Семинар по теме: «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

18 апреля 2019 г.

Задача 1 (разложение в ряд)

Часто решение линейного дифференциального уравнения можно найти в виде разложения в ряд по степеням x. Проиллюстрируем это на примере. Найдём решение дифференциального уравнения Бесселя

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + y(x) = 0$$

в виде разложения $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Функцией Бесселя называется такое решение, которое в нуле регулярно и $J_0(0) = 1$.

Решение

Подставля $y(x)$ в нужном виде в уравнение, мы получаем:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k^2 a_k + a_{k-2}) x^{k-2} = 0$$

Приравнивая коэффициенты при различных степенях x нулю, мы получаем рекуррентное соотношение $a_k = -\frac{1}{k^2}a_{k-2}$. Поскольку $y(0) = 1$, то $a_1 = 0$ (т.к. это коэффициент перед $\frac{1}{x}$). Кроме того, $a_0 = 1$.
Из этого мы заключаем, что все нечётные члены равны нулю $a_{2k-1} \equiv 0$; а чётные равны:

$$a_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} \cdot \frac{-1}{(2(k-1))^2} \cdot \dots \cdot \frac{-1}{2^2} \cdot (-1) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}$$

$$y(x) \equiv J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Здесь необходим комменарий. Уравнение Бесселя имеет второй порядок по производной. Это, точно также, как и для гармонического осциллятора, означает, что имеется два линейно независимых решения. С другой стороны, используя разложение в ряд мы однозначно (с точностью до домножения на произвольную постоянную) нашли только одно решение. Встает вопрос: куда делось еще одно решение? Ответ состоит в том, что другое решение (которое обычно обозначают $Y_0(x)$ и называют функцией Неймана) не раскладывается в ряд в окрестности $x = 0$. Более точно, при малых x $Y_0(x) \simeq \frac{2}{\pi}\ln x$. Мы же, в свое время, при нахождении решения требовали его регулярности.

Задача 2 (математический маятник)

Рассмотрим классическое дифференциальное уравнение движения математического маятника ($\omega^2 = \frac{g}{l}$):

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin\varphi$$

Если из положения равновесия маятнику придать необходимую начальную скорость, конечное положение маятника может оказаться точно перевёрнутым. Найдём такое решение.

Решение

Для такого уравнения можно записать некую сохраняющуюся величину $E[\varphi(t)]$ (так называемый "первым интегралом"; он может зависеть как от φ в некий момент времени, так и от производных). Сохранение этой величины означает, что для любого $\varphi\,(t)$ - решения уравнения, будет выполнено $\frac{d}{dt}E[\varphi(t)] \equiv 0$. В данном случае, выражение для первого интеграла можно написать из физических соображений — известно, что для консервативных систем имеется закон сохранения энергии; в нашем случае его можно записать как:

$$E[\varphi(t)] = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2\cos\varphi$$

Действительно:

$$\frac{d}{dt}E[\varphi(t)] = \ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi) \equiv 0$$

Заметим, что если имеют место колебания амплитуды ϕ_0, то $E = -\omega^2\cos\varphi_0$.

При помощи первых интегралов можно понижать степень уравнения. Действительно, если величина E сохраняется, то мы можем просто записать уравнение уже первого порядка, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Кроме того, подставим значение энергии через амплитуду колебаний ϕ_0.

$$E = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2\cos\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}} = \omega dt$$

Вернемся к поиску решения $\varphi(t)$. Если теперь проинтегрировать полученное тождество и разрешить его, выразив $\varphi(t)$, мы полностью решим задачу в общем виде. Однако, в общем случае интеграл в левой части не выражается через элементарные функции; для таких интегралов введен целый класс специальных функций, называемые эллиптическими интегралами. В случае малых φ_0 его можно взять приближённо, заменив $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$; полученный ответ будет ни чем иным как гармоническим решением $\sin(\omega t + \varphi_0)$.

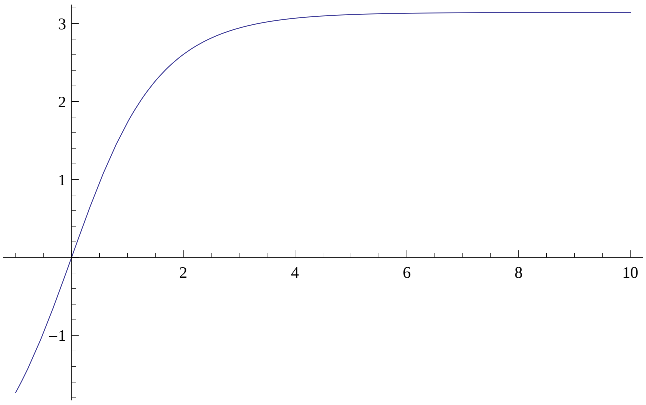
С другой стороны, есть ещё один специальный случай, когда это уравнение можно решить точно — случай $\varphi_0 = \pi$. При этом мы получаем:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\omega^2(1+\cos\varphi)}} = t - t_0 \Leftrightarrow \int \frac{d\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}} = \omega(t - t_0)$$

Интеграл берётся:

$$\int \frac{d\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}} = \int \frac{d(\sin\frac{\varphi}{2})}{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \left| \begin{array}{c} \sin\frac{\varphi}{2} = \tanh z \\ d(\sin\frac{\varphi}{2}) = \frac{dz}{\cosh^2 z} \end{array} \right| = \int dz = z = \operatorname{arctanh}\sin\frac{\varphi}{2}$$

Рис. 1: Решение $\varphi(t)$



Тем самым, выражая $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = 2 \arcsin \tanh \omega(t - t_0)$$

Заметим, что для того, чтобы маятнику "добраться" до точки $\varphi = \pi$, ему требуется бесконечное время (он лишь асимптотически приближается к этому значению). В обратную сторону это означает, что из вертикального положения маятник будет падать вечно; что, конечно, соответствует тому факту, что $\varphi = \pi$ — тоже положение равновесия системы.

Задача 3

Воспользуемся аппаратом матричных экспонент для того, чтобы решить следующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

с начальным условием

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение

В соответствии с материалом лекции, решение задачи выражается через матричную экспоненту следующий образом

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы вычислить матричную экспоненту, необходимо диагонализовать матрицу A. Первый шаг в этой процедуре — нахождение собственных значений при помощи секулярного уравнения

$$\det(A - \lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

Следующий шаг — нахождение собственных векторов. Для этого необходимо решить систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda_{1/2} & 2 \\ -3 & 4-\lambda_{1/2} \end{pmatrix} h_{1/2} = 0 \quad \to \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица перехода к диагональному базису записывается как

$$S = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Для матричной экспоненты получаем

$$e^{At} = Se^{A_\lambda}S^{-1}, \quad A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычисляя матрицу, обратную к матрице перехода, приходим к следующему выражению

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ 3e^t - 3e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

Стало быть, решение задачи с данным начальным условием $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ дается следующим выражением

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} \\ 3e^t - 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

Приложение: матричная экспонента от Жордановой клетки

Стоит иметь в виду, что *не любую* матрицу можно диагонализовать. При этом, согласно теореме Жордана, совершенно *любую* матрицу можно привести к Жордановому виду — блок-диагональной форме, в которой каждый блок представляет собой сумму $\lambda E + M$, где λ - некоторое число, E - единичная матрица, а M - матрица вида

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Комбинация $\lambda E + M$ называется Жордановой клеткой. Возникает уместный вопрос: как вычислять матричную экспоненту для такой Жордановой клетки?

Не углубляясь в детали, рассматотрим пример взятия матричной экспоненты от Жордановой матрицы размера 2×2. Таким образом, мы изучаем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Разобьем ее

$$A = \lambda E + M, \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что

$$M^2 = 0,$$

а тогда равны нулю и все степени M, кроме нулевой и первой. Это соображение позволяет нам очень легко вычислить произвольную степень n матрицы A, использую бином Ньютона

$$A^n = \lambda^n E + n\lambda^{n-1} M$$

Видим, что

$$e^{tA} = e^{\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^{n-1}\frac{t^n}{n!}M = e^{\lambda t} + M\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\frac{t^n}{n!} = e^{\lambda t} + M\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(E + tM)$$

Иными словами,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

В заключение отметим, что для Жордановых клеток размера, больше чем 2×2, помимо линейных по t элементов, могут появиться элементы с высшими степенями t.

Задачи для домашнего решения

Упражнение 1
Движение маятника в нелинейном пределе описываваетcя следующим уравнением:

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm\omega\sqrt{2(\cos\phi - \cos\phi_0)},$$

где ϕ_0 - его максимальное отклонение от положения равновесия в процессе движения. Пусть в начальный момент он практически перевернут, то есть $\phi(0) = \phi_0 = \pi - \delta\phi$, $\dot{\phi}(0) = 0$, где $\delta\phi \ll 1$. Оцените время падения маятника до положения $\phi = 0$.

Упражнение 2
Используя матричную экспоненту, решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3
Найдите разложение в ряд по x функции Бесселя $J_m(x)$ целого порядка m, определяемой как решение дифференциального уравнения:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y(x) = 0$$

Упражнение 4
Найдите общее решение уравнения движения маятника с вязким трением:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Качественно проанализируйте различные режимы движения в зависимости от соотношения между γ и ω.

Задача 1
В сверхпроводнике электроны ведут себя принципиально отлично от электроннов в обычном металле. В определенном смысле, они движутся парами (такие пары называются куперовскими). Для макроскопическом описания такого поведения вводят функцию ψ,

которая в каждой точке пропорциональна $\sqrt{n}$, где n - плотность куперовских пар, а в толще сверхпроводника равна 1.
Уравнение, которое описывает поведение функции ψ называется уравнением Гинзбурга-Ландау. В простейшем случае, оно имеет вид

$$-\xi^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} - \psi + \psi^3 = 0,$$

где ξ - некоторая величина размерности расстояния.
Применим его, чтобы описать контакт сверхпроводника с обычным металлом. Пусть полупространство $x > 0$ занимает сверхпроводник, а полупространство $x < 0$ - нормальный металл. Для простоты будем считать, что куперовские пары совсем не проникают в металл, то есть $\psi(0) = 0$. Учитывая, что $\psi(+\infty) = 1$, найдите $\psi(x)$.

Задача 2
Введем набор из трех эрмитовых матриц размера 2 на 2, которые называются матрицами Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Можно определить скалярное произведение произвольного вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ на вектор из матриц Паули $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ стандартным образом: $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) = \sum_{i=x,y,z} a_i \sigma_i$.
Вычислите следующую матричную экспоненту

$$e^{i\tau(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})},$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор с произвольным направлением, а τ - произвольное действительное число.
Примечание: выражение такого типа естественным образом возникает в квантовой механике при описании движения магнитного момента электрона в магнитном поле. В этом случае вектор $\vec{n}$ задает направление поля $\vec{B}$, а $\tau \sim Bt$, где t - время.