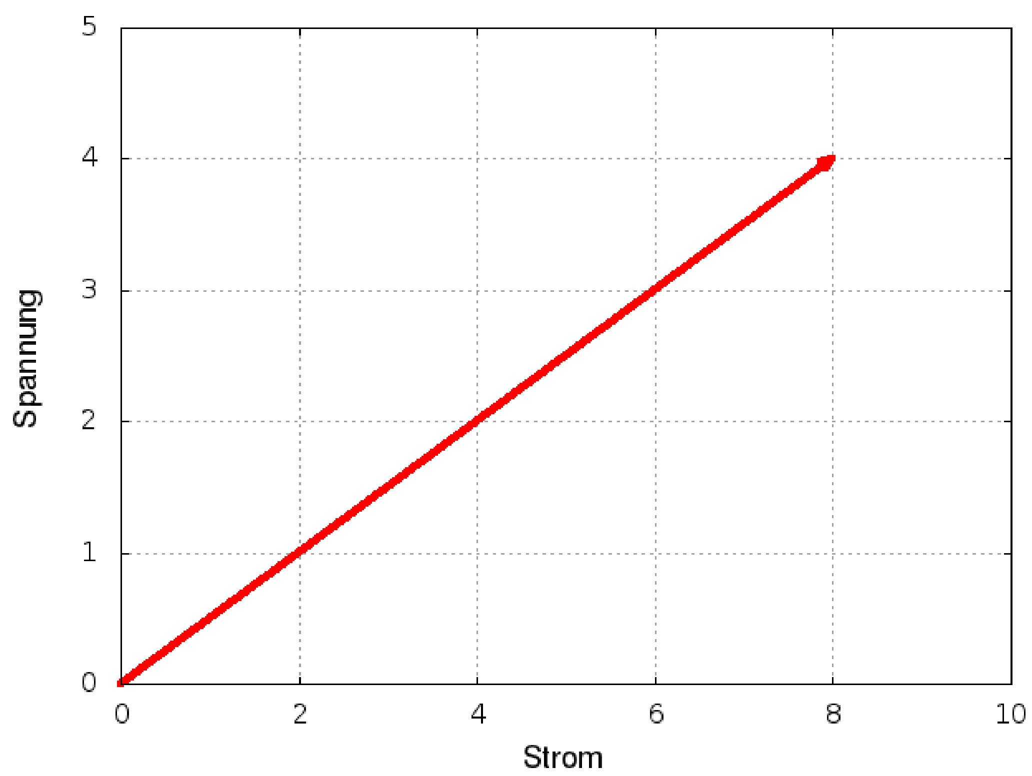
1 Komplexe Wechselstromrechnung
1.1 Grundlagen

<u>Motivation:</u>

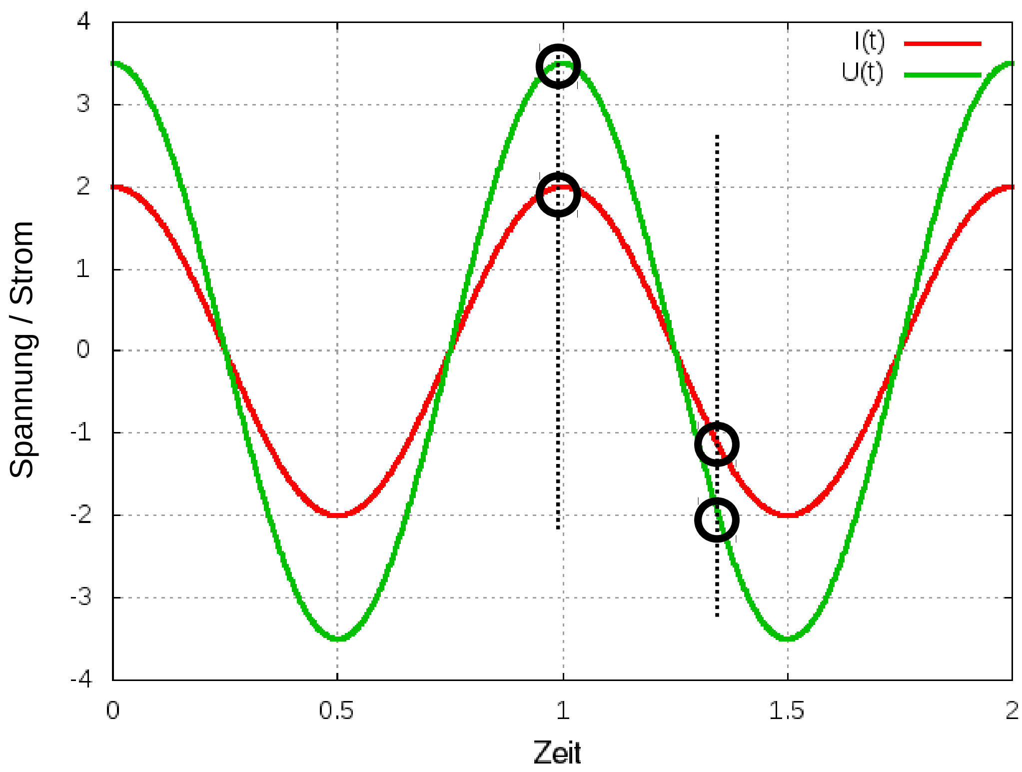
Bei einem ohmschen Widerstand ist die Spannung proportional zum Strom.

Es gilt der Zusammenhang: $U = R \cdot I$



1 Komplexe Wechselstromrechnung
1.1 Grundlagen

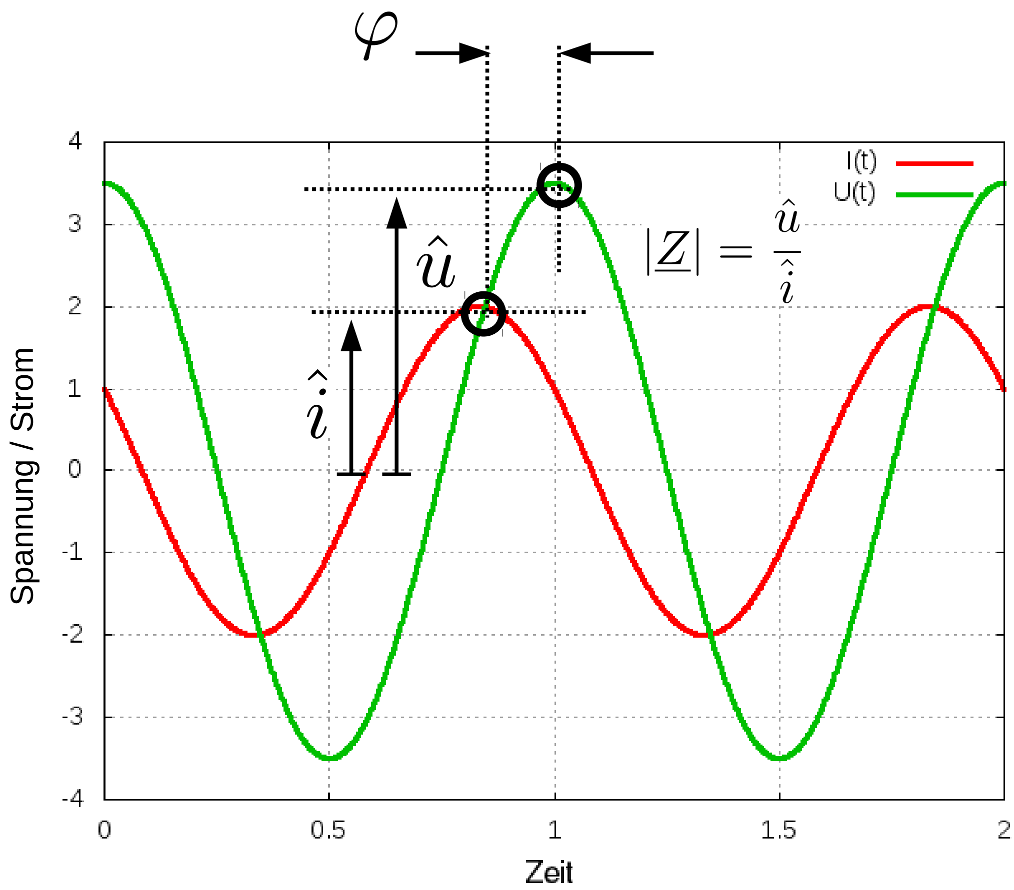
Wird an einem ohmschen Widerstand ein sinusförmiger Strom I(t) eingeprägt, ist auch die Spannung an dem Widerstand sinusförmig mit der gleichen Phase.
Es gilt zu jedem Zeitpunkt das ohmsche Gesetz.



$$U(t) = R \cdot I(t)$$

1 Komplexe Wechselstromrechnung
1.1 Grundlagen

Wird ein sinusförmiger Strom I(t) in einen **komplexen Widerstand** eingeprägt, so kann sich zusätzlich eine <u>**Phasenverschiebung**</u> zwischen Strom und Spannung ergeben.



$$U(t) \neq R \cdot I(t)$$

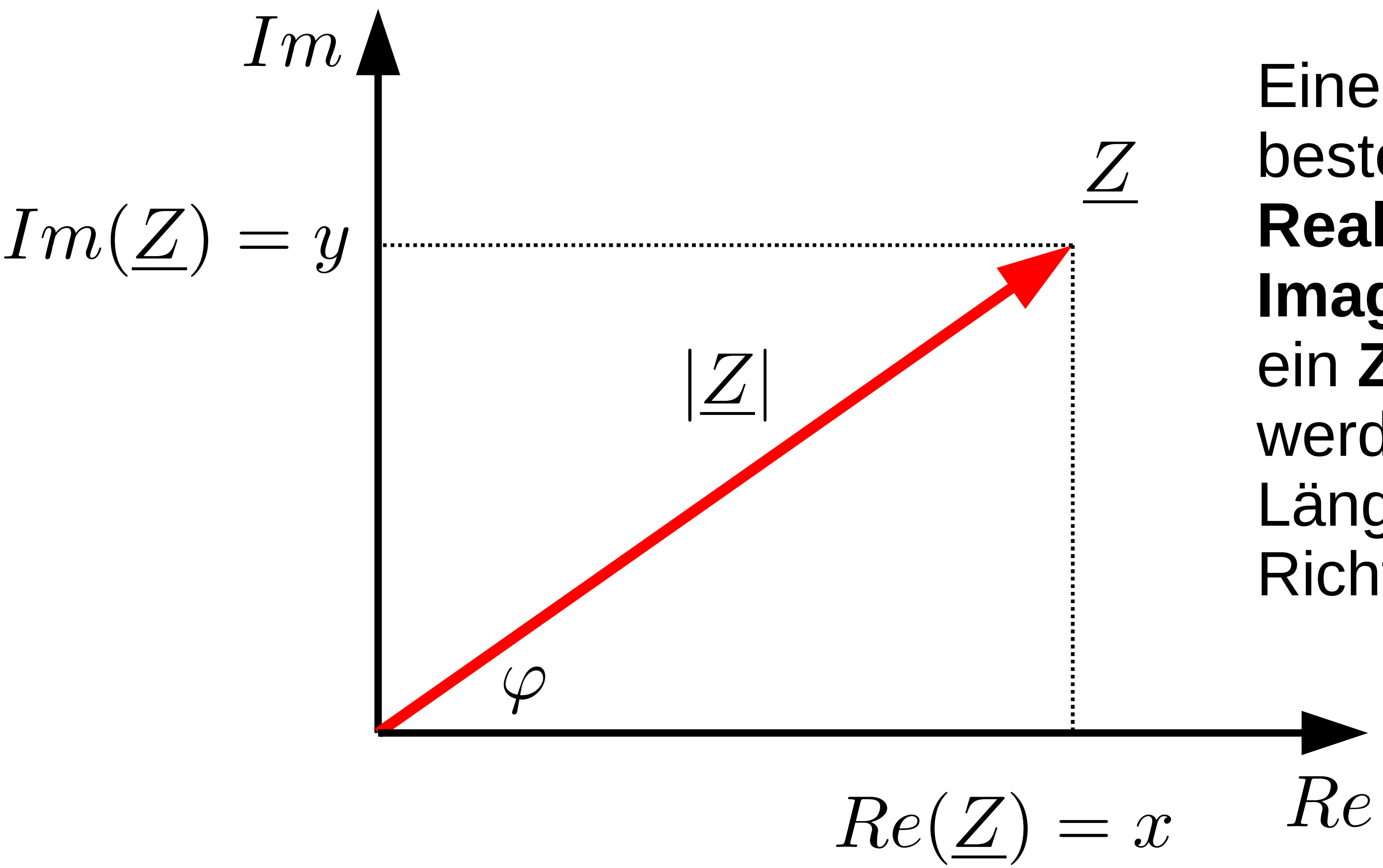
Um jetzt den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom darzustellen werden zwei Größen benötigt:

- Phasenbeziehung (Δφ) und
- Amplitudenbeziehung (wie beim ohmschen Gesetz)

1 Komplexe Wechselstromrechnung
1.1 Grundlagen

Darstellung komplexer Zahlen in der komplexen Ebene:

$$\boxed{\underline{Z} = \mathrm{Re}(\underline{Z}) + \mathrm{j} \cdot Im(\underline{Z}) = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi}}$$



Eine **komplexe Zahl** besteht aus einem **Realteil** und einem **Imaginärteil** und kann als ein **Zeiger** aufgefasst werden. Dieser hat eine Länge (**Betrag**) und eine Richtung (**Phase, Winkel**).

1 Komplexe Wechselstromrechnung
1.1 Grundlagen

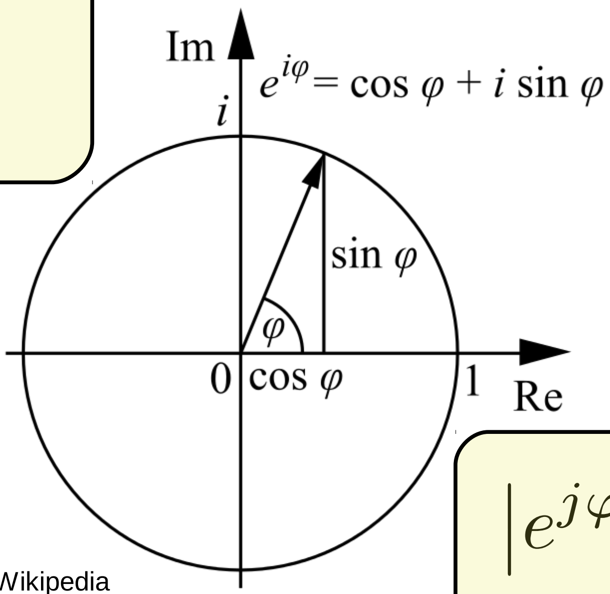
Die imaginäre Zahl j:

$$j^2 = -1$$

$$\boxed{\mathrm{j} = \sqrt{-1}}$$

Eulersche Formel:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$



Ref.: Wikipedia

$$\left|e^{j\varphi}\right| = 1$$

1 Komplexe Wechselstromrechnung
1.1 Grundlagen

*

Darstellungsformen

Kartesische Form

$$\underline{Z} = x + jy$$

Trigonometrische Form

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot [cos(\varphi) + j \cdot sin(\varphi)]$$

Exponentialform

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi}$$

Betrag

$$|\underline{Z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Winkel (Phase)

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad ;\ \mathrm{x} \geq 0$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180° \qquad ;\ \mathrm{x} \leq 0$$

Realteil:

$$x = |\underline{Z}| \cdot \cos(\varphi)$$

Imaginärteil:

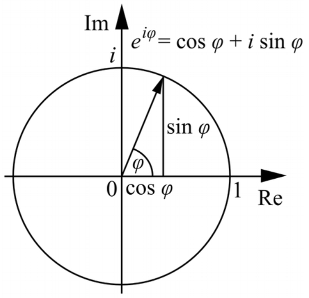
$$y = |\underline{Z}| \cdot \sin(\varphi)$$

1 Komplexe Wechselstromrechnung
1.1 Grundlagen

Spiegelung an der realen Achse.

Konjugiert komplexe Zahl

$$\underline{Z}^* = (x + jy)^* = (x - jy) = |Z| \cdot e^{-j\varphi}$$



Eulersche Formeln

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

$$e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) - j\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right)$$

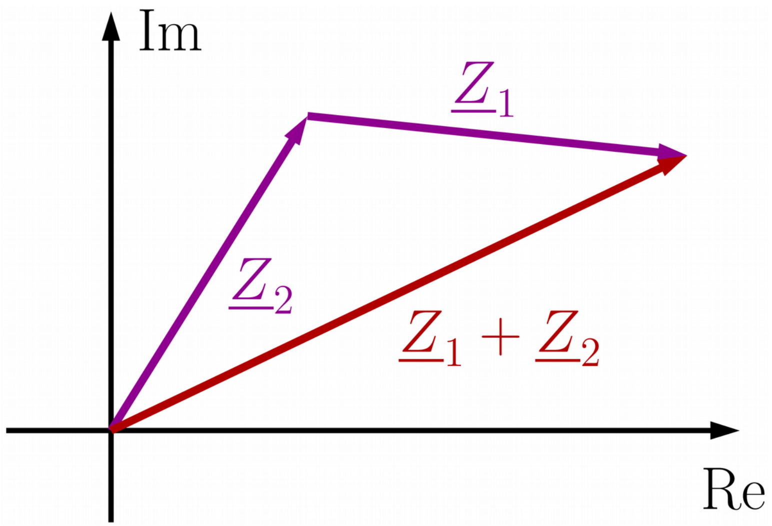
1 Komplexe Wechselstromrechnung
1.1 Grundlagen

Rechnen mit komplexen Zahlen:

Addition, Subtraktion (immer in kartesischer Form)

$$\underline{Z}_1 = x_1 + jy_1 \qquad \underline{Z}_2 = x_2 + jy_2$$

$$\underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$



Entspricht der Vektoraddition

1 Komplexe Wechselstromrechnung
1.1 Grundlagen

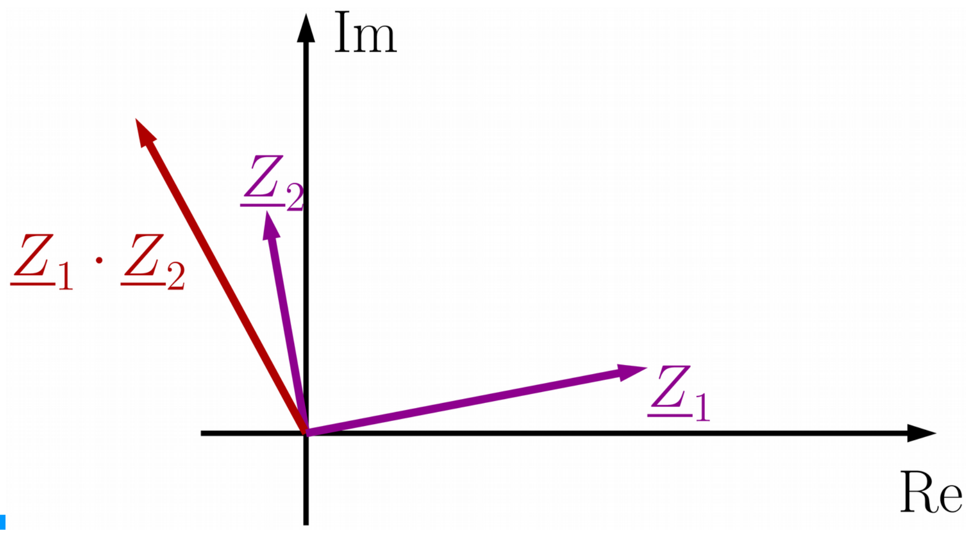
Rechnen mit komplexen Zahlen:

Multiplikation (möglichst in Exponentialform)

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = |\underline{Z}_1| \cdot e^{j\varphi_1} \cdot |\underline{Z}_2| \cdot e^{j\varphi_2} = |\underline{Z}_1| \cdot |\underline{Z}_2| \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\Rightarrow |\underline{Z}| = |\underline{Z}_1| \cdot |\underline{Z}_2| \, ; \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Sonderfall: $\underline{Z} \cdot \underline{Z}^* = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi} \cdot |\underline{Z}| \cdot e^{-j\varphi} = |\underline{Z}|^2 = x^2 + y^2$



Die Beträge werden multipliziert und die Winkel addiert.

1 Komplexe Wechselstromrechnung
1.1 Grundlagen

Rechnen mit komplexen Zahlen:

Division in Exponentialform:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{|\underline{Z}_1| \cdot e^{j\varphi_1}}{|\underline{Z}_2| \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\Rightarrow |\underline{Z}| = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|}; \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Inversion: $$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{|\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi}} = \frac{1}{|\underline{Z}|} \cdot e^{-j\varphi}$$

1 Komplexe Wechselstromrechnung
1.1 Grundlagen

Rechnen mit komplexen Zahlen:

Division in kartesischer Form:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2) \cdot (x_2 - jy_2)}$$

Konjungiert komplex erweitern

$$= \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \cdot \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\mathrm{Re}(\underline{Z}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad \mathrm{Im}(\underline{Z}) = \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Inversion: $$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{x + jy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

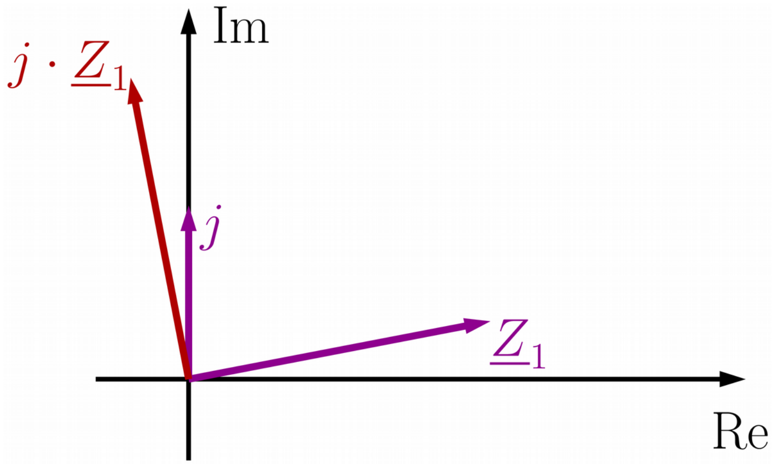
1 Komplexe Wechselstromrechnung
1.1 Grundlagen

Rechnen mit komplexen Zahlen:

Wichtige Beziehungen:

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad \left|e^{j\varphi}\right| = 1 \qquad e^{j2\pi} = 1$$

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad |j| = 1$$



Multiplikation mit j:
Drehung um 90°. Der Betrag ändert sich nicht.
Multiplikation mit -j:
Drehung um -90°. Der Betrag ändert sich nicht.

Aufgabe 1-1

Gegeben: $\underline{Z}_1 = 1{,}0 + j\,0{,}5$; $\underline{Z}_2 = -0{,}5 + j\,0{,}5$

Gesucht:

1. $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ in Exponentialform
   $|\underline{Z}_2|$ und φ_{Z2} mit Formeln berechnen, mit Taschenrechner kontrollieren

2. $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$; Darstellung von $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}$ in komplexer Ebene

3. $\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2$, $|\underline{Z}|$, φ_Z
   a) Berechnung über kartesische Form
   b) Berechnung über Exponentialform
   Darstellung von $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}$ in komplexer Ebene

4. $\underline{Z} = \underline{Z}_1 / \underline{Z}_2$, $|\underline{Z}|$, φ_Z
   c) Berechnung über kartesische Form
   d) Berechnung über Exponentialform
   Darstellung von $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}$ in komplexer Ebene

Aufgabe 1-2

Gegeben: $\underline{Z}_1 = \sqrt{2}\; e^{-j\,45°}$; $\underline{Z}_2 = 1{,}0 \quad (= 1{,}0 + j\;0)$

Es ist zu zeigen, dass folgende Summierung

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \left(\sqrt{2} + 1{,}0\right) e^{-j\,45°}$$

falsch ist.

Verständnisfragen

Folgende Fragen sollten Sie ohne Skript (auswendig) beantworten können.

1) Stellen Sie eine komplexe Zahl grafisch mit ihrem Real- und Imaginärteil dar. Beschriften Sie die Achsen, den Winkel und den Betrag der komplexen Zahl.

2) Stellen Sie die komplexe Zahl als Eulersche Form dar. Lassen Sie Ihren komplexen Zeiger um 360° rotieren. Welche Kurvenform erhalten Sie wenn der Zeiger kontinuierlich rotiert?

3) Nennen Sie die Formel für den Betrag, Real- und Imaginärteil Ihres Zeigers

4) Zeichnen Sie den konjugiert komplexen Zeiger zu Ihrem Zeiger aus 1)

5) Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl multipliziert mit ihrer konjugiert komplexen Zahl eine rein reelle Größe ist.

6) Worauf müssen Sie achten bei der Winkelberechnung falls der Realteil negativ ist?
Erstellen Sie eine Skizze und erklären Sie was zur Korrektur gemacht werden muss.