

# **Chapitre 10**

## **Filtrage numérique linéaire**

## **But recherché :**

Traitement pour accentuer ou atténuer certaines caractéristiques propres à un signal.

Travail préparatoire avant l'extraction de l'information jugée pertinente.

## **Exemples :**

Recherche de singularités dans un signal ou dans une image.

### **Diagnostic médical :**

Détection d'anomalies dans les images médicales : sténoses artérielles, microcalcification dans les mammographies, etc...

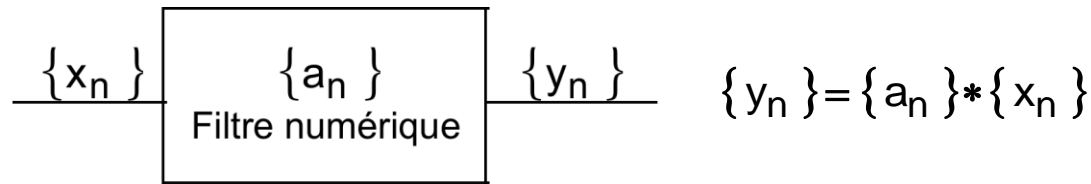
### **Diagnostic de systèmes :**

Détecter une anomalie dans un signal dont l'allure est supposée connue.  
Aide à la maintenance des systèmes : auto-diagnostic,

### **Inspection automatique :**

Recherche de défauts sur des objets manufacturés.  
Identification de personnes, détection d'intrusion, etc..  
Localisation automatique pour véhicules autonomes (robotique mobile).

# 1. Transmittance en z d'un filtre



$X(z)$

$A(z)$

$Y(z)$

$$Y(z) = A(z) \times X(z)$$

Transmittance du filtre :  $A(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

Algorithme de filtrage :

Soit :  $A(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$       RdC     $A_a$  (supposé causal)

On a :  $Y(z) = A(z) \times X(z)$  d'où :  $Y(z) = \frac{X(z)}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$

On obtient par inversion :  $y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + a_3 y(n-3) = x(n)$   
(Equation aux différences finies)

**D'où l'algorithme de filtrage :**

$$y(n) = x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - a_3 y(n-3)$$

**Remarque :** valable quelque soit l'entrée  $\{x_n\}$ .

## 2. Filtres RII et RIF

**Réponse impulsionnelle :**

$$x(n) = \delta(n) \text{ donc } X(z) = 1 \text{ et } Y(z) = A(z)$$

D'où la réponse impulsionnelle du filtre :  $\{y_n\} = \{a_n\}$

Si  $A(z)$  est une **fraction rationnelle**, la RI  $\{y_n\} = \{a_n\}$  comporte un nombre infini de termes (**RII**).

Si  $A(z)$  est **un polynôme en  $z$** , la RI  $\{y_n\} = \{a_n\}$  comporte un nombre fini de termes (**RIF**).

$$\text{Forme RII : } C(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad \text{fraction rationnelle avec } N \geq M \text{ (causalité) et } a_0 = 1$$

On obtient :

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + \dots - a_N y(n-N) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M)$$

**forme ARMA** (autoregressive moving average)

La sortie dépend des entrées et des sorties.

**Cas particuliers :** forme AR si les  $b_j$  sont nuls.

### 3. Stabilité des filtres numériques : Généralités

**Séquence bornée** :  $\{x_n\}$  est bornée si  $\forall K > 0 \in \mathbf{R} \quad |x_n| < K, \forall n$

**Stabilité d'un filtre au sens BIBO** (Bounded Input – Bounded Output)

Un filtre linéaire  $\{a_n\}$  à coefficients constants est stable BIBO si :

$\forall \{x_n\}$  bornée,  $\{y_n\}$  est bornée telle que :  $\forall K > 0 \in \mathbf{R} \quad |y_n| \leq K |x_n|, \forall n$

**Théorème :**

Un filtre linéaire  $\{a_n\}$  à coefficients constants est stable BIBO si et seulement si :

$$\sum_k |a_k| < +\infty$$

(valable pour les filtres causaux et non causaux)

## 4. Stabilité suivant les pôles

Soit  $A(z) = K \frac{\prod_j (z - \lambda_j)}{\prod_i (z - \rho_i)}$   $\lambda_j, \rho_i \in \mathbf{C}, K \in \mathbf{R}, \quad \text{RdC} \quad A_a$

Les pôles  $\rho_i$  génèrent des modes tels que :

**mode causal :**  $\alpha_i \rho_i^n u(n)$

ou

**mode anticausal :**  $-\alpha_i \rho_i^n u(-n-1)$

Le mode causal est amorti si :  $|\rho_i| < 1$

Le mode anticausal est amorti si :  $|\rho_i| > 1$

**Stabilité :**

Un filtre causal (à droite) est stable si  $\forall \rho_i \in \text{int}(C_T)$ , avec  $C_T \subset A_a$

Un filtre anticausal (à gauche) est stable si  $\forall \rho_i \in \text{ext}(C_T)$ , avec  $C_T \subset A_a$

Un filtre bilatéral stable satisfait les deux propriétés.

# 5. Structure des filtres numériques

Structure mathématiques :

Soit la transmittance  $H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$  avec  $N \geq M$  (causalité) et  $a_0 = 1$

$M, N \neq 0$

- structure RII **ARMA** (autoregressive moving average)

**Stabilité** si tous les pôles  $\rho_i \in \text{int}(C_T)$

Cas particuliers :

$M=0$

- structure **AR** (autoregressive) dite « tout pôle »

**Stabilité** si tous les pôles  $\rho_i \in \text{int}(C_T)$

$N=0$

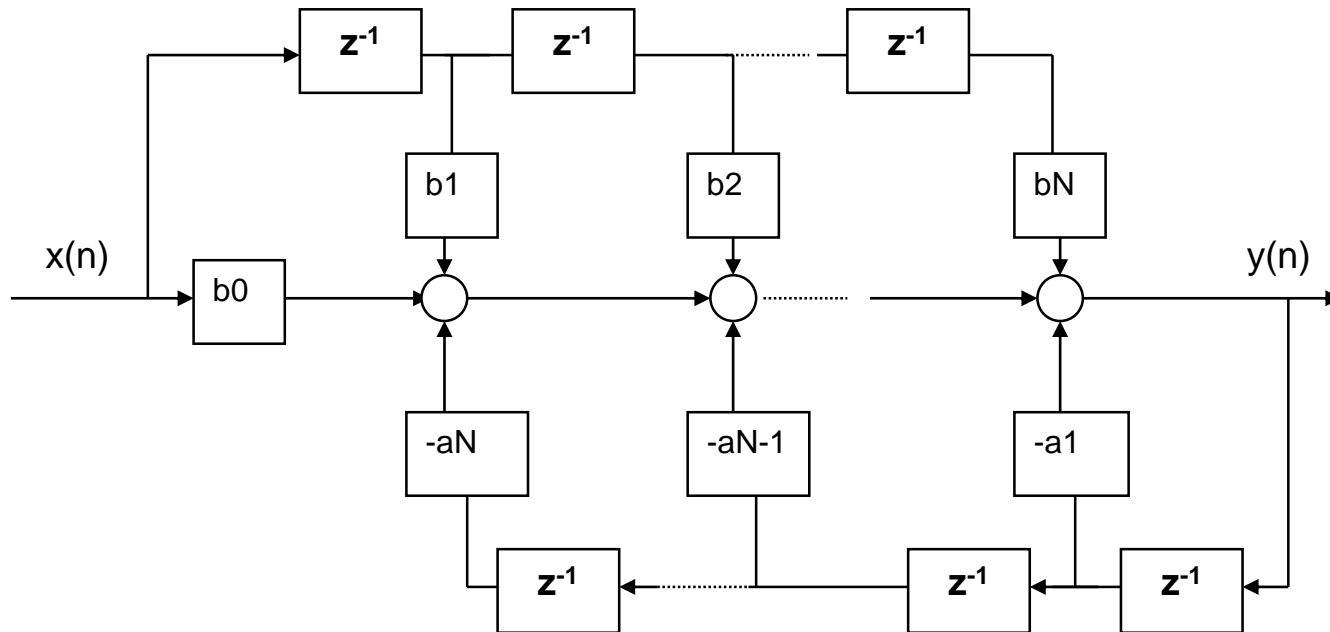
- structure **MA** (moving average) dite « tout zéro »

RdC : plan –  $\{z = 0\}$  donc **toujours stable**

# 5. Structure des filtres numériques

Structure matérielle :

Soit le filtre causal  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  avec  $N = M$  (causalité) et  $a_0 = 1$



**$N + M$  retards,  $N + M$  multiplicateurs,  $N$  additionneurs**

Structure MA : pas de boucle

Structure AR : existence de boucles (récursivité)

pb de précision (cumul des erreurs de chute)



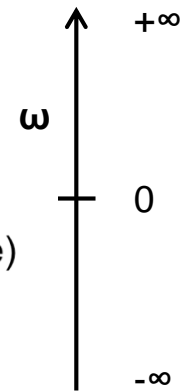
# 6. Réponse fréquentielle d'un filtre numérique

## Régime harmonique

**En continu** :  $p \in \mathbb{C}$   $p = \alpha + j\omega$   $p$  parcourt tout le plan complexe.

**Régime harmonique** : restriction du plan complexe à l'axe imaginaire

$$p \xrightarrow{\alpha=0} j\omega \quad \omega \in ]-\infty, +\infty[$$



**En numérique** :

Par définition  $z = e^{pT_e} = \rho e^{j\omega T_e}$   $z \in$  plan complexe ( $\omega$  : pulsation vraie)

On introduit :  $\omega_{réduite} = \frac{\omega_{vraie}}{\omega_e}$  et  $f_{réduite} = \frac{f_{vraie}}{f_e}$

$f_e$  : fréquence d'échantillonnage et  $\omega_e$  : pulsation d'échantillonnage

Le théorème de l'échantillonnage doit être respecté d'où :

$$|f_{vraie}| \leq f_e/2 \quad |f_{réduite}| \leq 1/2$$

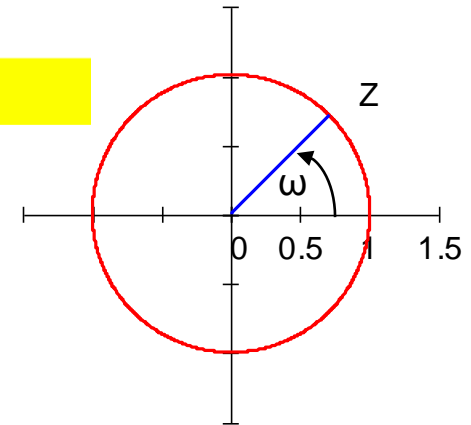
**Régime harmonique** : passage en variable réduite d'où :  $T_e = f_e = 1$

$$p \xrightarrow{\alpha=0} j\omega \quad \text{donc} \quad z \xrightarrow{\rho=1} e^{j\omega}$$

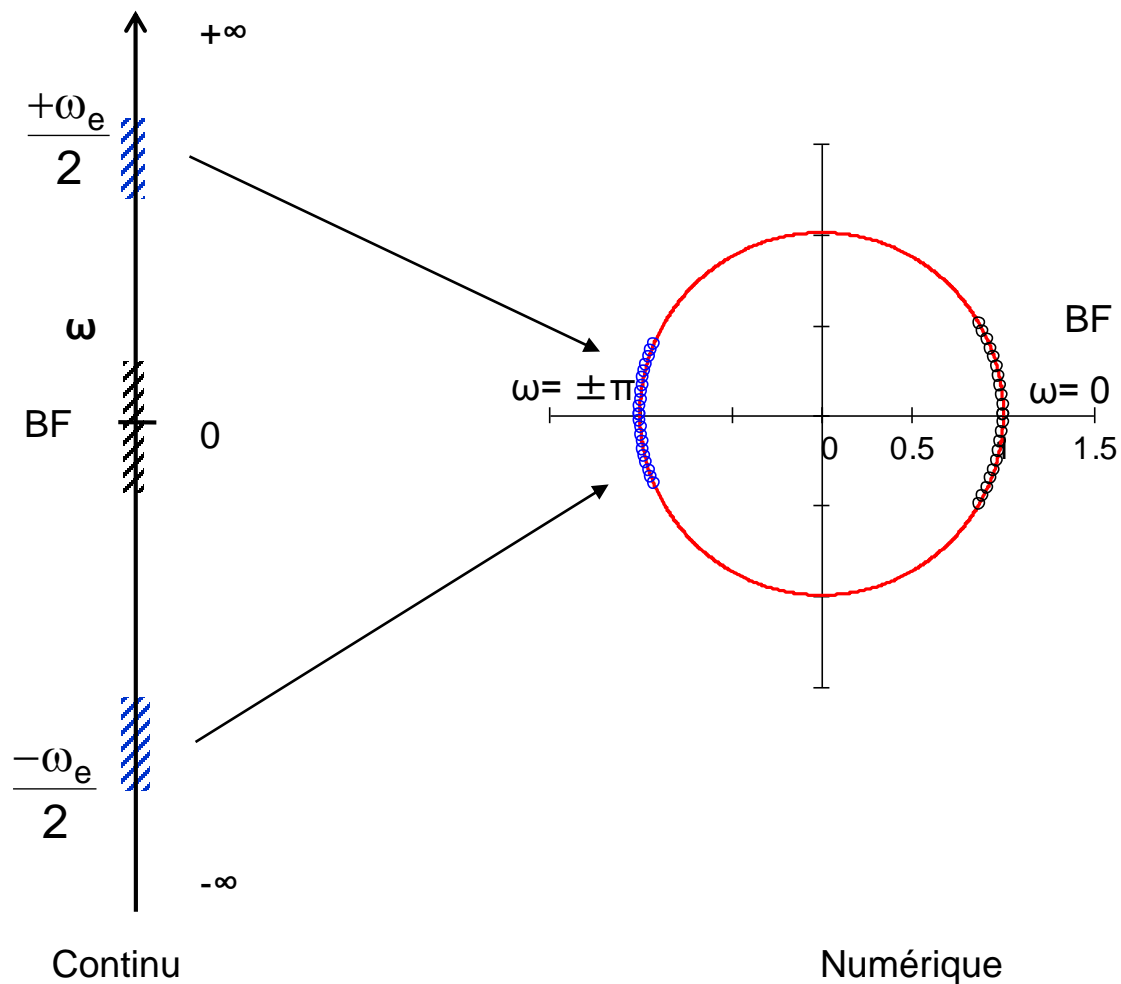
restriction du plan au cercle unité

Intervalle utile sur le cercle :  $\omega \in [-\pi, +\pi]$  soit  $f \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$

**Attention** : ce passage introduit  $\omega$  ou  $f$  en valeurs réduites.



## 6. Régime harmonique (suite)



# 6. Analyse harmonique

Analyse harmonique :

$$A(z) \xrightarrow{z=e^{j\omega}} A(e^{j\omega})$$

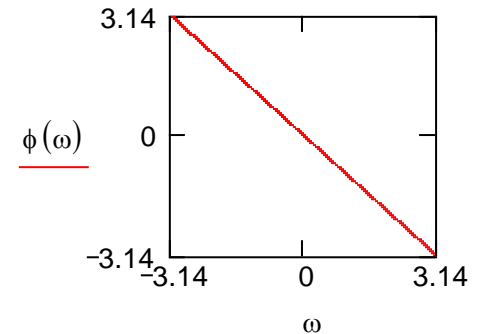
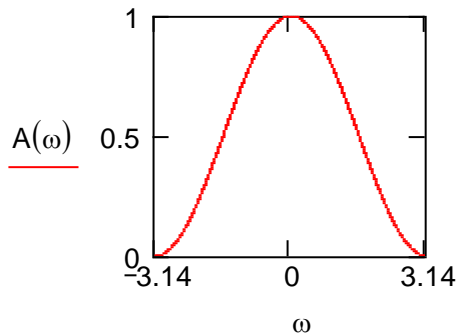
Périodicité de la transmittance :  $A(e^{j\omega}) = A(e^{j(\omega+2k\pi)})$  période  $2\pi$

Etude de la fonction :  $A(e^{j\omega}) \longrightarrow \begin{cases} |A(e^{j\omega})| & : \text{spectre} \\ \arg(A(e^{j\omega})) & : \text{phase} \end{cases}$

Exemple :  $A(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2}) / 4$

$$|A(e^{j\omega})| = \frac{1}{2}(1 + \cos \omega)$$

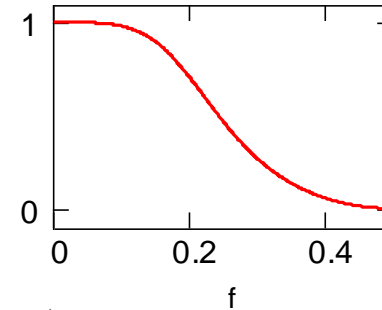
$$\phi(e^{j\omega}) = -\omega$$



# Exemples

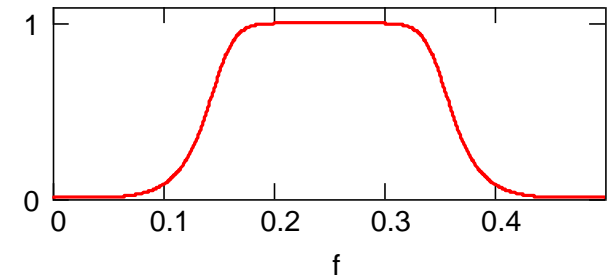
$$G1(z) := \frac{207 + .413 \cdot z^{-1} + 207 \cdot z^{-2}}{1 - .37 \cdot z^{-1} + .196 \cdot z^{-2}}$$

|G1(f)|



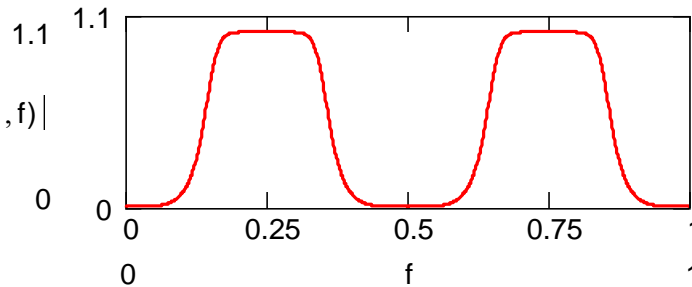
$$D := \frac{(0.253 - 0.507z^{-2} + 0.253z^{-4}) \cdot (0.184 - 0.368 \cdot z^{-2} + 0.184 \cdot z^{-4})}{(1 + 0.453 \cdot z^{-2} + 0.466 \cdot z^{-4}) \cdot (1 + 0.329 \cdot z^{-2} + 0.065 \cdot z^{-4})}$$

|gain(D, f)|



**Périodicité :  $T = 2\pi$**

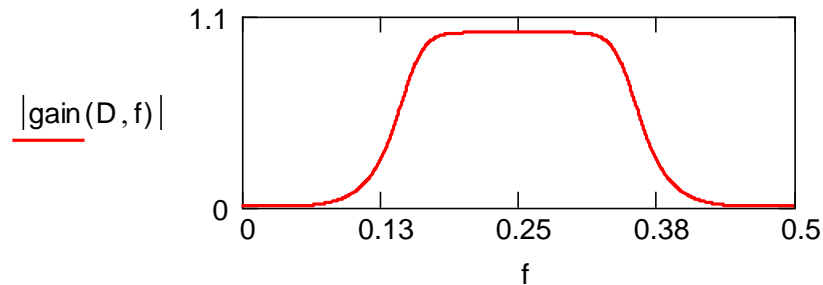
|gain(D, f)|



# Exemples

**Intervalle fréquentiel utile :**  $f \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$  ou  $f \in \left[0, +\frac{1}{2}\right]$

$f$  : fréquence réduite



**Passage des fréquences réduites aux fréquences réelles :**

Soit un échantillonnage temporel à  $f_e = 2500$  Hz

Les bornes de l'intervalle fréquentiel sont :  $\left[-\frac{f_e}{2}, +\frac{f_e}{2}\right]$

Donc :  $[-1250, +1250]$  Hz

**Exemple :  $f = 0.3$  correspond à 750Hz**

# 7. Influence des pôles et des zéros sur la réponse fréquentielle

Soit  $H(z) = \frac{\sum_{j=0}^Q b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$  ( $N \geq Q$ ), on a aussi :

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-Q} \frac{\prod_{j=1}^Q (z - z_j)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)}$$

$z_j$  : zéros de  $H(z)$  et  $p_i$  : pôles de  $H(z)$

**Etude harmonique de  $H(z)$  :**

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0}{a_0} e^{j\omega(N-Q)} \frac{\prod_{j=1}^Q (e^{j\omega} - z_j)}{\prod_{i=1}^N (e^{j\omega} - p_i)}$$

$$\text{Spectre : } |H(e^{j\omega})| = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{j=1}^Q |e^{j\omega} - z_j|}{\prod_{i=1}^N |e^{j\omega} - p_i|}$$

# 7. Influence des pôles et des zéros sur la réponse fréquentielle (suite 1)

## Interprétation géométrique :

Soit  $M$  l'affixe de  $e^{j\omega}$ .

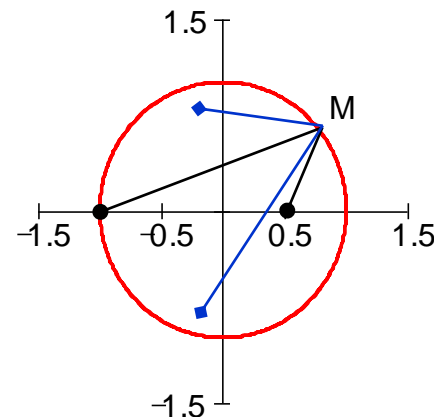
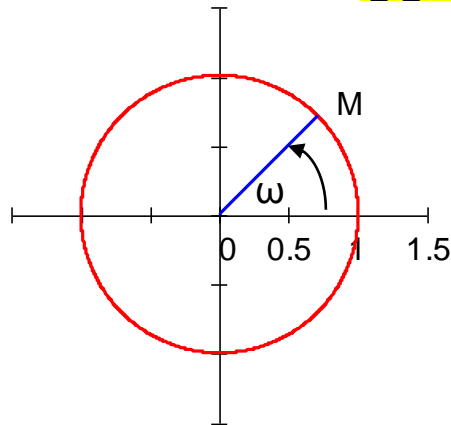
Soient  $Z_j$  les affixes des zéros.

Soient  $P_j$  les affixes des pôles.

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|b_0| \prod_{j=1}^Q |MZ_j|}{|a_0| \prod_{i=1}^N |MP_i|}$$

Quand  $\omega$  varie,  $M$  parcourt le cercle unité.

$|H(e^{j\omega})|$  varie alors comme :  $\frac{\prod \text{distances de } M \text{ aux zéros}}{\prod \text{distances de } M \text{ aux pôles}}$



- Pôles
- Zéros

# 7. Influence des pôles et des zéros sur le réponse fréquentielle (suite 2)

## Cas particuliers :

### Pour des zéros :

$$M \rightarrow Z_j \Rightarrow |MZ_j| \text{ minimal} \Rightarrow |H(e^{j\omega})| \rightarrow \text{minimum (local)}$$

$$\text{Si } Z = Z_j \Rightarrow |H(e^{j\omega})| = 0 \text{ en particulier } Z_j = \pm 1 \Rightarrow |H(e^{j\omega})| = 0$$

### Pour des pôles :

$$M \rightarrow P_i \Rightarrow |MP_i| \text{ minimal} \Rightarrow |H(e^{j\omega})| \rightarrow \text{maximum (local)}$$

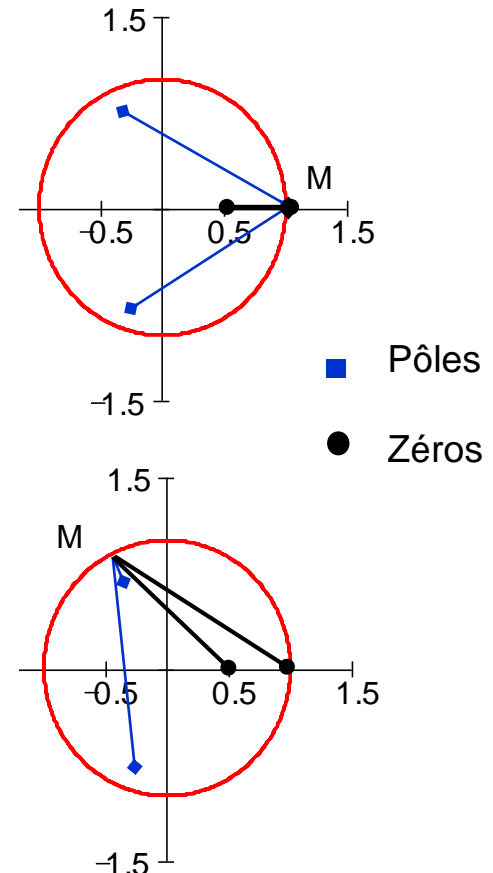
$$\text{Si } Z = P_i \Rightarrow |H(e^{j\omega})| \rightarrow +\infty \text{ en particulier } P_i = +1 \Rightarrow |H(e^{j\omega})| \rightarrow +\infty$$

(type intégrateur)

### Remarque :

Les pôles  $P_i = 0$  ne jouent aucun rôle dans le spectre.  
En revanche, ils introduisent des retards dans la phase.

Idem pour les zéros  $Z_j = 0$ .





# Exercices

## Exercice 1 :

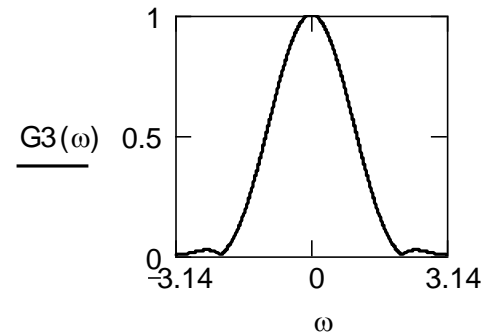
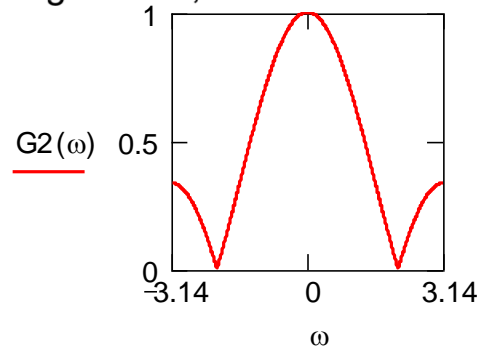
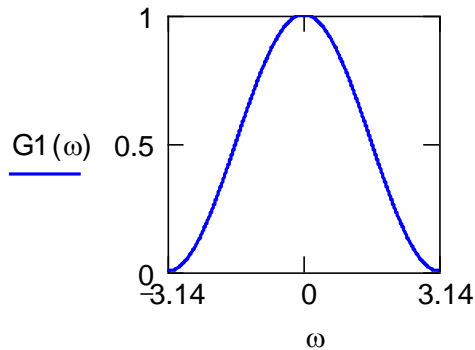
Etudier la réponse fréquentielle de  $H(z) = K \frac{z^2 - 1}{z^2 + 0.25}$

Calculer K pour normaliser le gain maximum à 1.

Comment pourrait-on réduire la bande passante ?

## Exercice 2 :

Affecter les courbes de spectre présentées ci-après aux différentes transmittances T1, T2 et T3. Justifier et calculer la valeur des gains K1, K2 et K3.



$$T1(z) = K_1(1 + z^{-1} + z^{-2})$$

$$T2(z) = K_2(1 + 2z^{-1} + z^{-2})$$

$$T3(z) = K_3(1 + 2z^{-1} + z^{-2})(1 + z^{-1} + z^{-2})$$

## Exercice 3 :

On traite, à l'aide du filtre correspondant à la courbe G1 ci-dessus, un signal sinusoïdal de fréquence  $f_1 = 6$  kHz, d'amplitude 2, échantillonné à la fréquence  $f_e = 18$  kHz. Quelle sera, d'après la courbe, l'amplitude du signal après filtrage (en régime établi) ?