ENSEM 2ème Année

28 janvier 2016

Examen du module Traitement du Signal

Durée : 2h. Sans document

Nom : RISSE
Prénom : Céline

Réponses dans les rectangles numérotés

Exercice 1

On souhaite faire l'analyse spectrale de vibrations générées par une machine tournante. Une première analyse du signal vibratoire montre qu'il est périodique avec une période de 10 ms.

On souhaite connaître le spectre de ce signal à minima dans la bande [-10kHz, 10 kHz]

1. Donner la résolution fréquentielle (Δf) maximale.
2. Calculer le nombre d'échantillons minimum N à traiter
3. Doit-on utiliser un filtre anti-repliement ? Si oui donner la fréquence de coupure fc du filtre, si non répondre non
4. Doit-on utiliser une fenêtre de troncature ? Si oui donner sa taille T, si non répondre non
5. Calculer la durée D minimale de signal à prélever.
6. On utilise un algorithme FFT pour faire les calculs. Calculer le nombre d'échantillons temporels N' à traiter
7. Calculer le fréquence d'échantillonnage Fe
8. En déduire le support spectral de l'analyse
9. Est-ce conforme avec la bande d'analyse souhaitée [-10kHz, 10 kHz] (répondre oui ou non)
10. L'analyse ainsi réalisée est-elle parfaite au sens de sa conformité mathématiques (répondre oui ou non)

$Rf = \Delta f = \frac{fe}{N}$ avec $fe = 2f_{max}$

$D = T = 10$ ms

1: $\Delta f = \frac{1}{D} = 100$ Hz

2: $N = \frac{fe}{\Delta f} = 200$

3: oui, $fc = 10$ kHz

4: oui $T = D = 10$ ms

5: D = T = 10 ms

6: N' = 256

7: Fe = $N'\Delta f = 25600$ Hz

8: $[-\frac{fe}{2}, \frac{fe}{2}]$

9: oui

10: (non)

Exercice 2

Exprimer l'inverse de la transformée en z suivante : $F(z) = \dfrac{z(z^2 - z + 2)}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ avec $RdC \;\; 2 < |z| < 3$

$F(z) = z\left[\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3}\right] = z\left[\frac{1}{z-1} - \frac{4}{z-2} + \frac{4}{z-3}\right] = \underbrace{\frac{z}{z-1}} - 4\frac{z}{z-2} + 4\frac{z}{z-3}$

RdC: $2 < |z| < 3$

donc $z = 3$ est à l'ext. du domaine de cv.
→ mode anticausal

$f(n) = u(n) - 4 \cdot 2^n u(n) + 4 \cdot 3^n u(-n-1)$

$f(n) = (1 - 2^{n+2})u(n) + 4 \cdot 3^n u(-n-1)$

On rappelle :

$x_2(n) = -a^n u(-n-1) \Rightarrow x_2(z) = \frac{z}{z-a} \quad RdC : |z| < a$

$x_1(n) = a^n u(n) \Rightarrow x_1(z) = \frac{z}{z-a} \quad RdC : |z| > a$

$\{y_n\} = \{h_n\} * \{x_n\}$

Exercice 3

$Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z) = [1 - z^{-1}]X(z)$

Soit l'algorithme de filtrage suivant : y(n)=x(n)-x(n-1) avec x l'entrée du filtre et y la sortie.

1. Donner la réponse impulsionnelle h(n) de ce filtre en soulignant la valeur n=0
2. Donner la transmittance h(z) de ce filtre
3. S'agit-il d'un filtre passe-bas (répondre oui ou non)
4. S'agit-il d'un filtre AR ? (répondre oui ou non)
5. S'agit-il d'un filtre « dérivateur » (répondre oui ou non)
6. S'agit-il d'un filtrage causal (répondre oui ou non)

1:h(n) = $[0, \underline{1}, -1, 0]$
2: h(z)= $1 - z^{-1}$
3: non
4: non (ARMA)
5: oui
6: oui ($h(z)=0$ pour $n<0$)

Exercice 4

Soit la fonction d'autoccorélation d'un signal aléatoire ergodique et stationnaire $R(\tau) = ke^{-\alpha|\tau|}$ avec $\alpha>0$; $k>0$ et τ réel

1. Donner la densité spectrale de puissance $\Phi(f)$
2. Que devient $\Phi(f)$ quand α est très grand
3. Comment s'appelle alors ce signal aléatoire
4. Donner la moyenne de ce signal aléatoire
5. Donner sa variance

1: $\Phi(f) = \dfrac{k}{\alpha + 2\pi j f}$
2: $\Phi(f) = 0$
3: bruit blanc
4:M= 0
5:σ^2= 0

pas sûre

Exercice 5

Soit un signal de largeur de bande [9 kHz, 11 kHz] noyé dans un bruit blanc que l'on désire extraire avec un filtre analogique passe-bande parfait (fonction porte dans l'espace des fréquences)

1. Faites un graphique représentant le signal, le bruit et le filtre dans l'espace des fréquences,
2. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre h(t),
3. La réponse impulsionnelle est volontairement tronquée pour t>0.02s (h(t)=0 si t>0.02). Donner la nouvelle fonction de transfert en fréquence du filtre H(f) et dessiner approximativement son spectre.

1

2

3

Exercice 6 Pas sûre

Principe d'Heisenberg.

1. Donner la relation entre les représentations fréquentielle et temporelle pour un signal appartenant à L_2.
2. Quelle est la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas la plus courte qui a la bande passante la plus faible ?
3. Quel est l'intérêt pratique de ce filtre ?

1 $\sigma_x \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi}$

avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(f)|^2 df$

$\sigma_x^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}$ $\sigma_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |\hat{f}(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(f)|^2 df}$

2

3

Exercice 7

Soit un filtre numérique passe-bas de réponse impulsionnelle $h(n) = [\underline{a_1}, a_2, a_3]$ appliqué sur un signal échantillonné à 2000Hz. Les coefficients du filtre sont calculés pour avoir une fréquence de coupure fc= 750 Hz.

1. Donner la valeur de la période spectrale du filtre
2. Que devient le module de la réponse fréquentielle du signal filtré si on modifie la réponse impulsionnelle comme suit : $h1(n) = [a_1, a_2, \underline{a_3}]$
3. Quel sera l'effet du filtrage sur un signal numérique de fréquence d'échantillonnage Fe= 4000 Hz. Donner les principales caractéristiques.

1 2000Hz

2 le module reste le même, c'est la phase qui va changer

3 filtrage basse bas de fréquence de coupure fc=1500Hz

Exercice 8 Pas sûre

On désire créer un filtre H(z) de type RII ayant les propriétés suivantes :

- gain unitaire pour le continu et pour les *maxima* du spectre à f_0=0,3
- gain nul aux extrémités du spectre,

-rejet d'une bande de fréquence autour de la fréquence normalisée f_1=0,1

1. Donner une structure de H(z) sous la forme pôles/zéros
2. Expliciter les valeurs numériques des paramètres de H(z)

1 $\|\hat{H}(e^{2\pi i f})\|_{f} = 0 \rightarrow$ zéro $z_a = 1$

$\|\hat{H}(e^{i2\pi f})\|_{f_0=0,3} = 1 \rightarrow$ pôle $z_1 = \rho e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$H(z) = \frac{(z-z_a)(z-z_b)}{(z-z_1)(z-\bar{z_1})}$$

$\|\hat{H}(e^{2\pi i f})\|_{f=0,1} = 0 \rightarrow$ zéro $z_b = 1$

2

examen 2016

Exercice 1:

si signal non périodique → pas de fenêtre de troncature

N' = 256 (on prend la puissance de 2 supérieure)

Exercice 2:

voir TD!

Exercice 4:

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\, e^{-2\pi j f \tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-\alpha|t|}\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{0} k e^{\alpha t}\, e^{-2\pi j f t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} k e^{-\alpha t}\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$\Phi(f) = \int_{0}^{+\infty} k e^{-\alpha t - 2\pi j f t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} k e^{-t(\alpha + 2\pi j f)}\, dt = \left[\frac{k}{\alpha + 2\pi j f} e^{-t(\alpha + 2\pi j f)} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$\Phi(f) = \frac{k}{\alpha + 2\pi j f}$$