

6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.0. Einführung

Tiefpassfilter:

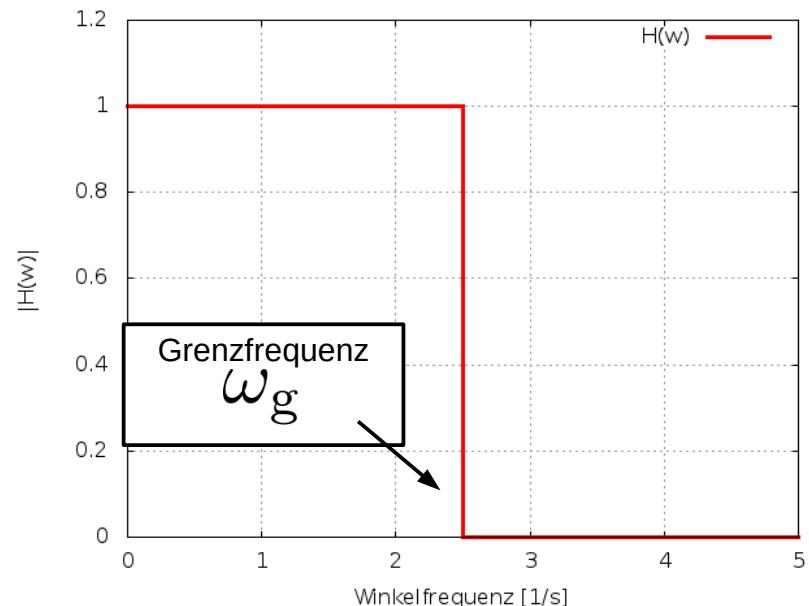
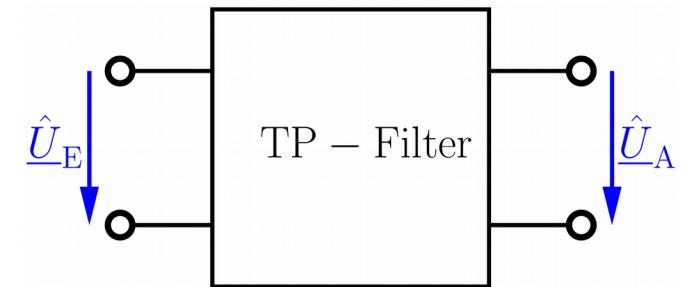
Die Aufgabe eines Tiefpassfilters ist es tiefe Frequenzen durchzulassen und hohe Frequenzen zu sperren.

Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\hat{U}_A(\omega)}{\hat{U}_E(\omega)}$$

Idealer TP-Filter:

Unterhalb der **Grenzfrequenz** ω_g kommt das Signal ungedämpft durch und oberhalb der Grenzfrequenz sperrt der TP-Filter.
Bei **realen Filtern** spricht man von der **Grenzfrequenz**, wenn das „Spannungssignal“ auf 70,7% bzw. das Leistungssignal auf 50% des Maximalwertes abgefallen ist.

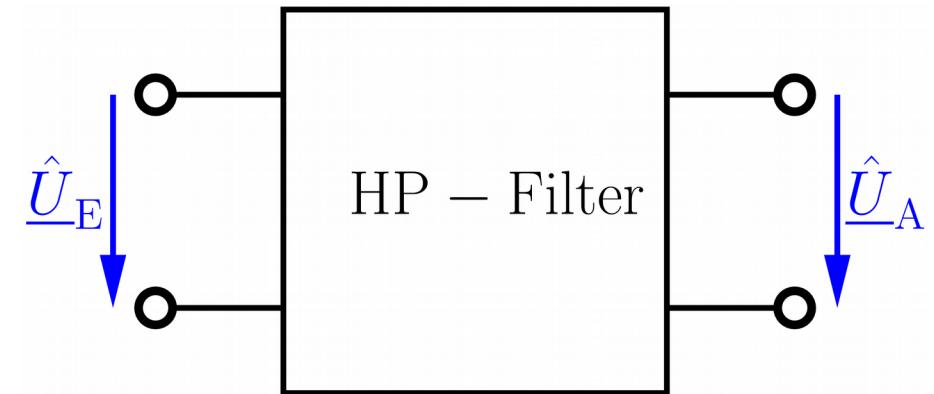


6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.0. Einführung

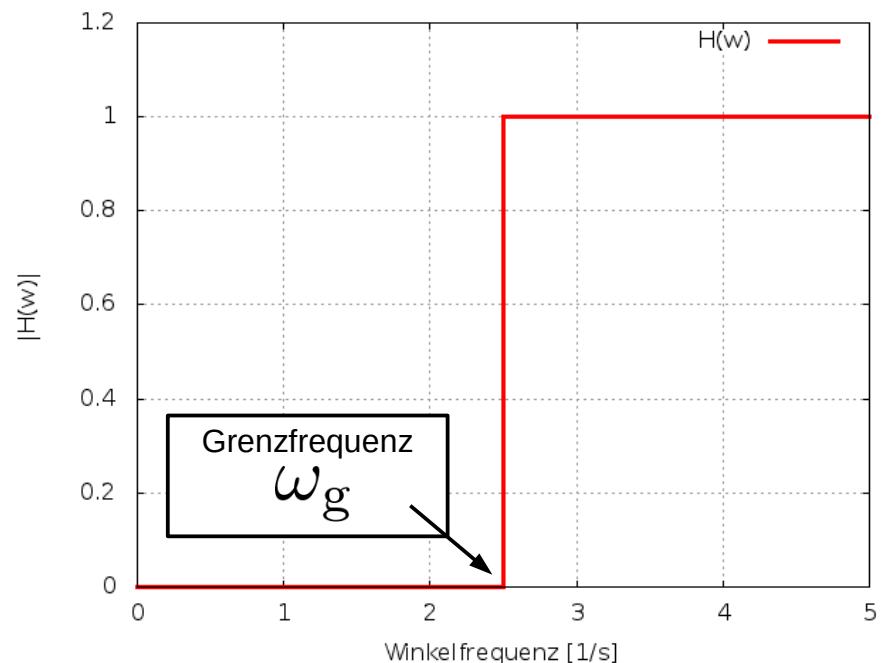
Hochpassfilter:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\hat{U}_A(\omega)}{\hat{U}_E(\omega)}$$



Idealer HP-Filter:

Unterhalb der **Grenzfrequenz** ω_g wird das Signal gesperrt und oberhalb der Grenzfrequenz kommt das Signal ungedämpft durch den HP-Filter. Bei **realen Filtern** spricht man von der **Grenzfrequenz**, wenn das „Spannungssignal“ auf 70,7% bzw. das Leistungssignal auf 50% des Maximalwertes angestiegen ist.



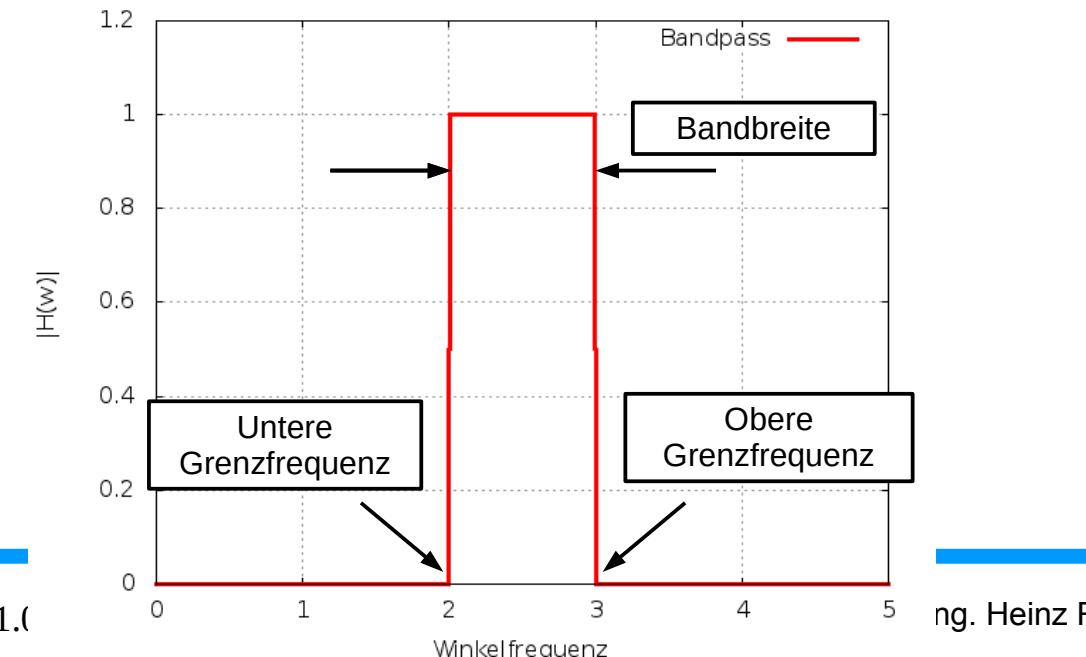
6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.0. Einführung

Bandpass und Bandsperre:

Idealer Bandpass:

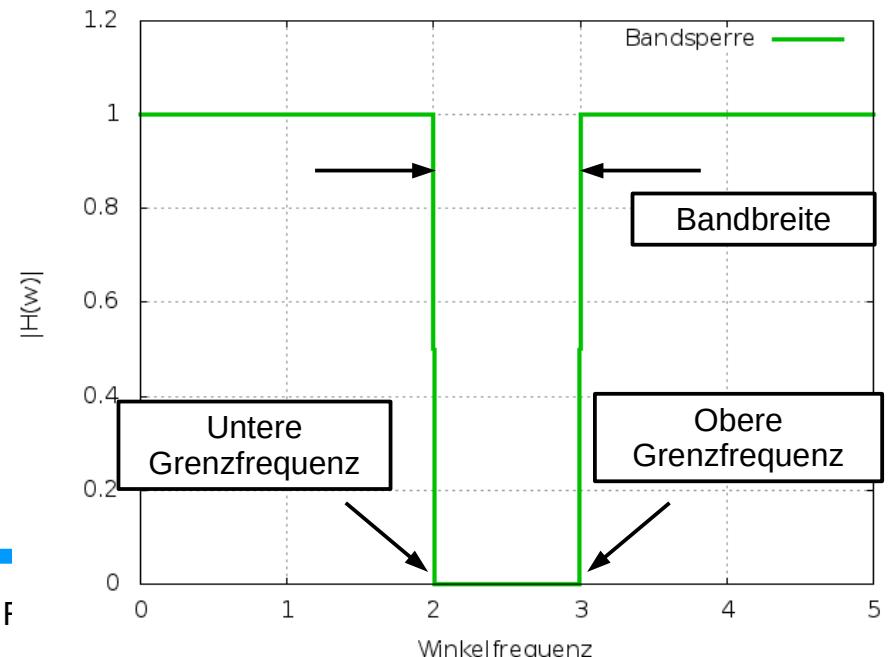
Innerhalb der **Bandbreite** kommt das Signal ungedämpft durch und außerhalb der Bandbreite sperrt der Bandpass-Filter. Bei **realen Filtern** spricht man von der **Grenzfrequenz**, wenn das „Spannungssignal“ auf 70,7% bzw. das Leistungssignal auf 50% des Maximalwertes angestiegen ist.



Ideale Bandsperre:

Innerhalb der **Bandbreite** wird das Signal gesperrt und außerhalb der Bandbreite kommt das Signal ungedämpft durch den Filter.

Bei **realen Filtern** spricht man von der **Grenzfrequenz**, wenn das „Spannungssignal“ auf 70,7% bzw. das Leistungssignal auf 50% des Maximalwertes abgefallen ist.

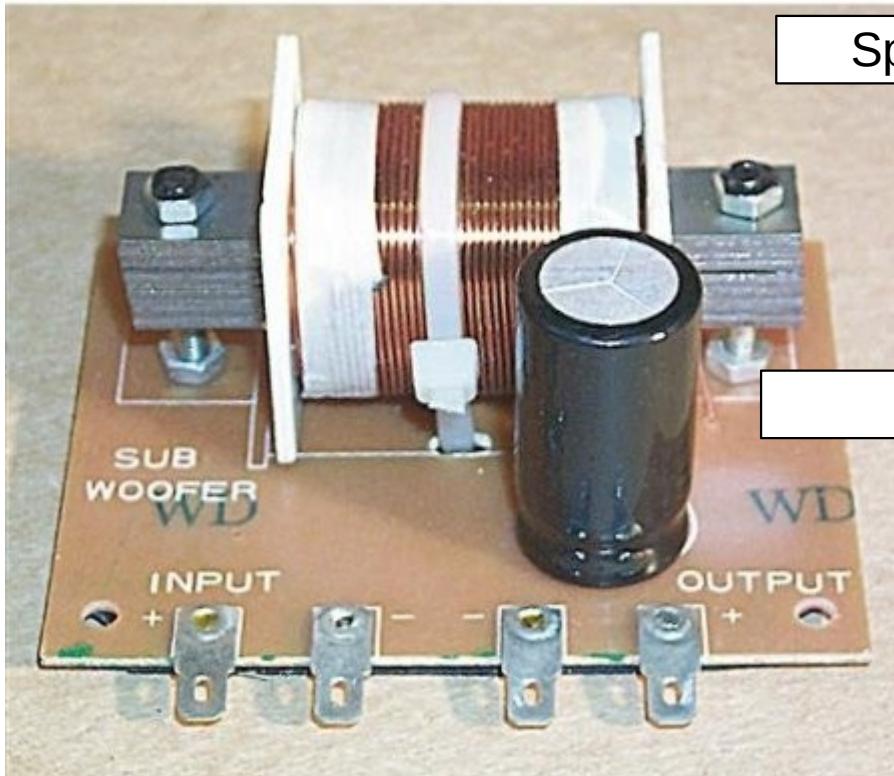


6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.0. Einführung

Tiefpassfilter:

Frequenzweiche:



Bem.: stellt TP 2. Ordnung dar mit den Lautsprechern als Lastwiderstand.

6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.1. RC-Tiefpassfilter (1. Ordnung)

Frequenzgang:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\hat{U}_A(\omega)}{\hat{U}_E(\omega)} \implies \hat{U}_A(\omega) = \underline{H}(\omega) \cdot \hat{U}_E(\omega)$$

Der Frequenzgang ist der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangssignal bezüglich der Amplitude und der Phase.

Anwendungen:

Höhen, Mitten, Tiefen Einstellung
(Hochpassfilter, Bandpass, Tiefpassfilter,



Anwendungen:



Funktechnik: Frequenzselektive Filter (Bandpass)

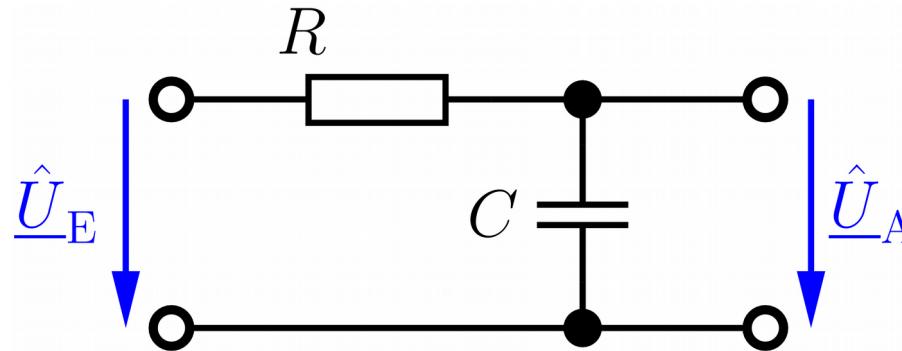
Anwendungen:



Tontechnik: z.B. Eliminieren der „Brummschleife“ 50Hz brummen durch eine Bandsperre.

6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.1. RC-Tiefpassfilter (1. Ordnung)



Komplexer unbelasteter Spannungsteiler an R und C:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_E} = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.1. RC-Tiefpassfilter (1. Ordnung)

Grenzwinkelfrequenz:

$$\omega_g = \frac{1}{RC}$$

Bei dieser Winkelfrequenz ist der Realteil und der Imaginärteil im Nenner der Übertragungsfunktion jeweils eins $\rightarrow |H(\omega)|=0,7071$.

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}$$

Betrag der
Übertragungsfunktion:

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}$$

Winkel der
Übertragungsfunktion:

$$\varphi_H(\omega) = - \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)$$

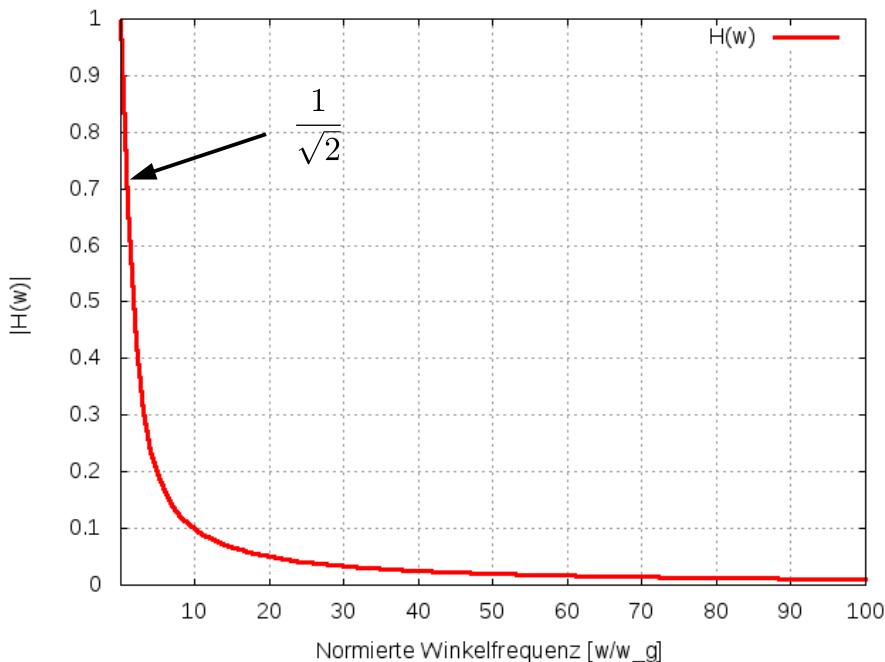
6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.1. RC-Tiefpassfilter (1. Ordnung)

Amplitudengang:

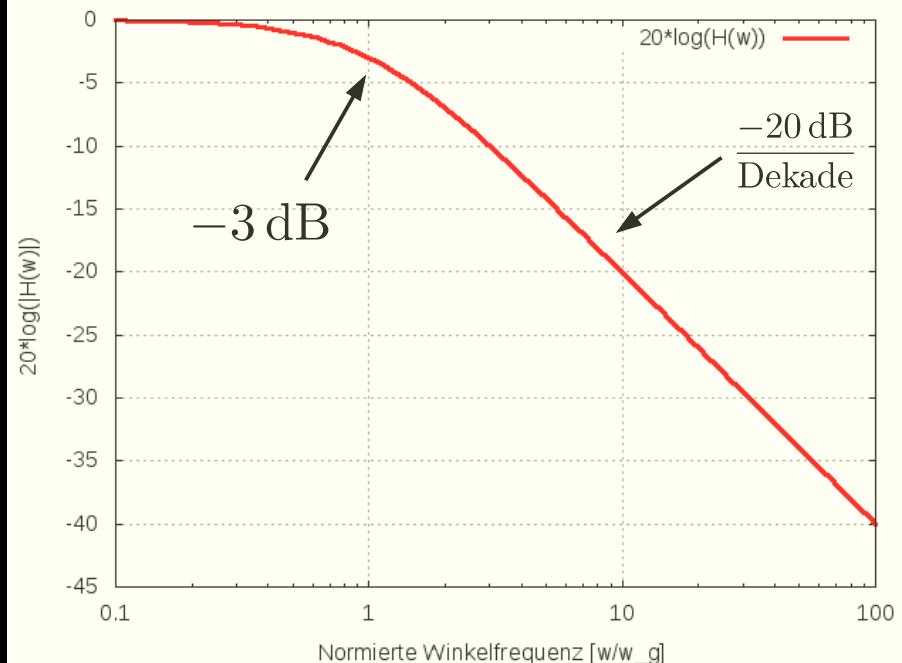
$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}$$

ω	0	$\omega_g/2$	ω_g	$2\omega_g$	∞
$ \underline{H} $	1	0,89	0,71	0,45	0



**Bode-Diagramm:
Amplitudengang**

$$|\underline{H}(\omega)| = 20 \cdot \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} \text{ dB}$$

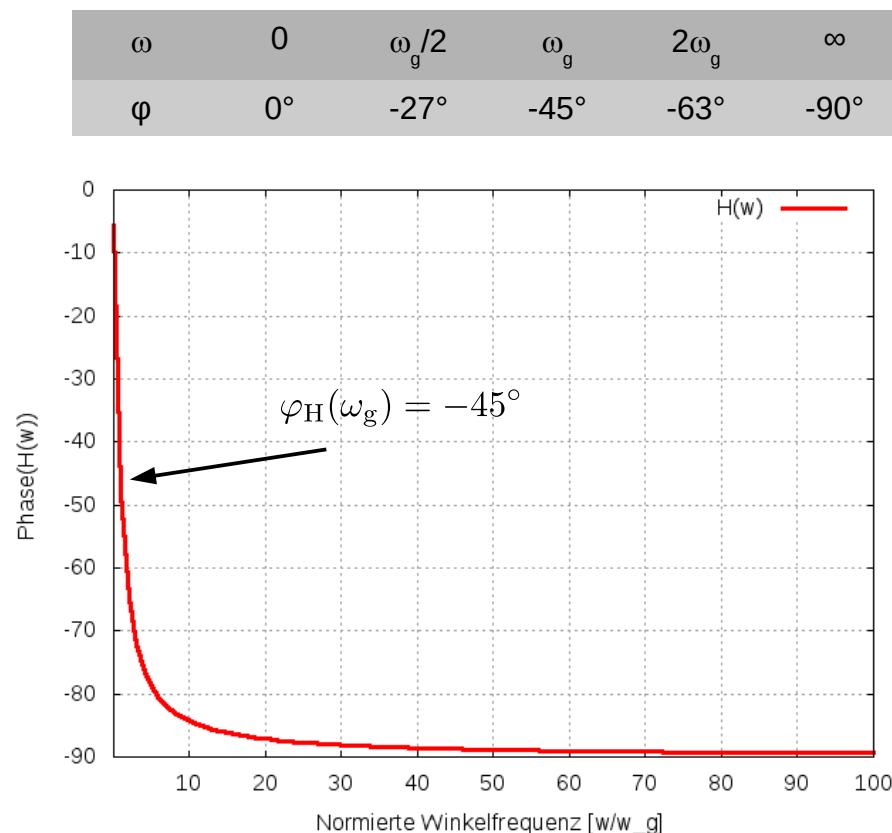


Bode-Diagramm: die Frequenzachse wird logarithmisch dargestellt, der Betrag der komplexen Übertragungsfunktion in **Dezibel**, die Phase wird linear aufgetragen

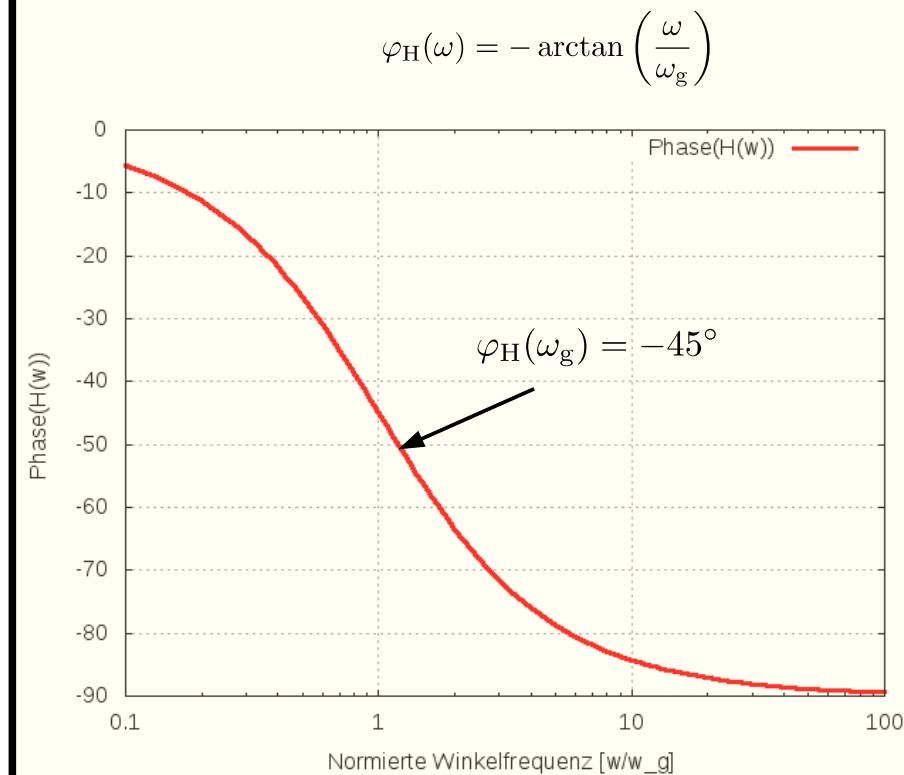
6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.1. RC-Tiefpassfilter (1. Ordnung)

Phasengang: $\varphi_H(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)$



Bode-Diagramm:
Phasengang

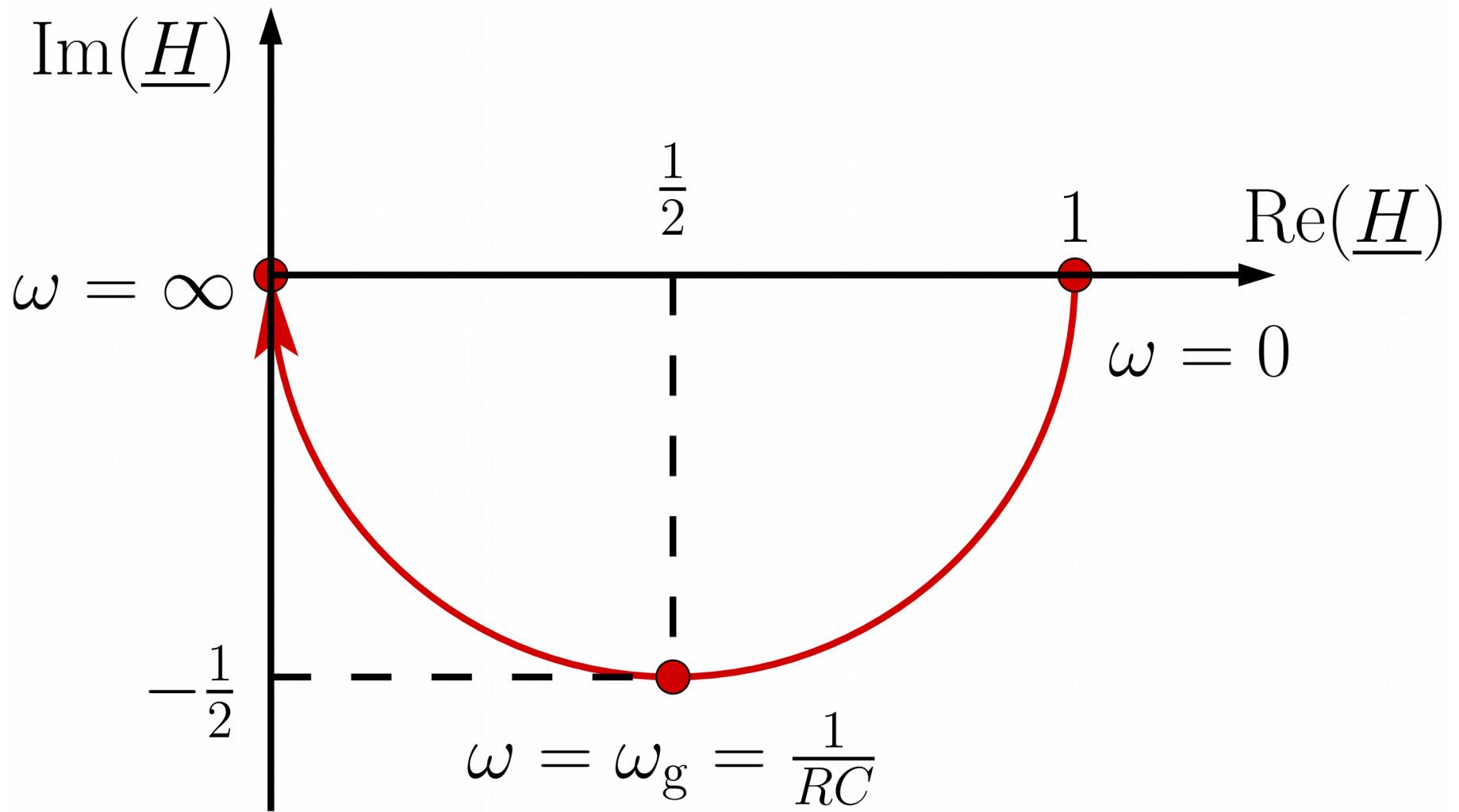


Soll eine Übertragungsfunktion über einen großen Frequenzbereich und hohen Dynamikbereich betrachtet werden, bietet sich das Bode-Diagramm an.

6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.1. RC-Tiefpassfilter (1. Ordnung)

Ortskurve:



6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.1. RC-Tiefpassfilter (1. Ordnung)

Eigenschaften:

Bei der Grenzfrequenz $\omega_g = 1/RC$ hat der Frequenzgang des RC-Tiefpasses den Wert:

$$\underline{H} = \frac{1}{1+j} = 0,5 - j \cdot 0,5 = 0,707e^{-j45^\circ}$$

mit dem Betrag:

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und dem Winkel:

$$\varphi_H = -45^\circ$$

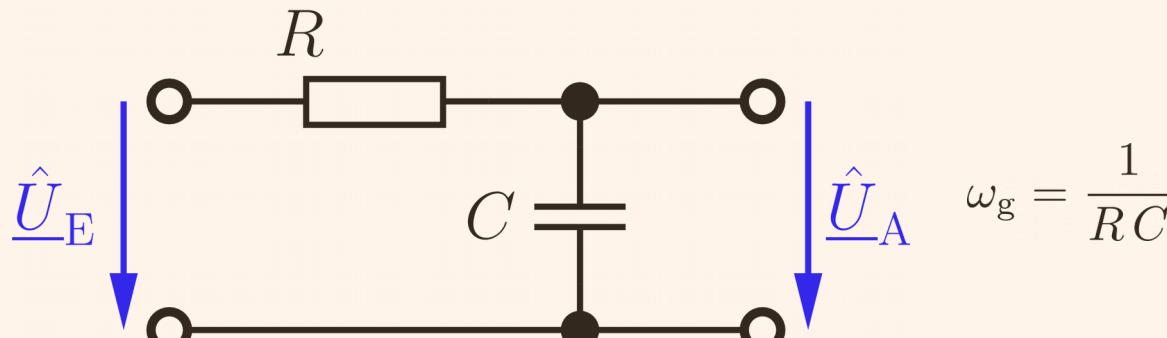
Die Ausgangsspannung hat also bei der Grenzkreisfrequenz noch 71% der Amplitude der Eingangsspannung und ist gegenüber dieser um 45° verzögert.

6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

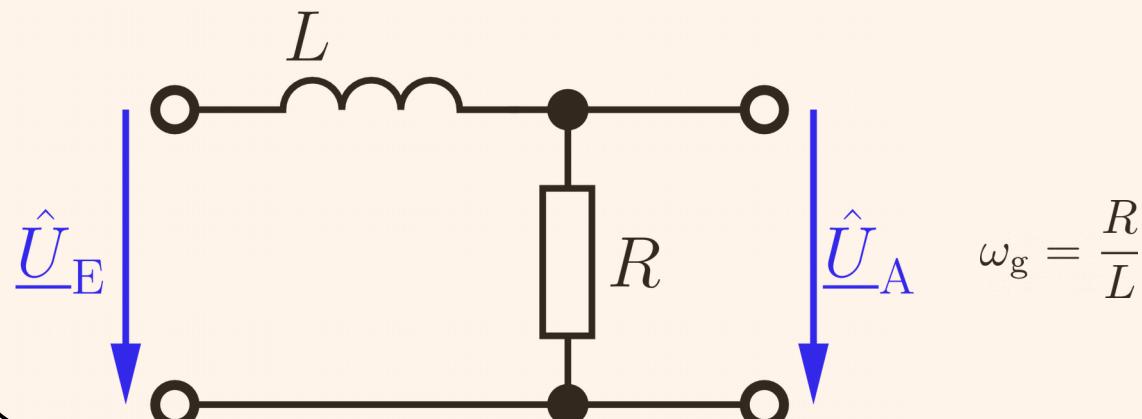
6.1. RC-Tiefpassfilter (1. Ordnung)

Übersicht RC- und RL-Tiefpass:

RC-Tiefpass (1. Ordnung):



RL-Tiefpass (1. Ordnung):



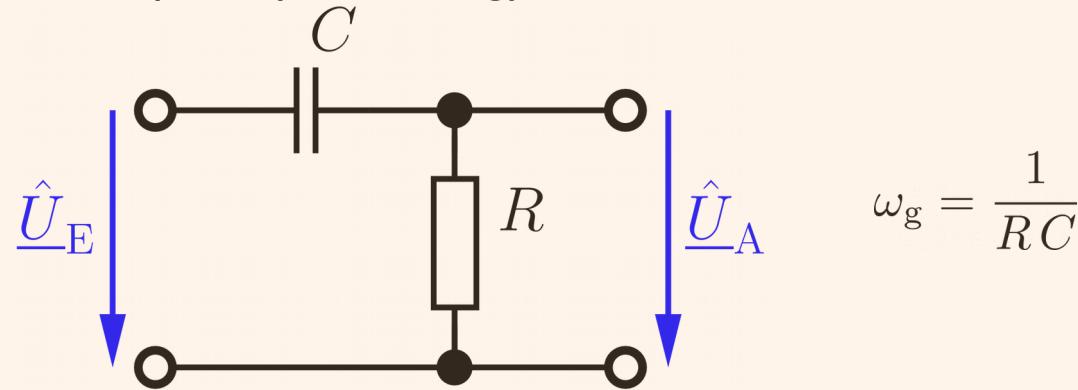
$$\omega_g = \frac{1}{RC}$$

$$H(\omega) = \frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_E} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}$$

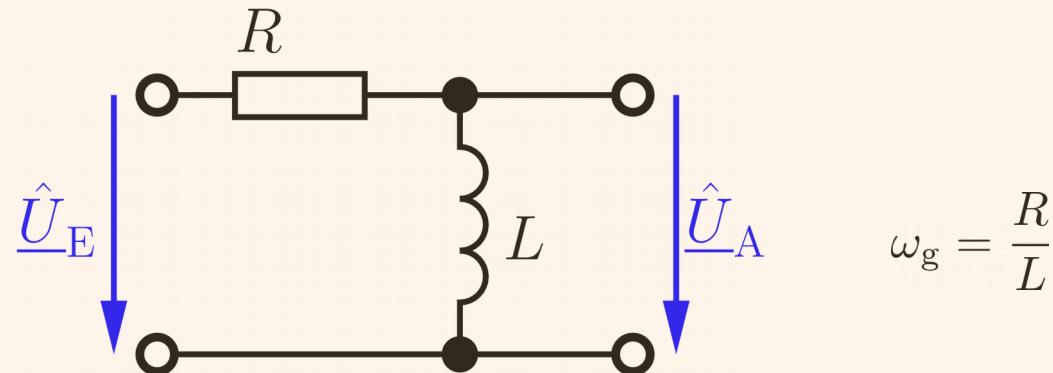
6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.2. RC- und RL-Hochpassfilter (1. Ordnung)

RC-Hochpass (1. Ordnung):



RL-Hochpass (1. Ordnung):



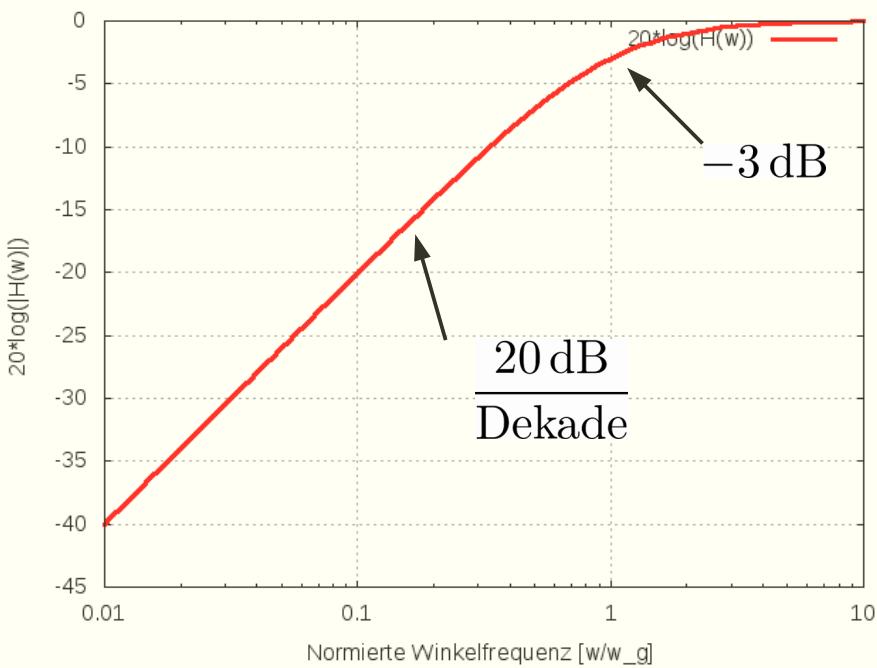
$$H(\omega) = \frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_E} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_g}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}$$

6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.2. RC- und RL-Hochpassfilter (1. Ordnung)

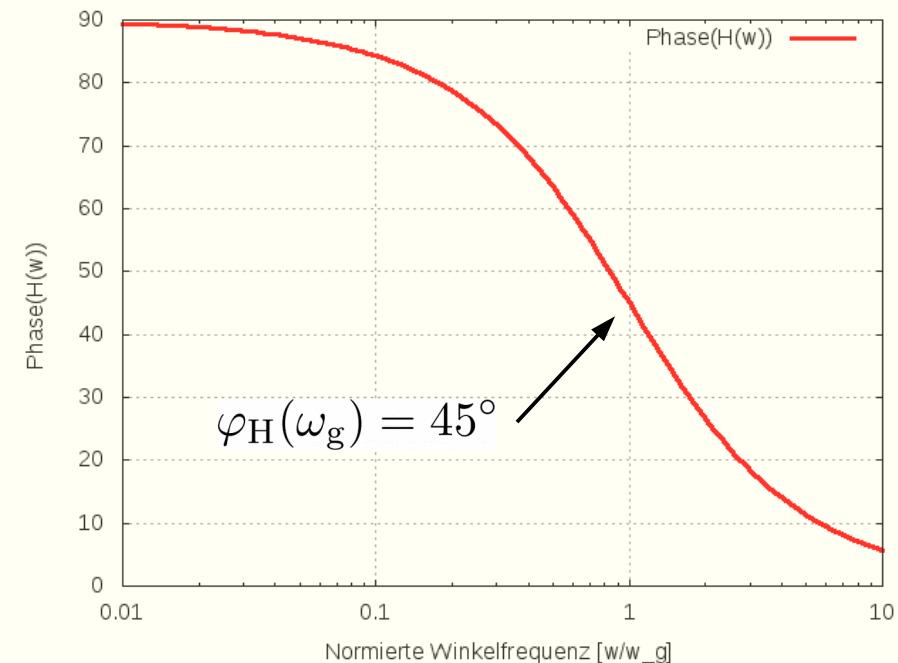
Amplitudengang im Bode-Diagramm:

$$|H(\omega)| = 20 \cdot \log_{10} \frac{\frac{\omega}{\omega_g}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} \text{ dB}$$



Phasengang im Bode-Diagramm:

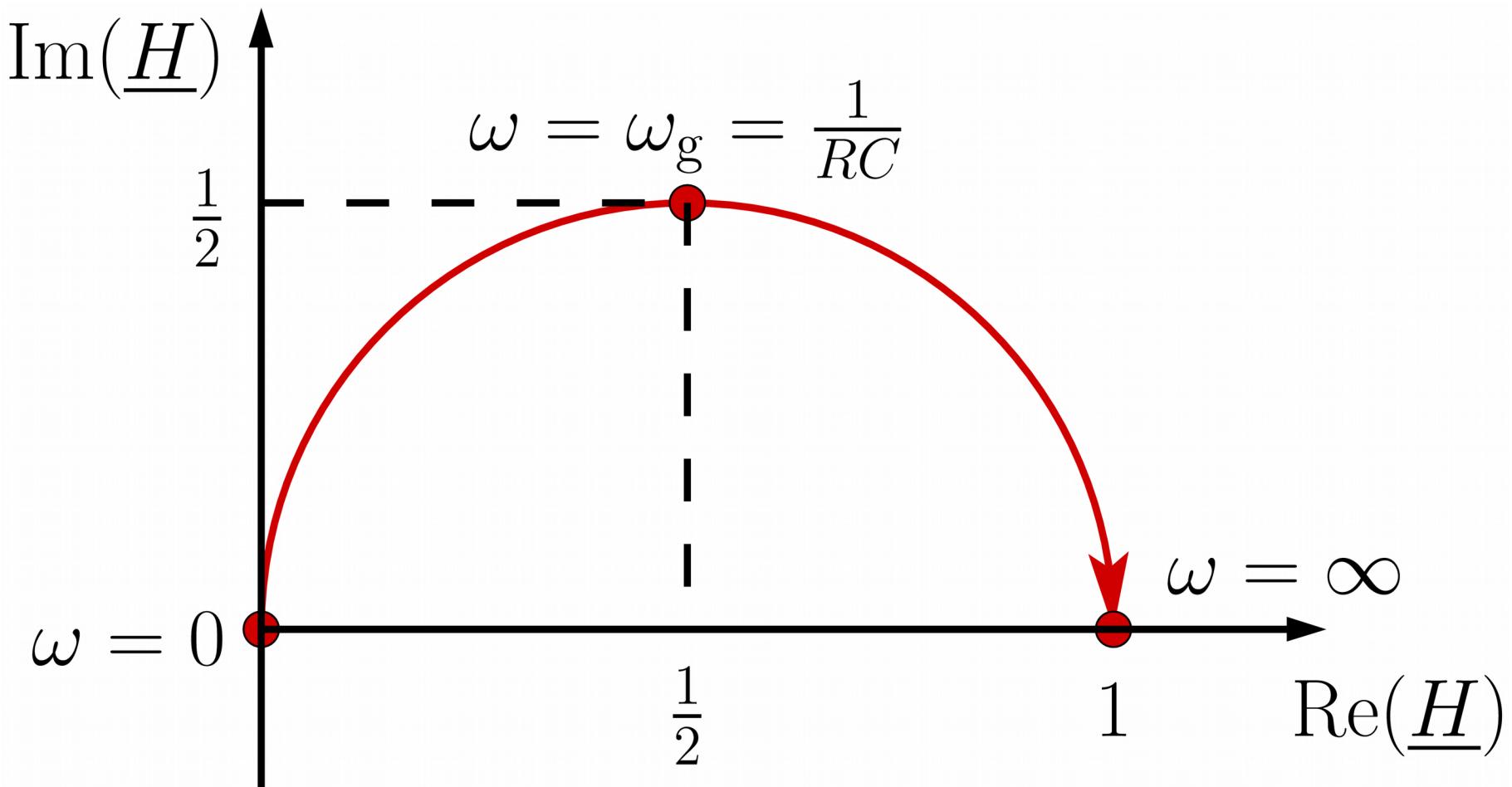
$$\varphi_H = 90^\circ - \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)$$



6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

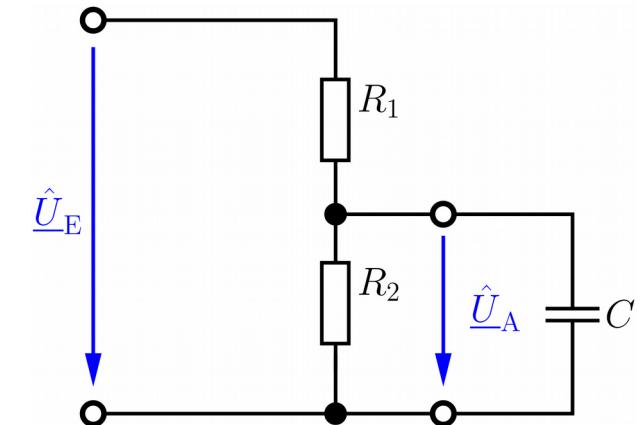
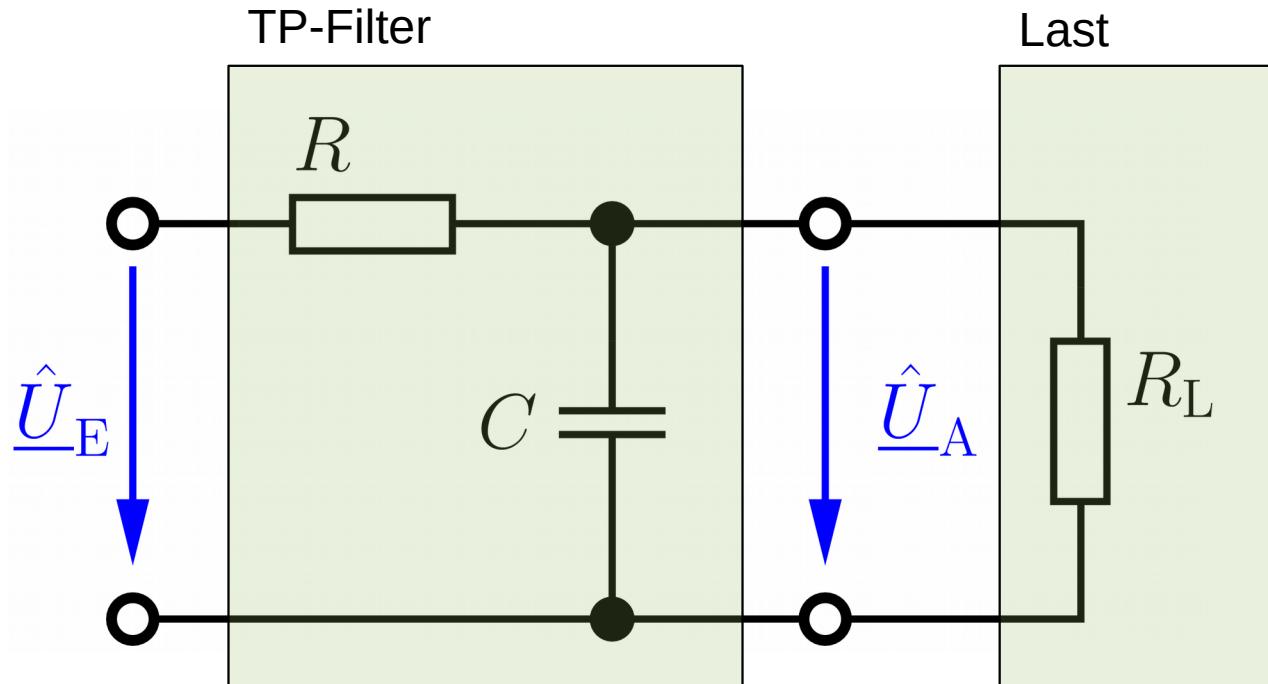
6.2. RC- und RL-Hochpassfilter (1. Ordnung)

Ortskurve:



6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.3. Belasteter RC-Tiefpass



Die Schaltung des kapazitiv belasteter Spannungsteilers verhält sich analog.

6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.3. Belasteter RC-Tiefpass

Frequenzgang:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_E} = \frac{R_L || \underline{Z}_C}{R + R_L || \underline{Z}_C} = \frac{R_L}{R + R_L} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \underbrace{\frac{R_L}{R + R_L} RC}_{1/\omega_g}}$$

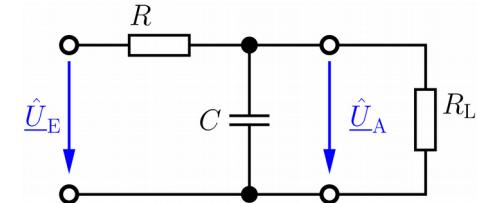
$$\implies \underline{H}(\omega) = v_0 \cdot \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}}$$

Mit dem
Gleichspannungsverhältnis:

$$v_0 = \frac{R_L}{R + R_L} = \underline{H}(\omega = 0)$$

und der Grenzkreisfrequenz:

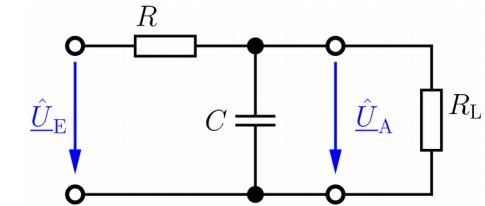
$$\omega_g = \frac{1}{RC} \cdot \frac{R + R_L}{R_L} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{v_0}$$



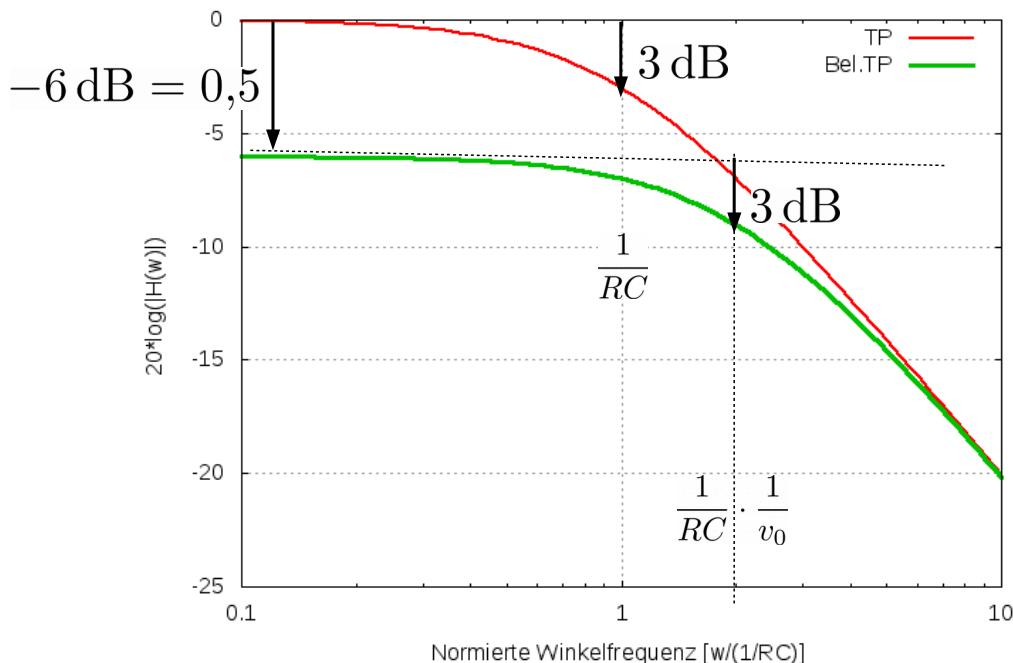
6. RC- und RL- Tiefpässe und Hochpässe

6.3. Belasteter RC-Tiefpass

Frequenzgang:



$$\underline{H}(\omega) = v_0 \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}$$

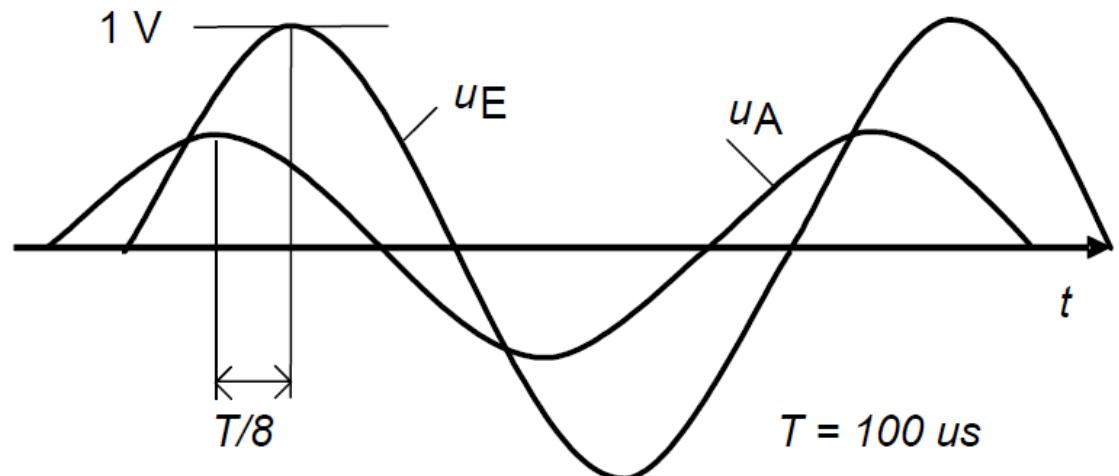
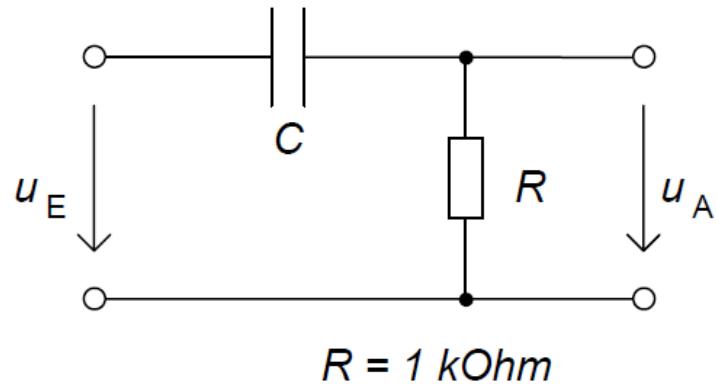


Hier:

$$\begin{aligned}v_0 &= 0,5 \\ \omega_g &= 2 \cdot \frac{1}{RC} \\ |\underline{H}| &= \frac{0,5}{\sqrt{2}} = 0,35\end{aligned}$$

Aufgabe 6-1: RC-Hochpass

Gegeben:

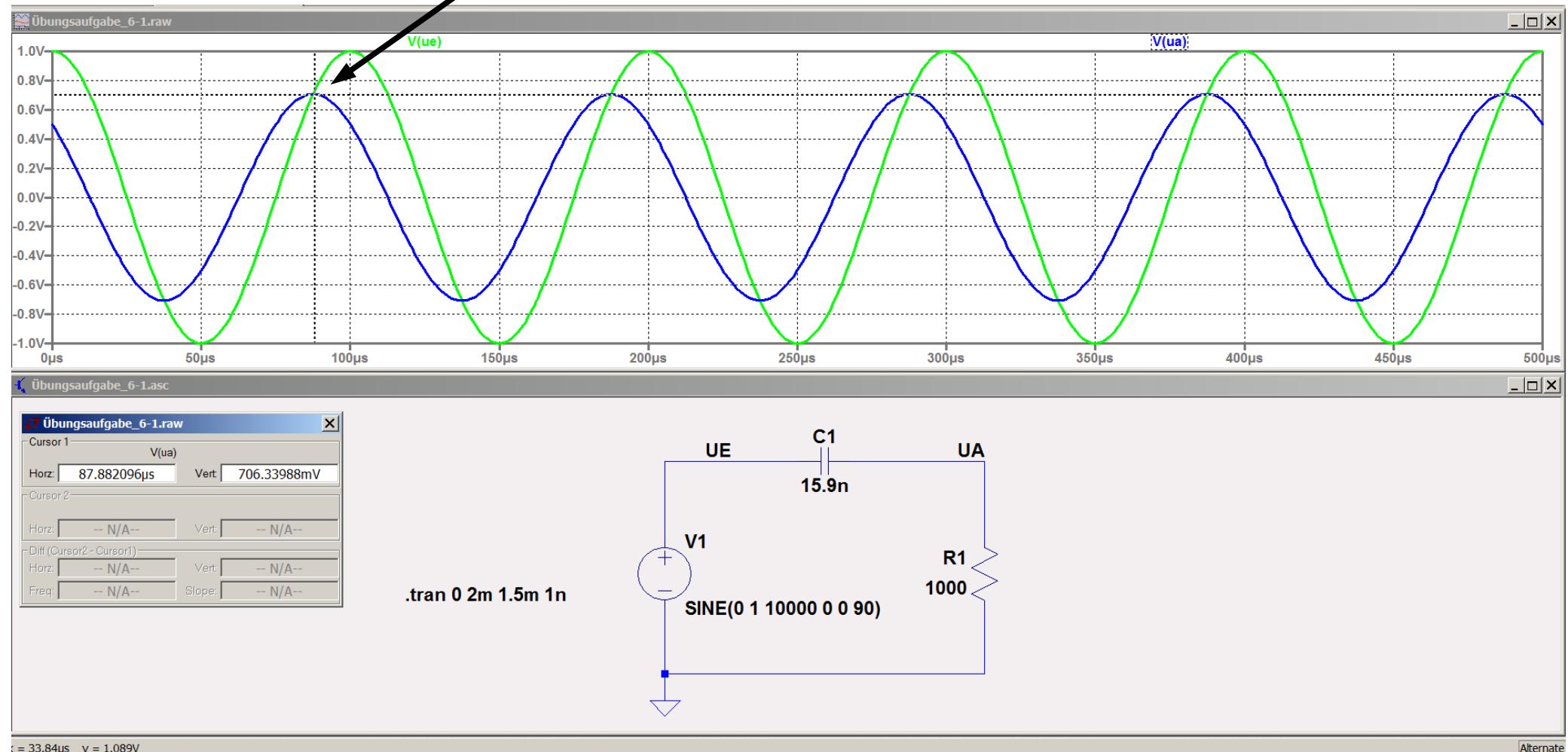


Gesucht:

1. φ_{uE} , φ_{uA} , f , ω_g , RC , C
2. für $f = 20 \text{ kHz}$: H , \hat{u}_A , φ_{uA}

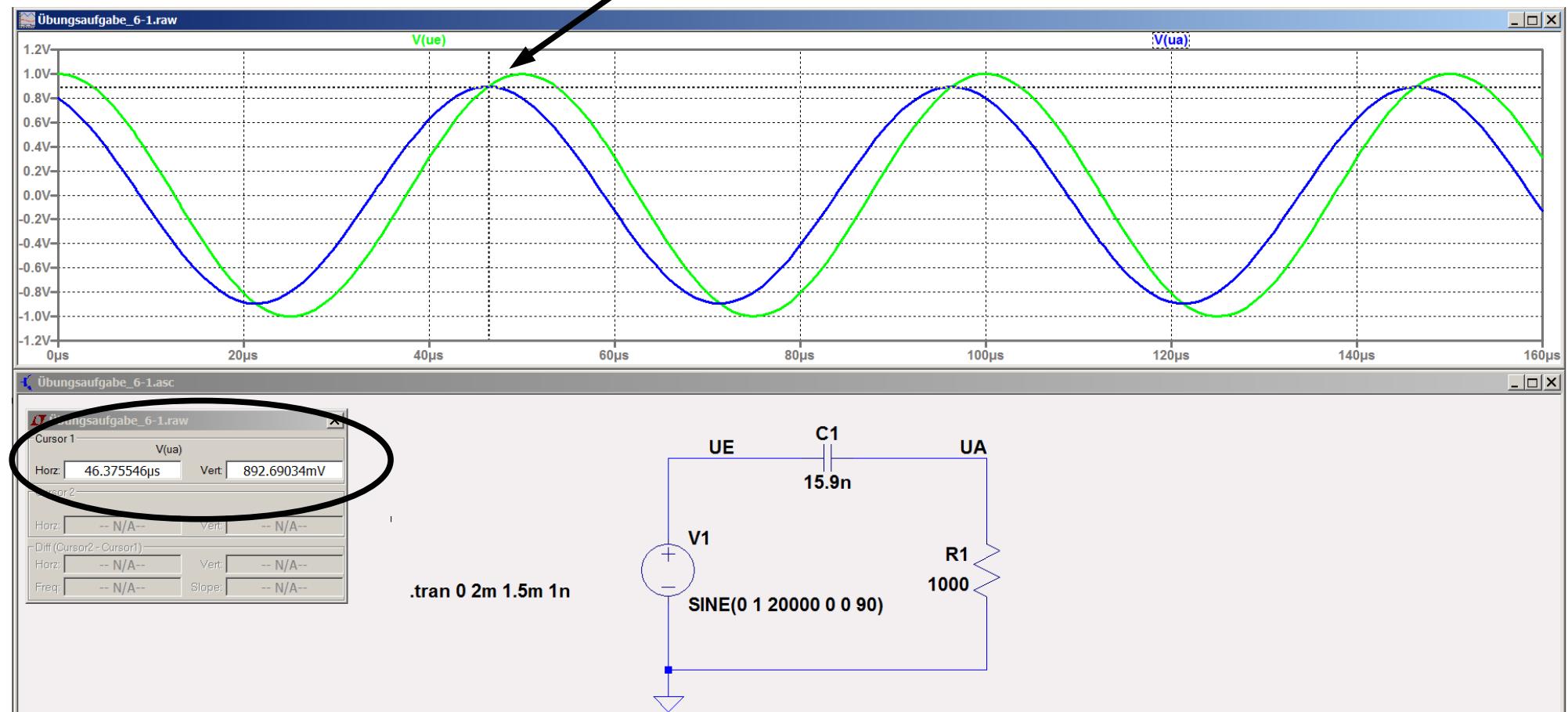
Zu Aufgabe 6-1, 1.

Phasenverschiebung + Amplitude ablesbar



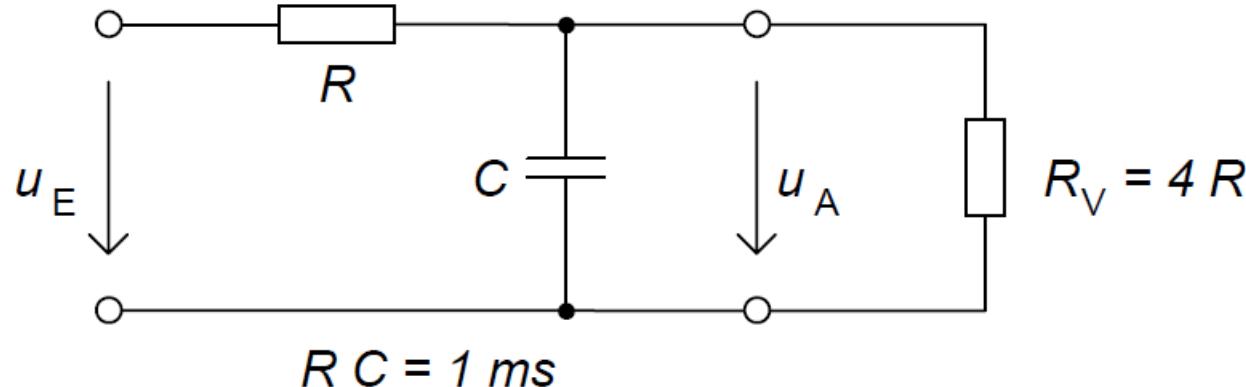
Zu Aufgabe 6-1, 2.

Phasenverschiebung + Amplitude ablesbar



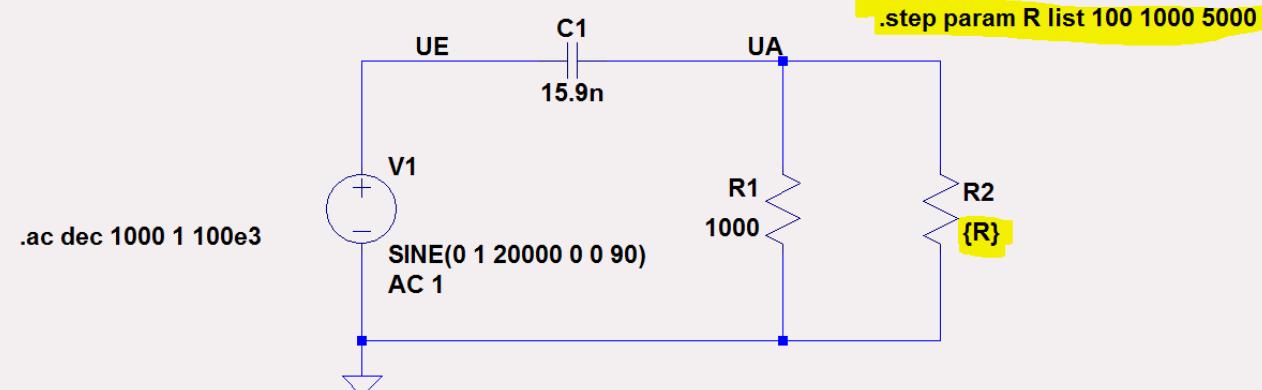
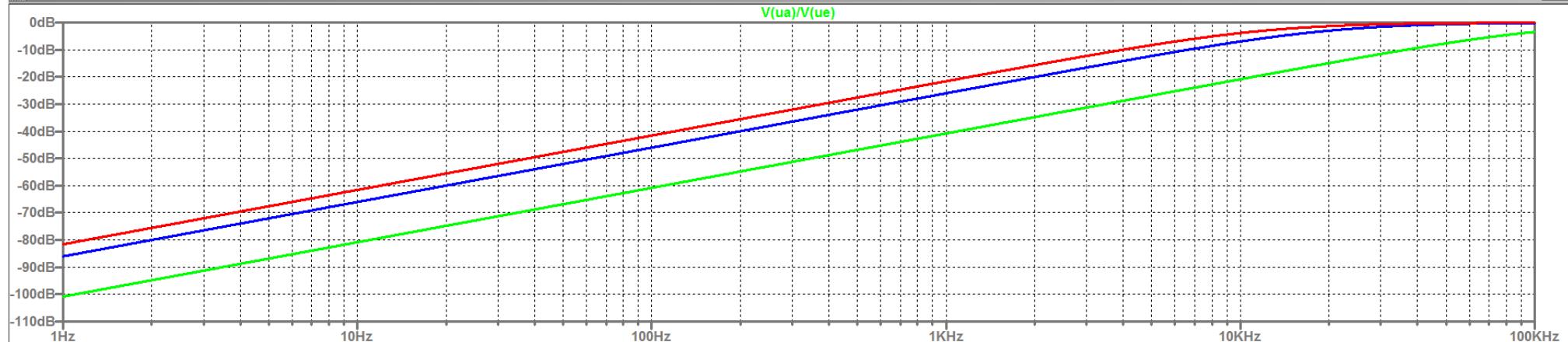
Aufgabe 6-2: Belasteter Tiefpass

Gegeben:



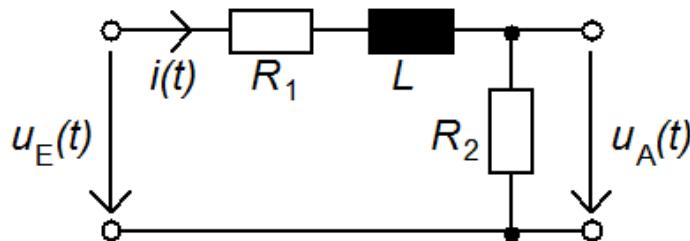
Gesucht:

1. v_0 , $\frac{1}{RC}$, ω_g , $|H|$: jeweils bei $\omega = 0$, $\frac{1}{RC}$, ω_g , ∞
2. Skizze von $|H(\omega)|$
3. Um wieviel Prozent ist ω_g größer als die Grenzfrequenz im unbelasteten Tiefpass?
4. Erstellen Sie eine Simulation und führen Sie einen Parametersweep mit R_V durch.
Befehl: .step param R_V list Wert1 Wert2 Wert3 Wertn



Beispiel für einen Parametersweep / Hochpass

Aufgabe 3



$$R_1 = 1 \text{ Ohm}$$

$$R_2 = 10 \text{ Ohm}$$

$$L = 1 \text{ mH}$$

$$u_E(t) = 120 \text{ V} \cos(\omega t)$$

Teil 1: Betrachtung als Zweipol

3.1 Formel der Impedanz $\underline{Z} = \frac{\hat{U}_E}{\hat{I}}$ kartesisch und exponentiell

3.2 Formel der Admittanz $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ kartesisch und exponentiell

3.3 Zahlenwert der Kennkreisfrequenz ω_k von \underline{Z} und \underline{Y}

3.4 Ortskurven von \underline{Z} und \underline{Y}

Teil 2: Betrachtung als Vierpol

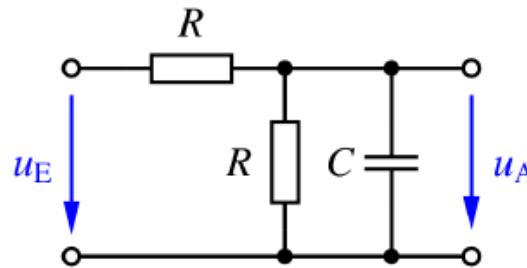
3.5 Formel des Frequenzgangs $\underline{H} = \frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_E}$

3.6 Zahlenwert der Kennkreisfrequenz ω_k von \underline{H}

3.7 Zahlenwert der Amplitude \hat{u}_A für $\omega = \omega_k$

Aufgabe 1 (24 Punkte)

Gegeben sei folgende Schaltung:



- Die Schaltung ist für niedrige Frequenzen ($f \rightarrow 0\text{Hz}$) und für hohe Frequenzen ($f \rightarrow \infty\text{Hz}$) in vereinfachter Form zu skizzieren. Wie groß ist in beiden Fällen die Impedanz Z_{ges} der Schaltung? Um was für eine Art von Filter handelt es sich?
- Die Formel für die Admittanz Y_P und die Impedanz Z_P der Parallelschaltung von R und C ist anzugeben. Skizzieren Sie die Ortskurve von Y_P und Z_P .
- Die Impedanz der Gesamtschaltung Z_{ges} ist anzugeben.
- Geben Sie die Formel für den Frequenzgang $H = \hat{U}_A / \hat{U}_E$ mittels Betrag und Phase an.
- Nehmen Sie nun an, dass $R = 10\Omega$ und $C = 10\mu\text{F}$ sind. Wie lautet die Ausgangsspannung $u_A(t)$, falls Sie an den Eingang folgende Spannung anlegen: $u_E(t) = 1\text{V} \cdot \cos(10\text{kHz} \cdot t + 30^\circ)$?

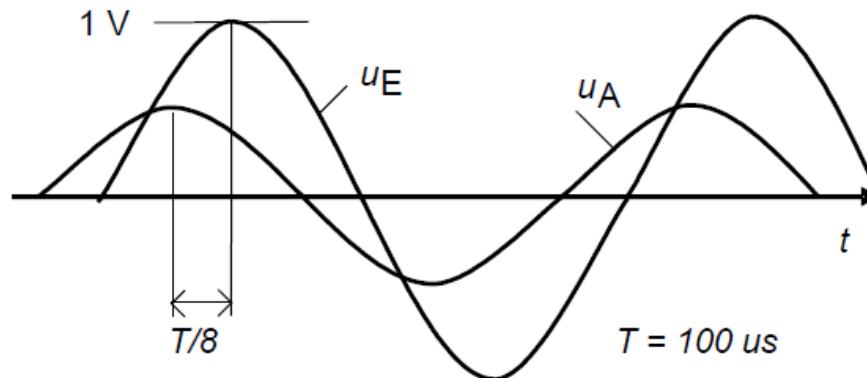
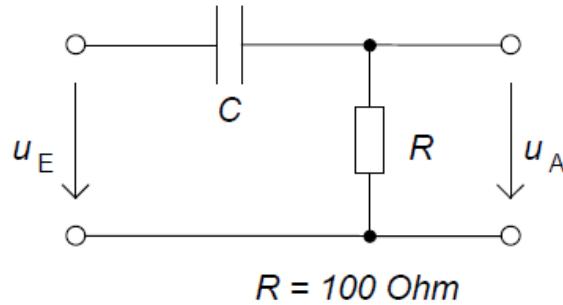
Verständnisfragen Kapitel 6

- 1) Erklären Sie die Funktion eines Hoch- und eines Tiefpassfilters. Zeichnen Sie die Übertragungsfunktion. Welche Bedingung gilt für die Grenzfrequenz.
- 2) Erklären Sie die Funktion eines Bandpass und einer Bandsperre.
- 3) Nennen Sie für jede Filterschaltung eine typische Anwendung.
- 4) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm für einen Tiefpass und Hochpass erster Ordnung.
- 5) Zeichnen Sie die Schaltungen (je 2x) für einen Tiefpass und Hochpass erster Ordnung. Überlegen Sie sich dazu wie die Elemente (R, C bzw. L) angeordnet sein müssen.
- 6) Leiten Sie die Formel für den belasteten Tiefpass her.
- 7) Zeichnen Sie die Übertragungsstrecke für einen Tastkopf 10:1 (Beschriften Sie die parasitären Elemente)
- 8) Warum muss ein Tastkopf überhaupt abgeglichen werden?



Aufgabe Ü6-1: RC-Hochpass

Gegeben:



Gesucht:

1. φ_{uE} , φ_{uA} , f , ω_g , RC , C
2. für $f = 20 \text{ kHz}$: H , \hat{u}_A , φ_{uA}

Lösung:

- 1) 0° , 45° ; 10kHz ; $0,16\mu\text{F}$
- 2) $0,89\text{V}$; $26,6^\circ$

Bestätigen Sie Ihre Rechnung mit Hilfe einer LT-Spice Simulation