Grafos

Caminos de costo mínimo

- *Data Structures and Algorithm Analysis in Java; 2nd Ed. Mark Allen Weiss (Capítulo 9)*
- *Estructuras de datos y algoritmos; Mark Allen Weiss. (Capítulo 9)*

Agenda

- Caminos de costo mínimo
  - Definición
  - Algoritmos para el cálculo del camino mínimo desde un origen en:
    - Grafos sin peso
    - Grafos con pesos positivos
      - Algortimo de Dijkstra: dos implementaciones
    - Grafos con pesos positivos y negativos
    - Grafos dirigidos acíclicos
  - Algoritmo para el cálculo de los caminos mínimos entre todos los pares de vértices

Camino de costo mínimo
Definición

Sea G=(V,A) un grafo dirigido y pesado, el costo *c(i,j)* está asociado a la arista *v(i,j)*.

Dado un camino: $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots v_N$

El costo del camino es:

$$C = \sum_{i=1}^{N-1} c(i, i+1)$$

Este valor también se llama longitud del camino pesado.

La longitud del camino no pesado es la cantidad de aristas

Camino de costo mínimo

Definición (cont.)

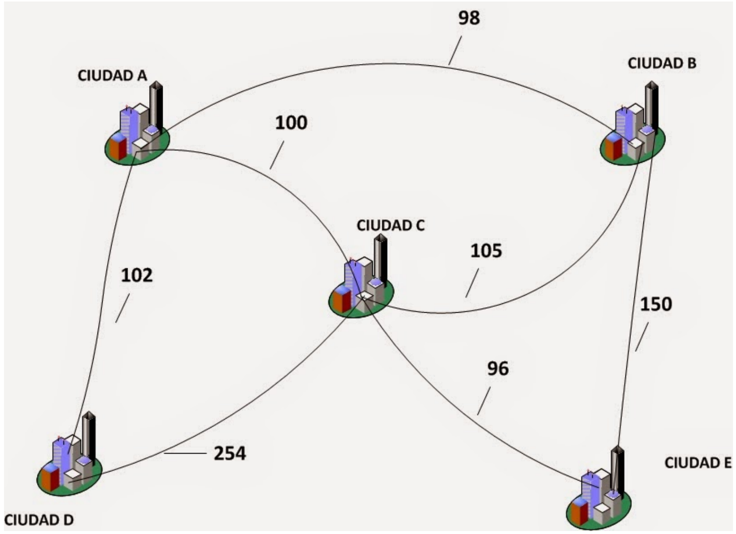
El camino de costo mínimo desde un vértice v_i a otro vértice v_j es aquel en que la suma de los costos de las aristas es mínima.

Esto significa que:

$$C = \sum_{i=1}^{N-1} c(i, i+1) \quad \text{es mínima}$$

Camino de costo mínimo

Ejemplos:

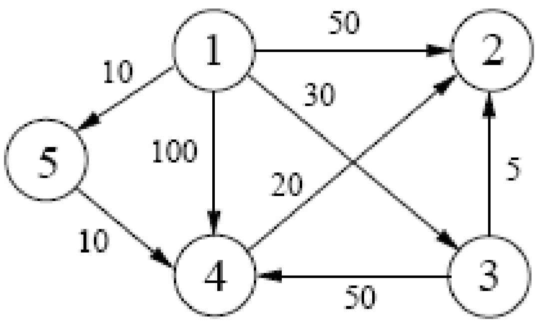


Ciudades conectadas por *Rutas* con *distancias*

Personas conectadas a través de las redes sociales

Camino de costo mínimo

Ejemplo:



$1 \xrightarrow{50} 2$ **50**

$1 \xrightarrow{30} 3 \xrightarrow{5} 2$ **35**

$1 \xrightarrow{30} 3 \xrightarrow{50} 4 \xrightarrow{20} 2$ **100**

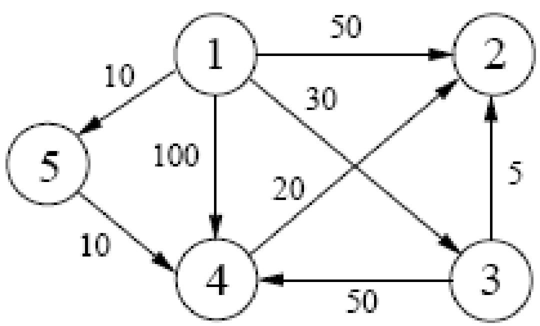
$1 \xrightarrow{100} 4 \xrightarrow{20} 2$ **120**

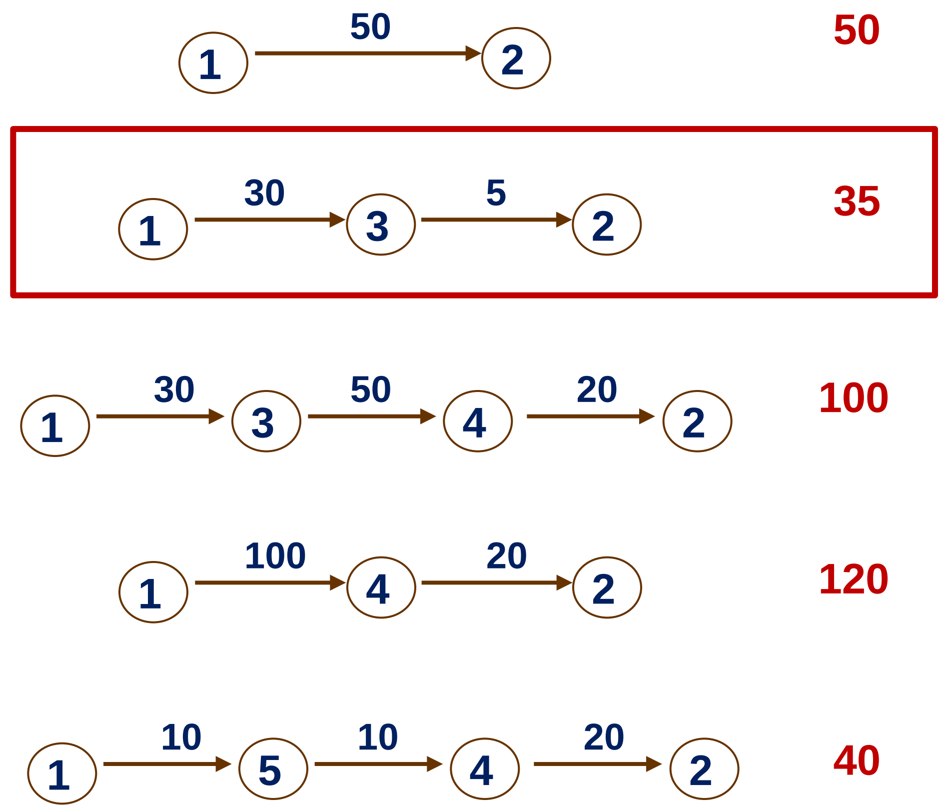
$1 \xrightarrow{10} 5 \xrightarrow{10} 4 \xrightarrow{20} 2$ **40**

Caminos posibles desde el **vértice 1** al **vértice 2**

Camino de costo mínimo

Ejemplo:





Caminos posibles desde el **vértice 1** al **vértice 2**

Algoritmos de Caminos mínimos

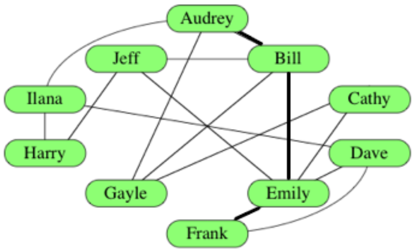
- Grafos sin peso
- Grafos con pesos positivos
- Grafos con pesos positivos y negativos
- Grafos dirigidos acíclicos

Algoritmos de Caminos mínimos

Los algoritmos calculan los caminos mínimos desde un vértice origen s a **todos** los restantes vértices del grafo

Algoritmos de Caminos mínimos

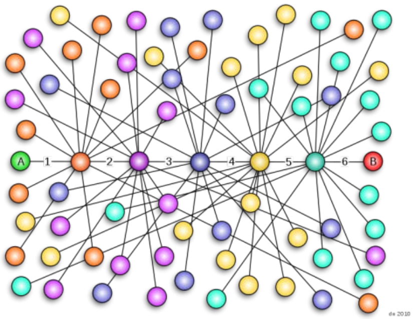
Grafos sin pesos



Ejemplos

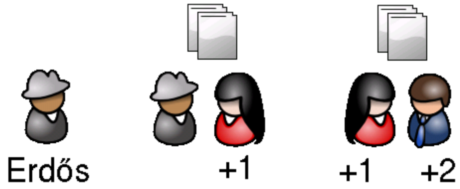
➢ **Seis grados de separación**

Se le llama *seis grados de separación* a la hipótesis que intenta probar que cualquiera en la Tierra puede estar conectado a cualquier otra persona del planeta a través de una cadena de conocidos que no tiene más de cinco intermediarios (conectando a ambas personas con sólo seis enlaces)



➢ **Número de Erdős**

Es un modo de describir la distancia colaborativa, en lo relativo a trabajos matemáticos entre un autor y Paul Erdős (matemático húngaro considerado uno de los escritores más prolíficos de trabajos matemáticos)



Si la **mujer de rojo** colabora directamente con Erdős en un trabajo, y luego el **hombre de azul** colabora con ella; entonces el hombre de azul tiene un número de Erdős con valor 2, y está "a dos pasos" de Paul Erdős (asumiendo que nunca ha colaborado directamente con éste).

➢ El número de Bacon es una aplicación de la misma idea en la industria fílmica- un cálculo que conecta actores que han aparecido junto al actor *Kevin Bacon* en alguna película.

Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos sin pesos

Hilo

Diego Golombek @DiegoGolombek

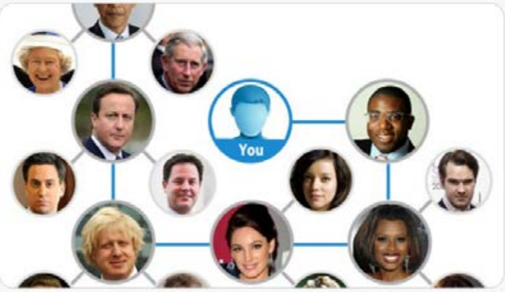
1.¿ESTAMOS TAN AISLADOS? El "mito" de los seis grados de separación.

Aislamiento social, cuarentena, #QuedateEnCasa. Pero, ¿estamos tan separados realmente?

9:24 a. m. · 1 abr. 2020 · TweetDeck

285 Retweets **38** Tweets citados **820** Me gusta

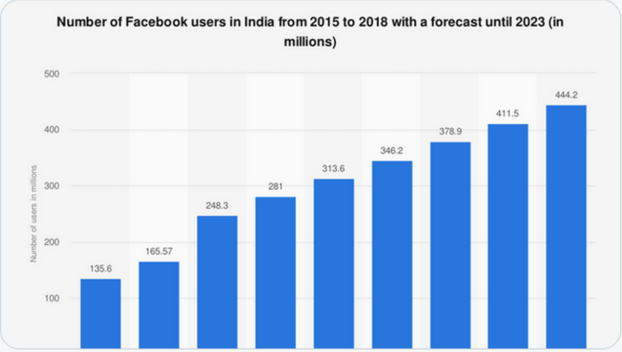
Diego Golombek @DiegoGolombek · 1 abr.
En respuesta a @DiegoGolombek
2. Es parte de una leyenda urbana: entre dos personas cualesquiera en la tierra no hay más de seis grados de separación. En otras palabras, ¿qué nos separa, a ustedes o a mí, de la madre Teresa, de Barack Obama o de Paul McCartney?



2 8 72

Diego Golombek @DiegoGolombek · 1 abr.
3. Es fácil: el socio del cuñado de la prima del intendente que es amigo del empresario que conoce al embajador que alguna vez le dio la mano (o el codo) a cualquiera de estos dos personajes, y paramos de contar.

Diego Golombek @DiegoGolombek · 1 abr.
9. Hay pruebas de que seis es multitud. El uso de redes sociales es ideal para encontrar los grados de separación entre dos personas. Recientemente el equipo de Facebook analizó las conexiones de 721 millones de usuarios que combinados alcanzaban a unos 69.000 millones de amigos.



1 6 53

Diego Golombek @DiegoGolombek · 1 abr.
10. Los primeros cálculos dieron alrededor de 5 pasos entre dos usuarios cualquiera en Facebook.

1 6 68

Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos sin pesos

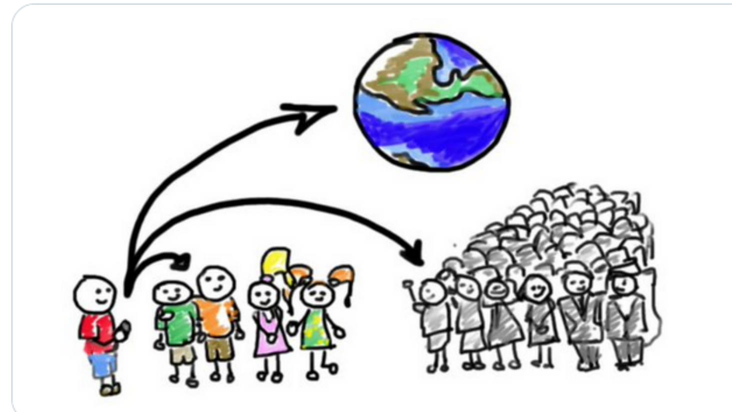
Personas relevantes

Diego Golombek @DiegoGolombek Seguir

Biologo. Investigador / Researcher at CONICET. Profesor Universidad Nacional de Quilmes.

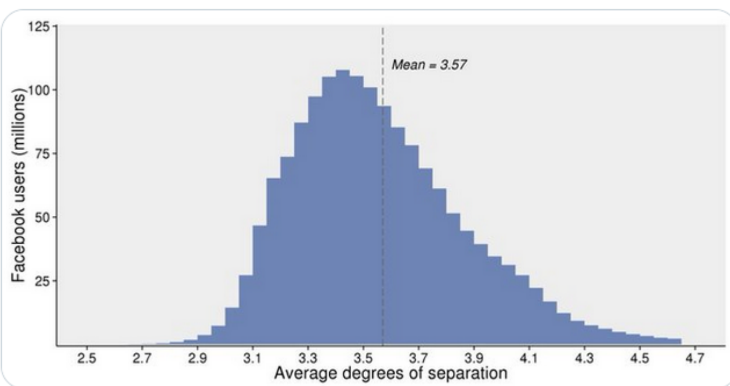
Diego Golombek @DiegoGolombek · 1 abr.

13. Pero seamos más conservadores: si tenemos 50 amigos que tienen otros 50 amigos que no son amigos nuestros y así sucesivamente... En 5 pasos estaríamos conectados con 3125 millones de personas: algo así como la mitad del mundo.



Diego Golombek @DiegoGolombek · 1 abr.

11. Pero un análisis más reciente dio aun menos: entre dos personas cualquiera en la red hay un promedio de... ¡3,5 pasos! Con las redes sociales el mundo es aun más pañuelo.



3 10 80

Diego Golombek @DiegoGolombek · 1 abr.

14. Lo interesante es que a través de estos grados de conexión (o de separación) se transmite de todo: desde potenciales enfermedades hasta la felicidad.

1 9 81

Hilo de Twitter (X) de Diego Golombek, Año 2020.

Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos sin pesos

- Para cada vértice v se mantiene la siguiente información:
  - D_v : distancia mínima desde el origen s (inicialmente ∞ para todos lo vértices excepto el origen con valor 0)
  - P_v : vértice por donde paso para llegar
  - Conocido : dato booleano que me indica si está procesado (inicialmente todos en 0)

  (este último campo no va a ser necesario para esta clase de grafos)

Algoritmos de Caminos mínimos
Grafos sin pesos

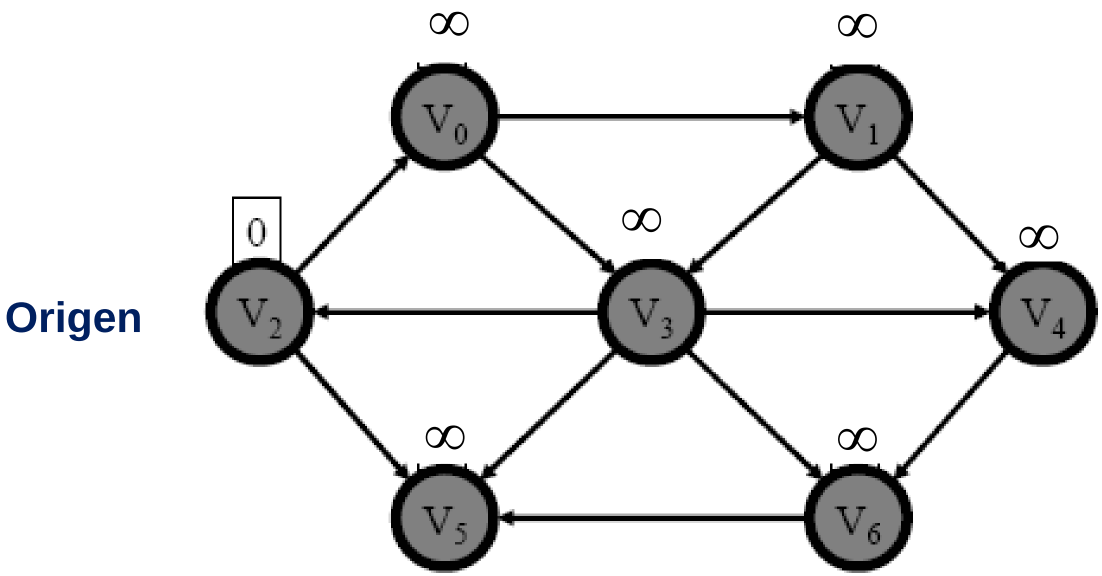
- Estrategia: Recorrido en amplitud (BFS)

Pasos:

- Avanzar por niveles a partir del origen, asignando distancias según se avanza (se utiliza una cola)
- Inicialmente, es $D_w=\infty$. Al inspeccionar w se reduce al valor correcto $D_w= D_v+1$
- Desde cada v, visitamos a todos los nodos adyacentes a v

Algoritmos de Caminos mínimos

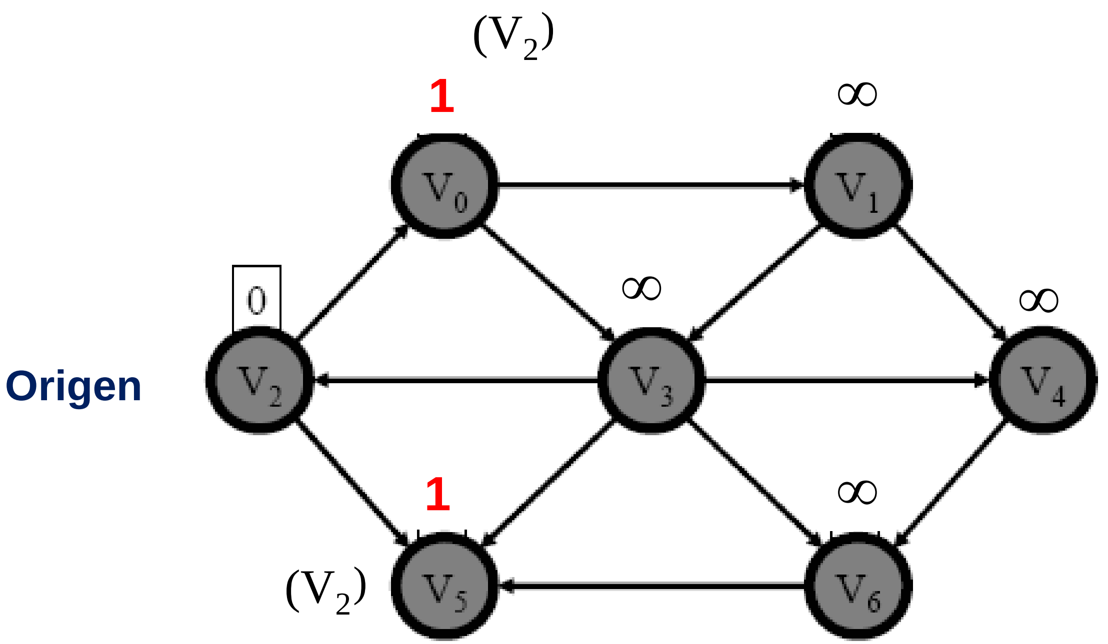
Grafos sin pesos (cont.)



Cola : V_2

Algoritmos de Caminos mínimos

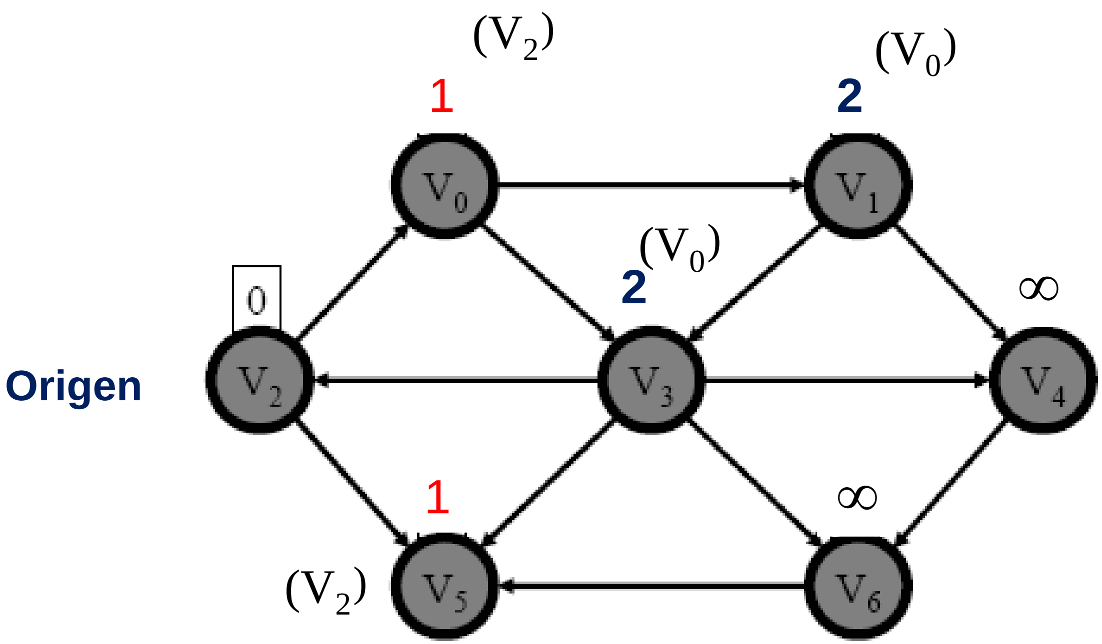
Grafos sin pesos (cont.)



Cola : ~~V_2~~ V_0 V_5

Algoritmos de Caminos mínimos

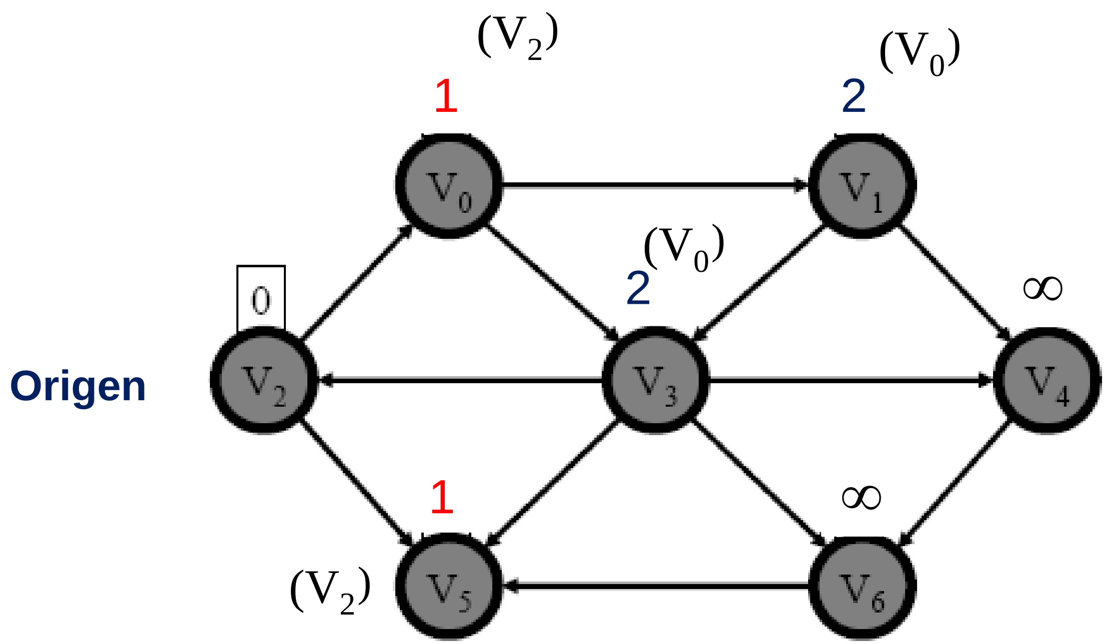
Grafos sin pesos (cont.)



Cola : ~~V_2~~ ~~V_0~~ V_5 V_1 V_3

Algoritmos de Caminos mínimos

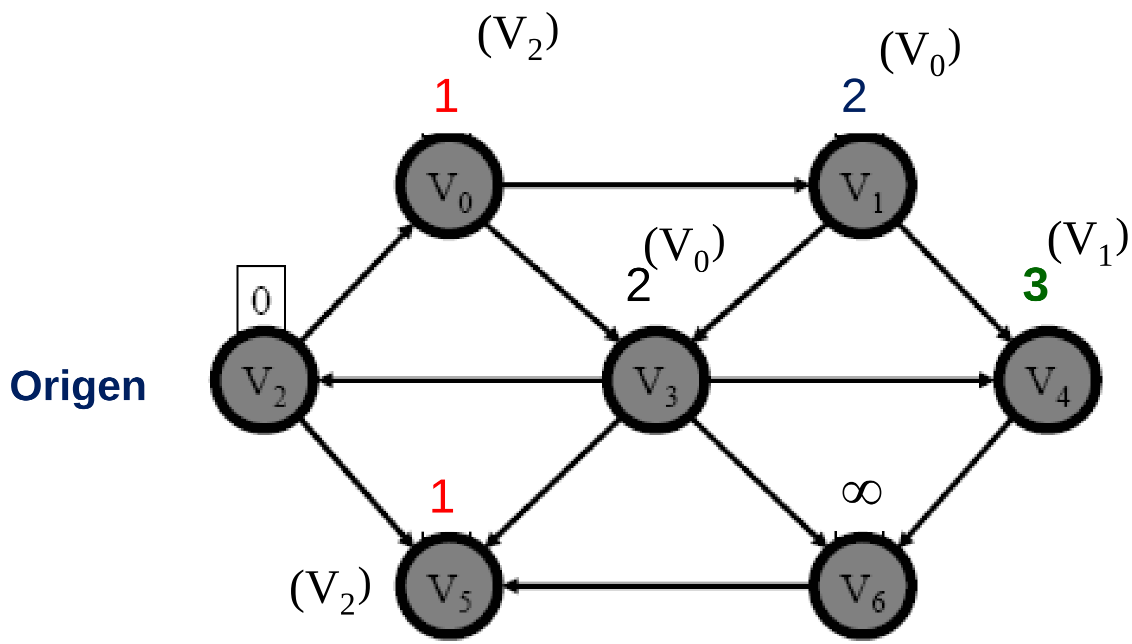
Grafos sin pesos (cont.)



Cola : ~~V_2~~ ~~V_0~~ ~~V_5~~ V_1 V_3

Algoritmos de Caminos mínimos

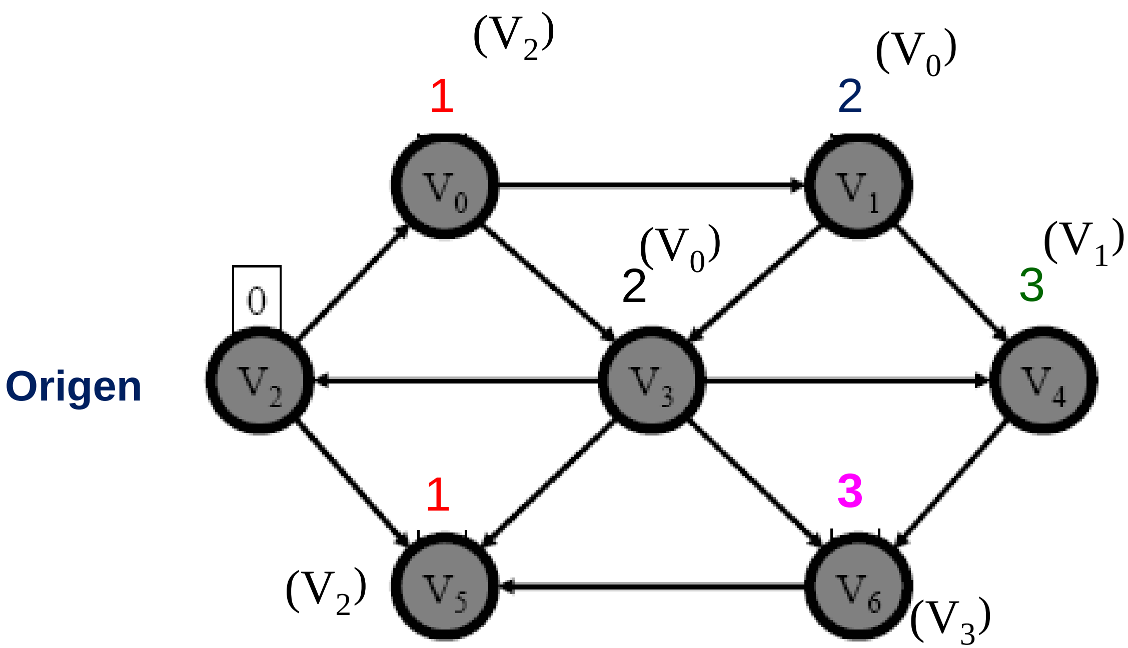
Grafos sin pesos (cont.)



Cola : ~~V_2~~ ~~V_0~~ ~~V_5~~ ~~V_1~~ V_3 V_4

Algoritmos de Caminos mínimos

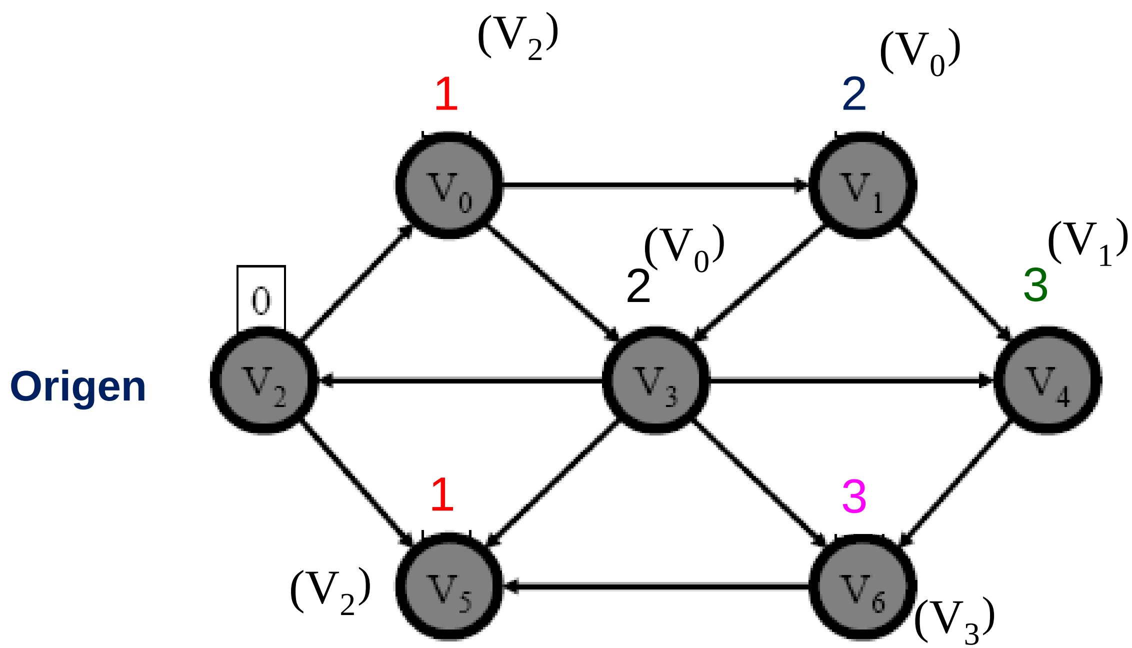
Grafos sin pesos (cont.)



Cola : $\cancel{V_2}$ $\cancel{V_0}$ $\cancel{V_5}$ $\cancel{V_1}$ $\cancel{V_3}$ V_4 V_6

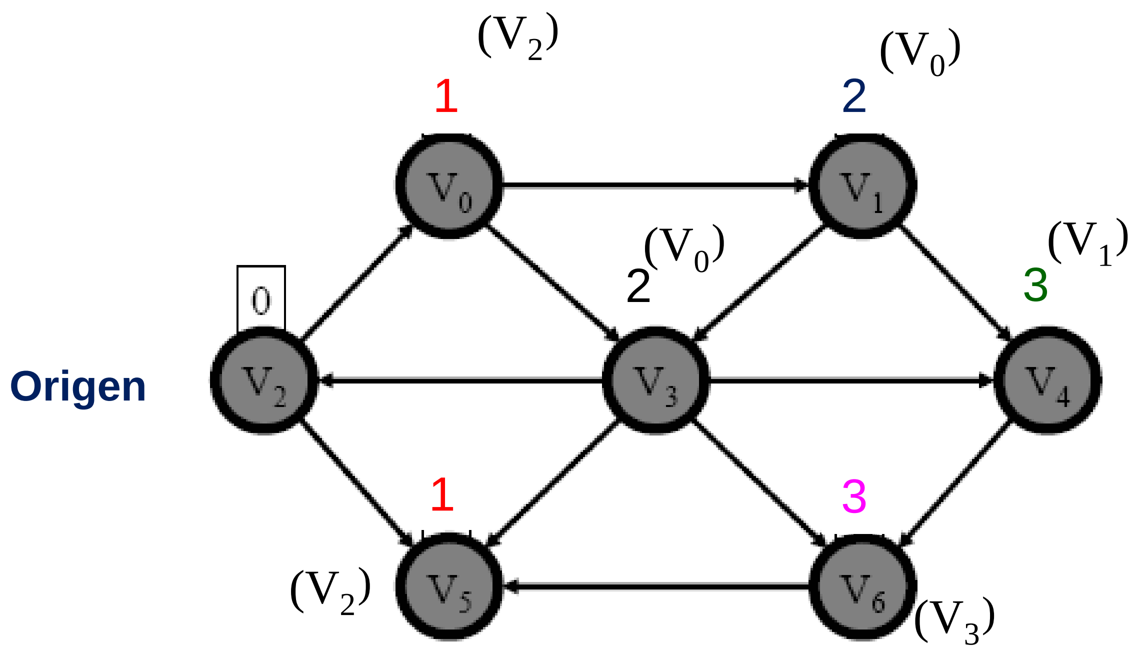
Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos sin pesos (cont.)



Cola : $\cancel{V_2}$ $\cancel{V_0}$ $\cancel{V_5}$ $\cancel{V_1}$ $\cancel{V_3}$ $\cancel{V_4}$ V_6

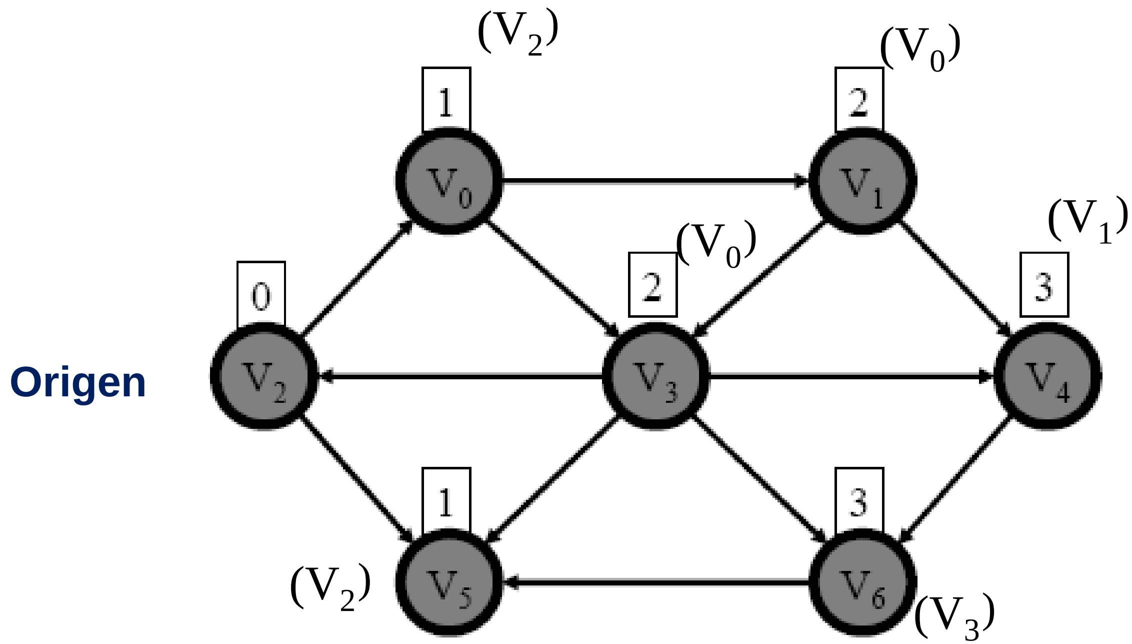
Algoritmos de Caminos mínimos
Grafos sin pesos (cont.)



Cola : ~~V_2~~ ~~V_0~~ ~~V_5~~ ~~V_1~~ ~~V_3~~ ~~V_4~~ ~~V_6~~

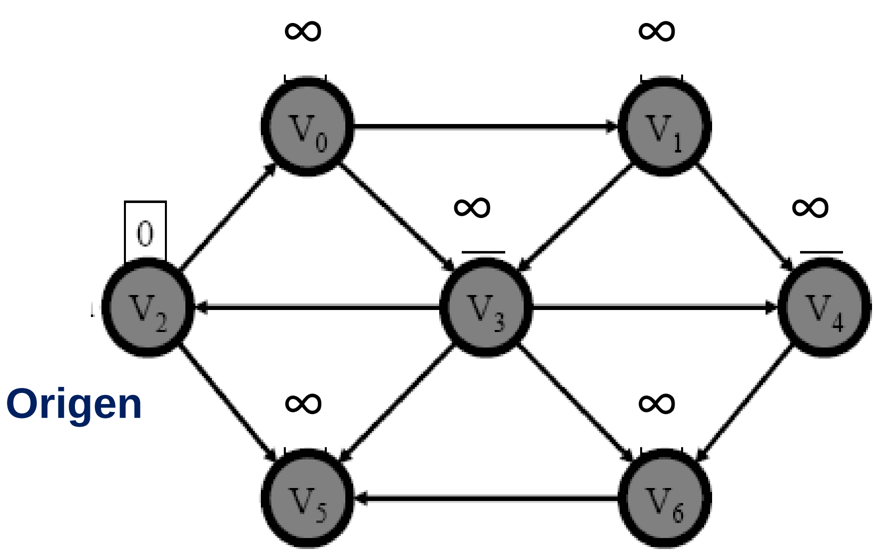
Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos sin pesos (cont.)



Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos sin pesos (cont.)



V_i	D_v	P_v	Conoc
V_0	∞	0	0
V_1	∞	0	0
V_2	0	0	0
V_3	∞	0	0
V_4	∞	0	0
V_5	∞	0	0
V_6	∞	0	0

Valores iniciales de la tabla

Algoritmos de Caminos mínimos
basado en BFS

```
Camino_min_GrafoNoPesadoG,s) {
    para cada vértice v ∈ V
        D_v = ∞; P_v = 0; Conoc_v= 0;
    D_s = 0; Encolar (Q,s); Conoc_s= 1;
    Mientras (not esVacio(Q)){
        Desencolar (Q,u);
        para c/vértice w ∈ V adyacente a u {
            si (w no es conocido) {
                D_w = D_u + 1;
                P_w = u;
                Encolar(Q,w); Conoc_w= 1;
            }
        }
    }
}
```

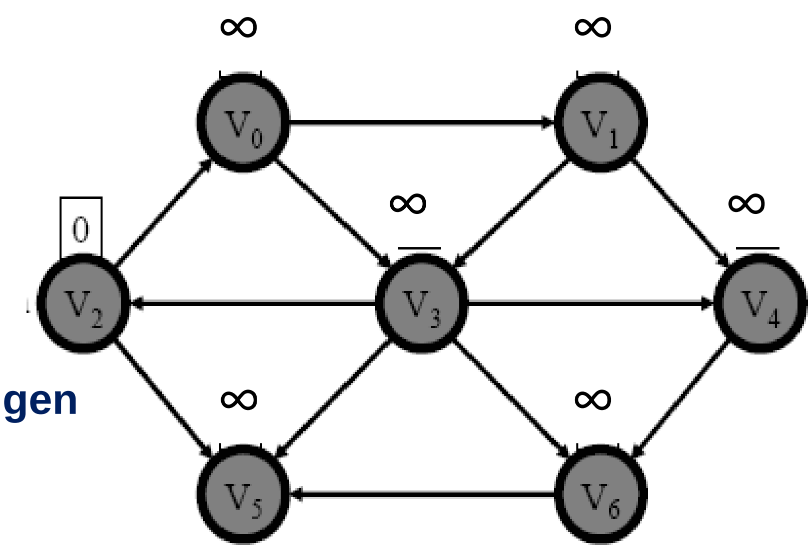
Algoritmos de Caminos mínimos

basado en BFS

```
Camino_min_GrafoNoPesadoG,s) {
    para cada vértice v ∈ V
        D_v = ∞; P_v = 0; Conoc_v= 0;
    D_s = 0; Encolar (Q,s); Conoc_v= 1;
    Mientras (not esVacio(Q)) {
        Desencolar (Q,u);
        para c/vértice w ∈ V adyacente a u {
            si (w no es conocido) {
                D_w = D_u + 1;
                P_w = u;
                Encolar(Q,w); Conoc_w= 1;
            }
        }
    }
}
```

Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos sin pesos (cont.)

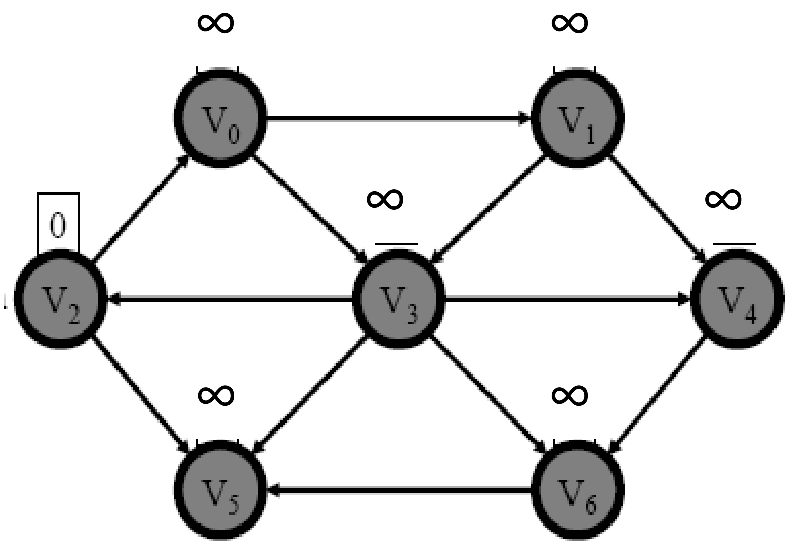


Origen

V_i	D_v	P_v	Conoc
V_0	∞	0	0
V_1	∞	0	0
V_2	0	0	0
V_3	∞	0	0
V_4	∞	0	0
V_5	∞	0	0
V_6	∞	0	0

Valores iniciales de la tabla

Algoritmos de Caminos mínimos
Grafos sin pesos (cont.)



V_i	D_v	P_v
V_0	∞	0
V_1	∞	0
V_2	0	0
V_3	∞	0
V_4	∞	0
V_5	∞	0
V_6	∞	0

Valores iniciales de la tabla

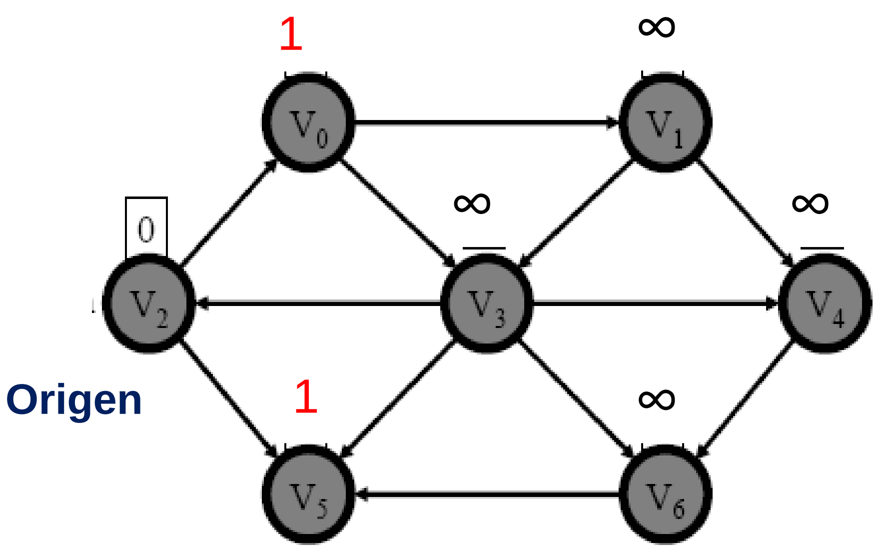
Algoritmos de Caminos mínimos

basado en BFS

```
Camino_min_GrafoNoPesadoG,s) {
    para cada vértice v ∈ V
         Dv = ∞; Pv = 0;
    Ds = 0; Encolar (Q,s);
    Mientras (not esVacio(Q)) {
        Desencolar(Q,u);
        para c/vértice w ∈ V adyacente a u {
            si (Dw = ∞) {
                    Dw = Du + 1;
                    Pw = u;
                    Encolar(Q,w);
            }
        }
    }
}
```

Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos sin pesos (cont.)

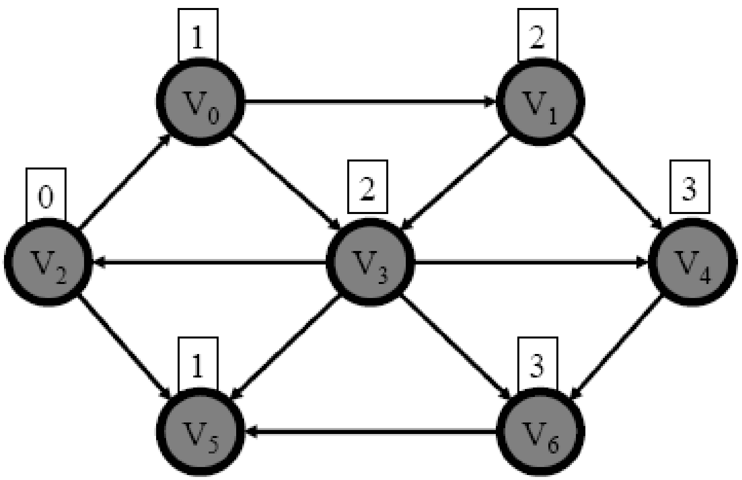


V_i	D_v	P_v
V_0	1	V_2
V_1	∞	0
V_2	0	0
V_3	∞	0
V_4	∞	0
V_5	1	V_2
V_6	∞	0

Valores 1° paso

Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos sin pesos (cont.)



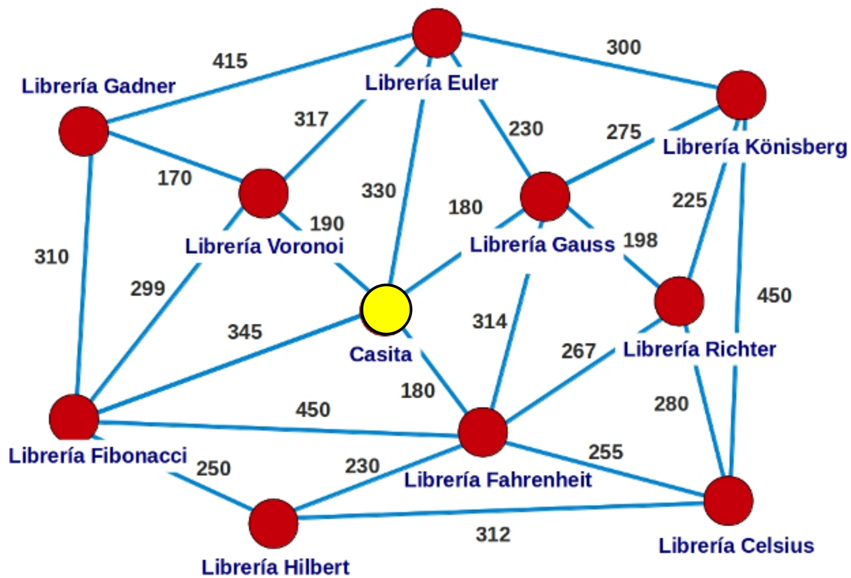
Origen

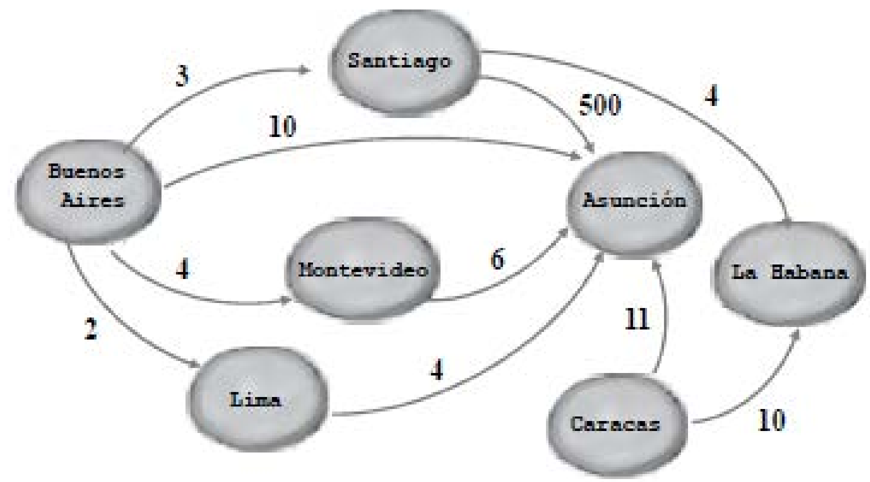
V_i	D_v	P_v
V_0	1	V_2
V_1	2	V_0
V_2	0	0
V_3	2	V_0
V_4	3	V_1
V_5	1	V_2
V_6	3	V_3

Valores finales de la tabla

Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos con pesos positivos





Encontrar los caminos más cortos desde Casita a cada una de las librerías

Encontrar la ruta aérea más corta desde Buenos Aires a Asunción

Algoritmo de Dijkstra

- Estrategia: Algoritmo de Dijkstra

Pasos:

- Dado un vértice origen ***s***, elegir el vértice ***v*** que esté a la menor distancia de ***s***, dentro de los vértices no procesados
- Marcar ***v*** como procesado
- Actualizar la distancia de ***w*** adyacente a ***v***

Algoritmo de Dijkstra (cont.)

- Para cada vértice v mantiene la siguiente información:
  - D_v : distancia mínima desde el origen (inicialmente ∞ para todos lo vértices excepto el origen con valor 0)
  - P_v : vértice por donde paso para llegar
  - Conocido : dato booleano que me indica si está procesado (inicialmente todos en 0)

Algoritmo de Dijkstra (cont.)

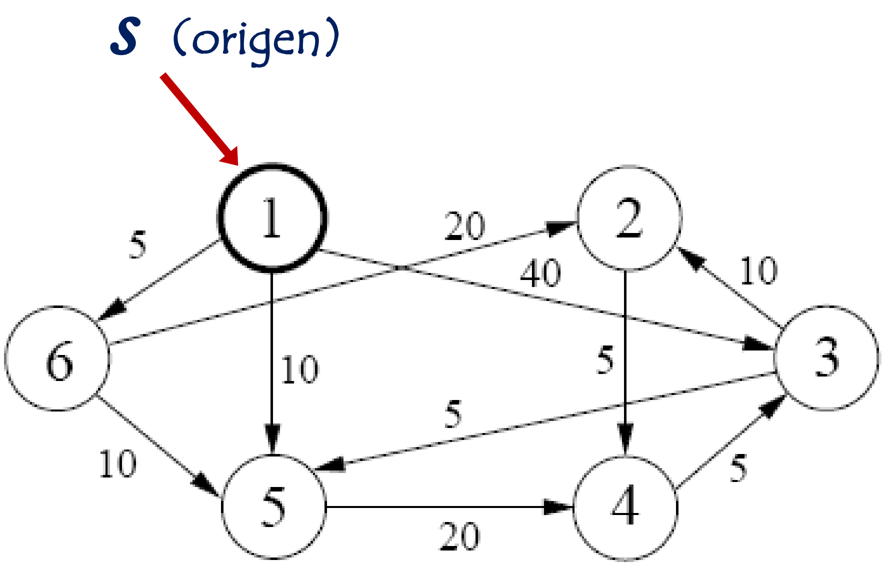
- La actualización de la distancia de los adyacentes ***w*** se realiza con el siguiente criterio:
  - Se compara D_w con $D_v + c(v,w)$

Distancia de *s* a *w*
(sin pasar por *v*)

Distancia de *s* a *w*,
pasando por *v*

  - Se actualiza si $D_w > D_v + c(v,w)$

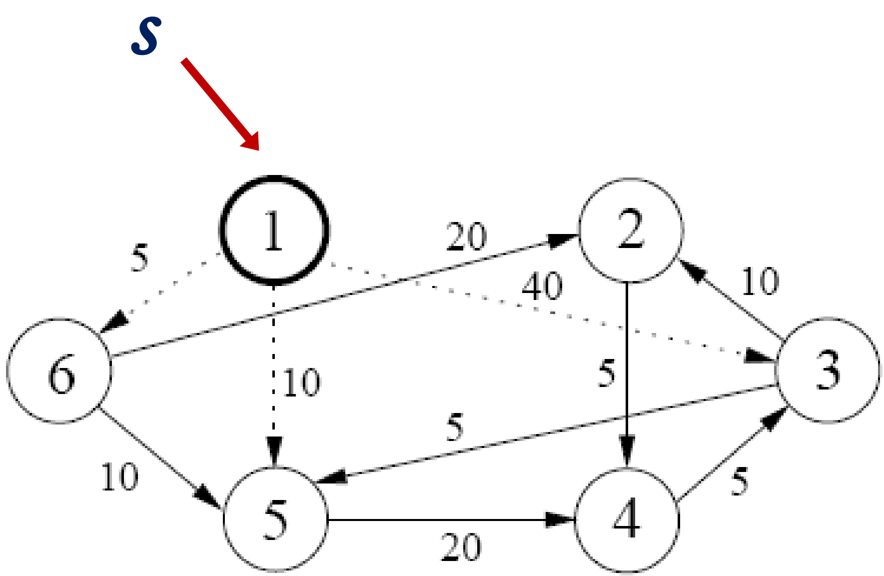
Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo



V	D_v	P_v	Conoc.
1	**0**	0	0
2	∞	0	0
3	∞	0	0
4	∞	0	0
5	∞	0	0
6	∞	0	0

Valores iniciales de la tabla

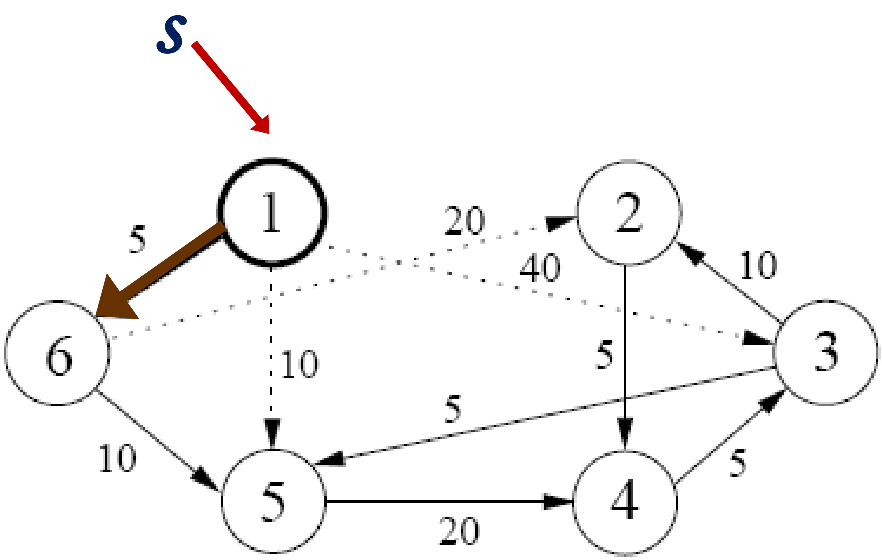
Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo (cont.)



V	D_v	P_v	Conoc.
1	0	0	**1**
2	∞	0	0
3	**40**	**1**	0
4	∞	0	0
5	**10**	**1**	0
6	**5**	**1**	0

- Valores al seleccionar el vértice 1
- Actualiza la distancia de 3, 5 y 6

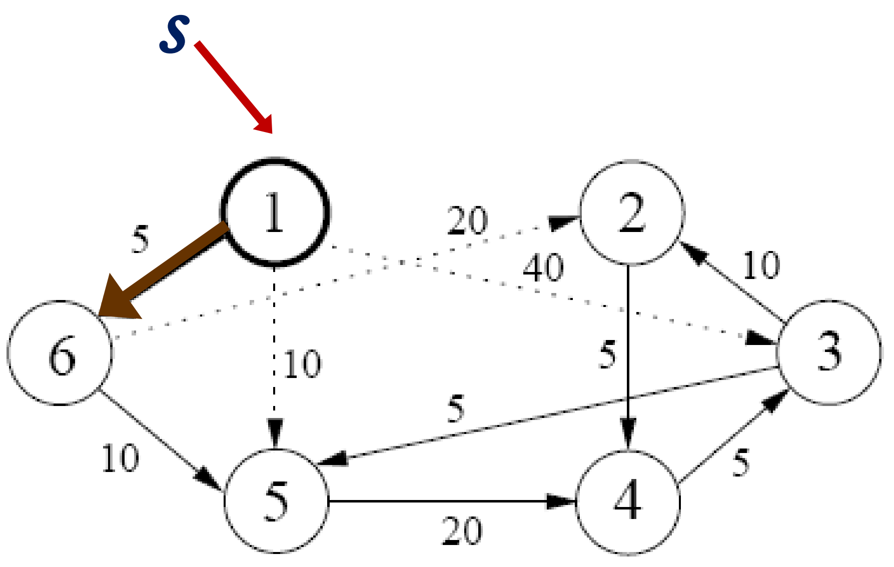
Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo (cont.)



V	D_v	P_v	Conoc.
1	0	0	1
2	∞	0	0
3	40	1	0
4	∞	0	0
5	10	1	0
6	5	1	0

Próximo vértice a elegir

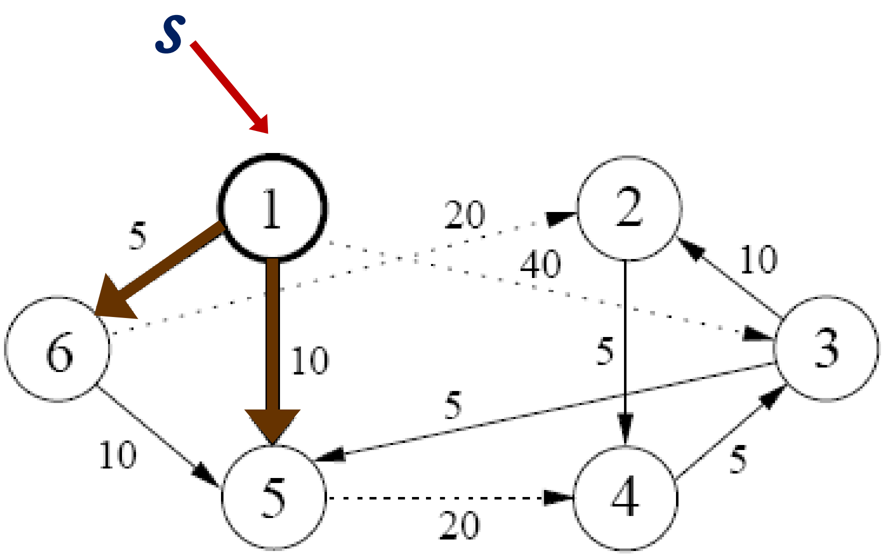
Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo (cont.)



V	D_v	P_v	Conoc.
1	0	0	1
2	**25**	**6**	0
3	40	1	0
4	∞	0	0
5	10	1	0
6	5	1	**1**

- Valores al seleccionar el vértice 6
- Actualiza la distancia de 2 (25 < ∞)
- La distancia de 5 es mayor que la de la tabla (no se actualiza)

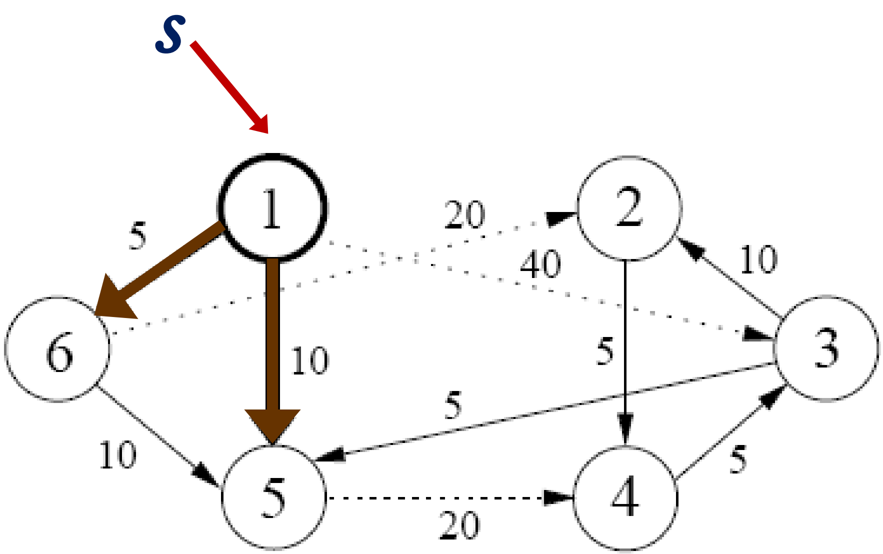
Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo (cont.)



V	D_v	P_v	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	0
3	40	1	0
4	∞	0	0
5	10	1	0
6	5	1	1

Próximo vértice a elegir

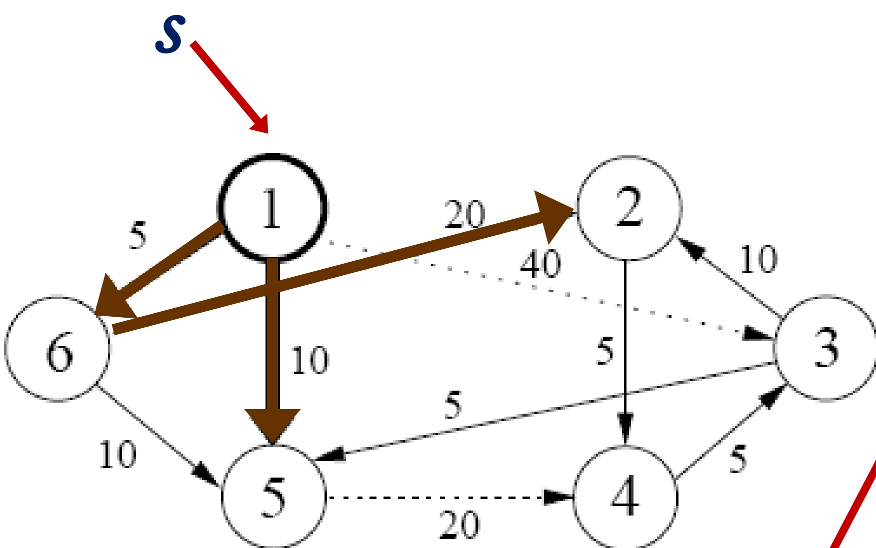
Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo (cont.)



V	D_v	P_v	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	0
3	40	1	0
4	**30**	**5**	0
5	10	1	**1**
6	5	1	1

- Valores al seleccionar el vértice 5
- Actualiza la distancia de 4 (30 < ∞)

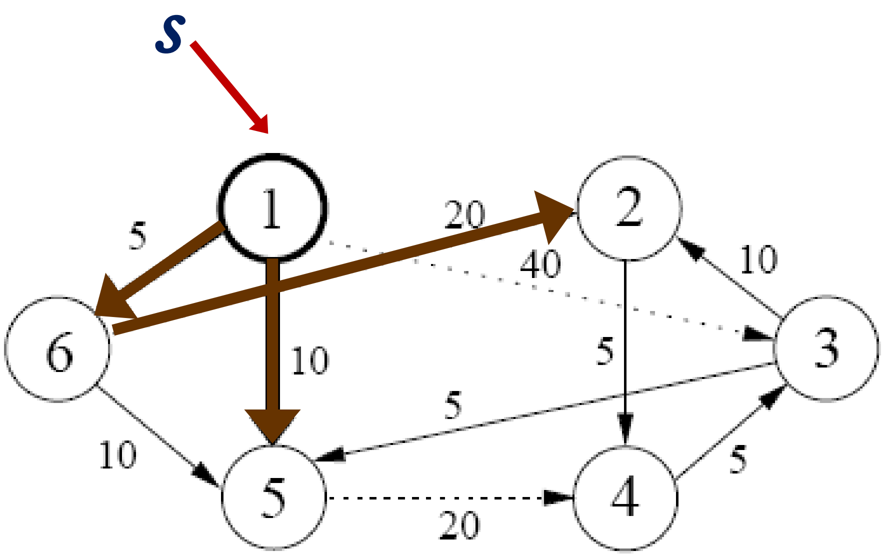
Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo (cont.)



Próximo vértice a elegir

V	D_v	P_v	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	0
3	40	1	0
4	**30**	**5**	0
5	10	1	1
6	5	1	1

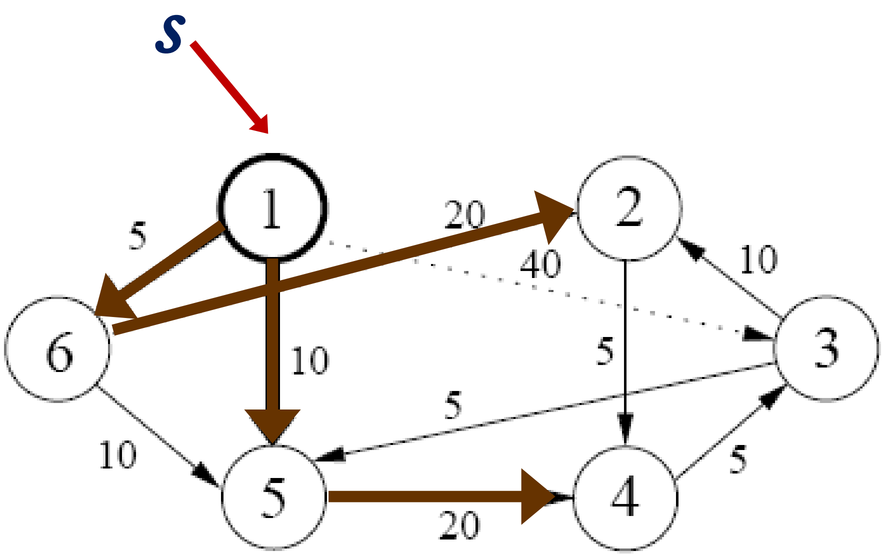
Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo (cont.)



V	D_v	P_v	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	1
3	40	1	0
4	30	5	0
5	10	1	1
6	5	1	1

- Valores al seleccionar el vértice 2
- La distancia de 4 es igual que la de la tabla (no se actualiza)

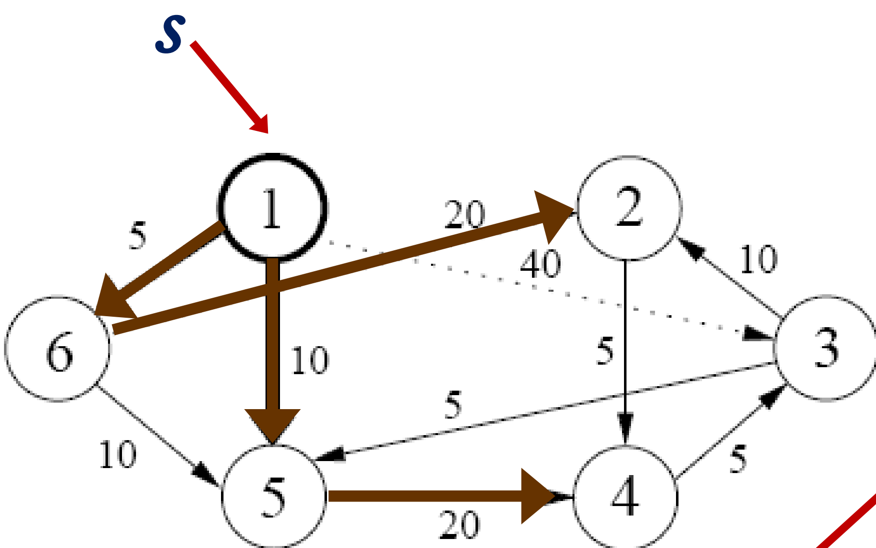
Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo (cont.)



V	D_v	P_v	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	**1**
3	40	1	0
4	30	5	0
5	10	1	1
6	5	1	1

Próximo vértice a elegir

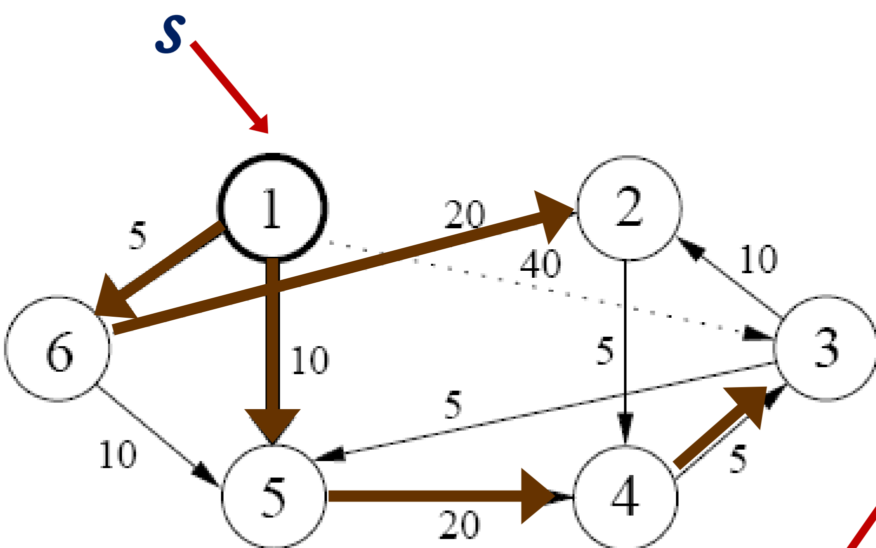
Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo (cont.)



V	D_v	P_v	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	1
3	35	4	0
4	30	5	1
5	10	1	1
6	5	1	1

- Valores al seleccionar el vértice 4
- Actualiza la distancia de 3 (35 < 40)

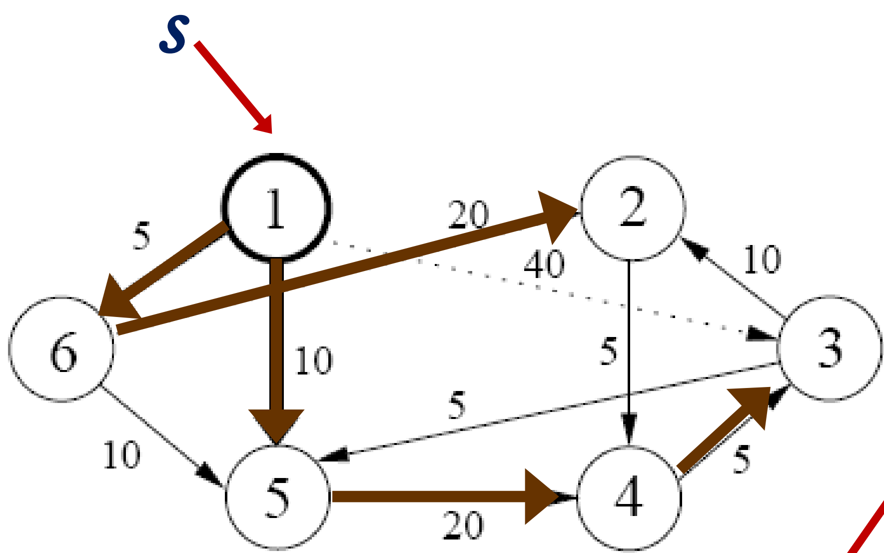
Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo (cont.)



Próximo vértice a elegir

V	D_v	P_v	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	**1**
3	35	4	0
4	30	5	1
5	10	1	1
6	5	1	1

Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo (cont.)



V	D_v	P_v	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	**1**
3	35	4	1
4	30	5	1
5	10	1	1
6	5	1	1

- Como el vértice 3 no tiene adyacentes no conocidos, no hay actualizaciones.
- Como ya todos los vértices son conocidos, éstos son los **Costos mínimos resultantes**.

Algoritmo de Dijkstra

```
Dijkstra(G,w, s){
    para cada vértice v ∈ V
         D_v = ∞;    P_v = 0;
    D_s = 0;
    para cada vértice v ∈ V {
        u = vérticeDesconocidoMenorDist;
        Marcar u como conocido;
        para cada vértice w ∈ V adyacente a u
            si (w no está conocido)
                si (D_w > D_u + c(u,w)) {
                    D_w = D_u + c(u,w);
                    P_w = u;
                }
        }
    }
}
```

Búsqueda secuencial en el arreglo **D** del vértice **u** tq $\mathbf{D_u}$ sea **mínima** y **u no conocido**

Indica que la distancia $\mathbf{D_u}$ es el resultado final para llegar al vértice **u**.

Para mejorar, cuando corresponda, las distancias a los adyacentes de **u.**

Algoritmo de Dijkstra
Tiempo de ejecución (I)

Si almacenamos las distancias en un **vector**, tendremos que :

- El bucle ***para*** de la línea (4) se ejecuta para todos los vértices
  → |V| iteraciones

- La operación ***vérticeDesconocidoMenorDist*** -línea (5)- es O(|V|) y dado que se realiza |V| veces
  → el costo total de ***vérticeDesconocidoMenorDist*** es O($|V|^2$)

- El bucle ***para*** de la línea (7) se ejecuta para los vértices adyacentes de cada vértice. El número total de iteraciones será la cantidad de aristas del grafo.
  → |E| iteraciones

- El costo total del algoritmo es ($|V|^2$ + |E|) es O($|V|^2$)

Algoritmo de Dijkstra - Tiempo de Ejec. (II)

```
Dijkstra(G,w, s){
    para cada vértice v ∈ V
        D_v = ∞;    P_v = 0;
    D_s = 0;
    para cada vértice v ∈ V {
        u = vérticeDesconocidoMenorDist;
        Marcar u como conocido;
        para cada vértice w ∈ V adyacente a u
            si (w no está conocido)
                si (D_w > D_u + c(u,w)) {
                    D_w = D_u + c(u,w);
                    P_w = u;
                }
        }
    }
}
```

Algoritmo de Dijkstra - Tiempo de Ejec. (II)

```
Dijkstra(G,w, s){
    para cada vértice v ∈ V
        D_v = ∞;   P_v = 0;
    D_s = 0;
    para cada vértice v ∈ V {
        u = vérticeDesconocidoMenorDist;
        Marcar u como conocido;
        para cada vértice w ∈ V adyacente a u
            si (w no está conocido)
                si (D_w > D_u + c(u,w)) {
                    D_w = D_u + c(u,w);
                    P_w = u;
                }
        }
    }
}
```

Usar una HEAP para almacenar las D_v. Con Delete-min se obtiene el vértice **u** tq $\mathbf{D_u}$ sea **mínima** y **u no conocido**

Con Insert (**w,** $\mathbf{D_w}$) se actualiza la HEAP.

Algoritmo de Dijkstra
Tiempo de ejecución (II)

Optimización: la operación ***vérticeDesconocidoMenorDist*** es más eficiente si almacenamos las distancias en una **heap**.

- La operación ***vérticeDesconocidoMenorDist*** -línea (5)- es O(log|V|) y dado que se realiza |V| veces
  → el costo total de ***vérticeDesconocidoMenorDist*** es O(|V| log |V|)

- El bucle ***para*** de la línea (7) que se ejecuta para los vértices adyacentes de cada vértice, también supone ***modificar*** la prioridad (distancia) y ***reorganizar*** la heap luego de la línea (10). Cada iteración es O(log|V|)
  → realiza |E| iteraciones, O(|E| log|V|)

- El costo total del algoritmo es (|V| log|V|+ |E| log|V|) es O(|E| log|V|)

Algoritmo de Dijkstra
Tiempo de ejecución (III)

Variante para evitar ***modificar*** y ***reorganizar*** la heap:

la actualización de la heap luego de la línea (10) se puede resolver insertando el vértice $\boldsymbol{w}$ y su nuevo valor $\boldsymbol{D_w}$ cada vez que éste se modifica.

- El tamaño de la heap puede crecer hasta |E|.
  Dado que $|E| \leq |V|^2$, $\log |E| \leq 2 \log |V|$, el costo total del algoritmo no varía

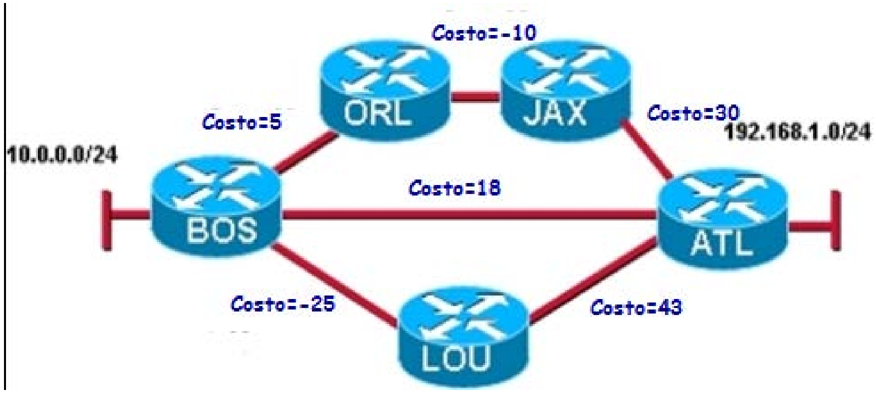
- El costo total del algoritmo es O(|E| log|V|)

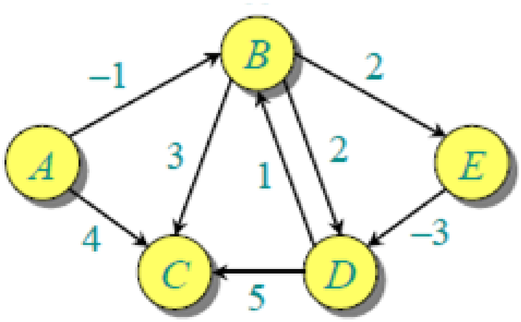
Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos con pesos positivos y negativos

Ejemplos:

- Simulaciones científicas
- Redes de flujo
- Protocolos de ruteo basados en vector de distancias



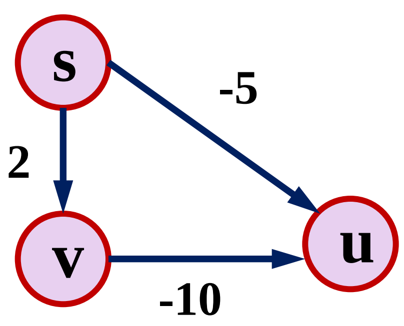


Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos con pesos positivos y negativos

- Estrategia: Encolar los vértices

Si el grafo tiene aristas negativas, el algoritmo de Dijkstra puede dar un resultado erróneo.



V	D_v	P_v	Conoc.
s	0	0	1
u	-5	s	1
v	2	s	1

Error !!

La distancia mínima de **s** a **u** es -8

Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos con pesos positivos y negativos (cont.)

Pasos:

- Encolar el vértice origen ***s***.
- Procesar la cola:
  - Desencolar un vértice.
  - Actualizar la distancia de los adyacentes D_w siguiendo el mismo criterio de Dijkstra.
  - Si ***w*** no está en la cola, encolarlo.

El costo total del algoritmo es O(|V| |E|)

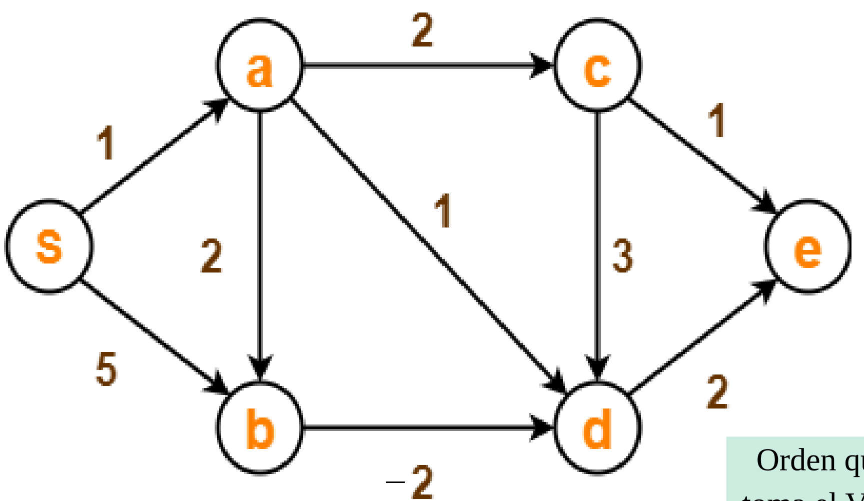
Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos con pesos positivos y negativos (cont.)

```
Camino_min_GrafoPesosPositivosyNegativos (G,s)
{
    D_s = 0; Encolar (Q,s);
    Mientras (not esVacio(Q)) {
       Desencolar(Q,u);
       para c/vértice w ∈ V adyacente a u {
          si (D_w > D_u + c(u,w)) {
                D_w = D_u + c(u,w);
                P_w = u;
                si (w no está en Q)
                    Encolar(Q,w);
          }
       }
    }
}
```

Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos con pesos positivos y negativos (cont.)

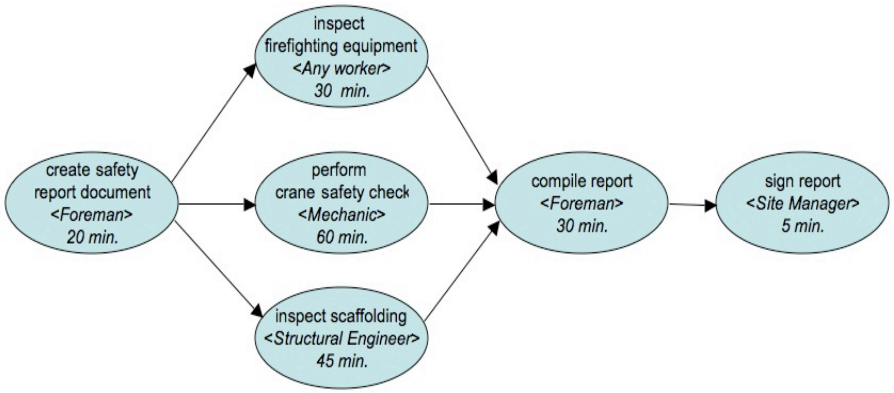


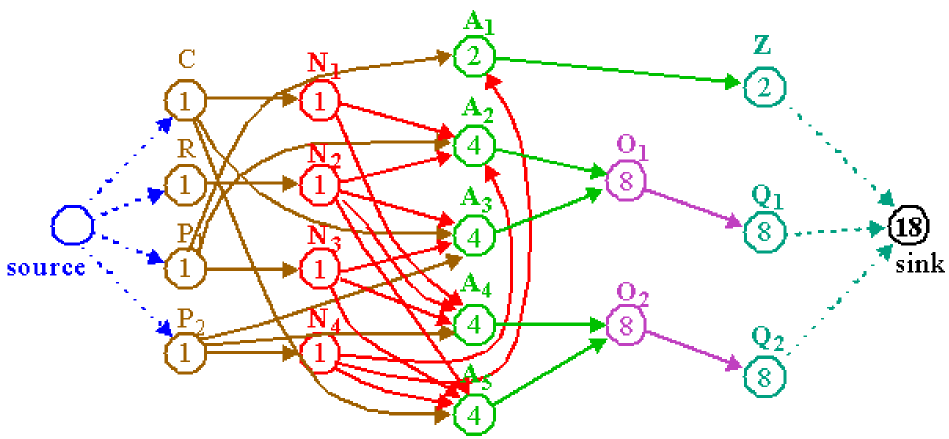
Orden que se toma el Vértice	Vértices	Distancia (S,v)	Vértice Previo	Encolado
1º	S	0		~~0~~ 1
	a	∞		0
	b	∞		0
	c	∞		0
	d	∞		0
	e	∞		0

Algoritmos de Caminos mínimos
Grafos acíclicos

- Encontrar la ganancia máxima en un período de tiempo

- Determinar el tiempo requerido para completar una tarea





Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos acíclicos

- Estrategia: Orden Topológico
  - Optimización del algoritmo de Dijkstra
  - La selección de cada vértice se realiza siguiendo el orden topológico
  - Esta estrategia funciona correctamente, dado que al seleccionar un vértice *v*, no se va a encontrar una distancia d_v menor, porque ya se procesaron todos los caminos que llegan a él

El costo total del algoritmo es O(|V| + |E|)

Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos acíclicos *(versión general)*

```
Camino_min_GrafoDirigidoAcíclico(G,s){

      Ordenar topológicamente los vértices de G;

      Inicializar Tabla de Distancias(G, s);

      para c/vértice u del orden topológico
         para c/vértice w ∈ V adyacente a u
               si (Dw > Du + c(u,w)) {
                     Dw = Du + c(u,w);
                     Pw = u;
               }
}
```

Algoritmos de Caminos mínimos

Grafos acíclicos *(versión detallada)*

```
Camino_min_GrafoDirigidoAcíclico(G,s) {
    Calcular el grado_in de todos los vértices;
    Encolar en Q los vértices con grado_in = 0;
    para cada vértice v ∈ V
        Dv = ∞; Pv = 0;
    Ds = 0;
    Mientras (!esVacio(Q)){
        Desencolar(Q,u);
        para c/vértice w ∈ V adyacente a u {
          Decrementar grado de entrada de w
          si (grado_in[w] = 0)
              Encolar(Q,w);
          si (Du != ∞)
              si Dw > Du + c(u,w) {
                  Dw = Du + c(u,w);
                  Pw = u;
              }
        }
    }
}
```

Caminos mínimos entre todos los pares de vértices

- Estrategia: Algoritmo de Floyd
  - Lleva dos matrices D y P, ambas de |V| x |V|

Matriz de costos mínimos

Matriz de vértices intermedios

El costo total del algoritmo es $O(|V|^3)$

Algoritmo de Floyd

Camino de costo mínimo entre cada par de vértices

```
para i=1 hasta cant_Vértices(G)
        para j=1 hasta cant_Vértices(G)
            D[i,j] = A[i,j]

para k=1 hasta cant_Vértices(G)
      para i=1 hasta cant_Vértices(G)
        para j=1 hasta cant_Vértices(G)
            si (D[i,j] > D[i,k] + D[k,j]) {
                D[i,j] = D[i,k] + D[k,j];
               P[i,j] = k;
            }
```

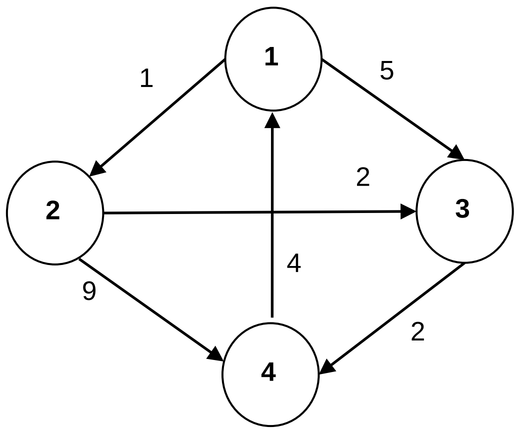
Toma cada vértice como intermedio, para calcular los caminos

Distancia entre los vértices *i* y *j*, pasando por *k*

Algoritmo de Floyd

Camino de costo mínimo entre cada par de vértices

- Ejemplo:



$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	5	∞
2	∞	0	2	9
3	∞	∞	0	2
4	4	∞	∞	0

K=1

$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	5	∞
2	∞	0	2	9
3	∞	∞	0	2
4	4	~~∞~~ **5**	~~∞~~ **9**	0

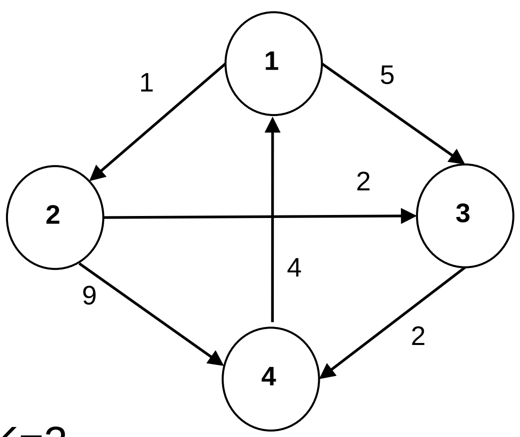
D (4,2) > D(4,1) + D(1,2) → D (4,2) = D(4,1) + D(1,2)

$\infty > 4 + 1$ → D (4,2) = 5

Algoritmo de Floyd

Camino de costo mínimo entre cada par de vértices

- Ejemplo:



$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	5	∞
2	∞	0	2	9
3	∞	∞	0	2
4	4	∞	∞	0

K=1

$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	5	∞
2	∞	0	2	9
3	∞	∞	0	2
4	4	5	9	0

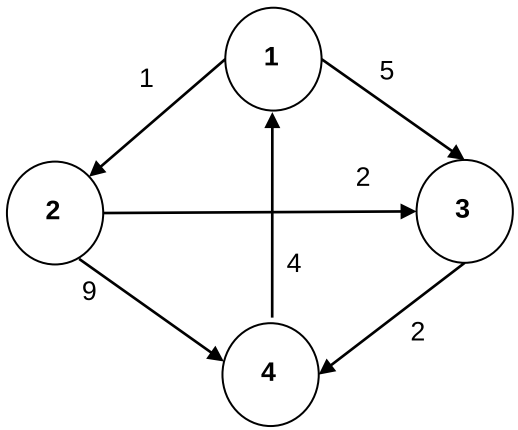
K=2

$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	~~5~~ **3**	~~∞~~ **10**
2	∞	0	2	9
3	∞	∞	0	2
4	4	5	~~9~~ **7**	0

Algoritmo de Floyd

Camino de costo mínimo entre cada par de vértices

- Ejemplo:



$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	5	∞
2	∞	0	2	9
3	∞	∞	0	2
4	4	∞	∞	0

K=1

$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	5	∞
2	∞	0	2	9
3	∞	∞	0	2
4	4	5	9	0

K=2

$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	3	10
2	∞	0	2	9
3	∞	∞	0	2
4	4	5	7	0

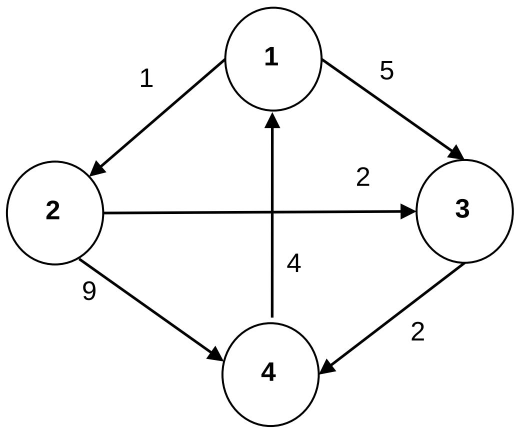
K=3

$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	3	~~10~~ **5**
2	∞	0	2	~~9~~ **4**
3	∞	∞	0	2
4	4	5	7	0

Algoritmo de Floyd

Camino de costo mínimo entre cada par de vértices

- Ejemplo:



$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	5	∞
2	∞	0	2	9
3	∞	∞	0	2
4	4	∞	∞	0

K=1

$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	5	∞
2	∞	0	2	9
3	∞	∞	0	2
4	4	5	9	0

K=2

$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	3	10
2	∞	0	2	9
3	∞	∞	0	2
4	4	5	7	0

K=3

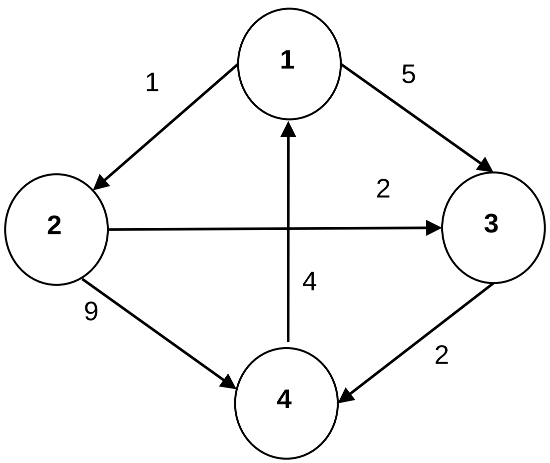
$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	3	5
2	∞	0	2	4
3	∞	∞	0	2
4	4	5	7	0

K=4

$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	3	5
2	~~∞~~ **8**	0	2	4
3	~~∞~~ **6**	~~∞~~ **7**	0	2
4	4	5	7	0

Algoritmo de Floyd
Camino de costo mínimo entre cada par de vértices

- Ejemplo:



$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	5	∞
2	∞	0	2	9
3	∞	∞	0	2
4	4	∞	∞	0

Matriz inicial de costos entre cada par de vértices

$D_{i,j}$	1	2	3	4
1	0	1	3	5
2	8	0	2	4
3	6	7	0	2
4	4	5	7	0

Matriz luego de aplicar Floyd con los costos entre cada par de vértices

Grafos	BFS O(V+E)	Dijkstra O(E log V)	Algoritmo modificado (encola vértices) O(V*E)	Optimización de Dijkstra (sort top) O(V+E)
No pesados	Óptimo	Correcto	Malo	Incorrecto si tiene ciclos
Pesados	Incorrecto	Óptimo	Malo	Incorrecto si tiene ciclos
Pesos negativos	Incorrecto	Incorrecto	Óptimo	Incorrecto si tiene ciclos
Grafos pesados acíclicos	Incorrecto	Correcto	Malo	Óptimo

Correcto → adecuado pero no es el mejor
Malo → una solución muy lenta