# Семинар по теме: «Вариационные задачи»

2 мая 2019 г.

## Общая теория

Вариационные задачи, возникающие чаще всего в приложениях, сводятся к минимизации функционала (в механике он называется "действием"):

$$S\left[x\left(t\right)\right] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

с некой функцией $L(x, \dot{x}, t)$, называемой в механике "функцией Лагранжа" или "лагранжианом". Этот функционал ставит в соответствие функции $x(t)$ некое число. Вариационная задача заключается в нахождении такой функции $x(t)$, чтобы действие на ней было минимальным (или максимальным). Для обычных функций $f(x)$ условие экстремума можно записать следующим образом. Точка $x = x_{min}$ является экстремумом, если разложение до линейного порядка по $\delta x = x - x_{min}$ около этой точки зануляется:

$$f(x) - f(x_{min}) = f'(x_{min})\delta x + \underline{O}(\delta x^2) = 0 \Rightarrow f'(x_{min}) = 0$$

Это можно обобщить и на случай функционала. Пусть $x_{min}(t)$ - функция, на которой достигается экстремум функционала $S[x(t)]$. Тогда необходимо слабо возмутить эту функцию, рассмотрев значение функционала на функции $x(t) = x_{min}(t) + \delta x(t)$ и найти линейную по $\delta x$ часть приращения функционала:

$$\begin{aligned}\delta S = S[x_{min}(t) + \delta x(t)] - S[x_{min}(t)] \equiv \\ \equiv \int_{t_1}^{t_2} \Big(L(x_{min}(t) + \delta x(t), \dot{x}_{min}(t) + \dot{\delta x}(t), t) - L(x_{min}(t), \dot{x}_{min}(t), t)\Big)\, dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \cdot \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\delta x}(t)\right) dt + \underline{O}(\delta x^2)\end{aligned}$$

Второе слагаемое можно проинтегрировать по частям. Для того, чтобы не рассматривать внеинтегральный член, добавим к нашей вариационной задаче так называемое условие закреплённых концов, а именно: функционал минимизируется на таких функциях $x(t)$, что $x(t_1) \equiv x_1$ и $x(t_2) \equiv x_2$ (значения на краях фиксированы). Это значит, что вариация удовлетворяет $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, поэтому внеинтегрального члена не будет:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \delta x(t) dt$$

Требование $f'(x_{min}) = 0$ в нашем случае заменяется на требование равенства нулю так называемой вариационной производной:

$$\frac{\delta S}{\delta x} \underset{def}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Это - обыкновенное дифференциальное уравнение; и функция, на которой действие достигает экстремального значения, обязана ему удовлетворять. Это уравнение называется уравнением Эйлера-Лагранжа.

## Примеры вариационных задач

### Геометрическая оптика

Первый пример, в которых возникают вариационные задачи - это принцип Ферма в геометрической оптике, гласящий, что свет распространяется по такой траектории, на которой время его движения минимально. Запишем это на условие языке вариационной задачи. Пусть показатель преломления как-то меняется в пространстве $n(\mathbf{r})$; в этом случае, скорость света в среде записывается как $v(\mathbf{r}) = \frac{c}{n(\mathbf{r})}$. Пусть луч света описывает некую траекторию $\{\mathbf{r}(t), t \in (t_1, t_2)\}$ (при этом параметр $t$ попросту параметризует эту траекторию; не стоит его путать со временем). Время распространения на этой траектории тогда записывается в виде криволинейного интеграла:

$$T[\mathbf{r}(t)] = \oint_{\mathbf{r}(t)} \frac{dr}{v(\mathbf{r})} \equiv \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} n(\mathbf{r}(t)) \left|\dot{\mathbf{r}}(t)\right| dt$$

В трехмерном пространстве “лагранжиан” этого функционала зписывается как (опуская несущественный фактор $1/c$):

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv n(\mathbf{r})|\dot{\mathbf{r}}| = n(x, y, z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

В случае многих координат необходимо писать систему уравнений Эйлера-Лагранжа на каждую из координат, то есть:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} & = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial L}{\partial y} & = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial L}{\partial z} & = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \end{cases}$$

### Классическая механика

Уравнения классической механики также можно переформулировать на вариационном языке. В общем случае оказывается, что лагранжиан записывается как $L = T - \Pi$, где $T$ - кинетическая энергия, а $\Pi$ - потенциальная. В частности, для классической частицы массы $m$, движущейся в одномерье в потенциале $U(x)$, лагранжиан имеет вид

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

и соответствующее уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид просто второго закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

## Задача 1

Пусть теперь свет распространяется в среде с переменным показателем преломления, с зависимостью:

$$n\left(x, y\right) = n_0 - \beta xy$$

причём параметр $\beta$ мал. Исследуем траекторию, по которой луч будет двигаться из точки $(0; 0)$ в точку $(L; 0)$.

**Решение**

Пусть свет распространяется по траектории $y(x)$. Обезразмерим задачу, перейдя к $\widetilde{x} = \frac{x}{L}$ и $\widetilde{y}(\widetilde{x}) = \frac{y(x)}{L}$. В таком случае, обезразмеренная задача записывается как:

$$S[y(x)] = \int_0^L n(x, y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2}dx = n_0 L \int_0^1 \left(1 - \frac{\beta L^2}{n_0}\tilde{x}\tilde{y}\right)\sqrt{1 + \tilde{y}'\left(\tilde{x}\right)^2}d\tilde{x}, \quad \widetilde{y}(0) = \widetilde{y}(1) = 0$$

Таким образом, в задаче имеется единственный важный безразмерный параметр $\kappa = \frac{\beta L^2}{n_0}$; малость $\beta$ на самом деле означает $\kappa \ll 1$. Из малости $\kappa$, в частности, следует малость $y(x)$ и $y'(x)$ (тут и далее знак "~" будет опускаться), что позволит нам разложить корень:

$$S[y(x)] = n_0 x_0 \int_0^1 (1 - \kappa xy)\sqrt{1 + y'^2}dx \approx n_0 x_0 \int_0^1 (1 - \kappa xy + \frac{1}{2}y'^2)dx$$

Тут мы также выбросили "перекрёстный" член $\kappa xy \cdot y'^2$, поскольку он имеет ту же малость, что и следующий порядок разложения корня $y'^4$; оставлять его было бы превышением точности.

**Пробная функция** Найдём приближённую траекторию, минимизируя "действие" в классе пробных функций $y_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$. Такие решения представляют собой параболы; они, конечно, отличаются от настоящего решения этой задачи. Однако, вариационный принцип позволяет нам найти параболу, которая больше всего "похожа" на точное решение. В нашем случае, "действие", в которое мы подставим такое решение, становится функцией параметра $\alpha$. По этому параметру можно его минимизировать, и найти оптимальное значение $\alpha$. Получаем:

$$S[y_\alpha(x)] \approx n_0 x_0 \int_0^1 \left[1 - \kappa x y_\alpha(x) + \frac{1}{2}y_\alpha'^2\right] dx = n_0 x_0 \left(1 - \frac{\alpha\kappa}{12} + \frac{\alpha^2}{6}\right)$$

Минимум по $\alpha$ достигается при $\alpha = \frac{1}{4}\kappa$; действие на нём равно $S = n_0 x_0(1 - \frac{1}{96}\kappa^2)$. Сама траектория записывается как $y(x) = \frac{\beta^2 L^3}{4n_0^2}x(L - x)$. Наибольшее отклонение по оси $y$ достигается в точке $x = \frac{1}{2}L$ и равно $y_{max} = \frac{1}{16}\kappa L = \frac{\beta L^3}{16 n_0}$.

**Аналитическое приближенное решение** В последнем приближении для действия, уравнение Эйлера-Лагранжа и его решение с учётом граничных условий записываются просто как:

$$y'' + \kappa x = 0 \Rightarrow y(x) = \alpha x(1 - x)(1 + \beta x)$$

$$y'' = 2\alpha(\beta - 1) - 6\alpha\beta x \Rightarrow \begin{cases} \beta &= 1 \\ \alpha &= \frac{\kappa}{6} \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{6}\kappa x(1 - x^2)$$

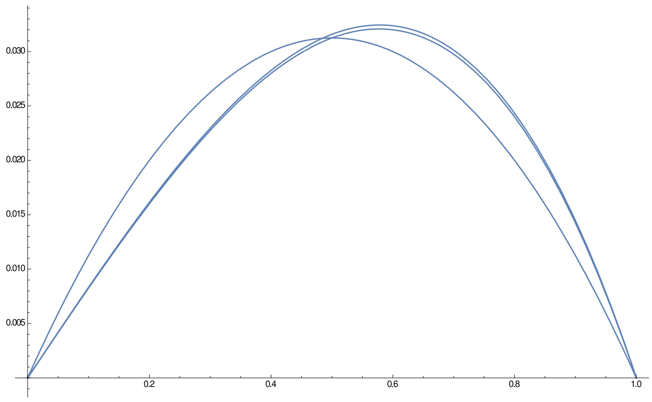
"Действие" на этом решении равно $S = n_0 x_0 \left(1 - \frac{\kappa^2}{90}\right)$ (оно меньше найденного в прошлом пункте; это приближение лучше). Максимальное отклонение достигается при $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$ и равно $y_{max} = \frac{1}{9\sqrt{3}}\kappa L \approx \frac{1}{15.6}\kappa L$ (можно сравнить с 1/16, полученной в прошлом пункте).

**Численный анализ** Наконец, можно решать численно уравнения Эйлера-Лагранжа, которые в данном случае записываются как:

$$y'' + \kappa x(y'^2 + 1) - \kappa y \left(xy'' + y'^3 + y'\right) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Для сравнения, приведём все три сделанных приближения на одном рисунке. Оказывается, что приближенное аналитическое решение даёт правильную ведущую асимптотику по $\kappa$, включая численный префактор.

Рис. 1: Точное решение и два приближённых для $\kappa = 0.5$




## Задача 2 (статика и теория упругости)

Пусть имеется цепочка из $N$ точечных масс $\tilde{m}$, соединённых пружинками жёсткостью $\tilde{k}$; пружинки в нерастянутом состоянии имеют длину $a$. Первый шарик закрепляют в точке $(0;0)$, а последний - в точке $(L;0)$ (ось $y$ направлена вертикально вверх). Под действием силы тяжести, цепочка провисает. Исследуем это провисание в пределе $N \to \infty$.

Чтобы задача имела конечный предел $N \to \infty$, параметры задачи тоже нужно менять в зависимости от $N$. Эта задача является моделью упругого тела (пружины) массы $M$ и жёсткостью $k$, которая провисает под собственным весом. Если это так, то жёсткости каждой из маленьких пружинок выражаются как $\tilde{k} = k\frac{L}{a} = kN$, а массы равны $\tilde{m} = M\frac{a}{L} = \frac{M}{N}$.

### Решение

Пусть координаты каждого из шариков $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{N}$. Потенциальная энергия складывается из двух вкладов: во-первых, это потенциальная энергия в поле тяжести, а во-вторых, энергия растяжения пружинок:

$$U_1 = \sum_{n=1}^{N} \tilde{m} g y_n$$

$$U_2 = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2}\tilde{k}\left[\sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} - a\right]^2$$

Проведём теперь переход к пределу $N \to \infty$. Для этого введём вместо $x_n$ и $y_n$ непрерывные функции $x(l = na) \equiv x_n$ и $y(l = na) \equiv y_n$ и $l \in [0, L]$. Во-вторых, заменим суммы на интегралы по правилу $\sum_{n=1}^{N} \mapsto \int_0^L \frac{dl}{a}$. Наконец, конечные разности, стоящие под корнем, выразим через производные. Получим следующий функционал энергии:

$$U[x(l),y(l)] = \int_0^L dl\left[\frac{1}{2}kL\left(\sqrt{x'^2+y'^2}-1\right)^2+\frac{1}{L}Mgy\right]$$

Во-первых, мы избавились от всех бесконечно малых и бесконечно больших величин, оставшиеся величины имеют конечный предел при $N\to\infty$. Это явный признак того, что мы правильно выбрали зависимость параметров исходной задачи от $N$ для воспроизведения непрерывного предела. Во-вторых, физический смысл $x(l)$ и $y(l)$ можно понять следующим образом. Пусть в какой-то момент гравитацию "выключили"; при этом пружинка будет располагаться в горизонтальном положении; и $x(l)=l$ и $y(l)=0$. После "включения" гравитации, пружина провиснет, при этом точка, которая изначально имела координаты $(l,0)$ переместится в точку $(x(l),y(l))$. Наконец, обезразмерим задачу, введя следующие параметры: $\tilde{x}=\frac{x}{L}$, $\tilde{y}=\frac{y}{L}$, $\tilde{l}=\frac{l}{L}$,$\varkappa=\frac{Mg}{kL}$, $\tilde{U}=\frac{U}{kL^2}$. Получим:

$$U\left[x(l),y(l)\right] = \int_0^1 dl\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{x'(l)^2+y'(l)^2}-1\right)^2+\varkappa y(l)\right],\quad x(0)=y(0)=y(1)=0,x(1)=1$$

Тут и далее, как всегда, все знаки "~" будут опускаться. Поскольку мы предполагаем провис маленьким (иначе теория упругости, вообще говоря, не работает) - это значит, что параметр $\kappa\ll 1$.

**Размерный анализ** Получим из соображений размерности характерную высоту провисания пружинки. Пусть пружинка провисла на величину $h$. Тогда в интеграле можно сделать следующие оценки: $x'\sim 1$, $y\sim -h$, $y'\sim -h$ (напомним, что в обезразмеренной задаче $L=1$; иначе оцена выглядела бы как $y'\sim -\frac{h}{L}$). Таким образом, потенциальная энергия имеет вид:

$$U\sim h^4-\kappa h$$

Имеется противоборство двух вкладов: член $\sim\kappa h$, связанный с силой тяжести, стремится к наибольшему провисанию, в то время как член $\sim h^4$, связанный с упругой энергией, стремится "выровнять" пружинку и минимизировать провисание. Равновесие наступает, когда эти вклады примерно одинаковы, что дает нам размерную оценку на масштаб величины провисания:

$$h^4\sim\kappa h\Rightarrow h\sim\kappa^{1/3}$$

Потенциальная энергия при этом имеет масштаб:

$$U\sim h^4\sim\kappa^{4/3}$$

(напомним, что мы работаем в обезразмеренных единицах; в исходной задаче $h\sim L\kappa^{1/3}$).

**Пробная функция** В качестве пробной функции мы будем рассматривать параболы. Однако заметим, что параметризация $x(l)$ и $y(l)$ уже фиксирована; поэтому сделаем дополнительное приближение, а именно, мы пренебрежем смещением элементов пружины по горизонтали. Это приближение соответствует подстановке следующих пробных функций:

$$\begin{cases} x(l) &= l \\ y(l) &= -\alpha l(1-l) \end{cases}$$

(знак перед $\alpha>0$ выбран так, чтобы явно отразить тот факт, что пружинка будет провисать вниз). Подставляя её в приближенный функционал:

$$U[x(l),y(l)] = \int_0^1 dl\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+y'(l)^2}-1\right)^2+\varkappa y(l)\right]\approx\int_0^1 dl\left[\frac{1}{8}y'^4+\varkappa y\right]=\frac{\alpha^4}{40}-\frac{\alpha\kappa}{6}$$

Минимум достигается при $\alpha = \left(\frac{5}{3}\kappa\right)^{1/3}$; при этом энергия равна $U = -\frac{1}{8}\left(\frac{5}{3}\right)^{1/3}\kappa^{4/3} \approx -0.148 \cdot kL^2\left(\frac{Mg}{kL}\right)^{4/3}$; максимальное провисание равно $h = -y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}\kappa\right)^{1/3} \approx 0.296\kappa^{1/3}$.

**Аналитическое приближенное решение** Сделаем то же приближение $x(l) = l$; но при этом не будем ничего предполагать про $y(l)$, кроме её малости. В таком случае энергия запишется как:

$$U[x(l), y(l)] \approx \int_0^1 dl\left[\frac{1}{8}y'^4 + \varkappa y\right]$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа для этой задачи и его решение записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{2}y'^3\right) = \kappa \Rightarrow y'(l) = \sqrt[3]{2\kappa(l-l_0)} \Rightarrow y(l) = (2\kappa)^{1/3} \cdot \frac{3}{4}(l-l_0)^{4/3} + y_0 = \frac{3}{8}\kappa^{1/3}\left((2l-1)^{4/3} - 1\right)$$

Можно сравнить это решение с предыдущим. Энергия равна $U = -\frac{9}{56}\kappa^{4/3} \approx -0.161\kappa^{4/3}$ (то есть это приближение лучше предыдущего); максимальное провисание равно $h = -y(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}\kappa^{1/3} = 0.375\kappa^{1/3}$.

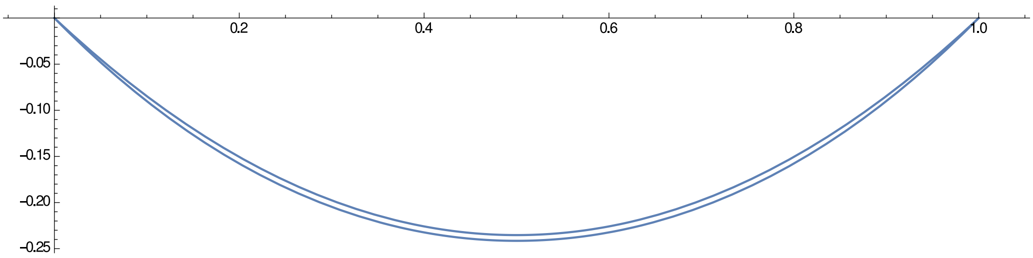
**Численное решение** Точные уравнения Эйлера-Лагранжа записываются как:

$$x'y'y'' + x'^2x''\sqrt{x'^2+y'^2} + x''y'^2\left(\sqrt{x'^2+y'^2} - 1\right) = 0$$

$$x'^2\left(\kappa\sqrt{x'^2+y'^2} - 2y''\left(\sqrt{x'^2+y'^2} - 1\right)\right) + \; + y'^2\sqrt{x'^2+y'^2}(\kappa - 2y'') - 2x'x''y' = 0$$

Это уравнение можно решать численно, сравнивая с аналитическими приближениями.

Рис. 2: Приближение к решению и точное решение при $\kappa = 0.5$




## Задачи для домашнего решения

### Упражнение 1

Используя кубическую пробную функцию, получить наилучшее приближенное решение для движения луча в среде с $n(x, y) = n_0 - \beta xy$ между двумя точками $x = 0$, $y = 0$ и $x = L$, $y = 0$. Считать, что $\beta L^2 \ll n_0$.

### Упражнение 2

Рассмотрите задачу про провисание пружины в случае, когда в нерастянутом состоянии длина пружины $L_0$ много меньше расстояния между точками закрепления $L$. Параметр $\kappa = Mg/kL$ считать малым: $\kappa \ll 1$.

**Упражнение 3**
Показатель преломления в атмосфере меняется с высотой как $n(z) = n_0(1 - \alpha z)$. Исследуйте, под каким углом будет видно точечный источник находящийся на расстоянии $d$ от наблюдателя, таком что $\alpha d \ll 1$

**Задача 1**
Между двумя кольцами радиуса $R$, разведенными на расстояние $d$, натянута мыльная пленка. Энергия пленки пропорциональна ее площади. Определите точно профиль пленки и найдите ее прогиб при $d \ll R$.