Exercice 5

On veut réaliser un filtre numérique causal passe-bande. Le module doit être nul aux extrémités du spectre et à l'origine. On définit les valeurs suivantes :

$$z_1 = 0.5e^{j\theta_1}$$

$$\bar{z}_1 = 0.5e^{-j\theta_1} \ avec \ \theta_1 = \frac{k\pi}{2}; \ k \in N$$

1. On désire réaliser, avec au minimum le couple de valeurs précédentes comme pôles ou zéros, un filtre RII présentant un maximum aux alentours de f = 0,25. Choisir et déterminer complètement la transmittance en z.

2. Tracer approximativement l'allure du spectre obtenu.

3. On veut une réalisation semblable à la précédente mais sous forme RIF. Proposer un réglage pour θ_1 qui maximise le gain et exprimer la transmittance en z.

4. Tracer l'allure du spectre

Solutions

1. Réalisation sous forme RII : H(z) doit être une fraction rationnelle irréductible.
Les caractéristiques imposées impliquent :

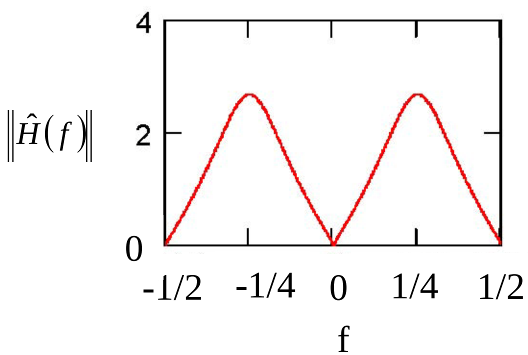
$$\left\|\hat{H}\left(e^{2\pi jf}\right)\right\|_{f=0} = 0 \Rightarrow existence\ d'un\ zéro\ z_a = 1$$

$$\left\|\hat{H}\left(e^{2\pi jf}\right)\right\|_{f=\pm\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow existence\ d'un\ zéro\ z_b = -1$$

$$\left\|\hat{H}\left(e^{2\pi jf}\right)\right\|_{f=\pm\frac{1}{4}} \max \Rightarrow existence\ de\ 2\ \ pôles\ p_a = \rho e^{\frac{j\pi}{2}}\ ; p_b = \overline{p}_b = \rho e^{-\frac{j\pi}{2}}$$

On choisit $\rho = 0.5\ (enoncé)$

D'où $H(z) = \dfrac{(z-z_a)(z-z_b)}{(z-p_a)(z-p_b)} = \dfrac{(z-1)(z+1)}{\left(z-0.5e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\left(z-0.5e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)} = \dfrac{z^2-1}{(z-0.5j)(z+0.5j)} = \dfrac{z^2-1}{(z^2+0.25)}$



Solutions

2. Réalisation sous forme RIF : H(z) doit être un polynome.
D'après l'énoncé, z_1 et $\overline{z}_1$ doivent apparaître dans la transmittance sous forme de zéros et bien sûr pour assurer :

$$\left\| \hat{H}\left(e^{2\pi jf}\right) \right\|_{f=0} = 0 \ et \ \left\| \hat{H}\left(e^{2\pi jf}\right) \right\|_{f=\pm\frac{1}{2}} = 0$$

Il faut deux autres zéros : $z_a = 1 \ et \ z_b = -1$

Donc H(z) doit être de la forme : $H(z) = (z - z_1)(z - \overline{z}_1)(z - z_a)(z - z_b) = (z - z_1)(z - \overline{z}_1)(z^2 - 1)$

Pour obtenir un gain maximum aux alentours de f = ±1/2, il faut ici que les zéros Z_1 et z_1 conjugué soient le plus possible éloignés de ces valeurs.
Les seules possibilités sont : z1 = +0.5 (k=0) ou z1 = -0.5 (k=2). On a dans ces deux cas :

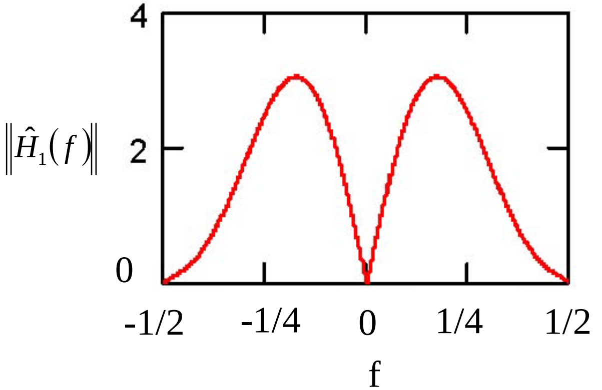
$$H_1(z) = (z + 0.5)^2 (z^2 - 1)$$
$$H_2(z) = (z - 0.5)^2 (z^2 - 1)$$

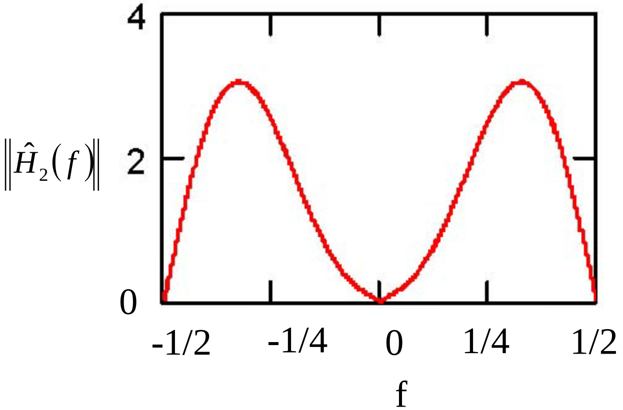
$H_1(z)$ et $H_2(z)$ ne correspondent pas à des réalisations causales. Pour obtenir les versions causales, il ne faut que des termes en z^{-i}, soit multiplier les expressions par z^{-4}

$$H_{1c}(z) = z^{-4}\left[(z + 0.5)^2 (z^2 - 1)\right] = 1 + z^{-1} - 0.75z^{-2} - z^{-3} - 0.25z^{-4}$$
$$H_{2c}(z) = z^{-4}\left[(z - 0.5)^2 (z^2 - 1)\right] = 1 - z^{-1} - 0.75z^{-2} + z^{-3} - 0.25z^{-4}$$

ensem

Solutions





Solutions

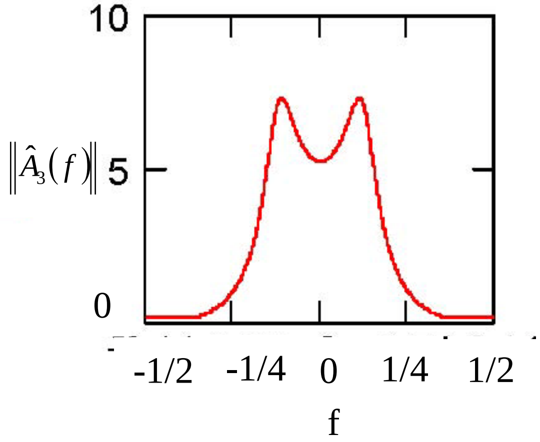
Cas 3

$$A_3(z)=\frac{\left(z-e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z-e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right)}{\left(z-0.75.e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-0.75.e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$

Quand f varie, M parcourt le cercle unité.

$\left|H(e^{j2\pi f})\right|$ varie alors comme : $\dfrac{\prod \text{distances de M aux zéros}}{\prod \text{distances de M aux pôles}}$

Les distances minimales de M aux zéros valent 0,25 pour f=3/8 et -3/8 donc gain minimum pour ces fréquences
Les distances minimales de M aux pôles valent 0 pour f=1/8 et -1/8 donc gain maximum pour ces fréquences



Rappel : Influence des pôles et des zéros sur la réponse fréquentielle

Soit $H(z) = \dfrac{\sum_{j=0}^{Q} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}$ $(N \geq Q)$, on a aussi : $H(z) = \dfrac{b_0}{a_0} z^{N-Q} \dfrac{\prod_{j=1}^{Q}(z - z_j)}{\prod_{i=1}^{N}(z - p_i)}$

z_j : zéros de $H(z)$ et p_i : pôles de $H(z)$

Etude harmonique de H(z) :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0}{a_0} e^{j\omega(N-Q)} \frac{\prod_{j=1}^{Q}(e^{j\omega} - z_j)}{\prod_{i=1}^{N}(e^{j\omega} - p_i)}$$

Spectre : $\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\dfrac{b_0}{a_0}\right| \dfrac{\prod_{j=1}^{Q}\left|(e^{j\omega} - z_j)\right|}{\prod_{i=1}^{N}\left|(e^{j\omega} - p_i)\right|}$

Interprétation géométrique :

Soit M l'affixe de $e^{j\omega}$.
Soient Z_j les affixes des zéros.
Soient P_j les affixes des pôles.

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{\prod_{j=1}^{Q} \left|(MZ_j)\right|}{\prod_{i=1}^{N} \left|(MP_i)\right|}$$

Quand ω varie, M parcourt le cercle unité.

$\left|H(e^{j\omega})\right|$ varie alors comme : $\dfrac{\prod \text{distances de M aux zéros}}{\prod \text{distances de M aux pôles}}$