

Les ondelettes

1. Définitions

Une ondelette est une fonction ψ de $L^2(\mathbb{R})$

- de moyenne nulle : $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$
- normalisée : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$
- centrée au voisinage de $t=0$
- les fonctions analysantes sont obtenues par translation et dilation de ψ :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \begin{array}{l} a : \text{dilatation} \\ b : \text{translation} \end{array}$$

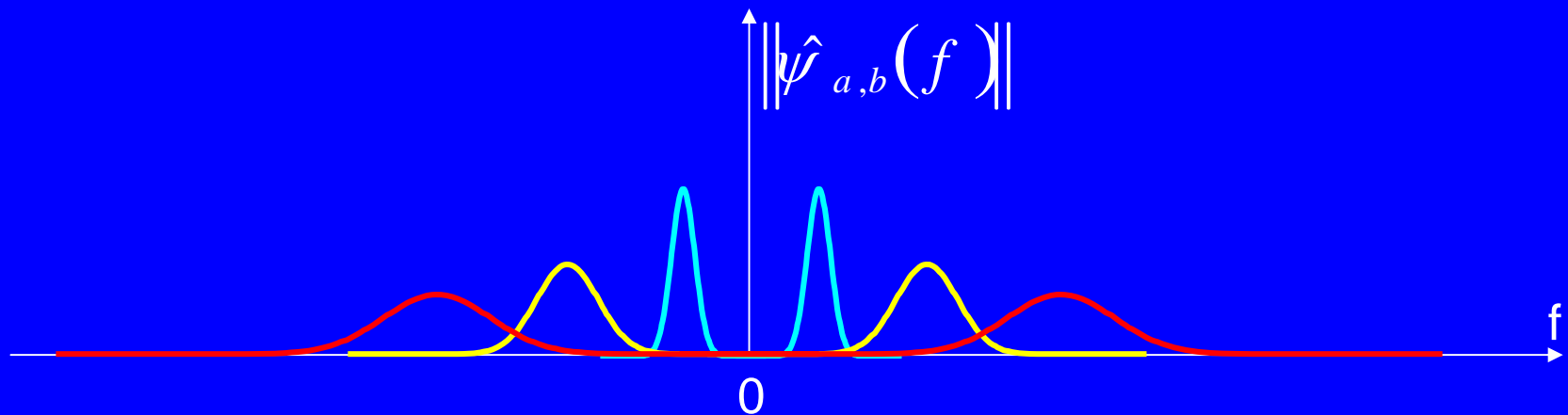
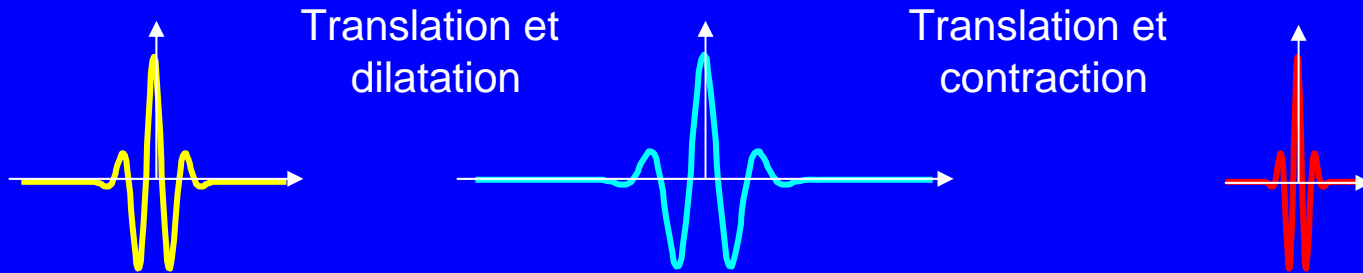
La transformée en ondelettes de $f(t)$ s'obtient en faisant le produit scalaire de $f(t)$ par $\psi_{a,b}(t)$

$$W f(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

Supposons $\psi_{a,b}(t)$ réelle

Lorsque a est grand
 $\psi_{a,b}(t)$ oscille longtemps

Lorsque a est petit $\psi_{a,b}(t)$ se
contracte autour du point $t=0$



Dans le cas où $f(t)$ est réelle et ψ complexe
 $W f(a, b)$ est complexe

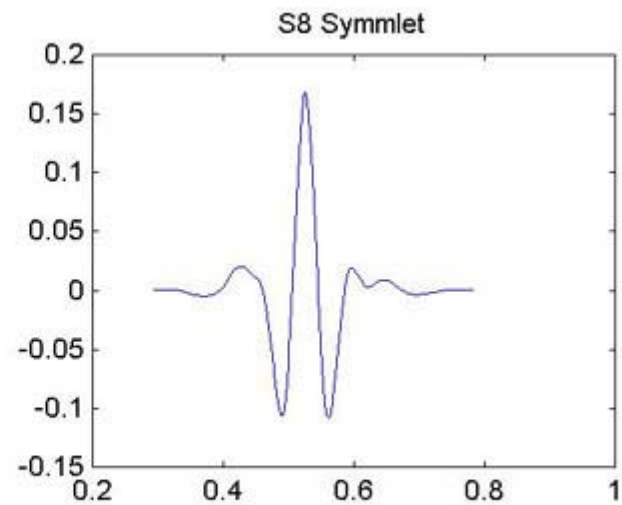
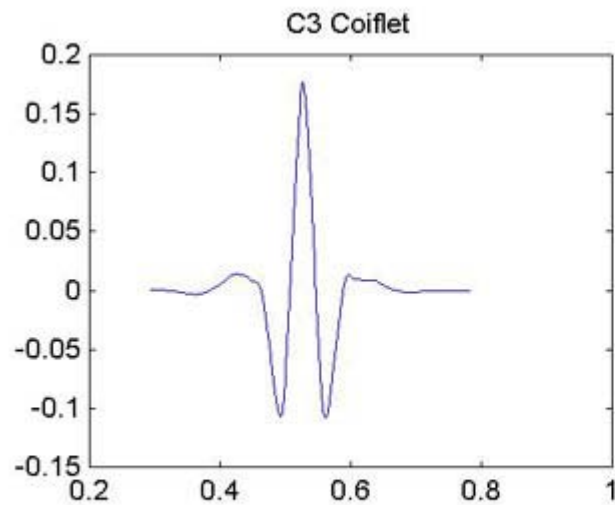
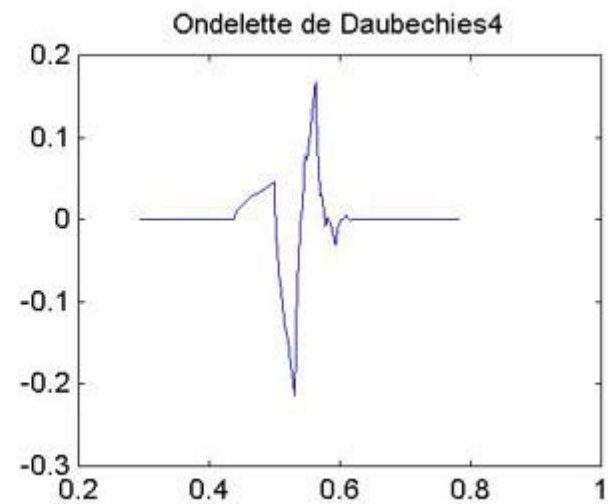
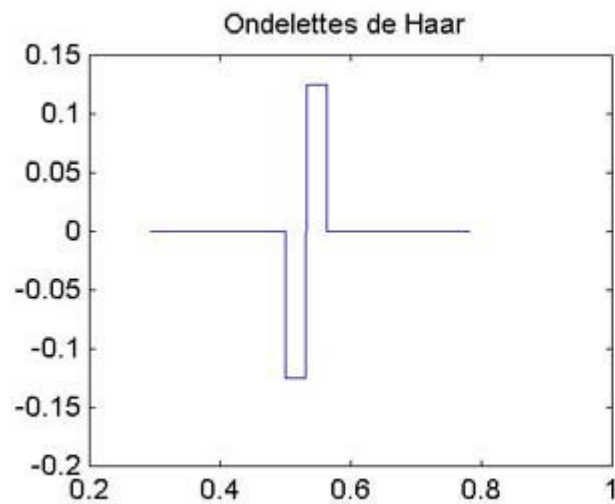
$$W f(a, b) \begin{cases} \|W f(a, b)\| : \text{module} \\ \text{Arg}(W f(a, b)) : \text{phase} \end{cases}$$

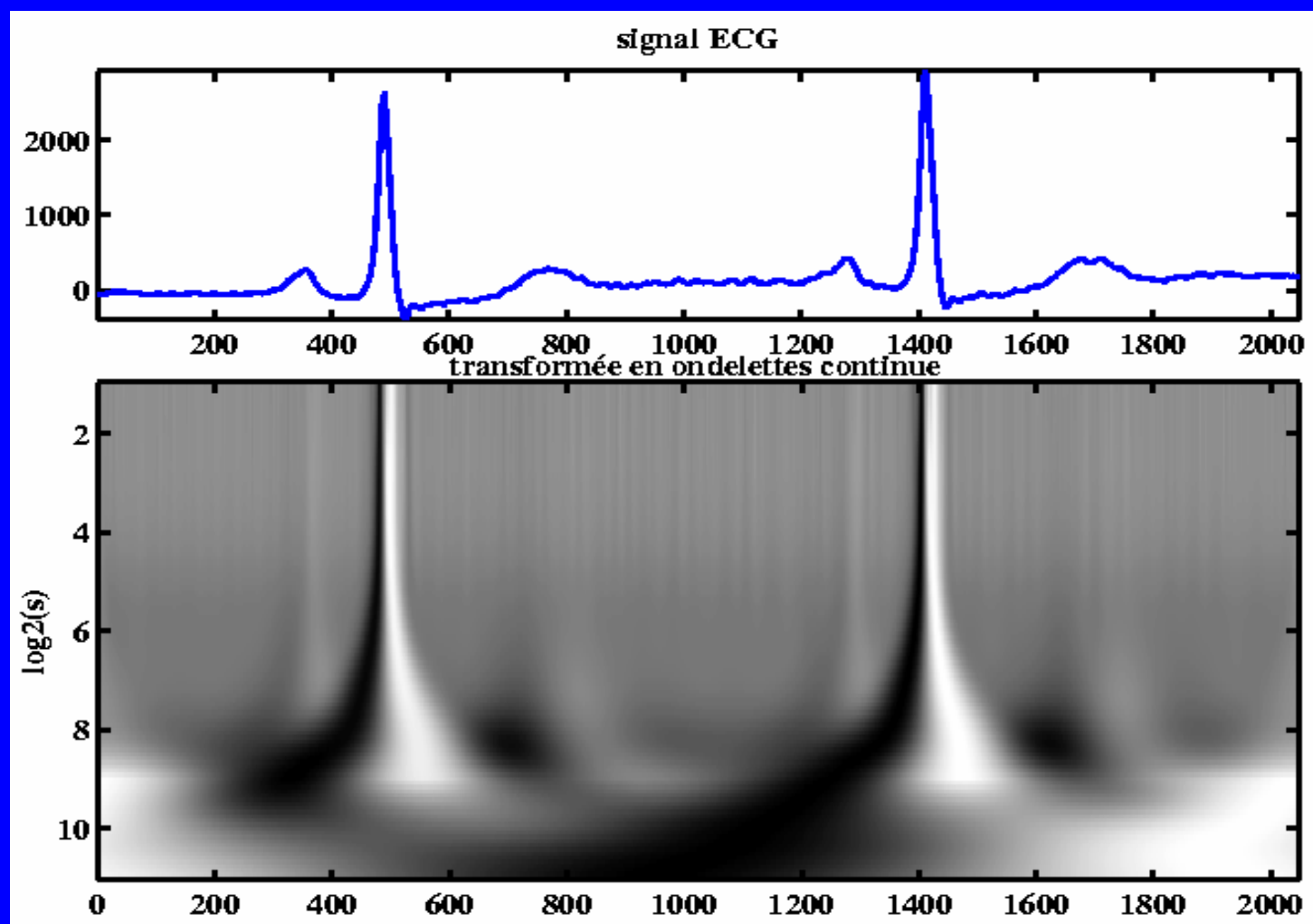
On dresse 2 diagrammes

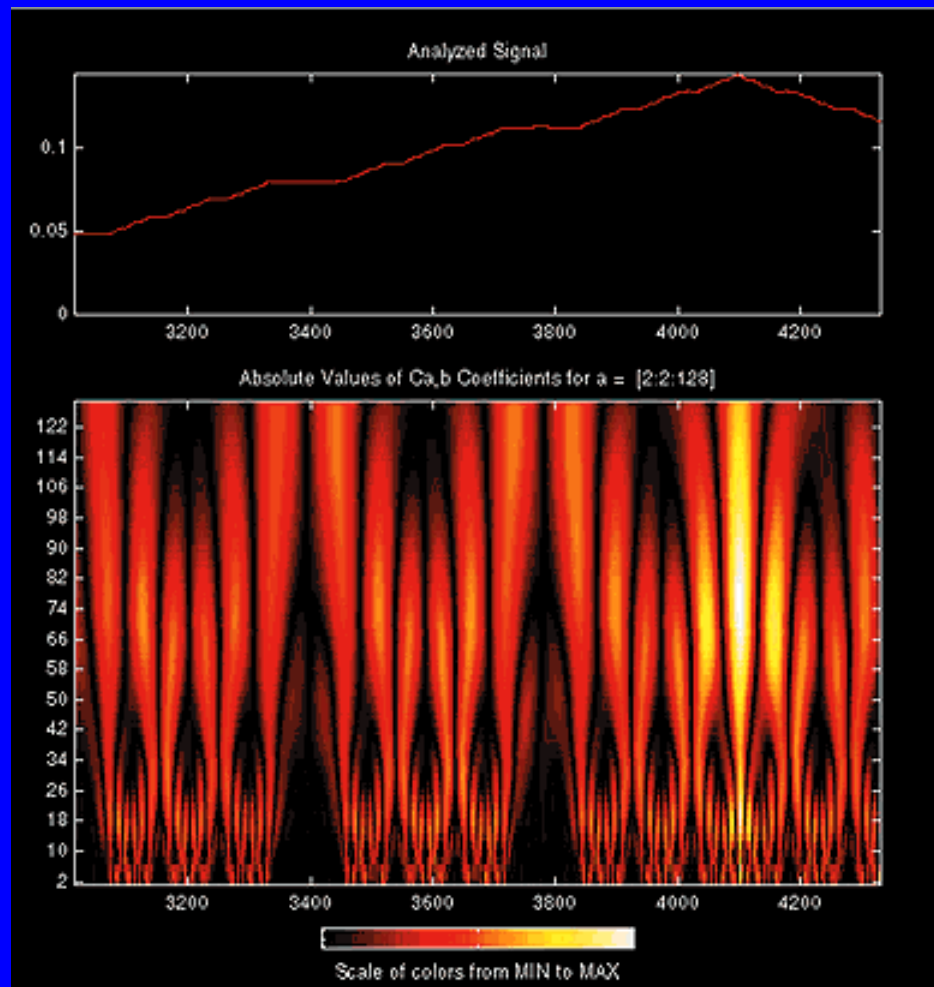
- lignes de niveaux de $\|W f(a, b)\|$
- lignes d'isophases de $\text{Arg}(W f(a, b))$

- **Le module donne une répartition de l'énergie dans le $\frac{1}{2}$ plan temps/fréquence**
- **Les lignes d'isophases donnent un renseignement qualitatif. Elles ont la propriété de converger vers les singularités**

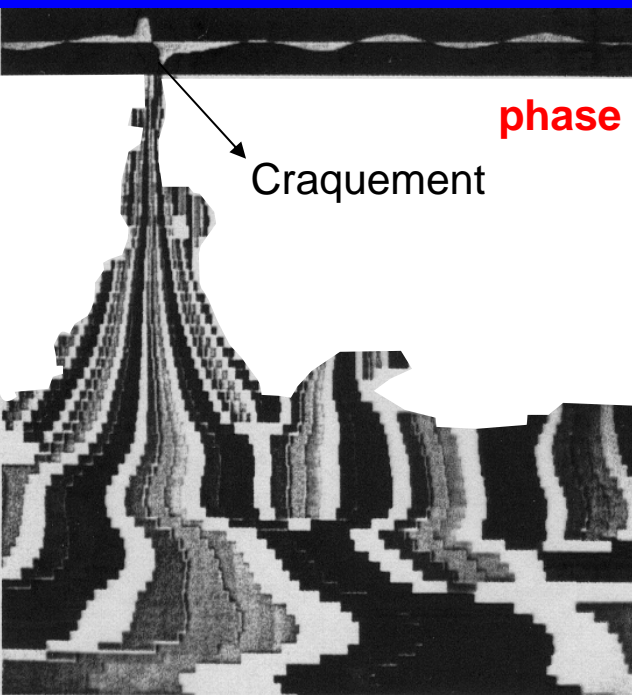
Exemple d'ondelettes





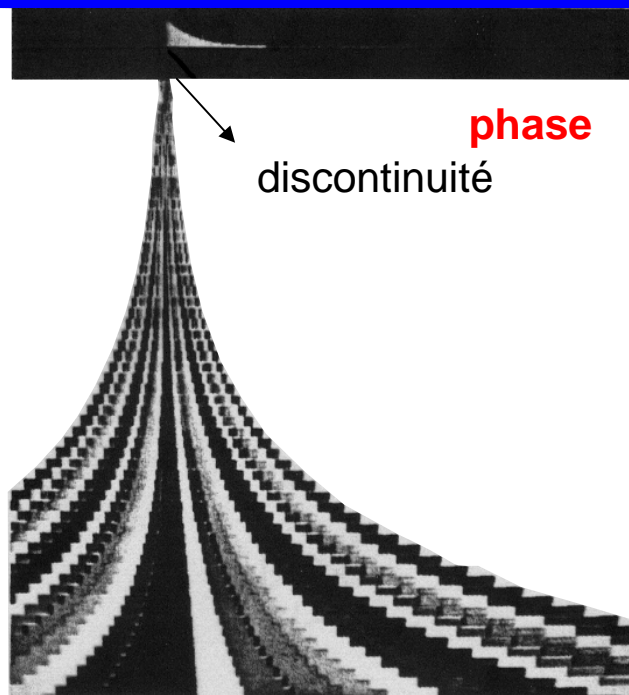


Décomposition d'un signal fractal en ondelettes.
On peut remarquer l'auto-similarité du signal aux différentes échelles .



phase

Craquement

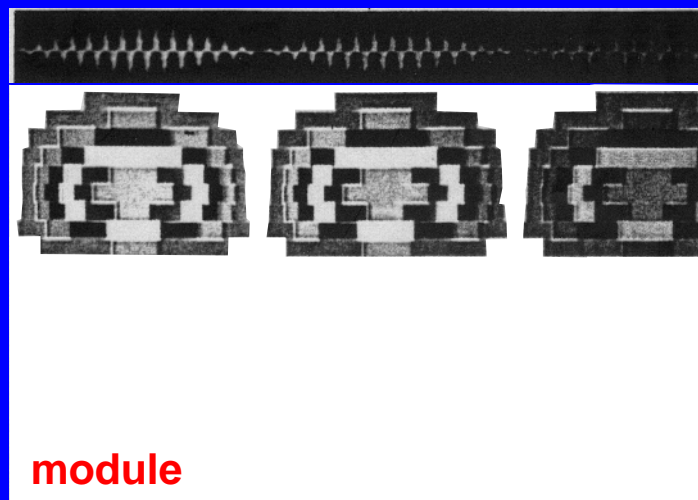


phase

discontinuité



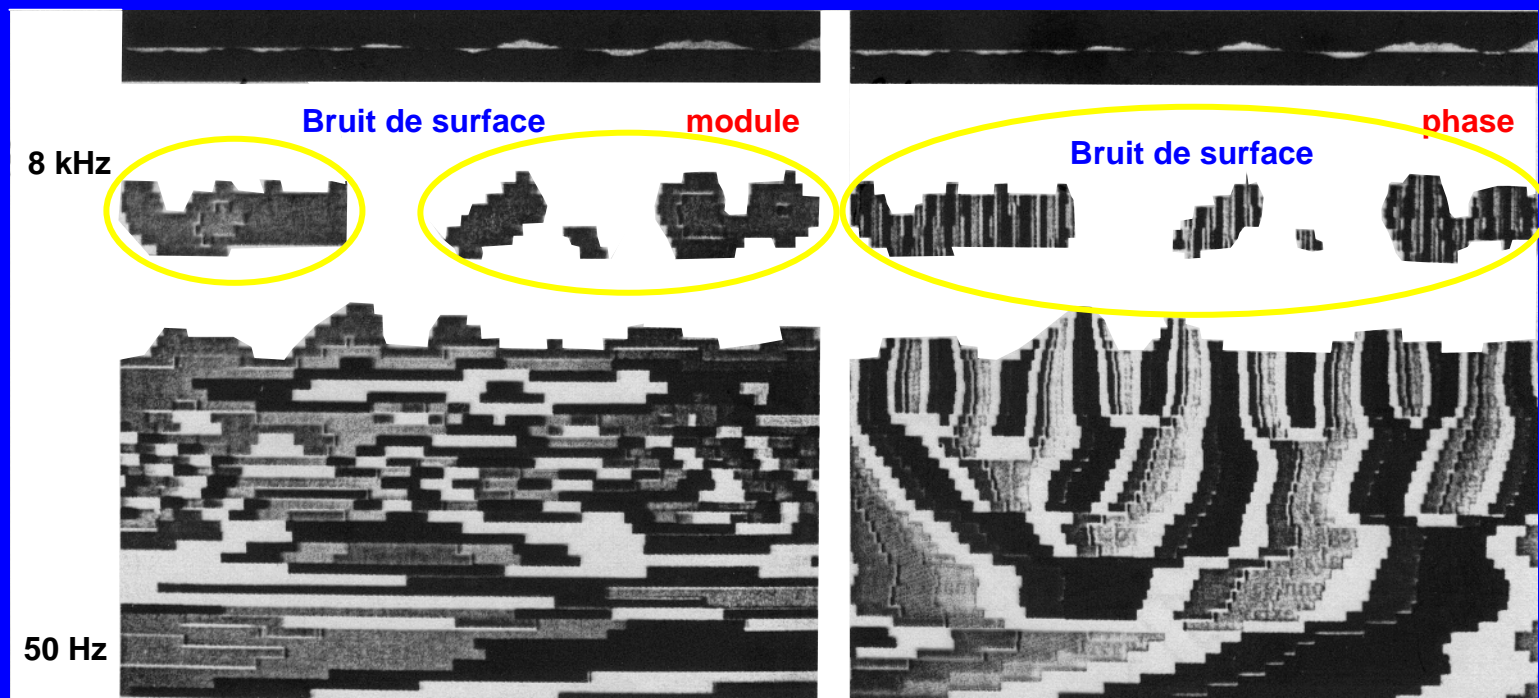
phase



module

Bruit blanc

Battements musicaux



Bruit de surface d'un disque vinyle

Transformée en ondettes :

$$W f (a ,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi \left(\frac{t-b}{a} \right)} dt$$

Remarque très importante :

si $\psi (t)$ est une ondelette réelle

et $\tilde{\psi} (t) = \psi (-t)$

alors : $W f (a ,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \tilde{\psi} \left(\frac{b-t}{a} \right) dt = f \otimes \tilde{\psi}_a$

La transformée en ondettes est équivalente à un filtrage passe bande
La réponse impulsionnelle du filtre est donnée par : $\tilde{\psi}_a$

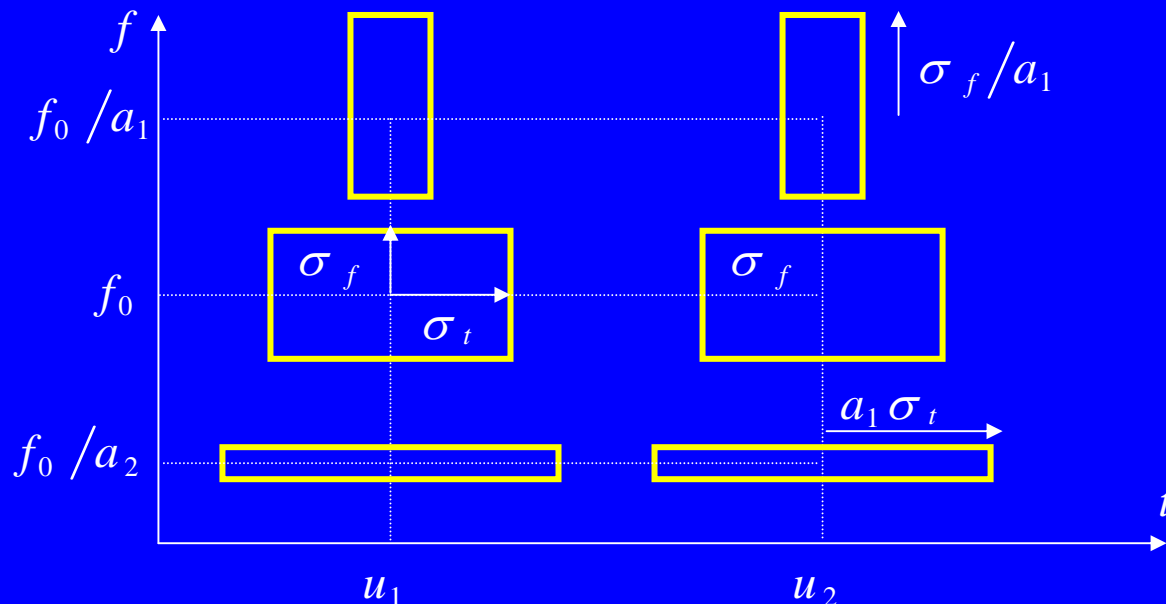
On a : $\hat{\tilde{\psi}}_a (f) = \sqrt{a} \cdot \hat{\psi} (a \cdot f)$

Soient f_0 le centre de la bande passante de $\hat{\psi}$ et σ_f la largeur de bande définie par :

$$\sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_0)^2 |\hat{\psi}(f)|^2 df$$

$$\hat{\psi}_a(f) \begin{cases} \text{centrée} & \text{en } \frac{f_0}{a} \\ \text{largeur} & \frac{\sigma_a}{a} \end{cases} \quad \psi_a(t) \begin{cases} \text{centrée} & \text{en } t=0 \\ \text{largeur} & a \cdot \sigma_t \end{cases}$$

$$\sigma_a \cdot \sigma_f = C \quad (\text{Principe d'incertitude})$$



Le signal $f(t)$ peut être reconstruit à partir de : $W f(a, b)$

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} W_f(a, b) \psi_a(t-b) \frac{da}{a^2} db$$

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\psi(f)|^2}{f} df$$

Pour calculer numériquement $W f(a, b)$ on discrétise a et b .
On choisit un échantillonnage logarithmique

$$a \rightarrow \alpha^{-j} \quad \alpha > 1; \quad j \in \mathbb{Z}$$

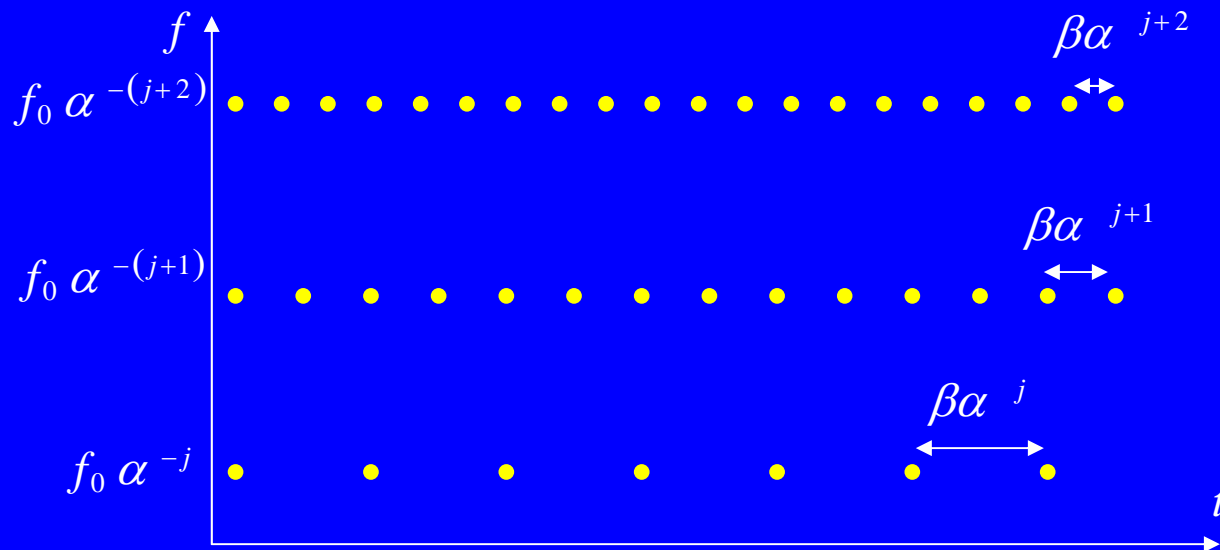
$$W(\alpha^{-j}, b) = \tilde{f} \otimes \psi_{\alpha^{-j}}(t)$$

$$\hat{\psi}_{\alpha^j}(f) \begin{cases} \text{centrée} & \text{en } f_0 \alpha^{-j} \\ \text{largeur} & \sigma_t \alpha^{-j} \end{cases}$$

$$\sigma_{\alpha^{-j}} \cdot \sigma_f = C \quad \Rightarrow \quad \sigma_f \alpha^{-j} \Rightarrow \frac{\sigma_t}{\alpha^{-j}}$$

Il faut donc réaliser un échantillonnage proportionnel à $\alpha^{-j} \cdot \beta$ pour t

$$\Rightarrow W_{fd}(j, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\psi}_{\alpha^{-j}} \left(t - \frac{n\beta}{\alpha^{-j}} \right) dt = \tilde{f} \otimes \tilde{\psi}_{\alpha^{-j}} \left(\frac{n\beta}{\alpha^{-j}} \right)$$



- Ingrid Daubechies a donné les conditions sur α et β pour permettre une reconstruction stable de $f(t)$
- Pour $\alpha=2$ et $\beta=1$, Yves Meyer a construit une ondelette telle que :

$$\psi_{\alpha^j} \left(t - \frac{n}{2^j} \right) \quad (n, j) \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{Base orthonormale de } L_2(\mathbb{R})$$

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f(u), \psi_{2^j}(u - n 2^{-j}) \rangle \psi_{2^j}(t - n 2^{-j})$$

Applications : En mathématiques caractérisation des espaces fonctionnels

- $L^p(\mathbb{R})$ $p > 1$
- $H^p(\mathbb{R})$: Sobolev
- C^α : Fonctions Hölderienne

Exemple : caractérisation des courbes C^α

Fonction Hölderienne : $\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \leq C \quad C \in \mathbb{R}, \alpha \in]0, 1]$

- α grand $\rightarrow f(x)$ est assez régulière
- $\alpha=1$ $f(x)$ est presque dérivable
- $\alpha \rightarrow 0$, $f(x)$ est très peu régulière

Si $f(x)$ est C^α alors :

$$\left| \langle f(x), \psi_{2^j}(x - n 2^{-j}) \rangle \right| \leq C' \cdot 2^{-j(\alpha + \frac{1}{2})} (1 + |2^j x_0 - n|)$$

La régularité au point x_0 dépend uniquement de la décroissance des coefficients d'ondelettes en fonction de l'échelle.

La transformée en ondelettes orthogonale est donc :

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f(u), \psi_{2^j}(u - n 2^{-j}) \rangle \psi_{2^j}(t - n 2^{-j})$$

qui fonctionne pour : $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$

Oui mais en pratique ?

Exemple : $f(t) \equiv 1 \notin L_2(\mathbb{R})$

Les coefficients d'ondelettes s'écrivent :

$$\begin{aligned} C_{j,n} &= \langle f(u), \psi_{2^j}(u - n 2^{-j}) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \psi_{2^j}(u - n 2^{-j}) du \end{aligned}$$

$$f(u) \equiv 1 \Rightarrow$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{2^j}(u - n 2^{-j}) du}_{=0 \text{ par définition}}$$

$$\Rightarrow C_{j,n} = 0 \quad \forall j, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow \text{absurde}$$

- ❖ ça ne fonctionne plus, mathématiquement il n'y pas de surprise,
- ❖ Pratiquement c'est très gênant, les signaux à moyenne non nulle représente une classe importante de signaux.

**Solution : Introduction d'une fonction (père des ondelettes, ψ : mère)
 $\varphi(t)$: chargée des variations lentes.**

Bien sur on aura :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$$

L'introduction de cette seconde fonction conduit au concept d'analyse multirésolution

2. Décomposition multirésolution

Idées :

- Contourner l'aberration mathématique,
- En signal ou image réorganiser l'information sous forme hiérarchique (sélection des « grosses structures » puis si besoin est « des structures de plus en plus petites »),
- Il n'existe généralement pas de résolution optimale, l'étude se fera en fonction d'un panel de résolutions,
- Technique du Zoom. Rechercher les régions informatives (HF) se concentrer dessus (Zoom), (Notion d'espace et de fréquence),
- Recherche d'algorithmes de décomposition non expansif (pb de temps réel en télécommunication par exemple).

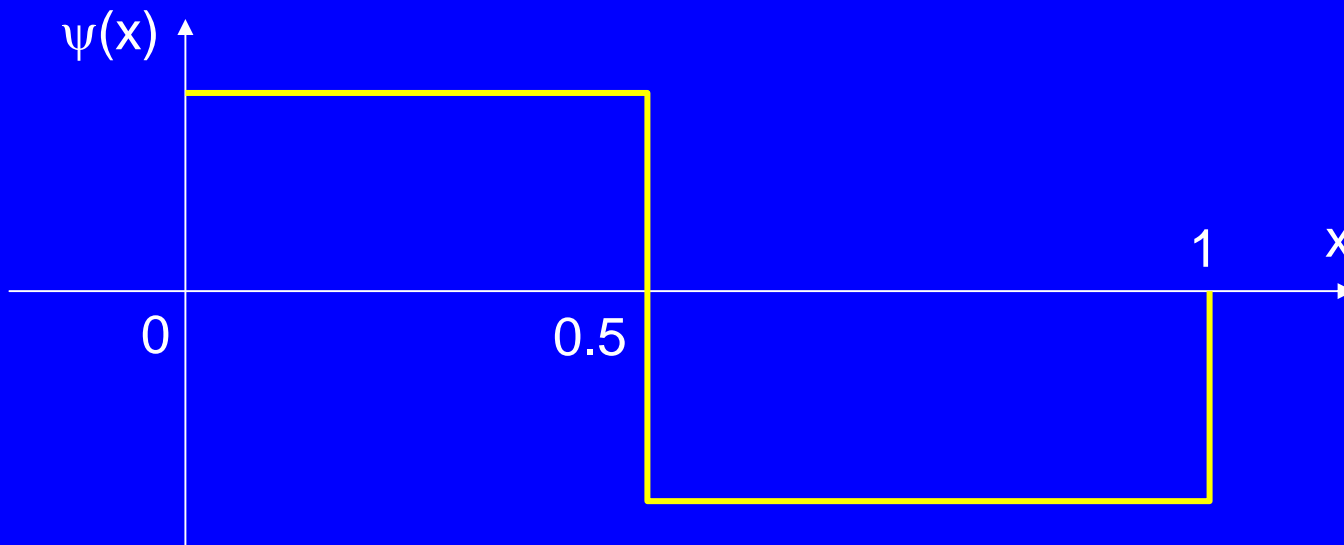
**Les transformations orthogonales sont les bien venues
(compression de l'information)**

Intuitivement :

- Analyse temps-fréquence orthogonale → ondelettes,
- Pas d'analyse 2 : analyse dyadique,
- La fonction φ pourrait donner l'allure générale du signal $f(t)$,
- Par pas successif en progression de 2^j , on précise $f(t)$ par reconstruction,
- φ : fonction d'approximation (d'échelle),
- ψ : reconstitution des détails de plus en plus fins.

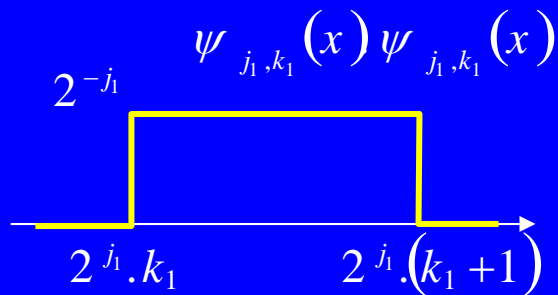
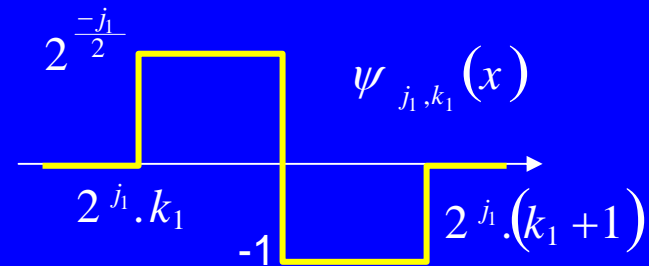
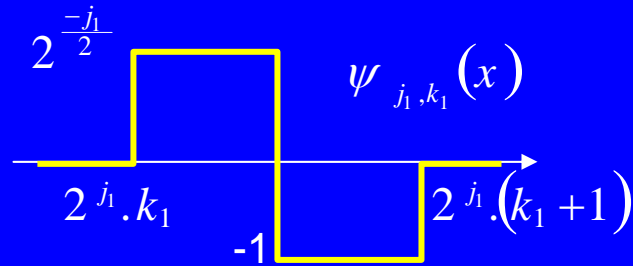
Exemple du système de Haar :

La fonction $\psi(x)$ est : $\psi(x) = \chi\left(0, \frac{1}{2}\right) - \chi\left(\frac{1}{2}, 1\right)$



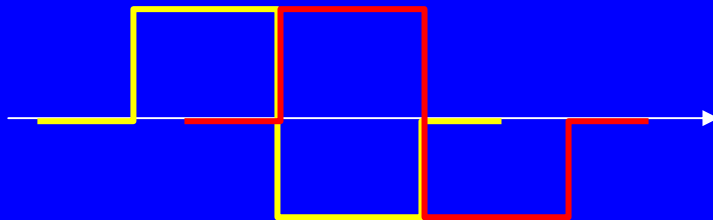
Etude de l'orthogonalité de la famille : $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{-j}{2}} \psi(2^{-j}x - k)$

- $j_1 = j_2$
- $k_1 = k_2$



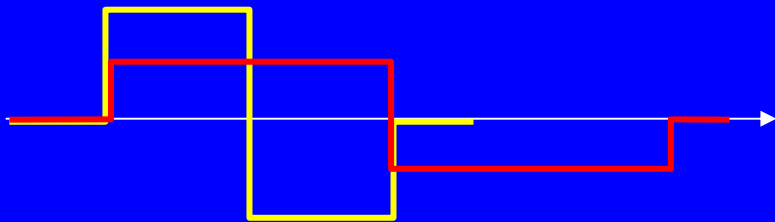
$$\langle \psi_{j_1, k_1}(x), \psi_{j_1, k_1}(x) \rangle = 1$$

- $k_1 \neq k_2$



$$\langle \psi_{j_1, k_1}(x), \psi_{j_1, k_2}(x) \rangle = 0$$

- $j_1 \neq j_2$



$$\langle \psi_{j_1, k_1}(x), \psi_{j_2, k_2}(x) \rangle = 0$$

Pour montrer que le système de Haar est une base, il faut :

$$\forall f(t) \in L_2(\mathbb{R})$$

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

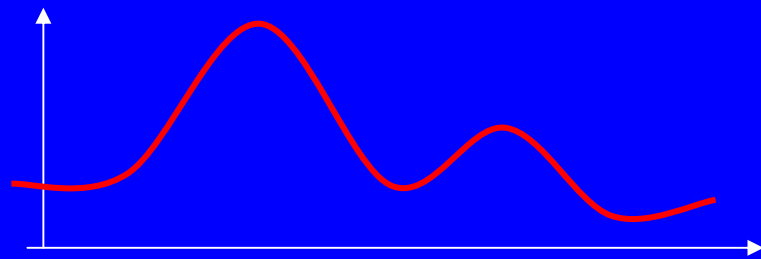
Introduisons la fonction : $\varphi(x) = \chi(0, 1)$

- Considérons $P_j(f)$ la projection de f sur le sous espace des fonctions constantes sur l'intervalle dyadique $[2^j k, 2^j(k+1)]$

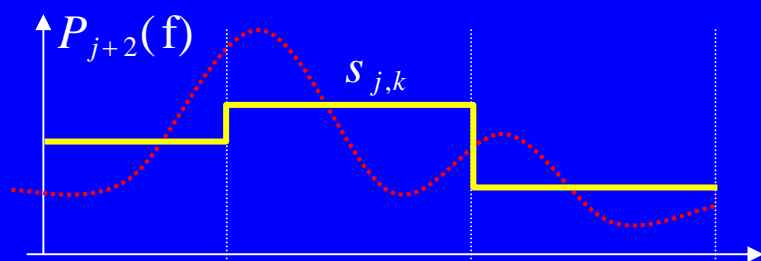
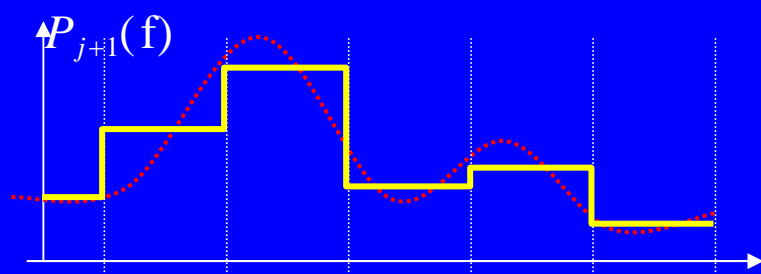
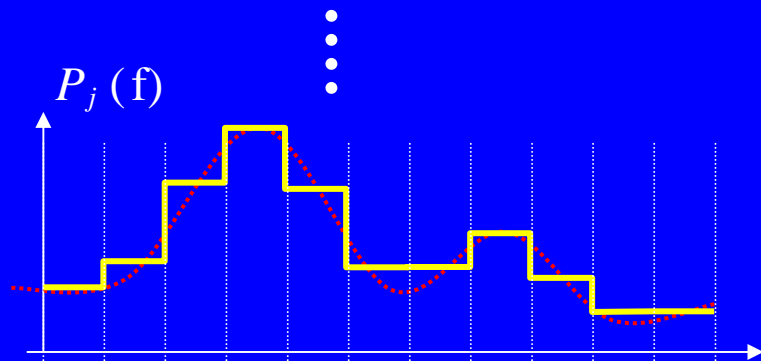
$$P_j[f([2^j k, 2^j(k+1)])] = 2^{-j} \int_{2^j k}^{2^j(k+1)} f(x) dx = s_{j,k}$$

$s_{j,k}$: moyenne de $f(x)$ sur l'intervalle.

- $P_j(f) = \sum_k 2^{\frac{j}{2}} s_{j,k} \varphi_{j,k}$: approximation de f à l'échelle 2^{-j}

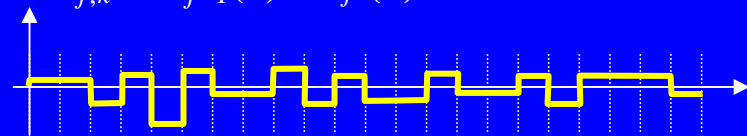


$f(x) \quad (j \rightarrow -\infty)$



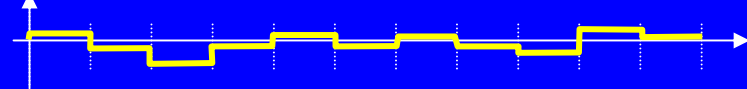
$J=0$

$$d_{j,k} = P_{j-1}(f) - P_j(f)$$



$J=1$

$$d_{j+1,k}$$



$J=2$

$$d_{j+2,k}$$



D'après les propriétés de la moyenne on a :

$$s_{j,k} = \frac{1}{2} (s_{j-1,2k} + s_{j-1,2k+1})$$

Ceci indique que $P_{j-1}(f) - P_j(f)$ est de moyenne nulle sur chacun des intervalles $[2^j k, 2^j(k+1)]$ et peut donc s'exprimer sous la forme :

$$P_{j-1}(f) - P_j(f) = \sum_k 2^{\frac{j}{2}} d_{j,k} \psi_{j,k}$$

Le coefficient d'ondelettes $d_{j,k}$ exprime donc la fluctuation de $P_{j-1}(f)$ sur $[2^j k, 2^j(k+1)]$ par rapport à la moyenne $P_j(f)$ et l'on a :

$$d_{j,k} = \frac{1}{2} (s_{j-1,2k} - s_{j-1,2k+1})$$

On peut ainsi reconstituer une approximation fine de la fonction f à partir d'une approximation grossière et d'une succession de détails exprimés par des combinaisons linéaires d'ondelettes aux échelles intermédiaires.

Pour conclure que la famille $\psi_{j,k}$ est une base, il suffit de remarquer que pour toute fonction f dans $L_2(\mathbb{R})$ on a :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_j(f)\|_2 = 0$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j(f) - f\|_2 = 0$$

Récurtivité : $s_{j-1,2k} = s_{j,2k} + d_{j,k}$

Décomposition :
$$\begin{cases} d_{j,k} = \frac{1}{2}(s_{j-1,2k} - s_{j-1,2k+1}) & : \text{Détails} \\ s_{j,k} = \frac{1}{2}(s_{j-1,2k} + s_{j-1,2k+1}) & : \text{Résumé} \end{cases}$$

Remarques :

- l'algorithme suppose connue l'approximation de f à un certain niveau de résolution. C'est exactement le cas des signaux numériques,
- La base de Haar est très peu utilisée en pratique car elle n'a pas de bonnes propriétés de localisation fréquentielle,
- Les coefficients $s_{j,k}$ et $d_{j,k}$, sont les coordonnées des fonctions $P_j(f)$ et $P_{j-1}(f) - P_j(f)$ dans les bases $\{\varphi_{j,k}\}$ et $\{\psi_{j,k}\}$ à un coefficient de normalisation $2^{j/2}$ près.
- Il existe depuis les années 80, d'autres bases que celle de Haar avec de bonnes propriétés de localisation fréquentielle et une mise œuvre facile sur calculateur numérique.
- Il s'agit donc de manipuler deux fonctions :
 - φ : fonction d'échelle (« BF »)
 - ψ : ondelette (« HF »)

3. Décomposition multirésolution, aspect formel

1. Les approximations multirésolution calculent l'approximation d'un signal à diverses résolutions par projection orthogonale sur une famille d'espaces V_j . Ces approximations sont entièrement caractérisées par un filtre discret particulier qui détermine la perte d'information entre deux résolutions.

2. La modification de la résolution d'un signal permet de ne traiter que les détails intéressants pour une tâche donnée. L'approximation de f à la résolution 2^{-j} est déterminée par une grille discrète d'échantillons fournissant des moyennes locales de f sur des voisinages de taille proportionnelle à 2^{-j} .

3. Une suite $\{V_j\}$ de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ est une approximation multirésolution si elle vérifie pour tout f de cet espace.

$$1. \forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x - 2^j k)$$

$$2. \forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$$

$$3. \forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{j+1}$$

$$4. \lim_{j \rightarrow \infty} (V_j) = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$$

$$5. \lim_{j \rightarrow -\infty} (V_j) = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$$

$$6. \exists \varphi \text{ tq } \{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ base orthonormée de } V_0$$

Dans ces conditions, on peut déduire :

- φ est une fonction lissante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \hat{\varphi}(0) = 1$$

- $\left\{ 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ base orthonormée de V_j

De 1 et 6 on tire :

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \varphi(u), \varphi(2u - n) \rangle \varphi(2x - n)$$

Appelons :

$$h(n) = \sqrt{2} \langle \varphi(u), \varphi(2u - n) \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \varphi(2u - n) du$$

On a aussi : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (h(n))^2 = 1$ (propriétés des projections orthonormées dans L_2)


$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \varphi(2x - n)$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(f) &= \int \varphi(x) e^{-2\pi jfx} dx \\ &= \sqrt{2} \int \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \varphi(2x - n) e^{-2\pi jfx} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}(f) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-2\pi j f \frac{x}{2}} e^{-j 2\pi j f \frac{n}{2}} dx \\
 &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{-j \frac{2\pi j f}{2} n}}_{\hat{h}\left(\frac{f}{2}\right)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-j 2\pi j f \frac{x}{2}} dx}_{\hat{\phi}\left(\frac{f}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\hat{\phi}(f) = \hat{h}\left(\frac{f}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{f}{2}\right)$$

$$\hat{h}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j 2\pi j f n}$$

$\hat{h}(f)$: est la fonction de transfert d'un filtre numérique $h(n)$

Ce filtre est périodique en fréquence de période 1. De part les conditions d'orthogonalité des fonctions $\varphi(x-k)$ dans V_0 , $\hat{\varphi}(f)$ n'est pas quelconque :

$$\begin{aligned}\delta_{n0} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \varphi(x-k) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(f)|^2 e^{2\pi jfn} df : \textit{Parseval} \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(f+n)|^2 \right) e^{2\pi jfn} df\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(f+n)|^2 = 1$$

En faisant apparaître dans la l'équation précédente la fonction de transfert du filtre h, en utilisant la périodicité on montre que :

$$\left| \hat{h}(f) \right|^2 + \left| \hat{h}\left(f + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1$$

Ondelettes :

En reprenant l'explication intuitive du système de Haar. Les détails qui constituent les coefficients d'ondelettes sont obtenus par différence entre deux approximations successives. Ceci revient à dire que les détails appartiennent à un espace W_m qui est le complément orthogonal de V_m dans V_{m+1} . Ceci signifie que l'on a la relation :

$$V_{m+1} = V_m \oplus W_m$$

D'où on déduit la décomposition : $L_2(R) = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} W_m$

Il suffit alors de trouver une fonction $\psi(x)$ (qui est l'ondelette à proprement parler) telle que la collection $\{ \psi(x-n), n \in \mathbb{Z} \}$ soit une base de W_0 pour que la collection :

$$\{ \psi_{m,n}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m x - n); n, m \in \mathbb{Z} \}$$

soit une base orthonormée de $L_2(\mathbb{R})$

Comme pour la fonction ϕ , l'ondelette $\psi(x)$ qui est dans V_1 peut être caractérisée par un filtre discret de coefficient $g[n]$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \phi(2x - n)$$

avec :

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi(u), \phi(2u - n) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) \phi(2u - n) du$$

De la même manière que pour la fonction d'échelle, on a cette fois :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(f) &= \hat{g}\left(\frac{f}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{f}{2}\right) & \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g(n))^2 &= 1 \\ \hat{g}(f) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) e^{-j2\pi f n}\end{aligned}$$

Parce que l'espace V_1 auquel appartient l'ondelette est orthogonal à V_0 , on a nécessairement :

$$\begin{aligned}0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \varphi(x-k) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(f) \overline{\hat{\phi}} e^{2\pi j f n} df : \textit{Parseval}\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(f+n) \overline{\hat{\phi}}(f+n) \right) e^{2\pi jfn} df$$

et donc :
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(f+n) \overline{\hat{\phi}}(f+n) = 0$$

En procédant comme précédemment, c'est à dire en faisant apparaître les les fonctions de transferts : $\hat{h}(f)$ et $\hat{g}(f)$

On montre que :

$$\hat{g}(f) \overline{\hat{h}}(f) + \hat{g}\left(f + \frac{1}{2}\right) \overline{\hat{h}}\left(f + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Les filtres $h[n]$ et $g[n]$ constituent une paire de *filtres miroirs en quadrature*. Pour $h[n]$ fixé, la solution de l'équation ci-dessus est de la forme :

$$\hat{g}(f) = \lambda(f) \cdot \overline{\hat{h}}\left(f + \frac{1}{2}\right)$$

Où $\lambda(f)$ est une fonction 1-périodique telle que :

$$\lambda(f) + \lambda\left(f + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Un choix possible est de prendre :

$$\lambda(f) = e^{-2\pi j f}$$

$$\Rightarrow \hat{g}(f) = e^{-2\pi j \left(f + \frac{1}{2}\right)} \cdot \overline{\hat{h}\left(f + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow g(n) = (-1)^n \cdot h(1-n)$$

On peut montrer que l'ondelette $\psi(x)$ ainsi construite est bien telle que ses translatées entières soit une base de W_0 .

En résumé :

En partant d'une fonction d'échelle $\varphi(x)$ telle que $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de V_0 et des coefficients $h[n]$ du filtre discret qui lui est associé, l'ondelette :

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \cdot h(1-n) \varphi(2x-n)$$

est telle que la collection

$$\left\{ \psi_{m,n}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \psi \left(2^{\frac{m}{2}} x - n \right) \right\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$$

est une base de $L_2(\mathbb{R})$

Remarques :

$$1. \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \varphi(2x - n)$$

$$\int \psi(x) dx = \int \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \varphi(2x - n) dx = 0$$

$$0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \underbrace{\int \sqrt{2} \varphi(2x - n) dx}_{=1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) = 0 \Rightarrow \text{Filtre passe bande}$$

2. De même :

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \varphi(2x - n)$$

$$\int \varphi(x) dx = \int \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \varphi(2x - n) dx = 1$$

$$1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \underbrace{\int \sqrt{2} \varphi(2x - n) dx}_{=1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) = 1 \Rightarrow \text{Filtre passe bas}$$

3. En reprenant :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(f) &= \hat{h}\left(\frac{f}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{f}{2}\right) \\ &= \hat{h}\left(\frac{f}{2}\right) \hat{h}\left(\frac{f}{4}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{f}{4}\right) = \hat{h}\left(\frac{f}{2}\right) \hat{h}\left(\frac{f}{4}\right) \hat{h}\left(\frac{f}{8}\right) \dots \end{aligned}$$

$$\hat{\phi}(f) = \hat{\phi}(0) \prod_{m=1}^{\infty} \hat{h}\left(\frac{f}{2^m}\right) \quad \text{or} \quad \hat{\phi}(0) = 1$$

$$\hat{\phi}(f) = \prod_{m=1}^{\infty} \hat{h}\left(\frac{f}{2^m}\right)$$

4. En reprenant :

$$\left| \hat{h}(f) \right|^2 + \left| \hat{h}\left(f + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1$$

Puisque : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) = 1$ alors : $\hat{h}(f=0) = 1$

$$\hat{h}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

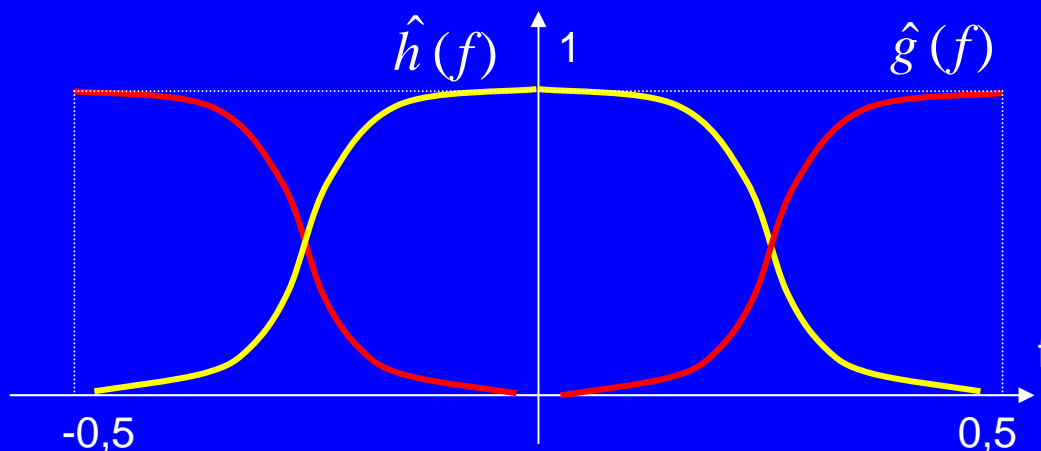
On en déduit facilement que :

$$\hat{g}(0)=0$$

$$\hat{g}\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

On peut montrer aussi que l'on retrouve la relation des filtres miroirs en quadrature

$$\left|\hat{h}(f)\right|^2 + \left|\hat{g}(f)\right|^2 = 1$$



4. Algorithmes pyramidaux – (S. Mallat)

L'introduction des filtres numériques $h[n]$ et $g[n]$ présente un intérêt majeur pour le calcul pratique des coefficients d'approximation et de détail.

$$s_f(j, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi_{j,k}(x) dx$$

$$d_f(j, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$

En utilisant les relations établies précédemment :

$$\begin{aligned} s_f(j, k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) 2^{\frac{j}{2}} \varphi\left(2^{\frac{j}{2}} x - k\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) 2^{\frac{j}{2}} \left(\sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \varphi\left(2\left(2^{\frac{j}{2}} x - k\right) - n\right) \right) dx \end{aligned}$$

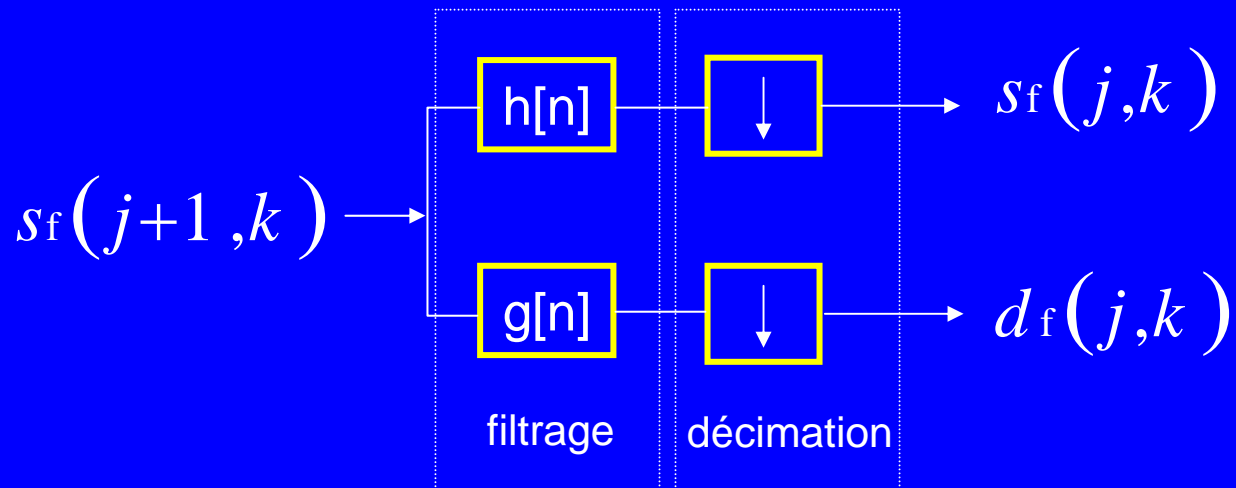
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1}x - (n + 2k)) dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) s_f(j+1, n+2k)$$

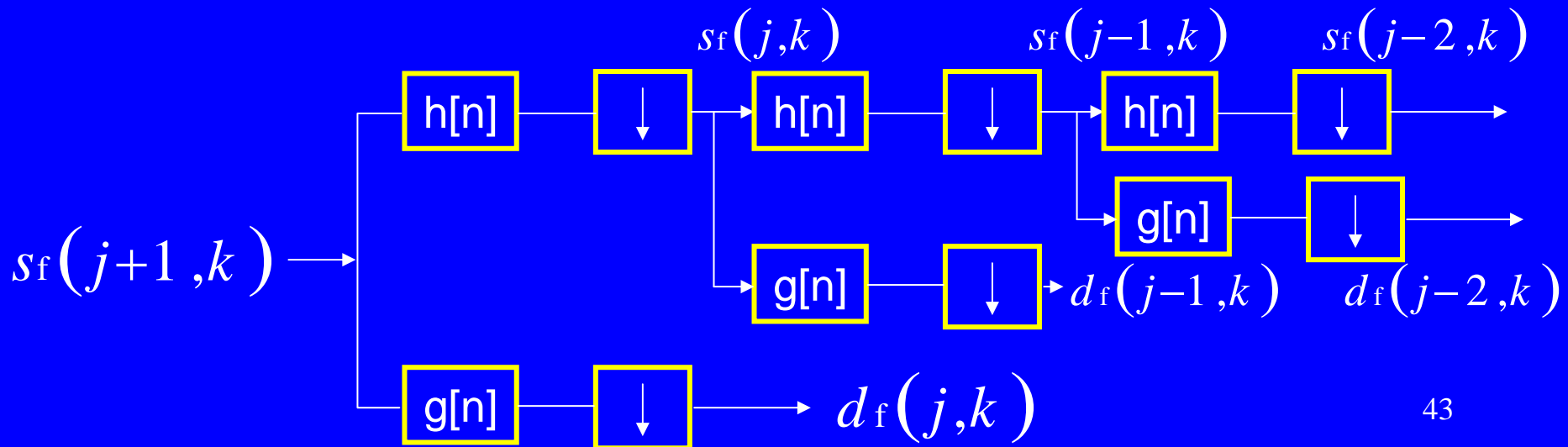
$$s_f(j, k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n-2k) s_f(j+1, n)$$

De la même manière :

$$d_f(j, k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n-2k) s_f(j+1, n)$$

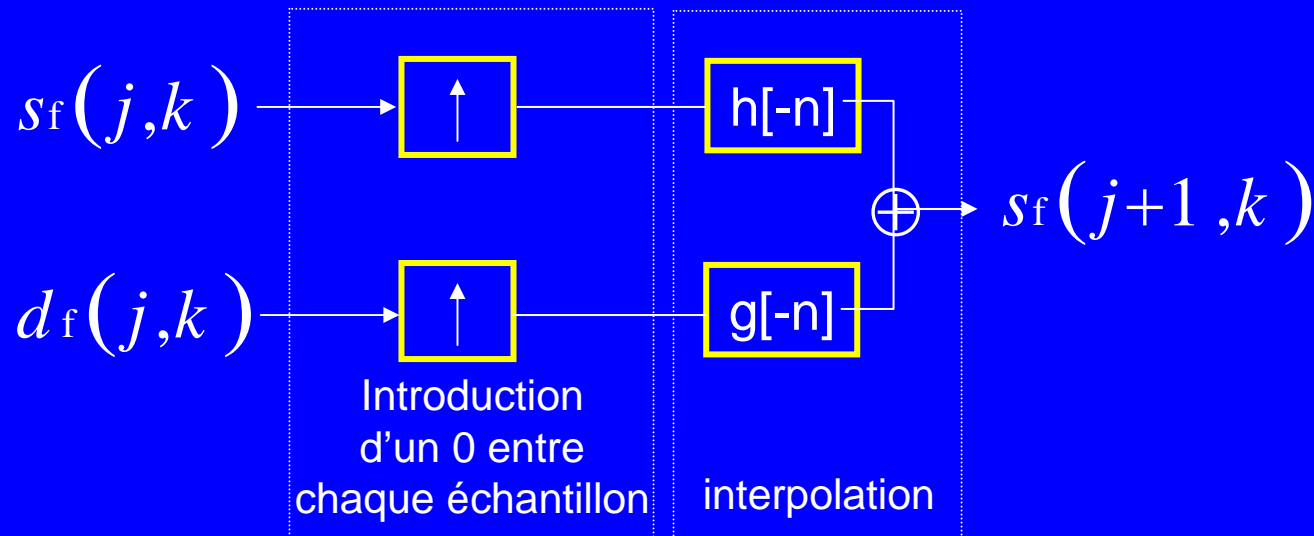


Les coefficients d'approximation et de détail sont obtenus par filtrage linéaire suivi d'une décimation. Opérant de proche en proche l'algorithme est rapide et récursif.

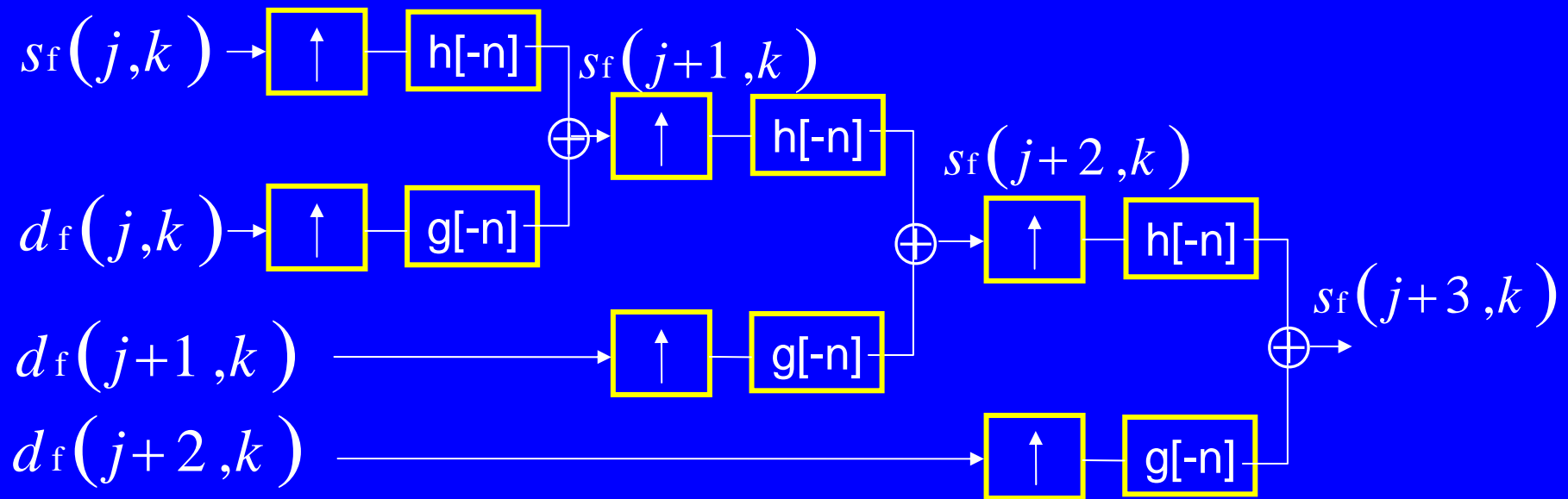


De la même façon, il existe une relation de reconstruction :

$$s_f(j+1, k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k-2n) s_f(j, n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(k-2n) s_f(j, n)$$



En opérant de proche en proche on reconstruit $f(x)$ de manière rapide et récursive en introduisant une valeur nulle entre chaque échantillon suivie d'un filtrage linéaire et d'une sommation.



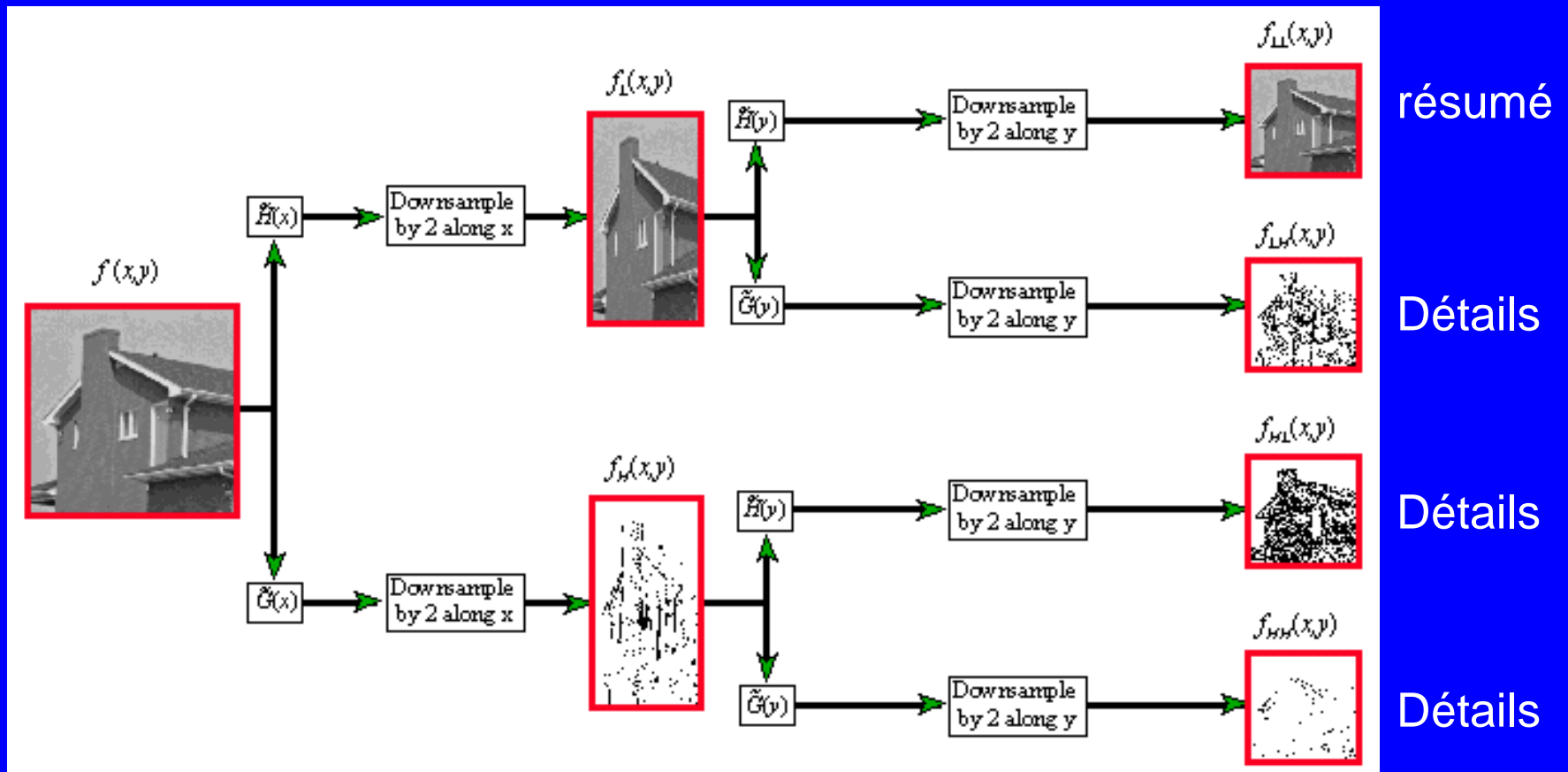
Généralisation aux signaux multi-dimensionnels

Image : 2D

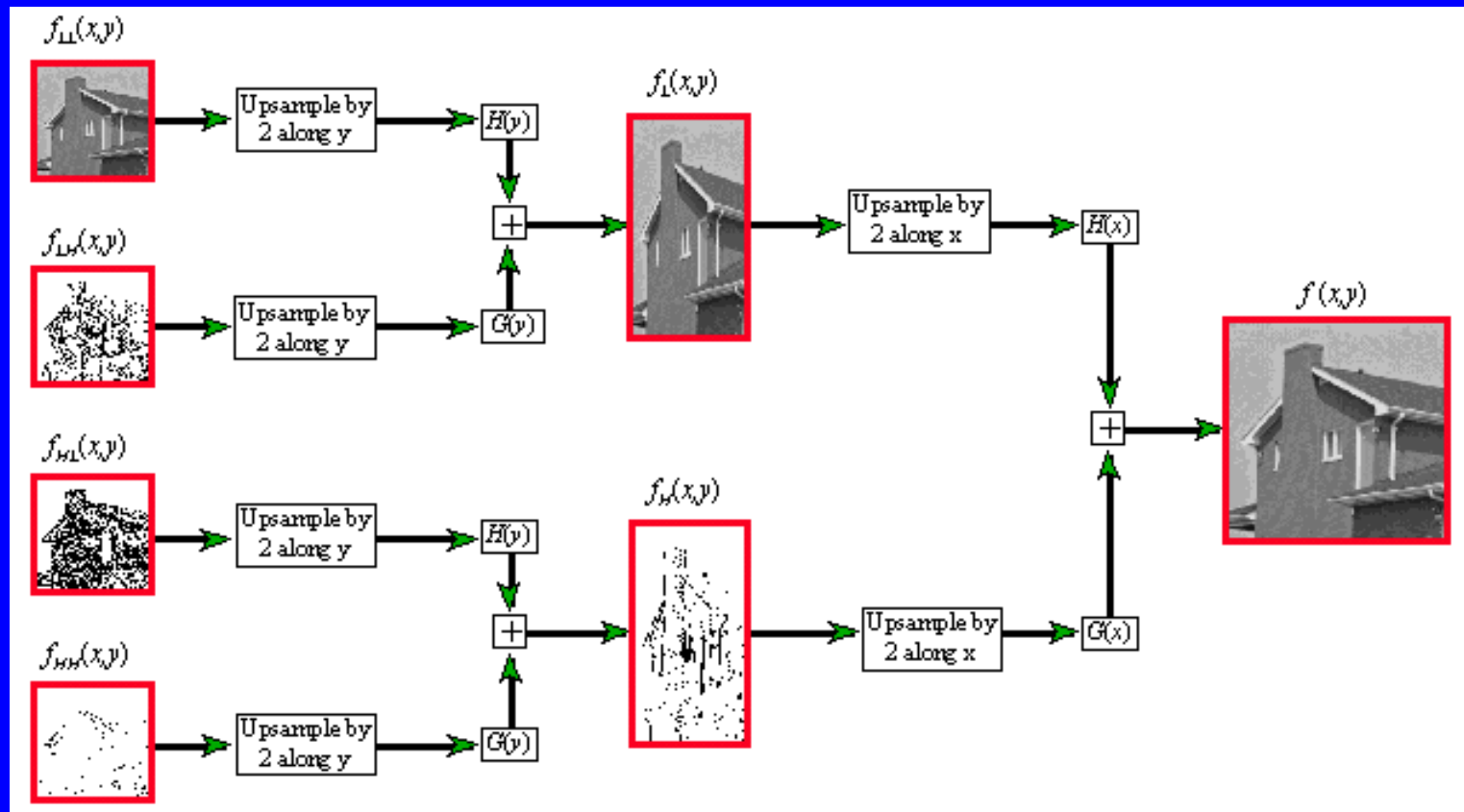
Version séparable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, y) = \varphi(x) \varphi(y) \\ \varphi_1(x, y) = \varphi(x) \psi(y) \\ \varphi_2(x, y) = \psi(x) \varphi(y) \\ \varphi_3(x, y) = \psi(x) \psi(y) \end{array} \right.$$

Décomposition



Reconstruction



Propriétés des ondelettes utiles en traitement d'images

Localisation spatiale

Liée à la taille de l'ondelette. Ondelette à support compact → filtre RIF

Cancellation

Caractérisée par le nombre de moments nuls

$$\exists N > 0 \quad n \in N \quad tq \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \psi(x) dx = 0$$

$$0 \leq n < N$$

Coefficients d'ondelette faibles aux fines résolutions, d'autant plus faibles qu N est grand (localement une image peut être approximée par un polynôme de degré N-1)

Application immédiate en compression d'images (JPEG2000)

Régularité

Reconstruction sans singularités artificielles
(exposant de Hölder de φ et ψ)