

Chapitre 7

Echantillonnage et séries

1. Théorème fondamental

Le peigne de Dirac joue un rôle fondamental en théorie du signal :

$$PE_D(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \hline \quad \quad \quad k-1 \quad k \quad k+1 \end{array} \quad x$$

C'est une distribution tempérée dont la transformée de Fourier est également une distribution tempérée.

On démontre que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est aussi un peigne de Dirac.

$$F[PE_D(x)] = PE_D(f)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n) \xrightarrow{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n)$$

Par changement d'échelle, on obtient

$$\frac{1}{T} P E_D \left(\frac{x}{T} \right) \xrightarrow{F} P E_D (Tf)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left(\frac{x}{T} - n \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nT) \xrightarrow{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(Tf - n) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T} \right)$$

2. Série de Fourier des fonctions

Toute fonction périodique sommable sur une période **T** peut se mettre sous la forme :

$$P(x) = P_0(x) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nT)$$

$$P_0(x) = \begin{cases} P(x) & \text{pour } a < x \leq a + T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La transformée de Fourier de **P(x)** s'écrit :

$$\hat{P}(f) = \hat{P}_0(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{P}_0\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

C'est une série d'impulsions de Dirac modulée par $\hat{P}_0\left(\frac{n}{T}\right)$ et espacées de **1/T**

En prenant la transformée inverse, il vient :

$$P(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{P}_0\left(\frac{n}{T}\right) e^{\frac{2\pi j n x}{T}}$$

$$P(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{2\pi j n x}{T}}$$

C'est ce qu'on appelle le développement en série de Fourier.

Les coefficients **C_n** sont donnés par

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(x) e^{\frac{-2\pi j n x}{T}} dx$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} P(x) e^{\frac{-2\pi j n x}{T}} dx$$

$$P(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{2\pi j n x}{T}} = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(C_n e^{\frac{2\pi j n x}{T}} + C_{-n} e^{\frac{-2\pi j n x}{T}} \right)$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (C_n + C_{-n}) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + j(C_n - C_{-n}) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

Il est d'usage d'appeler :

$$\begin{cases} a_n = C_n + C_{-n} \\ b_n = j(C_n - C_{-n}) \\ a_0 = C_0 \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} P(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \\ b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} P(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \\ a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} P(x) dx \end{cases}$$

3. Théorème de l'échantillonnage

Lorsque l'on étudie un système physique avec un ordinateur, on a des mesures successives pour des valeurs équidistantes de x de la grandeur que l'on examine.

Le problème est de déterminer dans quelle mesure la suite de nombres obtenue est une représentation correcte de la fonction continue dont elle est issue.

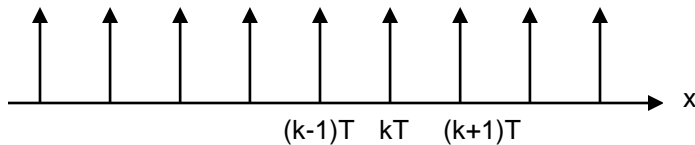
Supposons $f(x)$ une fonction réelle

Soit $\hat{f}(f)$ sa transformée de Fourier

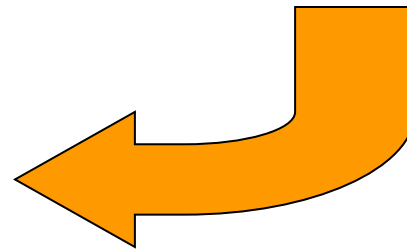
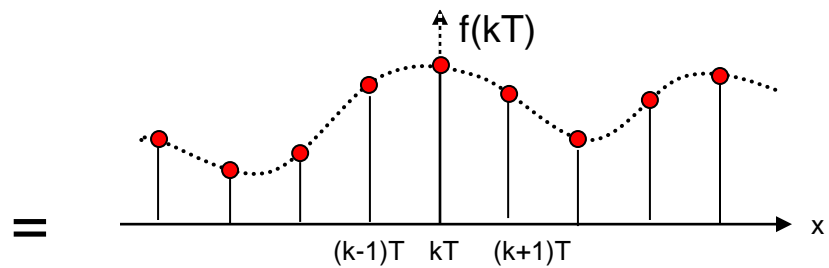
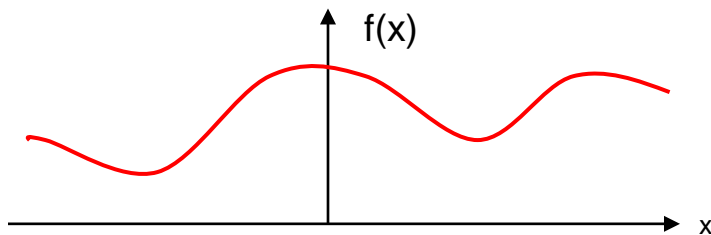
Soit T la période d'échantillonnage, c'est-à-dire l'espace entre deux mesures.

Echantillonner $f(x)$ revient à multiplier $f(x)$ par un peigne de Dirac

$$PE_D\left(\frac{x}{T}\right) \quad f(x) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(x - nT)$$



X



Si on parvient à reconstituer **f(x)** à partir de la distribution ci-dessus, alors la suite numérique est une représentation correcte de la fonction **f(x)**.

Par transformation de Fourier, il vient :

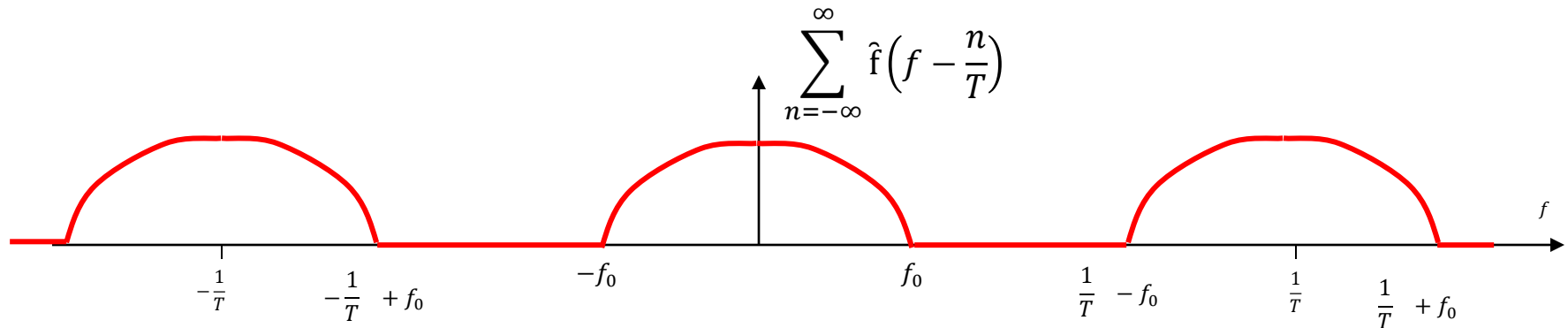
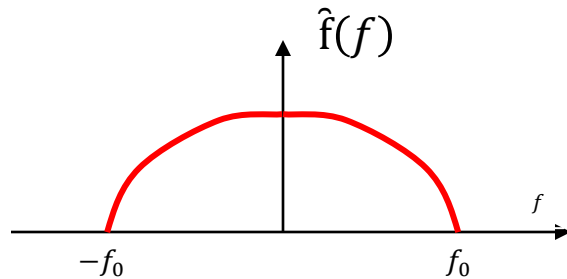
$$PE_D\left(\frac{x}{T}\right) f(x) \xrightarrow{F} T \cdot PE_D(Tf) \otimes \hat{f}(f) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right] \otimes \hat{f}(f)$$

$$PE_D\left(\frac{x}{T}\right) f(x) \xrightarrow{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(f - \frac{n}{T}\right) \right]$$

C'est une distribution périodique de période $1/T$

- La transformée de Fourier d'une fonction réelle est symétrique par rapport à l'origine, si en plus elle est à support compact et que $-\mathbf{f}_0$ et \mathbf{f}_0 constituent le support alors la distribution ci-dessus est formée d'une somme de distributions identiques décalées de $1/T$ ayant leurs supports disjoints.

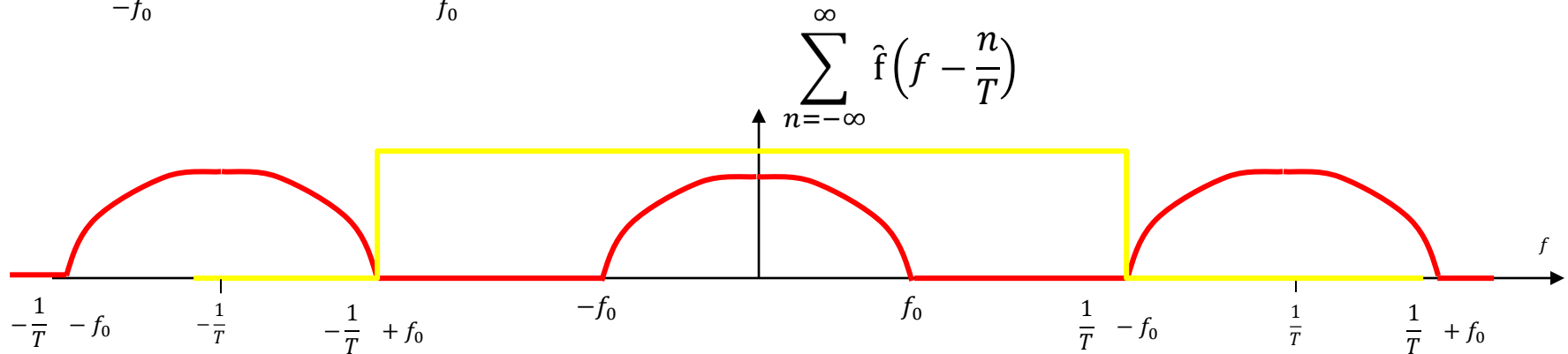
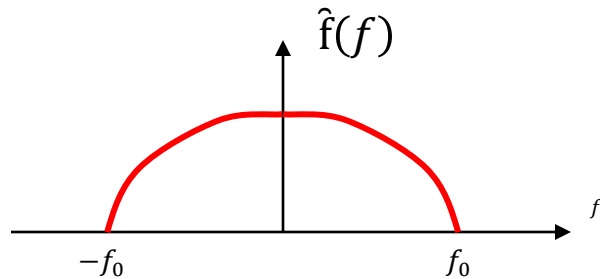
$$PE_D\left(\frac{x}{T}\right) f(x) \xrightarrow{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(f - \frac{n}{T}\right) \right]$$



On peut donc reconstituer $\hat{f}(f)$ en multipliant la distribution ci-dessus par une fonction porte telle que :

$$\lambda(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T} - f_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

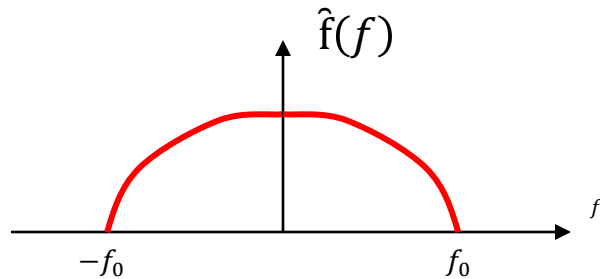
$$PE_D\left(\frac{x}{T}\right) f(x) \xrightarrow{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(f - \frac{n}{T}\right) \right]$$



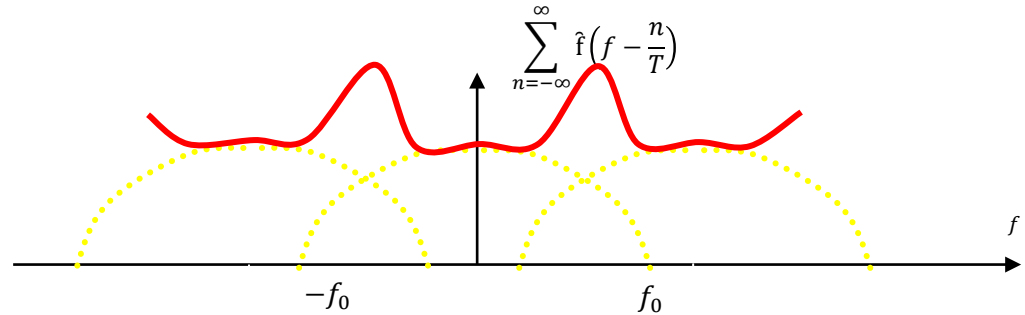
On peut donc reconstituer $\hat{f}(f)$ en multipliant la distribution ci-dessus par une fonction porte telle que :

$$\lambda(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T} - f_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Supposons maintenant : $\frac{1}{T} < 2.f_0$



Repliement de spectre « aliasing »



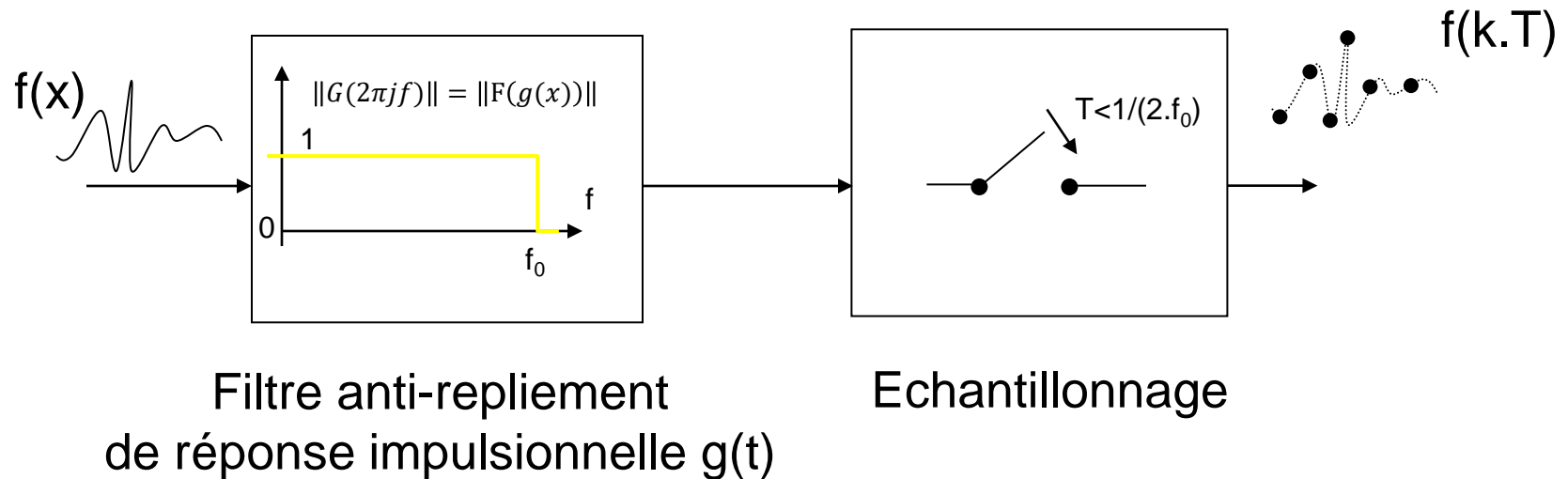
On ne peut plus reconstituer $\hat{f}(f)$!

Théorème de Shannon : Il faut échantillonner à une cadence au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale contenue dans $\mathbf{f(x)}$.

$$\frac{1}{T} > 2.f_0$$

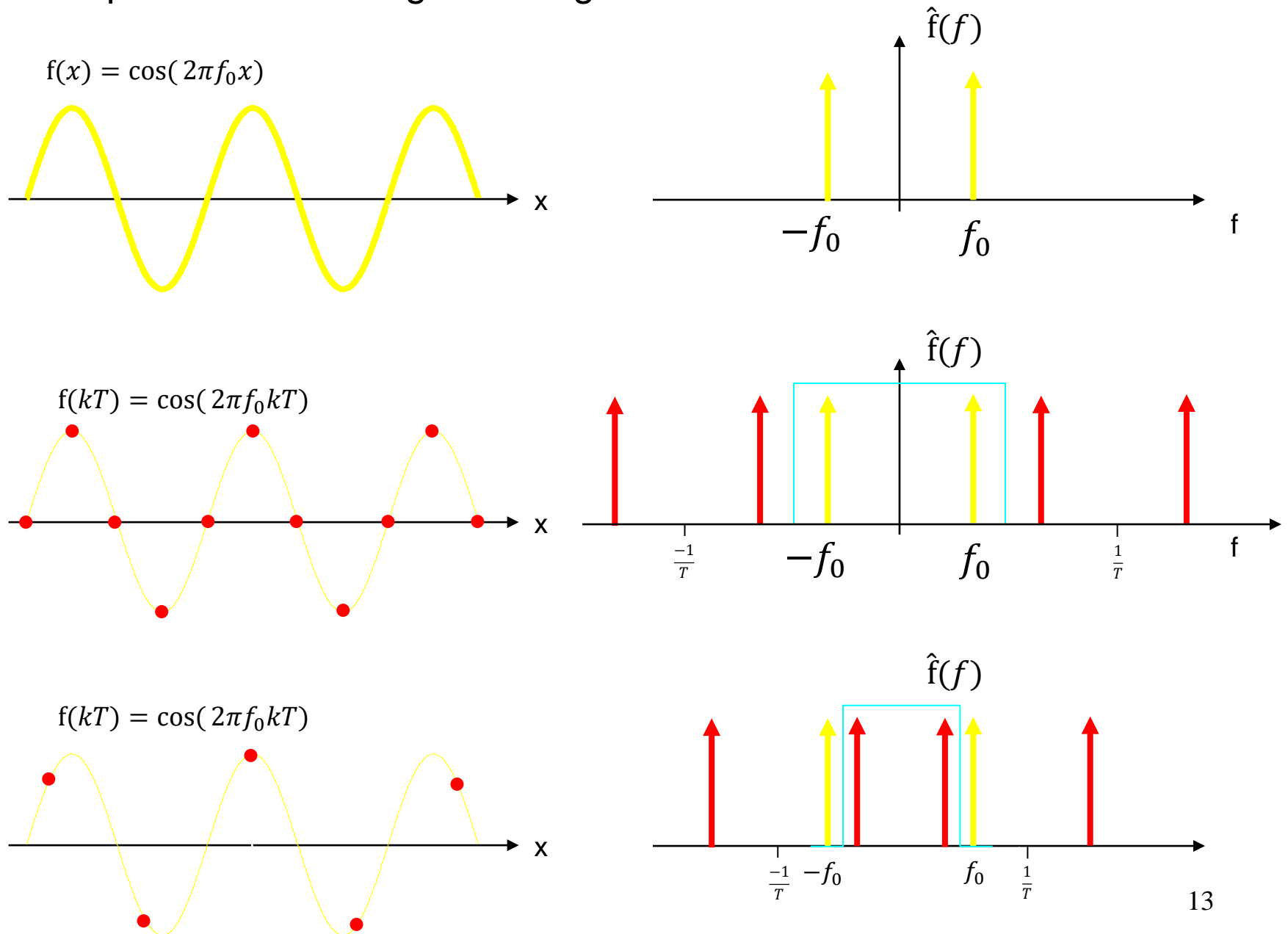
En pratique : Il est très rare d'avoir à échantillonner un signal analogique dont le spectre fréquentiel est connu et à support compact $[-f_0, f_0]$. On n'est donc pratiquement jamais dans les conditions d'application du théorème de Shannon.

On procède de la manière suivante :

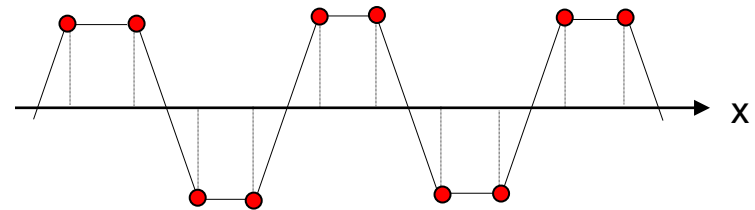
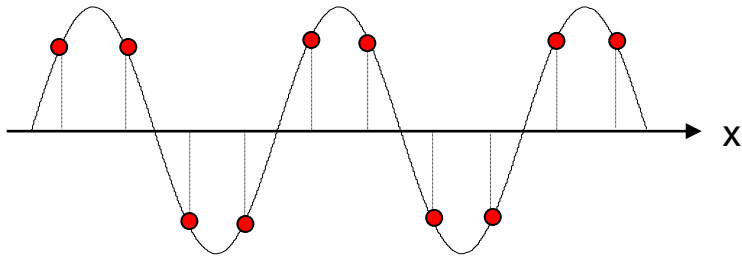
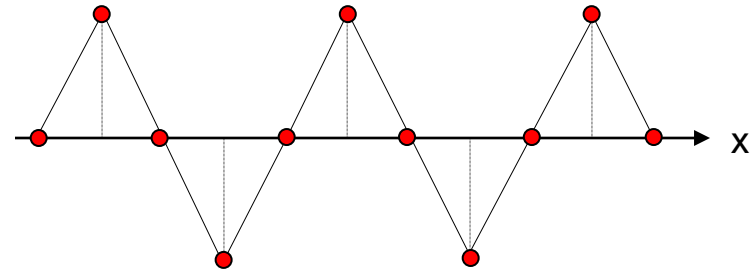
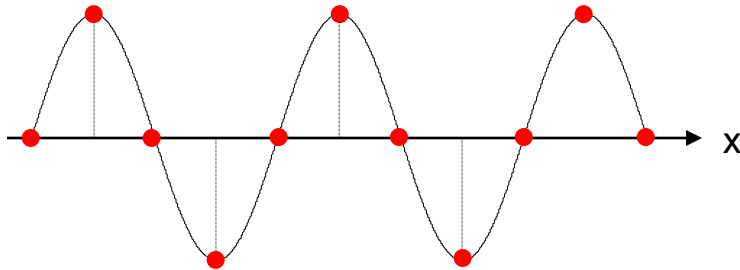


Remarque : $f(kT)$ représente correctement $f(x) \otimes g(x)$, soit $f(x)$ filtré passe bas à la fréquence de coupure f_0
 $f(kT)$ ne représente donc pas correctement $f(x)$.

Exemple : Echantillonnage d'un signal sinusoïdal



Remarque :



Dans les deux cas le théorème de Shannon est respecté !
L'interpolation linéaire d'un signal échantillonné conduit à une très mauvaise estimation du signal analogique dont il est issu.
En pratique, il faut être très prudent et ne pas croire nécessairement ce que l'on voit (oscilloscope numérique)

4. Interpolation

La reconstitution de $\mathbf{f(x)}$ à partir des valeurs $\mathbf{f(kT)}$ s'appelle interpolation.

Supposons : $\hat{f}(f) \equiv 0 \quad \forall \quad |f| > f_0$

$$\hat{f}(f) = [T \cdot PE_D(Tf) \otimes \hat{f}(f)] \Pi\left(\frac{f}{2.f_0}\right) \quad T \leq \frac{1}{2.f_0}$$

Dans ce cas $T \cdot PE_D(Tf) \otimes \hat{f}(f)$ est une fonction périodique

On peut écrire :

Par transformée inverse :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[PE_D\left(\frac{x}{T}\right) f(x) \right] \otimes \frac{\sin(2\pi \cdot f_0 x)}{\pi x} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T \cdot f(kT) \cdot \frac{\sin[2\pi f_0(x - kT)]}{\pi(x - kT)} \end{aligned}$$

si : $T = \frac{1}{2.f_0}$; échantillonnage critique

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{2f_0}\right) \cdot \frac{\sin(2\pi f_0 x - k\pi)}{2\pi f_0 x - k\pi}$$

5. Transformée de Fourier numérique

Soit une suite de nombres : $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$

On désire calculer la transformée de Fourier de cette suite.

La suite \mathbf{x}_k peut provenir d'un signal continu correctement échantillonné ou non.

Supposons une fonction continue $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ dont provient la suite \mathbf{x}_k

La suite \mathbf{x}_k peut être représentée par :

$$PE_D\left(\frac{x}{T}\right) \quad f(x) \quad T : \text{période d'échantillonnage}$$

$$PE_D\left(\frac{x}{T}\right) \quad f(x) \quad \xrightarrow{F} \quad \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(f - \frac{n}{T}\right) \right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{-2\pi j f k T}$$

La transformée de Fourier est périodique de période $1/T$

La définition de transformée de Fourier numérique est :

$$\hat{f}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{-2\pi j f k T}$$
$$x_k = T \int_a^{a+\frac{1}{T}} \hat{f}(f) e^{+2\pi j f k T} df$$

6. Relation entre transformée de Fourier numérique et transformée en z

La transformée en z d'une suite numérique est définie par :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k}$$

Transformée en z classique

$$\text{ou} \\ f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k z^{-k}$$

Transformée en z bilatérale

$$f(z) \text{ existe si : } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k z^{-k}| \text{ existe}$$

Par analogie avec la formule de la transformée de Fourier numérique, on remarque que la transformée en z n'est autre que la transformée de Fourier numérique prise pour :

$$z = e^{2\pi j f T}$$

$$\hat{f}(f) = f(z) \quad \text{avec} \quad z = e^{2\pi j f T}$$

exemple : $x_k = \begin{cases} a^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - (az^{-1})}{1 - az^{-1}} \right)^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{si } az^{-1} < 1$$

$$\hat{f}(f) = \frac{1}{1 - az^{-2\pi jfT}}$$

7. Cas des suites de carrés sommables

Si x_k est une suite de carrés sommables : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 < \infty$

La série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{-2\pi j f k T}$ converge en moyenne quadratique vers une fonction $\hat{f}(f)$ de L^2 périodique de période $1/T$, c'est à dire :

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \int_0^{\frac{1}{T}} \left[\sum_{-M}^{+N} x_k e^{-2\pi j f k T} - \hat{f}(f) \right]^2 df = 0$$

De plus on a l'égalité de Parseval :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 = T \int_a^{a+\frac{1}{T}} |\hat{f}(f)|^2 df$$

8. Transformée de Fourier discrète

La transformée de Fourier numérique prise pour $T = 1$ est périodique de période $1/T = 1$.

$$\hat{g}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-2\pi j f k}$$
$$x_k = \int_a^{a+\frac{1}{T}} \hat{g}(f) e^{+2\pi j f k} df$$

Si on veut calculer $\hat{g}(f)$ à l'aide d'un calculateur, deux difficultés apparaissent :

- 1) le nombre d'échantillons à prendre en compte est infini (k varie de $-\infty$ à $+\infty$),
- 2) $\hat{g}(f)$ est une fonction continue définie $\forall f \in \mathcal{R}$

La solution à ces problèmes est la suivante :

1) limitation de la durée du signal,

2) remplacer la variable f continue par une variable discrète.

8.1. Discrétisation de la fréquence

Soit $\hat{g}(f)$ la transformée de Fourier d'un signal échantillonné

Discrétiser la fréquence revient à multiplier $\hat{g}(f)$ par un peigne de Dirac :

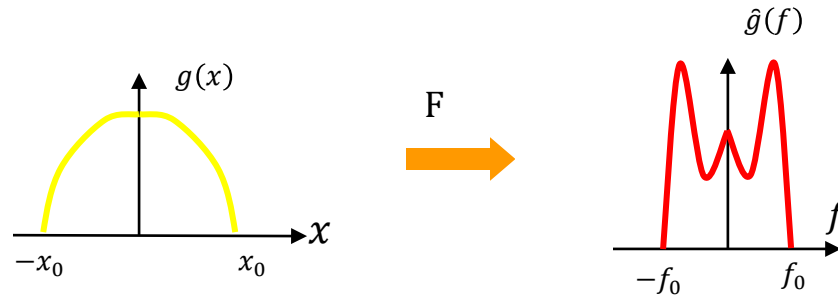
$$PE_D\left(\frac{f}{\Delta f}\right) \hat{g}(f) = \Delta f \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n\Delta f) \delta(f - n\Delta f)$$

Par transformation de Fourier inverse, il vient :

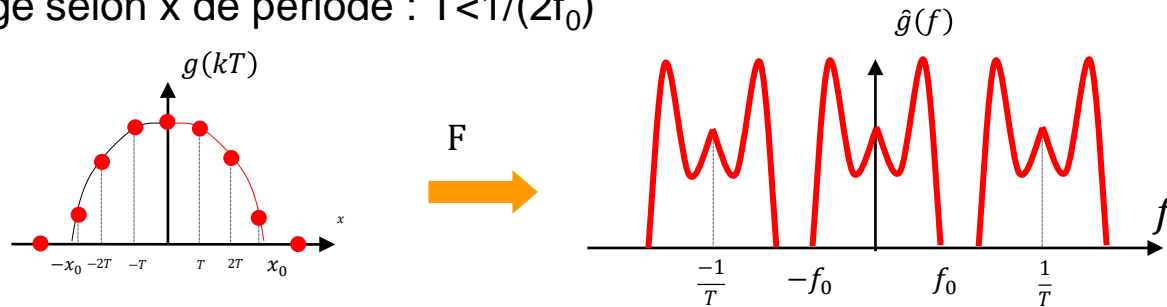
$$PE_D\left(\frac{f}{\Delta f}\right) \hat{g}(f) \xrightarrow{F^{-1}} \Delta f \cdot PE_D(\Delta f x) \otimes g(k) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{n}{\Delta f}\right) \right] \otimes g(k)$$

C'est une distribution périodique de période $1/\Delta f$

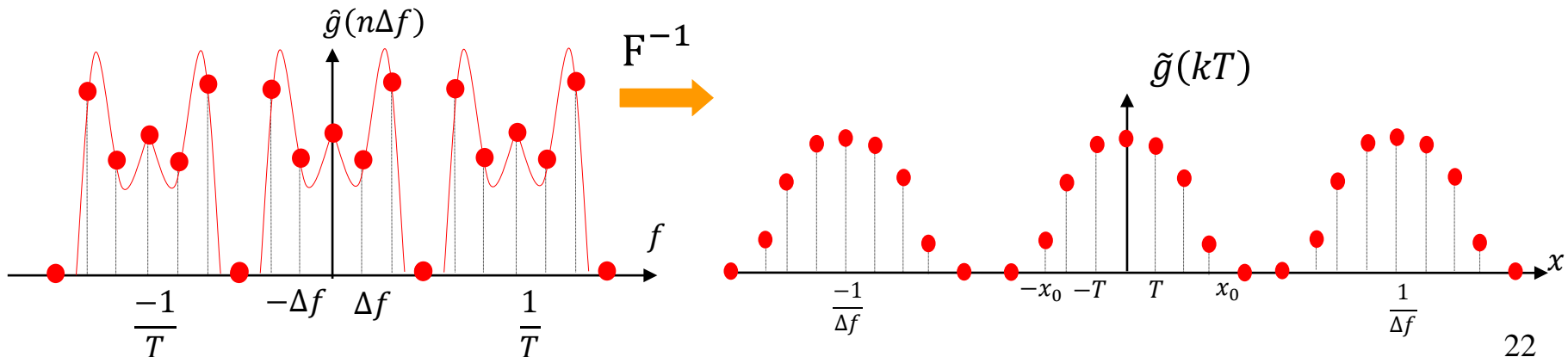
Supposons $g(x)$ et $\hat{g}(f)$ à support compact $[-x_0, x_0]$ et $[-f_0, f_0]$ (ceci est mathématiquement impossible)



Echantillonnage selon x de période : $T < 1/(2f_0)$



Echantillonnage selon f de période : $\Delta f < 1/(2x_0)$



$\tilde{g}(kT) \neq g(kT) \longrightarrow \tilde{g}(kT)$ c'est $g(kT)$ périodisé

Si :

- $G(kT)$ est un signal périodique de période x_0 ,
- $g(kT)$ le signal pris sur une période,
- $1/\Delta f = 2.x_0$

Alors : $\tilde{g}(kT) = G(kT)$

Dans tous les autres cas il impossible d'estimer correctement $\hat{G}(f)$

La définition de Transformée de Fourier Discrète (TFD) est donc :

$$\hat{f}(n\Delta f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{-2\pi j n \Delta f k T}$$

$$x_k = T \sum_a^{a+\frac{1}{T}} \hat{f}(n\Delta f) e^{+2\pi j n \Delta f k T}$$

Or : $1/\Delta f = x_0 = NT$; N nombre d'échantillons prélevés sur une période x_0 du signal. Si en plus on pose $x_0=1$ alors :

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N+1} x_k e^{\frac{-2\pi j n k}{N}}$$

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{f}(n) e^{\frac{+2\pi j n k}{N}}$$

Si $x_0=1$

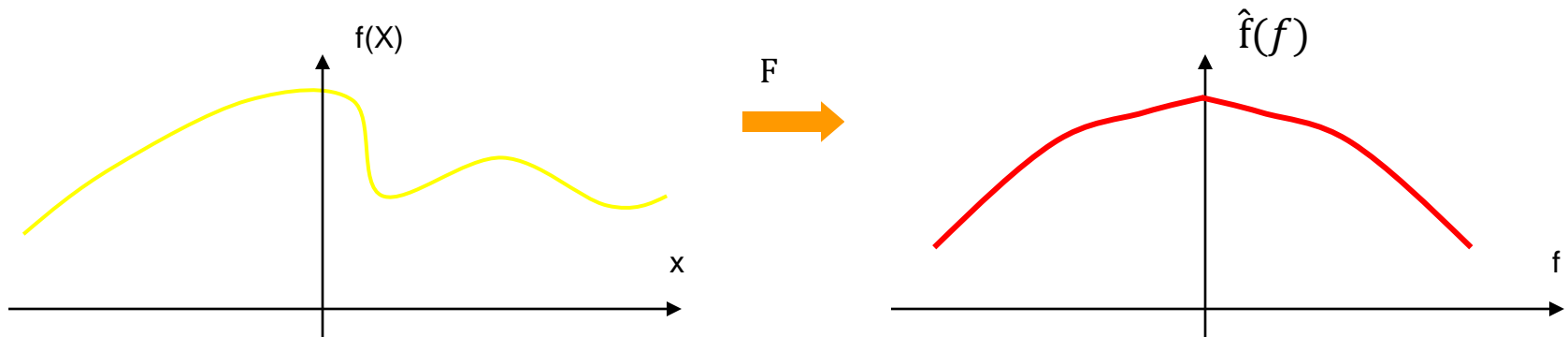
En, pratique il existe des algorithmes rapide pour calculer la TFD (*FFT : Fast Fourier Transform*), mais N doit être une puissance de 2 (2, 4, 8,...256, ..).

9. Interprétation graphique

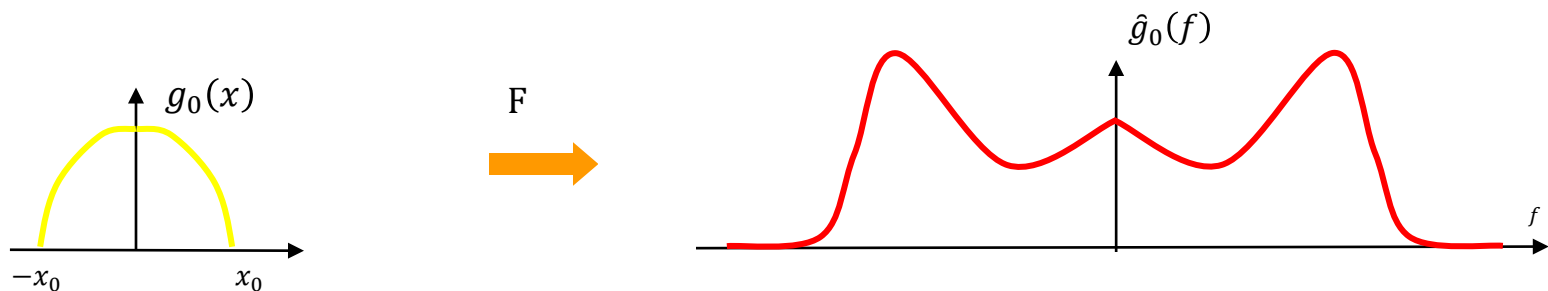
Il existe 4 types de transformée de Fourier

- Signaux apériodiques,
- Signaux périodiques,
- Signaux échantillonnés
- Transformée de Fourier Discrète TFD

9.1. La transformée de Fourier des signaux apériodiques conduit à une fonction apériodique

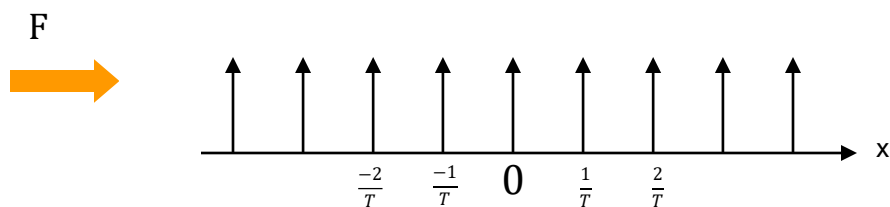
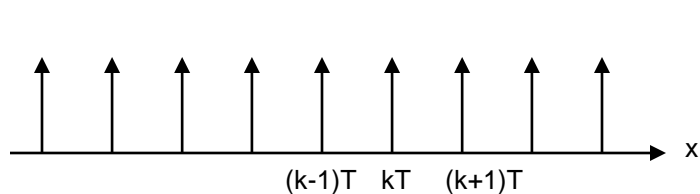


9.3. La transformée de Fourier des signaux périodiques conduit à une distribution dans l'espace des fréquence



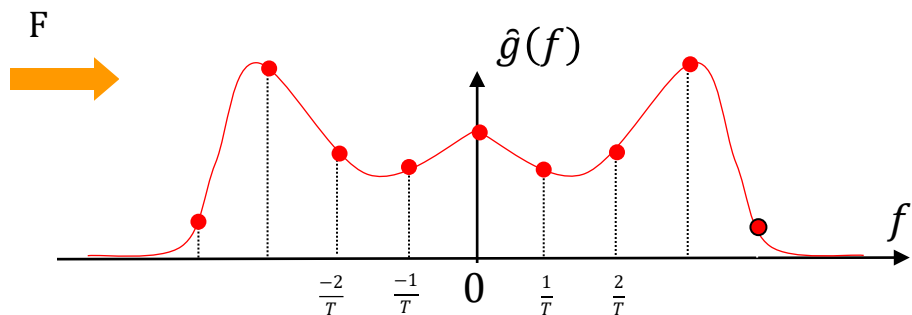
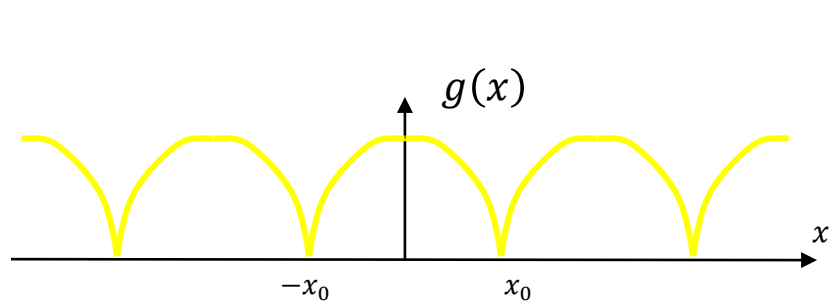
\otimes

\times

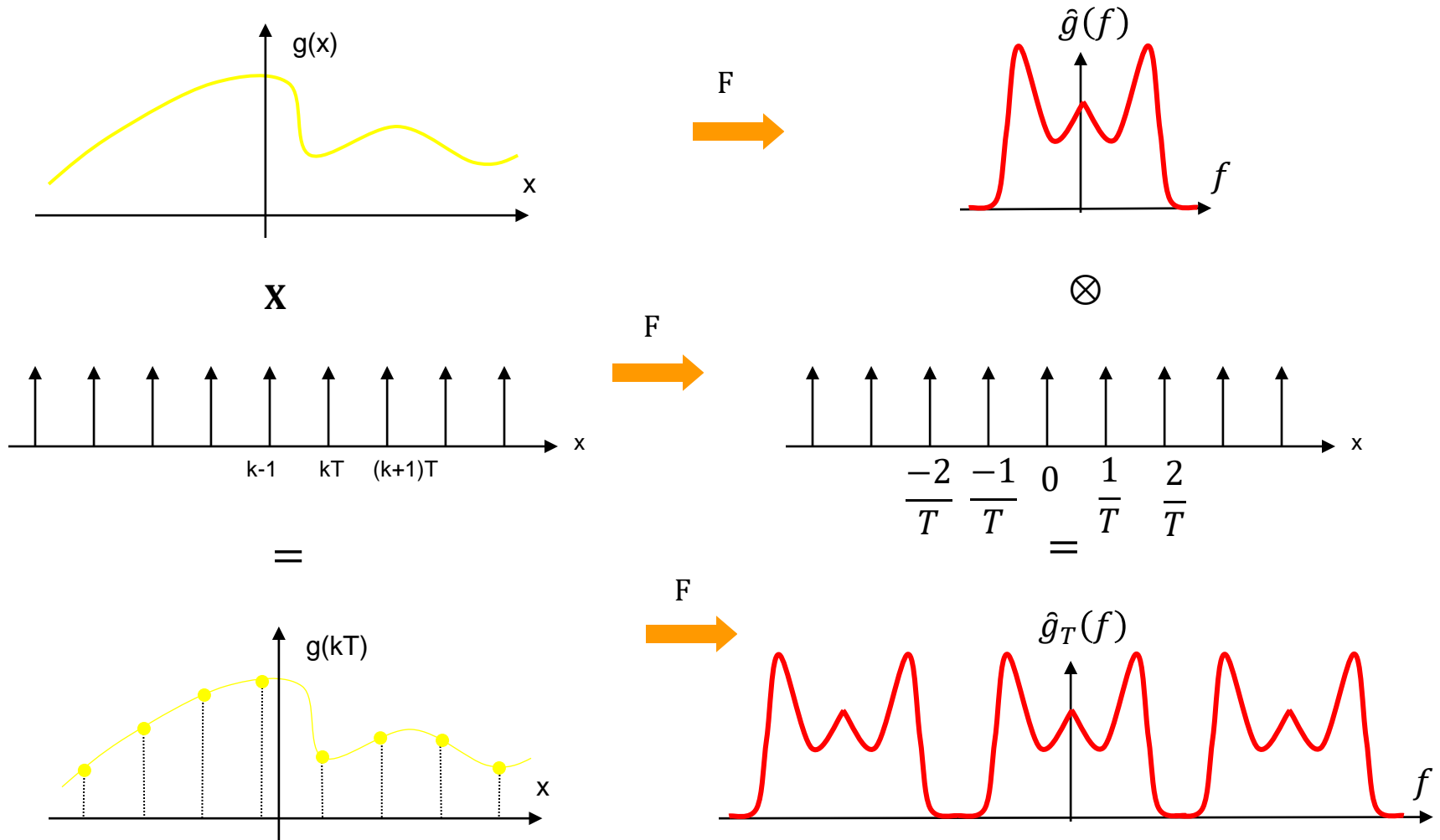


$=$

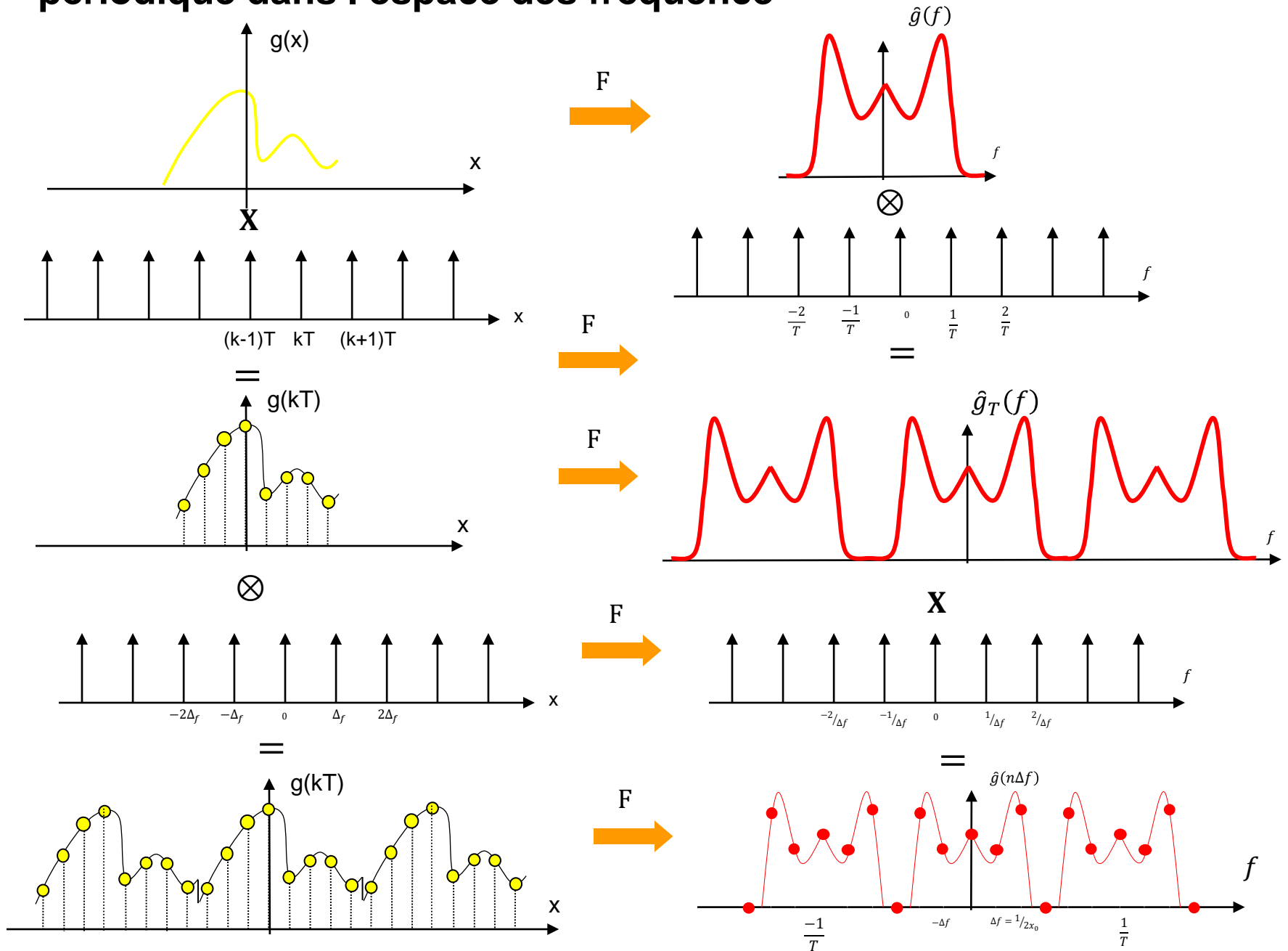
$=$



9.3. La transformée de Fourier numérique conduit à une fonction continue et périodique dans l'espace des fréquence



9.4. La transformée de Fourier discrète conduit à une distribution périodique dans l'espace des fréquence



Exemple : soit à calculer la TFD d'un signal dont les fréquences sont inférieures à 2,5 KHz avec une résolution fréquentielle de l'ordre de 5 Hz.

1. Fréquence d'échantillonnage

$$f_e = \frac{1}{T} \geq 2.f_0 = 2.2,5.10^3 = 5 \text{ KHz}$$

2. Résolution fréquentielle de 5 HZ

$$\Delta f = \frac{1}{2.x_0} \Rightarrow x_0 = 0,1 \text{ s}$$

Il faudra donc traiter 0,2 seconde de signal, soit :

$$N = 2.x_0.f_e = 1000 \text{ échantillons}$$

8.1. Limitation de la durée du signal

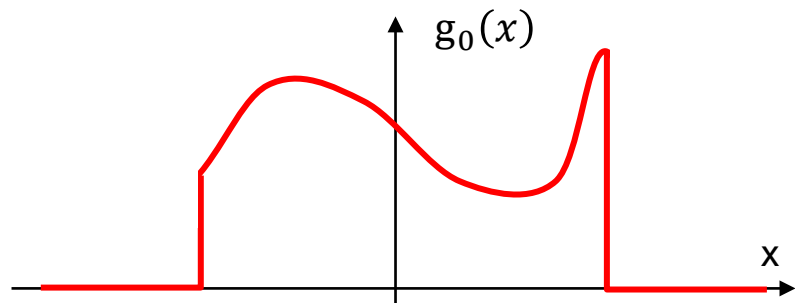
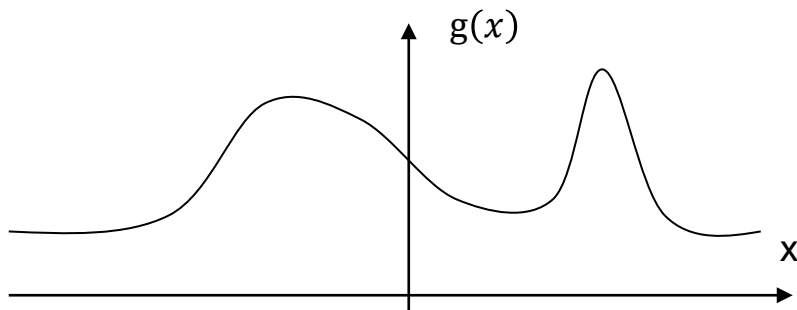
La TFD ne fonctionne correctement que sur les signaux périodiques. Si on l'utilise pour des signaux apériodiques, il faut choisir une tranche de signal qui devient la période d'un signal périodique de synthèse qui est évidemment différent du signal que l'on souhaite analyser.

Question : Quelle est la qualité de l'estimation de la TFD obtenue par périodisation du signal apériodique.

8.1.1. Effet de la troncature d'un signal continu

Dans un premier temps, afin de simplifier les explications, considérons un signal continu dont nous allons étudier l'effet apporté par une limitation de durée sur la représentation spectrale.

Soit $g(x)$ un signal continu dont on évalue la TF sur une durée limitée $[-T/2, T/2]$

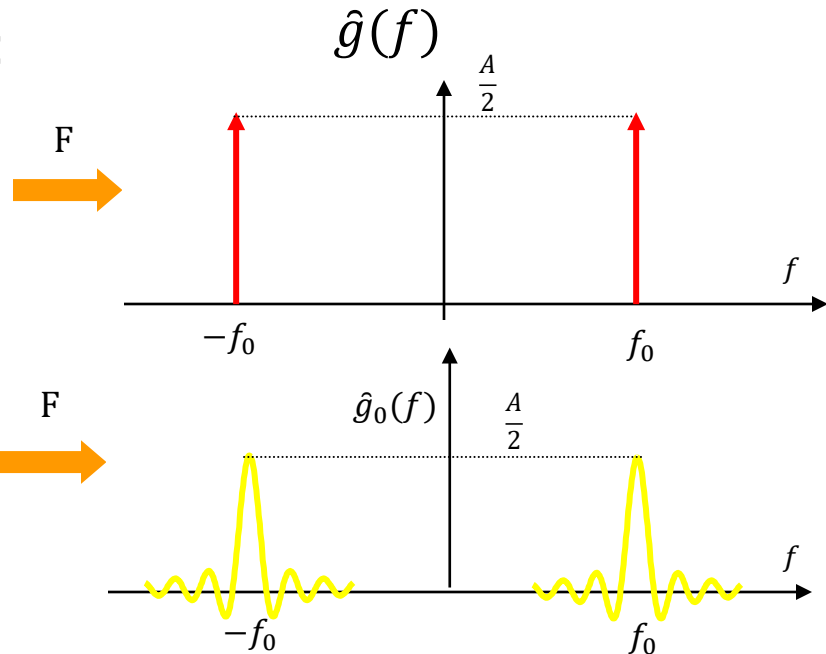
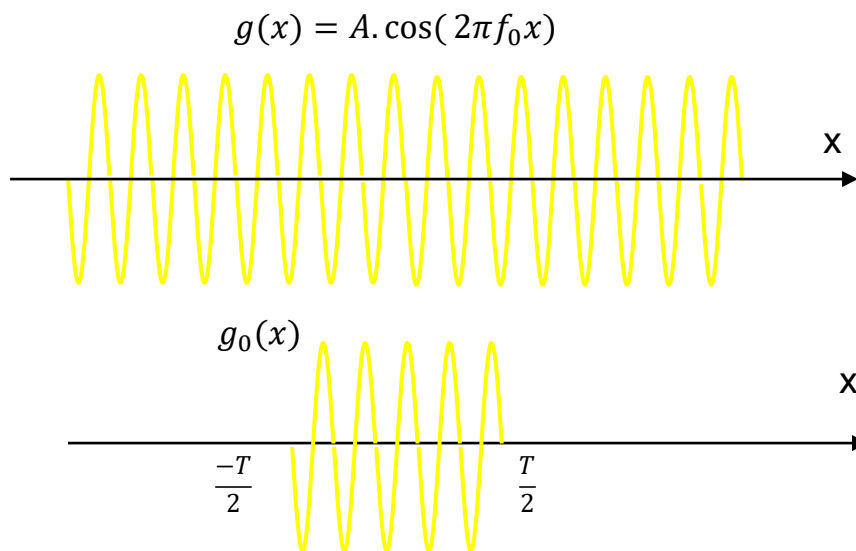


On a :

$$g_0(x) = g(x) \cdot \Pi\left(\frac{x}{T}\right)$$

$$\hat{g}_0(f) = \hat{g}(f) \otimes T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

Effet de la convolution spectrale :



Remarques :

1. aux points :

$$\hat{g}(f) = \frac{A}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

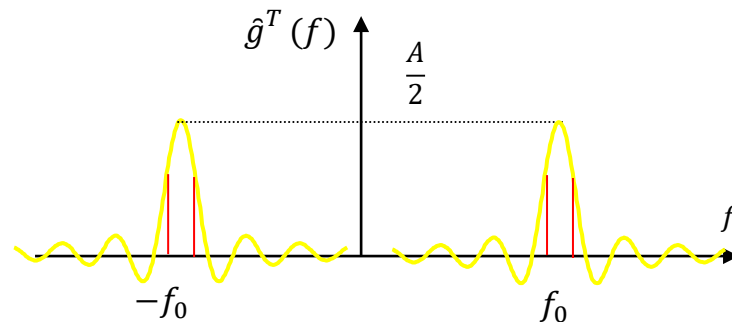
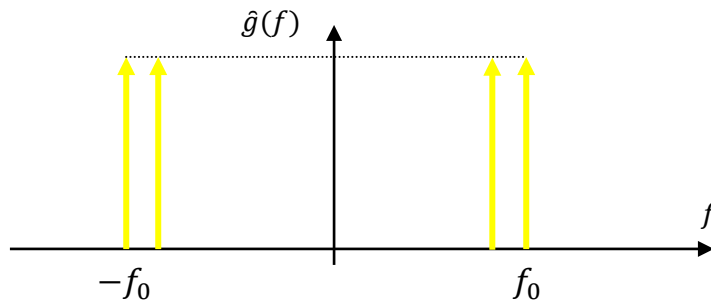
$$\hat{g}_0(f_0) = \frac{TA}{2} \neq \hat{g}(f_0) \quad \text{car} \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Pi\left(\frac{x}{T}\right) dx = T \neq 1$$

En pratique on choisit des fonctions de troncature normées

2. La convolution fréquentielle a un effet de lissage

➡ Perte en finesse d'analyse

➡ Résolution spectrale



3. La troncature génère des oscillations spectrale autour de $\pm f_0$

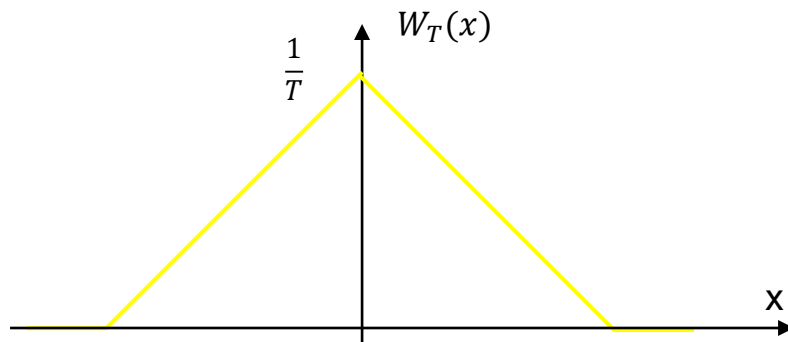
C'est le phénomène de GIBBS

Il est caractérisé par le rapport du pic central au premier pic secondaire

Afin de limiter le phénomène de Gibbs, il existe d'autres types de fonctions de troncature (« fenêtre ») que la fonction porte.

8.1.2. La fenêtre triangulaire

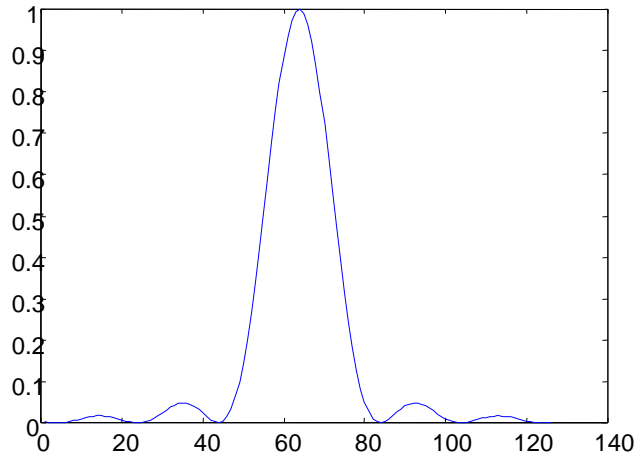
$$W_T(x) = \begin{cases} \frac{-2}{T}|x| + \frac{1}{T} & \text{pour } |x| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



On peut écrire :

$$W_T(x) = \left[\Pi\left(\frac{2x}{T}\right) \otimes \Pi\left(\frac{2x}{T}\right) \right] \frac{4}{T^2}$$

$$\hat{W}_T(f) = \left(\frac{T \sin\left(\frac{\pi f T}{2}\right)}{\frac{\pi f T}{2}} \cdot \frac{T \sin\left(\frac{\pi f T}{2}\right)}{\frac{\pi f T}{2}} \right) = \frac{4}{T^2} \frac{\left[\sin\left(\frac{\pi f T}{2}\right) \right]^2}{\left(\frac{\pi f T}{2}\right)^2}$$



La largeur du pic central est de $4/T$, deux fois plus importante que pour la fonction porte, en revanche l'amplitude relative du premier lobe secondaire à baissée.

$$\frac{\hat{W}_T(0)}{\hat{W}_T\left(\frac{3}{T}\right)} = 22,2$$

$$\frac{\mathcal{F}\left(\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{x}{T}\right)\right)_{f=0}}{\mathcal{F}\left(\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{x}{T}\right)\right)_{f=\frac{3}{2T}}} = 4,71$$

8.1.3. Les fenêtres polynomiales

$$W_n(x) = \left[\Pi\left(\frac{2x}{T}\right) \otimes \dots \otimes \Pi\left(\frac{2x}{T}\right) \right] \left(\frac{2}{T}\right)^n$$

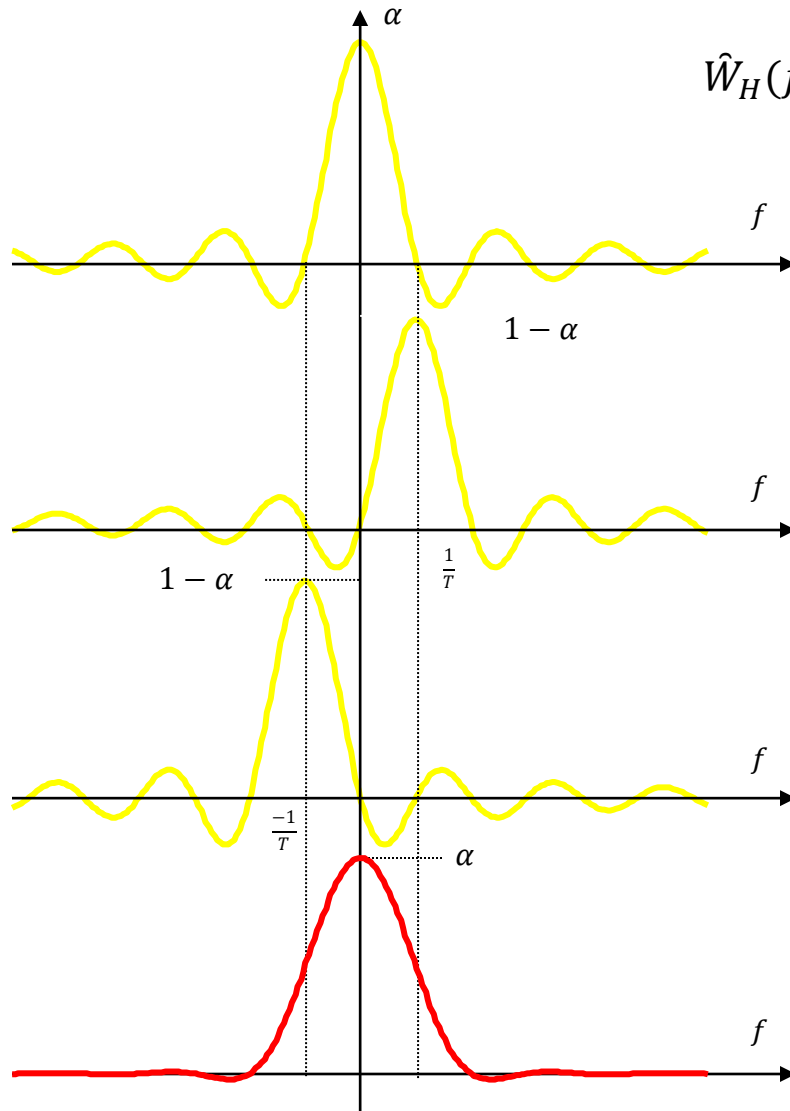
$$\hat{W}_n(f) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi f T}{n}\right)}{\frac{\pi f T}{n}} \right)^n$$

- la largeur du pic central est de $2n/T$,
- l'amplitude relative du premier lobe secondaire est :

$$\frac{\hat{W}_n(0)}{\hat{W}_n\left(\frac{3n}{T}\right)} = \left(\frac{3\pi}{n}\right)^n$$

8.1.4. La fenêtre de Hamming

Somme de 3 fonctions porte retardées en fréquence de $-1/T$, 0 , $1/T$



$$\hat{W}_H(f) = \alpha \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} +$$

$$\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \left[\frac{\sin(\pi T(f - 1/T))}{\pi T(f - 1/T)} + \frac{\sin(\pi T(f + 1/T))}{\pi T(f + 1/T)} \right]$$

$$W_H(x) = \frac{\alpha}{T} \cdot \Pi\left(\frac{x}{T}\right) + (1-\alpha) \Pi\left(\frac{x}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$$

$\alpha = 0,5$ → fenêtre de Hanning

$\alpha = 0,54$ → fenêtre de Hamming

Fenêtre de Hanning

$$W_H(x) = \frac{1}{2T} \cdot \Pi\left(\frac{x}{T}\right) + \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\right]$$

$$\hat{W}_H(f) = \frac{1}{1 - 4f^2 T^2} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

- la largeur du pic central est de $2/T$,
- l'amplitude relative du premier lobe secondaire est de : 188

Fenêtre de Hamming

Premier lobe plus grand mais atténuation plus importante des lobes secondaires.

8.1.5. La fenêtre de Blackman

Généralisation de la technique de Hamming à M répliques de la fenêtre rectangulaire

$$\hat{W}_B(f) = \alpha_0 \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} + \sum_{l=1}^L \alpha_l \cdot \frac{\sin\left(\pi T\left(f - \frac{l}{T}\right)\right)}{\pi T\left(f - \frac{l}{T}\right)} + \sum_{l=1}^L \alpha_l \cdot \frac{\sin\left(\pi T\left(f + \frac{l}{T}\right)\right)}{\pi T\left(f + \frac{l}{T}\right)}$$

$$\text{avec } \alpha_0 + 2 \sum_{l=1}^L \alpha_l = 1$$

8.1.6. La fenêtre de Kaiser

$$\hat{W}_K(f) = \frac{I_0\left[\beta \sqrt{T^2 - 4x^2}\right]}{I_0(\beta T)}$$

I_0 : fonction de Bessel modifiée de première espèce

β : compromis entre la largeur du pic central et l'atténuation des lobes secondaires

8.1.1. Effet de la troncature d'un signal échantillonné

Cumul des effets de l'échantillonnage et de la troncature sur un signal continu.

Soit $g(x)$ un signal continu

Soit $g_e(x)=g(k)$ le signal $g(x)$ échantillonné et tronqué par une fenêtre $W(x)$

T_1 : période d'échantillonnage

$$g_e(x) = [g(x) \cdot W(x)] \frac{1}{T_1} PE_D \left(\frac{x}{T_1} \right)$$

$$g_e(x) = g(x) \left[W(x) \frac{1}{T_1} PE_D \left(\frac{x}{T_1} \right) \right]$$



Il suffit d'échantillonner les fenêtres du cas continu pour obtenir la version discrète