Standardmodell der Teilchenphysik

Nach den Vorlesungen von

Professor Arno Straessner und Dr. Tania Robens,
IKTP

telbild.jpg

Übertragen von Christian Drews und Marius Walther

Sommersemester 2015

Dies ist *kein* offizielles Skript des Vorlesenden und enthält einige Anpassungen, wie ausformulierte Stichpunkte. Es wurde auf Basis einer Mitschrift der Vorlesung *Standardmodell* an der Technischen Universität Dresden von Prof. STRAESSNER und TANIA ROBENS angefertigt.

Version: 20. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **5**
1.1 Ziel der Vorlesung 5
1.2 Grundlagen 5
1.2.1 Heutiger Stand 5
1.3 Wiederholung der speziellen Relativitätstheorie 6
1.4 Wiederholung der Quantenmechanik 8

1 Einführung

1.1 Ziel der Vorlesung

Das Ziel der Vorlesung wird es sein, die theoretischen und experimentellen Grundlagen der Teilchenphysik zu betrachten. Wir werden Streureaktionen an Beschleunigern untersuchen und Lagrangedichten und Symmetrien des Standardmodells aufstellen. Dies wird uns helfen, einfache Vorhersagen des Modells zu machen und diese experimentell zu überprüfen

1.2 Grundlagen

Wir wollen nun kurz einen Einblick in den aktuelle Stand des Standardmodells geben und einige Grundbegriffe wiederholen.

1.2.1 Heutiger Stand

Das Standarmodell besteht aus fundamentalen Freiheitsgraden. Diese sind heute als **Elementarteilchen** bekannt. Dazu zählen die **Leptonen**:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \mp 1 e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$$

und die **Quarks**:

$$\begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Sowie die sogenannten **Eichbosonen**: γ^μ (Photon), Z^μ (Z-Boson), $W^{\pm\mu}$ (W-Bosonen) und g^μ (Gluon). Zu dieser Liste gehört auch das HIGGS-Boson, für das es 2013 den Nobelpreis gab. Das Standardmodell (SM) erklärt die Eigenschaften dieser Teilchen (sowie zusammengesetzter Teilchen (Protonen, Neutronen, …, Atomkerne, Atome, Moleküle, …). Für das Verständnis wird die Vereinigung der Quantenmechanik sowie der Relativitätstheorie benötigt. Dies führt uns dann zur Quantenfeldtheorie.

1.3 Wiederholung der speziellen Relativitätstheorie

In der Vorlesung sowie in der Kern- und Teilchenphysik wird hauptsächlich mit den sogenannten natürlichen Einheiten gearbeitet. Dies bedeutet, dass einige wichtigen Größen wie das Plancksche Wirkungsquantum und die Lichtgeschwindigkeit auf 1 gesetzt werden: $\hbar = c = 1$. Daraus folgen folgende Einheiten:

$$[E] = [m] = \left[t^{-1}\right] = \left[l^{-1}\right] = 1\,\mathrm{eV}$$

Die Umrechnung ergibt sich durch Multiplikation mit den auf 1 gesetzten Größen. Zum Beispiel:

$$[t] = 1\,\mathrm{eV}^{-1} \to \frac{\left(1\,\mathrm{eV}^{-1}\right)}{\hbar} = 6{,}6 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{s} \qquad [l] = 1\,\mathrm{eV}^{-1} \to \frac{\left(1\,\mathrm{eV}^{-1}\right)}{\hbar c} = 1{,}97 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

Die Lichtgeschwindigkeit (c=1) ist dabei in allen Bezugssystemen (Inertialsystem) gleich. Für die Berechnungen sind außerdem die **4-Vektoren** wichtig.

$$x^\mu = \left(x^0, x^i\right) = \left(t, \vec{x}\right)$$

Dies ist der **4-Ortsvektor**. Für den **4-Impuls** erhalten wir:

$$p^\mu = \left(p^0, p^i\right) = \left(E, \vec{p}\right)$$

Die **Ableitung** schreiben wir:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

4-Vektoren mit Index oben nennen wir **Kontravariant**. Diese sind in im vektoriellen Anteil, also in den letzten drei Komponenten positiv. Mit Index unten werden **kovariante** Vektoren bezeichnet. Bei diesem sind die unteren Einträge negativ. Um die beiden Typen von Vektoren ineinander umzuwandeln benötigt es den **Metrischen Tensor**.

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{3x3} \end{pmatrix}$$

Die Umrechnung erfolgt dann wie folgt:

$$a_\mu := g_{\mu\nu} a^\nu \qquad\qquad a^\nu = g^{\mu\nu} a_\nu$$

Die Berechnung von Skalarprodukten lässt sich über den metrischen Tensor herleiten:

$$x \cdot g = x^\mu g_\mu = x^\mu y^\nu g_{\mu\nu} = x_\mu y_\nu g^{\mu\nu} = x^0 y^0 - \vec{x}\vec{y}$$

Zum Beispiel:

$$\partial_\mu (x, p) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} x^\nu p_\nu = \delta^\nu_\mu p_\nu = p_\mu$$

Für die relativistische Rechnung ist außerdem die **Lorentztransformation** wichtig. Die Matrix Λ^μ_ν entspricht der Lorentztransformation und ist definiert durch:

$$\left(\Lambda_x\right)^\mu \left(\Lambda_y\right)^\nu g_{\mu\nu} = x^\mu y^\nu g_{\mu\nu}$$

Wir betrachten nun das Beispiel eines Boosts:

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta_\gamma & 0 & 0 \\ \beta_\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Des Weiteren betrachten wir einen Lichtstrahl von $\left(0, \vec{0}\right)$ nach $\left(t, \vec{x}\right)$. Da gilt: $c = 1$ folgt, dass $\left|\vec{x}\right| = t$. Daraus folgt, dass in jedem Inertialsystem gilt:

$$t^2 = \left|\vec{x}\right|^2$$

Für die Elektrodynamik betrachten wir die kovariante MAXWELL-Gleichung mit dem **4-Potential** $A^\mu(x) = \left(\varphi(x), \vec{A}(x)\right)$ und der **4-Stromdichte** $j^\mu(x) = \left(\varrho(x), \vec{j}(x)\right)$. Der **Feldstärketensor** ergibt sich dann wie folgt:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$$

Die **MAXWELL-Gleichung** hat dann folgende Form:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Der **LAGRANGE-Formalismus** ist vor allem für relativistische Theorien wichtig. Die **LAGRANGE-Funktion** lässt sich über die **LAGRANGEdichte** berechnen:

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(x)$$

Das besondere an der LAGRANGEdichte ist, dass sie lorentzinvariant ist, sich also unter der Lorentztransformation nicht verändert. Aus ihr erhalten wir des Weiteren die Bewegungsgleichung. Eine Forderung an Theorien ist, dass diese lorentzinvariant sind. Am Beispiel der Elektrodynamik:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$$

Mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung erhalten wir die kovariante MAXWELL-Gleichung.

1.4 Wiederholung der Quantenmechanik

Wir betrachten zu erst allgemeine Postulate der Quantenmechanik. Die Quantenmechanik wird mit Hilfe von Zuständen beschrieben. Diese sind Vektoren der Hilberträume. Zu jeder Observablen gehört außerdem ein hermitescher Operator und die Eigenwerte der Operatoren sind die Messwerte dieser Observablen. Zum Beispiel:

$$|\psi\rangle = \sum_i \langle a_i \mid \psi\rangle \, |a_i\rangle$$

Dabei sind a_i die Eigenwerte und $\langle a_i \mid \psi\rangle$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude. $P_{\psi_i a_i} = \left|\langle a_i \mid \psi\rangle\right|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit, den Zustand ψ im Zustand a_i zu finden. Das System wird beschrieben durch $\langle \Phi \mid \mathcal{O} \mid \Psi\rangle$. Dabei sind $|\phi\rangle$ und $|\psi\rangle$ die Zustände. Für die Zeitentwicklung gilt:

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \phi \mid \mathcal{O} \mid \psi\rangle = \left\langle \phi \,\middle|\, \underbrace{[\mathcal{O}, H]}_{\textit{Kommutator}} \,\middle|\, \psi \right\rangle$$

falls gilt :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O} = 0$$

Physikalisch interessant ist vor allem $\Phi = \Psi$. Dann erhalten wir: $\langle \mathcal{O}\rangle = \langle \psi \mid \mathcal{O} \mid \psi\rangle$ Also den Erwartungswert. Die Normierung ist $\langle \Psi \mid \Psi\rangle$. $\langle \phi \mid \psi\rangle$ stellt die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von $|\psi\rangle$ nach $|\phi\rangle$ dar. Die Quantenmechanik ist des Weiteren eine Einteilchentheorie, es gilt also:

$$[x, p] = \mathrm{i}\hbar = \mathrm{i}$$

Die Vielteilchentheorie beschäftigt sich unter anderem mit gemischten Zuständen. Dafür wird der **Dichteoperator** verwendet. Zum Beispiel:

$$\varrho = \sum_i W_i \, |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$$

Wenn es sich um diskrete Zustände handelt. Für kontinuierliche erhält man:

$$\varrho = \int dp \; g(p) \, |p\rangle \langle p|$$

Dabei geben W_i und $g(p)$ die Wahrscheinlichkeit an,