Examen du module Traitement du Signal (S7-SI30)

Durée : 2h. Sans document. Rédiger les parties A et B sur des copies différentes.

Partie A (sur 10)

Un filtre numérique a été dimensionné afin de pouvoir extraire dans un signal numérique x(n) causal une composante sinusoïdale $c_0(n)$ de fréquence donnée f_0.

Le filtre a été calculé sous la forme RII suivante : $H(z) = \dfrac{1 - z^{-2}}{1 - 2\rho\cos(2\pi f_1)z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$ $\quad |z| > \rho$

1. Etudier la stabilité du filtre.
2. Exprimer sous forme analytique les 4 premiers termes de la réponse impulsionnelle h(n) de ce filtre.

On donne : $\rho=0.5$ et $f_1=0.125$ (fréquence réduite).

3. Calculer les pôles et les zéros du filtre. En déduire le spectre de la réponse fréquentielle par le diagramme des pôles et des zéros.
4. Evaluer approximativement à partir du diagramme le gain maximum du spectre. Quelle est la nature du filtrage ? Quelle est l'influence de ρ (supposé réglable) sur le spectre ?

Pour des considérations techniques on donne la préférence à une réalisation de ce filtre sous une forme RIF. Soit H1(z) la transmittance en z d'ordre 4 telle que :

$$H1(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}$$

5. Donner le domaine de convergence de H1(z) et vérifier la stabilité.
6. Ce filtre doit respecter le mieux possible les caractéristiques fréquentielles de H(z). Quelle condition doivent vérifier les paramètres de H1(z) pour respecter la nature du filtre H(z) ?
7. Exprimer la séquence réponse impulsionnelle $\{h_{1n}\}$ de H1(z). Calculer les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 par identification avec les 4 premiers termes de la séquence $\{h_n\}$.
8. Calculer a_4 pour respecter la condition précédente sur les paramètres.
9. Calculer les zéros et les pôles et en déduire l'allure du spectre obtenu.

Comparaison des deux filtres :

Quelles différences existent-t-il sur le plan :

10. des algorithmes de filtrage (les écrire) ?
11. des spectres (normalisés au gain unitaire) ?
12. des déphasages (les exprimer) ?

Partie B (sur 10)

1. Soit s(t) un signal analogique périodique de période P = 10 s dont on désire faire l'analyse spectrale sur la bande [-50Hz , +50 Hz]

1. De quel type est le spectre de fréquence de s(t) : continu, discret, apériodique, périodique ? Justifiez votre réponse.
2. Quelle résolution fréquentielle choisissez-vous pour étudier le spectre de ce signal avec un ordinateur ?
3. Quelle est la durée du signal à traiter ?
4. On choisit de faire l'analyse spectrale avec un algorithme de FFT sur 1024 points. Quelle fréquence d'échantillonnage choisissez-vous ?
5. Doit-on utiliser un filtre antirepliement ? Si oui donner la fréquence de coupure.
6. Doit-on utiliser une fenêtre de troncature ? Si oui donner ses caractéristiques principales.

2. Soit un signal analogique dont on désire faire l'analyse spectrale dans la bande [-25kHz,+25 kHz] avec une résolution fréquentielle $\Delta f < 6$ Hz.

1. Donner les caractéristiques du filtre anti-repliement.
2. Calculer la fréquence d'échantillonnage.
3. Calculer la durée du signal à traiter pour obtenir le spectre.
4. On utilise un algorithme FFT pour faire les calculs. Calculer le nombre de points et discuter de la grandeur d'analyse à modifier. Donner cette nouvelle valeur.

3. Soit un signal discret x(n) dont le spectre d'amplitude en fréquences normalisées est représenté sur la figure 1. On sous-échantillonne ce signal d'un facteur 2, c'est-à-dire qu'on prélève un échantillon sur 2 pour faire un signal y(n) : y(n) = x(2n).

1. Montrer que :

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left(X\left(\frac{f}{2}\right) + X\left(\frac{f}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Conseil : partir du membre de gauche de l'égalité.

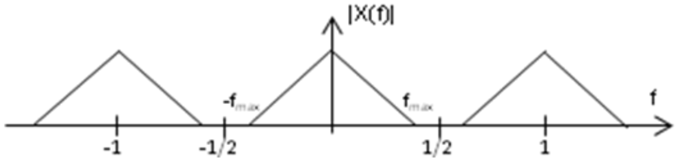

FIG. 1 – Spectre d'amplitude de x(n).

2. Dessiner (de préférence sur la même figure avec des couleurs différentes) les spectres d'amplitude |X(f/2)| et |X(f/2 − 1/2)|. *Attention, prenez votre temps, regardez bien pour plusieurs valeurs successives de* f *quelles sont les valeurs de* |X(f/2)| *et* |X(f/2 − 1/2)|. A quelle condition sur f_{max} le signal sous-échantillonné y(n) porte-t-il la même information que x(n) ? Dessiner |Y (f)| dans le cas limite.

3. On suppose que la condition précédente est vérifiée et on cherche à reconstruire x à partir de y. La première étape de la reconstruction est de mettre y au même rythme que x, en intercalant un zéro entre deux échantillons successifs de y. On obtient le signal w :

$$w(n) = \begin{cases} y\left(\frac{n}{2}\right) & si\ n\ pair \\ 0 & si\ n\ impair \end{cases}$$

Montrer que W(f) = Y (2f). Dessiner |W(f)| dans le cas limite évoqué à la question *2*. Quel est le deuxième traitement à appliquer à w pour retrouver x ?