Chapitre 13
Signaux aléatoires

1. Définition

Un signal est aléatoire s'il dépend des "lois" du hasard

Conséquences

- La valeur instantanée d'un signal aléatoire est imprévisible
- Il n'existe pas de représentation analytique

On décrit un signal aléatoire par :

- Ses propriétés statistiques
- Ses propriétés fréquentielles

Les signaux aléatoires forment une classe particulièrement importante de signaux

- Transmission d'informations
- Perturbations aléatoires sur un signal déterministe

Un signal aléatoire observé doit être considéré comme une <u>réalisation particulière</u> d'un ensemble de signaux similaires qui sont tous susceptibles d'être produits par le même <u>processus</u> (phénomène) <u>aléatoire</u>

2. Processus aléatoires

C'est une famille de fonctions à plusieurs variables : $x(t, \xi)$

t : représente souvent le temps

ξ : élément de l'espace des épreuves (expérience particulière)

Selon que les variables sont continues ou discrètes, on parle de :

- Processus aléatoires
- Processus aléatoires discrets

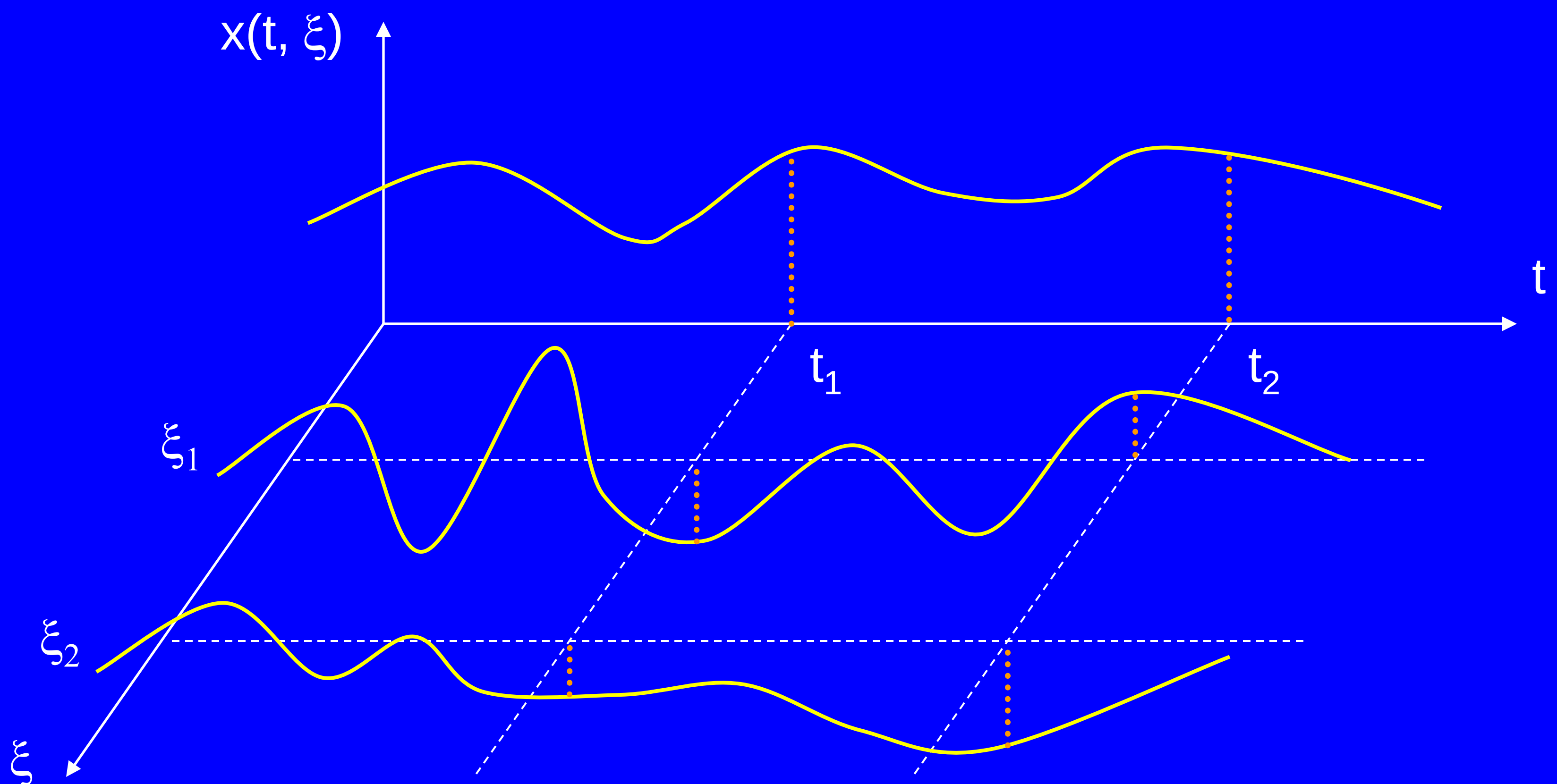
Si l'échelle de temps est discrètisée, on parle de :

- suite aléatoire

ensem

Si le hasard intervient de façon discontinue à des instants aléatoires, on parle de :

- processus ponctuel



3. Signal aléatoire - définition

Pour ξ_i fixé, $x(t, \xi)$ se réduit à $x(t, \xi_i)$ que l'on note $x_i(t)$ ou $x(t)$
On peut alors décrire $x(t)$ par certaines valeurs :

La moyenne : $$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt\right]$$

La puissance : $$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt\right]$$

4. Variable aléatoire

Pour $t=t_i$ fixé, $x(t, \xi)$ se réduit à une simple variable aléatoire $x(t_i)$ ou x_i
On peut alors décrire $x(t_i)$ par :

La fonction de répartition : $F(x,t_i) = \mathrm{Prob}(x_i \leq x)$

La densité de probabilité : $\frac{d}{dx}\left(F\left(x,t_i\right)\right)=P\left(x,t_i\right)=P_i\left(x\right)$

Une moyenne calculée le long de l'axe ξ (moyenne d'ensemble) s'exprime par :

$$E\left(x_i\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x P_i(x)dx$$

5. Exemples

- vitesse instantanée de l'écoulement turbulent d'un fluide
- bruit de fond dans les circuits électroniques (agitation thermiques des électrons)
- appels dans un central téléphonique
- pannes affectant une installation
- flux dans les réseaux

6. Vecteurs aléatoires

Si on considère k instants : $t_1, t_2, \ldots, t_k$
On définit k variables aléatoires : $x_1, x_2, \ldots, x_k$
On forme un vecteur à k composantes : $x=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ qui peut être caractérisé par une loi de probabilité conjointe $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ à k dimensions
En pratique, on utilise la statistique d'ordre 1 (k=1) ou d'ordre 2 (k=2)

7. Statistique d'ordre 1

Soit la variable aléatoire $x_i=x(t_i)$

La fonction de répartition : $F(x,t_i) = \mathrm{Prob}(x_i \leq x)$

La densité de probabilité : $P(x,t_i) = \frac{d}{dx}(F(x,t_i))$ **avec** $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t_i)\,dx = 1$

La moyenne, espérance, moment de degré 1 :

$$\mu_x(t_i) = E(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i P(x,t_i)\,dx_i$$

La variance, moment centré du 2eme degré :

$$\sigma_x^2(t_i) = E\left[\left(x_i - \mu_x(t_i)\right)^2\right] = E\left(x_i^2\right) - \mu_x^2(t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x_i - \mu_x(t_i)\right]^2 P(x, t_i)\, dx_i$$

Moment d'ordre supérieurs :

$$m_{x,n}(t_i) = E\left(x_i^n\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^n P(x, t_i)\, dx_i$$

Moments centrés d'ordre 3 et 4 :

$$m_{x,3}(t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - \mu_x(t_i)\right)^3 P(x, t_i)\, dx_i$$

$$m_{x,4}(t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - \mu_x(t_i)\right)^4 P(x, t_i)\, dx_i$$

A partir des moments centrés d'ordre 3 et 4 :

$$\gamma_1(t_i) = \frac{m_{x,3}(t_i)}{\sigma_x^3(t_i)}$$: coefficient de dyssymétrie

$$\gamma_2(t_i) = \frac{m_{x,4}(t_i)}{\sigma_x^4(t_i)} - 3$$: coefficient d'aplatissement

Pour $P(x,t_i)$ gaussienne : $m_{x,3}(t_i) = m_{x,3}(t_i) = 0$ $\Longrightarrow$ $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$

8. Statistique d'ordre 2

Soit un couple de variables aléatoires $x_i = x(t_i)$ et $x_2 = x(t_2)$

La fonction de répartition conjointe est :

$$F(x_1, x_1, t_1, t_2) = \mathrm{Prob}(x_1 \leq X_1, x_2 \leq X_2)$$

La densité de probabilité conjointe est :

$$p(x_1,x_2,t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F(x_2,x_1,t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Moments : moyennes statistiques des variables : $x_1^n\ ,\ x_2^m\ n,m \in N$

$$p(x_1,x_2,t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F(x_2,x_1,t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Si n=m=1, on obtient la fonction d’autocorrélation statistique du processus x(t)

$$R_x(t_1,t_2)=E[x(t_1)x(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1\, x_2\, p(x_1,x_2,t_1,t_2)\,dx_1\, dx_2$$

Si on soustrait les moyennes à x_1 et à x_2, on obtient la fonction d’autocovariance (si $t_1=t_2$, on retrouve la variance) :

$$C_x(t_1,t_2)=E([x(t_1)-\mu_x(t_1)][x(t_2)-\mu_x(t_2)])=R_x(t_1,t_1)-\mu_x(t_1)\,\mu_x(t_2)$$

9. Stationnarité

Un processus est dit stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps

On dit qu'un processus est stationnaire au deuxième ordre si ses statistiques d'ordre 1 et 2 sont invariantes dans le temps. Dans ce cas on a :

$$p(x_1,t_i)=p(x) \quad \forall t_i$$

$$\Rightarrow \mu_x(t_i)=\mu_x \quad et \quad \sigma_x^2(t_i)=\sigma_x^2 \quad \forall t_i$$

La densité de probabilité conjointe ne dépend que de :

$$\tau=t_1-t_2$$

$$\Rightarrow p(x_1,x_2,t_1,t_2)=p(x_1,x_2,\tau)$$

L'autocovariance et l'autocorrélation deviennent :

$$R(t_1,t_2)=R_x(\tau)$$

$$C_x(t_1,t_2)=C_x(\tau)=R_x(\tau)-\mu_x^2$$

En pratique on fera souvent l'hypothèse de stationnarité à l'ordre 2

10. Ergodicité

Un processus est dit ergodique si on peut identifier les moyennes d'ensemble aux moyennes temporelles

On a alors si x(t) est stationnaire :

$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^n(t)dt\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\,p(x)dx$$

• σ_x (n=2) représente alors pour les signaux aléatoires l'équivalent de la valeur efficace introduite pour les signaux sinusoïdaux

• En pratique on fera souvent l'hypothèse d'ergodicité. Les propriétés statistiques de x(t, ξ) seront estimées à partir de l'analyse temporelle d'un signal x(t) **unique**

11. Fonctions caractéristiques

Soit une variable aléatoire x
On appelle fonction caractéristique la transformée de Fourier de la densité de probabilité p(x)

$$\hat{p}(f) = \langle p(x), e^{-2\pi j f} \rangle$$

Propriétés :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1 \quad \Longrightarrow \quad \hat{p}(0) = 1$$

Moments

$$\mu_x = \langle p(x), x \rangle = \frac{\hat{p}'(0)}{-2\pi j}$$

$$\sigma^2 = \langle p(x), x^2 \rangle = \frac{\hat{p}''(0)}{(-2\pi j)^2}$$

$$m_x^n = \langle p(x), x^n \rangle = \frac{\hat{p}^n(0)}{(-2\pi j)^n}$$

Les moments sont obtenus en prenant les dérivées à l'origine de : $\hat{p}(f)$

Exemple : loi de Gauss centrée

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \qquad \widehat{p}(f)=e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}$$

$$\widehat{p}'(f)=-4\pi^2\sigma^2 f\ e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}$$

$$\widehat{p}'(0)=0 \quad \Rightarrow \mu_x=0$$

$$\widehat{p}''(f)=-4\pi^2\sigma^2\left(e^{-2\pi\sigma^2 f^2}-2\pi^2\sigma^2 f e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}\right)$$

$$\widehat{p}''(0)=-4\pi^2\sigma^2$$

$$\frac{\widehat{p}''(0)}{(-2\pi j)^2}=\frac{-4\pi^2\sigma^2}{-4\pi^2}=\sigma^2=m_{x,2}$$

12. Somme de variables aléatoires indépendantes

2 variables aléatoires sont indépendantes si :

$$p(x \leq X \ et \ y \leq Y) = p(x \leq X)p(y \leq Y)$$

La densité de la probabilité de la somme z=x+y est :

$$p_z(u) = p_x(u) \otimes p_y(u)$$

$$\hat{p}_z(f) = \hat{p}_x(f)\hat{p}_y(f)$$

Exemple :

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}} \qquad p_2(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$\hat{p}(f) = \hat{p}_1(f)\hat{p}_2(f) = e^{-2\pi^2\sigma_1^2 f^2} e^{-2\pi^2\sigma_2^2 f^2} = e^{-2\pi^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2) f^2}$$

C'est encore une variable aléatoire gaussienne de variance : $\sigma_1^2+\sigma_2^2$
et d'écart type : $\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

ensem

13. Théorème « Central limit »

Le produit de convolution d'un grand nombre de fonctions entre elles tend vers une gaussienne

La densité de probabilité de la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes de densité de probabilité quelconque tend vers une distribution de Gauss. Si les variances sont du même ordre de grandeur la convergence est rapide (<10).
En pratique, le théorème « Central limit » justifie l'hypothèse gaussienne dans l'étude des signaux aléatoires.

14. Fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance

L'autocorrélation d'un processus aléatoire stationnaire est :

$$R_x(\tau) = E\left[x(\tau)\,x(t+\tau)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1\,x_2\,p\left(x_1,x_2,\tau\right)dx_1\,dx_2$$

L'autocorrélation temporelle d'un signal aléatoire stationnaire est:

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau)\,x(t+\tau)dt\right)$$

Qui peut s'écrire encore :

$$\varphi_x(\tau) = x(-\tau) \otimes x(\tau)$$

Si le processus est ergodique et stationnaire alors : $R_x(\tau) \equiv \varphi_x(\tau)$

<u>Note</u> : les formules sont alors les mêmes que pour les signaux déterministes

La fonction d'autocovariance est égale à la fonction d'autocorrélation du processus centré

$$C_x(\tau) = E\left[\left(x(\tau) - \mu_x\right)\left(x(t+\tau) - \mu_x\right)\right] = R_x(\tau) - \mu_x^2$$

$\mu_x(\tau)$: moyenne

Pour un signal à moyenne nulle : $C_x(\tau) = R_x(\tau)$

On définit la fonction d'autocovariance normalisée ou coefficient de corrélation le rapport :

$$\rho_x(\tau) = \frac{C_x(\tau)}{\sigma_x^2}$$

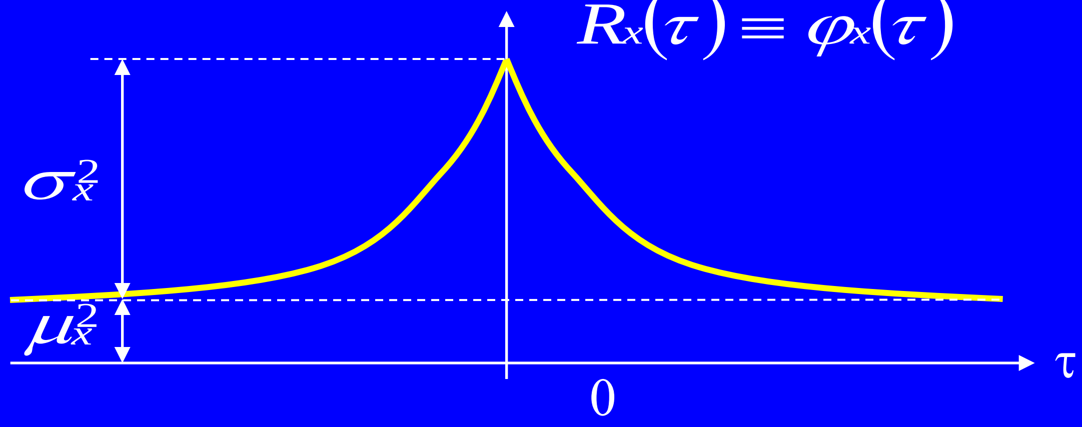
Propriétés :

$$\left.\begin{aligned} R_x(\tau) &= R_x(-\tau) \\ C_x(\tau) &= C_x(-\tau) \end{aligned}\right\} \text{Fonctions paires}$$

$$\begin{cases} R_x(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \\ C_x(0) = \sigma_x^2 \\ \rho_x(0) = 1 \end{cases}$$

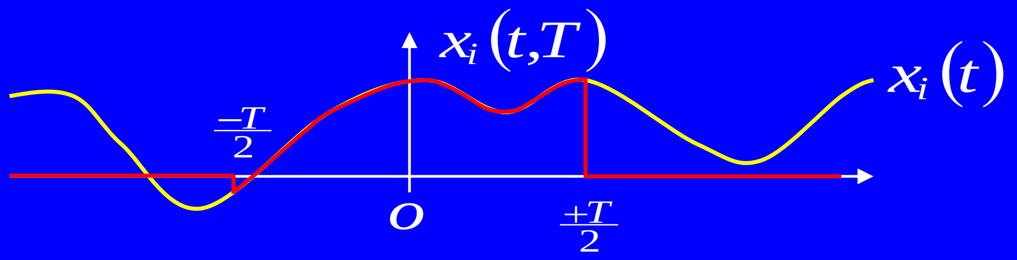
Pour un processus aléatoire sans composantes périodiques

$$R_x(\tau) \equiv \varphi_x(\tau)$$



15. Densité spectrale de puissance

Considérons $x_i(t)$ une réalisation particulière d'un même processus aléatoire stationnaire $i \in N$



En général $\hat{x}_i(f)$ n'existe pas car : $\int_{-\infty}^{\infty} |x_i(t)| dt \to \infty$

Si on considère $x_i(t,T)$ un segment de $x_i(t)$ de durée T, on a

$$x_i(t) = \lim_{T \to \infty} \left[x_i(t,T) \right]$$

et

$$x_i(t,T) = x(t)\ .\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

En général $\hat{x}_i(f,T)$ existe : $\hat{x}_i(f,T) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) e^{-2\pi j f t} dt$

La puissance moyenne de $x_i(t)$ dans l'intervalle T est :

$$P_{x,i}(f,T) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{x}_i(f,T)\right|^2 df$$

La densité spectrale de puissance de $x_i(t,T)$ est :

$$\Phi_{x,i}(f,T) = \frac{\left|\hat{x}_i(f,T)\right|^2}{T}$$

A chaque réalisation (i=1, 2 …) correspond une densité spectrale de puissance

On introduit la moyenne statistique des densités spectrales :

$$\Phi_x(f,T) = E\left(\Phi_{x,i}(f,T)\right)$$

Finalement la densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire peut être définie par :

$$\boxed{\Phi_x(f,T) = \lim_{T\to\infty}\left(E\left[\frac{\left|\hat{x}_i(f,T)\right|^2}{T}\right]\right)}$$

ensem

16. Théorème de Wiener-Khintchine

Démonstration :

$$\Phi_{x,i}(f,T) = \frac{\left|\hat{x}_i(f,T)\right|^2}{T} = \frac{1}{T}\,\overline{\hat{x}_i}(f,T).\hat{x}_i(f,T)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\, x_i(t')\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\Pi\left(\frac{t'}{T}\right)e^{-2\pi j(t-t')}dt\,dt'$$

Si le processus est stationnaire τ = t-t' est significatif, on procède alors au changement de variable :

$$\tau = t' - t$$
$$t' = t + \tau$$
$$dt' = d\tau$$

On obtient : $\Phi_x(f,T) = E\left[\Phi_{x,i}(f,T)\right]$

$$\Phi_x(f,T) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left[x_i(t)\, x_i(t+\tau)\right]\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\Pi\left(\frac{t+\tau}{T}\right)e^{-2\pi j f\tau}dt\,d\tau$$

Par définition : $R_x(\tau) = E\left[x_i(t)\, x_i(t+\tau)\right]$

et $$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\Pi\left(\frac{t+\tau}{T}\right)dt = Tri\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

Il vient : $$\Phi_x(f,T) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, Tri\left(\frac{\tau}{T}\right) e^{-2\pi j f\tau} d\tau$$

et

$$\Phi_x(f) = \lim_{T\to\infty}\left(E\left(\Phi_{x,i}(f,T)\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-2\pi j f\tau} d\tau$$

$\Phi_x(f) = \hat{R}_x(f)$: théorème de Wiener-Kintchine

La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation

La densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire a la même signification que dans le cas déterministe. Les caractéristiques sont donc comparables.

16. Bruit blanc

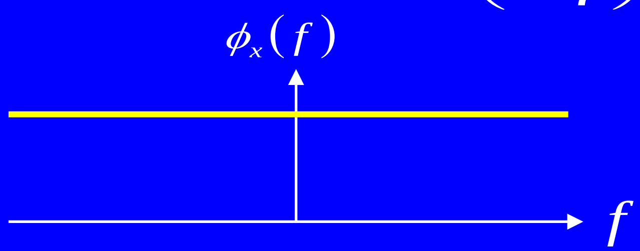
Un processus aléatoire x(t) dont la densité spectrale de puissance est constante pour toute valeur de f est appelé **Bruit blanc** (analogie avec la lumière blanche)

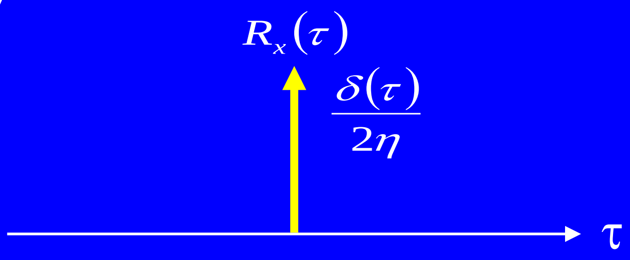
$$\Phi_x(f) = \frac{1}{2\eta}$$

En pratique, on considérera un bruit comme blanc si $\Phi_x(f)$ est constant sur une large bande de fréquence.

La fonction d'autocorrélation du bruit blanc est :

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2\eta}\right) = \frac{\delta(\tau)}{2\eta}$$





Pour un bruit blanc, les variables aléatoires $x(t_1)$, $x(t_2)$, sont totalement non corrélées $\forall \tau = t_1 - t_2 \neq 0$

Pour un bruit blanc à bande limitée

$$\Phi(f) = \begin{cases} \dfrac{\eta}{2} & pour \quad f_1 < |f| < f_2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

Le processus peut être considéré comme un bruit blanc idéal filtré par un filtre idéal de largeur : $B = f_2 - f_1$

La valeur moyenne de ce processus est nulle, la puissance vaut :

$$P = \sigma^2 = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f)\,df = \eta B$$

Le spectre est de type passe-bas si $f_1=0$ et $f_2 = B$

$$\Phi_1(f) = \frac{\eta}{2}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$\Rightarrow R_1(\tau) = \overline{\Phi}_1(f) = B\eta \sin c(2\pi B\tau)$$

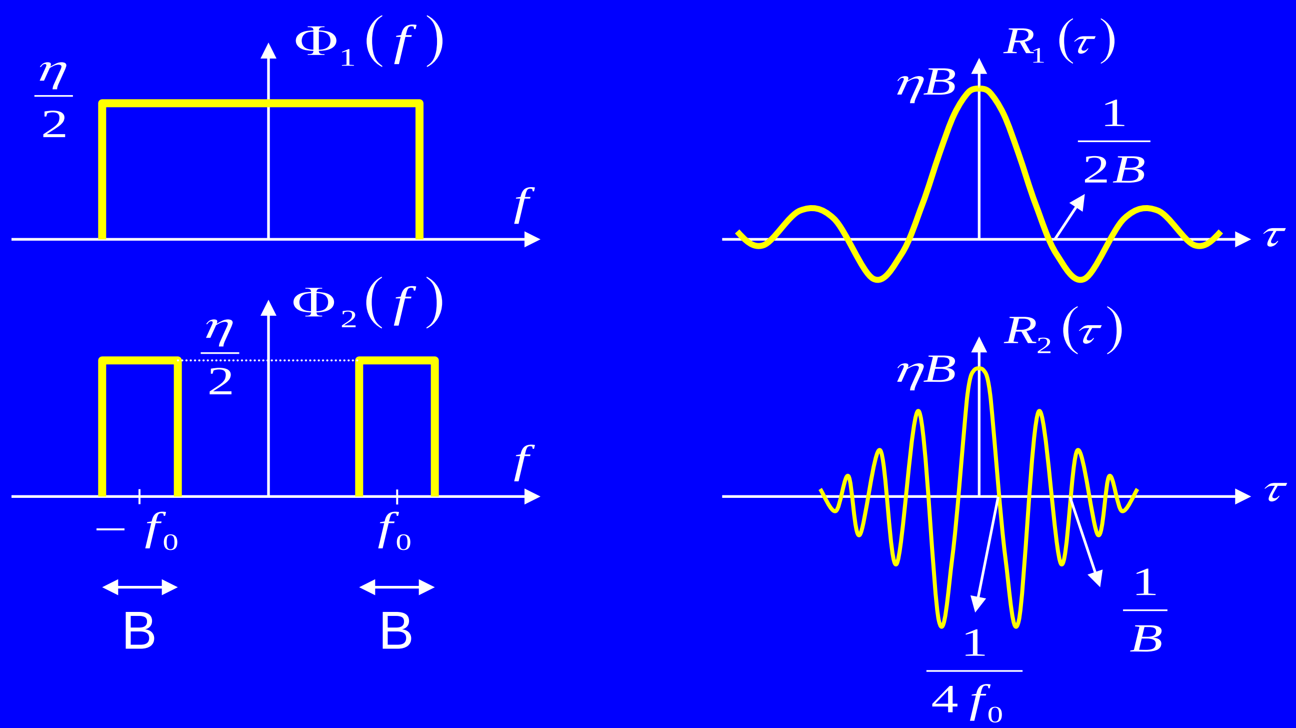
Les variables x(t_1) et x(t_2) sont non corrélées si :

$$t_2 - t_1 = \tau = \frac{k}{2B} \qquad k \in Z$$

Le spectre est de type passe-bas si $f_2 = f_0 + \frac{B}{2} \qquad f_1 = f_0 - \frac{B}{2}$

$$\Phi_2(f) = \frac{\eta}{2}\left[\Pi\left(\frac{f+f_0}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f-f_0}{B}\right)\right]$$

$$\Rightarrow R_2(f) = \eta B \sin c(B\tau)\cos(2\pi f_0 \tau)$$



17. Intercorrélation et densités spectrales mutuelles

Soient 2 processus aléatoires stationnaires x(t) et y(t)
Posons :

$$x_1 = x(t) \qquad y_1 = y(t)$$
$$x_1 = x(t+\tau) \quad y_2 = x(t+\tau)$$

$$P(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(x_1, y_2, \tau)$$

L'intercorrélation statistique (cross corrélation) est :

$$\begin{cases} R_{x,y}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E[x_1, y_2] \\ R_{y,x}(\tau) = E[y(t)x(t+\tau)] = E[y_1, x_2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 P(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2 \\ R_{y,x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 y_1 P(x_2, y_1, \tau) dx_2 dy_1 \end{cases}$$

Si les processus sont ergodiques :

$$R_{xy}(\tau)=\varphi_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)y(t+\tau)dt = x(-\tau)\otimes y(\tau)$$

$$R_{yx}(\tau)=\varphi_{yx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}y(t)x(t+\tau)dt = y(-\tau)\otimes x(\tau)$$

Densités spectrales mutuelles :

$$\Phi_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty}R_{xy}(\tau)e^{-2\pi jf\tau}d\tau$$

$$\Phi_{yx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty}R_{yx}(\tau)e^{-2\pi jf\tau}d\tau$$

Fonction de cohérence :

$$\boxed{\Gamma_{xy}(f) = \frac{\left|\Phi_{xy}(f)\right|^2}{\Phi_x(f)\Phi_y(f)}} \qquad 0 \le \Gamma_{xy}(f) \le 1$$

$\Gamma_{xy}(f)$ joue le même rôle que la corrélation dans le domaine temporel

Si $\Gamma_{xy}(f_0) = 0$ processus non corrélé à la fréquence f_0

Si $\Gamma_{xy}(f_0) = 1$ processus parfaitement cohérent

Si y(t) est la sortie d'un filtre inconnu excité par x(t) et que

$\Gamma_{xy}(f_0) = 1 \quad \forall f$ alors le filtre est linéaire

18. Définition du rapport signal sur bruit – RSB ou SNR (Signal Noise Ratio)

Degré de contamination d'un signal utile par des perturbations aléatoires

Soient : P_s la puissance du signal

P_η la puissance du bruit

$$SNR = RSB = \frac{P_s}{P_\eta}$$

$$\boxed{SNR_{db} = 10\log\left(\frac{P_s}{P_\eta}\right)}$$ (log à base 10)

Rapport signal à bruit dans une bande B

$$\boxed{P_s = \int_B \Phi_s(f)\,df} \qquad \boxed{P_\eta = \int_B \Phi_\eta(f)\,df}$$