

Die Lösung quadratischer Gleichungen

Jobst Hoffmann

23. Dezember 2022

Quadratische Gleichungen spielen in vielen Bereichen von Naturwissenschaften und Technik eine besondere Rolle. In diesem Artikel wird gezeigt, wie eine quadratische Gleichung gelöst werden kann.

Der Text ist ein Beispiel, an dem gezeigt wird, wie man mit \LaTeX arbeitet, um aus einer Quelle verschiedene Ausgabeformate zu erzeugen. \LaTeX ist ein Makropaket, das von Leslie Lamport auf der Basis von \TeX [Knu86] entwickelt worden ist. Die aktuelle Entwicklung geschieht durch „The \LaTeX project“, sie ist im Internet unter zu verfolgen.

Inhaltsverzeichnis

1. Quadratische Gleichungen	1
2. Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen	1
3. Zusammenfassung und Ausblick	2
A. Beispielcode zur Lösung quadratischer Gleichungen	2

1. Quadratische Gleichungen

In dieser Arbeit wird gezeigt, welche Bedeutung quadratische Gleichungen haben und welche Methoden zur Lösung quadratischer Gleichungen es gibt. Typische Aufga-

bestellungen aus der Physik treten im Zusammenhang mit Wurfparabeln auf.

2. Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen

Satz 1 (Fundamentalsatz der Algebra, [Sch+22]). *Es sei $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k$ ein Polynom vom Grad $\deg P =: n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ – also ein nicht konstantes Polynom – mit komplexen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$. Dann hat das Polynom eine komplexe Nullstelle, d. h., es gibt eine Zahl $z \in \mathbb{C}$, so dass $P(z) = 0$ gilt. Genauer gilt insbesondere, dass die Anzahl der Nullstellen, wenn sie mit der richtigen Vielfachheit gezählt werden, insgesamt gleich dem Grad des Polynoms ist.*

Der Beweis dieses Satzes wird hier nicht angegeben, er findet sich beispielsweise in [Wae71].

Ein Beispiel für eine Polynomfunktion vom Grad 2 wird in Abb. 1 gezeigt. Die Funktion hat offensichtlich zwei reelle Nullstellen $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, lautete die Funktion $f(x) = 4x^2 + 5$, so hätte sie keine reellen, aber zwei imaginäre Nullstellen $x_{1,2} = \pm i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5}$, würde das absolute Glied fehlen, die Funktion also $f(x) = 4x^2$ lauten, hätte sie eine doppelte Nullstelle 0.

Eine quadratische Gleichung ergibt sich aus der Aufgabenstellung $f(x) \stackrel{!}{=} 0$, also

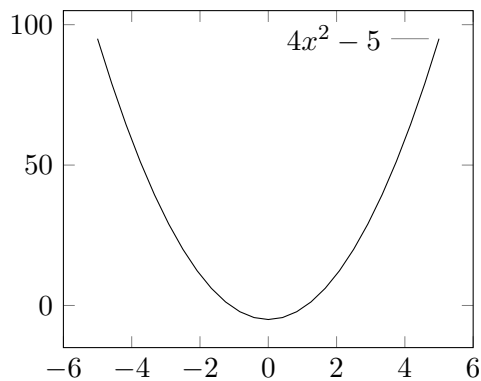


Abbildung 1: Funktionsgraph einer Funktion vom Grad 2

beispielweise

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Die direkte Lösung einer solchen quadratischen Gleichung ergibt sich aus der Überlegung

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Mit $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$ kann die zweite Gleichung auch geschrieben werden als

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

und es gilt entsprechend zum Vietaschen

Wurzelsatz¹

$$x_1 + x_2 = p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Im Anhang A wird eine Fortran-Musterimplementierung für die Lösung quadratischer Gleichungen gezeigt.

3. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde in Abschnitt 2 gezeigt, wie quadratische Gleichungen auf direktem Weg gelöst werden können. Es wurde hier nicht auf die iterative Lösung dieser Gleichungen eingegangen, die bei geringen Genauigkeitsanforderungen ihre Vorteile haben kann.

A. Beispielcode zur Lösung quadratischer Gleichungen

Listing 1 zeigt eine Fortran-Musterimplementierung der in Abschnitt 2 vorgestellten Formeln. Zu beachten ist die spezielle Normierung der Koeffizienten. Dies geschieht, um Rundungsfehler klein zu halten. Dasselbe gilt für die Berechnung der Lösungen x_1 und x_2 : Um Rundungsfehlern vorzubeugen, wird x_1 als die Lösung berechnet, die weiter weg von der Null ist, x_2 wird nach dem Vietaschen Wurzelsatz (vgl. Seite 2) berechnet

Literaturverzeichnis

[Knu86] Donald Ervin Knuth. *The T_EXbook*. American Mathematical Society, 1986. ISBN: 0-201-13447-0.

¹Der französische Mathematiker François Viète, nach dem der Satz benannt wurde, nannte sich selbst Franziscus Viëta.

-
- [Sch+22] Jakob Scholbach u.a. *Fundamentalsatz der Algebra*. 21. Dez. 2022. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalsatz_der_Algebra. zuletzt besucht am 21. Dezember 2022.
- [Wae71] B. L. van der Waerden. *Algebra*. Achte Auflage. Teil I. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1971. ISBN: 3-540-03561-3.

Listing 1: Fortran-Musterimplementierung der Lösung einer quadratischen Gleichung

```

1 program quad_gl                                ! loest  $ax^2+bx+c=0$ 
   implicit none
   logical, parameter :: TEST = .false.
   integer, parameter :: RP = selected_real_kind(6)
   real(kind=RP) :: a, b, c, x1, x2, d, w, e

6
   write (unit=*, fmt=*) "Bitte a, b, c eingeben!"
   read (unit=*, fmt=*) a, b, c

   ! tiny(a): kleinste normalisierte Zahl > 0,
   ! die wie a aussieht
11 e = max(abs(a), abs(b), abs(c), tiny(a))
   a = a/e
   b = b/e
   c = c/e
16 e = a + a
   t: if ( a==0 ) then                            ! linear,  $bx + c = 0$ 
      if ( b/=0 ) then
         write (unit=*, fmt=*) "EINE Loesung =", -c/b
      else if ( c==0 ) then
21         write (unit=*, fmt=*) "Jedes x ist Loesung"
      else
         write (unit=*, fmt=*) "Keine Loesung"
      end if
   else t                                          ! quadratisch
26   d = b*b - (e + e)*c; w = sqrt(abs(d))
      u: if ( d >= 0 ) then                        ! reelle Loesungen
         x1 = -(b + sign(w, b))/e !  $|x1| \geq |x2|$ 
         if ( x1/=0 ) then; x2 = (c/a)/x1
         else; x2 = 0
31      end if                                     ! kein -,
                                                ! kein Stellenverlust
         write (unit=*, fmt=*) "2 Loesungen:", x1, x2
         ! naechster if-Block wegoptimiert, TEST: .false.
         if ( TEST ) then
36             write (unit=*, fmt=*) (-b + sign(w, b))/e
         end if
      else                                        ! komplexe Loesungen
         write (unit=*, fmt=*) -b/e, "+-i*", w/e
      end if u                                    ! u nicht F
41 end if t                                       ! t nicht F
end program quad_gl

```