

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.1 Begriffe

Zeitfunktionen geben die Abhängigkeit einer Größe (z.B. Spannung, Strom, Leistung,...) von der Zeit an

Schreibweise: $f(t) = \dots$

Beispiel:

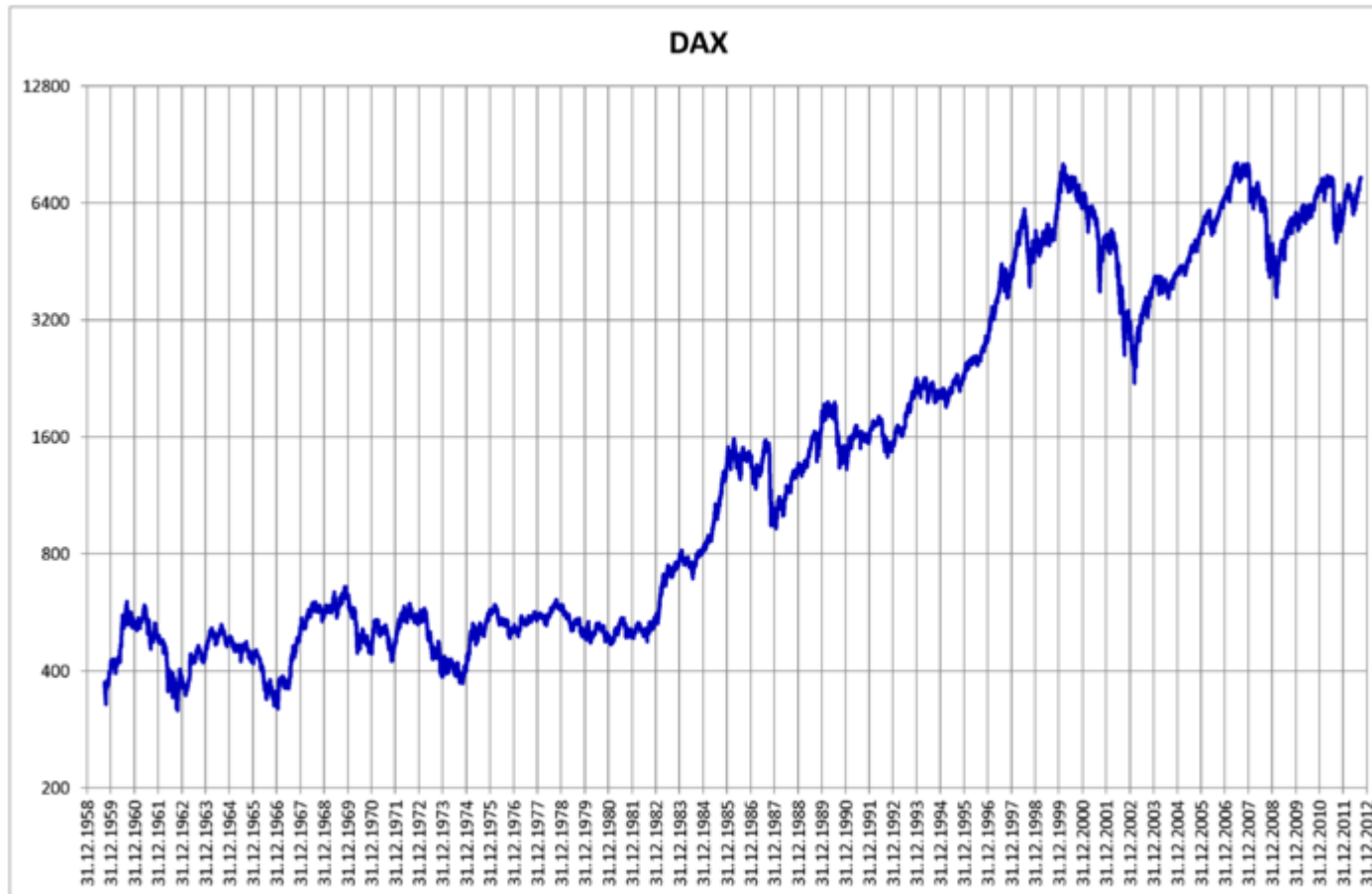
sinusförmiges Spannungssignal: $u(t) = 5 \text{ V} \cdot \sin(\omega t)$
(Kleinbuchstaben)

Man unterscheidet zwischen **nicht-periodischen** und **periodischen Zeitfunktionen**.

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.1 Begriffe

Beispiel einer **nicht-periodischen** Zeitfunktion:



DAX (Deutscher Aktien – Index)

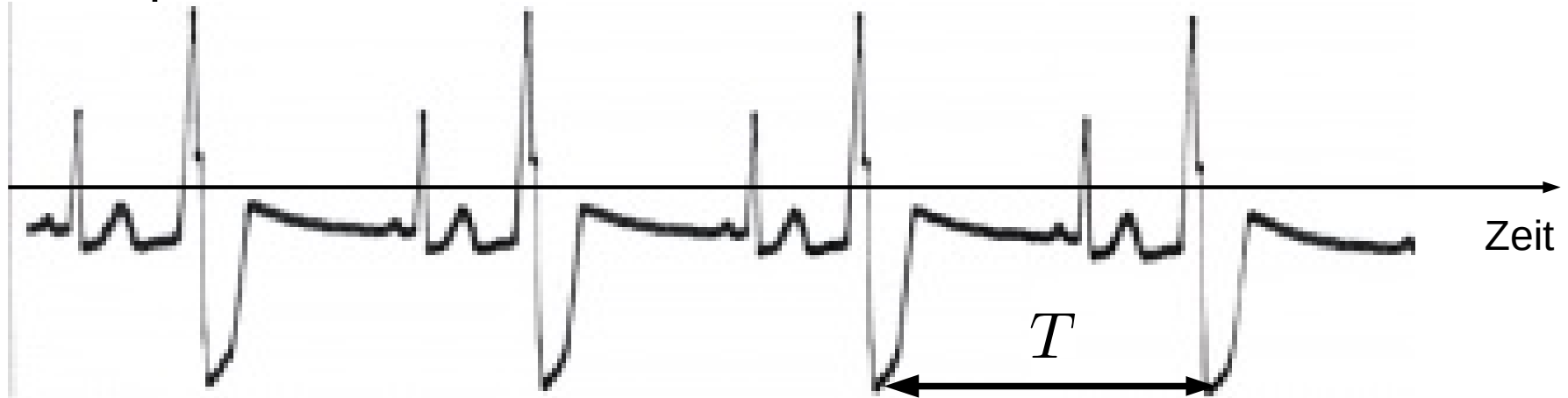
2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.1 Begriffe

Periodische Zeitfunktionen sind dadurch gekennzeichnet, dass jeweils nach Ablauf der **Periodendauer T** der gleiche Funktionswert wieder auftritt.

Es gilt: $f(t) = f(t + k \cdot T), k \in \mathbb{Z}$ $T \dots$ Periodendauer

Beispiel einer periodischen Zeitfunktion:



Im engeren Sinn ist das Elektrokardiogramm (EKG) kein periodisches Signal.

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.1 Begriffe

Scheitelwert ist der betragsmäßig größte Funktionswert einer periodischen Zeitfunktion. Gegebenenfalls wird unterschieden nach negativem und positivem Scheitelwert. (\hat{u}, \hat{i})

Spitze-Spitze-Wert (Peak-Peak-Value) ist die Differenz zwischen positivem und negativem Scheitelwert. (u_{SS}, u_{PP})

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

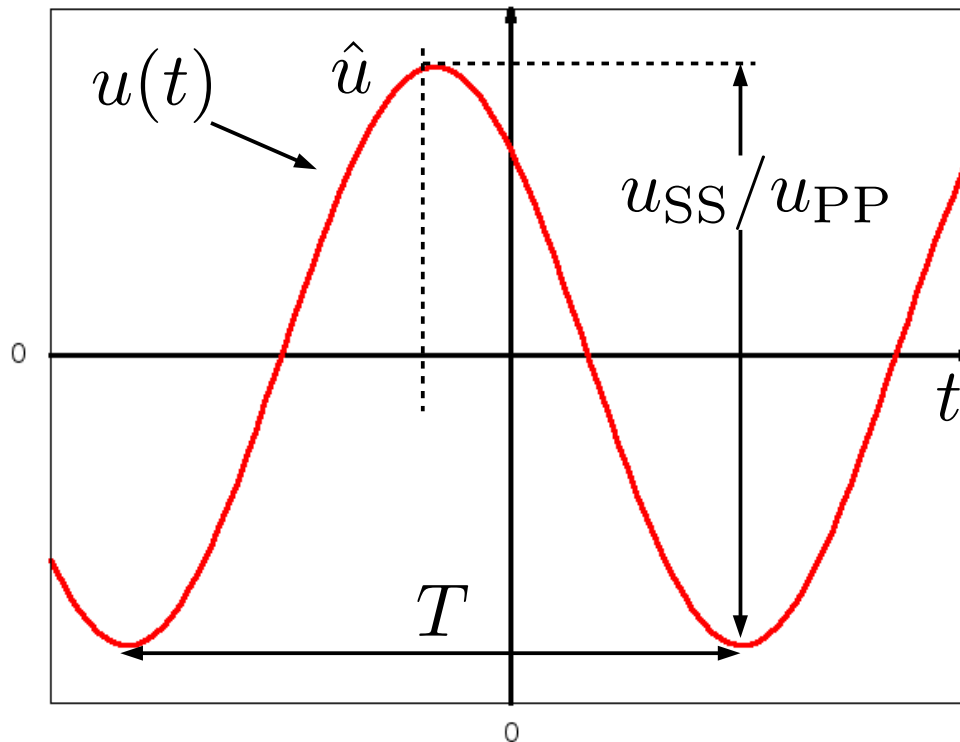
2.1 Begriffe

Wechselgrößen sind periodische Vorgänge, deren zeitlicher Mittelwert Null ist.

Mischgrößen sind periodische Vorgänge, deren zeitlicher Mittelwert über eine Periode ungleich Null ist. Sie bestehen aus einer Wechselgröße und einem Gleichanteil.

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.1 Begriffe



Das Signal ist mittelwertfrei und damit ein **Wechsel**signal.

$u(t)$... Zeitfunktion
\hat{u}	... pos. Scheitelwert
u_{PP}/u_{SS}	... Spitze – Spitze – Wert
T	... Periodendauer

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2 Messen und Berechnen von Mittelwerten

Im Folgenden werden verschiedene Mittelwerte beschrieben:

Arithmetischer Mittelwert:

(z.B. \bar{u} oder \bar{i})

Kleine Symbole mit „Oberstrich“

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_T u(t) dt$$

Gleichrichtwert (Mittelwert des Betrags):

(z.B. $|\bar{u}|$ oder $|\bar{i}|$)

Der Gleichrichtwert dient der einfachen Charakterisierung von Wechselgrößen.

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T} \cdot \int_T |u(t)| dt$$

Effektivwert:

(z.B. u_{eff} oder i_{eff})

Große Symbole bei Wechselgrößen: (z.B. U oder I)

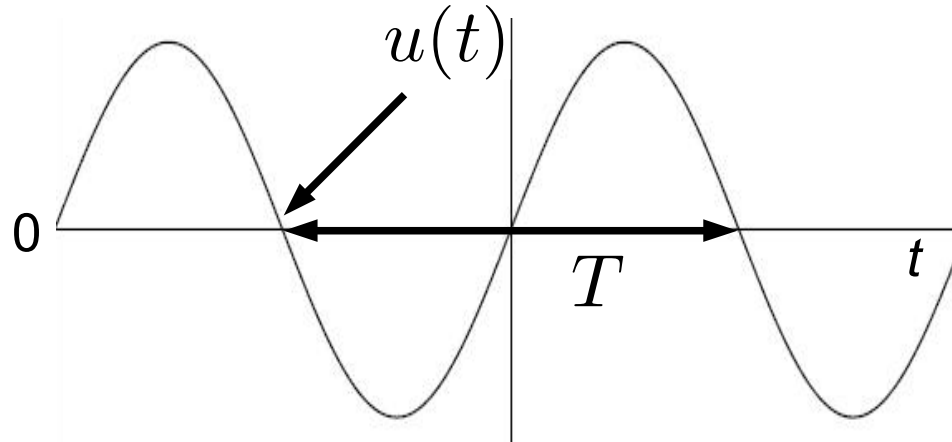
$$u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_T u(t)^2 dt}$$

Achtung: Die Schreibweisen sind genormt und deshalb **zwingend einzuhalten!**

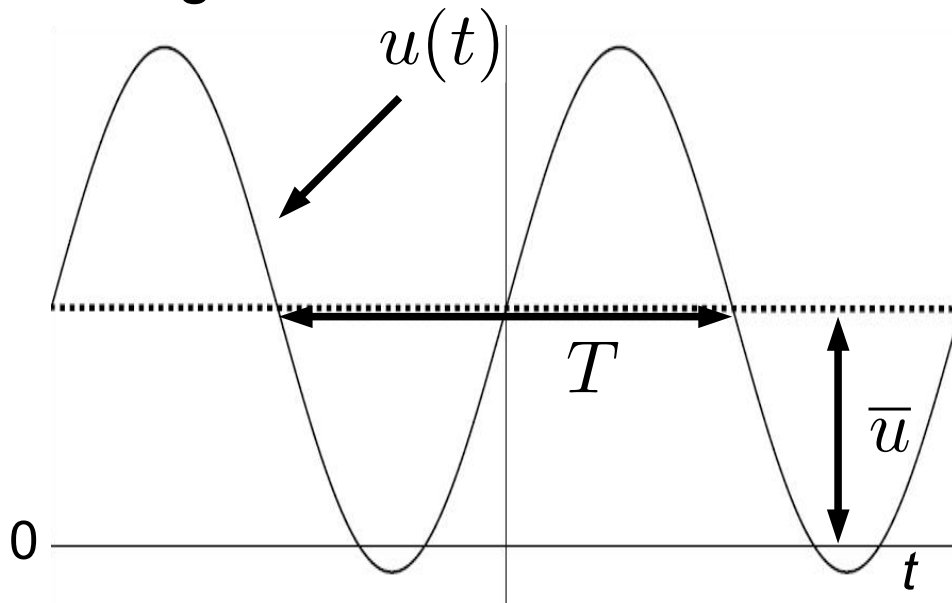
2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.1 Arithmetischer Mittelwert:

Wechselgröße:



Mischgröße:

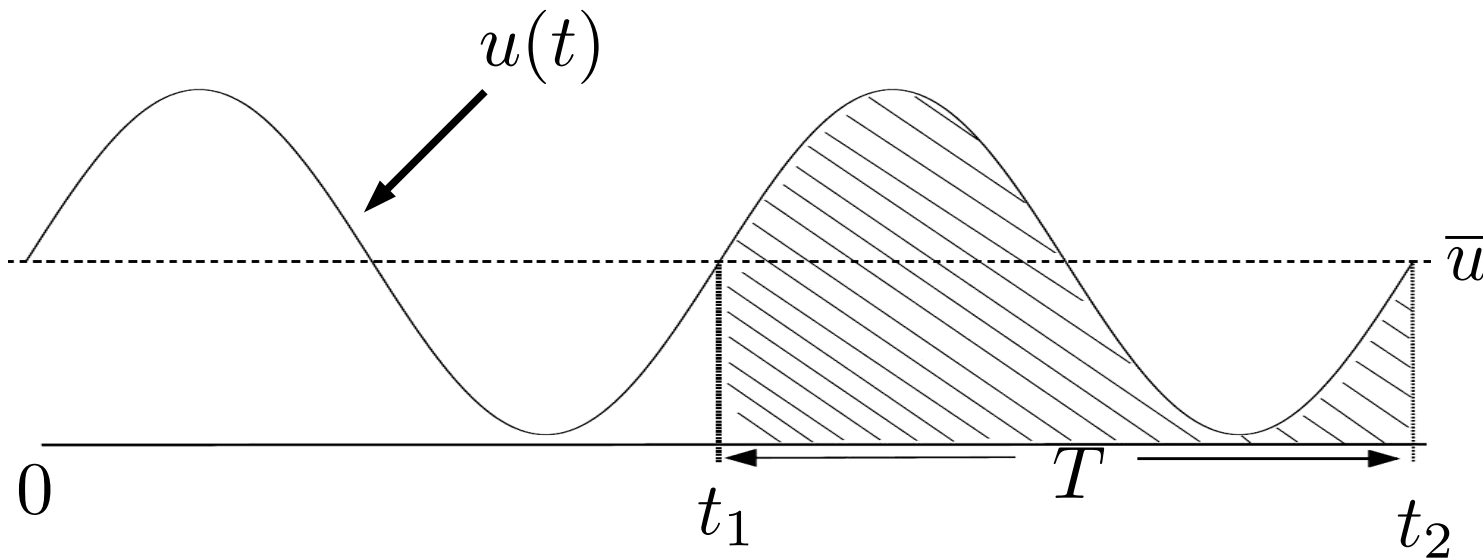


Der Mittelwert ist der Gleichanteil einer Spannung oder eines Stromes.

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.1 Arithmetischer Mittelwert:

Berechnen vom arithmetischen Mittelwert:



Die Fläche unter $u(t)$ wird ersetzt durch ein Rechteck gleicher Fläche:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} u(t) dt = T \cdot \bar{u} \longrightarrow \bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+T} u(t) dt$$

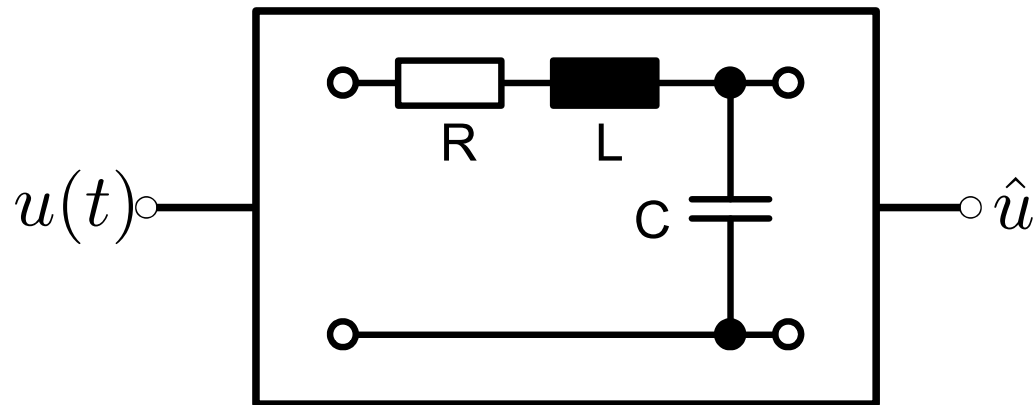
Da immer genau über eine Periode T integriert wird, verwendet man auch die vereinfachte Schreibweise:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_T u(t) dt$$

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.1 Arithmetischer Mittelwert:

Messen:
mit einem Tiefpass Filter



Tiefpass 2. Ordnung

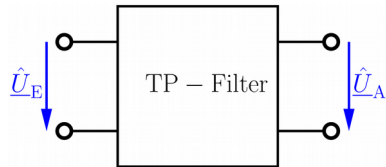
Wenn die Grenzfrequenz f_g sehr niedrig ist, d.h. $f_g \rightarrow 0$, lässt der Tiefpass nur den Gleichanteil = Mittelwert passieren.

Bemerkung:

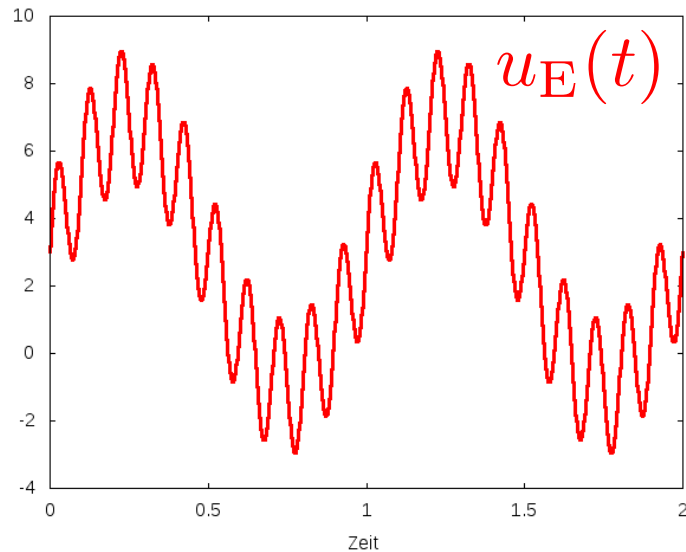
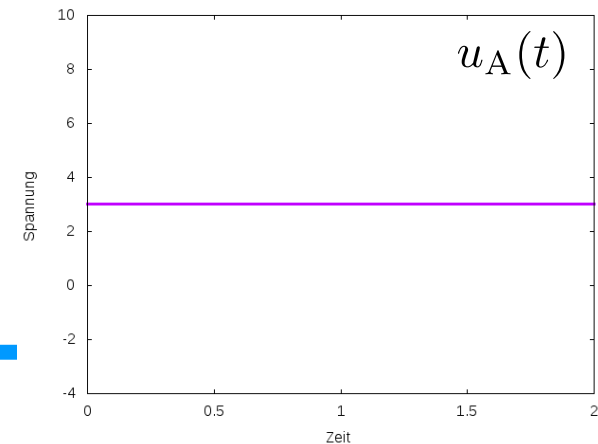
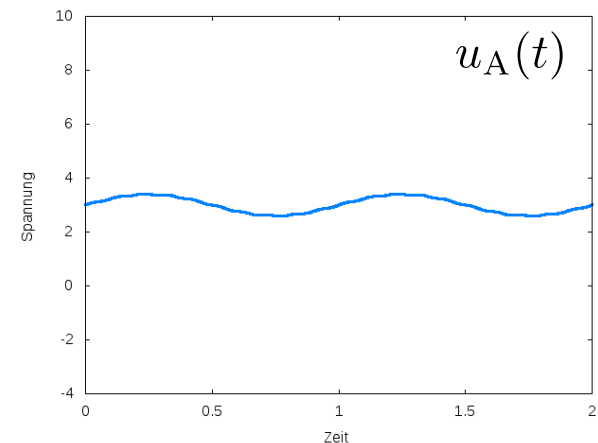
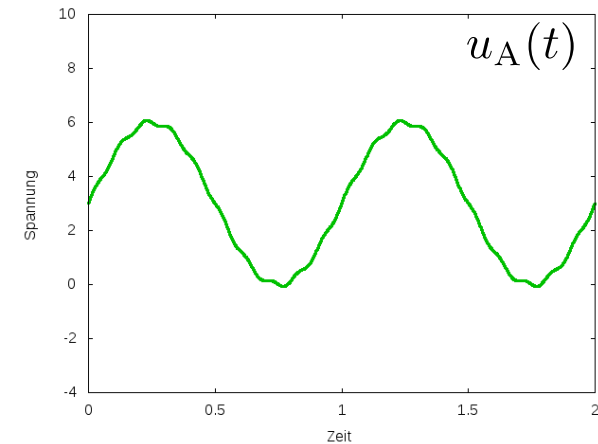
Auf die Begriffe Grenzfrequenz und Tiefpass wird in den folgenden Kapiteln näher eingegangen.

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.1 Arithmetischer Mittelwert:



TP-Filter, der nur die ganz hohen Frequenzen filtert.



TP-Filter, filtert hohe und mittlere Frequenzen.

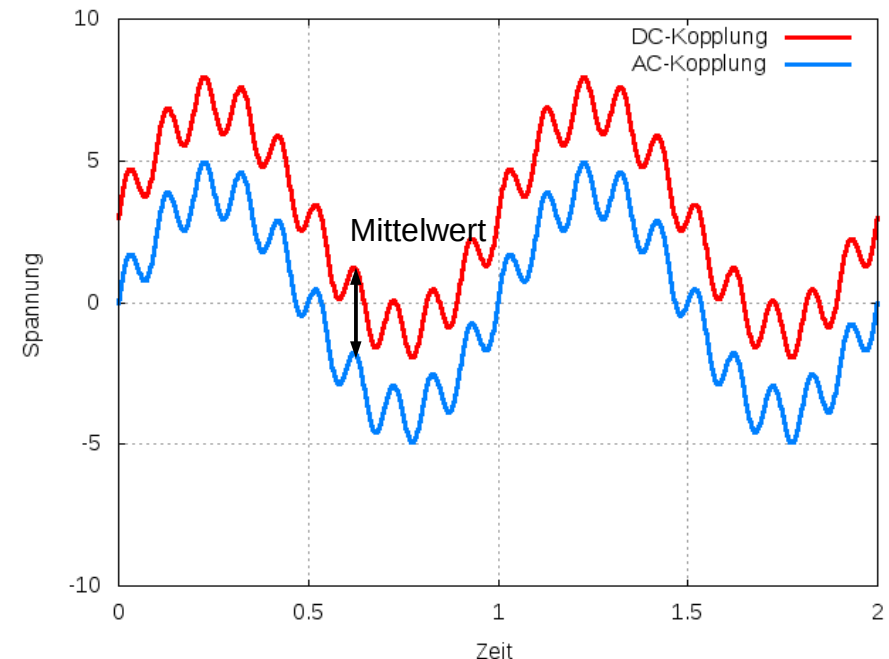
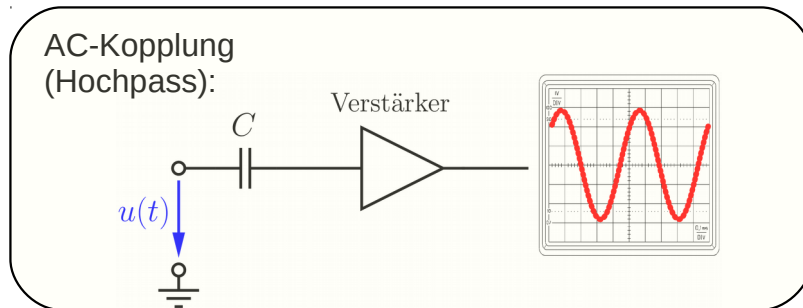
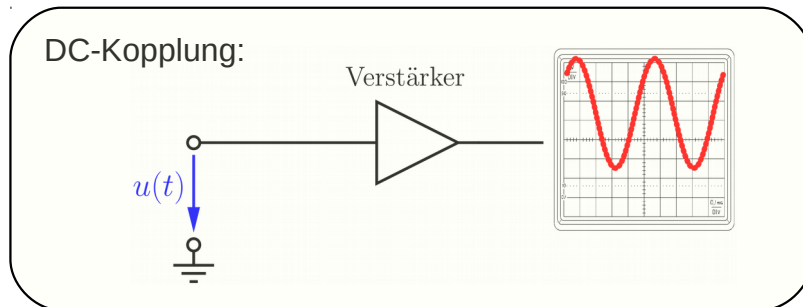
Idealer TP-Filter mit f_g (Grenzfrequenz) $\rightarrow 0$. Es kommt nur noch der Gleichanteil durch.

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.1 Arithmetischer Mittelwert:

Mit dem Oszilloskop:

Beim Oszilloskop kann zwischen **AC und DC-Kopplung** umgeschaltet werden. Bei der AC-Kopplung wird in den Signalweg ein Kondensator geschaltet. Ein Kondensator lässt keinen Gleichanteil durch. Die Differenz zwischen dem DC und AC gekoppeltem Signal ist der Mittelwert.



DC: Direct Current (Gleichstrom)

AC: Alternating Current (Wechselstrom)

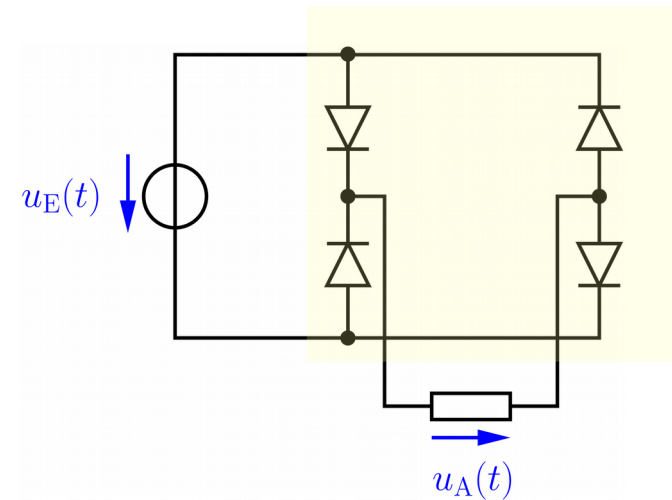
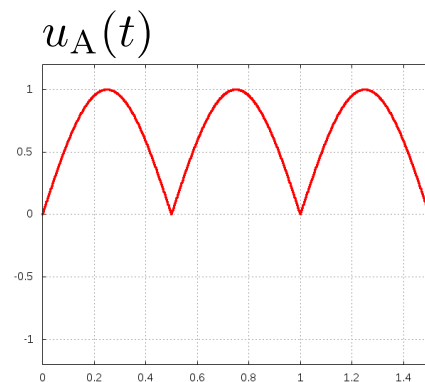
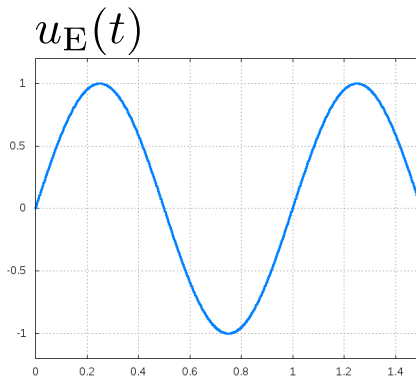
2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.2 Gleichrichtwert

Messen:

Mit einem Gleichrichter und einem Tiefpass Filter

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T} \cdot \int_T |u(t)| dt$$



$$u_A(t) = |u_E(t)|$$

Das Signal nach dem Gleichrichter muss noch durch einen TP-Filter, um den Mittelwert zu erhalten.

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.2 Gleichrichtwert

Berechnen vom Gleichrichtwert:

Allgemein:

$$|\overline{u}| = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |u(t)| dt$$

Für den Sonderfall einer sinusförmigen Spannung ergibt sich damit:

$$|\overline{u}| = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \hat{u} |\cos(2\pi f t)| dt = \frac{2}{\pi} \hat{u} \approx \frac{2}{3} \hat{u}$$

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.3 Effektivwert (Wird auch als quadratischer Mittelwert bezeichnet.)

Berechnung von Effektivwerten:

Allgemein:

$$u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+T} u(t)^2 dt}$$

Bei **sinusförmigen** Größen üblich:

$$u_{\text{eff}} = U, \quad i_{\text{eff}} = I$$



$$u_{\text{eff}} = U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

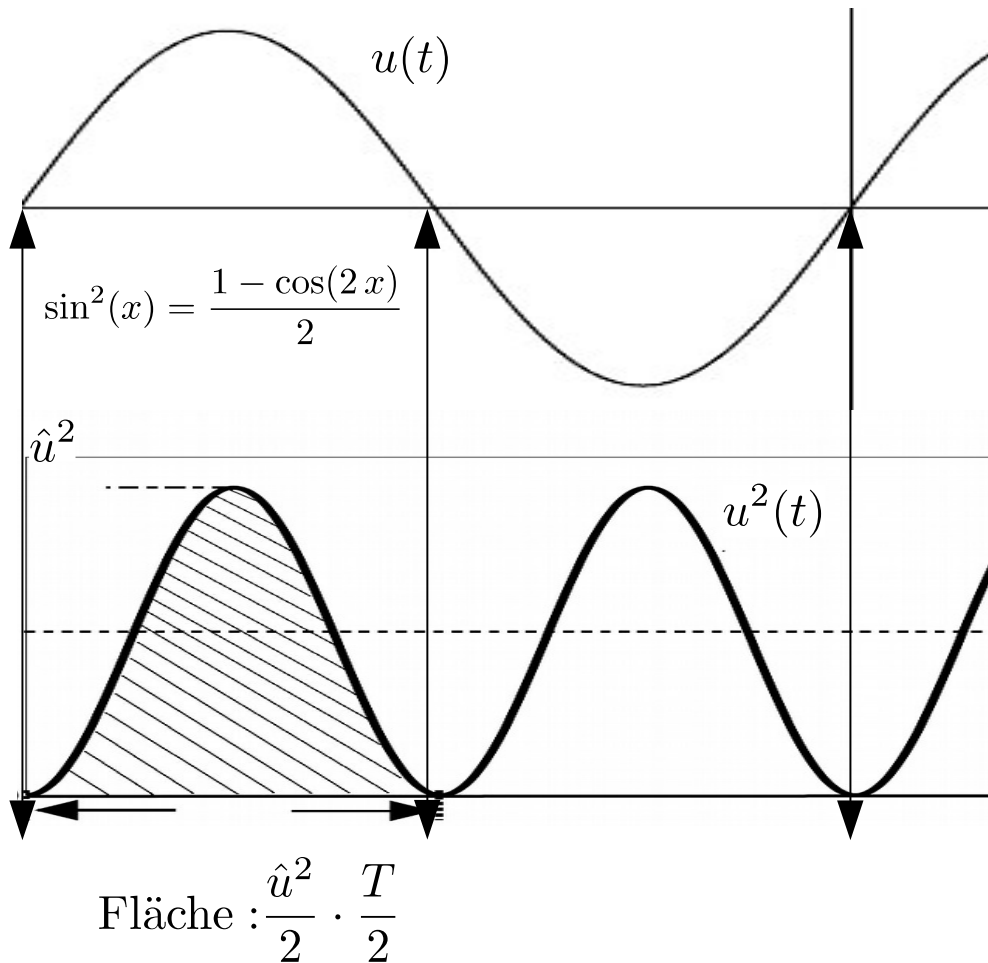
2.2.3 Effektivwert

Für eine sinusförmige Spannung ergibt sich der Mittelwert der quadratischen Spannung zu:

$$\overline{u^2} = \frac{\hat{u}^2}{2}$$

Damit ergibt sich der Effektivwert zu:

$$U = \sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$



2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.3 Effektivwert

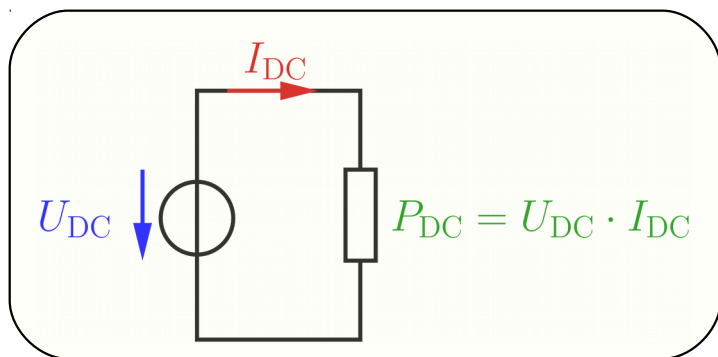
Anmerkung:

An einem ohmschen Verbraucher R ergibt sich für die elektrische Leistung P eine quadratische Abhängigkeit von der Spannung bzw. vom Strom:

$$P_{\text{DC}} = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

Rechnet man in einer Wechselstromschaltung mit Effektivwerten, so wird im Mittel an einem ohmschen Verbraucher die gleiche Leistung umgesetzt wie bei einer Gleichstromschaltung, deren Gleichwerte den Effektivwerten entsprechen.

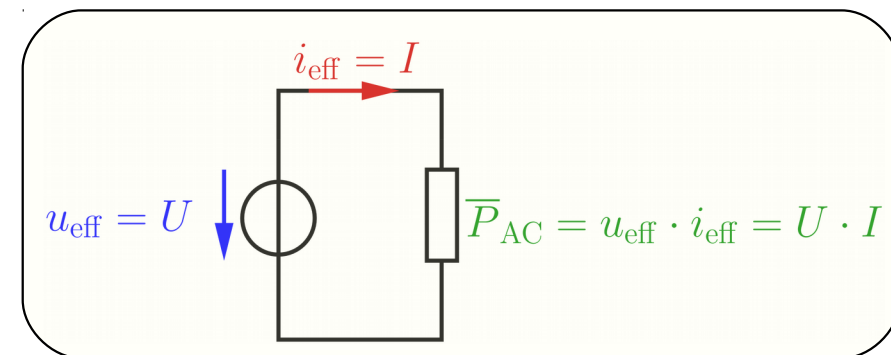
$$\overline{P}_{\text{AC}} = u_{\text{eff}} \cdot i_{\text{eff}} = R \cdot i_{\text{eff}}^2 = \frac{u_{\text{eff}}^2}{R}$$



$$I_{\text{DC}} = i_{\text{eff}}$$

$$U_{\text{DC}} = u_{\text{eff}}$$

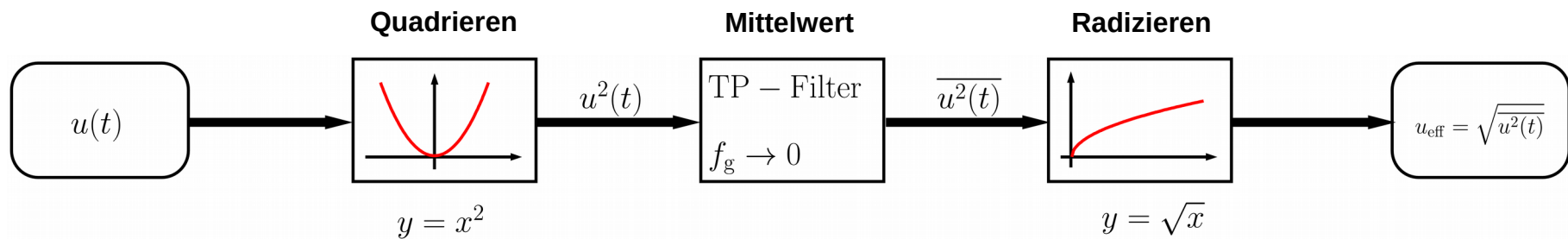
$$P_{\text{DC}} = \overline{P}_{\text{AC}}$$



2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.3 Effektivwert

Messen von Effektivwerten (genaues Verfahren)

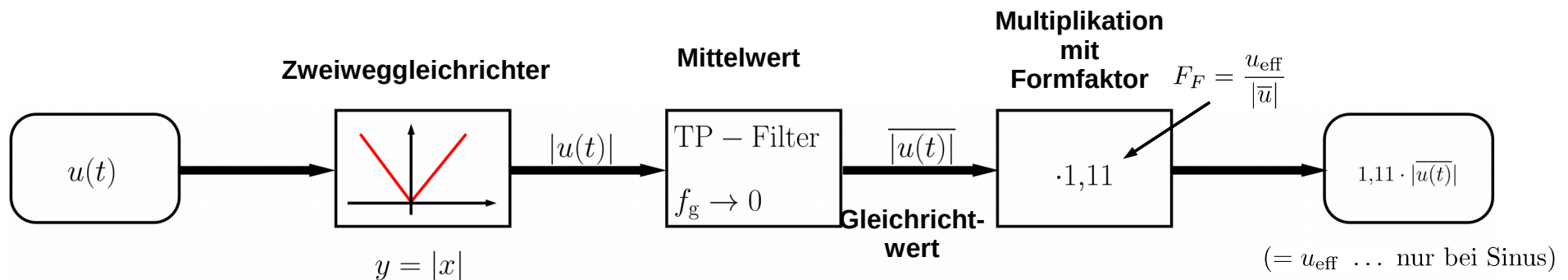


Dieses Messverfahren liefert für **beliebige** Messgrößen den richtigen Effektivwert.
→ True RMS (root mean square)

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.3 Effektivwert

Messen von Effektivwerten (vereinfachtes Verfahren)



Dieses Messverfahren liefert nur dann den Effektivwert, wenn die Messgröße **sinusförmig** ist.

Bei **nicht sinusförmigen** Messgrößen (z.B. Sinusspannungen mit Oberschwingungen, Rechteck-, Dreieck-, Sägezahnspannungen usw. weist das Messergebnis eine mehr oder weniger große Abweichung vom Effektivwert auf.

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.3 Effektivwert

Anmerkung:

Multimeter sind in der Regel nur für Frequenzen bis 1kHz spezifiziert, liefern also nur bis zu dieser Frequenz ein Ergebnis (Strom bzw. Spannung), dessen Fehler unterhalb der Herstellerangaben liegt. Genaue Angaben finden sich im Handbuch.

Vereinfachte Merkregel:

Effektivwert ist das, was einen ohmschen Widerstand aufheizt. Leistungen werden oft über das Aufheizen eines Widerstandes bestimmt.

Effektivwert und entstehende Wärme sind stets positiv.



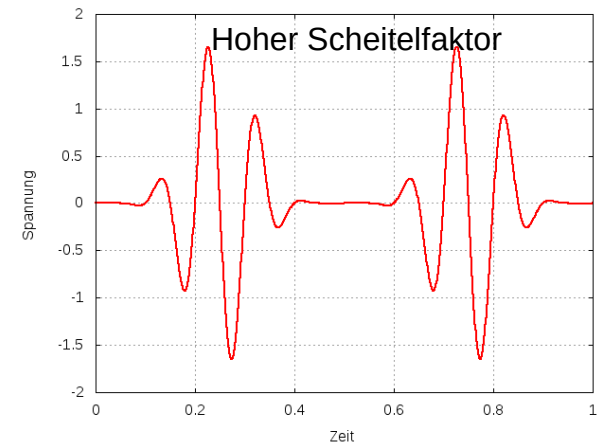
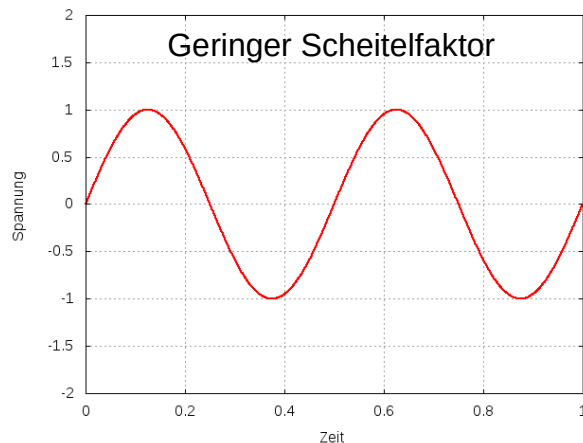
2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.4 Scheitel- und Formfaktor

Scheitelfaktor (Crestfaktor):

$$F_S = \frac{\hat{u}}{u_{\text{eff}}}$$

Der Scheitelfaktor gibt das Verhältnis von Scheitelwert zu Effektivwert an. Bei Wechselgrößen ist der Scheitelfaktor immer größer oder gleich 1. Der Formfaktor dient der groben Beschreibung der Kurvenform einer Wechselgröße.



2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2.4 Scheitel- und Formfaktor

Formfaktor:

$$F_F = \frac{u_{\text{eff}}}{|\overline{u}|}$$

Der Formfaktor gibt das Verhältnis von Effektivwert zum Gleichrichtwert an. Der Begriff kommt aus der Messtechnik. Anwendung vereinfachte Effektivwertmessung.

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2 Zusammenfassung

Arithmetischer Mittelwert:
(Gleichspannungsanteil)

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_T u(t) dt$$

Gleichrichtwert:

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T} \cdot \int_T |u(t)| dt$$

Effektivwert:

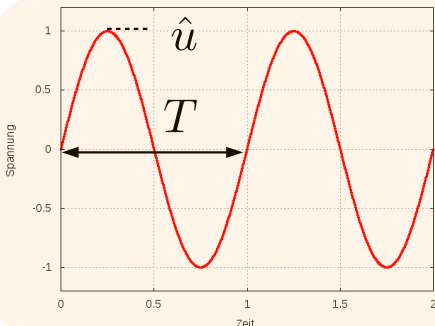
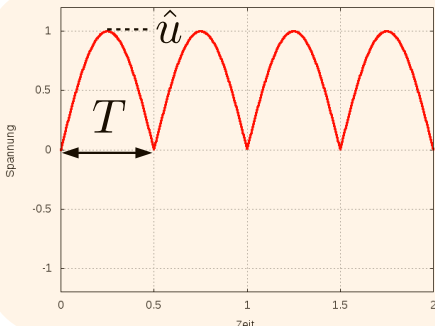
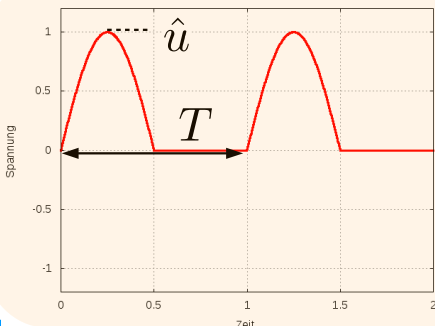
$$u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_T |u(t)|^2 dt}$$

Scheitelfaktor: $F_S = \frac{\hat{u}}{u_{\text{eff}}}$

Formfaktor: $F_F = \frac{u_{\text{eff}}}{|\bar{u}|}$

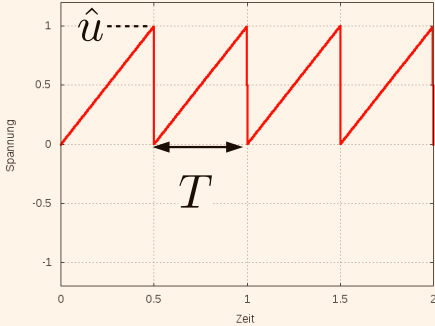
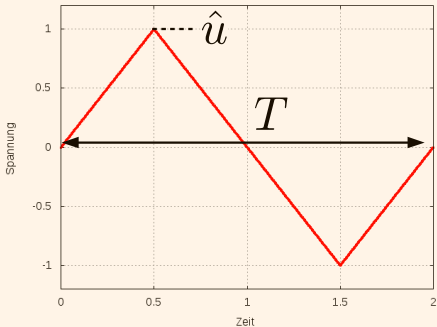
2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2 Zusammenfassung

	u_{eff}	$\overline{ u }$	F_S	F_F
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$\frac{2 \hat{u}}{\pi}$	$\sqrt{2} = 1,41$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$\frac{2 \hat{u}}{\pi}$	$\sqrt{2} = 1,41$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$
	$\frac{\hat{u}}{2}$	$\frac{\hat{u}}{\pi}$	2,0	$\frac{\pi}{2} = 1,57$

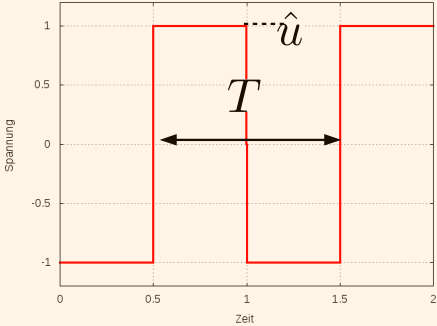
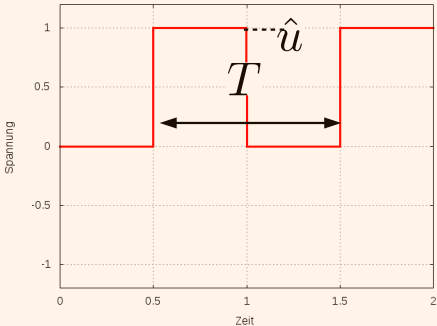
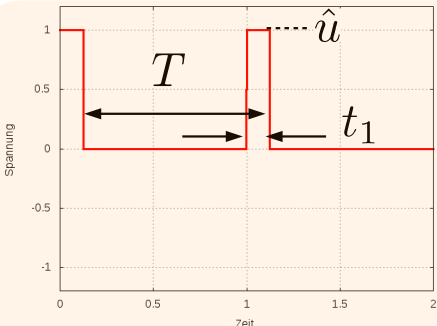
2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2 Zusammenfassung

	u_{eff}	$\overline{ u }$	F_S	F_F
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\hat{u}}{2}$	$\sqrt{3} = 1,73$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\hat{u}}{2}$	$\sqrt{3} = 1,73$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15$

2 Charakteristische Werte periodischer Zeitfunktionen

2.2 Zusammenfassung

	u_{eff}	$\overline{ u }$	F_S	F_F
	\hat{u}	\hat{u}	1,0	1,0
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\hat{u}}{2}$	$\sqrt{2} = 1,41$	$\sqrt{2} = 1,41$
	$\sqrt{\frac{t_1}{T}}$	$\frac{t_1}{T}$	$\sqrt{\frac{T}{t_1}}$	$\sqrt{\frac{T}{t_1}}$

Zu Kapitel 2 – Mittelwerte

Aufgabe 2-1: Mittelwerte bei Kosinus-Spannung

Gegeben: $u(t) = \hat{u} \cos(\omega t)$

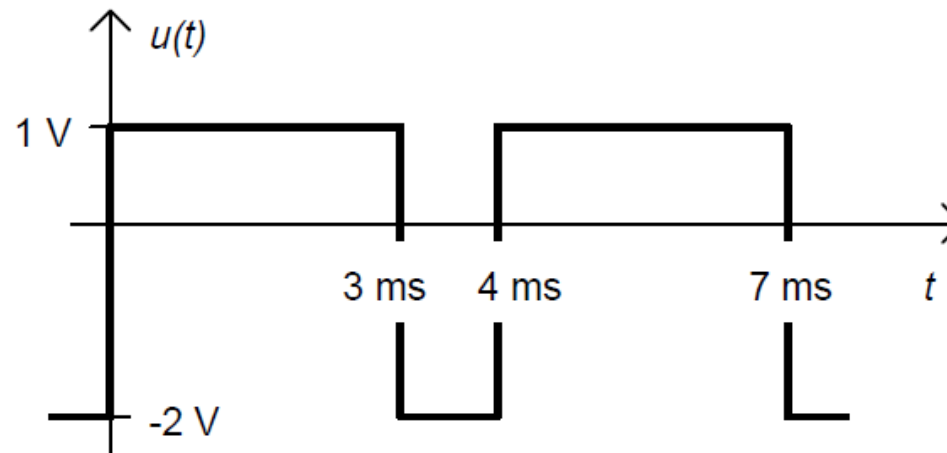
Gesucht:

1. Arithmetischer Mittelwert; Gleichrichtwert
Hinweis: Kosinusfunktion integrieren (s. Papula)
2. Effektivwert; Scheitelfaktor; Formfaktor
3. Wie ändern sich die Mittelwerte, wenn die Spannung um einen Winkel φ verschoben ist, d.h. bei $u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi)$?
(Qualitativ; keine Rechnung)



Aufgabe 2-2: Mittelwerte bei Rechteck-Spannung

Gegeben:

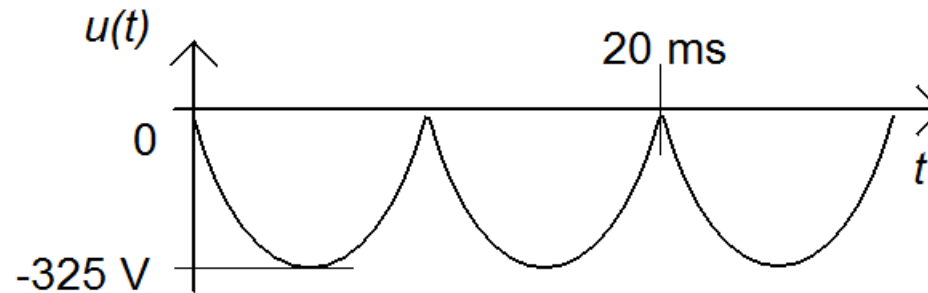


Gesucht:

1. T ; Skizze von $|u(t)|$ und $u^2(t)$
2. \bar{u} ; $|\bar{u}|$; u_{eff}
3. Anzeigewert eines Multimeters in AC
mit True RMS- Funktion
ohne True RMS- Funktion

Relativer Fehler der Anzeige ohne True RMS-Funktion gegenüber der Anzeige mit True RMS - Funktion

Aufgabe 1



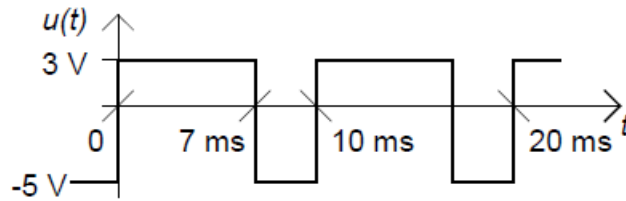
Gegeben ist die dargestellte Zeitfunktion $u(t)$ (invertierte gleichgerichtete Sinusspannung).

Geben Sie als Zahlenwerte an:

- 1.1 Periodendauer T , Frequenz f , Scheitelwert \hat{u}
- 1.2 Arithmetischer Mittelwert \bar{u} , Gleichrichtmittelwert $|\bar{u}|$, Effektivwert u_{eff}
- 1.3 Scheitelfaktor F_S , Formfaktor F_F .

Bearbeiten Sie die Übungsaufgaben Ü1-1 und Ü1-2 (PDF-Dokumente siehe Moodle)

Aufgabe Ü1-1: Mittelwerte und Kenngrößen



Lösung Ü1-1:

- 1) 10ms, 10Hz, -5V
- 3) 0,6V; 3,6V; 3,71V
- 4) 1,35; 1,03

Geben Sie an:

1. Periodendauer T , Frequenz f , Scheitelwert \hat{u}
2. Zeitdiagramme von $|u(t)|$ und $u^2(t)$
3. Arithmetischer Mittelwert $\overline{u(t)}$, Gleichrichtmittelwert $\overline{|u(t)|}$ und Effektivwert u_{eff}
4. Scheitelfaktor F_S und Formfaktor F_F

Lösung Ü1-2

Siehe Übungsaufgabe 1-2 aus Vorlesung
Versuchen Sie die Aufgabe erneut selber zu rechnen. Benutzen Sie die Musterlösung nur im Notfall bzw. fragen Sie in der Vorlesung nach.

Aufgabe Ü1-2: Mittelwerte und Kenngrößen bei Kosinus-Spannung

Gegeben: $u(t) = \hat{u} \cos(\omega t)$

1. Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert $\overline{u(t)}$, den Gleichrichtwert $\overline{|u(t)|}$ und den Effektivwert $u_{eff} = U$.
Gehen Sie dabei von den Definitionsgleichungen aus und lösen Sie die Integrale.
2. Geben Sie Scheitelfaktor F_S und Formfaktor F_F an.
3. Wie ändern sich die Mittelwerte nach Frage 1, wenn die Spannung um einen Winkel φ verschoben ist, d.h. bei $u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi)$?
(Qualitativ; keine Rechnung)