Chapitre 5
Transformée de Fourier des fonctions

1. Définitions

Soit **f(x)** une fonction réelle ou complexe de la variable réelle **x**; on appelle transformée de Fourier de **f(x)** la fonction de la variable **f** :

$$\hat{\mathrm{f}}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}(x)e^{-2\pi jfx}dx$$

Conditions d'existence :

Il faut que f(x) soit sommable, $\widehat{\mathrm{f}}(f)\longrightarrow 0 \ quand \left|f\right|\longrightarrow\infty$

Inversion :

$$\mathrm{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\mathrm{f}}(f)e^{2\pi jfx}df$$

Remarque : les physiciens utilisent des formules différentes.

Ils posent : $\omega = 2\pi f$ soit $df = \frac{d\omega}{2\pi}$

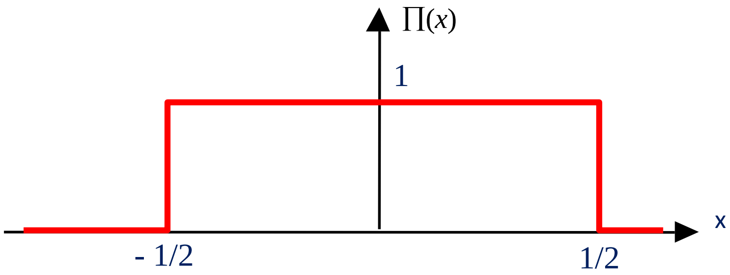
$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega x} d\omega$$

Notations : $f = \overline{\mathcal{F}}\left[\hat{f}\right]$ ou $f(x) = \overline{\mathcal{F}}\left[\hat{f}(f)\right]$

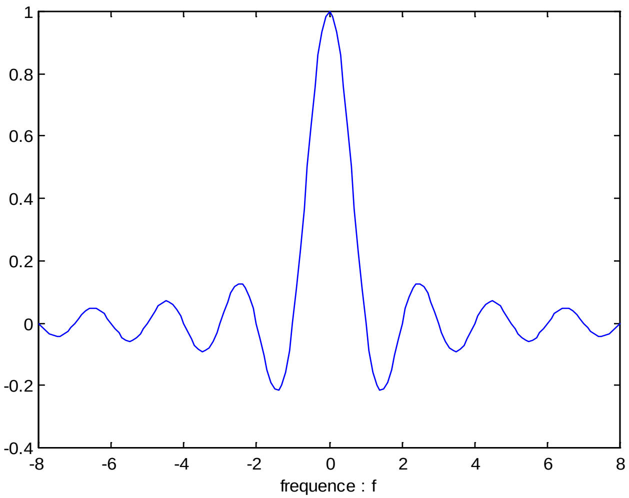
$\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ ou $\hat{f}(x) = \mathcal{F}[f(f)]$

Exemple : la fonction porte.



$$\mathcal{F}(\Pi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x) e^{-2\pi jfx} dx = \int_{-0,5}^{+0,5} e^{-2\pi jfx} dx = \left[\frac{e^{-2\pi jfx}}{-2\pi jf} \right]_{-0,5}^{+0,5}$$

$$\mathcal{F}(\Pi(x)) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$



2. Transformations en sinus et cosinus

Toute fonction **f(x)** peut être décomposée en une somme d'une fonction paire **p(x)** et d'une fonction impaire **q(x)**.

$$f(x)=p(x)+q(x)$$

$$p(x)=\frac{1}{2}[\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(-x)]$$
$$q(x)=\frac{1}{2}[\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(-x)]$$

La transformée de Fourier est une opération linéaire :

$$\widehat{\mathrm{f}}(f)=2\int_0^{+\infty}p(x)\cos(2\pi fx)dx-2j\int_0^{+\infty}q(x)\sin(2\pi fx)dx$$

que l'on écrit :

$$\mathcal{F}[\mathrm{f(x)}]=\mathcal{F}_{cos}[p(\mathrm{x})]-j\,\mathcal{F}_{sin}[q(\mathrm{x})]$$

où $\mathscr{F}_{\mathbf{cos}}$ représente une transformée en cosinus définie par :

$$\boxed{\mathscr{F}cos\left[\mathrm{f(x)}\right] = 2\int_{0}^{+\infty} p(x)\cos(2\pi f x)\,dx}$$

où $\mathscr{F}_{\mathbf{sin}}$ représente une transformée en sinus définie par :

$$\boxed{\mathscr{F}sin\left[\mathrm{f(x)}\right] = 2\int_{0}^{+\infty} q(x)\sin(2\pi f x)\,dx}$$

3. Propriétés

f(x)		TF
Pair	$\longrightarrow$	Pair
Impair	$\longrightarrow$	Impair
Réel	$\longrightarrow$	Hermitien :
Imaginaire	$\longrightarrow$	Anti-hermitien :
Réel, pair	$\longrightarrow$	Réel

3.1. Linéarité

λ, μ : scalaires

$$\boxed{\mathscr{F}[\lambda f + \mu g] = \lambda . \mathscr{F}(f) + \mu . \mathscr{F}(g)}$$

3.2. Transposition

$$\mathscr{F}\left[f(-x)\right]=\widehat{f}(-f)$$

$$\mathscr{F}\left[f(x)\right]=\overline{\widehat{f}(-f)}$$

3.3. Changement d’échelle

$$a\in\Re^{+*}$$

$$\mathscr{F}\left[f(ax)\right]=\frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{f}{a}\right)$$

*Dilater l'échelle des **x** revient à comprimer l'échelle des fréquences et inversement*

3.4. Translation

$$\boxed{\mathscr{F}\left[\mathrm{f(x\text{-}a)}\right]=e^{-2\pi jfa}.\widehat{\mathrm{f}}(f)}$$

3.5. Modulation

$$\boxed{\mathscr{F}\left[e^{2\pi jf_0x}.\mathrm{f(x)}\right]=\widehat{\mathrm{f}}(f-f_0)}$$

3.6. Dérivation par rapport à la variable x

$$\boxed{\mathscr{F}\left[\mathrm{f}^{(\mathrm{m})}(\mathrm{x})\right]=(2\pi jf)^{\mathrm{m}}\widehat{\mathrm{f}}(f)}$$

On montre que plus ***f*** *est dérivable et à dérivés sommables, plus décroît rapidement à l'infini.*

3.7. Dérivation par rapport à la fréquence

$$\boxed{\mathcal{F}\left[(-2\pi j x)^m . f(x)\right] = \hat{f}^{(m)}(f)}$$

*On montre que plus **f** décroît rapidement à l'infini, plus   est dérivable.*

3.8. Application : le théorème des moments

Le moment d'ordre **p** de **f(x)** est : $m_p = \int x^p f(x) dx$

$$\hat{f}^{(p)}(f) = \mathcal{F}\left[(-2\pi j x)^p . f(x)\right]$$

Pour $f = 0$ on a : $\hat{f}^{(p)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi j)^p x^p . f(x) dx \quad \left(e^{-2\pi j x 0} = 1\right)$

$$\hat{f}^{(p)}(0) = (-2\pi j)^p \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^p . f(x) dx}_{m_p}$$

$$\boxed{m_p = \frac{\hat{f}^{(p)}(0)}{(-2\pi j)^p}}$$

3.9. Convolution

Si **f** et **g** sommables tels que $f \otimes g$ existe

$$\boxed{\mathscr{F}[f \otimes g] = \widehat{f} . \widehat{g}}$$

3.10. Formule de Parseval-Plancherel

$$\int f(x) g(x) dx = \int \widehat{f}(f) \widehat{g}(f) df$$

Si f=g

$$\boxed{\int |f(x)|^2 = \int \left|\widehat{f}(f)\right|^2 df}$$

Conservation de l'énergie