Limites de l’analyse de Fourier – Introduction aux ondelettes

1. Ondelettes Historique

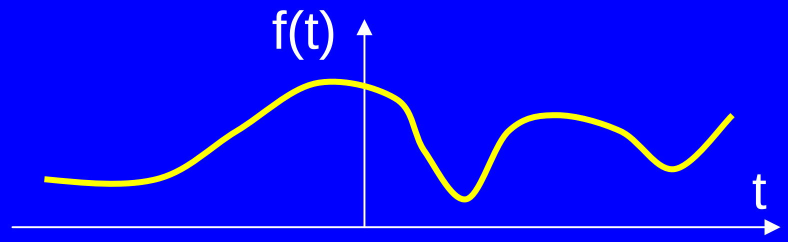
- 1807 : Fourier – fonctions sinusoïdales
- 1909 : Haar – 1ère ondelettes othogonale – duale de Fourier
- 1946 : D. Gabor
- 1960 – 1980 : Calderon, Coifmann, Calrson, Weiss …
- 1977 : Esteban et Galland – invention des QMF
- 1983 : Morlet invente la première application des ondelettes
- 1986 : Y. Meyer découvre la première ondelette orthogonale
- 1987 : Battle et Lemarié construisent une base d'ondelettes à partir de splines
- 1989 : S. Mallat publie un algorithme rapide
- 1989 : I. Daubechies propose des ondelettes orthogonales à support compact
- 1990 : les ondelettes bi-orthogonales sont introduites
- 1992 : S. Mallat propose une analyse multi-échelle des signaux

- **1989 – 1992 : ELF, MATRA, BELL s'intéressent aux ondelettes pour la compression de données.**

2. Rappels sur l'analyse fréquentielle

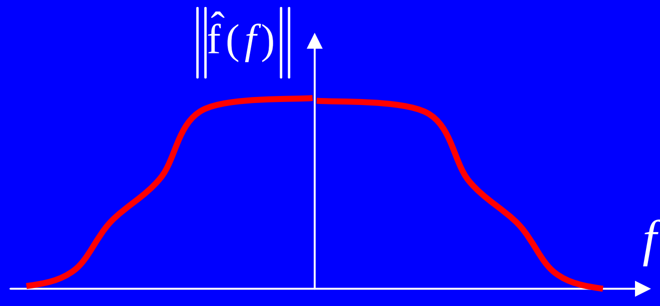
Classiquement 2 espaces de représentation d'un signal f(t) ou f(x)

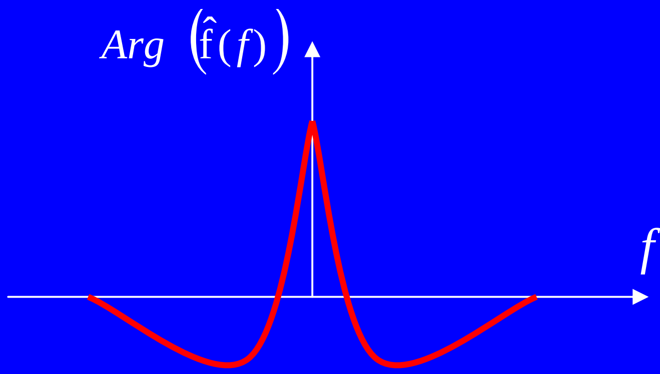
a. en fonction du temps ou de l'espace



b. en fonction de la fréquence

f(t) est décrit par une somme de fonctions sinus et cosinus





La transformée de Fourier permet le passage de l’espace temporel à l’espace fréquentiel

Si f(t) est apériodique

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{f}}(f) = \langle \mathrm{f}, e^{2\pi jft} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(t)\, e^{-2\pi jft}\, dt \\ \mathrm{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathrm{f}}(f)\, e^{2\pi jft}\, df \end{cases}$$

Si f(t) est périodique de période T=1

$$\begin{cases} \mathrm{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \mathrm{f}_1, e^{2\pi jftn} \rangle e^{2\pi jfnt}, \ n \in Z \\ \langle \mathrm{f}_1, e^{2\pi jfnt} \rangle = \int_{a}^{a+1} \mathrm{f}(t)\, e^{-2\pi jfnt}\, dt = c_n \end{cases}$$

Si $\mathrm{f}(t) \in L_{2\,loc}$ $\int_{a}^{a+1} |\mathrm{f}(t)|^2\, dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$

Remarques sur l'analyse de Fourier

1. Dans le cas périodique

$$\left\| f(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi jftn} \right\| \text{minimum} \quad \text{pour N donné}$$

- L'échantillonnage à l'aide de la série de Fourier est optimal
- Ceci n'est vrai que pour les signaux périodiques, dans tous les autres cas la transformée en ondelettes sera meilleure
- Attention à l'ordre de coefficients c_n
- Application pratique en compression de données sous la forme DCT

2. La taille de $\hat{f}$ pour f grand est liée à la régularité de f

$$\hat{f}'(f) = 2\pi jf \,.\, \hat{f}(f)$$

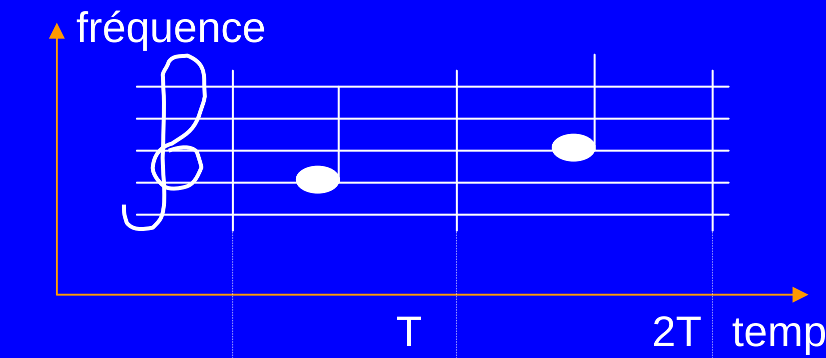
Une discontinuité isolée perturbe grandement $\hat{f}(f)$

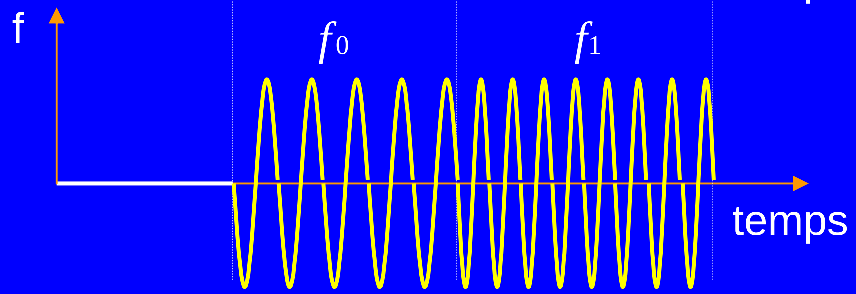
3. Limites de l'analyse de Fourier

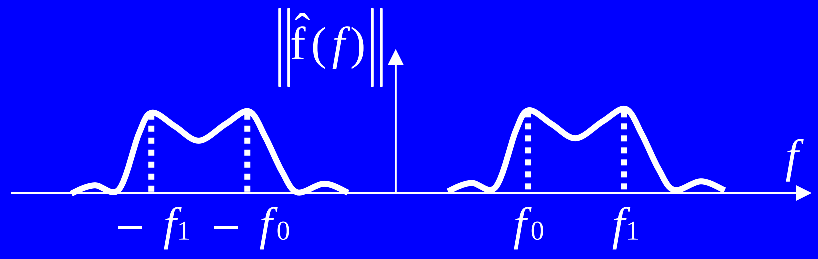
Elles sont dues à l'emploi de fonctions sinus-cosinus qui oscillent de :

$$-\infty \ \ \grave{a} \ +\infty$$

Exemple de la musique







Sur ce signal les informations intéressantes sont :
-de 0 à T présence d'une sinusoïde de fréquence f_0 d'amplitude A_0 et de phase P_0
-de 0 à 2T présence d'une sinusoïde de fréquence f_1 d'amplitude A_1 et de phase P_1
-Ailleurs : le silence, le signal est nul

L'analyse de Fourier ne permet pas de retrouver facilement ces informations

-Le spectre est diffus A_i, f_i, P_i ??
-L'ordre des notes est perdu

$$-f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(f) e^{2\pi j f t} df \equiv 0 \quad \forall\, t \in \left]-\infty, T\right[\cup \left]2T, \infty\right[$$

- «Pour réaliser ceci on a besoin de sinusoïdes à des fréquences qui n'existent pas dans la portion de signal [0,2T]»
- L'interprétation de $\hat{f}$ est donc faussée par la portion de signal qui est nulle
- Ce phénomène est d'autant plus marqué que le signal est bref

Solution : « Il faudrait une transformée de Fourier localisée qui tienne compte de la position temporelle des événements.

3. Représentation temps-fréquence

Elle est obtenue à l'aide d'une fonction fenêtre que l'on fait glisser le long de l'axe des temps.

$g_t = g(t-u)$: gt est concentrée autour de t

Dans ce cas l'analyse devient

$$\mathrm{f}_{\mathrm{g}}(f,u)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\,\mathrm{f}(t)\,e^{-2\pi jft}\,dt \qquad \mathrm{f}(t)\in L_2(R)$$

➡ Mesure locale autour de u de l'amplitude de la composante à la fréquence f

g est généralement une fonction paire et d'énergie concentrée dans les basses fréquences

Supposons : $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\,dt=1$

Soit $\mathrm{g}_{f_0,u_0}(t)=g(t-u_0)\,e^{2\pi jf_0 t}$

Alors $\mathrm{f}_{\mathrm{g}}(f,u)=\left\langle \mathrm{f}(t),\mathrm{g}_{f,u}(t)\right\rangle$

$$\hat{\mathrm{g}}_{f_0,u_0}(f)=\hat{g}(f-f_0)\,e^{-2\pi jfu_0}$$

Le produit scalaire se conserve dans $L_2(R)$

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$ (Parseval)

$$f_g(f_0, u_0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{g}_{f_0,u_0}(t)\,dt}_{\text{Localisation temporelle autour de } u_0} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(f)\,\overline{\hat{g}}_{f_0,u_0}(f)\,df}_{\text{Localisation fréquentielle autour de } f_0}$$

Quelle est la qualité de cette double localisation

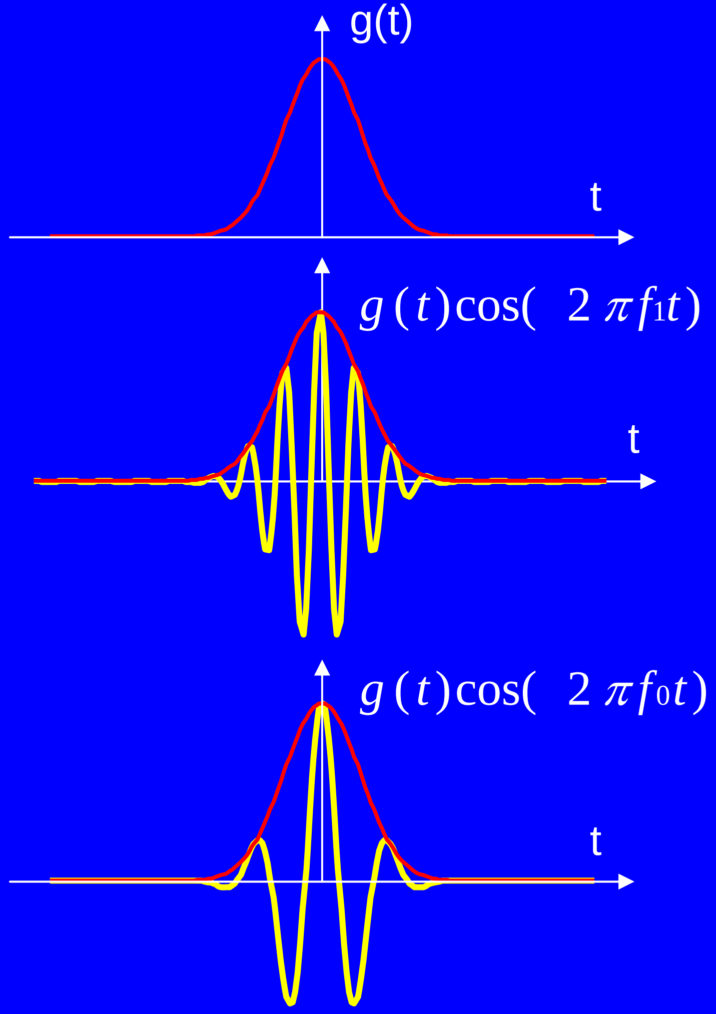
Étalement de g et $\hat{g}$

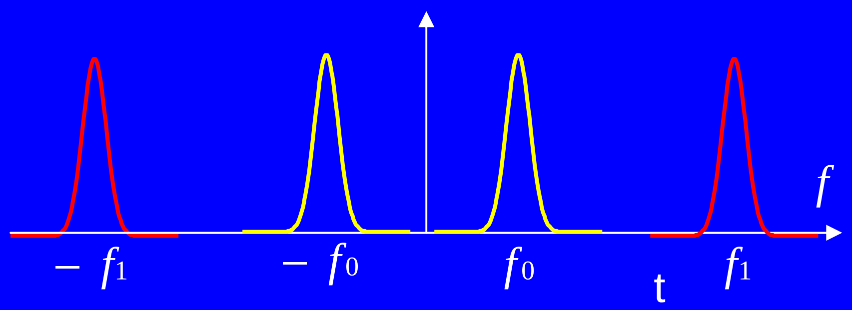
Principe d'incertitude

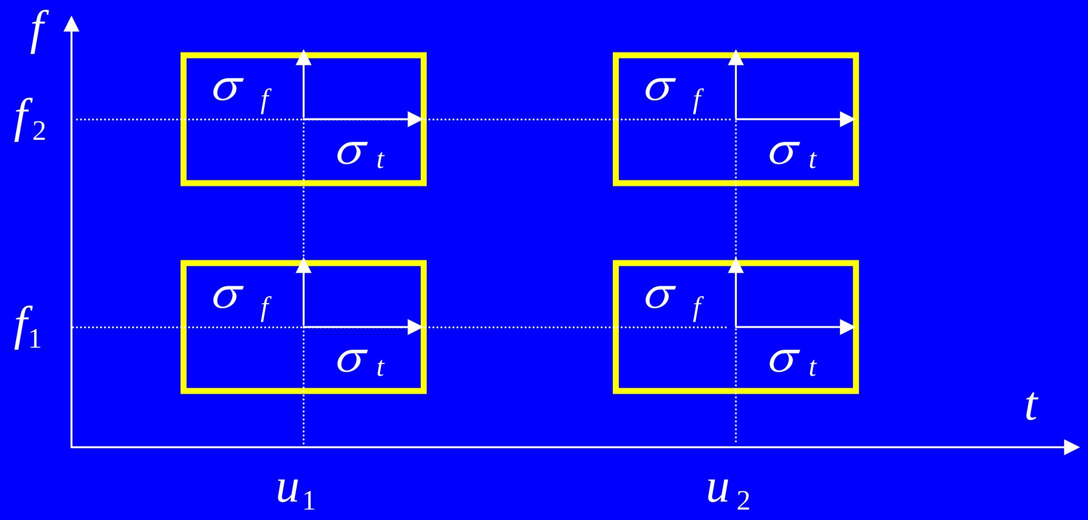
$$\sigma_u^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\,dt} \qquad \sigma_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |\hat{g}(f)|^2\,df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(f)|^2\,df}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_f . \sigma_t \geq \frac{1}{4.\pi}$$

Pour g : gaussienne $\quad \sigma_f . \sigma_t = \dfrac{1}{4.\pi}$ $\Rightarrow$ Filtrage de Gabor (1946)



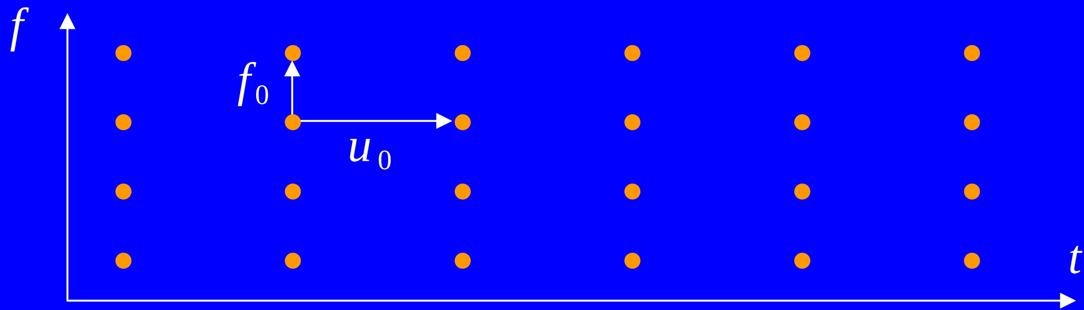




La fonction f(t) peut être reconstruite à partir de : $\mathrm{f}_g(f,u)$

$$\mathrm{f}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}_g(f,u)\,g(u-t)\,e^{2\pi ft}\,df\,du$$

Cette analyse temps-fréquence est sans doute redondante. On peut tenter de réduire la masse de calcul en échantillonnant l'espace fréquentiel et temporel.



u_0 : Période d'échantillonnage temporelle
f_0 : Période d'échantillonnage fréquentielle

On définit alors la version discrète :

$$\mathrm{f}_{\mathrm{gd}}(m,n)=\mathrm{f}_{\mathrm{g}}(mf_0,nu_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-nu_0)\,\mathrm{f}(t)\,e^{-2\pi jmf_0 t}dt$$

Si $\mathrm{f}(t)\in L_2(R)$

$$L_2(R)\rightarrow L_2(Z^2)$$

Question : $L_2(Z^2)\xrightarrow{??????} L_2(R)$

Réponse : I. Daubechies (1989)

-il faut choisir correctement g
-Il faut $f_0.u_0<1$

Si $f_0.u_0<1 \rightarrow$ redondance
Si $f_0.u_0\geq 1 \rightarrow$ délocalisation

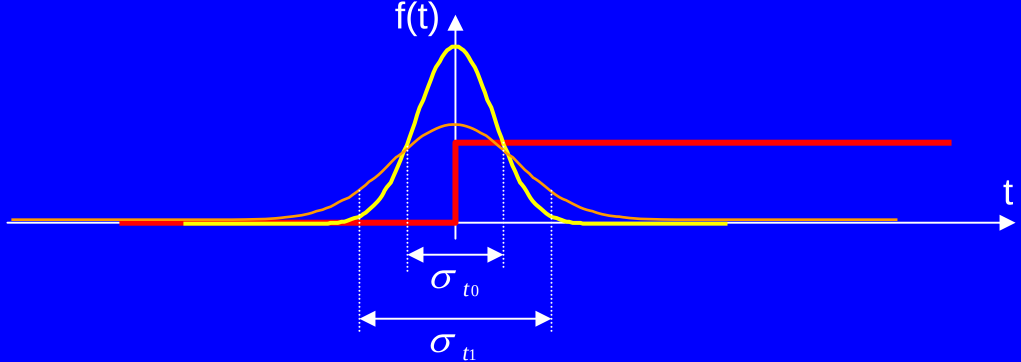
σ_f ou $\sigma_t \rightarrow \infty$

Limites des fenêtres de Fourier

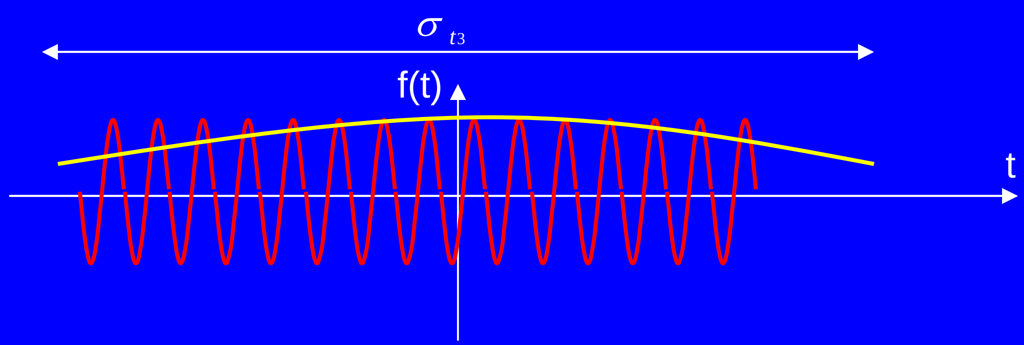
1. Redondance ou délocalisation …
2. g fixé ⇨ σ_f *et* σ_t *fixés*

Si un signal a des singularités ou des fréquences inférieures *à* σ_t et σ_f

⇨ Impossible de l'analyser correctement



σ_t doit être petit donc σ_f grand



σ_t doit être grand donc σ_f petit

Solution : rendre σ_t σ_f Variables ⇨ ONDELETTES