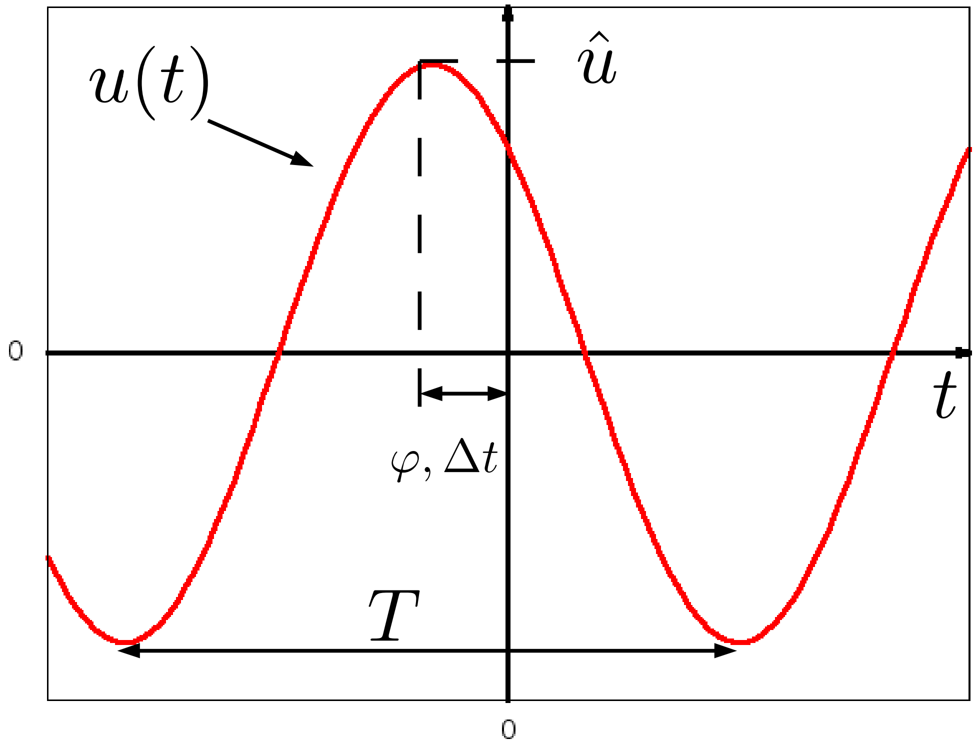
3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.1 Kenngrößen sinusförmiger Zeitfunktionen

Kenngrößen sinusförmiger Zeitfunktionen
Kosinus-Spannung:



$u(t)$...Momentanwert

t...Zeit

$\hat{u}$...Amplitude

T...Periodendauer[s]

$f = \frac{1}{T}$...Frequenz[Hz]

$\boxed{\varphi = -\Delta t \cdot \omega}$

$\omega = 2\,\pi \cdot f$...Kreisfrequenz[s^{-1}]

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{\text{Umlauf des Kreises}}{\text{Zeitdauer für 1 Umlauf}}$$

(Einheit für pro Sekunde überstrichenen Winkel)

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right) = \hat{u} \cdot \cos\left(2\pi f t + \varphi\right) = \hat{u} \cdot \cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.1 Kenngrößen sinusförmiger Zeitfunktionen

*

Winkeleinheiten:

- Bogenmaß [rad]
- Grad [°]

Umrechnung:

$$\boxed{\alpha[^\circ] = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \phi[\mathrm{rad}]}$$

Beispiel:

$$\phi\,[\mathrm{rad}] = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \alpha = 45^\circ$$

Mögliche Darstellung des Kosinus-Arguments:

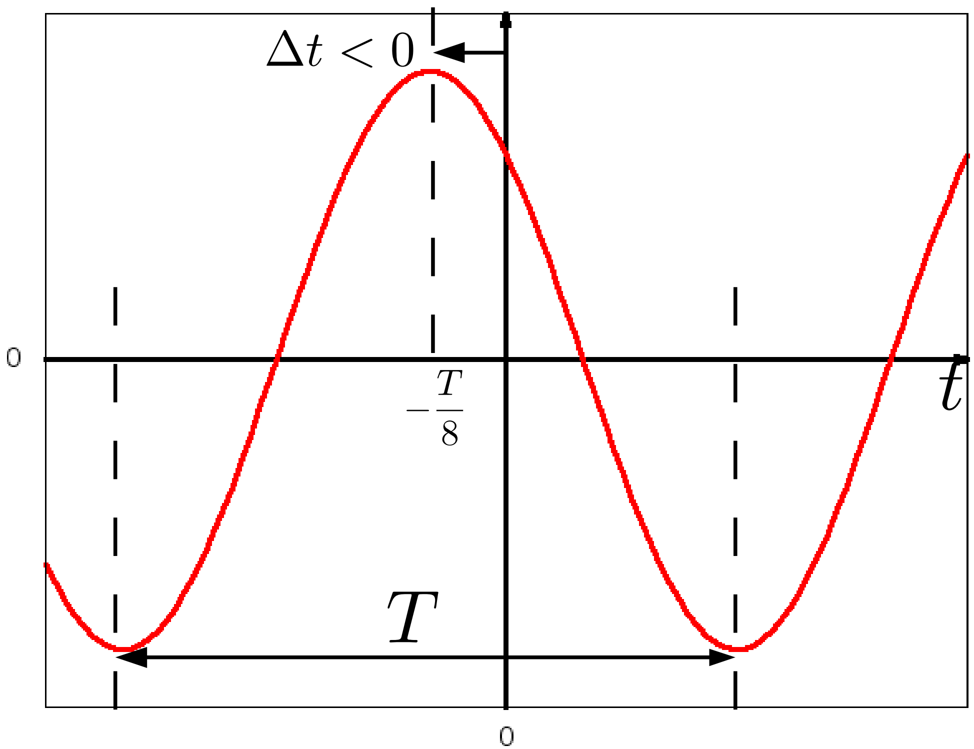
$$\cos(\omega t) = \cos(2\pi f t) = \cos(360^\circ f t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \cos\left(360^\circ \frac{t}{T}\right)$$

Wichtig: Taschenrechnereinstellung kontrollieren!

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.1 Kenngrößen sinusförmiger Zeitfunktionen

Verschobener Kosinus:
Die Addition eines **positiven Winkels φ** im Argument der Kosinus-Funktion bewirkt eine **Linksverschiebung**. Die Addition eines **negativen Winkels φ** bewirkt eine **Rechtsverschiebung** der Kosinus-Funktion.

Beispiele: $$\varphi = +\frac{\pi}{4} \Rightarrow f(t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$



Argument = 0 (Maximum des Kosinus-Funktion):

$$\omega t + \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{\pi}{4 \cdot \omega} = -\frac{T}{8}$$

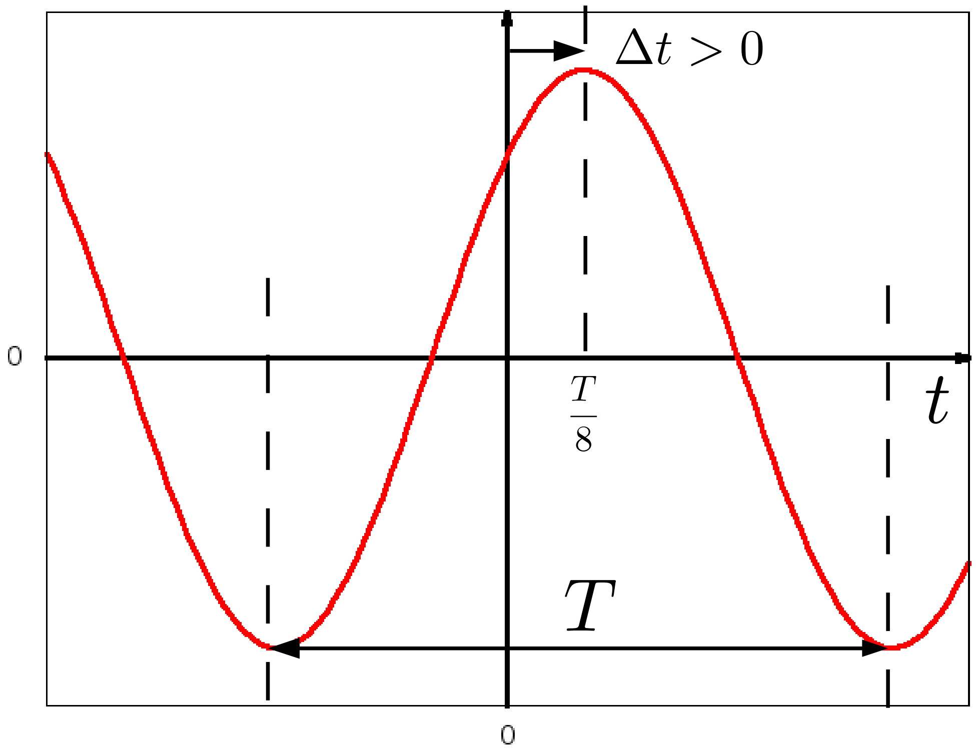
Ist der Winkel φ positiv, ist der Kosinus nach links verschoben.

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.1 Kenngrößen sinusförmiger Zeitfunktionen

Verschobener Kosinus:

Beispiele:

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow f(t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$



Argument = 0:

$$\omega t - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\Rightarrow t = +\frac{\pi}{4 \cdot \omega} = +\frac{T}{8}$$

Ist der Winkel φ negativ, ist der Kosinus nach rechts verschoben.

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.1 Kenngrößen sinusförmiger Zeitfunktionen

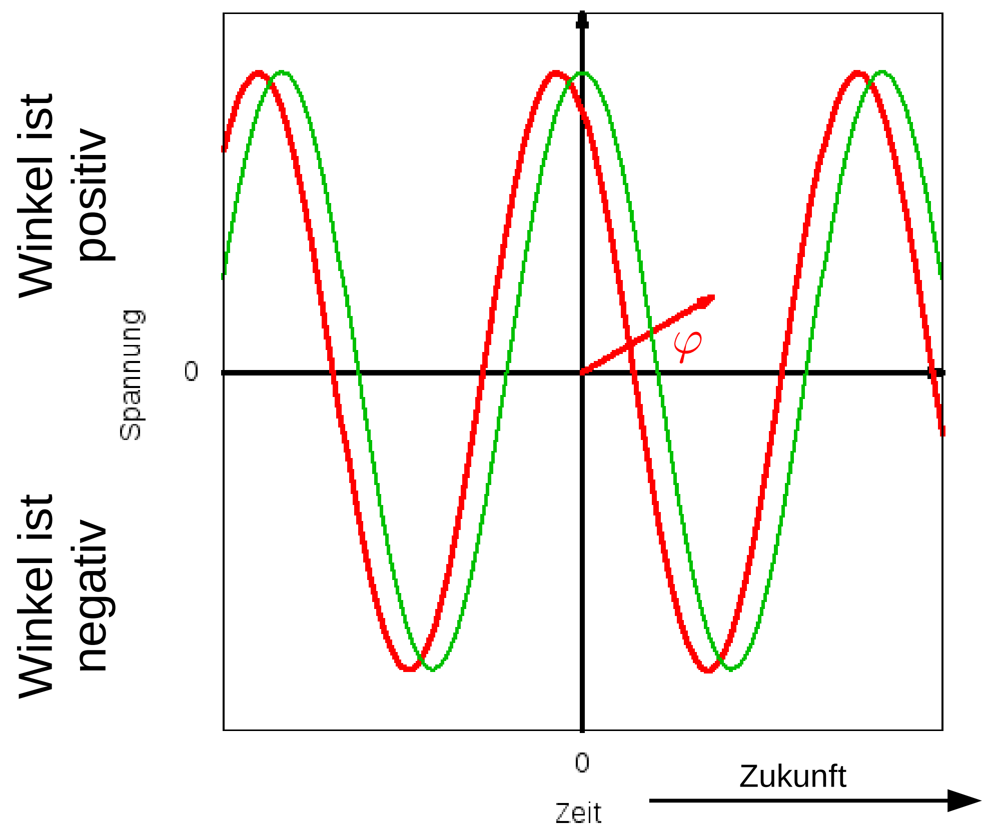
Verschobener Kosinus:

Beispiele:

(Referenzsignal, hier wird immer die Kosinusfunktion als Referenz verwendet)

$$f(t) = \cos(\omega t)$$

$$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$$



Winkel des roten Zeigers (gegen X-Achse) entspricht der Phase φ.

Positiver Winkel:
Das Signal eilt voraus, zeitlich früher

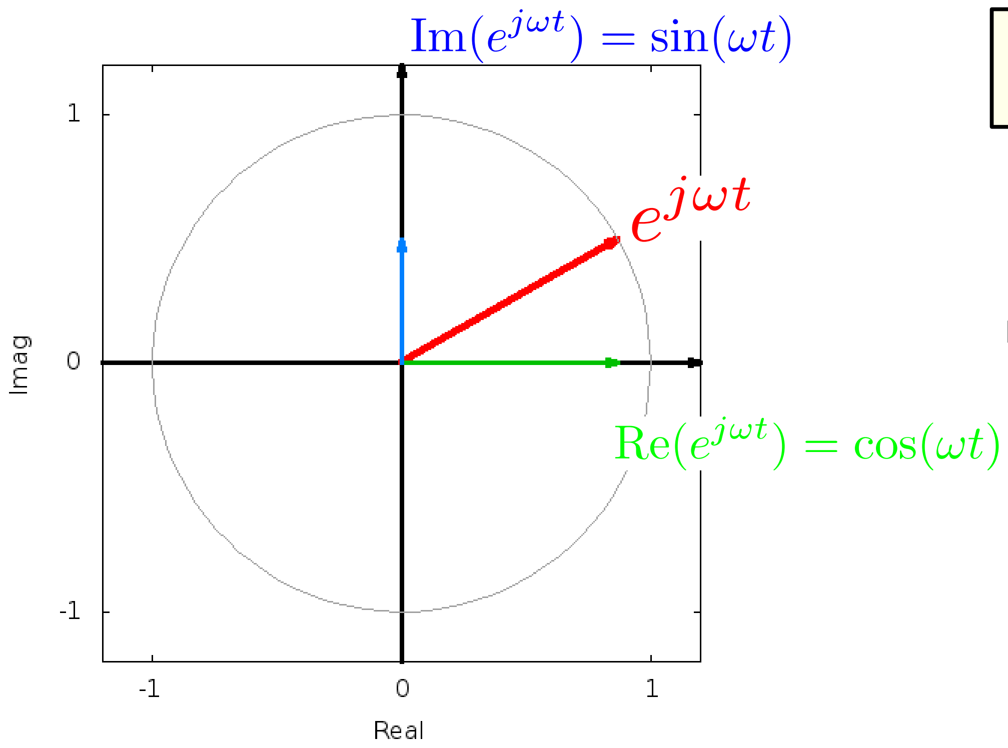
Negativer Winkel:
Das Signal eilt hinterher, zeitlich später

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.2 Darstellung durch komplexe Zeiger

Darstellung durch komplexe Zeiger:

Drehzeiger:

Wie verhält sich die Exponentialfunktion exp(jφ(t)) wenn die Phase φ(t) von 0 an läuft?



Eulersche Formel:

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)}$$

Projektion auf x-Achse

Projektion auf y-Achse

$$\left| e^{j\varphi(t)} \right| = 1$$

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.2 Darstellung durch komplexe Zeiger

Darstellung durch komplexe Zeiger:

Nach der **eulerschen Formel** gilt folgender Zusammenhang:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

Die periodischen (Kosinus-) Funktionen, die hier betrachtet werden, haben allgemein folgende Form:

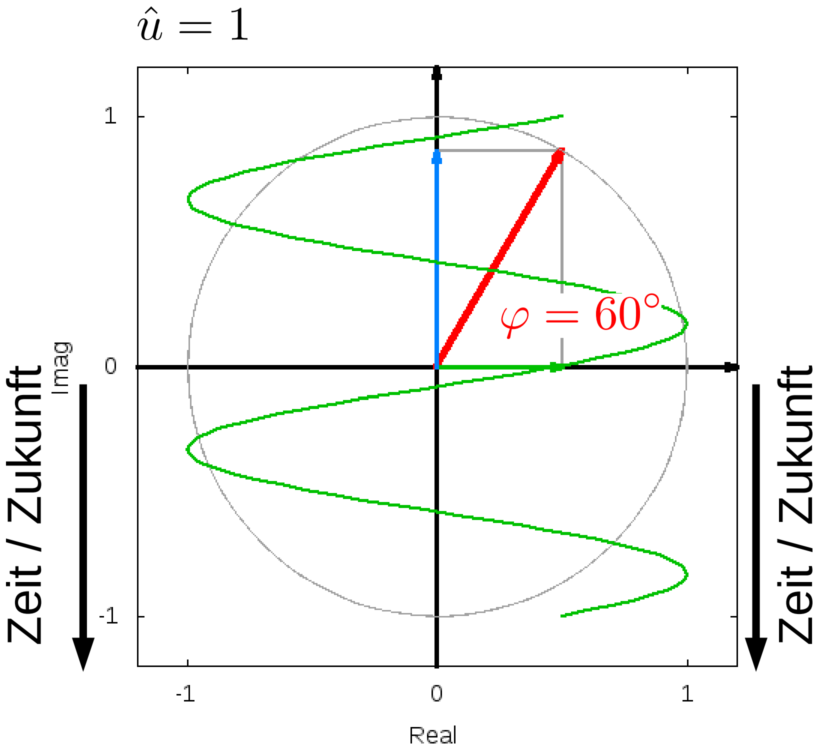
$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Mit Hilfe der eulerschen Formel lässt sich diese Gleichung folgendermaßen beschreiben:

$$\boxed{u(t) = \hat{u} \cdot \mathrm{Re}\left(e^{j(\omega t + \varphi)}\right)}$$

Darstellung durch komplexe Zeiger:

$$e^{j(\omega t+\varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$



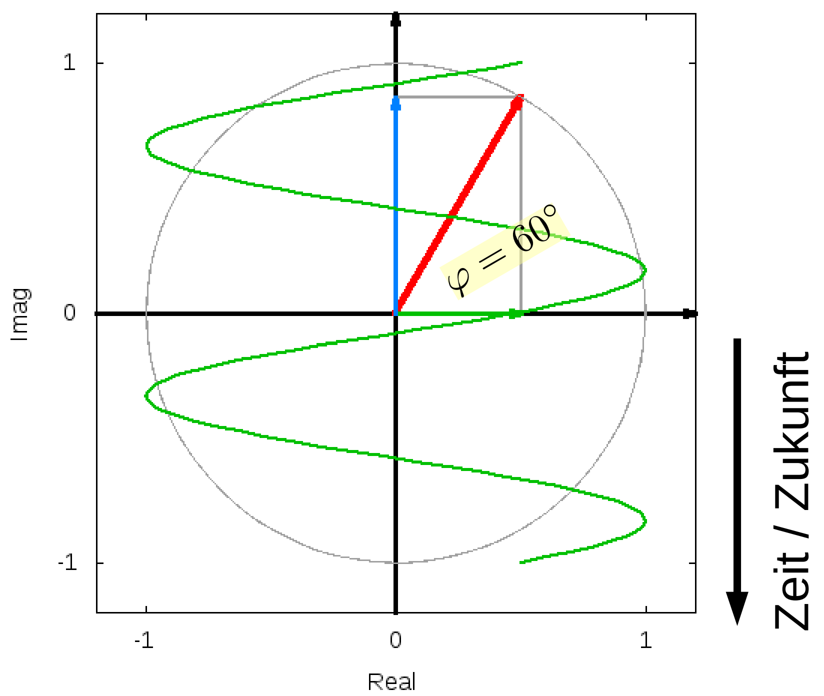
$$u(t) = \hat{u} \cdot Re\left(e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$$
$$= \hat{u} \cdot Re\left(e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi}\right)$$

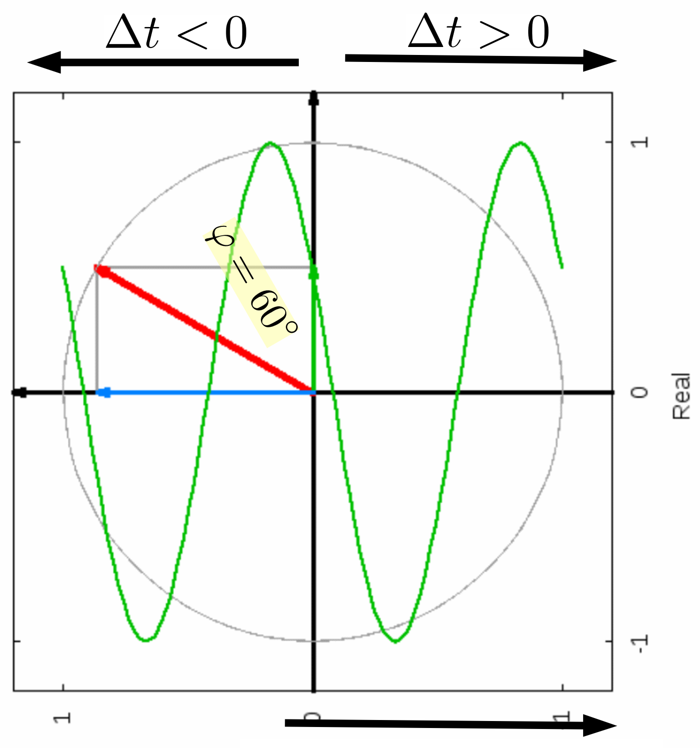
Der rote Einheitszeiger bestimmt den Anfangswinkel φ. Die grüne Kosinus-Kurve den zeitlichen Verlauf, der Zeitpfeil zeigt nach unten.

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.2 Darstellung durch komplexe Zeiger

Darstellung durch komplexe Zeiger:

$$u(t) = \hat{u} \cdot Re\left(e^{j(\omega t + 60°)}\right)$$



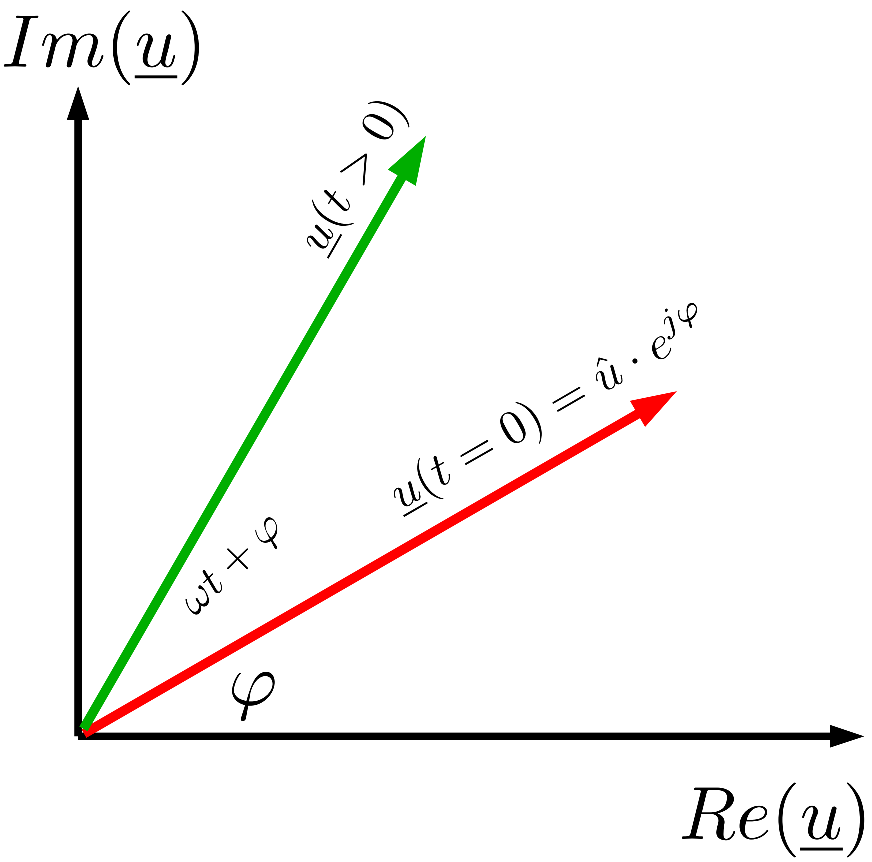


Wenn dieses Darstellung um 90° gedreht wird, ergibt sich die zeitliche Darstellung eines kosinusförmigen Zeitsignals

Zeitachse in gewohnter Richtung (x-Achse). Je größer der Winkel φ wird desto weiter nach links ist die Kosinus-Kurve verschoben.

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.2 Darstellung durch komplexe Zeiger

Darstellung der Drehzeiger in der komplexen Ebene



Der Winkel des komplexen Ausdrucks

$$\underline{u}(t)=\hat{u}\cdot e^{j(\omega t+\varphi)}=\hat{u}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{j\varphi}$$

ist zeitabhängig.
Zum Zeitpunkt t=0 ergibt sich:

$$\underline{u}(t=0)=\hat{u}\cdot e^{j\varphi}$$

Das heißt der Anfangswinkel ist φ.
Ist t>0, wächst der Winkel mit ωt, ist also φ+ωt.
Für t=T (eine Periodendauer T später) ist der Winkel wieder gleich φ, da:

$$e^{j(\omega T+\varphi)}=e^{j(2\pi+\varphi)}=e^{j2\pi}\cdot e^{j\varphi}=1\cdot e^{j\varphi}$$

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.2 Darstellung durch komplexe Zeiger

Resultat:

Der komplexe Ausdruck $\underline{u}(t)$ stellt einen Drehzeiger mit positivem Drehsinn dar.

Die Linksdrehung entsteht dabei durch +jωt im Argument der e-Funktion.

Anmerkung:

Mit $\underline{u}(t) = \hat{u}\, e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{u}\, \cos(\omega t + \varphi) + j\, \hat{u}\, \sin(\omega t + \varphi)$
erhält man $u(t) = \hat{u}\, \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}(\underline{u}(t))$
d.h. die Kosinus-Zeitfunktion $u(t)$ lässt sich aus dem Realteil des Drehzeigers $\underline{u}(t)$ zurückgewinnen.

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.2 Darstellung durch komplexe Zeiger

Feststehender Zeiger:

der Drehzeiger $\underline{u}(t)$ lässt sich zerlegen in einen zeit**un**abhängigen und einen zeitabhängigen Anteil:

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{u} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi}$$

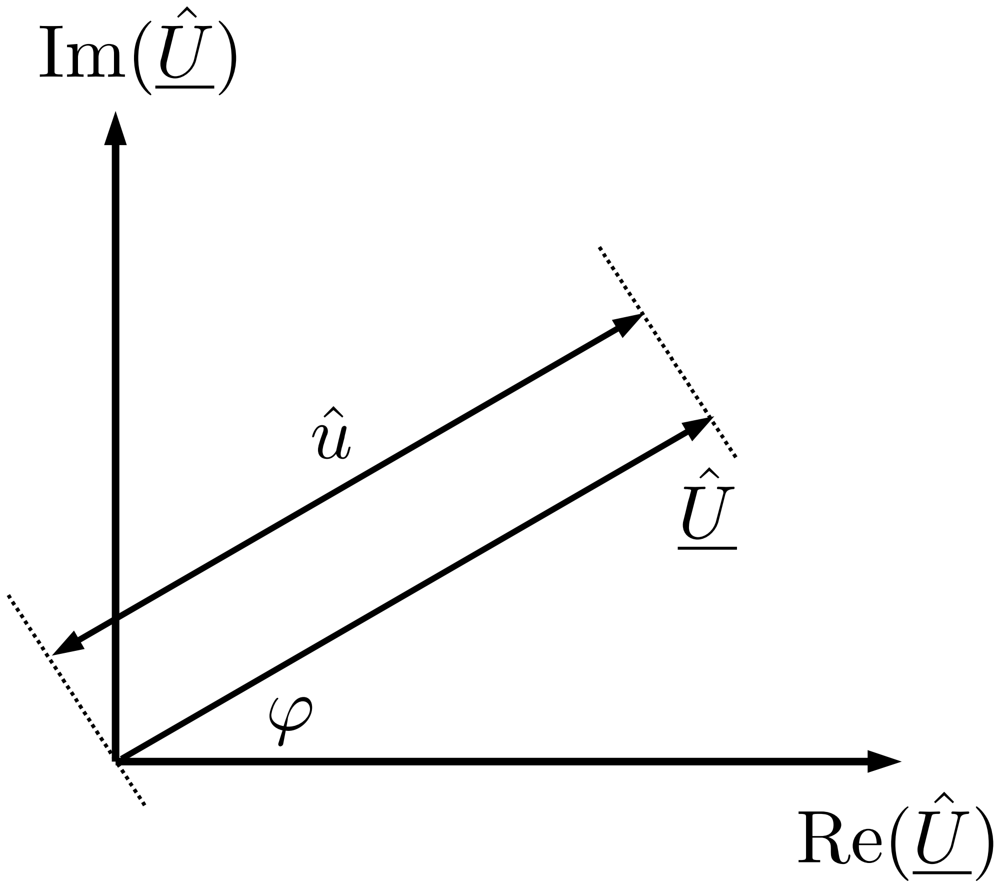
Der zeitabhängige Anteil $e^{j\omega t}$ verursacht die Drehung. Dieser Anteil wird herausgenommen (→ **Transformation**).
Der zeit**un**abhängige Anteil $e^{j\varphi}$ ist eine komplexe Zahl, die durch einen feststehenden Zeiger dargestellt werden kann. Dieser feststehende Zeiger:

$$\boxed{\underline{\hat{U}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}}$$

wird auch als **komplexe Amplitude** oder einfach nur als **Zeiger** bezeichnet. Hierbei handelt es sich um die Darstellung in der Exponentialform.

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.2 Darstellung durch komplexe Zeiger

Darstellung des feststehenden Zeigers in der komplexen Ebene:



$$\underline{\hat{U}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}$$

Die Länge des feststehenden Zeigers entspricht der **Amplitude** und der Winkel φ der **Anfangsphase** des Zeitsignals.

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.2 Darstellung durch komplexe Zeiger

Effektivwertzeiger und Amplitudenzeiger:

Bei **sinusförmigen** Spannungen gilt:

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

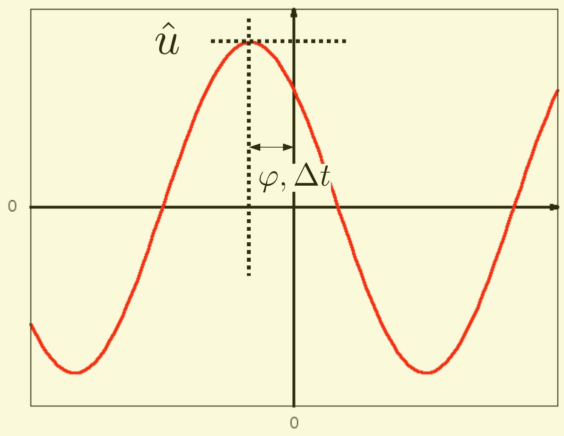
Es wird daher zwischen Amplitudenzeiger $\underline{\hat{U}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}$

und Effektivwertzeiger unterschieden $\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi} = u_{\mathrm{eff}} \cdot e^{j\varphi}$

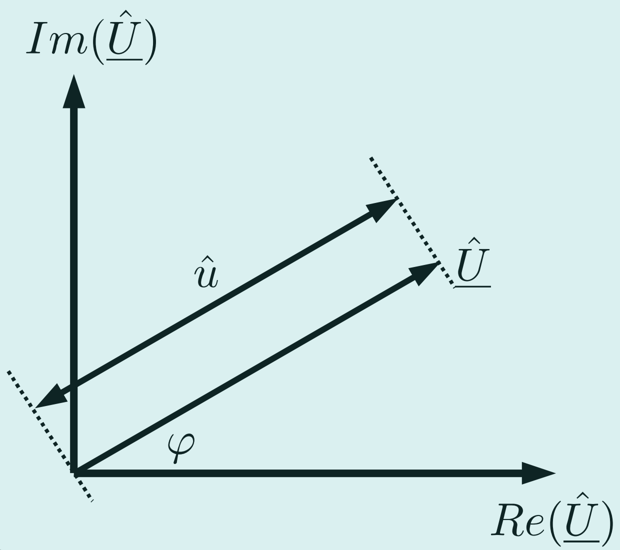
Damit gilt auch hier:

$$\boxed{\underline{\hat{U}} = \sqrt{2} \cdot \underline{U}}$$

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.2 Darstellung durch komplexe Zeiger



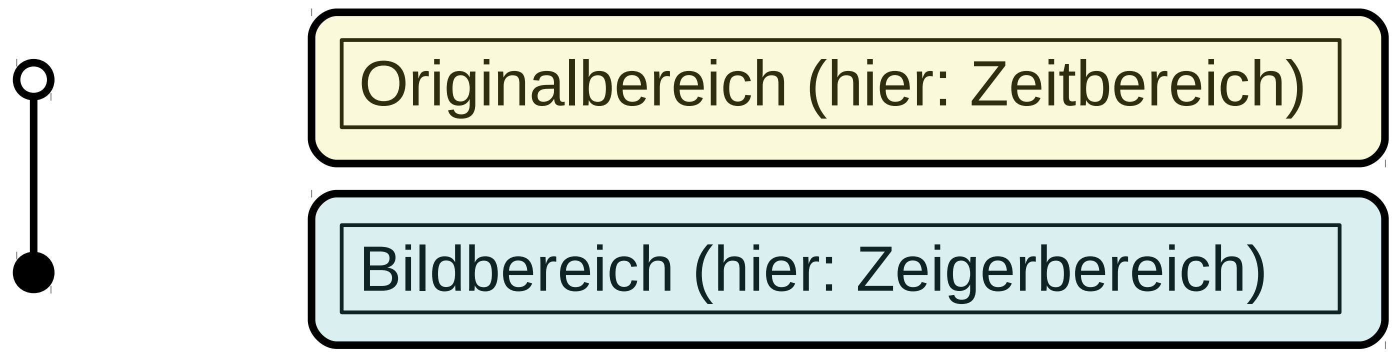
Zeitfunktion: $u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$



Zeiger: $\underline{\hat{U}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}$

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.2 Darstellung durch komplexe Zeiger

Der Übergang von $e^{j(\omega t+\varphi)}$ nach $e^{j\varphi}$ wird als (Zeiger-) **Transformation** oder auch als **Abbildung** bezeichnet. Gekennzeichnet wird die Transformation durch das Symbol:



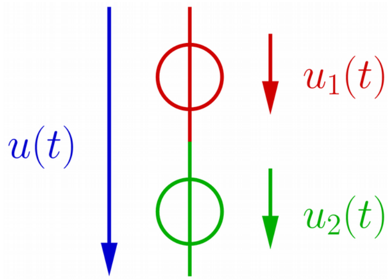
Hin-Transformation : Originalbereich → Bildbereich
Rück-Transformation : Bildbereich → Originalbereich

<u>Vorteil der Transformation:</u>

- Die graphische Darstellung des Zeigers ist einfacher als das Zeichnen der Kosinusfunktion
- Die mathematische Behandlung insbesondere von Differentialgleichungen wird deutlich einfacher

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.3 Addition sinusförmiger Größen

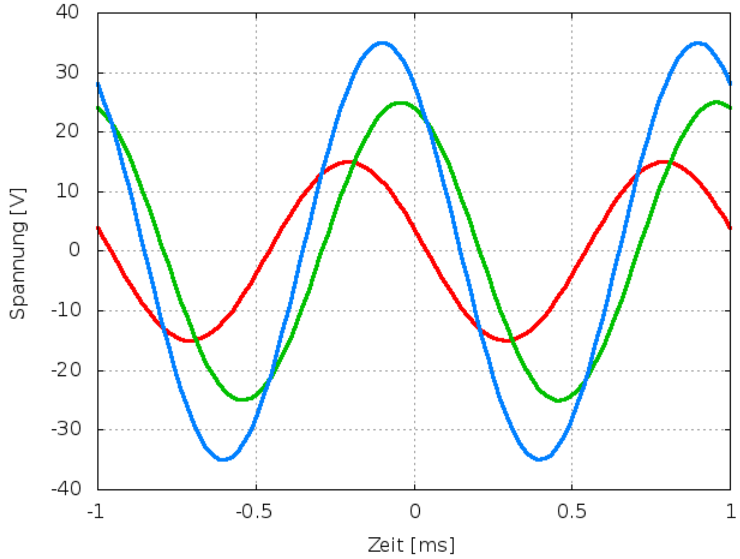
Addition sinusförmiger Größen gleicher Frequenz:
Bei der Addition (Überlagerung, Reihenschaltung von Spannungsquellen) von sinusförmigen Größen gleicher Frequenz ergibt sich wieder eine sinusförmige Größe mit gleicher Frequenz.



$$u_1(t) = 15\,\mathrm{V} \cdot \cos(\omega t + 75^\circ)$$

$$u_2(t) = 25\,\mathrm{V} \cdot \cos(\omega t + 15^\circ)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t) \\ &= 35\,\mathrm{V} \cdot \cos(\omega t + 36{,}8^\circ) \end{aligned}$$



3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.3 Addition sinusförmiger Größen

Addition wird vorteilhaft mit Zeiger durchgeführt:
Schema:

$$u_1(t) + u_2(t) = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

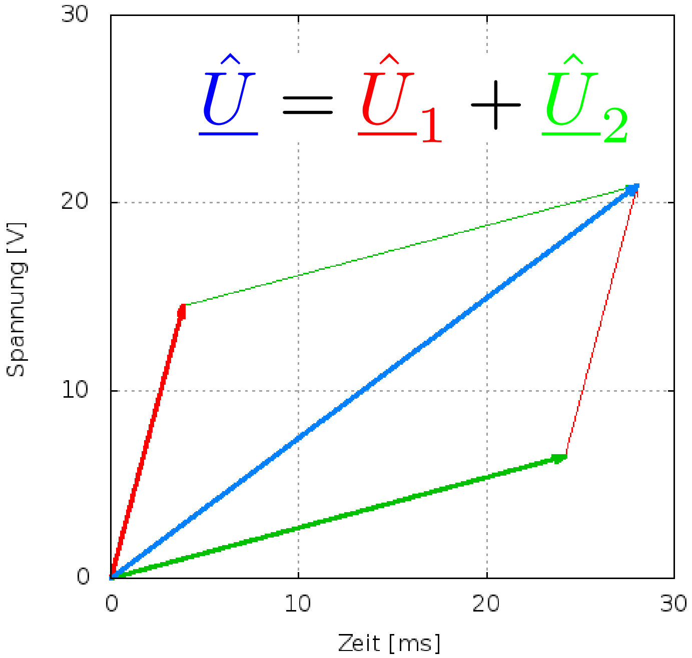
$$\hat{u}_1 \cdot e^{j\varphi_1} + \hat{u}_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$
$$= \underline{\hat{U}}_1 + \underline{\hat{U}}_2 = \underline{\hat{U}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}$$

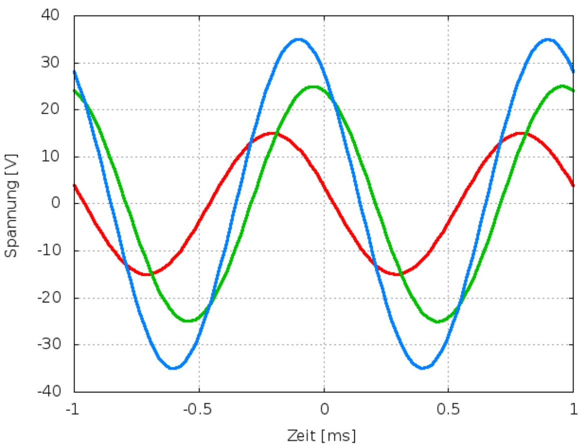
$$\hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Die Addition der komplexen Zeiger kann sowohl rechnerisch (in kartesischer Form) als auch graphisch (Vektoraddition) erfolgen.

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.3 Addition sinusförmiger Größen

Addition von sinusförmigen Größen gleicher Frequenz im Zeigerbereich:





Für die Addition eignet sich die Darstellung in kartesischer Form.

$$\hat{\underline{U}}_1 = 15\,\mathrm{V}(\cos(75°) + j\sin(75°)) = (3{,}88 + j14{,}49)\,\mathrm{V}$$

$$\hat{\underline{U}}_2 = 25\,\mathrm{V}(\cos(15°) + j\sin(15°)) = (24{,}15 + j6{,}47)\,\mathrm{V}$$

$$\hat{\underline{U}} = (28{,}03 + j20{,}96)\,\mathrm{V} = 35\,\mathrm{V}e^{j36{,}79°}$$

Addition in kartesischer Form!

3 Sinusförmige Zeitfunktionen
3.3 Addition sinusförmiger Größen

Die Addition der sinusförmigen Funktionen

$$\hat{u} \cdot \cos(\omega\, t + \varphi) = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega\, t + \varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega\, t + \varphi_2)$$

kann auch über folgende Gleichung erfolgen:

$$\boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{\hat{u}_1 \cdot \sin(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{\hat{u}_1 \cdot \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\varphi_2)}\right)}$$

$$\boxed{\hat{u} = \sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2\, \hat{u}_1\, \hat{u}_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

Aufgabe 3-1: Kosinus-Spannung

Gegeben: $u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi)$

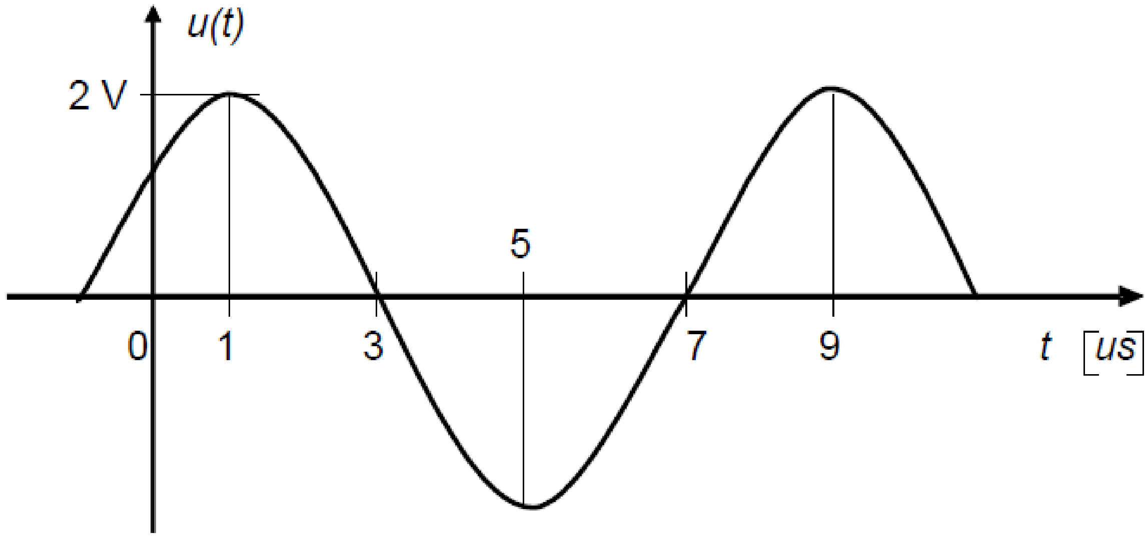
$\hat{u} = 1V \qquad f = 25\ kHz \qquad \varphi = -63{,}4°$

Gesucht:

1. T ; ω ; φ in rad
2. Zeitliche Lage t_0 des Nulldurchgangs (der dem Ursprung am nächsten liegt)
3. Zeitliche Lage t_{max} des Maximums
4. Skizze von $u(t)$

Aufgabe 3-2: Zeit $\longrightarrow$ Zeiger Transformation

Gegeben: Oszillogramm



Gesucht:

1. $u(t)$ (als Kosinus-Funktion)

2. $\underline{\hat{U}}$ (in Exponentialform)
   Skizze von $\underline{\hat{U}}$

Aufgabe 3-3: Zeiger $\longrightarrow$ Zeit Transformation

Gegeben: $\underline{\hat{I}} = 0{,}5\ mA - j\frac{1}{2}\sqrt{3}\ mA$

Gesucht:

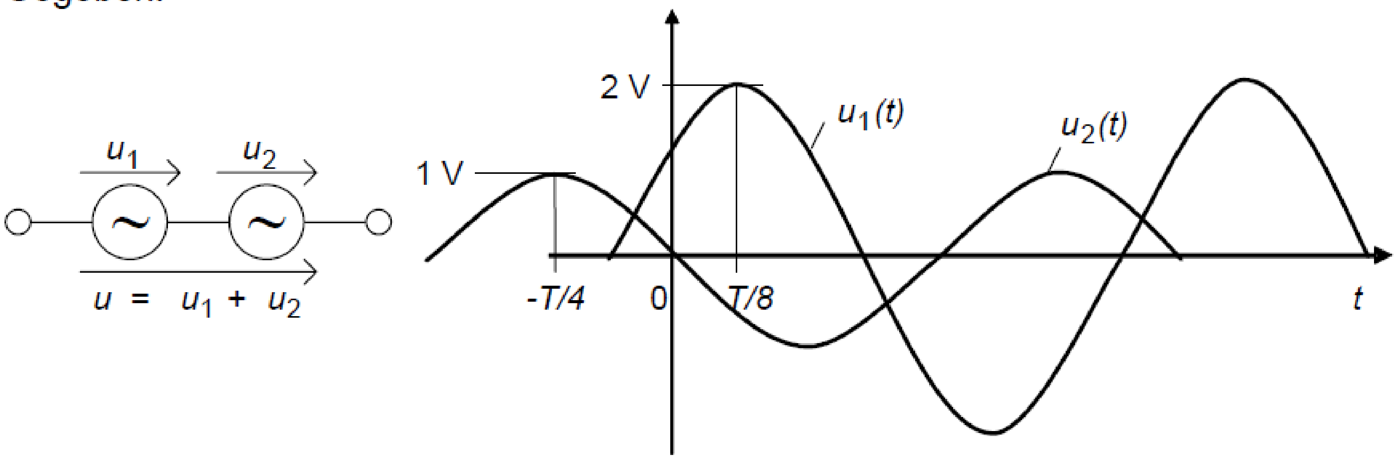
1. Zeigerdiagramm von $\underline{\hat{I}}$
   $\hat{i}$, φ_i

2. $i(t)$: Formel + Skizze
   (Hinweis: T bzw. ω frei wählbar)

Abgabe in Moodle!

Aufgabe 3-4: Überlagerung von Spannungen

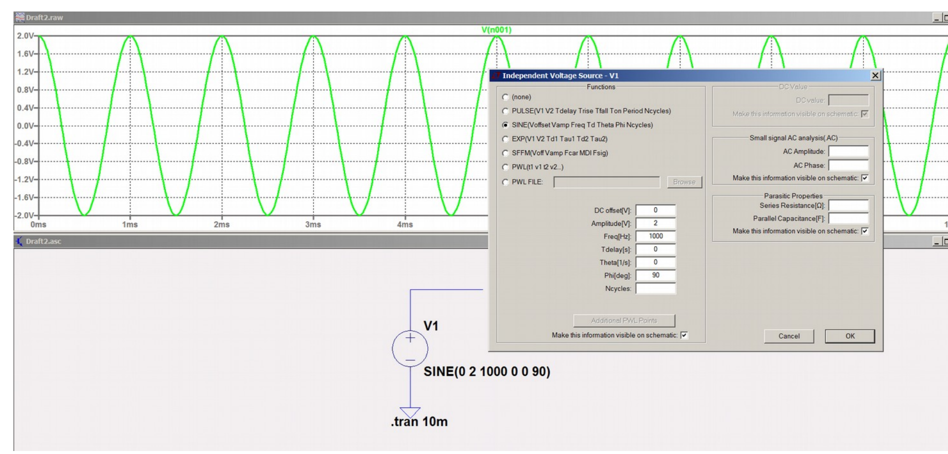
Gegeben:



Gesucht:

1. Formeln von $u_1(t)$ und $u_2(t)$ (als Kosinus-Funktionen)

2. $\underline{\hat{U}_1}$, $\underline{\hat{U}_2}$, $\underline{\hat{U}}$; $u(t)$: Formeln und Skizzen



Achtung: Sinusquellen in cos-Quelle umrechnen

Verständnisfragen Kapitel 2/3

1) Nennen Sie zwei Beispiele für periodische Spannungsverläufe

2) Zeichnen Sie das Oszilloskopbild das Sie sehen wenn Sie die Spannung an einer Steckdose messen. Beschriften Sie Achsen, zeichnen Sie den Scheitelwert und die Periodendauer ein.

3) Wie berechnet sich der arithmetische Mittelwert einer periodischen Funktion?

4) Wie groß ist der arithmetische Mittelwert in Ihrem Oszilloskopbild in Frage 2)?

5) Wie lautet der Zusammenhang zwischen Spitzen- und Effektivwert einer sinusförmigen Größe?

6) Warum ist der Messwert eines billigen Multimeters ohne true RMS Messung nur bei Sinusförmigen Spannungsverläufen hinreichend genau?

7) Leiten Sie sich die Beziehung zwischen Bogen- und Winkelmaß her.

8) Skizzieren Sie eine Cosinusfunktion mit einer negativen und positiven Phasenverschiebung von 45°. Wählen Sie dazu eine beliebige Frequenz. Beschriften Sie die Zeitachse und den ersten Nulldurchgang.

Bearbeiten Sie die Übungsaufgaben (PDF Dokumente siehe Moodle)

Aufgabe Ü2-1: Kosinus-Spannung

Gegeben: $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi)$

$\hat{u} = 1V \qquad f = 25\,kHz \qquad \varphi = -63{,}4°$

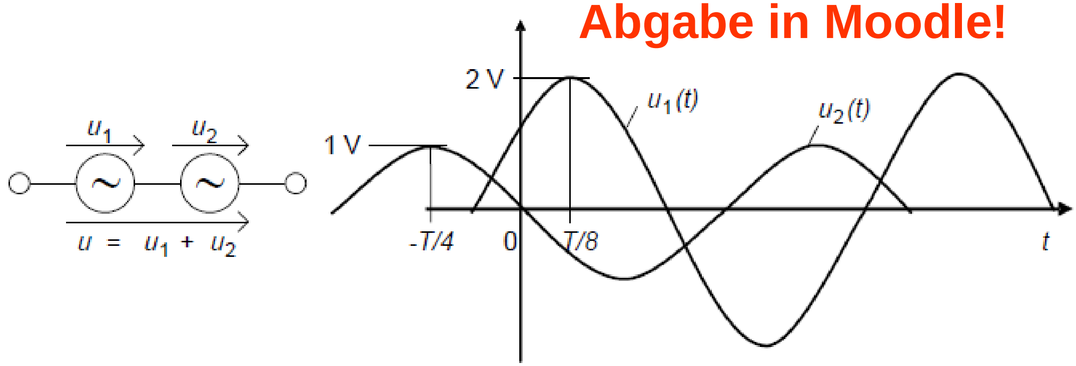
Gesucht:

1. Periodendauer T ; Kreisfrequenz ω ; Winkel φ im Bogenmaß (rad)
2. Zeitliche Lage t_0 des Nulldurchgangs, der dem Ursprung am nächsten liegt.
3. Zeitliche Lage t_{max} des Maximums
4. Skizze von $u(t)$

Lösung Ü2-1
1) T = 0,04ms = 40µs
Kreisfrequenz = 157079,61/s
Winkel -1,11rad
2) -2,96µs
3) 7,04µs

Aufgabe Ü2-2: Überlagerung von Spannungen

Abgabe in Moodle!



Geben Sie an:

1. Formeln von $u_1(t)$ und $u_2(t)$ (als Kosinus-Funktionen)
2. Formeln und Zeigerdiagramme von $\underline{\hat{U}}_1$, $\underline{\hat{U}}_2$, $\underline{\hat{U}}$
3. Formel und Skizze von $u(t)$

Lösung Ü2-2
Rechnung und Simulation, Abgabe in Moodle