Oppgave 1 (10%) – **Flervalgsoppgave**

Denne oppgaven består av 2 flervalgsoppgaver, hver med 5 svaralternativer. Du skal ve[illegible] alternativene, 1, 2, 3, 4 eller 5, på hver flervalgsoppgave. Rett svar gir 5 poeng, og galt s[illegible] poeng. Gardering gir 0 poeng. Du kan la være å svare på ei flervalgsoppgave. I så fall får du 1 (et) poeng på den oppgaven. Svara skal ikke begrunnes. Høyeste mulige poengsum på oppgaven er 10 poeng.

a) Gitt et lineært system av 25 ligninger med 21 ukjente. Koeffisientmatrisen har rang 19 og totalmatrisen har rang 19. Hvilket utsagn er riktig?

1. Systemet har nøyaktig 1 løsning.
2. Systemet har nøyaktig 21 løsninger, ein for kvar ukjent.
3. Systemet har uendelig mange løsninger
4. Systemet har ingen løsninger.
5. Det er ikke nok informasjon til å si noe om antallet løsninger.

b) La $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$ være ei ikke-triviell løsning av et homogent system av 5 ligninger med 5 ukjente. Kall koeffisientmatrisen for A og totalmatrisen for $\tilde{A}$. Hvilket utsagn er galt.

1. A er en inverterbar matrise.
2. $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A.
3. A og $\tilde{A}$ har same rang.
4. A er en kvadratisk matrise.
5. Systemet har uendelig mange løsninger.

Oppgave 2 (10 %) – **Komplekse tall**

a) Regn ut og skriv på standardform

i) $(4+3i)(1+4i)$

ii) $(1+4i)/(4-3i)$

b) i) Skriv det komplekse tallet z der $\arg z = 3\pi/4$ og $|z| = \sqrt{8}$ på standardform.

ii) Finn alle komplekse tredjerøtter til $z = -2+2i$.

Oppgave 3 (20 %) – **Eigenverdier**

La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

a) Finn alle eigenverdier og **alle** tilhørende eigenvektorer som hører til hver egenverdi.

b) i) Finn en matrise P og en matrise D slik at $AP = PD$.

ii) Regn ut A^{2016}.

Oppgave 4 (20 %) – **Matriser**
Matrisen A er gitt som

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

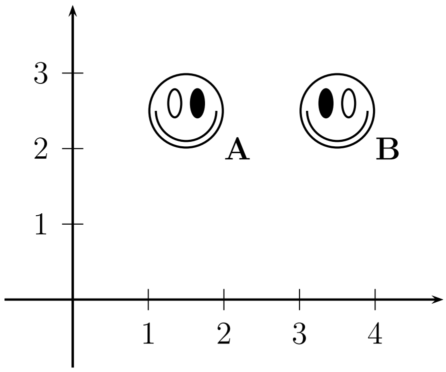
a) i) Reduser matrisen A til trappeform
ii) og til redusert (normert) trappeform.

b) Finn alle løsninger av systemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

c) i) Finn en basis for kolonne-rommet til A.
ii) Finn en basis for rad-rommet til A.
iii) Finn en basis for null-rommet til A.

Oppgave 5 (20%) – **Transformasjoner**.
Figuren viser hvordan en transformasjon T i $\mathbb{R}^2$ avbilder Smiley A til Smiley B.



Figur 1: Smiley-transformasjon

a) Finn den fiktive transformasjonsmatrisen til transformasjonen T.

b) i) Syn at $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ er egenverdier til matrisen fra punkt a) med tilhørende egenverdi 1.
ii) Gi en geometrisk tolking av mengden av egenvektorer på forma $t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, der $t \in \mathbb{R}$.

Oppgave 6 (20%) – **Logikk**

a) Avgjør hvilke av utsagnene under som er henholdsvis påstander, predikater (åpne påstander) eller ingen av delene. For de av dem som er påstander, angi sannhetsverdien, og for de av dem som er predikater, angi en meningsfull definisjonsmengde og tilhørende sannhetsmengde.

(i) $1 > 0$ eller firkant.

(ii) Hvis $1 > 0$ så $32 = 2^5$.

(iii) $x^2 \geq 14$ og $x < 27$.

b) Avgjør om de to påstandene er ekvivalente (husk å begrunne svaret):

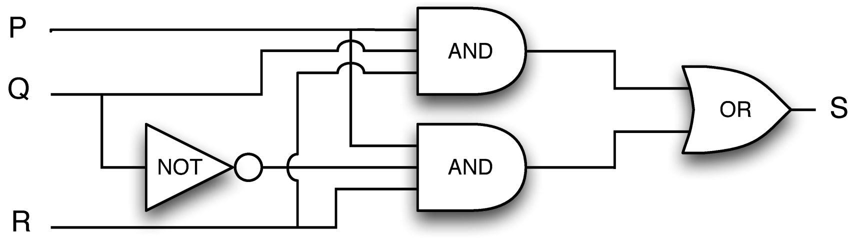
$$p \vee q \to s \quad \text{og} \quad (p \to s) \vee (q \to s)$$

c) Gitt følgende argument:

> Hvis jeg ser en mus, blir jeg redd. Hvis jeg blir redd, gjemmer jeg meg eller ringer til mamma. Jeg ser en mus eller ringer til mamma. Altså er jeg redd.

Skriv det om til symbolsk form, og avgjør om det er gyldig eller ikke (og begrunn avgjørelsen).

d) Finn en enklere logisk krets som har samme I/O-tabell som kretsen under (det vil si en krets med færre porter). Forklar hvordan du fant denne.



Formelsamling for Matematikk 1
TDAT1004A/S1 - høst 2016

A. Komplekse tall

Standardform:	z	$=$	$a + i\,b$
Polarform:	z	$=$	$re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$
De Moivres:			$(\cos\theta + i\,\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\,\sin n\theta$
Konjugert:	$\bar{z}$	$=$	$a - b\,i$
Argument:	$\arg z$	$=$	θ
Absoluttverdi:	$\|z\|$	$=$	$\sqrt{a^2 + b^2}$
Realdelen:	$\mathrm{Re}(z)$	$=$	a
Imaginærdelen:	$\mathrm{Im}(z)$	$=$	b

B. Lineær algebra

1. Matriseoperasjoner

Gitt matrisene $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$.

Sum:	$A + B$	$=$	$[a_{ij} + b_{ij}]$
Multiplikasjon med skalar:	kA	$=$	$[k\,a_{ij}]$
Produkt:	AB	$=$	$\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]$
Transponering:	A^T	$=$	$[a_{ji}]$
	$(AB)^T$	$=$	$B^T A^T$

2. Spesielle kvadratiske matriser

Diagonal matrise $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$	$a_{ij} = 0$, når $i \neq j$.
Enhetsmatrise	$I = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$
ÿvre triangulær matrise	$a_{ij} = 0$ når $i > j$
Nedre triangulær matrise	$a_{ij} = 0$ når $i < j$
Symmetrisk matrise	$A^T = A$
Skjevsymmetrisk matrise	$A^T = -A$
Singulær matrise	$\det A = 0$

3. Rangen til en matrise

rank A = antall pivotelementer i en trappematrise for A.

$$\mathrm{rank}(A^T) = \mathrm{rank}(A)$$

4. Invers matrise

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Gauss Jordan:

$$[A|I] \sim [I|A^{-1}]$$

Kofaktormetoden

$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{kof}\ A)^T}{\det A}$$

Følgende er ekivalent for kvadratiske matriser:

1. A er inverterbar (A^{-1} eksisterer.)
2. $\det A \neq 0$.
3. A har maksimal rang.

5. Ortogonale matriser.

$$A^T = A^{-1} \Leftrightarrow AA^T = A^TA = I$$

6. Determinanter

Kofaktor: $\mathrm{kof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}D_{ij}$, der D_{ij} er underdeterminanten en får ved å fjerne rad i og søyle j fra det A.

Utvikling langs rad nr. i og langs søyle nr. j:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{kof}(a_{ik}) \qquad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\,\mathrm{kof}(a_{kj}).$$

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

7. Lineære transformasjoner

En transformasjon T fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ kalles lineær hvis og bare hvis

1. $T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x})$, for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ og alle $c \in \mathbb{R}$.
2. $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Transformasjonsmatrisen til T er matrisen

$$\begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$$

8. Geometriske transformasjoner i $\mathbb{R}^2$:

De første fem er lineære. Den sjette er en fiktiv transformasjonsmatrise.

1. Speiling om 1. akse:	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
2. Speiling om 2. akse:	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. Speiling om linjen $x_1 = x_2$:	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4. Rotasjon om origo:	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
5. Skalering:	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$
6. Translasjon:	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Lineært avhengig/uavhengig vektorsett:

Rangmetoden: Innfør matrisen $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$ så er $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ l.a. hvis $\text{rank}(A) < k$ og l.u. hvis $\text{rank}(A) = k$.

Alternativ metode: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ er l.u. hvis og bare hvis $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = 0$ kun har løsningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.

10. Underrom, lineært spenn:

En vektormengde V i $\mathbb{R}^n$ er et underrom i $\mathbb{R}^n$ hvis og bare hvis

1. $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vilkårlige vektorer i V, så er $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ en vektor i V,
2. c er et vilkårlig tall og $\mathbf{u}$ er en vilkårlig vektor i V, så er $c\mathbf{u}$ en vektor i V.

Vektorsettet S er et **generatorsett** for V hvis og bare hvis enhver vektor i V kan skrives som en lineærkombinasjon over S.

$V = \text{linsp}\, S$ (det **lineære spennet** til S).

En **basis** for V er et l.u. generatorsett for V.

Elementære linjeoperasjoner på en matrise bevarer eventuelle lineære sammenhenger mellom søylene i matrisen.

11. Egenverdier og egenvektorer:

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $x \neq 0$. $\mathbf{x}$ = **egenvektor**, λ = **egenverdi**. E_λ = **egenrommet hørende til egenverdien** λ. m_λ = **multiplisiteten** av en repetert egenverdi λ,

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda.$$

Hvis $\dim(E_\lambda) < m_\lambda$ for en repetert egenverdi λ, er A defekt.

12. Diagonalisering av A, ($n \times n$-matrise)

$$K^{-1}AK = D,$$

Egenvektormatrise: (Diagonaliseringsmatrise)

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 & \cdots & \mathbf{k}_n \end{bmatrix},$$

der $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n\}$ er l.u. og egenvektorer.

Egenverdimatrise: $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1)$

C. Logikk

1. Logikklovene

Kommutative lover
$p \vee q \equiv q \vee p$ $\quad$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Assosiative lover
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Distributive lover
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identitetslover
$p \vee \mathbf{c} \equiv p$ $\quad$ $p \wedge \mathbf{t} \equiv p$
Negasjonslover
$p \vee \sim p \equiv \mathbf{t}$ $\quad$ $p \wedge \sim p \equiv \mathbf{c}$
Dobbel negasjon
$\sim (\sim p) \equiv p$
Idempotens
$p \vee p \equiv p$ $\quad$ $p \wedge p \equiv p$
Universalgrense
$p \vee \mathbf{t} \equiv \mathbf{t}$ $\quad$ $p \wedge \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}$
DeMorgan
$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
Absorbsjon
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $\quad$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Negasjon av t og c
$\sim \mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ $\quad$ $\sim \mathbf{c} \equiv \mathbf{t}$

2. Gyldige argumenter

Et *argument* er en sekvens av premisser $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, og en konklusjon Q. Argumentet er *gyldig* hvis og bare hvis konklusjonen er sann hver gang alle premissene er sanne.

4. Inferensregler

Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore\ q$
Modus Tollens	$p \to q$ $\sim q$ $\therefore\ \sim p$
Generalisering	p $\therefore\ p \vee q$
Spesialisering	$p \wedge q$ $\quad$ $p \wedge q$ $\therefore\ p$ $\quad$ $\therefore\ q$
Konjunksjon	p q $\therefore\ p \wedge q$
Eliminasjon	$p \vee q$ $\quad$ $p \vee q$ $\sim q$ $\quad$ $\sim p$ $\therefore\ p$ $\quad$ $\therefore\ q$
Transitivitet	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore\ p \to r$
Oppdeling i tilfeller	$p \vee q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore\ r$
Motsigelse	$\sim p \to \mathbf{c}$ $\therefore\ p$