Семинар по теме: метод перевала

14 марта 2019 г.

Ликбез

Рассмотрим важный класс интегралов вида

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)} dt, \tag{1}$$

где $f(t)$ имеет *резкий* (условие резкости обсудим чуть позже) максимум при $t = t_0$. Вблизи t_0:

$$f(t) \approx f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2, \qquad f''(t_0) < 0. \tag{2}$$

Подставив это разложение в экспоненту, получаем гауссов интеграл, который элементарно вычисляется:

$$\boxed{I \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(t_0)|}}\, e^{f(t_0)}} \tag{3}$$

Это главная формула метода перевала.

Теперь посмотрим, чем мы пренебрегли в ряде Тейлора (2):

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t - t_0)^3 + \frac{f^{(4)}(t_0)}{4!}(t - t_0)^4 + \ldots.$$

Если подставить это в экспоненту и разложить по кубическому члену, в результате интегрирования получим ноль из-за нечётности относительно t_0. Поэтому наиболее существенное отброшенное нами слагаемое — это четвёртый порядок в ряде Тейлора. Без него наш интеграл набрался на $\Delta t \sim 1/\sqrt{|f''(t_0)|}$, где $\Delta t = t - t_0$. Пренебрежение четвёртым порядком в ряде Тейлора было законным, если на таких Δt он мал:

$$f^{(4)}(t_0)\Delta t^4 \ll 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f^{(4)}(t_0)}{\left(f''(t_0)\right)^2} \ll 1. \tag{4}$$

Это и есть условие применимости метода перевала, оно же условие резкости максимума функции $f(t)$.

Задача 1

Найти асимптотику интеграла

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$$

при $n \gg 1$.

Решение

Функция $\sin x$ имеет максимум в точке $\pi/2$, то есть на границе промежутка интегрирования. При этом, по мере удаления от $\pi/2$ подынтегральная функция убывает очень быстро. Дейстительно, например, в точке $\pi/6$ ее значение равно $2^{-n} \ll 1$. Поэтому $\pi/2$ — это острый максимум, а значит, приближенное вычисление можно выполнить методом перевала. Для этой цели необходимо привести выражение к стандартной для первала форме. Чтобы сделать это, мы переписываем

$$\sin t = e^{\ln \sin t} \quad \to \quad I(n) = \int_0^{\pi/2} e^{n \ln \sin t} dt$$

Разложим теперь выражение в экспоненте вблизи $\pi/2$ по формуле Тейлора вплоть до второго порядка. Проделав это, получаем

$$I(n) \simeq \int_0^{\pi/2} e^{n \ln(1-(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt \simeq \int_0^{\pi/2} e^{-n(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt$$

Видно, что мы практически получили Гауссов интеграл. Однако, здесь имеется два тонкости.

1. Характерным масштаб затухания подынтегральной функции по мере удаления от $\pi/2$ определяется из условия $n\Delta t^2 \sim 1$, то есть $\Delta t \sim n^{-1/2} \ll 1$. Это означает, что *нижний* предел интегрирования можно заменить на $-\infty$, ведь он находится на расстоянии $\sim 1 \gg n^{-1/2}$ от перевальной точки, и к существенным искажениям ответа такая замена не приведет.

2. С *верхним* пределом ситуация обстоит иначе. Дело в том, что он попадает в точности на максимум подынтегральной функции. Это приводит к тому, что от полного Гауссова интеграла нужно взять только половину, ведь вторая половина расположена в области $t > \pi/2$, по которой интегрирование не производится.

В результате получаем

$$I(n) \simeq \int_{-\infty}^{\pi/2} e^{-n(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Задача 2

Найти поведение интеграла при $a \gg 1$

$$I(a, x) = \int_0^x \exp(a \sin t) dt$$

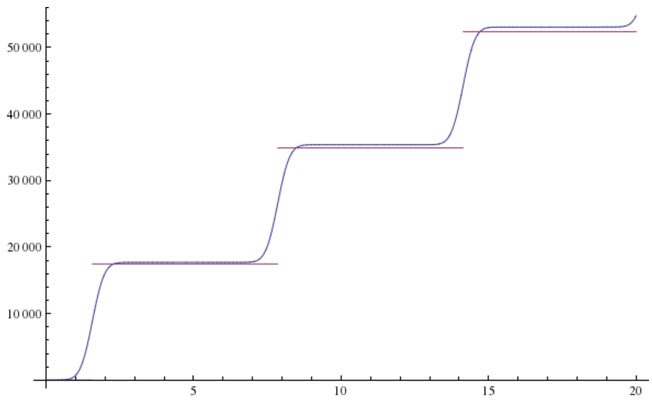
Решение

Особенность этой задачи заключается в том, что теперь у функции в показателе экспоненты бесконечное множество стационарных точек. Они определяются уравнением $f'(t) = a \cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$; при этом ровно половина из них являются локальными максимумами: $f''(t) = -a \sin t \Rightarrow f''(t_n) = (-1)^n a$; поэтому локальные максимумы - лишь точки $t_{2n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Вклад от окрестности каждой стационарной точки тоже легко определить:

$$I_{2n} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(a - \frac{a}{2}(t - t_{2n})^2) dt \approx \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^a$$

Займёмся теперь поведением нашего интеграла. По мере увеличения x, в область интегрирования будет попадать больше и больше перевальных точек. Вклад от каждой точки - постоянный; поэтому x будет достигать t_{2n}, функция будет испытывать резкий скачок на величину, примерно равную вкладу от одной перевальной точки. Таким образом, график функции будет представлять собой "лесенку"; ширина переходов между ступеньками по порядку равна $\sim \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Рис. 1: $I(a, x)$ и асимптотика



Важно отметить, что реальное значение интеграла такой функции по периоду отличается от апроксимации, полученной методом перевала. При больших x, когда имеется вклад от большого количества перевальных точек, эта погрешность складывается. Однако, относительная погрешность полученного результата по-прежнему остаётся малой.

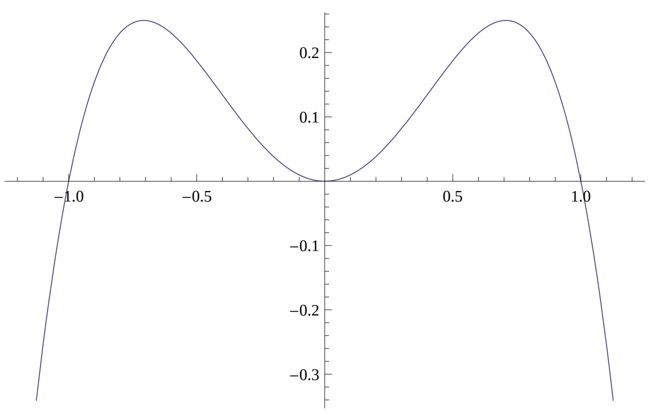
Задача 3 (несколько перевалов)

Найти асимптотическое поведение интеграла при $A \gg 1$

$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A(x^4 - x^2))dx$$

Решение

Рис. 2: $y = x^2 - x^4$



Функция в показателе экспоненты имеет два максимума:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значения в перевальных точках определяются как:

$$f(x_{1,2}) = -A\left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\frac{A}{4}$$

А вторые производные:

$$f''(x_{1,2}) = -A(12x_{1,2}^2 - 2) = -4A$$

Поэтому в окрестности каждой из точек функция представляется как:

$$f(x) \approx \frac{A}{4} - 2A(x - x_{1,2})^2$$

Обе точки дадут вклад в перевальную оценку; поэтому для асимптотики имеем:

$$I\left(A\right) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x-x_1)^2\right)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x-x_2)^2\right)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{A}}e^{A/4}$$

Задача 4 (перевал x^4)

Найти асимптотическое поведение интеграла при $A \gg 1$:

$$I\left(A\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\left(\cosh x - \frac{x^2}{2}\right)\right)dx$$

Решение

Поскольку функция $\cosh x$ вблизи нуля раскладывается как $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$, то видно, что ведущий член разложения функции в экспоненте имеет порядок x^4. Поэтому, следуя идее метода перевала о разложении функции в экспоненте в ряд около стационарной точки, для асимптотики этого интеграла имеем:

$$I(A) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\left(1 + \frac{x^4}{24}\right)\right)dx$$

Этот интеграл аналогичен интегралу Пуассона; его можно взять подстановкой $t = \frac{A}{24}x^4$, сводящей его к гамма-функции:

$$I(A) \approx e^{-A}\cdot 2\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{24}{A}\right)^{1/4}\frac{1}{4}t^{-3/4}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{A}\right)^{1/4}e^{-A}\int_0^{\infty} t^{-3/4}e^{-t}dt = \left(\frac{3}{2A}\right)^{1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)e^{-A}$$

Здесь $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.62561$ — просто некое число; оно не выражается через известные мировые константы (π, e, C, ...); однако это и не требуется.

Задачи для домашнего решения

Упражнение 1

Методом перевала приближенно вычислите интеграл при $\lambda \to +\infty$:

$$I(\lambda) = \int_{-1}^{1} \exp\left(\frac{\lambda}{\cosh^2 x}\right)dx.$$

Упражнение 2
Методом перевала приближенно вычислите интеграл при $\lambda \to +\infty$:

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x-1)^2(x-2)^2} dx.$$

Упражнение 3
Методом перевала приближенно вычислите интеграл при $\lambda \to +\infty$:

$$I(\lambda) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\lambda} dx.$$

Упражнение 4
Используя идеи, аналогичные методу перевала, в пределе $\lambda \to +\infty$ вычислите интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^1 \exp(\lambda(\sin x - x)).$$

Обратите внимание: в перевальной точке вторая производная функции в показателе экспоненты равна 0.

Задача 1
В пределе $\lambda \to +\infty$ вычислите интеграл

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cosh^{\lambda} x dx.$$

Задача 2
Рассмотрите интеграл с тремя параметрами:

$$I(\lambda, \epsilon, s) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x} \exp(-\lambda(1 - \cos x)) dx.$$

Вычислите его в пределе $\epsilon \ll 1, \quad \lambda \gg 1$,
считая, что s - произвольное число порядка 1.