

# Семинар по теме: «Преобразование Фурье»

4 апреля 2019 г.

## Интеграл Фурье

Если есть функция  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , то для неё можно определить разложение в интеграл Фурье (так называемое обратное преобразование Фурье):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p) e^{ipx} \frac{dp}{2\pi}$$

При этом функцию  $\tilde{f}(p)$  можно получить, используя прямое преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

Согласованность двух формул обеспечивается следующим выражением для  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dp = 2\pi \delta(x)$$

Напомним,  $\delta$ -функция определяется как функция, такая, что для любой функции  $f(x)$  выполнено:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

## Замечание

В разных источниках преобразование Фурье вводится по-разному. Например, в прямом преобразовании Фурье вместо  $e^{-ipx}$  можно написать  $e^{ipx}$ ; в таком случае аналогичную замену нужно проделать и в обратном преобразовании Фурье; соотношения по-прежнему останутся согласованными. Кроме того, в математике часто рассматривается преобразование Фурье, в котором в интегралах вместо  $dx$  и  $\frac{dp}{2\pi}$  стоит  $\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$  и  $\frac{dp}{\sqrt{2\pi}}$ ; допустим любой выбор констант, лишь бы их произведение было  $2\pi$ .

## Ряд Фурье

Если есть функция  $f(x)$ , периодичная с периодом  $T$  (или просто определенная на отрезке длиной  $T$ ; в таком случае ее можно просто периодически продолжить), то для этой функции можно определить разложение в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\omega_n t}$$

Периодичность функции обеспечивается требованием на частоты  $\omega_n T = 2\pi n$ . Коэффициенты ряда Фурье можно получить из соотношения

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Согласованность разложения в ряд Фурье обеспечивается следующим тождеством (тождество Пуассона):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n t}$$

### Замечание

Тут тоже имеется произвол в выборе знаков в экспоненте (лишь бы они были разные) и в коэффициентах перед интегралом и рядом (лишь бы их произведение равнялось  $T$ ).

## Ряд Фурье для решёточных функций

Если есть исходная функция, определенная на решётке (то есть, на самом деле, она представляет собой обычную числовую последовательность)  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . В таком случае, можно рассмотреть преобразование, аналогичное предыдущему, только в “обратном” направлении. А именно, можно рассмотреть разложение  $f_n$  по плоским волнам в виде

$$f_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(k) e^{ikn} \frac{dk}{2\pi}$$

и выражение для  $f(k)$  ( $k \in [-\pi; \pi]$ ) даётся выражением:

$$f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-ikn}$$

Это преобразование полностью аналогично предыдущему, и его согласованность тоже обеспечивается тождеством Пуассона.

## Дискретное преобразование Фурье

Если есть исходный набор из  $N$  чисел  $f_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , то для него можно определить дискретное преобразование Фурье. Оно представляет собой разложение по дискретному набору плоских волн:

$$f_n = \sum_k \tilde{f}_k e^{ikn}$$

при этом волновой вектор  $k_m = \frac{2\pi}{N}m$  и  $m = 1, \dots, N$ ; под  $\sum_k f(k)$  подразумевается  $\sum_{m=1}^N f(k_m)$ . При этом обратное преобразование Фурье даётся выражением

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n e^{-ikn}$$

Согласованность дискретного преобразования Фурье обеспечивается следующим тождеством:

$$\sum_k e^{ikn} = N\delta_{n0} = \begin{cases} N, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

## Замечание

Интересно, что разложение в ряд Фурье можно получить как предел  $N \rightarrow \infty$  у дискретного преобразования Фурье; а разложение в интеграл Фурье можно получить как предел  $T \rightarrow \infty$  разложения в ряд Фурье. Таким образом, все эти преобразования получаются друг из друга.

## Задача 1 (Потенциал Юкавы или потенциал Дебая)

В рамках Стандартной Модели возникает так называемое взаимодействие Юкавы. Если имеется точечная частица, несущая “заряд”  $q$  и расположенная в начале координат, то оказывается, что потенциал, создаваемый этим зарядом (аналог электрического потенциала) удовлетворяет уравнению

$$-\Delta\varphi(\mathbf{r}) + \kappa^2\varphi(\mathbf{r}) = 4\pi q \cdot \delta(\mathbf{r})$$

где  $\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа;  $\kappa$  - некий параметр задачи. Решим это уравнение, найдём потенциал.

## Решение

Исходное однородное уравнение (без правой части) удовлетворяет требованию трансляционной инвариантности (то есть - если провести в уравнении замену  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  - произвольный вектор, то уравнение не изменится); это значит, что его можно решать при помощи преобразования Фурье.

Подставим в уравнение  $\varphi(\mathbf{r})$  в виде (обратное преобразование Фурье):

$$\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x, y, z) = \iiint \varphi(p_x, p_y, p_z) e^{ip_x x + ip_y y + ip_z z} \frac{dp_x}{2\pi} \frac{dp_y}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi} \equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

(тут для удобства функцию  $\varphi(\mathbf{r})$  и её фурье-образ  $\varphi(\mathbf{p})$  мы обозначаем одинаково; чтобы их различать, будем иметь в виду, что когда аргумент функции -  $\mathbf{p}$ , то имеется в виду фурье-образ, а когда аргумент -  $\mathbf{r}$ , то имеется в виду сама функция). В таком случае, все дифференцирования, содержащиеся в операторе Лапласа, можно “пронести” под знак интеграла, где они будут действовать только на экспоненту как  $\frac{\partial}{\partial x} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = ip_x e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$ . Таким образом, можно сразу записать:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{p}) (-\mathbf{p}^2) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

По свойству  $\delta$ -функции, правую часть можно тоже представить в виде преобразования Фурье от константы:

$$4\pi q \delta(\mathbf{r}) = 4\pi q \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

А значит, уравнение запишется как:

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (\mathbf{p}^2 + \kappa^2) \varphi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} 4\pi q \cdot e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

А теперь мы можем провести преобразование Фурье этого выражения. В данном уравнении это равносильно условному “сокращению” операции  $\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \dots$  слева и справа. Таким образом, для Фурье-образа  $\varphi(\mathbf{p})$  получается тривиальное скалярное уравнение:

$$\varphi(\mathbf{p})(\mathbf{p}^2 + \kappa^2) = 4\pi q \Rightarrow \varphi(\mathbf{p}) = \frac{4\pi q}{\mathbf{p}^2 + \kappa^2}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi q}{\mathbf{p}^2 + \kappa^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$$

Этот интеграл можно взять, перейдя к сферическим координатам. Азимутальный угол  $\theta$  мы будем отсчитывать от направления вектора  $\mathbf{r}$ . Как мы знаем из предыдущих семинаров, якобиан перехода к сферическим координатам выглядит как  $d^3\mathbf{p} = p^2 dp \sin \theta d\theta d\varphi$ . Таким образом:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty p^2 dp \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{4\pi q}{p^2 + \kappa^2} e^{ipr \cos \theta} = \\ &= \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty p^2 dp \cdot \frac{\sin(pr)}{pr} \cdot \frac{1}{p^2 + \kappa^2} = \frac{2q}{\pi r} \int_0^\infty \frac{z \sin z}{z^2 + \kappa^2 r^2} dz = \frac{q}{r} e^{-\kappa r} \end{aligned}$$

Тут мы взяли сперва интеграл по  $\varphi$  и  $\theta$ , затем обезразмерили интеграл по  $p$  и воспользовались интегралом Лапласа из 4 семинара. Полученный ответ совпадает с законом Кулона на малых расстояниях  $r \ll \frac{1}{\kappa}$ ; на больших расстояниях возникает эффект экранирования. Аналогичное явление возникает в плазме, при внесении в неё электростатического заряда  $q$ . Явление это называется дебаевским экранированием, параметр  $\frac{1}{\kappa}$  в этой модели называется дебаевским радиусом. Сам же потенциал тоже иногда называется дебаевским.

## Задача 2

Пусть имеется грузик на пружинке (осциллятор), который возмущается периодической внешней силой  $F(t)$ . Уравнение движения запишется в таком случае как:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

(где  $f(t) = \frac{1}{m} F(t)$  и  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ). Внешняя сила имеет период  $T$  и имеет вид “прямоугольников”: сперва в течении первой половины периода, грузик “тянут” в одну сторону, а затем - в другую:

$$f(t) = \begin{cases} -f_0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ f_0 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Исследуем отклик осциллятора на такую периодическую силу. Решим задачу с начальными условиями  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

## Решение

В силу однородности по времени уравнения без правой части (однородность и трансляционная инвариантность - это одно и то же), различные гармоники (колебания с различными частотами) будут жить независимо.

Значит, для исследования уравнения нужно представить возмущающую силу  $f(t)$  в виде разложения в ряд Фурье. Поскольку функция имеет период  $T$ , то разложение будет содержать лишь гармоники  $\omega_n T = 2\pi n \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$ . Получаем:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}$$

в таком случае коэффициенты ряда Фурье будут выражаться как:

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{i\omega_n \tau} d\tau = \frac{1}{T} \left\{ - \int_{-T/2}^0 f_0 e^{i2\pi \frac{\tau}{T} n} d\tau + \int_0^{T/2} f_0 e^{i2\pi \frac{\tau}{T} n} d\tau \right\} =$$

$$= 2i \frac{f_0}{T} \int_0^{T/2} \sin \left( 2\pi \frac{\tau}{T} n \right) d\tau = \begin{cases} \frac{2if_0}{\pi} \cdot \frac{1}{n}, & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

В силу вещественности функции  $f(t)$ , коэффициенты  $f_n$  всегда должны удовлетворять условию  $f_{-n} = f_n^*$ . Кроме того, в силу нечётности функции  $f(t)$ , коэффициенты также удовлетворяют условию  $f_{-n} = -f_n$ .

В таком случае, решение можно искать в виде разложения по таким гармоникам. Кроме того, для того, чтобы записать общее решение, необходимо добавить решение однородного уравнения (то есть уравнения без правой части), которое в данном случае представляет собой  $C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$  с произвольными константами  $C_1$  и  $C_2$ . Получаем:

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega_n t}$$

Подстановка в уравнение даёт нам

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n (\omega^2 - \omega_n^2) e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}$$

Значит, мы можем условно “сократить” на  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dots e^{-i\omega_n t}$  и получить:

$$x_n = \frac{f_n}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

Таким образом, общее решение представляется в виде ряда:

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f_n}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega_n t} =$$

$$= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \sum_{n=2k+1} \frac{2if_0}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega_n t} = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \sum_{n=2k+1, k \geq 0} \frac{4f_0}{\pi n} \frac{\sin \omega_n t}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

Теперь исследуем задачу Коши. Определим константы  $C_1$  и  $C_2$  решения из начальных условий. Поскольку  $x(0) = 0$ , то  $C_2 \equiv 0$ . Кроме того, поскольку  $\dot{x}(0) = 0$ , то:

$$\omega C_1 + \sum_{n=2k+1, k \geq 0} \frac{4f_0}{\pi n} \frac{\omega_n}{\omega^2 - \omega_n^2} = 0$$

поэтому подставляя  $C_1$ , окончательно ответ можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{n=2k+1, k \geq 0} \frac{4f_0}{\pi n} \cdot \frac{\sin \omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega} \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

Ряд этот в общем случае не суммируется. Однако наибольший интерес представляет случай резонанса. Структура ответа подсказывает нам, что резонанс будет наступать, когда какая-то из  $\omega_{2k+1}$  будет близка или равна  $\omega$ . В таком случае, эта гармоника будет иметь

наибольшую амплитуду и будет давать наибольший вклад в ряд; из всего ряда можно оставить лишь её. Значит, в случае близости к резонансу, решение будет выглядеть как:

$$x(t) \approx x_n e^{-i\omega_n t} + x_{-n} e^{i\omega_n t} = \frac{4f_0}{\pi n} \cdot \frac{\sin \omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega} \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_n^2}, \quad \omega \approx \omega_n$$

Сам резонанс, когда  $\omega = \omega_n$ , можно получить, воспользовавшись трюком: в этом выражении можно взять предел  $\omega \rightarrow \omega_n$ , расписав его по правилу Лопиталя. Это даст ответ:

$$x(t) \approx -\frac{2f_0}{\pi \omega n} \cdot t \cdot \cos \omega t, \quad \omega = \omega_n$$

Мы видим, что в случае резонанса, амплитуда соответствующей гармоники будет неограниченно возрастать со временем.

### Задача 3 (случайные блуждания на решетке)

Рассмотрим задачу, которая является моделью диффузии. Пусть имеется одномерная решётка (набор узлов  $n \in \mathbb{Z}$ ). В начальный момент времени  $N \gg 1$  частиц посадили в узел  $n = 0$ . Затем частицы начинают случайно блуждать по решётке, причём за время  $dt$  каждая частица может перейти в один из двух соседних узлов с вероятностью  $\lambda dt$  ( $\lambda > 0$  - параметр задачи). Исследуем движение частиц.

**Замечание** Вместо рассмотрения  $N$  частиц и исследования числа частиц, эквивалентно можно рассматривать 1 частицу и исследовать вероятность нахождения частицы на каком-то из узлов.

#### Решение

Пусть в момент времени  $t$ , число частиц на узле  $n$  равна  $p_n(t)$ . Кроме того, начальные условия задачи таковы, что

$$p_n(0) = N \cdot \delta_{n0} = \begin{cases} N, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Случайный процесс, описанный в условии задачи, можно представить в виде бесконечной системы дифференциальных уравнений. За время  $dt$ , в узел с номером  $n$  из узлов с номерами  $n \pm 1$  приходит  $p_{n\pm 1}(t)\lambda dt$  частиц; кроме того, с этого узла в соседние уходит  $2p_n(t)\lambda dt$  частиц. Полная система дифференциальных уравнений тем самым записывается как

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda(p_{n-1}(t) + p_{n+1}(t) - 2p_n(t))$$

Эта задача тоже обладает трансляционной симметрией, как и предыдущие, а значит можно опять воспользоваться преобразованием Фурье:

$$p_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} p(k, t) e^{ikn}$$

и при этом:

$$p(k, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(t) e^{-ikn}$$

Делая необходимую подстановку в уравнение, мы получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \cdot \frac{dp(k, t)}{dt} \cdot e^{ikn} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} p(k, t) \cdot \lambda(e^{-ik} + e^{ik} - 2)$$

Опять условно “сокращая” на  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \dots e^{ikn}$ , получаем тривиальное уравнение:

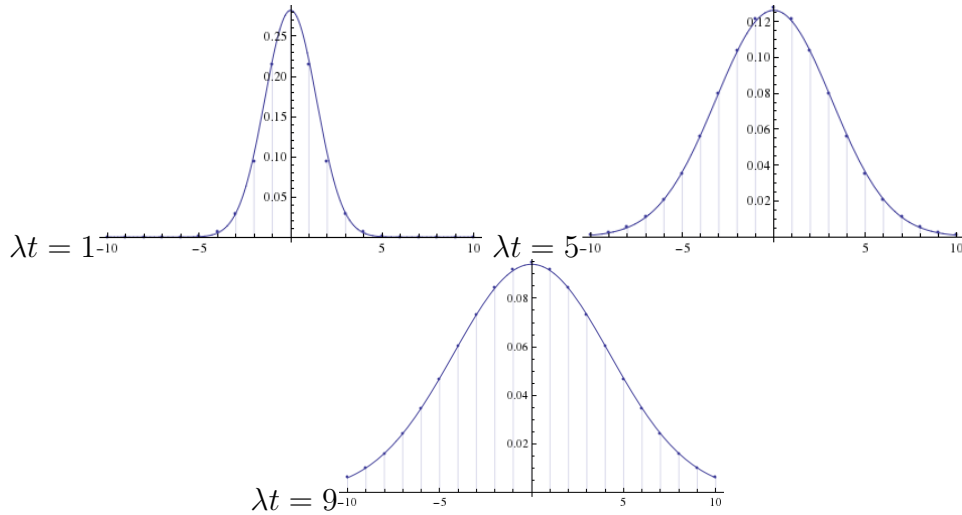
$$\frac{dp(k, t)}{dt} = -2\lambda(1 - \cos k)$$

$$p(k, t) = p(k, 0) \exp(-2\lambda(1 - \cos k)t)$$

Теперь необходимо определить начальные условия. Возвращаясь к определению  $p(k, t)$ :

$$p(k, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(0) e^{-ikn} = N$$

Рис. 1: Численные значения  $p_n(t)$  при различных  $\lambda t$



Пользуясь обратным преобразованием Фурье, ответ можно выразить как:

$$p_n(t) = N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \exp(-2\lambda(1 - \cos k)t + ikn)$$

Преобразуем интеграл, избавившись от мнимой единицы (вероятность - величина чисто вещественная). Для этого добавим такой же интеграл с заменой  $k \rightarrow -k$  и разделим пополам:

$$p_n(t) = N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \exp(-2\lambda t(1 - \cos k)) \cos kn$$

Мы получили ответ на вопрос задачи в виде интеграла. Этот интеграл не берётся в элементарных функциях, однако можно исследовать аналитически различные асимптотики, используя большое количество методов, изложенных в этом курсе ранее. Кроме того, его можно исследовать численно (см. рисунок 1).

## Задачи для домашнего решения

### Упражнение 1

Вычислите преобразование Фурье следующих функций

$$\frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad e^{-|x|/\epsilon}, \quad e^{-x^2/\epsilon^2}.$$

### Упражнение 2

Пусть  $\phi(x)$  - вещественная функция, которая  $\rightarrow 0$ , при  $|x| \rightarrow +\infty$ . Докажите следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \left( m^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (m^2 + k^2) |\phi(k)|^2 \frac{dk}{2\pi},$$

где  $\phi(k)$  - преобразование Фурье функции  $\phi(x)$ .

### Упражнение 3

Рассмотрите задачу про диффузию на решетке (см. материалы семинара). Приблизительно вычислите интеграл, который получился на семинаре для распределения частиц в зависимости от времени

$$p_n(t) = N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn - 2\lambda t(1 - \cos k)}$$

в двух предельных случаях: а)  $\lambda t \ll 1$ ,  $n$  - фиксированное произвольное число; б)  $\lambda t \gg 1$ .

### Задача 1

В теории случайных матриц встречаются следующие функции:

$$R_U(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad R_O(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2} + \left[ \int_1^{+\infty} dz \frac{\sin xz}{z} \right] \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{x} \right).$$

Вычислите их Фурье-преобразования. Результаты изобразите графически.

### Задача 2

Функция Бесселя нулевого порядка задается интегралом

$$J_0(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \exp(ix \sin \phi).$$

*Для справки:* при больших значениях аргумента она ведет себя как

$$J_0(x \gg 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4).$$

Вычислите преобразование Фурье функции  $J_0(x)$  точно. Подумайте, почему особенности в полученном ответе ожидаемы?

### Задача 3

Рассмотрим самую простую модель твердого тела - цепочку из одинаковых “атомов”, соединенных пружинками.

Уравнение, которое определяет закон движения атомов в цепочке:

$$m\ddot{u}_n = C(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$



Здесь  $u_i$  - смещение атомов от положения равновесия,  $m$  - масса одного атома,  $C$  - жесткость пружин. Пусть  $a$  - расстояние, между атомами в состоянии равновесия. Если подставить в уравнения движения плоскую волну

$$u_n = u_0 e^{ikan - i\omega t},$$

можно найти закон дисперсии одноатомной цепочки:

$$\omega^2(k) = \frac{4C}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}.$$

Найдите уравнения движения и закон дисперсии “двухатомной” цепочки, т.е. такой же цепочки, как выше, с единственным отличием - массы атомов чередуются как

$$m_n = \begin{cases} m & n = 2l \\ M & n = 2l + 1 \end{cases}$$

Без ограничений общности считайте, что  $M > m$ .

*Подсказка: может быть удобно составить “вектор смещений”*

$$\vec{U}_l = \begin{pmatrix} u_{2l} \\ u_{2l+1} \end{pmatrix}.$$