# Die Lösung quadratischer Gleichungen

Jobst Hoffmann

23. Dezember 2022

Quadratische Gleichungen spielen in vielen Bereichen von Naturwissenschaften und Technik eine besondere Rolle. In diesem Artikel wird gezeigt, wie eine quadratische Gleichung gelöst werden kann.

Der Text ist ein Beispiel, an dem gezeigt wird, wie man mit LaTeX arbeitet, um aus einer Quelle verschiedene Ausgabeformate zu erzeugen. LaTeX ist ein Makropaket, das von Leslie Lamport auf der Basis von TeX [Knu86] entwickelt worden ist. Die aktuelle Entwicklung geschieht durch „The LaTeX project", sie ist im Internet unter zu verfolgen.

## Inhaltsverzeichnis



## 1. Quadratische Gleichungen

In dieser Arbeit wird gezeigt, welche Bedeutung quadratische Gleichungen haben und welche Methoden zur Lösung quadratischer Gleichungen es gibt. Typische Aufgabestellungen aus der Physik treten im Zusammenhang mit Wurfparabeln auf.

## 2. Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen

**Satz 1** (Fundamentalsatz der Algebra, [Sch+22])**.** *Es sei* $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$ *ein Polynom vom Grad* $\deg P =: n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ *– also ein nicht konstantes Polynom – mit komplexen Koeffizienten* $a_k \in \mathcal{C}$*. Dann hat das Polynom eine komplexe Nullstelle, d. h., es gibt eine Zahl* $z \in \mathcal{C}$*, so dass* $P(z) = 0$ *gilt. Genauer gilt insbesondere, dass die Anzahl* *der Nullstellen, wenn sie mit der richtigen Vielfachheit gezählt werden, insgesamt gleich dem Grad des Polynoms ist.*

Der Beweis dieses Satzes wird hier nicht angegeben, er findet sich beispielsweise in [Wae71].

Ein Beispiel für eine Polynomfunktion vom Grad 2 wird in Abb. 1 gezeigt. Die Funktion hat offensichtlich zwei reelle Nullstellen $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$, lautete die Funktion $f(x) = 4x^2 + 5$, so hätte sie keine reellen, aber zwei imaginäre Nullstellen $x_{1,2} = \pm i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5}$, würde das absolute Glied fehlen, die Funktion also $f(x) = 4x^2$ lauten, hätte sie eine doppelte Nullstelle 0.

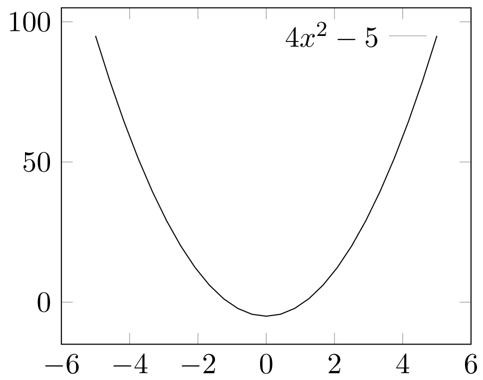


Abbildung 1: Funktionsgraph einer Funktion vom Grad 2

Eine quadratische Gleichung ergibt sich aus der Aufgabenstellung $f(x) \overset{!}{=} 0$, also beispielsweise

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Die direkte Lösung einer solchen quadratischen Gleichung ergibt sich aus der Überlegung

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\
\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2 \cdot a}\right))^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\
\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\
\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\
\Leftrightarrow x_{1,2} &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \\
\Leftrightarrow x_{1,2} &= -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Mit $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$ kann die zweite Gleichung auch geschrieben werden als

$$
\begin{aligned}
& x^2 + px + q = 0 \\
& \quad \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}
\end{aligned}
$$

und es gilt entsprechend zum Vietaschen Wurzelsatz[1]

$$x_1 + x_2 = p, \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

Im Anhang A wird eine Fortran-Musterimplementierung für die Lösung quadratischer Gleichungen gezeigt.

# 3. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde in Abschnitt 2 gezeigt, wie quadratische Gleichungen auf direktem Weg gelöst werden können. Es wurde hier nicht auf die iterative Lösung dieser Gelichungen eingegangen, die bei geringen Geanuigkeitsanforderungen ihre Vorteile haben kann.

# A. Beispielcode zur Lösung quadratischer Gleichungen

Listing 1 zeigt eine Fortran-Musterimplementierung der in Abschnitt 2 vorgestellten Formeln. Zu beachten ist die spezielle Normierung der Koeffizienten. Dies geschieht, um

[1] Der französische Mathematiker François Viète,nach dem der Satz benannt wurde, nannte sich selbst Franziscus Viëta.

Rundungsfehler klein zu halten. Dasselbe gilt für die Berechnung der Lösungen $x_1$ und $x_2$: Um Rundungsfehlern vorzubeugen, wird $x_1$ als die Lösung berechnet, die weiter weg von der Null ist, $x_2$ wird nach dem Vietaschen Wurzelsatz (vgl. Seite 3) berechnet

Listing 1: Fortran-Musterimplementierung der Lösung einer quadratischen Gleichung

```
program quad_gl             ! loest ax^2+bx+c=0
  implicit none
  logical, parameter :: TEST = .false.
  integer, parameter :: RP = selected_real_kind(6)
  real(kind=RP) :: a, b, c, x1, x2, d, w, e

  write (unit=*, fmt=*) "Bitte a, b, c eingeben!"
  read (unit=*, fmt=*) a, b, c

  ! tiny(a): kleinste normalisierte Zahl > 0,
  ! die wie a aussieht
  e = max(abs(a), abs(b), abs(c), tiny(a))
  a = a/e
  b = b/e
  c = c/e
  e = a + a
  t: if ( a==0 ) then             ! linear, bx + c = 0
     if ( b/=0 ) then
        write (unit=*, fmt=*) "EINE Loesung =", -c/b
     else if ( c==0 ) then
        write (unit=*, fmt=*) "Jedes x ist Loesung"
     else
        write (unit=*, fmt=*) "Keine Loesung"
     end if
  else t                          ! quadratisch
     d = b*b - (e + e)*c; w = sqrt(abs(d))
     u: if ( d >= 0 ) then         ! reelle Loesungen
        x1 = -(b + sign(w, b))/e ! |x1|>=|x2|
        if ( x1/=0 ) then; x2 = (c/a)/x1
        else; x2 = 0
        end if                    ! kein -,
                                  ! kein Stellenverlust
        write (unit=*, fmt=*) "2 Loesungen:", x1, x2
        ! naechster if-Block wegoptimiert, TEST: .false.
        if ( TEST ) then
           write (unit=*, fmt=*) (-b + sign(w, b))/e
        end if
     else                         ! komplexe Loesungen
        write (unit=*, fmt=*) -b/e, "+-i*", w/e
     end if u                     ! u nicht F
  end if t                        ! t nicht F
end program quad_gl
```

# Literaturverzeichnis


[Knu86] Donald Ervin Knuth. *The TEXbook*. American Mathematical Society, 1986. ISBN: 0-201-13447-0.

[Sch+22] Jakob Scholbach u. a. *Fundamentalsatz der Algebra*. 21. Dez. 2022. URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalsatz_der_Algebra`. zuletzt besucht am 21. Dezember 2022.

[Wae71] B. L. van der Waerden. *Algebra*. Achte Auflage. .Teil I. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1971. ISBN: 3-540-03561-3.