Systèmes non-linéaires et robustesse
Travaux Dirigés - Séance 2

Contact : {romain.postoyan,jerome.loheac,samuel.martin}@univ-lorraine.fr

Exercice 1 : analyse de stabilité

Considérons le système

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2^2 - x_1 \\ -x_2^3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

L'objectif de cet exercice est d'analyser la stabilité de l'origine de (1).

Questions

1. Déterminer le système linéarisé au voisinage de l'origine. Que peut-on dire de la stabilité du système linéaire obtenu ? Quid de la stabilité de l'origine pour (1) ?
2. Nous étudions maintenant la stabilité de l'origine de (1) à l'aide d'une fonction de Lyapunov. Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, nous définissons dans ce but $V(x_1, x_2) := \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Analyser la stabilité de l'origine du système (1) à l'aide de V. Nous aurons besoin pour cela de la propriété suivante : $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : analyse de stabilité

Soit le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^5. \end{aligned} \tag{2}$$

Questions.

1. Soit $V_0(x_1, x_2) := x_1^2 - x_2^2$, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Peut-on analyser la stabilité globale de l'origine du système (2) à l'aide de V_0 ?
2. Même question pour $V_1(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$ pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
3. Même question avec cette fois $V_2(x_1, x_2) = x_1^6 + \alpha x_2^2$ pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, où $\alpha > 0$; le choix de α est important ici et est laissé libre.

Exercice 3 : commande

Soit le système dynamique non-linéaire

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - y(t)^2 - \frac{dy(t)}{dt} = u(t), \tag{3}$$

où $y(t), u(t) \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.

L'objectif de cet exercice est de proposer des lois de commande, par retour d'état, assurant la stabilité asymptotique de l'origine de (3).

Questions.

1. Écrire le système (3) sous forme de représentation d'état.
2. Pour quelle valeur d'entrée u_0 l'origine est-elle un point d'équilibre de (3) ? Linéariser le système autour de l'origine et de $u = u_0$.
3. L'origine du système linéarisé obtenu est-elle stable ?
4. Est-il possible de concevoir une loi de commande par retour d'état stabilisant localement exponentiellement l'origine de (3) ?
5. Proposer une loi de commande permettant de stabiliser *globalement* exponentiellement l'origine de (3).
6. Discuter des avantages et inconvénients des deux lois de commande obtenues.