Examen 2A ISN & ISA
24 Juin 2015

Transmission de l'information

1h30 - Sans document
Les rappels sont en annexe

Partie A : Transmission de l'information

I **Echantillonnage linéaire et non linéaire**

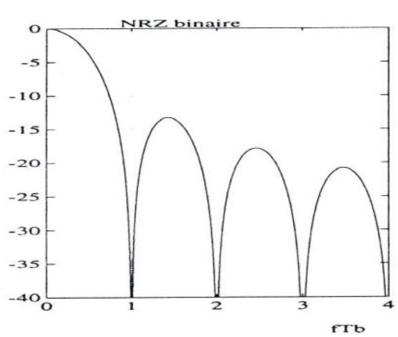
On dispose d'un canal de transmission dont le débit est de 36 000 bits/s pour transmettre un son.

1. Sachant que la fréquence maximale contenue dans le son que l'on souhaite transmettre est Fmax= 2.3kHz, proposer une valeur minimale pour la fréquence d'échantillonnage Fe.
2. Pour cette fréquence et ce canal, sur combien de bit n au minimum peut-on quantifier le signal si la quantification est linéaire?
3. En fonction du nombre de bits n, sur combien de valeurs sera quantifié le signal ?
4. En téléphonie mobile, la quantification du signal sonore n'est pas linéaire, elle s'effectue selon la loi A (Europe) ou μ (Amérique du nord), expliquer pourquoi cette quantification n'est pas linéaire?

II. Débit et bande passante

Une image TV haute résolution en noir et blanc comporte environ 2 10^6 pixels et chaque pixel possède un niveau de gris parmi 256 niveaux. La fréquence de renouvellement est de 32 images par seconde. On suppose que les pixels sont indépendants les uns des autres et que les niveaux de gris sont équiprobables.

1. Combien de bits sont nécessaire pour coder 1 pixel
2. Evaluer le débit d'information en bits/s de cette émission de télévision.
3. Quelle est la bande passante du canal de transmission nécessaire pour transmettre le signal binaire en bande de base par un format de codage NRZ dont la représentation de sa densité spectrale de puissance en dB en fonction de fT_b est représentée figure 1 (T_b représente la durée du moment élémentaire)?Justifier votre réponse



4. Si le canal de transmission ne dispose pas de cette largeur de bande, proposer une solution pour diviser par 2 cette bande passante

III **Canal avec bruit blanc additif gaussien**

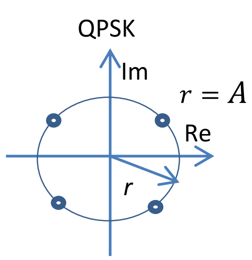
Un signal analogique de 4 kHz de fréquence maximum est échantillonné à 1,25 fois la fréquence d'échantillonnage minimum théorique de Shannon, chaque échantillon étant quantifié sur 256 niveaux équiprobables. On suppose que les échantillons sont statistiquement indépendants.

1 Quel est le débit binaire issu de la source ?

2. Peut-on transmettre sans erreur le signal sur un canal à bruit blanc additif gaussien centré de 10 kHz de bande passante et présentant un rapport signal sur bruit de 20 dB ?

III.3. Calculer le SNR requis pour assurer une transmission sans erreur dans les conditions précédentes.

IV. Diaphonie dans un démodulateur I/Q



Soit une modulation QPSK dont les points de la constellation sont représentés figure suivante.

On s'intéresse à l'effet d'une désynchronisation entre le signal modulé reçu et la porteuse reconstituée par le récepteur démodulateur.

Le signal modulé de données numériques s'écrit :

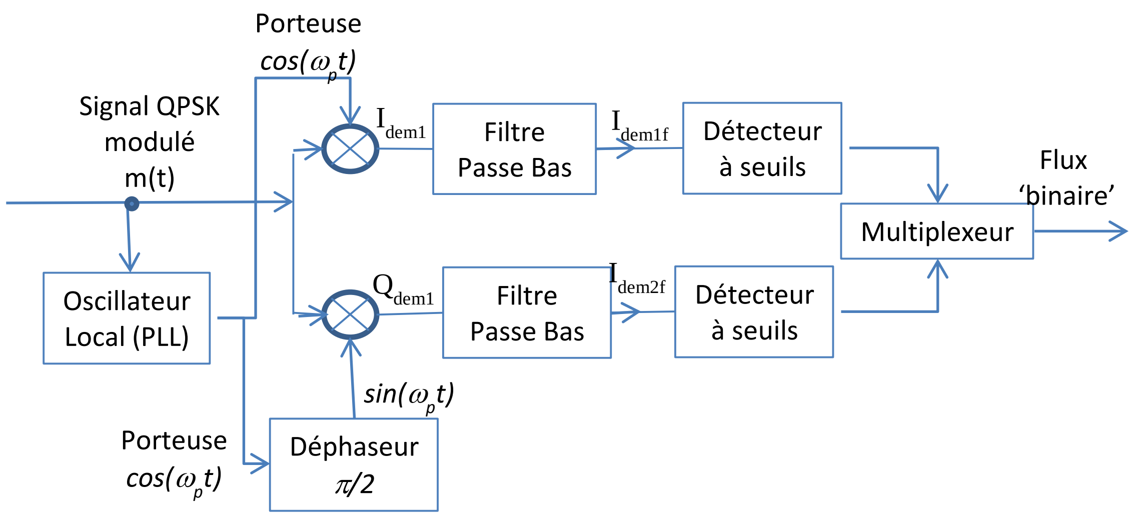
$$m(t) = \sum_k \frac{A}{\sqrt{2}}.\cos(2\pi F_p\, t + \varphi_k)$$

Avec Fp la fréquence de la porteuse et $\varphi_k$prend ses valeurs dans l'alphabet $\{\varphi_0, \dots, \varphi_3\}$

Examen 2A ISN & ISA
24 Juin 2015

Symboles de bits à transmettre	Phaseφ_k
11	$\frac{\pi}{4}$
10	$\frac{3\pi}{4}$
01	$\frac{5\pi}{4}$
00	$\frac{7\pi}{4}$

1. Montrer que *m(t)* peut se mettre sous la forme :
   $m(t) = \sum_k a_k(t)\cos(2\pi F_p\, t) - \sum_k b_k(t)\sin(2\pi F_p\, t)$
   On posera ensuite $I_k = \sum_k a_k(t)\cos(2\pi F_p\, t)$ $et\ Q_k = \sum_k b_k(t)\sin(2\pi F_p\, t)$
2. Les symboles a_k et b_k prennent leurs valeurs dans les alphabets (A_1, A_2) ou (B_1,B_2). Selon la constellation QPSK et le tableau ci-dessus donner les valeurs A_1, A_2 et B_1, B_2
3. Calculer la distance minimale entre les symboles
4. Exprimer l'écart type maximum du bruit blanc gaussien additif que pourrait supporter cette modulation
5. Supposons que ce signal de largeur de bande B soit transmis dans un canal de transmission parfait de largeur de bande *B* centrée sur F_p (sans atténuation, sans bruit,) avec $B << F_p$ Le démodulateur est présenté sur la figure suivante.



Les filtres passe bas sont considérés parfaits ie $|H(f)| = 1\ pour\ f \in \left[-\frac{B}{2}, +\frac{B}{2}\right]$
$|H(f)| = 0\ ailleurs$

On suppose que l'oscillateur Local (PLL) récupère parfaitement la porteuse $p(t) = \cos(2\pi F_p)$

4.a. Exprimer I_{dem1} et Q_{dem1}

4.b. Exprimer I_{dem1f} et Q_{dem1f} en sortie des filtres passe bas

On suppose maintenant que l'oscillateur Local (PLL) récupère la porteuse avec une erreur de phase telle que $p(t) = \cos(2\pi F_p + \varphi_p)$

4.c. Exprimer I_{dem1f} et Q_{dem1f}

4.d. La distorsion *D (exprimée en % ou en dB)* due à la diaphonie (phase de la porteuse) s'exprime sous la forme :

$$D\% = 100.\left|tan(\varphi_k)tan(\varphi_p)\right| \quad ou\ D_{dB} = 20\, log\left(\left|tan(\varphi_k)tan(\varphi_p)\right|\right).$$

Exprimer l'intervalle des valeurs de φ_p.pour que cette distorsion soit inférieure à -40dB

Examen 2A ISN & ISA
24 Juin 2015

Partie B : Théorie de l'information

Exercice 1 :

Une source S génère six symboles, avec les probabilités : $p(s_1)=0,3$ $p(s_2)= 0,25$ $p(s_3)=0,2$ $p(s_4)= 0,1$ $p(s_5)=0,1$ $p(s_6)=0,05$

1. Coder les symboles de cette source par des mots composés avec un alphabet D= 3 lettres X={0,1,2}
2. Calculer l'efficacité du code

Note : pour le codage de Huffman à D symboles, il faut prendre en considération qu'après le premier groupement on obtient une source à N-D+1=N-(D-1) symboles. Afin de pouvoir effectuer le codage, la dernière source doit avoir D éléments, donc D=N-n(D-1), d'où il s'ensuit :

$$n=\frac{N-D}{D-1}$$

et si n ainsi obtenu n'était pas un nombre entier on accroîtra N par l'introduction de symboles fictifs de probabilité nulle.

Examen 2A ISN & ISA
24 Juin 2015

Quelques rappels

1. Capacité théorique d'un canal de transmission (Formule de Shannon) notée C: $C = B \cdot \log_2\left(1+\frac{Ps}{Pb}\right)$ avec B largeur de bande du canal de transmission, Ps Puissance moyenne du signal, Pb Puissance moyenne de bruit
2. Relation entre P la puissance moyenne et G(f) la densité spectrale de puissance d'un signal $P = \int_B G(f)df$ (Attention B peut être bilatérale)
3. Pour un signal *s* déterministe, on définit son *énergie* dans le domaine continu par $E(s) = \int |s(t)|^2 dt$ et dans le domaine discret par $\sum_n |s_n|^2$.
4. L'espérance mathématique (ou moyenne théorique) d'une variable aléatoire discrète X est définie par : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mu(\mathrm{X}) = \sum_i p_i x_i$

   La variance théorique d'une variable aléatoire discrète X est définie par :
   $\sigma^2(X) = \mu(X-\mu(x))^2 = \sum_i p_i(x_i-\mu)^2 = \sum_i p_i x_i^2 - \mu^2$

   L'écart type théorique est : $\sigma(X) = \sqrt{\sum_i p_i(x_i-\mu)^2}$

   Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors : $\mu(X+Y) = \mu(X)+\mu(Y)$
   $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X)+\sigma^2(Y)$

   Estimateur de moyenne (moyenne empirique) et de variance :

   $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i^N x_i$$

   et :

   $$Var_{est}(X) = \sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_i^N (x_i-\bar{x})^2$$

5. La valeur efficace est la racine carré de la puissance moyenne : $V_{eff} = \sqrt{P}$ et la valeur efficace est équivalente à l'écart type σ pour une variable aléatoire gaussienne.
6. Bande passante à α dB : $\alpha = 10\log_{10}\frac{Ps}{Pb}$
7. Efficacité spectrale : Débit/Bande passante
8. Moment élémentaire (Intervalle de temps), noté T_b : période pendant laquelle les caractéristiques de la modulation du signal à transmettre ne sont pas modifiées.
9. Valence notée V : Nombre de symboles possibles et distincts employés dans une modulation pour caractériser les éléments du signal à transmettre.
10. Rapidité de modulation, notée R : C'est une caractéristique physique de la ligne. Son unité est le baud. $R = \frac{1}{T_b}$. Dans certains cas elle correspond à la bande passante

11. Débit binaire, notée D : quantité de bit émis par unité de temps. Unité: bits/s. $D=R\log_2 V$
12. La densité spectrale de puissance selon la loi de Bennett est donnée par la formule: $DSP(f)=\frac{|m_s|^2}{T_b}\sum_n |S(n/T_b)|^2\delta(f-n/T_b)+\frac{\sigma_s^2}{T_b}|S(f)|^2$ avec *S(f)* la transformée de Fourrier des moments élémentaires, elle dépend du format du codage
13. Pour une variable aléatoire suivant une loi gaussienne de moyenne m et d'écart type σ, la probabilité que sa valeur soit contenue dans l'intervalle [m-3σ, m+3σ] est de 0,99 et de 0,95 pour l'intervalle [m-2σ, m+2σ] et 0,68 pour l'intervalle [m-σ, m+σ].
14. Formules trigonométriques

$cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ $cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

$sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$ $sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

Examen 2A ISN & ISA
24 Juin 2015

Correction

I **Echantillonnage linéaire et non linéaire**

On dispose d'un canal de transmission dont le débit est de 36 000 bits/s pour transmettre un son.

5. Sachant que la fréquence maximale contenue dans le son que l'on souhaite transmettre est Fmax= 2.3kHz, proposer une valeur minimale pour la fréquence d'échantillonnage Fe.

Correction : d'après le Th. de Shannon-Nyquist, il faut un échantillonnage à une fréquence d'au moins 4.6kHz.

6. Pour cette fréquence et ce canal, sur combien de bit n au maximum peut-on quantifier le signal ?

Correction : on doit envoyer 4600 échantillons par seconde, or on dispose de 36000 bits par seconde. Cela signifie qu'on peut allouer 7.8261 bits par échantillon, soient 7 bits.

7. En fonction du nombre de bits n, sur combien de valeurs sera quantifié le signal ?

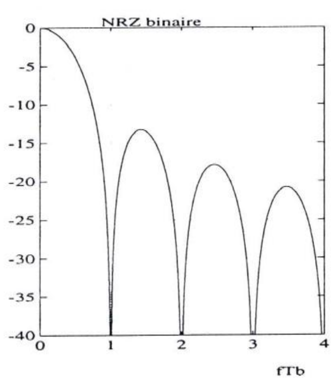
Correction : on pourra quantifier chaque échantillon sur 2^7 niveaux, soient128 valeurs

8. En téléphonie mobile, la quantification du signal sonore n'est pas linéaire, elle s'effectue selon la loi A (Europe) ou μ (Amérique du nord), expliquez pourquoi ?

II. Débit et bande passante

Une image TV haute résolution en noir et blanc comporte environ 2 10^6 pixels et chaque pixel posséde un niveau de gris parmi 256 niveaux. La fréquence de renouvellement est de 32 images par seconde. On suppose que les pixels sont indépendants les uns des autres et que les niveaux de gris sont équiprobables.

5. Combien de bits sont nécessaire pour coder 1 pixel
6. Evaluer le débit d'information en bits/s de cette émission de télévision.
7. Quelle est la bande passante du canal de transmission nécessaire pour transmettre le signal binaire en bande de base par un format de codage NRZ dont la représentation de sa densité spectrale de puissance en dB en fonction de fT_b est représentée figure 1 (T_b représente la durée du moment élémentaire)?



8. Le canal de transmission ne dispose pas de cette largeur de bande, proposer une solution pour diviser par 2 cette bande passante

Débit d'info : M H H

L'image = 2 10^6 *pixels*

1 pixel = 256 niveaux possibles, tous équiprobables soient 8 bits de codage

Fréquence renouvellement = 32 Hz

Débit = 2 10^6 **8*32=512MBits/s*

Si on prend le premier lobe f.Tb=1 donc fc=1/Tb, 1 bit=1 moment élementaire

III Canal avec bruit blanc additif gaussien

Un signal analogique de 4 kHz de largeur de bande est échantillonné à 1,25 fois la fréquence de Nyquist, chaque échantillon étant quantifié sur 256 niveaux équiprobables. On suppose que les échantillons sont statistiquement indépendants.

- Quel est le débit binaire issu de la source ?

La fréquence d'échantillonnage est de 10 KHz. 8 bits sont utilisés pour coder le signal. Le débit binaire est de 80 Kbits/s.

- Peut-on transmettre sans erreur le signal sur un canal à bruit blanc additif gaussien centré de 10 kHz de bande passante et présentant un rapport signal sur bruit de 20 dB ?

La capacité de ce canal est de :

C(bits/s)=B. $\log_2[1+S/N]=10.10^3.\log_2(1+100)=66$ *kbits/s*
.Analysons le sens de la capacité du canal
Avec un rapport signal à bruit de 20 dB, la résolution en amplitude = 10 symboles différents → on peut coder les symboles transmis avec au maximum 3.33 bits (3 bits en fait). Si la bande passante du canal est de 10 KHz, le débit max de symbole = 20 Kbauds. Donc le débit binaire théorique ne peut pas dépasser 66 Kbits/s.
La capacité du canal est donc insuffisante pour faire passer un tel débit binaire. Même en utilisant un codage approprié (transmettre des symboles codés par plusieurs bits), cela ne suffirait pas. En augmentant le nombre de bits par symbole, on pourrait réduire la bande passante nécessaire. Mais du même coup, il faudrait accroître la résolution en amplitude du canal, c'est-à-dire améliorer le rapport signal à bruit.

Calculer le SNR requis pour assurer une transmission sans erreur dans les conditions précédentes.
Pour assurer une transmission sans erreurs, la capacité du canal doit être d'au moins 80 Kbits/s
$\log_2(1+S/N)=C/B$
S/N=24dB

Que permet l'amélioration du SNR. En améliorant le SNR, on accroit la résolution en amplitude, donc la capacité d'un récepteur à distinguer un grand nombre de symboles différents. On peut donc augmenter la taille du codage symbole – plus de bits pour coder un symbole. Donc sans accroitre le débit de symbole transmis, on accroit le débit binaire. Mais il faut améliorer de 4 dB le rapport signal à bruit, càd une augmentation de 150 % (soit on augmente la puissance du signal, soit on réduit le seuil de bruit, soit on diminue la portée du canal)

IV. Diaphonie dans un démodulateur I/Q

On considère une modulation QPSK. On s'intéresse à l'effet d'une désynchronisation entre le signal modulé reçu et la porteuse reconstituée par le récepteur.

Symboles de bits à transmettre	Ak	Bk	Phaseφ_k
11	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$
10	$-\frac{A}{\sqrt{2}}$	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{4}$
01	$-\frac{A}{\sqrt{2}}$	$-\frac{A}{\sqrt{2}}$	$\frac{5\pi}{4}$
00	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	$-\frac{A}{\sqrt{2}}$	$\frac{7\pi}{4}$

Examen 2A ISN & ISA
24 Juin 2015

$$U_I(k) = \frac{A}{\sqrt{2}}\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right)$$

$$U_Q(k) = \frac{A}{\sqrt{2}}\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)$$

K = +/- 1 suivant les bits d'entrée. Le signal en sortie du modulateur peut s'écrire :

$$U_E(t) = U_I\cos(\omega_P t) + U_Q\sin(\omega_P t)$$

$$U_E(t) = \frac{A}{\sqrt{2}}\left(\cos(\omega_P t)\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right) + \sin(\omega_P t)\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$U_E(t) = \frac{A}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega_P t + (2k+1)\frac{\pi}{4}\right), k = 0, 1, 2, 3$$

L'amplitude du signal reste constante, seule la phase varie. Le tableau ci-dessous résume les différents états de phase pris par le signal modulé.

Schéma du démodulateur IQ :

Sur la voie I, on trouve

$$I = A\cos(\omega_P t + \varphi)\cos\omega_P t = A\cos\omega_P t \times (\cos\omega_P t\cos\varphi - \sin\omega_P t\sin\varphi)$$

$$I = \frac{A\cos\varphi}{2}(1 + \cos 2\omega_P t) - \frac{A\sin\varphi}{2}\sin 2\omega_P t$$

Le signal contient 2 composantes spectrale à 2Fp, où Fp est la fréquence de la porteuse, et une composante à 0 Hz. Après filtrage passe bas, on trouve :

$$I = \frac{A\cos\varphi}{2}$$

Suivant la phase φ, . Le signal peut donc prendre 2 valeurs et correspond à un signal. 4 2 A I
On refait la même chose pour la voie Q :

$$Q = A\cos(\omega_P t + \varphi)\sin\omega_P t = A\sin\omega_P t \times (\cos\omega_P t\cos\varphi - \sin\omega_P t\sin\varphi)$$

$$Q = \frac{A\cos\varphi}{2}\sin 2\omega_P t - \frac{A\sin\varphi}{2}(1 - \cos 2\omega_P t)$$

Le signal contient 2 composantes spectrale à 2Fp, où Fp est la fréquence de la porteuse, et une composante à 0 Hz. Après filtrage passe bas, on trouve :

$$Q = \frac{A\sin\varphi}{2}$$

Suivant la phase φ, . Le signal peut donc prendre 2 valeurs et correspond à un signal. 4 2 A Q
On reconstruit un tableau de correspondance entre la phase du signal reçu et le signal binaire reconstitué :

On retrouve les symboles transmis par le modulateur

2. Soit φ(t) le déphasage instantané entre le signal modulé reçu et la porteuse reconstituée par le récepteur. Quel est l'impact sur les signaux démodulés ?

Attention de ne pas confondre φ (phase du signal modulé, imposé par le symbole à transmettre) et φ(t) le déphasage entre la porteuse reconstitué et la porteuse du signal modulé. Evaluons l'impact de ce déphasage sur la voie I :

$$I = A\cos(\omega_P t + \varphi)\cos(\omega_P t + \varphi(t))$$

$$I = A(\cos\omega_P t\cos\varphi - \sin\omega_P t\sin\varphi) \times (\cos\omega_P t\cos\varphi(t) - \sin\omega_P t\sin\varphi(t))$$

$$I = A\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\omega_P t}{2}\right)\cos\varphi\cos\varphi(t) - \frac{\sin 2\omega_P t}{2}(\cos\varphi\sin\varphi(t) + \sin\varphi\cos\varphi(t)) + \left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\omega_P t}{2}\right)\sin\varphi\sin\varphi(t)\right]$$

Après filtrage passe bas, on trouve :

$$I = A\left[\frac{\cos\varphi\cos\varphi(t)}{2} + \frac{\sin\varphi\sin\varphi(t)}{2}\right]$$

On trouve une expression similaire pour la voie Q. On remarque que les signaux des voies I et Q dépendent à la fois du cosinus et du sinus de la phase φ, ainsi que du déphasage parasite φ(t). La première partie de l'expression correspond à l'expression normale de I (sans déphasage parasite) perturbé par le déphasage parasite. La seconde partie correspond à une interférence de la voie Q (phénomène de diaphonie), qu'il faut éliminer si on veut correctement reconstituer le signal binaire transmis.

Ce résultat montre qu'il est essentiel de synchroniser correctement le démodulateur avec le modulateur (utilisation d'une PLL et d'une extraction de la porteuse à partir du signal modulé reçu).

3. On note distorsion le rapport entre le signal parasite généré par le déphasage sur le signal voulu. Quelle est la tolérance sur le déphasage pour que la distorsion soit inférieure à -40 dB ?

On note ce taux de distorsion D (exprimée en %).

$$D(\%) = 100.\left|\frac{\frac{\sin\varphi\sin\varphi(t)}{2}}{\frac{\cos\varphi\cos\varphi(t)}{2}}\right| = 100.\left|\frac{\sin\varphi\sin\varphi(t)}{\cos\varphi\cos\varphi(t)}\right|$$

En dB, l'expression s'écrit :

$$D(dB) = 20\log\left(\left|\frac{\sin\varphi\sin\varphi(\;)}{\cos\varphi\cos\varphi(\;)}\right|\right) = 20\log(|\tan\varphi|.|\tan\varphi(\;)|)$$

Quel que soit l'état binaire transmis, $\varphi = (k+1)\frac{\pi}{4}$, $k = 0,1,2,3$ *. La distorsion s'écrit donc :*

$$D(dB) = 20\log(|\tan\varphi(\;)|)$$

La contrainte est d'avoir une distorsion inférieure à -40 dB :

$$\begin{aligned}
&D(dB) = 20\log(|\tan\varphi(\;)|) < -40 \\
&\log(|\tan\varphi(\;)|) < -2 \\
&|\tan\varphi(\;)| < 0.01 \\
&-0.57° < \tan\varphi(\;) < 0.57°
\end{aligned}$$

Pour atteindre cette objectif, il faut assurer un déphasage inférieur à 1/2 degré, ce qui est une contrainte très difficile à tenir en pratique.