Exercice 3

Soit la transformée en z monolatérale suivante :

$$F(z)=\frac{3z^3-12z^2+11z}{z^3-6z^2+11z-6}$$

1. Préciser le domaine de convergence
2. Calculer les quatre premiers termes de la séquence causale
3. F(z) est considérée comme la transmittance d'un filtre numérique. Exprimer l'algorithme de filtrage
4. Retrouver la réponse impulsionnelle du filtre

ensem

Solutions

1. RdC :

Les pôles sont : z=1 ; z=2 ; z=3. Le domaine de convergence est donc |z|>3

On en déduit que la séquence $\{f_n\}$correspondante est divergente puisque le cercle unité n'est pas dans le domaine.

2. Calcul des premiers termes de la séquence $\{f_n\}$ **:**

La division euclidienne donne :

$$F(z)=\frac{3-12z^{-1}+11z^{-2}}{1-6z^{-1}+11z^{-2}-6z^{-3}}$$

$$\begin{array}{l|l}
\quad 3-12z^{-1}+11z^{-2} & 1-6z^{-1}+11z^{-2}-6z^{-3} \\
\cline{2-2}
-\ \underline{3-18z^{-1}+33z^{-2}-18z^{-3}} & 3+6z^{-1}+14z^{-2}+36z^{-3}+98^{-4} \\
\quad 0+6z^{-1}-22z^{-2}+18z^{-3} & \\
-\ \underline{0+6z^{-1}-36z^{-2}+66z^{-3}-36z^{-4}} & \\
\quad 0\quad -0\quad +14^{-2}-48z^{-3}+36z^{-4} & \\
-\ \underline{0\ -0\ +14z^{-2}-84z^{-3}+154z^{-4}-84z^{-5}} & \\
\qquad 0\ -0\ +0+36z^{-3}-118z^{-4}+84z^{-5} &
\end{array}$$

3. Algorithme de traitement

$$F(z)=\frac{3-12z^{-1}+11z^{-2}}{1-6z^{-1}+11z^{-2}-6z^{-3}}=\frac{y(z)}{x(z)}$$

$$y(z)-6z^{-1}y(z)+11z^{-2}y(z)-6z^{-3}y(z)=3x(z)-12z^{-1}x(z)+11z^{-2}x(z)$$

D'où l'algorithme

$$\boxed{y(n)=6y(n-1)-11y(n-2)+6y(n-3)+3x(n)-12x(n-1)+11x(n-2)}$$

3. Réponse impulsionnelle
On pose x(n) = δ(n) : soit x(n) = 1 dans l'algorithme de filtrage.
La séquence de sortie est alors : {y(n} = {3, 6, 14, 36, 98, ….}, c'est une réponse de type RII.
On retrouve bien sûr la même séquence qu'à la question 2 ! (La transformée en z inverse de la transmittance donne la réponse impulsionnelle)

ensem

Inversion par la méthode des résidus

$$y(n)=\sum Résidus\ de\ z^{n-1}y(z)\ aux\ pôles\ de\ z^{n-1}y(z)$$

Calcul d'un résidu au pôle a d'ordre q : $\lim\limits_{z\to a}\left[\frac{1}{(q-1)\,!}\ \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\ \left[(z-a)^q.z^{n-1}.y(z)\right]\right]$

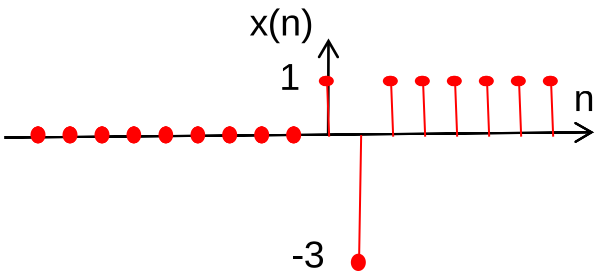
On a un pôle triple pour z=1

$$\Rightarrow y(n)=\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{2\,!}\ \frac{d^2}{dz^2}\ \left[(z-1)^3.z^{n-1}\left(-\frac{z^2(z-3)}{(z-1)^3}\right)\right]\right]$$

$$\Rightarrow y(n)=\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{2\,!}\ \frac{d^2}{dz^2}\ \left[z^{n-1}.z^2(3-z)\right]\right]=n^2-1$$

2. Solution de la seconde équation

Il faut écrire le second terme de manière formelle



$$x(n) = u(n) - 4\delta(n-1)$$

$$x(z) = \frac{z}{z-1} - 4z^{-1}$$

$$y(z) - 3z^{-1}y(z) + 2z^{-2}y(z) = \left(\frac{z}{z-1} - 4z^{-1}\right)$$

$$y(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}\left(\frac{z}{z-1} - 4z^{-1}\right) = \frac{z^2}{z^2-3z+2}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{4}{z}\right)$$

$$y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}\left(\frac{(z-2)^2}{z(z-1)}\right) = \frac{z(z-2)}{(z-1)^2} \quad RdC : |z > 1|$$

Inversion

Par les tables :

$$y(z) = z\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2}\right) \Rightarrow y(n) = 1 - n$$

Par la méthode des résidus :

$$y(n) = \lim_{z \to 1}\left(\frac{d}{dz}\left[z(z-2)z^{n-1}\right]\right) = 1 - n$$

ensem