



# Agenda - Grafos

- Árbol de expansión mínimo





# Agenda – Grafos

- Árbol de expansión mínimo
  - Definición
  - Aplicaciones
  - Algoritmo de Prim
  - Algoritmo de Kruskal



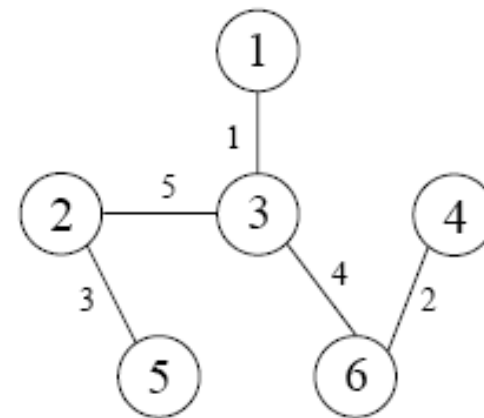
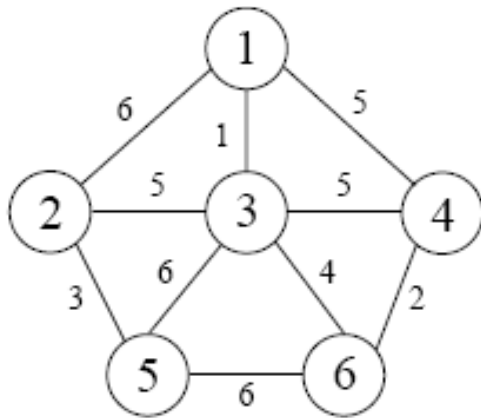


# Árbol de expansión mínima

## Definición

Dado un grafo  $G=(V, E)$  no dirigido y conexo

*El árbol de expansión mínima es un árbol formado por las aristas de  $G$  que conectan todos los vértices con un costo total mínimo.*





# Árbol de expansión mínima

## Aplicaciones

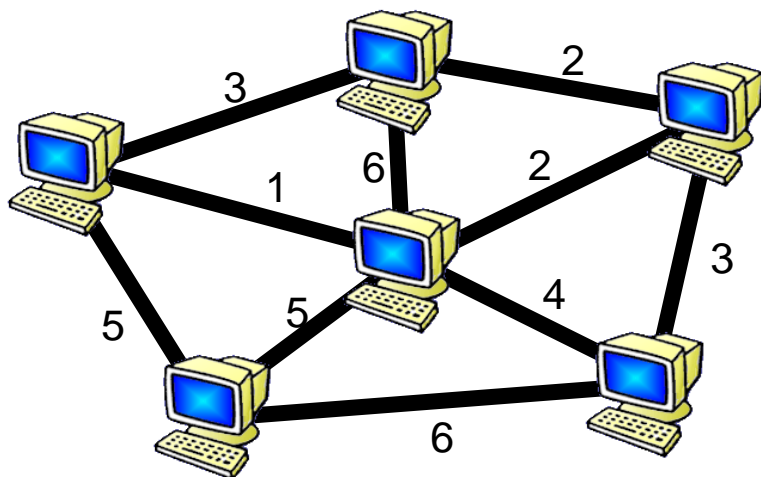
- Construcción de tendidos eléctricos
- Diseño de redes de tuberías
- Cableado de redes de comunicaciones
- Diseño de redes de logística y transporte
- Taxonomías
- .....



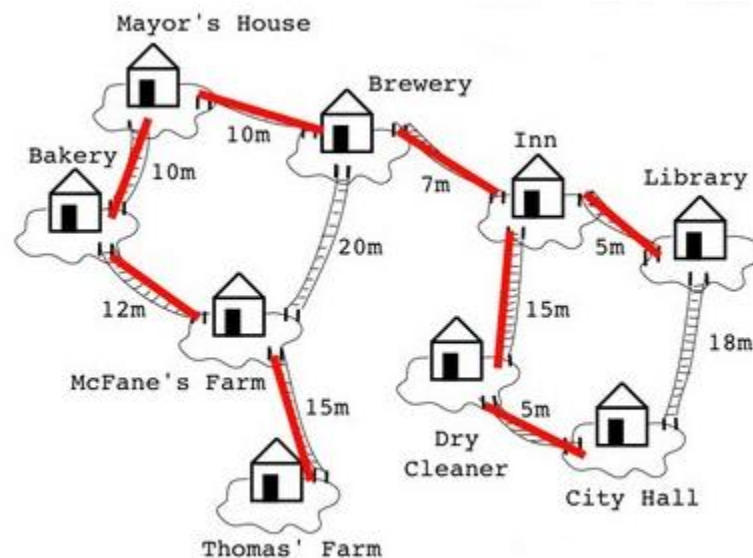


# Árbol de expansión mínima

Ejemplo:



Conectar todas las computadoras  
con el **menor costo total**



Conectar todas las ciudades con el  
**menor costo total**





# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Prim

➤ Construye el árbol haciéndolo crecer por etapas

Se elige un vértice como raíz del árbol.

En las siguientes etapas:

- a) se selecciona la arista  $(u, v)$  de mínimo costo que cumpla:  $u \in \text{árbol}$  y  $v \notin \text{árbol}$
- b) se agrega al árbol la arista seleccionada en a) (es decir, ahora el vértice  $v \in \text{árbol}$ )
- c) se repite a) y b) hasta que se hayan tomado todos los vértices del grafo.





# Algoritmo de Prim

## Implementación

- Para la implementación se usa una tabla (similar a la utilizada en la implementación del algoritmo de Dijkstra).
- La dinámica del algoritmo consiste en, una vez seleccionado una *arista*  $(u,v)$  de costo mínimo tq  $u \in \text{árbol}$  y  $v \notin \text{árbol}$ :
  - se agrega la arista seleccionada al árbol
  - se actualizan los costos a los adyacentes del vértice  $v$  de la siguiente manera :
    - ✓ se compara  $\text{Costo}_w$  con  $c(v,w)$

Costo mínimo a  $w$  (costo de la arista entre un vértice perteneciente al árbol y vértice  $w$ )

Costo de la arista  $(v,w)$

- se actualiza si  $\text{Costo}_w > c(v,w)$





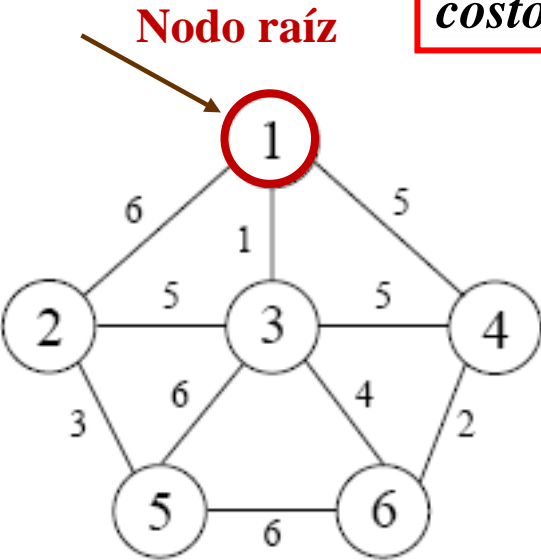
# Algoritmo de Prim

## Implementación

➤ Construye el árbol haciéndolo crecer por etapas

Ejemplo:

1º Paso



*costo de la arista (v,w)*

Vértice inicial

Vértice elegido

V	Costo	W	Conoc.
1	0	0	1
2	$\infty$	0	0
3	$\infty$	0	0
4	$\infty$	0	0
5	$\infty$	0	0
6	$\infty$	0	0







# Algoritmo de Prim

## Implementación

### 1° Paso

Vértice elegido

Vértices actualizados

<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	6	1	0
3	1	1	0
4	5	1	0
5	$\infty$	0	0
6	$\infty$	0	0



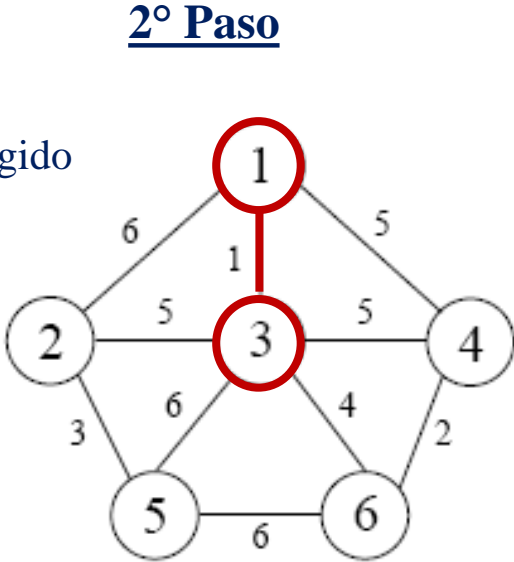


# Algoritmo de Prim

## Implementación

<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	6	1	0
3	1	1	1
4	5	1	0
5	$\infty$	0	0
6	$\infty$	0	0

Vértice elegido



Se agrega la arista  
(1,3) y el vértice 3





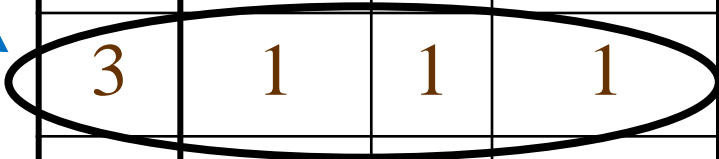
# Algoritmo de Prim

## Implementación

### 2° Paso

<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	6	1	0
3	1	1	1
4	5	1	0
5	$\infty$	0	0
6	$\infty$	0	0

Vértice elegido



Vértices actualizados



<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	5	3	0
3	1	1	1
4	5	1	0
5	6	3	0
6	4	3	0





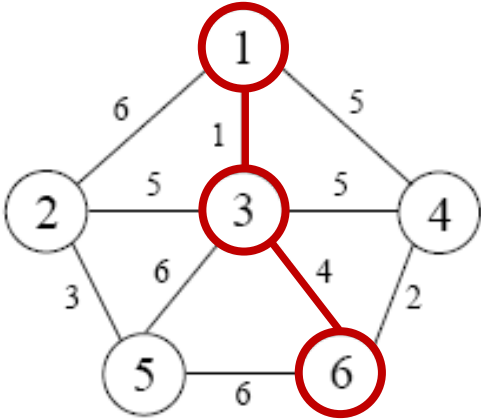
# Algoritmo de Prim

## Implementación

<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	$\infty$	0	1
2	5	3	0
3	1	1	1
4	5	1	0
5	6	3	0
6	4	3	1

Vértice elegido

3° Paso



Se agrega la arista  
(3,6) y el vértice 6





# Algoritmo de Prim

## Implementación

### 3° Paso

<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	$\infty$	0	1
2	5	3	0
3	1	1	1
4	5	1	0
5	6	3	0
6	4	3	1

Vértices actualizados



Vértice elegido



<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	5	3	0
3	1	1	1
4	2	6	0
5	6	3	0
6	4	3	0





# Algoritmo de Prim

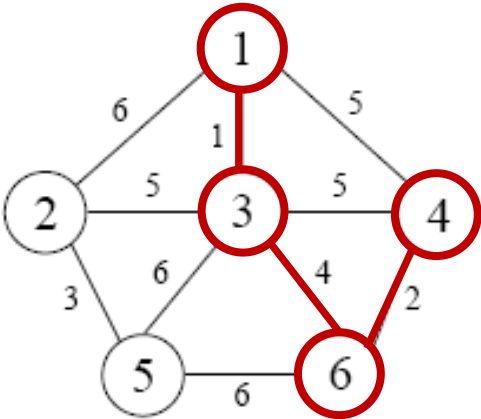
## Implementación

<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	5	3	0
3	1	1	1
4	2	6	1
5	6	3	0
6	4	3	1

Vértice  
elegido



### 4º Paso



Se agrega la arista  
(6,4) y el vértice 4



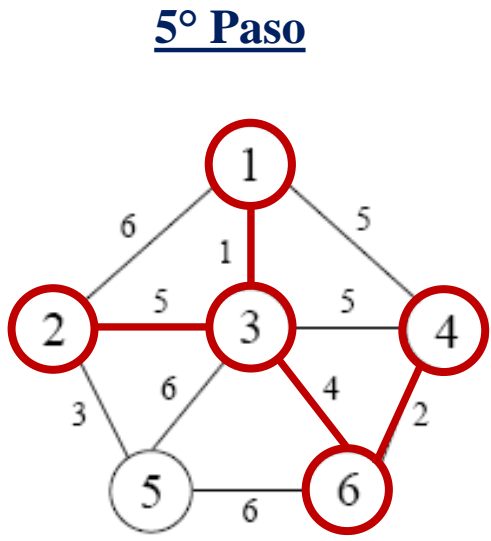


# Algoritmo de Prim

## Implementación

<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	5	3	1
3	1	1	1
4	2	6	1
5	6	3	0
6	4	3	1

Vértice elegido



Se agrega la arista  
(3,2) y el vértice 2





# Algoritmo de Prim

## Implementación

### 5° Paso

<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	5	3	1
3	1	1	1
4	2	6	1
5	6	3	0
6	4	3	1

Vértice elegido

Vértice actualizado

<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	5	3	1
3	1	1	1
4	2	6	1
5	3	2	0
6	4	3	1





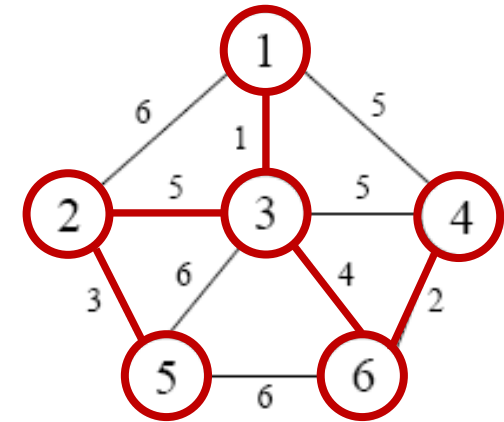


# Algoritmo de Prim

## Implementación

<i>V</i>	<i>Costo</i>	<i>W</i>	<i>Conoc.</i>
1	0	0	1
2	5	3	1
3	1	1	1
4	2	6	1
5	3	2	1
6	4	3	1

Vértice elegido



Se agrega la arista  
(2,5) y el vértice 5





# Algoritmo de Prim

## Tiempo de Ejecución

- Se hacen las mismas consideraciones que para el algoritmo de Dijkstra
  - Si se implementa con una tabla secuencial:
    - ➔ El costo total del algoritmo es  $O(|V|^2)$
  - Si se implementa con heap:
    - ➔ El costo total del algoritmo es  $O(|E| \log|V|)$





# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal

- Selecciona las aristas en orden creciente según su peso y las acepta si no originan un ciclo.
- El invariante que usa me indica que en cada punto del proceso, dos vértices pertenecen al mismo conjunto si y sólo si están conectados.
- Si dos vértices  $u$  y  $v$  están en el mismo conjunto, la arista  $(u, v)$  es rechazada porque al aceptarla forma un ciclo.





# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

- Inicialmente cada vértice pertenece a su propio conjunto
  - $|V|$  conjuntos con un único elemento
- Al aceptar una arista se realiza la Unión de dos conjuntos
- Las aristas se organizan en una heap, para ir recuperando la de mínimo costo en cada paso

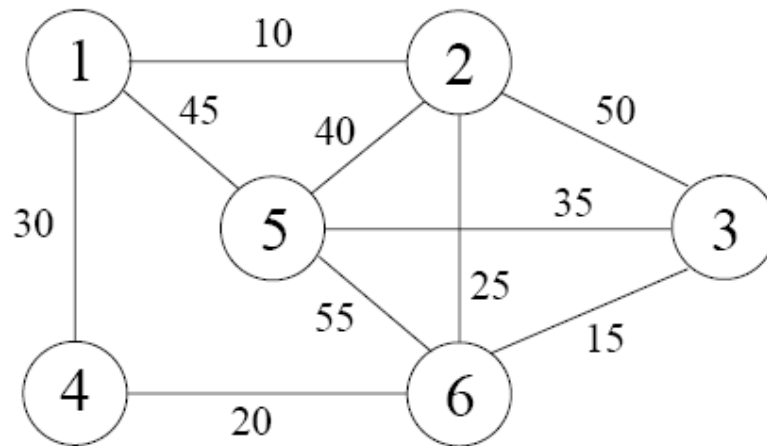




# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

Ejemplo:



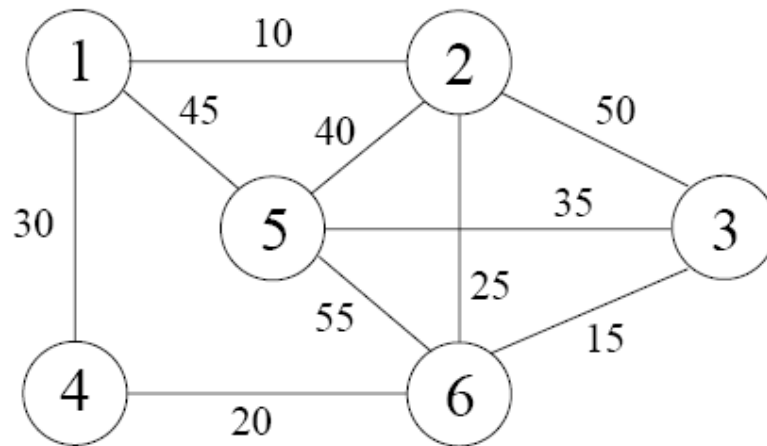


# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

Ejemplo:

Aristas ordenadas por su costo de menor a mayor:



(1,2) → 10  
(3,6) → 15  
(4,6) → 20  
(2,6) → 25  
(1,4) → 30  
(5,3) → 35  
(5,2) → 40  
(1,5) → 45  
(2,3) → 50  
(5,6) → 55

- Ordenar las aristas, usando un algoritmo de ordenación
- Construir una min-heap → **más eficiente**

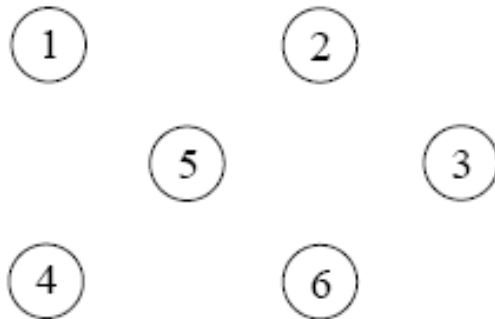




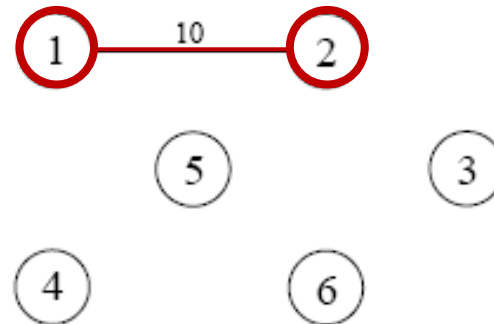
# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

Inicialmente cada vértice está en su propio conjunto



Se agrega la arista (1,2)

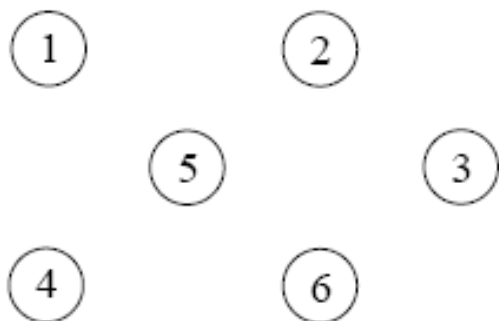




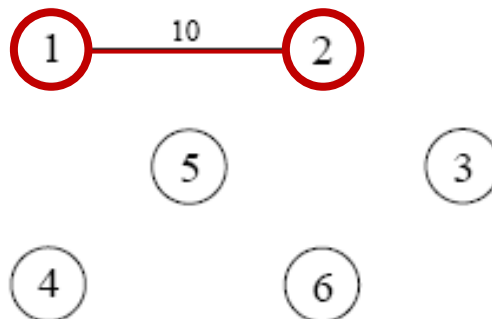
# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

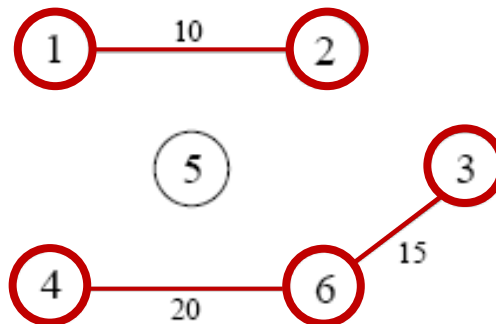
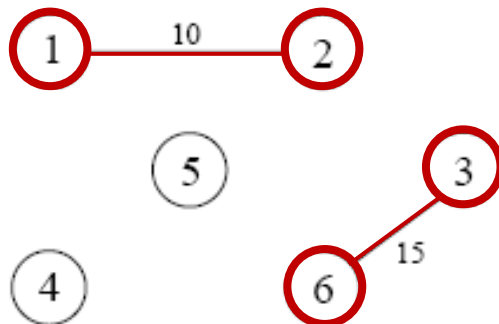
Inicialmente cada vértice está en su propio conjunto



Se agrega la arista (1,2)



Se  
agrega  
la arista  
(3,6)



Se  
agrega  
la arista  
(4,6)



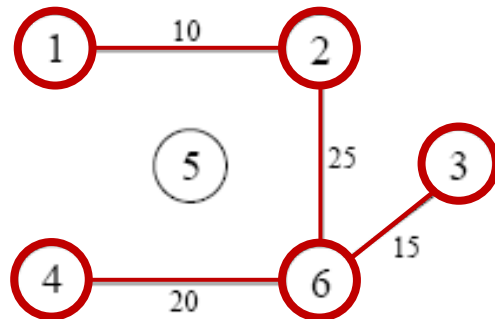




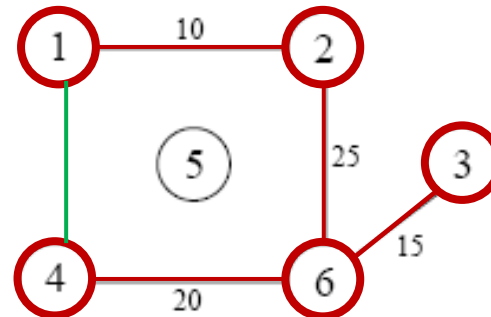
# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

Se agrega la arista (2,6)



¿Se agrega la arista (1,4) con costo 30?



No, porque forma ciclo, ya que pertenece a la misma componente conexa

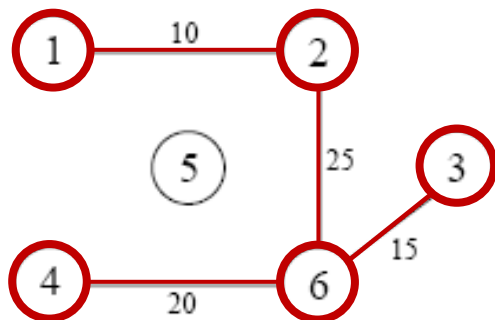




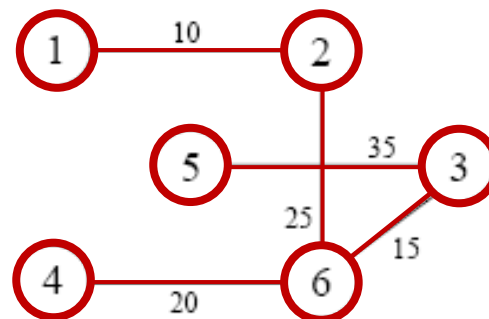
# Árbol de expansión mínima

## Algoritmo de Kruskal (cont.)

Se agrega la arista (2,6)



Se agrega la arista (3,5)





# Algoritmo de Kruskal

## Tiempo de Ejecución

- Se organizan las aristas en una heap, para optimizar la recuperación de la arista de mínimo costo
- El tamaño de la heap es  $|E|$ , y extraer cada arista lleva  $O(\log |E|)$
- El tiempo de ejecución es  $O(|E| \log |E|)$
- Dado que  $|E| \leq |V|^2$ ,  $\log |E| \leq 2 \log |V|$ ,  
→ el costo total del algoritmo es  $O(|E| \log |V|)$





# Grafos

## Conclusiones

- Podemos utilizar grafos para modelar problemas de la “vida real”.
- Los grafos son una herramienta fundamental en resolución de problemas.
- Representación:
  - Tamaño reducido: matrices de adyacencia.
  - Tamaño grande y grafo “disperso”: listas de adyacencia.





# Grafos

## Conclusiones

- Existen muchos algoritmos “clásicos” para resolver diferentes problemas sobre grafos.
- **Nuestro trabajo:** saber modelar los problemas de interés usando grafos y encontrar el algoritmo adecuado para la aplicación que se requiera.
- Es importante el estudio de problemas genéricos sobre grafos.
- La búsqueda primero en profundidad (DFS) y búsqueda en amplitud (BFS) son herramientas básicas, subyacentes en muchos de los algoritmos estudiados

