HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG
Avdeling for informatikk og e-læring

Målform:	Bokmål					
Eksamensdato:	14. desember 2015					
Varighet/eksamenstid:	09:00 – 13:00					
Emnekode:	TDAT1004					
Emnenavn:	Matematikk 1					
Klasse(r):	Ing 1					
Studiepoeng:	10 (denne deleksamenen teller 40% av sluttresultatet)					
Faglærer(e): (navn og telefonnr på eksamensdagen)	Anette Wrålsen (mobil 97 79 68 78) Hans Jakob Rivertz (mobil 93 83 21 72)					
Kontaktperson(adm.) (fylles ut ved behov – kun ved kursemner)						
Hjelpemidler:	Godkjent kalkulator emnetype 1					
Oppgavesettet består av: (antall oppgaver og antall sider inkl. forside)	6 oppgaver og 6 sider					
Vedlegg består av: (antall sider)	3					

Merknad:

Oppgaveteksten kan beholdes av studenter som sitter eksamenstiden ut.

NB! Les gjennom hele oppgavesettet før du begynner arbeidet, og disponer tiden.

Dersom noe virker uklart i oppgavsettet, skal du gjøre dine egne antagelser og forklare dette i besvarelsen.

Lykke til!

Husk: *Ta alltid med nok forklaring/utregning til at det ikke er tvil om hvordan du har løst oppgaven for å få full uttelling!*

Oppgave 1 (20%)

a) Avgjør hvilke av setningene under som er henholdsvis påstander, predikater eller ingen av delene. For de som er påstander, angi sannhetsverdien, og for de som er predikater, angi en fornuftig definisjonsmengde og tilhørende sannhetsmengde.

(i) $\sqrt{x}$ er et reelt tall.

(ii) Alle trekanter er rettvinklede.

(iii) Hvis $\sqrt{9} > 9$, er $\sqrt{\frac{1}{9}} > \frac{1}{9}$.

b) Skriv **negasjonen** av påstandene under (dvs. påstanden med motsatte sannhetsverdier) i naturlig språk.

(i) Sola skinner og bamsemums er sunt.

(ii) Hvis sola skinner, er bamsemums sunt.

(iii) Ingen bamsemums er sunne.

c) Forklar hva en **selvmotsigelse** (eller **kontradiksjon**) er og avgjør om påstanden under er en selvmotsigelse eller ikke:

$$(p \vee q) \wedge \sim p \leftrightarrow \sim q$$

d) Fyll inn det som mangler på stedene merket med (i) og (ii) i beviset under. Det kan være nyttig å vite at et heltall er et partall hvis og bare hvis det kan skrives som $2k$ for et heltall k.

Teorem 1. *Produktet av to partall blir igjen et partall.*

Bevis. La a og b være to partall. Da vet vi at det finnes heltall k_1 og k_2 slik at $a = 2k_1$ og $b = 2k_2$. Videre ser vi at

$$a \cdot b = \text{(i)}.$$

Siden k_1 og k_2 er heltall,

(ii)

Dermed er også ab et partall. □

Oppgave 2 (10%)

a) Gitt de komplekse tallene z_1 og z_2 på polar form $z_1 = 4(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)$ og $z_2 = 2(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6)$. Regn ut

(i) $z_1 z_2$

(ii) z_1 / z_2

b) Regn ut og gi svarene på standardform

(i) $(1+i)(1+i)$

(ii) $(1+1)/(1-1)$

Oppgave 3 (20%)

En matrise kalles **stokastisk** hvis summen av elementene i hver søyle er en.

a) Hvilke egenverdier har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix}?$$

Finn også en egenvektor for hver av egenverdiene.

b) Finn en inverterbar matrise K og en diagonal matrise D slik at $A = KDK^{-1}$.

c) Vis at alle stokastiske matriser har eigenverdi 1. (Hint: Vis først at summen av radvektorene i matrisen $A - 1\,I$ er lik nullvektoren.)

Oppgave 4 (20%)

La matrisen A være koeffisientmatrisen til systemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & w & = & 4 \\ -x & - & y & + & z & - & 2w & = & -2 \\ x & + & 3y & - & z & & & = & 6 \end{array}$$

a) Skriv opp matrisen A og totalmatrisen $\tilde{A}$ til systemet.

b) Løs systemet i a) ved hjelp av totalmatrisen. Hvilken rang har A?

c) Finn en basis for nullrommet til A og en basis for søylerommet til A.

Oppgave 5 (20%)

En transformasjon T er satt sammen av 3 deltransformasjoner. Først en translasjon fra punktet $(2, 3)$ til origo, så en rotasjon med 90° mot klokka og til slutt en translasjon fra origo til $(2, 3)$.

a) Skriv opp hver av de fiktive matrisene til deltransformasjonene.

b) Regn ut den fiktive transformasjonsmatrisen til transformasjonen T.

c) Den fiktive transformasjonsmatrisen til T har en eigenverdi, $\lambda = 1$. Finn eigenvektoren på formen $v = [x\,y\,1]^T$.

d) Transformasjonen T bevarer et punkt. Finn dette punktet.

Oppgave 6 (10%)

La matrisen A ha egenskapen $A^2 = 0$ og la matrisen B ha egenskapen $B^3 = 0$

a) Vis at matrisen $I - B$ har invers $I + B + B^2$.

b) Hva er den inverse matrisen til $I - A$.

A. Komplekse tall

Standardform:	z	$=$	$a+i\,b$
Polarform:	z	$=$	$re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\,\sin\theta)$
De Moivres:	$(\cos\theta+i\,\sin\theta)^n$	$=$	$\cos n\theta+i\,\sin n\theta$
Konjugert:	$\bar{z}$	$=$	$a-b\,i$
Argument:	$\arg z$	$=$	θ
Absoluttverdi:	$\|z\|$	$=$	$\sqrt{a^2+b^2}$
Realdelen:	$\mathrm{Re}(z)$	$=$	a
Imaginærdelen:	$\mathrm{Im}(z)$	$=$	b

B. Lineær algebra

1. Matriseoperasjoner

Gitt matrisene $A=[a_{ij}]$ og $B=[b_{ij}]$.

Sum:	$A+B$	$=$	$[a_{ij}+b_{ij}]$
Multiplikasjon med skalar:	kA	$=$	$[k\,a_{ij}]$
Produkt:	AB	$=$	$\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]$
Transponering:	A^T	$=$	$[a_{ji}]$
	$(AB)^T$	$=$	B^TA^T

2. Spesielle kvadratiske matriser

Diagonal matrise $D=\mathrm{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})$	$a_{ij}=0$, når $i\neq j$.
Enhetsmatrise	$I=\mathrm{diag}(1,1,\ldots,1)$
Øvre triangulær matrise	$a_{ij}=0$ når $i>j$
Nedre triangulær matrise	$a_{ij}=0$ når $i<j$
Symmetrisk matrise	$A^T=A$
Skjevsymmetrisk matrise	$A^T=-A$
Singulær matrise	$\det A=0$

3. Rangen til en matrise

rank $A=$ antall pivotelementer i en trappematrise for A.

$$\mathrm{rank}(A^T)=\mathrm{rank}(A)$$

4. Invers matrise

$$A^{-1}A=AA^{-1}=I$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$$

Gauss Jordan:

$$[A|I]\sim[I|A^{-1}]$$

Kofaktormetoden

$$A^{-1}=\frac{(\mathrm{kof}\ A)^T}{\det A}$$

Følgende er ekivalent for kvadratiske matriser:

1. A er inverterbar (A^{-1} eksisterer.)
2. $\det A\neq 0$.
3. A har maksimal rang.

5. Ortogonale matriser.

$$A^T=A^{-1}\Leftrightarrow AA^T=A^TA=I$$

6. Determinanter

Kofaktor: $\mathrm{kof}(a_{ij})=(-1)^{i+j}D_{ij}$, der D_{ij} er underdeterminanten en får ved å fjerne rad i og søyle j fra det A.
Utvikling langs rad nr. i og langs søyle nr. j:

$$\det A=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{kof}(a_{ik})\qquad \det A=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\,\mathrm{kof}(a_{kj}).$$

- $\det(A^T)=\det(A)$
- $\det(A^{-1})=(\det(A))^{-1}$
- $\det(AB)=\det A\cdot\det B$

7. Lineære transformasjoner

En transformasjon T fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ kalles lineær hvis og bare hvis

1. $T(c\mathbf{x})=cT(\mathbf{x})$, for alle $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ og alle $c\in\mathbb{R}$.
2. $T(\mathbf{x}+\mathbf{y})=T(\mathbf{x})+T(\mathbf{y})$, for alle $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$.

Transformasjonsmatrisen til T er matrisen

$$\begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n)\end{bmatrix}$$

8. Geometriske transformasjoner i $\mathbb{R}^2$:

De første fem er lineære. Den sjette er en fiktiv transformasjonsmatrise.

1. Speiling om 1. akse:	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
2. Speiling om 2. akse:	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. Speiling om linjen $x_1 = x_2$:	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4. Rotasjon om origo:	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
5. Skalering:	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$
6. Translasjon:	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Lineært avhengig/uavhengig vektorsett:

Rangmetoden: Innfør matrisen $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$ så er $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ l.a. hvis $\operatorname{rank}(A) < k$ og l.u. hvis $\operatorname{rank}(A) = k$.

Alternativ metode: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ er l.u. hvis og bare hvis $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = 0$ kun har løsningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.

10. Underrom, lineært spenn:

En vektormengde V i $\mathbb{R}^n$ er et underrom i $\mathbb{R}^n$ hvis og bare hvis

1. $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vilkårlige vektorer i V, så er $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ en vektor i V,

2. c er et vilkårlig tall og $\mathbf{u}$ er en vilkårlig vektor i V, så er $c\mathbf{u}$ en vektor i V.

Vektorsettet S er et **generatorsett** for V hvis og bare hvis enhver vektor i V kan skrives som en lineærkombinasjon over S.

$V = \operatorname{linsp} S$ (det **lineære spennet** til S).

En **basis** for V er et l.u. generatorsett for V.

Elementære linjeoperasjoner på en matrise bevarer eventuelle lineære sammenhenger mellom søylene i matrisen.

11. Egenverdier og egenvektorer:

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $x \neq 0$. $\mathbf{x}$ = **egenvektor**, λ = **egenverdi**. E_λ = **egenrommet hørende til egenverdien** λ. m_λ = **multiplisiteten** av en repetert egenverdi λ,

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda.$$

Hvis $\dim(E_\lambda) < m_\lambda$ for en repetert egenverdi λ, er A defekt.

12. Diagonalisering av A, ($n \times n$-matrise)

$$K^{-1}AK = D,$$

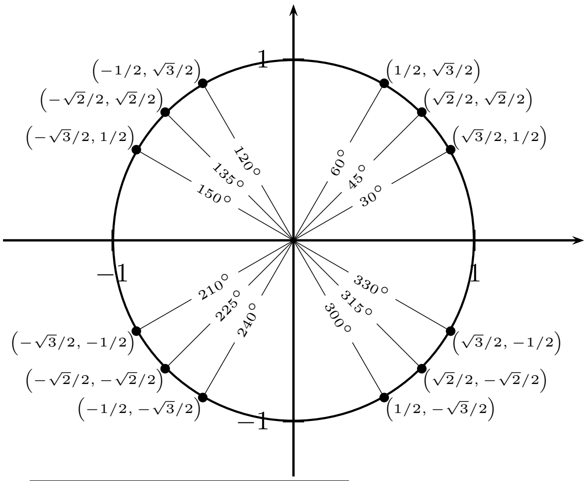
Egenvektormatrise: (Diagonaliseringsmatrise)

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 & \cdots & \mathbf{k}_n \end{bmatrix},$$

der $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n\}$ er l.u. og egenvektorer.

Egenverdimatrise: $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1)$

C. Trigonometriske funksjoner



x	$\cos x$	$\sin x$
0	1	0
$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2} = 90°$	0	1

D. Logikk

1. Regneregler

Kommutative lover	
$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
Assosiative lover	
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Distributive lover	
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identitetslover	
$p \vee \mathbf{c} \equiv p$	$p \wedge \mathbf{t} \equiv p$
Negasjonslover	
$p \vee \sim p \equiv \mathbf{t}$	$p \wedge \sim p \equiv \mathbf{c}$
Dobbel negasjon	
$\sim (\sim p) \equiv p$	
Idempotens	
$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$
Universalgrense	
$p \vee \mathbf{t} \equiv \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}$
DeMorgan	
$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
Absorbsjon	
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Negasjon av t og c	
$\sim \mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$	$\sim \mathbf{c} \equiv \mathbf{t}$

2. Gyldige argumenter

Et *argument* er en sekvens av premisser $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, og en konklusjon Q. Argumentet er *gyldig* hvis og bare hvis konklusjonen er sann hver gang alle premissene er sanne.

Inferensregler

Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore\ q$
Modus Tollens	$p \to q$ $\sim q$ $\therefore\ \sim p$
Generalisering	p $\therefore\ p \vee q$
Spesialisering	$p \wedge q$ $p \wedge q$ $\therefore\ p$ $\therefore\ q$
Konjunksjon	p q $\therefore\ p \wedge q$
Eliminasjon	$p \vee q$ $p \vee q$ $\sim q$ $\sim p$ $\therefore\ p$ $\therefore\ q$
Transitivitet	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore\ p \to r$
Oppdeling i tilfeller	$p \vee q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore\ r$
Motsigelse	$\sim p \to \mathbf{c}$ $\therefore\ p$