# Chapitre 2
# La convolution

# Produit de convolution de deux fonctions

On appelle produit de convolution de deux fonctions sommables ***f*(x)** et **g(x)** la fonction **h(x)** définie par:

$$\boxed{h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt}$$

qui s'écrit symboliquement :

- *La convolution est commutative*

$$\boxed{f(x)\otimes g(x)=g(x)\otimes f(x)}$$

- *La convolution est associative*

$$si \quad f\otimes g, \quad f\otimes h, \quad g\otimes h \quad : \quad existent \quad alors$$

$$\boxed{f(x)\otimes\left[g(x)\otimes h(x)\right]=\left[f(x)\otimes g(x)\right]\otimes h(x)}$$

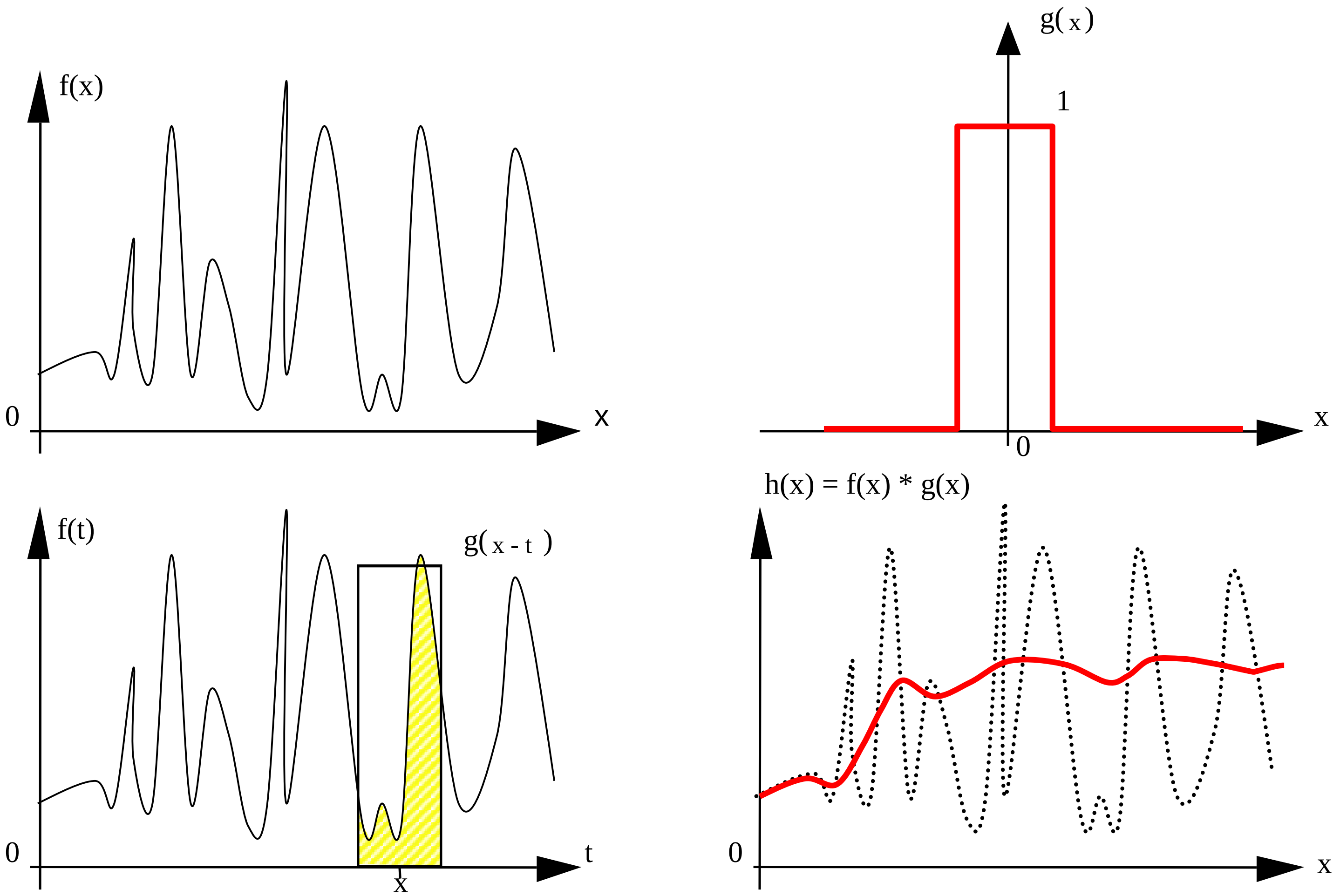
- *La convolution est distributive par rapport à l'addition*

$$\boxed{f(x)\otimes\left[g_1(x)+g_2(x)\right]=f(x)\otimes g_1(x)+f(x)\otimes g_2(x)}$$

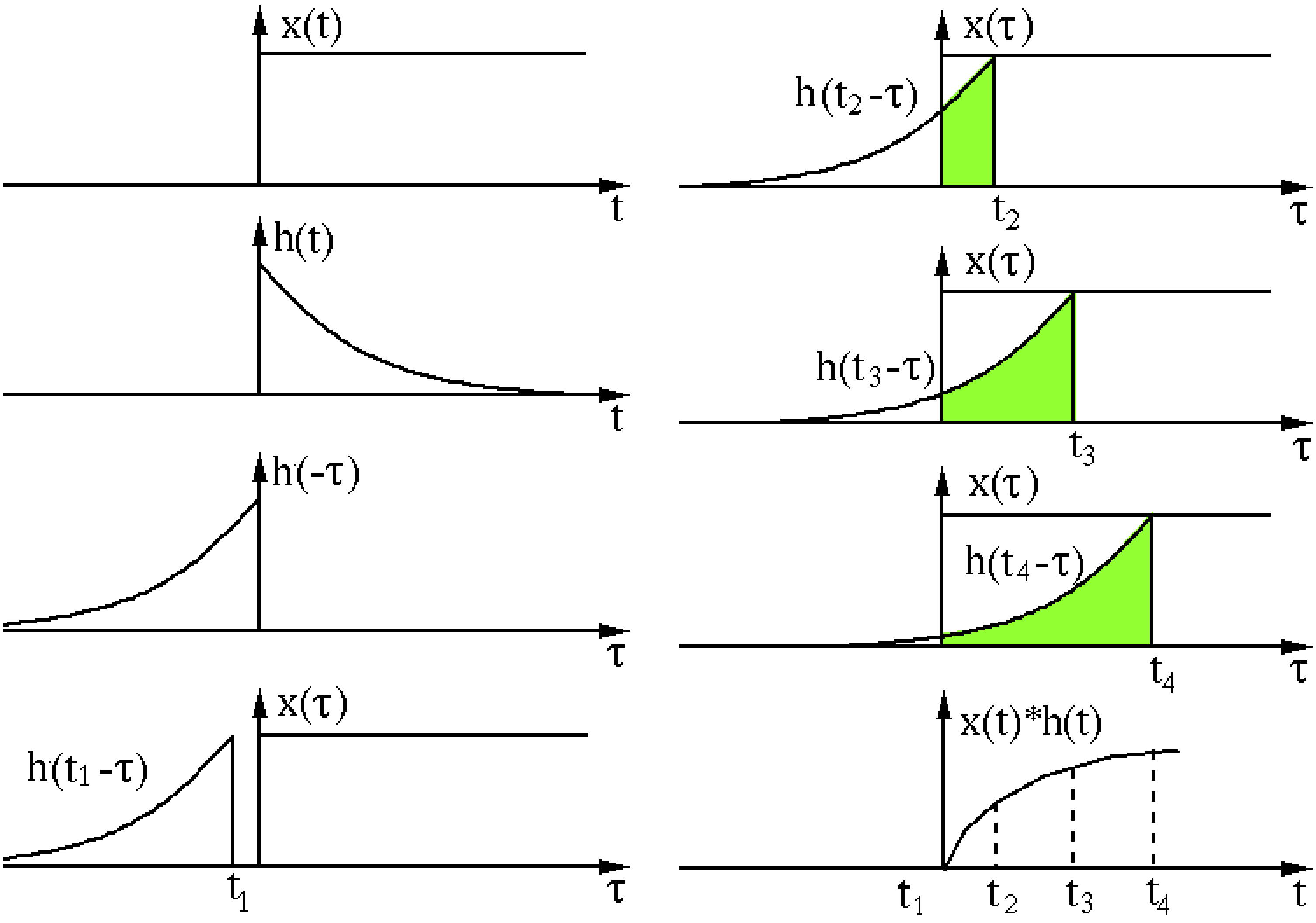
# 1. Signification physique

En général **g(x)** est à support borné ou très rapidement décroissante de sorte que le produit a un sens.
**h(x)** représente alors une moyenne de ***f*(x)** pondérée au voisinage de chaque point par **g(x-t)**.
Si **g(x)** est suffisamment régulière alors **h(x)** présente des fluctuations moins rapides que ***f*(x)**.

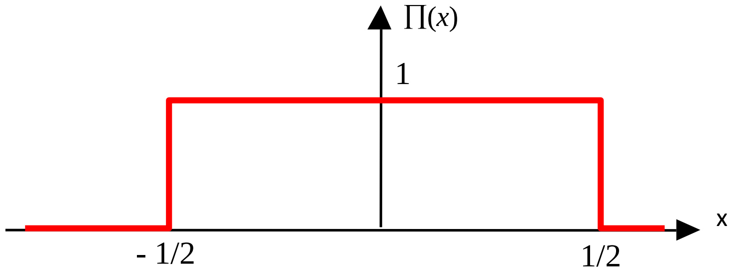
*Exemple : Soit une grandeur physique **f(x)** à mesurer.*
*Soit **h(x)** le résultat de la mesure, seule grandeur à laquelle on ait accès.*
*Soit **g(x)** « l'effet » de l'instrument de mesure qui est incapable de discerner des variations rapides.*



f(x)
0
x
g( x )
1
0
x
f(t)
g( x - t )
0
t
x
h(x) = f(x) * g(x)
0
x


x(t)
t
h(t)
t
h(-τ)
τ
h(t1 -τ)
x(τ)
t1
τ
x(τ)
h(t2 -τ)
t2
τ
x(τ)
h(t3 -τ)
t3
τ
x(τ)
h(t4 -τ)
t4
τ
x(t)*h(t)
t1
t2
t3
t4
t

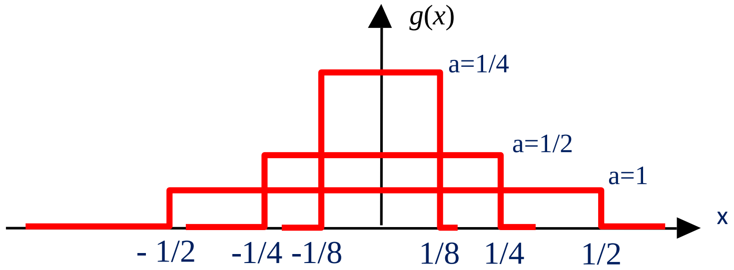
## *Cas particulier très intéressant. La fonction porte :*




$$\Pi(x)=\begin{cases}1 \; si \; |x|<1/2 \\ 0 \; si \; |x|\geq 1/2\end{cases}$$

Considérons : $g(x)=\frac{1}{a}\Pi\left(\frac{x}{a}\right) \quad a\in\Re^{+*}$

Et étudions : $h(x) = f(x) \otimes g(x) = f(x) \otimes \frac{1}{a}\Pi\left(\frac{x}{a}\right)$




$$h(x) = f(x) \otimes \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Pi\left(\frac{x-t}{a}\right) dt$$

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{a}\int_{x-a/2}^{x+a/2} f(t)\,dt}$$

**h(x)** représente la valeur moyenne de ***f*** **(x)** entre **(x-a/2)** et **(x+a/2)**. C'est une moyenne glissante.

*Remarques:* $\int g(x)dx = \int \frac{1}{a}\prod\left(\frac{x}{a}\right) \quad = 1$

- Si on fait tendre **a** $\longrightarrow$ **0,** g(x) tend alors vers une distribution de Dirac δ(x).

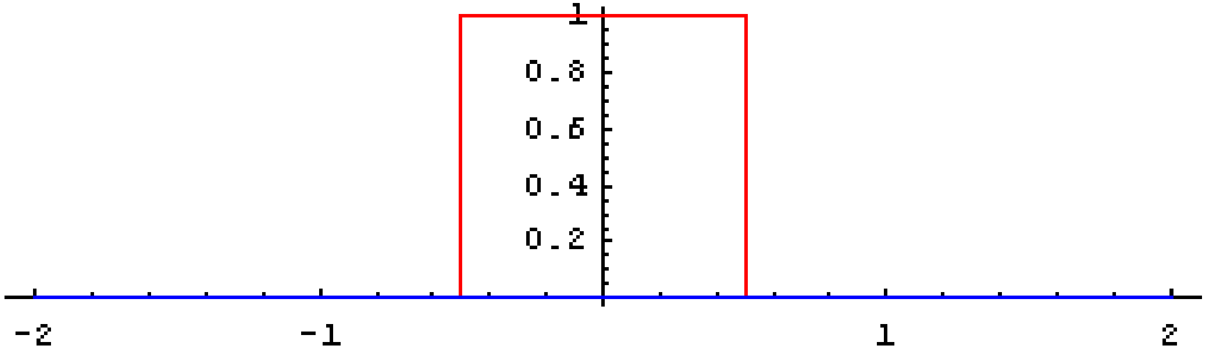
- La moyenne de la fonction ***f*** **(x)** sur un intervalle de plus en plus petit tend vers ***f*** **(x).**

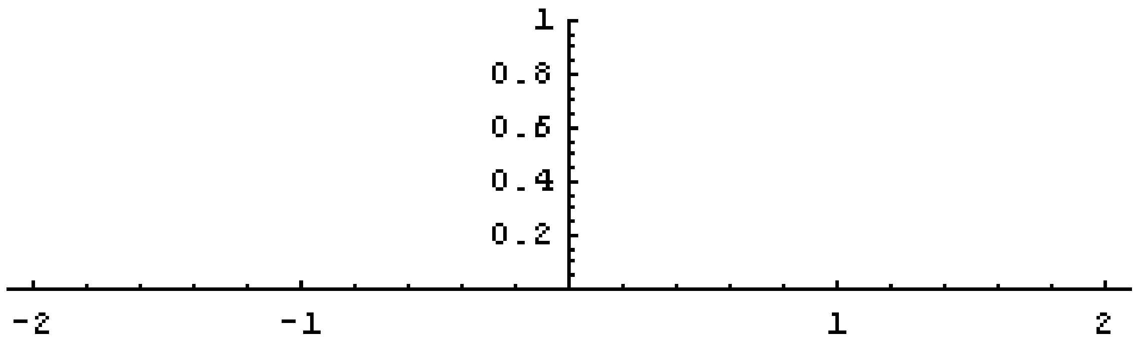
- Si on ose passer à la limite, on peut s'attendre à trouver :

$$f(x) \otimes \delta(x) = f(x)$$

$\delta(x)$ serait donc l'élément neutre pour la convolution !

# Convolution d'une fonction porte par elle-même



# 2. Produit de convolution de deux distributions

Soient f et g deux fonctions localement sommables, on aura :

$$\langle f \otimes g, \phi \rangle = \int [f \otimes g] \;\; \phi(t) dt = \int \phi(t) \int f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt$$

$$Si \quad f \otimes g \quad : \quad existe$$

$$\langle f \otimes g, \phi \rangle = \int \int \phi(t) f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt$$

Si on pose x=τ et y=t-τ

$$\langle f \otimes g, \phi \rangle = \int \int \phi(x+y) f(x) g(y) dx dy$$

$$\boxed{\left\langle S \otimes T, \varphi \right\rangle = \left\langle S(x).T(y), \varphi(x+y) \right\rangle}$$

S(x).T(y) est le produit direct des distributions S et T
(Il faut que φ(x+y) soit à support borné dans $R^2$)

*Propriétés:*

Comme pour les fonctions, le produit de convolution de deux distributions est :

- commutatif,
- associatif (si tous les produits 2 à 2 ont un sens),
- distributif par rapport à l'addition.

# 3. Applications

## a. Convolution par 1 de fonctions sommables

$$1 \otimes f = \int f(x)dx \qquad 1 \otimes g = \int g(x)dx$$

$$Si \quad f \otimes g \quad : \quad existe \quad alors \quad 1 \otimes f \otimes g \quad existe \quad et \quad est \quad associatif$$

$$1 \otimes f \otimes g = 1 \otimes [f \otimes g] = \int [f \otimes g]\, dx$$

d’autre part :

$$1 \otimes f \otimes g = \underbrace{[1 \otimes f]}_{Scalaire} \otimes g = \int f(x)\, dx . \int g(x)\, dx$$

Par comparaison, il vient:

$$\boxed{\int [f \otimes g] = \int f(x) dx . \int g(x) dx}$$

L’intégrale du produit de convolution de deux fonctions sommables est égale au produit de leurs intégrales.

## b. Convolution par δ

Soit **T** une distribution quelconque et δ la distribution de Dirac à l'origine

$$\langle \delta \otimes T, \phi \rangle = \langle \delta(x).T(y), \phi(x+y) \rangle$$

$$= \big\langle T(y) \langle \delta(x), \phi(x+y) \rangle \big\rangle$$

$$= \langle T(y), \phi(y) \rangle$$

$$\boxed{\delta \otimes T = T}$$

## c. Convolution par δ(x-a)

$$\langle \delta(x-a) \otimes T(x), \phi(x) \rangle = \langle \delta(x-a) T(y), \phi(x+y) \rangle$$

$$= \big\langle T(y), \langle \delta(x-a), \phi(x+y) \rangle \big\rangle$$

$$= \langle T(y), \phi(y+a) \rangle$$

$$= \langle T(y-a), \phi(y) \rangle$$

$$\boxed{\delta(x-a) \otimes T(x) = T(x-a)}$$

On montre aussi que translater un produit de convolution revient à translater un des facteurs

## d. Convolution par δ'

$$\langle \delta' \otimes T, \phi \rangle = \langle \delta'(x) T(y), \phi(x+y) \rangle$$

$$= \big\langle T(y) \langle \delta'(x), \phi(x+y) \rangle \big\rangle$$

$$= -\langle T(y), \phi'(y) \rangle$$ Propriétés des distributions

$$= \langle T'(y), \phi(y) \rangle$$

$\boxed{\delta' \otimes T = T'}$ de même $\boxed{\delta^{(m)} \otimes T = T^{(m)}}$

- Pour dériver m fois une distribution, il suffit de la convoler par la dérivée d'ordre m de la distribution de Dirac.

- De même, on montre que pour dériver un produit de convolution, il suffit de dériver un des facteurs.

## e. Régularisation

La convolution supprime les singularités si :

Soit T une distribution et $\varphi$ une fonction indéfiniment dérivable :

- Si $T \otimes \phi$ existe, c'est une fonction h(x) donnée par :

$$h(x) = T \otimes \varphi = \langle T(t), \varphi(x-t) \rangle$$

- Si $\phi \in \mathrm{D}, \mathrm{T} \otimes \phi$ a toujours un sens et $h(x) = T \otimes \phi$ est une fonction indéfiniment dérivable ayant pour dérivée :

$$h^{(m)}(x) = \langle T(t), \varphi^{(m)}(x-t) \rangle$$