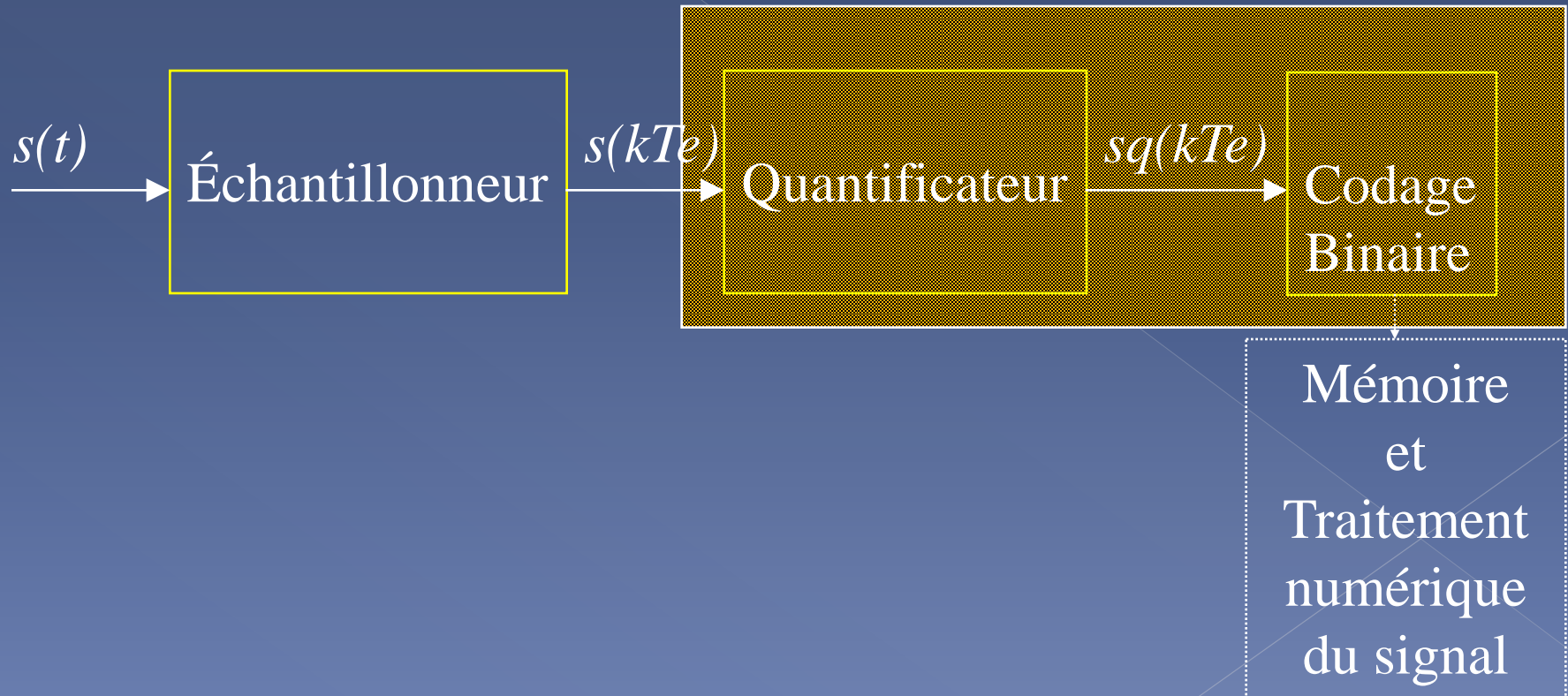


**Échantillonnage ,  
Quantification  
Conversion Analogique  
Numérique et  
Numérique Analogique**

# Conversion Analogique Numérique

Pour les signaux, la conversion analogique numérique est le passage des signaux bornés à temps continu vers des signaux quantifiés à temps discret. Cette opération nécessite d'échantillonner, de quantifier et de coder le signal.



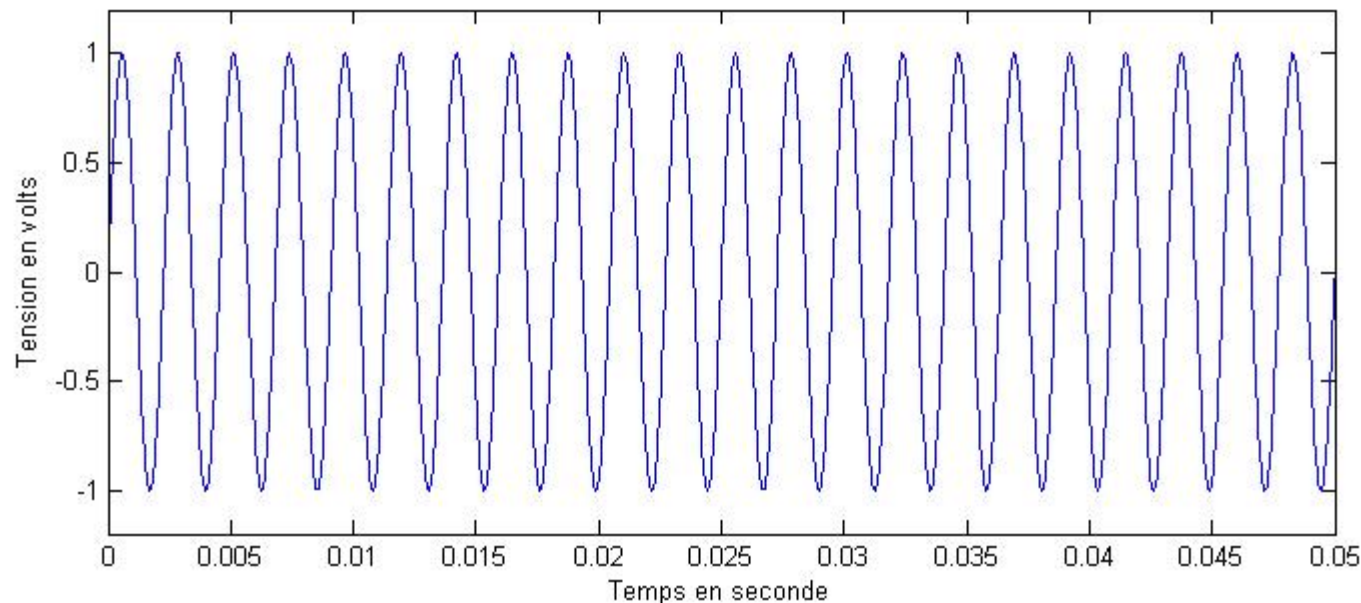
# Échantillonnage

## 1. Objectif

L'objectif est de définir comment déterminer la fréquence d'échantillonnage, ie nombre d'échantillons par seconde à prélever sur un signal pour effectuer des traitements numériques

$F_e = 44100 \text{ Hz}$  ou ech/s

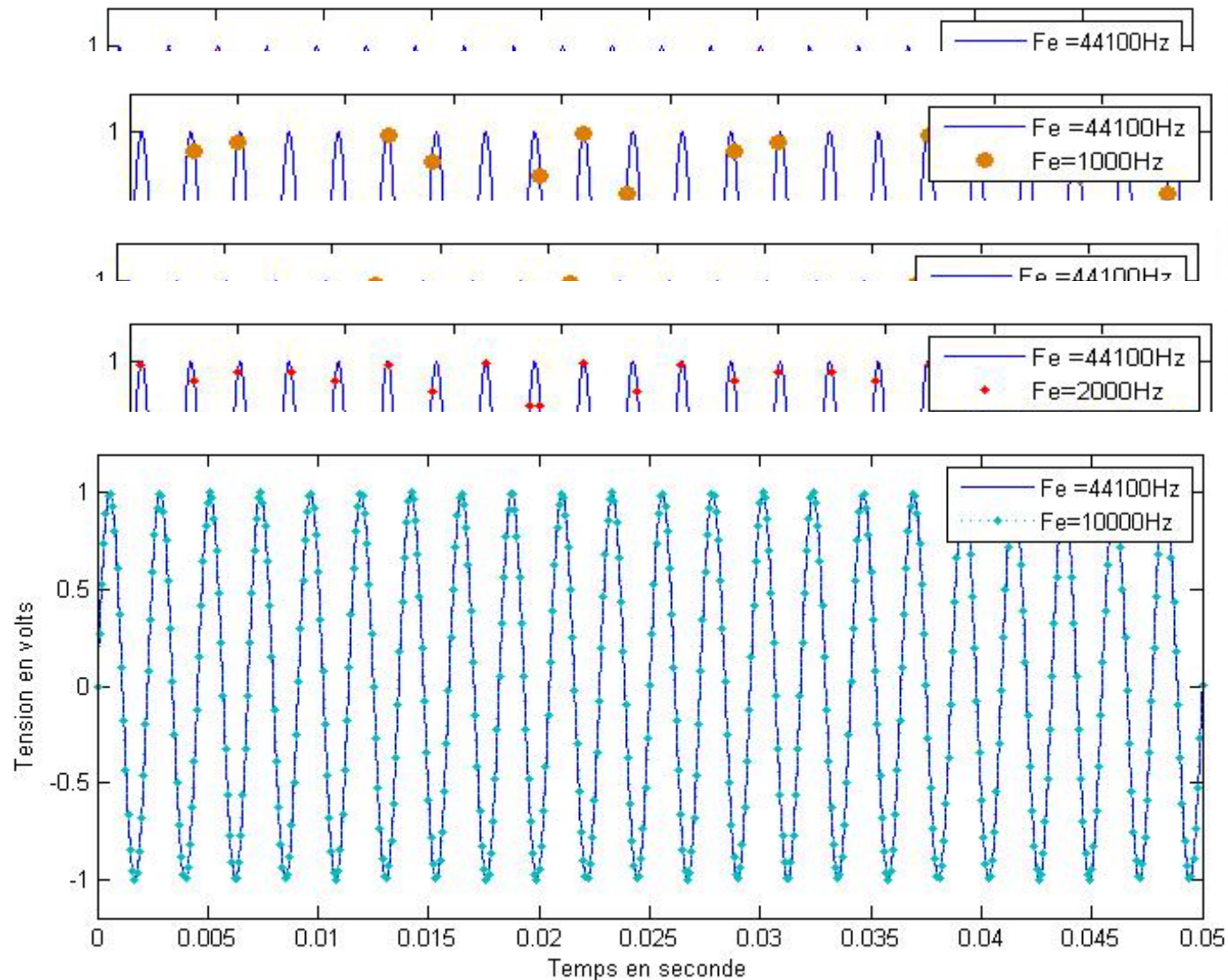
Enregistrement d'un son 'la' 440HZ



# Échantillonnage

Fe ??

## 1. Objectif



# Échantillonnage

## 1. Théorème fondamental

Le peigne de Dirac joue un rôle fondamental en théorie du signal :

$$PE_D(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-n) \quad \longrightarrow \quad \text{Diagramme du peigne de Dirac}$$
Le diagramme illustre le peigne de Dirac en fonction du temps t. Une ligne horizontale avec une flèche à droite est marquée avec 't' à son extrémité. Des flèches verticales jaunes pointent vers le haut à intervalles réguliers. Trois de ces positions sont explicitement étiquetées sous la ligne : 'n-1', 'n' et 'n+1'.

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est aussi un peigne de Dirac.

$$\mathcal{F}[PE_D(t)] = PE_D(f)$$

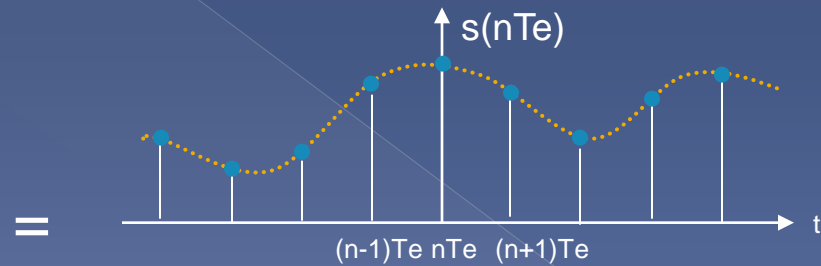
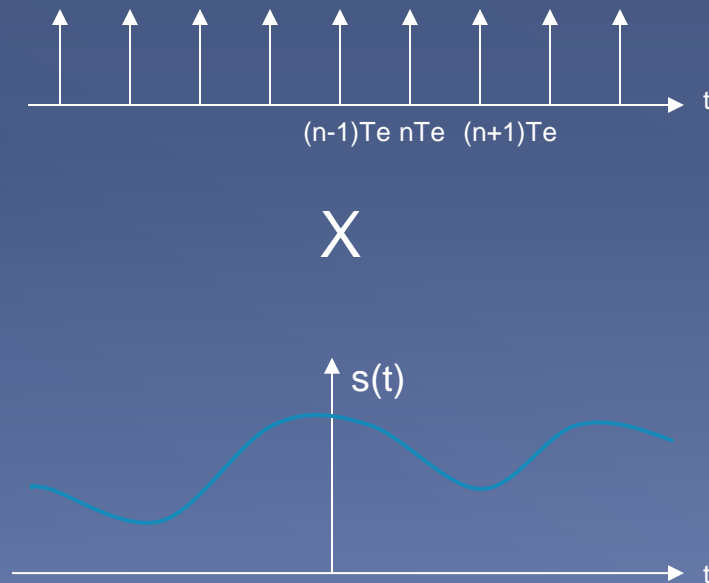
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f-n)$$

# Échantillonnage

$$\frac{1}{T_e} P E_D \left( \frac{t}{T_e} \right) \xrightarrow{\mathcal{F}} P E_D (T_e f)$$

$$\frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left( \frac{t}{T_e} - n \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta (t - n T_e) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta (T_e f - n) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left( f - \frac{n}{T_e} \right)$$

Modélisation de l'échantillonnage :



# Transformée de Fourier d'un signal échantillonné par un peigne de Dirac

Signal temporel :  $PE_D\left(\frac{t}{T_e}\right) \cdot s(t) = T_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_e) \delta(t - nT_e)$

Par transformation de Fourier, il vient :

$$PE_D\left(\frac{t}{T_e}\right) s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}\left[PE_D\left(\frac{t}{T_e}\right)\right] \otimes \mathcal{F}[s(t)]$$

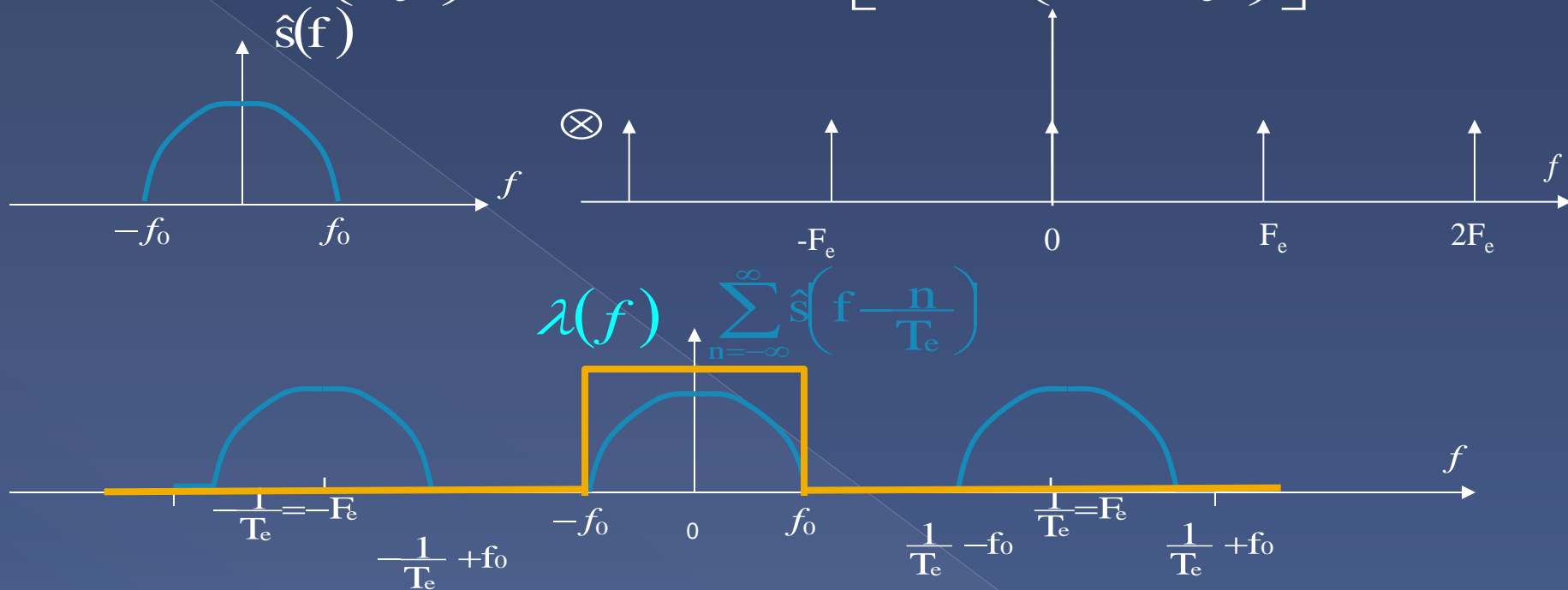
$$PE_D\left(\frac{t}{T_e}\right) s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} T_e \cdot PE_D(T_e \cdot f) \otimes \hat{s}(f) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right) \right] \otimes \hat{s}(f)$$

$$PE_D\left(\frac{t}{T_e}\right) s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{s}_e = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{s}\left(f - \frac{n}{T_e}\right) \right]$$

C'est une distribution périodique de période  $1/T_e$

- La transformée de Fourier d'une fonction réelle est symétrique par rapport à l'origine, si en plus elle est à support compact et que  $-f_0$  et  $f_0$  constituent le support alors la distribution ci-dessus est formée d'une somme de distributions identiques décalées de  $F_e = 1/T_e$  ayant leurs supports disjoints.

$$PE_D\left(\frac{t}{T_e}\right) s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{s}_e = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{s}\left(f - \frac{n}{T_e}\right) \right]$$



On peut donc reconstituer  $\hat{s}(f)$  en multipliant la distribution ci-dessus par une fonction porte telle que :

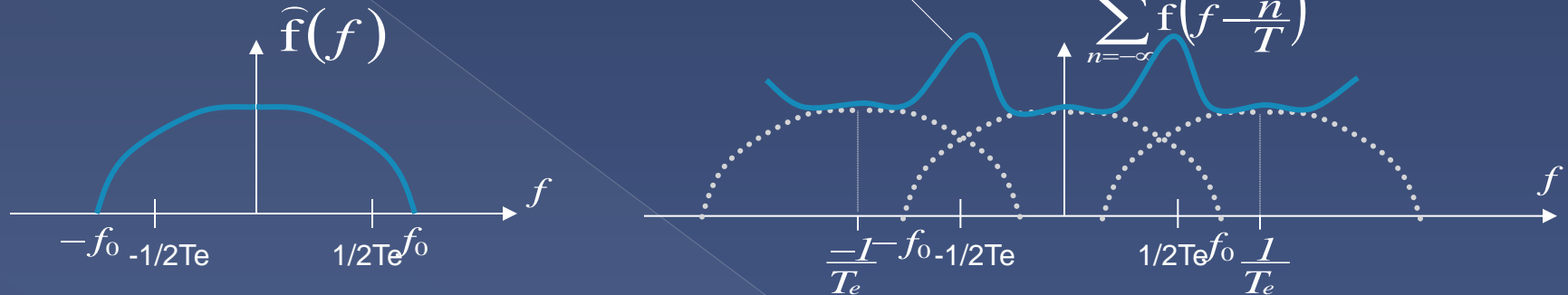
$$\lambda(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_e} - f_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



# Transformée de Fourier d'un signal échantillonné par un peigne de Dirac

Supposons maintenant :  $\frac{1}{T_e} < 2.f_0$

Repliement de spectre  
« aliasing »



On ne peut plus reconstituer  $\hat{f}(f)$  !

Théorème de Shannon : Il faut échantillonner à une cadence au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale contenue dans  $f(t)$ .

$$\frac{1}{T_e} > 2.f_0$$

# Transformée de Fourier d'un signal échantillonné par un peigne de Dirac

Théorème de Shannon : un signal s'échantillonne à une fréquence au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale contenue dans  $f(t)$ .

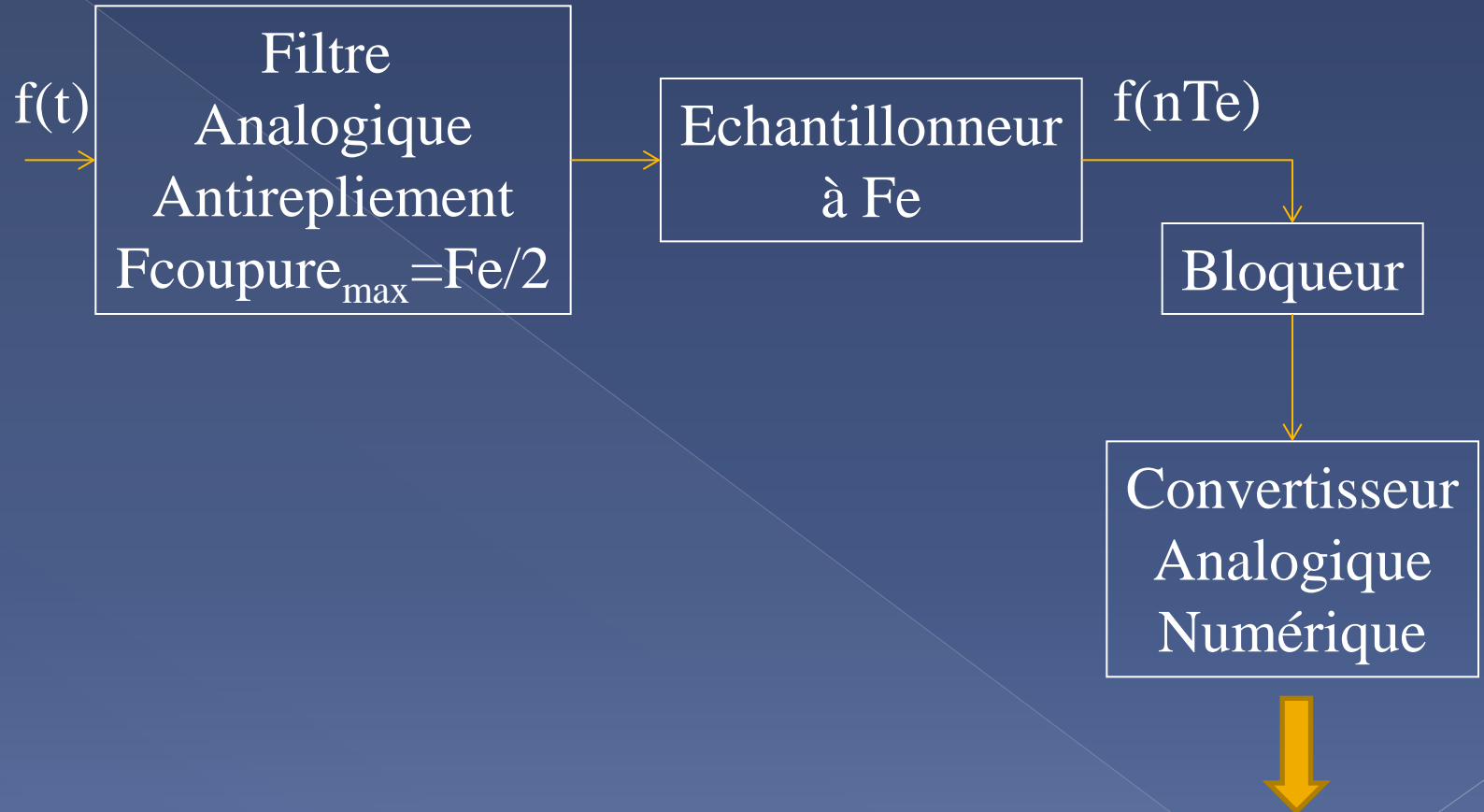
$$F_e > 2.f_0$$

En pratique, pour s'assurer de l'application du théorème de Shannon

Un filtre analogique passe bas  $[0, f_0]$  est placé avant l'échantillonneur

→ c'est le filtre antirepliement

# Conception de la chaine d'acquisition



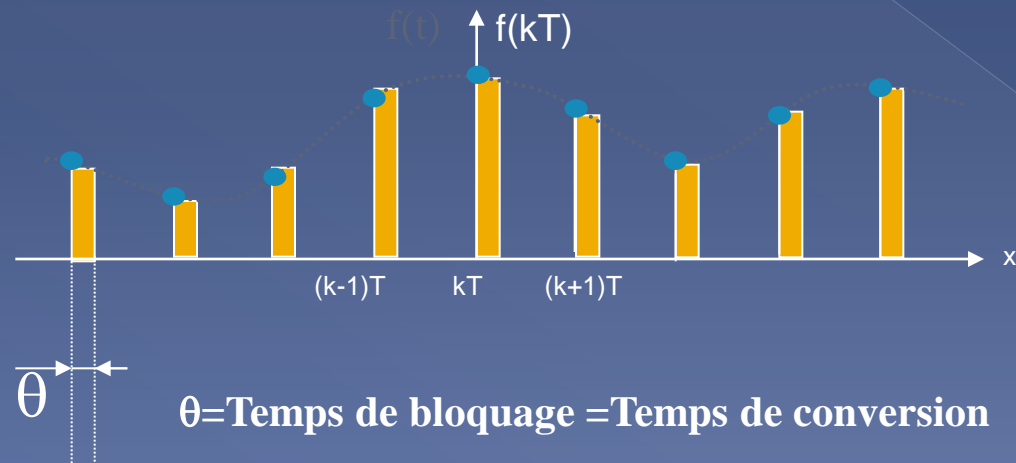
1110000.....11110010101

# L'échantillonnage

# Échantillonnage

L'échantillonneur assure les fonctions suivantes :

- prélever à un instant connu un échantillon d'une tension variable appliquée à son entrée
- mémoriser la valeur de cet échantillon
- délivrer en sortie une tension égale à celle de l'échantillon mémorisé



$\theta$  = Temps de bloquage = Temps de conversion

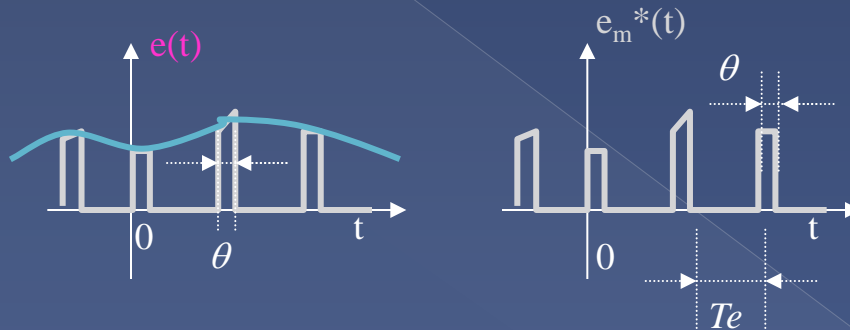
Impulsion  $\neq$  impulsion infiniment brève

En pratique  
l'échantillonneur prélève  
tous les  $kT$  l'amplitude du  
signal  $e(t)$  pendant une  
durée  $\theta \neq 0$  pour la fournir  
au quantificateur  
pendant la durée de  
conversion.

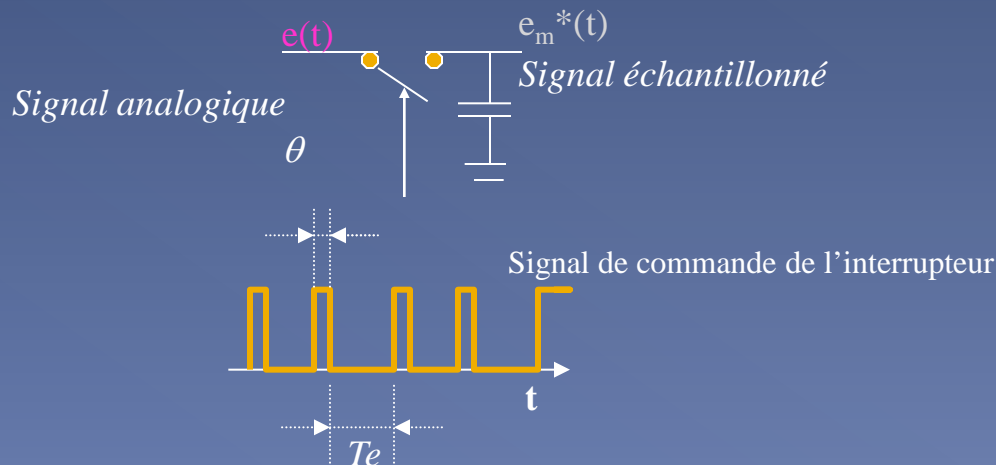
# Échantillonneur/ Bloqueur

Effet de l'échantillonneur sur le spectre du signal :

Nouveau modèle avec approximation : on prend la valeur moyenne du signal de  $e(t)$  pendant l'intervalle  $\theta$



Interrupteur



• Si  $h(t)=1$  alors  $e_m^*(t)=e(t)$

• Si  $h(t)=0$  alors  $e_m^*(t)=0$

# Échantillonneur/ Bloqueur

Effet de l'échantillonneur bloqueur sur le signal :

Influence de la largeur d'impulsion sur un échantillon :

$$e_{m^*_{kT_e}} = \frac{1}{\theta} \int_{+kT_e - \frac{\theta}{2}}^{+kT_e + \frac{\theta}{2}} e(t) dt$$

$$e_{m^*_{kT_e}} = \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{\theta/2}(t - kT_e) e(t) dt = \frac{1}{\theta} \left[ e(t) * \Pi_{\theta/2}(t) \right]_{t=kT_e}$$

On peut écrire l'estimée globale du signal échantillonné :

$$\hat{e}_{m^*}(t) = \frac{1}{\theta} \left[ e(t) * \Pi_{\theta/2}(t) \right] \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT_e)$$

# Échantillonneur/ Bloqueur

Effet de l'échantillonneur sur le spectre du signal :

$$\hat{e}_m^*(t) = \frac{1}{\theta} \left[ e(t) * \Pi_{\theta/2}(t) \right] \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT_e)$$

d'où en prenant la transformée de Fourier des 2 membres:

$$\hat{E}_m^*(f) = \left[ E(f) \cdot \frac{\sin \pi f \theta}{\pi f \theta} \cdot e^{-2\pi j f \frac{\theta}{2}} \right] * F_e \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(f - nF_e)$$

Tout se passe comme si  $E(f)$  devenait  $E_1(f)$  telle que:

$$\hat{E}_1(f) = \underbrace{E(f) \cdot \frac{\sin \pi f \theta}{\pi f \theta}}_{\text{Module}} \cdot \underbrace{e^{-2\pi j f \frac{\theta}{2}}}_{\text{Phase}}$$



# Échantillonneur/ Bloqueur

Tout se passe comme si  $E(f)$  devenait  $E_1(f)$  telle que:

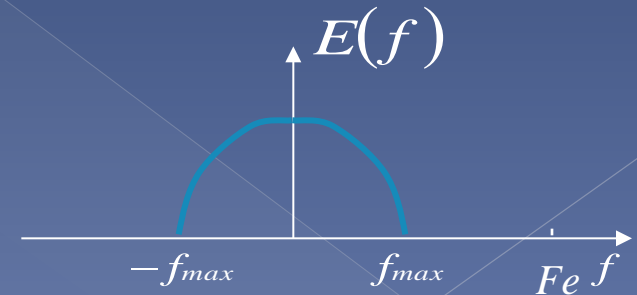
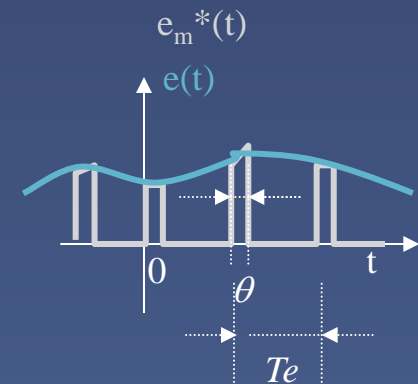
$$\hat{E}_1(f) = E(f) \cdot \underbrace{\frac{\sin \pi f \theta}{\pi f \theta}}_{\text{Module}} \cdot \underbrace{e^{-2\pi j f \frac{\theta}{2}}}_{\text{Phase}}$$

Posons :  $\theta = \lambda T_e$  avec  $\lambda \leq 1$

$F_e = 2 \alpha f_{max}$  avec  $\alpha \geq 1$

Le module de  $E_1(f)$  devient:

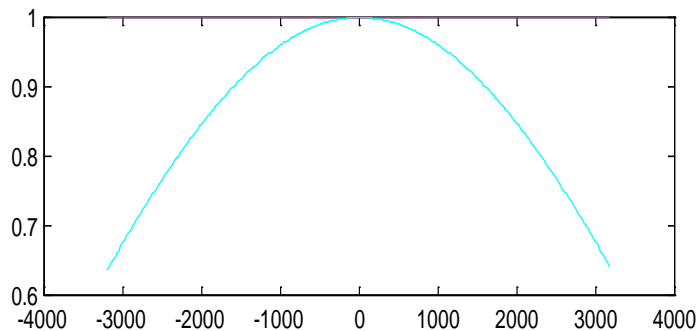
$$\frac{\sin \frac{\pi \lambda}{2 \alpha} \cdot \frac{f}{f_{max}}}{\frac{\pi \lambda}{2 \alpha} \cdot \frac{f}{f_{max}}} \cdot |E(f)|$$



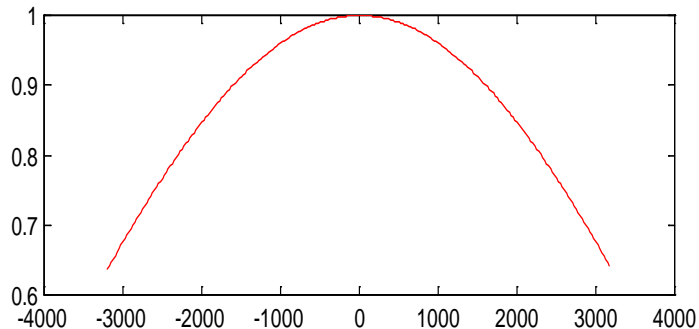
# Échantillonneur/ bloqueur: exemple

Exemple sur une TF de type fenêtre

$f_{max}=3200\text{Hz}$



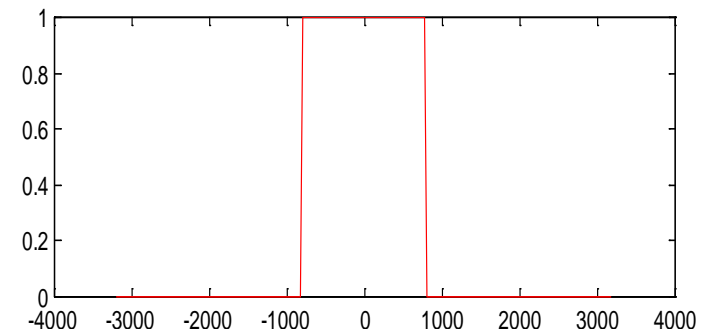
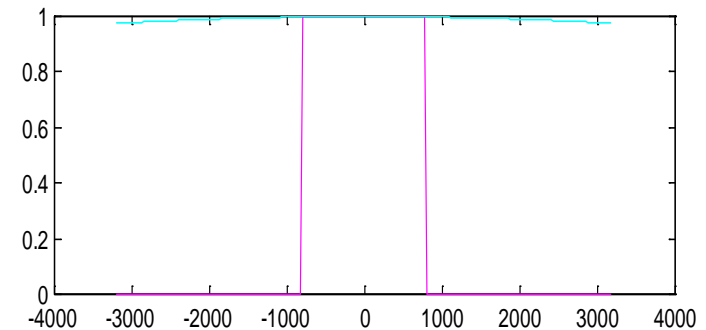
—  $E(f)$   
—  $\text{sinc}(\frac{\pi\lambda}{2\alpha} \frac{f}{f_{max}})$   
—  $\text{TF}(e_m^*(t))$



$Fe=6401\text{Hz}$

$\lambda=1$  (blocage complet  $\theta=Te$ )  
et  $\alpha=1+\varepsilon$  ( $Fe=2f_{max}+1$ )

$f_{max}=800\text{Hz}$



$\lambda=0.25$  (blocage entre 2 échantillons  $\theta=0,25Te$ )  
et  $\alpha=0.25$  ( $Fe=8f_{max}$ )

# Échantillonneur/ bloqueur: exemple

Effet de l'échantillonneur-bloqueur sur le spectre du signal :

Exemple :

- Si l'on veut que l'effet d'échantillonnage soit  $< 1\%$   $E(f_{\max})$  jusqu'à  $F_c$

alors : 
$$\frac{\sin\left(\frac{\pi\lambda}{2\alpha}\right)}{\frac{\pi\lambda}{2\alpha}} \geq 0,99 \quad \text{soit} \quad \frac{\lambda}{2\alpha} < 0,08 \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{\alpha} < 0,16$$

- si  $\alpha = 1$  ( $F_c = 2f_{\max}$ ) alors  $\lambda = 0,16$

→ la largeur d'impulsion = 16% de la période d'échantillonnage

- si  $\alpha = 5$  soit  $F_c = 10 f_{\max}$  alors  $\lambda = 0,8$

→ la largeur d'impulsion = 80% de la période d'échantillonnage

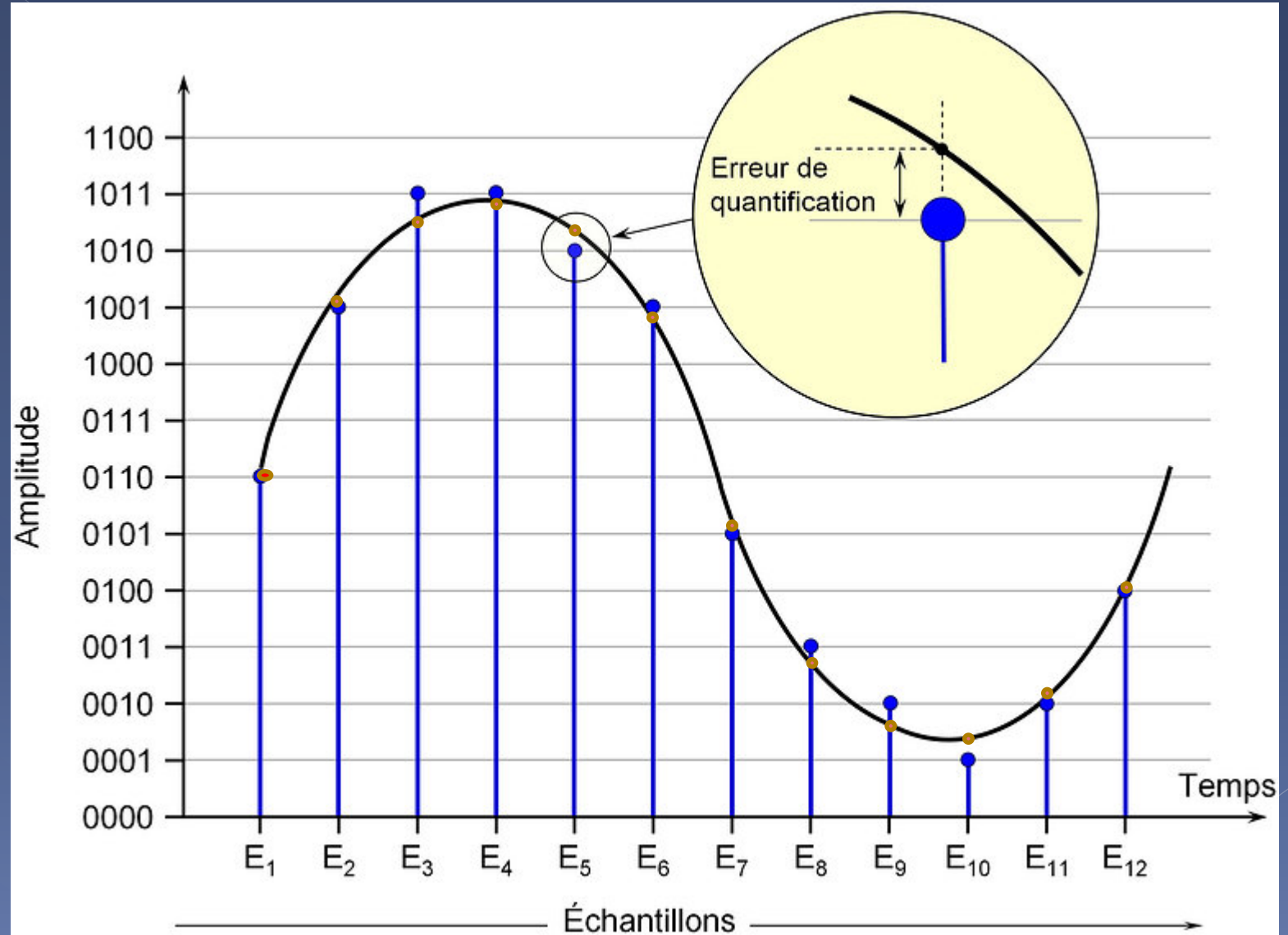
- si l'on veut que l'effet d'échantillonnage soit  $< 0,1\%$   $E(f_{\max})$  jusqu'à  $F_c$

- pour  $\alpha = 1$  (échantillonnage de Shannon) alors  $\lambda = 4\%$   $T_c$

- pour  $\alpha = 5$  alors  $\lambda = 20\%$   $T_c$

# Quantification

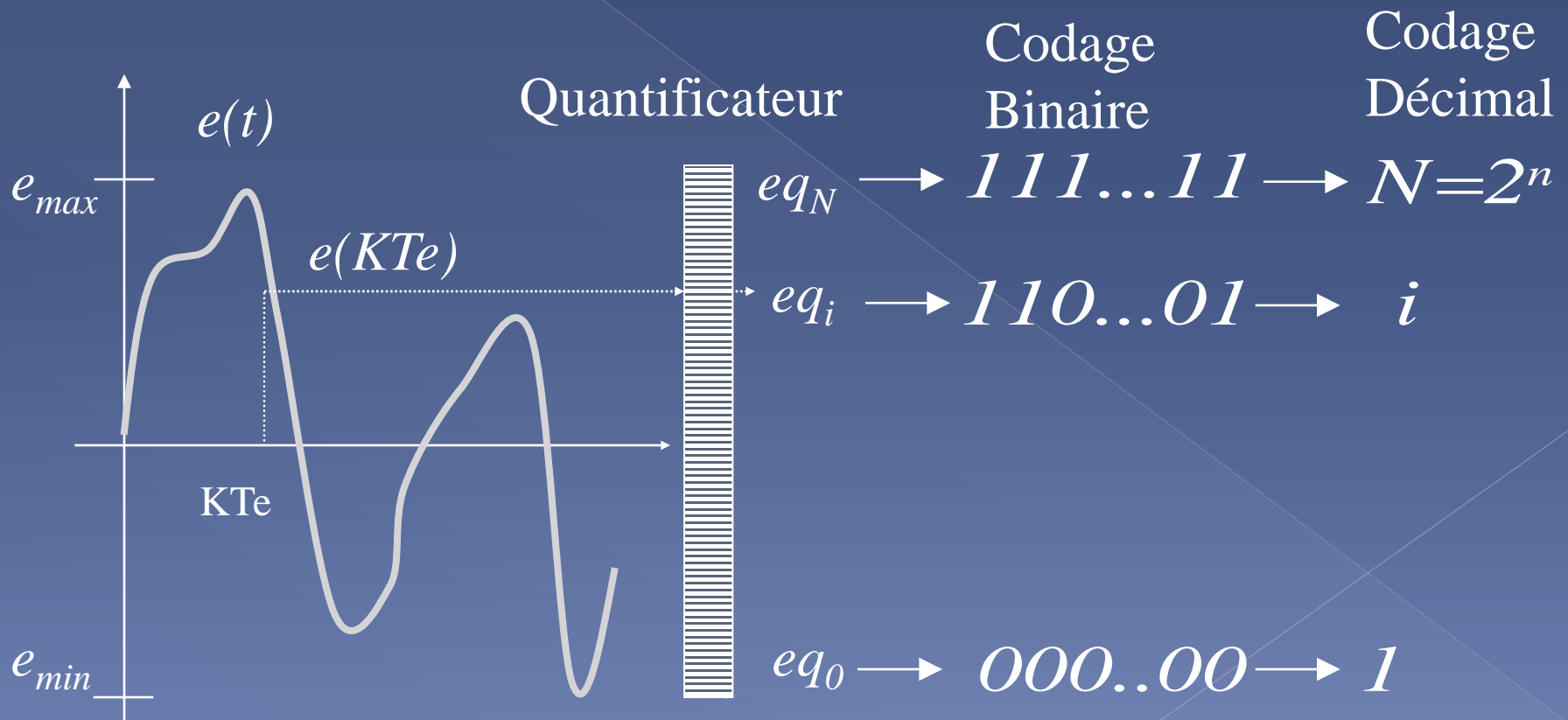
# Quantification



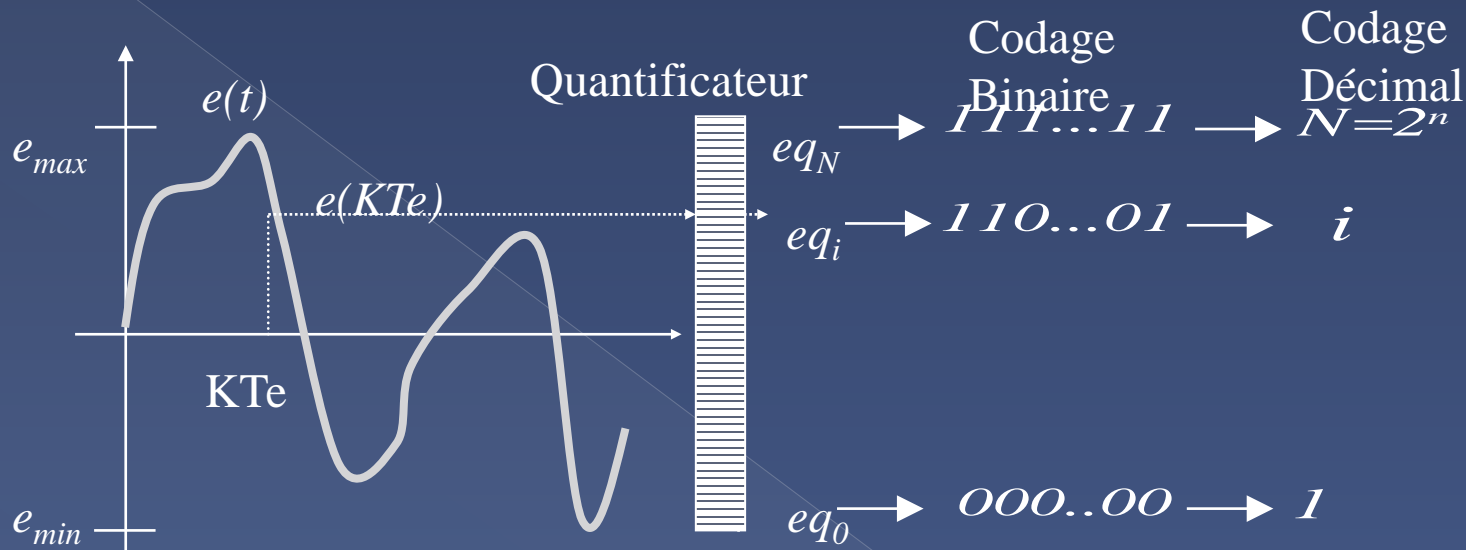
# Quantification et technologie

→ Le quantificateur

Le quantificateur convertit la valeur de  $e(t)$  en une donnée binaire  $eq_i$  sur  $n$  bits de quantification



# Quantification et codage



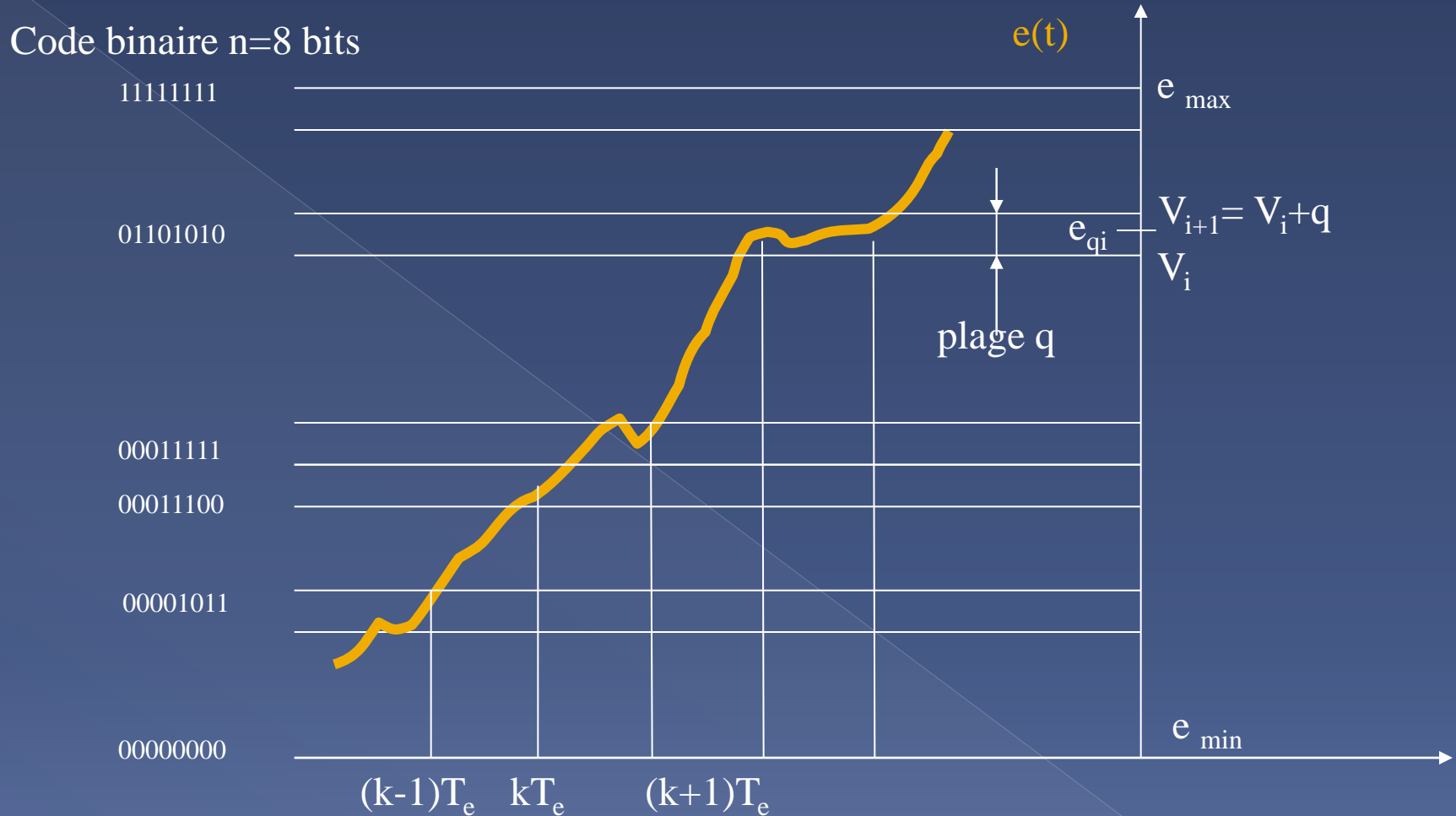
Si le convertisseur est de  $n$  bits, le signal  $e(t)$  compris entre  $e_{min}$  et  $e_{max}$  est quantifié en  $2^n$  valeurs  $\rightarrow eq_i$

$V_{pe} = (e_{max} - e_{min}) \rightarrow$  est appelée plage de conversion ou tension pleine échelle du convertisseur

Si la quantification est linéaire, le quantum (pas de conversion) a pour expression :

$$q = \frac{V_{pe}}{2^n} \Rightarrow q = \frac{e_{max} - e_{min}}{2^n}$$

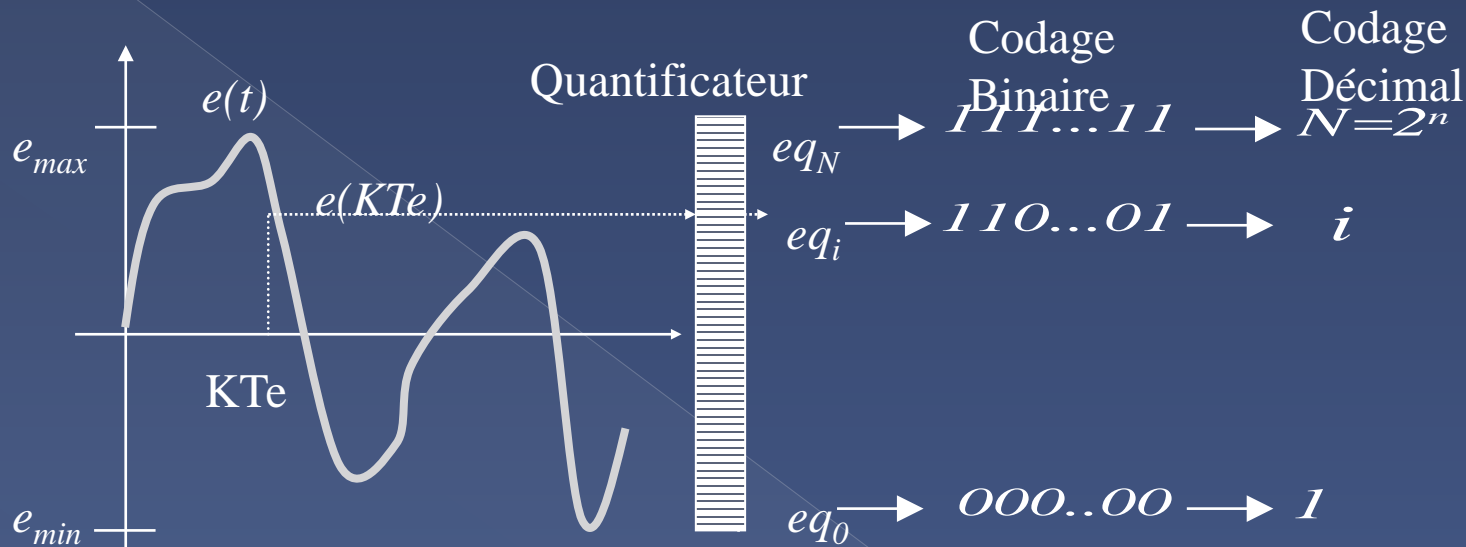
# Quantification et codage : caractéristiques générales



→ A la réception il y a ambiguïté, comment attribuer une plage à une valeur numérique discrète. On minimise l'erreur en attribuant à la plage  $[V_i, V_{i+1}] \rightarrow V_i + q/2$



# Quantification et codage

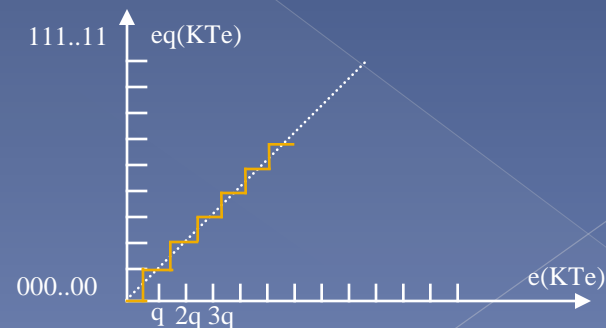


Si  $e(KTe) \in \left[ \left(i - \frac{1}{2}\right)q, \left(i + \frac{1}{2}\right)q \right]$  alors  $eq(KTe) = i.q$

Avec  $i$  entier tel que  $i \in [0, 2^n - 1]$

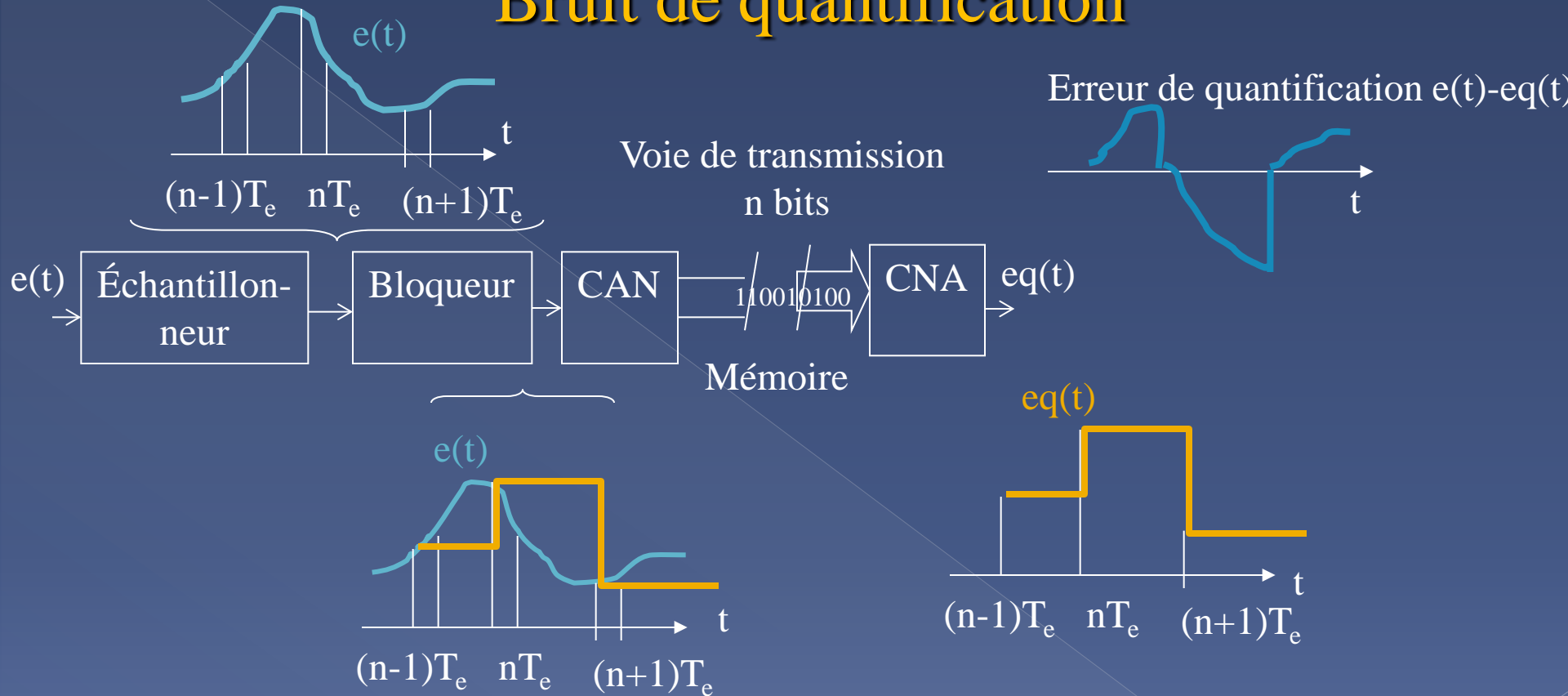
Ou pour rester bipolaire:

$$i \in [-2^{n-1} + 1, 2^{n-1}]$$



# Quantification et codage

## Bruit de quantification



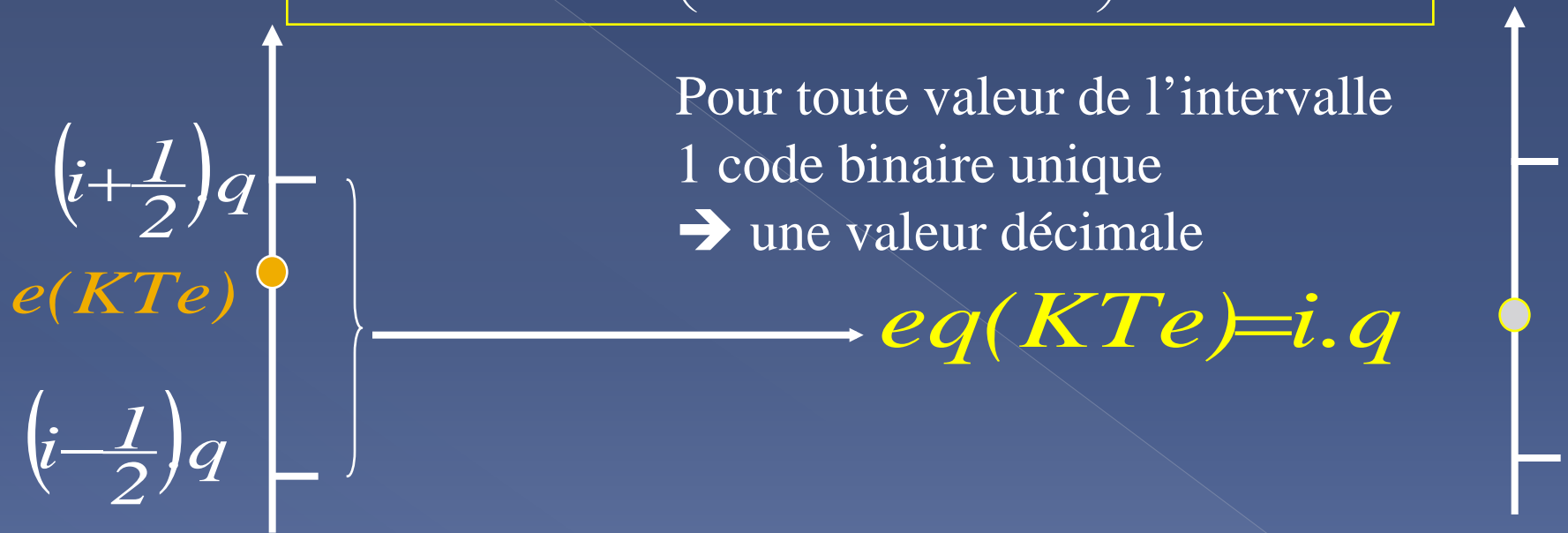
En sortie d'une chaîne CAN-CNA la différence entre le signal d'entrée  $e(t)$  et le signal restitué  $eq(t)$  est appelé bruit de quantification

# Quantification et codage

## Bruit de quantification et choix du nombre de bits

Rapport signal sur bruit de quantification :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left( \frac{\text{Variance du Signal}}{\text{Variance du Bruit}} \right)$$



Le bruit de quantification est représenté par

$$b_q = e - eq$$

# Quantification et codage

## Bruit de quantification

Si l'erreur de conversion est uniformément répartie sur l'intervalle , cette erreur est représentée par un signal  $b$  caractérisé par sa loi de probabilité uniforme avec sa densité de probabilité  $p(b)=p_0$  sur l'intervalle  $[(i-(1/2))q, (i+(1/2))q]$

On a alors : 
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(b) db = p_0 \int_{(i-\frac{1}{2})q}^{(i+\frac{1}{2})q} db = p_0 \cdot q$$

D'où : 
$$p_0 = \frac{1}{q}$$

La variance du signal d'erreur (du bruit)  $b$  devient :

$$\sigma_b^2 = \int_{(i-\frac{1}{2})q}^{(i+\frac{1}{2})q} p(b) \cdot b^2 db = \frac{1}{q} \int_{(i-\frac{1}{2})q}^{(i+\frac{1}{2})q} b^2 db = \frac{q^2}{12}$$

# Quantification et codage

## Bruit de quantification et choix du nombre de bits

Exemple :  $e(t)$  est un signal sinusoïdal d'amplitude maximum  $V_{pe}/2$   
valeur limite de conversion

$$e(t) = \frac{V_{pe}}{2} \cdot \sin(\omega t)$$

Sa valeur efficace est : 
$$e_{eff} = \frac{V_{pe}/2}{\sqrt{2}} = \frac{2^n q}{2\sqrt{2}}$$

Rapport signal sur bruit de quantification :

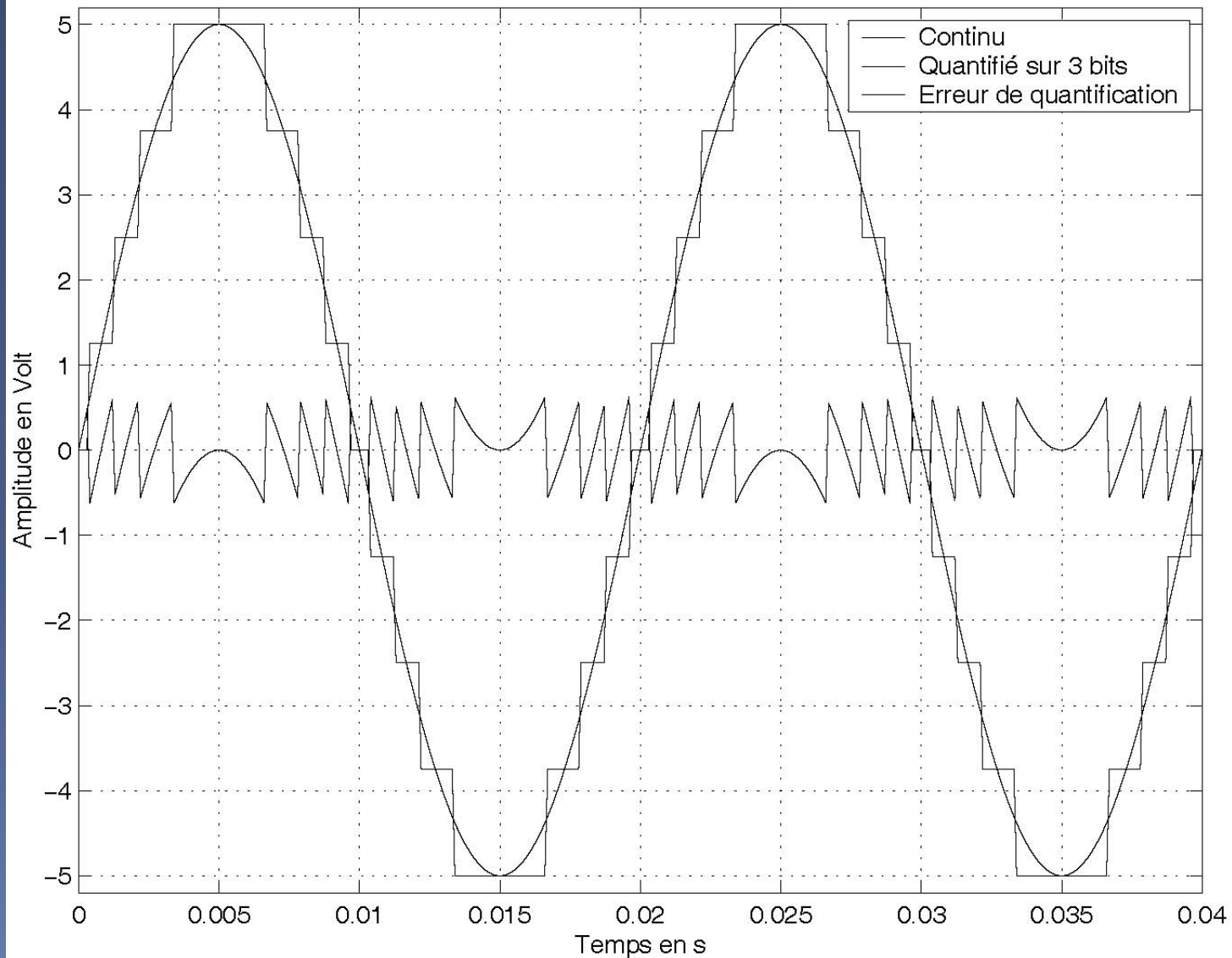
$$SNR_{dB} = 10 \log \left( \frac{e_{eff}^2}{\sigma_b^2} \right)_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{e_{eff}}{\sigma_b} \right)$$

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{(2^n q / 2\sqrt{2})^2}{q^2 / 12} \right) = 20 \log_{10} \left( \frac{2^n \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$SNR_{dB} = 6,02n + 1,76$$

# Quantification et codage

## Exemple: Bruit de quantification



# Quantification et codage

## Bruit de quantification , bruit du signal et choix du nombre de bits

Pour améliorer le rapport signal sur bruit  $SNR_{dB}=6,02n+1,76$   
→ Augmenter n est une solution !

Cependant si le signal  $e(t)$  à convertir contient également du bruit tel que :

$$e(t)=e_u(t)+n(t)$$

On choisit de prendre la variance du bruit de quantification égale à la variance du bruit  $n(t)$  du signal

$$\sigma_b^2=\sigma_n^2 \text{ ou } \sigma_b=\sigma_n$$

$$\sigma_b=\frac{q}{\sqrt{12}}=\frac{V_{pe}}{2^n 2\sqrt{3}}=\sigma_n$$

Vpe Tension pleine échelle

$$n=1,79+3,32.\log\left(\frac{V_{pe}}{\sigma_n}\right)$$

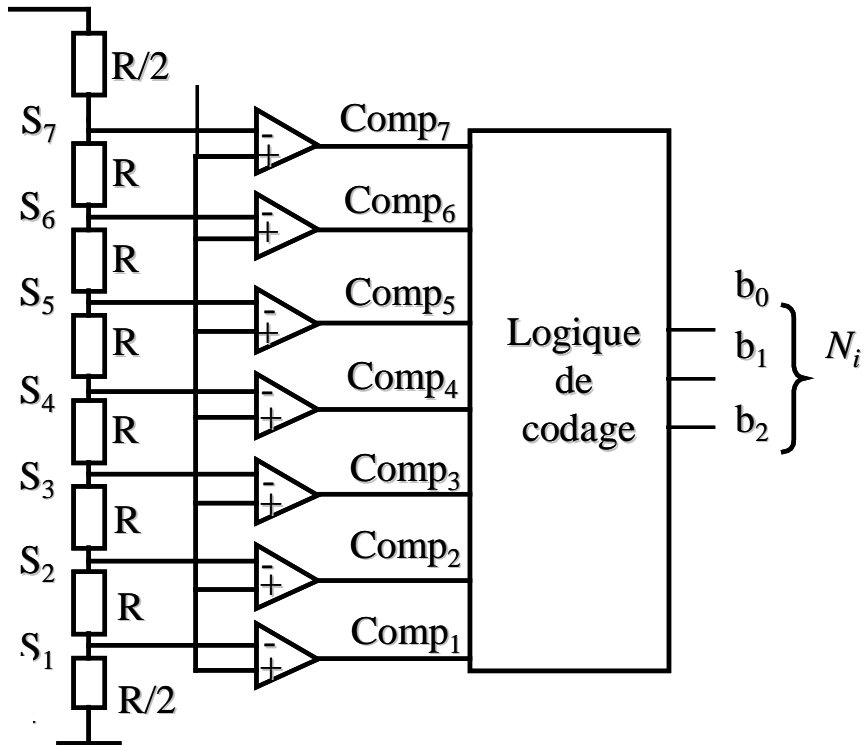
# Quantification et codage : applications - exemples

Téléphonie	dans la bande [300-3400] Hz
Echantillonnage	$f_e=8\text{KHz}$ sur 8 bits
Rapport S/B	Fixé après test à 35dB pour le niveau max Jusqu'à 45 dB pour les niveaux inférieurs
CD Audio	dans la bande [100-18000] Hz
Échantillonnage	$f_e=44.1\text{KHz}$ sur 16 bits
Rapport S/B	Variable
Télévision	dans la bande [0-5] MHz
Échantillonnage	$f_e=13.3\text{MHz}$ sur 8 bits
Rapport S/B	Variable



# Technologie des CAN et CNA

## Les CAN : Convertisseur Flash



C'est un réseau de comparateurs en parallèle. Une conversion sur  $n$  bits nécessite  $2^n - 1$  comparateurs et  $2^n$  résistances

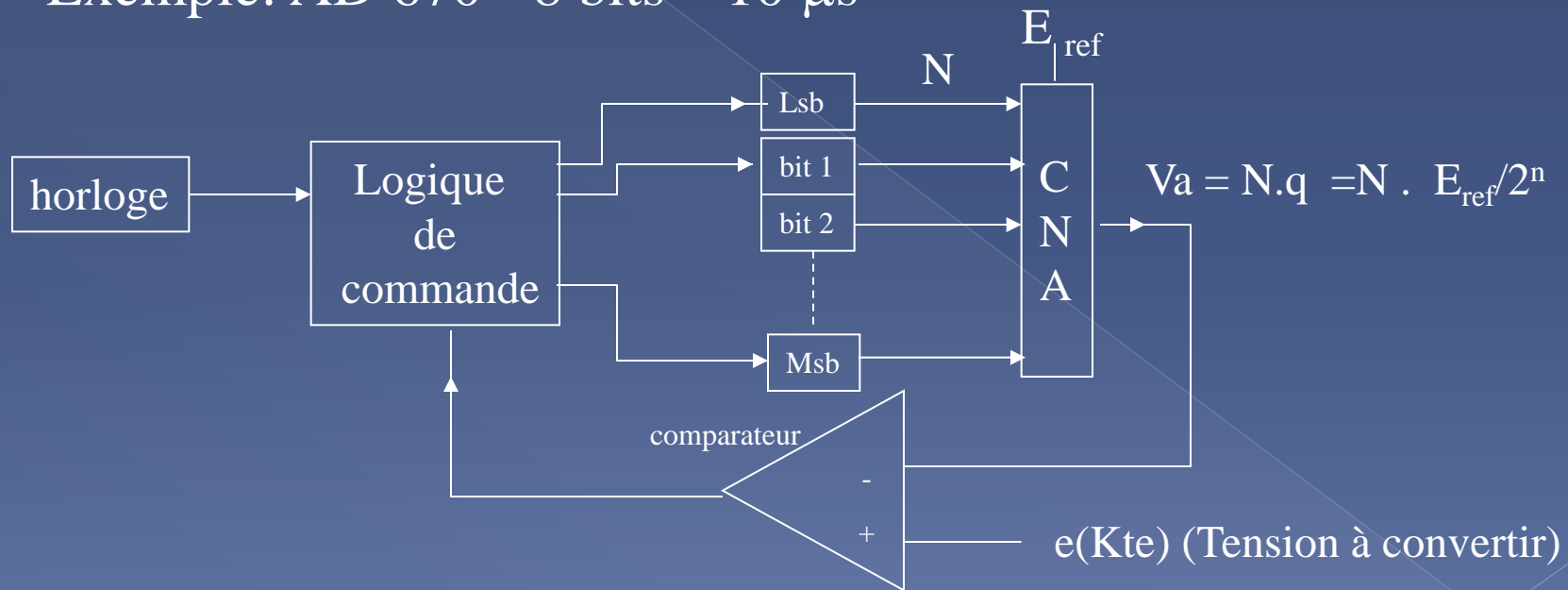
La conversion est faite en un coup d'horloge, c'est un système qui est très rapide ( $>300\text{Mhz}$ ) mais très cher.

Les résistances sont ajustées au Laser. Utilisé en vidéo ( $30\text{Mhz}$ ), il est limité à 12 bits (coût et fabrication de l'encodeur).

→ Pour limiter le coût on utilise parfois des convertisseurs semi-flash qui traitent la moitié des bits ( les poids forts) puis le reste ( les poids faibles)

## Les CAN : Approximations successives (*Successive approximation register SAR*)

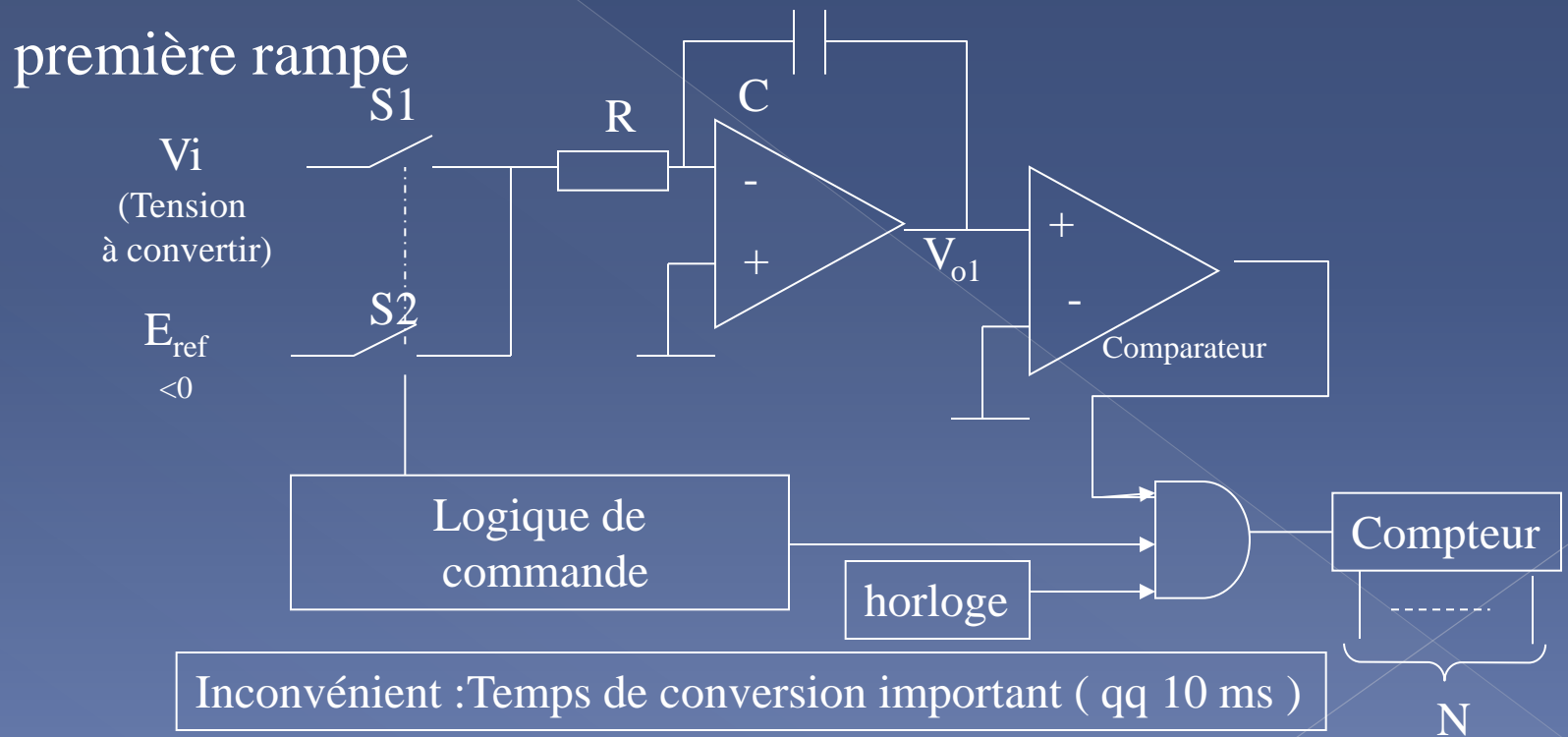
- Principe : méthode dichotomique,  
Recherche du bit de poids fort (MSB) en divisant la pleine échelle  
puis recherche du bit suivant, etc.
- Avantage = précis, le temps de conversion dépend du nombre de bits
- Exemple: AD 670 - 8 bits – 10  $\mu$ s



$$\text{Temps de conversion} = n \cdot T_{\text{horloge}}$$

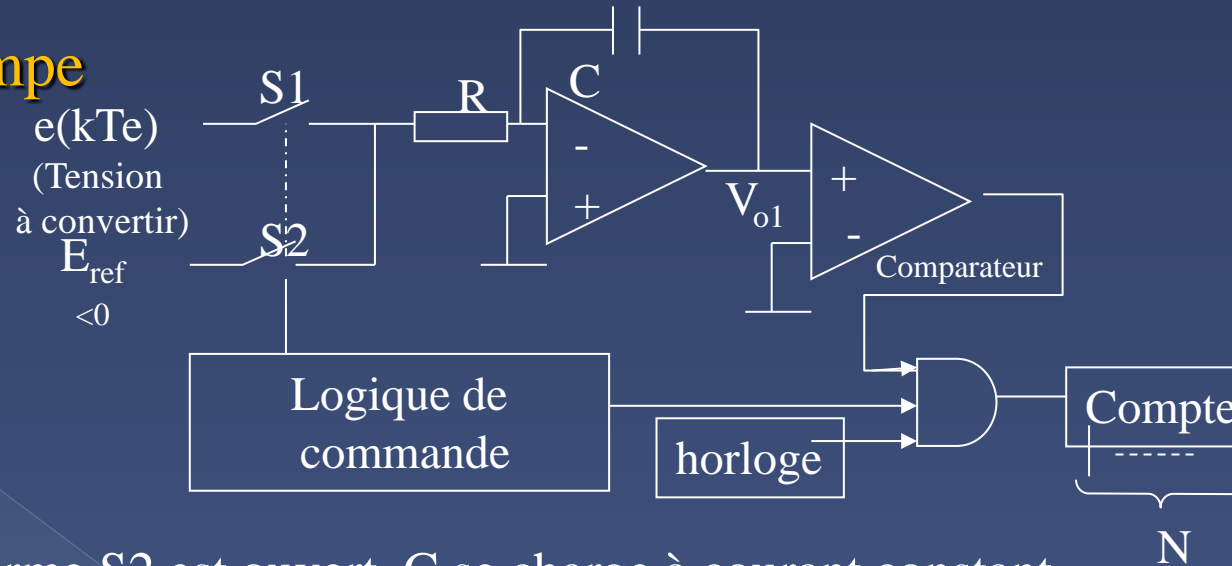
# Les CAN : Convertisseur double rampe

- Principe : Charge et décharge de condensateur à courant constant et comptage d'impulsions
- Avantage: Très précis et bien adapté à la haute résolution (nombre de bits)
- Attention réjection de fréquences multiples de la période de la première rampe



# Convertisseur double rampe

$T_1, T_h, V_{ref}, R$  et  $C$   
sont fixés par le constructeur



A  $t=0$  tout est à vide, S1 se ferme, S2 est ouvert, C se charge à courant constant pendant un temps  $T_1$  fixe

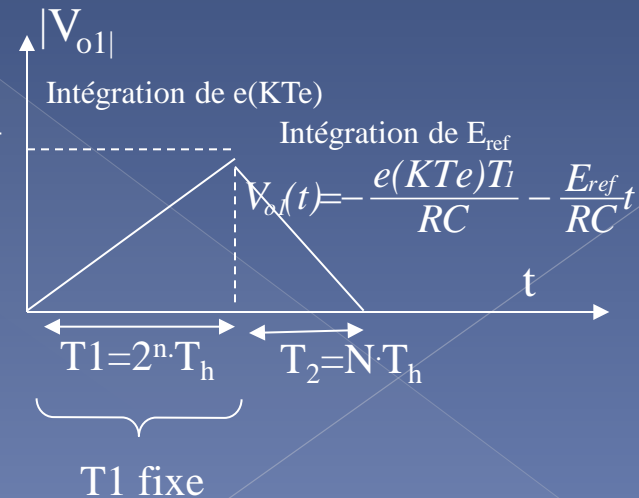
A  $t=T_1$ , S1 s'ouvre et S2 se ferme ( $E_{ref} < 0$ ) donc C se décharge jusqu'à  $V_c=0 \rightarrow T_2$   
Le compteur est enclenché entre  $T_1$  et  $T_2$

$$0 = -\frac{e(KTe)T_1}{RC} - \frac{E_{ref}}{RC}T_2$$

$$-e(KTe)T_1 = E_{ref}T_2$$

$$N = \frac{T_2}{T_h} = -\frac{e(KTe)}{E_{ref}} \frac{T_1}{T_h}$$

$$V_{o1}(T_1) = -\frac{e(KTe)T_1}{RC}$$



## Conclusion sur les CAN

	Durée Cycles	Fréquence	Nbre de bits	Coût
Double rampe	$2^n$	<200 KHz	>16 Bits	\$
Approximation	n	500KHz	16 Bits	\$\$
Flash	1	>10MHz	10-12 Bits	\$\$\$

# Conversion Numérique Analogique

La sortie est très souvent en courant I; I doit obéir à l'équation :

$$I = I_o \left[ a_{N-1} 2^{N-1} + a_{N-2} 2^{N-2} + a_{N-3} 2^{N-2} + \dots + a_0 2^0 \right]$$

Ou encore

$$I = I_o 2^{N-1} \left[ a_{N-1} 2^0 + a_{N-2} 2^{-1} + a_{N-3} 2^{-3} + \dots + a_0 2^{-N+1} \right]$$

$I_o$  courant de référence

$a_n$  : coefficient = 0 si le niveau logique vaut '0'

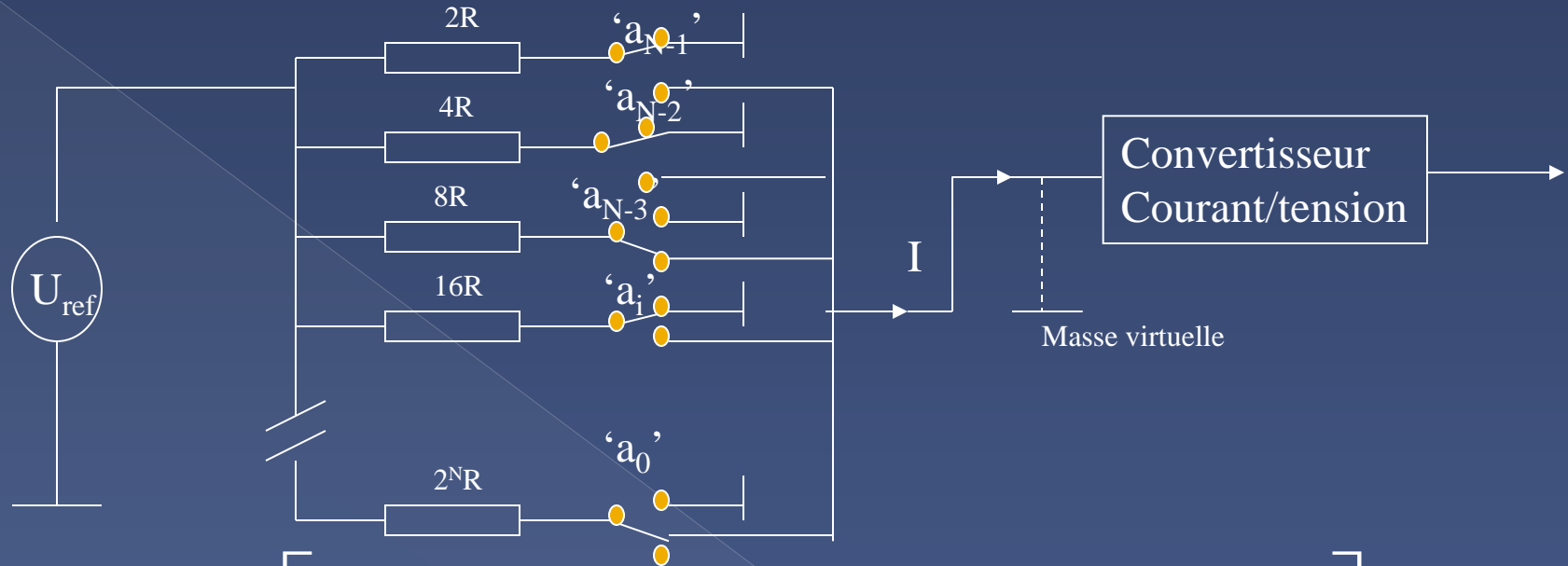
= 1 si le niveau logique vaut '1'



Pour générer ces N générateurs de courant variant dans un rapport  $2^{N-1}$ , il existe 2 types de CNA:

- convertisseur à poids
- convertisseur à réseau R - 2R

# Les CNA : convertisseur à poids



$$I = \frac{U_{ref}}{R} \left[ a_N \frac{1}{2^1} + a_{N-1} \frac{1}{2^1} + a_{N-2} \frac{1}{2^2} + \dots + a_1 \frac{1}{2^N} \right]$$

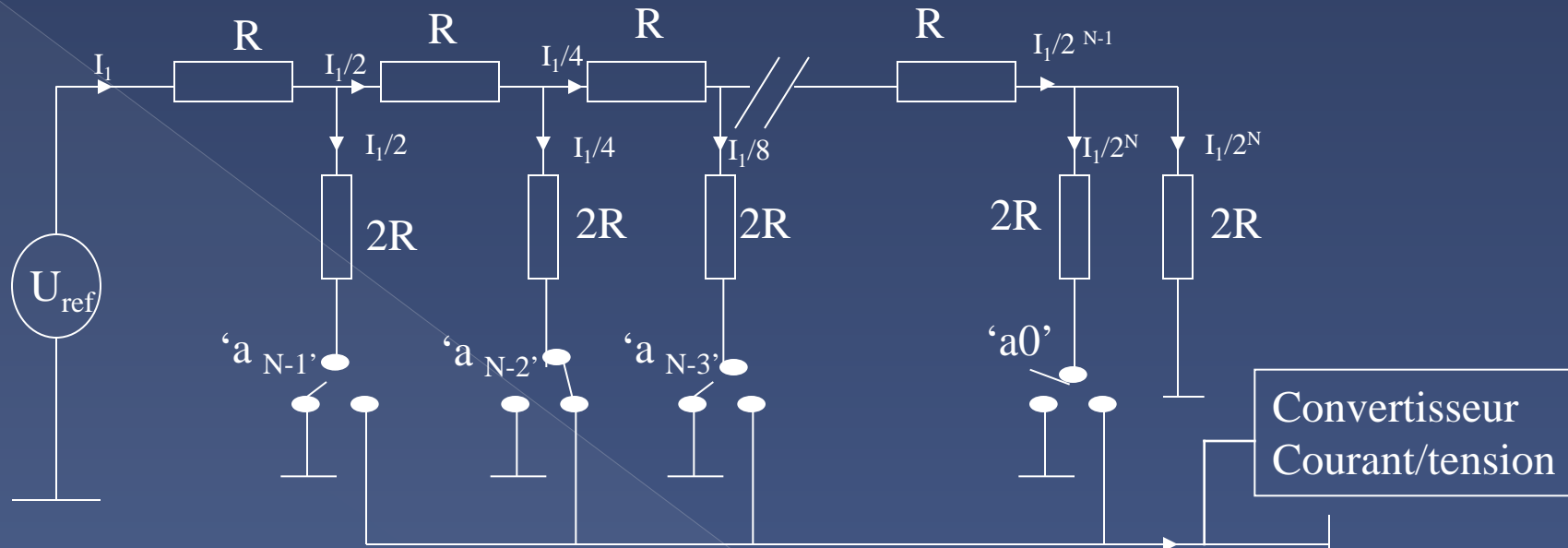
→ Avantage  $I_o = U_{ref}/R = \text{cst}$  indépendant des niveaux logiques donc temps de réponse faible

→ Inconvénients :

réalisation de N résistances de valeurs différentes et de plus les résistances des interrupteurs doivent être négligeables devant les résistances  $2R, \dots, 16R$



## Les CNA : convertisseur R-2R



$$I = \frac{U_{ref}}{2R} \left[ a_{N-1} \frac{1}{2^1} + a_{N-2} \frac{1}{2^2} + a_{N-3} \frac{1}{2^3} + \dots + a_0 \frac{1}{2^N} \right]$$

→ Avantage :  $I_1 = \text{cst}$  indépendant des niveaux logiques donc temps de réponse faible + 2 valeurs de résistances R-2R

→ Inconvénients : Résistances des interrupteurs devant  $2R$ . L'erreur est fixe

→ Exemple AD 568 12 bits 35ns

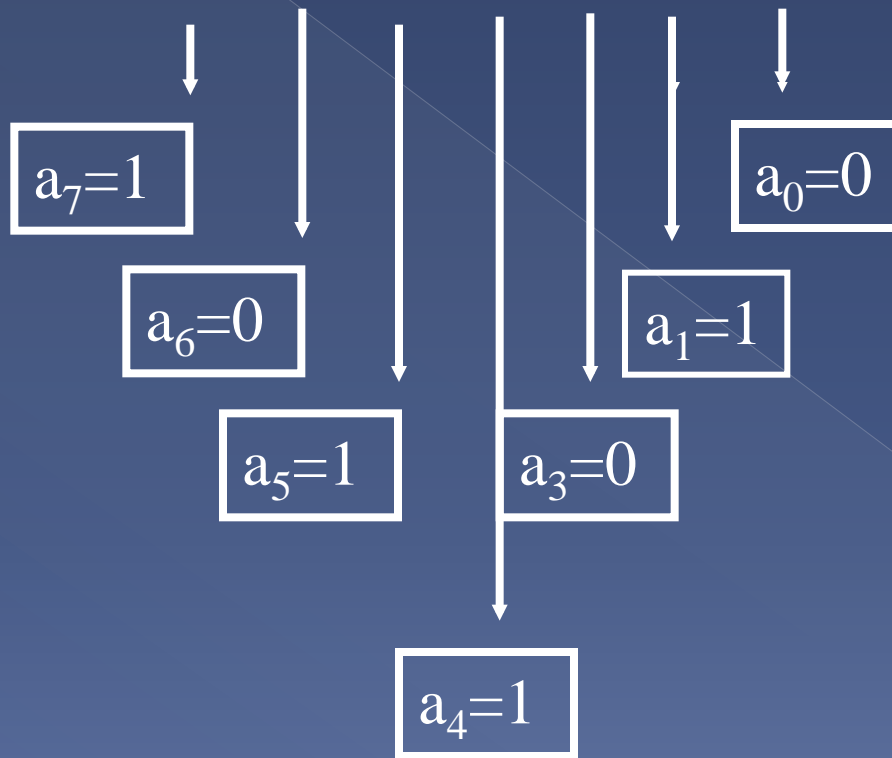
# Conclusion sur les CNA

Les convertisseur R-2R sont plus précis que les convertisseurs à poids car les résistances d'interrupteurs (transistors) sont comparées à  $2R$  quel que soit le rang de commutation des  $a_i$ .

→ Ils sont généralement 2 fois plus chers ....

Nombre binaire :

Ni= 1 0 1 1 0 1 0



Commande d'interrupteur

