MATHEMATIK

Der Robert

25. September 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen

1.1 Polynom n-ten Grades

Eine Funktion ist ein Polynom n-ten Grades, wenn sie folgende Form hat:

$$f(x) = p_1 \cdot x^n + p_2 \cdot x^{n-1} + p_3 \cdot x^{n-2} + ... + p_{n-2} \cdot x^2 + p_{n-1} \cdot x + p_n;$$

Hierbei stehen $p_1 ... p_n \in \mathbb{R}$ für beliebige Faktoren zum jeweiligen Polynom.

1.2 Spezialfälle

1.2.1 Polynom des Grades 0

Bei einem Polynom des Grades 0 handelt es sich um eine Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft. Sie lautet:

$$f(x) = c;$$

Wobei $c \in \mathbb{R}$ ist, und nicht 0 sein sollte. Der Buchstabe c als Variable leitet sich davon ab, dass es sich um eine Konstante handelt, auf Englisch auch *constant*, von lateinisch *cōnstāre = feststehen*, bzw. *cōnstāns = feststehend*.

1.2.2 Polynom ersten Grades

Bei einem Polynom ersten Grades handelt es sich lediglich um eine lineare Funktion:

$$f(x) = m \cdot x + t;$$

Sie hat die Steigung m und den Nullpunkt $-t$. Ist m positiv, ist die Funktion monoton steigend; ist m negativ, ist die Funktion monoton fallend.

1.2.3 Polynom zweiten Grades

Eine Funktion zweiten Grades ist eine quadratische Funktion. Ihr Funktionsgraph ist eine Parabel.

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c;$$

Die Nullpunkte lassen sich über die sog. Mitternachtsformel bestimmen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a};$$

Man kann anhand der Diskriminante auch bestimmen, wie viele Nullstellen eine quadratische Funktion hat. Die Diskriminante ist der Radikand der Mitternachtsformel, also $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Jetzt gibt es folgende Möglichkeiten:

- $b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$: Die Funktion hat keinen Nullpunkt.
- $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$: Die Funktion hat genau einen Nullpunkt, nämlich $-\frac{b}{2 \cdot a}$
- $b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$: Die Funktion hat zwei Nullpunkte.

1.2.4 Polynom dritten Grades

Eine Funktion dritten Grades nennt man auch kubische Funktion. Ihr Funktionsgraph sieht eher s-förmig aus.

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d;$$

1.2.5 Polynom vierten Grades

Der Graph einer Funktion vierten Grades kann w-förmig aussehen.

$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e;$$

1.3 Kurvendiskussion

Zu einer vollständigen Kurvendiskussion werden in der Regel folgende Punkte bestimmt:

- Definitionsmenge bzw. Grundmenge der Funktion
- Nullstelle(n), also Schnittpunkt(e) mit der x-Achse
- Schnittpunk(e) mit der y-Achse, also $y = f(0)$;
- Symmetrie(n)
- Grenzverhalten
- Extrempunkt(e)
- Wendepunkt(e)
- Funktionsgraph
- Monotonie-Verhalten
- Krümmung
- Wertemenge

1.3.1 Definitionsmenge bzw. Grundmenge der Funktion

Um die Definitionsmenge zu bestimmen, schaut man sich den Funktionsterm einfach an. Bei einem allgemeinem Polynom ist die Definitionsmenge für gewöhnlich $\mathbb{R}$. Hat man jedoch bspw. Wurzeln oder Brüche, ist es wichtig darauf zu achten, welche Werte eingesetzt werden dürfen. Der Radikand (also das, was unter der Wurzel steht) darf nie negativ sein, und bei einem Bruch darf der Nenner nicht Null sein. Auch für andere Funktionen gelten bestimmte Werte. Beispielsweise ist der (natürliche) Logarithmus nur für positive Zahlen bestimmt. Hier ein paar Beispiele:

- $f(x) = \sqrt{x}$;
  $D = \mathbb{R}_0^+$
- $f(x) = \frac{1}{x}$;
  $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $f(x) = \ln x$;
  $D = \mathbb{R}^+$
- $f(x) = \sqrt{1-x}$;
  $D =]-\infty; +1]$

1.3.2 Symmetrie(n)

Eine Symmetrie kann man bei einem Polynom relativ einfach bestimmen:

- Gibt es nur Polynome mit geraden Exponenten, ist der Funktionsgraph achsensymmetrisch.
- Gibt es nur Polynome mit ungeraden Exponenten, ist der Funktionsgraph punktsymmetrisch.
- Bei gemischten Polynomen gibt es höchstwahrscheinlich keine Symmetrie.

2 Ableitung & Stammfunktion

2.1 Allgemeine Ableitung

Gegeben sei eine Funktion der allgemeinen Form:

$$f(x) = a \cdot x^n;$$

2.1.1 Die erste Ableitung

$$\frac{d}{dx}\left(a \cdot x^n\right) = f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1};$$

2.1.2 Die zweite Ableitung

$$f''(x) = a \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2};$$

2.1.3 Die dritte Ableitung

$$f'''(x) = a \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3};$$

2.1.4 Die vierte Ableitung

$$f^{(4)}(x) = a \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot x^{n-4};$$

2.2 Sonderfälle

2.2.1 Ableitung einer Konstanten

Eine Konstante geht beim Ableiten immer verloren, weil sie 0 wird.

$$\frac{d}{dx}(c) = 0;$$

2.2.2 Ableitung der Quadratwurzel

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2 \cdot x};$$

2.2.3 Ableitung der n-ten Wurzel

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}};$$

2.2.4 Ableitung der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion leitet in ihrer Grundform immer auf sich selbst ab.

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x;$$

2.2.5 Ableitung des Logarithmus

$$\frac{d}{dx}(ln(x)) = \frac{1}{x};$$

2.2.6 Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Der Sinus und der Kosinus leiten im Prinzip immer wieder aufeinander ab:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\sin x = \cos x;\\
&\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x;\\
&\frac{d}{dx}(-\sin x) = -\frac{d}{dx}\sin x = -\cos x;\\
&\frac{d}{dx}(-\cos x) = -\frac{d}{dx}cosx = \sin x;
\end{aligned}$$

Das heißt, die vierte Ableitung ist wieder die Originalfunktion.
Oder allgemein:

$$f^{(4n+k)} = f^{(k)};$$

Hierbei steht n für die n-te Ableitung, und k steht für:

$$\begin{aligned}
&k = 0 : \sin x\\
&k = 1 : \cos x\\
&k = 2 : -\sin x\\
&k = 3 : -\cos x
\end{aligned}$$

2.3 Weitere Ableitungsregeln

2.3.1 Summenregel

Beim Ableiten einer Summe, kann jeder einzelne Summand für sich abgeleitet werden:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x);$$

2.3.2 Faktorregel

Die Faktorregel gilt für allgemeine Ableitung:

$$\frac{d}{dx}(a \cdot f(x)) = a \cdot f'(x);$$

2.3.3 Potenzregel

Die Potenzregel ist die allgemeine Ableitung:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1};$$

2.3.4 Produktregel

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

2.3.5 Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)};$$

2.3.6 Kettenregel

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(x) \cdot g'(x);$$

Hierbei muss bei der äußeren Ableitung das Argument unabgeleitet übernommen werden.
Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^4+5)^7; \\ u &:= x^4+5; \\ v &:= u^7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u' \cdot v' \\ &= \frac{d}{dx}\left(x^4+5\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(u^7\right) \\ &= (4 \cdot x^3) \cdot (7 \cdot u^6) \\ &= (4 \cdot x^3) \cdot 7 \cdot (x^4+5)^6 \\ &= 28 \cdot x^3 \cdot (x^4+5)^6; \end{aligned}$$

2.4 Weitere Ableitungen

2.4.1 Trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\tan x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = 1 + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \\ \frac{d}{dx}\cot x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = -1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x; \\ \frac{d}{dx}\sec x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x; \\ \frac{d}{dx}\csc x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cot x}{\sin x} = -\cot x \cdot \csc x; \end{aligned}$$

2.5 Allgemeine Stammfunktion

Da beim Ableiten einer Funktion eine eventuelle Konstante verloren geht, spricht man in der Mathematik normalerweise nicht von **der**, sondern von **einer** Stammfunktion. Man spricht auch vom Integral einer Funktion.

2.5.1 Das unbestimmte Integral

$$F(x) = \int f(x)dx = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} + c;$$

Die Konstante c (manchmal auch C) schreibt man aus formellen Gründen mit. Diese fällt ja bei der Ableitung heraus, weil sie 0 wird. Desweiteren gilt:

$$\int -f(x)dx = -\int f(x)dx;$$

2.5.2 Das bestimmte Integral

$$\Big[F(x)\Big]_a^b = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$$

2.5.3 Das Integral von Sinus und Kosinus

Ähnlich wie bei der Ableitung können Sinus und Kosinus auch ineinander integriert werden:
Der Sinus und der Kosinus leiten im Prinzip immer wieder aufeinander ab:

$$\int \sin x dx = -\cos x;$$
$$\int \cos x dx = \sin x;$$
$$\int -\sin x dx = -\int \sin x dx = \cos x;$$
$$\int -\cos x dx = -\int \cos x dx = -\sin x;$$

2.5.4 Das Integral der Exponentialfunktion

Da die Reinform der Exponentialfunktion auf sich selbst ableitet, kann sie auch mit sich selbst integriert werden:

$$\int e^x dx = e^x;$$

2.6 Integrationsregeln

2.6.1 Partielle Integration (allgemein)

Beim Integrieren gibt es keine allgemeingültige Formeln, um das Integral komplett aufzulösen. Es gibt jedoch ein paar Herangehensweisen, um die Integration zu erleichtern, und es nach und nach auszurechnen.
Folgendes bietet sich an:

- Polynome werden differenziert *(abgeleitet)*.
- Die Sinus- und Kosinusfunktionen können in sich selbst integriert werden.
- Die Exponentialfunktion e^x kann auch in sich selbst integriert werden.

2.6.2 Partielle Integration einer Summe

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x);$$

2.6.3 Partielle Integration eines Produkts

$$\int (f(x) \cdot g(x))\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int (F(x) \cdot g'(x))\, dx;$$

Da die Multiplikation kommutativ ist, gilt ebenso:

$$\int (f(x) \cdot g(x))\, dx = f(x) \cdot G(x) - \int (f'(x) \cdot G(x))\, dx;$$

Merkhilfe: *„Man nimmt für eine der Funktionen eine Stammfunktion, und bildet das Produkt mit der anderen Funktion, minus das Integral von der Stammfunktion mal die Ableitung der anderen Funktion.” (DorFuchs)*

3 Fakultät

3.1 Allgemein

Die Fakultät einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist im allgemeinen wie folgt definiert:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1;$$

3.1.1 Sonderfall

Die Fakultät von 0 ist mit 1 definiert:

$$0! = 1;$$

Dies ergibt sich aus der logischen Folge:

$$n! = \frac{(n+1)!}{n+1};$$

Also begonnen bei 5!:

$$\begin{aligned}
5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120; \\
4! &= \frac{(4+1)!}{4+1} = \frac{5!}{5} = \frac{120}{5} = 24; \\
3! &= \frac{(3+1)!}{3+1} = \frac{4!}{4} = \frac{24}{4} = 6; \\
2! &= \frac{(2+1)!}{2+1} = \frac{3!}{3} = \frac{6}{3} = 2; \\
1! &= \frac{(1+1)!}{1+1} = \frac{2!}{2} = \frac{2}{2} = 1; \\
0! &= \frac{(0+1)!}{0+1} = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1;
\end{aligned}$$

3.2 Berechnung über die Ableitung

Im Prinzip erhält man die Fakultät über die n-te Ableitung der folgenden Funktion:

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^n; \\
&f'(x) = n \cdot x^{n-1}; \\
&f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}; \\
&f'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\, x^{n-3}; \\
&... \\
&f^{(n)}(x) = n!;
\end{aligned}$$

Beispiel zum Berechnen der Fakultät von 5:

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^5; \\
&f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5 \cdot x^4; \\
&f''(x) = 5 \cdot 4 \cdot x^{4-1} = 20 \cdot x^3; \\
&f'''(x) = 20 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 60 \cdot x^2; \\
&f^{(4)}(x) = 60 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 120 \cdot x^1 = 120 \cdot x; \\
&f^{(5)}(x) = 120 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = 120 \cdot x^0 = 120 \cdot 1 = 120 = 5!;
\end{aligned}$$

3.3 Stirling-Formel

Als Approximation *(Annäherung)* der Fakultät gibt es die sogenannte Stirling-Formel. Je höher hierbei n ist, desto geringer ist dabei der relative Fehler.

$$n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n;$$

3.3.1 Ableitung

Theoretisch könnte man die Stirling-Formel auch als eine beliebige, reelle Funktion betrachten, um auch z.b. die Gamma-Funktion, die die Fakultät auf die reellen Zahlen erweitert, zu approximieren:

$$x! \approx \Gamma(x+1) \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot x} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^x;$$

Die Ableitung dieser Funktion ist sehr aufwendig, deswegen hier die Kurzfassung:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^x\right) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \cdot \left(\frac{\pi}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x}} + \ln x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot x}\right)$$

4 Trigonometrische Funktionen

4.1 Grundfunktionen

4.1.1 Sinus und Kosinus

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse};$$
$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse};$$

Weiterhin gilt dass $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist, weil:

$$\begin{aligned} &\sin^2 x + \cos^2 x = \\ &= \left(\frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}\right)^2 + \left(\frac{Ankathete}{Hypotenuse}\right)^2 = \\ &= \frac{Gegenkathete^2}{Hypotenuse^2} + \frac{Ankathete^2}{Hypotenuse^2} = \\ &= \frac{Gegenkathete^2 + Ankathete^2}{Hypotenuse^2}; \end{aligned}$$

Und weil im rechtwinkeligen Dreieck der **Satz des Pythagoras** gilt:

$$Ankathete^2 + Gegenkathete^2 = Hypotenuse^2;$$

kommt für $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ heraus.

4.1.2 Tangens und Kotangens

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{\sin x}{\cos x};$$
$$\cot\alpha = \frac{Ankatheta}{Gegenkathete} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan\alpha};$$

4.1.3 Sekans und Kosekans

$$\sec\alpha = \frac{Hypotenuse}{Ankathete} = \frac{1}{\cos\alpha};$$
$$\csc\alpha = \frac{Hypotenuse}{Gegenkathete} = \frac{1}{\sin\alpha};$$

4.2 Arkusfunktionen

Die Arkusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Für diese gibt es drei Schreibweisen. Zum Beispiel kann der Arkussinus mit arcsin, *asin* oder sin^{-1} geschrieben werden. Um Verwechslungen mit dem Kehrwert zu vermeiden, verwende ich die Schreibweise mit *arc* davor.

4.2.1 Arkussinus und Arkuskosinus

5 Zahlennamen

Die Zahlen beziehen sich alle auf das Dezimalsystem. Bei großen Zahlen gilt übrigens, wie im Deutschen üblich, die große Leiter, d.h. tausend Millionen sind also eine Milliarde.

5.1 Ziffern

- 0: Null
- 1: Eins
- 2: Zwei
- 3: Drei
- 4: Vier
- 5: Fünf
- 6: Sechs
- 7: Sieben
- 8: Acht
- 9: Neun