

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем теоретической физики

Майорановские кубиты в джохефсоновских изинговских цепочках

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Выполнил:
студент 322 группы
Нестюк А.П.

Научный руководитель:
д.ф-м.н., проф. Махлин Ю.Г.

Черноголовка, 2017

Содержание

1	Введение	2
2	Майорановские моды в фермионных системах	4
2.1	Модель Китаева	4
2.2	Переплетение майорановских фермионов	5
3	Спиновая система	8
3.1	Модифицированное преобразование Йордана-Вигнера	8
3.2	Свойства спиновой системы	11

1 Введение

В последнее время большой интерес вызывают возможности реализации кубитов на основе так называемых майорановских фермионов. Реализация таких кубитов и системы управления ими может оказаться ключевым фактором в построении квантового компьютера, способного решать реальные задачи.

Впервые майорановские фермионы были рассмотрены Китаевым в [1]. Он рассмотрел фермионную цепочку и провёл над ней преобразование Майораны, показав, что при выполнении определённых соотношений между коэффициентами гамильтониана появляется возбуждение с нулевой энергией, эффективно составленное из фермионных операторов, находящихся на разных концах цепочки. Физические, локальные шумы меняют энергию этого возбуждения экспоненциально слабо по длине цепочки. Потеря когерентности из-за влияния шумов является одной из основных проблем создания кубитов, и данная система практически полностью решает этот вопрос.

К сожалению, решая один вопрос, майорановские фермионы ставят новые. Во-первых, их техническая реализация ещё далека от совершенства. Самой многообещающей основой для создания таких систем сейчас считаются р-волновые сверхпроводники [ссылка](#), и в них получены только признаки существования таких фермионов. Об управлении ими речь пока не идёт.

Во-вторых, строго доказано, что нельзя выполнить произвольный квантовый алгоритм, не нарушив защиту майорановских фермионов. В науке о квантовых алгоритмах есть понятие "универсального набора операций". Если такой набор операций реализуем на данной физической системе, то возможно выполнение произвольного действия над данной системой, и тем выполним любой алгоритм, в противном случае это невозможно. Над майорановскими фермионами реализовать универсальный набор операций не получится.

Тем не менее, интерес к майорановским фермионам не угас. Технические сложности обычно преодолимы, и даже если не получится производить над такими кубитами нужные операции, их можно будет использовать в качестве долговременной памяти.

Более того, оказались простимулированы исследования, связанные с про-

чими системами, которые можно описывать на языке майорановских фермионов. Одной из таких систем является спиновая цепочка, над которой совершено преобразование Йордана-Вигнера. Очевидно, получившуюся фермионную систему можно свести к системе майорановских фермионов. Однако, поскольку преобразования Йордана-Вигнера нелокально, обычные локализованные шумы спиновой системы становятся нелокальными шумами в фермионной системе, из-за чего теряется защита от шумов - основная причина интереса. Тем не менее, поскольку без разрушения защиты невозможно выполнять квантовые алгоритмы, можно нарушать её и в такой форме. Поскольку спиновые системы на основе джозефсоновских кубитов изучены относительно хорошо, а времена их когерентности позволяют проводить с ними эксперименты, можно уже сейчас проверить, как соотносится теория с практикой. Кроме того, возможно, что майорановские кубиты на сверхпроводниках будут использоваться в основном как память компьютера, а спиновые системы, полностью находящиеся под нашим контролем, - как способ проводить операции и хранить данные небольшое количество времени (процессор в терминах современных компьютеров).

В работе [2] описаны теоретические основы и элементы практической реализации подобных спиновых систем. Единственная доступная операция над майорановскими фермионами требует выхода за пределы одномерной цепочки, что представляет дополнительные сложности в момент выполнения преобразования Йордана-Вигнера. Дальнейшие возникающие затруднения и указанные в статье методы их устранения будут приведены ниже.

Целью данной работы является более подробное изучение спиновой системы, описанной в статье [2]. Будут рассмотрены различные погрешности, включая влияние различных шумов на состояние кубита и фактический размер майорановских фермионов. Будут сделаны некоторые общие выводы относительно защищённости этой системы от случайных шумов.

А здесь можно привести содержание описания (в главе x рассказывается про у...)

2 Майорановские моды в фермионных системах

Основой для всего дальнейшего служат статьи [1], в которой вводится понятие майорановских фермионов, и [3], где предлагается методика выполнения операции над ними.

2.1 Модель Китаева

Следуя [1], рассмотрим фермионную цепочку со следующим гамильтонианом:

$$H = \sum_j -\omega(a_j^\dagger a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger a_j - a_j a_{j+1} - a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger) - \mu \left(a_j^\dagger a_j - \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

(строго говоря, в гамильтониане Китаева коэффициенты перед $a_j^\dagger a_{j+1}$ и $a_j a_{j+1}$ разные, но для простоты здесь они положены одинаковыми).

Майорановскими операторами называется набор операторов

$$\gamma_{2j-1} = a_j + a_j^\dagger, \quad \gamma_{2j} = i(a_j^\dagger - a_j), \quad (2)$$

удовлетворяющий соотношениям

$$\gamma_i^2 = 1, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad (3)$$

причём чётные и нечётные индексы более неразличимы.

Гамильтониан после преобразования имеет вид

$$H = -i\mu/2 \sum_{j=1}^N \gamma_{2j-1} \gamma_{2j} + i\omega \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_{2j} \gamma_{2j+1}. \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что в предельных случаях, когда либо μ , либо $\omega = 0$, получаются два принципиально разных гамильтониана,

$$H = -i\mu/2 \sum_{j=1}^N \gamma_{2j-1} \gamma_{2j}, \quad H = i\omega \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_{2j} \gamma_{2j+1}. \quad (5)$$

Во втором отсутствуют члены γ_1 и γ_{2L} , которые вместе составляют одно возбуждение с нулевой энергией. Предполагая сохранение чётности, учитывая то, что квадрат майорановского оператора равен 1, и рассматривая первый порядок теории возмущений, получим, что шум, расщепляющий этот уровень, должен быть произведением операторов a_1 , a_L и их сопряжённых. Такой шум, очевидно, нелокален, и потому нефизичен. Отсюда делается вывод о так называемой топологической защите этого уровня от шума. Слово "топологический" связано с тем, что майорановские моды локализованы на краях цепочки.

В первом гамильтониане возбуждения с нулевой энергией нет. Как показывает точный расчёт, когда оба коэффициента в гамильтониане отличны от нуля, наличие такого возбуждения зависит от отношения коэффициентов μ и ω : когда $\mu/\omega > 2$, его нет, в противном случае есть. Причём когда возбуждение есть, оно затухает вглубь образца с экспоненциальной скоростью.

Видно, что образуются две фазы, причём в одной из них на границе "живут" майорановские фермионы, также называемые краевыми модами. Такую фазу будет далее называть топологической.

2.2 Переплетение майорановских фермионов

Поскольку майорановские моды не входят в гамильтониан, возникает проблема управления ими, а без контролируемого изменения состояния кубита невозможны квантовые вычисления.

В [3] предлагается операция, названная braiding. Это слово в данной дипломной работе будет переводиться как "переплетение". Идея состоит в том, что если поменять местами майорановские фермионы, то состояние системы изменится. Это легко понять, введя оператор чётности

$$T = \prod_{j=1}^{2L} (-i\gamma_j). \quad (6)$$

Этот оператор коммутирует с гамильтонианом 4. В самом деле, в гамильтониан входят только чётные по числу майорановских фермионов слагаемые, а в оператор чётности - каждый из таких фермионов один раз. Учитывая,

что различные фермионы антикоммутируют, а сами с собой - коммутируют, получим

$$\gamma_n T = -T \gamma_n \quad \gamma_n \gamma_m T = T \gamma_n \gamma_m. \quad (7)$$

Если теперь поменять местами два фермионных оператора, оператор чётности изменит знак:

$$\begin{aligned} T_{nm} &= (-i)^{2N} \gamma_1 \cdots \gamma_n \cdots \gamma_m \cdots \gamma_{2N} = (-i)^{2N} (-1)^{m-n-1} \gamma_1 \cdots \gamma_n \gamma_m \cdots \gamma_{2N} \\ &= (-i)^{2N} (-1)^{m-n} \gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_n \cdots \gamma_{2N} = -(-i)^{2N} \gamma_1 \cdots \gamma_m \cdots \gamma_n \cdots \gamma_{2N} = T_{mn} = -T_{nm}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если совершается физическое преобразование, которое в реальном пространстве меняет местами майорановские моды и сохраняет при этом чётность, то операторы (в гейзенберговском представлении) не могут просто переходить друг в друга: один из них меняет знак, чтобы сохранить чётность. Соответственно этому изменится и состояние системы.

В одномерной цепочке невозможно переставить фермионы, не проведя их друг через друга. В [3] предлагается система, в которой это возможно. Исследуем изменения относительно предыдущего пункта поэтапно.

Сначала нужно рассмотреть фермионную цепочку, отношение коэффициентов гамильтониана которой показано на рис. 1. Внутри каждого из участков коэффициенты гамильтониана постоянны, при этом в среднем участке отношение коэффициентов таково, что он находится в топологической фазе, а другие участки - в фазе без фермионов.

В такой системе майорановские фермионы также будут присутствовать; при конечном отношении коэффициентов возбуждение будет экспоненциально затухать не только внутри топологической фазы, но и "наружу", в обычную фазу.

Обладая контролем над коэффициентами гамильтониана, можно изменять их отношение так, что граница фаз будет смещаться. При адиабатическом выполнении данной операции состояние майорановских фермионов не будет меняться. Это означает, что мы можем двигать топологический участок в произвольное место цепочки.

Наконец, можно представить себе соединение двух фермионных цепочек

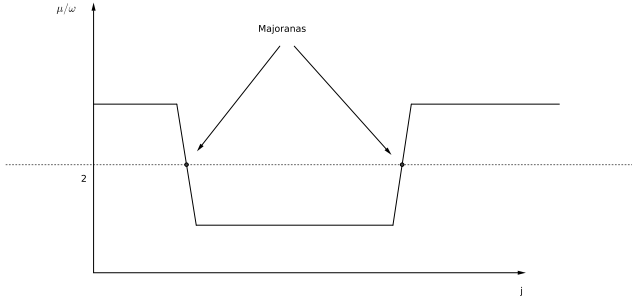


Рис. 1: Зависимость отношения коэффициентов гамильтониана от номера узла; горизонтальная линия показывает границу фаз.

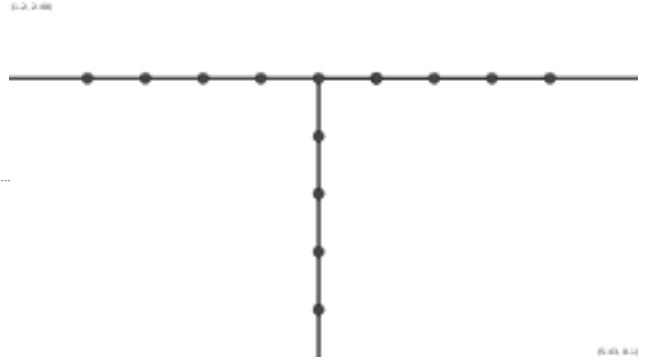


Рис. 2: Т-соединение; точками показаны фермионы, линиями - их взаимодействие.

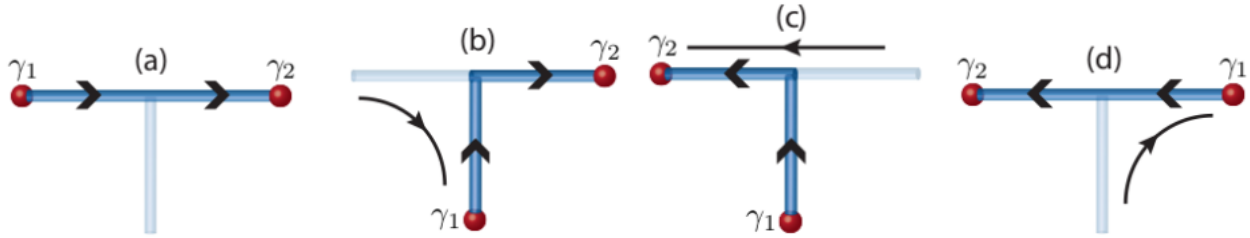


Рис. 3: Braiding, переплетение майорановских мод в Т-соединённых фермионных цепочках, [3].

чек. Простейший вариант, представленный на рис. 2 и называемый Т-соединением, является обычной фермионной цепочкой, один из узлов которой взаимодействует с крайним фермионом другой цепочки. В такой системе тоже существуют две фазы по отношению коэффициентов гамильтониана, и на границе между ними находятся майорановские фермионы. Соответственно, границы между фазами в такой конструкции можно двигать в том числе и в другие участки соединения.

Теперь можно понять, как происходит перестановка майорановских мод. Процесс представлен на рис. 3. В вышеописанной системе одна из мод уходит в нижнее ответвление, другая переводится на исходное место первой, после чего первая передвигается туда, где в начале была вторая. Все процессы осуществляются адиабатически и с сохранением чётности.

3 Спиновая система

В данной части будет кратко рассмотрено содержание [2]. Будет показано, как можно совершить переход от спиновой системы к фермионной, с учётом того факта, что цепочка не является одномерной и обычное преобразование Йордана-Вигнера не даёт гамильтониана с соседним взаимодействием. Далее будет рассмотрено переплетение на спиновом языке.

3.1 Модифицированное преобразование Йордана-Вигнера

Обычное преобразование Йордана-Вигнера (здесь переводящее спиновую систему на язык майорановских фермионов),

$$\gamma_{2i-1} = \sigma^z(n) \sum_{p=1}^{n-1} \sigma^x(p), \quad \gamma_{2i} = \sigma^y(n) \sum_{p=1}^{n-1} \sigma^y(p), \quad (9)$$

превращает изинговскую цепочку с поперечным магнитным полем

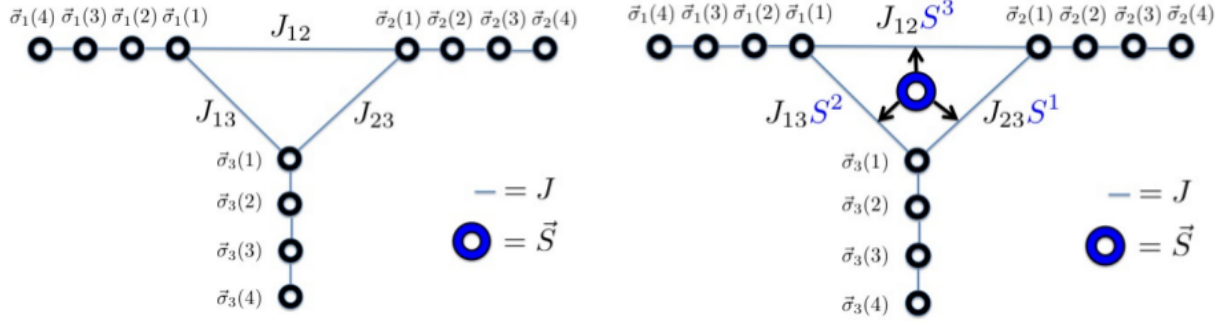
$$H = -J \sum_{n=1}^{N-1} \sigma^z(n) \sigma^z(n+1) - \sum_{n=1}^N h(n) \sigma^x(n) \quad (10)$$

в майорановскую цепочку с квадратичным гамильтонианом и соседним взаимодействием

$$H = -i \sum_{n=1}^N h(n) \gamma(2n-1) \gamma(2n) + iJ \sum_{n=1}^{N-1} \gamma(2n) \gamma(2n+1). \quad (11)$$

Для этого преобразования важно уметь последовательно перенумеровать спины. В случае, когда есть три ветки (рис. 2, например), невозможно перенумеровать спины таким образом, чтобы после преобразования получилась майорановская цепочка, в которой взаимодействуют только соседи. Поэтому приходится менять вид преобразования.

Перенумеруем спины так, как указано на рис. 4а, то есть рассмотрим три ветви, сходящихся в соединении, и обозначим $\sigma_\alpha(n)$ n -ый от соединения спин из ветви α . Соединение в этой схеме более общего вида, оно называется Δ -соединением. При необходимости, оно сводится к Т-соединению обнулением одной из констант связи.



(a) Нумерация спинов в спиновой системе, необходимая для проведения преобразования Йордана-Вигнера.

(b) Спиновая система с центральным спином и его вкладом во взаимодействие первых спинов цепочек.

Рис. 4: Δ -соединение цепочек.

Проведём теперь преобразование следующим образом. В каждой из ветвей сделаем своё преобразование Йордана-Вигнера. Тогда в каждой ветви взаимодействия будут соседними, а коммутационные соотношения будут соответствующие майорановским фермионам. Однако полученные таким образом частицы из разных ветвей будут коммутировать. Поэтому добавим в преобразование i -ой ветви матрицу S^i , квадрат каждой из которых равен единице, которые антикоммутируют друг с другом и коммутируют со всеми остальными спиновыми операторами. Поскольку ветви три, удобно выбрать в качестве S^i матрицы Паули.

Модифицированное преобразование тогда выглядит следующим образом:

$$\gamma_{2i-1} = \sigma^z(n) \sum_{p=1}^{n-1} \sigma^x(p), \quad \gamma_{2i} = \sigma^y(n) \sum_{p=1}^{n-1} \sigma^y(p). \quad (12)$$

Оно восстанавливает необходимые коммутационные соотношения и вид гамильтониана внутри ветвей. На соединении, однако, взаимодействие получается не квадратичным и включает в себя матрицы S^i .

$$H_{junc} = - \sum_{\alpha < \beta} J_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha}^z(1) \sigma_{\beta}^z(1) = -i \sum_{\alpha < \beta} J_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha}(1) \gamma_{\beta}(1) \epsilon^{\alpha\beta\zeta} S^{\zeta}. \quad (13)$$

Эту проблему можно решить так, как показано на рис. 4b, то есть сделать это взаимодействие трёхспиновым в исходной, спиновой системе. Помимо первых спинов цепочек туда теперь будет входить оператор дополни-

тельного спина, который в дальнейшем будет называться "центральным". То есть взаимодействие будет выглядеть следующим образом:

$$H_{junc} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta \neq \zeta} J_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha}^z(1) \sigma_{\beta}^z(1) S^{\zeta} = \frac{i}{2} \sum_{\alpha\beta\zeta} J_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha}(1) \gamma_{\beta}(1) \epsilon^{\alpha\beta\zeta}. \quad (14)$$

Таким образом, спиновая система с рисунка 4b является спиновым представлением системы майорановских фермионов, в которой удобно проводить переплетение.

Эта система может быть реализована физически. Подробности описаны в [2], нас же интересует только то, что реализация предъявляет к спину S (но не к первым спинам цепочек) дополнительные требования. Поэтому характеристики S , в частности, времена релаксации, с подавляющей вероятностью будут хуже, чем у всех остальных спинов цепочек.

3.2 Свойства спиновой системы

Рассмотрим теперь, чему соответствуют краевые моды и процессы с ними на спиновом языке. Следующий материал частично описан в [4] и [2].

Будем считать, что поперечное магнитное поле равно нулю внутри топологического участка и бесконечности - вне его. Это удобно с теоретической точки зрения, поскольку основное состояние принимает в таком случае простой вид, который будет указан далее, а с практической просто означает $h \ll J$ и $h \gg J$, что реализуемо. Изменение магнитного поля, приводящее к изменению размеров топологического участка, будем предполагать адиабатическим. Взаимодействие ферромагнитное, $J > 0$ в гамильтониане 10.

В таком случае спины за пределами топологического участка оказываются эффективно "замороженными" вдоль оси . Внутри же появляется изинговская цепочка без магнитного поля с эффективно свободными условиями на границах. Основное состояние такой системы двояко вырождено, базисными векторами можно считать состояния "все спины вверх", $|\uparrow \cdots \uparrow\rangle$, и "все спины вниз", $|\downarrow \cdots \downarrow\rangle$, где в кетах перечислены только спины топологического участка. Если температура достаточно низка, так что возбуждениями можно пренебречь, то все интересующие нас процессы происходят в двумерном подпространстве, построенном на этих векторах.

Нетрудно показать, как влияет добавление к топологическому участку на его состояние. Для простоты рассмотрим двухспиновый гамильтониан

$$H = -J\sigma_1^z\sigma_2^z - h\sigma_1^x. \quad (15)$$

Его собственные значения $\lambda = \pm\sqrt{J^2 + h^2}$ и собственные функции

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{(J + \sqrt{J^2 + h^2}) \uparrow + h \downarrow}{\sqrt{h^2 + (J + \sqrt{J^2 + h^2})^2}} \uparrow, \\ \psi_2 &= \frac{h \uparrow + (J + \sqrt{J^2 + h^2}) \downarrow}{\sqrt{h^2 + (J + \sqrt{J^2 + h^2})^2}} \downarrow, \end{aligned}$$

находятся очевидно. Из четырёх собственных функций эти две выбраны потому, что они отвечают наименьшей энергии, а температура предполагается

низкой. В пределе $h \rightarrow \infty$ они становятся состояниями $|\uparrow\rangle_x |\uparrow\rangle_z$ и $|\uparrow\rangle_x |\downarrow\rangle_z$, где индекс обозначает, для какой матрицы Паули это состояние является собственным. Когда $h = 0$, они переходят в $|\uparrow\uparrow\rangle_z$ и $|\downarrow\downarrow\rangle_z$ соответственно.

Из предыдущего следует, что при "размораживании" спина, адиабатическом понижении поперечного магнитного поля от ∞ до 0, произойдёт следующий переход:

$$\left(\frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \right) (\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle) \rightarrow \alpha |\uparrow\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\downarrow\rangle.$$

Для спиновой цепочки это значит, что состояние топологического участка не меняется при передвижении его границ - до тех пор, пока граница не проходит через центральный спин с трёхспиновым взаимодействием. Это оправдывает введение следующих обозначений.

Пусть $|\uparrow\rangle = |\uparrow \cdots \uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle = |\downarrow \cdots \downarrow\rangle$, где вновь указаны только спины топологического участка. Спиновый оператор τ действует на этих векторах. Здесь и далее топологический участок будет называться просто "кубитом". Движение границ в таких обозначениях не отражается на состоянии системы, что удобно.

Осталось понять, как топологический участок проходит через центральный спин. Пусть, сначала, во взаимодействии участвует компонента S^z , а спин находится в состоянии $|\uparrow\rangle$ по z . Тогда гамильтониан на соединении [14](#) станет эффективно двухспиновым, связывающим первые спины ветвей, с тем же коэффициентом, и просто не будет отличаться от всех остальных связей цепочки. Значит, при прохождении через него состояние кубита не изменится.

С другой стороны, если центральный спин находится в состоянии $|\downarrow\rangle$, верно всё то же, но взаимодействие меняет знак и становится антиферромагнитным. Интуиция подсказывает, а расчёты подтверждают, что в этом случае "размороженный" спин окажется перевёрнут относительно соседнего - [16](#) иллюстрирует утверждение.

В момент перехода состояние системы является суперпозицией следую-

щих векторов:

$$\begin{aligned}
 &|\cdots \uparrow\uparrow\rangle |\uparrow\rangle_s |\uparrow\uparrow \cdots\rangle, \\
 &|\cdots \downarrow\downarrow\rangle |\uparrow\rangle_s |\downarrow\downarrow \cdots\rangle, \\
 &|\cdots \uparrow\uparrow\rangle |\downarrow\rangle_s |\downarrow\downarrow \cdots\rangle, \\
 &|\cdots \downarrow\downarrow\rangle |\downarrow\rangle_s |\uparrow\uparrow \cdots\rangle.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Список литературы

- [1] A.Yu. Kitaev. Unpaired majorana fermions in quantum wires. 2000.
- [2] S. Backens, A. Shnirman, Yu. Makhlin, Yu. Gefen, J.E. Mooij, and G. Schon. Emulating majorana fermions and their braiding by ising spin chains. 2017.
- [3] J. Alicea, Yu. Oreg, G. Refael, F. Oppen, and M.P.A. Fisher. Non-abelian statistics and topological quantum information processing in 1d wire network. 2010.
- [4] L.S. Levitov, T.P Orlando, J.B. Majer, and J.E. Mooji. Quantum spin chains and majorana states in arrays of coupled qubits. 2001.