Chapitre 8
Transformée en z

1. Définition

On recherche un opérateur qui simplifie l'analyse et le traitement des séquences numériques

- transforme un produit de convolution en produit algébrique
- permet l 'analyse des régimes transitoires et des propriétés fréquentielles

Outil : la transformée en z TZ

Définition : $\{x_n\} \xrightarrow{Z} Z[\{x_n\}] = \sum_n x_n.z^{-n}$ $z \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$

R **C**

TZ bilatérale : $X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n.z^{-n}$ signaux anticausaux

TZ monolatérale : $X(z) = \sum_{0}^{+\infty} x_n.z^{-n}$ signaux causaux $n \geq 0$

2. Domaine de convergence de la série

<u>Région de convergence :</u>

Existe-t-il un domaine de convergence A_X (DdC ou RdC) de la série tel que :

$$z \in A_X, \qquad Z[\{x_n\}] = \sum_n x_n z^{-n} \quad \equiv \quad \text{fonction } X(z) \quad ?$$

Si $\exists$ A_X, alors X(z) est unique pour ce domaine A_X.

<u>Propriété :</u>

X(z) est holomorphe, continuement dérivable, dans A_X.

La définition de X(z) doit obligatoirement s'accompagner du RdC A_X.

<u>Exemple pour un signal causal :</u>

$$\{u_n\} \xrightarrow{Z} U(z) = \sum_0^{+\infty} 1.z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad A_u : |z| > 1$$

3. Domaine de convergence de la TZ bilatérale

TZ bilatérale :

$$\underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n}}_{\text{bilatérale}} = \underbrace{\sum_{-\infty}^{-1} x_n z^{-n}}_{\text{monolatérale gauche}} + \underbrace{\sum_{0}^{+\infty} x_n z^{-n}}_{\text{monolatérale droite}}$$

Partie monolatérale droite :

$$\sum_{0}^{+\infty} x_n z^{-n} \qquad n \geq 0 \in \mathrm{N}$$

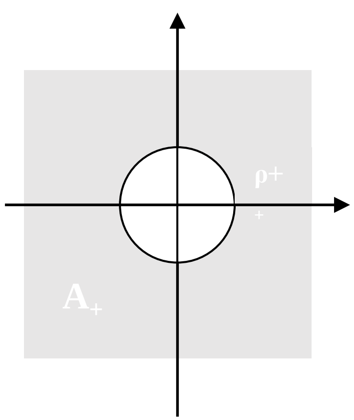
CV : si $\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ |x_n| \leq K\rho_+^n$ avec $\rho_+ > 0$

alors la série géométrique de raison $\rho_+ z^{-1}$ converge.

Domaine de convergence :

CV si $\left|\rho_+ z^{-1}\right| < 1$ soit $|z| > \rho_+$

$A_+ = \left]\rho_+, +\infty\right[$ extérieur du cercle de rayon ρ_+



D'où la TZ correspondante : $X^+(z) = \sum_{0}^{+\infty} x_n . z^{-n}$ $A_+ = \left]\rho_+, +\infty\right[$

$X^+(z)$ est unique pour A_+

3. Domaine de convergence de la TZ bilatérale (suite)

Partie monolatérale gauche :

$$\sum_{-\infty}^{-1} x_n z^{-n} = \sum_{1}^{+\infty} x_{-k} z^{k} = - x_0 + \sum_{0}^{+\infty} x_{-k} z^{k} \qquad k \geq 0 \in \mathbb{N}$$

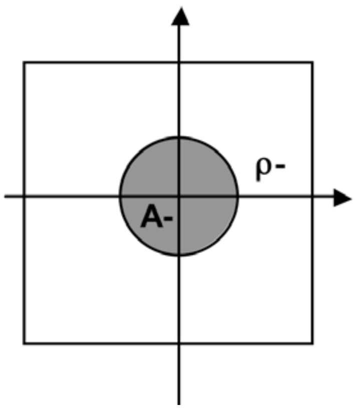
CV : si $\exists k_0,\ \forall k \geq k_0,\ |x_{-k}| \leq K' \left(\frac{1}{\rho_-}\right)^k$ avec $\rho_- > 0$

alors la série géométrique de raison $\frac{z}{\rho_-}$ converge.

Domaine de convergence :

CV si $\left|\frac{z}{\rho_-}\right| < 1$ soit $|z| < \rho_-$

$A_- = [0, \rho_-[$ intérieur du cercle de rayon ρ_-



D'où la TZ correspondante : $X^-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} x_n . z^{-n}$ $\quad A_- = [0, \rho_-[$

$X^-(z)$ est unique pour A_-

3. Domaine de convergence de la TZ bilatérale (suite)

Expression complète de X(z) :

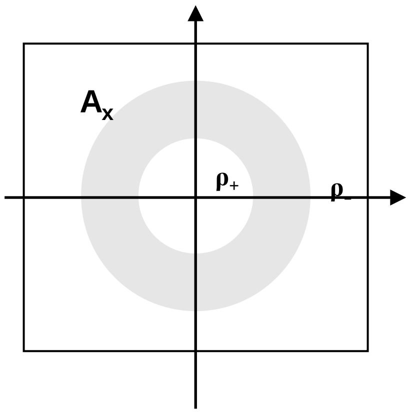
$$X(z) = X^{-}(z) + X^{+}(z)$$

RdC : A_X A_- A_+ $A_X = A_- \cap A_+$

La convergence doit être assurée à gauche et à droite.

$\exists$ X(z) si $A_X \neq \varnothing$ soit $\rho_+ < \rho_-$

$A_X = \left]\rho_+, \rho_-\right[$ intérieur d'une couronne



Exemple :

$$u(n) \xrightarrow{Z} U^{+}(z) = \sum_{0}^{+\infty} 1.z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$U^{+}(z) = \dfrac{z}{z-1}$ $A_+ : |z| > 1$ extérieur du cercle unité

$$-u(-n-1) \xrightarrow{Z} U^{-}(z) = -\sum_{-\infty}^{-1} 1.z^{-n} = 1 - \sum_{0}^{+\infty} 1.z^{n}$$

$U^{-}(z) = \dfrac{z}{z-1}$ $A_- : |z| < 1$ intérieur du cercle unité

4. Propriétés élémentaires de la TZ

Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux séquences numériques.

Linéarité : $Z[\lambda\{a_n\}+\mu\{b_n\}]=\lambda Z[\{a_n\}]+\mu Z[\{b_n\}]$ RdC : $A \cap B$

Décalage :

$$Z[\{a_n\}_{-p}]=z^{-p}Z[\{a_n\}] \quad \forall p\in Z$$

RdC : $A - \{0\}$

Cas particulier de l'avance pour les signaux causaux

$$Z[\{a_n\}_{\alpha}]=z^{\alpha}Z[\{a_n\}]-\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\alpha-1}a_i\, z^{\alpha-i}\right)}_{\text{termes passés à gauche}}$$

Limites : (quand elles existent, et dans le cas causal uniquement)

Valeur initiale : $a_0 = \text{limite}[A(z)]_{z\to+\infty}$

Valeur finale : $a_\infty = \text{limite}\left[(1-z^{-1})A(z)\right]_{z\to 1}$

4. Propriétés élémentaires de la TZ (suite)

Transformation d'un produit de convolution :

$$Z\left[\{a_n\} * \{b_n\}\right] = Z\left[\{a_n\}\right] \times Z\left[\{b_n\}\right]$$

Transformation d'un produit :

$$Z\left[\{a_n\} \times \{b_n\}\right] = Z\left[\{a_n\}\right] * Z\left[\{b_n\}\right]$$

Changement d'échelle en z : $\lambda^n b(n) \longrightarrow B(\frac{z}{\lambda})$ RdC : $|\lambda|.A_b$

Retournement : $b(-n) \longrightarrow B(z^{-1})$ RdC : A_b^{-1}

Dérivation en z : $nb(n) \longrightarrow -z\frac{dB(z)}{dz}$ RdC : A_b

5. Table de Transformées en Z de fonctions usuelles

Signal	TZ	RdC
$\delta(n)$	1	plan z
$\delta(n-p)$	z^{-p}	plan z –{0} (p>0)
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\alpha^n u(n)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$

5. Table de Transformées en Z (suite)

Signal	TZ	RdC
$n\alpha^n u(n)$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$z > \lvert\alpha\rvert$
$[\sin(\omega_0 n)]u(n)$	$\dfrac{[\sin(\omega_0)]z^{-1}}{1-2[\cos(\omega_0)]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$[\cos(\omega_0 n)]u(n)$	$\dfrac{1-[\cos(\omega_0)]z^{-1}}{1-2[\cos(\omega_0)]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$

6. Application de la TZ

$\{x_n\}$ → $\{a_n\}$ Filtre numérique → $\{y_n\} = \{a_n\} * \{x_n\}$ convolution discrète

$X(z)$ $A(z)$ $Y(z)$ $Y(z) = A(z) \times X(z)$

$$Y(z) \xrightarrow{Z^{-1}} \{y_n\}$$

Exemple :

Entrée : u(n), filtre : $\{a_n\} = \frac{1}{3}\{\underline{1}, 1, 1\}$, calculer $\{y_n\}$ avec la TZ.

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad A(z) = \frac{1}{3}\left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right) \qquad Y(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1}}\right) \quad \text{RdC } |z| > 1$$

$$Y(z) \xrightarrow{Z^{-1}} \{y_n\} \qquad y(n) = \frac{1}{3}\left(u(n) + u(n-1) + u(n-2)\right) \qquad \{y_n\} = \left\{\underline{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1, \ldots\ldots\right\}$$

7. Inversion de la TZ monolatérale

<u>Forme analytique :</u>

Utilisation des tables de transformées.

Méthode des résidus.

Calcul formel.

<u>Forme numérique :</u>

Par division polynomiale.

Par les équations aux différences finies (EDF)

7.1. Inversion de la TZ monolatérale
Utilisation des tables (1)

Calculer la fonction inverse de $F(z) = \dfrac{z}{(z-0.5)(z-1)^2}$ avec $|z| > 1$

Méthode :

Cette TZ n'existe pas dans les tables.

1) Il faut d'abord faire apparaître le facteur z au numérateur s'il n'existe pas (il existe systématiquement sur les TZ classiques sans retard).

2) On décompose en fonction de termes existant dans les tables.

Résultat :

On obtient $Y(z) = \dfrac{4z}{(z-.5)} + \dfrac{2z}{(z-1.)^2} - \dfrac{4z}{(z-1.)}$

D'où $y(n) = (4\cdot(0.5)^n + 2\cdot n - 4)u(n$

7.1. Inversion de la TZ monolatérale
Utilisation des tables (2)

Déterminer la solution analytique causale y(n) de l'équation aux différences finies suivante :

$$y(n) - y(n-1) + 0{,}25y(n-2) = x(n-1) + 0.5x(n-2), \quad \text{avec} \quad x(n) = u(n).$$

Solution : $Y(z) = \dfrac{(z+0.5)z}{(z-0.5)^2(z-1)}$

1) Décomposition directe en éléments simples : $Y(z) = \dfrac{6}{z-1} - \dfrac{1}{(z-0.5)^2} - \dfrac{5}{z-0.5}$

Inversion : $y(n) = 6u(n-1) - 2(n-1)(0.5)^{n-1} - 5(0.5)^{n-1}$

2) Avec mise en facteur de z : $Y(z) = \dfrac{(z+0.5)z}{(z-0.5)^2(z-1)} = z\left\{\dfrac{(z+0.5)}{(z-0.5)^2(z-1)}\right\}$

$$Y(z) = z\left\{\frac{6}{z-1} - \frac{2}{(z-0.5)^2} - \frac{6}{z-0.5}\right\}$$ d'où : $y(n) = 6u(n) - 4n(0.5)^n - 6(0.5)^n$

Les résultats sont identiques.

8. Exemples d 'inversion d 'une TZ (monolatérale à droite) par division polynomiale

Division polynomiale :
Cette méthode permet d'obtenir directement la séquence sous forme numérique.

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

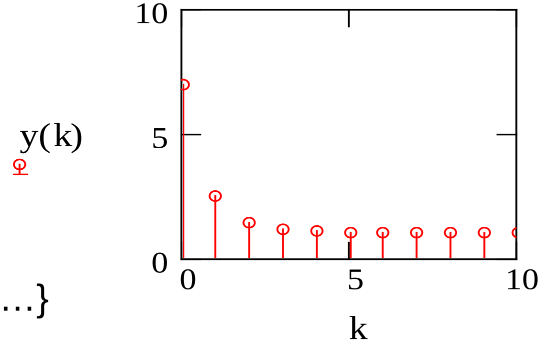
N(z) et D(z) polynômes ordonnés en puissances décroissantes de z^{-1}

Calcul de la division euclidienne de N(z) par D(z)

Quotient $Y(z) = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots + y_n z^{-n} + \dots\dots$

Par définition : $Y(z) = \sum_{0}^{+\infty} y_n z^{-n}$ d'où $\{y_n\}$ par identification.

$$Y(z) = \frac{7(1 - \frac{47}{35} z^{-1} + \frac{14}{35} z^{-2})}{(1 - 1.7z^{-1} + 0.8z^{-2} - 0.1z^{-3})}$$



$\{y_n\}$={ $\underline{7}$, 2.5, 1.45, 1.165, 1.071, 1.033, 1.016, …, 1, …}

9. Calcul des résidus (rappel)

Calcul des résidus

Soit F(z) une fonction de la variable complexe z.
Soit un contour fermé C dans le plan complexe.

D'après le théorème de Cauchy, on a :

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)dz = \sum_{\rho_i \in \mathrm{int}(C)} \text{Résidus}\left[F(z)\right]_{z=\rho_i}$$

Les ρ_i sont les pôles de F(z)

Calcul du résidu pour un pôle simple ρ_0 **:**

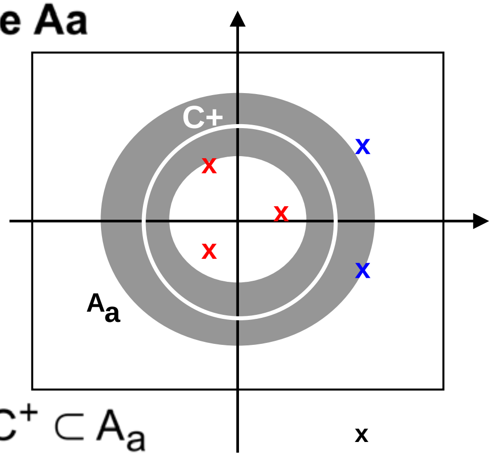
$$\text{Résidus}\left[F(z)\right]_{z=\rho_0} = \left[\left(z-\rho_0\right) F(z)\right]_{z=\rho_0}$$

Calcul du résidu pour un pôle d'ordre N ρ_N **:**

$$\text{Résidus}\left[F(z)\right]_{z=\rho_N} = \frac{1}{\left(N-1\right)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left[\left(z-\rho_N\right)^N F(z)\right]_{z=\rho_N}$$

9. Inversion de A(z) par calcul des résidus

Inversion de $A(z) = TZ\left[\{a_n\}\right]$ **RdC couronne Aa**



On a : $A(z) = \sum_p a_p\, z^{-p}$

Calculons : $A(z)\, z^{n-1} = \sum_p a_p\, z^{-p+n-1}$

Soit le contour fermé C^+ (cercle dans le sens direct) tel que $C^+ \subset A_a$

Calculons :

$A(z)\, z^{n-1} = \sum_p a_p\, z^{-p+n-1}$ et $\oint_{C^+} A(z)\, z^{n-1} dz = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \oint_{C^+} a_p\, z^{-p+n-1} dz$

d'où : $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \oint_{C^+} a_p\, z^{-p+n-1} dz = \oint_{C^+} a_p\, z^{-1} dz = j2\pi a_p$ (seul terme $\neq 0$ pour p=n)

On obtient : $a(n) = \sum_i \text{Résidus}\left[A(z)\, z^{n-1}\right]_{z=\rho_i\, \in \text{int}(C^+)}$

<u>Remarque :</u> la suite a(n) est causale (monolatérale à droite).

10. Cas de la TZ bilatérale

Inversion de X(z) dans un anneau de convergence A_x

Dans A_x, on peut écrire : $X(z) = X^-(z) + X^+(z)$

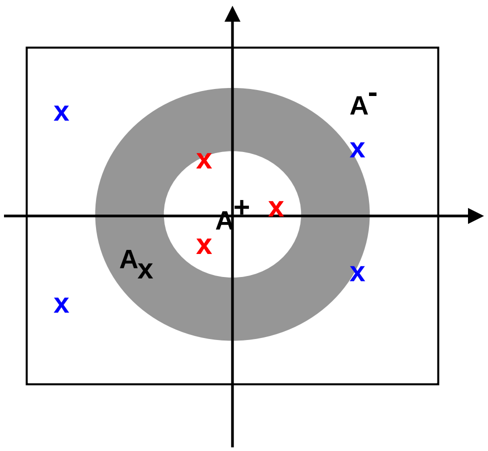
$X^-(z)$ partie anticausale de $X(z)$ $\quad$ $X^+(z)$ partie causale de $X(z)$.

Partition du plan complexe :

A^+ (zone intérieure) : contient les pôles de $X^+(z)$

A_x (couronne) : ne contient aucun pôle (par définition)

A^- (zone extérieure) : contient les pôles de $X^-(z)$.



D'où : $X^+(z) \xrightarrow{Z^{-1}} x^+(n)\,u(n)$ $\qquad$ $X^-(z) \xrightarrow{Z^{-1}} x^-(n)\,u(-n-1)$

$$x(n) = x^+(n)\,u(n) + x^-(n)\,u(\text{-}n\,\text{-}\,1)$$

Inversion de $X^-(z)$ par les résidus :

Les pôles sont extérieurs au contour C⁺, on pose : $v = \frac{1}{z}$, d'où : $A_v = A_x^{-1}$

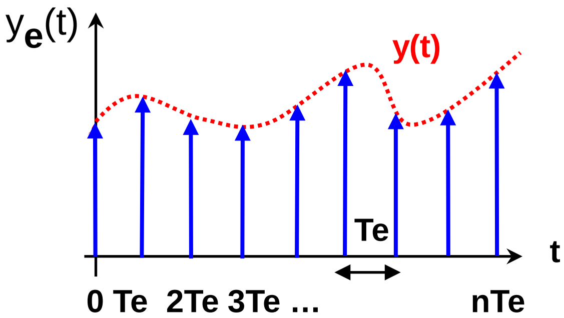
$$x^-(n) = \frac{1}{j2\pi}\oint_{C^+} X\left(\frac{1}{v}\right) v^{-n-1} dv \qquad \text{(n'est pas utilisé)}$$

Méthode d'inversion conseillée :

Décomposition en éléments simples de $X^+(z)$ et $X^-(z)$, puis utilisation des tables.

11. Relation TL-TZ pour les signaux à temps discrets

- **Soit $y_e(t)$ un signal à temps discret**, obtenu par échantillonnage
- de y(t) à la période Te.



- La séquence échantillonnée s'écrit :

$$\{ y(0), y(Te), y(2Te), ..., y(nTe), ...\} \longrightarrow \{ y_n \} = \{ y_0, y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$$

Expression de $y_e(t)$:

$$y_e(t) = y(t).\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nTe) = \sum_{n=0}^{+\infty} y(nTe).\delta(t - nTe)$$

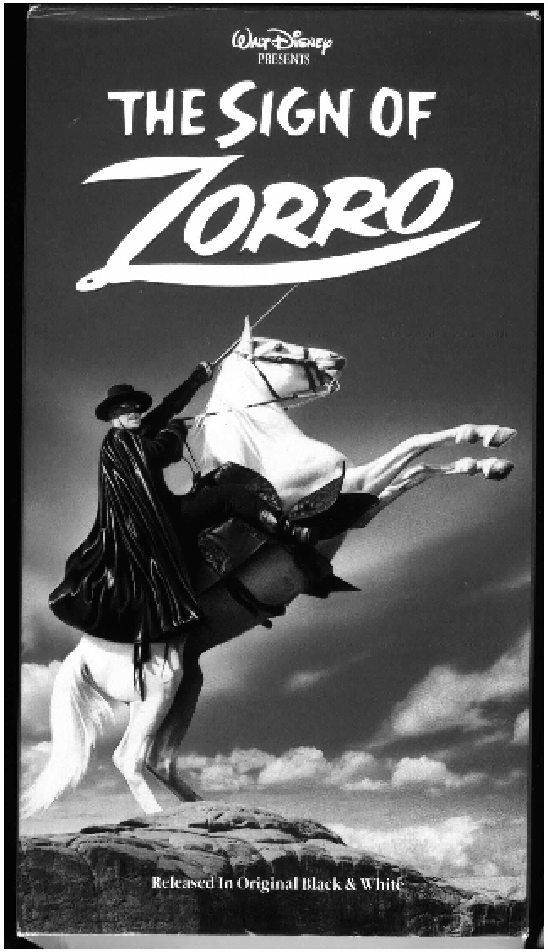
Calcul de la transformée de Laplace de $y_e(t)$: $Y_e(p) = \int_{t=0}^{+\infty} y_e(t).e^{-pt}dt$

On obtient :

$$Y_e(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} y(nTe).\int_{t=0}^{+\infty} \delta(t - nTe).e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} y(nTe).e^{-pnTe}$$

avec : $\int_{t=0}^{+\infty} \delta(t - nTe).g(t)dt = g(nTe)$

Finalement on peut écrire : $TZ[\{y_n\}] \equiv TL[y_e(t)] \quad \text{avec} \quad z = e^{pTe}$



Z comme …… ZADEH !

Professeur Lofti A. ZADEH

Né en 1921.
Professeur émérite à Berkeley (Université de Californie)

L. A. ZADEH : Summary of principal contributions

1. Development of a frequency-domain based theory of time-varying networks, 1949.
2. Extension of Wiener's theory of prediction, with J.R. Ragazzini, 1950.
3. Development of the z-transform approach, with J.R. Ragazzini, 1952.
4. Development of a theory of nonlinear filters, 1953.
5. Formulation of the problem of system identification, 1956.
6. Initiation of the state-space approach to the analysis of linear systems, with C.A. Desoer, 1963.
7. Initiation of the theory of fuzzy sets, 1965.
8. Development of a theory of decision-making in a fuzzy environment, with R.E. Bellman, 1970.
9. Introduction of the concepts of a linguistic variable and fuzzy if-then rules, 1973. This work laid the foundation for fuzzy logic control and most of the current applications of fuzzy logic.
10. Development of possibility theory, 1978.
11. Development of PRUF - a meaning representation language for natural languages, 1978.
12. Development of a theory of approximate reasoning, 1979.
13. Development of a theory of ususality and commonsense reasoning, 1985.
14. Development of test-score semantics for natural languages, 1986.
15. Development of the concept of a generalized constraint, 1986.
16. Development of dispositional logic, 1988.
17. Initiation of the calculii of fuzzy rules, fuzzy graphs and fuzzy probabilities, 1991.
18. Development of Soft Computing, 1991.
19. Development of Computing with Words, 1996.
20. Development of a theory of fuzzy information granulation, 1997.
21. Development of a Computational Theory of Perceptions, 1998.
22. Development of Precisiated Natural Language, 2000.
23. Development of a perception-based theory of probabilistic reasoning, 2001.
24. Development of the concept of generalized definability, 2001.