Examen du module Traitement du Signal

Durée : 2h. Sans document

Nom :
Prénom :

65 pts au total

1pt par question

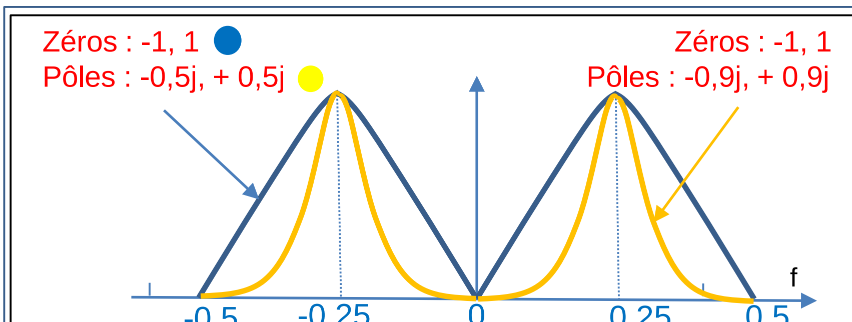
Exercice 1 : Cocher la réponse qui vous semble exacte

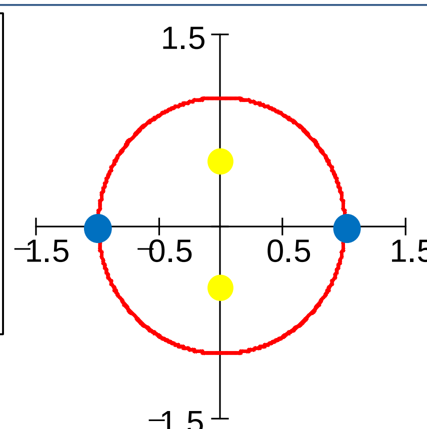
Questions	oui	non
1. Soit $R(t) = T(t) \otimes e^{2\pi j ft}$ R(t) est-elle sinusoïdale ? Question ambigüe : supprimée		
2. Un filtre RIF peut être de type AR		x
3. Sous échantillonner un signal numérique nécessite un filtrage anti-repliement ?	x	
4. La technique de la transformée de Fourier discrète permet l'estimation des composantes spectrales d'un signal périodique sans erreur	x	
5. Un processus est dit ergodique au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps		x
6. Pour un signal appartenant à L_2, l'autocorrélation $C(\tau)$ (pour τ=0) est égale à l'énergie du signal	x	
7. Un filtre numérique anti-causal peut-il être implémenté en temps réel ?		x
8. Le spectre de fréquence d'un filtre numérique est continu	x	
9. Peut-on définir un filtre numérique passe bas tel que le gain tende vers zéro quand f tend vers l'infini ?		x
10. Un filtre numérique peut s'exprimer sous la forme d'une équation aux différences finies	x	

Exercice 2 (sur 8 pts)

A l'aide de la représentation pôles/zéros, étudier la réponse fréquentielle de $H(z) = K\dfrac{z^2-1}{z^2+0.25}$

1. Donner l'allure du graphe du module de H(f) 3pts
2. Calculer K pour normaliser le gain maximum à 1 2pts
3. Comment pourrait-on réduire la bande passante ? 3pts





K= (0,5x1,5)/2 = 0,375

3 Déplacer les pôles vers –j et j

1pt par question

Exercice 3 (sur 8 pts)

On souhaite faire l'analyse spectrale du bruit sonore généré par une machine tournante. Ce bruit est supposé stationnaire et périodique. Une analyse temporelle du bruit a montré que la période est de 1 ms.

1. Définir la bande passante du microphone à utiliser
2. Doit-on utiliser un filtre anti-repliement ? Si oui donner les caractéristiques du filtre.
3. Doit-on utiliser une fenêtre de troncature de type porte ?
4. Donner la résolution fréquentielle (Δf).
5. Calculer la durée de signal minimale à prélever.
6. Calculer le nombre d'échantillons N à traiter.
7. On utilise un algorithme FFT pour faire les calculs. Calculer la fréquence d'échantillonnage.
8. La fréquence d'échantillonnage calculée à la question 7 vérifie t-elle la condition de Shannon

1:BP : 20 kHz

2: oui, fc = 20 kHz

3: oui

4: Δf= 1 kHz

5:D= 1 ms

6:N= 40

N'= 64
7: Fe= 64 kHz

8: Oui

1pt par question

Exercice 4 (sur 3 pts)

Soit un filtre numérique passe-bas de réponse impulsionnelle h(n) = [a_1, a_2, a_3] appliqué sur un signal échantillonné à 2000Hz. Les coefficients du filtre sont calculés pour avoir une fréquence de coupure fc= 750 Hz.

1. Donner la valeur de la période spectrale du filtre
2. Que devient le module de la réponse fréquentielle du signal filtré si on modifie la réponse impulsionnelle comme suit : h1(n) = [a_1, a_2, a_3]
3. Quel sera l'effet du filtrage sur un signal numérique de fréquence d'échantillonnage Fe= 4000 Hz. Donner les principales caractéristiques.

1	2	3
2000 Hz	Aucun changement seule la phase est affectée	filtrage passe-bas de fc= 1500 Hz

Exercice 5 (sur 7 pts)

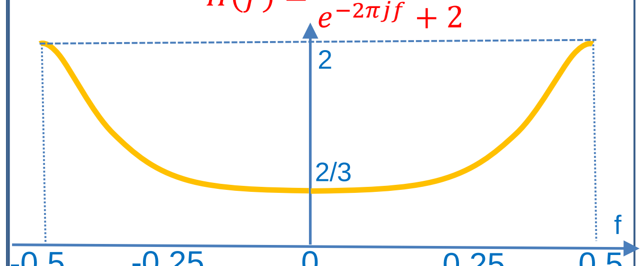
Soit la relation de récurrence : $y(n)+\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)$

1. Déterminer la fonction de transfert H(z) du filtre défini par cette relation 1 pt
2. Quelles sont les propriétés du filtre ? 2 pts
3. Exprimez et tracez ||H(f)|| 4 pts

1 $H(z)=\frac{2}{z^{-1}+2}$

2 Filtre causal,
autoregressif,
Ordre 1

3 $z=e^{2\pi jf}$ $H(f)=\frac{2}{e^{-2\pi jf}+2}$



Exercice 5 (Application directe du TD5) (sur 30 pts)

Soit le signal numérique s tel que s(n) : …. 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 <u>1</u> 1 1 1 0 0 0 0 0 0 ….

1. Donner une formulation de s(n) en fonction de l'échelon numérique u(n) (2 pts)
2. En déduire la transformée en z, s(z) de s(n) (2 pts)
3. Donner l'expression $\|\hat{s}(f)\|$ (4 pts)
4. Donner la période spectrale f_s de $\|\hat{s}(f)\|$ (2 pts)
5. Soit le signal continu du temps S(t) qui vaut 1 entre -0,5s et 0,5s et 0 ailleurs. Calculer $\|\hat{S}(f)\|$ (2 pts)
6. On suppose maintenant que la période d'échantillonnage de s est T_e=1/8 s, on appelle ce nouveau signal s_{T_e} Donner la nouvelle période spectrale f_{se} (2 pts)
7. En utilisant la propriété de changement d'échelle $\mathcal{F}(g(ax)) = \frac{1}{a}\hat{g}\left(\frac{f}{a}\right)$ calculer $\|\hat{s}_{T_e}(f)\|$ à partir de $\|\hat{s}(f)\|$ (3 pts)
8. En utilisant la propriété du peigne de Dirac ci-dessous, calculer $\|\hat{s}_{T_e}(f)\|$ à partir de $\|\hat{S}(f)\|$

$$\mathcal{F}\left(PE_D\left(\frac{x}{T}\right)\right)g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}\left(f-\frac{n}{T}\right)$$ (3 pts)

9. Donner l'allure générale des graphes de $\|\hat{s}_{T_e}(f)\|$ et $\|\hat{S}(f)\|$ dans la bande [-8Hz, 8Hz] (4 pts)
10. Comment faire évoluer Te pour que le spectre du signal numérique tende vers le spectre du signal continu (2 pts)
11. Retrouver $\hat{s}_{T_e}(f)$ à partir de la discrétisation de la transformée de Fourier du signal apériodique $\hat{S}(f)$ (4 pts)

1 s(n) = u(n+4)-u(n-4)

2 $S(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}(z^4 - z^{-4})$

3 $z = e^{2\pi jf}$

$$\hat{s}(f) = \frac{1}{1-e^{-2\pi jf}}\left(e^{8\pi jf} - e^{-8\pi jf}\right)$$

$$= \frac{e^{\pi jf}}{(e^{\pi jf} - e^{-\pi jf})}\left(e^{8\pi jf} - e^{-8pijf}\right)$$

$$= \frac{e^{\pi jf}\sin(8\pi f)}{\sin(\pi f)}$$

$$\boxed{\|\hat{s}(f)\| = \left|\frac{\sin(8\pi f)}{\sin(\pi f)}\right|}$$

4 $f_s = 1$

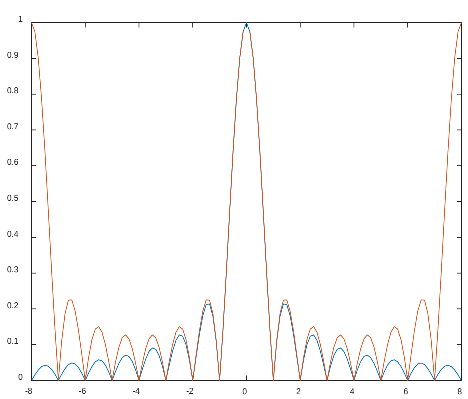
5 $\|\hat{S}(f)\| = \left|\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right|$

6 f_{se}=8

7 $\|\hat{s}_{T_e}(f)\|=\|T_e.\hat{s}(f.T_e)\|=T_e\left|\frac{\sin(8\pi jT_e.f)}{\sin(\pi jT_e.f)}\right| = \frac{1}{8}\left|\frac{\sin(\pi jf)}{\sin\left(\pi j\frac{f}{8}\right)}\right|$

8 $\|\hat{s}_{T_e}(f)\| = \left\|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{S}(f-8n)\right\| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi f - 8n)}{(\pi f - 8n)}\right|$

9



10 $T_e \to 0$ pour que la période spectrale tende vers l'infini

11 $\hat{S}(f) = \int_{-0,5}^{0,5} s(t)e^{-2\pi jft}dt$

$\|\hat{s}_{T_e}(f)\|=\|\sum_{k=-4}^{+3} e^{-2\pi jfkT_e}.\ T_e\|=T_e\left|\frac{\sin(8\pi jT_e.f)}{\sin(\pi jT_e.f)}\right|$