Exercice 5

Soit une source de Markov à deux symboles x_1 et x_2 ayant une matrice T de probabilité de transition :

$$T = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Les probabilités initiales des deux états sont égales

1. Déterminer les probabilités d'apparition des symboles x_1 et x_2 après 4 coups d'horloge ……………………………………………………..…………
2. Montrer comment il faut modifier les probabilités de transition P_{21} et P_{22} pour que la source devienne stationnaire……………………………………………………………………
3. Calculer l'entropie de la source stationnaire……………………………………
4. Quelles sont les conditions pour que l'entropie soit maximale……………

Probabilité d'apparition des symboles

$$P_n = \left(T^T\right)^n P_0$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T\right)^4 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)^4 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.666 \\ 0.334 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_4\left(x_1\right) &= 0.666 \\ P_4\left(x_2\right) &= 0.334 \end{aligned}}$$

Stationnarité

$$P_n = P_{n-1} \qquad T^T = \begin{pmatrix} p_{11} p_{21} \\ p_{12} p_{22} \end{pmatrix}$$

$$P_1 = T_s^T P_0 = P_0$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} p_{21} \\ p_{12} p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.5 = p_{11} 0.5 + p_{21} 0.5 \\ 0.5 = p_{12} 0.5 + p_{22} 0.5 \end{cases}$$

Reprenons P_{11}=3/4 et P_{12}=1/4
alors P_{21}=1/4 et P_{22}=3/4

$$T_s = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Entropie de la source

$$[X] = [x_1, x_2] \quad T_s = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{D=2}\sum_{j=1}^{D=2} p(x_i) \; p_{i,j}\log(p_{i,j})$$

$$H(X) = -1/2\left(3/4\log(3/4) + 1/4\log(1/4)\right) \\ -1/2\left(1/4\log(1/4) + 3/4\log(3/4)\right) = 0.811$$

$$\boxed{H(X) = 0.811 \text{ bit/symbole}}$$

Maximum de l'entropie

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{D=2}\sum_{j=1}^{D=2} p(x_i)\ p_{i,j}\log(p_{i,j})$$

$$p(x_1) = p(x_2)$$

$$Max\big(H(X)\big) = Max\left(-\sum_{i=1}^{D=2}\sum_{j=1}^{D=2} p_{i,j}\log(p_{i,j})\right)$$

$$\Rightarrow \quad p_{i,j} = \frac{1}{2} \ \forall i,j$$

$$\boxed{H_{Max}(X) = 1}$$