Corrigé de l'examen de Traitement du Signal du 26/01/2011

On a le filtre causal suivant :

$$H(z) = K\frac{z^2 - 2\cos(2\pi f_0)z + 1}{z^2 - 2\rho\cos(2\pi f_0)z + \rho^2}$$

K, ρ > 0 et soit C=cos(2πf0)

1) **RdC et stabilité** : RdC $|z| > \rho$, stabilité si ρ < 1 (ρ : module des pôles conjugués)

Les pôles sont :

$$z_1 = \rho e^{+j2\pi f_0}$$

$$z_2 = \rho e^{-j2\pi f_0}$$

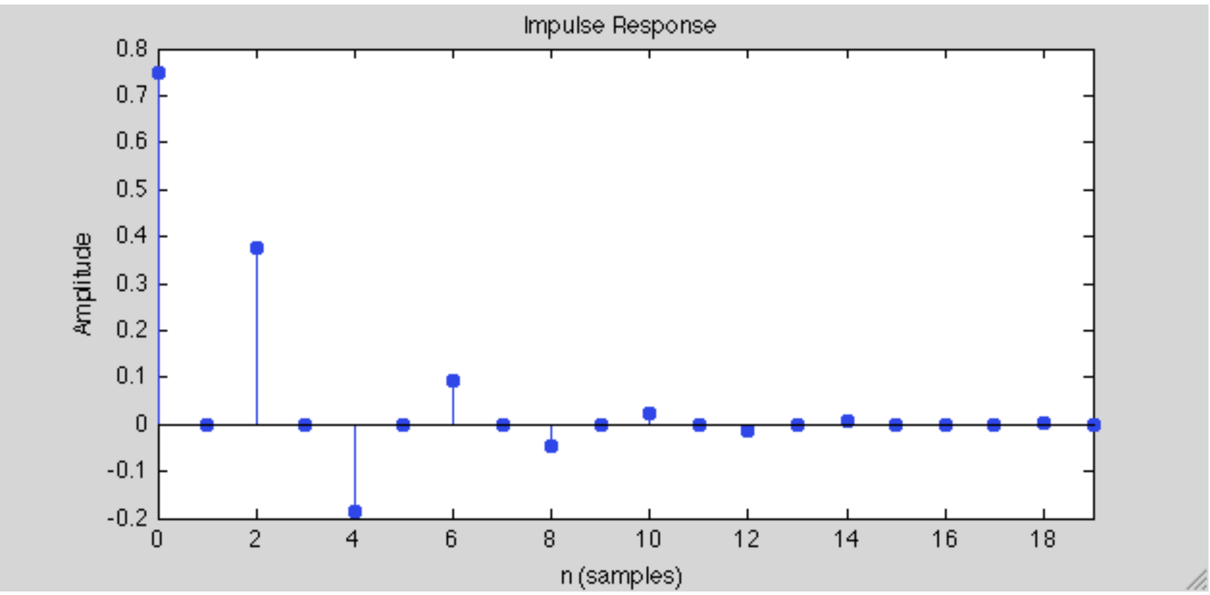
2) **Algorithme de filtrage :** $y(n)=K[x(n)-2Cx(n-1)+x(n-2)]+2\rho Cy(n-1)-\rho^2 y(n-2)$

3) **Réponse impulsionnelle** et calcul des 4 premiers termes : x(n) = δ(n)

D'où : $y(0)=K$
$y(1)= -2KC+2\rho KC=2KC(\rho-1)$
$y(2)= K+2\rho C.y(1)-K\rho^2$
$y(3)= 2\rho C.y(2)- \rho^2.y(1)$

On impose :
$y(0)=K=0,75$
$y(1)= 2KC(\rho-1)=0$
solutions possibles : C=0 ou ρ=1 (dans ce cas le filtre n'a plus de sens, il devient H(z)=K)
donc C=0 ⇒ f0=1/4
$y(2)=K- K\rho^2 = K(1- \rho^2) = 0.3750$ d'où $\rho^2 =1/2$ et $\rho = 1/\sqrt{2}$

$\{h_n\}=\{\underline{0.7500}, 0, 0.3750, 0, -0.1875, 0, 0.0937, 0, -0.0469, 0, 0.0234, 0, -0.0117, 0, 0.0059, \ldots\}$



4) Calcul de y(n) analytique :

La transmittance H(z) est définie par : $H(z) = K\dfrac{1+z^{-2}}{1+\rho^2 z^{-2}}$

Les tables donnent :

$$\frac{1-\left[\rho\cos(\omega_0)\right]z^{-1}}{1-\left[2\rho\cos(\omega_0)\right]z^{-1}+\rho^2 z^{-2}} \text{ avec } z>|\rho| \rightarrow \left[\rho^n\cos(\omega_0 n)\right]u(n)$$

Pour f0=1/4 soit ω0=π/2 : $\dfrac{1}{1+\rho^2 z^{-2}} \rightarrow \left[\rho^n\cos(\dfrac{\pi}{2}n)\right]u(n)$

D'où : $h(n) = K\left[\rho^n\cos(n\pi/2)u(n)+\rho^{n-2}\cos((n-2)\pi/2)u(n-2)\right]$

On retrouve bien les valeurs h(0)=K, h(1)=0, h(2)=K(1- ρ^2), h(3)=0.

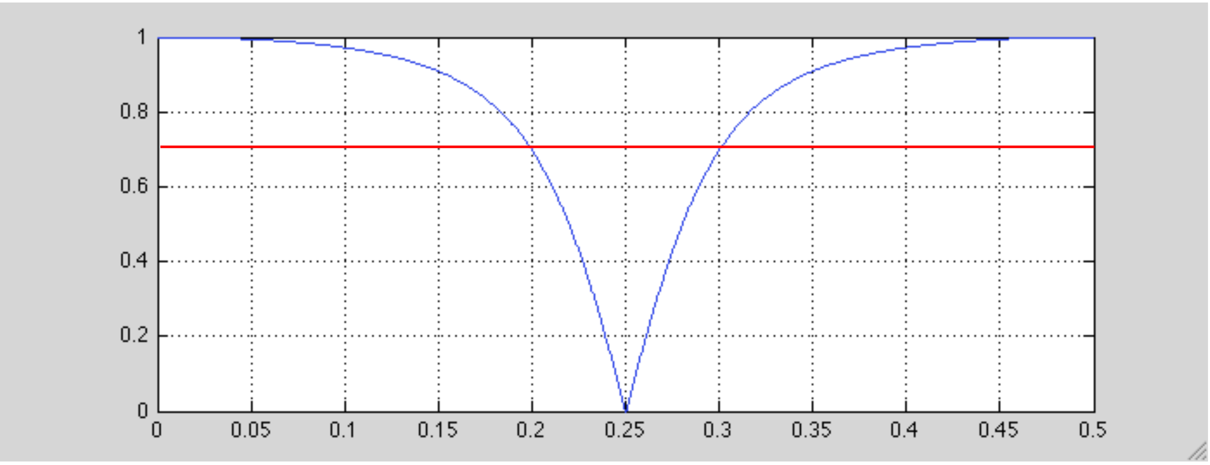
5) Pôles et zéros :

Pôles : ±jρ = ±j1/√2 et Zéros : ±j

On en déduit que : le module est nul à ω=±π/2 soit à f=±1/4.
Pour z=±1 soit pour f=±1/2 on a : H(±1)=2K/(1+ ρ^2) qui est le gain maximum.
On en déduit la valeur générale de normalisation en fonction de ρ : K= (1+ ρ^2)/2

6) Réponse fréquentielle de H(z) en fonction de la fréquence :

Tracé du gain de H(z) avec les données : K=3/4, f0=1/4 et ρ=1/√2.



On reconnaît un filtre de type réjecteur de bande.

Etude de la bande passante en fonction de ρ :
K dépend de ρ, il faut donc partir de $H(z)=K(1+z^{-2})/(1+\rho^2 z^{-2})$ avec : $K=(1+\rho^2)/2$ pour normaliser.

La BP est définie pour une atténuation du gain à $1/\sqrt{2}$ soit -3db.
On a :

$$H(z)=\frac{1+\rho^2}{2}\left(\frac{z^2+1}{z^2+\rho^2}\right)$$

On obtient alors la condition sur le gain : $\frac{1+\rho^2}{2}\frac{|z^2+1|}{|z^2+\rho^2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Le module s'écrit : $|H(e^{j\omega})|=\frac{1+\rho^2}{2}\frac{\sqrt{2(\cos(2\omega)+1)}}{\sqrt{1+\rho^4+2\rho^2\cos(2\omega)}}$ (1)

soit aussi : $|H(e^{j\omega})|=\frac{1+\rho^2}{2}\frac{2\cos(\omega)}{\sqrt{1+\rho^4+2\rho^2\cos(2\omega)}}$

En passant en fréquentiel et en développant (1) on obtient : $\cos(2\omega)=\frac{-2\rho^2}{1+\rho^4}$

La condition pour avoir une solution est $\rho\leq 1$, si $\rho=1$, $\cos(2\omega)=-1$, la BP devient nulle.
Si ρ diminue, l'angle 2ω augmente et la BP s'élargit.

Si $\rho=1/\sqrt{2}$ on obtient : $\cos(2\omega)=-4/5=-0.8$

D'où les pulsations de coupure : $2\omega c=\pi-\delta c=143°,13$ $\omega c1=\pi/2-\delta c/2=71,6°$
D'où : $\delta c/2=\pm 18,4°$ (la solution est aussi vérifiée pour $2\omega c=\pi+\delta c=216,9°$).
Soit en fréquence : fc=0.25 ± 0.051
La bande passante autour de f0 est donc de [0.199, 0.301] ≈ [0.2, 0.3] ce que confirme la courbe de gain.

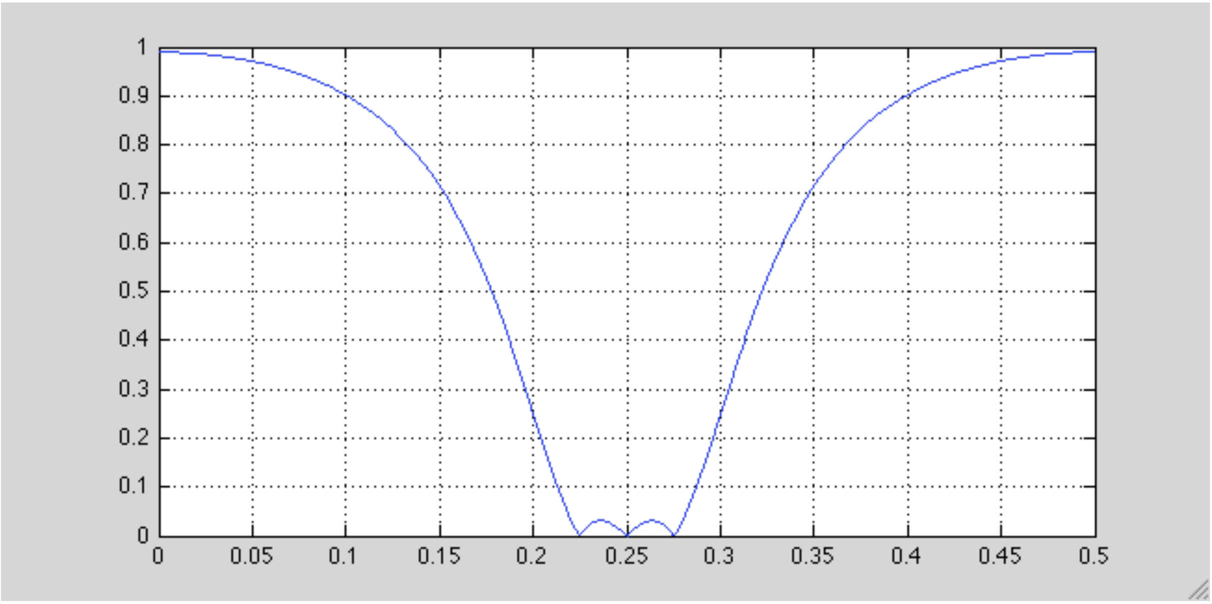
7) Traitement du sifflement s(n)=Ssin(n2πfs/fe) :

On a : fs=5KHz
On obtiendra S=0 en régime permanent en calant fs/fe sur la fréquence f0 du filtre H(z).
Le seul réglage possible est fe : d'où fs/fe=1/4 soit fe=4fs=20KHz.

La variation sur fs est telle que : fs=(5±0,5) KHz et donc fs/fe==(5±0,5)/20 = 0,25±0,025
On reste dans la bande passante du filtre.
Pour les bornes inférieure f=0,225 et supérieure f=0,275, l'atténuation est de : 0,4.
Ce qui est globalement peu efficace.

Améliorations possibles :
Pour élargir la bande de gain nul, on peut rajouter des structures similaires centrées sur les valeurs extrêmes de f0.
Soient f1=0,225 et f2=0,275 et soient H1(z) et H2(z) les transmittances associées.
On forme une nouvelle transmittance H12(z) = H1(z).H(z).H2(z)

Allure du nouveau gain :



On remarque que le résultat visé est correct, en revanche la bande passante s'est élargie (elle a doublé) et l'ordre du filtre est maintenant de 6 !
Pour un meilleur résultat, une synthèse sous forme RII par transformation bilinéaire serait plus adéquate.

Gain obtenu pour un Butterworth d'ordre 6 et de BP (0.225, 0.275). C'est nettement plus efficace !