Семинар по теме: «Криволинейные, поверхностные и объёмные интегралы»

28 марта 2019 г.

Задача 1

Найдём энергию гравитационного взаимодействия шара массы M радиуса r и точечной частицы массы m, которая находится на расстоянии $R > r$ от него.

Решение

Результат известен из курса общей физики; эта энергия совпадает с энергией взаимодействия двух точечных частиц: $E = G\frac{Mm}{R}$ (G — гравитационная постоянная). Получим этот результат непосредственным вычислением. Из закона приятяжения следует, что энергия выражается в виде следующего интеграла по шару:

$$E = G\iiint_\Omega \frac{\rho m}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3\mathbf{r}$$

где вектор $\mathbf{R}$ направлен на точечную массу, $\rho = \frac{3M}{4\pi r^3}$ — плотность, а область интегрирования Ω представляет собой шар. Введем систему координат - поместим шар в начало координат; ось Oz направим на частицу, так что её координаты $\mathbf{R} = (0; 0; R)$. Запишем этот интеграл в сферических координатах: $d^3r = \rho^2 d\rho \sin\theta d\theta d\varphi$, причём вектор $\mathbf{r} = (\rho\sin\theta\cos\varphi; \rho\sin\theta\sin\varphi; \rho\cos\theta)$. Получаем:

$$E = G\frac{3Mm}{4\pi r^3}\int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{1}{\sqrt{(R - \rho\cos\theta)^2 + \rho^2\sin^2\theta}}$$

Интеграл по φ даёт просто 2π. Раскрывая скобки, видим, что в знаменателе стоит $R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$. Делая замену в получившемся интеграле $z = -\cos\theta \Rightarrow dz = \sin\theta d\theta$, мы приходим к следующему интегралу:

$$\begin{aligned} E = G\frac{3Mm}{2r^3}\int_0^r \rho^2 d\rho \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cdot z}} = \\ = G\frac{3Mm}{2r^3}\int_0^r \rho^2 d\rho \frac{1}{R\rho} \sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R\rho z}\Big|_{z=-1}^1 = \\ = G\frac{3Mm}{2r^3}\int_0^r \rho^2 d\rho \frac{1}{R\rho}(R + \rho - |R - \rho|) \underset{R>r\geq\rho}{=} G\frac{3Mm}{r^3 R}\int_0^r \rho^2 d\rho = \frac{GmM}{R} \end{aligned}$$

Задача 2

Найдём момент инерции тора большого радиуса R и малого радиуса r относительно оси, перпендикулярной “плоскости тора” и проходящей через его центр.

Решение

Введём координаты на торе:

$$\begin{cases} x &= (R+\rho\cos\theta)\cos\varphi \\ y &= (R+\rho\cos\theta)\sin\varphi \\ z &= \rho\sin\theta \end{cases}$$

При этом $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;2\pi]$, $\rho\in[0;r]$. Найдём якобиан перехода к таким координатам:

$$J=\det\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\rho} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix}=\det\begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -(R+\rho\cos\theta)\sin\varphi & (R+\rho\cos\theta)\cos\varphi & 0 \\ -\rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=$$
$$=(R+\rho\cos\theta)\rho(\cos^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\varphi+\cos^2\theta\sin^2\varphi)=\rho(R+\rho\cos\theta)$$

Посчитаем объём тора Ω:

$$V=\iiint_\Omega d^3\overline{r}=\int_0^r\rho d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\,(R+\rho\cos\theta)=\pi r^2\times 2\pi R$$

поэтому плотность тора равна $\frac{M}{\pi r^2\times 2\pi R}$. Момент инерции тора определяется как:

$$I_z=\frac{M}{\pi r^2\times 2\pi R}\iiint_\Omega(x^2+y^2)d^3\mathbf{r}=\frac{M}{\pi r^2\times 2\pi R}\int_0^r\rho d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta(R+\rho\cos\theta)^3=$$
$$=\frac{M}{\pi r^2\times R}\int_0^r\rho d\rho\int_0^{2\pi}d\theta(R^3+3R^2\rho\cos\theta+3R\rho^2\cos^2\theta+\rho^3\cos^3\theta)$$

Нечётные степени косинуса будучи усреднены по периоду дают ноль. Кроме того, известно, что $\langle\sin^2\theta\rangle=\langle\cos^2\theta\rangle=\frac{1}{2}$; поэтому интеграл по θ легко берётся и остаётся:

$$I_z=\frac{2M}{r^2}\int_0^r\rho d\rho(R^2+\frac{3}{2}\rho^2)=M\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right)$$

Задача 3

Найдём площадь σ_n единичной сферы в n-мерном пространстве.

Решение

Рассмотрим n-мерный Гауссов интеграл:

$$I=\iiint_{\mathbb{R}^n}e^{-|\mathbf{x}|^2}d^n\mathbf{x}$$

С одной стороны, если рассмотреть его в n-мерных декартовых координатах, мы получим:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\dots\int_{-\infty}^{\infty}dx_n e^{-x_1^2-\dots-x_n^2}=\pi^{n/2}$$

С другой стороны, мы можем его же рассмотреть в n-мерных сферических координатах. Поскольку подынтегральная функция зависит лишь от расстояния до центра, то мы можем сразу взять интеграл по всем углам; несложно заметить, что полученный интеграл даст нам как раз площадь единичной сферы в n-мерном пространстве (например, в трехмерном пространстве $d^3\mathbf{x} = 4\pi x^2 dx$, и 4π - как раз площадь единичной сферы в трёхмерье). Таким образом, мы можем записать:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\sigma_n x^{n-1}dx = \begin{vmatrix} x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{vmatrix} = \frac{\sigma_n}{2}\int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\sigma_n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \begin{cases} \frac{2\pi^k}{(k-1)!}, & n = 2k \\ \frac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-3)!!}, & n = 2k-1 \end{cases} = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 2\pi, & n = 2 \\ 4\pi, & n = 3 \\ 2\pi^2, & n = 4 \end{cases}$$

Мы видим, что известные нам результаты (для $n = 1, 2, 3$) воспроизводятся.

Комментарий про размерную регуляризацию Аналитичность полученного результата как функции параметра n позволяет рассматривать такие, на первый взгляд абсурдные вещи, как "площадь сферы в пространстве размерности $n = 4 - \epsilon$", при нецелых ϵ. На этом основан один из способов регуляризации расходящихся интегралов - так называемая "размерная регуляризация", о которой рассказывалось ранее. Допустим, нас интересует интеграл в пространстве размерности $n = 4$, и он расходится. Тогда можно формально доопределить n-мерный интеграл на нецелые n, как замену $d^n\mathbf{x}$ на $\sigma_n x^{n-1}dx$; и при этом может оказаться, что интеграл сходится при любых $n < 4$. Это позволяет формально рассмотреть интеграл в пространстве размерности $n = 4 - \epsilon$ (где интеграл сходится), а затем устремить $\epsilon \to 0$. Такая процедура носит название размерной регуляризации и применяется в квантовой теории поля для работы с расходимостями.

Контурные интегралы

Часто в разных физических задачах встречается необходимость интегрировать те или иные функции вдоль кривых. Среди примеров и работа силы при перемещении тела вдоль той или иной траектории, и вычисление массы какой-нибудь проволоки, и циркуляция электрического или магнитного поля в уравнениях Максвелла. Отдельная история про интегралы вдоль различных контуров встречается в теории функций комплексного переменного: там это основной рабочий объект.
Выделяют два основных типа контурных интегралов: первого и второго рода.

Контурные интегралы первого рода - это интегралы от скалярных функций по кривым. Самый простой пример - вычисление их длин. Пусть, например, кривая задана функцией $f(x)$, и мы хотим посчитать ее длину при изменении x от a до b. Разобъем кривую на N маленьких кусочков с длинами Δl_i, где i лежит от 1 до N. Тогда выражение для полной длины L дается очевидным равенством

$$L = \sum_{i=1}^{N} \Delta l_i$$

Представим Δl_i по теореме Пифагора как

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta f_i)^2}$$

где $\Delta f_i = f(x_i+\Delta x_i)-f(x_i)$. Вынесем Δx_i из под знака корня и получим $\Delta l_i = \Delta x_i\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2}$ Таким образом, выражение для длины кривой в пределе бесконечно мелкого разбиения имеет вид

$$L = \int_a^b dx\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}.$$

Если же мы хотим посчитать какую-нибудь более интересную величину, например, массу кривой, то ответ будет выглядеть иначе. Пусть плотность массы ρ, определяемая как коэффициент пропорциональности между массой каждого отдельного кусочка и его длиной

$$\rho_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta l_i},$$

каким-то образом меняется от кусочка к кусочку, то есть задается функцией $\rho(x)$. Тогда полная масса кривой имеет вид

$$M = \int_a^b dx\rho(x)\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

Однако, иногда кривая не задается какой-то однозначной функцией (например, если она

имеет самопересечение). В таком случае, ее нужно запараметрозовать тем или иным способом. Пусть она задана как некоторая векторная функция $\vec{r}(t)$, где $t \in (t_A, t_B)$. Начальную и конечную точки обозначим как $\vec{r}_A = \vec{r}(t_A)$ и $\vec{r}_B = \vec{r}(t_B)$. Длину кривой в этом случае можно вычислить как

$$L = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} |d\vec{r}| = \int_{t_A}^{t_B} dt|d\vec{r}/dt|$$

а, например, ее массу как

$$M = \int_{t_A}^{t_B} dt\rho(\vec{r}(t))|d\vec{r}/dt|$$

Контурные интегралы второго рода - это интегралы от векторных функций по кривым. Они задаются подобно интегралам первого рода, однако вместо модуля "скорости" $d\vec{r}/dt$ в них фигурирует скалярное произведение внешнего поля (которое мы интегрируем) на вектор "скорости". Например, для работы силы $\vec{F}(\vec{r})$ по кривой $\vec{r}(t)$ имеем

$$A = \int_{t_A}^{t_B} dt\left(\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot d\vec{r}/dt\right)$$

Задача 4

Пусть кольцо из проволоки радиуса R лежит в плоскости xy. Представим его кривой $\vec{r} = \vec{r}(\phi)$, где компоненты вектора заданы как $x = R\cos\phi$, $y = R\sin\phi$, $\phi \in (0, 2\pi)$. Допустим, что это кольцо неравномерно электрически заряжено: линейная плотность заряда задается выражением

$$\rho(\phi) = \rho_0\cos\phi,$$

где ρ_0 - постоянная, имеющая размерность [заряд/метры]. Необходимо найти потенциал, создаваемых этим колечком в произвольной точке $\vec{r}_0$ плоскости xy, заданной как

$$x_0 = r_0\cos\theta, \quad y_0 = r_0\sin\theta$$

при условии $r_0 \gg R$.

Решение

Давайте запишем выражение, для потенциала, известное из электростатики, как

$$\Phi(x_0, y_0) = \int |d\vec{r}| \frac{\rho}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}.$$

Плотность заряда устроена таким образом, что на одной половине колечка она положительна, а на другой половине - отрицательна, причем суммарный заряд равен 0. Такая конфигурация зарядов называется диполем.

Здесь интегрироване ведется по кривой $\vec{r} = \vec{r}(\phi)$, задающей кольцо. Вводя параметризацию углом, описанную в условии, мы переписываем интеграл как

$$\Phi(x_0, y_0) = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi |d\vec{r}/d\phi| \frac{\rho_0 \cos\phi}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}$$

Непосредственное вычисление дает $|d\vec{r}/d\phi| = R$, а

$$|\vec{r}_0 - \vec{r}| = \sqrt{(R\cos\phi - r_0\cos\theta)^2 + (R\sin\phi - r_0\sin\theta)^2} = \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0(\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta)} =$$

$$= \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\phi - \theta)}.$$

Тогда интеграл можно переписать как

$$\Phi(x_0, y_0) = R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{\cos\phi}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\phi - \theta)}}.$$

Сделаем сдвиг переменной $\phi - \theta = \xi$. Тогда получим

$$\Phi(x_0, y_0) = R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \frac{\cos(\xi + \theta)}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\xi}}.$$

Пределы интегрирования не изменились, потому что мы интегрируем периодическую функцию по всему ее периоду. Раскладывая косинус:

$$\Phi(x_0, y_0) = R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \frac{\cos\xi\cos\theta - \sin\xi\sin\theta}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\xi}}.$$

Обратим внимание, что θ - это просто постоянная, которая определяет то, в какой точке мы смотрим потенциал. Одна из частей интеграла

$$-R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \frac{\sin\xi\sin\theta}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\xi}}$$

в точности равна 0. Так происходит потому, что функция под знаком интеграла нечетная, а пределы интегрирования - симметричны. В итоге остается

$$\Phi(x_0, y_0) = \cos\theta R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \frac{\cos\xi}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\xi}}.$$

Точный ответ на интеграл в элементарных функциях не выражается, поэтому попробуем проанализировать его приближенно. Здесь то нам и понадобится условие $r_0 \gg R$. Заметим, что слагаемое $2Rr_0\cos\xi$ под корнем мало в сравнении с $R^2 + r_0^2$ по параметру $R/r_0 \ll 1$. Поэтому, по нему можно раскладывать:

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\xi}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2Rr_0\cos\xi}{R^2 + r_0^2}}} \simeq \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2}} + \frac{Rr_0\cos\xi}{(R^2 + r_0^2)^{3/2}} + \ldots$$

Заменим в пределе $r_0 \gg R$ корень $\sqrt{R^2 + r_0^2} \simeq r_0$. Тогда для потенциала получим

$$\Phi(x_0, y_0) = \cos\theta R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \cos\xi \left(\frac{1}{r_0} + \frac{R}{r_0^2} \cos\xi + ... \right).$$

Первое слагаемое в скобке дает 0, потому что $\int_{-\pi}^{\pi} d\xi \cos\xi = 0$. Это отвечает тому, что полный заярд колечка равен 0. Второе слагаемое имеет вид

$$\cos\theta R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \cos^2\xi \frac{R}{r_0^2} = \frac{\pi R^2 \rho_0}{r_0^2} \cos\theta.$$

Это конечное приближенное выражение для потенциала кольца. Обратим внимание, что потенциал в этом случае явно зависит от направления, в котором находится "точка наблюдения". Кроме того, потенциал спадает с расстоянием как $1/r_0^2$, в то время как потеницал точечного заряда ведет себя как $1/r_0$. Эта особенность связана с тем, что полный заряд колечка равен 0. Давайте перепишем полученный ответ в векторной форме. Для этого введем вектор дипольного момента $\vec{d}$, который определим следующим образом

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \pi R^2 \rho_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда полный ответ для потенциала в пределе больших расстояний можно записать как

$$\Phi(\vec{r}_0) = \frac{\left(\vec{d} \cdot \vec{r}_0\right)}{r_0^3}$$

Это принятая запись для потенциала диполя. Отметим, что полученное выражение работает во всем пространстве, а не только в плоскоти xy.

Задача 5

Пусть C - замкнутая кривая, соответствующая обходу единичной окружности против часовой стрелки. Найдём значение интеграла второго рода

$$I = \oint\limits_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Решение

Неправильный способ Функция под интегралом является полным дифференциалом. Действительно:

$$d\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

поэтому, казалось бы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, достаточно взять разницу первообразной на концах контура C. Поскольку контур замкнут, то эта разница тождественно равна нулю. Однако такой способ рассуждений ошибочен, что связано с неаналитичностью "первообразной" в точках $x = 0$ (и, соответственно, неаналитичностью подынтегральной функции в начале координат). Этот интеграл играет важнейшую роль в теории вычетов (теория функций комплексного переменного).

Правильный способ Поступим по определению. Запараметризуем контур C как $C = \{\mathbf{r}(\varphi), \varphi \in [0; 2\pi]\}$ и $\mathbf{r}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. В таком случае интеграл запишется как:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\cos\varphi d\varphi + \sin\varphi\sin\varphi d\varphi}{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \neq 0$$

Задачи для домашнего решения

Упражнение 1
Вычислите якобиан перехода к сферическим координатам

$$x = r\cos\phi\sin\theta, \quad y = r\sin\phi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta.$$

Вычислите якобиан перехода к тороидальным координатам

$$x = (R + \rho\sin\theta)\cos\phi, \quad y = (R + \rho\sin\theta)\sin\phi, \quad z = \rho\cos\theta.$$

Здесь R - фиксированный параметр. Такие координаты не являются однозначными, однако все равно бывают полезны (см. задачу 1).

Упражнение 2
Вычислите интеграл по шару, зависящий от "волнового вектора" $\vec{k}$:

$$I(\vec{k}) = \int_{|\vec{r}|<r_0} d^3 r e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Примечание: такой интеграл является примером преобразования Фурье в 3D:

$$I(\vec{k}) = \mathcal{F}_{\vec{k}}\{\theta(r_0 - |\vec{r}|)\}, \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

О преобразовании Фурье мы поговорим на следующем семинаре.
Более того этот интеграл встречается в простейшей задаче квантовомеханического рассеяния.

Упражнение 3
Вычислите длину спирали:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

где $t \in [0, 2\pi]$. Вычислите массу этой спирали, если ее плотность $\rho(t) = \cos^2 t$.
Вычислите по ней криволинейный интеграл второго рода от функции

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -yz/(x^2+y^2) \\ xz/(x^2+y^2) \\ z(1+x^2-y^2) \end{pmatrix}.$$

Задача 1
а) Вычислите момент инерции тора с однородной объемной массовой плотностью ρ относительно оси его симметрии z. Тор задается следующими уравнениями:

$$x = (R + \rho\sin\theta)\cos\phi, \quad y = (R + \rho\sin\theta)\sin\phi, \quad z = \rho\cos\theta,$$

где $\rho < r_0 < R$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$.
Эта задача решена в материалах семинара, но Вам было бы поучительно с ней разобраться самим.
b) Вычислите момент инерции тора относительно осей x и y.
Подсказка: удобно воспользоваться тождеством $I_x + I_y + I_z = 2I_0$.

Задача 2
Вычислите потенциал, создаваемый неоднородно заряженной сферой радиуса r_0 с поверхностной плотностью заряда (заданной в сферических координатах)

$$\sigma(\vec{r})|_{|\vec{r}|=r_0} = \sigma_0 \cos\theta$$

в точке $\vec{R}$ с координатами

$$\begin{cases} X = R\sin\psi, \\ Y = 0, \\ Z = R\cos\psi, \end{cases}$$

где $R > r_0$, а ψ - заданный угол.
В данном случае потенциал можно посчитать по формуле:

$$\phi(\vec{R}) = k\int_{|\vec{r}|=r_0} \frac{\sigma(\vec{r})dS}{|\vec{R}-\vec{r}|}.$$

Здесь dS - бесконечно малый элемент площади сферы:

$$dS = r_0^2 \sin\theta d\theta d\phi.$$

Обратите внимание: $r_0^2 \sin\theta$ - это якобиан перехода к сферическим координатам, вычисленный при $r = r_0$.
Задачу можно в пару строчек решить** без явного вычисления интеграла. Единственное, что надо будет сделать - посчитать несложную производную.

Задача 3
Вычислите интеграл по квадрату $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [0, 2\pi]$:

$$I = \int \frac{dx}{2\pi}\frac{dy}{2\pi}\frac{1-\cos(x+y)}{2-\cos x - \cos y}$$

Подсказка: для решения может быть удобно перейти к повернутой системе координат

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = x - y.$$