Systèmes non-linéaires et robustesse
Travaux Dirigés - Séance 3

Contact : {romain.postoyan,jerome.loheac,samuel.martin}@univ-lorraine.fr

Exercice 1 : oscillateur chaotique de Lorenz

Nous considérons l'oscillateur de Lorenz contrôlé sous la forme suivante

$$\begin{array}{rcl}\dot{x}_1 & = & -ax_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 & = & bx_1 - x_2 - x_1x_3 + u \\ \dot{x}_3 & = & x_1x_2 - cx_3,\end{array} \tag{1}$$

où $a, b, c > 0$ sont des paramètres donnés, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est l'état et $u \in \mathbb{R}$ l'entrée de commande. L'objectif de cet exercice est de construire une loi de commande qui assure la stabilité globale asymptotique de l'origine de (1).

Questions

1. Peut-on construire une loi de commande linéarisante dans les coordonnées (x_1, x_2, x_3) telle que nous l'avons vue au chapitre 4.4.1 pour satisfaire notre objectif ?
2. Construire une loi de commande répondant à l'objectif à l'aide de la fonction de Lyapunov $V : (x_1, x_2, x_3) \mapsto p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_2x_3^2$ définie sur $\mathbb{R}^3$, où $p_1, p_2 > 0$.
3. La propriété de stabilité obtenue est-elle exponentielle ?
4. Commenter l'expression du contrôleur obtenue à la question 2.

Exercice 2 : fonction de Lyapunov de commande

Soit le système

$$\begin{array}{rcl}\dot{x}_1 & = & -x_1^3 + x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -x_2 - x_1^3 + u,\end{array} \tag{2}$$

où $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est l'état et $u \in \mathbb{R}$ l'entrée de commande. L'objectif de cet exercice est de construire une loi de commande qui assure la stabilité globale asymptotique de l'origine de (2).

Questions

1. Montrer que $V : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ est une fonction de Lyapunov de commande.
2. En déduire une loi de commande répondant à l'objectif.

Exercice 3 : backstepping

Soit le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \sin(x_1) \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned} \tag{3}$$

où $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est l'état et $u \in \mathbb{R}$ l'entrée de commande. Construire un retour d'état statique stabilisant globalement et asymptotiquement l'origine par backstepping.

Exercice 4 : backstepping (suite)

Soit le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + x_1^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Bien que ce système ne soit pas sous forme « strict-feedback », l'objectif est de construire un retour d'état statique stabilisant globalement et asymptotiquement l'origine par backstepping. Vous vous inspirerez pour cela de l'approche décrite en cours, cf. chapitre 4.4.2. *Attention au choix de la commande virtuelle.*