Семинар по теме: «Дифференциальные уравнения с малым параметром»

2 мая 2019 г.

Исследование гармонического осцилятора с возбуждающей силой

Найдём общее решение дифференциального уравнения гармонического осциллятора с произвольной возмущающей силой:
$$\ddot{x} + \omega^2 x = \phi(t)$$
Для этого воспользуемся методом вариации постоянных. Используя решение однородного уравнения (с $\phi(t) \equiv 0$), запишем подстановку в виде:

$$x(t) = C_1(t)\cos\omega t + C_2(t)\sin\omega t$$

Очевидно, что поставленная так задача избыточна (имеются целых 2 произвольных функции). Для того, чтобы задача имела однозначное решение, наложим дополнительные ограничения. А именно, потребуем, чтобы при дальнейших дифференцированиях члены с первыми производными констант пропадали:

$$\dot{x} = \dot{C}_1\cos\omega t - \omega C_1\sin\omega t + \dot{C}_2\sin\omega t + \omega C_2\cos\omega t$$

Поэтому требуем:

$$\dot{C}_1\cos\omega t + \dot{C}_2\sin\omega t \equiv 0 \Rightarrow \dot{x} = -\omega C_1\sin\omega t + \omega C_2\cos\omega t$$

Дифференцируем:

$$\ddot{x} = -\omega\dot{C}_1\sin\omega t - \omega^2 C_1\cos\omega t + \omega\dot{C}_2\cos\omega t - \omega^2 C_2\sin\omega t$$

Подставляем в уравнение; получаем, вместе с дополнительным условием, затребованном выше:

$$\begin{cases} \dot{C}_1\cos\omega t + \dot{C}_2\sin\omega t & = 0 \\ \dot{C}_1\left(-\omega\sin\omega t\right) + \dot{C}_2\left(\omega\cos\omega t\right) & = \phi\left(t\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{C}_1 & = -\frac{1}{\omega}\phi(t)\sin\omega t \\ \dot{C}_2 & = \frac{1}{\omega}\phi(t)\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 & = -\frac{1}{\omega}\int_0^t \phi(\tau)\sin\omega\tau d\tau + \tilde{C}_1 \\ C_2 & = \frac{1}{\omega}\int_0^t \phi(\tau)\cos\omega\tau d\tau + \tilde{C}_2 \end{cases}$$

Значит, решение исходного неоднородного уравнения записывается как:

$$x\left(t\right) = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t \sin\omega(t-\tau)\phi(\tau)d\tau$$

Интересно, что такой вид ответа — общий. Решение всякого неоднородного линейного уравнения можно записать в виде:

$$x(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)\phi(\tau)d\tau$$

(где $x_0(t)$ — решение однородного уравнения; а постоянную t_0 можно выбрать произвольной); причём если уравнение однородно по времени (не зависит явно от времени), то $G(t,\tau) \equiv G(t-\tau)$. Функция $G(t,\tau)$ называется функцией Грина этого уравнения.

Задача 1 (теория возмущений)

При помощи изложенного выше метода можно исследовать задачи с возмущением. Исследуем задачу:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x & = -\epsilon\omega^2 x \\ x\left(0\right) & = a \\ \dot{x}\left(0\right) & = 0 \end{cases}$$

Решение

Точное её решение записывается как:

$$x(t) = a\cos(\sqrt{1+\epsilon}\omega t) \approx a\cos\left(\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2\right)\omega t\right) \approx$$
$$\approx a\cos\omega t - \frac{1}{2}\epsilon\omega t a\sin\omega t - \frac{1}{8}\epsilon^2 a(\omega t\sin\omega t - \omega^2 t^2\cos\omega t)$$

Эта асимптотика работет на временах $\epsilon\omega t \ll 1$. На примере этой простой задачи продемонстрируем, как разложение по ϵ можно получить по-другому, используя метод итераций. Если мы подставим решение в виде $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \ldots$ и соберём члены с одинаковыми степенями ϵ, то мы получим систему уравнений:

$$\ddot{x}_k + \omega^2 x_k = -\omega^2 x_{k-1}$$

Система уравнений в таком виде позволяет построить итерационный процесс, находя поправки высших порядков по ϵ. Используя метод, изложенный выше, можно записать:

$$x_k(t) = -\omega\int_0^t \sin\omega(t-\tau)x_{k-1}(\tau)d\tau$$

Начальное приближение записывается как $x_0(t) = a\cos\omega t$. Таким образом, первая поправка находится как:

$$x_1\left(t\right) = -\omega\int_0^t \sin\omega(t-\tau)a\cos\omega\tau d\tau = -\frac{1}{2}a\omega t\sin\omega t$$

Мы видим, что эта поправка совпадает с точным разложением. Вторая поправка:

$$x_2(t) = -\omega\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\left(-\frac{1}{2}a\omega\tau\sin\omega\tau\right)d\tau = \frac{1}{8}a\omega^2 t^2\cos\omega t - \frac{1}{8}a\omega t\sin\omega t$$

Исходя из этого, с точностью до ϵ^2 мы получаем ответ (конечно, совпадающий с разложением точного ответа, полученного выше):

$$x(t) \approx a\cos\omega t - \epsilon\cdot\frac{1}{2}a\omega t\sin\omega t + \epsilon^2\cdot\frac{1}{8}a\omega t(\omega t\cos\omega t - \sin\omega t)$$

Повторимся, что эта асимптотика работает на сравнительно малых временах, при условии $\omega t \ll \epsilon^{-1}$. Способ получения асимптотик, работающих на больших временах, включает в себя выделение "быстрых" и "медленных" степеней свободы; этот способ был изложен в лекции, а также частично будет изложен ниже.

Задача 2 (ангармонический осциллятор)

Расмотрим приближенное решение уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x &= -\epsilon x^3 \\ x(0) &= a \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{cases}$$

Решение

Метод, изложенный в задаче 1, можно применить и тут. Раскладывая по малости ϵ решение в виде $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t)$, мы получаем следующую систему уравнений, дающую нам первый шаг итерационного процесса:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= -x_0^3 \end{cases}$$

Первое уравнение опять имеет такое же невозмущенное решение $x_0(t) = a\cos\omega t$; решение второго уравнения записывается с помощью функции Грина:

$$x_1(t) = -\frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\cdot a^3\cos^3\omega\tau\cdot d\tau = -\frac{a^3}{\omega}\int_0^t [\sin\omega t\cos\omega\tau - \sin\omega\tau\cos\omega t]\cos^3\omega\tau\cdot d\tau$$

Интегрируя, и используя формулы понижения степени, мы приходим к результату:

$$x_1(t) = -\frac{a^3}{\omega^2}\left(\frac{3}{8}\omega t\sin\omega t + \frac{1}{32}\cos\omega t - \frac{1}{32}\cos 3\omega t\right)$$

Мы получили интересный физический результат: в нелинейном осциляторе появилось колебание с третьей гармоникой (то есть с частотой 3ω вместо ω).

Задача 3 (параметрический резонанс)

Рассмотрим теперь уравнение:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x &= -\epsilon x\cos\Omega t \\ x(0) &= a \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{cases}$$

в условиях близости к параметрическому резонансу $\Omega = 2\omega - \gamma$ ($\gamma \lesssim \frac{\epsilon}{2\omega}$, $\epsilon \ll \omega^2$)

Решение

Будем искать решение в виде:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \phi(t))$$

Формальная подстановка даёт:

$$\dot{x} = \dot{A}\cos(\omega t + \phi) - A(\omega + \dot{\phi})\sin(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x} = \ddot{A}\cos(\omega t + \phi) - 2\dot{A}(\omega + \dot{\phi})\sin(\omega t + \phi) - (\omega + \dot{\phi})^2 A\cos(\omega t + \phi) - A\ddot{\phi}\sin(\omega t + \phi)$$

Получаем:

$$\begin{aligned}&\ddot{A}\cos(\omega t + \phi) - 2\dot{A}(\omega + \dot{\phi})\sin(\omega t + \phi) - \\ &\qquad - \left(2\omega\dot{\phi} + \dot{\phi}^2\right) A\cos(\omega t + \phi) - A\ddot{\phi}\sin(\omega t + \phi) = -\epsilon A\cos(\omega t + \phi)\cos\Omega t\end{aligned}$$

Правую часть можно представить в виде $\frac{1}{2}\left(\cos\left(\omega t + \phi + \Omega t\right) + \cos\left(\Omega t - \omega t - \phi\right)\right)$. При $\Omega \sim 2\omega$, первый член будет близок к $\cos 3\omega t$. В этом смысле он отвечает за третью гармонику и нас не интересует; выбросим его. Получаем:

$$\begin{aligned}&\ddot{A}\cos(\omega t + \phi) - 2\dot{A}(\omega + \dot{\phi})\sin(\omega t + \phi) - \\ &\qquad - (2\omega\dot{\phi} + \dot{\phi}^2)A\cos(\omega t + \phi) - A\ddot{\phi}\sin(\omega t + \phi) = -\frac{\epsilon A}{2}\cos(\omega t + \gamma t - \phi)\end{aligned}$$

Из структуры уравнения видно, что если взять $\phi = \frac{\gamma t}{2} + \varphi$, все тригонометрические функции будут одного и того же вида (осциллировать с одинаковой частотой). Поэтому, обозначив $\omega' = \omega + \frac{\gamma}{2}$:

$$\begin{aligned}&\ddot{A}\cos(\omega' t + \varphi) - 2\dot{A}(\omega' + \dot{\varphi})\sin(\omega' t + \varphi) - \\ &\qquad - \left(2\omega\left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right) + \left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right)^2\right) A\cos(\omega' t + \varphi) - A\ddot{\varphi}\sin(\omega' t + \varphi) = -\frac{\epsilon A}{2}\cos(\omega' t - \varphi)\end{aligned}$$

Собирая члены при "быстрых" осциллирующих функциях $\cos\omega' t$ и $\sin\omega' t$, мы получаем следующую систему:

$$\ddot{A}\cos\varphi - 2\dot{A}(\omega' + \dot{\varphi})\sin\varphi - \left(2\omega\left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right) + \left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right)^2\right) A\cos\varphi - A\ddot{\varphi}\sin\varphi = -\frac{\epsilon A}{2}\cos\varphi$$

$$-\ddot{A}\sin\varphi - 2\dot{A}(\omega' + \dot{\varphi})\cos\varphi + \left(2\omega\left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right) + \left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right)^2\right) A\sin\varphi - A\ddot{\varphi}\cos\varphi = -\frac{\epsilon A}{2}\sin\varphi$$

Мы ожидаем, что A и φ - медленные переменные; это означает, что всякое дифференцирование этих переменных должно давать дополнительную малость. В ведущем прибижении это позволяет выбросить члены $\ddot{A}$, $\ddot{\varphi}$, $\dot{\varphi}^2$ и $\dot{A}\cdot\dot{\varphi}$ (те, в которых производных две). Кроме того, имеется просто малость $\gamma \ll \omega$. Это позволяет нам сильно упростить систему:

$$\begin{cases}-2\dot{A}\omega'\sin\varphi - \omega(\gamma + 2\dot{\varphi})A\cos\varphi &= -\frac{\epsilon A}{2}\cos\varphi \\ -2\dot{A}\omega'\cos\varphi + \omega(\gamma + 2\dot{\varphi})A\sin\varphi &= -\frac{\epsilon A}{2}\sin\varphi\end{cases}$$

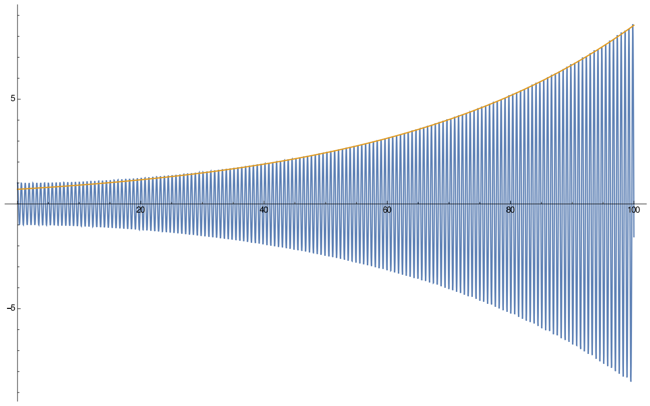
Заметим, что решение $\varphi = \mathrm{const}$ удовлетворяет этому уравнению, если $\tan^2\varphi = \frac{\epsilon - 2\omega\gamma}{\epsilon + 2\omega\gamma}$. При этом оставшееся уравнение на A записывается как:

$$\dot{A} = A\frac{\sqrt{\epsilon^2 - (2\omega\gamma)^2}}{4\omega} \Rightarrow A(t) \simeq C\exp\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\epsilon^2 - (2\omega\gamma)^2}{\omega^2}}t\right)$$

Во-первых видно, что резонанс пропадает при достаточно сильном несовпадении частот Ω и 2ω (а именно, условие записывается как $\gamma < \frac{\epsilon}{2\omega}$). При большем отклонении частоты мы не получим резонанс (то есть экспоненциальный рост), а получим биения ограниченной амплитуды.

Чтобы получить этот ответ, мы сделали предположения, а именно - мы предполагали "медленность" функций $A(t)$ и $\varphi(t)$; из этих предположений мы получили приближенное решение, которое эти предположения подтверждает. Таким образом, наше приближенное решение нашей системы непротиворечиво.

Рис. 1: Численное решение уравнения с параметрическим резонансом при условиях $\omega = 10$, $\epsilon = 1$, $\gamma = 0$; жёлтая линия - экспоненциальная огибающая $\sim \exp\left(\frac{\epsilon t}{4\omega}\right)$



Задачи для домашнего решения

Упражнение 1

Частица с зарядом $q > 0$ налетает на неподвижную частицу с зарядом $Q > 0$ с прицельным параметром b. Оцените угол отклонения частицы от исходного направления, считая частицу очень быстрой $mv^2/2 \gg qQ/b$.

Упражнение 2

Рассмотрите уравнение

$$\ddot{x} + \kappa \dot{x}^2 + \omega^2 x = 0$$

с начальным условием: $x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0$ при $\kappa a \ll 1$. Найдите главную поправку к невозмущенному решению ($\kappa = 0$), работающую при малых временах. При каком t такое приближенное решение перестает работать?

Упражнение 3

Рассмотрите уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon x^4$$

с начальным условием $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \omega a$ при $\epsilon a^3 \ll \omega^2$. Найдите главную поправку к невозмущенному решению ($\epsilon = 0$), работающую при малых временах. При каком t такое приближенное решение перестает работать?

Упражнение 4

Найдите функцию Грина уравнения

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = \phi(t).$$

Для этого рассмотрите задачу

$$\phi(t) \to 0, \quad t \to -\infty,$$

$$x(-\infty) = 0, \quad \dot{x}(-\infty) = 0$$

и решитие ее методом вариации постоянной.

Задача 1

Используя найденную функцию Грина найдите приближенно решение уравнения из упражнения 3 для

$$\phi(t) = \phi_0 \frac{\tau}{\tau^2 + t^2},$$

$$x(-\infty) = 0, \quad \dot{x}(-\infty) = 0$$

при $\tau \ll \gamma^{-1} \ll t$.

В таком случае решение можно представить в виде

$$x(t) = C\left(1 + a_1 \frac{\tau}{t} + a_2 \frac{\tau}{t}\frac{1}{\gamma t} + ...\right)$$

Определите C, a_1, a_2.

Задача 2

Частица массы m движется в потенциале $U(x) = -U_0 \cos(x/a)$. Помимо этого на частицу действуют сила вязкого трения -$\gamma m \dot{x}$ и постоянная сила F. Пока сила $F > U_0/a$, у частицы имеется режим движения с постоянной средней скоростью. Если силу постепенно уменьшать, то из-за инерции этот режим может сохраниться вплоть до некоторого критического значения F_c. Найдите значение F_c в случае малого трения и определите критерий применимости ответа.