MATHEMATIK

Der Robert

26. September 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlennamen

Die Zahlen beziehen sich alle auf das Dezimalsystem *(Zehnersystem)*. Bei großen Zahlen gilt hier, wie im Deutschen üblich, die sog. große Leiter, d.h. tausend Millionen sind also eine Milliarde. In anderen Sprachen, z.B. im Englischen, kann die sog. kleine Leiter verwendet werden, d.h. tausend Millionen heißt dann bereits eine Billion.

1.1 Positive und negative Zahlen

Bei Zahlen wird immer zuerst das Vorzeichen genannt, und dann der Wert der Zahl. Bei positiven Zahlen wird das Vorzeichen i.d.R. weggelassen, und nur genannt, wenn sie konkret von negativen Zahlen unterschieden werden sollen.
Beispiele:

- 12: "Zwölf" *(oder "plus Zwölf")*
- $+34$: "plus Vierunddreißig" *(oder nur "Vierunddreißig")*
- -56: "minus Sechsundfünfzig"

1.2 große Zahlen

Um Zahlen mit mehr als drei Ziffern ovr dem Komma besser lesen zu köennen, werden diese üblicherweise in Dreiergruppen aufgeteilt. Man kann zwischen diesen auch einen Punkt setzen. In anderen Sprachen wird auch stattdessen ein Komma oder ein Apostroph gesetzt.
Beispiele:

- 1.000: ein Tausend
- 1.000.000: eine Million
- 1.000.000.000: eine Milliarde

1.3 (einfache) Brüche

Brüche, die mit einem Bruchstrich geschrieben werden, werden normalerweise mit einer Ordinalzahl *(Ordnungszahl)* und dem Suffix "-l" gebildet.
Beispiele:

- $\frac{1}{3}$: ein Drittel
- $\frac{1}{4}$: ein Viertel
- $\frac{1}{10}$: ein Zehntel
- $\frac{1}{20}$: ein Zwanzigstel

Ausnahmen bilden hierbei die Nenner eins und zwei:

- $\frac{1}{1}$: ein Eintel
- $\frac{1}{2}$: die Hälfte / ein Halb(es)
- $\frac{1}{101}$: ein Hunderteintel
- $\frac{1}{102}$: ein Hundertzweitel
- $\frac{1}{201}$: ein Zweihunderteintel
- $\frac{1}{202}$: ein Zweihundertzweitel
- $\frac{1}{1.001}$: ein Tausendeintel
- $\frac{1}{1.002}$: ein Tausendzweitel

1.4 Dezimalbrüche

Dezimalbrüche werden im Deutschen mit einem Komma geschrieben. In anderen Sprachen, z.B. im Englischen, kann es sein, dass Kommazahlen mit einem Dezimalpunkt geschrieben werden. In der Mathematik werden alle Ziffern nach dem Komma einzeln genannt. Die Ziffern zu konkreten Zahlen zusammenzufassen ist unüblich, und eher in der Umgangsprache zu finden.
Beispiele:

- 0,1: Null-Komma-Eins
- 2,34: Zwei-Komma-Drei-Vier
- 2,34: Zwei-Komma-Vierunddreißig *(Umgangssprache)*
- 56,789: Sechsundfünfzig-Komma-Sieben-Acht-Neun

1.5 Ziffern 0 bis 9

- 0: Null
- 1: Eins
- 2: Zwei
- 3: Drei
- 4: Vier
- 5: Fünf
- 6: Sechs
- 7: Sieben
- 8: Acht
- 9: Neun

1.6 Zahlen 10 bis 19

- 10: Zehn
- 11: Elf
- 12: Zwölf
- 13: Dreizehn
- 14: Vierzehn
- 15: Fünfzehn
- 16: Sechzehn
- 17: Siebzehn
- 18: Achtzehn
- 19: Neunzehn

1.7 Zahlen 20 bis 29

- 20: Zwanzig
- 21: Einundzwanzig
- 22: Zweiundzwanzig
- 23: Dreiundzwanzig
- 24: Vierundzwanzig
- 25: Fünfundzwanzig
- 26: Sechsundzwanzig
- 27: Siebenundzwanzig
- 28: Achtundzwanzig
- 29: Neunundzwanzig

1.8 Zahlen 30 bis 90

Die Zahlen 30 bis 90 werden ähnlich wie 20 gebildet.

- 30: Dreißig
- 40: Vierzig
- 50: Fünfzig
- 60: Sechzig
- 70: Siebzig

- 80: Achtzig
- 90: Neunzig

1.9 Zahlen 100 bis 109

- 100: (ein) Hundert
- 101: (ein) Hunderteins
- 102: (ein) Hundertzwei
- 103: (ein) Hundertdrei
- 104: (ein) Hundertvier
- 105: (ein) Hundertfünf
- 106: (ein) Hundertsechs
- 107: (ein) Hundertsieben
- 108: (ein) Hundertacht
- 109: (ein) Hundertneun

1.10 Zahlen 200 bis 900

- 200: Zweihundert
- 300: Dreihundert
- 400: Vierhundert
- 500: Fünfhundert
- 600: Sechshundert
- 700: Siebenhundert
- 800: Achthundert
- 900: Neunhundert

1.11 Zahlen 1.000 bis 9.000

- 1.000: (ein) Tausend
- 2.000: Zweitausend
- 3.000: Dreitausend
- 4.000: Viertausend
- 5.000: Fünftausend
- 6.000: Sechstausend
- 7.000: Siebentausend
- 8.000: Achttausend
- 9.000: Neuntausend

1.12 Zahlen 10.000 bis 90.000

- 10.000: Zehntausend / (eine) Myriade
- 20.000: Zwanzigtausend / zwei Myriaden
- 30.000: Dreißigtausend / drei Myriaden
- 40.000: Vierzigtausend / vier Myriaden
- 50.000: Fünfzigtausend / fünf Myriaden
- 60.000: Sechzigtausend / sechs Myriaden
- 70.000: Siebzigtausend / sieben Myriaden
- 80.000: Achtzigtausend / acht Myriaden
- 90.000: Neunzigtausend / neun Myriaden

1.13 Zahlen 100.000 bis 900.000

- 100.000: (ein) Hunderttausend
- 200.000: Zweihunderttausend
- 300.000: Dreißhunderttausend
- 400.000: Vierhunderttausend
- 500.000: Fünfhunderttausend
- 600.000: Sechshunderttausend

- 700.000: Siebenhunderttausend
- 800.000: Achthunderttausend
- 900.000: Neunhunderttausend

1.14 Zahlen ab 1.000.000

Eine 1 mit 6 Nullen (1.000.000) wird im Deutschen als eine Million bezeichnet, und ist ein Substantiv. Das heißt mehrere Millionen werden getrennt geschrieben: 2.000.000 heißt zwei Millionen. Ebenso verhält es sich mit einer 1 mit 9 Nullen (1.000.000.000), die im Deutschen als Milliarde bezeichnet wird. Mehrere heißen also Milliarden: 3.000.000.000 heißt drei Milliarden. Weitere größere Zahlbezeichnungen hängen davon ab, die wieviele Potenz der Million es sich handelt. Man könnte es auch folgende Formel zu Hilfe nehmen:

- $10^{6 \cdot n}$: Suffix "-(i)llion"
- $10^{6 \cdot n+3}$: Suffix "-(i)lliarde"

Wobei $n \in \mathbb{N}$.
Beispiele:

- $10^6 = (10^6)^1$: eine Million
- $10^9 = (10^6)^{1,5}$: eine Milliarde
- $10^12 = (10^6)^2$: eine Billion
- $10^15 = (10^6)^{2,5}$: eine Billiarde
- $10^18 = (10^6)^3$: eine Trillion
- $10^21 = (10^6)^{3,5}$: eine Trilliarde
- $10^24 = (10^6)^4$: eine Trillion
- $10^27 = (10^6)^{4,5}$: eine Trilliarde

Die Präfixe werden hierbei von lateinischen Zahlen abgeleitet. Die Bildung beginnt in jeder Dreiergruppe von hinten nach vorne, also erst bei den Einern, dann kommen die Zehner, und dann die Hunderter.

Ziffer	Einzelpräfix	Einer	Zehner	Hunderter
1	mi...	un...	(n)dezi	(n/x/s)zenti
2	bi...	d(u)o...	(m/s)viginti	(n)duzenti
3	tri...	tre(s)...	(n/s)trigint(a)	(n/s)trezenti
4	quadri...	quattuor...	(n/s)quadragint(a)	(n/s)quadringenti
5	quinti...	quin...	(n/s)quinquagint(a)	(n/s)quingenti
6	sexti...	se(x)...	(n)sexagint(a)	(n)seszenti
7	septi...	septe(m/n)...	(n)septuagint(a)	(n)septingenti
8	okti...	okto...	(m/x)oktogint(a)	(m/x)oktingenti
9	noni...	nove(m/n)...	nonagint(a)	nongenti

Beispiele:

- $10^{72} = (10^6)^{12}$: eine D(u)odezillion
- $10^{100} = 10 \cdot (10^6)^{16,5}$: zehn Se(x)dezilliarden
- $10^{204} = (10^6)^{34}$: eine Quattuortrigintillion
- $10^{3.405} = (10^6)^{567,5}$: eine Septensexagintaquingentilliarde

1.15 Zahlen ab einer 1 mit 6.000 Nullen

Ab 6.000 Nullen (also ab $10^{6.000}$ oder $1.000.000^{1.000}$) wird zwischen jede Dreiergruppe das Infix "-(i)lli-" geschoben. Besteht die Dreiergruppe aus drei Nullen, heißt diese "-nilli-". Das Präfix "ni" steht hierbei für das lateinschen Wort "nĭhil", was "nichts" heißt.

Beispiel: $10^{93.000.000.006} = 1.000.000^{15.500.000.001}$ heißt "eine Quindezilliquingentillinillimillion":

- 15: Quindezi...
- 500: ...quingenti...
- 000: ...nilli...
- 001: ...million

1.16 Weitere große Zahlen

2 Funktionen

2.1 Polynom n-ten Grades

Eine Funktion ist ein Polynom n-ten Grades, wenn sie folgende Form hat:

$$f(x) = p_1 \cdot x^n + p_2 \cdot x^{n-1} + p_3 \cdot x^{n-2} + ... + p_{n-2} \cdot x^2 + p_{n-1} \cdot x + p_n;$$

Hierbei stehen $p_1 ... p_n \in \mathbb{R}$ für beliebige Faktoren zum jeweiligen Polynom.

2.2 Spezialfälle

2.2.1 Polynom des Grades 0

Bei einem Polynom des Grades 0 handelt es sich um eine Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft. Sie lautet:

$$f(x) = c;$$

Wobei $c \in \mathbb{R}$ ist, und nicht 0 sein sollte. Der Buchstabe c als Variable leitet sich davon ab, dass es sich um eine Konstante handelt, auf Englisch auch *constant*, von lateinisch *cōnstāre* = *feststehen*, bzw. *cōnstāns* = *feststehend*.

2.2.2 Polynom ersten Grades

Bei einem Polynom ersten Grades handelt es sich lediglich um eine lineare Funktion:

$$f(x) = m \cdot x + t;$$

Sie hat die Steigung m und den Nullpunkt $-t$. Ist m positiv, ist die Funktion monoton steigend; ist m negativ, ist die Funktion monoton fallend.

2.2.3 Polynom zweiten Grades

Eine Funktion zweiten Grades ist eine quadratische Funktion. Ihr Funktionsgraph ist eine Parabel.

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c;$$

Die Nullpunkte lassen sich über die sog. Mitternachtsformel bestimmen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a};$$

Man kann anhand der Diskriminante auch bestimmen, wie viele Nullstellen eine quadratische Funktion hat. Die Diskriminante ist der Radikand der Mitternachtsformel, also $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Jetzt gibt es folgende Möglichkeiten:

- $b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$: Die Funktion hat keinen Nullpunkt.
- $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$: Die Funktion hat genau einen Nullpunkt, nämlich $-\frac{b}{2 \cdot a}$
- $b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$: Die Funktion hat zwei Nullpunkte.

2.2.4 Polynom dritten Grades

Eine Funktion dritten Grades nennt man auch kubische Funktion. Ihr Funktionsgraph sieht eher s-förmig aus.

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d;$$

2.2.5 Polynom vierten Grades

Der Graph einer Funktion vierten Grades kann w-förmig aussehen.

$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e;$$

2.3 Kurvendiskussion

Zu einer vollständigen Kurvendiskussion werden in der Regel folgende Punkte bestimmt:

- Definitionsmenge bzw. Grundmenge der Funktion
- Nullstelle(n), also Schnittpunkt(e) mit der x-Achse
- Schnittpunk(e) mit der y-Achse, also $y = f(0)$;
- Symmetrie(n)
- Grenzverhalten
- Extrempunkt(e)
- Wendepunkt(e)
- Funktionsgraph
- Monotonie-Verhalten
- Krümmung
- Wertemenge

2.3.1 Definitionsmenge bzw. Grundmenge der Funktion

Um die Definitionsmenge zu bestimmen, schaut man sich den Funktionsterm einfach an. Bei einem allgemeinem Polynom ist die Definitionsmenge für gewöhnlich $\mathbb{R}$. Hat man jedoch bspw. Wurzeln oder Brüche, ist es wichtig darauf zu achten, welche Werte eingesetzt werden dürfen. Der Radikand (also das, was unter der Wurzel steht) darf nie negativ sein, und bei einem Bruch darf der Nenner nicht Null sein. Auch für andere Funktionen gelten bestimmte Werte. Beispielsweise ist der (natürliche) Logarithmus nur für positive Zahlen bestimmt. Hier ein paar Beispiele:

- $f(x) = \sqrt{x}$;
  $D = \mathbb{R}_0^+$
- $f(x) = \frac{1}{x}$;
  $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $f(x) = \ln x$;
  $D = \mathbb{R}^+$
- $f(x) = \sqrt{1-x}$;
  $D =]-\infty; +1]$

2.3.2 Symmetrie(n)

Eine Symmetrie kann man bei einem Polynom relativ einfach bestimmen:

- Gibt es nur Polynome mit geraden Exponenten, ist der Funktionsgraph achsensymmetrisch.
- Gibt es nur Polynome mit ungeraden Exponenten, ist der Funktionsgraph punktsymmetrisch.
- Bei gemischten Polynomen gibt es höchstwahrscheinlich keine Symmetrie.

3 Ableitung & Stammfunktion

3.1 Allgemeine Ableitung

Gegeben sei eine Funktion der allgemeinen Form:

$$f(x) = a \cdot x^n;$$

3.1.1 Die erste Ableitung

$$\frac{d}{dx}\left(a \cdot x^n\right) = f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1};$$

3.1.2 Die zweite Ableitung

$$f''(x) = a \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2};$$

3.1.3 Die dritte Ableitung

$$f'''(x) = a \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3};$$

3.1.4 Die vierte Ableitung

$$f^{(4)}(x) = a \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot x^{n-4};$$

3.2 Sonderfälle

3.2.1 Ableitung einer Konstanten

Eine Konstante geht beim Ableiten immer verloren, weil sie 0 wird.

$$\frac{d}{dx}\left(c\right) = 0;$$

3.2.2 Ableitung der Quadratwurzel

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2 \cdot x};$$

3.2.3 Ableitung der n-ten Wurzel

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}};$$

3.2.4 Ableitung der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion leitet in ihrer Grundform immer auf sich selbst ab.

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x;$$

3.2.5 Ableitung des Logarithmus

$$\frac{d}{dx}\left(ln(x)\right) = \frac{1}{x};$$

3.2.6 Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Der Sinus und der Kosinus leiten im Prinzip immer wieder aufeinander ab:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\sin x = \cos x;\\
&\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x;\\
&\frac{d}{dx}(-\sin x) = -\frac{d}{dx}\sin x = -\cos x;\\
&\frac{d}{dx}(-\cos x) = -\frac{d}{dx}cosx = \sin x;
\end{aligned}$$

Das heißt, die vierte Ableitung ist wieder die Originalfunktion.
Oder allgemein:

$$f^{(4n+k)} = f^{(k)};$$

Hierbei steht n für die n-te Ableitung, und k steht für:

$$\begin{aligned}
&k = 0 : \sin x\\
&k = 1 : \cos x\\
&k = 2 : -\sin x\\
&k = 3 : -\cos x
\end{aligned}$$

3.3 Weitere Ableitungsregeln

3.3.1 Summenregel

Beim Ableiten einer Summe, kann jeder einzelne Summand für sich abgeleitet werden:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x);$$

3.3.2 Faktorregel

Die Faktorregel gilt für allgemeine Ableitung:

$$\frac{d}{dx}(a \cdot f(x)) = a \cdot f'(x);$$

3.3.3 Potenzregel

Die Potenzregel ist die allgemeine Ableitung:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1};$$

3.3.4 Produktregel

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

3.3.5 Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)};$$

3.3.6 Kettenregel

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(x) \cdot g'(x);$$

Hierbei muss bei der äußeren Ableitung das Argument unabgeleitet übernommen werden.
Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^4+5)^7; \\ u &:= x^4+5; \\ v &:= u^7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u' \cdot v' \\ &= \frac{d}{dx}\left(x^4+5\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(u^7\right) \\ &= (4 \cdot x^3) \cdot (7 \cdot u^6) \\ &= (4 \cdot x^3) \cdot 7 \cdot (x^4+5)^6 \\ &= 28 \cdot x^3 \cdot (x^4+5)^6; \end{aligned}$$

3.4 Weitere Ableitungen

3.4.1 Trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\tan x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = 1 + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \\ \frac{d}{dx}\cot x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = -1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x; \\ \frac{d}{dx}\sec x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x; \\ \frac{d}{dx}\csc x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cot x}{\sin x} = -\cot x \cdot \csc x; \end{aligned}$$

3.5 Allgemeine Stammfunktion

Da beim Ableiten einer Funktion eine eventuelle Konstante verloren geht, spricht man in der Mathematik normalerweise nicht von **der**, sondern von **einer** Stammfunktion. Man spricht auch vom Integral einer Funktion.

3.5.1 Das unbestimmte Integral

$$F(x) = \int f(x)dx = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} + c;$$

Die Konstante c (manchmal auch C) schreibt man aus formellen Gründen mit. Diese fällt ja bei der Ableitung heraus, weil sie 0 wird. Desweiteren gilt:

$$\int -f(x)dx = -\int f(x)dx;$$

3.5.2 Das bestimmte Integral

$$\Big[F(x)\Big]_a^b = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$$

3.5.3 Das Integral von Sinus und Kosinus

Ähnlich wie bei der Ableitung können Sinus und Kosinus auch ineinander integriert werden:
Der Sinus und der Kosinus leiten im Prinzip immer wieder aufeinander ab:

$$\int \sin x dx = -\cos x;$$
$$\int \cos x dx = \sin x;$$
$$\int -\sin x dx = -\int \sin x dx = \cos x;$$
$$\int -\cos x dx = -\int \cos x dx = -\sin x;$$

3.5.4 Das Integral der Exponentialfunktion

Da die Reinform der Exponentialfunktion auf sich selbst ableitet, kann sie auch mit sich selbst integriert werden:

$$\int e^x dx = e^x;$$

3.6 Integrationsregeln

3.6.1 Partielle Integration (allgemein)

Beim Integrieren gibt es keine allgemeingültige Formeln, um das Integral komplett aufzulösen. Es gibt jedoch ein paar Herangehensweisen, um die Integration zu erleichtern, und es nach und nach auszurechnen. Folgendes bietet sich an:

- Polynome werden differenziert *(abgeleitet)*.
- Die Sinus- und Kosinusfunktionen können in sich selbst integriert werden.
- Die Exponentialfunktion e^x kann auch in sich selbst integriert werden.

3.6.2 Partielle Integration einer Summe

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x);$$

3.6.3 Partielle Integration eines Produkts

$$\int (f(x) \cdot g(x))\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int (F(x) \cdot g'(x))\, dx;$$

Da die Multiplikation kommutativ ist, gilt ebenso:

$$\int (f(x) \cdot g(x))\, dx = f(x) \cdot G(x) - \int (f'(x) \cdot G(x))\, dx;$$

Merkhilfe: *„Man nimmt für eine der Funktionen eine Stammfunktion, und bildet das Produkt mit der anderen Funktion, minus das Integral von der Stammfunktion mal die Ableitung der anderen Funktion." (DorFuchs)*

4 Fakultät

4.1 Allgemein

Die Fakultät einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist im allgemeinen wie folgt definiert:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1;$$

4.1.1 Sonderfall

Die Fakultät von 0 ist mit 1 definiert:

$$0! = 1;$$

Dies ergibt sich aus der logischen Folge:

$$n! = \frac{(n+1)!}{n+1};$$

Also begonnen bei 5!:

$$\begin{aligned}
5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120; \\
4! &= \frac{(4+1)!}{4+1} = \frac{5!}{5} = \frac{120}{5} = 24; \\
3! &= \frac{(3+1)!}{3+1} = \frac{4!}{4} = \frac{24}{4} = 6; \\
2! &= \frac{(2+1)!}{2+1} = \frac{3!}{3} = \frac{6}{3} = 2; \\
1! &= \frac{(1+1)!}{1+1} = \frac{2!}{2} = \frac{2}{2} = 1; \\
0! &= \frac{(0+1)!}{0+1} = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1;
\end{aligned}$$

4.2 Berechnung über die Ableitung

Im Prinzip erhält man die Fakultät über die n-te Ableitung der folgenden Funktion:

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^n; \\
&f'(x) = n \cdot x^{n-1}; \\
&f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}; \\
&f'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\, x^{n-3}; \\
&... \\
&f^{(n)}(x) = n!;
\end{aligned}$$

Beispiel zum Berechnen der Fakultät von 5:

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^5; \\
&f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5 \cdot x^4; \\
&f''(x) = 5 \cdot 4 \cdot x^{4-1} = 20 \cdot x^3; \\
&f'''(x) = 20 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 60 \cdot x^2; \\
&f^{(4)}(x) = 60 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 120 \cdot x^1 = 120 \cdot x; \\
&f^{(5)}(x) = 120 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = 120 \cdot x^0 = 120 \cdot 1 = 120 = 5!;
\end{aligned}$$

4.3 Stirling-Formel

Als Approximation *(Annäherung)* der Fakultät gibt es die sogenannte Stirling-Formel. Je höher hierbei n ist, desto geringer ist dabei der relative Fehler.

$$n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n;$$

4.3.1 Ableitung

Theoretisch könnte man die Stirling-Formel auch als eine beliebige, reelle Funktion betrachten, um auch z.b. die Gamma-Funktion, die die Fakultät auf die reellen Zahlen erweitert, zu approximieren:

$$x! \approx \Gamma(x+1) \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot x} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^x;$$

Die Ableitung dieser Funktion ist sehr aufwendig, deswegen hier die Kurzfassung:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^x\right) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \cdot \left(\frac{\pi}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x}} + \ln x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot x}\right)$$

5 Trigonometrische Funktionen

5.1 Grundfunktionen

5.1.1 Sinus und Kosinus

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse};$$
$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse};$$

Weiterhin gilt dass $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist, weil:

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x + \cos^2 x = \\
&= \left(\frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}\right)^2 + \left(\frac{Ankathete}{Hypotenuse}\right)^2 = \\
&= \frac{Gegenkathete^2}{Hypotenuse^2} + \frac{Ankathete^2}{Hypotenuse^2} = \\
&= \frac{Gegenkathete^2 + Ankathete^2}{Hypotenuse^2};
\end{aligned}$$

Und weil im rechtwinkeligen Dreieck der **Satz des Pythagoras** gilt:

$$Ankathete^2 + Gegenkathete^2 = Hypotenuse^2;$$

kommt für $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ heraus.

5.1.2 Tangens und Kotangens

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{\sin x}{\cos x};$$
$$\cot\alpha = \frac{Ankatheta}{Gegenkathete} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan\alpha};$$

5.1.3 Sekans und Kosekans

$$\sec\alpha = \frac{Hypotenuse}{Ankathete} = \frac{1}{\cos\alpha};$$
$$\csc\alpha = \frac{Hypotenuse}{Gegenkathete} = \frac{1}{\sin\alpha};$$

5.2 Arkusfunktionen

Die Arkusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Für diese gibt es drei Schreibweisen. Zum Beispiel kann der Arkussinus mit arcsin, *asin* oder sin^{-1} geschrieben werden. Um Verwechslungen mit dem Kehrwert zu vermeiden, verwende ich die Schreibweise mit *arc* davor.

5.2.1 Arkussinus und Arkuskosinus