Chapitre 4
Signaux numériques et convolution

GENERALITES : OBJECTIFS - HYPOTHESES

OBJECTIFS

• Maîtriser le concept de signal numérique et de ce que cela implique
• Savoir travailler dans les « règles de l 'art »
• Savoir mettre en œuvre un filtre numérique répondant à des critères prédéfinis
• Savoir faire une analyse spectrale en numérique

EXEMPLES

• Elaborer un algorithme de filtrage
• Extraire le message utile d 'un signal numérique bruité
• Elaborer la commande d 'un système numérique

HYPOTHESES

• Cadre des opérateurs linéaires invariants par translation / variable n définissant la relation d 'ordre
• Cadre des processus convolutifs (convolution discrète)
• Cadre déterministe

Définitions et Notations

Signal numérique :

• Séquence de nombres (1D) ordonnés suivant la variable n (rang)

$$\{x_n\} = \{\underline{x_0}, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \qquad n \in [N_1, N_2] \quad N_1, N_2 \in \left]-\infty, +\infty\right[$$

$$\{x_n\} = \{\dots, x_{-p}, \dots, x_{-2}, x_{-1}, \underline{x_0}, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

Terme général : x_n ou $x(n)$

• Tableau de nombres (2D) ordonnés suivant les variables n1(ligne) et n2 (colonne)

$$\{x_{n1n2}\} = \left\{\begin{matrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . \; . & . & x_{ij} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{matrix}\right\}$$

Terme général : x_{n1n2} ou $x(n_1, n_2)$

• Une séquence peut être créée entièrement numériquement ou provenir d ’un processus d ’échantillonnage d ’un signal continu à Te constante.

SIGNAUX NUMERIQUES

Signal causal

Séquence de nombres $\{x_n\}$ monolatérale à droite

$$\{x_n\} \quad x_n = 0 \quad n < 0 \qquad \forall n \in Z$$

Exemple : signal dépendant du temps
(relation de cause à effet)

Signal anticausal

Séquence de nombres $\{x_n\}$ monolatérale à gauche

$$\{x_n\} \quad x_n = 0 \quad n \geq 0 \qquad \forall n \in Z$$

ou bilatérale

$$\{x_n\} \qquad \forall n \in Z$$

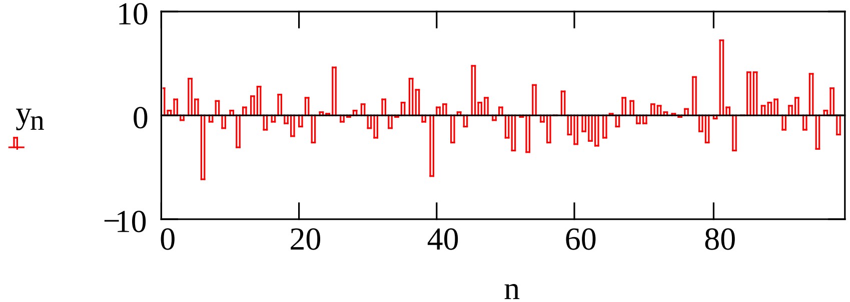
Exemple : signal d'espace, signal image, signal enregistré.

Exemples de séquences numériques

Séquence numérique causale

$\{x1_n\} = \{\underline{1},2,2,3,5,2,....\}$

$\{x2_n\} = \{\underline{0},0,1,3,5,2,....\}$



Séquence numérique anticausale

$\{x3_n\} = \{....,1,3,5,2,1,\underline{0},0,0.........\}$

$\{x4_n\} = \{....,1,3,5,2,1,0,0,\underline{0}.........\}$

$\{x5_n\} = \{....,1,3,5,2,\underline{1},5,4,8,3,......\}$

La valeur soulignée correspond au rang n=0

$$X(n_1,n_2) = \left\{ \begin{matrix} 79 & 90 & 79 & 98 & 176 & 88 \\ 67 & 101 & 130 & 102 & 174 & 84 \\ 128 & 190 & 201 & 169 & 196 & 112 \\ 159 & 229 & 286 & 229 & 173 & 155 \\ 108 & 124 & 137 & 129 & 92 & 104 \end{matrix} \right\}$$

Signaux numériques classiques

$$u(n) := \begin{cases} 1 & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

Signaux numériques élémentaires causaux :

Echelon unité u(n)

Impulsion δ(n)

Exponentielle α(n)

Rampe r(n)

Sinusoïde s(n)

$$\delta(n) := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\alpha(n) := a^n u(n)$$

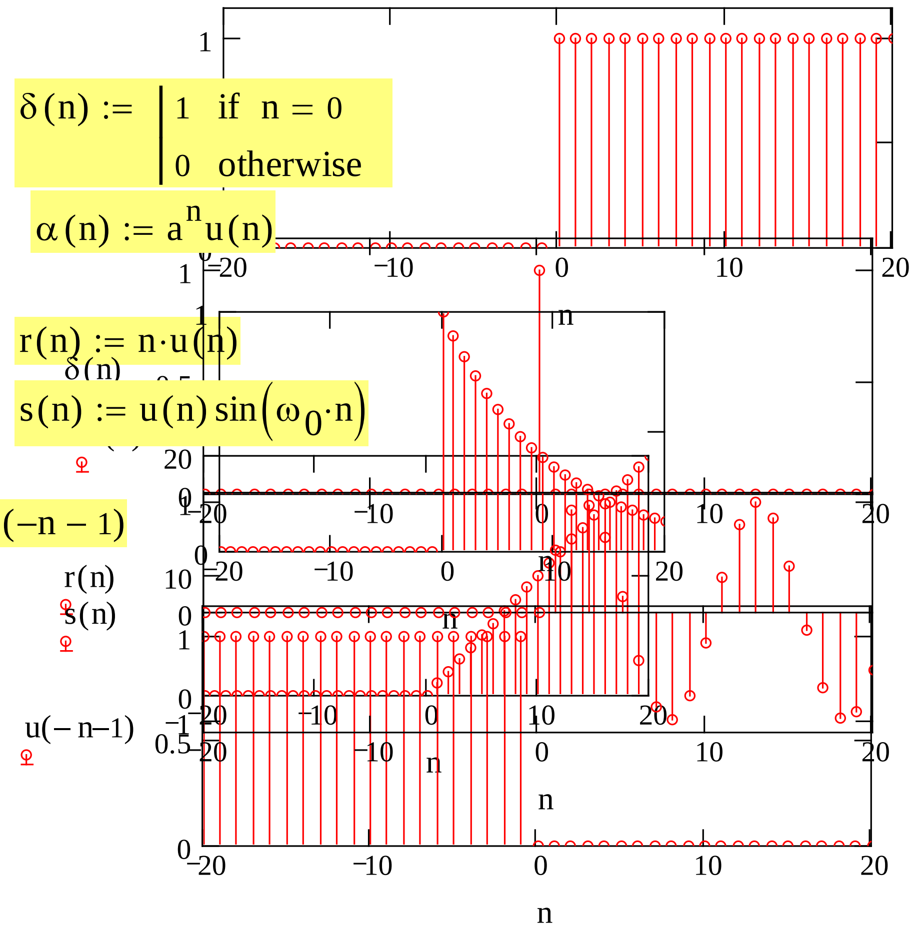
$$r(n) := n \cdot u(n)$$

$$s(n) := u(n)\sin(\omega_0 \cdot n)$$

Signal numérique élémentaire anticausal :

$$u(-n-1)$$

Echelon à gauche u(-n-1)



Opérations élémentaires sur les signaux numériques

Addition : $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$

Produit : $\{x_n\} \times \{y_n\} = \{x_n \times y_n\}$

Retard : $\{x_n\}_{-p} = \{x_{n-p}\} \rightarrow \; x(n-p)$

Retournement : $\{x_n\} \rightarrow \{x_{-n}\}$

Décimation d 'ordre M

$$\{x_n\} \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow \{y_n\} \qquad y(n) = x(Mn)$$

Interpolation d 'ordre M

$$\{x_n\} \longrightarrow \boxed{\uparrow M} \longrightarrow \{y_n\} \qquad y(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{M}) \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque importante :

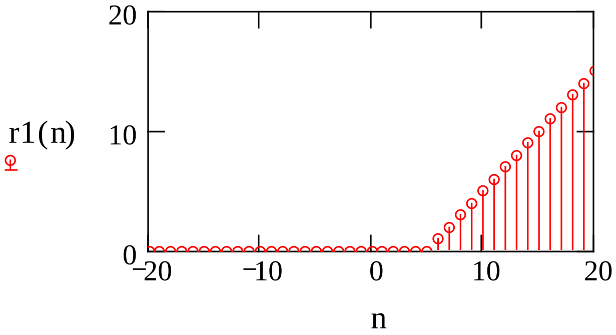
La décimation doit être accompagnée d 'un pré-filtrage passe-bas

L 'interpolation doit être accompagnée d 'un post-filtrage passe-bas

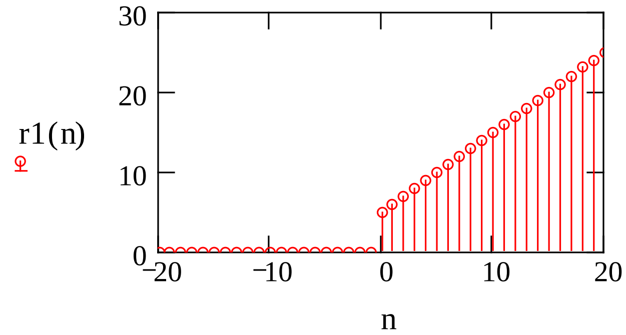
Exemples de décalage

Signaux causaux

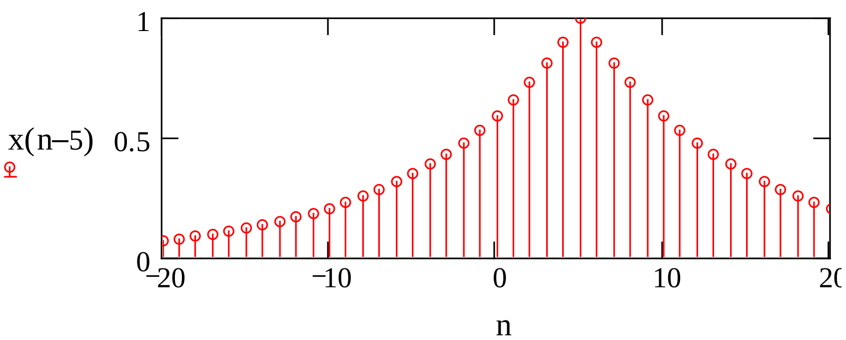
$r1(n) := r(n-5)\cdot u(n)$

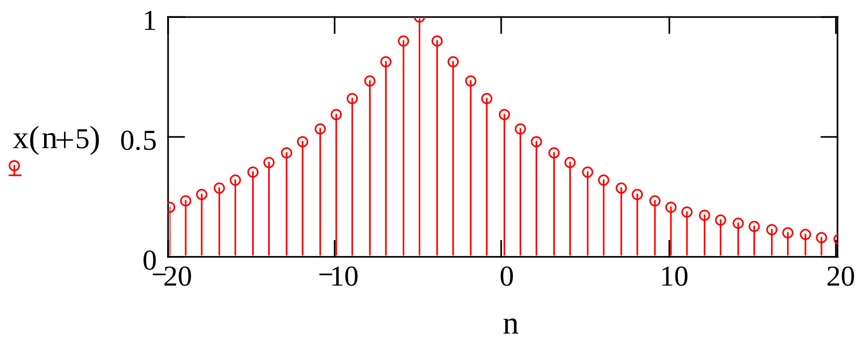


$r1(n) := r(n+5)\cdot u(n)$



Signaux anticausaux





Séparation d'un signal bilatéral

Séparation de la partie causale ou anticausale d'un signal bilatéral

Soit x(n) un signal bilatéral.

$a := 0.9$

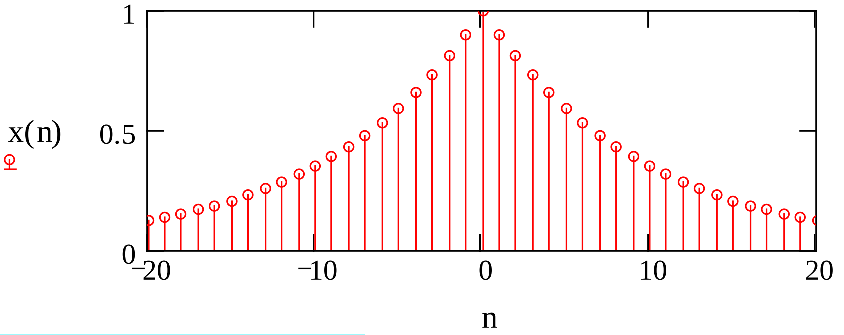
$x(n) := a^{|n|}$

On peut écrire :

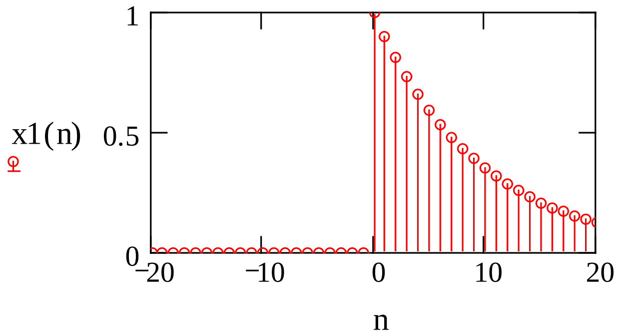
$x1(n) := x(n) \cdot u(n)$ partie causale

$x2(n) := x(n) \cdot u(-n-1)$ partie anticausale

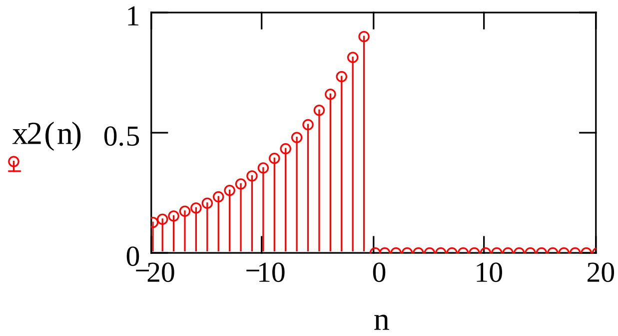
$x(n) := x1(n) + x2(n)$



$x1(n) := x(n) \cdot u(n)$



$x2(n) := x(n) \cdot u(-n-1)$

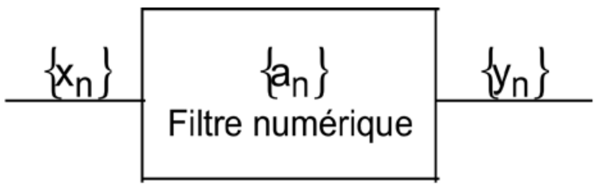


Traitement par filtrage numérique linéaire : convolution

FILTRAGE NUMERIQUE LINEAIRE

Soit un signal d'entrée $\{x_n\}$.

Soit un filtre numérique caractérisé par sa séquence $\{a_n\}$.



$\{y_n\} = \{a_n\} * \{x_n\}$ convolution discrète

$$y(n) = \sum_i a(i)x(n-i) \qquad y(n) = \sum_i a(n-i)x(i)$$

Par définition $\{a_n\}$ est la réponse impulsionnelle (RI) du filtre numérique.

Si $\{a_n\}$ comporte un nombre de termes fini, on parle de R.I.F.

Si $\{a_n\}$ comporte un nombre de termes infini, on parle de R.I.I.

Exemple :

$\{a_n\} = \frac{1}{3}\{1,\ \underline{1},\ 1\}$ filtre passe-bas R.I.F.

$\{b_n\} = \{1,\ 2,\ \underline{0},\ -2,\ -1\}$ filtre passe-haut (dérivateur) R.I.F.

Convolution discrète

<u>Décomposition suivant une base de suite :</u>

Soient la suite d'entrée x_i et la suite de sortie y_i.

Soit la base canonique de suites ξ_i telle que $\xi_i(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = i \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$

On a $\xi_i(n) = \xi_0(n-i)$ (propriété de translation)

On peut écrire : $x = \sum_i \xi_i x(i)$ soit encore $x(n) = \sum_i \xi_i(n)\, x(i)$

<u>Réponse impulsionnelle du filtre :</u>

Soit a_i la sortie correspondant à une entrée ξ_i,

par linéarité on a : $\xi_i \rightarrow a_i$ et $\xi_i x(i) \rightarrow a_i x(i)$

D'où : $x = \sum_i \xi_i x(i) \rightarrow y = \sum_i a_i x(i)$

Le terme général de la sortie s'écrit donc : $y(n) = \sum_i a_i(n) x(i)$

Convolution discrète (suite)

Expression de la convolution discrète :

On a : $y(n) = \sum_i a_i(n)x(i)$

Propriété de décalage

$\xi_i(n) = \xi_0(n-i)$ donc $a_i(n) = a_0(n-i) = a(n-i)$

D'où l'expression de la convolution discrète de $\{x_n\}$ par $\{a_n\}$:

$\{y_n\} = \{a_n\} * \{x_n\}$ avec $y(n) = \sum_i a(n-i)x(i)$

par symétrie on a aussi : $y(n) = \sum_i a(i)x(n-i)$

Pour les signaux causaux : $i \in [0, +\infty[$

Pour les signaux anticausaux : $i \in]-\infty, +\infty[$

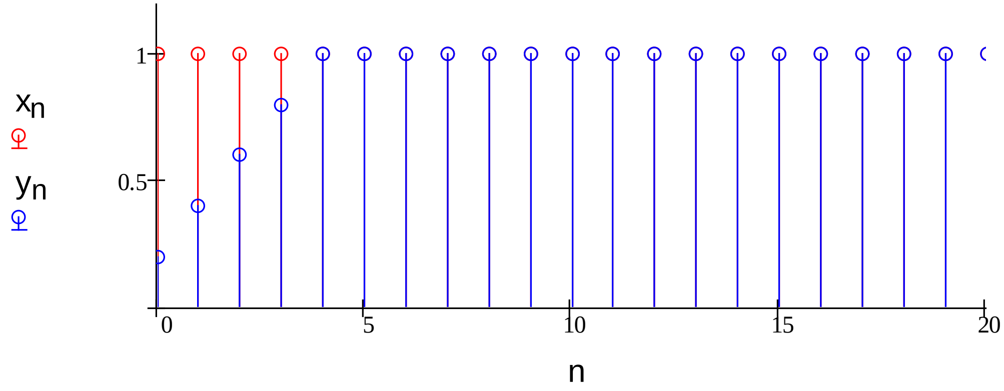
Exemple de traitement par convolution

$$\{a_n\} = \frac{1}{5}\{\underline{1}, 1, 1, 1, 1\}$$

$x(n) = u(n)$ échelon

Calcul direct en appliquant la définition :

$$y(n) = \sum_i a(n-i)x(i)$$



1. $\{b_i\} = \{1, 2, \underline{0}, -2, -1\} \xrightarrow{\text{Retournement}} \{b_{-i}\} = \{-1, -2, \underline{0}, 2, 1\}$

2. $\{b_{-i}\} \xrightarrow{\text{Décalage au rang } n} \{b_{-(i-n)}\} = \{b_{n-i}\}$

3. Somme des produits des termes de rang i.