全平面覆盖证明：

我们定义个圆在全平面的**覆盖效率**为，其中为第个圆的覆盖范围，为覆盖圆的总数，为覆盖圆的半径。接着我们给出全平面上一点被**“完全覆盖”**的定义：对于从任意方向逼近的点，满足。

现在我们考虑两个圆在全平面上相交的情况（如图1），易知的交点没有被完全覆盖，此时至少还需一个圆才能将完全覆盖（如图2），而为了使尽量大，应使位于交点（如图3）

当然也可以用更多的圆将完全覆盖

**引理**：在保证完全覆盖的情况下，个圆相交于，当时，

**证明**：不妨设覆盖圆按顺时针标号为，若（）重叠部分面积为此时覆盖效率，设，可求出，，要使最大，而易知此时均相等为，，该函数在时单调递减，所以当时，最大，，如图5

 

………………

若将个圆对于一个点的完全覆盖看成一个“基元”，则全平面的覆盖方法可以看成是由若干个这样的“基元”构成，由上引理可知这样的“基元”如图4排布覆盖效率最高，所以全平面的最优覆盖应由图4方法排布。



……………………………………

……………………………………

………………………………………

………………………………………

