# Carl Friedrich Gauß

Von André Sommer

Kurs: Berühmte Mathematiker

Lehrer: Heinz Schmidt

Abgabetermin: 10.05.2020

# Inhaltsverzeichnis

# Einführung

Wer schon die Zeit vor dem Euro mitbekommen hat, der erinnert sich möglicherweise noch an den Zehn-Mark Schein der Bundesrepublik Deutschland. Auf diesem war Carl Friedrich Gauß abgedruckt zusammen mit seiner wohl wichtigsten Entdeckung, der Gaußschen Glockenkurve, auch Gaußsche Normalverteilung genannt. Carl Friedrich Gauß kam, wie in diesem Beispiel, zu einigen bekannten Feststellungen, welche heute noch bekannt und relevant sind. Einige gehören zu den Grundlagen der Mathematik. So legte Gauß sehr großen Wert darauf in der Mathematik Rechnen zu vermeiden und den einfachsten Lösungsweg zu benutzen. Ein gutes Beispiel hierfür ist die Gaußsche Summenformel, die im gleichnamigen Kapitel erklärt wird. Diese hatte Gauß bereits im Alter von nur 9 Jahren entwickelt. Gauß war daher schon in sehr jungen Jahren äußerst begabt in der Mathematik, laut eigenen Aussagen konnte Gauß bereits rechnen, bevor er sprechen konnte. Durch sein Talent im Umgang mit Mathematik konnte er Werke wie den Gaußalgorithmus entwickeln. Dies ist eines der bekanntesten Werke von Gauß. Mit ihm kann man Liniere Gleichungssysteme lösen. In der Schulmathematik haben viele von uns diesen Algorithmus schon kennengelernt. Seit der Antike gab es vor Gauß keine Neuerungen in diesem Bereich. Wie auch bei dem Gaußalgorithmus war Carl Friedrich Gauß in dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnungen von großer Bedeutung. Durch ihn war erst die Idee der Versicherungen möglich oder auch das Hochrechnen von Wahlergebnissen. Hierfür kommt die eben genannte Glockenkurve zum Einsatz, mit dieser kann man Wahrscheinlichkeiten präzise berechnen. Wie das geht wird im Kapitel über die Gaußsche Normalverteilung erklärt. Eine ähnlich grundlegende Erkenntnis lieferte Gauß mit der Osterformel. Dank der Arbeit von Carl Friedrich Gauß ist es möglich mit einem einfachen Algorithmus den Ostersonntag für ein beliebiges Jahr zu bestimmen. Vorher war es notwendig mit deutlich komplizierteren Formeln Ostern zu bestimmen. Die Osterformel wird ebenfalls in dem gleichnamigen Kapitel behandelt behandelt.

Auch in den Themengebieten der Zahlentheorie, der Astronomie oder der Potentialtheorie leistete Carl Friedrich Gauß bedeutende Beiträge, allerdings werden diese in der Ausarbeitung nicht aufgeführt, da diese sonst zu umfangreich werden würde.

# Das Leben von Carl Friedrich Gauß

Ursprünglich hieß die Familie mit Nachnamen Gooß. Carls Großvater Jürgen Gooß unterschrieb jedoch den Kaufvertrag für ein Haus mit Gauß, vermutlich um die Spuren seiner Bauernherkunft zu verwischen. Jürgen Gooß selbst arbeitete im Sommer als Lehmentierer und im Winter als Gassenschlächter. Weiteres zu der Familie Gooß ist in [2] nachzulesen.

Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren und wächst dort auch bei seinen Eltern auf. Schon als kleines Kind interessierte er sich für Mathematik. So versuchte er sich die Reihenfolge von Zahlen einzuprägen, während der Vater die Münzen für seine Gehilfen abzählte. Er hatte die Gabe selbst hoch komplexe Rechnungen im Kopf durchzuführen und lernte angeblich schon rechnen, bevor er sprechen konnte. Carl Friedrich Gauß wurde zu Ostern 1784 in der Volkshochschule eingeschult. Zu dieser Zeit war die Durchsetzung der Schulpflicht in den ländlichen Gebieten von Braunschweig-Wolfenbüttel noch äußerst mangelhaft, auch wenn diese seit 1752 einführt wurde. Die einzigen Pflichtfächer sind zu dieser Zeit sind Lesen und Religion. Der Schulmeister Büttner lehrt den Schülern das Buchstabieren, das Rechnen und die Kirchenlieder. Da der kleine Carl Friedrich Gauß extrem aufnahmefähig, ist hat er kaum Schwierigkeiten im Unterricht. Die Schüler mussten in der Schule ständig wachsam sein. Eine freche Bemerkung konnte einen Schlag mit der Karwatsche nach sich ziehen, eine Art Zepter mit Lederriemen, die man sonst zum Reiten von Pferden benutzt. Auch schlaue Schüler mussten auf der Hut sein, damit sich der Lehrer in seiner Überlegenheit nicht bedroht fühlte. Carl Friedrich Gauß hatte keine Probleme damit, obwohl er ausgesprochen begabt war. Bereits in dieser Schule entdeckte Carl die Gaußsche Summenformel, hierfür sei auf das folgende Kapitel verwiesen. Büttler erkannte das Potential in Gauß und förderte ihn, indem er ihm ein besonderes Rechenbuch aus Hamburg zukommen ließ.

Ab dem Herbst 1795 besuchte Carl Friedrich Gauß die Universität Göttingen. Bereits im Alter von 18 Jahren war es Gauß gelungen die Konstruierbarkeit eines Siebzehnecks nachzuweisen, welche eine wichtige Entdeckung war, da es seit der Antike kaum Fortschritte auf diesem Gebiet gab. Genaueres ist hierzu bei [1] nachzulesen. Im Jahre 1799 schloss er sein Mathematikstudium mit einer Doktorarbeit an der Universität in Helmstedt ab. Dem Herzog von Braunschweig war es wichtig, dass Gauß nicht an einer Universität im Ausland promoviert wird[2].

Carl Friedrich Gauß starb am 23. Februar 1855 in Göttingen, nachdem er an einer Herzinsuffizienz litt. Er blieb bis zum Ende seines Lebens wissenschaftlich aktiv.

# Der kleine Gauß

„Der kleine Gauß“ wird auch Gaußsche Summenformel genannt und wurde von Carl Friedrich Gauß im Alter von 9 Jahren angewendet. Der Schulmeister gab damals der Klasse die Aufgabe alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Der Schulmeister schien etwas Ruhe zu benötigen und ging davon aus, dass die Schüler einer Weile brauchen werden, bis sie die Aufgabe fertig gerechnet haben. Der Rechenweg war schließlich lang und man musste aufpassen, dass sich keine Fehler einschleichen. Während die anderen Schüler die Zahlen addierten erkannte Gauß, dass sich die Zahlen mit einem einfachen Muster zusammen rechen lassen. Um unnötiges Rechnen zu vermeiden versuchte Gauß die Rechnung zu vereinfachen. Nach sehr kurzer Zeit legte Gauß seine Lösung mit den Worten „Ligget se!“ („Da liegt sie!“) vor den Lehrer. Der Schulmeister wundert sich, denn in der kurzen Zeit von zwei bis drei Minuten hätte nicht mal er die Aufgabe lösen können, obgleich er auch schon die Lösung kannte. Als der Lehrer verwundert Gauß fragte, wie er das den gelöst hätte, antwortete dieser, dass er eine Idee zur Vereinfachung habe. Somit kann man erkennen, dass 1 und 100 nach der Addition 101 ergeben. 2 und 99 ergeben dies ebenfalls. Es ist also nur notwendig 101 mit 50 zu multiplizieren, um das gewünschte Ergebnis 5050 zu bekommen. Dieser Weg ist für alle natürlichen Zahlen anwendbar, wenn von 1 zu zählen begonnen wird. Hier nochmal ein Beispiel zur Veranschaulichung.

$$1 + 100 = 101 \quad 2 + 99 = 101 \quad 3 + 98 = 101 \quad \dots \quad \Rightarrow \quad 50 \cdot 101 = 5050$$

Hierbei ist n = 100, da die Zahlen von 1 bis 100 zusammengezählt werden.

$$50 \cdot 101 = 5050$$

$$\frac{1}{2} 100 \cdot (100+1) = 5050$$

Dadurch kommt man zu folgender Formel:

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{1}{2} n \cdot (n+1)$$

Der Mathematiker Leonard Euler hatte diesen Rechenweg bereits sieben Jahre vor der Geburt Carl Friedrich Gauß' publiziert. Obwohl Euler die Rechenvorschrift nachweislich eher erbrachte wird sie noch heute nach Gauß benannt. Trotzdem ist das mathematische Verständnis von Gauß in diesem Alter beeindruckend. Es ist dadurch auch möglich, dass Gauß bereits die Summenformel kannte und in der Unterrichtsstunde herausfand, wie man sie anwendet. Weiteres hierzu ist bei [2] nachzulesen.

# Gaußalgorithmus

Mit dem Gaußalgorithmus ist es unter anderem möglich drei Lineare Gleichungen mit drei Unbekannten zu lösen. Mit dem Verfahren können aber auch komplexere Lineare Gleichungssysteme mit mehr Unbekannten oder mehr Gleichungen gelöst werden. Der Lösungsansatz bleibt der gleiche. Lineare Gleichungssysteme kommen in vielen Bereichen der Mathematik vor, beispielsweise bei der Differenzialrechnung oder der Integralrechnung, daher der Gaußalgroithmus hier von hoher Bedeutung.

Zwischen 200 und 100 vor Christus wurde das Verfahren bereits in China durch das Buch „Jiu Zhang“ publiziert und galt bis zum 16. Jahrhundert als verlässliche Quelle für das Lösen mehrerer Gleichungen mit drei Unbekannten. Erst später, um 1750 wurde die Grundlage des Verfahrens in Europa von Joseph-Louis Langrage verbreitet.
Gauß arbeitete 1798 mit linearen Gleichungen und mit den damit verbundenen Normalgleichungen. Er schreib bereits zu dieser Zeit in sein Tagebuch das Problem der Elimination gelöst zu haben. Außerdem publizierte er 1810 ein Werk zu diesem Thema.

Hier wird ein Beispiel mit 3 Gleichungen und drei unbekannten gezeigt, es kann aber auch komplexere Gleichungen geben:

$$\begin{aligned} x &+ 2y + 3z = 2 \\ x &+ y + z = 2 \\ 3x &+ 3y + z = 0 \end{aligned}$$

Zum lösen dieser drei Unbekannten müssen nun die Vorfaktoren und das Ergebnis in eine Tabelle übernommen werden:

| X | Y | Z | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 1 | 0 |

Um nun die Gleichung lösen zu können müssen zunächst die grau markierten Felder 0 sein. Damit die Gleichungen einfacher gelöst werden können müssen die Variablen in der diagonalen Anordnung 0 sein. Dies soll bewirken, dass die letzte Gleichung höchstens eine Variablen behält und die Gleichungen damit aufgelöst werden können. Um das System lösen zu können gibt es zwei Regeln:

1. Zeilen können mit einer konstanten Multipliziert oder Dividiert werden
2. Zeilen können gegeneinander Addiert oder Subtrahiert werden

Um also in der zweiten Zeile auf die 0 zu kommen, muss die zweite Zeile von der ersten abgezogen werden. Danach wird das Ergebnis wieder in die zweite Zeile eingetragen.

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -(1 & 2 & 3 & 2) \\ \hline 0 & -1 & -2 & 0 \\ \hline\hline \end{array}$$

| X | Y | Z | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |
| 0 | -1 | -2 | 0 |
| 3 | 3 | 1 | 0 |

Damit jetzt die ersten beiden Stellen eine 0 sein können, muss die erste Zeile mit 3 multipliziert werden. Im Anschluss kann man dann die dritte Zeile von der ersten Abziehen.

| X | Y | Z | |
|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 6 |
| 0 | -1 | -2 | 0 |
| 3 | 3 | 1 | 0 |

$$\begin{array}{rrrr} 3 & 6 & 9 & 6 \\ -(3 & 3 & 1 & 0) \\ \hline 0 & -3 & -8 & -6 \\ \hline\hline \end{array}$$

| X | Y | Z | |
|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 6 |
| 0 | -1 | -2 | 0 |
| 0 | -3 | -8 | -6 |

Um nun die letzte 0 zu bekommen muss nun von der dritten Zeile drei mal die zweite abgezogen werden. Dadurch ergibt sich die letzte 0.

$$\begin{array}{rrrr} 3\cdot(0 & -1 & -2 & 0) \\ -(0 & -3 & -8 & -6) \\ \hline 0 & 0 & -2 & -6 \\ \hline\hline \end{array}$$

| X | Y | Z | |
|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 6 |
| 0 | -1 | -2 | 0 |
| 0 | 0 | -2 | -6 |

Nun kann die Tabelle wieder zurück in die Gleichung übernommen werden.

$$\begin{array}{llll} 3x & + 6y & + 9z & = 6 \\ & - y & - 2z & = 0 \\ & & - 2z & = -6 \end{array}$$

Damit ist es nun möglich das Gleichungssystem zu lösen:

| | | |
|---|---|---|
| $-2z = -6 \quad \vert :2 \quad =>$ | $-z = -3 \quad \vert :-1 \quad =>$ | $z = 3$ |
| $-y + -2 \cdot 3 = 0 \quad \vert +6 \quad =>$ | $-y = 6 \quad \vert :-1 \quad =>$ | $y = -6$ |
| $3x + 6 \cdot (-6) + 9 \cdot 3 = 6 \quad \vert :+9 \quad =>$ | $3x = 15 \quad \vert :3 \quad =>$ | $x = 5$ |

Für die Berechnung muss die Maschinengenauigkeit ausreichend sein, ebenso, wie der das Lösungsverfahren stabil sein muss. Ein Mathematisches Verfahren ist „stabil“, wenn es unempfindlich gegenüber Daten oder kleinen Störungen reagiert. Dies gilt besonders für Rundungsfehler, die Rechenmaschinen (Computer) verursachen können. Computer können bei komplexen Aufgaben nicht exakt das richtige Ergebnis berechnen, weil ihnen nicht unendlich viel Speicher zur Verfügung steht. Damit die Zahlen von dem Computer richtig verarbeitet werden können müssen sie in einer vorgegebenen Anzahl von Bits gespeichert werden. Wenn die Zahl zu lang ist um sie speichern zu können werden Nachkommastellen abgeschnitten. Diese Rundungsfehler können sich in einem Algorithmus häufen und so kann das Ergebnis gegebenenfalls nicht richtig berechnet sein. Weiteres ist nachzulesen bei [4].

# Gaußsche Osterformel

Ostern ist ein wichtiger Tag für die Kirche, da ausgehend von Ostern sämtliche andere Feiertage festgelegt werden. Dies gilt Beispielsweise für Aschermittwoch, Christi Himmelfahrt und Pfingsten.

Die Osterformel wurde bereits von Exiguus im Jahre 525 entwickelt, und durch die Gregorianische Kalenderreform im Jahre 1582 erneuert. Da es zu der Zeit noch keinen Computer gab musste der Algorithmus kompliziert unter Verwendung von Tabellen berechnet werden. Dieser Algorithmus war in der Lage für ein bestimmtes Jahr unter Berücksichtigung der Mondphasen ein eindeutiges Osterdatum angeben, nach der Reform sowohl für den Gregorianischen, als auch für den Julianischen Kalender. Diese Berechnungen sind auch für jedes weitere Jahr in der Zukunft anwendbar.

Gauß überarbeitete den Algorithmus und setzte ihn eleganter um als seine Vorgänger. Er machte es sich zur Aufgabe, die Rechenoperationen so zu vereinfachen, dass man nur minimalen Rechenaufwand benötigt, um das genaue Osterdatum berechnen zu können. Er machte jedoch ein paar Fehler. Gauß begrenzte zum Beispiel das Datum nicht nach hinten, so dass der Algorithmus oft ein zu spätes Datum lieferte. Das Osterfest wird immer am ersten Sonntag nach dem Frühlingsvollmond gefeiert. Demnach ist der frühestmögliche Termin der 21. März und der späteste Termin der 25. April.

<table>
<tr><th>Julianischer Kalender</th><th>Gregorianischer Kalender</th></tr>
<tr><td colspan="2" align="center"><code>a = Jahr mod 19</code></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center"><code>b = Jahr mod 4</code></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center"><code>c = Jahr mod 7</code></td></tr>
<tr><td></td><td><code>k = Jahr div 100</code></td></tr>
<tr><td></td><td><code>p = k div 3</code></td></tr>
<tr><td></td><td><code>q = k div 4</code></td></tr>
<tr><td align="right"><code>M=15</code></td><td><code>M = (15 + k - p – q) mod 30</code></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center"><code>d = (19a + M) mod 30</code></td></tr>
<tr><td align="right"><code>N = 6</code></td><td><code>N = (4 + k – q) mod 7</code></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center"><code>e = (2b + 4c + 6d + N) mod 7</code></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center"><code>Ostern = (22 + d + e)ter Tag nach dem 1. März</code></td></tr>
</table>

Dies veröffentlichte Carl Friedrich Gauß im Jahre 1800. In dieser Version wurde jedoch die Mondgleichung nicht richtig verwendet. Gauß ging davon aus, dass die Mondgleichung alle 300 Jahre zur Anwendung kommt. Dies korrigierte Gauß später, und veröffentlichte 1816 die Korrektur. Dazu änderte er folgenden Teil im Gregorianischen Kalender:

| Vorher (1800): | Nachher (1816): |
|---:|---|
| `p = k div 3` | `p = (8k + 13) div 25` |

Diese Version ist allerdings immer noch nicht exakt, da der letzte Ostersonntag am 25. April in der Formel noch nicht richtig berechnet wird. Nachdem Hermann Kinkelin auf die Fehler der Osterformel hinwies schrieb Heiner Lichtenberg 1997 eine überarbeitete Version.

| Schritt: | Bedeutung: | Formel: |
|---|---|---|
| 1. | die Säkularzahl | `K(X) = X div 100` |
| 2. | die säkulare Mondschaltung | `M(K) = 15 + (3K + 3) div 4 − (8K + 13) div 25` |
| 3. | die säkulare Sonnenschaltung | `S(K) = 2 − (3K + 3) div 4` |
| 4. | den Mondparameter | `A(X) = X mod 19` |
| 5. | den Keim für den ersten Vollmond im Frühling | `D(A,M) = (19A + M) mod 30` |
| 6. | die kalendarische Korrekturgröße | `R(D,A) = (D + A div 11) div 29` |
| 7. | die Ostergrenze | `OG(D,R) = 21 + D − R` |
| 8. | den ersten Sonntag im März | `SZ(X,S) = 7 − (X + X div 4 + S) mod 7` |
| 9. | die Entfernung des Ostersonntags von der Ostergrenze<br>(Osterentfernung in Tagen) | `OE(OG,SZ) = 7 − (OG − SZ) mod 7` |
| 10. | das Datum des Ostersonntags als Märzdatum<br>(32. März = 1. April usw.) | `OS = OG + OE` |

Diese Tabelle sowie weitere Informationen sind [5] zu entnehmen. Dieser Algorithmus ist nur für den Gregorianischen Kalender gültig. Um die Rechnung für den Julianischen Kalender nutzen zu können setzt man `M = 15` und `S = 0`, das Ergebnis ist dann für den Julianischen Kalender gültig.

Mit **`OG`** wird die Ostergrenze ermittelt. Ostern muss immer zwischen dem 21. März und dem 25. April liegen. Diese wurde von Heiner Lichtenberg in dieser Version richtig umgesetzt. In der alten Version von Carl Friedrich Gauß wurde versehentlich das Datum nicht nach hinten begrenzt, daher lieferte der Algorithmus manchmal ein zu spätes Datum.

**div** Beim dividieren wird der erste durch die zweite Zahl geteilt. Dabei werden in diesem Zusammenhang weder der Rest noch die Nachkommastellen berücksichtigt. In anderen Beispielen kann es allerdings durchaus vorkommen, dass mit Nachkommastellen gerechnet wird. Da Computern jedoch nicht unendlich viel Rechenleistung zur Verfügung steht können nicht unendlich viele Nachkommastellen berechnet werden, auf diese Weise kann es zu Fehlern bei den Nachkommastellen kommen.

**mod** Der Modulo Operator wird benutzt wird um den Rest bei einer Division zu berechnen. Modulo wird Beispielsweise verwendet um ein Schaltjahr zu bestimmen. Ist das Jahr durch 4 teilbar, also ohne Rest teilbar, so ist das Jahr ein Schaltjahr.

Mit diesen Rechenoperatoren wird hier nun als Beispiel der Ostersonntag für das Jahr 2021 berechnet:

| **Schritt:** | **Formel:** | **Berechnung:** |
|---|---|---|
| 1. | `K(X) = X div 100` | `20 = 2021 div 100` |
| 2. | `M(K) = 15 + (3K + 3) div 4 − (8K + 13) div 25` | `24 = 15 + (3·20 + 3) div 4 − (8·20 + 13) div 25` |
| 3. | `S(K) = 2 − (3K + 3) div 4` | `-13 = 2 − ( 3·20 + 3) div 4` |
| 4. | `A(X) = X mod 19` | `7 = 2021 mod 19` |
| 5. | `D(A,M) = (19A + M) mod 30` | `7 = (19·7 + 24) mod 30` |
| 6. | `R(D,A) = (D + A div 11) div 29` | `0 = (7 + 7 div 11) div 29` |
| 7. | `OG(D,R) = 21 + D − R` | `28 = 21 + 7 − 0` |
| 8. | `SZ(X,S) = 7 − (X + X div 4 + S) mod 7` | `7(X,S) = 7 − ( 2021 + 2021 div 4 + -13) mod 7` |
| 9. | `OE(OG,SZ) = 7 − (OG − SZ) mod 7` | `7 = 7 − (28 − 7) mod 7` |
| 10. | `OS = OG + OE` | `35 = 28 + 7` |

Der Ostersonntag liegt im Jahr 2021 also 35 Tage nach dem 1. März. Da der März 31 Tage hat bleiben noch 4 Tage übrig, die sich dann also in den April ausweiten. Der Ostersonntag liegt also im Jahr 2021 am 4 April.

# Gaußsche Normalverteilung (Glockenkurve)

Die Gaußsche Normalverteilung oder auch Glockenkurve genannt gibt in einer Statistik mit verschiedenen Werten den am wahrscheinlichsten zu erwartenden Wert und die zu erwartenden Abweichungen an. Durch die Funktion lassen sich die außerdem Abweichungen visualisieren. Durch diese Möglichkeit können zum Beispiel Versicherungen die Wahrscheinlichkeiten von Zahlungsfällen berechnen ohne Verluste einfahren zu müssen. Ansonsten wird dieses Prinzip oft verwendet um Eigenschaften über einer Bevölkerung zu zeigen, beispielsweise die Intelligenz. Auch die Möglichkeit eines zufälligen Messfehlers kann hiermit dargestellt werden.

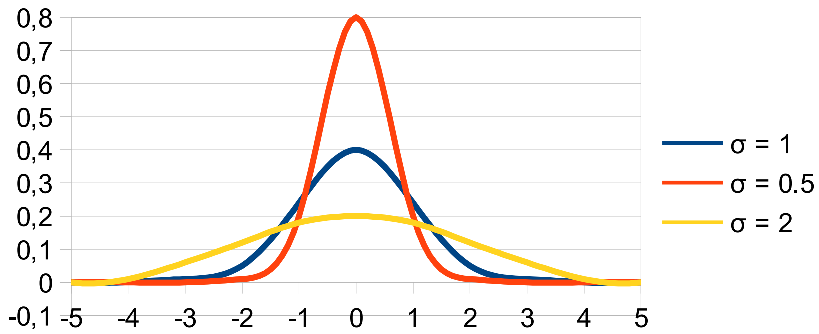
Um dies berechnen zu können gibt es folgende Formel:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

μ ist hierbei der am wahrscheinlichsten anzunehmende Wert, beispielsweise der Mittelwert. Oft wird der Durchschnitt als Erwartungswert verwendet. Bei einem IQ-Test läge der Erwartungswert Beispielsweise bei 100. Wenn bei einer Messung der Wert 5 in einer Längeneinheit erwartet wird wäre dies ebenfalls der Erwartungswert.

σ beschreibt die Auslenkung des Funktionsgraphen in Y-Richtung. Je kleiner der Wert, desto höher und schmaler wird der Graph, und desto konzentrierter sind die Werte. σ gibt somit an, wie weit das Ergebnis gestreut ist. Wenn σ = 1 ist, dann liegt die Wahrscheinlichkeit bei 68,3%, dass sich ein Wert aus allen Werten zwischen -1 und 1 befindet.

Der Flächeninhalt unter dem Graphen ist immer 1 und kann somit die Wahrscheinlichkeit angeben. Die Wahrscheinlichkeit liegt also bei 50%, dass ein Wert über dem Erwartungswert liegt, da der Flächeninhalt dafür 0.5 ergeben würde. [6]



Wenn nun eine Normalverteilung vorliegt ist kann mit Hilfe des Flächeninhaltes die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden. Da der Flächeninhalt unter der Normalverteilung genau eins ergibt kann man mit einer Integralrechnung die Wahrscheinlichkeit bestimmen. Es ist aber mit der gleichen Voraussetzung auch möglich den Flächeninhalt mir der Formel zu bestimmen.

$$\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Nun muss das Ergebnis der Klammer ausgerechnet werden. Ist dies geschehen kann die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden. Dazu ist eine Tabelle nötig, aus der man die Flächeninhalte unter dem Graphen der Standartnormalverteilung ablesen kann. [7, 8]

In folgendem Beispiel wird die die Wahrscheinlichkeit der Menge an Menschen berechnet, die einen bestimmten IQ wert haben. Der Erwartungswert liegt hier bei μ = 100 und die Standardabweichung ist σ = 15. Wir möchten nun wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass wird weniger als 120 IQ haben. Dadurch berechnet sich:

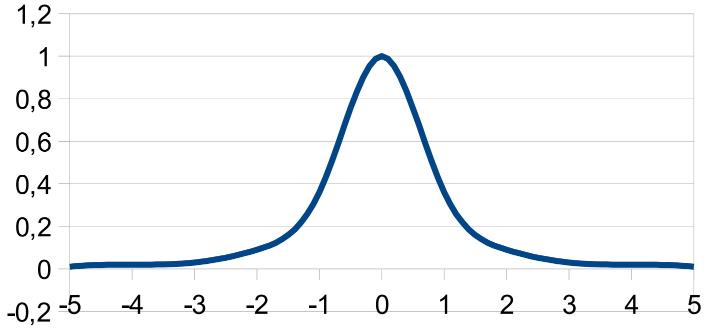
$$P=\Phi\left(\frac{120-100}{15}\right)=\Phi\,1{,}33$$

In der Standartnormalverteilungstabelle muss nun entnommen werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist. Hier muss die erste Nachkommastelle aus der Zeile und die zweite Nachkommastelle aus der Spalte abgelesen werden. Die zweite Nachkommastelle ist die 3 also muss in der Spalte 0,03 nachgelesen werden. Die Zeile ist dann 1,3 ohne die zweite Nachkommastelle. Daraus ergibt sich P = Φ1,33 = 0,908%. Die Tabelle ist den Quellen [7, 8] zu entnehmen.

| z | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,50000 | 0,50399 | 0,50798 | 0,51197 | 0,51595 | 0,51994 | 0,52392 | 0,52790 | 0,53188 | 0,53586 |
| 0,1 | 0,53983 | 0,54380 | 0,54776 | 0,55172 | 0,55567 | 0,55962 | 0,56356 | 0,56749 | 0,57142 | 0,57535 |
| 0,2 | 0,57926 | 0,58317 | 0,58706 | 0,59095 | 0,59483 | 0,59871 | 0,60257 | 0,60642 | 0,61026 | 0,61409 |
| 0,3 | 0,61791 | 0,62172 | 0,62552 | 0,62930 | 0,63307 | 0,63683 | 0,64058 | 0,64431 | 0,64803 | 0,65173 |
| 0,4 | 0,65542 | 0,65910 | 0,66276 | 0,66640 | 0,67003 | 0,67364 | 0,67724 | 0,68082 | 0,68439 | 0,68793 |
| 0,5 | 0,69146 | 0,69497 | 0,69847 | 0,70194 | 0,70540 | 0,70884 | 0,71226 | 0,71566 | 0,71904 | 0,72240 |
| 0,6 | 0,72575 | 0,72907 | 0,73237 | 0,73565 | 0,73891 | 0,74215 | 0,74537 | 0,74857 | 0,75175 | 0,75490 |
| 0,7 | 0,75804 | 0,76115 | 0,76424 | 0,76730 | 0,77035 | 0,77337 | 0,77637 | 0,77935 | 0,78230 | 0,78524 |
| 0,8 | 0,78814 | 0,79103 | 0,79389 | 0,79673 | 0,79955 | 0,80234 | 0,80511 | 0,80785 | 0,81057 | 0,81327 |
| 0,9 | 0,81594 | 0,81859 | 0,82121 | 0,82381 | 0,82639 | 0,82894 | 0,83147 | 0,83398 | 0,83646 | 0,83891 |
| 1,0 | 0,84134 | 0,84375 | 0,84614 | 0,84849 | 0,85083 | 0,85314 | 0,85543 | 0,85769 | 0,85993 | 0,86214 |
| 1,1 | 0,86433 | 0,86650 | 0,86864 | 0,87076 | 0,87286 | 0,87493 | 0,87698 | 0,87900 | 0,88100 | 0,88298 |
| 1,2 | 0,88493 | 0,88686 | 0,88877 | 0,89065 | 0,89251 | 0,89435 | 0,89617 | 0,89796 | 0,89973 | 0,90147 |
| 1,3 | 0,90320 | 0,90490 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91309 | 0,91466 | 0,91621 | 0,91774 |
| 1,4 | 0,91924 | 0,92073 | 0,92220 | 0,92364 | 0,92507 | 0,92647 | 0,92785 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93189 |
| 1,5 | 0,93319 | 0,93448 | 0,93574 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| 1,6 | 0,94520 | 0,94630 | 0,94738 | 0,94845 | 0,94950 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95449 |

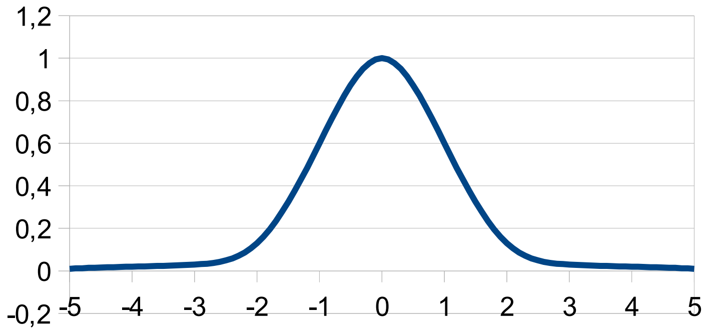
Eine Normalverteilung erlangt man bereits mit der Funktion:

$$f(x)=e^{-x^2}$$



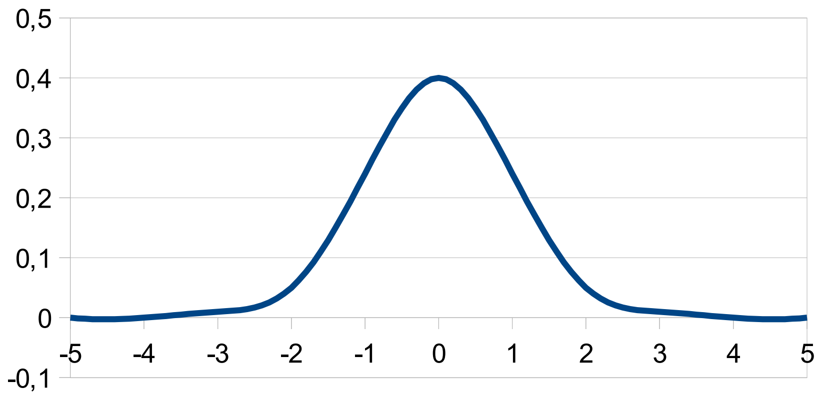

Diese Funktion ist achsensymmetrisch zu Y-Achse und der Extrempunkt liegt bei X = 0. Da die Wendepunkte allerdings unpraktisch liegen kommt man zu folgender Umformung, damit liegen die Wendepunkte genau bei $x = \pm 1$:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$$




Damit lägen die Wendepunkte genau bei $x = \pm 1$. Damit nun aber auch der Flächeninhalt unter der Funktion genau 1 ergibt muss die Funktion nochmals umgeformt werden. Hier ist die Gaußsche Normalverteilung in ihrer Ursprungsform zu sehen.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



# Quellenverzeichnis

[1] Hans Vollmayr: 17 gleiche Ecken und Kanten mit Zirkel und Lineal, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen 2005, ISBN 3-930457-72-5

[2] Hubert Mania: Gauß – Eine Biographie 2. Auflage Hamburg, 2008

[3] PTB - Physikalisch-Technische Bundesanstalt [Gesehen am: 28.10.2019] https://www.ptb.de/cms/ptb/fachabteilungen/abt4/fb-44/ag-441/darstellung-der-gesetzlichen-zeit/wann-ist-ostern.html

[4] Andrzej Kielbasiński, Hubert Schwetlick: Numerische lineare Algebra. Eine computerorientierte Einführung, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988, ISBN 3-326-00194-0.

[5] Hans Wußing: Von Gauß bis Poincaré: Mathematik und Industrielle Revolution

[6] Universität Marburg [Gesehen am: 02.01.2020] https://www.mathematik.uni-marburg.de/~lohoefer/pharma/kap-8-ws03.pdf

[7] Hans-Otto Georgii: Stochastik 4. Auflage. Walter de Gruyter, Berlin 2009,

[8] Christian Hesse: Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie 1. Auflage. Vieweg, Wiesbaden 2003,