> rozklad=rbind(k,pr)
> print(rozklad,digits=4)
```

```
      [,1]   [,2]   [,3]   [,4]
k  0.00000 1.0000 2.0000 3.0000
pr 0.02332 0.1749 0.4373 0.3644
```

```
> plot(k,pr,type="h",lab=c(4,5,7))
> points(k,pr,pch=16)
```




```
> print(paste("E(X)=",n*p,"Var(X)=",n*p*(1-p)),quote=FALSE)
```

```
[1] E(X)= 2.14285714285714 Var(X)= 0.612244897959184
```

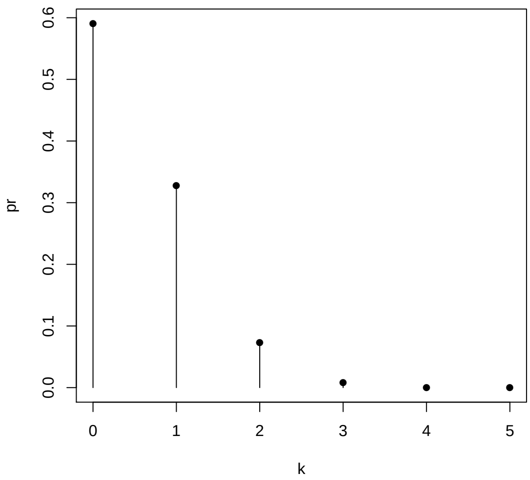
Zadanie 6.

```
> #a
> p=0.1
> n=5
> k=0:n
> pr=dbinom(k,n,p)
> rozklad=rbind(k,pr)
> print(rozklad,digits=4)
```

```
     [,1]   [,2]   [,3]   [,4]    [,5]  [,6]
k  0.0000 1.0000 2.0000 3.0000 4.00000 5e+00
pr 0.5905 0.3281 0.0729 0.0081 0.00045 1e-05
```

```
> #c
> dbinom(2,n,p)
```

```
> #b
> plot(k,pr,type="h",lab=c(5,5,7))
> points(k,pr,pch=16)
```




```
[1] 0.0729
```

```
> #d
> pbinom(2,n,p)
```

```
[1] 0.99144
```

```
> #e
> pbinom(1,n,p)
```

```
[1] 0.91854
```

Zadanie 7.

```
> #a
> n=5
> p=0.1
> dbinom(0,n,p)
```

```
[1] 0.59049
```

```
> #b
> dbinom(3,n,p)
```

```
[1] 0.0081
```

```
> #c
> 1-pbinom(2,n,p)
```

```
[1] 0.00856
```

Zadanie 8.

```
> #a
> p=0.1
> n=8
> k=0:n
> pr=dbinom(k,n,p)
> rozklad=rbind(k,pr)
> print(rozklad,digits=4)
```

```
     [,1]   [,2]   [,3]    [,4]     [,5]      [,6]
k  0.0000 1.0000 2.0000 3.00000 4.000000 5.0000000
pr 0.4305 0.3826 0.1488 0.03307 0.004593 0.0004082
        [,7]    [,8]  [,9]
k  6.000e+00 7.0e+00 8e+00
pr 2.268e-05 7.2e-07 1e-08
```

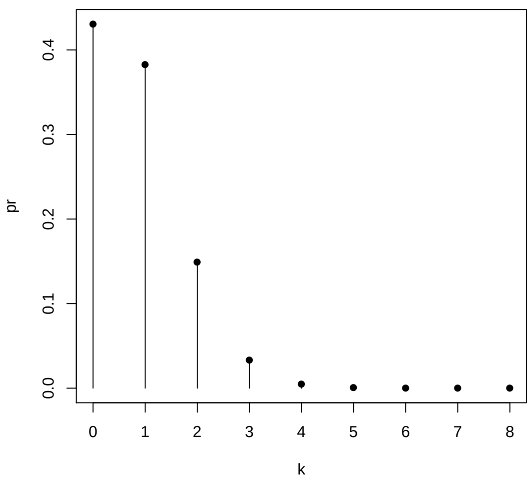
```
> #b
> pbinom(5,n,p)-pbinom(2,n,p)
```

```
[1] 0.03806838
```

```
> #c
> pbinom(3,n,p)
```

```
[1] 0.9949756
```

```
> #d
> plot(k,pr,type="h",lab=c(9,5,7))
> points(k,pr,pch=16)
```

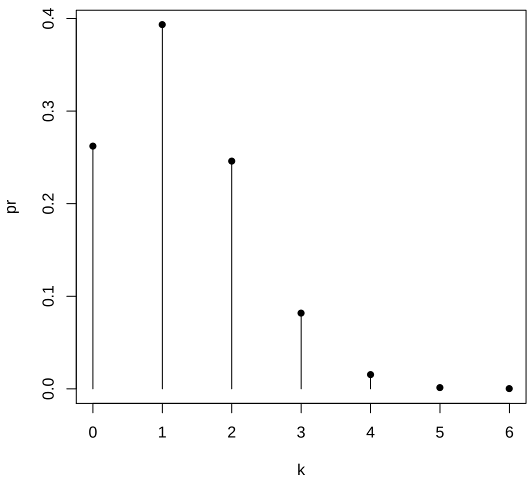



```
> EX=n*p; VarX=n*p*(1-p); SX=sqrt(VarX)
> print(paste("E(X)=",EX,"Var(X)=",VarX,"S(X)=",SX))
```

```
[1] "E(X)= 1.2 Var(X)= 0.96 S(X)= 0.979795897113271"
```

Zadanie 9.

```
> n=6
> p=0.2
> k=0:n
> pr=dbinom(k,n,p)
> plot(k,pr,type="h",lab=c(7,5,7))
> points(k,pr,pch=16)
```




```
> print(paste("P(X>=3)=",1-pbinom(2,n,p),"P(X=2)=",dbinom(2,n,p)))

[1] "P(X>=3)= 0.09888 P(X=2)= 0.24576"
```

Zadanie 10.

```
> 1-pbinom(3,15,0.05)

[1] 0.005467259
```

Zadanie 11.

```
> lambda=5
> ppois(2,lambda)

[1] 0.1246520
```

Zadanie 12.

```
> #a
> xi=0:5
> ni=c(30,110,50,40,15,5)
> srednia=weighted.mean(xi,ni)
> lambda=srednia
> pr=dpois(xi,lambda)
> l.teoretyczne=round(sum(ni)*pr)
> rbind(xi,l.teoretyczne)
```

```
              [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
xi               0    1    2    3    4    5
l.teoretyczne   48   79   65   36   15    5
```

```
> #b
> ppois(4,lambda)-ppois(1,lambda)    # 1 sposób
```

```
[1] 0.46709
```

```
> sum(dpois(c(2,3,4),lambda))        # 2 sposób
```

```
[1] 0.46709
```

```
> sum(pr[3:5])                       # 3 sposób
```

```
[1] 0.46709
```

Zadanie 13.

```
> lambda=4
> ppois(3,lambda)
```

```
[1] 0.4334701
```

Zadanie 14.

```
> lambda=3
> pr1=ppois(6,lambda)
> pr1
```

```
[1] 0.9664915
```

```
> pr2=1-ppois(2,lambda)
> pr2
```

```
[1] 0.5768099
```

Zadanie 15.

```
> lambda=-log(0.2)
> lambda
```

```
[1] 1.609438
```

Zadanie 16.

```
> lambda=4
> EX=lambda; VarX=lambda; S=sqrt(VarX)
> cbind(EX,VarX,S)
```

```
     EX VarX S
[1,]  4    4 2
```

```
> #a
> dpois(1,lambda)
```

```
[1] 0.07326256
```

```
> #b
> ppois(3,lambda)
```

```
[1] 0.4334701
```

```
> #c
> 1-ppois(5,lambda)
```

```
[1] 0.2148696
```

Zadanie 17.

```
> lambda=2
> ppois(4,lambda)
```

```
[1] 0.947347
```

Zadanie 18.

```
> lambda=4
> #a
> ppois(2,lambda)
```

```
[1] 0.2381033
```

```
> #b
> 1-ppois(5,lambda)
```

```
[1] 0.2148696
```

```
> #c
> dpois(2,lambda)
```

```
[1] 0.1465251
```

Zadanie 19.

```
> n=150; p=0.004
> lambda=n*p
> 1-ppois(1,lambda)
```

```
[1] 0.1219014
```

Zadanie 20.

```
> par(mfrow=c(2,2))
> n=20
> lambda=c(2,5,8,10)
> k=0:n
> for(i in 1:4){
+   pr=dpois(k,lambda[i])
+   plot(k,pr,type="h",lab=c(n,10,7))
+   points(k,pr,pch=16)
+   title(as.expression(substitute(lambda==l,list(l=lambda[i]))))
+ }
```