Examen du module Traitement du Signal (S7-SI30)

Partie A

Durée : 2h.
Sans document.
Rédiger les parties A et B sur des copies différentes.

1. 1.1. Expliquer les notions de stationnarité et d'ergodicité.

1.2. Soit p(x) la densité de probabilité d'un processus aléatoire stationnaire et ergodique. Donner les expressions analytiques de la moyenne et de la variance.

1.3. Soit un bruit analogique b(t) qui a la propriété suivante :

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} b(t).b(t+\tau)dt\right) = e^{-\alpha|\tau|} \quad \alpha > 0$$

1.4. Donner la fonction d'autocorrélation de b(t),

1.5. Calculer la densité spectrale de puissance et la représenter graphiquement,

1.6. Etudier la densité spectrale pour α proche de 0 et α tendant vers l'infini. Conclusion ?

2. Soit s(t) un signal analogique périodique de période P = 100 ms dont on désire faire l'analyse spectrale sur $N=2^n$ points, $n \in N$.

2.2. Donner les fréquences pour lesquelles le signal s(t) a un spectre non nul.

2.3. Donner le support du spectre calculable sur ordinateur.

2.4. Doit-on utiliser un filtre antirepliement ? Si oui donner la fréquence de coupure.

2.5. En déduire la fréquence d'échantillonnage.

2.6. Calculer la durée D de signal à considérer,

2.7. Donner la résolution fréquentielle.

3. Soit un filtre numérique passe-bas de réponse impulsionnelle h(n) = [$\underline{a_1}$, a_2, a_3] appliqué sur un signal échantillonné à 2000Hz. Les coefficients du filtre sont calculés pour avoir une fréquence de coupure fc= 750 Hz.

3.1. Donner la valeur de la période spectrale du filtre.

3.2. Que devient le spectre du module de la réponse fréquentielle du signal filtré si on modifie la réponse impulsionnelle comme suit : h1(n) = [a_1, a_2, $\underline{a_3}$] ?

3.3. Quel sera l'effet du filtrage sur un signal numérique de support spectral [-2000,2000] Hz ? Donner les principales caractéristiques.

Examen du module Traitement du Signal (S7-SI30)

Partie B

Durée : 2h.
Sans document.
Rédiger les parties A et B sur des copies différentes.

Exercice B1 :
On crée une fonction fenêtre w(n) par convolution telle que :

$$w(n) = \frac{1}{16}\left[u(n) - u(n-4)\right] * \left[u(n) - u(n-4)\right]$$

B1.1 Calculer par convolution la séquence numérique $\{w_n\}$ correspondant à w(n).

B1.2 Calculer W1(z) la transformée en z de la séquence $\{w_n\}$ d'une part et W2(z) celle de w(n) d'autre part. Montrer que W1(z) et W2(z) sont équivalentes.
B1.3 On étudie la réponse fréquentielle de W1(z) sous la forme :

$$W1(e^{j2\pi f}) = \left|W1(e^{j2\pi f})\right| e^{j\varphi(f)}$$

Montrer que le module de $W1(e^{j2\pi f})$ peut s'écrire sous la forme : $\left|\sum_{k=0}^{3} a_k \cos(2k\pi f)\right|$.

Exprimer la phase φ(f). Commentaires.
B1.4 Tracer la courbe du spectre en fonction de f d'après le diagramme des pôles et des zéros de W2(z). Remarques sur les propriétés fréquentielles de ce spectre.
B1.5 Déterminer la largeur L du lobe principal du spectre aux passages par zéro.
B1.6 Comparer cette largeur avec celle présentée par le spectre de la fonction fenêtre de type "porte" telle que : $w_p(n) = \frac{1}{7}\left[u(n) - u(n-7)\right]$

B1.7 Commenter les caractéristiques fréquentielles de ces deux fonctions fenêtres dans un contexte analyse spectrale d'une tranche de signal.

Exercice B2 :
On désire créer un filtre H(z) de type RII ayant les propriétés suivantes :

- gain unitaire pour le continu et pour les maxima du spectre,
- gain nul aux extrémités du spectre,
- rejet d'un bande de fréquence autour d'une fréquence f_0.

La figure 1 ci-après donne l'allure souhaitée pour le spectre de ce filtre.

Pour réaliser la synthèse de ce filtre, on utilise le modèle de transmittance suivant :

$$H(z) = K\frac{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}{(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})} \cdot \frac{(1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2})}{(1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2})}$$

B2.1 Traduire les exigences ci-dessus en contraintes sur les paramètres du filtre.

B2.2 On choisit f_0=100Hz pour une fréquence d'échantillonnage de 10KHz. Proposer une solution simple pour H(z) et tracer approximativement le spectre obtenu.

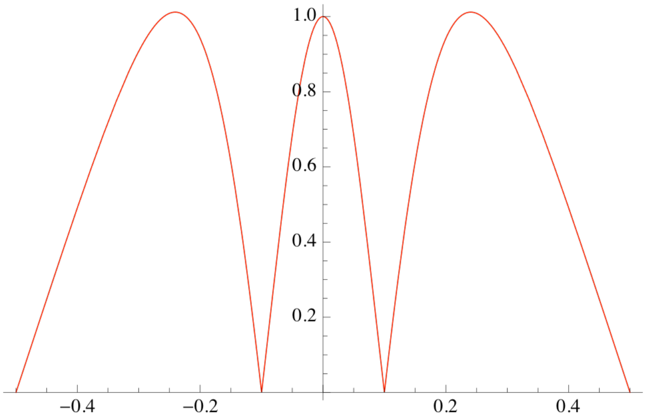

Figure 1 : Spectre $|H(e^{j2\pi f})|$ en fonction de f