

TRAITEMENT DU SIGNAL AVANCE

Limites de l'analyse de Fourier

Introduction aux ondelettes

1.Problématique¹

Le traitement du signal consiste à dégager des "informations" contenues dans un signal qui se déroule le plus souvent au cours du temps. Ce signal s est décrit par une fonction $s(t)$ du temps t et peut avoir des origines très diverses (son, musique, parole, ECG, EEG, ETC...)

Lorsqu'on observe l'évolution d'un signal au cours du temps, on repère bien son commencement, sa fin et la durée de ses éléments caractéristiques, ainsi que des discontinuités, des changements de rythme, etc... En revanche cette représentation temporelle renseigne peu sur les périodicités, donc sur les fréquences présentes dans le signal.

L'outil mathématique de prédilection pour étudier la représentation fréquentielle d'un signal est la transformée de Fourier. Elle aboutit à la construction d'un spectre qui est la représentation de l'amplitude et de la phase des différentes sinusoïdes présentes dans le signal en fonction de leur fréquence. Cette méthode s'est révélée très fructueuse aussi bien d'un point de vue théorique que numérique et tout particulièrement depuis que l'on a mis au point pour calculer, un algorithme extrêmement économique, la transformée de Fourier rapide (TFR, FFT).

1 : Y. MEYER, S. JAFFARD, O. RIOUL, « L'analyse par ondelettes », « Pour la science, pp 28-37, 1987

Cependant cette méthode ne permet pas d'analyser, correctement tous les types de signaux, comme le montre l'exemple suivant tiré de la musique. Si nous jouons une note basse, puis une note plus haute en fréquence, d'un instant initial O à un instant final T , le spectre de signal est très diffus et il est très difficile d'y discerner les deux fréquences émises. L'ordre dans lequel sont jouées les notes n'apparaît pas de façon claire dans la transformée de Fourier.

Un autre inconvénient est que l'intégrale de Fourier décompose le signal sur des fonctions sinusoïdales qui oscillent indéfiniment dans le temps. Lorsqu'on additionne ces sinusoïdes leurs effets s'annulent dans les régions de l'axe du temps où le signal est nul. Ce phénomène parfaitement correct et obligatoire d'un point de vue purement mathématique devient une difficulté dans la pratique. La notion de signal nul qui s'étend de T à l'infini est peu informative tandis qu'elle perturbe grandement la transformée de Fourier des portions intéressantes du signal. En d'autres termes l'inconvénient de la transformée de Fourier est que plus un signal est court dans le temps plus il contient de composantes sinusoïdales d'amplitudes significatives. Inversement un signal sinusoïdal infini correspond à une seule fréquence.

Un procédé plus efficace pour analyser un signal, par exemple musical consiste à décomposer le signal en des fonctions limitées dans le temps, afin d'en analyser des fragments indépendamment. Une bonne représentation en fréquence doit tenir compte également de la durée des notes émises d'où l'idée de représenter le signal à la fois en fonction du temps et de la fréquence.

Une représentation en temps est une description directe du signal, alors qu'une représentation en fréquence décrit le signal par sa transformée de Fourier, c'est à dire comme superposition de sinusoïdes. Ces sinusoïdes qui vibrent sans amortissement sur tout l'axe des temps correspondent strictement aux fréquences du signal. Nous pouvons également décomposer le signal comme une somme de fonctions qui vibrent comme des sinusoïdes sur une certaine plage de temps et qui s'amortissent très fortement à l'extérieur de cette plage.

Ces fonctions vibrent à une fréquence qui a une signification locale. La décomposition du signal à partir de ces fonctions s'appelle l'analyse temps fréquence. On définit une fréquence locale selon les coefficients du signal obtenu à partir de ces fonctions. Dans le cas des deux notes jouées successivement, une représentation temps fréquence s'apparente à celle d'une partition musicale où l'on indique dans la direction verticale la hauteur de la note et dans la direction horizontale le temps.

La représentation temps fréquence met en jeu deux opérations réciproques : l'analyse et la synthèse. Pour effectuer l'analyse du signal, on le décompose en somme de constituants simples et universels, que l'on appelle fonctions élémentaires. Cette représentation fait intervenir deux paramètres a et b , où a est lié à la fréquence et b au temps ou à la position.

Les coefficients $C_{a,b}$ que l'on affecte à chaque fonction élémentaire $\psi_{a,b}$ pour décomposer un signal quelconque, donnent une information directe sur les propriétés temporelles ou spatiales et fréquentielles du signal. Les coefficients $C_{a,b}$ sont fournis par :

$$C_{a,b} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{a,b}(t) dt$$

Dans les années 1940, Gabor découvre la première forme de représentation temps fréquence. Il obtient une analyse temporelle en découpant arbitrairement le signal en plages de longueur limitée. Chaque plage, centrée autour du paramètre b de localisation en temps, est alors étudié séparément des autres par l'analyse traditionnelle de Fourier, ce qui revient à décomposer le signal sur des fonctions élémentaires $\psi_{a,b}$ qui dérivent toutes d'une même fonction "Fonction Fenêtre" $\psi(t)$ par translation en temps (paramètre b) et modulation en temps.

Par exemple : $\psi_{a,b}(t) = \cos(2\pi at) \psi(t-b)$

Le principal inconvénient de cette décomposition est que la longueur de la plage est fixée une fois pour toutes et que l'on ne peut pas analyser simultanément des phénomènes dont les échelles de temps sont différentes.

C'est pour tourner cet inconvénient que le physicien J. Morlet proposa pour la première fois en 1983 une ondelette qui d'ailleurs conserva son nom "L'Ondelette de Morlet". La différence fondamentale avec les fonctions de Gabor est que la translation et la modulation le long de l'axe des temps est remplacé par une dilatation ou contraction (paramètre a).

Il suffit donc de jouer à "l'accordéon" avec l'ondelette analysante ψ pour obtenir la famille des ondelettes

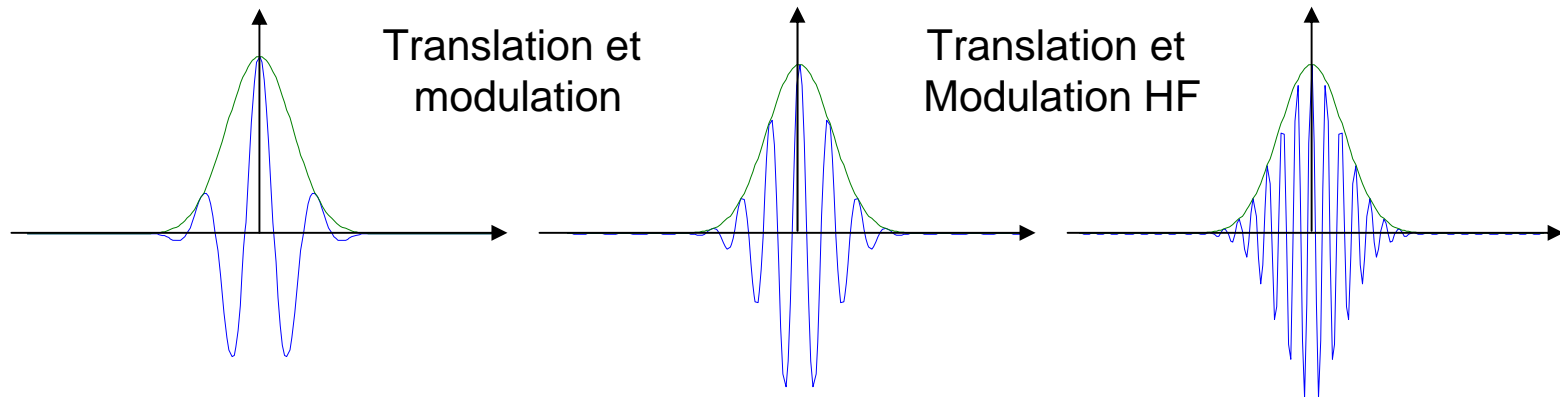
$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Pendant un temps délimité, d'autant plus court que a est petit, l'ondelette $\psi_{a,b}$ oscille à une fréquence $1/a$. Lorsque a est petit, l'intervalle sur lequel l'ondelette $\psi_{a,b}$ n'est pas nulle se contracte autour du point b . L'ondelette effectue ainsi un "zooming" sur n'importe quel phénomène intéressant du signal qui a eu lieu à une échelle petite au voisinage du point considéré.

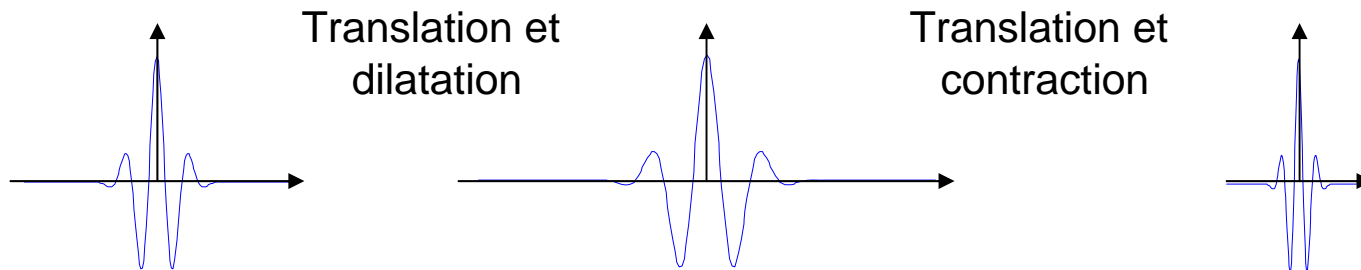
La transformée en ondelettes est une fonction $S(a,b)$ qui associe aux paramètres a et b la valeur du coefficient $C_{a,b}$ de l'ondelette $\psi_{a,b}$ dans la décomposition du signal. La variable b est le paramètre de localisation temporelle, tandis que $1/a$ est le paramètre de fréquence.

L'analyse en ondelettes est supérieure aux fenêtres de Fourier (Gabor) en ce sens qu'elle débouche sur une analyse multi-échelle du Signal (contraction dilatation). Dans les zones où le signal est très régulier les coefficients d'ondelettes $C(a,b)$ seront faibles en revanche les portions de signal perturbées induiront des coefficients $C_{a,b}$ non négligeables pour $1/a$ de l'ordre de grandeur de la fréquence du signal au point b considéré.

L'analyse de Gabor



L'analyse en ondelettes

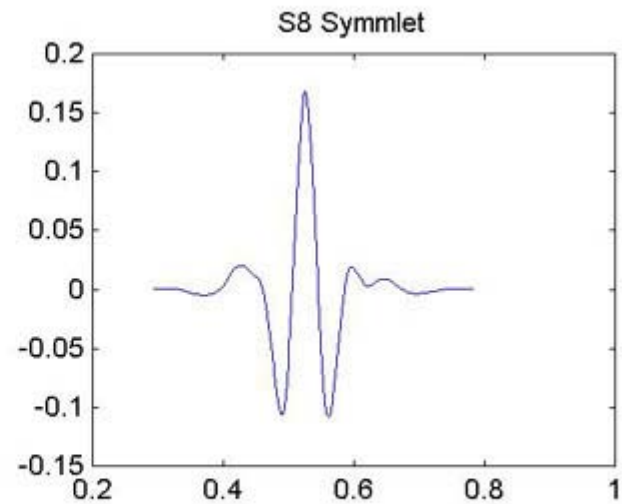
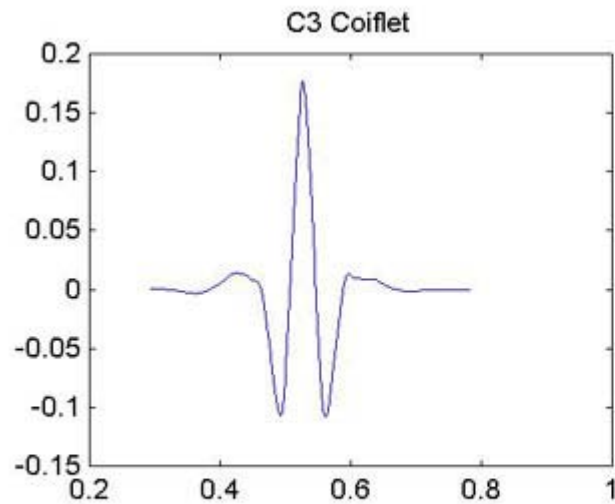
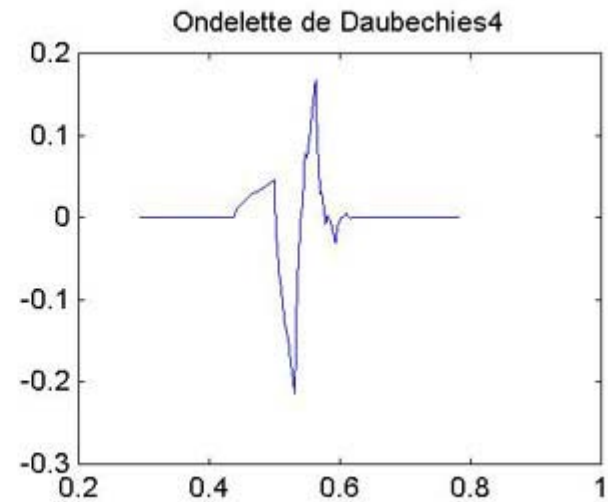
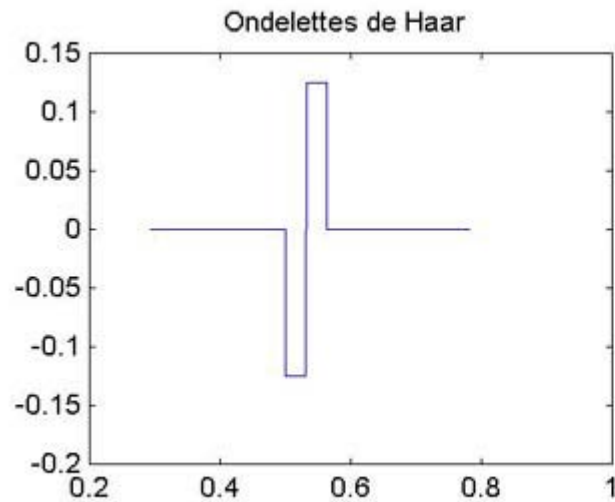


En fait la transformée en ondelette est une sorte de microscope mathématique dont le grossissement est réglé par le paramètre a , la position par le paramètre b , l'optique étant la fonction mère. Ainsi on se déplace sur le signal (b) et on le regarde à divers grossissement (a) les caractéristiques du signal.

On reconstruit le signal à partir des coefficients d'ondelettes $C(a,b)$ en effectuant la somme en continu des termes $C_{a,b} \psi_{a,b}(t) / a^2$ pour toutes les valeurs de paramètres a et b de fréquence et de temps. Il faut donc disposer de la collection complète des ondelettes $\psi_{a,b}$. Les ondelettes fines et pointues permettent de reconstituer les détails fins et compliqués tandis que les ondelettes larges et plates contribuent à ses traits grossiers. Chaque ondelette apporte une retouche infinitésimale supplémentaire au signal. C'est un des avantages de la méthode de s'affiner au fur et à mesure de l'analyse contrairement à l'analyse "à la Fourier" où il faut faire intervenir toutes les composantes à la fois.

La synthèse ainsi réalisée est très robuste, et suffit de connaître la valeur des coefficients d'ondelettes avec une précision moyenne pour reconstruire le signal avec une bonne précision. Malheureusement cette méthode utilise beaucoup trop de coefficients d'ondelettes. On peut pallier cet inconvénient et reconstituer entièrement le signal en se restreignant aux coefficients correspondant à un réseau de points convenablement choisis dans le plan temps fréquence. Ingrid Daubechies a inventé un algorithme présentant tous ces avantages, en utilisant deux nombres positifs α et β . Morlet utilise $\alpha = 0.25$ et $\beta = 1$. On se restreint tout d'abord aux ondelettes de fréquences $2^{-\alpha j}$ ou $j=0, \pm 1; \pm 2 \dots$ si $\alpha = 1/4$ ces fréquences se répartissent naturellement en quart d'octave puisqu'on passe de j à $j+1$ en augmentant la fréquence d'une fraction α d'octave.

Exemple d'ondelettes



Si l'ondelette analysante ψ est localisée sur l'intervalle $[-1,1]$ par exemple, les ondelettes sont localisées sur des intervalles de longueur $2 \times 2^{-\alpha j}$, naturellement on les dispose sur l'axe des fréquences de la façon la plus régulière et économique possible. On se limite donc aux intervalles $[\beta k 2^{-\alpha j}, \beta (k+1) 2^{-\alpha j}]$, où k est un entier positif ou négatif, l'ondelette correspondante $\psi_{j,k}(t)$ étant égale à $2^{\alpha j} \psi(2^{\alpha j} t - \beta k)$ où ψ est l'ondelette analysante. Chaque coefficient d'ondelette $C_{j,k}$ est la encore égale à l'intégrale du produit du signal par l'ondelette $\psi_{j,k}$.

Si le choix de ψ est judicieux on arrive à décomposer le signal en une série au lieu d'une intégrale. Cette série d'ondelettes est une série double où l'indice j est lié à la fréquence et l'indice k à la localisation dans le temps. Y. Meyer a découvert une base orthogonale d'ondelettes qui permet de décomposer un signal en une somme de termes indépendants réalisant du même coup une compression maximale d'information. Dans cette base, les ondelettes $\psi_{j,k}$ dérivent de ψ par translation de pas 1, et leurs fréquences sont réparties en octaves, c'est à dire

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad j \text{ et } k \in \mathbb{N} \quad \alpha \text{ et } \beta = 1$$

Les coefficients d'ondelettes donnent des renseignements très divers sur le signal considéré. Ils renseignent sur la régularité d'un signal, autrement dit le caractère plus ou moins lisse de la courbe associée. Plus la fonction est régulière, plus les coefficients d'ondelettes de hautes fréquence seront faibles. On arrive ainsi à "échantillonner" la fonction en la comparant à des familles de fonction ayant des propriétés bien connues. Par exemple la famille des fonctions continues non dérivables permet d'étudier les fonctions peu régulières, notamment celles qui sont de type fractale. Par exemple la famille des fonctions hölderiennes

$$|f(x) - f(y)| \leq c |x - y|^\alpha \quad C: \text{constante}, \alpha \in [0, 1]$$

Une fonction qui vérifie l'inégalité ci-dessus est de classe C^α , elle est d'autant plus régulière que α est proche de 1. Si $\alpha = 1$ elle est presque dérivable. On reconnaît qu'une fonction est hölderienne d'exposant α si ses coefficients d'ondelettes vérifient des conditions caractéristiques. Cette propriété dépasse largement le cadre des fonctions höldériennes. On peut ainsi lire sur la taille des coefficients d'ondelettes l'appartenance à certains espaces utilisés en analyse comme $L^2(\mathbb{R})$ ou l'espace de Sobolev $H^m(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont les m premières dérivées appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$).

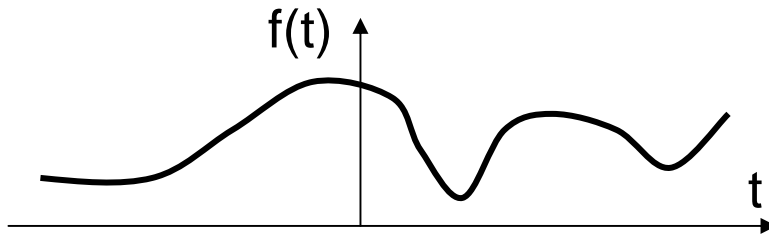
De plus, les coefficients d'ondelettes renseignant sur le comportement local d'une fonction, on pourra déterminer si celle-ci appartient localement à un tel espace.

Toutes ces propriétés des ondelettes sont mises en oeuvre dans différentes branches de la physique et sont très utiles en vision, accoustique, parole, musique, sismique etc...

2. Plus précisément ...

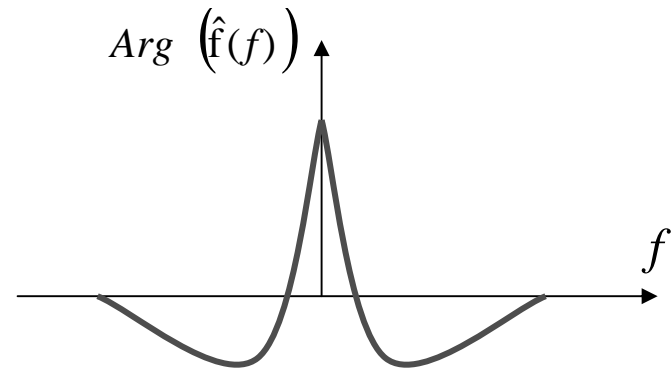
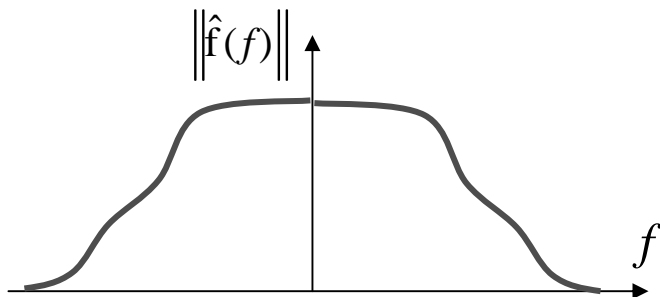
Classiquement 2 espaces de représentation d'un signal $f(t)$ ou $f(x)$

a. en fonction du temps ou de l'espace



b. en fonction de la fréquence

$f(t)$ est décrit par une somme de fonctions sinus et cosinus



La transformée de Fourier permet le passage de l'espace temporel à l'espace fréquentiel

Si $f(t)$ est apériodique

$$\begin{cases} \hat{f}(f) = \langle f, e^{2\pi jft} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi jft} dt \\ f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(f) e^{2\pi jft} df \end{cases}$$

Si $f(t)$ est périodique de période $T=1$

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f_1, e^{2\pi jfnt} \rangle e^{2\pi jfnt}, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \langle f_1, e^{2\pi jfnt} \rangle = \int_a^{a+1} f(t) e^{-2\pi jfnt} dt = c_n \end{cases}$$

$$\text{Si } f(t) \in L_{2\text{loc}} \quad \int_a^{a+1} |f(t)|^2 dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$$

Remarques sur l'analyse de Fourier

1. Dans le cas périodique

$$\left\| f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi j f t n} \right\| \text{minimum pour } N \text{ donné}$$

- L'échantillonnage à l'aide de la série de Fourier est optimal
- Ceci n'est vrai que pour les signaux périodiques, dans tous les autres cas la transformée en ondelettes sera meilleure
- Attention à l'ordre de coefficients c_n
- Application pratique en compression de données sous la forme DCT

2. La taille de \hat{f} pour f grand est liée à la régularité de f

$$\hat{f}'(f) = 2\pi j f \cdot \hat{f}(f)$$

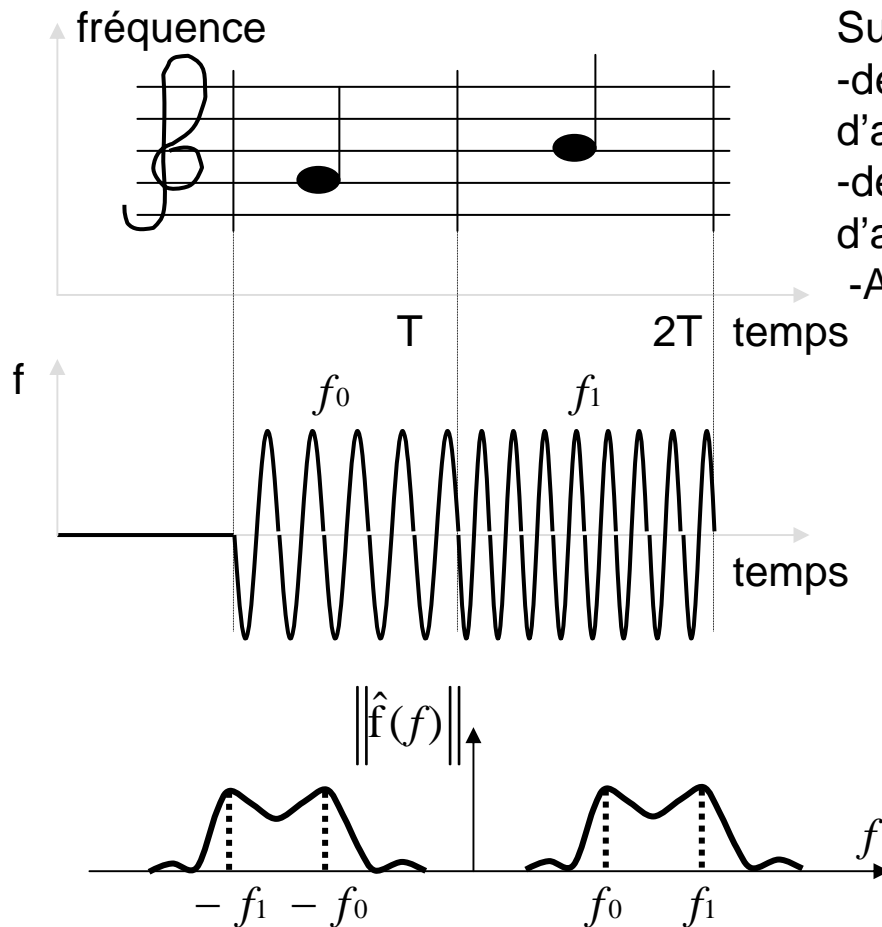
Une discontinuité isolée perturbe grandement $\hat{f}(f)$

3. Limites de l'analyse de Fourier

Elles sont dues à l'emploi de fonctions sinus-cosinus qui oscillent de :

$$-\infty \text{ à } +\infty$$

Exemple de la musique



Sur ce signal les informations intéressantes sont :

- de 0 à T présence d'une sinusoïde de fréquence f_0 d'amplitude A_0 et de phase P_0
- de 0 à $2T$ présence d'une sinusoïde de fréquence f_1 d'amplitude A_1 et de phase P_1
- Ailleurs : le silence, le signal est nul

L'analyse de Fourier ne permet pas de retrouver facilement ces informations

- Le spectre est diffus A_i, f_i, P_i ??
- L'ordre des notes est perdu

$$-f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(f) e^{2\pi jft} df \equiv 0 \quad \forall t \in]-\infty, T[\cup]2T, \infty[$$

- «Pour réaliser ceci on a besoin de sinusoïdes à des fréquences qui n'existent pas dans la portion de signal $[0, 2T]$ »
- L'interprétation de \hat{f} est donc faussée par la portion de signal qui est nulle
- Ce phénomène est d'autant plus marqué que le signal est bref

Solution : « Il faudrait une transformée de Fourier localisée qui tienne compte de la position temporelle des événements.

3. Représentation temps-fréquence

Elle est obtenue à l'aide d'une fonction fenêtre que l'on fait glisser le long de l'axe des temps.

$$g_t = g(t - u) : g_t \text{ est concentrée autour de } t$$

Dans ce cas l'analyse devient

$$f_g(f, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u) f(t) e^{-2\pi j f t} dt \quad f(t) \in L_2(\mathbb{R})$$

⇒ Mesure locale autour de u de l'amplitude de la composante à la fréquence f

g est généralement une fonction paire et d'énergie concentrée dans les basses fréquences

$$\text{Supposons : } \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1$$

$$\text{Soit } g_{f_0, u_0}(t) = g(t - u_0) e^{2\pi j f_0 t}$$

$$\text{Alors } f_g(f, u) = \langle f(t), g_{f, u}(t) \rangle$$

$$\hat{g}_{f_0, u_0}(f) = \hat{g}(f - f_0) e^{-2\pi j f u_0}$$

Le produit scalaire se conserve dans $L_2(\mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \quad (\text{Parseval})$$

$$f_g(f_0, u_0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g}_{f_0, u_0}(t) dt}_{\text{Localisation temporelle autour de } u_0} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(f) \overline{\hat{g}}_{f_0, u_0}(f) df}_{\text{Localisation fréquentielle autour de } f_0}$$

Quelle est la qualité de cette double localisation

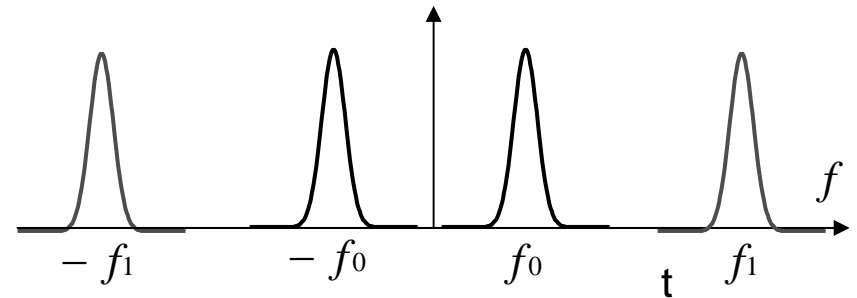
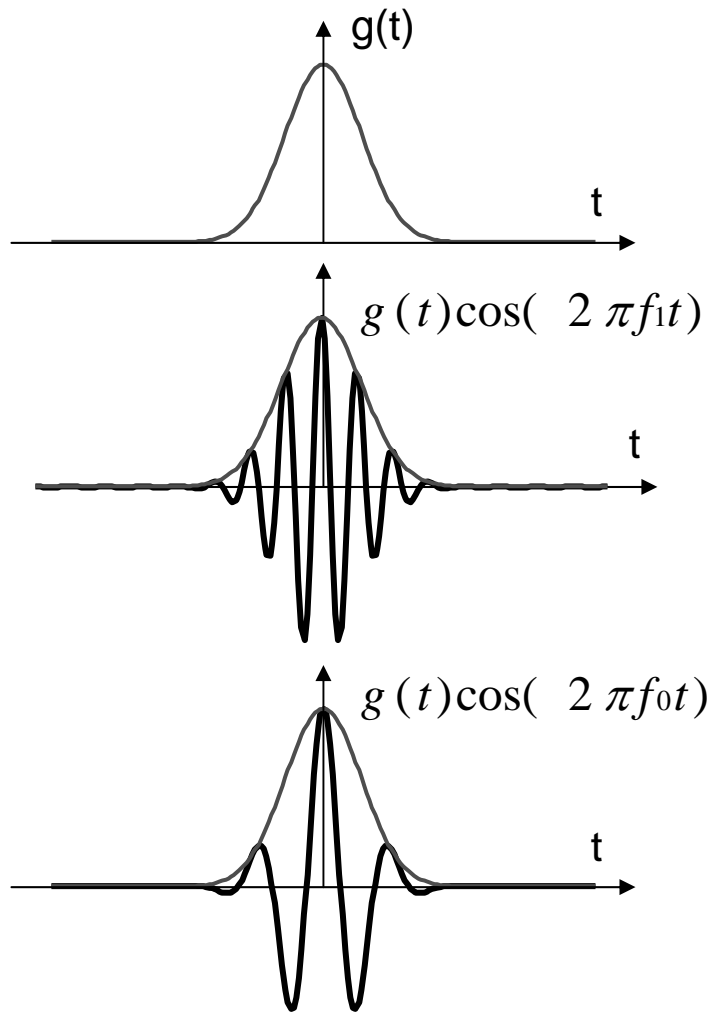
Étalement de g et \hat{g}

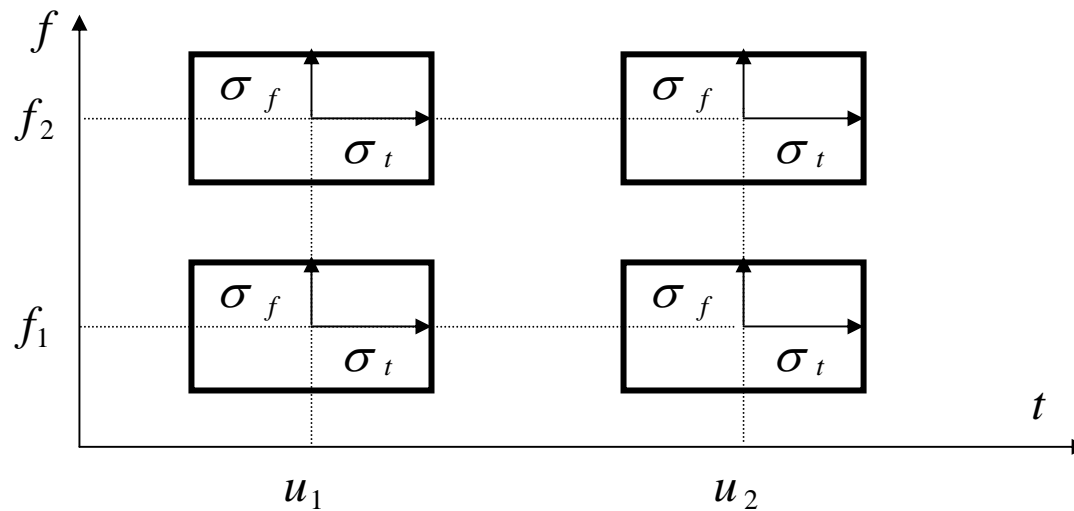
Principe d'incertitude

$$\sigma_u^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt} \quad \sigma_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |\hat{g}(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(f)|^2 df}$$

$$\Rightarrow \sigma_f \cdot \sigma_t \geq \frac{1}{4 \cdot \pi}$$

Pour g : gaussienne $\sigma_f \cdot \sigma_t = \frac{1}{4 \cdot \pi} \Rightarrow$ Filtrage de Gabor (1946)

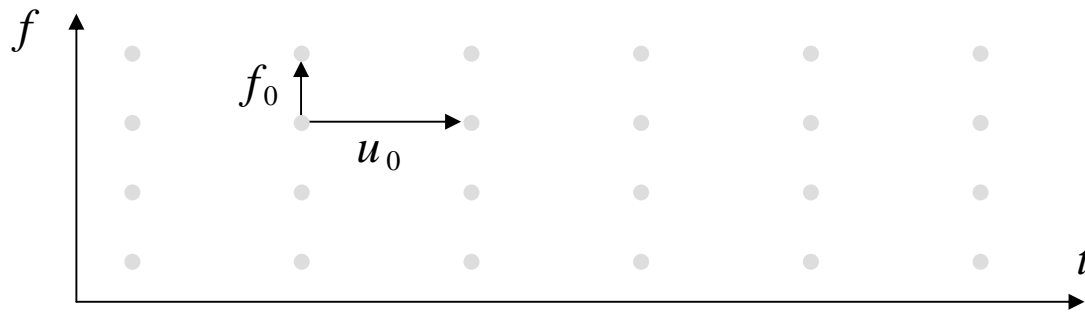




La fonction $f(t)$ peut être reconstruite à partir de : $f_g(f, u)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_g(f, u) g(u - t) e^{2\pi f t} df du$$

Cette analyse temps-fréquence est sans doute redondante. On peut tenter de réduire la masse de calcul en échantillonnant l'espace fréquentiel et temporel.



u_0 : Période d'échantillonnage temporelle
 f_0 : Période d'échantillonnage fréquentielle

On définit alors la version discrète :

$$f_{gd}(m, n) = f_g(mf_0, nu_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - nu_0) f(t) e^{-2\pi jmf_0 t} dt$$

Si $f(t) \in L_2(R)$

$$L_2(R) \rightarrow L_2(Z^2)$$

Question : $L_2(Z^2) \xrightarrow{?????} L_2(R)$

Réponse : I. Daubechies (1989)

- il faut choisir correctement g
- Il faut $f_0 \cdot u_0 < 1$

Si $f_0 \cdot u_0 < 1 \rightarrow$ redondance

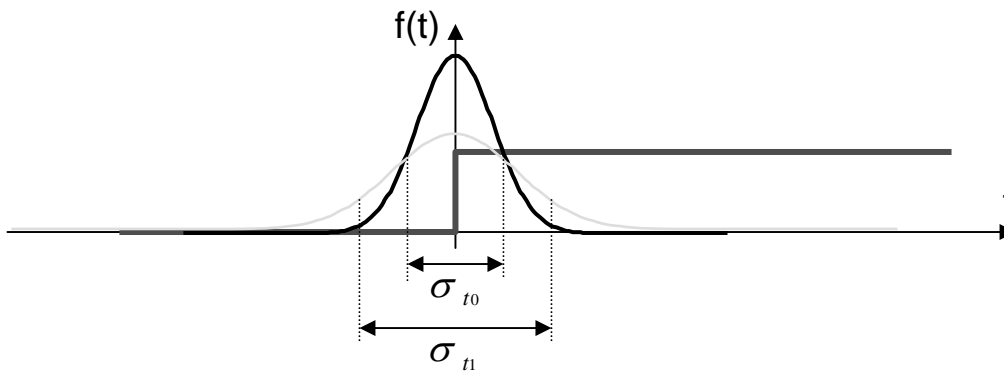
Si $f_0 \cdot u_0 \geq 1 \rightarrow$ délocalisation

Limites des fenêtres de Fourier

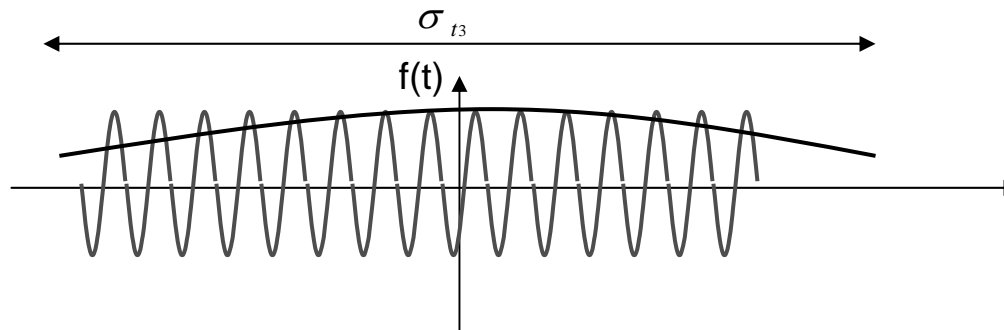
1. Redondance ou délocalisation ...
2. g fixé $\Rightarrow \sigma_f$ et σ_t fixés

Si un signal a des singularités ou des fréquences inférieures
à σ_t et σ_f

\Rightarrow Impossible de l'analyser correctement



σ_t doit être petit donc σ_f grand



σ_t doit être grand donc σ_f petit

Solution : rendre σ_t σ_f
variables \Rightarrow ONDELETTES

Les ondelettes

1. Définitions

Une ondelette est une fonction ψ de $L^2(\mathbb{R})$

- de moyenne nulle : $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$
- normalisée : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$
- centrée au voisinage de $t=0$
- les fonctions analysantes sont obtenues par translation et dilation de ψ :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \begin{array}{l} a : \text{dilatation} \\ b : \text{translation} \end{array}$$

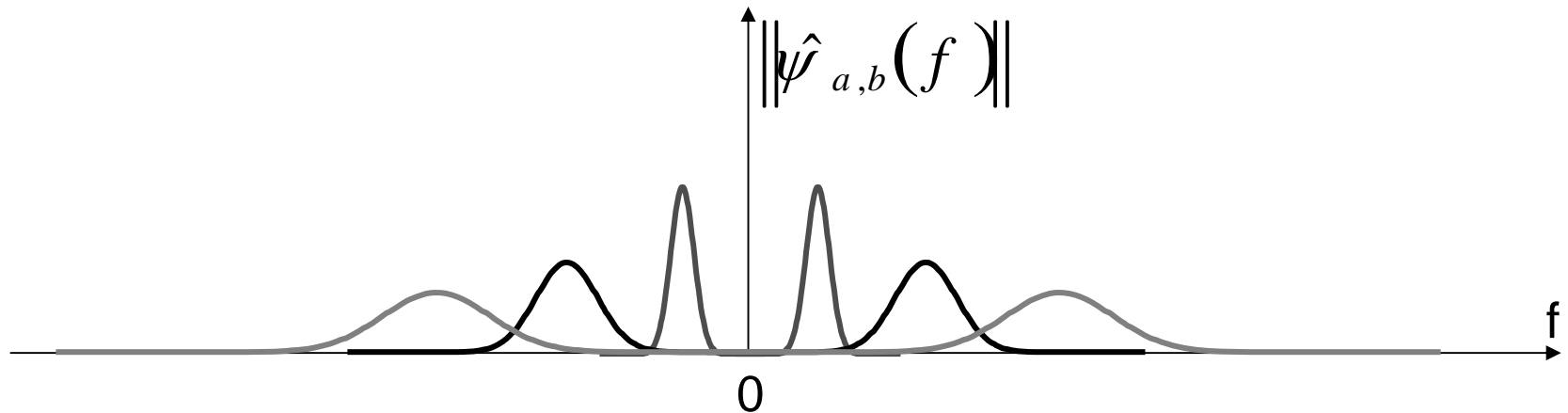
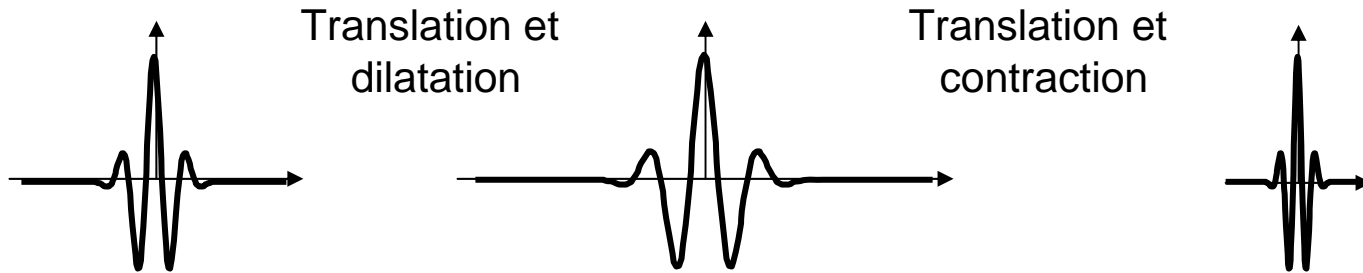
La transformée en ondelettes de $f(t)$ s'obtient en faisant le produit scalaire de $f(t)$ par $\psi_{a,b}(t)$

$$W f(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

Supposons $\psi_{a,b}(t)$ réelle

Lorsque a est grand
 $\psi_{a,b}(t)$ oscille longtemps

Lorsque a est petit $\psi_{a,b}(t)$ se
contracte autour du point $t=0$



Dans le cas où $f(t)$ est réelle et ψ complexe
 $W f(a, b)$ est complexe

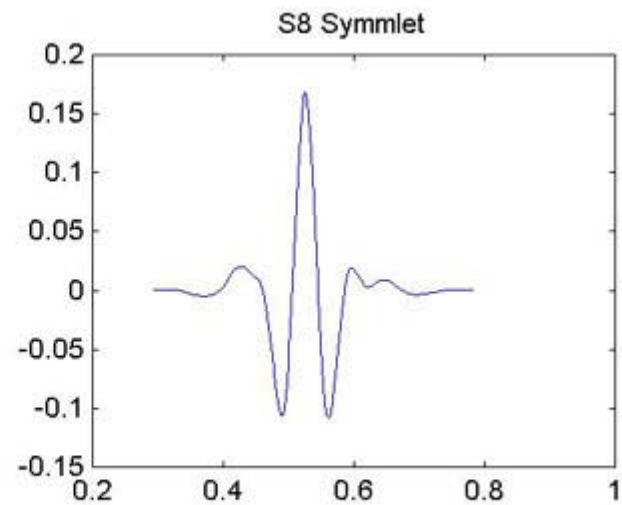
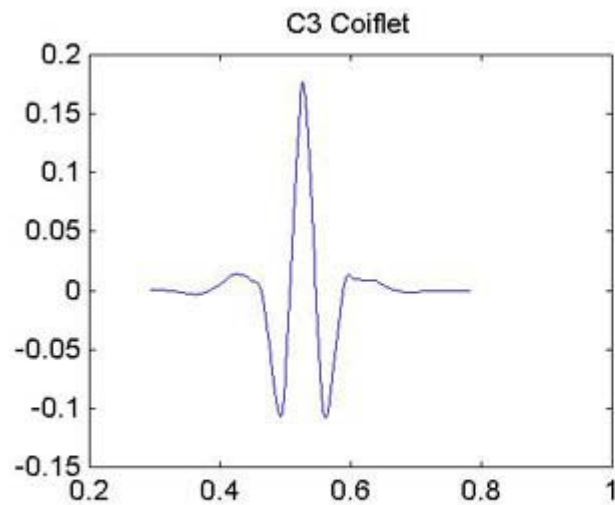
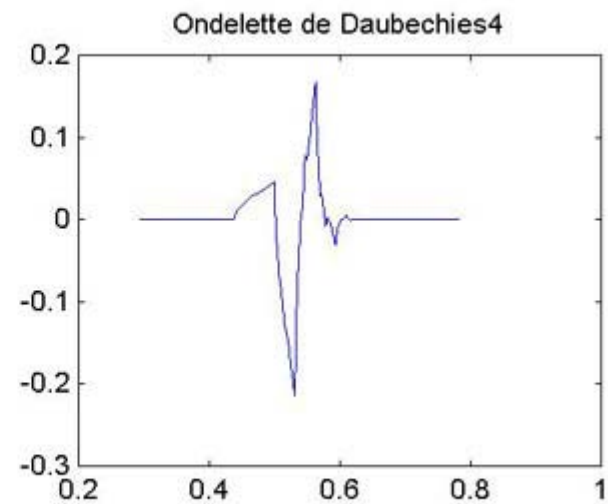
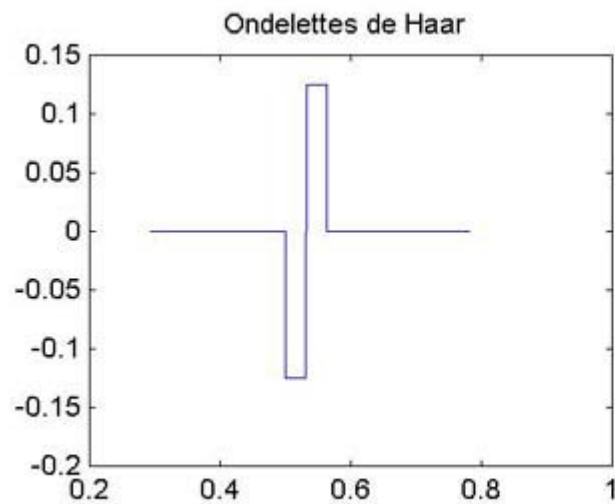
$$W f(a, b) \left\{ \begin{array}{l} \|W f(a, b)\| : \text{module} \\ \text{Arg}(W f(a, b)) : \text{phase} \end{array} \right.$$

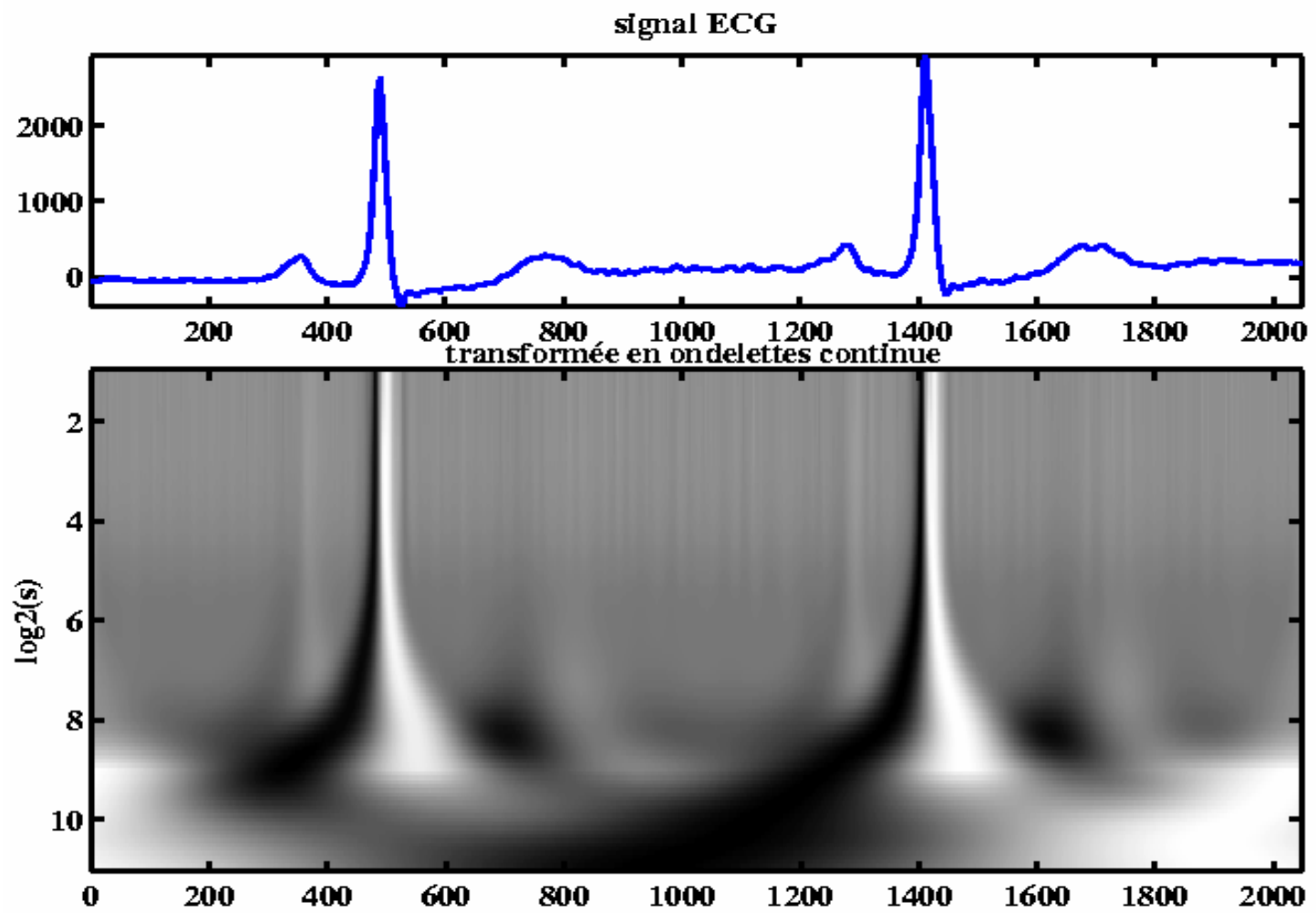
On dresse 2 diagrammes

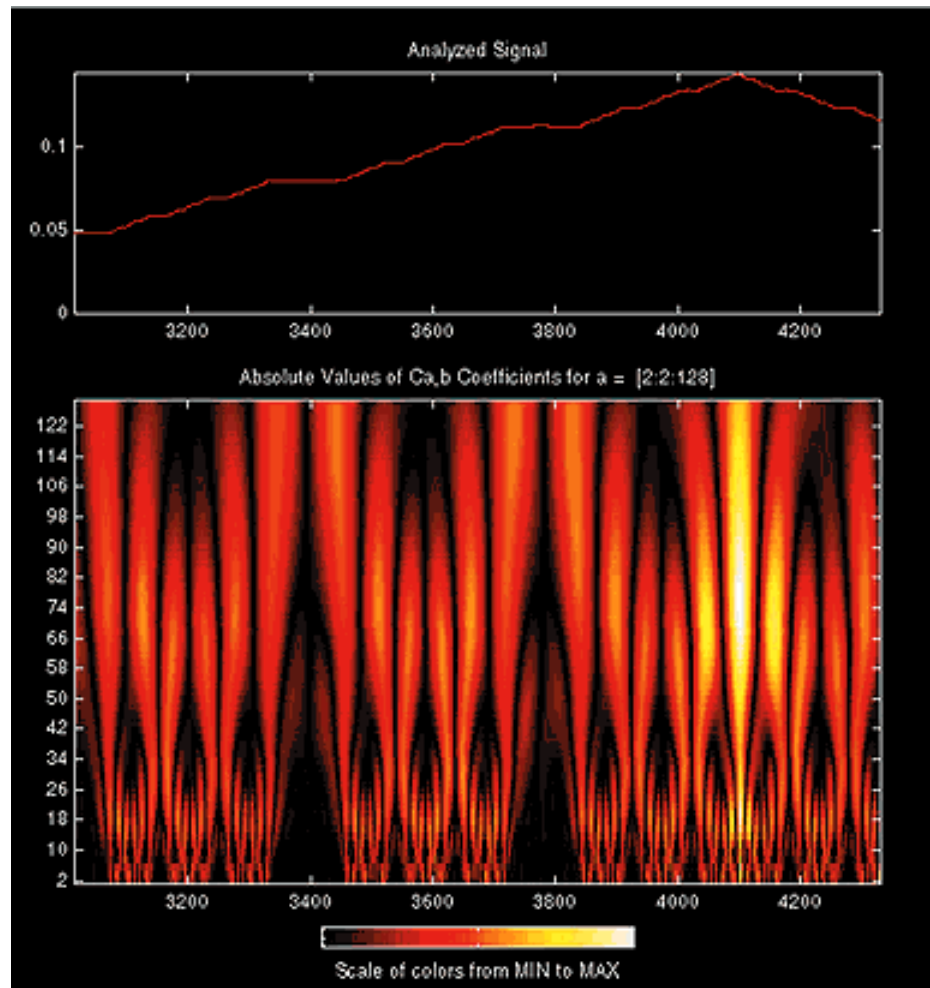
- lignes de niveaux de $\|W f(a, b)\|$
- lignes d'isophases de $\text{Arg}(W f(a, b))$

- **Le module donne une répartition de l'énergie dans le $\frac{1}{2}$ plan temps/fréquence**
- **Les lignes d'isophases donnent un renseignement qualitatif. Elles ont la propriété de converger vers les singularités**

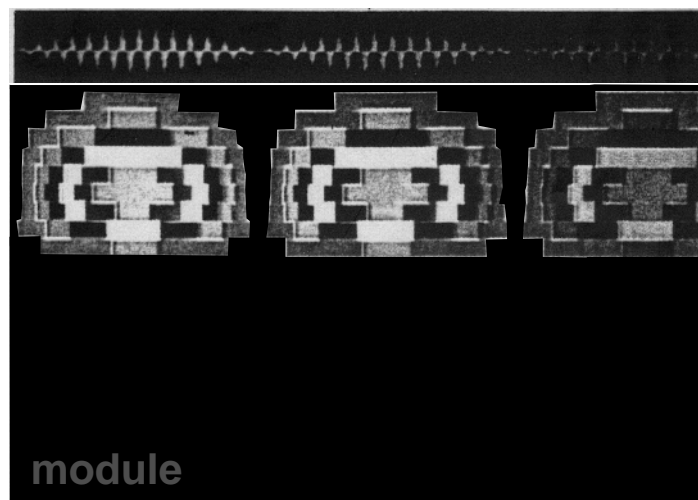
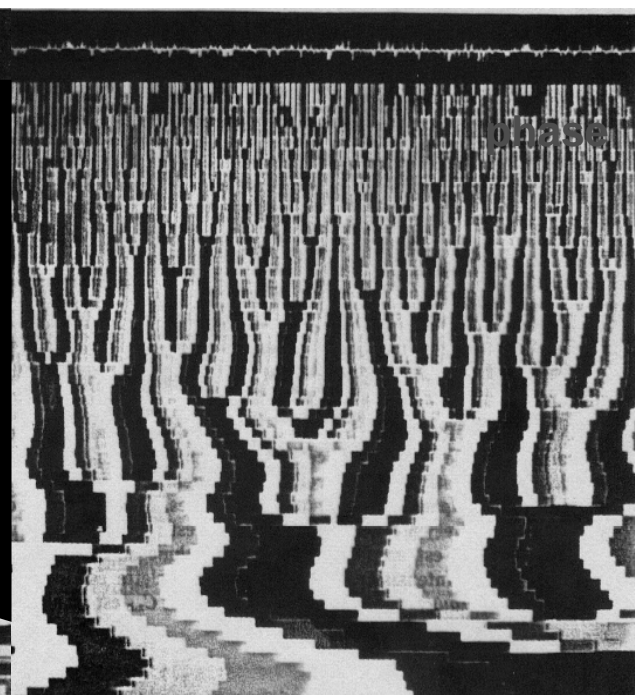
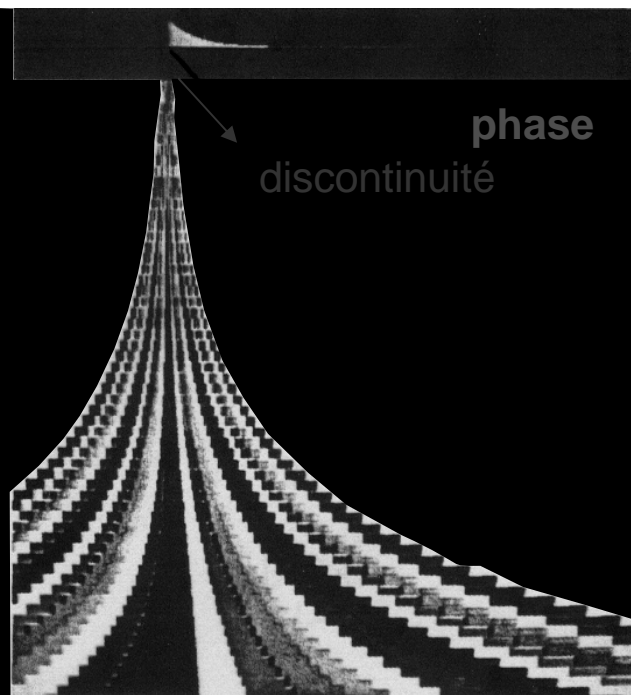
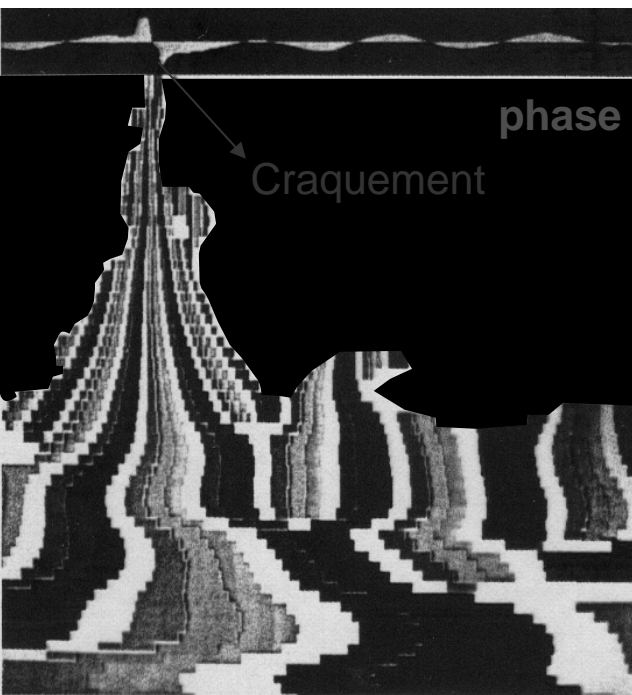
Exemple d'ondelettes





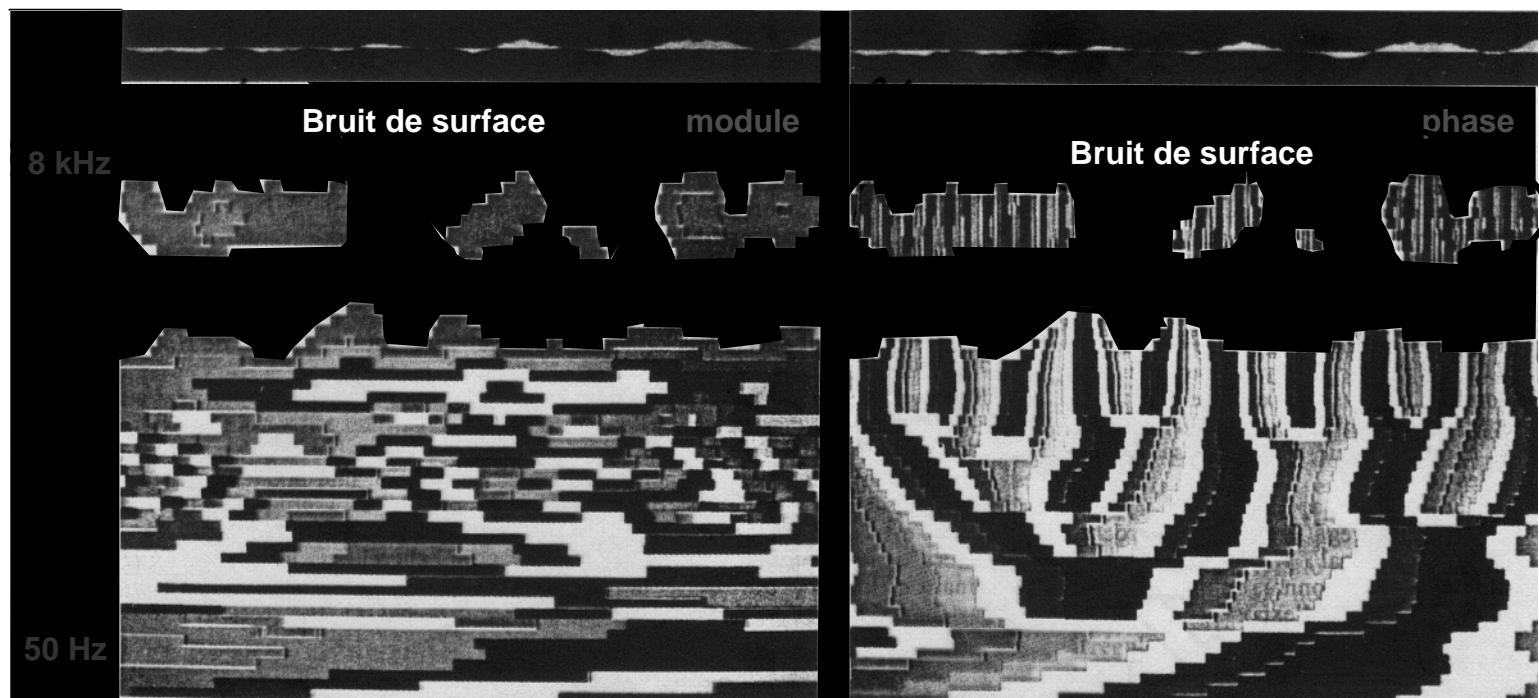


Décomposition d'un signal fractal en ondelettes.
On peut remarquer l'auto-similarité du signal aux différentes échelles .



Bruit blanc

Battements musicaux



Bruit de surface d'un disque vinyle

Transformée en ondettes :

$$W f (a ,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

Remarque très importante :

si $\psi (t)$ est une ondelette réelle

et $\tilde{\psi} (t) = \psi (-t)$

alors : $W f (a ,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \tilde{\psi} \left(\frac{b-t}{a} \right) dt = f \otimes \tilde{\psi}_a$

La transformée en ondettes est équivalente à un filtrage passe bande
La réponse impulsionnelle du filtre est donnée par : $\tilde{\psi}_a$

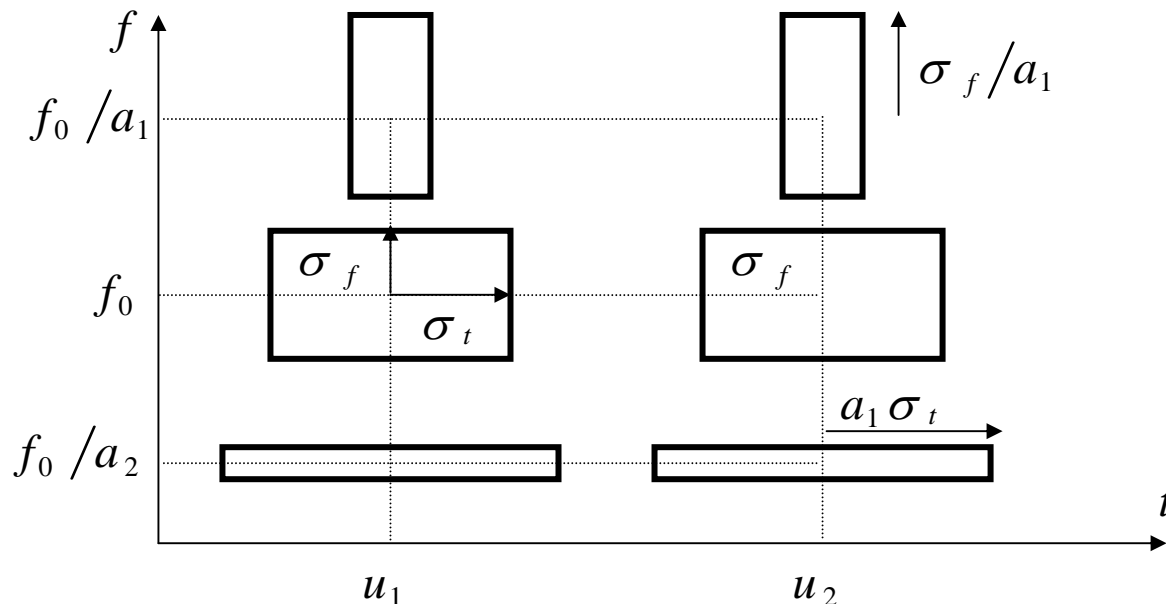
On a : $\hat{\tilde{\psi}}_a (f) = \sqrt{a} . \hat{\psi} (a . f)$

Soient f_0 le centre de la bande passante de $\hat{\psi}$ et σ_f la largeur de bande définie par :

$$\sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_0)^2 |\hat{\psi}(f)|^2 df$$

$$\hat{\psi}_a(f) \begin{cases} \text{centrée} & \text{en } \frac{f_0}{a} \\ \text{largeur} & \frac{\sigma_a}{a} \end{cases} \quad \psi_a(t) \begin{cases} \text{centrée} & \text{en } t=0 \\ \text{largeur} & a \cdot \sigma_t \end{cases}$$

$$\sigma_a \cdot \sigma_f = C \quad (\text{Principe d'incertitude})$$



Le signal $f(t)$ peut être reconstruit à partir de : $W f(a, b)$

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} W_f(a, b) \psi_a(t-b) \frac{da}{a^2} db$$

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\psi(f)|^2}{f} df$$

Pour calculer numériquement $W f(a, b)$ on discrétise a et b .
On choisit un échantillonnage logarithmique

$$a \rightarrow \alpha^{-j} \quad \alpha > 1; \quad j \in \mathbb{Z}$$

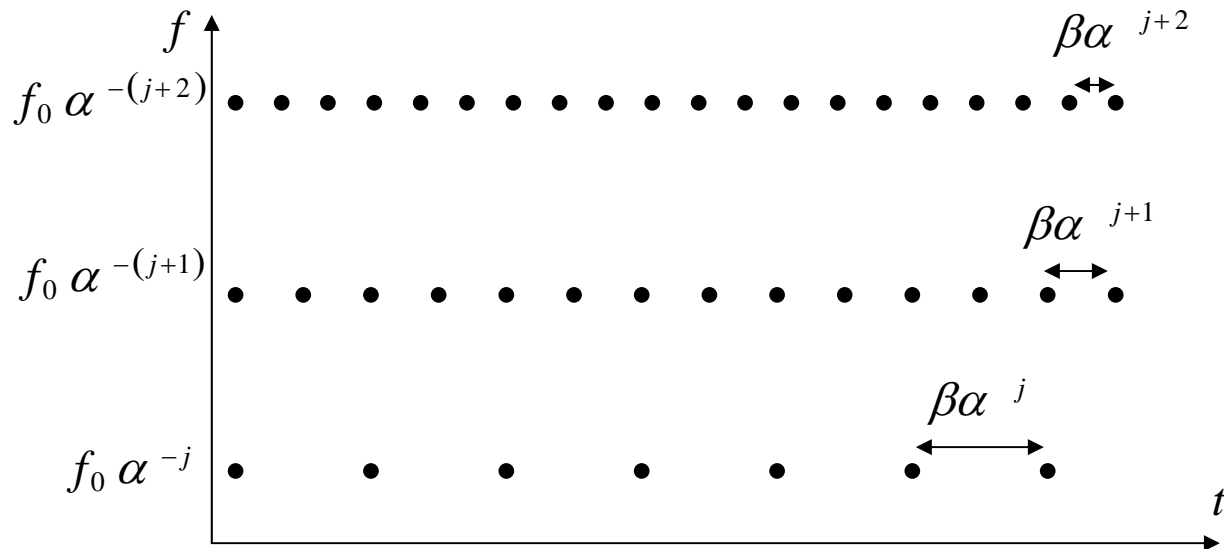
$$W(\alpha^{-j}, b) = \tilde{f} \otimes \psi_{\alpha^{-j}}(t)$$

$$\hat{\psi}_{\alpha^j}(f) \begin{cases} \text{centrée} & \text{en } f_0 \alpha^{-j} \\ \text{largeur} & \sigma_t \alpha^{-j} \end{cases}$$

$$\sigma_{\alpha^{-j}} \cdot \sigma_f = C \quad \Rightarrow \quad \sigma_f \alpha^{-j} \Rightarrow \frac{\sigma_t}{\alpha^{-j}}$$

Il faut donc réaliser un échantillonnage proportionnel à $\alpha^j \cdot \beta$ pour t

$$\Rightarrow W_{fd}(j, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\psi}_{\alpha^{-j}} \left(t - \frac{n\beta}{\alpha^{-j}} \right) dt = \tilde{f} \otimes \tilde{\psi}_{\alpha^{-j}} \left(\frac{n\beta}{\alpha^{-j}} \right)$$



- Ingrid Daubechies a donné les conditions sur α et β pour permettre une reconstruction stable de $f(t)$
- Pour $\alpha=2$ et $\beta=1$, Yves Meyer a construit une ondelette telle que :

$$\psi_{\alpha^j} \left(t - \frac{n}{2^j} \right) \quad (n, j) \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{Base orthonormale de } L_2(\mathbb{R})$$

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f(u), \psi_{2^j}(u - n 2^{-j}) \rangle \psi_{2^j}(t - n 2^{-j})$$

Applications : En mathématiques caractérisation des espaces fonctionnels

- $L^p(\mathbb{R})$ $p > 1$
- $H^p(\mathbb{R})$: Sobolev
- C^α : Fonctions Hölderienne

Exemple : caractérisation des courbes C^α

Fonction Hölderienne : $\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \leq C \quad C \in \mathbb{R}, \alpha \in]0, 1]$

- α grand $\rightarrow f(x)$ est assez régulière
- $\alpha=1$ $f(x)$ est presque dérivable
- $\alpha \rightarrow 0$, $f(x)$ est très peu régulière

Si $f(x)$ est C^α alors :

$$\left| \langle f(x), \psi_{2^j}(x - n 2^{-j}) \rangle \right| \leq C' \cdot 2^{-j(\alpha + \frac{1}{2})} (1 + |2^j x_0 - n|)$$

La régularité au point x_0 dépend uniquement de la décroissance des coefficients d'ondelettes en fonction de l'échelle.

La transformée en ondelettes orthogonale est donc :

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f(u), \psi_{2^j}(u - n 2^{-j}) \rangle \psi_{2^j}(t - n 2^{-j})$$

qui fonctionne pour : $f(t) \in L_2(R)$

Oui mais en pratique ?

Exemple : $f(t) \equiv 1 \notin L_2(R)$

Les coefficients d'ondelettes s'écrivent :

$$\begin{aligned} C_{j,n} &= \langle f(u), \psi_{2^j}(u - n 2^{-j}) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \psi_{2^j}(u - n 2^{-j}) du \end{aligned}$$

$$f(u) \equiv 1 \Rightarrow$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{2^j}(u - n 2^{-j}) du}_{=0 \text{ par définition}}$$

$$\Rightarrow C_{j,n} = 0 \quad \forall j, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow \text{absurde}$$

- ❖ ça ne fonctionne plus, mathématiquement il n'y a pas de surprise,
- ❖ Pratiquement c'est très gênant, les signaux à moyenne non nulle représente une classe importante de signaux.

**Solution : Introduction d'une fonction (père des ondelettes, ψ : mère)
 $\varphi(t)$: chargée des variations lentes.**

Bien sur on aura :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$$

L'introduction de cette seconde fonction conduit au concept d'analyse multirésolution

2. Décomposition multirésolution

Idées :

- Contourner l'aberration mathématique,
- En signal ou image réorganiser l'information sous forme hiérarchique (sélection des « grosses structures » puis si besoin est « des structures de plus en plus petites »),
- Il n'existe généralement pas de résolution optimale, l'étude se fera en fonction d'un panel de résolutions,
- Technique du Zoom. Rechercher les régions informatives (HF) se concentrer dessus (Zoom), (Notion d'espace et de fréquence),
- Recherche d'algorithmes de décomposition non expansif (pb de temps réel en télécommunication par exemple).

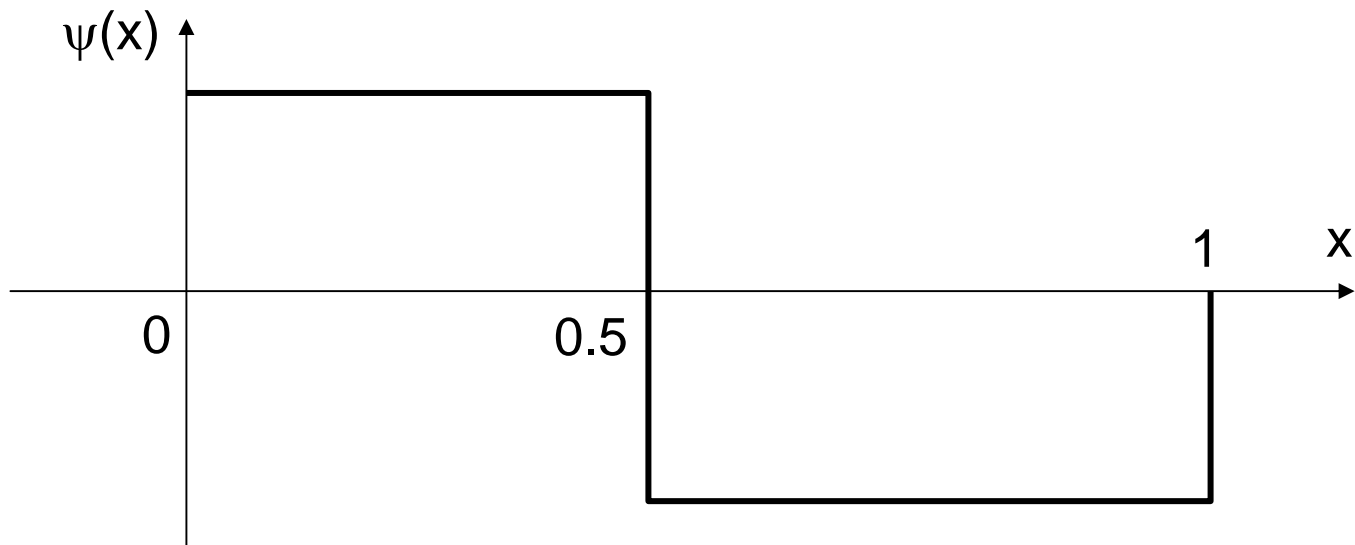
**Les transformations orthogonales sont les bien venues
(compression de l'information)**

Intuitivement :

- Analyse temps-fréquence orthogonale \Rightarrow ondelettes,
- Pas d'analyse 2 : analyse dyadique,
- La fonction φ pourrait donner l'allure générale du signal $f(t)$,
- Par pas successif en progression de 2^j , on précise $f(t)$ par reconstruction,
- φ : fonction d'approximation (d'échelle),
- ψ : reconstitution des détails de plus en plus fins.

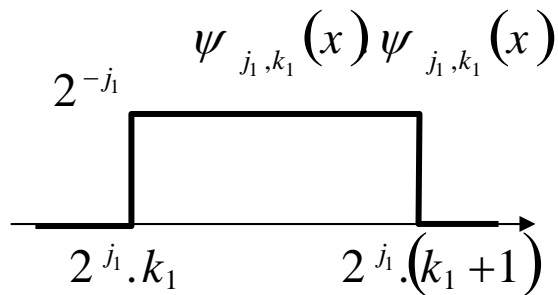
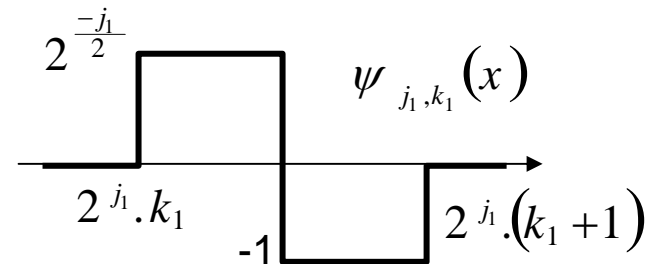
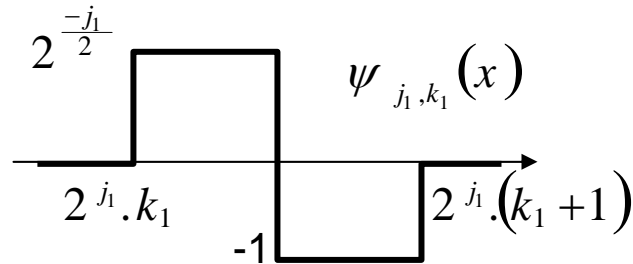
Exemple du système de Haar :

La fonction $\psi(x)$ est : $\psi(x) = \chi\left(0, \frac{1}{2}\right) - \chi\left(\frac{1}{2}, 1\right)$



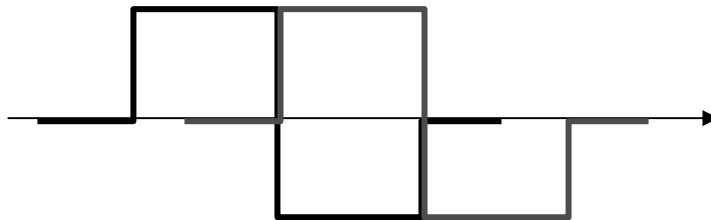
Etude de l'orthogonalité de la famille : $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{-j}{2}} \psi(2^{-j}x - k)$

- $j_1 = j_2$
- $k_1 = k_2$



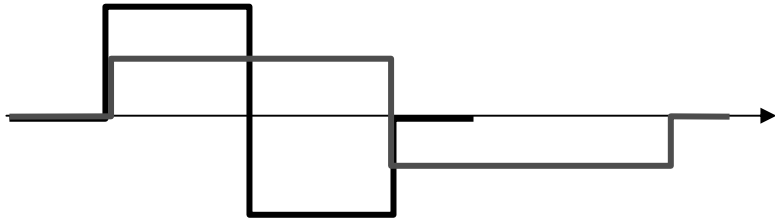
$$\langle \psi_{j_1, k_1}(x), \psi_{j_1, k_1}(x) \rangle = 1$$

- $k_1 \neq k_2$



$$\langle \psi_{j_1, k_1}(x), \psi_{j_1, k_2}(x) \rangle = 0$$

- $j_1 \neq j_2$



$$\langle \psi_{j_1, k_1}(x), \psi_{j_2, k_2}(x) \rangle = 0$$

Pour montrer que le système de Haar est une base, il faut :

$$\forall f(t) \in L_2(\mathbb{R})$$

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

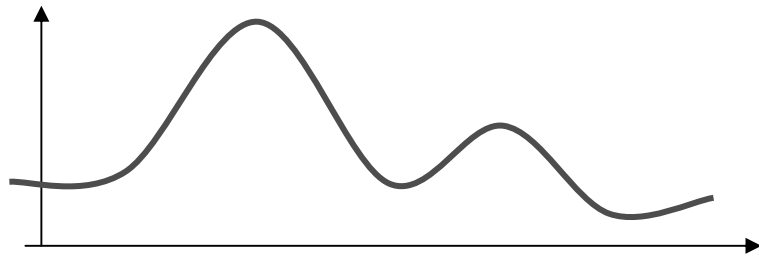
Introduisons la fonction : $\varphi(x) = \chi(0, 1)$

- Considérons $P_j(f)$ la projection de f sur le sous espace des fonctions constantes sur l'intervalle dyadique $[2^j k, 2^j(k+1)]$

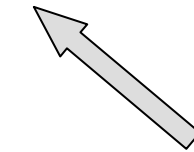
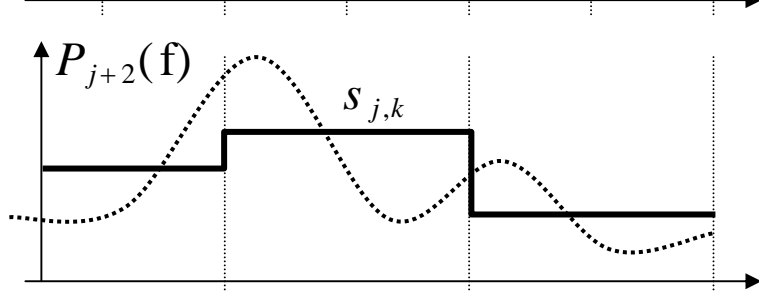
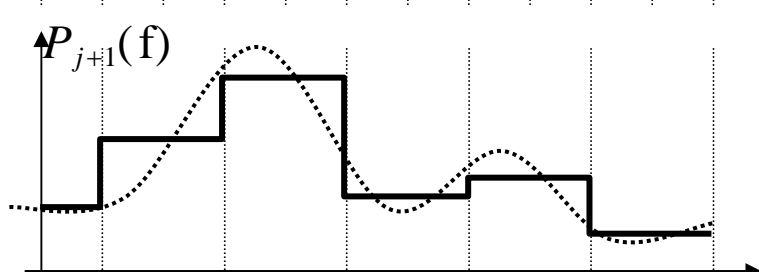
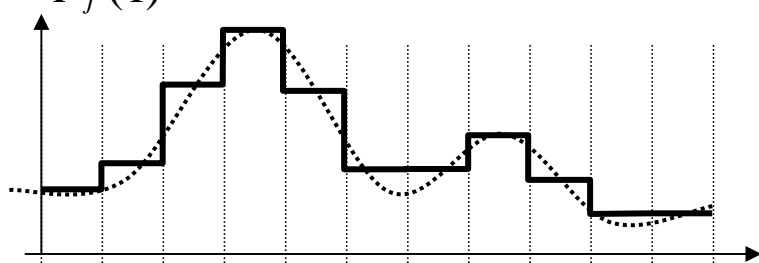
- $P_j[f([2^j k, 2^j(k+1)])] = 2^{-j} \int_{2^j k}^{2^j(k+1)} f(x) dx = s_{j,k}$

$s_{j,k}$: moyenne de $f(x)$ sur l'intervalle.

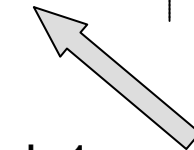
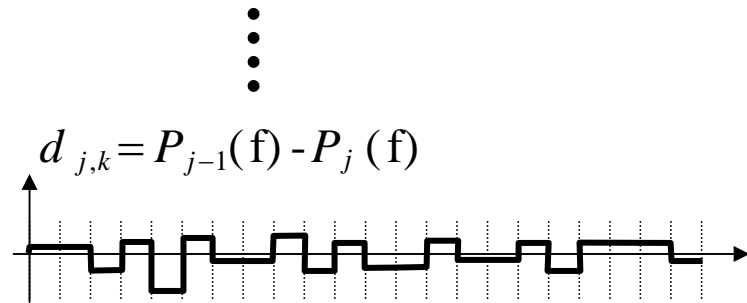
- $P_j(f) = \sum_k 2^{\frac{j}{2}} s_{j,k} \varphi_{j,k}$: approximation de f à l'échelle 2^{-j}



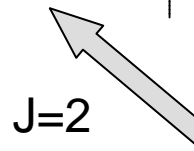
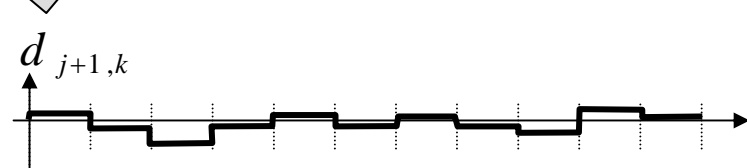
$f(x) \quad (j \rightarrow -\infty)$



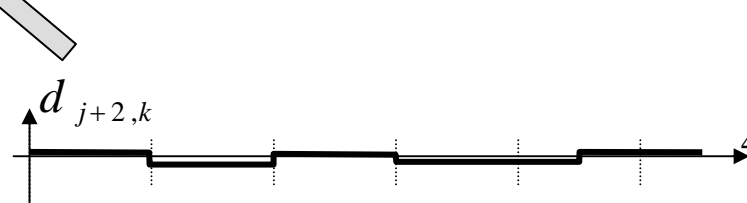
$J=0$



$J=1$



$J=2$



D'après les propriétés de la moyenne on a :

$$s_{j,k} = \frac{1}{2} (s_{j-1,2k} + s_{j-1,2k+1})$$

Ceci indique que $P_{j-1}(f) - P_j(f)$ est de moyenne nulle sur chacun des intervalles $[2^j k, 2^j(k+1)]$ et peut donc s'exprimer sous la forme :

$$P_{j-1}(f) - P_j(f) = \sum_k 2^{\frac{j}{2}} d_{j,k} \psi_{j,k}$$

Le coefficient d'ondelettes $d_{j,k}$ exprime donc la fluctuation de $P_{j-1}(f)$ sur $[2^j k, 2^j(k+1)]$ par rapport à la moyenne $P_j(f)$ et l'on a :

$$d_{j,k} = \frac{1}{2} (s_{j-1,2k} - s_{j-1,2k+1})$$

On peut ainsi reconstituer une approximation fine de la fonction f à partir d'une approximation grossière et d'une succession de détails exprimés par des combinaisons linéaires d'ondelettes aux échelles intermédiaires.

Pour conclure que la famille $\psi_{j,k}$ est une base, il suffit de remarquer que pour toute fonction f dans $L_2(\mathbb{R})$ on a :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_j(f)\|_2 = 0$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j(f) - f\|_2 = 0$$

Récurtivité : $s_{j-1,2k} = s_{j,2k} + d_{j,k}$

Décomposition :
$$\begin{cases} d_{j,k} = \frac{1}{2}(s_{j-1,2k} - s_{j-1,2k+1}) & : \text{Détails} \\ s_{j,k} = \frac{1}{2}(s_{j-1,2k} + s_{j-1,2k+1}) & : \text{Résumé} \end{cases}$$

Remarques :

- l'algorithme suppose connue l'approximation de f à un certain niveau de résolution. C'est exactement le cas des signaux numériques,
- La base de Haar est très peu utilisée en pratique car elle n'a pas de bonnes propriétés de localisation fréquentielle,
- Les coefficients $s_{j,k}$ et $d_{j,k}$, sont les coordonnées des fonctions $P_j(f)$ et $P_{j-1}(f) - P_j(f)$ dans les bases $\{\varphi_{j,k}\}$ et $\{\psi_{j,k}\}$ à un coefficient de normalisation $2^{j/2}$ près.
- Il existe depuis les années 80, d'autres bases que celle de Haar avec de bonnes propriétés de localisation fréquentielle et une mise œuvre facile sur calculateur numérique.
- Il s'agit donc de manipuler deux fonctions :
 - φ : fonction d'échelle (« BF »)
 - ψ : ondelette (« HF »)

3. Décomposition multirésolution, aspect formel

1. Les approximations multirésolution calculent l'approximation d'un signal à diverses résolutions par projection orthogonale sur une famille d'espaces V_j . Ces approximations sont entièrement caractérisées par un filtre discret particulier qui détermine la perte d'information entre deux résolutions.

2. La modification de la résolution d'un signal permet de ne traiter que les détails intéressants pour une tâche donnée. L'approximation de f à la résolution 2^{-j} est déterminée par une grille discrète d'échantillons fournissant des moyennes locales de f sur des voisinages de taille proportionnelle à 2^{-j} .

3. Une suite $\{V_j\}$ de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ est une approximation multirésolution si elle vérifie pour tout f de cet espace.

$$1. \forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x - 2^j k)$$

$$2. \forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$$

$$3. \forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{j+1}$$

$$4. \lim_{j \rightarrow \infty} (V_j) = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$$

$$5. \lim_{j \rightarrow \infty} (V_j) = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$$

$$6. \exists \varphi \text{ tq } \{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ base orthonormée de } V_0$$

Dans ces conditions, on peut déduire :

- φ est une fonction lissante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \hat{\varphi}(0) = 1$$

- $\left\{ 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ base orthonormée de V_j

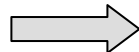
De 1 et 6 on tire :

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \varphi(u), \varphi(2u - n) \rangle \varphi(2x - n)$$

Appelons :

$$h(n) = \sqrt{2} \langle \varphi(u), \varphi(2u - n) \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \varphi(2u - n) du$$

On a aussi : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (h(n))^2 = 1$ (propriétés des projections orthonormées dans L_2)


$$\boxed{\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \varphi(2x - n)}$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(f) &= \int \varphi(x) e^{-2\pi jfx} dx \\ &= \sqrt{2} \int \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \varphi(2x - n) e^{-2\pi jfx} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}(f) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-2\pi j f \frac{x}{2}} e^{-j 2\pi j f \frac{n}{2}} dx \\
 &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{-j \frac{2\pi j f}{2} n}}_{\hat{h}\left(\frac{f}{2}\right)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-j 2\pi j f \frac{x}{2}} dx}_{\hat{\phi}\left(\frac{f}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}(f) &= \hat{h}\left(\frac{f}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{f}{2}\right) \\
 \hat{h}(f) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j 2\pi j f n}
 \end{aligned}$$

$\hat{h}(f)$: est la fonction de transfert d'un filtre numérique $h(n)$

Ce filtre est périodique en fréquence de période 1. De part les conditions d'orthogonalité des fonctions $\varphi(x-k)$ dans V_0 , $\hat{\varphi}(f)$ n'est pas quelconque :

$$\begin{aligned}\delta_{n0} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \varphi(x-k) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(f)|^2 e^{2\pi jfn} df : \textit{Parseval} \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(f+n)|^2 \right) e^{2\pi jfn} df\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(f+n)|^2 = 1$$

En faisant apparaître dans la l'équation précédente la fonction de transfert du filtre h , en utilisant la périodicité on montre que :

$$\left| \hat{h}(f) \right|^2 + \left| \hat{h}\left(f + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1$$

Ondelettes :

En reprenant l'explication intuitive du système de Haar. Les détails qui constituent les coefficients d'ondelettes sont obtenus par différence entre deux approximations successives. Ceci revient à dire que les détails appartiennent à un espace W_m qui est le complément orthogonal de V_m dans V_{m+1} . Ceci signifie que l'on a la relation :

$$V_{m+1} = V_m \oplus W_m$$

D'où on déduit la décomposition : $L_2(R) = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} W_m$

Il suffit alors de trouver une fonction $\psi(x)$ (qui est l'ondelette à proprement parler) telle que la collection $\{ \psi(x-n), n \in \mathbb{Z} \}$ soit une base de W_0 pour que la collection :

$$\{ \psi_{m,n}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m x - n); n, m \in \mathbb{Z} \}$$

soit une base orthonormée de $L_2(\mathbb{R})$

Comme pour la fonction φ , l'ondelette $\psi(x)$ qui est dans V_1 peut être caractérisée par un filtre discret de coefficient $g[n]$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \varphi(2x - n)$$

avec :

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi(u), \varphi(2u - n) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) \varphi(2u - n) du$$

De la même manière que pour la fonction d'échelle, on a cette fois :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(f) &= \hat{g}\left(\frac{f}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{f}{2}\right) & \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g(n))^2 &= 1 \\ \hat{g}(f) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) e^{-j2\pi jfn}\end{aligned}$$

Parce que l'espace V_1 auquel appartient l'ondelette est orthogonal à V_0 , on a nécessairement :

$$\begin{aligned}0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \varphi(x-k) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(f) \overline{\hat{\phi}} e^{2\pi jfn} df : \textit{Parseval}\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(f+n) \overline{\hat{\phi}(f+n)} \right) e^{2\pi jfn} df$$

et donc :
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(f+n) \overline{\hat{\phi}(f+n)} = 0$$

En procédant comme précédemment, c'est à dire en faisant apparaître les les fonctions de transferts : $\hat{h}(f)$ et $\hat{g}(f)$

On montre que :

$$\hat{g}(f) \overline{\hat{h}(f)} + \hat{g}\left(f + \frac{1}{2}\right) \overline{\hat{h}\left(f + \frac{1}{2}\right)} = 0$$

Les filtres $h[n]$ et $g[n]$ constituent une paire de *filtres miroirs en quadrature*. Pour $h[n]$ fixé, la solution de l'équation ci-dessus est de la forme :

$$\hat{g}(f) = \lambda(f) \cdot \overline{\hat{h}\left(f + \frac{1}{2}\right)}$$

Où $\lambda(f)$ est une fonction 1-périodique telle que :

$$\lambda(f) + \lambda\left(f + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Un choix possible est de prendre :

$$\lambda(f) = e^{-2\pi j f}$$

$$\Rightarrow \hat{g}(f) = e^{-2\pi j \left(f + \frac{1}{2}\right)} \cdot \overline{\hat{h}\left(f + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow g(n) = (-1)^n \cdot h(1-n)$$

On peut montrer que l'ondelette $\psi(x)$ ainsi construite est bien telle que ses translatées entières soit une base de W_0 .

En résumé :

En partant d'une fonction d'échelle $\varphi(x)$ telle que $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de V_0 et des coefficients $h[n]$ du filtre discret qui lui est associé, l'ondelette :

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n h(1-n) \varphi(2x-n)$$

est telle que la collection

$$\left\{ \psi_{m,n}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \psi\left(2^{\frac{m}{2}}x - n\right) \right\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$$

est une base de $L_2(\mathbb{R})$

Remarques :

$$1. \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \varphi(2x - n)$$

$$\int \psi(x) dx = \int \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \varphi(2x - n) dx = 0$$

$$0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \underbrace{\int \sqrt{2} \varphi(2x - n) dx}_{=1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) = 0 \Rightarrow \text{Filtre passe bande}$$

2. De même :

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \varphi(2x - n)$$

$$\int \varphi(x) dx = \int \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \varphi(2x - n) dx = 1$$

$$1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \underbrace{\int \sqrt{2} \varphi(2x - n) dx}_{=1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) = 1 \Rightarrow \text{Filtre passe bas}$$

3. En reprenant :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(f) &= \hat{h}\left(\frac{f}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{f}{2}\right) \\ &= \hat{h}\left(\frac{f}{2}\right) \hat{h}\left(\frac{f}{4}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{f}{4}\right) = \hat{h}\left(\frac{f}{2}\right) \hat{h}\left(\frac{f}{4}\right) \hat{h}\left(\frac{f}{8}\right) \dots \end{aligned}$$

$$\hat{\phi}(f) = \hat{\phi}(0) \prod_{m=1}^{\infty} \hat{h}\left(\frac{f}{2^m}\right) \quad \text{or} \quad \hat{\phi}(0) = 1$$

$$\boxed{\hat{\phi}(f) = \prod_{m=1}^{\infty} \hat{h}\left(\frac{f}{2^m}\right)}$$

4. En reprenant :

$$\left| \hat{h}(f) \right|^2 + \left| \hat{h}\left(f + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1$$

Puisque : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) = 1$ alors : $\boxed{\hat{h}(f=0) = 1}$

$$\boxed{\hat{h}\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$$

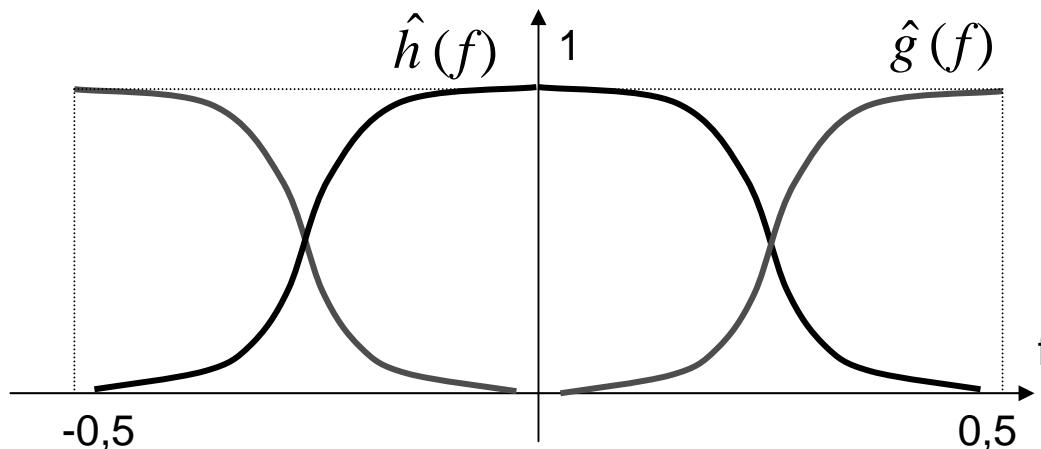
On en déduit facilement que :

$$\hat{g}(0) = 0$$

$$\hat{g}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

On peut montrer aussi que l'on retrouve la relation des filtres miroirs en quadrature

$$|\hat{h}(f)|^2 + |\hat{g}(f)|^2 = 1$$



4. Algorithmes pyramidaux – (S. Mallat)

L'introduction des filtres numériques $h[n]$ et $g[n]$ présente un intérêt majeur pour le calcul pratique des coefficients d'approximation et de détail.

$$s_f(j, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi_{j,k}(x) dx$$

$$d_f(j, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$

En utilisant les relations établies précédemment :

$$\begin{aligned} s_f(j, k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) 2^{\frac{j}{2}} \varphi\left(2^{\frac{j}{2}} x - k\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) 2^{\frac{j}{2}} \left(\sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \varphi\left(2\left(2^{\frac{j}{2}} x - k\right) - n\right) \right) dx \end{aligned}$$

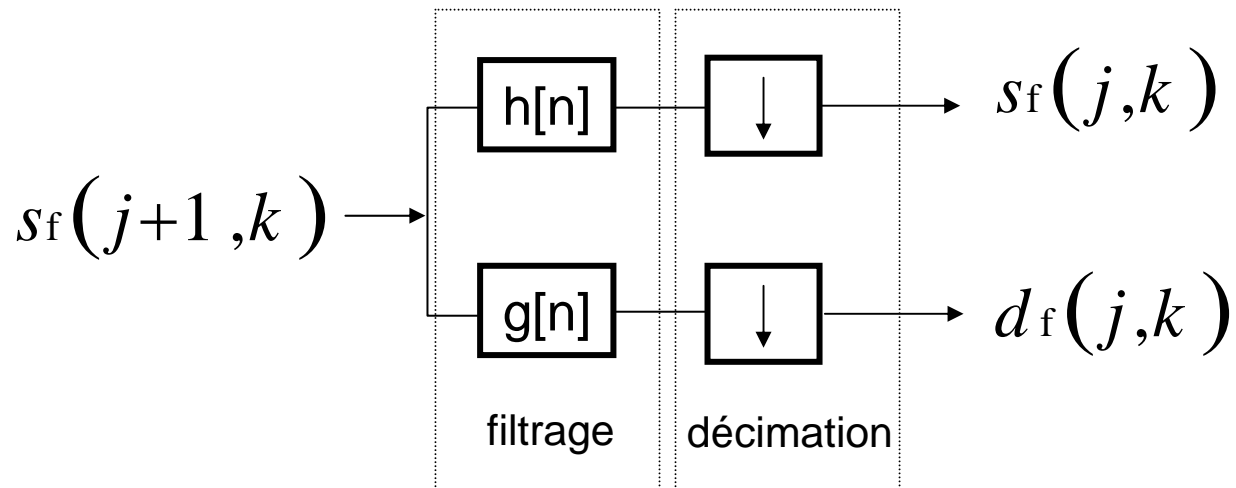
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1}x - (n + 2k)) dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) s_f(j+1, n + 2k)$$

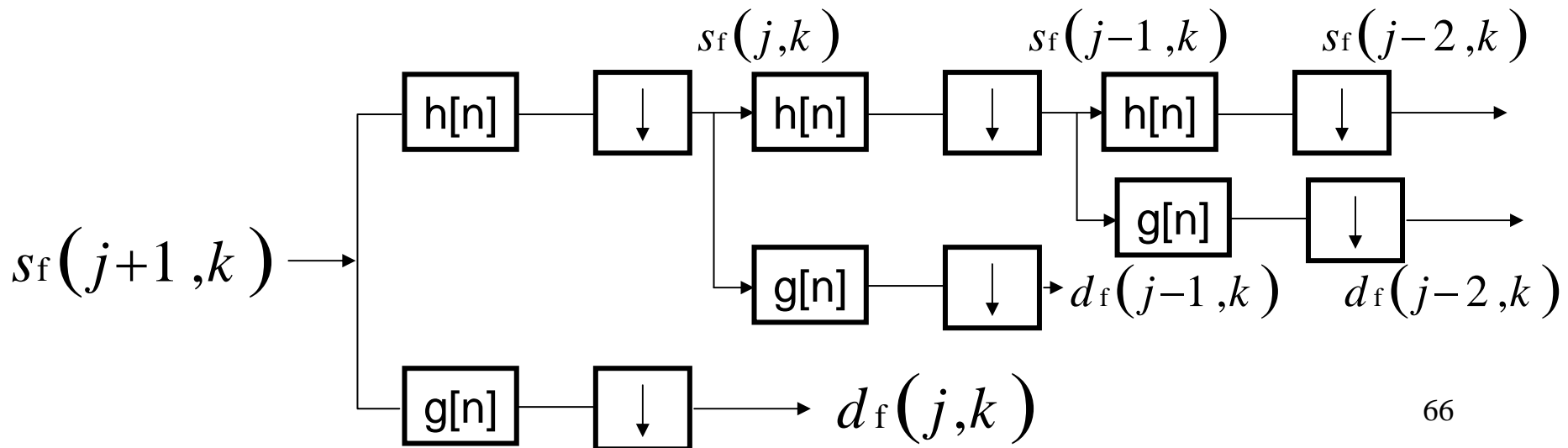
$$s_f(j, k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n - 2k) s_f(j+1, n)$$

De la même manière :

$$d_f(j, k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n - 2k) s_f(j+1, n)$$

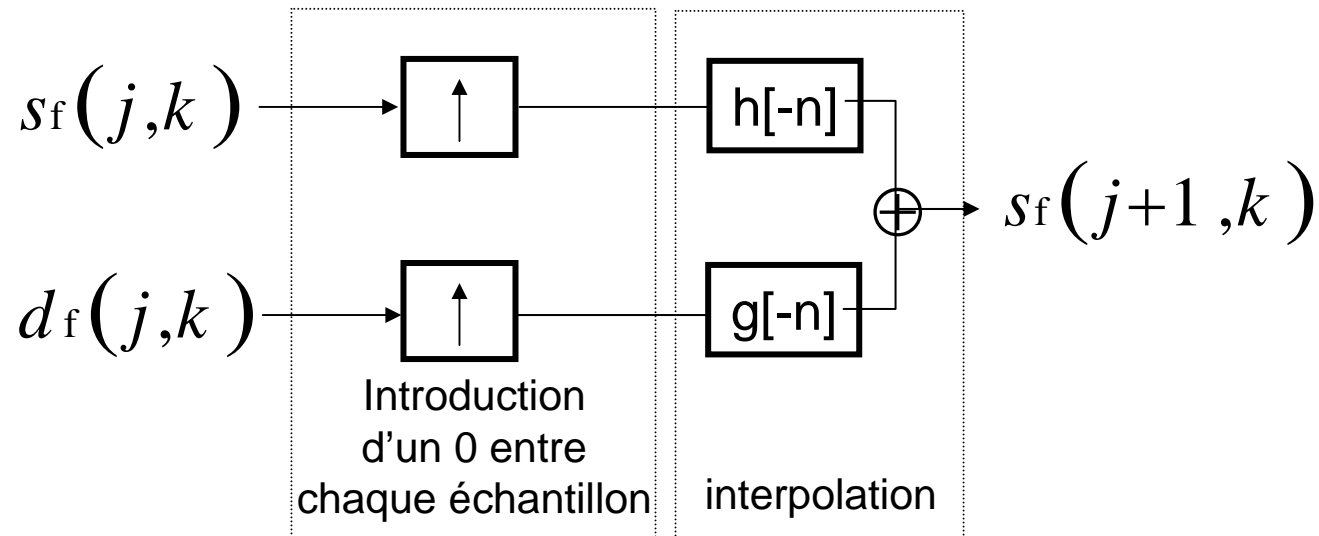


Les coefficients d'approximation et de détail sont obtenus par filtrage linéaire suivi d'une décimation. Opérant de proche en proche l'algorithme est rapide et récurssif.

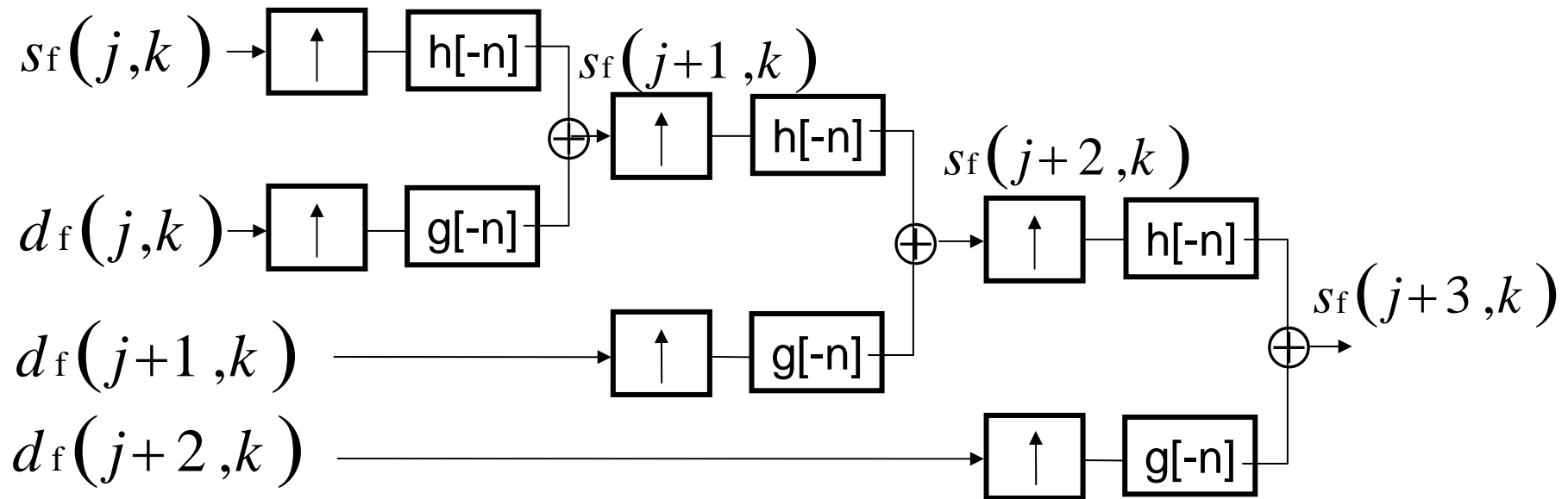


De la même façon, il existe une relation de reconstruction :

$$s_f(j+1, k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k-2n) s_f(j, n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(k-2n) s_f(j, n)$$



En opérant de proche en proche on reconstruit $f(x)$ de manière rapide et récurssive en introduisant une valeur nulle entre chaque échantillon suivie d'un filtrage linéaire et d'une sommation.



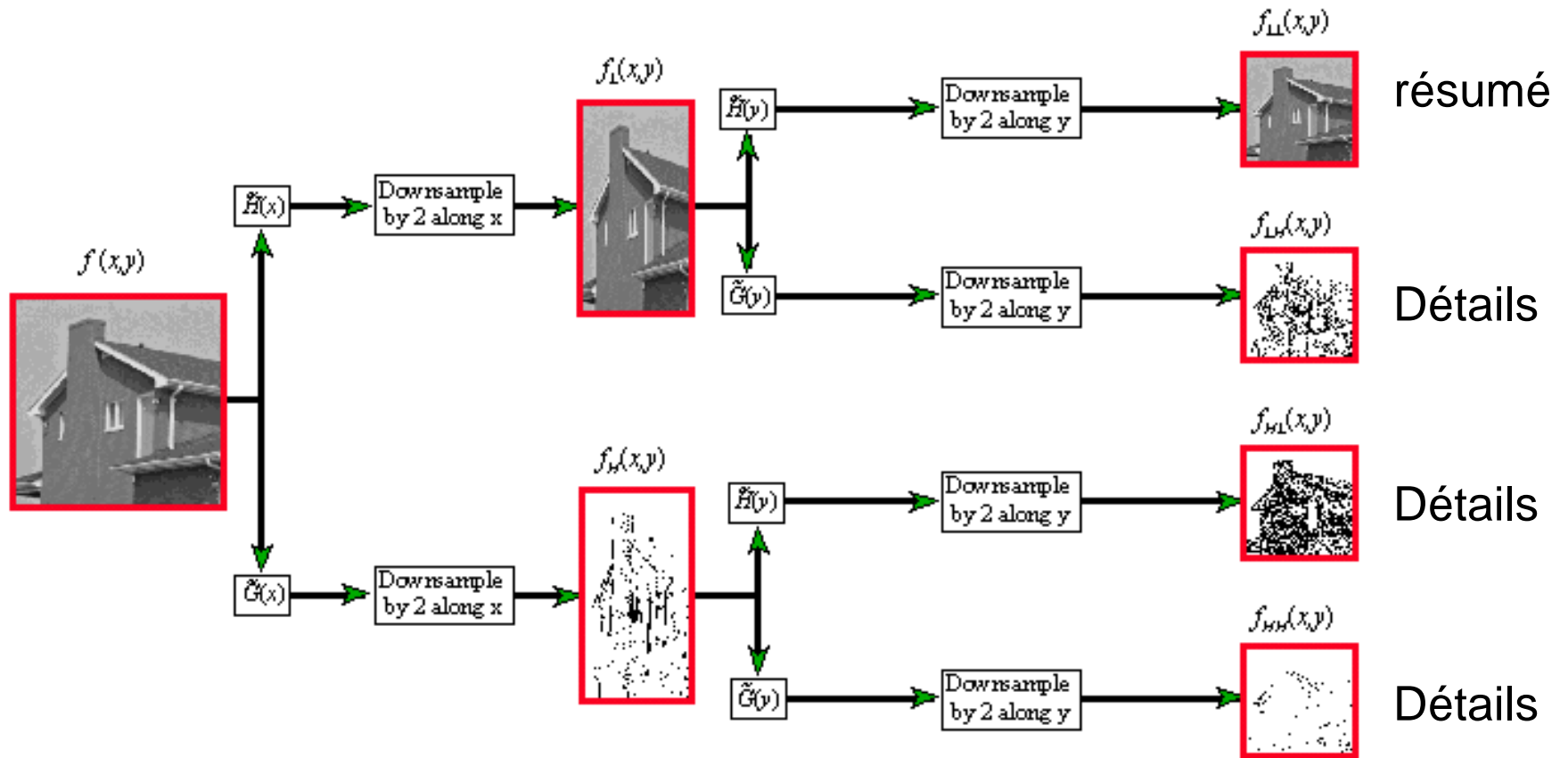
Généralisation aux signaux multi-dimensionnels

Image : 2D

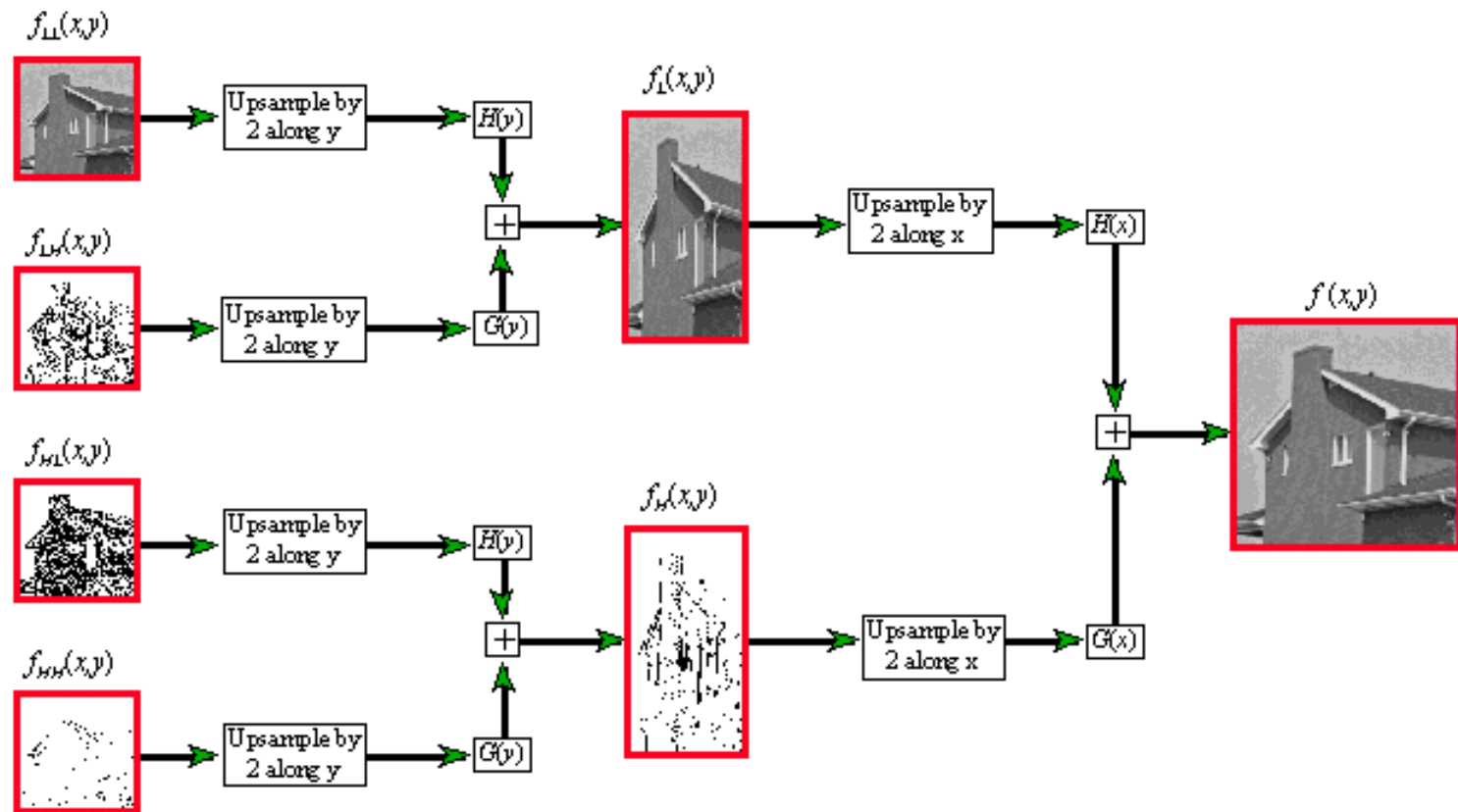
Version séparable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, y) = \varphi(x) \varphi(y) \\ \varphi_1(x, y) = \varphi(x) \psi(y) \\ \varphi_2(x, y) = \psi(x) \varphi(y) \\ \varphi_3(x, y) = \psi(x) \psi(y) \end{array} \right.$$

Décomposition



Reconstruction



Propriétés des ondelettes utiles en traitement d'images

Localisation spatiale

Liée à la taille de l'ondelette. Ondelette à support compact \Rightarrow filtre RIF

Cancellation

Caractérisée par le nombre de moments nuls

$$\exists N > 0 \quad n \in N \quad tq \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \psi(x) dx = 0$$

$$0 \leq n < N$$

Coefficients d'ondelette faibles aux fines résolutions, d'autant plus faibles qu N est grand (localement une image peut être approximée par un polynôme de degré N-1)

Application immédiate en compression d'images (JPEG2000)

Régularité

Reconstruction sans singularités artificielles
(exposant de Hölder de φ et ψ)