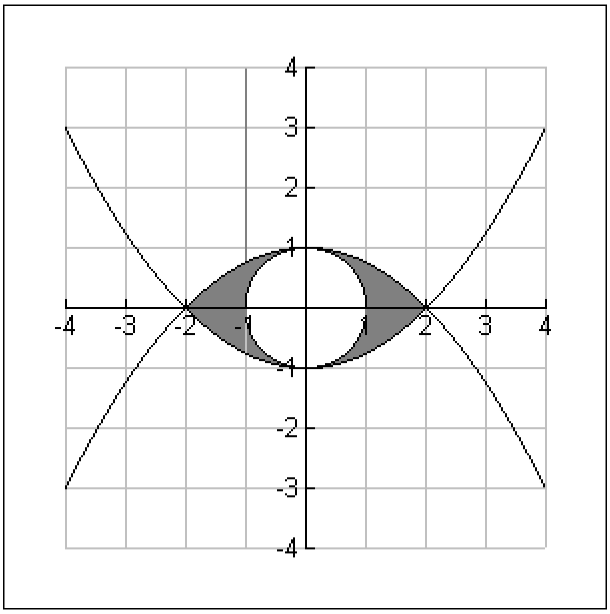
Johannes-Kepler-Gymnasium
Ibbenbüren

Das Auge

a) Berechnen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche.

b) Wie viel Prozent des Auges entfallen auf die helle Pupille?



DAS AUGE

a) $f_1(x) = 0{,}25x^2 - 1$

$f_2(x) = -0{,}25x^2 + 1$

$\frac{1}{4}A = \left|\int_0^2 (0{,}25x^2 - 1)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{12}x^3 - x\right]_0^2\right|$

$= \left|-\frac{4}{3}\right|$

$A = 4 \cdot \frac{1}{4}A = 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$

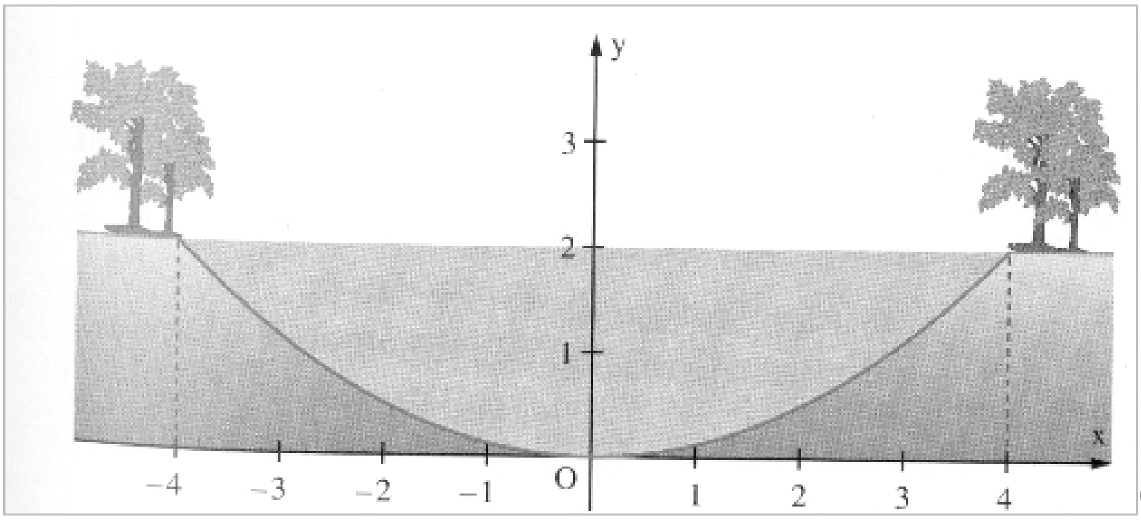
$\rightarrow \frac{16}{3}$ [FE] − π [FE vom Kreis]

= 8,474 [FE]

b) $\frac{\text{[FE vom Kreis]}}{\text{FE}} = 0{,}58904$

$0{,}58904 \cdot 100 = 58{,}904\,\%$

$p = 58{,}9\,\%$



Der Kanal

Der Boden eines 2 km langen Kanals hat die Form einer Parabel. Dabei entspricht einer Längeneinheit 1m in der Wirklichkeit.

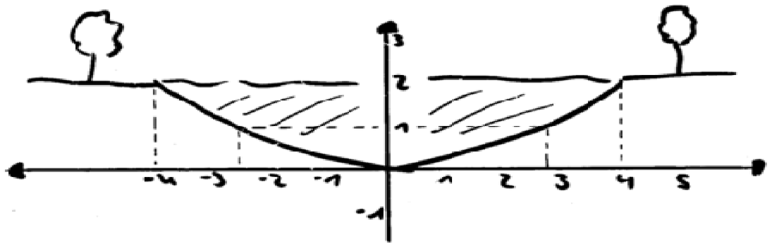
a) Berechne den Inhalt der Querschnittsfläche des Kanals.

b) Wie viel Wasser befindet sich im Kanal, wenn er ganz gefüllt ist?

c) Wie viel Prozent der maximalen Wassermenge befindet sich im Kanal, wenn er nur bis zur halben Höhe gefüllt ist?

Anwendung der Integralrechnung: Flächenberechnungen **LK M12 2009**

Lösung: Der Kanal



a.) Inhalt der Querschnittsfläche des Kanals

$y = mx^2$ $\qquad f(x) = \frac{1}{8}x^2$

$2 = m \cdot 4^2$ $\qquad \int_{-4}^{4} \left(\frac{1}{8}x^2\right) dx$

$m = \frac{1}{8}$ $\qquad \left[\frac{1}{24}x^3\right]_{-4}^{4}$

$\frac{1}{24} \cdot 4^3 - \frac{1}{24} \cdot (-4)^3 = 5\frac{1}{3}$

$8 \cdot 2\,m^2 - 5\frac{1}{3}\,m^2 = \underline{\underline{10\frac{2}{3}}}\,m^2$

b.) Wie viel Wasser befindet sich im Kanal, wenn er ganz gefüllt ist?

$10\frac{2}{3}\,m^2 \cdot 2000\,m = \underline{\underline{21.333,\frac{1}{3}\ m^3}}$

c.) Wie viel % der maximalen Wassermenge befindet sich im Kanal, wenn er nur bis zur halben Höhe gefüllt ist?

$1 = \frac{1}{8}x^2$

$x = \pm\sqrt{8}$

$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} f\left(\frac{1}{8}x^2\right) dx$

$= \left[\frac{1}{24}x^3\right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} = 1,8856181\,m$

Julius; [illegible];
Leonie; Adrian

$(2 \cdot \sqrt{8}\,m) - 1,8856181\,m = 3,771236149\,m^2$

$3,771236149\,m^2 \cdot 2000\,m = 7.542,472298\,m^3$

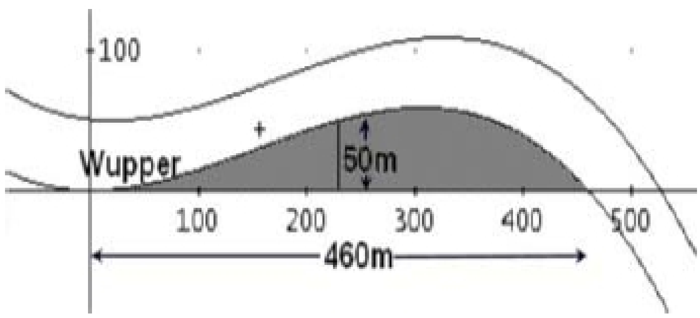
% → $(7.542,472298 : 21.333,\frac{1}{3}) \cdot 100 = \underline{\underline{35,3553389\,\%}} \approx 35,56\,\%$

Eine Anlegestelle für den Kanuclub

Ein Kanuclub möchte für ein neues Clubhaus mit Anlegestelle ein Grundstück an der Wupper erwerben. Der bisherige Eigentümer, ein Landwirt, bietet das Grundstück über einen Makler zu einem Preis von 12,- € pro m^2 an. Die Vermessung ergab eine Breite von 460 *m*. Von der Mitte der geraden Gebietsgrenze beträgt die Distanz zum Wasser 50 *m*.

a) Erläutern Sie, dass der Uferverlauf im angegebenen Koordinatensystem durch $f(x) = a \cdot x^2 \cdot (x - 460)$ beschrieben wird und berechnen Sie a.

(Kontrollergebnis: $a = -\frac{1}{243340}$)



b) Berechnen Sie den Kaufpreis für das Grundstück.

Der Makler veranschlagt eine Maklergebühr in Höhe von 3,48% des Kaufpreises (inklusive Mehrwertsteuer). Mit welchen Kosten hat der Kanuclub zu rechnen?

Kanuanlegestelle

a) $f(x) = a \cdot x^2 \cdot (x - 460)$

[illegible] Faktor — 2 Nullstelle bei Extrempunkt $(x=0)$ — 1 Nullstelle bei 460

$P(230/50)$

$50 = a \cdot 230^2 \cdot (230 - 460)$

$a = -\frac{1}{243340}$

$f(x) = -\frac{1}{243340}\, x^2 \cdot (x - 460)$

b) $\int_0^{460} -\frac{1}{243340}\, x^2\, (x - 460)\, dx$

$\int_0^{460} -\frac{1}{243340}\, x^3 + \frac{1}{529}\, x^2\, dx$

$= \left[-\frac{1}{973360}\, x^4 + \frac{1}{1587}\, x^3 \right]_0^{460}$

$= -\frac{1}{973360} \cdot 460^4 + \frac{1}{1587} \cdot 460^3$

$= 15333\frac{1}{3}$

Kosten pro m^2 : 12 €

$15333\frac{1}{3} \cdot 12 = 184.000$ (€)

Maklergebühr: 3,48 %

$184.000 \cdot 0{,}0348 = 6403{,}20$ (€)

Gesamtkosten: $184.000 + 6403{,}20$

$= 190.403{,}20$ (€)

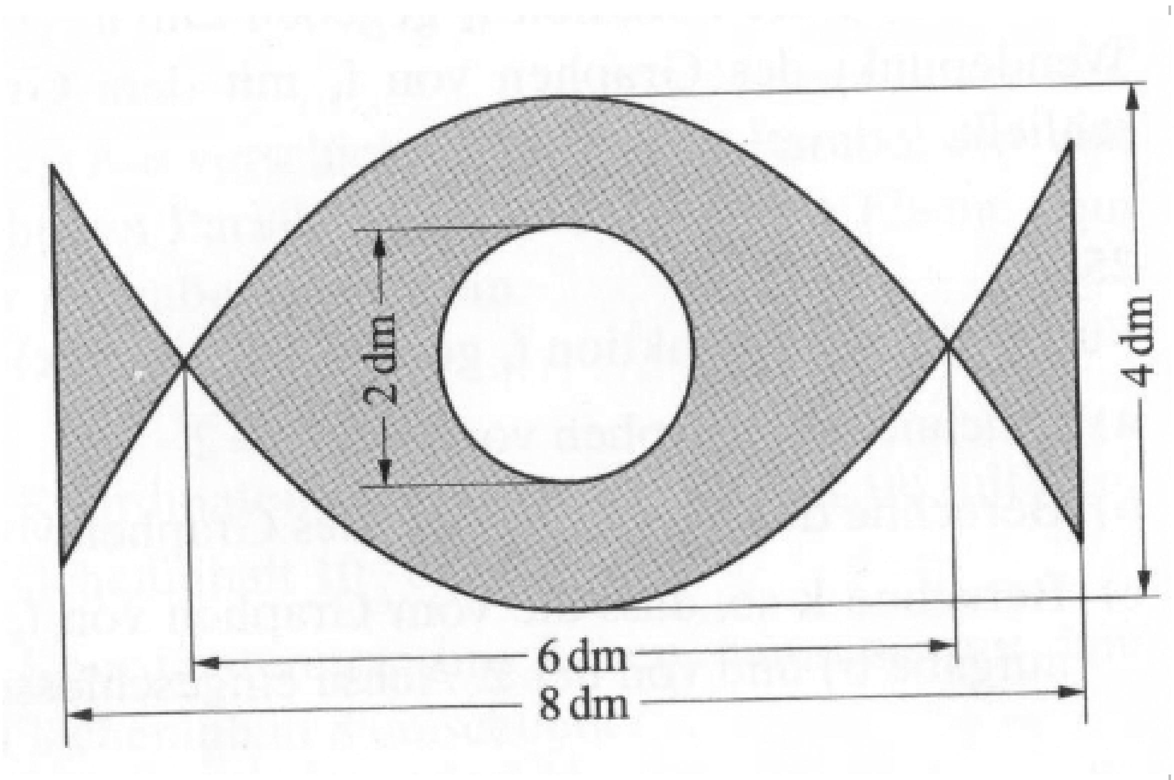
Viktoria, Matthias, Lara

Anwendung der Integralrechnung: Flächenberechnungen

Schmuckform I

Die dunkel unterlegten Teile der Schmuckform soll mit Blattgold belegt werden.

Die Linien sind Parabeln oder Kreise. 1 cm² Blattgold kostet einschließlich Belegung 7,99 €. Wie teuer wird die Blattgoldarbeit? Lege das Koordinatensystem geeignet fest.



Swimmingpool

Ein quaderförmiger Swimmingpool mit 8 m Länge, 5 m Breite und 3 m Höhe wird mit Wasser gefüllt.

Zu Beginn beträgt die Wasserhöhe 0,1 m.

Der Zu- bzw. Abfluss des Wassers wird modellhaft beschrieben durch die Zulaufratenfunktion mit

$f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t; \quad 0 \le t \le 9$

(f(t) in m^3 pro Stunde, t in Stunden)

Gib die Zeitpunkte an, zu denen das Wasser weder zu- noch abläuft, und berechne die Zeitpunkte maximalen Zu- bzw. Abflusses.

Skizziere den Graphen Gf der Zulaufratenfunktion f.

Wie viel Wasser befindet sich nach 3 Stunden im Pool?

Bestimme die Höhe des Wasserstands am Ende des gesamten Einfüllvorgangs.

Berechne die maximale Wassermenge im Pool.

Erläutere, weshalb die Definitionsmenge von f beschränkt ist.

Anwendung der Integralrechnung: Flächenberechnungen

a) kein zu- und Ablauf $f(t)=0$

$f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t$

$f(t) = t \cdot (t^2 - 13t + 40)$

$t_{01} = 0 \qquad 0 = t^2 - 13t + 40$

$0 = (t-6{,}5)^2 - 2{,}25 \quad | +2{,}25$

$2{,}25 = (t-6{,}5)^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm 1{,}5 = t - 6{,}5 \quad | +6{,}5$

$t_{02} = 8$

$t_{03} = 5$

Nach 0,5 und 8 Stunden fließt das Wasser weder zu noch ab

b) $f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t$

$f'(t) = 3t^2 - 26t + 40$

$f''(t) = 6t - 26$

$0 = 3t^2 - 26t + 40 \quad | :3$

$0 = t^2 - 8\frac{2}{3}t + 13\frac{1}{3}$

PQ-Formel:

$4\frac{1}{3} \pm \sqrt{18\frac{7}{9} - 13\frac{1}{3}}$

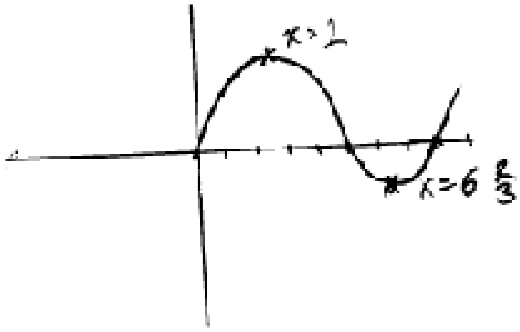
$4\frac{1}{3} \pm \sqrt{5\frac{4}{9}}$

$4\frac{1}{3} \pm 2\frac{1}{3} \qquad t_1 = 2, \; t_2 = 6\frac{2}{3} \qquad HP \Rightarrow 2$

$TP \Rightarrow 6\frac{2}{3}$

Anwendung der Integralrechnung: Flächenberechnungen

c)



d) $V = \int_0^3 F(t)\,dt$

$V = \int_0^3 \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{13}{3}t^3 + 20t^2\right]_0^3$

$V = 83{,}25\,m^3$

$\Rightarrow 83{,}25\,m^3 + 4\,m^3 = 87{,}25\,m^3$

e) $V = \int_0^9 F(t)\,dt$

$V = \int_0^9 \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{13}{3}t^3 + 20t^2\right]_0^9$

$V = 101{,}25\,m^3$

$\Rightarrow 101{,}25 + 4 = 105{,}25\,m^3$

$105{,}25\,m^3 : (8\,m \cdot 5\,m) = 2{,}63125\,m$

f) f(t) (Ableitung von Aufleitung) = 0

$f(t) = t^3 - 13t^2 + 40t$

$F(t) = \frac{1}{4}t^4 - 13\cdot\frac{1}{3}t^3 + 40\cdot\frac{1}{2}t^2$

$x_{01} = 0$; $x_{02} = 5$; $x_{03} = 8$ von f(t)

Einsetzen in F(t) und schauen wo F(t) maximal ist

$F(0) = 0$; $F(5) = 114{,}6$; $F(8) = 85{,}3$

Nach 5 Stunden ist F(t) maximal.

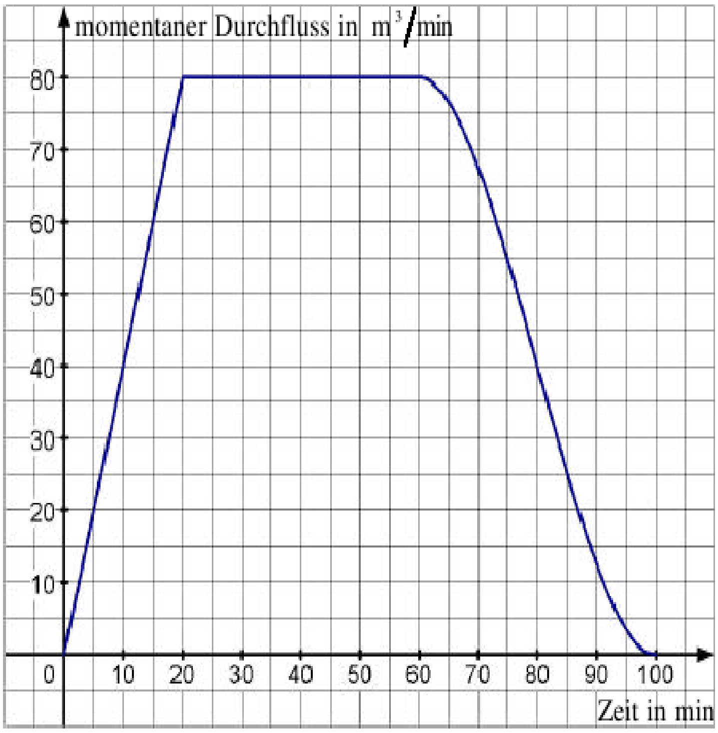
Anwendung der Integralrechnung: Flächenberechnungen **M12 2005 Lösungen Baldeney**

Wirkung von Änderungsraten - Anwendungsaufgabe

Durch Ölpipelines fließen in jeder Stunde viele Kubikmeter Öl. Der momentane Durchfluss durch eine Pipeline wird kontinuierlich mit Hilfe eines Propellers im Rohr überwacht. Die nebenstehende Grafik zeigt den momentanen Durchfluss durch eine Ölpipeline im Zeitraum von 0min bis 100min.

a) Entnimm dem Graphen den jeweiligen momentanen Durchfluss zu den Zeitpunkten 0 min, 10 min, 20 min, 40 min, 60 min, 80 min und 100 min und interpretiere diese Werte im Sinne der Sachaufgabe.

b) Berechne möglichst genau die gesamte Ölmenge, die im Zeitraum von 0min bis 100min. durch die Pipeline geflossen ist.



Benutze zur Berechnung $v(t) = \begin{cases} 4t \text{ für } 0 \le t \le 20 \\ 80 \text{ für } 20 < t \le 60 \\ \frac{1}{400} \cdot (t-40) \cdot (t-100)^2 \text{ für } 60 < t \le 100 \end{cases}$

[illegible]

a) 0 min = 0 m³/min
10 min = 40 m³/min
20 min = 80 m³/min
40 min = 80 m³/min
60 min = 80 m³/min
80 min = 40 m³/min
100 min = 0 m³/min

b) $A_1 = \frac{20 \cdot 80}{2} = 800\,m^2$

$A_2 = 40 \cdot 80 = 3200\,m^2$

$\int_{60}^{100} v(t)\,dt = \left[\frac{1}{1600}t^4 - 0{,}2t^3 + 22{,}5t^2 - 1000t\right]_{60}^{100}$

$= 1600\,m^2$

$A_{gesamt} = 800 + 3200 + 1600$

$= 5600\,m^2$