

# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

Komplexer Widerstand:

RL-Serienschaltung:  $\underline{Z} = R + j\omega L$



$\uparrow$   
 $\underline{Z}$  ist frequenzabhängig!  
 $\Rightarrow \underline{Z}(\omega)$

Realteil und Imaginärteil:

$$\operatorname{Re}(\underline{Z}) = R, \operatorname{Im}(\underline{Z}) = \omega L$$

# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung



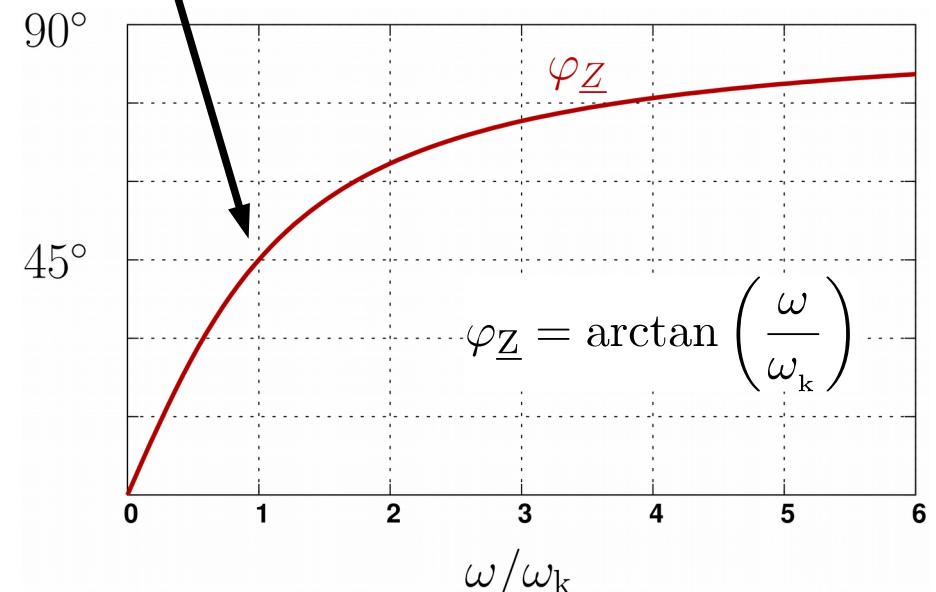
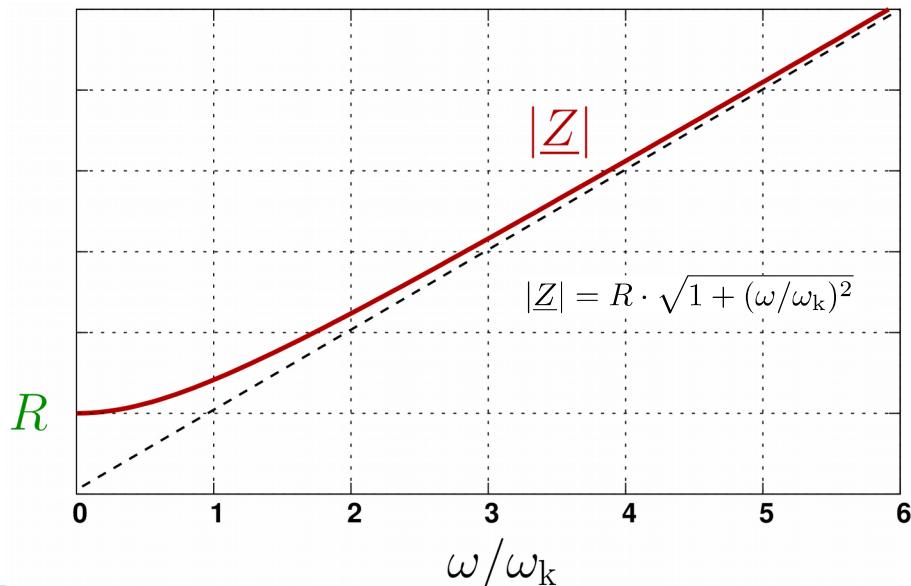
Darstellung in Betrag und Winkel:

$$\text{Betrag : } |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\text{Winkel : } \varphi_Z = \arctan \left( \frac{\omega L}{R} \right)$$

Normierung:  $\omega_k = \frac{R}{L}$  ... Kennkreisfrequenz der RL – Serienschaltung

$$\Rightarrow |\underline{Z}(\omega = \omega_k)| = R \cdot \sqrt{2}; \quad \varphi(\omega = \omega_k) = 45^\circ; \quad \text{Re}(\underline{Z}) = \text{Im}(\underline{Z})$$

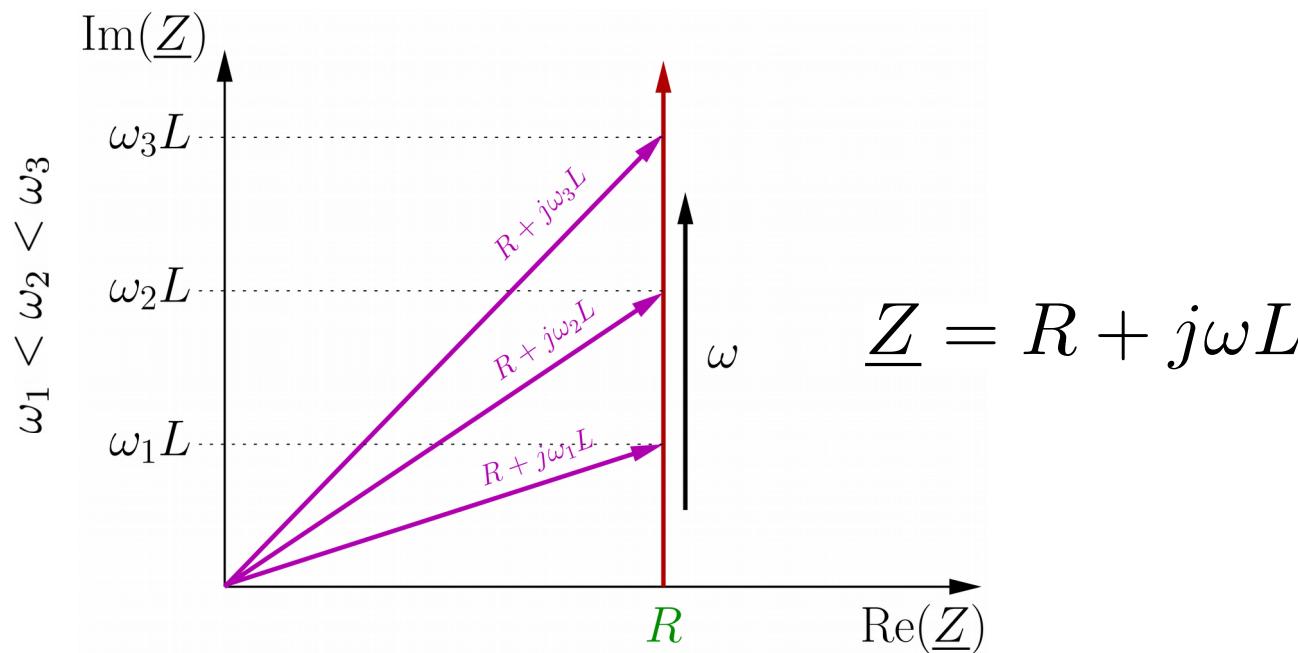


# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

Ortskurve (=Darstellung in der komplexen Ebene):

Die von einer parameterabhängigen komplexen Größe in der komplexen Ebene beschriebene Bahn heißt Ortskurve (**engl. Nyquist Plot**)



In diesem Beispiel ist der Parameter der Ortskurve die Kreisfrequenz  $\omega$ .

Simulation

# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

Komplexer Leitwert:

$$\underline{Z} = R + j\omega L$$



Leitwert:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j\omega L}$$

Achtung:  $\frac{1}{R + j\omega L} \neq \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}!$

# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

Durch Erweitern mit dem konjugiert komplexen Nenner lässt sich die Admittanz in seinen Real- und Imaginärteil zerlegen:

### Real- und Imaginärteil:



$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j \cdot \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Mit  $\omega_k = \frac{R}{L}$  :

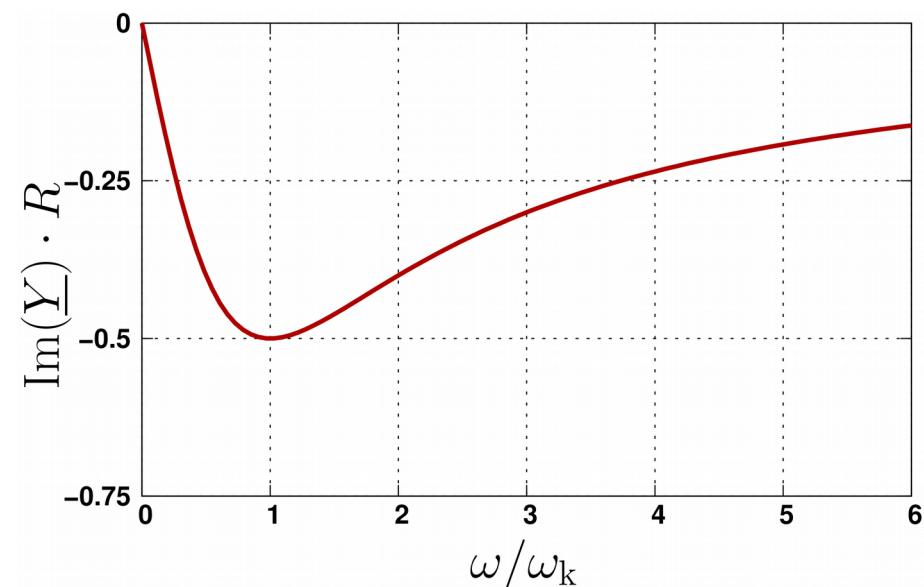
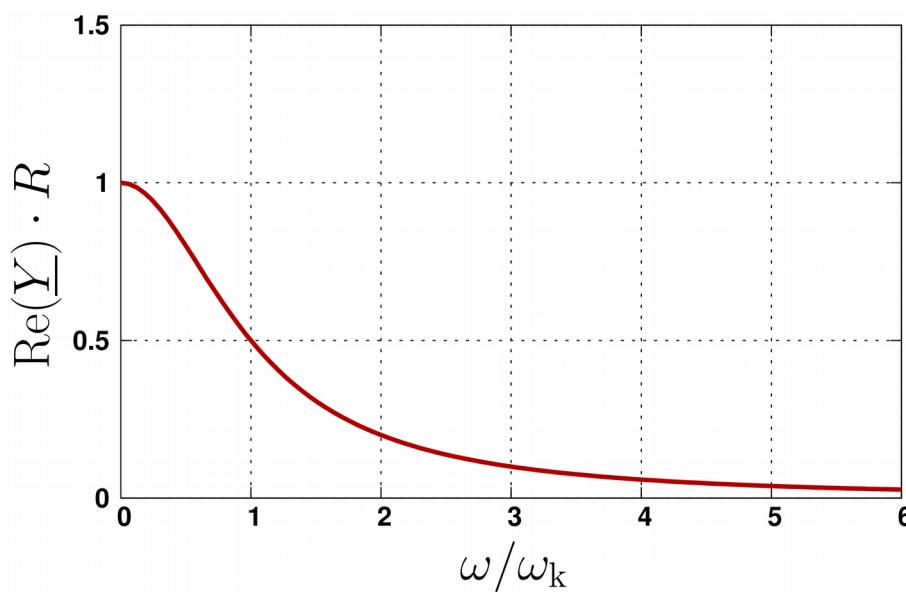
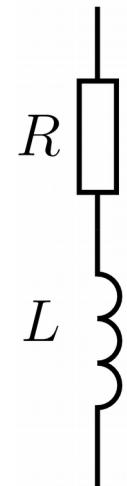
$$\text{Re}(\underline{Y}) = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + (\omega/\omega_k)^2}, \quad \text{Im}(\underline{Y}) = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\omega/\omega_k}{1 + (\omega/\omega_k)^2}$$

# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

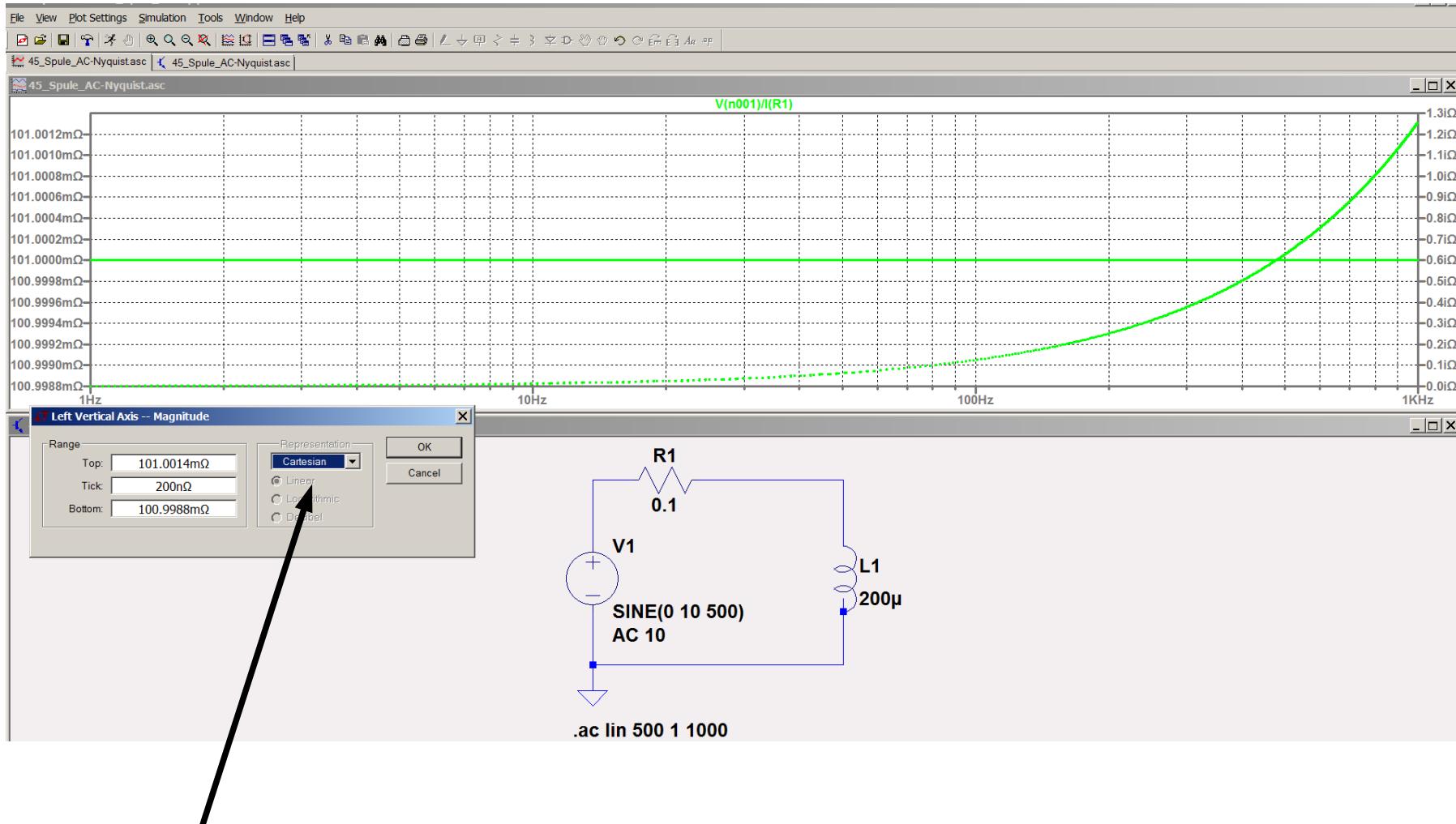
## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

Real- und Imaginärteil:

$\omega$	0	$\omega_k/2$	$\omega_k$	$2\omega_k$	$\infty$
$\text{Re}(\underline{Y})^*R$	1	0,8	0,5	0,2	0
$\text{Im}(\underline{Y})^*R$	0	-0,4	-0,5	-0,4	0



# Darstellung in LT-Spice



Auswahl der Darstellung: Bode, Nyquist,  
Re/Im- Darstellung

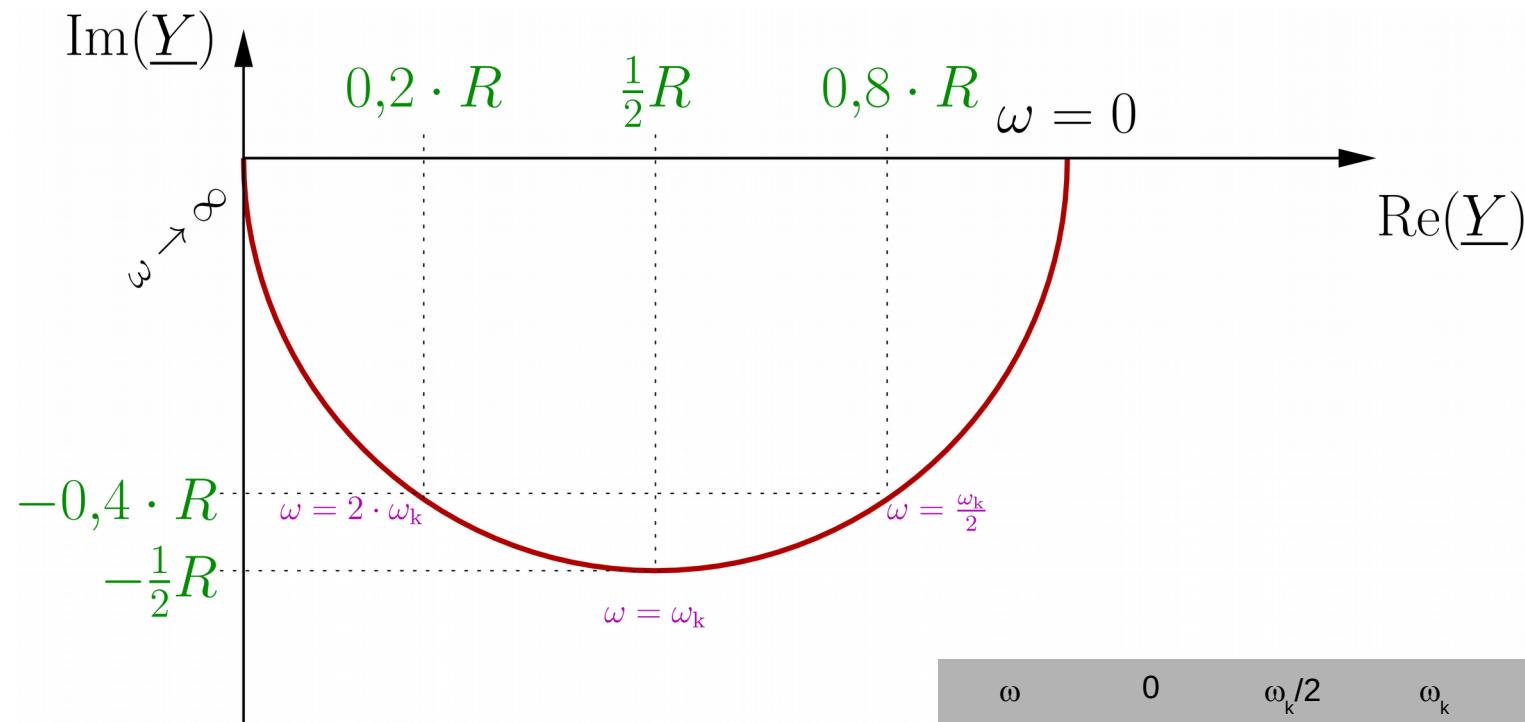
# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung



### Ortskurve:

Konstruktion aus Real- und Imaginärteil:



$\omega$	0	$\omega_k/2$	$\omega_k$	$2\omega_k$	$\infty$
$\text{Re}(\underline{Y})^*/R$	1	0,8	0,5	0,2	0
$\text{Im}(\underline{Y})^*/R$	0	-0,4	-0,5	-0,4	0

# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

Betrag und Winkel:

$$|Y| = \frac{1}{|Z|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2}}$$



$$\varphi_Y = -\varphi_Z = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)$$

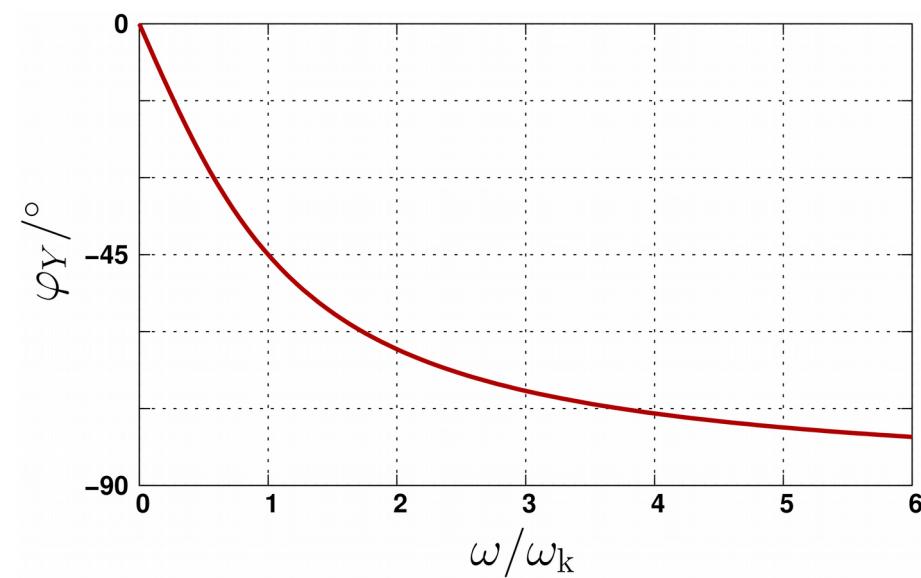
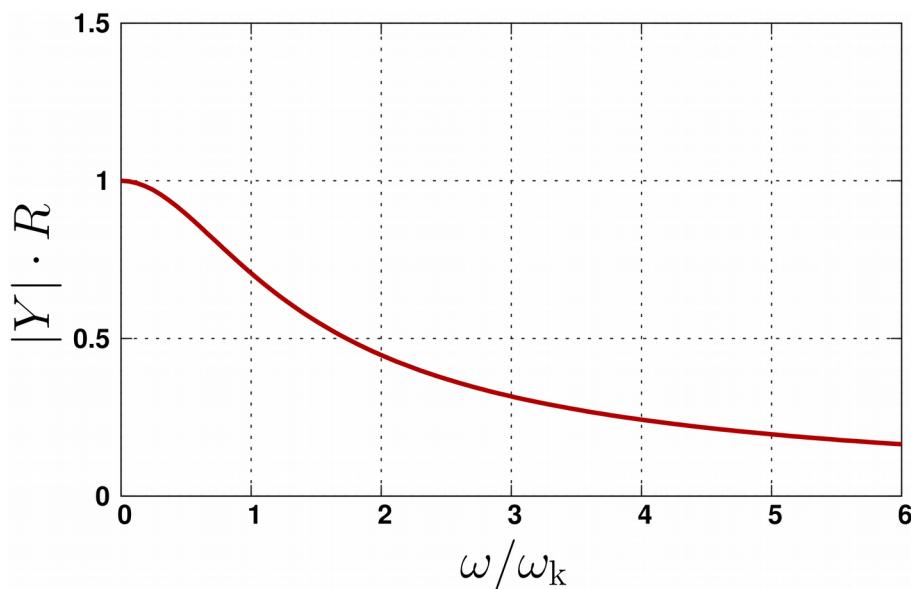
$$\text{Kennkreisfrequenz } \omega_k = \frac{R}{L}$$

# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

Betrag und Winkel:

$\omega$	0	$\omega_k/2$	$\omega_k$	$2\omega_k$	$\infty$
$ Y ^*R$	1	0,89	0,71	0,45	0
$\varphi_Y$	$0^\circ$	$-27^\circ$	$-45^\circ$	$-63^\circ$	$-90^\circ$

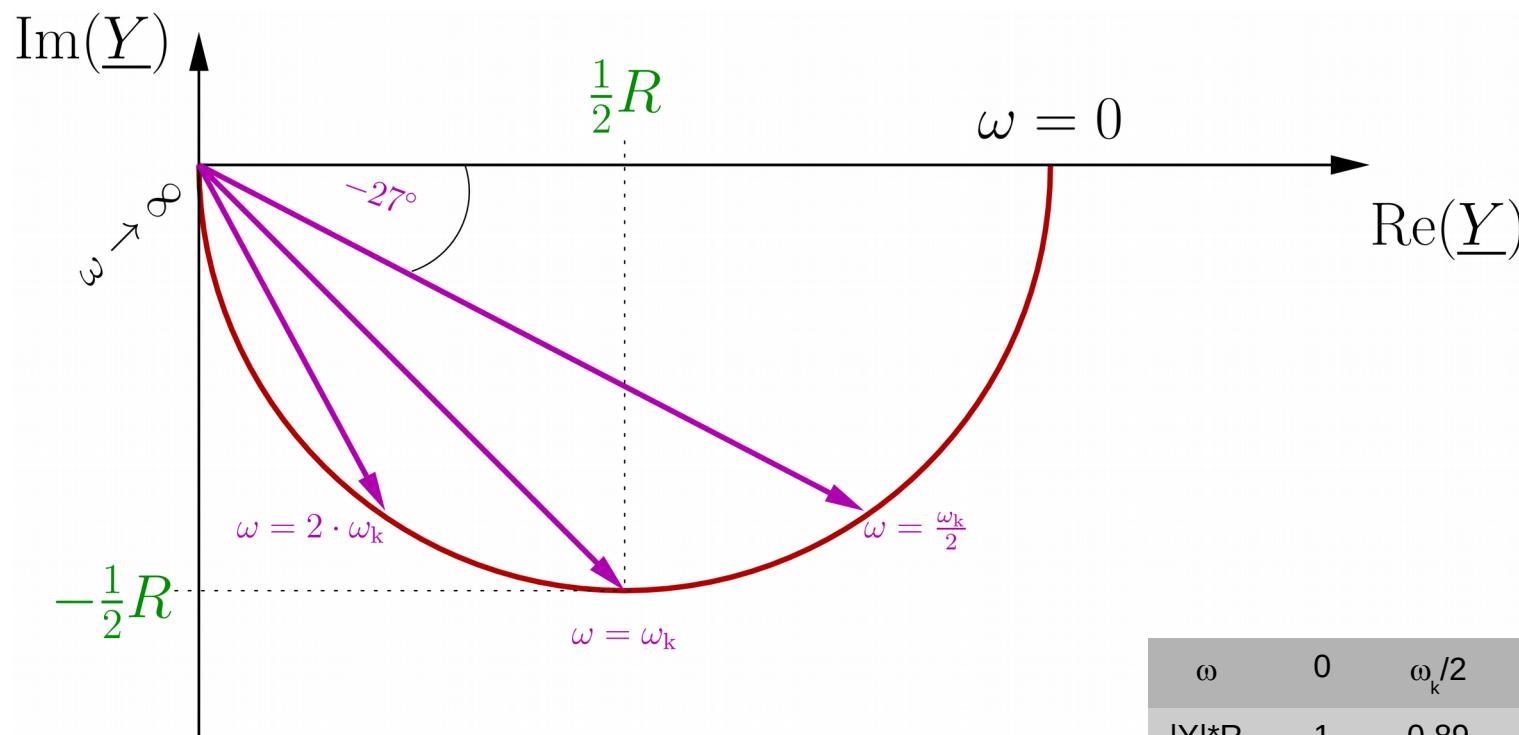


# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

### Ortskurve:

Konstruktion aus Betrag und Phase:



$\omega$	0	$\omega_k/2$	$\omega_k$	$2\omega_k$	$\infty$
$ \underline{Y} ^*R$	1	0,89	0,71	0,45	0
$\varphi_Y$	$0^\circ$	$-27^\circ$	$-45^\circ$	$-63^\circ$	$-90^\circ$

# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

### Verhalten der Ortskurve bei der Inversion einer komplexen Größe:

Es gelten folgende Regeln:

- (Halb-) Geraden durch den Ursprung gehen über in (Halb-) Geraden durch den Ursprung
- (Halb-) Geraden außerhalb des Ursprungs (parallel zur Im-Achse) gehen über in (Halb-) Kreise durch den Ursprung
- (Halb-) Kreise außerhalb des Ursprungs gehen über in (Halb-) Kreise außerhalb des Ursprungs

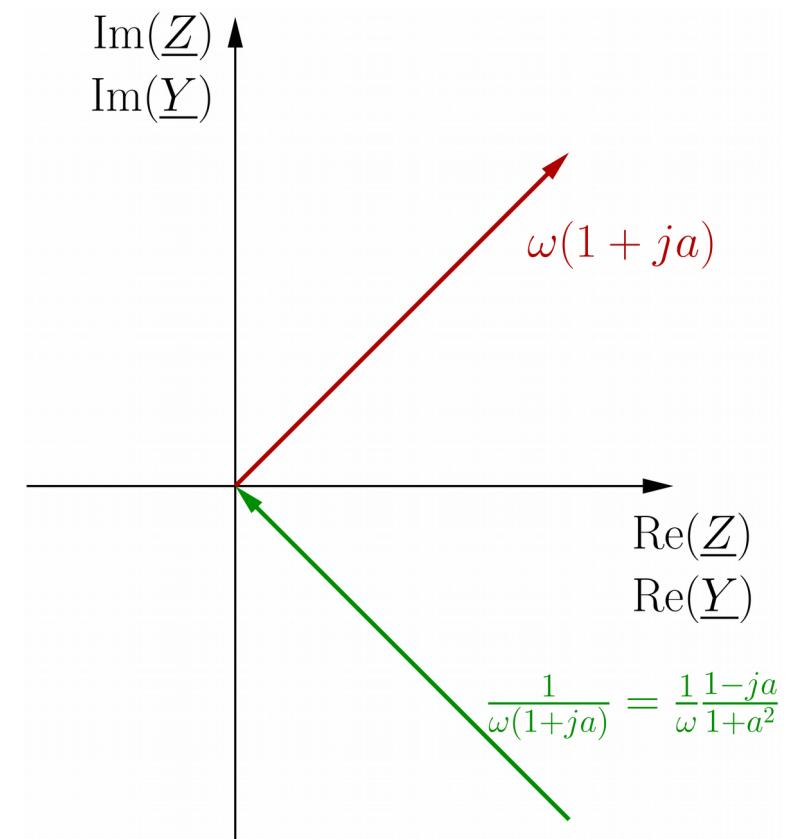
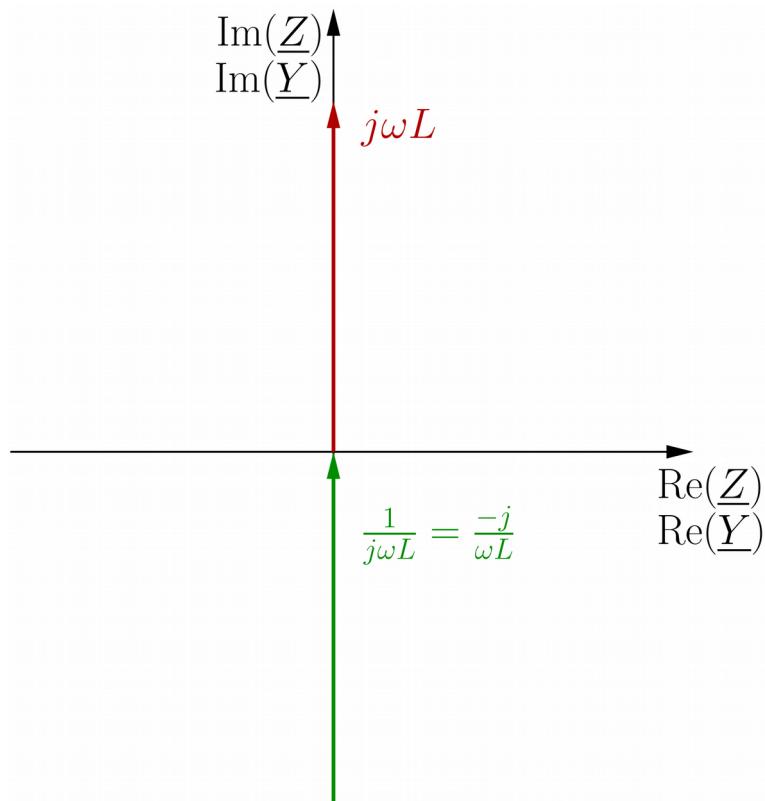
$$\text{Inversion : } \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

### Beispiel für Inversion einer komplexen Größe:

- (Halb-) Geraden durch den Ursprung gehen über in (Halb-) Geraden durch den Ursprung

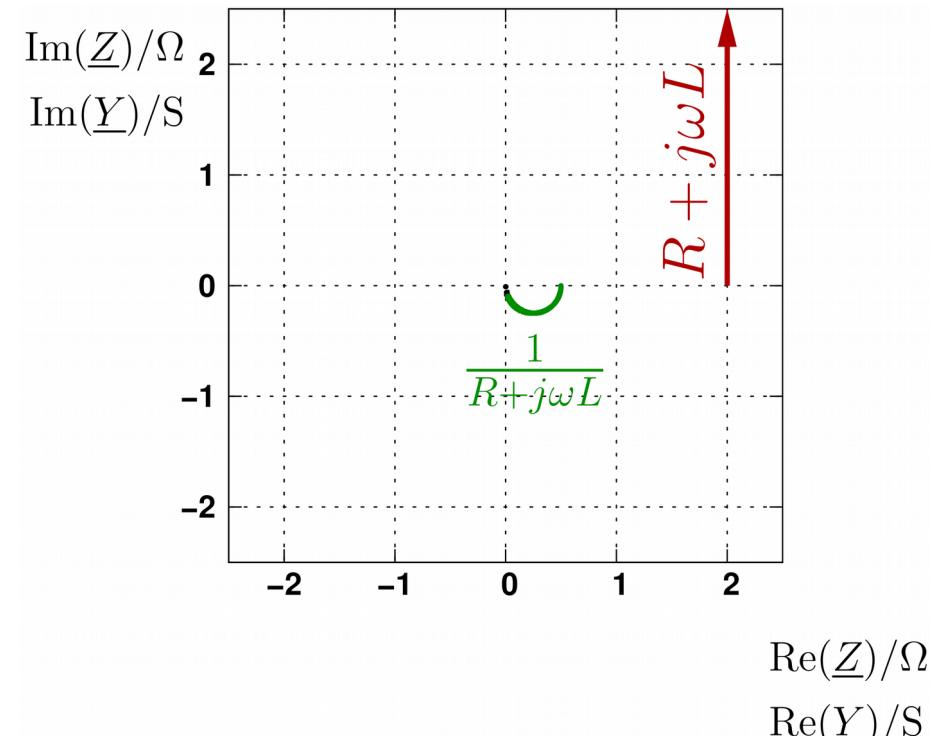
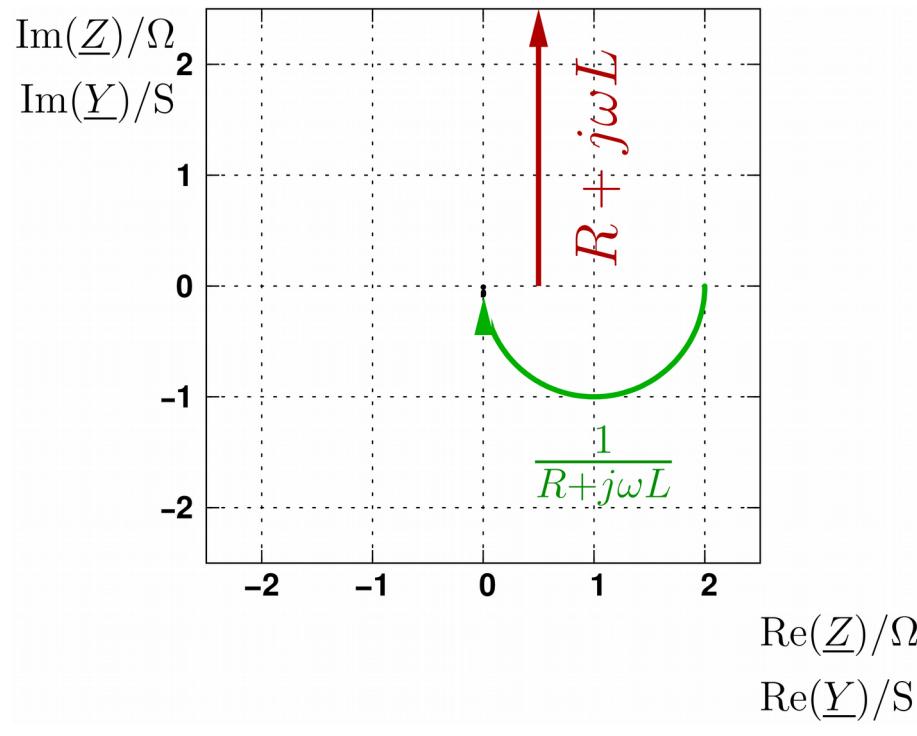


# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

### Beispiel für Inversion einer komplexen Größe:

- (Halb-) Geraden außerhalb des Ursprungs (parallel zur Im-Achse) gehen über in (Halb-) Kreise durch den Ursprung

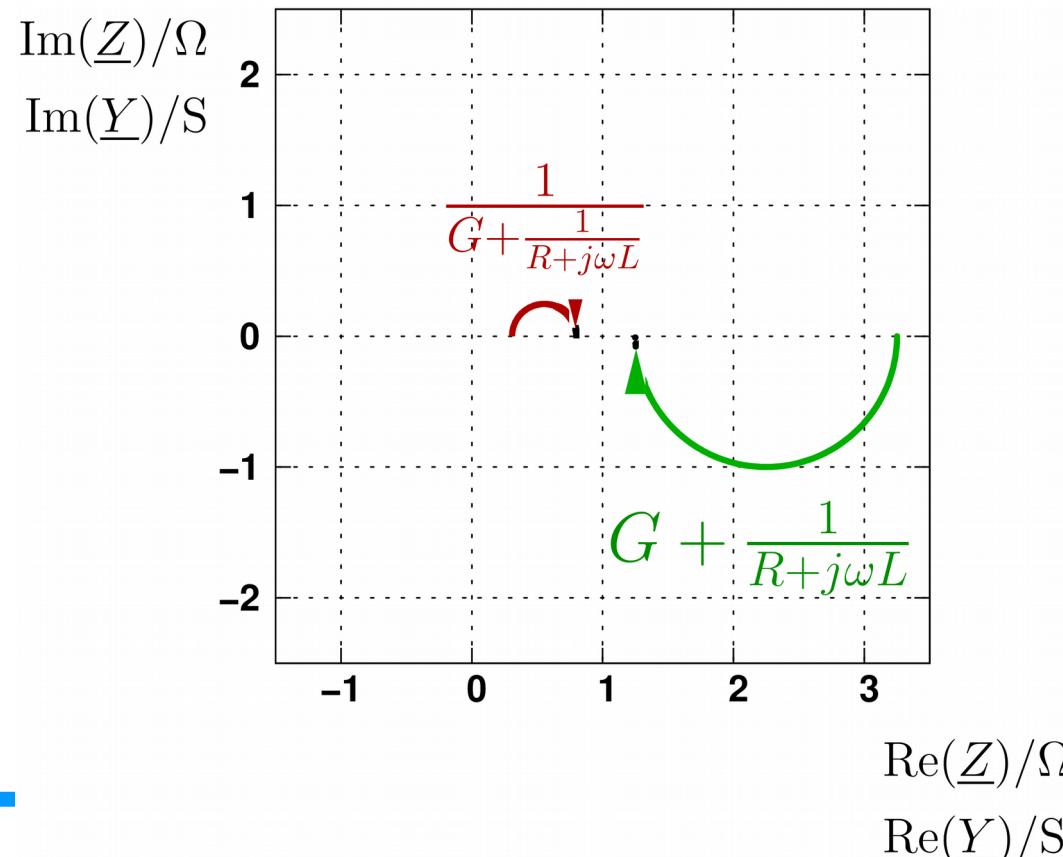


# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

### Beispiel für Inversion einer komplexen Größe:

- (Halb-) Kreise außerhalb des Ursprungs gehen über in (Halb-) Kreise außerhalb des Ursprungs



# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

### Dezibel [dB]:

Das Dezibel [dB] dient zur Kennzeichnung des dekadischen Logarithmus des Verhältnisses zweier gleichartiger Feldgrößen (hier: Strom oder Spannung) oder Leistungs- bzw. Energiegrößen:

$$A = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{|U_2|}{|U_1|} \right) [\text{dB}]$$

$$A = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2}{P_1} \right) [\text{dB}]$$

Einige wichtige Werte:

$U_2 / U_1$	A
1000	60dB
100	40dB
10	20dB
4	12dB
2	6dB
$\sqrt{2}$	3dB
1	0dB

$U_2 / U_1$	A
1/1000	-60dB
1/100	-40dB
1/10	-20dB
1/4	-12dB
1/2	-6dB
$1/\sqrt{2}$	-3dB
1	0dB

# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

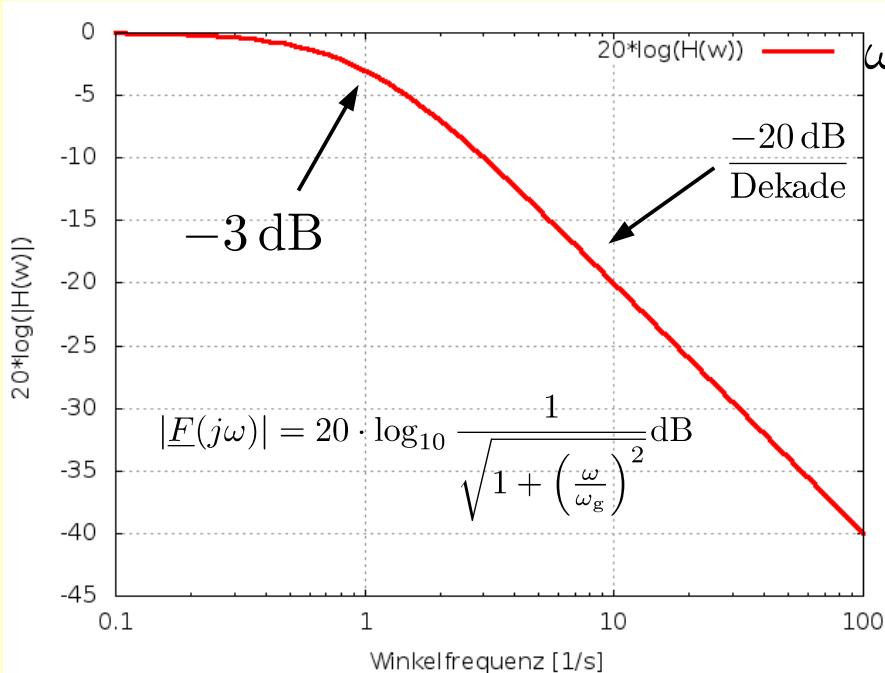
## 4.5 Frequenzabhängige Größen und ihre Darstellung

### Bode-Diagramm:

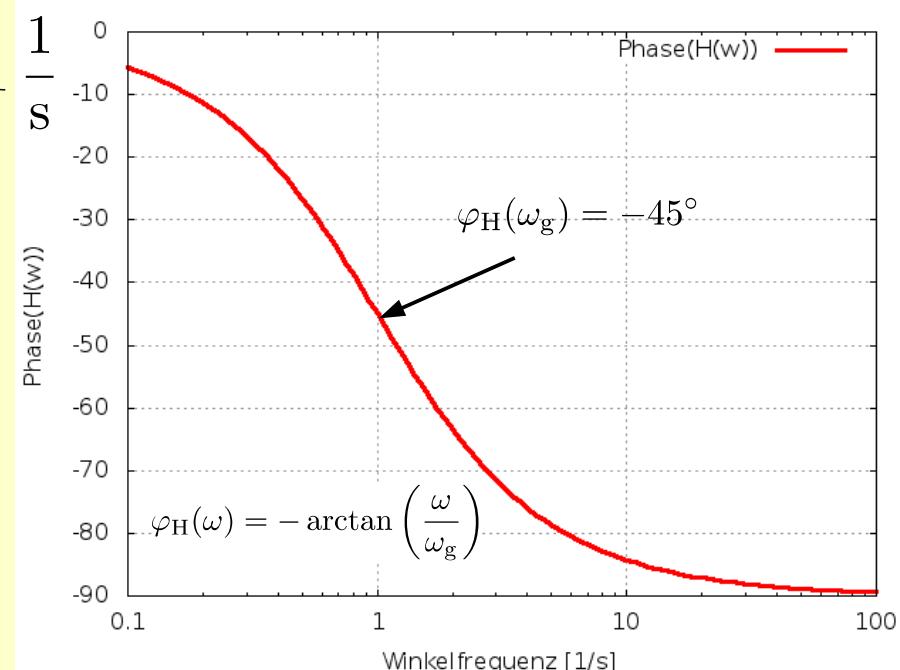
Darstellung des Logarithmus des Betrages [dB] und des Winkels über logarithmisch geteilter Frequenzachse. Wird meist bei Übertragungsfunktionen angewandt.

Übertragungsfunktion :  $F(j\omega) = \frac{\hat{U}_{\text{aus}}}{\hat{U}_{\text{ein}}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$

### Amplitudengang:



### Phasengang:



# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.6 Zweipol- Ersatzschaltung

Das Verhalten beliebig komplizierter RLC-Zweipole mit  $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$  lässt sich sowohl durch eine Serien-Ersatzschaltung mit  $\underline{Z}_{\text{Ers}} = \underline{Z}$  als auch durch eine Parallel-Ersatzschaltung  $\underline{Y}_{\text{Ers}} = \underline{Y}$  beschreiben.

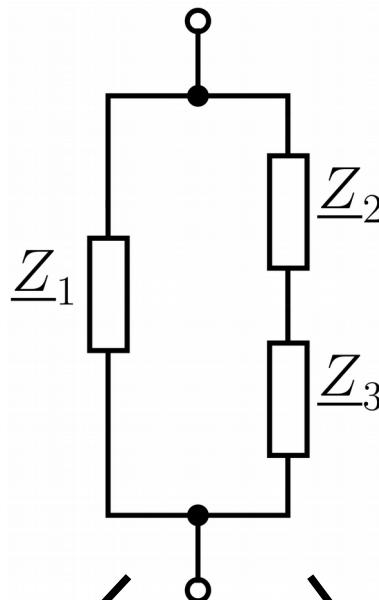
Die Bedingungen  $\underline{Z}_{\text{Ers}} = \underline{Z}$  bzw.  $\underline{Y}_{\text{Ers}} = \underline{Y}$  dienen zur Berechnung der Ersatz-Zweipolgrößen.

Die Umrechnung hat jeweils nur **für eine Frequenz Gültigkeit**.

# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.6 Zweipol- Ersatzschaltung

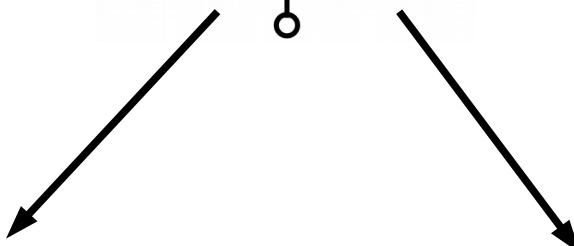
Beispiel: gemischte Serie/Parallel-Ersatzschaltung:



$$\underline{Z} = R + jX$$

$$\underline{Y} = G + jB$$

Impedanz oder Admittanz bestehen aus Real- und Imaginärteil.



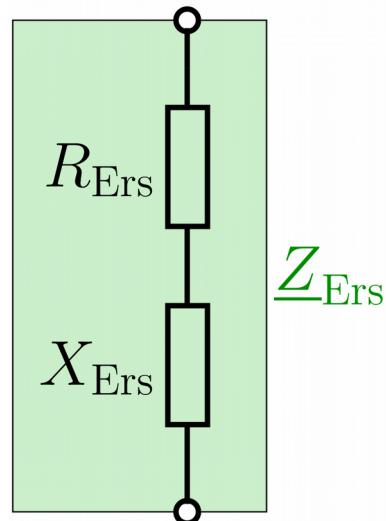
Serien-Ersatzschaltung

Parallel-Ersatzschaltung

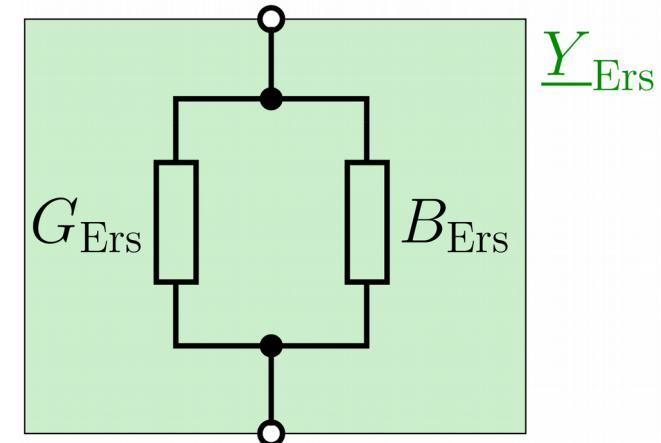
# 4 Berechnung von Wechselstromschaltungen

## 4.6 Zweipol- Ersatzschaltung

Serien-Ersatzschaltung



Parallel-Ersatzschaltung



$$\underline{Z}_{\text{Ers}} = R_{\text{Ers}} + jX_{\text{Ers}}$$

$$\underline{Z} \text{ induktiv} : X_{\text{Ers}} = \omega L_{\text{Ers}}$$

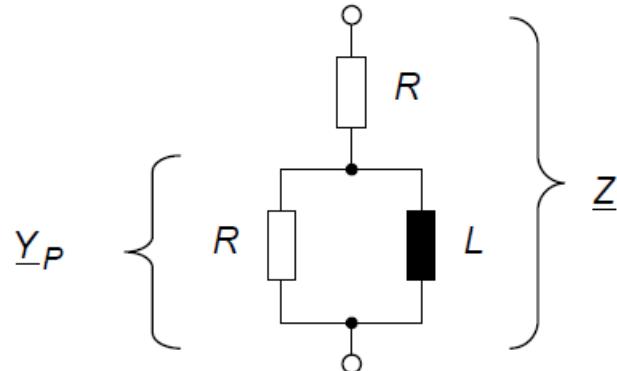
$$\underline{Z} \text{ kapazitiv} : X_{\text{Ers}} = -\frac{1}{\omega C_{\text{Ers}}}$$

$$\underline{Y}_{\text{Ers}} = G_{\text{Ers}} + jB_{\text{Ers}}$$

$$\underline{Y} \text{ induktiv} : B_{\text{Ers}} = -\frac{1}{\omega L_{\text{Ers}}}$$

$$\underline{Y} \text{ kapazitiv} : B_{\text{Ers}} = \omega C_{\text{Ers}}$$

### Aufgabe 4-5: Ortskurven



Gesucht:

1.  $\underline{Z}_L(\omega)$  ,  $\underline{Y}_L(\omega)$  ; Ortskurven

2.  $\underline{Y}_P(\omega)$  ; Ortskurve

$\underline{Z}_P$  ,  $\text{Re } \underline{Z}_P$  ,  $\text{Im } \underline{Z}_P$  : Formeln und Werte für  $\omega = 0$ ;  $\frac{R}{L}$ ;  $\infty$

Ortskurve  $\underline{Z}_P(\omega)$  (aus Real- und Imaginärteil konstruieren)

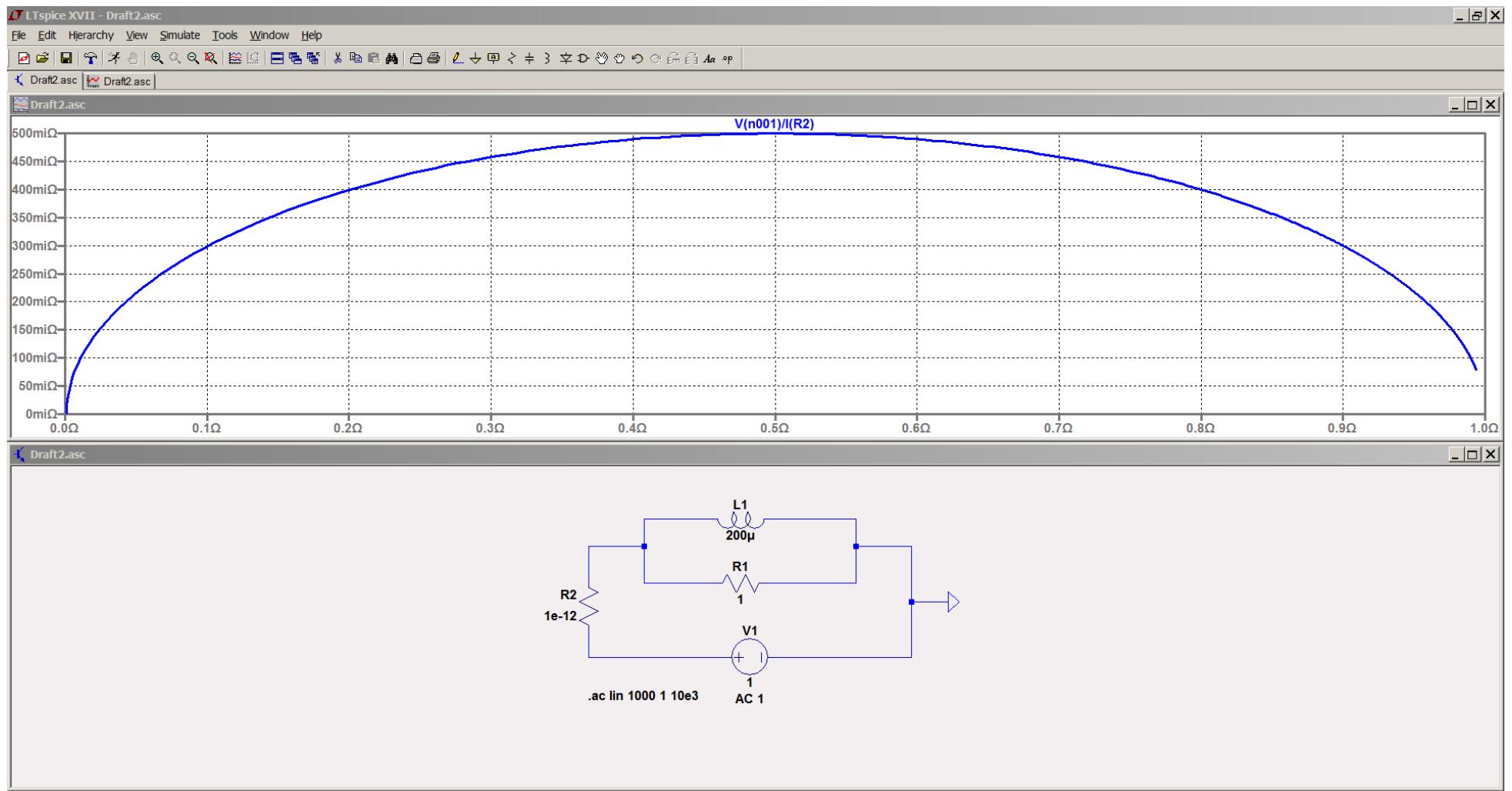
Ortskurve  $\underline{Z}(\omega)$  (ohne Rechnung)

3.  $\underline{Y}$  : Formel

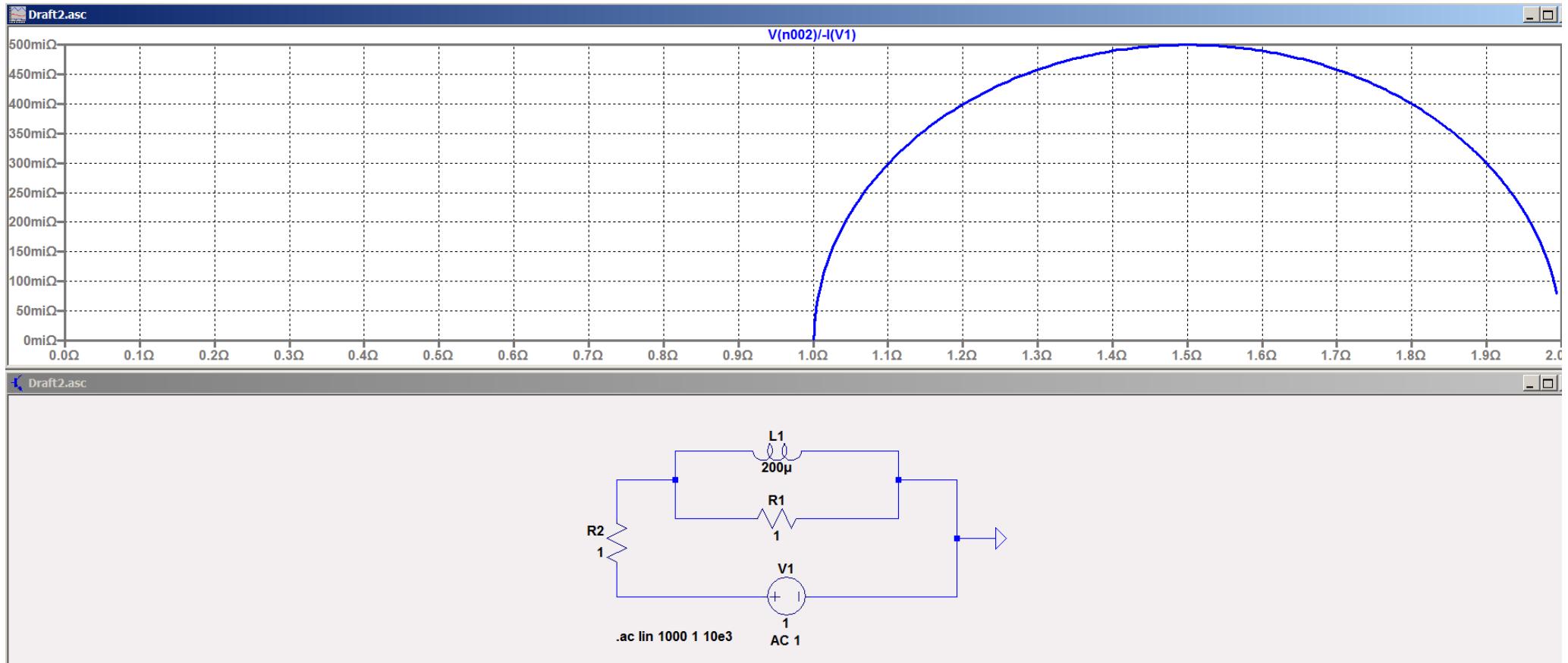
$|\underline{Y}|$  ,  $\varphi_Y$  : Formeln und Werte für  $\omega = 0$ ;  $\frac{1}{2} \frac{R}{L}$ ,  $\frac{R}{L}$ ;  $\infty$

Ortskurve  $Y(\omega)$  (aus  $|\underline{Y}|$  und  $\varphi_Y$  konstruieren)

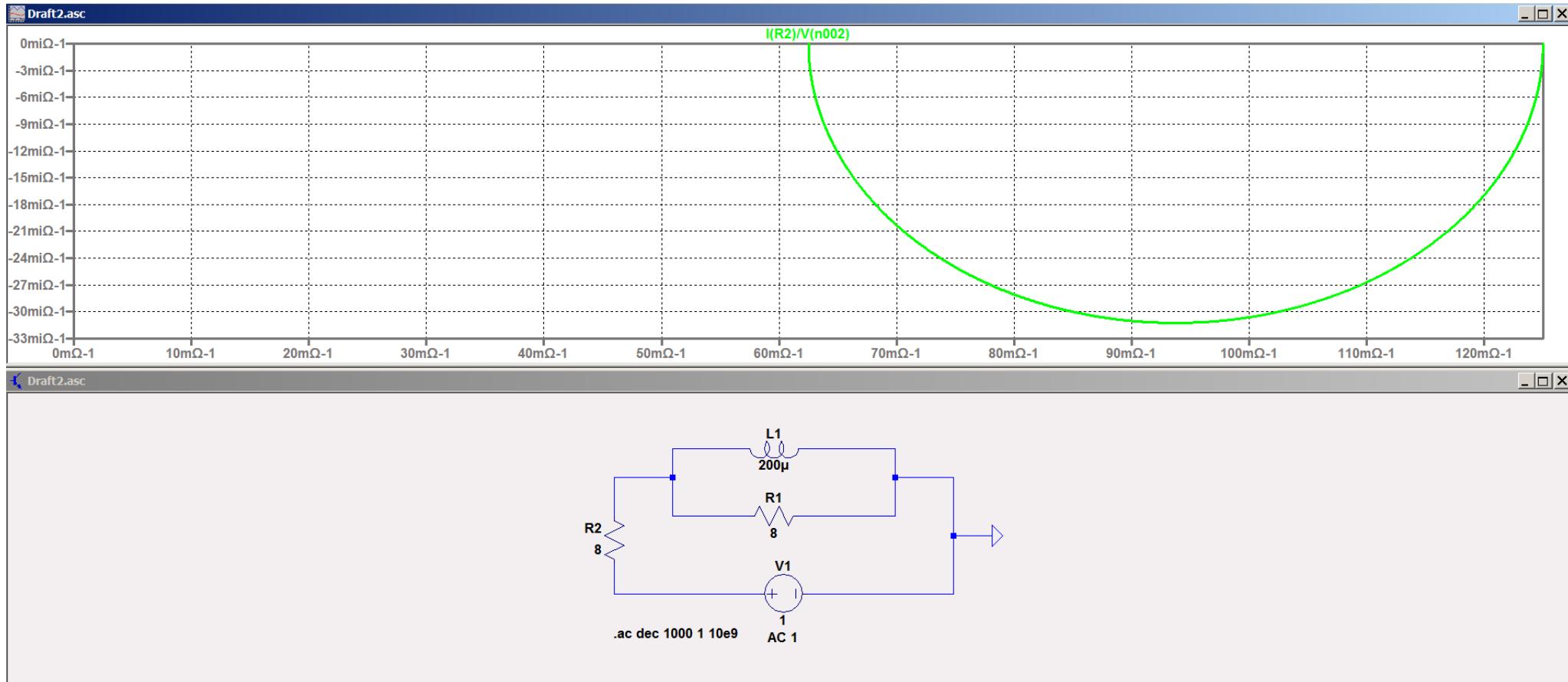
## Zu 4-5, 2. Ortskurve Zp



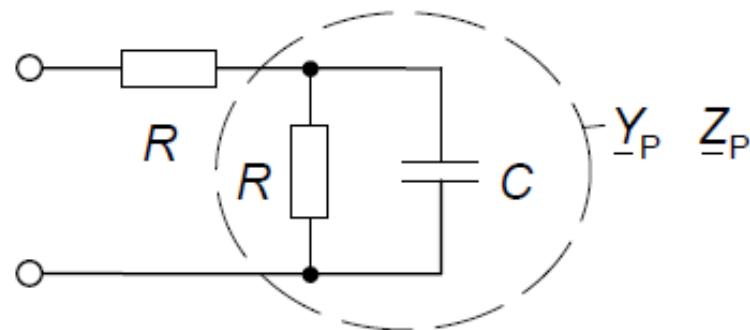
## Zu 4-5, 2. Ortskurve Zp



## Zu 4-5, 3. Ortskurve $Y_p$



## Aufgabe 4-6: Ortskurven

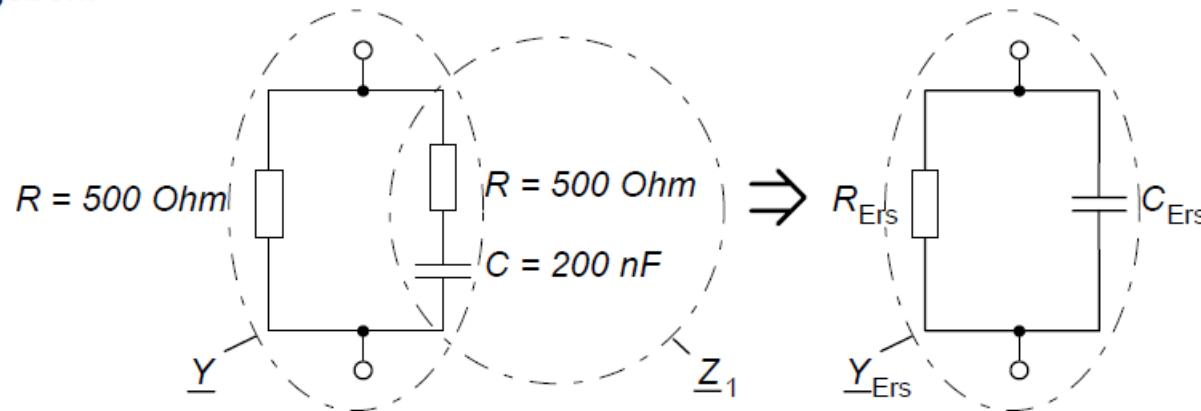


Gesucht:

1.  $\underline{Y}_P(\omega)$  ; Ortskurve von  $\underline{Y}_P(\omega)$
2.  $\underline{Z}_P(\omega)$  ; Ortskurve von  $\underline{Z}_P(\omega)$
3.  $\underline{Z}(\omega)$  ; Ortskurve von  $\underline{Z}(\omega)$
4.  $\underline{Y}(\omega)$  ; Ortskurve von  $\underline{Y}(\omega)$

## Aufgabe 4-7: Zweipol-Ersatzschaltung

Gegeben:



Fall a)  $\omega = 5 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}$

Fall b)  $\omega = 10 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}$

Die Schaltung soll in eine äquivalente Parallel-Ersatzschaltung umgerechnet werden:

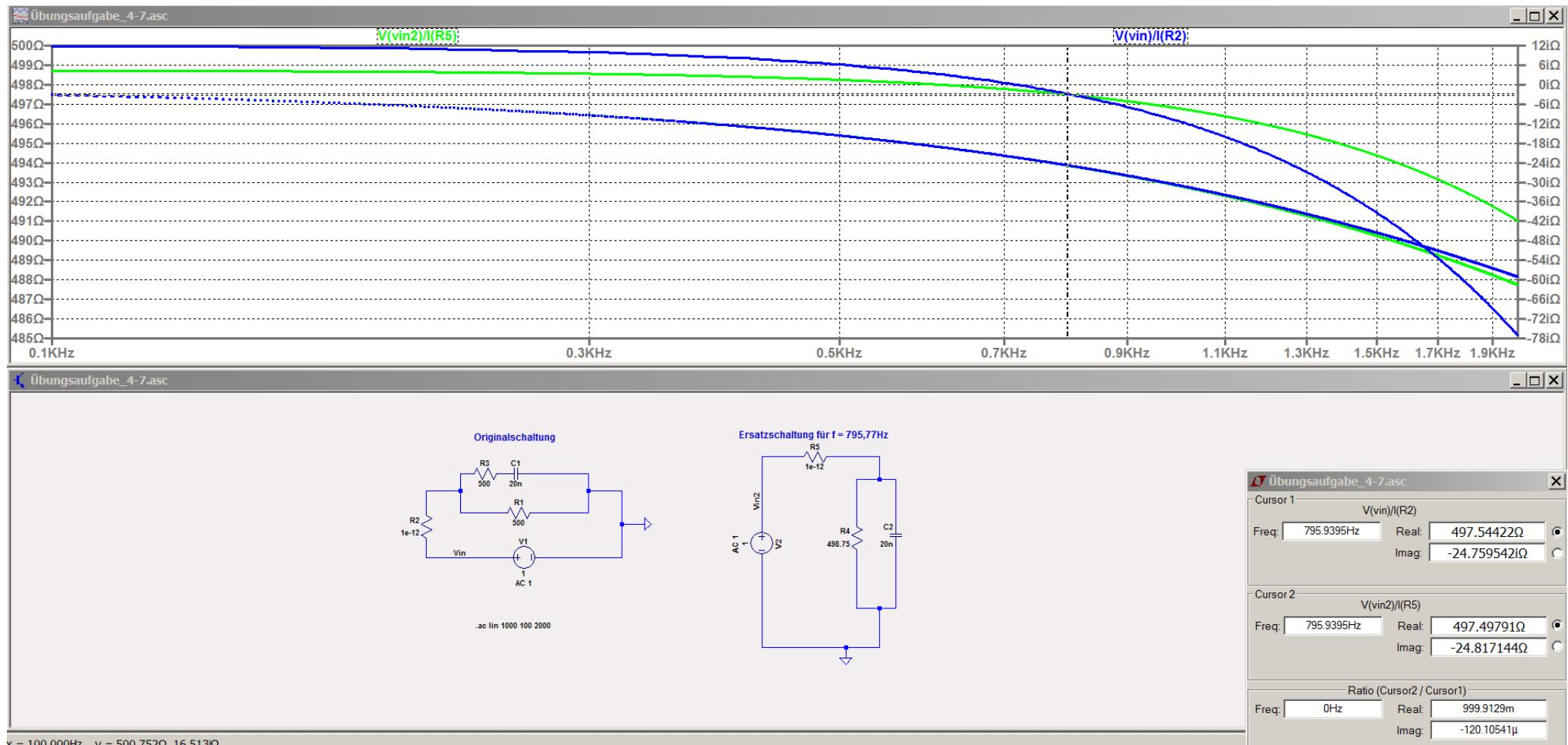
$$\underline{Y} = \underline{Y}_{\text{Ers}}$$

Gesucht:

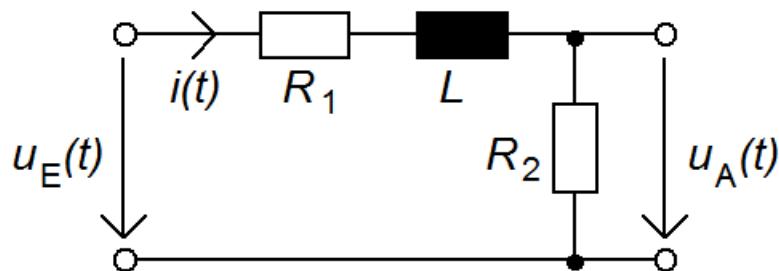
1.  $\underline{Z}_1, \underline{Y}_1, \underline{Y}$ ; Skizzen von  $\underline{Z}_1, \underline{Y}_1, \underline{Y}$  in komplexer Ebene

Zahlenwerte  $G_{\text{ers}}, B_{\text{ers}}, R_{\text{ers}}, C_{\text{ers}}$

## Zu 4-7, Ersatzschaltung



**Aufgabe 3**



$$\begin{aligned}R_1 &= 1 \text{ Ohm} \\R_2 &= 10 \text{ Ohm} \\L &= 1 \text{ mH} \\u_E(t) &= 120 \text{ V} \cos(\omega t)\end{aligned}$$

Teil 1: Betrachtung als Zweipol

- 3.1 Formel der Impedanz  $\underline{Z} = \frac{\hat{U}_E}{\hat{I}}$  kartesisch und exponentiell
- 3.2 Formel der Admittanz  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$  kartesisch und exponentiell
- 3.3 Zahlenwert der Kennkreisfrequenz  $\omega_k$  von  $\underline{Z}$  und  $\underline{Y}$
- 3.4 Ortskurven von  $\underline{Z}$  und  $\underline{Y}$

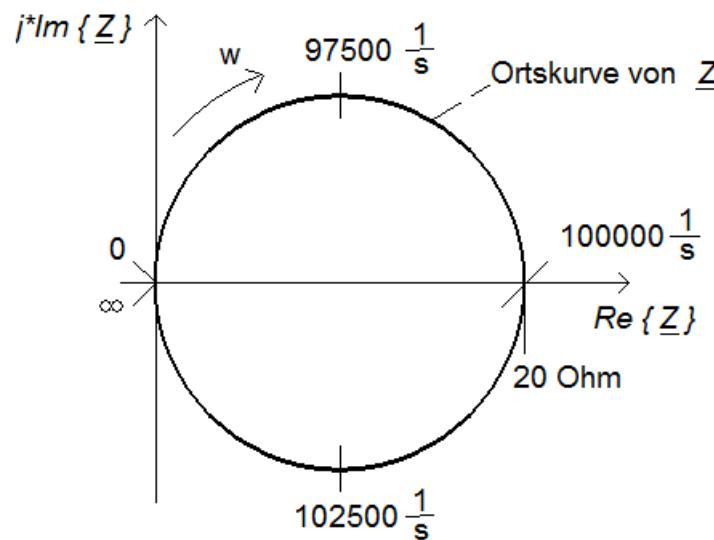
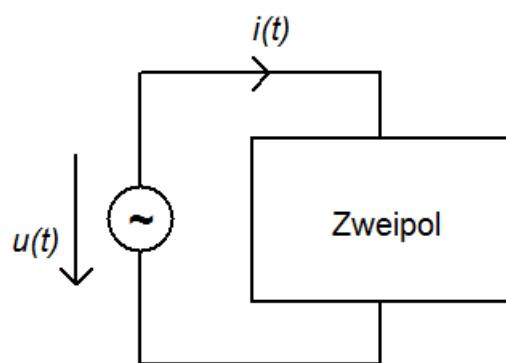
(Bitte überspringen Sie Aufgabe 3.3)

## Wichtig: Selbstlernkontrolle K4-S3, Prüfungsaufgabe ET2 SS2015

### Aufgabe 3 Ortskurve

35 Punkte / 100 P.

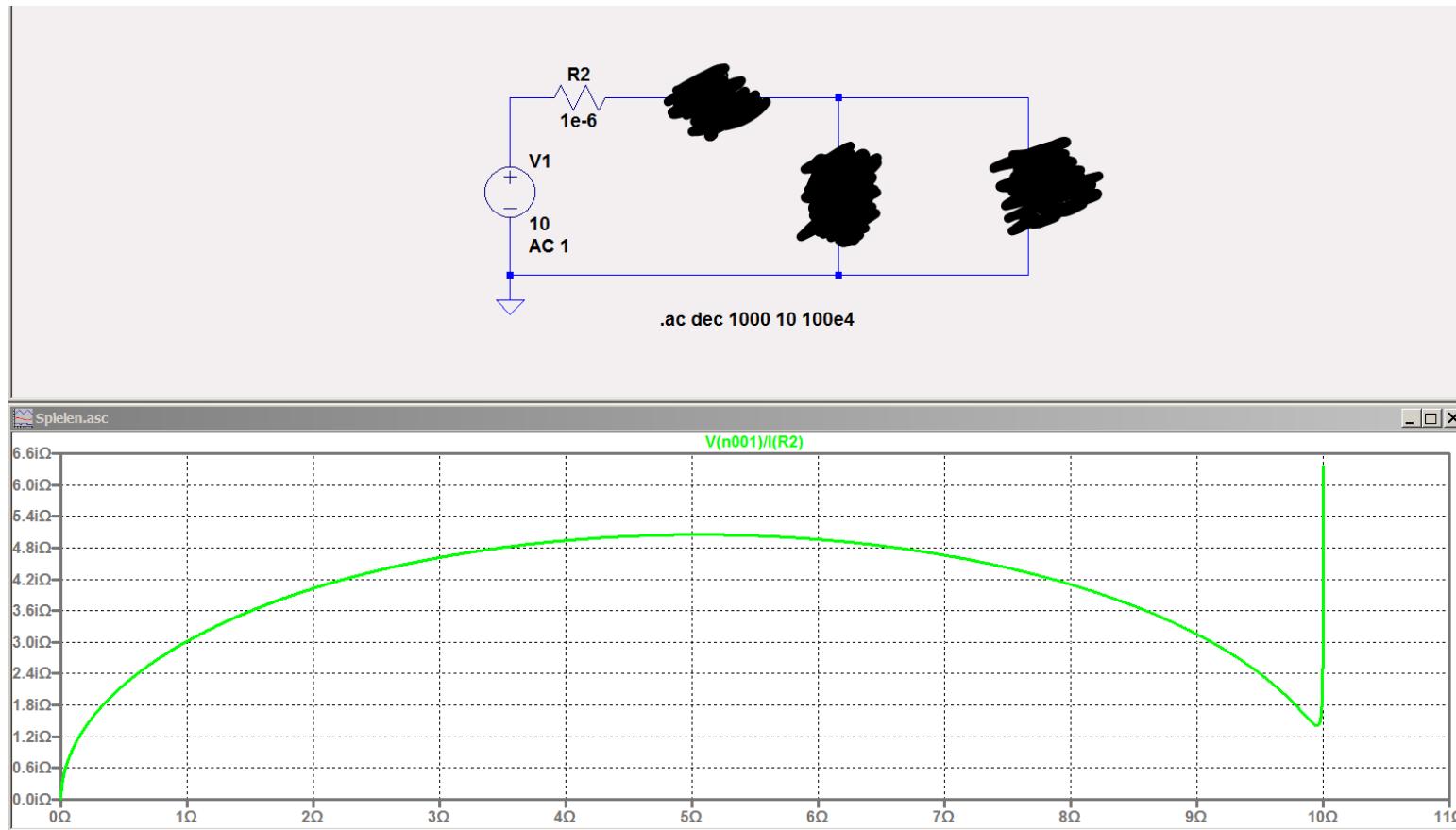
An einem Zweipol liegt die Spannung  $u(t) = 10V \cdot \cos(\omega t)$  mit  $0 \leq \omega < \infty$  an. Vom Zweipol ist die Ortskurve der Impedanz  $\underline{Z}$  bekannt:



Geben Sie für die Kreisfrequenzen  $\omega = 97500 \frac{1}{s}$ ,  $\omega = 100000 \frac{1}{s}$  und  $\omega = 102500 \frac{1}{s}$  an:

- 3.1  $\underline{Z}$  und  $\hat{i}$  (mit Zahlenwerten)
- 3.2  $u(t)$  und  $i(t)$  (mit Zahlenwerten)
- 3.3 Für die Kreisfrequenz  $\omega = 97500 \frac{1}{s}$ : Skizze von  $u(t)$  und  $i(t)$  (mit Zahlenwerten)
- 3.4 Welche Schaltung könnte sich im Zweipol befinden?
- 3.5 Geben Sie die Bauteilwerte dieser Schaltung an (Zahlenwerte).

## Wichtig: Selbstlernkontrolle K4-S4



Die Simulation zeigt die Ortskurve der Eingangsimpedanz Z (Spannung am Eingang der Schaltung/Strom durch Widerstand R2)

- Welche Bauteile (ohne Wert) müssen Sie in die Schaltung einsetzen
- Erstellen Sie eine Simulation die einen ähnlichen Kurvenverlauf erzeugt

## Verständnisfragen zu Kapitel 4b

- 1) Berechnen Sie die Impedanz einer RL Serienschaltung. Zeichnen Sie die Impedanz der Ortskurve. Überlegen Sie sich die Werte für  $f = 0\text{Hz}$  und  $f \rightarrow \infty$
- 2) Zeichnen Sie die Ortskurve der Admittanz aus 1)
- 3) Wie lautet die Formel zu Umrechnung von linearen Größen in dB (Dezibel) für Strom- und Spannung.
- 4) Merken Sie sich bitte den Wert 3dB für Leistung und 6dB für Spannungs- und Stromverhältnisse. Wie groß sind dies Absolutwerte jeweils.
- 5) Erstellen Sie zu den Übungsaufgabe 4-5, 4-6, 4-7, aus diesem Kapitel eine Simulation und verifizieren Sie die Ergebnisse. (Falls keine Bauteilwerte gegeben sind, bitte beliebig auswählen)

