

# Семинар по теме: «Интегралы с малым параметром»

21 февраля 2019 г.

На этом и следующих трёх занятиях будут рассмотрены интегралы, зависящие от параметра. При наличии малого параметра существует несколько способов оценить интеграл:

- Разложение в ряд
- Выделение существенной области интегрирования
- Метод перевала или стационарной фазы

На данном семинаре будут рассмотрены первые 2 метода.

## Ликбез

Следующие интегралы будут часто использоваться в курсе:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \pi \quad (2)$$

Вычислим первый (гауссов) интеграл:

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2-t^2} = \int_0^{+\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r^2} = \pi$$

Извлекая корень, получаем (1). Для вычисления (2) рассмотрим интеграл:

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

На первый взгляд, этот интеграл сложнее исходного. Однако, при помощи дифференцирования по параметру  $\lambda$ , его можно существенно упростить, вычислить, а потом проинтегрировать обратно. Действительно, получаем:

$$I'(\lambda) = - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x + ix} = -\operatorname{Im} \frac{1}{\lambda - i} = -\frac{1}{\lambda^2 + 1}$$

Интегрируя, находим:

$$I(\lambda) = -\arctan \lambda + C$$

Константу найдём из рассмотрения предела  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Имеем:

$$I(\lambda) \approx 0 = C - \frac{\pi}{2}$$

Отсюда,  $C = \pi/2$  и  $I(0) = \pi/2$ . Это был пример вычисления интеграла с параметром. Более подробно эта тема будет изучаться в лекции №3.

## Оценка рядов

В некоторых случаях можно с хорошей точностью оценить ряд при помощи формулы:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \approx \int_0^{\infty} dn f(n)$$

Эта формула работает в случае

$$\frac{|f(n) - f(n-1)|}{|f(n)|} \ll 1$$

## Задача 1

Найдём асимптотики интеграла при  $x \gg 1$  и  $x \ll 1$ :

$$I(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

## Решение

Подынтегральная функция аналитична в нуле, поэтому при  $x \ll 1$  можно просто разложить  $\cos t$  в ряд Тейлора; имеем:

$$I(x) \approx \int_0^x \frac{t^2/2}{t} dt = \frac{1}{4} x^2$$

При  $x \gg 1$ , для интеграла важна вся область интегрирования; это связано с тем, что при  $x \rightarrow \infty$  этот интеграл расходится. Для выделения ведущей асимптотики можно воспользоваться трюком. Во-первых, поведение функции в нуле аналитично, поэтому интеграл можно представить в виде:

$$I(x) = \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t} dt + \int_1^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

Поскольку на области интегрирования  $\cos x$  успевает осциллировать много раз, во втором слагаемом мы можем его выбросить (известно, что  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  сходится и равен  $\frac{\pi}{2}$ , поэтому при выбрасывании косинуса мы потеряем некую константу  $\sim 1$ ). Во-вторых, поскольку подынтегральная функция аналитична в нуле, то первое слагаемое тоже даст число  $\sim 1$ . Таким образом формально можно записать:

$$I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} + O(1) \approx \ln x$$

На фоне большого слагаемого  $\ln x \gg 1$  (при  $x \gg 1$ ), выброшенные константы порядка единицы являются малой добавкой. Это называется взятием интеграла с логарифмической точностью. Точное вычисление асимптотики дает ответ  $\ln x + C + o(1)$ , где  $C \approx 0.577$  - постоянная Эйлера-Маскерони.

## Задача 2

Найдём асимптотики интеграла при  $a \gg b$  и  $a \ll b$ :

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-x/a)}{\sqrt{x(x+b)}} dx$$

## Решение

Обезразмерим интеграл, введя переменную  $t = \frac{x}{a}$ :

$$I(a, b) \equiv I\left(\frac{b}{a}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t\left(t + \frac{b}{a}\right)}} dt$$

**Случай**  $b \gg a$  Из-за экспоненты, подынтегральное выражение быстро затухает на масштабах  $t \sim 1$  вблизи нуля. Поэтому в существенной области интегрирования  $t \ll \frac{b}{a}$  и в знаменателе можно выбросить  $t$  на фоне большого члена  $\frac{b}{a}$ . Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \sqrt{\frac{a}{b}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi a}{b}}$$

Заменой  $t = z^2$  мы свели интеграл к известному интегралу Пуассона.

**Случай**  $b \ll a$  Тут экспонента тоже затухает очень быстро на масштабах  $\sim 1$ . Однако, если выбросить  $\frac{b}{a}$  в знаменателе, мы получим расходящийся интеграл - около нуля экспонента ведет себя примерно как 1, и подынтегральная функция имеет асимптотику  $\sim \int_0^\infty \frac{1}{t} dt$ , то есть расходится логарифмически. Поэтому тут существенная область интегрирования теперь - вблизи нуля. Интеграл можно переписать как:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t\left(t + \frac{b}{a}\right)}} dt + \int_1^\infty \dots$$

Второе слагаемое - сходящийся интеграл, который из-за экспоненты - число порядка 1 (формально можно оценить как  $I_2 < \int_1^\infty e^{-t} dt = \frac{1}{e} \sim 1$ ); на фоне большого первого слагаемого его можно выбросить. Далее, поскольку, как было уже сказано, существенная область интегрирования лежит около нуля, экспоненту можно положить равной 1. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\left(t + \frac{b}{a}\right)}} dt$$

Этот интеграл уже можно просто взять. Введем замену  $t = z^2$ :

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^1 \frac{2z dz}{\sqrt{z^2\left(z^2 + \frac{b}{a}\right)}} = 2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \frac{b}{a}}}$$

Теперь введем замену  $z = \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh u$ ; тогда  $z^2 + \frac{b}{a} = \frac{b}{a} (\sinh^2 u + 1) = \frac{b}{a} \cosh^2 u$ :

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx 2 \int_0^{\operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} \cosh u du}{\sqrt{\frac{b}{a}} \cosh u} = 2 \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Для гиперболического арксинуса есть известное выражение через элементарные функции  $\operatorname{arcsinh} x = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$ . Значит:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx 2 \ln \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{b} + 1} \right) \approx \ln \frac{a}{b} \gg 1$$

(тут мы выбросили малые константные члены на фоне большой основной логарифмической асимптотики).

## Задача 3

Найдём асимптотики интеграла при  $a \ll b$  и  $a \gg b$ :

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{\sin(\frac{x}{a})}{x(x^2 + b^2)} dx$$

## Решение

Обезразмерим интеграл, введя переменную  $t = \frac{x}{a}$ :

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{at(a^2t^2 + b^2)} a dt = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t(t^2 + \frac{b^2}{a^2})} dt \equiv \frac{1}{a^2} I\left(\frac{b}{a}\right)$$

**Случай  $a \gg b$**  Если выбросить  $\frac{b^2}{a^2} \ll 1$  по сравнению с  $t$  в знаменателе, то мы получим расходящийся интеграл (в нуле как  $\sim \int_0^\infty \frac{dt}{t^2}$ ). Из этого можно заключить, что основная область, где интеграл набирается - вблизи нуля. Поэтому  $\sin t$  можно разложить; имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{a}{b} \arctan\left(\frac{b}{a}t\right) \Big|_0^\infty = \frac{\pi a}{2b} \Rightarrow I(a, b) = \frac{\pi}{2ab}$$

**Случай  $a \ll b$**  Поскольку интеграл от функции  $\frac{\sin t}{t}$  набирается на масштабах порядка  $\sim 1$  (из-за осциллирующего синуса), то в знаменателе можно выбросить  $t^2$  на фоне  $\frac{b^2}{a^2} \gg 1$ . Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^\infty \frac{\sin x}{x \frac{b^2}{a^2}} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow I(a, b) \approx \frac{\pi}{2b^2}$$

## Задача 4

Вычислить в главном приближении интеграл:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \exp \left[ -\alpha \left( \frac{\theta}{2} + \sin \theta \right) \right],$$

а также найти первую ненулевую поправку к нему в двух случаях:

1)  $\alpha \ll 1$ ;

2)  $\alpha \gg 1$ .

## Решение

**Случай  $\alpha \ll 1$**  На всей области интегрирования аргумент экспоненты мал и можно пользоваться разложением в ряд Тейлора:

$$I \approx \int_0^{2\pi} d\theta \left( 1 - \alpha \left( \frac{\theta}{2} + \sin \theta \right) \right) = 2\pi (1 - 3\pi\alpha/2).$$

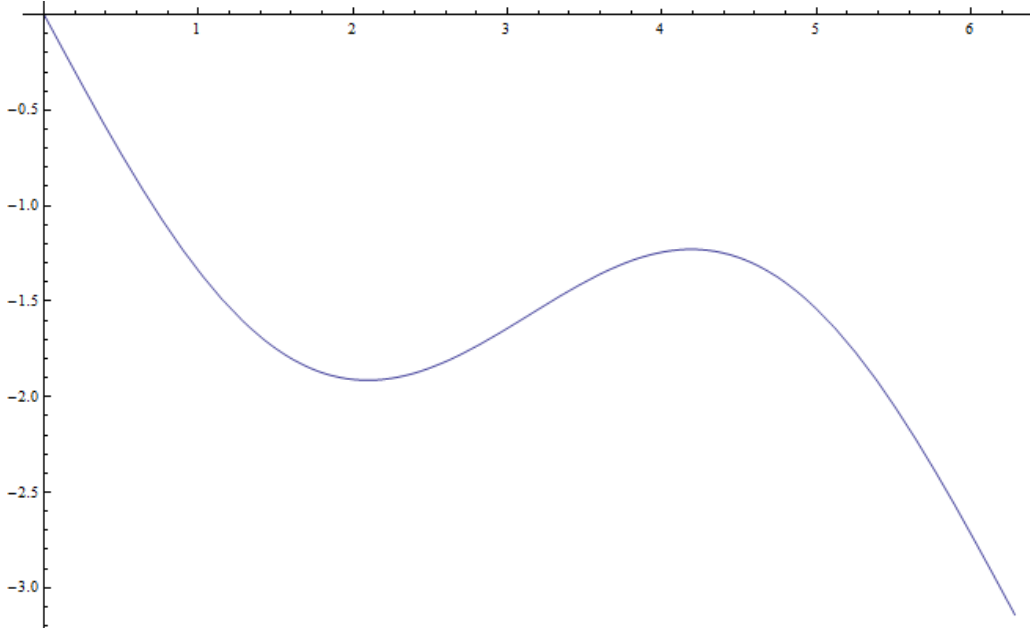


Рис. 1: График функции  $\frac{\theta}{2} + \sin \theta$ .

**Случай  $\alpha \gg 1$**  В этом случае интеграл набирается вблизи 0 (см. рис.). В первом приближении получаем:

$$I \approx \int_0^{2\pi} d\theta \exp \left[ -\frac{3}{2}\alpha\theta \right] = \frac{2}{3\alpha} (1 - e^{-3\pi\alpha}) \approx \frac{2}{3\alpha}.$$

Заметим, что в данном случае  $e^{-3\pi\alpha}$  не является первой поправкой. Действительно, дополнительным источником поправок является разложение синуса в экспоненте до кубического члена и далее. Т.к. интеграл набирается на  $\theta \sim \alpha^{-1}$ , то поправка от разложения синуса будет иметь степенную малость ( $\sim \alpha^{-3}$ ), а не экспоненциальную. Найдём теперь численный коэффициент перед этой поправкой:

$$I \approx \int_0^{2\pi} d\theta \exp \left[ -\frac{3}{2}\alpha\theta + \alpha\theta^3/6 \right] \approx \frac{2}{3\alpha} + \frac{1}{6}\alpha \int_0^{2\pi} d\theta \theta^3 e^{-3\alpha\theta/2} \approx \frac{2}{3\alpha} + \frac{16}{81\alpha^3}.$$

В последнем равенстве мы опять отбросили граничные члены в интеграле из-за их экспоненциальной малости.

## Задачи для домашнего решения

### Упражнение 1

Пусть  $a, b > 0$ . Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(a, b) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin^2 bx}{x^2} dx$$

при а)  $a \gg b$  и б)  $a \ll b$  (здесь и далее можно ограничиться главным порядком малости и все параметры считать положительными).

### Упражнение 2

Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} \frac{1}{(x-1)^2 + b^2} dx$$

при а)  $a \ll 1$ ,  $b \sim 1$  и б)  $a = b \gg 1$ .

### Упражнение 3

Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + a^2} (1 - \tanh bx) dx$$

При  $b \ll 1$  и  $a \ll 1$ .

### Упражнение 4

Приблизительно вычислите сумму

$$S(a, b) = \sum_{n=0}^\infty n^a e^{-bn}$$

при а)  $a \sim 1$  и  $b \ll 1$ , б)  $b \gg \frac{a}{b} \gg 1$ . Параметр  $a$  считать натуральным числом.

### Задача 1

Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2} dx$$

при а)  $1 \gg a$ , б)  $1 \ll a$ .

### Задача 2

Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(n, a, b) = \int_0^a \frac{x^n}{e^{x/b} - 1} dx$$

при а)  $b \gg a$  и б)  $n \gg 1$ ,  $nb \ll a$ . Параметр  $n$  предполагается натуральным числом.