Chapitre 9
Propriétés énergétiques et transformée de de Fourier

1. Espaces fonctionnels L_α

On appelle L_1, l'espace des classes de fonctions sommables :

$$\boxed{\int |f(x)|dx < \infty}$$

D'une façon générale on appelle L_α l'espace des classes de fonctions f telles que :

$$\boxed{\int |f(x)|^\alpha dx < \infty}$$

Propriétés :

1. $\forall \alpha \geq 1,$ L_α est un espace vectoriel, c'est à dire :

$$\forall f \quad et \quad g \in L_\alpha \quad f + g \in L_\alpha$$

Dans L_α on peut associer à chaque élément f un scalaire ,
qu'il est d'usage d'appeler norme :

$$\|f\| = \left(\int |f(x)|^\alpha \, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\left.\begin{aligned} \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \\ \|\lambda . f\| = |\lambda| \|f\| \\ \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \end{aligned}\right\}$$

Ceci définit un espace vectoriel normé

Les signaux physiques sont généralement des fonctions de L1 ou de L2

- à énergie finie (L2) :

$$\int |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

- à puissance finie

$$\lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx \right) < \infty$$

2. Relation d'incertitude

Soit $\mathrm{f}(x) \in L_2$

Etudions la concentration de l'énergie σ_x^2 autour de l'origine x=0

$$\sigma_x^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, |\mathrm{f}(x)|^2 \, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{f}(x)|^2 \, dx}$$

De même, étudions la concentration de l'énergie σ_f^2 autour de l'origine f=0

$$\sigma_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}^2 \, \left|\hat{\mathrm{f}}(f)\right|^2 \, df}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{\mathrm{f}}(f)\right|^2 \, df}$$

Le théorème de Parseval donne : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{f}(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{\mathrm{f}}(f)\right|^2 \, df$

On démontre et c’est l’expression du principe d’incertitude que :

$$\boxed{\sigma_f . \sigma_x \geq \frac{1}{4.\pi}}$$

L’égalité a lieu pour :

3. Densité spectrale - Autocorrélation

a. Définitions

Soit $\mathrm{f}(x) \in L_2$ et $\hat{\mathrm{f}}(f)$ sa transformée de Fourier

Le théorème de Parseval donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{f}(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{\mathrm{f}}(f)\right|^2 df$

$\left|\hat{\mathrm{f}}(f)\right|^2$: peut être interprété comme une énergie par intervalle de fréquence df

$\left|\hat{\mathrm{f}}(f)\right|^2$: s’appelle densité spectrale d’énergie

D'autre part on peut écrire :

$$\hat{\mathrm{f}}(f) = A(f)e^{j\phi(f)}$$

$A(f)$: est le module de la transformée de Fourier

$\phi(f)$: est la phase

Soit : $\left|\hat{\mathrm{f}}(f)\right|^2 = A^2\,(f)$

Par transformée de Fourier inverse, il vient :

$$\mathrm{F}^{-1}\left(\left|\hat{\mathrm{f}}\right|^2\right) = \mathrm{F}^{-1}\left(\hat{\mathrm{f}}.\bar{\hat{\mathrm{f}}}\right) = \mathrm{F}^{-1}\left(\hat{\mathrm{f}}\right) \otimes \mathrm{F}^{-1}\left(\bar{\hat{\mathrm{f}}}\right)$$

$$\mathrm{F}^{-1}\left(\hat{\mathrm{f}}\right) = \mathrm{f}(x)$$

$$\mathrm{F}^{-1}\left(\bar{\hat{\mathrm{f}}}\right) = \bar{\mathrm{f}}(-x)$$

D'où : $\mathrm{F}^{-1}\left(\left|\hat{\mathrm{f}}\right|^2\right) = \mathrm{f}(x) \otimes \bar{\mathrm{f}}(-x)$

Qui s'écrit encore :

$$\mathrm{F}^{-1}\left(\left|\hat{\mathrm{f}}\right|^2\right) = \int \mathrm{f}(x)\bar{\mathrm{f}}(x-\tau)\,dx = \int \bar{\mathrm{f}}(x)\mathrm{f}(x+\tau)\,dx$$

Si la fonction est réelle on obtient :

$$C(\tau) = \int \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(x+\tau)\,dx$$

$C(\tau)$: s'appelle la fonction d'autocorrélation

$$C(\tau) \overset{\mathrm{F}}{\rightarrow} A^2\,(f) = \left|\hat{\mathrm{f}}(\mathrm{f})\right|^2$$

b. Propriétés de l'autocorrélation

$C(\tau)$: est maximal à l'origine et vaut :

$$C(\tau) = \int \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(x+0)\,dx = \int |\mathrm{f}(x)|^2\ dx = \int \left|\hat{\mathrm{f}}(f)\right|^2\ df \geq 0$$

$C(\tau)$ est paire car $A^2(f) \in R$ donc F^{-1} paire

Il est d'usage de normer la fonction d'autocorrélation par l'énergie totale, soit

$$\boxed{C_N(\tau) = \frac{C(\tau)}{C(0)}}$$

c. Filtrage de l'énergie

Soit f(x) un signal réel à énergie finie que l'on observe au travers d'un filtre linéaire de réponse impulsionnelle g(x). Soit h(x) la sortie :

$$h(x) = \mathrm{f}(x) \otimes g(x)$$

$$C(\tau) = h(x) \otimes h(-x) = [\mathrm{f}(x) \otimes g(x)] \otimes [\mathrm{f}(-x) \otimes g(-x)]$$

$$= [\mathrm{f}(x) \otimes \mathrm{f}(-x)] \otimes [g(x) \otimes g(-x)]$$

$$\boxed{\begin{gathered} C(\tau) = C_{\mathrm{f}}(\tau) \otimes C_g(\tau) \\ \left|\hat{h}(f)\right|^2 = \left|\hat{\mathrm{f}}(f)\right|^2 . |\hat{g}(f)|^2 \end{gathered}}$$

d. Densité spectrale croisée - intercorrélation

Le théorème de Parseval s'écrit : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(x)\bar{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathrm{f}}(f)\bar{\hat{g}}(f)df$

Cette formule représente une énergie. C'est l'énergie échangée entre les signaux f et g.
Par analogie avec la densité spectrale d'énergie, on appelle densité spectrale croisée la quantité :

$$\boxed{\hat{\mathrm{f}}(f)\bar{\hat{g}}(f)}$$

La transformée de Fourier inverse donne :

$$\mathrm{F}^{-1}\left(\hat{\mathrm{f}}(f)\bar{\hat{g}}(f)\right) = \mathrm{F}^{-1}\left(\hat{\mathrm{f}}(f)\right) \otimes \mathrm{F}^{-1}\left(\bar{\hat{\mathrm{g}}}(f)\right) = \mathrm{f}(x) \otimes \bar{g}(-x)$$

qui s'écrit si f et g sont des fonctions réelles :

$$C_{\mathrm{f},g}(\tau) = \int \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x+\tau)\,dx$$

$C(\tau)$: s'appelle la fonction d'intercorrélation

L'inégalité de Schwarz conduit à :

$$\left|\int \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x-\tau)\,dx\right|^2 \le \int |\mathrm{f}(x)|^2\,dx.\int |\mathrm{g}(x)|^2\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|C_{\mathrm{f},g}(\tau)\right|^2 \le C_{\mathrm{f}}(0).\,C_{\mathrm{g}}(0)}$$

On peut là aussi normer la fonction d'intercorrélation

$$\boxed{\Gamma_{\mathrm{f},g}(\tau) = \frac{C_{\mathrm{f,g}}(\tau)}{\sqrt{C_{\mathrm{f}}(0)}\sqrt{C_{\mathrm{g}}(0)}} \le 1.}$$

Cette fonction donne le degré de ressemblance entre 2 fonctions pour différents décalages

4. Généralisation aux signaux de puissance finie

Si les signaux physiques observés sont toujours à énergie finie, on est souvent amené à considérer des signaux s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$, comme $\mathrm{f}(x) = a\cos(2\pi f x)$ pour lesquels l'énergie totale **:**

$$\int |\mathrm{f}(x)|^2\, dx \to \infty$$

Dans ce cas la quantité à considérer est la puissance moyenne transportée par le signal, définie par :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\mathrm{f}(x)|^2\, dx$$

On considérera dans la suite que les signaux sont à puissance finie

a. Autocorrélation

Pour de tels signaux la fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(x+\tau)\, dx$$

avec f(x) : réelle

Ici encore on a qui représente la puissance moyenne

La normalisation par C(0) conduit à :

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(x+\tau)\, dx}{\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\mathrm{f}(x)|^2\, dx}$$

b. Densité spectrale

La densité spectrale d'un signal à puissance finie s'appelle densité spectrale de puissance et vaut :

$$\boxed{A^2\,(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{f}(x)e^{-2\pi jfx}\,dx\right)^2}$$

c. Densité croisée

L'intercorrélation de deux signaux à puissance finie est donnée par :

$$\boxed{C_{\mathrm{f},g}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{f}(x)g(x+\tau)\,dx}$$

La densité spectrale croisée vaut :

$$\boxed{\hat{C}_{\mathrm{f},g} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{f}(x)e^{-2\pi jfx}\,dx\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{g}(x)e^{-2\pi jfx}\,dx}$$

Relations très importantes dans le cas de signaux aléatoires

5. Généralisation aux signaux échantillonnés

a. Signaux à énergie finie

$$E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k^2 < \infty$$

Le théorème de Parseval permet d'écrire :

$$E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k^2 = T \int_a^{a+\frac{1}{T}} |\mathrm{f}(f)|^2 \, df$$

$|\mathrm{f}(f)|^2$: représente la densité spectrale d'énergie qui est une fonction positive et périodique de période 1/T

De la même façon que pour les signaux continus, on montre que :

$$|\mathrm{f}(f)|^2 = \hat{C}(\tau_n)$$

$$C(\tau_n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \,.\, x_{k+n}$$

$C(\tau_n)$: fonction d'autocorrélation

Si on a 2 signaux f et g $\longrightarrow$ x_k et y_k on a :

$$C_{\mathrm{f_N,g_N}}(\tau_n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \cdot y_{k+n}$$

$C_{\mathrm{f_N,g_N}}(\tau_n)$: fonction d'autocorrélation

b. Signaux à puissance finie

Par le même raisonnement que pour le cas continu, on définit la densité spectrale de puissance :

$$\Phi(f) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\left|\hat{\mathrm{f}}(f)\right|^2}{2k}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\sum_{-k}^{k-1} x_k^2$$

$$C(\tau) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\sum_{-k}^{k-1} x_k \cdot x_{k+n}$$: la fonction d'autocorrélation

$$C_{\mathrm{f_N,g_N}}(\tau_n) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\sum_{-k}^{k-1} x_k \cdot y_{k+n}$$: la fonction d'intercorrélation