Weryfikacja hipotez statystycznych w badaniach rynku

dr Marcin Szymkowiak

Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

Weryfikacja hipotez statystycznych w badaniach rynku

Weryfikacja hipotez statystycznych w badaniach rynku

- Test t-Studenta dla jednej średniej
- Test t-Studenta dla dwóch średnich (zmienne niepowiązane)
- Test Cochrana-Coxa
- Test t-Studenta dla dwóch średnich (zmienne powiązane)
- Test Kruskala-Wallisa
- Test U Manna-Whitneya
- Test Kołmogorowa-Smirnowa
- Test zgodności χ^2
- Test λ-Kołmogorowa
- Test serii na losowość próby

Test t-Studenta dla jednej średniej

Test t-Studenta dla jednej średniej

Testujemy następujący układ hipotez statystycznych:

$$H_0 : m = m_0 \qquad H_0 : m = m_0 \qquad H_0 : m = m_0$$

$$H_1 : m \neq m_0 \qquad H_1 : m > m_0 \qquad H_1 : m < m_0$$

Statystyka testowa jest postaci:

$$t = \frac{\bar{x} - m_0}{s}\sqrt{n} \sim t_{n-1} \tag{1}$$

Obszar krytyczny wyznaczamy w zależności od postaci hipotezy alternatywnej H_1, ustalonego poziomu istotności α i $n-1$ stopni swobody.

W przypadku, gdy korzystamy z programów statystycznych decyzję o odrzuceniu hipotezy zerowej podejmujemy w oparciu o p-value. Jeżeli $\alpha \geq p$ to odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. Natomiast gdy $\alpha < p$ to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Test t-Studenta dla dwóch średnich (zmienne niepowiązane)

Test t-Studenta dla dwóch średnich (zmienne niepowiązane)

Testujemy następujący układ hipotez statystycznych:

$$H_0 : m_1 = m_2 \qquad H_0 : m_1 = m_2 \qquad H_0 : m_1 = m_2$$

$$H_1 : m_1 \neq m_2 \qquad H_1 : m_1 > m_2 \qquad H_1 : m_1 < m_2$$

Statystyka testowa jest postaci:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2} \tag{2}$$

Obszar krytyczny wyznaczamy w zależności od postaci hipotezy alternatywnej H_1, ustalonego poziomu istotności α i $n_1 + n_2 - 2$ stopni swobody.

W przypadku, gdy korzystamy z programów statystycznych decyzję o odrzuceniu hipotezy zerowej podejmujemy w oparciu o p-value. Jeżeli $\alpha \geq p$ to odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. Natomiast gdy $\alpha < p$ to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Uwaga. W teście tym zakładamy jednorodność wariancji cechy w obydwu populacjach. W przypadku gdy nie można założyć jednorodności wariancji, należy posłużyć się alternatywnym testem Cochrana-Coxa.

Test Cochrana-Coxa

Test Cochrana-Coxa

Testujemy następujący układ hipotez statystycznych:

$$H_0 : m_1 = m_2 \qquad H_0 : m_1 = m_2 \qquad H_0 : m_1 = m_2$$

$$H_1 : m_1 \neq m_2 \qquad H_1 : m_1 > m_2 \qquad H_1 : m_1 < m_2$$

Jeśli nie można przyjąć założenia o nieznanych, ale jednakowych wariancjach, wówczas statystykę t-Studenta można określić poniższym wzorem, przy czym bardziej skomplikowane jest wówczas określenie liczby stopni swobody:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}, \quad df = v = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}. \tag{3}$$

Obszar krytyczny wyznaczamy w zależności od postaci hipotezy alternatywnej H_1, ustalonego poziomu istotności α i v stopni swobody.

W przypadku, gdy korzystamy z programów statystycznych decyzję o odrzuceniu hipotezy zerowej podejmujemy w oparciu o p-value. Jeżeli $\alpha \geq p$ to odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. Natomiast gdy $\alpha < p$ to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Test t-Studenta dla dwóch średnich (zmienne powiązane)

Test t-Studenta dla dwóch średnich (zmienne powiązane)

Testujemy następujący układ hipotez statystycznych:

$$H_0 : m_1 = m_2 \qquad H_0 : m_1 = m_2 \qquad H_0 : m_1 = m_2$$

$$H_1 : m_1 \neq m_2 \qquad H_1 : m_1 > m_2 \qquad H_1 : m_1 < m_2$$

Załóżmy przy tym, że wyniki obserwacji pochodzą z dwóch populacji i są w jakiś sposób powiązane ze sobą (zestawione w pary).Dla każdego elementu próby losowej mamy parę liczb x_i oraz y_i, a także ich różnicę $d_i = x_i - y_i$. Zakładamy, że populacja różnic ma rozkład normalny. Statystyka testowa jest postaci:

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d}\sqrt{n} \sim n - 1, \tag{4}$$

gdzie $\bar{d}$, s_d oznaczają średnią i odchylenie standardowe różnic d_i.

Obszar krytyczny wyznaczamy w zależności od postaci hipotezy alternatywnej H_1, ustalonego poziomu istotności α i $n - 1$ stopni swobody.

W przypadku, gdy korzystamy z programów statystycznych decyzję o odrzuceniu hipotezy zerowej podejmujemy w oparciu o p-value. Jeżeli $\alpha \geq p$ to odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. Natomiast gdy $\alpha < p$ to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Test Kruskala-Wallisa

Test Kruskala-Wallisa

Test Kruskala-Wallisa jest nieparametrycznym odpowiednikiem jednoczynnikowej analizy wariancji. Załóżmy, że danych jest k-populacji, w których badana cecha ma rozkład typu ciągłego. Niech $F_1(x), \ldots, F_k(x)$ oznaczają dystrybuanty zmiennych w rozpatrywanych populacjach. Z populacji tych losujemy po n_i elementów do prób. Testujemy następujący układ hipotez statystycznych:

$$H_0 : F_1(x) = \ldots, F_k(x), \quad H_1 : F_i(x) \neq F_j(x), \quad i \neq j.$$

Statystyka testowa jest postaci

$$H = \frac{12}{n\,(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - 3\,(n+1)\,, \tag{5}$$

gdzie $n = n_1 + \ldots + n_k$, a T_i oznacza sumę rang w każdej próbie oddzielnie. Statystyka ta ma asymptotyczny rozkład χ^2 o $k-1$ stopniach swobody. Wzór ten jednak nie bierze pod uwagę rang wiązanych. W przypadku wystąpienia rang wiązanych należy wprowadzić poprawkę, która polega na podzieleniu statystyki H przez wartość poprawki P określonej w następujący sposób:

$$P = 1 - \frac{\sum \left(l^3 - l\right)}{n^3 - n}, \tag{6}$$

gdzie l jest liczbą pomiarów mających tę samą rangę wiązaną, sumowanie zaś odbywa się po wszystkich grupach rang wiązanych.

Test U Manna-Whitneya

Test U Manna-Whitneya

Test U Manna-Whitneya jest nieparametryczną alternatywą dla testu t-Studenta dla prób niezależnych. W teście tym weryfikujemy hipotezę zerową, że dwie losowo wybrane próby pochodzą z tej samej populacji, przy czym zakłada się, że badana cecha jest mierzona przynajmniej na skali porządkowej. Sposób postępowania w teście U Manna-Whitneya jest następujący:

- porządkujemy rosnąco wartości obydwu prób,
- przyporządkowujemy poszczególnym wartościom w uporządkowanym zbiorze danych rangi tzn. kolejne liczby naturalne (w przypadku wystąpienia tych samych wartości nadajemy tzw. rangi wiązane – średnią arytmetyczną z rang jakie należałoby przypisać).

Testujemy następujący układ hipotez statystycznych:

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x), \quad H_1 : F_1(x) \neq F_2(x).$$

Statystyka testowa jest postaci

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1, \tag{7}$$

gdzie n_1, n_2 oznaczają liczebności prób pobranych odpowiednio z pierwszej i drugiej populacji, a R_1 oznacza sumę rang przyznanych wartościom pierwszej próby. Ze względu na skomplikowany rozkład tej statystyki odpowiednie wartości krytyczne zostały zawarte w specjalnych tablicach.

Test Kołmogorowa-Smirnowa

Test Kołmogorowa-Smirnowa

Test ten stosujemy do weryfikacji hipotezy, że rozkłady tej samej zmiennej w dwóch populacjach są takie same. Badana zmienna musi być zmienną ciągłą. Stawiamy hipotezę zerową i alternatywną:

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x), \quad H_1 : F_1(x) \neq F_2(x).$$

Statystyka testowa jest postaci

$$\lambda = D^* \sqrt{n}, \tag{8}$$

gdzie:

$$D^* = sup \left| F_1^{emp}(x) - F_2^{emp}(x) \right|, \tag{9}$$

a sup oznacza kres górny różnicy dystrybuant empirycznych w próbach, przy czym:

$$F_1^{emp}(x) = \frac{cumf_1}{n_1}, \quad F_2^{emp}(x) = \frac{cumf_2}{n_2}, \quad n = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}. \tag{10}$$

Statystyka λ przy założeniu prawdziwości H_0 ma asymptotyczny rozkład λ-Kołmogorowa. Wartość krytyczną testu odczytujemy więc z tablic tego rozkładu tak, aby spełniony był warunek: $P(\lambda > \lambda_\alpha) = \alpha$. W praktyce oznacza to, że $F(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$. Jeśli okaże się, że $\lambda \geq \lambda_\alpha$ to H_0 odrzucamy na korzyść H_1, jeśli zaś $\lambda < \lambda_\alpha$ to stwierdzamy, że nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Test zgodności χ^2

Test zgodności χ^2

Test zgodności chi-kwadrat (χ^2) stosujemy weryfikując hipotezę zerową o zgodności rozkładu badanej cechy w populacji generalnej z określonym rozkładem teoretycznym (na przykład Poissona, dwumianowym, równomiernym, normalnym). W teście tym hipoteza zerowa i hipoteza alternatywna mają postać:

$$H_0 : F(x) = F_0(x), \quad H_1 : F(x) \neq F_0(x).$$

Zakładamy tu, że badana zmienna w populacji generalnej ma rozkład o nieznanej dystrybuancie $F(x)$, natomiast rozkład hipotetyczny może być zarówno typu ciągłego jak i skokowego. Podstawą konstrukcji miary zgodności rozkładu empirycznego z hipotetycznym jest różnica między liczebnościami zaobserwowanymi w próbie (empirycznymi, oznaczanymi symbolem n_i) a teoretycznymi oznaczanymi jako np_i. Do oceny tej zgodności służy statystyka χ^2, którą liczymy według wzoru:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{11}$$

Statystyka ta, przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, ma rozkład χ^2 o $r-k-1$ stopniach swobody (k jest liczbą parametrów postulowanego rozkładu szacowanych w oparciu o próbę, r jest natomiast liczbą wariantów bądź przedziałów klasowych). Konstruujemy w tym teście prawostronny obszar krytyczny tak, by spełniona była relacja $P\left(\chi^2 \geq \chi^2_\alpha\right) = \alpha$. Hipotezę zerową odrzucamy, gdy $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$.

Test λ-Kołmogorowa

Test λ-Kołmogorowa

Test λ-Kołmogorowa służy do sprawdzania czy rozkład cechy w populacji jest zgodny z pewnym z góry założonym rozkładem teoretycznym. Często jest wykorzystywany do sprawdzenia, czy rozkład badanej cechy jest normalny. W teście tym hipoteza zerowa i hipoteza alternatywna mają postać:

$$H_0 : F(x) = F_0(x), \quad H_1 : F(x) \neq F_0(x).$$

Zakładamy tu, że badana zmienna w populacji generalnej ma rozkład o nieznanej dystrybuancie $F(x)$, natomiast rozkład hipotetyczny musi być typu ciągłego. Statystyka testowa jest postaci

$$\lambda = D\sqrt{n}, \tag{12}$$

gdzie:

$$D = sup \left| F_0(x) - F_n(x) \right|, \tag{13}$$

a sup oznacza kres górny różnicy dystrybuant hipotetycznej $F(x)$ i empirycznej $F_n(x)$. Statystyka λ przy założeniu prawdziwości H_0 ma asymptotyczny rozkład λ-Kołmogorowa. Wartość krytyczną testu odczytujemy więc z tablic tego rozkładu tak, aby spełniony był warunek: $P(\lambda > \lambda_\alpha) = \alpha$. W praktyce oznacza to, że $F(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$. Jeśli okaże się, że $\lambda \geq \lambda_\alpha$ to H_0 odrzucamy na korzyść H_1, jeśli zaś $\lambda < \lambda_\alpha$ to stwierdzamy, że nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Test serii na losowość próby

Test serii na losowość próby

Test ten pozwala zweryfikować hipotezę, że dobór jednostek do próby był losowy. Próba licząca n jednostek została pobrana z populacji generalnej, której liczebność wynosiła N. W teście tym hipoteza zerowa i hipoteza alternatywna mają postać:

$$H_0 : \text{Próba jest losowa}, \quad H_1 : \text{Próba nie jest losowa}.$$

W celu sprawdzenia hipotezy zerowej obliczamy wartość mediany (Me) z próby. Porównujemy wartość cechy każdej jednostki (x_i) z medianą (Me). Jeśli $x_i < Me$ to takiemu zdarzeniu przyporządkowujemy symbol a, jeśli zaś $x_i > Me$ to symbol b (to przyporządkowanie wykonujemy na szeregu wyjściowym). W rezultacie otrzymujemy ciąg symboli a i b. Każdy podciąg tego ciągu złożony z symboli tego samego rodzaju nazywamy serią. Ustalamy liczbę serii w naszym ciągu i oznaczamy ją przez k. Jest to sprawdzian hipotezy zerowej. Następnie w tablicach rozkładu liczby serii znajdujemy wartości krytyczne tak, by zachodziły relacje:

$$P(k \leq k_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(k \geq k_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Oznacza to, że $k_{1\alpha}$ odczytujemy dla $\alpha/2$ oraz ustalonej w ciągu liczby symboli a (n_a) oraz liczby symboli b (n_b), natomiast $k_{2\alpha}$ dla $1 - \alpha/2$ oraz n_a i n_b. Jeśli okaże się, że $k \leq k_{1\alpha}$ lub $k \geq k_{2\alpha}$, to hipotezę zerową należy odrzucić. Jeśli zaś $k_{1\alpha} < k < k_{2\alpha}$ to stwierdzamy, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o losowości próby.

Dziękuje za uwagę