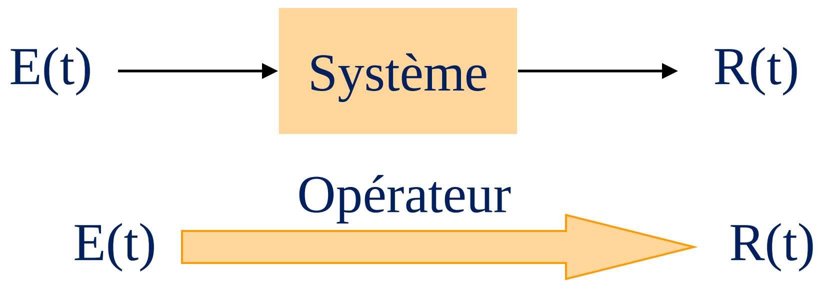
Chapitre 3
Les opérateurs de convolution en physique

1. Systèmes linéaires invariants, par translation

Très souvent, un système physique peut être décrit par un opérateur faisant correspondre à tout signal d'excitation **E** une réponse unique du système **R**.



a) Linéarité :

On dit qu'un système est linéaire si :

$$\forall(\lambda,\mu) \in \Re^2 \qquad \begin{array}{l} E_1 \rightarrow R_1 \\ E_2 \rightarrow R_2 \end{array}$$

$$\boxed{\lambda E_1 + \mu E_2 \rightarrow \lambda R_1 + \mu R_2}$$

b) Invariance par translation :

L'opérateur commute avec les translations.

$$\begin{tikzcd}
E(t) \arrow[r, "\text{Opérateur}"] \arrow[d, "\text{translation}"'] & R(t) \arrow[d, "\text{translation}"] \\
E\,(t - t_0) \arrow[r, "\text{Opérateur}"'] & R\,(t - t_0)
\end{tikzcd}$$

c) Opérateur de convolution :

On dit qu'un système physique est décrit par un opérateur de convolution s'il existe une distribution **T**, caractéristique du système, telle que la réponse **R** à un signal **E** quelconque est donnée, toutes les fois où ce produit a un sens, par :

$$\boxed{R = E \otimes T}$$

La distribution **T** peut alors être déterminée en appliquant une excitation de Dirac au système, la réponse est alors :

$$R = \delta \otimes T = T$$

La distribution T porte le nom de réponse impulsionnelle du système

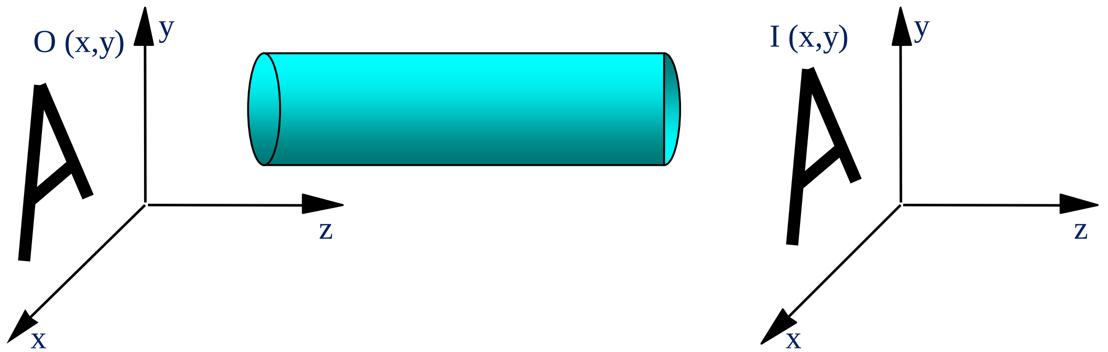
En pratique la difficulté est de construire δ.

d) Causalité :

On dit qu'un système est "causal" si **R1(t)** et **R2(t)** étant les réponses aux signaux **E1(t)** et **E2(t)**, la condition **E1(t) = E2(t)** pour **t <**τ entraîne **R1(t) = R2(t)** pour **t <** τ.

Théorème : Pour qu'un système décrit par un opérateur de convolution soit causal, il faut et il suffit que sa réponse impulsionnelle soit nulle pour les valeurs négatives de la variable. :

Exemple de l'optique :



$$O(x,y) \xrightarrow{\text{opérateur}} I(x,y)$$

O(x,y) et I(x,y) : luminance en chaque point (x,y)

Propriétés de l’opérateur

1. Il est continu,
2. Il est linéaire (les intensités lumineuses s’ajoutent en éclairage incohérent),
3. L’invariance par translation est évidente.

Dans ces conditions :

$$I(x,y) = O(x,y) \underset{\otimes}{\otimes} E(x,y)$$

$\underset{\otimes}{\otimes}$: Convolution à 2 dimensions

E(x,y) porte le nom de profil expérimental. C’est la réponse de l’optique à un point lumineux.

Note : Il ne s’agit pas d’un système causal.

2. Réponse à une excitation exponentielle

Soit un système de réponse impulsionnelle **T(t)** soumis à un signal d'excitation

$$E(t) = e^{2\pi jft}$$ f : fréquence

Sa réponse sera :

$$R(t) = T(t) \otimes e^{2\pi jft}$$

La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable, **R(t)** l'est donc aussi et s'écrit :

$$R(t) = \left\langle T(\tau), e^{2\pi jf(t-\tau)} \right\rangle$$

$$R(t) = \left\langle T(\tau), e^{-2\pi jf\tau} \right\rangle e^{2\pi jft}$$

$$R(t) = \left\langle T(\tau), e^{-2\pi j f \tau} \right\rangle e^{2\pi j f t}$$

C'est une exponentielle de même fréquence et d'amplitude complexe :

$$\hat{T}(f) = \left\langle T(\tau), e^{-2\pi j f \tau} \right\rangle$$

d'où $E(t) = e^{2\pi j f t} \rightarrow \hat{T}(f) e^{2\pi j f t}$

$\hat{T}(f)$ s'appelle transformée de Fourier de la distribution ***T(t)***. C'est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle **T(t)** qui s'appelle fonction de transfert en fréquence et qui répond à la relation bien connue

$$\boxed{\widehat{R}(f) = \widehat{T}(f) . \widehat{E}(f)}$$

ensem