Университет ИТМО

Факультет ПИН

Лабораторная работа №2

Глобальная оптимизация методом Пиявского–Шуберта

Выполнил:
студент группы **K3339**
Катков Алексей Сергеевич

Преподаватель:
Духанов Алексей Валентинович

Санкт-Петербург, 2025

Введение

Цель работы — реализовать программу глобальной оптимизации липшицевых функций на отрезке с использованием метода Пиявского–Шуберта. Алгоритм строит нижнюю кусочно-линейную оценку функции и выбирает интервал, наиболее перспективный для поиска глобального минимума.

Необходимо также визуализировать исходную функцию, нижнюю оценку, точки выборки и найденный минимум, а также определить количество итераций и затраченное время.

Постановка задачи

Требуется найти глобальный минимум липшицевой функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ с заданной точностью ε.

Программа должна строить:

- график функции;
- её нижнюю оценку;
- точки вычисления;
- отмеченный минимум.

А также выводить:

- приближённое значение минимума x^*;
- значение функции в точке $f(x^*)$;
- количество итераций;
- время работы алгоритма.

Краткая теория метода Пиявского–Шуберта

Пусть функция $f(x)$ липшицева:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Для исследованной точки x_k строится линейная оценка снизу:

$$g_k(x) = f(x_k) - L|x - x_k|.$$

Нижняя огибающая:

$$G(x) = \max_k g_k(x)$$

Характеристика интервала:

$$R_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} - \frac{L}{2}(x_{i+1} - x_i).$$

Новая точка добавления:

$$x_{\text{new}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{2L}.$$

Критерий остановки:

$$f_{\min} - \min_i R_i \leq \varepsilon.$$

Описание программы

Программа реализована на Python. Поддерживается ввод функции в виде строки, адаптивная оценка константы Липшица, построение нижней огибающей и полная визуализация. Используются библиотеки numpy и matplotlib.

Исходники размещены в репозитории:

- **https://github.com/Deraxus/lab2-metopt**

Результаты экспериментов

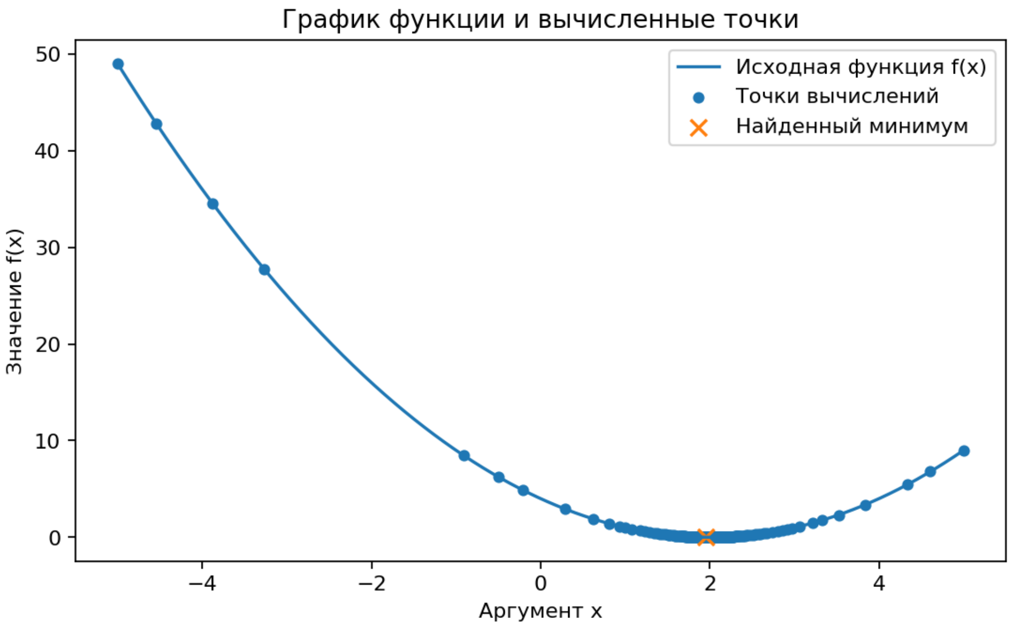
Ниже приведены графики и численные результаты работы программы.

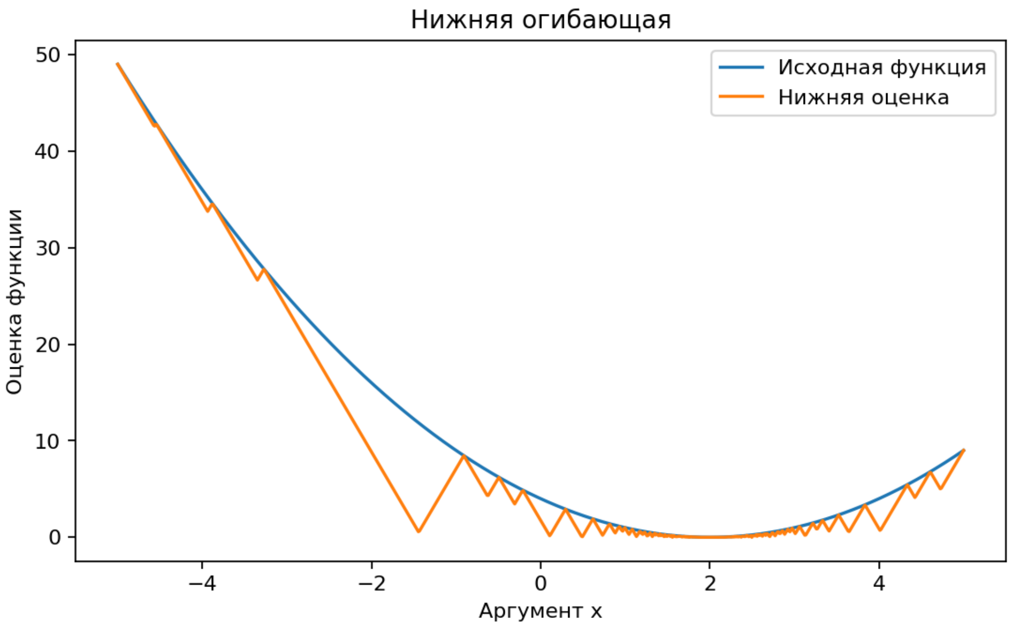
1. Квадратичная функция

$$f(x) = (x-2)^2$$

Результаты:

- $x^* = 1.95547$
- $f(x^*) \approx 2.05 \cdot 10^{-8}$
- итерации: 335
- время: 0.0356 сек



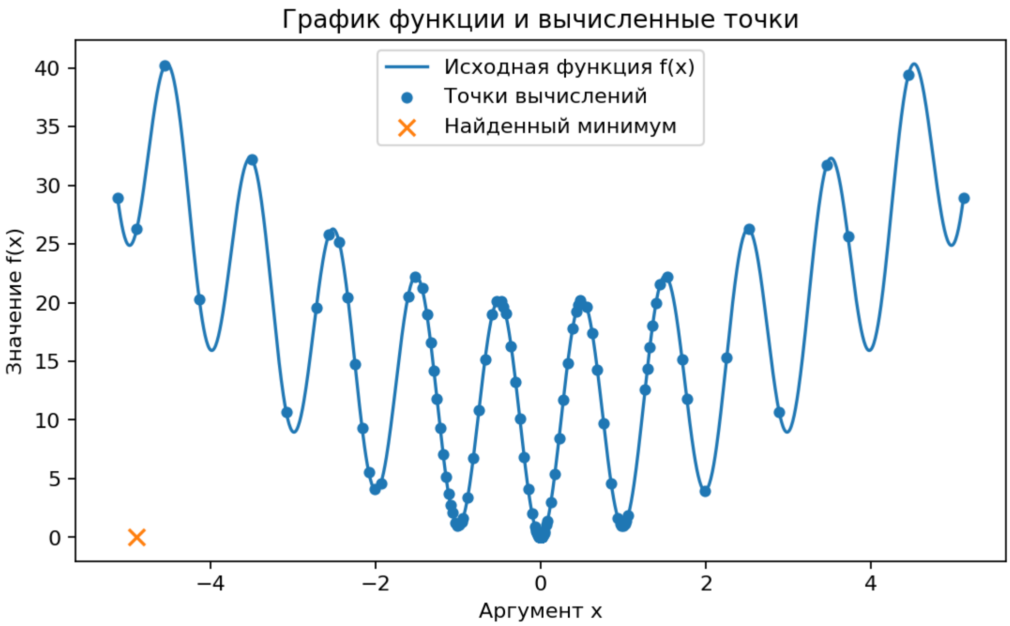


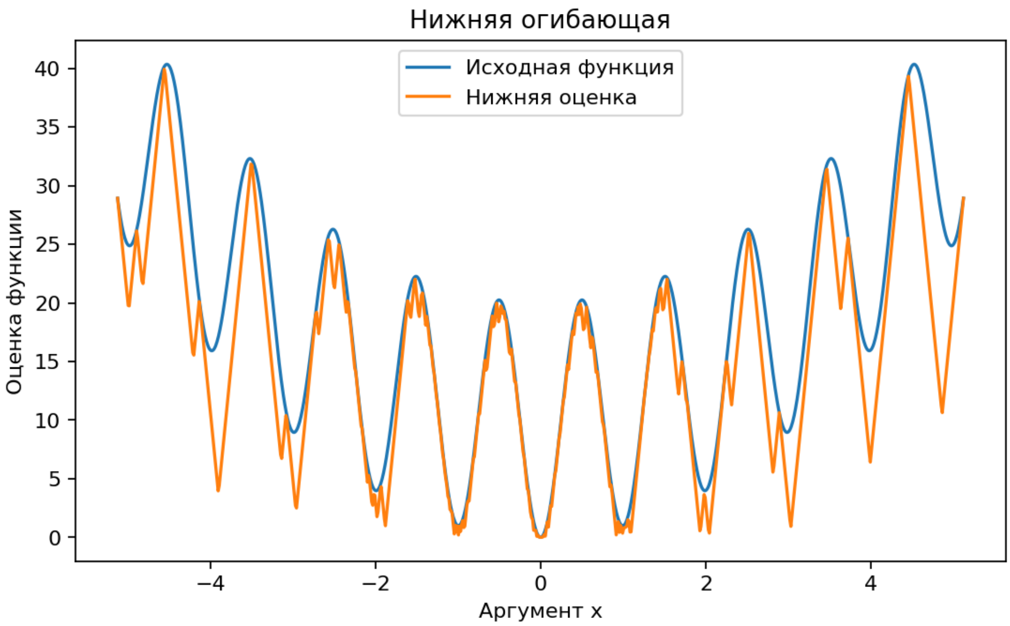
2. Функция Растригина

$$f(x) = 10 + x^2 - 10\cos(2\pi x)$$

Результаты:

- $x^* = -4.88727$
- $f(x^*) = 0$
- итерации: 193
- время: 0.0090 сек



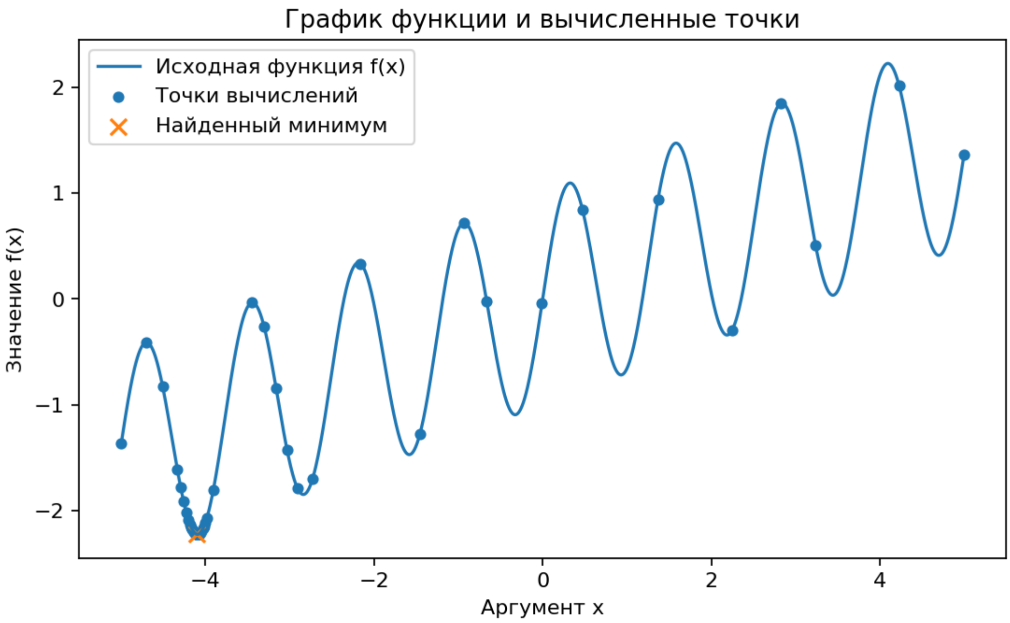


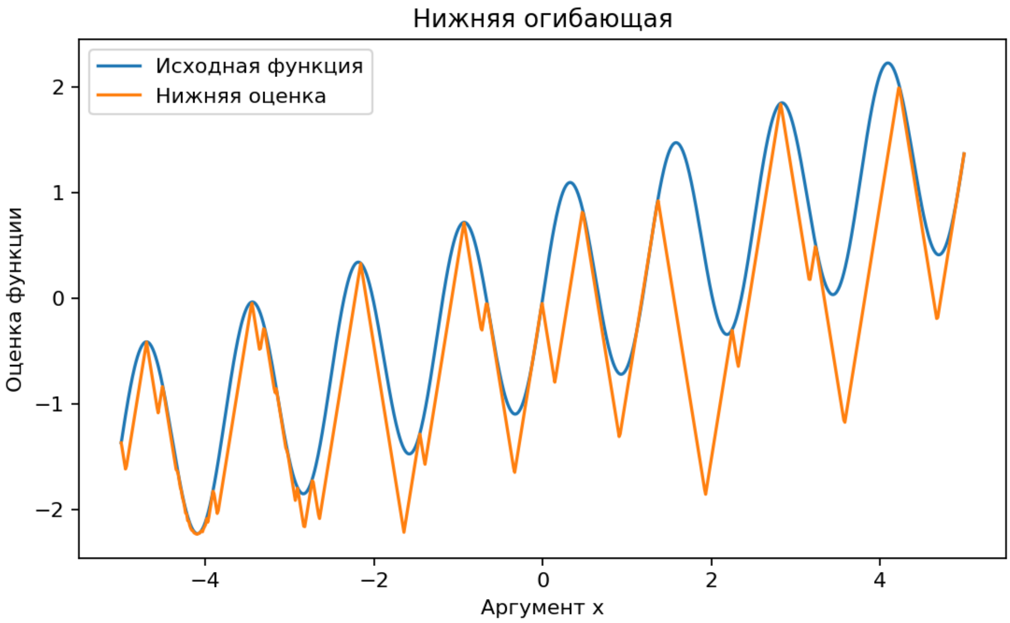
3. Линейный тренд + синус

$$f(x) = 0.3x + \sin(5x)$$

Результаты:

- $x^* = -4.10667$
- $f(x^*) = -2.227017$
- итерации: 55
- время: 0.00098 сек





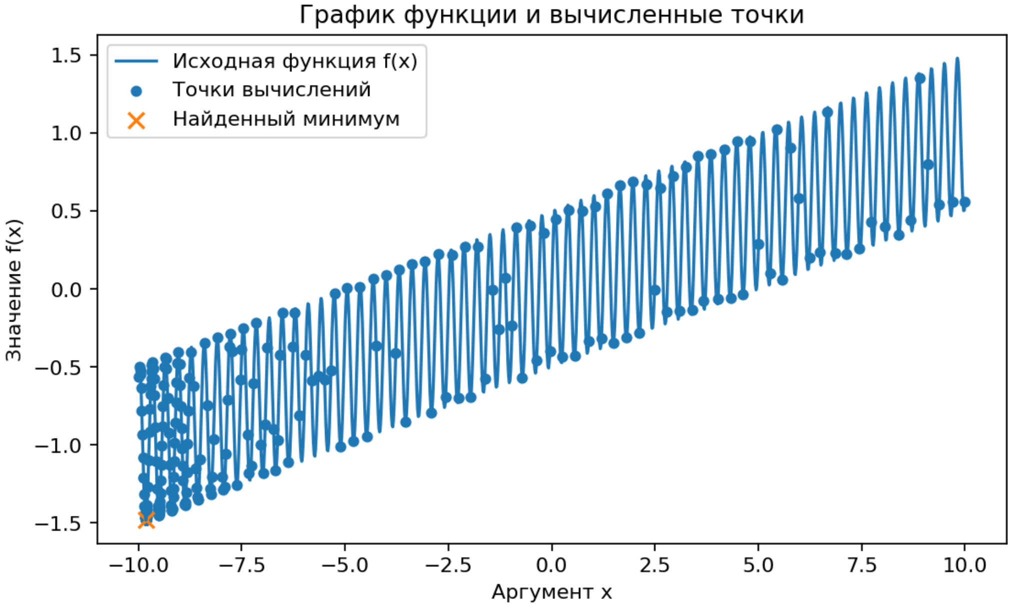
4. Пилообразная комбинация

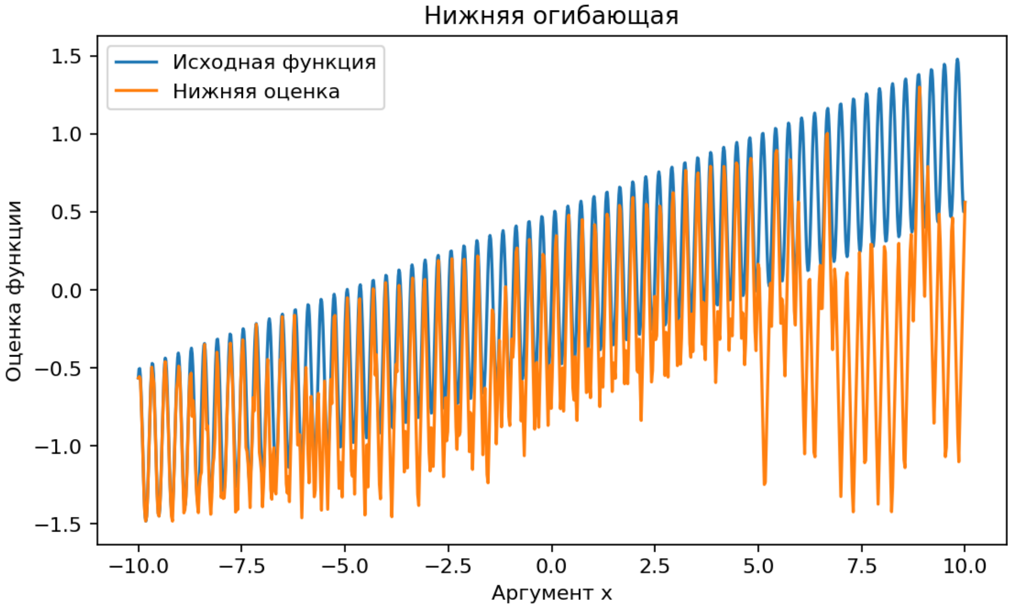
$$f(x) = 0.1x + 0.5\sin(20x)$$

Результаты:

- $x^* = -9.82102$
- $f(x^*) = -1.481765$
- итерации: 234
- время: 0.0143 сек

Высокая частота синусоиды вызывает большое количество локальных минимумов, что нормально для данной функции.



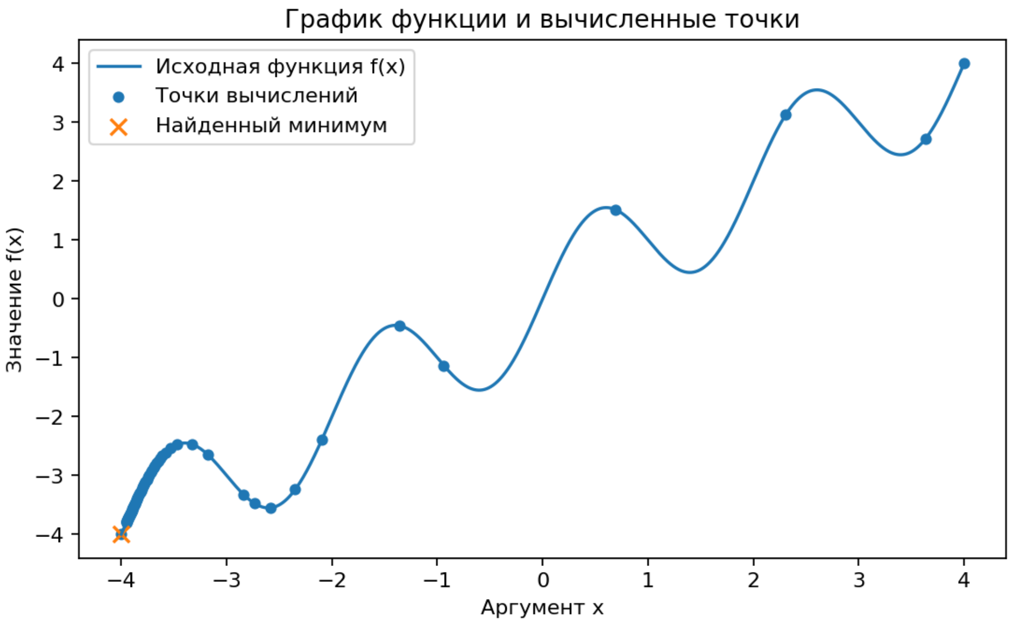


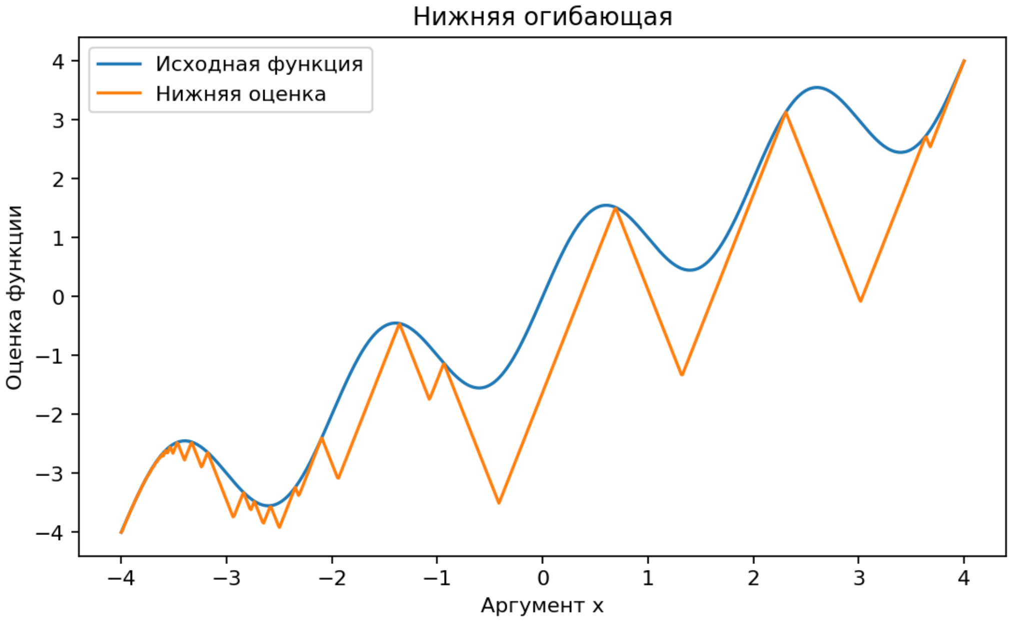
5. Функция из задания

$$f(x) = x + \sin(3.14159x)$$

Результаты:

- $x^* = -4.0$
- $f(x^*) = -3.999989$
- итерации: 62
- время: 0.00122 сек





Выводы

В ходе работы была реализована программа глобальной оптимизации липшицевых функций методом Пиявского–Шуберта. На всех тестовых функциях метод корректно находил глобальный минимум даже в условиях наличия большого числа локальных минимумов. Полученные результаты подтверждают работоспособность алгоритма и верную реализацию.