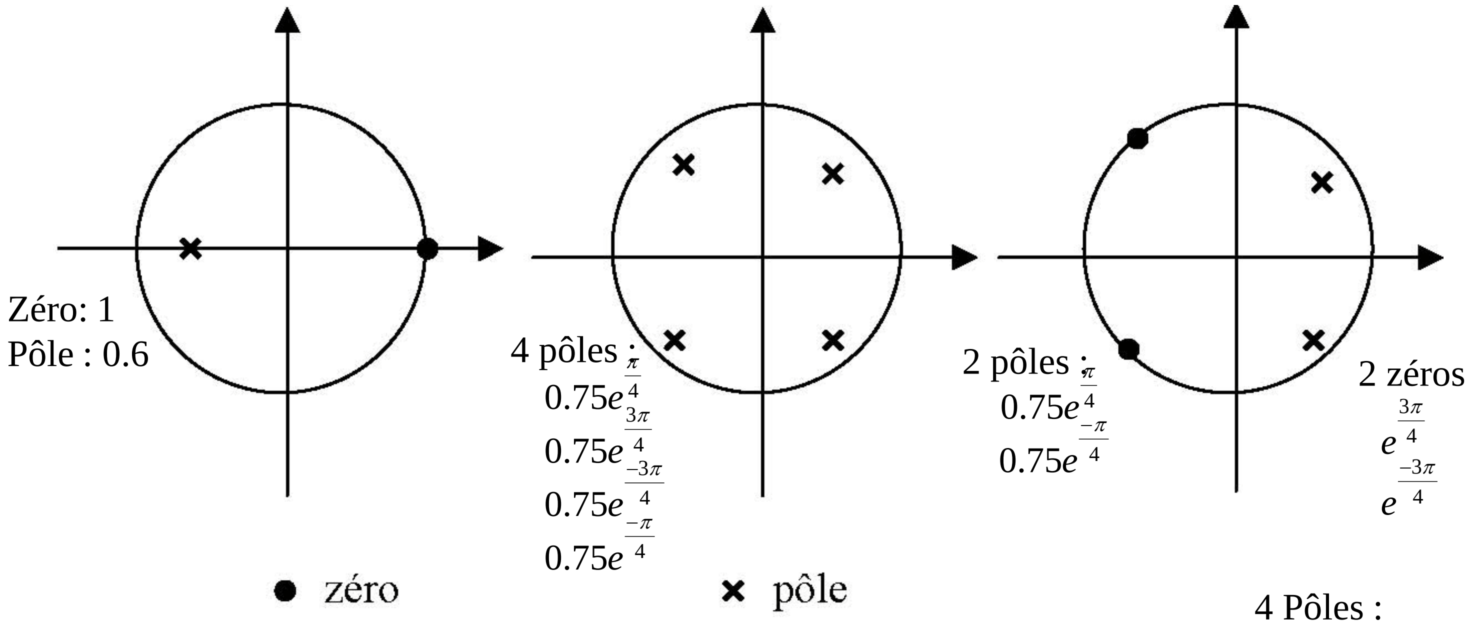
Exercice 4

1. Exprimer la forme analytique de la transmittance en z des filtres dont la configuration pôles-zéros est montrée ci-après.
2. Trouver l'allure du module de la réponse fréquentielle de ces filtres.



Solutions

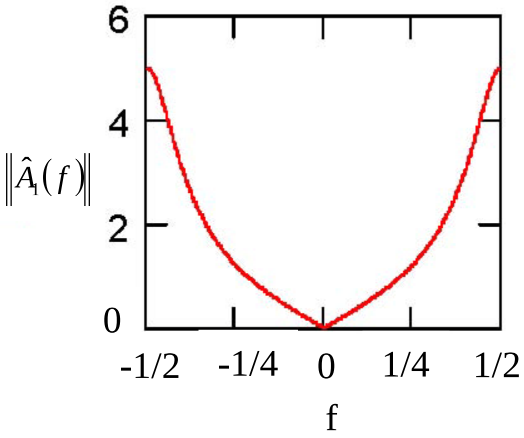
Cas 1

$$A_1(z) = \frac{z-1}{z+0.6}$$

Quand f varie, M parcourt le cercle unité.

$\left|\hat{A}_1(e^{j2\pi f})\right|$ varie alors comme : $\dfrac{\prod \text{distances de M aux zéros}}{\prod \text{distances de M aux pôles}}$

La distance minimale de M aux zéros vaut 0 pour f=0 et -3/8 donc gain minimum pour f=0
La distance minimale de M au pôle vaut 0,4 pour f=1/2 et -1/2 donc gain maximum pour ces fréquences



Solutions

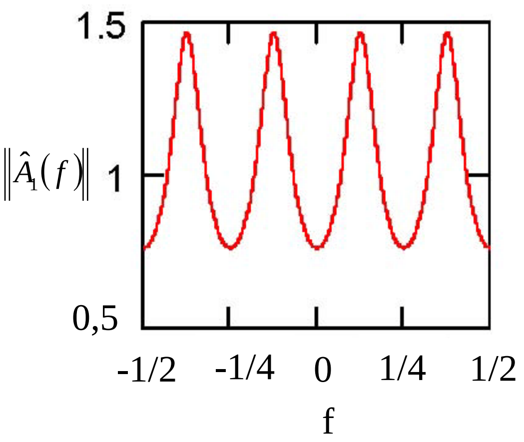
Cas 2

$$A_2(z) = \frac{1}{\left(z-0.75.e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-0.75.e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-0.75.e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z-0.75.e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right)}$$

Quand f varie, M parcourt le cercle unité.

$\left|\hat{A}_2(e^{j2\pi f})\right|$ varie alors comme : $\dfrac{\prod \text{distances de M aux zéros}}{\prod \text{distances de M aux pôles}}$

Les distances minimales de M aux pôles valent 0,25 pour f=1/8, -1/8, 3/8, -3/8 donc gain maximum pour ces fréquences



Solutions

Cas 3

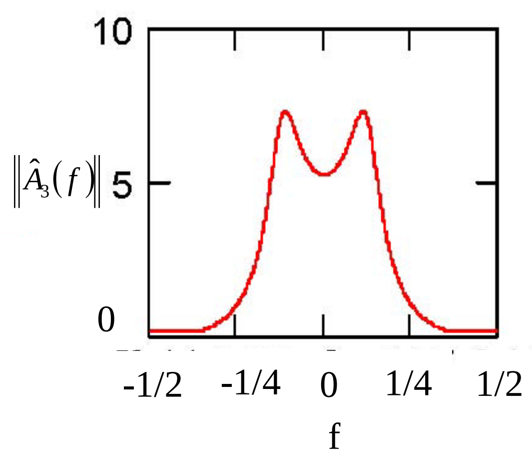
$$A_3(z)=\frac{\left(z-e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z-e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right)}{\left(z-0.75.e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-0.75.e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$

Quand f varie, M parcourt le cercle unité.

$\left|\hat{A}_3(e^{j2\pi f})\right|$ varie alors comme : $\dfrac{\prod \text{distances de M aux zéros}}{\prod \text{distances de M aux pôles}}$

Les distances minimales de M aux zéros valent 0,25 pour f=3/8 et -3/8 donc gain minimum pour ces fréquences

Les distances minimales de M aux pôles valent 0 pour f=1/8 et -1/8 donc gain maximum pour ces fréquences



Rappel : Influence des pôles et des zéros sur la réponse fréquentielle

Soit $H(z) = \dfrac{\sum_{j=0}^{Q} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}$ $(N \geq Q)$, on a aussi : $H(z) = \dfrac{b_0}{a_0} z^{N-Q} \dfrac{\prod_{j=1}^{Q} (z - z_j)}{\prod_{i=1}^{N} (z - p_i)}$

z_j : zéros de $H(z)$ et p_i : pôles de $H(z)$

Etude harmonique de H(z) :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0}{a_0} e^{j\omega(N-Q)} \frac{\prod_{j=1}^{Q} (e^{j\omega} - z_j)}{\prod_{i=1}^{N} (e^{j\omega} - p_i)}$$

Spectre : $\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\dfrac{b_0}{a_0}\right| \dfrac{\prod_{j=1}^{Q} \left|(e^{j\omega} - z_j)\right|}{\prod_{i=1}^{N} \left|(e^{j\omega} - p_i)\right|}$

Interprétation géométrique :

Soit M l'affixe de $e^{j\omega}$.
Soient Z_j les affixes des zéros.
Soient P_j les affixes des pôles.

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{\prod_{j=1}^{Q} \left|(MZ_j)\right|}{\prod_{i=1}^{N} \left|(MP_i)\right|}$$

Quand ω varie, M parcourt le cercle unité.

$\left|H(e^{j\omega})\right|$ varie alors comme : $\dfrac{\prod \text{distances de M aux zéros}}{\prod \text{distances de M aux pôles}}$