

Examen du module Traitement du Signal (S7-SI30)

Durée : 2h. Sans document. Rédiger les parties A et B sur des copies différentes.

Partie A (sur 10)

Exercice A-1

On étudie le filtrage d'un signal $x(t)$ oscillatoire causal dont la fréquence $f_0=5$ KHz peut fluctuer de $\pm 10\%$. Ce signal est échantillonné à la fréquence $F_e=20$ KHz et forme ainsi une séquence numérique $\{x_n\}$.

Pour filtrer, on utilise la transmittance suivante : $H(z) = \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 0.4)^2}$

1. Donner le domaine de convergence de $H(z)$ et vérifier la stabilité.
2. Etablir l'algorithme de filtrage et calculer les 5 premières valeurs de la réponse impulsionnelle.
3. Montrer par le diagramme des pôles et des zéros que l'allure du spectre de la réponse fréquentielle est de type passe-bande centré sur f_0 . Quel est le gain maximum ?
4. Avant échantillonnage, le signal $x(t)$ est dégradé par un phénomène d'écho sur une ligne de transmission, le signal réellement capté est $x_1(t)$ défini tel que :

$$x_1(t) = x(t) + 0.5x(t - \tau) + 0.49x(t - 2\tau).$$

Après échantillonnage, on obtient : $x_1(n) = x(n) + 0.5x(n - \alpha) + 0.49x(n - 2\alpha)$

Sachant que τ équivaut à une période d'échantillonnage, déterminer α et établir $X_1(z)$, transformée en z de $x_1(n)$.

5. Etablir la transmittance $H_1(z)$ du filtre qui, à partir des informations d'entrée $x_1(n)$, permet simultanément de filtrer $x(n)$ et de compenser la dégradation. Montrer que la réponse fréquentielle (spectre) obtenue pour $H_1(z)$ est conforme (au gain près) à celle présentée sur la figure 1.
6. Le filtrage autour de f_0 à $\pm 10\%$ est-il correctement effectué par $H_1(z)$?

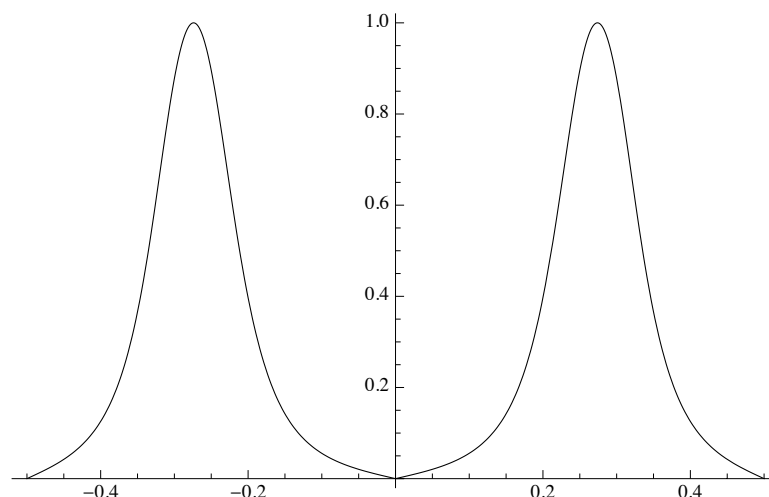


Figure 1 : Spectre de la réponse fréquentielle de $H_1(z)$ normalisé au gain unité en fonction de f réduite.

Exercice A-2

Vous disposez d'un livret épargne rémunéré suivant le principe de l'intérêt composé. Le taux d'intérêt annuel est de $i_a=2,25\%$. Ce compte est alimenté mensuellement par un versement constant de V_0 € depuis l'ouverture à $n=0$.

- 1) Etablir le schéma du processus de capitalisation $c(n)$ mensuel. Calculer la réponse impulsionnelle $h(n)$ du processus. Calculer le capital obtenu $c(n)$, sachant qu'aucun retrait n'a été effectué.
- 2) Vous devez verser chaque année une somme de V_1 €, au titre des impôts, le 1^{er} octobre de chaque année. Vous testez les deux stratégies suivantes :
 - a) Vous mensualisez V_1 par prélèvement mensuel permanent de $V_1/12$ sur votre livret épargne.
 - b) Vous faites un prélèvement unique de V_1 sur votre livret au 1^{er} octobre de chaque année.
 En comparant le capital obtenu $c(12)$ dans les deux cas après un an de fonctionnement, quelle stratégie se révèle la moins coûteuse ?

N.B : Il est bien sûr supposé que le compte épargne n'est jamais à découvert ! Tous les calculs seront effectués avec la transformée en z.

On donne :

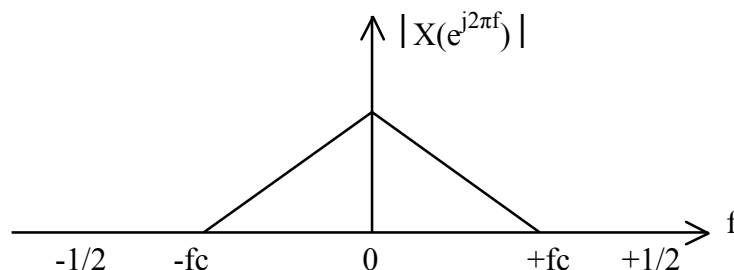
Signal causal	TZ	RdC
$\delta(n)$	1	Tout le plan C
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $

Partie B (sur 10)

Exercice B1 :

Soit une séquence numérique causale $\{x_n\} = \{\underline{x}_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. On désire sous-échantillonner cette séquence d'un facteur 2 (décimation d'ordre 2), c'est-à-dire que l'on ne conserve qu'un point sur deux (rang pair).

- 1) Soit $X(z)$, la transformée en z de $\{x_n\}$, montrer que la transformée en z de la séquence traitée peut s'écrire $X_1(z) = X(z^{1/2})$. Faire l'analyse fréquentielle de $X_1(z)$. Le spectre de $X(z)$ est représenté ci-après, en déduire l'allure du spectre de X_1 . Que constate-t-on ?
- 2) On désire obtenir pour X_1 un spectre conforme à celui de X , quelle opération de filtrage faut-il effectuer ? Donner les caractéristiques principales de ce filtre. Enoncer un principe de type Shannon permettant de régler ce filtre.
- 3) Donner un algorithme de sous-échantillonnage.



Exercice B2 :

Soit $s(t)$ un signal analogique périodique de période $P = 1$ ms dont on désire faire l'analyse spectrale sur $N=2^n$ points, $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Donner les fréquences pour lesquelles le signal $s(t)$ a un spectre non nul.
- 2) Donner la résolution fréquentielle,
- 3) Doit-on utiliser un filtre antirepliement ? Si oui donner la fréquence de coupure.
- 4) Calculer la Durée D de signal à considérer.
- 5) En déduire la fréquence d'échantillonnage.
- 6) Donner les bornes fréquentielles minimale et maximale pour lesquelles le calcul sur ordinateur sera effectué.
- 7) Doit-on utiliser une fenêtre de troncature, si oui donner ses caractéristiques principales.