

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

Факультет общей и прикладной физики  
Кафедра "Проблемы теоретической физики"

# Майорановские кубиты в джозефсоновских изинговских цепочках

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Выполнил:  
студент 322 группы  
А.П. Нестюк

Научный руководитель:  
д.ф-м.н., проф. Ю.Г. Махлин

Черноголовка, 2017

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Майорановские моды в фермионных системах</b>	<b>5</b>
2.1	Модель Китаева . . . . .	5
2.2	Переплетение майорановских нулевых мод . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Спиновая система</b>	<b>10</b>
3.1	Модифицированное преобразование Йордана-Вигнера . . . .	10
3.2	Свойства спиновой системы . . . . .	13
3.3	Переплетение на спиновом языке . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Отклонения от идеальности в спиновой системе</b>	<b>19</b>
4.1	Обозначения . . . . .	19
4.2	Предположения . . . . .	21
4.3	Начальное состояние центрального спина в схеме с тремя про- ходами . . . . .	21
4.4	Спин внутри топологического участка и поперечный шум . .	22
4.5	Неточности проведения операций . . . . .	23
4.6	Продольный шум, спин внутри топологического участка . .	24

# 1 Введение

В последнее время большой интерес вызывают возможности реализации кубитов на основе так называемых майорановских нулевых мод. Реализация таких кубитов и системы управления ими может оказаться ключевым фактором в построении квантового компьютера, состоящего из большого числа кубитов.

Впервые майорановские нулевые моды были рассмотрены Китаевым в [1]. Он рассмотрел фермионную цепочку и предложил описывать её на языке майорановских фермионов. Основное состояние такой системы двукратно вырождено, причём в фермионный оператор, переводящий одно из основных состояний в другое, с коэффициентами порядка единицы входят только произведения фермионных операторов с разных концов цепочки. Из-за этого физические, локальные возмущения гамильтониана расщепляют основное состояние экспоненциально слабо по длине цепочки. Потеря когерентности из-за влияния шумов является одной из основных проблем создания кубитов, и данная система практически полностью решает этот вопрос.

К сожалению, решая один вопрос, майорановские нулевые моды ставят новые. Во-первых, их техническая реализация ещё далека от совершенства. Одной из возможных основ для создания таких систем сейчас считаются р-волновые сверхпроводники [ссылка](#), и для них получены только признаки существования таких фермионов. Об управлении ими речь пока не идёт.

Во-вторых, строго доказано, что нельзя выполнить произвольный квантовый алгоритм, не нарушив защиту майорановских нулевых мод. В науке о квантовых алгоритмах вводится понятие “универсального набора операций”, состоящего из полного контроля над каждым из кубитов по отдельности и одной нетривиальной операции над каждой парой кубитов. Под “нетривиальностью” здесь понимается то, что операция должна запутывать спины, если они не были запутаны. Для этого достаточно, чтобы операция не сводилась к произведению операций на отдельные спины и не являлась обменом состояний спинов. Показано, что если универсальный набор операций реализован, то его посредством над системой можно осуществить любую унитарную операцию - любой квантовый алгоритм. Однако над майорановскими нулевыми модами реализовать универсальный набор операций

не получится. [ссылка](#)

Тем не менее, интерес к майорановским нулевым модам не угас. Технические сложности обычно преодолимы, и даже если не получится производить над такими кубитами нужные операции, их можно будет использовать в качестве долговременной памяти.

Более того, появился интерес к исследованиям, связанным с прочими системами, которые можно описывать на языке майорановских фермионов. Одной из таких систем является спиновая цепочка. К фермионному языку её сводит преобразование Йордана-Вигнера. Получившуюся фермионную систему нетрудно свести к системе майорановских фермионов. Однако, поскольку преобразования Йордана-Вигнера нелокальны, обычные локализованные шумы спиновой системы становятся нелокальными шумами в фермионной системе, из-за чего теряется защита от шумов - основная причина интереса. Тем не менее, поскольку без разрушения защиты невозможно выполнять квантовые алгоритмы, можно нарушать её и в такой форме. Поскольку спиновые системы на основе джозефсоновских кубитов изучены относительно хорошо, а времена их когерентности позволяют проводить с ними эксперименты, можно уже сейчас проверить, как соотносится теория с практикой. Кроме того, возможно, что майорановские кубиты на сверхпроводниках будут использоваться в основном как память компьютера, а спиновые системы, полностью находящиеся под нашим контролем, - как способ проводить операции и хранить данные небольшое количество времени (процессор в терминах современных компьютеров).

В работе [2] описаны теоретические основы и элементы практической реализации подобных спиновых систем. Единственная доступная операция над майорановскими нулевыми модами требует выхода за пределы одномерной цепочки, что представляет дополнительные сложности в момент выполнения преобразования Йордана-Вигнера. Дальнейшие возникающие затруднения и указанные в статье методы их устранения будут описаны ниже, в главе 3.

Целью данной работы является более подробное изучение спиновой системы, описанной в статье [2]. Будут рассмотрены различные погрешности, включая влияние различных шумов на состояние кубита и фактический размер майорановских нулевых мод. Будут сделаны некоторые общие вы-

воды относительно защищённости этой системы от случайных шумов.

В главе 2 будет рассказано про модель Китаева, в которой и возникают майорановские нулевые моды, а также про возможную операцию над ними - braiding, переплетение. Далее, в главе 3, будет показано, какую спиновую систему можно описывать на майорановском языке, какое преобразование нужно для этого сделать, а также как выглядит переплетение в спиновом представлении. Наконец, в последней главе 4 будут представлены результаты вычислений различных поправок, связанных с неидеальностями системы, описанной в главе 3. Основное внимание будет уделено неточностям выполнения операций и шумам, действующим на спины системы.

## 2 Майорановские моды в фермионных системах

В этой главе речь пойдёт о гамильтониане Китаева и его свойствах, о майорановских нулевых модах и их топологической защите, а также об единственной операции, которую можно выполнить над этими модами, не нарушив защиту - о переплетении.

Основой для дальнейшего изложения служат статьи [1], в которой вводится понятие майорановских нулевых мод, и [3], где предлагается методика выполнения операции над ними.

### 2.1 Модель Китаева

Следуя [1], рассмотрим фермионную цепочку со следующим гамильтонианом:

$$H = \sum_j -\omega(a_j^\dagger a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger a_j - a_j a_{j+1} - a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger) - \mu \left( a_j^\dagger a_j - \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

(строго говоря, в гамильтониане Китаева коэффициенты перед  $a_j^\dagger a_{j+1}$  и  $a_j a_{j+1}$  разные, но для удобства изложения здесь они положены одинаковыми).

Майорановскими операторами называется набор операторов, удовлетворяющий соотношениям

$$\gamma_i^2 = 1, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (2)$$

Преобразование дираковских фермионов к майорановским выглядит следующим образом:

$$\gamma_{2j-1} = a_j + a_j^\dagger, \quad \gamma_{2j} = i(a_j^\dagger - a_j), \quad (3)$$

причём  $\gamma$  различной чётности и происхождения различить больше нельзя: их можно спарить обратно в произвольном порядке и получить описание системы дираковскими фермионами - может быть, не теми, с которых преобразование начиналось.

Гамильтониан после преобразования имеет вид

$$H = -i\mu/2 \sum_{j=1}^N \gamma_{2j-1} \gamma_{2j} + i\omega \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_{2j} \gamma_{2j+1}. \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что в предельных случаях, когда либо  $\mu = 0$ , либо  $\omega = 0$ , получаются два принципиально разных гамильтониана,

$$H = -i\mu/2 \sum_{j=1}^N \gamma_{2j-1} \gamma_{2j}, \quad H = i\omega \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_{2j} \gamma_{2j+1}. \quad (5)$$

Во втором отсутствуют члены  $\gamma_1$  и  $\gamma_{2L}$ , которые можно объединить в один дираковский фермион, коммутирующий с гамильтонианом. Основное состояние системы, таким образом, двукратно вырождено, и этот фермион переводит одно состояние в другое.

Это двукратное вырождение защищено от возмущений, причём чем длиннее цепочка, тем, экспоненциально, меньше влияние шумов. Это можно показать следующим образом. Предположим сохранение чётности рассматриваемой фермионной цепочки, тогда все слагаемые гамильтониана будут чётной степени по фермионным операторам. Из квадратичных слагаемых на майорановском языке остаются только те, в которых у операторов разные индексы - квадрат любого майорановского фермиона равен 1. Чтобы действие возмущения появилось в первом порядке теории возмущений, оно должно состоять из операторов с разных концов цепочки (1-ого и  $2L$ -ого). Такой оператор и на дираковском языке будет включать в себя операторы с разных концов цепочки. То есть возмущение должно быть нелокально, что нефизично.

В первом гамильтониане возбуждения с нулевой энергией нет. Как показывает точный расчёт, когда оба коэффициента в гамильтониане отличны от нуля, наличие такого возбуждения зависит от отношения коэффициентов  $\mu$  и  $\omega$ : когда  $\mu/\omega > 2$ , его нет, в противном случае есть. Причём когда возбуждение есть, оно затухает вглубь образца с экспоненциальной скоростью.

Видно, что образуются две фазы, причём в одной из них на границе “живут” майорановские нулевые моды, также называемые краевыми модами.

Такую фазу будем далее называть топологической, а другую - топологически тривиальной.

## 2.2 Переплетение майорановских нулевых мод

Поскольку майорановские моды не входят в гамильтониан, возникает проблема управления ими, а без контролируемого изменения состояния кубита невозможны квантовые вычисления.

В [3] предлагается операция, названная braiding. Это слово в данной дипломной работе будет переводиться как “переплетение”. Идея состоит в том, что если поменять местами майорановские нулевые моды, то состояние системы изменится. Это легко понять, введя оператор чётности

$$T = \prod_{j=1}^{2L} (-i\gamma_j). \quad (6)$$

Этот оператор коммутирует с гамильтонианом (4). В самом деле, в гамильтониан входят только чётные по числу майорановских фермионов слагаемые, а в оператор чётности - каждый из таких фермионов один раз. Учитывая, что различные фермионы антикоммутируют, а сами с собой - коммутируют, получим

$$\gamma_n T = -T \gamma_n \quad \gamma_n \gamma_m T = T \gamma_n \gamma_m. \quad (7)$$

Если теперь поменять местами два фермионных оператора, оператор чётности изменит знак:

$$\begin{aligned} T_{nm} &= (-i)^{2N} \gamma_1 \cdots \gamma_n \cdots \gamma_m \cdots \gamma_{2N} \\ &= (-i)^{2N} (-1)^{m-n-1} \gamma_1 \cdots \gamma_n \gamma_m \cdots \gamma_{2N} \\ &= (-i)^{2N} (-1)^{m-n} \gamma_1 \cdots \gamma_m \gamma_n \cdots \gamma_{2N} \\ &= -(-i)^{2N} \gamma_1 \cdots \gamma_m \cdots \gamma_n \cdots \gamma_{2N} \\ &= -T_{mn}. \end{aligned} \quad (8)$$

В двумерном пространстве можно обвести майорановские моды друг вокруг друга. Чётность при этом, очевидно, измениться не должна. При этом операторы (в гейзенберговском представлении) не могут просто пере-



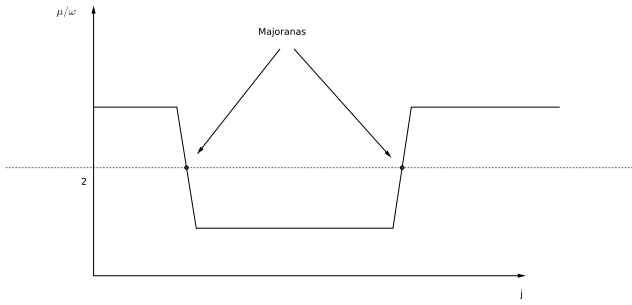


Рис. 1: Зависимость отношения коэффициентов гамильтониана от номера узла; горизонтальная линия показывает границу фаз.

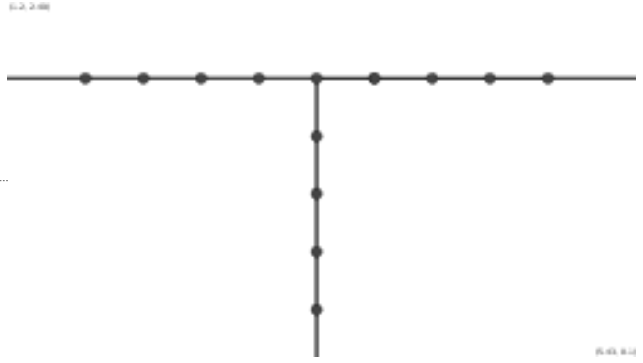


Рис. 2: Т-образное соединение; точками показаны фермионы, линиями - их взаимодействие.

ходить друг в друга: один из них меняет знак, чтобы сохранить чётность. Соответственно этому изменится и состояние системы.

В одномерной цепочке невозможно переставить фермионы, не проведя их друг через друга. В [3] предлагается выйти из одномерного пространства, рассмотрев решётку из проводов. Но для проведения одной операции переплетения достаточно более простой системы, Т-образного соединения, которое является частью двумерной решётки. Исследуем изменения относительно предыдущего пункта поэтапно.

Сначала нужно рассмотреть фермионную цепочку, отношение коэффициентов гамильтониана которой показано на рис. 1. Внутри каждого из участков коэффициенты гамильтониана постоянны, при этом в среднем участке отношение коэффициентов таково, что он находится в топологической фазе, а другие участки - в топологически тривиальной.

В такой системе майорановские нулевые моды будут находиться на границе фаз; при конечном отношении коэффициентов возбуждение будет экспоненциально затухать не только внутрь топологической фазы, но и “наружу”, в топологически тривиальную фазу.

Имея возможность менять коэффициенты гамильтониана независимо в каждой точке, можно изменять их отношение так, что граница фаз будет смещаться. При адиабатическом выполнении данной операции состояние майорановских нулевых мод не будет меняться. Это означает, что мы можем двигать топологический участок в произвольное место цепочки.

Наконец, можно представить себе соединение двух фермионных цепочек

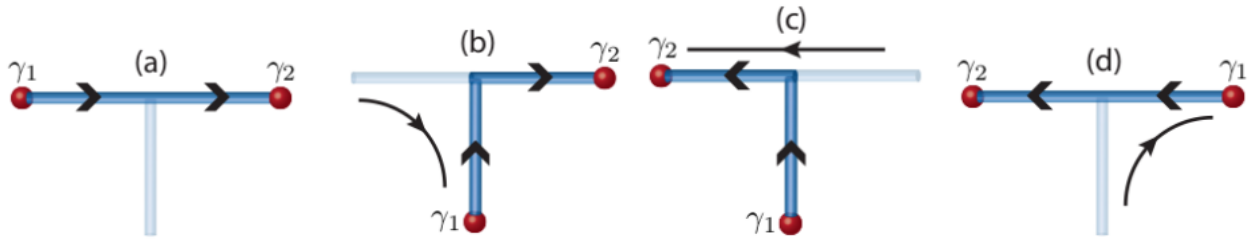


Рис. 3: Braiding, переплетение майорановских мод в Т-образно соединённых фермионных цепочках, [3].

чек. Простейший вариант, представленный на рис. 2 и называемый Т-образным соединением, является обычной фермионной цепочкой, один из узлов которой взаимодействует с крайним фермионом другой цепочки. В такой системе тоже существуют две фазы по отношению коэффициентов гамильтониана, и на границе между ними находятся майорановские нулевые моды. Соответственно, границы между фазами в такой конструкции можно двигать в том числе и в другие участки соединения.

Теперь можно понять, как происходит перестановка майорановских мод. Процесс представлен на рис. 3. В вышеописанной системе одна из мод уходит в нижнее ответвление, другая переводится на исходное место первой, после чего первая передвигается туда, где в начале была вторая. Все процессы осуществляются адиабатически и с сохранением чётности.

Переплетение важно, поскольку является частью универсального набора операций, упомянутого во введении. Переплетение двух майорановских мод, относящихся к разным кубитам, является нетривиальной операцией над ними. Кроме того, переплетение мод, относящихся к одному кубиту, меняет его состояние.

### 3 Спиновая система

В данной части будет кратко рассмотрено содержание [2]. Будет показано, как можно совершить переход от спиновой системы к фермионной, с учётом того факта, что цепочка не является одномерной и обычное преобразование Йордана-Вигнера не даёт гамильтониана с соседним взаимодействием. Далее будет рассмотрено переплетение на спиновом языке.

#### 3.1 Модифицированное преобразование Йордана-Вигнера

Обычное преобразование Йордана-Вигнера (здесь переводящее спиновую систему на язык майорановских фермионов),

$$\gamma_{2i-1} = \sigma^z(n) \sum_{p=1}^{n-1} \sigma^x(p), \quad \gamma_{2i} = \sigma^y(n) \sum_{p=1}^{n-1} \sigma^y(p), \quad (9)$$

превращает изинговскую цепочку с поперечным магнитным полем

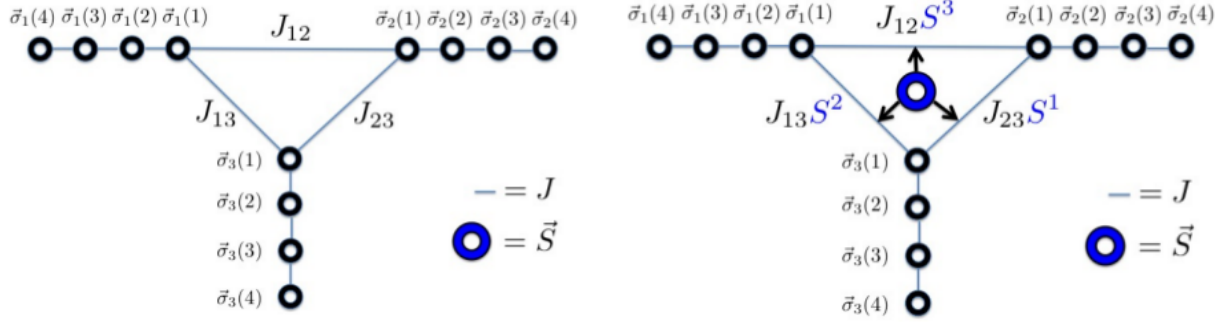
$$H = -J \sum_{n=1}^{N-1} \sigma^z(n) \sigma^z(n+1) - \sum_{n=1}^N h(n) \sigma^x(n) \quad (10)$$

в майорановскую цепочку с квадратичным гамильтонианом и взаимодействием ближайших соседей

$$H = -i \sum_{n=1}^N h(n) \gamma(2n-1) \gamma(2n) + iJ \sum_{n=1}^{N-1} \gamma(2n) \gamma(2n+1). \quad (11)$$

Для этого преобразования важно уметь последовательно перенумеровывать спины. В случае, когда есть три ветки (рис. 2, например), невозможно перенумеровать спины таким образом, чтобы после преобразования получилась майорановская цепочка, в которой взаимодействуют только соседи. Поэтому приходится менять вид преобразования.

Перенумеруем спины так, как указано на рис. 4а, то есть рассмотрим три ветви, сходящихся в соединении, и обозначим  $\sigma_\alpha(n)$   $n$ -ый от соединения спин из ветви  $\alpha$ . Соединение в этой схеме более общего вида, оно называется  $\Delta$ -образным соединением. При необходимости, оно сводится к Т-образному соединению обнулением одной из констант связи.



(a) Нумерация спинов в спиновой системе, необходимая для проведения преобразования Йордана-Вигнера.

(b) Спиновая система с центральным спином и его вкладом во взаимодействие первых спинов цепочек.

Рис. 4:  $\Delta$ -образное соединение цепочек.

Проведём теперь преобразование следующим образом. В каждой из ветвей сделаем своё преобразование Йордана-Вигнера. Тогда в каждой ветви взаимодействовать будут только соседи, а коммутационные соотношения будут как у майорановских фермионов. Однако полученные таким образом операторы из разных ветвей будут коммутировать, а не антикоммутировать. Для установления правильных коммутационных соотношений добавим в преобразование  $i$ -ой ветви матрицу  $S^i$ . Чтобы не изменились коммутаторы внутри отдельных цепочек, квадрат  $S^i$  должен быть равен единице. Чтобы майорановские фермионы из разных ветвей антикоммутировали, матрицы  $S^i$  должны попарно антикоммутировать. Поскольку ветви три, удобно выбрать в качестве  $S^i$  матрицы Паули.

Модифицированное преобразование тогда выглядит следующим образом:

$$\gamma_{2i-1} = \sigma^z(n) \sum_{p=1}^{n-1} \sigma^x(p), \quad \gamma_{2i} = \sigma^y(n) \sum_{p=1}^{n-1} \sigma^y(p). \quad (12)$$

Оно восстанавливает необходимые коммутационные соотношения и вид гамильтониана внутри ветвей. На соединении, однако, взаимодействие получается не квадратичным и включает в себя матрицы  $S^i$ .

$$H_{junc} = - \sum_{\alpha < \beta} J_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha}^z(1) \sigma_{\beta}^z(1) = -i \sum_{\alpha < \beta} J_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha}(1) \gamma_{\beta}(1) \epsilon^{\alpha\beta\zeta} S^{\zeta}. \quad (13)$$

Чтобы сделать гамильтониан квадратичным в майорановском представлении, изменим систему так, как показано на рис. 4b, то есть сделаем взаимодействие трёхспиновым в исходной, спиновой системе. Помимо первых спинов цепочек туда теперь будет входить оператор дополнительного спина, который в дальнейшем будет называться “центральный”. Взаимодействие будет выглядеть следующим образом:

$$H_{junc} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta \neq \zeta} J_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha}^z(1) \sigma_{\beta}^z(1) S^{\zeta} = \frac{i}{2} \sum_{\alpha\beta\zeta} J_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha}(1) \gamma_{\beta}(1) \epsilon^{\alpha\beta\zeta}. \quad (14)$$

Таким образом, спиновая система с рисунка 4b является спиновым представлением системы майорановских фермионов, в которой удобно проводить переплетение.

Вопросы физической реализации этой системы следует оставить до части 3.3, в которой конструкция будет несколько изменена.

## 3.2 Свойства спиновой системы

Рассмотрим теперь, чему соответствуют краевые моды и процессы с ними на спиновом языке. Следующий материал частично описан в [4] и [2].

Будем считать, что поперечное магнитное поле равно нулю внутри топологического участка и бесконечности - вне его. Это удобно с теоретической точки зрения, поскольку основное состояние принимает в таком случае простой вид, который будет указан далее, а с практической просто означает  $h \ll J$  и  $h \gg J$ , что реализуемо. Изменение магнитного поля, приводящее к изменению размеров топологического участка, будем предполагать адиабатическим. Взаимодействие ферромагнитное,  $J > 0$  в гамильтониане (10).

В таком случае спины за пределами топологического участка оказываются эффективно “замороженными” вдоль оси  $z$ . Внутри же появляется изинговская цепочка без магнитного поля с эффективно свободными условиями на границах. Основное состояние такой системы двояко вырождено, базисными векторами можно считать состояния “все спины вверх”,  $|\uparrow \cdots \uparrow\rangle$ , и “все спины вниз”,  $|\downarrow \cdots \downarrow\rangle$ , где в кет-векторах перечислены только спины топологического участка. Если температура достаточно низка, так что возбуждения можно пренебречь, то все интересующие нас процессы происходят в двумерном подпространстве, построенном на этих векторах.

Нетрудно показать, как влияет расширение топологического участка на его состояние. Для примера рассмотрим двухспиновый гамильтониан, имея в виду, что второй спин находится внутри топологического участка, а у первого отношение коэффициентов меняется так, что он переходит из топологически тривиальной фазы в топологическую.

$$H = -J\sigma_1^z\sigma_2^z - h\sigma_1^x. \quad (15)$$

Легко найти его собственные значения  $\lambda = \pm\sqrt{J^2 + h^2}$  и собственные функ-

ции, соответствующие основному состоянию,

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{(J + \sqrt{J^2 + h^2}) \uparrow + h \downarrow}{\sqrt{h^2 + (J + \sqrt{J^2 + h^2})^2}} \uparrow, \\ \psi_2 &= \frac{h \uparrow + (J + \sqrt{J^2 + h^2}) \downarrow}{\sqrt{h^2 + (J + \sqrt{J^2 + h^2})^2}} \downarrow.\end{aligned}$$

В пределе  $h \rightarrow \infty$  они становятся состояниями  $|\uparrow\rangle_x |\uparrow\rangle_z$  и  $|\uparrow\rangle_x |\downarrow\rangle_z$ , где индекс обозначает, для какой матрицы Паули это состояние является собственным. Когда  $h = 0$ , они переходят в  $|\uparrow\uparrow\rangle_z$  и  $|\downarrow\downarrow\rangle_z$  соответственно.

Из предыдущего следует, что при “размораживании” спина, адиабатическом понижении поперечного магнитного поля от  $\infty$  до 0, произойдёт следующий переход:

$$\left( \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \right) (\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle) \rightarrow \alpha |\uparrow\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\downarrow\rangle.$$

Для спиновой цепочки это значит, что состояние топологического участка не меняется при передвижении его границ - до тех пор, пока граница не проходит через центральный спин с трёхспиновым взаимодействием. Это оправдывает введение следующих обозначений.

Пусть  $|\uparrow\rangle^\tau = |\uparrow \cdots \uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow\rangle^\tau = |\downarrow \cdots \downarrow\rangle$ , где вновь указаны только спины топологического участка. В дальнейшем будем использовать операторы  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_z$ , действующие в псевдоспиновом пространстве этих векторов. Здесь и далее топологический участок будет называться просто “кубитом”. Движение границ в таких обозначениях не отражается на состоянии системы, что удобно.

Осталось понять, как топологический участок проходит через центральный спин. Начнём со случая, когда во взаимодействии участвует компонента  $S^z$ , а спин находится в состоянии  $|\uparrow\rangle^s$  по  $z$ . Тогда в гамильтониане на соединении (14)  $S^z$  станет 1, а само взаимодействие не будет отличаться от всех остальных связей цепочки. Значит, при прохождении через него состояние кубита не изменится.

С другой стороны, если центральный спин находится в состоянии  $|\downarrow\rangle^s$ , верно всё то же, но взаимодействие меняет знак и становится антиферро-

магнитным. Легко понять, что в этом случае “размороженный” спин окажется перевёрнут относительно соседнего - (16) иллюстрирует утверждение.

В момент перехода состояние системы является суперпозицией следующих векторов:

$$\begin{aligned}
& |\cdots \uparrow\uparrow\rangle |\uparrow\rangle_s |\uparrow\uparrow \cdots\rangle, \\
& |\cdots \downarrow\downarrow\rangle |\uparrow\rangle_s |\downarrow\downarrow \cdots\rangle, \\
& |\cdots \uparrow\uparrow\rangle |\downarrow\rangle_s |\downarrow\downarrow \cdots\rangle, \\
& |\cdots \downarrow\downarrow\rangle |\downarrow\rangle_s |\uparrow\uparrow \cdots\rangle.
\end{aligned} \tag{16}$$

Видно, что переход действует на кубит как оператор  $CNOT$ , controlled not, контролируемый оператором  $S^\alpha$ . Например, в базисе  $(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$ , где первый спин -  $S$ , а второй -  $\tau$ ,

$$CNOT_{S^z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

причём контролирующий оператор указан в индексе.



### 3.3 Переплетение на спиновом языке

На введённом языке удобно рассматривать операцию переплетения, braiding. Будем работать в представлении Гейзенберга и исследовать эволюцию операторов  $\vec{\tau}$  и  $\vec{S}$ . Для этого представим  $CNOT$  в виде

$$CNOT_{S^\alpha} = \frac{S^\alpha + 1}{2} + \frac{S_\alpha - 1}{2}\tau_x = S^\alpha \frac{1 + \tau_x}{2} + \frac{1 - \tau_x}{2}, \quad (18)$$

и, поскольку  $CNOT$  и есть оператор эволюции, нужно вычислить

$$O' = CNOT_{S^\alpha}^\dagger \cdot O \cdot CNOT_{S^\alpha}. \quad (19)$$

Учитывая коммутационные соотношения, получим вспомогательные равенства

$$(1 + \tau_x)^2 = 1 + \tau_x^2 + 2\tau_x = 2(1 + \tau_x), \quad (20)$$

$$(1 + \tau_x)(1 - \tau_x) = 1 - \tau_x^2 = 0, \quad (21)$$

$$(1 + \tau_x)\tau^{y,z}(1 + \tau^x) = (1 + \tau_x)(1 - \tau_x)\tau^{y,z} = 0, \quad (22)$$

$$(1 + \tau_x)\tau^{y,z}(1 - \tau^x) = (1 + \tau_x)^2\tau^{y,z} = 2(1 + \tau_x)\tau^{y,z}. \quad (23)$$

Вычисляя [19](#) для всех операторов, получи, что при прохождении через соединение со взаимодействием, включающим компоненту спина  $S^\alpha$ , операторы меняются следующим образом:

$$\tau^{y,z} \rightarrow S^\alpha \tau^{y,z}, \quad \tau^x \rightarrow \tau^x, \quad (24)$$

$$S^{!\alpha} \rightarrow \tau^x S^{!\alpha}, \quad S^\alpha \rightarrow S^\alpha, \quad (25)$$

где  $!\alpha$  означает компоненты, отличные от  $\alpha$ .

Уже известно, как выглядит переплетение на майорановском языке (рис. [3](#)). Проведём те же действия в спиновой системе. При этом топологический участок сначала пройдёт через взаимодействие с  $S^z$ , затем, на пути вниз на рис. [4а](#), через  $S^x$ , и потом через взаимодействие с  $S^y$ .  $\tau^x$  просто сохраняется всегда; каждый из  $S^\alpha$  за время переплетения один раз сохраняется и два раза умножается слева на  $\tau^x$ , причём  $(\tau^x)^2 = 1$ . Так что изменятся только

$\tau^y$  и  $\tau^z$  составляющие.

$$\tau^{y,z} \rightarrow S^z \tau^{y,z} \rightarrow \tau^x S^z S^x \tau^{y,z} \rightarrow (\tau^x)^3 S^z S^x S^y \tau^{y,z} = i \tau^x \tau^{y,z} = \mp \tau^{z,y}. \quad (26)$$

Таким образом, переплетение является поворотом на  $\pi/2$  вокруг оси  $x$  в пространстве псевдоспинового оператора кубита.

Можно заметить, что все изменения состояния кубита происходят в момент прохода через центральный спин. В отличие от майорановской системы, состояние спиновой меняется не из-за того, что изменилось пространственное положение нулевых мод; вся существенная эволюция связана с проходами через центральный спин. Поэтому использование сложной системы с тремя ветвями, вообще говоря, не является обязательным. Необходимо лишь обеспечить взаимодействие кубита с нужными компонентами спина.

Эта идея становится ещё важнее в связи с тем, что физическая реализация системы, представленной на рис. 4b, ещё не придумана, и задача не выглядит тривиальной: нужно создать три трёхспиновых взаимодействия, включающие разные компоненты одного и того же спина. С другой стороны, способ реализации одного такого взаимодействия описан в [2]. Чтобы в гамильтониане соединения возникали разные компоненты спина, можно просто поворачивать спин.

Таким образом, значительно удобней была бы система, представленная на рис. 5. Переплетение в ней поэтапно показано на рис. 6. Сначала происходит проведение кубита через  $S^z$ ; затем спин поворачивают так, что во взаимодействии начинает участвовать  $S^x$ ; кубит проводится обратно в левую часть схемы; спин вращают ещё раз, после чего кубит уводят направо. Происходит та же самая эволюция, (25), но в значительно более реализуемой системе.

Ранее было сказано о том, что если центральный спин находится в состоянии “вверх”, соответствующем компоненте спина, участвующей во взаимодействии, то проведение кубита через соединение не меняет состояние кубита. Последний проход в данной схеме происходит через компоненту  $S^y$ ; если бы в этот момент спин находился в состоянии “вверх” по  $y$ , то этот проход можно было бы не выполнять. Зная, как изменяются компоненты спина в процессе проходов, (25), можно убедиться, что к моменту третьего про-

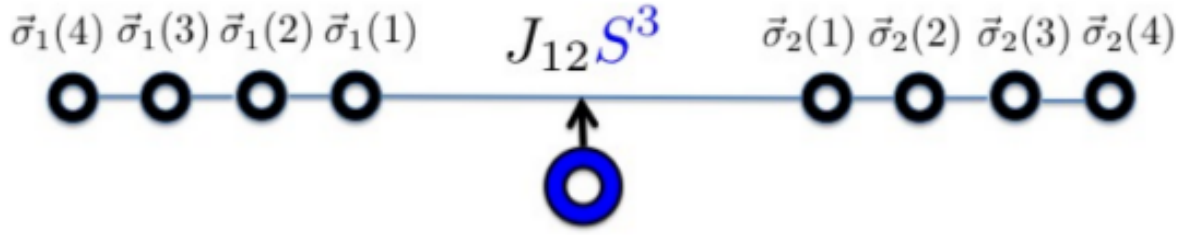


Рис. 5: Одномерная спиновая система; компонента спина на соединении контролируется экспериментатором.

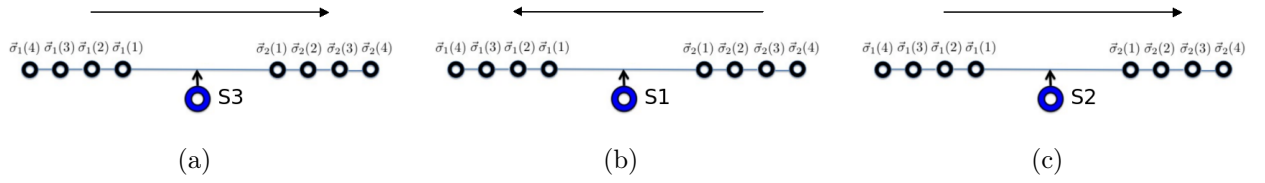


Рис. 6: Переплетение в одномерной системе.

ведения кубита через спин  $y$ -компонента последнего совпадает с той, что была в начале. Значит, если до начала операции переплетения центральный спин был в состоянии  $|\uparrow\rangle_y$ , то третий проход можно не осуществлять.

Это полезно в первую очередь потому, что общее время операции уменьшается в полтора раза. Шумы и малое время когерентности ограничивают возможное количество операций над кубитом, поэтому уменьшение времени выполнения отдельной операции - это положительный результат. Кроме того, в такой схеме кубит после переплетения оказывается в том же месте цепочки, в котором он был в начале, - нет побочного эффекта смещения топологического участка относительно центрального спина.

## 4 Отклонения от идеальности в спиновой системе

Ранее предполагалось, что все операции выполняются точно, а шумы, присущие любой физической системе, отсутствуют. В этой части дипломной работы будут приведены качественные и количественные оценки влияния этих неидеальностей на результат переплетения. Предполагая их малыми, вычислим первые порядки всех эффектов и, по возможности, сравним их.

В число этих неидеальностей входят продольный и поперечный шумы, действующие на спины системы. Их удобно рассматривать отдельно на нескольких этапах. Одним из таких этапов является проход, когда центральный спин находится внутри топологического участка. Другая часть переплетения, когда кубит и спин пространственно разделены, состоит из промежутков времени, когда спин находится в нулевом внешнем поле, и когда спин поворачивают, помещая в магнитное поле на короткий промежуток времени.

Кроме того, будет исследовано влияние неточности проведения операций, таких как получение начального состояния спина в схеме с двумя проходами и поворот спина между проведениями кубита через центральный спин.

### 4.1 Обозначения

Будем предполагать, что до начала переплетения центральный спин и кубит расцеплены, причём кубит обладает какой-либо допустимой матрицей плотности, а спин, в зависимости от количества проходов в схеме, находится либо в произвольном состоянии (три прохода), либо направлен вверх по  $y$  (два).

$$\rho_{\tau}^{init} = \frac{1}{2}(1 + \vec{r}\vec{\tau}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{pmatrix}, \quad |\vec{r}| \leq 1, \quad (27)$$

$$\rho_s^{init} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\rho^{init} = \rho_{\tau}^{init} \otimes \rho_s^{init}. \quad (29)$$

Выполняемые преобразования сводятся к CNOT, причём “контролирующими” являются разные компоненты спина  $S$ . Получить эти матрицы можно как непосредственно рассматривая действие на базисные векторы, так и поворотом  $CNOT_{Sz}$ .

$$U_3 = CNOT_{Sz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$U_1 = CNOT_{S^x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$U_2 = CNOT_{S^x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & i & -i \\ 1 & 1 & -i & i \\ i & -i & 1 & 1 \\ -i & i & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

После выполнения переплетения в схеме с двумя проходами

$$\rho^{final} = U_1 U_3 \rho^{init} (U_1 U_3)^\dagger = \rho_\tau^{final} \otimes \rho_s^{final}, \quad (33)$$

$$\rho_\tau^{final} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-y & x+iz \\ x-iz & 1+y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 + x\tau_x + z\tau_y - y\tau_z), \quad (34)$$

$$\rho_s^{final} = \rho_s^{init}. \quad (35)$$

К этому результату в следующих параграфах будут найдены различные поправки. Регулярно будет получаться так, что кубит и спин из-за неидеальности системы в конце операции останутся зацепленными; в таком случае будет приводиться в том числе и редуцированная матрица плотности кубита, после взятия следа по состояниям центрального спина. Такой подход хорошо характеризует систему, если кубит и данный спин в дальнейшем не будут взаимодействовать, или если центральный спин перед дальнейшими операциями устанавливается в определённое положение, и информация о его состоянии после переплетения удаляется.

## 4.2 Предположения

Как упомянуто в [2], к центральному спину предъявляются дополнительные технические требования, связанные с особенностями реализации трёх-спинового взаимодействия. Из-за этого его время корреляции, скорее всего, будет меньше времён корреляции всех остальных спинов цепочки (к первым спинам цепочек никаких дополнительных требований не предъявляется). Поэтому в первую очередь будет рассматриваться то, как действие шумов на центральный спин влияет на состояние кубита после переплетения. Это действие удобно рассматривать в несколько этапов. Есть поперечный и продольный шумы, а топологический участок два раза проходит через центральный спин (в схеме с двумя проходами). Согласно этому разделим вычисления на три этапа: два, в которых спин находится внутри топологического участка, и один, в котором он находится вне. В последнем для удобства выделим ещё промежутки времени, когда спин находится в нулевом и отличном от нуля внешнем магнитном поле. Вычисления, проведённые на каждом этапе потом можно сложить, потому что первый порядок теории возмущений линеен.

Также обратим внимание на работу [5], в которой приведены последние достижения в области реализации потоковых кубитов. Указано, что получены времена релаксации  $T_1 = 55\mu s$  и  $T_2 \approx 2T_1$ , что означает  $T_2^* \gg T_1$ . Как нетрудно заметить, именно поперечный шум подавлен в схеме, рассматриваемой в данной дипломной работе, поскольку переход  $|\uparrow\rangle^T \rightleftharpoons |\downarrow\rangle^T$  требует одновременного одинакового действия  $\sigma_x$  на всём топологическом участке, а случайные возмущения в норме так не коррелируют.

## 4.3 Начальное состояние центрального спина в схеме с тремя проходами

Из сравнения процесса переплетения в майорановской и спиновой системах заранее очевидно, что в схеме с тремя проходами центральный спин может находиться в произвольном чистом состоянии, это не должно повлиять на результат операции. Интересно, что даже если спин изначально находился в смешанном состоянии, то есть был зацеплен с внешней средой, кубит не переходит в смешанное состояние в результате переплетения. Здесь име-

ются в виду только различные начальные состояния спина; шумы, как и неточности оборудования, предполагаются отсутствующими.

Это можно проверить непосредственным вычислением, посчитав, что

$$U_2 U_1 U_3 (\rho_\tau \otimes \rho_s) (U_2 U_1 U_3)^\dagger = \rho_\tau^{final} \otimes \rho_s, \quad (36)$$

где  $\rho_\tau^{final}$  из (34), а  $\rho_s$  произвольная допустимая.

Впрочем, это можно понять и так. В гейзенберговском представлении матрица плотности вообще не меняется; законы преобразования операторов не зависят от того, является состояние чистым или смешанным; а для чистых состояний, как было указано выше, результат очевиден из сравнения с майорановской системой.

Этот результат имеет качественное значение: несмотря на недостатки схемы с тремя проходами, нет необходимости делать хоть какие-то операции со спином до начала переплетения, это не повлияет на результат. В схеме с двумя проходами спин должен находиться в особом начальном состоянии, что служит дополнительным источником ошибок - невозможно идеально задать состояние спина.

## 4.4 Спин внутри топологического участка и поперечный шум

Центральный спин, в отличие от топологического участка, подвержен действию и поперечного, и продольного шума. Однако оказывается, что на одном из это верно лишь пока спин находится вне топологического участка. Когда же он внутри, низкая температура и длина топологического участка подавляют продольную релаксацию.

Внимательный взгляд на волновые функции (16) основного состояния системы в таком положении показывает, что в этом основном состоянии нет пар функций, получающихся друг из друга просто переворотом центрального спина: есть только пары, получающиеся переворотом его и одной из частей топологического участка, слева или справа от самого спина.

Это означает, что переходы, происходящие под влиянием поперечного шума, появляются только в  $(1 + \min(m, n))$ -ом порядке теории возмущений, где  $m$  - число спинов топологического участка слева от спина, а  $n$  -

справа. То есть, как минимум, не в первом, пока спин находится внутри топологического участка.

## 4.5 Неточности проведения операций

Пусть начальное состояние спина немного отличается от  $|\uparrow\rangle_y$ . Рассмотрим влияние этого отличия на результат в первом порядке. Точно, пусть волновая функция спина

$$\psi = |\uparrow\rangle + \epsilon |\downarrow\rangle, \quad (37)$$

причём поправка к волновой функции из-за нормировки второго порядка, а соответствующее изменение матрицы плотности

$$\delta\rho_s^{init} = \frac{\epsilon}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Вычисляя  $U_1 U_3 \rho^{init} (U_1 U_3)^\dagger$ , найдём поправку к результату

$$\delta\rho^{final} = \frac{\epsilon}{4} \begin{pmatrix} x & 1 & z & iy \\ 1 & x & -iy & -z \\ z & iy & -x & -1 \\ -iy & -z & -1 & -x \end{pmatrix} \quad (39)$$

и её частичный след по состояниям центрального спина

$$\delta\rho_\tau^{final} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Несмотря на то, что первый порядок поправки к результату более не позволяет разбивать всю матрицу плотности на тензорное произведение матриц плотностей кубита и спина, после усреднения по спиновым состояниям поправка оказывается тождественно равной нулю. Она возникнет только во втором порядке.

Также ошибка может возникнуть во время поворота спина между проходами. Поворот происходит вокруг оси  $y$  на  $\pi/2$ . Пусть угол оказался смещён



на  $\delta\phi$ . Рассматривая  $U_1$  как

$$U_1 = R^\dagger U_3 R, \quad (41)$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$\delta R = \frac{\delta\phi}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

где  $\delta R$ , поправка к матрице поворота, получена разложением в ряд Тейлора по  $\delta\phi$ .

Соответственно, для изменения результата получается

$$\begin{aligned} \delta\rho^{final} = & (\delta R^\dagger U_3 R U_3 + R^\dagger U_3 \delta R U_3) \rho^{init} (U_1 U_3)^\dagger \\ & + U_1 U_3 \rho^{init} (\delta R^\dagger U_3 R U_3 + R^\dagger U_3 \delta R U_3)^\dagger. \end{aligned} \quad (44)$$

Выражение, в котором уже взят частичный след по спиновым состояниям, выглядит так:

$$\delta\rho^{final} = \delta\phi \begin{pmatrix} -z & -iy \\ iy & z \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где  $y, z$  - соответствующие компоненты начального состояния кубита, см. (27).

## 4.6 Продольный шум, спин внутри топологического участка

Выше, в 4.4, было показано, что влиянием поперечного шума на центральный спин внутри топологического участка можно пренебречь. Однако в системе нет никакой защиты от продольного шума. Вычислению его влияния на результат переплетения посвящён этот параграф.

В процессе переплетения спин находится внутри топологического участ-

ка два раза: когда во взаимодействии стоит  $S^z$  и  $S^x$ . За это время между состояниями  $|\uparrow\rangle_\alpha$  и  $|\downarrow\rangle_\alpha$ , где  $\alpha = z, x$ , набегает случайная фаза. Следует обратить внимание на то, что во втором случае, когда речь идёт об  $S^x$ , шум остаётся продольным, но уже вдоль оси  $x$ . Это связано с тем, что взаимодействие имеет вид  $\tau^z S^x \tau^z$ , и от поперечного  $x$  шума система защищена так, как описано ранее. Тот же аргумент становится очевидным в шрёдингеровском представлении: если в гейзенберговском менялся оператор спина, участвующий во взаимодействии, то в шрёдингеровском взаимодействие не меняется вообще, поворачивается лишь спин. Поэтому не является удивительным то, что поправка, набирающаяся за эти проходы, одинакова.

Представляя  $CNOT$  в виде

$$U_3 = CNOT_{S^z} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\phi} \\ 0 & 0 & e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (46)$$

вычисляя  $\rho^{final}$ , усредняя его по реализациям шума, разлагая получившиеся экспоненты до первого порядка и усредняя по состояниям центрального спина, получаем

$$\rho_\tau^{final} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - ye^{-t/T_2} & x + i ze^{-t/T_2} \\ x - i ze^{-t/T_2} & 1 + ye^{-t/T_2} \end{pmatrix} \quad (47)$$

где  $t$  - это время прохода,  $T_2$  - время поперечной релаксации.

## Список литературы

- [1] A.Yu. Kitaev. Unpaired majorana fermions in quantum wires. 2000.
- [2] S. Backens, A. Shnirman, Yu. Makhlin, Yu. Gefen, J.E. Mooij, and G. Schon. Emulating majorana fermions and their braiding by ising spin chains. 2017.
- [3] J. Alicea, Yu. Oreg, G. Refael, F. Oppen, and M.P.A. Fisher. Non-abelian statistics and topological quantum information processing in 1d wire network. 2010.
- [4] L.S. Levitov, T.P Orlando, J.B. Majer, and J.E. Mooji. Quantum spin chains and majorana states in arrays of coupled qubits. 2001.
- [5] F. Yan, S. Gustavsson, A. Kamal, J. Birenbaum, A.P. Sears, D. Hover, T.J. Gudmundssen, D. Rosenberg, G. Samach, S. Weber, J.L. Yoder, T.P. Orlando, J. Clarke, A.J. Kerman, and W.D. Oliver. The flux qubit revisited to enhance coherence and reproducibility. 2016.