

Chapitre 12

Synthèse des filtres numériques sous la forme RIF

1. Technique par échantillonnage en fréquence (1)

Echantillonnage en fréquence

On spécifie une réponse fréquentielle $|H_d(e^{j2\pi f_k})|$ idéale (spectre) définie en N points.

On cherche un filtre $H(z)$ de R.I. $h(n)$ dont le spectre passe par les points spécifiés.

Soient les points spécifiés $\hat{H}(k) = |H_d(e^{j2\pi f_k})|$

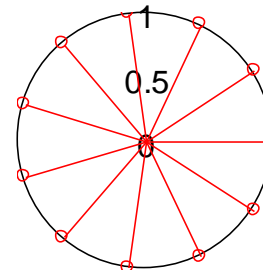
On a : $\hat{H}(0), \hat{H}(1), \dots, \hat{H}(N-1)$

Echelle des fréquences :

L'échelle des fréquences est considérée sur $[0, 1]$

Les f_k sont équirépartis sur le cercle unité.

soit : $\omega \in [0, 2\pi]$



On a : $f_k \in \left[0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\right]$

1. Technique par échantillonnage en fréquence (2)

Par définition de la TF discrétisée on a :

$$\hat{H}(k) = \sum_{r=0}^{N-1} h(r) e^{-j2\pi f_k r} = \sum_{r=0}^{N-1} h(r) e^{-j2\pi \frac{k}{N} r}$$

On en déduit la séquence $\{h_r\}$ par transformation inverse.

$$h(r) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{H}(k) e^{+j2\pi \frac{k}{N} r}$$

La fonction $H(z)$ est donc définie également sur N points :

$$H(z) = \sum_{r=0}^{N-1} h_r z^{-r}$$

1. Technique par échantillonnage en fréquence (3)

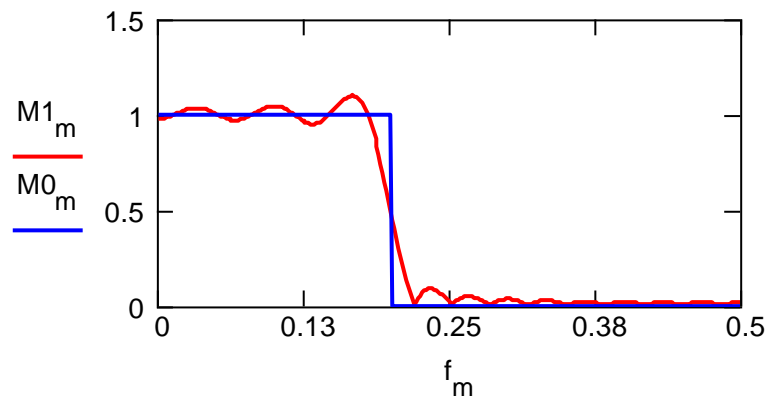
Inconvénient de la méthode :

Le spectre de la fonction obtenue passe effectivement par les points désirés.

Cependant la dérivée au point n'est pas maîtrisée et le spectre peut osciller entre les points.

Ce phénomène est d'autant plus marqué si le filtre désiré tend vers le filtre idéal (effet Gibbs).

Cette méthode ne doit pas être utilisée telle quelle.



2. Technique par fenêtrage et troncature (1)

Techniques par fenêtrage

Hypothèses :

On spécifie une réponse fréquentielle $|H_d(e^{j2\pi f})|$ idéale (spectre).

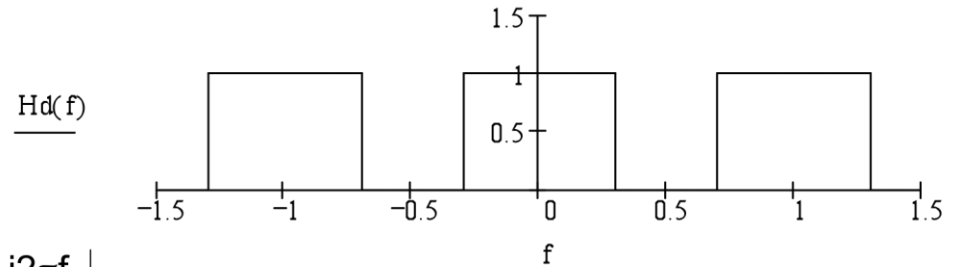
Par définition, cette fonction est continue et périodique.

$H_d(e^{j2\pi f})$ admet donc un développement en série de Fourier tel que :

$$H_d(e^{j2\pi f}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j2\pi f n} \quad \text{série de Fourier}$$

On en déduit que :

$$h(n) \begin{cases} \text{coefficients de la série de Fourier : suite infinie} \\ \text{coefficients de la suite } \{h_n\} : & \text{type R.I.I.} \end{cases}$$



2. Technique par fenêtrage et troncature (2)

Développement en série de Fourier de $H_d(e^{j2\pi f})$:

$$H_d(e^{j2\pi f}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j2\pi f n}$$

Si $H_d(e^{j2\pi f})$ est connu analytiquement :

On peut calculer $h(n)$ tel que :

$$h(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} H_d(e^{j2\pi f}) e^{j2\pi f n} df$$

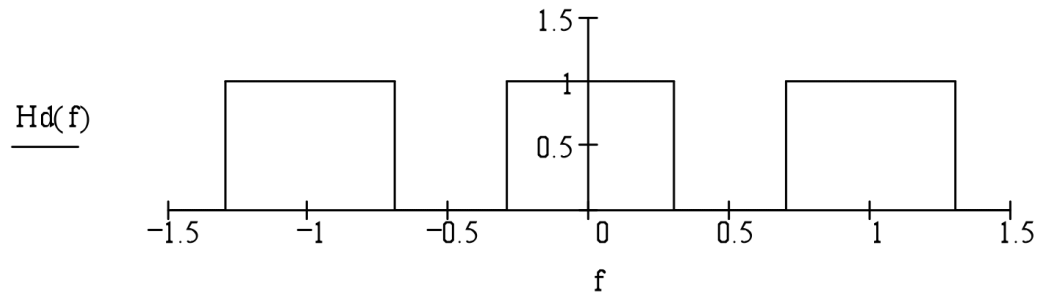
Si $H_d(e^{j2\pi f})$ est connu numériquement :

On utilise la technique de l'échantillonnage fréquentiel sur N points $(0, \dots, N-1)$ équirépartis.

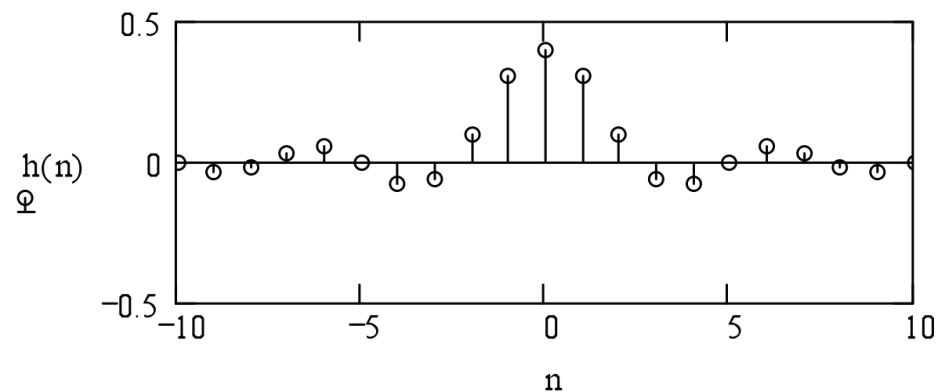
$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(e^{j2\pi \frac{k}{N}}) e^{+j2\pi \frac{k}{N} n}$$

2. Technique par fenêtrage et troncature (suite)

Exemple pour un filtre idéal passe-bas avec $f_c = 0.2$



$$h_d(n) = \int_{-f_c}^{+f_c} e^{j \cdot 2\pi \cdot n \cdot f} df = 2f_c \cdot \frac{\sin(\pi \cdot 2f_c \cdot n)}{\pi \cdot 2f_c \cdot n}$$



2. Technique par fenêtrage et troncature (3)

Passage R.I.I à R.I.F. par troncature :

Troncature de $h(n)$ à N points $(0, \dots, N-1)$ par fenêtrage tel que :

Soit : $\{h_n\}_{tr} = \{h_n\} \cdot \{w_n\}$

Avec : $\{w_n\} = \begin{cases} \text{fonction de régularisation : } n \leq N-1 \text{ (ou } |n| \leq \frac{N-1}{2}) \\ 0 & n > N-1 \text{ (ou } |n| > \frac{N-1}{2}) \end{cases}$

Fonctions $\{w_n\}$ classiques : Hanning, Hamming, Blackman, Kaiser, etc...
Eviter la fenêtre rectangulaire (effet Gibbs).

Exemple :

Hanning
$$W(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & |n| > \frac{N-1}{2} \end{cases}$$

Remarques :

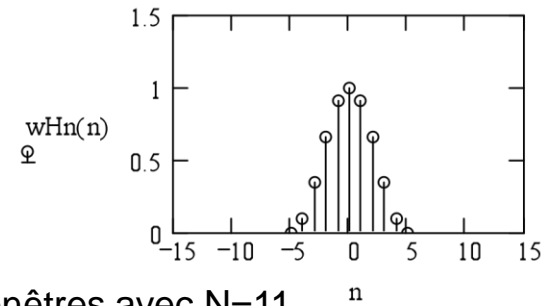
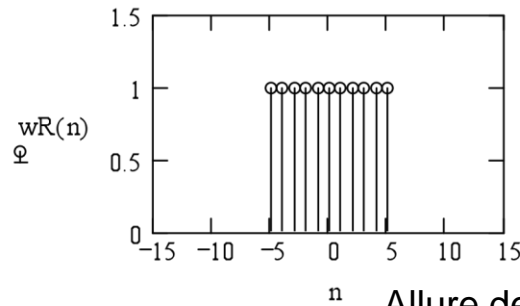
La transmittance $H_{tr}(z)$ obtenue au final est un polynôme d'ordre N .

Ce procédé revient à filtrer la réponse fréquentielle $H_d(z)$ par convolution :

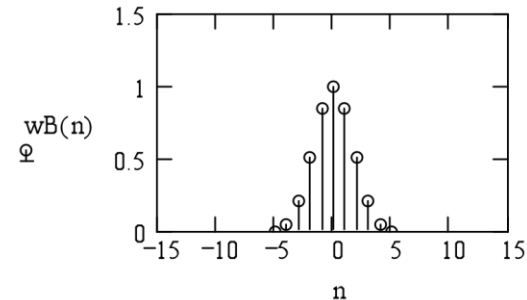
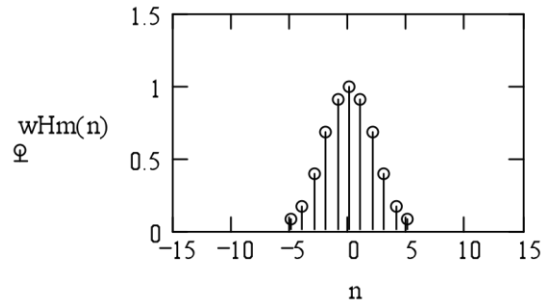
$$H_{tr}(z) = H_d(z) * W(z)$$

2. Technique par fenêtrage. Types de fenêtre

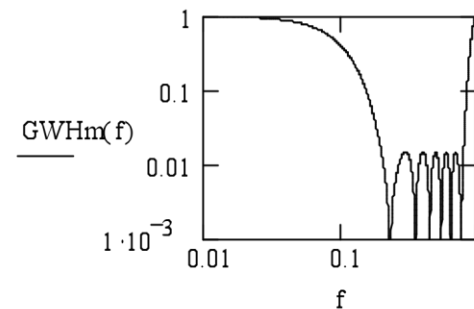
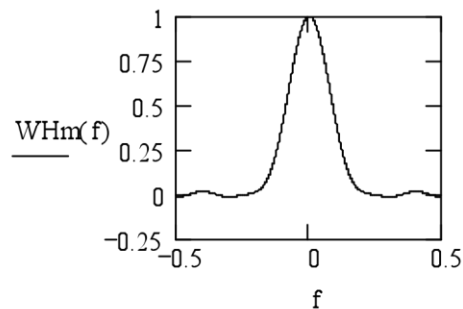
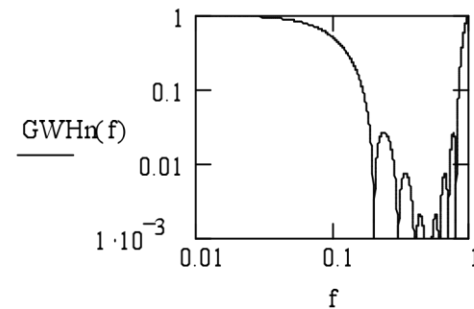
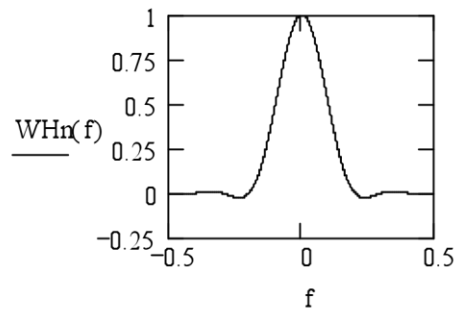
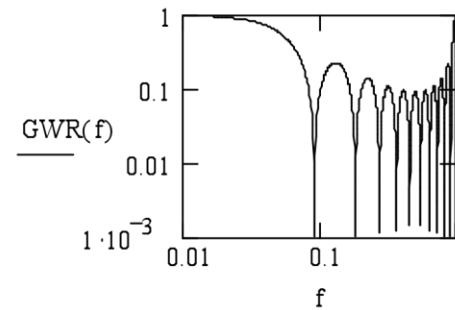
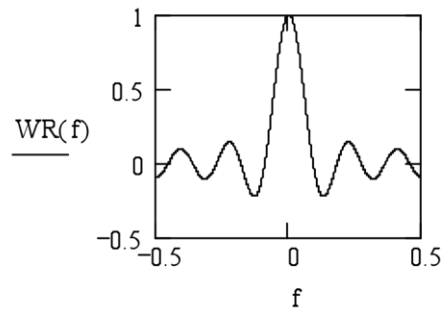
Fenêtre	Définition
Rectangulaire (ou porte)	$w_R = \begin{cases} 1 & n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
Hanning	$w_{Hn} = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{N-1}\right) & n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
Hamming	$w_{Hm} = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{N-1}\right) & n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
Blackman	$w_B = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{N-1}\right) + 0.08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi \cdot n}{N-1}\right) & n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



Allure des fenêtres avec $N=11$

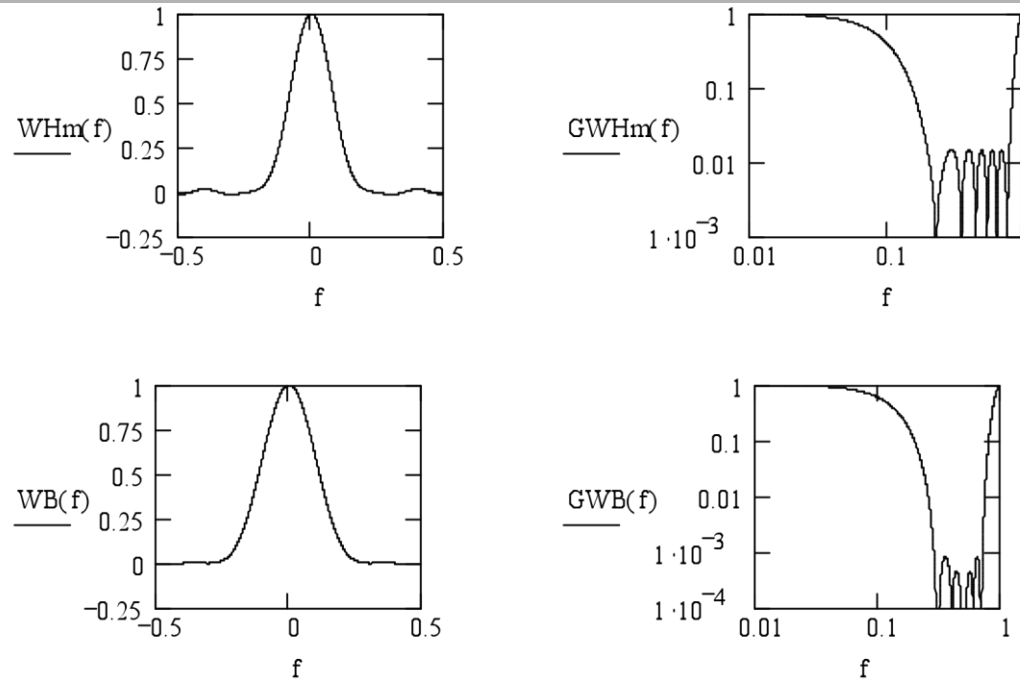


2. Technique par fenêtrage. Types de fenêtre



Comparaison des spectres des fenêtres rectangulaire, Hanning et Hamming
($N=11$)

2. Technique par fenêtrage. Types de fenêtre



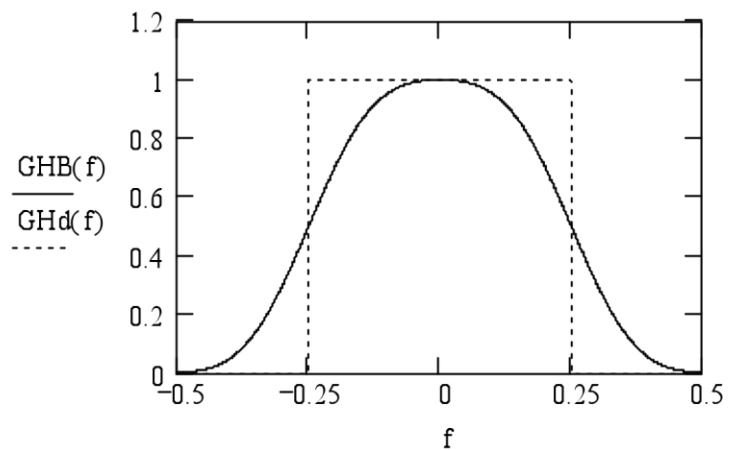
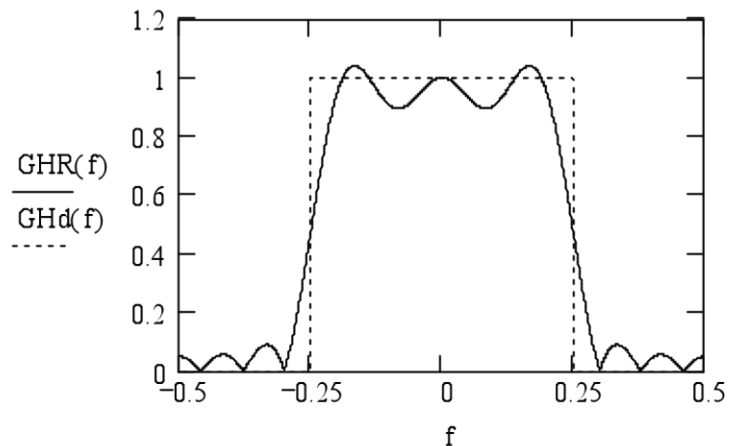
Comparaison des spectres des fenêtres de Hamming et de Blackman
(N=11)

2. Technique par fenêtrage. Résultats.

Spectres normalisés de la réponse fréquentielle d'un filtre RIF :

$N=11$ et $f_c=0.25$. Le filtre idéal GHd apparaît en pointillé.

Résultat avec fenêtrage rectangulaire (en haut) et avec Blackman (en bas)



Technique par fenêtrage. Résultats (suite)

N=11 et $f_c=0,25$

Résultats obtenus avec fenêtrage rectangulaire :

Filtre anticausal

$$\{h_{Rn}\} = \{0.064; 0; -0.106; 0; 0.318; \underline{0.5}; 0.318; 0; -0.106; 0; 0.064\}$$

$$H_R(z) = 0.064 \cdot z^5 - 0.106 \cdot z^3 + 0.318 \cdot z + 0.5 + 0.318 \cdot z^{-1} - 0.106 \cdot z^{-3} + 0.064 \cdot z^{-5}$$

Filtre causal :

$$\{h_{Rn}^c\} = \{\underline{0.064}; 0; -0.106; 0; 0.318; 0.5; 0.318; 0; -0.106; 0; 0.064\},$$

$$H^c_R(z) = 0.064 - 0.106 \cdot z^{-2} + 0.318 \cdot z^{-4} + 0.5 \cdot z^{-5} + 0.318 \cdot z^{-6} - 0.106 \cdot z^{-8} + 0.064 \cdot z^{-10}$$

Résultats obtenus avec fenêtrage de Blackman :

Filtre anticausal :

$$\{h_{Bn}\} = \{0; 0; -0.021; 0; 0.27; \underline{0.5}; 0.27; 0; -0.021; 0; 0\},$$

Des valeurs nulles sont obtenues aux extrémités de la séquence, ce qui équivaut à travailler ici avec N= 7.

$$H_B(z) = -0.021 \cdot z^3 + 0.27 \cdot z + 0.5 + 0.27 \cdot z^{-1} - 0.021 \cdot z^{-3}$$

Filtre causal :

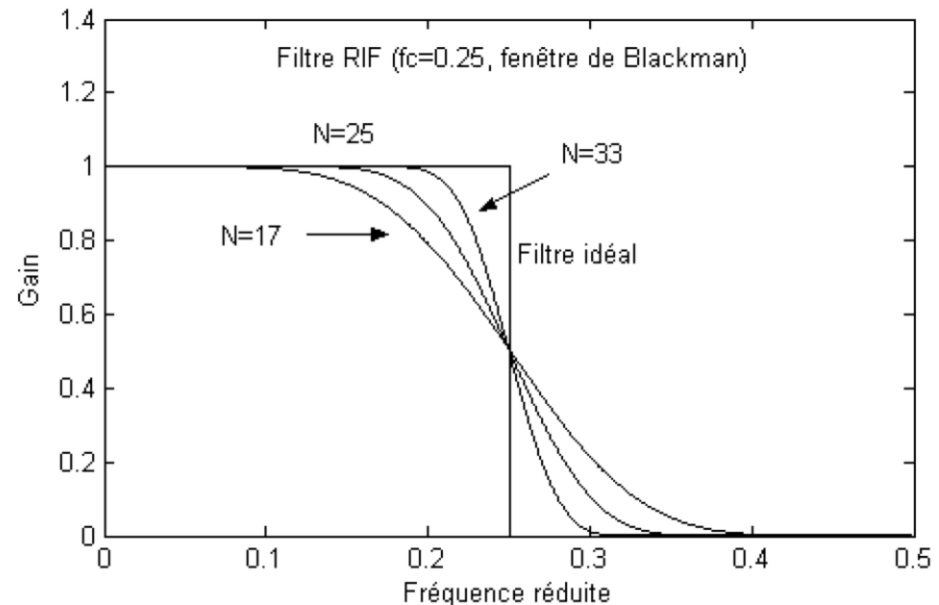
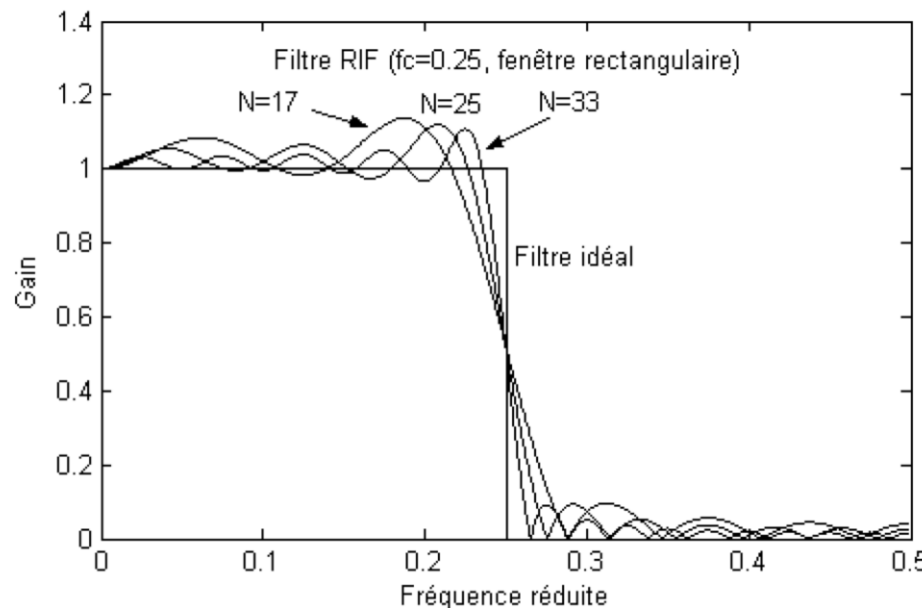
$$\{h_{Bn}^c\} = \{\underline{-0.021}; 0; 0.27; 0.5; 0.27; 0; -0.021\},$$

$$H^c_B(z) = -0.021 + 0.27 \cdot z^{-2} + 0.5 \cdot z^{-3} + 0.27 \cdot z^{-4} - 0.021 \cdot z^{-6}$$

2. Technique par fenêtrage. Résultats (suite)

Influence de N sur le filtrage

Les deux courbes ci-près montrent l'influence du nombre de points N sur la réponse fréquentielle obtenue par la méthode du fenêtrage à f_c constant. Il apparaît clairement que la qualité du filtrage augmente avec N.



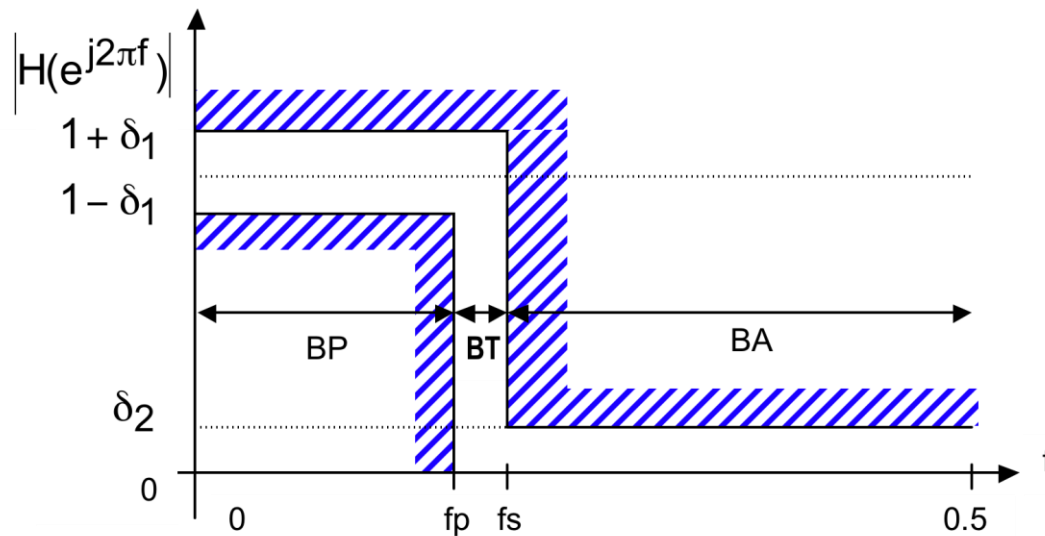
3. Filtrage à taux d'ondulation constant (1)

Filtrage à taux d'ondulation constant (equiripple)

Approche optimisation minimax :

On définit un gabarit fréquentiel dans lequel doit passer la réponse fréquentielle d'un filtre R.I.F.

On définit : une bande passante : **BP** $[0, f_p]$
une bande d'atténuation **BA** $[f_s, 0.5]$
une bande de transition **BT** $]f_p, f_s[$



3. Filtrage à taux d'ondulation constant (2)

Soit $D(e^{j2\pi f})$ le filtre idéal (gain =1 en BP et 0 en BA).

Soit $H(e^{j2\pi f})$ le filtre à réaliser avec les contraintes suivantes :

- Erreur maximale en BP : $\pm \delta_1$ pour $f \in [0, f_p]$
- Erreur maximale en BA : $|\pm \delta_2|$ pour $f \in [f_s, 0.5]$
- Comportement libre dans BT pour $f \in]f_p, f_s[$

Choix de $H(e^{j2\pi f})$: fonction réelle à symétrie paire.

Soit un filtre F.I.R de longueur $2N+1$ (avec N impair) :

$$H(z) = \sum_{n=-N}^{+N} h(n)z^{-n} = h(0) + \sum_{n=1}^N h(n)(z^n + z^{-n}) \quad \text{avec} \quad H(e^{j2\pi f}) = h(0) + \sum_{n=1}^N 2h(n)\cos(2\pi fn)$$

(anticausal)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{2N} h(n)z^{-n} \quad \text{avec} \quad H(e^{j2\pi f}) = e^{-j\omega N} \left[h(N) + \sum_{n=0}^{N-1} 2h(n)\cos[2\pi f(N-n)] \right]$$

(causal)

3. Filtrage à taux d'ondulation constant (3)

Puisque N est impair, on a :

$$H(e^{j2\pi f}) = \underbrace{A(e^{j2\pi f})}_{\text{réel}} \underbrace{e^{-j2\pi f N}}_{\text{gain}} \underbrace{e^{-j2\pi f N}}_{\text{phase linéaire}}$$

Détermination de $H(e^{j2\pi f})$:

Utilisation d'une fonction de coût telle que :

$$\min_{0 \leq f \leq 0.5} \left| \phi(f_i) \right| = \max \left\{ W(f) \left[D - |H| \right] \right\}$$

On répartit les écarts dans les bandes BP et BA, et pas seulement dans BT.

On cherche le minimum de la fonction coût pour des jeux de solutions f_i qui maximise l'erreur entre D et $|H|$.

$f_i \in \{ f_i(0), f_i(1), \dots, f_i(N) \}$, le calcul se fait avec $N+1$ valeurs.

Avec généralement : $f_i(0) = 0$ et $f_i(N) = 0.5$

3. Filtrage à taux d'ondulation constant (4)

W(f) : fonction de pondération des erreurs : choisie par l'utilisateur.

Exemple :
$$W(f) = \begin{cases} 1 & f \in \text{BP} \\ 0.5 & f \in \text{BT} \\ 1 & f \in \text{BA} \end{cases}$$

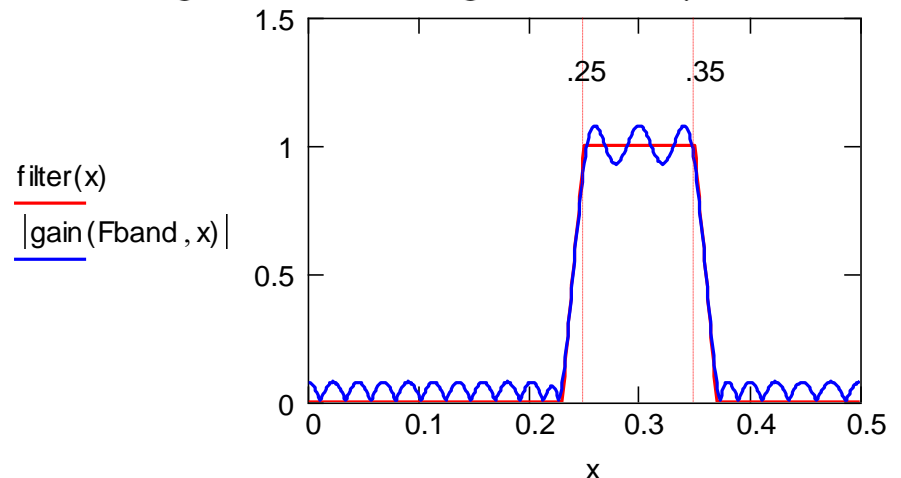
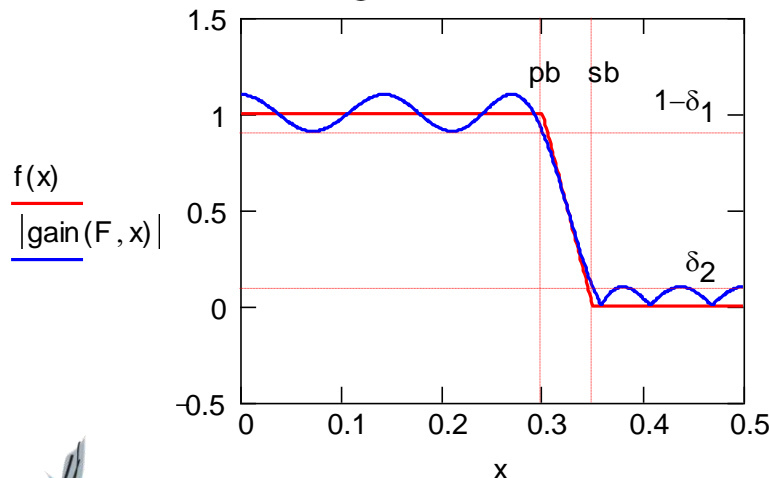
CNS pour avoir une solution unique et optimale :

Fréquence : $\exists N + 1$ points $f(k)$, $f(0) < f(1) < \dots < f(N)$

Critère : $\phi(f(k)) = -\phi(f(k + 1))$ avec $|\phi(f(k))| = \max_f \{W(f) |D - |H||\}$

(principe d'alternance)

Résolution : algorithme de Mac-Clellan (utilisant l'algorithme d'échange de Remez)



4. Avantages et inconvénients des filtres RII et RIF

Structure mathématique :

La stabilité de la transmittance, la récursivité de l'algorithme de filtrage, le type de déphasage sont des propriétés propres à chaque type de filtre.

Filtre	Stabilité	Récursivité	Déphasage
RII	Conditionnée aux pôles	Type ARMA : récursivité sur les sorties et moyenne glissante sur les entrées (cas général)	Variation non linéaire (arctangente).
RIF	Toujours stable	Type MA : pas de récursivité, moyenne glissante sur les entrées.	La phase est linéaire.

Contraintes d'intégration :

Le nombre de coefficients, le nombre d'opérations nécessaires, le type de déphasage et l'importance du retard ainsi engendré, la sensibilité aux erreurs de quantification sont des points importants à considérer sur l'implantation d'un filtre numérique sur calculateur.

Filtre	Nombre de coefficients	Nombre d'opérations	Sensibilité aux erreurs de quantification
RII d°num=M d°den=N	(M+1)+(N+1) De l'ordre de la dizaine et moins	(N+M) multiplications dans R (N+M) additions dans R 1 division dans R	Non négligeable du fait des cumuls par récursivité. Peut déstabiliser.
RIF degré N	N+1 Plusieurs dizaines à plusieurs centaines	N multiplications dans R N additions dans R	Peu sensible (pas de récursivité).