

기초 선형대수 (행렬)

행렬

- 행렬(Matrix)의 정의
 - 성분(entry)이라 부르는 숫자들을 사각형의 형태로 정렬시켜 놓은 것
 - 다음과 같은 수치형 데이터를 행렬로 표현해보자.

< 요일별 과목을 공부하는 시간 >

	월요일	화요일	수요일	목요일	금요일	토요일	일요일
수학	2	1	2	0	3	0	1
영어	2	0	1	3	1	0	1
화학	1	3	0	0	1	0	1
물리	1	2	4	1	0	0	2

행렬

수치형 데이터



행렬

	월요일	화요일	수요일	목요일	금요일	토요일	일요일
수학	2	1	2	0	3	0	1
영어	2	0	1	3	1	0	1
화학	1	3	0	0	1	0	1
물리	1	2	4	1	0	0	2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

행렬의 크기

- m 개의 행과 n 개의 열을 가졌으면 행렬의 크기(size)는 $m \times n$ 이라고 한다.

ex) 행렬의 크기 : 4×7

☞ R^7 인 행벡터 4개

☞ R^4 인 열벡터 7개

2	1	2	0	3	0	1
2	0	1	3	1	0	1
1	3	0	0	1	0	1
1	2	4	1	0	0	2

행벡터

열벡터

행렬의 표기

- $m \times n$ 크기를 갖는 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- $n \times n$ 크기를 갖는 정사각행렬

$$A = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{a}_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \textcolor{red}{a}_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \textcolor{red}{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

- 행렬을 나타내는 다양한 표기법
 - $A = [a_{ij}]_{m \times n}$
 - $A = [a_{ij}]$

행렬의 항등, 덧셈 연산

- 두 행렬 A, B 가 같다. (Equality)
 - 두 행렬의 크기가 같고, 대응하는 성분들이 모두 같다.

- 행렬의 합 $A + B$ (Sum)
 - B 의 성분을 대응하는 A 의 성분에 더하여 얻은 행렬
 - $(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

ex)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

행렬의 뺄셈, 스칼라 곱 연산

- 행렬의 차 $A - B$ (difference)
 - B의 성분을 대응하는 A의 성분으로부터 빼서 얻은 행렬
 - $(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

ex) 예제

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

- 행렬의 scala 곱 cA (product)
 - A의 각 성분에 c 를 곱하여 얻은 행렬이다.
 - $(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$

ex) 예제

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, c = 2$$

열벡터, 행벡터를 이용하여 행렬 나타내기

- $1 \times n$ 행벡터

- $\mathbb{r} = [r_1, \dots, r_n]$

- $m \times 1$ 열벡터

- $\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$

- $m \times n$ matrix를 열벡터를 이용하여 나타내기

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\mathbb{c}_1 \ \mathbb{c}_2 \ \cdots \ \mathbb{c}_n]$

- $m \times n$ matrix를 행벡터를 이용하여 나타내기

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{r}_m \end{bmatrix}$

행렬의 곱셈 연산

- 행렬의 곱셈 $A\mathbb{X}$

- 행렬의 곱셈은 행렬의 사이즈에 따라서 곱셈 가능 여부가 달라진다.

$$\text{예 } (m \times \textcolor{red}{n})(\textcolor{red}{n} \times 1) = (m \times 1)$$

$$\text{○ } A = \begin{bmatrix} \textcolor{orange}{a_{11}} & \textcolor{orange}{a_{12}} & \cdots & \textcolor{orange}{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbb{X} = \begin{bmatrix} \textcolor{orange}{x_1} \\ \textcolor{orange}{x_2} \\ \vdots \\ \textcolor{orange}{x_n} \end{bmatrix}, \mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ 라고 하자.}$$

$$A\mathbb{X} = \mathbb{b} \Leftrightarrow A\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \textcolor{orange}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbb{b}$$

행렬의 곱셈 연산

- 행렬의 곱셈을 열벡터의 선형결합(linear combination)으로 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} A\mathbb{X} &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{bmatrix} \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= x_1 \mathbb{C}_1 + x_2 \mathbb{C}_2 + \cdots + x_n \mathbb{C}_n \\ &= \mathbb{b} \end{aligned}$$

행렬의 곱셈 연산

- A 가 $m \times n$ 행렬이고 \mathbf{x} 가 $n \times 1$ 열벡터이면 곱 $A\mathbf{x}$ 는 A 의 열벡터와 \mathbf{x} 의 성분을 계수로 하는 일차결합으로 만들어진 일차결합으로 만들어진 $m \times 1$ 열벡터이다. A 의 열벡터가 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ 이면

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{c}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n$$

$$\text{ex) } \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- A 가 $m \times n$ 행렬이면 R^n 의 모든 열벡터 \mathbf{u} 및 \mathbf{v} 와 임의의 스칼라 c 에 대하여 다음관계가 성립한다.
 - $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$
 - $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

행렬의 곱셈 연산 (AB)

- A 가 $m \times s$ 행렬, B 가 $s \times n$ 행렬이고 B 의 열벡터가 $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \dots, \mathbb{b}_n$ 이면 곱(product) AB 는 $m \times n$ 행렬로서 $AB = [A\mathbb{b}_1 \quad A\mathbb{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbb{b}_n]$ 로 정의한다.

$$\begin{aligned} \text{ex) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} &= \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

점곱 규칙

- 행-열 규칙 또는 점곱규칙

- 행렬곱 AB 의 i 행 j 열의 성분은 A 의 i 행벡터와 B 의 j 열벡터의 곱, 즉 점곱(dot product)이다.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

ex) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix}$

$i = 2$ $j = 3$ $2 \times 4 + 6 \times 3 + 0 \times 5$

전치행렬

- A 가 $m \times n$ 행렬이면 A 의 전치행렬(transpose) A^T 는 A 의 행들을 열로하여 만들어진 $n \times m$ 행렬로 정의한다. 즉 A^T 의 첫째 열은 A 의 첫째 행, A^T 의 둘째 열은 A 의 둘째 행 등이다.

ex)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \leftrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = [1 \quad 3 \quad -5] \leftrightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$C = [4] \leftrightarrow C^T = [4]$$

행렬의 대각합

- A 가 $n \times n$ 행렬이면 A 의 대각합(trace) $tr(A)$ 는 A 의 대각성분의 합이다.
- $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

ex)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \leftrightarrow tr(A) = 2 + 4 = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \leftrightarrow tr(A) = 1 + 3 + 5 = 9$$

행렬의 내적과 외적

- \mathbf{u} 와 \mathbf{v} 가 같은 크기의 열벡터이면
 - 곱 $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$ 를 \mathbf{u} 와 \mathbf{v} 의 행렬내적(matrix inner product)라고 한다.
 - 곱 $\mathbf{u} \mathbf{v}^T$ 를 \mathbf{u} 와 \mathbf{v} 의 행렬외적(matrix outer product)라고 한다.

ex) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

□ 내적 : $\begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

□ 외적 : $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$

행렬 덧셈과 스칼라 곱의 성질

a, b 는 스칼라이고, 행렬 A, B, C 의 크기가 같은 경우, 다음이 성립한다.

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $(ab)A = a(bA)$
- $(a + b)A = aA + bA$
- $(a - b)A = aA - bA$
- $a(A + B) = aA + aB$
- $a(A - B) = aA - aB$

행렬곱셈의 성질

a, b 는 스칼라이고, 행렬 A, B, C 의 크기가 주어진 연산이 정의되는 경우, 다음이 성립한다.

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $A(B - C) = AB - AC$
- $(B - C)A = BA - CA$
- $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

영행렬 / 항등행렬

영행렬

모든 성분이 0인 행렬 (zero matrix)

항등행렬

주대각선 상의 성분들이 모두 1이고 그 밖에는 모두 0인 정사각행렬

ex) 영행렬

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ex) 항등행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

역행렬

역행렬

A 는 정사각행렬이고 $AB = BA = I$ 가 되는 A 와 같은 크기의 행렬 B 가 존재하면, A 는 가역행렬 (invertible matrix) 또는 정칙행렬 (nonsingular matrix) 이라 한다. B 는 A 의 역행렬 (inverse matrix) 이라 한다. 이 성질을 만족시키는 행렬 B 가 존재하지 않으면 A 는 특이행렬 (singular matrix) 이라 한다.

ex) B 는 A 의 역행렬인가?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

역행렬

2 × 2 행렬의 역행렬

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\boxed{ad - bc}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

행렬식 (determinant)

ex) A 의 역행렬은?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow ?$$

역행렬의 성질

A 와 B 가 같은 크기의 가역행렬이면

- AB 는 가역행렬이다.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- A^{-1} 이 가역이고, $(A^{-1})^{-1} = A$
- A^n 이 가역이고, $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$ 이다.
- 임의의 영이 아닌 스칼라 k 에 대하여 kA 가 가역이고 $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ 이다.

ex) 각각을 증명해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

전치행렬의 성질

행렬 A 와 B 에 대하여,

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A - B)^T = A^T - B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

ex) 각각을 증명해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

대각합의 성질

같은 크기의 정사각행렬 A 와 B 에 대하여,

- $tr(A^T) = tr(A)$
- $c \times tr(A) = tr(cA)$
- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(A - B) = tr(A) - tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$

ex) 각각을 증명해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

대각행렬

- 주 대각선 밖의 모든 성분이 영인 정사각행렬

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

ex) 대각행렬의 예

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = ?$$

$$A^k = ?$$

삼각행렬

- 주 대각선보다 위에 있는 모든 성분이 영인 정사각행렬을 하부삼각행렬(lower triangular matrix) 그리고 주대각선보다 아래에 있는 모든 성분이 영인 정사각행렬은 상부삼각행렬(upper triangular matrix)이라 한다. 상부 또는 하부삼각행렬을 삼각행렬(triangular matrix)이라 부른다.

ex) 하부대각행렬 / 상부삼각행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

대칭행렬

- 정사각행렬 A 가 $A^T = A$ 이면 대칭행렬(symmetric matrix) 이라 한다. 즉 $a_{ij} = a_{ji}$ 인 행렬

ex) 대칭행렬 예시

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & -6 \\ 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

※ $A^T A$, AA^T 모두 대칭행렬이다. 증명해보자.

Linear system (선형계)

선형방정식

n 개의 변수 x_1, x_2, \dots, x_n , n 개의 0이 아닌 상수 a_1, a_2, \dots, a_n , 상수 b 에 대하여

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

를 선형방정식 (Linear equation) 이라고 한다.

ex) $x + 3y = 7$

Linear system (선형계)

선형계

선형방정식을 유한개 모아 놓은 것을 선형방정식의 계 (system of linear equation) 또는 선형계 (linear system)라 한다.

n 개의 미지수 x_1, x_2, \dots, x_n 을 가진 m 개의 방정식으로 된 일반적인 동차 선형계

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

방정식의 수보다 미지수가 더 많은 동차 선형계는 무한히 많은 해를 가진다.