

Chapitre 11

Synthèse des filtres numériques

Problème à résoudre :

On cherche une transmittance $H(z)$ particulière, ou une réponse impulsionnelle $h(n)$, qui possède des caractéristiques respectant des spécifications énoncées en termes de filtrage.

Spécifications

Type de filtre, bande passante, pouvoir de réjection ou de sélectivité, rapidité de réponse, complexité de réalisation, facilité d'implantation matérielle, etc..

Modélisation

Données numériques

On définit un modèle de R.I. défini par sa séquence $\{h_n\}$

Données fréquentielles

- On définit un modèle de transmittance $H(z)$
- Recherche d'une transmittance $H(z)$ respectant un gabarit fréquentiel imposé.

Deux classes de méthodes

- Synthèse de filtre sous la forme RII (fraction rationnelle en z)
- Synthèse de filtre RIF sous la forme RIF (polynôme en z^{-1})

1. Liste des méthodes classiques de synthèse

Synthèse sous la forme RII :

H(z) fraction rationnelle

Passage continu – numérique (Transformations conformes)

- Transformation retard
- Transformation bilinéaire (Tustin)
- Transformation pôle-zéro

Techniques d'optimisation :

- Méthode de Prony, méthode de Padé :
Modélisation de la R.I
Optimisation MCL / modèle
- Méthode Yule-Walker, méthode de Steiglitz
Modélisation de la réponse fréquentielle
Optimisation MCL / modèle

Synthèse sous la forme RIF :

H(z) polynôme en z^{-1}

- Echantillonnage en fréquence
- Série de Fourier avec fenêtrage

Techniques d'optimisation :

- Méthode de Parks - Mac Clellan (Remez)
Utilisation d'un gabarit fréquentiel
+ Optimisation de type min-max

2. Synthèse sous la forme RII

Transformation continu-numérique

Exigences souhaitées :

Exigence 1 : La stabilité doit être conservée
 $\frac{1}{2}$ plan gauche de **C** inclus à l'intérieur du cercle unité C_T

Exigence 2 : L'allure de la réponse fréquentielle doit être « respectée ».

Méthode par approximation de la dérivée (transformation retard)

Discrétisation de la dérivée continue :

$$\dot{y} = \frac{\Delta y}{T_e} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T_e}$$

$$pY(p) \rightarrow \frac{(1 - z^{-1})}{T_e} Y(z)$$

$$Y(p) \xrightarrow[p = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}]{} Y(z)$$

2. Transformation continu-numérique (2)

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \Rightarrow z = \frac{1}{1 - pT_e}$$

Analyse fréquentielle :

$$p = j\omega \rightarrow z = \frac{1}{1 - j\omega T_e} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 + j\omega T_e}{1 - j\omega T_e} \right]$$

$$z = \frac{1}{2} \left[1 + e^{j2\arctg(\omega T_e)} \right]$$

Quand ω parcourt l'axe imaginaire $(-\infty, +\infty)$,
 z parcourt un cercle $C1$ de centre $1/2$, et de rayon $1/2$.

Remarque :

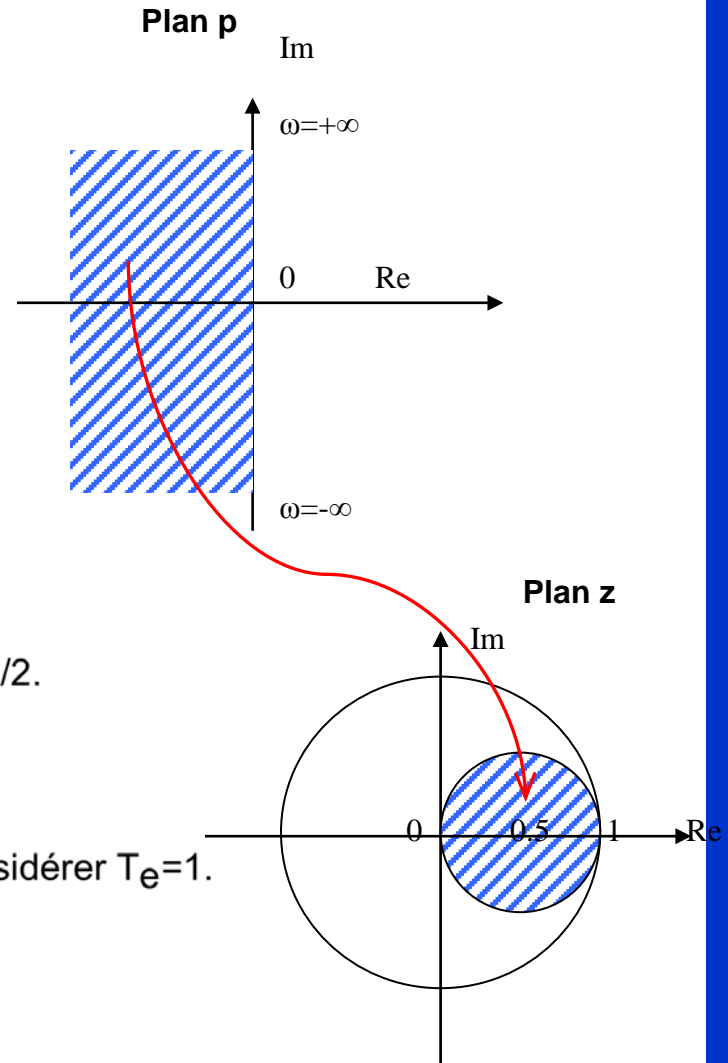
Ici les pulsations ω sont des pulsations vraies.

Pour obtenir des pulsations réduites, il suffit de considérer $T_e=1$.

Constatation :

- Stabilité conservée
- Modification notables de la réponse harmonique

Adapté au filtrage passe-bas basse fréquence



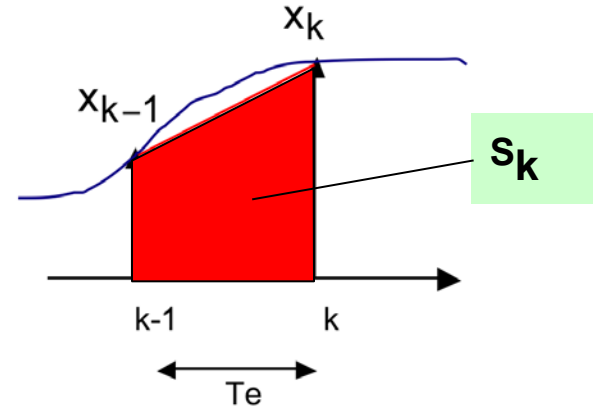
3. Transformation continu-numérique (Tustin)

Transformation bilinéaire ou de Tustin

Approximation de l'intégration :

En continu :

$$S(t) = \int_0^t (x(t)dt) \xrightarrow{L} S(p) = \frac{X(p)}{p}$$



Discrétisation de l'intégrale (trapèze) :

$$S_k = S_{k-1} + \frac{T_e}{2}(x_k + x_{k-1}) \xrightarrow{Z} S(z) = \frac{T_e}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) X(z)$$

Transformation bilinéaire ou de Tustin :

$$X(p) \xrightarrow{p = \frac{2}{T_e} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} X(z)$$

3. Transformation continu-numérique (Tustin)(2)

Transformation inverse :

$$z = \frac{1 + \frac{T_e}{2}p}{1 - \frac{T_e}{2}p}$$

$X(z) \xrightarrow{\quad} X(p)$ transformée **dite en w** en automatique

permet de réutiliser les outils de type Bode, marges de gain et de phase, etc..

$$z = \frac{1 + \frac{T_e}{2}w}{1 - \frac{T_e}{2}w}$$

$X(z) \xrightarrow{\quad} X(w)$

3. Transformation continu-numérique (Tustin) (3)

Etude harmonique :

$$p = j\omega \rightarrow z = \frac{1 + j\frac{\omega T_e}{2}}{1 - j\frac{\omega T_e}{2}} = e^{j2\arctg(\frac{\omega T_e}{2})}$$

On pose : $e^{j\Omega T_e} = e^{j2\arctg(\frac{\omega T_e}{2})}$

ω : pulsation vraie en analogique

Ω : pulsation vraie en numérique

f_{an} : fréquence vraie en analogique

f_{num} : fréquence vraie en numérique

On a :

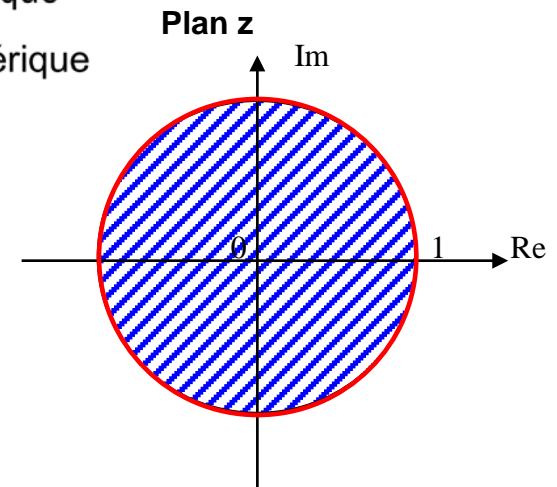
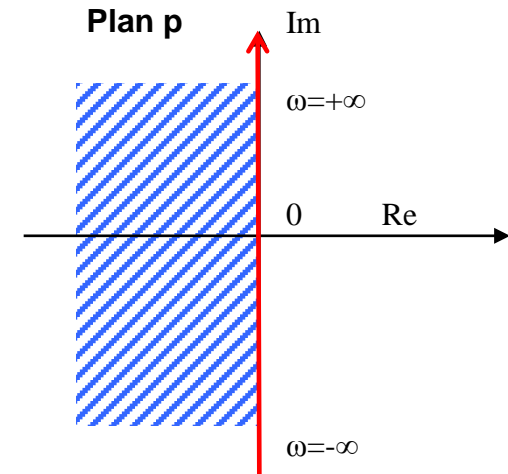
$$\Omega = \frac{1}{T_e} 2\arctg(\frac{\omega T_e}{2})$$

$$\omega = \frac{1}{T_e} 2\arctg(\frac{\Omega T_e}{2})$$

et :

$$f_{num} = \frac{f_e}{\pi} \arctg(\pi \frac{f_{an}}{f_e})$$

$$f_{an} = \frac{f_e}{\pi} \arctg(\pi \frac{f_{num}}{f_e})$$



Quand ω parcourt l'axe imaginaire sur $(-\infty, +\infty)$, z parcourt le cercle C_T de centre 1 et de rayon 1 sur $[-\pi, +\pi]$.

3. Transformation continu-numérique (Tustin) (4)

Remarques :

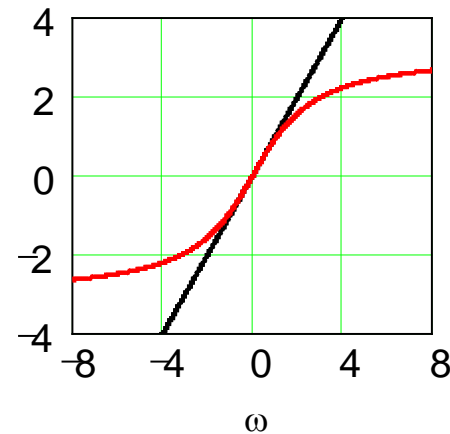
- Stabilité conservée : le $\frac{1}{2}$ plan gauche se transforme en l'intérieur du cercle complet.
- Allure générale "conservée",
- Existence d'une distorsion en fréquence,
- Introduction systématique de zéros en $z=-1$,
Assure l'annulation du gain pour $\omega = \pm\pi$.

$$T_e := 1$$

$$\Omega_b(\omega) := 2 \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Omega_a(\omega) := \omega$$

$$\frac{\Omega_a(\omega)}{\Omega_b(\omega)}$$



Exemples (1)

$$G(p) \xrightarrow{p = \frac{2}{T_e} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} H(z)$$

Correction des fréquences de coupures :

$$f_{\text{cnum}} = \frac{f_e}{\pi} \arctg\left(\pi \frac{f_{\text{can}}}{f_e}\right)$$

$$f_{\text{can}} = \frac{f_e}{\pi} \operatorname{tg}\left(\pi \frac{f_{\text{cnum}}}{f_e}\right)$$

Passe-bas Butterworth d'ordre 2

Fréquence de coupure : $f_c = 100 \text{ Hz}$

$$G(p) = \frac{3.948 \cdot 10^5}{p^2 + 8.886 \cdot 10^2 \cdot p + 3.948 \cdot 10^5}$$

Pôles :

$$p_1 = -444.29 + j \cdot 444.29, \quad p_2 = -444.29 - j \cdot 444.29$$

Transmittance RII sans correction

Fréquence d'échantillonnage : $f_e = 1 \text{ KHz}$

$$H(z) = \frac{0.0640 \cdot (1 + z^{-1})^2}{1 - 1.168 \cdot z^{-1} + 0.424 \cdot z^{-2}}$$

Pôles :

$$z_1 = 0.5841 + j \cdot 0.2879, \quad z_2 = 0.5841 - j \cdot 0.2879, \quad |z_1| = |z_2| = 0.6512$$

Zéros :

$$z_3 = -1 \text{ (double)}$$

Transmittance RII avec correction à f_c

Fréquence d'échantillonnage : $f_e = 1 \text{ KHz}$

$$H(z) = \frac{0.0675 \cdot (1 + z^{-1})^2}{1 - 1.143 \cdot z^{-1} + 0.413 \cdot z^{-2}}$$

Pôles :

$$z_1 = 0.5715 + j \cdot 0.2936, \quad z_2 = 0.5715 - j \cdot 0.2936, \quad |z_1| = |z_2| = 0.6425$$

Zéros :

$$z_3 = -1 \text{ (double)}$$

Exemples (1)

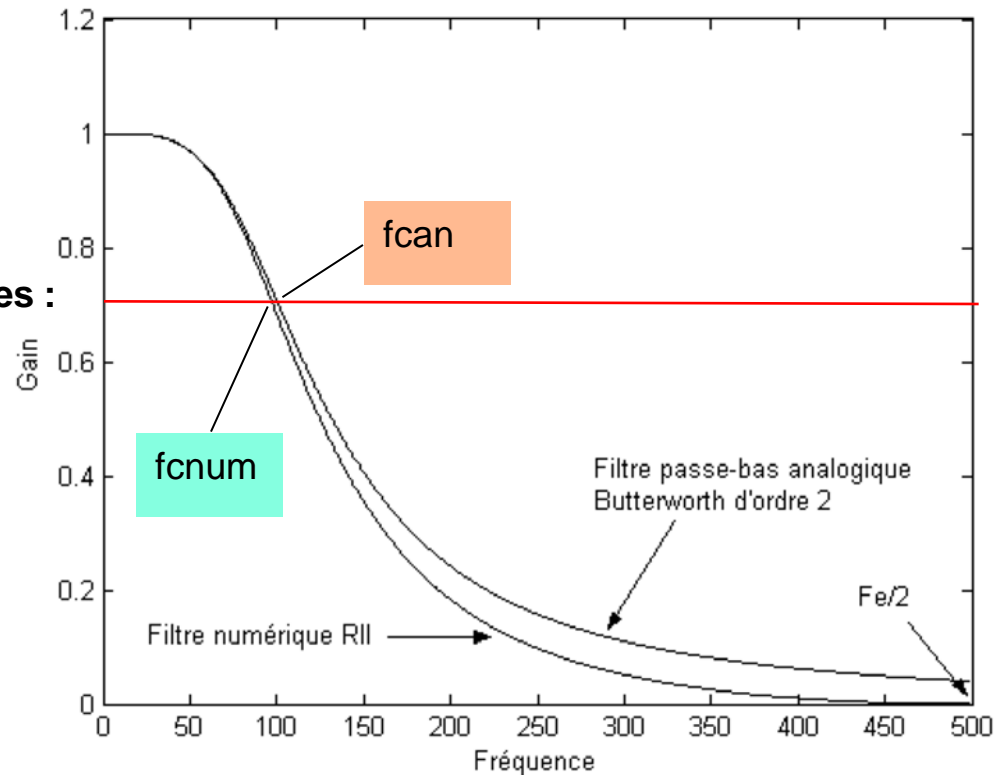
Synthèse d'un filtre RII passe-bas Butterworth d'ordre 2 par transformation bilinéaire sans correction (échelles linéaires).

$$G(p) \xrightarrow{p = \frac{2}{T_e} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} H(z)$$

Correction des fréquences de coupures :

$$f_{\text{cnum}} = \frac{f_e}{\pi} \arctg\left(\pi \frac{f_{\text{can}}}{f_e}\right)$$

$$f_{\text{can}} = \frac{f_e}{\pi} \operatorname{tg}\left(\pi \frac{f_{\text{cnum}}}{f_e}\right)$$



Exemples (1)

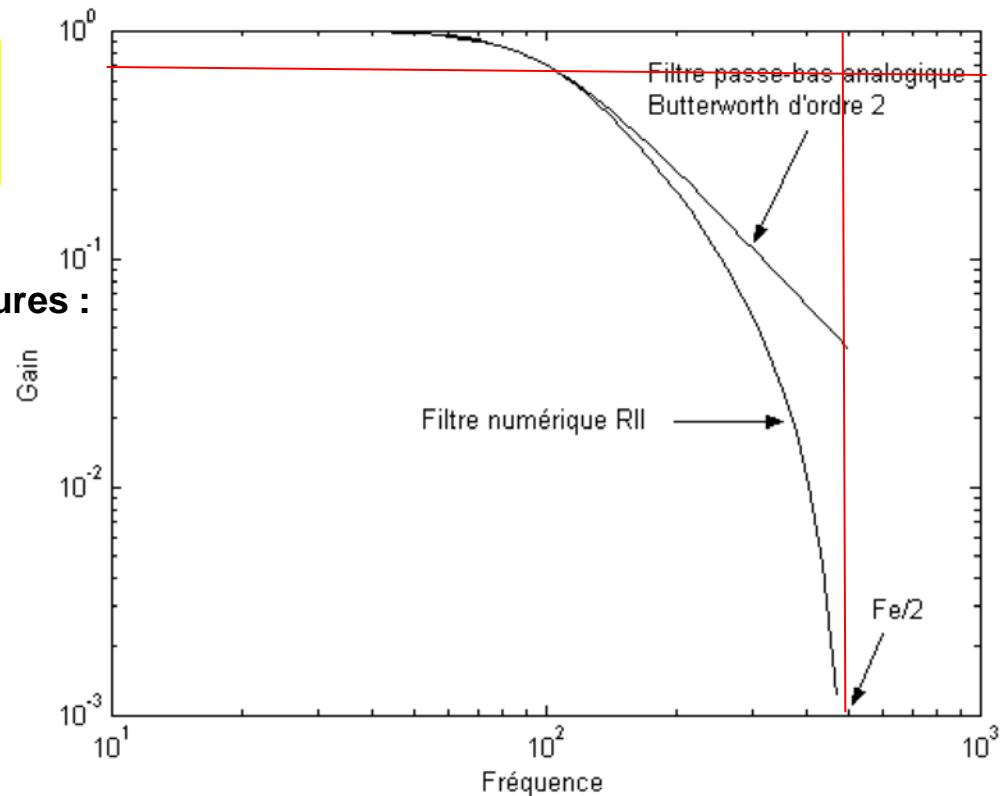
Synthèse d'un filtre RII passe-bas par transformation bilinéaire avec correction à $f_c=100$ Hz (échelles logarithmiques).

$$G(p) \xrightarrow{p=\frac{2}{T_e} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} H(z)$$

Correction des fréquences de coupures :

$$f_{\text{cnum}} = \frac{f_e}{\pi} \arctg\left(\pi \frac{f_{\text{can}}}{f_e}\right)$$

$$f_{\text{can}} = \frac{f_e}{\pi} \operatorname{tg}\left(\pi \frac{f_{\text{cnum}}}{f_e}\right)$$



Exemples (2)

$$G(p) \xrightarrow{p = \frac{2}{T_e} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} H(z)$$

Correction des fréquences de coupures :

$$f_{\text{cnum}} = \frac{f_e}{\pi} \arctg\left(\pi \frac{f_{\text{can}}}{f_e}\right)$$

$$f_{\text{can}} = \frac{f_e}{\pi} \operatorname{tg}\left(\pi \frac{f_{\text{cnum}}}{f_e}\right)$$

Passe-bande Butterworth d'ordre 4

Bande passante : BP = 100 Hz

Fréquence centrale : $f_0 = 100$ Hz

$$G(p) = \frac{3.948 \cdot 10^5 \cdot p^2}{p^4 + 8.886 \cdot 10^2 \cdot p^3 + 9.87 \cdot 10^5 p^2 + 2.631 \cdot 10^8 \cdot p + 8.767 \cdot 10^{10}}$$

Pôles :

$$p_1 = -311.63 + j \cdot 773.59 \quad p_2 = -311.63 - j \cdot 773.59$$

$$p_3 = -132.66 + j \cdot 329.31 \quad p_4 = -132.66 - j \cdot 329.31$$

Zéros :

$$p_5 = 0 \text{ (double)}$$

Filtre numérique RII sans correction

Fréquence d'échantillonnage : $f_e = 1$ KHz

$$H(z) = \frac{0.05707 \cdot (1 - z^{-1})^2 \cdot (1 + z^{-1})^2}{1 - 2.776 \cdot z^{-1} + 3.203 \cdot z^{-2} - 1.824 \cdot z^{-3} + 0.4482 \cdot z^{-4}}$$

Pôles :

$$z_1 = 0.5561 + j \cdot 0.5208 \quad z_2 = 0.5561 - j \cdot 0.5208, \quad |z_1| = |z_2| = 0.7619$$

$$z_3 = 0.8319 + j \cdot 0.2829 \quad z_4 = 0.8319 - j \cdot 0.2829, \quad |z_3| = |z_4| = 0.8787$$

Zéros :

$$z_5 = 1 \text{ (double)}, \quad z_6 = -1 \text{ (double)}$$

Exemples (2)

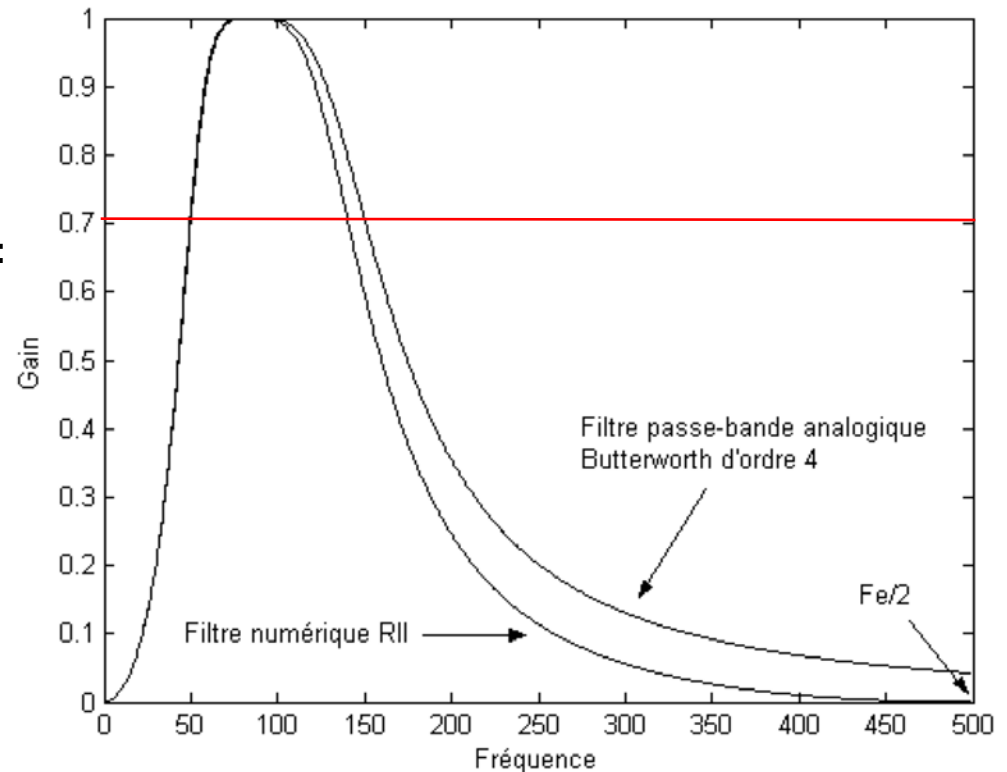
Synthèse d'un filtre RII passe-bande Butterworth d'ordre 4 par transformation bilinéaire sans correction (échelles linéaires).

$$G(p) \xrightarrow{p = \frac{2}{T_e} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} H(z)$$

Correction des fréquences de coupures :

$$f_{\text{cnum}} = \frac{f_e}{\pi} \arctg\left(\pi \frac{f_{\text{can}}}{f_e}\right)$$

$$f_{\text{can}} = \frac{f_e}{\pi} \operatorname{tg}\left(\pi \frac{f_{\text{cnum}}}{f_e}\right)$$



Exemples (2)

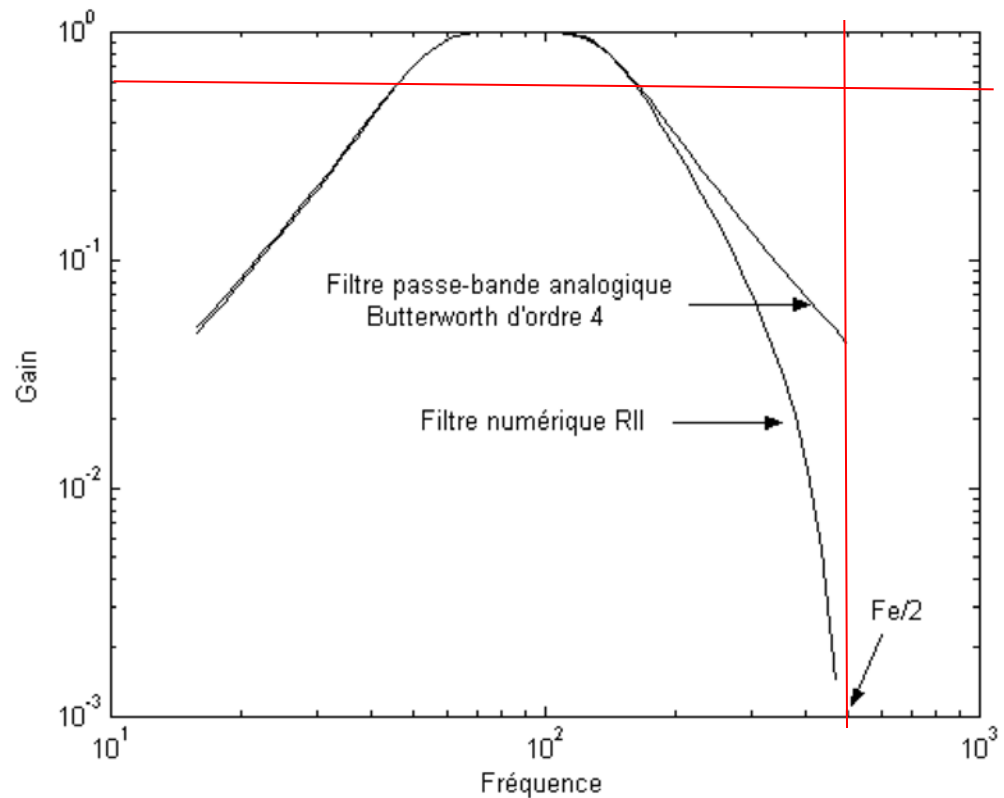
Synthèse d'un filtre RII passe-bande Butterworth d'ordre 4 par transformation bilinéaire avec correction à $f_c=100$ Hz (échelles logarithmiques).

$$G(p) \xrightarrow{p=\frac{2}{T_e} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)} H(z)$$

Correction des fréquences de coupures :

$$f_{\text{cnum}} = \frac{f_e}{\pi} \arctg\left(\pi \frac{f_{\text{can}}}{f_e}\right)$$

$$f_{\text{can}} = \frac{f_e}{\pi} \operatorname{tg}\left(\pi \frac{f_{\text{cnum}}}{f_e}\right)$$



Exemples (3)

$$G1(p) := \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cdot p + p^2}$$

$$G1(p) \xrightarrow[p = \frac{1-z^{-1}}{T_e}]{} G1(z)$$

$$G1(z) := \frac{z^2}{\left[\left(2^{\frac{1}{2}} + 2 \right) \cdot z^2 + \left(-2^{\frac{1}{2}} - 2 \right) \cdot z + 1 \right]}$$

$$\text{zéros_G1} := 0$$

$$\text{poles_G1} := \begin{pmatrix} 0.5 + 0.207i \\ 0.5 - 0.207i \end{pmatrix}$$

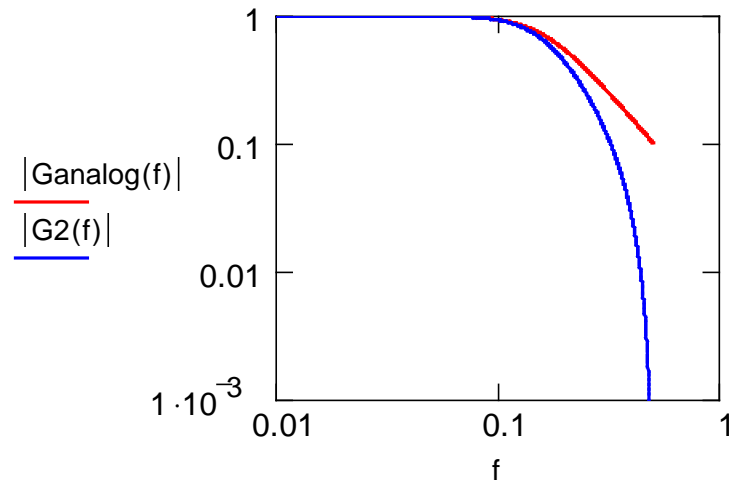
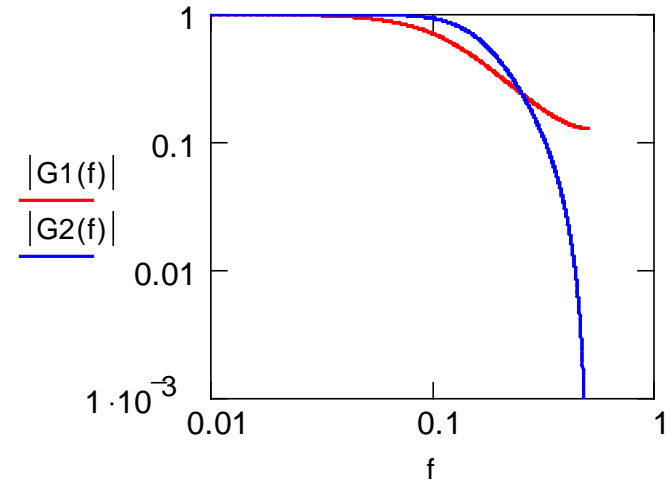
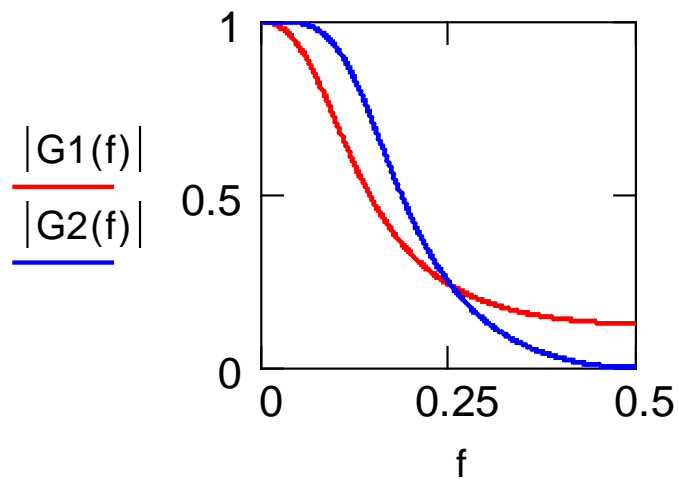
$$G1(p) \xrightarrow[p = \frac{2}{T_e} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)]{} G2(z)$$

$$G2(z) := \frac{(z+1)^2}{\left[(2 \cdot \sqrt{2} + 5) \cdot z^2 - 6 \cdot z - 2 \cdot \sqrt{2} + 5 \right]}$$

$$\text{zéros_G2} := -1 \quad (\text{zéro double})$$

$$\text{poles_G2} := \begin{pmatrix} 0.383 + 0.361i \\ 0.383 - 0.361i \end{pmatrix}$$

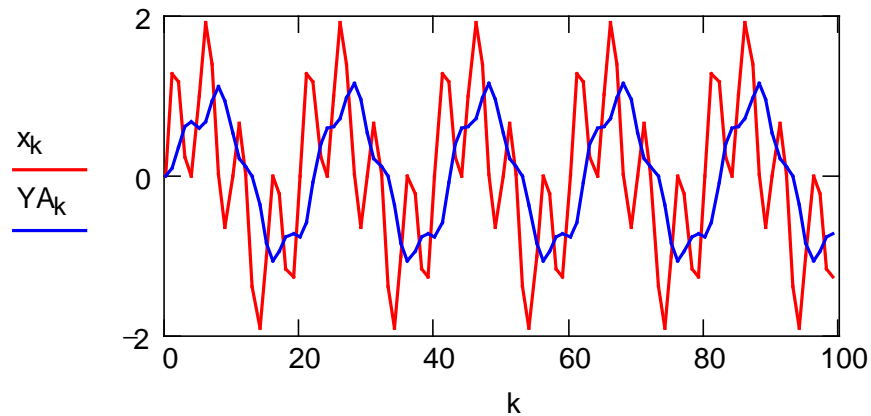
Exemples (3)



Examples (4)

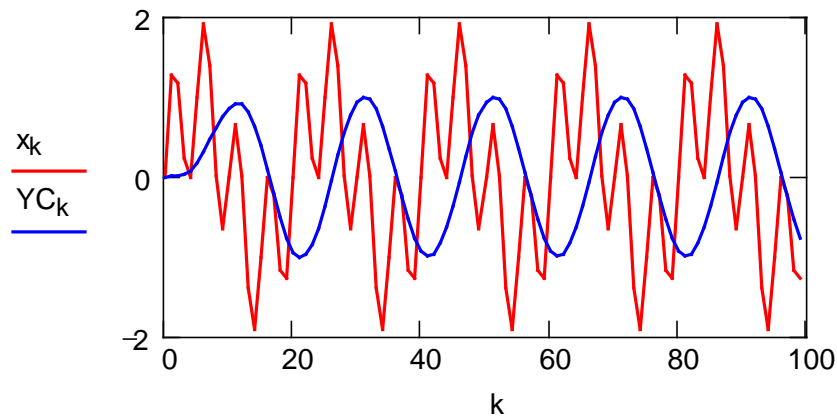
$A := \text{iirlow}(\text{butter}(2), f)$

$YA := \text{response}(x, A, 100)$ $k := 0 \dots 99$



$C := \text{iirlow}(\text{butter}(6), f)$

$YC := \text{response}(x, C, 100)$



4. Méthode de Steiglitz (1)

Soit $H_d(e^{j\omega})$ la réponse fréquentielle désirée.

$H_d(e^{j\omega})$ connue en M points ω_i $i = 1, 2, 3, \dots, M$

Les affixes des $e^{j\omega_i}$ doivent être équirépartis sur le cercle unité.

Soit $H(z)$ un modèle de filtre.

Choix de $H(z)$:

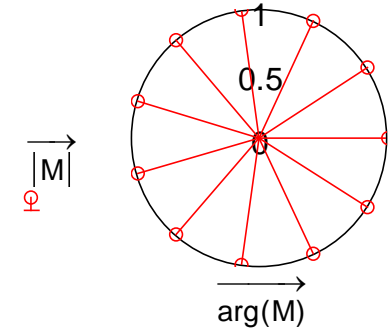
$$H(z) = A \prod_{k=1}^K \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}}$$

Structure cascade de transmittance du 2^{ème} ordre.

Filtre d'ordre $2K$.

Paramètres :

$$4K+1 \text{ paramètres } \begin{cases} A \text{ gain} > 0 \\ \underline{\varphi} = (a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_K, b_K, c_K, d_K) \end{cases}$$



4. Méthode de Steiglitz (2)

Calcul des paramètres :

Soit Q un critère de type MCL :

$$\text{On a : } Q(A, \underline{\varphi}) = \sum_{i=1}^M \left[\left| H(e^{j\omega_i}, A, \underline{\varphi}) \right| - \left| H_d(e^{j\omega_i}) \right| \right]^2$$

Calcul du gain A :

On a : $H(z) = A.H_1(z)$

$$\frac{\partial Q(A, \underline{\varphi})}{\partial A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = \frac{\sum_{i=1}^M \left| H_1(e^{j\omega_i}, \underline{\varphi}) \right| \cdot \left| H_d(e^{j\omega_i}) \right|}{\sum_{i=1}^M \left| H_1(e^{j\omega_i}, \underline{\varphi}) \right|^2}$$

Calcul du vecteur $\underline{\varphi}$:

$$\frac{\partial Q(A, \underline{\varphi})}{\partial \varphi_n} = 0 \quad n = 1, 2, \dots, 4K$$

Obtention des paramètres a_n, b_n, c_n, d_n par optimisation non-linéaire de type Fletcher-Powell (technique de gradient).

Intérêt : Convergence du critère très rapide.

Inconvénient : Possibilité d'obtenir des pôles et zéros à l'extérieur du cercle.
Dans ce cas on les remplace par leurs inverses, et on recherche une nouvelle convergence.

4. Méthode de Padé (1)

Approximation de Padé :

Soit $h_d(n)$ la réponse impulsionnelle d'un filtre idéal causal choisi.

On désire approximer ce filtre par une transmittance $H(z)$ causale.

$$\text{On a : } H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}}$$

Les ordres p et q de $H(z)$ sont choisis.

$H(z)$ possède $p+q+1$ paramètres indépendants.

On peut donc trouver des valeurs de $a(k)$ et $b(k)$ pour obtenir l'identité de $h(n)$ avec $h_d(n)$ pour les $p+q+1$ premières valeurs.

4. Méthode de Padé (2)

On impose donc :

$$h(n) \equiv h_d(n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, p + q.$$

Procédure :

$$\text{On a : } H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad \text{d'où : } A(z)H(z) = B(z)$$

$$\text{On a aussi : } a(n) * h(n) = h(n) + \sum_{k=1}^p a(k)h(n-k) = b(n)$$

$$\text{D'où : } h_d(n) + \sum_{k=1}^p a(k)h_d(n-k) = \begin{cases} b(n) & n = 0, 1, \dots, q \\ 0 & n = q+1, \dots, q+p \end{cases}$$

4. Méthode de Padé (3)

Calcul des $a(k)$:

On déduit le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} h_d(q) & h_d(q-1) & \cdots & h_d(q-p+1) \\ h_d(q+1) & h_d(q) & \cdots & h_d(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_d(q+p-1) & h_d(q+p-2) & \cdots & h_d(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(p) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_d(q+1) \\ h_d(q+2) \\ \vdots \\ h_d(q+p) \end{bmatrix}$$

Système linéaire de p équations à p inconnues. D'où $a(k)$.

Calcul de $b(k)$:

Connaissant $a(n)$, on calcule les $b(n)$ d'après :

$$b(n) = h_d(n) + \sum_k^p a(k)h_d(n-k) \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, q$$

L'approximation de $h_d(n)$ est exacte pour $n \leq p + q + 1$.

En revanche pour $n > p + q$, l'approximation de donne plus de bons résultats.

5. Méthode de Prony (1)

Hypothèses :

Soit $h_d(n)$ la réponse impulsionnelle d'un filtre idéal **causal** choisi.

On désire approximer ce filtre par une transmittance $H(z)$ causale.

$$\text{On a : } H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = \frac{\sum_{k=0}^q b(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a(k)z^{-k}} \quad \text{Les ordres } p \text{ et } q \text{ de } H(z) \text{ sont choisis.}$$

Calcul des $a(k)$ par minimisation d'un critère Q au sens MCL.

$$Q = \sum_{n=0}^N |h_d(n) - h(n)|^2 \quad \text{avec } N \text{ fixé au préalable.}$$

$$\text{L'approximation de Padé imposait : } h_d(n) + \sum_{k=1}^p a(k)h_d(n-k) = 0 \quad \text{pour } n \geq q+1$$

Ici, on cherche à minimiser les écarts pour $n \geq q+1$

$$e(n) = h_d(n) + \sum_{k=1}^p a(k)h_d(n-k) \quad \text{pour } n \geq q+1$$

$$\text{D'où : } Q = \sum_{n=q+1}^N |e_n|^2$$

5. Méthode de Prony (2)

Calcul des $a(k)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial a(k)} = 0 \quad k = 0, 1, \dots, p$$

On obtient le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{bmatrix} r_d(1,1) & r_d(1,2) & \cdots & r_d(1,p) \\ r_d(2,1) & r_d(2,2) & \cdots & r_d(2,p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_d(p,1) & r_d(p,2) & \cdots & r_d(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(p) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_d(1,0) \\ r_d(2,0) \\ \vdots \\ r_d(p,0) \end{bmatrix}$$

avec : $r_d(k,l) = \sum_{n=q+l}^N h_d(n-k) h_d(n-l)$ (relation d'autocorrélation)

Calcul des $b(k)$:

$$b(n) = h_d(n) + \sum_k^p a(k) h_d(n-k) \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, q$$