가설 검정

들어가기

- 검정이론에서는 모집단의 성질에 대한 어떤 가설을 받아들일 것인지 아니면 기각할 것인지를 결정하는데에 그 목적이 있다.
- 과학적 실험이나 연구관찰 등을 통해 얻어진 자료에 근거하여 통계적 추론을 함에 있어서 가능한 모수의 값의 범위를 알아내기 원하기보다 몇 개의 가능한 가설에 대한 검정을 하고자 하는 경우가 있다.
  - 어떤 병을 치료하는 데 있어서 기존방법과 새로운 방법 사이 효과의 차이 여부
  - 어떤 기계 부품의 평균수명이 얼마 이상인지의 여부
- 가설을 받아들일 것인지 기각할 것인지의 결정을 **표본자료에 근거**하여 내린다.

단순가설과 복합가설

- 관심 있는 모집단의 성질에 대한 단정이나 추측 등의 표현을 통계적 가설이라고 한다. 통계적 가설은 흔히 모집단의 성질을 나타내는 확률변수의 분포에 대한 표현으로 나타난다.
- 어떤 가설이 확률분포를 완전히 결정하면 이를 단순가설(simple hypothesis)이라 하고, 그렇지 않은 경우를 복합가설(composite hypothesis)이라고 한다.
    - 예를 들어, $X_1, \ldots, X_n$이 정규분포 $N(\mu, \sigma)$으로부터 구한 랜덤표본이라고 하고, 모분포의 성격을 표시하는 모수벡터 (μ, σ^2)에 대한 가설을 고려해보자. $(\mu, \sigma^2) = (0,1)$ 이라는 가설을 생각한다면, 이 가설은 모집단의 분포를 완전히 결정짓게 되므로 단순가설이다. 반면, $\mu > \mu_0$와 같은 형태의 가설은 이 가설이 참이라고 가정하더라도 모수가 여전히 여러 가지 다른 값을 가질 수 있어서 모집단의 분포가 하나로 결정되지 않으므로 복합가설이다.

귀무가설과 복합가설

- 귀무가설(null hypothesis) : 흔히 지금까지 알려져 있는 사실 또는 주장으로서 특별한 사유가 없다면 일반적으로 받아들이게 되는 가설
- 대립가설(alternative hypothesis) : 지금까지 알려져 있는 것과 다른 주장으로서 이를 뒷받침할 증거가 있어야만 받아들이게 되는 가설
    - 통계실험이나 관찰 등을 하는 대부분의 경우에 새로운 사실이나 결과 등을 입증할 통계적 증거를 찾는 것이 그 목적이므로, 실험자가 보이고자 하는 바는 대립가설이 된다.
- 통계적 가설 검정에서는 기존의 사실을 귀무가설로 하고 연구자가 보이고자 하는 연구가설을 대립가설로 택하여 귀무가설을 기각할만한 증거가 있는지를 실험 또는 관찰 등을 통하여 얻은 통계자료에 근거하여 찾아보는 것이 일반적인 방법이다.
    - 주어진 자료가 귀무가설에 대한 반증이 되는지 아닌지를 구별하여 귀무가설을 기각하거나 기각하지 않는 결정을 내리는데에 사용할 수 있는 좋은 검정법이 필요

가설검정

- 가설검정 : 표본관찰이나 실험을 통하여, 두 가설 중 하나를 선택하는 과정이다. H_0와 H_1 중 하나를 선택하는 것으로 만일 H_0를 채택(accept)하면 H_1은 기각(reject)되고, 이와 달리 H_1을 채택하면 H_0는 자동으로 기각된다. 따라서 가설검정이란 귀무가설을 채택하느냐 기각하느냐 하는 것을 의미한다.
- 가설검정에서 귀무가설이 기각된다고 하여도 그것은 이 가설이 반드시 옳지 않다고 단정하는 것은 아니며, 단지 표본의 측정결과가 귀무가설을 채택할 충분한 근거가 없다는 이유, 즉 어디까지나 확률에 의한 해석일 뿐이다.
- 가설검정의 종류
    - 양측검정
    - 단측검정

양측검정의 예

- 서울 강남지역과 강북지역 고등학생들의 학력고사 성적이 같은가?
  - 강남과 강북의 고등학생 성적을 비교하기 위하여 두 지역에서 각각 100명씩을 무작위로 선별하고 동일한 시험을 실시한 후 평균을 비교한다. 평균을 각각
    - μ_1 : 강남지역의 평균성적
    - μ_2 : 강북지역의 평균성적
  - 이 때 표본관찰에 의해 검정하고자 하는 가설 H_0와 H_1은 각각
    - 귀무가설 : H_0 : $\mu_1 = \mu_2$
    - 대립가설 : H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$

단측검정의 예

- 2017년 회사 신제품의 월 평균판매량이 $\mu_1 = 3000$개 정도였다. 2018년 이 제품의 월 평균판매량 μ_2가 증가하였다고 할 수 있는가?
  - 이것을 검정하기 위해서는 $\mu_2 > 3000$이면 된다. 이 μ_2를 구하려면 표본점포(예를 들면 100개의 점포)에서 신제품을 무작위로 뽑아 월 평균판매량의 평균을 구하여 비교하면 될 것이다.
    - $\mu_1 = 3000$
    - μ_2
  - 이때 표본관찰에 의해 검정하고자 하는 가설 H_0와 H_1은 각각 다음과 같이 놓는다.
    - 귀무가설 : H_0 : $3000 = \mu_1 \geq \mu_2$
    - 대립가설 : H_1 : $\mu_1 < \mu_2$

검정통계량과 기각영역

- 주어진 랜덤표본 $X_1, \dots, X_n$에 근거하여 통계적 가설에 대한 증거를 살펴볼 때 사용되는 통계량을 **검정통계량**(test statistic)이라고 한다.
- 귀무가설을 기각하게 되는 검정통계량의 값을 가지는 표본공간의 부분집합을 **기각영역**(rejection region or critical region)이라고 한다.

검정통계량 사용법

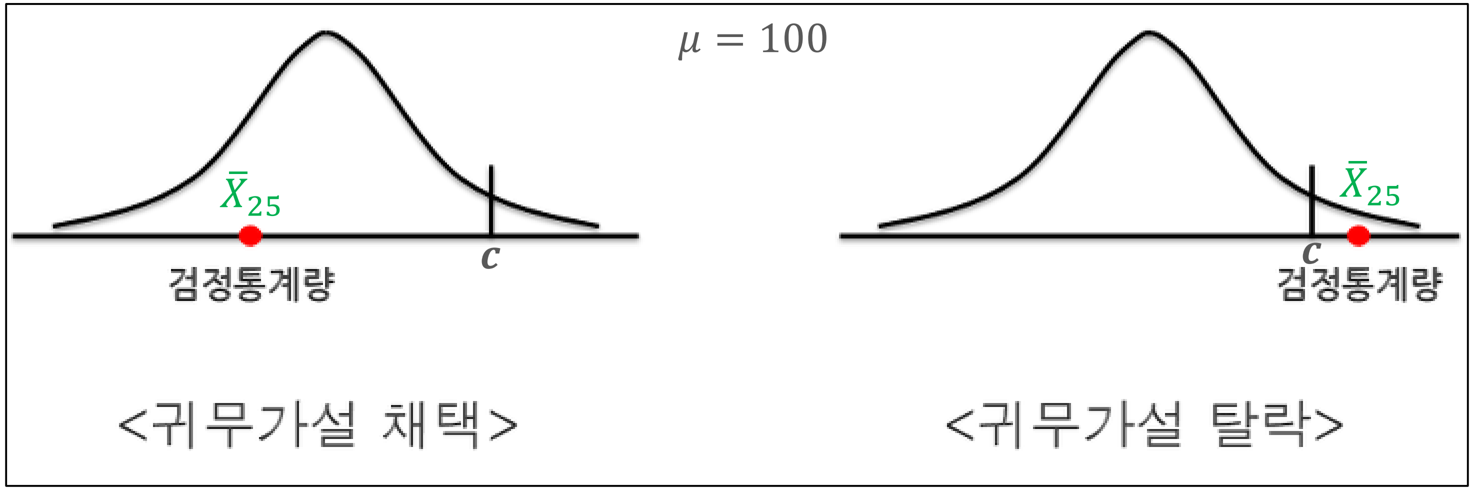
- 가설검정은 모수에 대한 가설 H_0과 H_1을 설정한 후에 표본관찰로부터 검정통계량을 구하여 검정한다.
- 검정통계량의 분포는 항상 가설에서 주어지는 모수의 분포를 따르고, 귀무가설이 옳다는 전제하에 검정통계량을 구한 후, 이 값이 나타날 확률(p-value)의 크기와 유의수준 α를 비교하여 귀무가설의 채택여부를 결정한다.

검정통계량 사용법 예제 1

- 양측검정의 예에서, 임의로 추출된 100개 점포의 월 판매량을 $x_1, \dots, x_{100}$이라 하고, 이들의 월 평균 판매량을 $\bar{x}$라고 하자.
  - 가설 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ 에 대한 검정통계량은 표본평균 $\bar{x}$ 이다.
  - 모집단의 분포가 정규분포, 즉 $N(\mu, \sigma^2)$이라 하면 $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$이고 이것을 표준화하면 $\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$이다.
  - 이제 귀무가설의 채택 여부는, 표준 정규분포에서의 확률로 계산된다.
  - 모분산을 알지 못하는 경우, 표본분산 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$을 사용하며 검정통계량의 표준화 값은 t-분포로 나타낸다. $T = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$

검정통계량 사용법 예제 2

- $X_1, \ldots, X_{25}$가 정규분포 $N(\mu, 10^2)$으로부터 구한 랜덤표본이라 하고, 귀무가설 $H_0 : \mu = 100$과 대립가설 $H_1 : \mu = 105$를 고려해 보자. 이 두 가설은 모두 단순가설이다. 검정통계량으로 표본평균 $\bar{X}_{25}$를, 기각영역으로는 표본공간의 부분집합인 $\{(x_1, \ldots, x_{25}) : \bar{X}_{25} \geq c\}$를 (단, c는 상수) 생각할 수 있다. <u>귀무가설보다 대립가설의 모평균이 크므로, 표본평균이 클 때, 귀무가설을 기각하는 것이 합리적</u>이라고 할 수 있다.



표본평균이 특정임계치보다 크면, 모분산이 100이라는, 귀무가설을 기각하는 것이 합리적이다.

오류의 종류

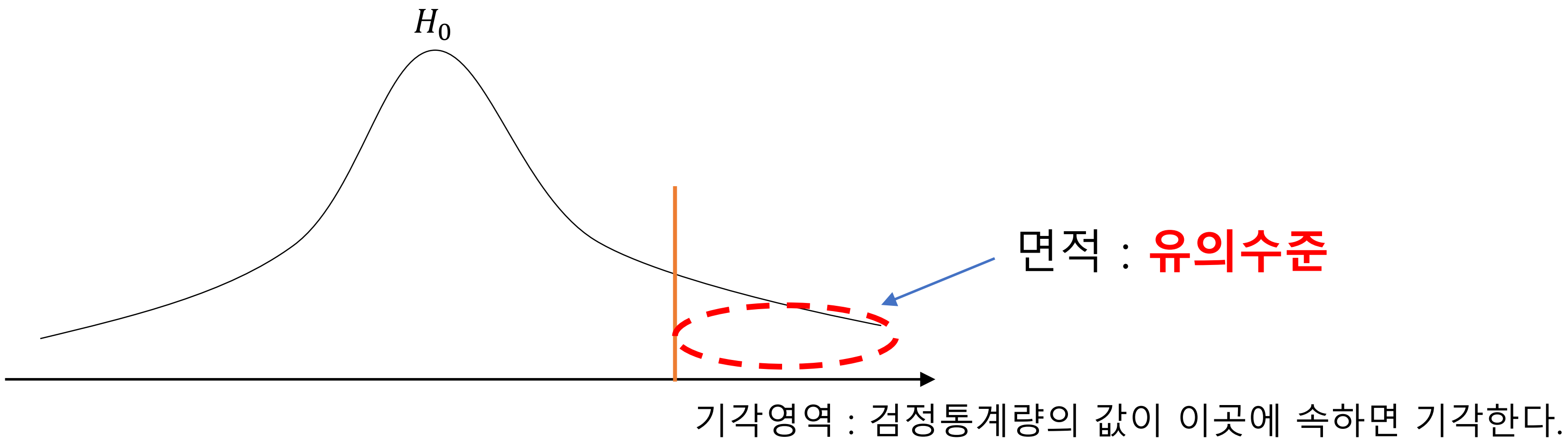
- **귀무가설이 참인데 기각하는 경우** : **제1종 오류**(type 1 error)
- 귀무가설이 참이 아닌데 기각하지 않는 경우 : 제 2종 오류(type 1 error)

	H_0가 참(true)	H_1이 참(ture)
H_0를 기각하지 않음	올바른 결정	**제 2종 오류**
H_0를 기각함	**제 1종 오류**	올바른 결정

- 검정방법은 랜덤표본에 의존하므로 같은 모집단에 동일한 검정방법을 사용한다고 하더라도, 언제나 같은 결론에 이르지는 않으므로, <u>오류를 범할 확률을 최소화하는 검정밤법</u>을 모색하는것을 목표로한다.

유의 수준

- 귀무가설 H_0가 참인데 귀무가설을 기각하는 제 1종 오류를 범할 확률을 유의수준 α(significant level)이라 한다.
- 기각영역을 C, 귀무가설 하에서 $X_1, \ldots, X_n$의 결합 확률밀도함수를 $f(x_1, \ldots, x_n | H_0)$라고 하면, 유의수준은 $P[(X_1, \ldots, X_n) \in C | H_0]$
  - 연속형 : $\int \int \ldots \int_C f(x_1, \ldots, x_n | H_0)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$
  - 이산형 : $\sum \sum \ldots \sum_C f(x_1, \ldots, x_n | H_0)$



가설의 검정결과에 대한 해석

- 귀무가설에 대한 충분한 반증을 찾지 못해 기각하지 못하게 된 경우, 이것은 표본으로부터 귀무가설이 맞다는 증거를 찾았다는 뜻은 아니다. 귀무가설이 틀렸다는 충분한 증거를 찾지 못했다는 뜻이 된다.
- "귀무"가설이라는 용어의 의미는, 귀무가설을 기각하지 못하게 되면 기존의 상태로 돌아간다는 의미이다.

오류의 종류 예제 1

- 무죄추정의 원칙은 피의자가 범죄를 저질렀다는 증거가 밝혀질 때까지는 무죄임을 가정(**귀무가설**)하는 것이다. 피고인이 법정에 서게 되면 검찰 측에서는 이 사람이 죄가 있음(**대립가설**)을 밝히기 위해 증거를 모아 제시(**표본을 이용한 검정**)하게 되고, 이 증거들이 피고인이 범죄를 저질렀다는 충분한 증거가 된다고 인정되면 유죄가 선고된다. 피의자에게 무죄가 선고된다는 것은 일반적으로, 법정이 범죄에 대한 충분한 증거를 발견하지 못했다는 뜻이지 피의자가 무죄라는 것에 대한 증거가 있다는 뜻은 아니다. **제 1종 오류**는 피의자가 실제로 무죄인데 유죄를 선고하여 복역하게 하는 것이고, **제 2종 오류**는 피의자가 실제로 유죄인데 무죄를 선고하여 풀어주는 것이다.

오류의 종류 예제 1

- 제 1종 오류를 범하게 되면, 무죄인 사람에게 무기징역이나 사형을 부과하는 등의 심각하고 비극적인 결과를 가져오게 된다. 제 2종 오류도 위험하지만, 1종 오류는 매우 작은 확률을 갖도록 통제되어야 한다.
- 통계적 가설검정에서 제 1종 오류를 일반적으로 더 “중요시” 한다. 왜냐하면, 지금까지 믿어온 일반적 믿음(귀무가설)이 참임에도 불구하고 새로운 변화(대립가설)을 인정하게 되므로 불필요한 대처를 하게 된다. 따라서 제 1종 오류를 범할 확률, 즉 유의수준이 항상 작은 값이 되도록 관리한다.

오류의 종류의 예제 2

- $X_i \sim N(\mu, 10^2)$일 때 귀무가설 $\mu = 100$, 대립가설 $\mu = 105$, 기각영역 $\{(x_1, \dots, x_{25}) : \bar{x}_{25} \geq 104\}$ 라고 가정하자.
  - 제 1종 오류를 범할 확률 (유의수준 α)
    - $\alpha = P\left(H_0 \text{ 기각} \middle| H_0 \text{가 참일 때}\right) = P(\bar{X}_{25} \geq 104 | \mu = 100)$

$$= P\left[\frac{\sqrt{25}(\bar{X}_{25} - 100)}{10} \geq \frac{\sqrt{25}(104 - 100)}{10} | \mu = 100\right]$$

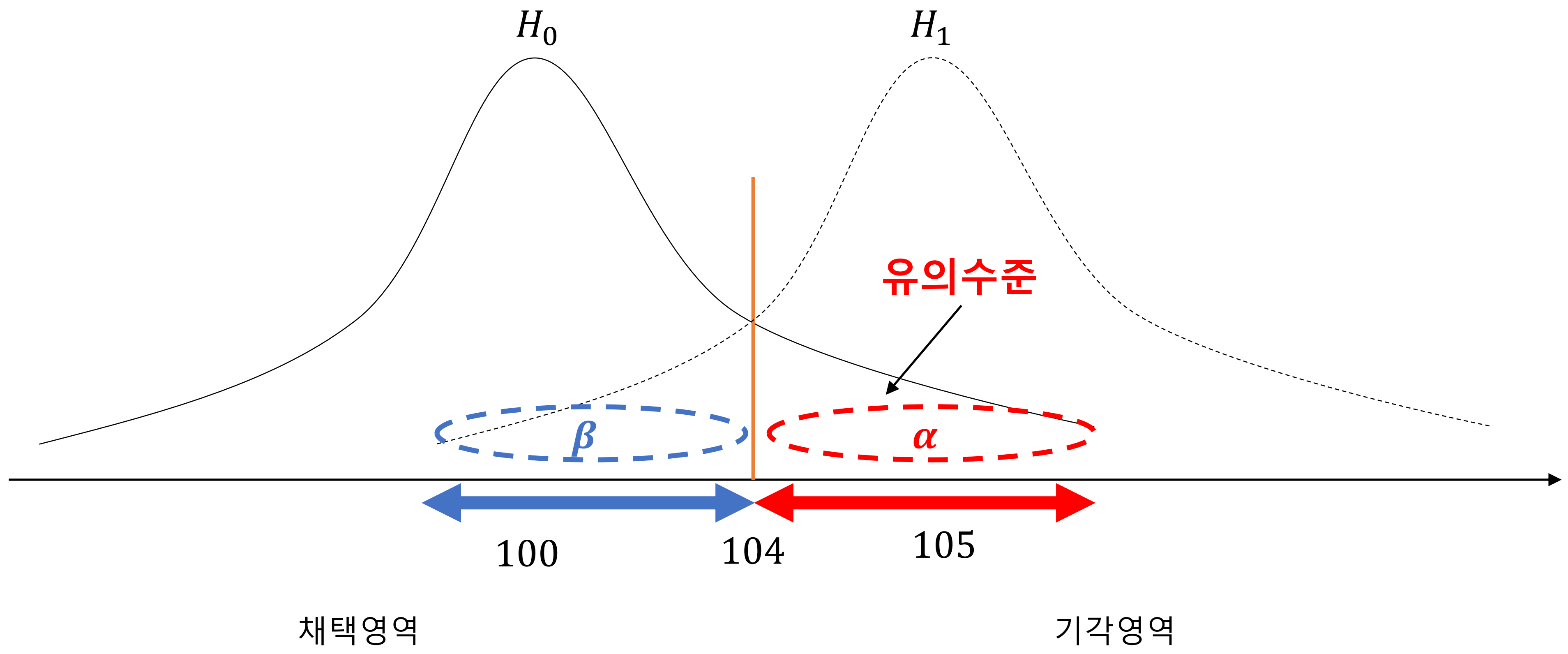
$$= 1 - \Phi(2) = 0.0228$$

  - 제 2종 오류를 범할 확률 (β)
    - $\beta = P\left(H_0 \text{를 기각하지 않음} \middle| H_1 \text{이 참일 때}\right) = P(\bar{X}_{25} < 104 | \mu = 105)$

$$= P\left[\frac{\sqrt{25}(\bar{X}_{25} - 105)}{10} < \frac{\sqrt{25}(104 - 105)}{10} \middle| \mu = 105\right]$$

$$= \Phi(-0.5) = 0.3085$$

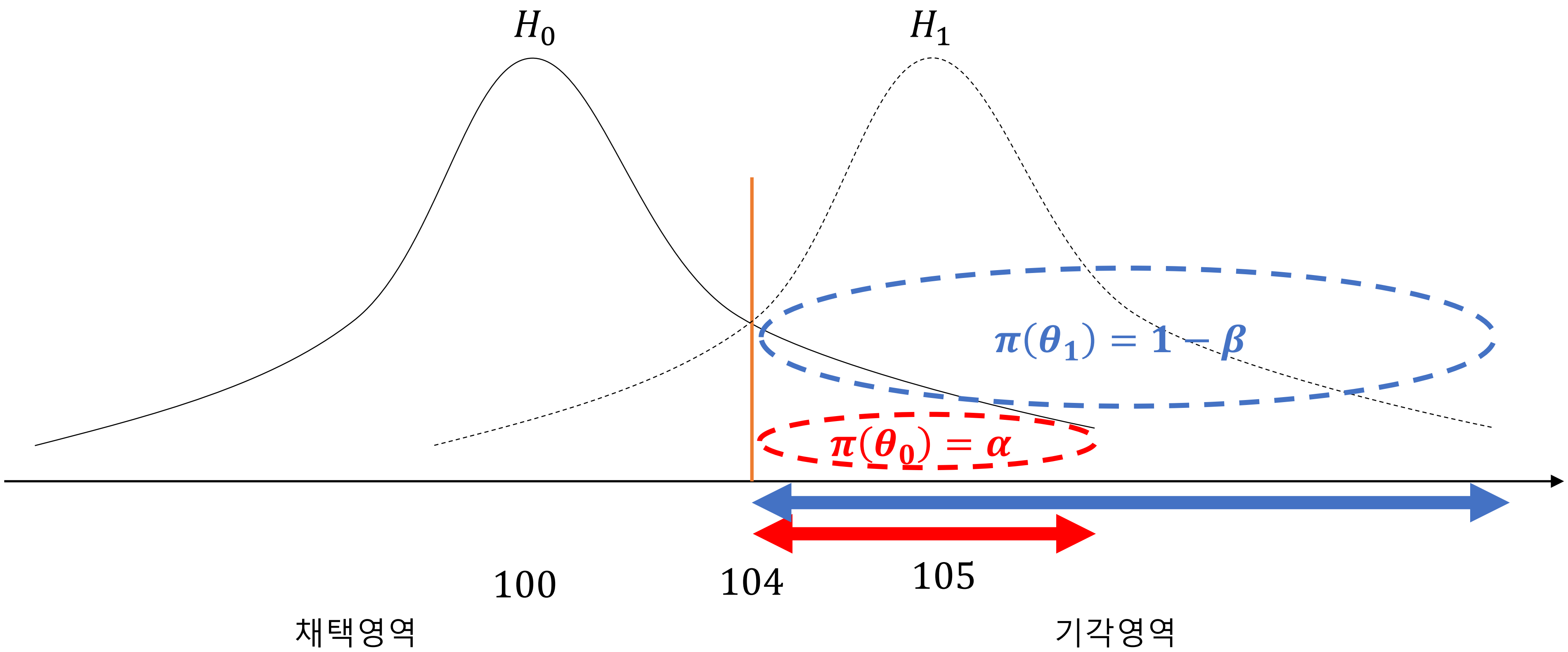
오류의 종류의 예제 2



검정력함수

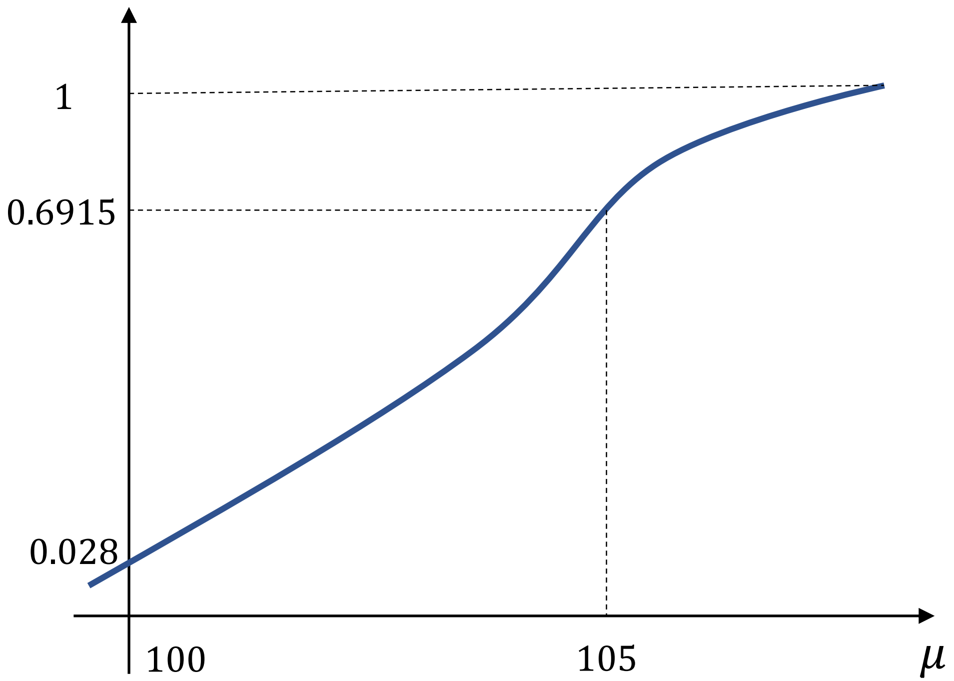
- 귀무가설 H_0에 대한 기각영역이 C인 검정의 검정력함수(power function)은 $\pi(\theta) = P[(X_1, \dots, X_n) \in C|\theta]$ 즉, 귀무가설을 기각하는 확률로 정의된다.
  - 검정력함수는 모수 θ의 참값이 무엇이냐에 따라 다른 값을 가지게 되므로, θ의 함수이다.
  - 주어진 θ에서의 검정력함수의 값 $\pi(\theta)$를 이 θ에서의 검정력(power)라고 한다.
  - 검정력은 귀무가설을 기각할 확률이므로, θ가 대립가설에 속하는 값이면 검정력이 큰 것이 좋다. 반대로 θ가 귀무가설에 속하는 값이면 검정력이 작은 것이 좋다.
  - 주어진 θ가 대립가설에 속하고, 이 대립가설이 단순가설인 경우, 검정력은 $1-\beta$와 동일
  - 주어진 θ가 귀무가설에 속하면, 검정력은 α와 동일하다.
  - 검정력함수는 유의수준이 고정되어 있을 때, 검정 방법의 성능을 결정하는 기준

검정력함수



검정력함수의 예제

- $X_i \sim N(\mu, 10^2)$일 때 귀무가설 $\mu = 100$, 대립가설 $\mu = 105$, 기각영역 $\{(x_1, \dots, x_{25}) : \bar{x}_{25} \geq 104\}$ 라고 가정하자. 주어진 모수 μ에 따른 검정력을 구할 수 있으므로, $\mu > 100$에 대해서 검정력을 구해보자.
  - $\pi(\mu) = P(\bar{X}_{25} \geq 104|\mu) = P\left[\frac{\sqrt{25}(\bar{X}_{25}-\mu)}{10} \geq \frac{\sqrt{25}(104-\mu)}{10} |\mu\right] = 1 - \Phi\left(\frac{104-\mu}{2}\right)$



최량검정법

- 항상 옳은 결과를 가져다주는 검정법을 사용하면 가장 좋겠지만, 표본에서 주어지는 정보만을 가지고 모집단의 특성에 대한 결론을 내려야 하는 상황에서 언제나 옳은 결과를 가져다주는 검정법을 찾을 수는 없다.
- 옳은 결과를 가져다주는 빈도가 높은 검정법을 찾아야 한다.
- 최량검정법(optimal testing method)는 제 1종 오류가 발생할 확률을 최소화하면서, 대립가설하에서의 검정력을 최대화하는 기법이다.

유의수준의 문제점

- 관찰된 검정통계량이 기각영역에 속한다 하더라도 값의 크기 등에 따라 통계적 유의성에 대한 의미가 다를 수 있다. 기각할 것인지 아닌지의 이분법적인 결론만을 제시하기보다, 관측한 자료가 귀무가설에 대한 어느 정도의 반증이 되는지를 수치적으로 나타낼 수 있는 p-value를 이용
- 유의수준의 문제점
  - 같은 자료를 가지고, 유의수준이 5%이면 H_0를 기각하나, 유의수준이 1%이면 H_0를 기각하지 않는다.

유의수준의 문제점 예시

- 승용차의 리터당 연비 X를 $X \sim N(\mu, 9)$ 라고 하자. 특정모델 차의 연비에 대한 두 가지 가설 $H_0 : \mu \leq 15$, $H_1 : \mu > 15$ 이 있다고 하자. 기각역은 $\bar{x} > c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.
  - $\alpha = 0.05$ 이면 기각역 $c = 15 + 1.645 \times \frac{3}{\sqrt{36}} = 15.823$
  - $\alpha = 0.01$ 이면 기각역 $c = 15 + 2.326 \times \frac{3}{\sqrt{36}} = 16.163$
- 실제 $\bar{X}$의 값 $\bar{x} = 16$이 주어지게 되면,
  - $\alpha = 0.05$ 일 때, H_0 기각
  - $\alpha = 0.01$ 일 때, H_0 채택
- 유의수준의 선택은 쉽지 않으므로, 유의수준 대신 p-value를 제시한다.

p-value

- 귀무가설이 참이라는 가정하에서 우리가 관측한 값과 같거나 더 극단적인 값을 얻을 확률 (관측한 값보다 대립가설에 더 가까운 것을 의미)
- 예를 들어, 어떤 관측값에 대하여 p-value가 0.01, 0.001 등 매우 작은 값이 나왔다면, 우리가 관측한 값 자체가 이미 매우 극단적이라서 이보다 더 강한 대립가설에 대한 증거를 관측할 확률이 작다는 것이다. 즉, 관측값이 귀무가설하에서 나오기 어려운 값이라는 것이므로 귀무가설을 기각한 근거가 된다고 할 수 있다.
- 반대로 p-value가 0.3, 0.4 등 작지 않은 값이 나왔다면, 우리가 관측한 값이 귀무가설하에서 흔히 나올 수 있는 값이라는 것이고, 즉 귀무가설을 기각할 근거가 되지 않는다고 할 수 있다.

p-value 예제 1

- X_1, X_2, X_3은 $N(\mu, 5)$에서 나온 랜덤표본
  - 모평균에 대한 두 가설이 각각 $H_0 : \mu = 10$, $H_1 : \mu > 10$
  - 기각영역 : $\{(x_1, x_2, x_3): \bar{x}_3 \geq 12\}$
  - 유의수준(α) : $P(\bar{X}_3 \geq 12 | \mu = 10) = 0.0606$
  - 이 때 표본평균의 값이 큰 경우가 귀무가설에 대한 반증이 되면서 대립가설을 지지하는 자료가 된다.
  - 관찰된 $\bar{X}_3 = 13$일 경우, 귀무가설하에서 관측값과 같거나 더 극단적인 값을 얻을 확률(p-value)은 $P(\bar{X}_3 \geq 13 | \mu = 10) \approx 0.0102$
  - 이 값이 귀무가설을 기각할 만큼 작은 지를 결정하는 것은 보통 결과를 해석하는 사람에게 있다.
  - **흔히 p-value가 α보다 작으면** 관측된 자료가 대립가설에 대한 충분한 근거가 된다고 판단하여 귀무가설을 기각하게 된다.

p-value 예제 2

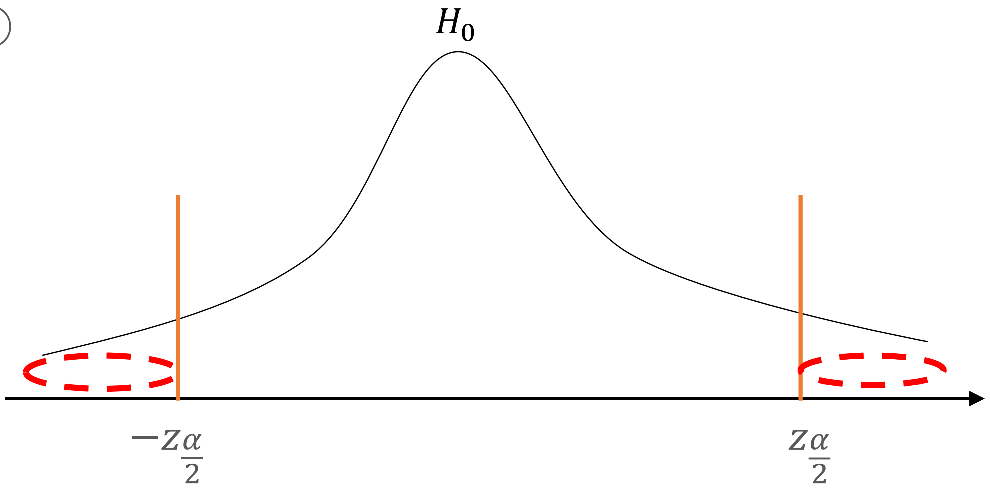
- 승용차의 평균연비에 대한 두 가설 $H_0 : \mu = 15$, $H_1 : \mu > 15$에 대한 p-value를 구해보자.
  - $\bar{x} = 16$ 일 경우, p-value : $P(\bar{X} \geq 16 | \mu = 15) = P\left(Z \geq \frac{16-15}{\frac{3}{\sqrt{36}}}\right) = P(Z \geq 2) = 0.028$
  - p-value를 제시했으니, 가설의 기각여부는 의사 결정권자가 판단하도록 하는 것이 보다 합리적이다. 대부분의 통계분석용 소프트웨어는 이 방식을 채택한다.
  - 따라서, 염두에 두고 있는 유의수준 α가 있다면,
    - p-value $\leq \alpha$ 이면, H_0 기각
    - p-value $> \alpha$ 이면, H_0 채택

모평균에 대한 가설 검정

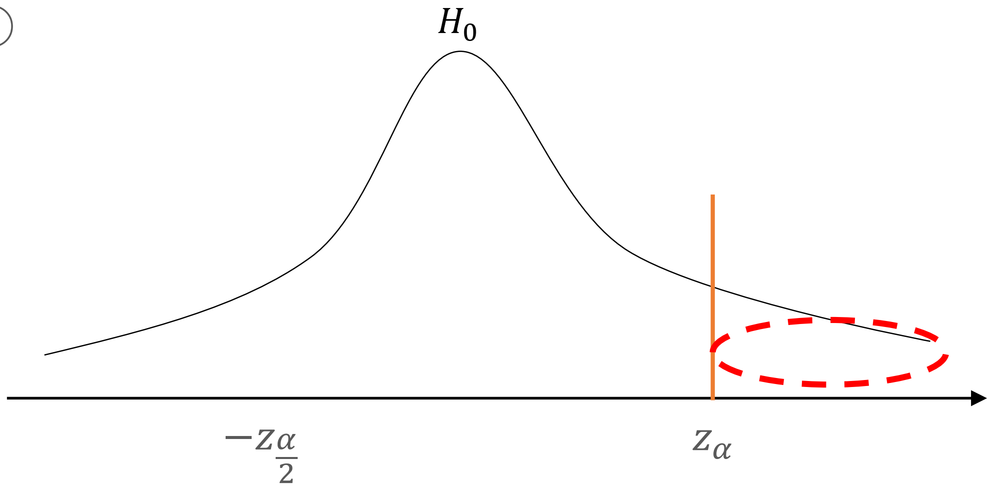
- 모집단에 대한 평균을 검정하려면 이 모집단에서 추출한 표본으로부터 계산한 모평균 μ의 가장 좋은 점추정량인 표본평균 $\bar{x}$를 이용하여 가설검정을 할 수 있다.
- 모분산을 아는 경우
  - 통계적 가설검정의 절차
    - 귀무가설 $H_0 : \mu = \mu_0$
    - 대립가설 $H_1 : \overset{①}{\mu \neq \mu_0}$ or $\overset{②}{\mu > \mu_0}$ or $\overset{③}{\mu < \mu_0}$
    - 검정통계량 계산 $\boldsymbol{Z} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
    - 유의수준 α결정
    - 기각역 $\overset{①}{|Z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}}$ or $\overset{②}{Z \geq z_\alpha}$ or $\overset{③}{Z \leq -z_\alpha}$
    - 검정통계량의 값이 기각역에 포함되면 귀무가설 H_0를 기각하고 아니면 채택한다.

모평균에 대한 가설 검정 기각역

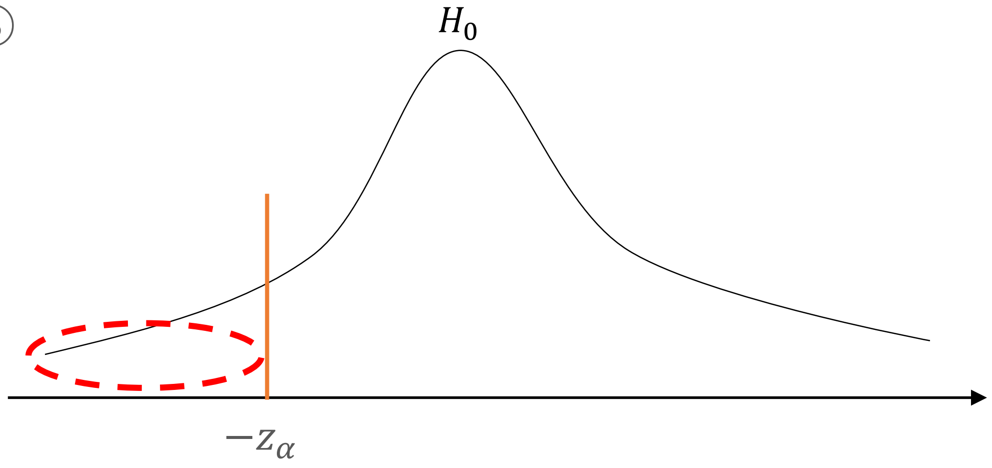
①



②



③



fast campus

표준정규분포표

유의수준이 α라는 것은

표준정규분포 확률밀도함수에서

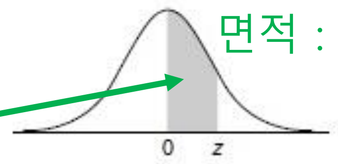
0부터 어떤 z값까지의 면적이

$1-\alpha$라는 것이다.

즉, 기각역의 값이 z가 된다.

이 수치가 면적

Area between 0 and z



면적 : $1-\alpha$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998

모평균에 대한 가설 검정 예제

- 모분산을 아는 경우의 예제
  - 어느 영업부서에서 판매원에 대한 재교육을 실시한 후, 임의로 9일을 선택하여 판매고에 대한 조사를 한 결과가 다음과 같았다. 평균 판매고가 $\mu_0 = 1000$을 초과하면 재교육이 효과가 있는 것으로 간주할 때, 재교육은 효과가 있었는지 유의수준 $\alpha = 0.01$에서 검정하라. 단 판매고는 $\sigma = 100$인 정규분포를 따른다.
  - 판매고 : 1280, 1250, 990, 1100, 880, 1300, 1100, 950, 1050
  - 통계적 가설검정
    - ✓ $H_0 : \mu = 1000$, $H_1 : \mu > 1000$
    - ✓ $n = 9$, $\alpha = 0.01$
    - ✓ 검정통계량 $\bar{x} = 1100$, 표준화된 검정통계량 $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1100-1000}{\frac{100}{\sqrt{9}}} = 3$
    - ✓ 검정통계량 3은 기각역이 시작되는 $z_{0.01} = 2.327$ 보다 크므로 귀무가설은 기각되고 대립가설이 채택된다.
    - ✓ 즉, 재교육은 효과가 있었다고 결론 내릴 수 있다.

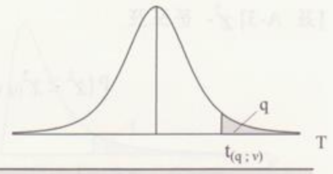
모평균에 대한 가설 검정(모분산을 모를때)

- 모분산을 모르는 경우
  - **대표본**인 경우는 σ^2 대신 표본분산 s^2을 사용하고 검정통계량은 $\boldsymbol{Z} = \frac{\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0}{\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}}$ 를 사용한다. $(n > 30)$
  - **소표본**$(\boldsymbol{n} \leq \mathbf{30})$ 일 때는 자유도 $\phi = n - 1$을 가진 $\boldsymbol{t}$**-분포 검정**을 하고 검정통계량은 $\boldsymbol{T} = \frac{\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0}{\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}}$ 이다.

t분포표

[표 A-2] t-분포표

$P\{T \geq t_{(q\,;\,\nu)}\} = q$



자유도	꼬리확률 q									
ν	0.4	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.598
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.792	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

모평균에 대한 가설 검정(모분산을 모를때) 예제

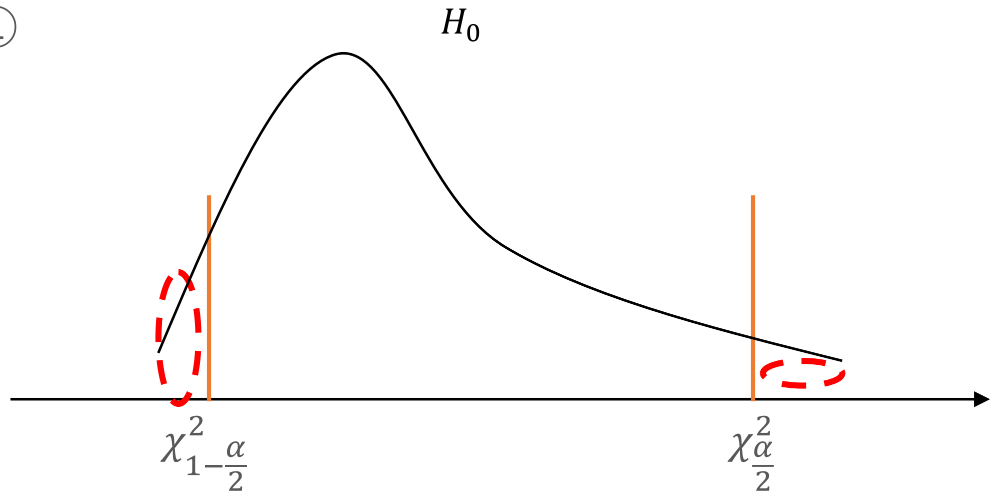
- 모분산을 모르는 경우의 예제
  - 어느 식용류 회사에서 평균용량을 200ml로 하고 싶어한다. 평균용량을 조사하기 위하여 임의로 20개를 추출해 조사한 결과가 다음과 같았다. 이 회사에서 생산되는 식용류의 평균용량이 200ml라고 할 수 있는지 유의수준 0.05에서 검정하라.
  - 199.9 , 201.0 , 200.2 , 200.2 , 200.4 , 200.1 , 200.2 , 200.0 , 199.9 , 200.0 , 200.0 , 200.8 , 199.9 , 200.1 , 200.5 , 199.9 , 200.4 , 200.5 , 199.8 , 200.2
  - 통계적 가설검정
    - ✓ $H_0 : \mu = 200$, $H_1 : \mu \neq 200$
    - ✓ $\bar{x} = 200.2$, $s^2 = 0.010105$, $\phi = 20 - 1 = 19$
    - ✓ 검정통계량 $T = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{200.2-200}{\frac{\sqrt{0.010105}}{\sqrt{20}}} = 2.814$
    - ✓ 검정통계량 $T = 2.814$는 기각역 $t_{(19,0.025)} = 2.093$ 보다 크다. T는 기각역에 있으므로, H_0는 기각되고, H_1이 채택된다.

모분산에 대한 가설검정

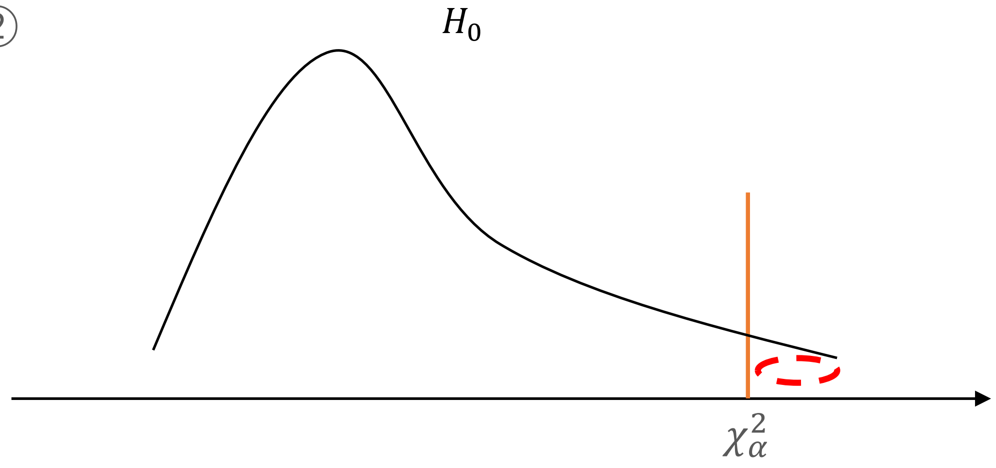
- 모집단의 평균과 분산이 μ, σ^2인 정규모집단 $N(\mu, \sigma^2)$에서 μ , σ^2 가 미지인 경우 모부산 σ^2에 대한 가설검정은 점추정량인 s^2을 이용하여 검정한다.
- 통계적 가설검정의 절차
  - 귀무가설 H_0 : $\sigma^2 = \sigma_0^2$
  - 대립가설 H_1 : ① $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ or ② $\sigma^2 > \sigma_0^2$ or ③ $\sigma^2 < \sigma_0^2$
  - 검정통계량 $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2}$
  - 표본크기 n과 유의수준 α결정
  - 기각역 ① $\chi^2 \geq \chi^2(n-1, \frac{\alpha}{2})$ or $\chi^2 \leq \chi^2(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})$ or ② $\chi^2 \geq \chi^2(n-1, \alpha)$ or ③ $\chi^2 \leq \chi^2(n-1, 1-\alpha)$
  - 통계적 결정 : 검정통계량이 기각역에 포함되면 귀무가설을 기각한다.

모분산에 대한 가설검정 기각역

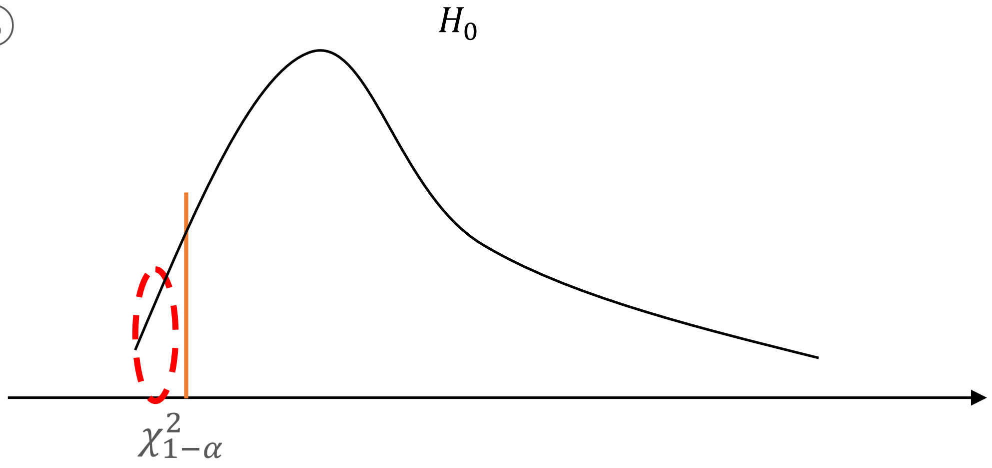
①



②

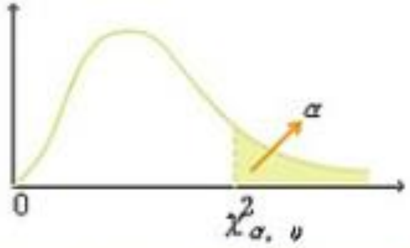


③



카이제곱 분포표

<부표-3> χ^2 분포표



ν	α=.995	α=.99	α=.975	α=.95	α=.05	α=.025	α=.01	α=.005	ν
1	.3333930	.000157	.000982	.00393	3.841	5.024	6.635	7.879	1
2	.0100	.0201	.0506	.103	5.991	7.378	9.210	10.597	2
3	.0717	.115	.216	.352	7.815	9.348	11.345	12.838	3
4	.207	.297	.484	.711	9.488	11.143	13.277	14.860	4
5	.412	.554	.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750	5
6	.676	.872	1.237	1.635	13.592	14.449	16.812	18.548	6
7	.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278	7
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955	8
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589	9
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188	10
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757	11
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300	12
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819	13
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319	14
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801	15
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267	16
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718	17
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.516	18
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.114	32.852	36.191	38.582	19
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997	20

모분산에 대한 가설검정 예제

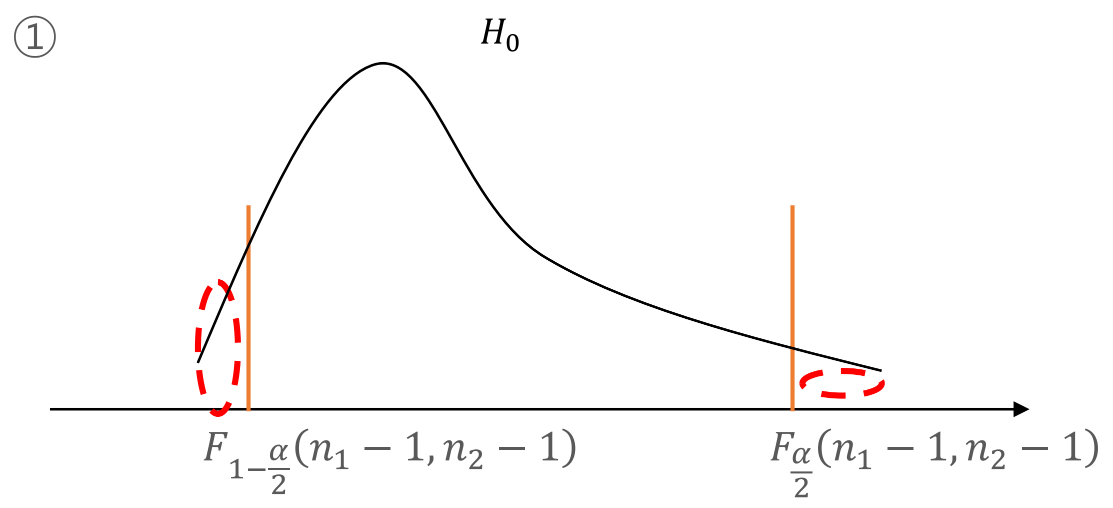
- 어느 전구회사의 생산 전구제품의 수명은 분산이 120시간인 정규분포를 따른다. 새로운 공정설계에 의하여 일부를 변경하고 이 공정에서 생산된 제품 30개를 추출하여 분산을 조사하니 105시간이었다. 공정을 변경하므로 제품수명의 변동이 적어지는지 유의수준 $\alpha = 0.05$ 수준에서 검정하라.

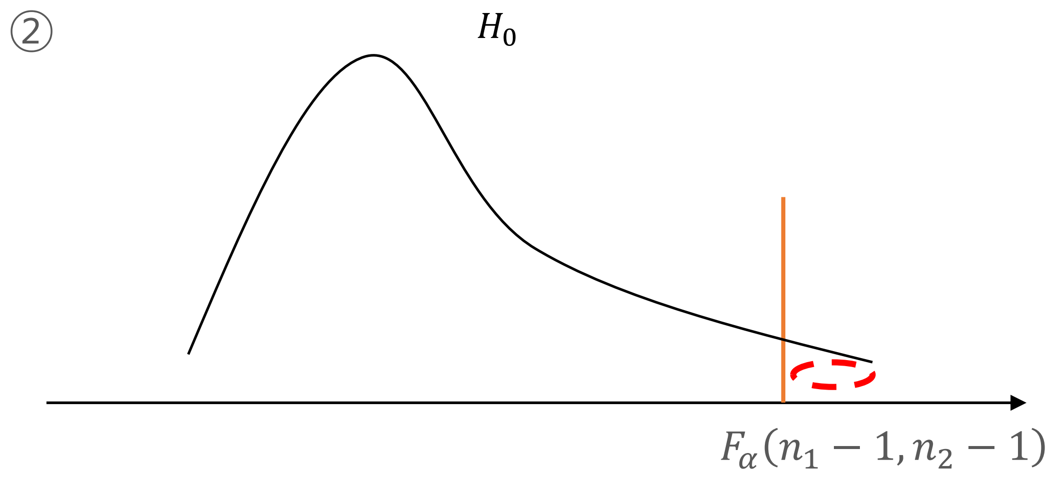
- 통계적 가설검정
  - ✓ $H_0 : \sigma^2 = 120$, $H_1 : \sigma^2 < 120$
  - ✓ 검정통계량 $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{29\times105}{120} = 23.375$
  - ✓ 기각역 $\chi^2 \leq \chi^2(n-1, 1-\alpha) = \chi^2(29, 0.95) = 17.71$
  - ✓ 검정결과 : $\chi^2 = 23.375 > \chi^2(29, 0.95) = 17.71$ 이므로 H_0를 기각할 수 없고 채택된다. 즉 새로운 공정을 변경하더라도 제품수명의 변동은 적어지지 않는다.

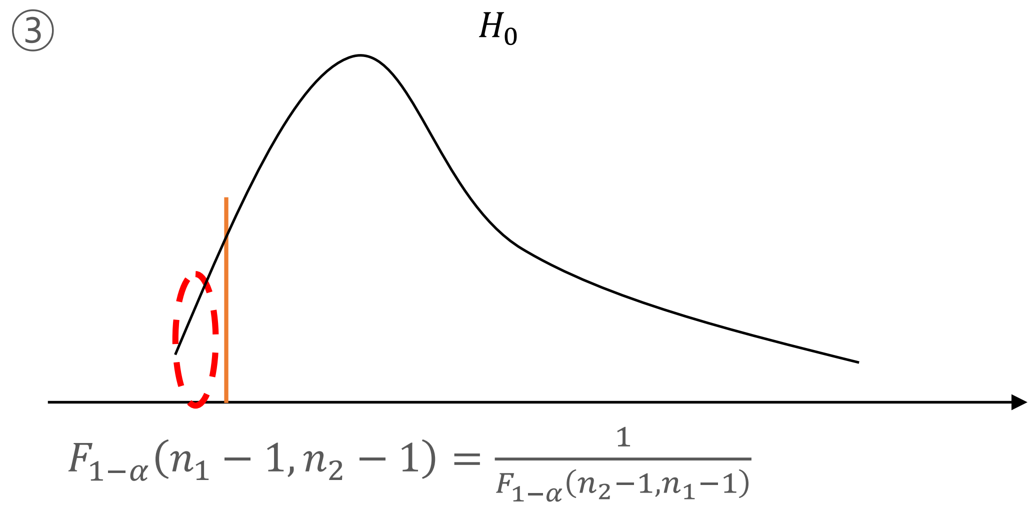
두 모분산 비에 대한 가설검정

- 모평균과 모분산을 모르는 경우 두 정규모집단에서 각각 표본크기가 n_1 , n_2이며, 표본분산이 s_1^2 , s_2^2이라고 하면 두 모분산의 비 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$에 대한 가설검정의 방법
- 통계적 가설검정의 절차
  - 귀무가설 H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
  - 대립가설 H_1 : ① $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ or ② $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ or ③ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$
  - 검정통계량 $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$
  - 표본크기 n_1 , n_2 와 유의수준 α를 결정
  - 기각역 ① $F \geq F(n_1 - 1, n_2 - 1, \frac{\alpha}{2})$ or $F \leq F(n_1 - 1, n_2 - 1, 1 - \frac{\alpha}{2})$ or ② $F \geq F(n_1 - 1, n_2 - 1, \alpha)$ or ③ $F \leq F(n_1 - 1, n_2 - 1, 1 - \alpha)$

두 모분산 비에 대한 가설검정 기각역





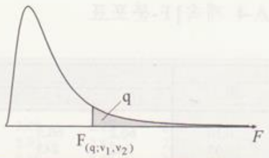


F분포표

[표 A-4] F-분포표

$$P\{F \ge F_{(q;\nu_1,\nu_2)}\} = q$$

$$F_{(1-q;\nu_1,\nu_2)} = \frac{1}{F_{(q;\nu_2,\nu_1)}}$$



ν_2	q	분자자유도 ν_1 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.10	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9
	0.05	161	200	216	225	230	234	237	239	241
	0.025	648	800	864	900	922	937	948	957	963
	0.01	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,981	6,022
2	0.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	0.05	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
	0.025	38.5	39.0	39.2	39.3	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4
	0.01	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
3	0.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	0.05	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	0.025	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5
	0.01	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
4	0.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	0.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	0.025	12.2	10.7	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	0.01	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
5	0.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	0.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	0.025	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	0.01	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
6	0.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	0.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	0.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	0.01	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	0.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	0.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	0.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	0.01	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	0.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	0.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	0.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
	0.01	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	0.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	0.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	0.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
	0.01	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	0.10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	0.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	0.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
	0.01	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	0.10	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
	0.05	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
	0.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59
	0.01	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	0.10	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	0.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	0.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
	0.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39

두 모분산 비에 대한 가설검정 예제

- 어떤 음료회사에서 최근 1리터 병의 내용물이 외관상 두 공장에서 변동이 있다고 판단되어 각 고장에서 임의로 20병씩 추출하여 측정한 결과 제 1공장의 평균과 분산은 각각 $\overline{x_1} = 1013.5$, $s_1^2 = 39.0$, 제 2공장의 평균과 분산은 각각 $\bar{x}_2 = 1009.7$, $s_1^2 = 26.12$ 였다. 내용물의 변동에 차이가 있다고 말할 수 있는지, 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 검정하라.

- 통계적 가설검정
  - ✓ $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
  - ✓ 검정통계량 $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{39.0}{26.12} = 1.4931$
  - ✓ $n_1 = 20$, $n_2 = 20$, 유의수준 $\alpha = 0.05$
  - ✓ $F\left(n_1 - 1, n_2 - 1, \frac{\alpha}{2}\right) = F(19,19,0.025) = 2.527$
  - ✓ 기각역 $F \geq F(19,19,0.025)$ 인데, $F = 1.4931 < F(19,19,0.025) = 2.527$이므로 H_0를 기각하지 않는다. 즉 두 공장의 내용물에 변동에 대한 차이는 없다.

두 모평균 차에 대한 가설검정

- 귀무가설 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \tau_0$
- 대립가설 $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \tau_0$ or $\mu_1 - \mu_2 < \tau_0$ or $\mu_1 - \mu_2 > \tau_0$
  - 모 분산 σ_1^2 , σ_2^2을 알고 있는 경우
    - 검정통계량 $Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \tau_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
  - 모 분산 σ_1^2 , σ_2^2을 모르는 경우
    - 두 자료에 의한 표준편차 $s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$
    - 검정통계량 $T = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \tau_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$