# Chapitre 6
# Transformée de Fourier des distributions tempérées

Toutes les fonctions (distributions) n'ont pas une transformée de Fourier, seules les distributions tempérées ont toujours une transformée de Fourier.

# 1. Les distributions tempérées

Soit l'espace $\mathscr{S}$ des fonctions **$\varphi_s$** sur $\mathbf{R}$, indéfiniment dérivables et rapidement décroissantes :

$$\forall n, p \in N^* \qquad \lim_{x \to \infty} \left[ x^n \varphi_s^p(x) \right] = 0$$

Munissons $\mathscr{S}$ de la règle de convergence suivante :
Une suite de fonctions **$\varphi_k$** de $\mathscr{S}$ converge vers **0** dans $\mathscr{S}$ si, quels que soient les entiers $l, m \geq 0$ la suite :

$x^l \varphi_k^m(x)$ Converge vers 0 uniformément sur $\mathbf{R}$, On appelle distribution tempérée toute forme linéaire et continue sur $\mathscr{S}$

## Fonctions lentement croissantes

Une fonction **f(x)** définie sur $\mathbf{R}$ est lentement croissante (ou tempérée) si elle croit moins vite à l'infini qu'une puissance positive de **x**.
Si de plus elle est localement sommable, l'intégrale :

$\int \mathrm{f}(x)\varphi(x)dx$ est absolument convergente $\forall \varphi \in \mathscr{S}$

**f(x)** définit une distribution tempérée $\mathbf{T_f}$ telle que :

$$\boxed{\langle T_{\mathrm{f}}, \varphi \rangle = \int \mathrm{f}(x)\varphi(x)dx}$$

- les fonctions bornées sont tempérées
- les polynômes sont tempérés.

# 2. Transformées des distributions tempérées

On appelle transformée de Fourier d'une distribution tempérée la distribution $\mathscr{F}$ [T] définie par :

$$\boxed{\begin{gathered}\left\langle \mathscr{F}[\mathrm{T}], \varphi \right\rangle = \left\langle T, \mathscr{F}[\varphi] \right\rangle \\ \left\langle \widehat{T}(f), \varphi(f) \right\rangle = \left\langle T(x), \widehat{\varphi}(x) \right\rangle\end{gathered}}$$

Transformée de Fourier de φ prise pour la variable x

On démontre que la transformée de Fourier d'une distribution tempérée est également tempérée. Les propriétés sont les mêmes que la transformée de Fourier des fonctions à quelques restrictions près.

# 3. Exemples

Soit la fonction f(x)=1 (distribution tempérée)

$$\left\langle \mathscr{F}[1],\varphi \right\rangle = \left\langle 1,\mathscr{F}[\varphi] \right\rangle = \int \widehat{\varphi}(x)dx = \varphi(0) = \left\langle \delta,\varphi \right\rangle$$

$$\boxed{\mathscr{F}[1] = \delta}$$

De même en utilisant la propriété de modulation

$$\mathscr{F}[e^{2\pi j f_0 x}.\mathrm{f}(x)] = \widehat{\mathrm{f}}\left(f - f_0\right)$$

Si f(x)=1

$$\boxed{\mathscr{F}[e^{2\pi j f_0 x}] = \delta\left(f - f_0\right)}$$

Ou encore :

$$\cos(2\pi f_0 x) = \frac{1}{2}\left[e^{2\pi j f_0 x} + e^{-2\pi j f_0 x}\right]$$

$$\sin(2\pi f_0 x) = \frac{1}{2j}\left[e^{2\pi j f_0 x} - e^{-2\pi j f_0 x}\right]$$

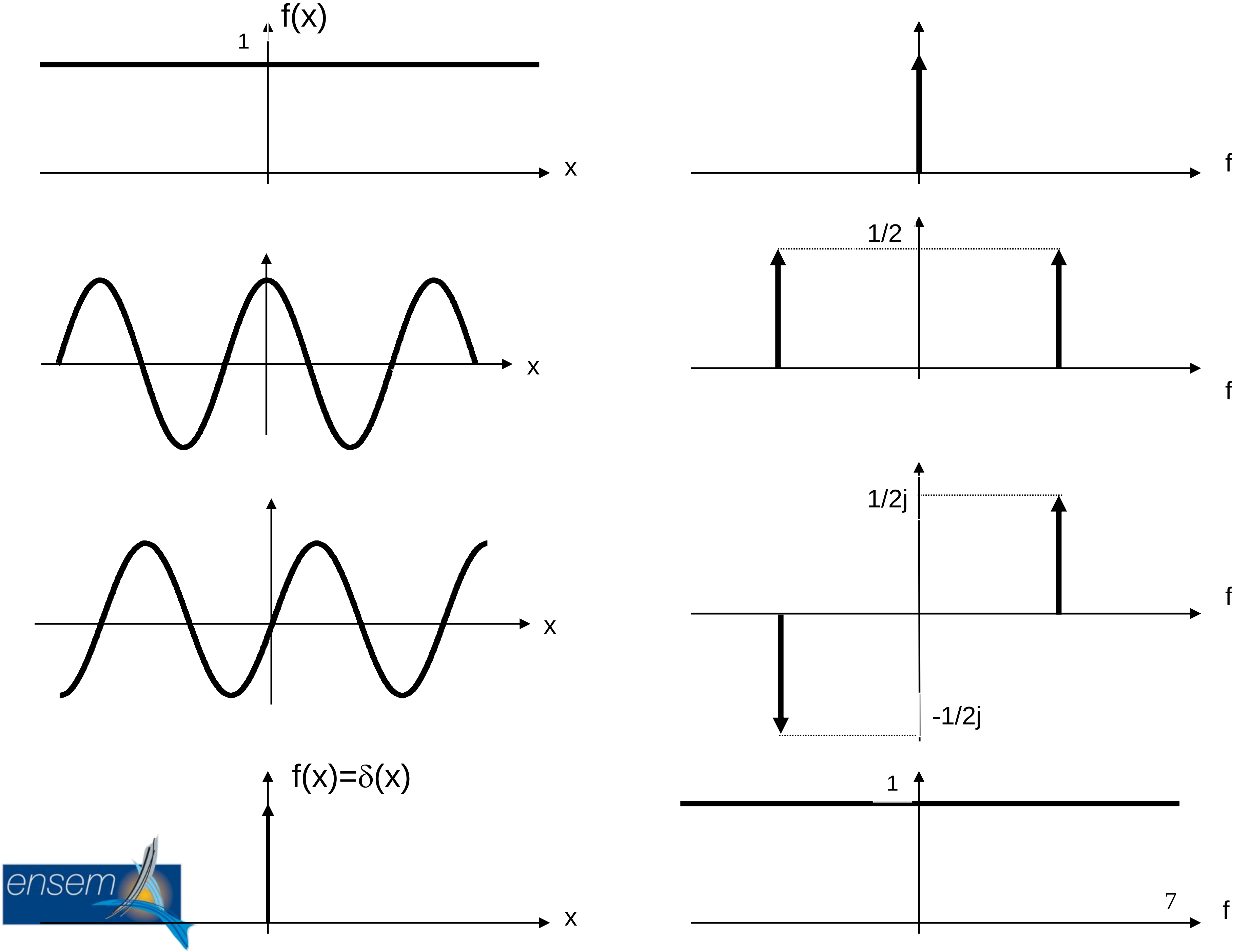
$$\boxed{\begin{aligned} \mathscr{F}\left[\cos(2\pi f_0 x)\right] &= \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] \\ \mathscr{F}\left[\sin(2\pi f_0 x)\right] &= \frac{1}{2j}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right] \end{aligned}}$$

Soit f(x)=δ(x)

$$\left\langle \mathscr{F}[\delta], \varphi \right\rangle = \left\langle \delta, \mathscr{F}[\varphi] \right\rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int \varphi(x)dx == \left\langle 1, \varphi \right\rangle$$

$$\boxed{\mathscr{F}[\delta] = 1}$$

ensem


f(x)
1
x
f
1/2
x
f
1/2j
f
x
-1/2j
f(x)=δ(x)
1
x
f