Exercice 2

Soient les équations aux différences finies suivantes :

$$y(n) - y(n-1) = 2n - 1$$

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; n < 0 \\ 1 \;\; si \;\; n = 0 \\ -3 \;\; si \;\; n = 1 \\ 1 \;\; si \;\; n \geq 2 \end{cases}$$

1. Calculer les solutions causales y(n) en utilisant les tables de transformées
2. Calculer les solutions par la méthode des résidus

Solutions

1. On reconnaît une rampe 2.r(n) et un échelon –u(n), (terme -1!)

$$y(z) - z^{-1}y(z) = \frac{2.z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1}$$

$$y(z) = \left(\frac{2.z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1}\right)\frac{z}{z-1}$$

$$y(z) = \frac{2.z^2 - z^2(z-1)}{(z-1)^3}$$

$$\boxed{y(z) = \frac{z^2(3-z)}{(z-1)^3}}$$

ensem

Inversion par les tables

La fonction n'existe pas telle quelle dans les tables. Il faut décomposer en élément simples.
Précaution préalable : faire apparaître d'abord z au numérateur car la quasi-totalité des TZ dans les tables exprimées en z (et non z^{-1}) possèdent un facteur z au numérateur.

$$y(z) = \frac{z^2(3-z)}{(z-1)^3} = z\left[\frac{-1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3}\right]$$

$$= \frac{-z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2z}{(z-1)^3}$$

Le terme $\frac{2z}{(z-1)^3}$ n'existe pas dans les tables

En recombinant les termes 2 et 3

$$y(z) = \frac{-z}{z-1} + \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

On trouve : $y(n) = n^2 - 1 \ avec \ n \geq 0$ ouf!

Inversion par la méthode des résidus

$$y(n) = \sum Résidus\ \ de\ \ z^{n-1}y(z)\ \ aux\ \ pôles\ \ de\ \ z^{n-1}y(z)$$

Calcul d'un résidu au pôle a d'ordre q : $\lim\limits_{z\to a}\left[\dfrac{1}{(q-1)\,!}\ \dfrac{d^{\,q-1}}{dz^{q-1}}\ \left[(z-a)^q.z^{n-1}.y(z)\right]\right]$

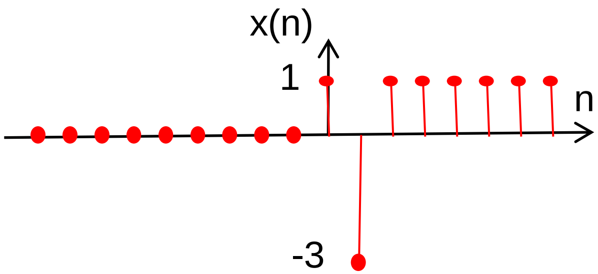
On a un pôle triple pour z=1

$$\Rightarrow y(n) = \lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{2\ !}\ \frac{d^{\,2}}{dz^2}\ \left[(z-\underset{z^{n-1}}{1})^3.z^{n-1}\left(-\frac{z^2(z-3)}{(z-1)^3}\right)\right]\right]$$

$$\Rightarrow y(n) = \lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{2\ !}\ \frac{d^{\,2}}{dz^2}\ \left[z^{n-1}.z^2(3-z)\right]\right] = n^2 - 1$$

ensem

2. Solution de la seconde équation
Il faut écrire le second terme de manière formelle



$$x(n) = u(n) - 4\delta(n-1)$$

$$x(z) = \frac{z}{z-1} - 4z^{-1}$$

$$y(z) - 3z^{-1}y(z) + 2z^{-2}y(z) = \left(\frac{z}{z-1} - 4z^{-1}\right)$$

$$y(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}\left(\frac{z}{z-1} - 4z^{-1}\right) = \frac{z^2}{z^2-3z+2}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{4}{z}\right)$$

$$y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}\left(\frac{(z-2)^2}{z(z-1)}\right) = \frac{z(z-2)}{(z-1)^2} \quad RdC : |z > 1|$$

Inversion

Par les tables :

$$y(z) = z\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2}\right) \Rightarrow y(n) = 1 - n$$

Par la méthode des résidus :

$$y(n) = \lim_{z \to 1}\left(\frac{d}{dz}\left[z(z-2)z^{n-1}\right]\right) = 1 - n$$

ensem