Exercice 1

Calculer les transformées en z et définir les régions de convergence (RdC) des signaux

$$x_1(n) = a^n u(n)$$

$$x_2(n) = -a^n u(-n-1)$$

$$x_3(n) = n.u(n)$$

$$x_4(n) = b^{|n|}$$

u(n) est l'échelon unité et on suppose que a>0 et 0<b<1

Solutions

1. Soit $x_1(z)$ la transformée en z de $x_1(n)$
La séquence $x_1(n)$ est causale puisque u(n) est nulle pour n<0, nous sommes donc en présence d'une transformée en z monolatérale à droite

$$\Rightarrow x_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a^n z^{-n} \;\; avec \; a > 0$$

C'est une série géométrique de raison az^{-1} qui converge si

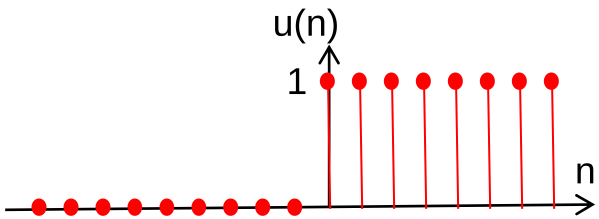
$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|az^{-1}\right|^n\right) = 0 \;\; soit \;\; \left|az^{-1}\right| < 1 \Rightarrow \left|z^{-1}\right| < \frac{1}{a} \Rightarrow |z| > a$$

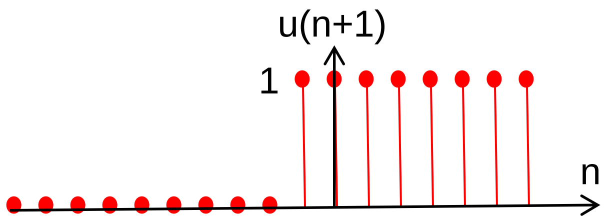
$|z| > a$ Définit le rayon de convergence de la série (RdC)

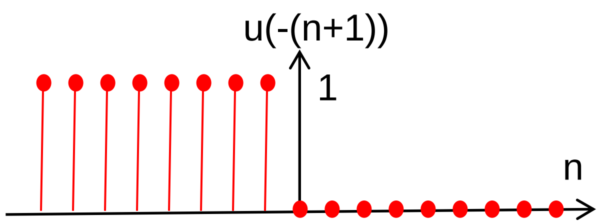
$$\boxed{\Rightarrow x_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \;\; RdC : |z| > a}$$

Solutions

2. Soit $x_2(z)$ la transformée en z de $x_2(n)$
La séquence $x_2(n)$ est **anticausale** puisque u(-n-1) est nulle pour n>0 (et même n>-1), nous sommes donc en présence d'une transformée en z monolatérale à gauche







$$\Rightarrow x_2(z) = -\sum_{n=-\infty}^{n=-1} a^n z^{-n} \;\; avec\ a > 0$$

$$= -\left(\sum_{n=-\infty}^{n=0} a^n z^{-n} - 1 \right) = -\left(\sum_{n=0}^{n=\infty} a^{-n} z^n - 1 \right) \;\; avec\ n > 0$$

C’est une série géométrique de raison $a^{-1}z$ qui converge si

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left| a^{-1} z \right|^n \right) = 0 \;\; soit \;\; \left| a^{-1} z \right| < 1 \Rightarrow |z| < a$$

$$\boxed{\Rightarrow x_2(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{z}{z-a} \;\; RdC : |z| < a}$$

3. Soit $x_3(z)$ la transformée en z de $x_3(n)$
La séquence $x_3(n)$ est **causale** puisque u(n) est nulle pour n<0, nous sommes donc en présence d'une transformée en z monolatérale à droite.

On constate que $x_3(n)$ est du type n.X(n). On applique la propriété :

$$n.X(n) \xrightarrow{Z} -z\frac{d}{dz}X(z)$$

$$X(n) = u(n)$$

$$\Rightarrow x_3(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad avec \;\; RdC : |z| > 1$$

4. On sépare la partie causale et anticausale : $x_4(n) = x_{4+}(n) + x_{4-}(n)$

$$x_{4+}(n) = b^n u(n)$$

$$x_{4-}(n) = b^{-n} u(-n-1)$$

D'après les questions 1 et 2

$$\Rightarrow x_{4+}(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-b} \quad RdC : |z| > b$$

$$\Rightarrow x_{4-}(z) = \frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}} = \frac{z}{\frac{1}{b}-z} \quad RdC : |z| < \frac{1}{b}$$

$$x_4(z) = x_{4+}(z) + x_{4+}(z) = \frac{z}{z-b} + \frac{z}{\frac{1}{b}-z}$$

$$\boxed{x_4(z) = \frac{z\left(\frac{1}{b}-b\right)}{(z-b)\left(\frac{1}{b}-z\right)} \quad RdC : b < |z| < \frac{1}{b} \quad couronne}$$

ensem