Formelsammlung

Der Robert

23. September 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Trigonometrische Funktionen

1.1 Grundfunktionen

1.1.1 Sinus und Kosinus

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse};$$
$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse};$$

Weiterhin gilt dass $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist, weil:

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x + \cos^2 x = \\
&= \left(\frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}\right)^2 + \left(\frac{Ankathete}{Hypotenuse}\right)^2 = \\
&= \frac{Gegenkathete^2}{Hypotenuse^2} + \frac{Ankathete^2}{Hypotenuse^2} = \\
&= \frac{Gegenkathete^2 + Ankathete^2}{Hypotenuse^2};
\end{aligned}$$

Und, weil im rechtwinkeligen Dreieck der **Satz des Pythagoras** gilt:

$$Ankathete^2 + Gegenkathete^2 = Hypotenuse^2;$$

kommt für $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ heraus.

1.1.2 Tangens und Kotangens

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{\sin x}{\cos x};$$
$$\cot\alpha = \frac{Ankatheta}{Gegenkathete} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan\alpha};$$

1.1.3 Sekans und Kosekans

$$\sec\alpha = \frac{Hypotenuse}{Ankathete} = \frac{1}{\cos\alpha};$$
$$\csc\alpha = \frac{Hypotenuse}{Gegenkathete} = \frac{1}{\sin\alpha};$$

1.2 Arkusfunktionen

Die Arkusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Für diese gibt es drei Schreibweisen. Zum Beispiel kann der Arkussinus mit arcsin, $asin$ oder sin^{-1} geschrieben werden. Um Verwechlungen mit dem Kehrwert zu vermeiden, verwende ich die Schreibweise mit arc davor.

2 Ableitung & Stammfunktion

2.1 Allgemeine Ableitung

Gegeben sei eine Funktion der allgemeinen Form:

$$f(x) = a \cdot x^n;$$

2.1.1 Die erste Ableitung

$$\frac{d}{dx}\left(a \cdot x^n\right) = f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1};$$

2.1.2 Die zweite Ableitung

$$f''(x) = a \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2};$$

2.1.3 Die dritte Ableitung

$$f'''(x) = a \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3};$$

2.1.4 Die vierte Ableitung

$$f^{(4)}(x) = a \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot x^{n-4};$$

2.2 Sonderfälle

2.2.1 Ableitung einer Konstanten

Eine Konstante geht beim Ableiten immer verloren, weil sie 0 wird.

$$\frac{d}{dx}(c) = 0;$$

2.2.2 Ableitung der Quadratwurzel

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2 \cdot x};$$

2.2.3 Ableitung der n-ten Wurzel

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}};$$

2.2.4 Ableitung der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion leitet in ihrer Grundform immer auf sich selbst ab.

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x;$$

2.2.5 Ableitung des Logarithmus

$$\frac{d}{dx}(ln(x)) = \frac{1}{x};$$

2.2.6 Ableitungen von Sinus und Kosinus

Der Sinus und der Kosinus leiten im Prinzip immer wieder aufeinander ab:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x;$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x;$$
$$\frac{d}{dx}(-\sin x) = -\cos x;$$
$$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x;$$

Das heißt, die vierte Ableitung ist wieder die Originalfunktion.
Oder allgemein:

$$f^{(4n+k)} = f^{(k)};$$

Hierbei steht n für die n-te Ableitung, und k steht für:

$$k = 0 : \sin x$$
$$k = 1 : \cos x$$
$$k = 2 : -\sin x$$
$$k = 3 : -\cos x$$

2.3 Weitere Ableitungsregeln

2.3.1 Summenregel

Beim Ableiten einer Summe, kann jeder einzelne Summand für sich abgeleitet werden:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right)=f'(x)+g'(x);$$

2.3.2 Faktorregel

Die Faktorregel gilt für allgemeine Ableitung:

$$\frac{d}{dx}\left(a\cdot f(x)\right)=a\cdot f'(x);$$

2.3.3 Potenzregel

Die Potenzregel ist die allgemeine Ableitung:

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=n\cdot x^{n-1};$$

2.3.4 Produktregel

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x);$$

2.3.5 Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)};$$

2.3.6 Kettenregel

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right)=f'(x)\cdot g'(x);$$

Hierbei muss bei der äußeren Ableitung das Argument unabgeleitet übernommen werden.
Beispiel:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^4+5)^7;\\
u &:= x^4+5;\\
v &:= u^7;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'\cdot v'\\
&= \frac{d}{dx}\left(x^4+5\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(u^7\right)\\
&= (4\cdot x^3)\cdot(7\cdot u^6)\\
&= (4\cdot x^3)\cdot 7\cdot(x^4+5)^6\\
&= 28\cdot x^3\cdot(x^4+5)^6;
\end{aligned}$$

2.4 Weitere Ableitungen

2.4.1 Trigonometrische Funktionen

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = 1 + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$
$$\frac{d}{dx}\cot x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = -1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x;$$
$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x;$$
$$\frac{d}{dx}\csc x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cot x}{\sin x} = -\cot x \cdot \csc x;$$

2.5 Allgemeine Stammfunktion

Da beim Ableiten einer Funktion eine eventuelle Konstante verloren geht, spricht man in der Mathematik normalerweise nicht von **der**, sondern von **einer** Stammfunktion. Man spricht auch vom Integral einer Funktion.

2.5.1 Das unbestimmte Integral

$$F(x) = \int f(x)dx = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} + c;$$

Die Konstante c (manchmal auch C) schreibt man aus formellen Gründen mit. Diese fällt ja bei der Ableitung heraus, weil sie 0 wird.

2.5.2 Das bestimmte Integral

$$\Big[F(x)\Big]_a^b = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$$

2.5.3 Das Integral von Sinus und Kosinus

Ähnlich wie bei der Ableitung können Sinus und Kosinus auch ineinander integriert werden:
Der Sinus und der Kosinus leiten im Prinzip immer wieder aufeinander ab:

$$\int \sin x dx = -\cos x;$$
$$\int \cos x dx = \sin x;$$
$$\int -\sin x dx = -\int \sin x dx = \cos x;$$
$$\int -\cos x dx = -\int \cos x dx = -\sin x;$$

2.5.4 Das Integral der Exponentialfunktion

Da die Reinform der Exponentialfunktion auf sich selbst ableitet, kann sie auch mit sich selbst integriert werden:

$$\int e^x dx = e^x;$$

2.6 Integrationsregeln

2.6.1 Partielle Integration (allgemein)

Beim Integrieren gibt es keine allgemeingültige Formeln, um das Integral komplett aufzulösen. Es gibt jedoch ein paar Herangehensweisen, um die Integration zu erleichtern, und es nach und nach auszurechnen. Folgendes bietet sich an:

- Polynome werden differenziert *(abgeleitet)*.
- Die Sinus- und Kosinusfunktionen können in sich selbst integriert werden.
- Die Exponentialfunktion e^x kann auch in sich selbst integriert werden.

2.6.2 Partielle Integration einer Summe

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x);$$

2.6.3 Partielle Integration eines Produkts

$$\int (f(x) \cdot g(x))\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int (F(x) \cdot g'(x))\, dx;$$

Da die Multiplikation kommutativ ist, gilt ebenso:

$$\int (f(x) \cdot g(x))\, dx = f(x) \cdot G(x) - \int (f'(x) \cdot G(x))\, dx;$$

3 Fakultät

3.1 Allgemein

Die Fakultät einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist im allgemeinen wie folgt definiert:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1;$$

3.1.1 Sonderfall

Die Fakultät von 0 ist mit 1 definiert:

$$0! = 1;$$

Dies ergibt sich aus der logischen Folge:

$$n! = \frac{(n+1)!}{n+1};$$

Also begonnen bei 5!:

$$\begin{aligned}
5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120; \\
4! &= \frac{(4+1)!}{4+1} = \frac{5!}{5} = \frac{120}{5} = 24; \\
3! &= \frac{(3+1)!}{3+1} = \frac{4!}{4} = \frac{24}{4} = 6; \\
2! &= \frac{(2+1)!}{2+1} = \frac{3!}{3} = \frac{6}{3} = 2; \\
1! &= \frac{(1+1)!}{1+1} = \frac{2!}{2} = \frac{2}{2} = 1; \\
0! &= \frac{(0+1)!}{0+1} = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1;
\end{aligned}$$

3.2 Berechnung über die Ableitung

Im Prinzip erhält man die Fakultät über die n-te Ableitung der folgenden Funktion:

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^n; \\
&f'(x) = n \cdot x^{n-1}; \\
&f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}; \\
&f'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\, x^{n-3}; \\
&... \\
&f^{(n)}(x) = n!;
\end{aligned}$$

Beispiel zum Berechnen der Fakultät von 5:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^5;\\
&f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5 \cdot x^4;\\
&f''(x) = 5 \cdot 4 \cdot x^{4-1} = 20 \cdot x^3;\\
&f'''(x) = 20 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 60 \cdot x^2;\\
&f^{(4)}(x) = 60 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 120 \cdot x^1 = 120 \cdot x;\\
&f^{(5)}(x) = 120 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = 120 \cdot x^0 = 120 \cdot 1 = 120 = 5!;
\end{aligned}
$$

3.3 Stirling-Formel

Als Approximation *(Annäherung)* der Fakultät gibt es die sogenannte Stirling-Formel. Je höher hierbei n ist, desto geringer ist dabei der relative Fehler.

$$n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n;$$