Семинар по теме: «Интегралы с малым параметром»

3 марта 2019 г.

На этом и следующих трёх занятиях будут рассмотрены интегралы, зависящие от параметра. При наличии малого параметра существует несколько способов оценить интеграл:

- Разложение в ряд
- Выделение существенной области интегрирования
- Метод перевала или стационарной фазы

На данном семинаре будут рассмотрены первые 2 метода.

Ликбез

Следующие интегралы будут часто использоваться в курсе:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \pi \tag{2}$$

Вычислим первый (гауссов) интеграл:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2-t^2} = \int_0^{+\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r^2} = \pi$$

Извлекая корень, получаем (1). Для вычисления (2) рассмотрим интеграл:

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

На первый взгляд, этот интеграл сложнее исходного. Однако, при помощи дифференцирования по параметру λ, его можно существенно упростить, вычислить, а потом проинтегрировать обратно. Действительно, получаем:

$$I^{'}(\lambda) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx = Im \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x + ix} = -Im \frac{1}{\lambda - i} = -\frac{1}{\lambda^2 + 1}$$

Интегрируя, находим:

$$I(\lambda) = -\arctan \lambda + C$$

Константу найдём из рассмотрения предела $\lambda \to +\infty$. Имеем:

$$I(\lambda) \approx 0 = C - \frac{\pi}{2}$$

Отсюда, $C = \pi/2$ и $I(0) = \pi/2$. Это был пример вычисления интеграла с параметром. Более подробно эта тема будет изучаться в лекции №3.

Оценка рядов

В некоторых случаях можно с хорошей точностью оценить ряд при помощи формулы:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) \approx \int_a^b dn f(n) + \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Эта формула работает в случае

$$\frac{|f(n) - f(n-1)|}{|f(n)|} \ll 1$$

и имеет простой смысл приближённого интегрирования методом трапеций. Условие применимости формулы - не что иное, как требование малости относительной ошибки метода трапеций при подсчёте площади под графиком $f(n)$. Иначе это требование можно записать как $f'(n) \ll f(n)$ для любого $a \leq n \leq b$.
Таким образом, эта формула даёт способ оценки ряда с медленно меняющимися членами. В противоположном случае быстроменяющихся членов ряда обычно можно выделить существенные члены и их просуммировать. Этому посвящено упражнение №4.

Задача 1

Найдём асимптотики интеграла при $x \gg 1$ и $x \ll 1$:

$$I(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

Решение

Подынтегральная функция аналитична в нуле, поэтому при $x \ll 1$ можно просто разложить $\cos t$ в ряд Тейлора; имеем:

$$I\left(x\right) \approx \int_0^x \frac{t^2/2}{t} dt = \frac{1}{4} x^2$$

При $x \gg 1$, для интеграла важна вся область интегрирования; это связано с тем, что при $x \to \infty$ этот интеграл расходится. Для выделения ведущей асимптотики можно воспользоваться трюком. Во-первых, поведение функции в нуле аналитично, поэтому интеграл можно представить в виде:

$$I\left(x\right) = \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t} dt + \int_1^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

Поскольку на области интегрирования $\cos x$ успевает осциллировать много раз, во втором слагаемом мы можем его выбросить (известно, что $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ сходится и равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому при выбрасывании косинуса мы потеряем некую константу~ 1). Во-вторых, поскольку подынтегральная функция аналитична в нуле, то первое слагаемое тоже даст число ~ 1. Таким образом формально можно записать:

$$I\left(x\right) = \int_1^x \frac{dt}{t} + O(1) \approx \ln x$$

На фоне большого слагаемого $\ln x \gg 1$ (при $x \gg 1$), выброшенные константы порядка единицы являются малой добавкой. Это называется взятием интеграла с логарифмической точностью. Точное вычисление асимптотики дает ответ $\ln x + C + o(1)$, где $C \approx 0.577$ - постоянная Эйлера-Маскерони.

Задача 2

Найдём асимптотики интеграла при $a \gg b$ и $a \ll b$:

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\exp(-x/a)}{\sqrt{x(x+b)}}dx$$

Решение

Обезразмерим интеграл, введя переменную $t = \frac{x}{a}$:

$$I(a,b) \equiv I\left(\frac{b}{a}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t\left(t+\frac{b}{a}\right)}}dt$$

Случай $b \gg a$ Из-за экспоненты, подыинтегральное выражение быстро затухает на масштабах $t \sim 1$ вблизи нуля. Поэтому в существенной области интегрирования $t \ll \frac{b}{a}$ и в знаменателе можно выбросить t на фоне большого члена $\frac{b}{a}$. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \sqrt{\frac{a}{b}}\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\frac{\pi a}{b}}$$

Заменой $t = z^2$ мы свели интеграл к известному интегралу Пуассона.

Случай $b \ll a$ Тут экспонента тоже затухает очень быстро на масштабах ~ 1. Однако, если выбросить $\frac{b}{a}$ в знаменателе, мы получим расходящийся интеграл - около нуля экспонента ведет себя примерно как 1, и подынтегральная функция имеет асимптотику $\sim \int_0^{\dots} \frac{1}{t}dt$, то есть расходится логарифмически. Поэтому тут существенная область интегрирования теперь - вблизи нуля. Интеграл можно переписать как:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t\left(t+\frac{b}{a}\right)}}dt + \int_1^\infty \dots$$

Второе слагаемое - сходящийся интеграл, который из-за экспоненты - число порядка 1 (формально можно оценить как $I_2 < \int_1^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{e} \sim 1$); на фоне большого первого слагаемого его можно выбросить. Далее, поскольку, как было уже сказано, существенная область интегрирования лежит около нуля, экспоненту можно положить равной 1. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\left(t+\frac{b}{a}\right)}}dt$$

Этот интеграл уже можно просто взять. Введем замену $t = z^2$:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^1 \frac{2zdz}{\sqrt{z^2\left(z^2+\frac{b}{a}\right)}} = 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{b}{a}}}$$

Теперь введем замену $z = \sqrt{\frac{b}{a}}\sinh u$; тогда $z^2 + \frac{b}{a} = \frac{b}{a}\left(\sinh^2 u + 1\right) = \frac{b}{a}\cosh^2 u$:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx 2\int_0^{\operatorname{arcsinh}\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}\cosh u du}{\sqrt{\frac{b}{a}}\cosh u} = 2\operatorname{arcsinh}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Для гиперболического арксинуса есть известное выражение через элементарные функции $\mathrm{arcsinh} x = \ln(a + \sqrt{a^2+1})$. Значит:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx 2\ln\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{b}+1}\right) \approx \ln\frac{a}{b} \gg 1$$

(тут мы выбросили малые константные члены на фоне большой основной логарифмической асимптотики).

Задача 3

Найдём асимптотики интеграла при $a \ll b$ и $a \gg b$:

$$I\left(a,b\right) = \int_0^\infty \frac{\sin(\frac{x}{a})}{x(x^2+b^2)}dx$$

Решение

Обезразмерим интеграл, введя переменную $t = \frac{x}{a}$:

$$I\left(a,b\right) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{at(a^2t^2+b^2)}adt = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t\left(t^2+\frac{b^2}{a^2}\right)}dt \equiv \frac{1}{a^2}I\left(\frac{b}{a}\right)$$

Случай $a \gg b$ Если выбросить $\frac{b^2}{a^2} \ll 1$ по сравнению с t в знаменателе, то мы получим расходящийся интеграл (в нуле как $\sim \int_0^{\cdots} \frac{dt}{t^2}$). Из этого можно заключить, что основная область, где интеграл набирается - вблизи нуля. Поэтому $\sin t$ можно разложить; имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{a}{b}\arctan\left(\frac{b}{a}t\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{\pi a}{2b} \Rightarrow I(a,b) = \frac{\pi}{2ab}$$

Случай $a \ll b$ Поскольку интеграл от функции $\frac{\sin t}{t}$ набирается на масштабах порядка ~ 1 (из-за осциллирующего синуса), то в знаменателе можно выбросить t^2 на фоне $\frac{b^2}{a^2} \gg 1$. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^\infty \frac{\sin x}{x\frac{b^2}{a^2}}dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow I(a,b) \approx \frac{\pi}{2b^2}$$

Задача 4

Вычислить в главном приближении интеграл:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \exp\left[-\alpha\left(\frac{\theta}{2}+\sin\theta\right)\right],$$

а также найти первую ненулевую поправку к нему в двух случаях:

1) $\alpha \ll 1$;

2) $\alpha \gg 1$.

Решение

Случай $\alpha \ll 1$ На всей области интегрирования аргумент экспоненты мал и можно пользоваться разложением в ряд Тейлора:

$$I \approx \int_0^{2\pi} d\theta \left(1 - \alpha\left(\frac{\theta}{2} + \sin\theta\right)\right) = 2\pi\left(1 - \pi\alpha/2\right).$$

Случай $\alpha \gg 1$ В этом случае интеграл набирается вблизи 0 (см. рис.).

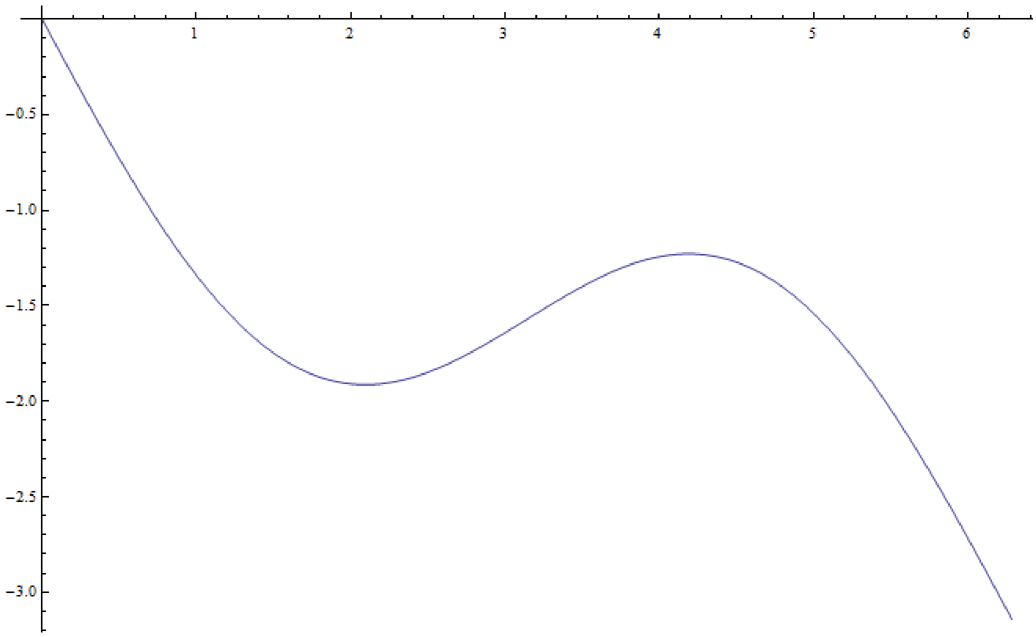

Рис. 1: График функции $\frac{\theta}{2} + \sin\theta$.

В первом приближении получаем:

$$I \approx \int_0^{2\pi} d\theta \exp\left[-\frac{3}{2}\alpha\theta\right] = \frac{2}{3\alpha}\left(1 - e^{-3\pi\alpha}\right) \approx \frac{2}{3\alpha}.$$

Заметим, что в данном случае $e^{-3\pi\alpha}$ не является первой поправкой. Действительно, дополнительным источником поправок является разложение синуса в экспоненте до кубического члена и далее. Т.к. интеграл набирается на $\theta \sim \alpha^{-1}$, то поправка от разложения синуса будет иметь степенную малость ($\sim \alpha^{-3}$), а не экспоненциальную. Найдём теперь численный коэффициент перед этой поправкой:

$$I \approx \int_0^{2\pi} d\theta \exp\left[-\frac{3}{2}\alpha\theta + \alpha\theta^3/6\right] \approx \frac{2}{3\alpha} + \frac{1}{6}\alpha\int_0^{2\pi} d\theta\theta^3 e^{-3\alpha\theta/2} \approx \frac{2}{3\alpha} + \frac{16}{81\alpha^3}.$$

В последнем равенстве мы опять отбросили граничные члены в интеграле из-за их экспоненциальной малости.

Задачи для домашнего решения

Упражнение 1
Пусть $a, b > 0$. Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin^2 bx}{x^2} dx$$

при а) $a \gg b$ и б) $a \ll b$ (здесь и далее можно ограничиться главным порядком малости и все параметры считать положительными).

Упражнение 2
Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} \frac{1}{(x-1)^2 + b^2} dx$$

при а) $a \ll 1, \quad b \sim 1$ и б) $a = b \gg 1$.

Упражнение 3
Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + a^2}(1 - \tanh bx) dx$$

При $b \ll 1$ и $a \ll 1$.

Упражнение 4
Приближенно вычислите сумму

$$S(a,b) = \sum_{n=0}^{\infty} n^a e^{-bn}$$

при а) $a \sim 1$ и $b \ll 1$, б) $b \gg \frac{a}{b} \gg 1$. Параметр a считать натуральным числом.

Задача 1
Найдите асимптотическое выражение для следующего иниеграла:

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2} dx$$

при а) $1 \gg a$, б) $1 \ll a$.

Задача 2
Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(n,a,b) = \int_0^a \frac{x^n}{e^{x/b} - 1} dx$$

при а) $b \gg a$ и б) $n \gg 1$, $nb \ll a$. Параметр n предполагается натуральным числом.