Семинар по теме: «Метод стационарной фазы»

6 марта 2019 г.

Часто в приложениях встречаются определённые осциллирующие интегралы типа:

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx$$

при $\lambda \to +\infty$. В нулевом приближении по большому λ интеграл зануляется. Интерес представляет нахождение поправки.
Для начала рассмотрим случай, когда $S^{'}(x) \neq 0 \ \forall x \in [a;b]$. Имеем:

$$\int_a^b e^{i\lambda S(x)} f(x) = \frac{1}{i\lambda}\left(\frac{1}{S'(b)} f(b) e^{i\lambda S(b)} - \frac{1}{S'(a)} f(a) e^{i\lambda S(a)}\right) - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b e^{i\lambda S(x)} \frac{f^{'}(x)}{S'(x)} dx$$

Последующим интегрированием по частям легко показывается, что в главном приближении по λ^{-1} ответ даётся внеинтегральным членом.
Этот метод работает, когда у фазы (функции $S(x)$) нет стационарной точки на области интегрирования. Рассмотрим случай, когда она есть и одна на всей области интегрирования:

$$e^{i\lambda S(x_0)} \int_a^b e^{i\lambda(S(x)-S(x_0))} f(x) dx = e^{i\lambda S(x_0)} \int_{x^{-1}(a)}^{x^{-1}(b)} g(t) e^{i\lambda t^2} dt$$

Здесь была произведена замена $\sqrt{S(x) - S(x_0)} = t$. Строго говоря, так можно делать только в том случае, когда $S^{''}(x_0) > 0$. Однако, другой случай разбирается полностью аналогично (можете сами проделать это в качестве упражнения), так что мы получим ответ в предположении $S^{''}(x_0) > 0$, а затем заменим $S^{''}(x_0)$ на $|S^{''}(x_0)|$.
Последний интеграл равен:

$$\int_c^d g(t) e^{i\lambda t^2} dt \approx g(0)\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} e^{i\pi/4}$$

Это легко получить, заметив, что из-за быстрых осцилляций интеграл набирается вблизи нуля и разложив $g(t)$ в ряд Тейлора. Кроме того, были использованы следующие интегралы с семинара 4:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

Далее, вспоминая определение функции g, получаем, что

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx = f(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S^{''}(x_0)|}} e^{i\lambda S(x_0)} e^{i\pi/4}$$

Это и есть то, как работает метод стационарной фазы.

Критерии применимости Выше рассматривалась фаза $\lambda S(x)$. В этом случае критерием применимости метода стационарной фазы является $\lambda \gg 1$. Однако, аналогично методу перевала, можно рассмотреть фазу $S(x)$, не содержащую явно большой параметр. Тогда критерий применимости можно получить из следующих рассуждений: интеграл от разложенной функции набирается в малой окрестности стационарной точки шириной $|x-x_0| \sim \frac{1}{\sqrt{|S''(x_0)|}}$ (там, где фаза $S(x)$ изменяется на число порядка 1). Тогда пренебрежение следующими членами разложения в ряд Тейлора верно при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} |S^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3| & \ll |S''(x_0)(x-x_0)^2| \\ |S^{(4)}(x_0)(x-x_0)^4| & \ll |S''(x_0)(x-x_0)^2| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |S^{(3)}(x_0)| & \ll |S''(x_0)|^{3/2} \\ |S^{(4)}(x_0)| & \ll |S''(x_0)|^2 \end{cases}$$

Задача 1 (функция Эйри)

В качестве примера разберем поведение функции Эйри (Airy) при $x \to -\infty$:

$$\mathrm{Ai}\,(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$

Решение

Найдем стационарные точки фазы:

$$f'(t) = t^2 + x = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm|x|^{1/2}$$

Только одна стационарная точка $t_1 = \sqrt{-x}$ попадает в отрезок интегрирования, и необходимо рассматривать вклад только от ее окрестности. Для поведения фазы в окрестности этой точки можно записать:

$$f''(t) = 2t \Rightarrow f''(t_1) = 2|x|^{1/2}$$

$$f(t) \approx -\frac{2}{3}|x|^{3/2} + |x|^{1/2}(t - |x|^{1/2})^2$$

Поэтому вклад в интеграл от окрестности стационарной точки записывается как:

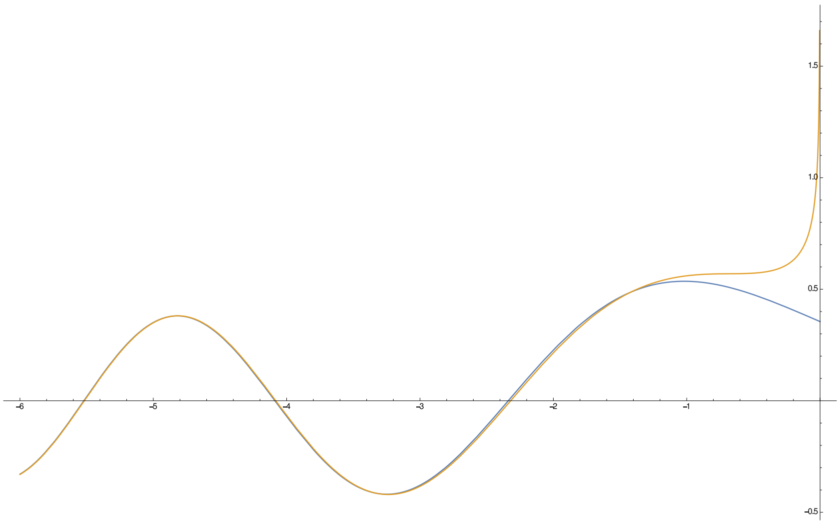
$$\mathrm{Ai}(x) \approx \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + |x|^{1/2}(t-|x|^{1/2})^2\right) \cdot dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \left(\cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right)\cos\left(|x|^{1/2}(t-|x|^{1/2})^2\right) + \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right)\sin\left(|x|^{1/2}(t-|x|^{1/2})^2\right)\right) dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right)\right)\sqrt{\frac{\pi}{2|x|^{1/2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}}\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Задача 2 (функция Бесселя)

Разберем поведение функции Бесселя при $x \to \infty$:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t)dt$$

Рис. 1: Функция Эйри $\mathrm{Ai}(x)$ при $x < 0$ и её асимптотика



Решение

Стационарные точки фазы даются условием:

$$f'(t) = x \cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

В отрезок интегрирования попадает одна стационарная точка t_0; поведение функции определяется вкладом в интеграл лишь от окрестности этой точки. Имеем:

$$f''(t) = -x \sin t \Rightarrow f''(t_0) = -x$$

$$f(t) \approx x - \frac{1}{2}x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

поэтому для оценки асимптотики функции Бесселя получаем:

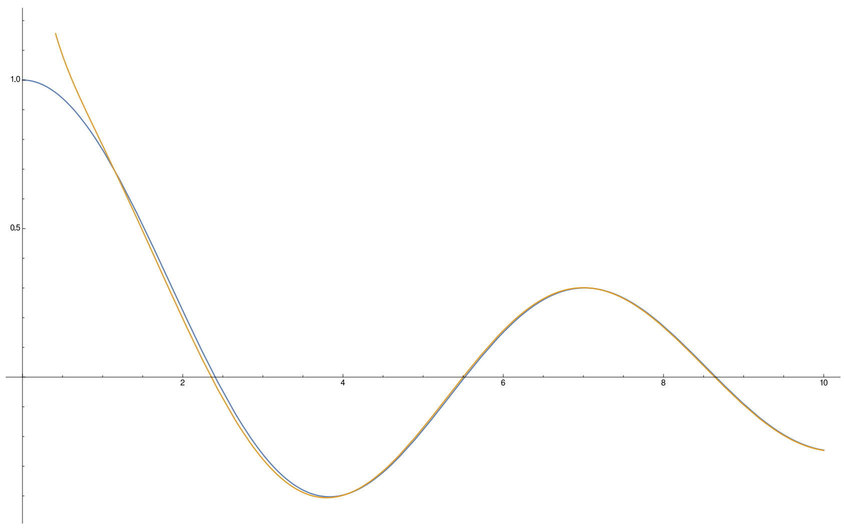
$$\begin{aligned} J_0(x) \approx \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(x - \frac{1}{2}x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) dt = \\ = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\cos x \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2\right) + \sin x \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)\right) dt = \\ = \frac{1}{\pi}(\cos x + \sin x)\sqrt{\frac{2\pi}{2x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Асимптотические разложения

Практически во всех задачах до этого мы сталкивались с асимптотическими разложениями в том или ином виде; и каждый раз мы находили первые несколько членов этого самого разложения. Поясним теперь, что из себя представляют эти самые разложения. Пусть имеется функция $f(x)$ и последовательность функций $\varphi_k(x)$. Мы будем говорить, что функции $\varphi_k(x)$ представляют собой асимптотическое разложение функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 (может быть и бесконечно удалённой), и писать

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x), \quad x \to x_0$$

Рис. 2: Функция Бесселя $J_0(x)$ и её асимптотика



если, во-первых, каждый следующий член этого ряда меньше предыдущего:

$$\varphi_k(x) \gg \varphi_{k+1}(x) \Leftrightarrow \varphi_{k+1}(x) = \overline{o}(\varphi_k(x)), \quad x \to x_0$$

а во-вторых, функцию можно приблизить суммированием конечного члена этого ряда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) + \underline{O}(\varphi_{N+1}(x)), \quad x \to x_0$$

Замечание Тут уместо сделать несколько замечаний. Во-первых, разложения в ряд Тейлора представляют собой пример асимптотических разложений с функциями $\varphi_k(x) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$. А во-вторых, как правило в приложениях, асимптотические ряды (без остаточного члена $\underline{O}(\varphi_{N+1}(x))$) формально непригодны для подсчёта значений функции в любой конкретной точке по той причине что они часто **расходятся**.

Это следует понимать так: при любом фиксированном x каждый следующий член ряда много меньше предыдущего при не слишком большом N. Другими словами, остаточный член уменьшается с ростом N. В случае сходящихся рядов эта тенденция сохраняется при всех $N \to \infty$. Однако, в случае асимптотических выражений часто имеет место следующая ситуация: остаточный член уменьшается с ростом N до определённого N^*. Типично, $N^* \sim x^z$ (см. Задачу 4) при $x \to x_0 = \infty$, а $z > 0$ - действительное число. При $N > N^*$ остаточный член уже растёт с ростом N. Вместе с ним растёт и сумма ряда $\sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x)$, которая вместе с большим остаточным членом даёт исходную функцию. Т.е., наибольшую точность асимптотический ряд даёт при количестве членов N^* - в этом случае типичный остаточный член экспоненциально мал ($\sim e^{-x^z}$).

Т.о., асимптотические ряды могут быть использованы для асимптотического анализа и приближенных оценок, как мы поступали с задачами ранее (главное - не рассматривать очень большое число членов). В частности, так называемый метод диаграмм Фейнмана представляет собой пример асимптотических разложений. Для случая квантовой электродинамики естественным малым параметром является постоянная тонкой структуры $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$, поэтому для измеримых величин в квантовой электродинамике можно в принципе получать очень высокую точность ($e^{-137} \sim 10^{-60}$).

Задача 3 (интегральный синус)

Найдём полное асимптотическое разложение интегрального синуса при $x \to \infty$:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Решение

Перепишем выражение следующим образом, используя интеграл Дирихле:

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

Можно получить асимптотический ряд, просто интегрируя по частям:

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} + \int_x^\infty \frac{\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2 \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^3} dt$$

В общем виде мы получаем следующую сумму:

$$\mathrm{Si}(x) \sim \frac{\pi}{2} - \cos x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{x^{2k+1}} - \sin x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!}{x^{2k}}$$

Первые несколько членов ряда дают:

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\frac{\cos x}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Отметим, что, как и в предыдущем случае, полученные ряды также расходятся. Кроме того, на данном простом примере удобно найти N^*, упоминавшееся выше. Как легко видеть, очередной член ряда перестаёт быть меньше предыдущего при $2N^* = x^2$. Теперь, зададимся вопросом о максимальной точности, с которой асимптотический ряд может приблизить исходную функцию. Для этого получим разложение с точностью до $\underline{O}\left(x^{-2N-1}\right)$. Имеем:

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (2k)!}{x^{2k+1}} - \sin x \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (2k-1)!}{x^{2k}} + (2N+1)!(-1)^N \int_x^\infty \frac{\cos t}{t^{2N+2}} dt$$

Оценим по модулю остаточный член:

$$(2N+1)! \int_x^\infty \frac{\cos t}{t^{2N+2}} dt \leq (2N+1)! \int_x^\infty \frac{1}{t^{2N+2}} dt = \frac{(2N)!}{x^{2N+1}}$$

Теперь, пользуясь формулой Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ при $2N = 2N^* = x^2$, находим для остаточного члена:

$$\frac{(2N)!}{x^{2N+1}} = \frac{\sqrt{2\pi x^2}\left(\frac{x^2}{e}\right)^{x^2}}{x^{x^2+1}} = \sqrt{2\pi} e^{-x^2}$$

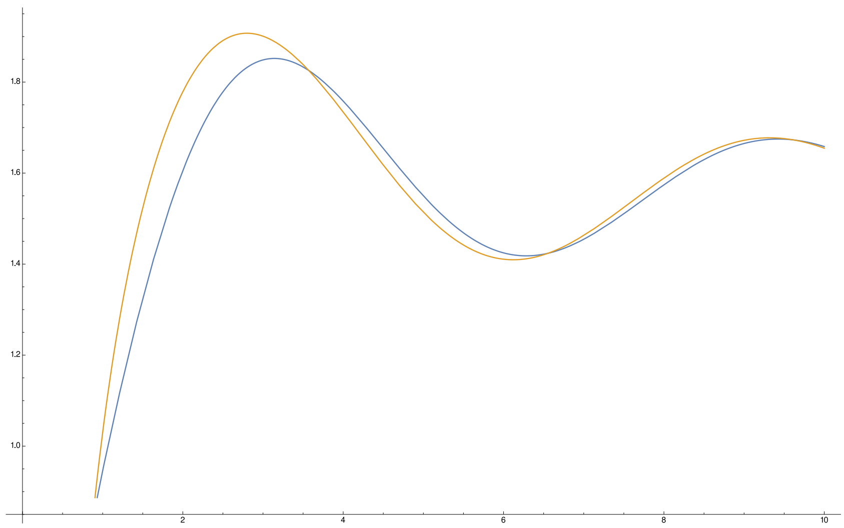
Как и ожидалось, он получился экспоненциально малым.

Задача 4 (функция Макдональда)

Найти асиптотическое разложение для интеграла при $a \to \infty$

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x(x+\alpha)}} dx$$

Рис. 3: Интегральный синус $\mathrm{Si}(x)$ и первое приближение



Решение

Асимптотический ряд можно просто получить, раскладывая корень по малости $\frac{x}{\alpha}$. Имеем:

$$I\left(a\right)=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x(x+\alpha)}}dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{-1/2}dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}C^k_{-1/2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k dx$$

Тут C^k_α при нецелых α - обобщенный биномиальный коэффициент, определяемый как:

$$C^k_\alpha=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)}$$

В случае $\alpha=-\frac{1}{2}$ это можно переписать:

$$C^k_{-1/2}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)...\left(-k+\frac{1}{2}\right)}{k!}=\frac{(-1)^k}{2^k}\cdot\frac{(2k-1)!!}{k!}$$

Дальше можно поменять местами сумму и интеграл; каждый из полученных интегралов представляет собой просто интеграл Эйлера; получаем:

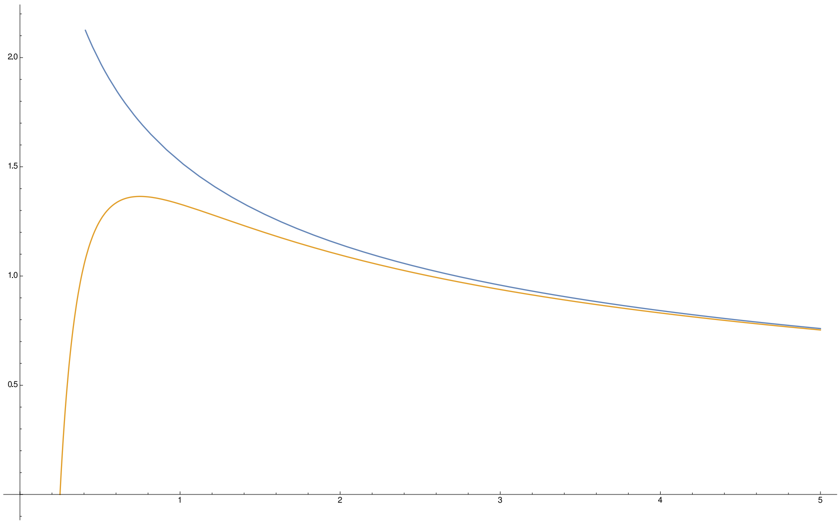
$$I(a)\sim\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^k}C^k_{-1/2}\int_0^\infty e^{-x}x^{k-\frac{1}{2}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{k+1/2}}C^k_{-1/2}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{k+1/2}}\cdot\frac{(-1)^k}{2^k}\cdot\frac{(2k-1)!!}{k!}\frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{k+1/2}}\cdot\frac{(-1)^k((2k-1)!!)^2\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!}$$

тут мы воспользовались тем, что $\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdot\dots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}$. Для первых нескольких членов разложения имеем:

$$I(a)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left(1-\frac{1}{4\alpha}+\frac{9}{32\alpha^2}+O\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)\right)$$

Уместно заметить, что полученный асимптотический ряд расходится для любого значения α. *Кроме того, отметим для справки, что точный ответ выражается через модифицированную функцию Бесселя - так называемую функцию Макдональда* $I(a)=e^{\alpha/2}K_0(\alpha/2)$.

Рис. 4: Точное значение интеграла и первые два члена асимптотического разложения



Задача 5

Покажем, что функция

$$\delta_\omega(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin^2(\omega x)}{\omega x^2}$$

при $\omega \to \infty$ представляет собой δ-функцию Дирака.

Решение

Область, в которой функция существенно отлична от нуля, имеет ширину $|x| \sim \frac{1}{\omega}$, и при $\omega \to \infty$ она сужается:

$$\lim_{\omega\to\infty} \delta_\omega(x \neq 0) = 0$$

поэтому при рассмотрении интеграла вида $I = \int \delta_\omega(x) f(x) dx$ при $\omega \to \infty$ поведение определяется окрестностью нуля (область интегрирования должна содержать ноль, а функция $f(x)$ не должна иметь сингулярностей в нуле). Получаем:

$$I \approx \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\omega(x) f(0) dx = f(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega x}{\omega x^2} dx = f(0)$$

Это и доказывает нужное утверждение:

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\omega(x) f(x) dx = f(0) \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty} \delta_\omega(x) = \delta(x)$$

Задачи для домашнего решения

Упражнение 1
Вычислите значение функции Эйри в $x = 0$:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt \cos(\frac{t^3}{3} + tx)$$

Упражнение 2
Приближенно вычислите интеграл при $x \to +\infty$

$$I(x) = \int_0^\infty \cos(x(t^2 - t^4))dt$$

Упражнение 3
Получите разложение интегрального косинуса

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt$$

в асимптотический ряд при $x \to +\infty$.
** Найдите N^* и минимальную ошибку при аппроксимации асимптотическим рядом.*

Упражнение 4
Получите разложение неполной гамма-функции

$$\Gamma(x, s) = \int_x^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$$

в асимптотический ряд при $x \to +\infty$ и $s \sim 1$.
** Найдите N^* и минимальную ошибку при аппроксимации асимптотическим рядом.*

Задача 1
Вычислите асимптотику функции Бесселя n-ого порядка при $x \gg n$:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)dt.$$

Вычислите асимптотику при $x \ll n$. На основе двух асимптотик постройте график функции Бесселя (нужно сшить асимптотики при $x \sim n$).

Задача 2
Приближенно вычислите интеграл

$$I(x) = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2 t \cos(x\cos t)dt$$

при $x \to +\infty$.