1) Induktion über Länge der Liste x.

I. Anf.: $\text{rev1}\ (\text{rev1}\ x\ y)\ z = \text{rev1}\ (\text{rev1}\ []\ y)\ z$

$\overset{\text{Def.}}{=} \text{rev1}\ y\ z \overset{\text{Def.}}{=} \text{rev1}\ y\ (\text{app}\ []\ z) = \text{rev1}\ y\ (\text{app}\ x\ z)$

I.-Schritt: $x = xs \rightarrow x = h::xs$

I. Schluss: $\text{rev1}\ (\text{rev1}\ (h::xs)\ y)\ z \overset{\text{Def.}}{=} \text{rev1}\ (\text{rev1}\ xs\ (h::y))\ z$

$\overset{\text{I.Ann.}}{=} \text{rev1}\ (h::y)\ (\text{app}\ xs\ z) \overset{\text{Def.}}{=} \text{rev1}\ y\ (h::\text{app}\ xs\ z) \overset{\text{Def.}}{=} \text{rev1}\ y\ (\text{app}\ x\ z)$

$\square$

2) Induktion über Länge der Liste x

I. Anf: $\text{rev}\ (\text{rev}\ []) \overset{\text{Def.}}{=} \text{rev}\ [] \overset{\text{Def.}}{=} []$

I. Schritt: $x = xs \rightarrow x = h::xs$

Anmerkung: Da im I-Schritt die I-Annahme nie benötigt wurde, ist die Aufgabe 2) auch über eine Fallunterscheidung x=[] und x=h::xs lösbar

I. Schluss:

$\text{rev}\ (\text{rev}\ (h::xs)) \overset{\text{Def}}{=} \text{rev}\ (\text{app}\ (\text{rev}\ xs)\ [h]) \overset{\text{Lemma 2}}{=} \text{rev}\ (\text{rev1}\ xs\ [h])$

$\overset{\text{Def.}}{=} \text{rev}\ (\text{rev1}\ (h::xs)\ []) \overset{\text{Def}}{=} \text{app}\ (\text{rev}\ (\text{rev1}\ (h::xs)\ []))\ [] \overset{\text{Lemma 2}}{=} \text{rev1}\ (\text{rev1}\ (h::xs)\ [])\ []$

$\overset{1)}{=} \text{rev1}\ []\ (\text{app}\ (h::xs)\ []) \overset{\text{Lemma 1}}{=} \text{rev1}\ []\ (h::xs) \overset{\text{Def.}}{=} h::xs = x$

$\square$

3) Induktion über Länge der Liste x

I. Anf.: $\text{rev}\ (\text{app}\ (\text{rev}\ [])\ (\text{rev}\ y)) \overset{\text{Def.}}{=} \text{rev}\ (\text{app}\ []\ (\text{rev}\ y))$

$\overset{\text{Def}}{=} \text{rev}\ (\text{rev}\ y) \overset{2)}{=} y \overset{\text{Lemma 1}}{=} \text{app}\ y\ []$

I. Schritt: $x = xs \rightarrow x = h::xs$

I. Schluss: $\text{rev}\ (\text{app}\ (\text{rev}\ (h::xs))\ (\text{rev}\ y)) \overset{\text{Lemma 2}}{=} \text{rev}\ (\text{rev1}\ (h::xs)\ (\text{rev}\ y))$

$\overset{\text{Def.}}{=} \text{rev}\ (\text{rev1}\ xs\ (h::\text{rev}\ y)) \overset{\text{Lemma 2}}{=} \text{rev}\ (\text{app}\ (\text{rev}\ xs)\ (h::\text{rev}\ y))$

$\overset{2)}{=} \text{rev}\ (\text{app}\ (\text{rev}\ xs)\ (\text{rev}\ (\text{rev}\ (h::\text{rev}\ y))))$

$\overset{\text{I.Ann.}}{=} \text{app}\ (\text{rev}\ (h::\text{rev}\ y))\ xs$

$\overset{\text{Lemma 2}}{=} \text{rev1}\ (h::\text{rev}\ y)\ xs \overset{\text{Def.}}{=} \text{rev1}\ (\text{rev}\ y)\ (h::xs)$

$\overset{\text{Lemma 2}}{=} \text{app}\ (\text{rev}\ (\text{rev}\ y))\ (h::xs) \overset{2)}{=} \text{app}\ y\ x$

$\square$