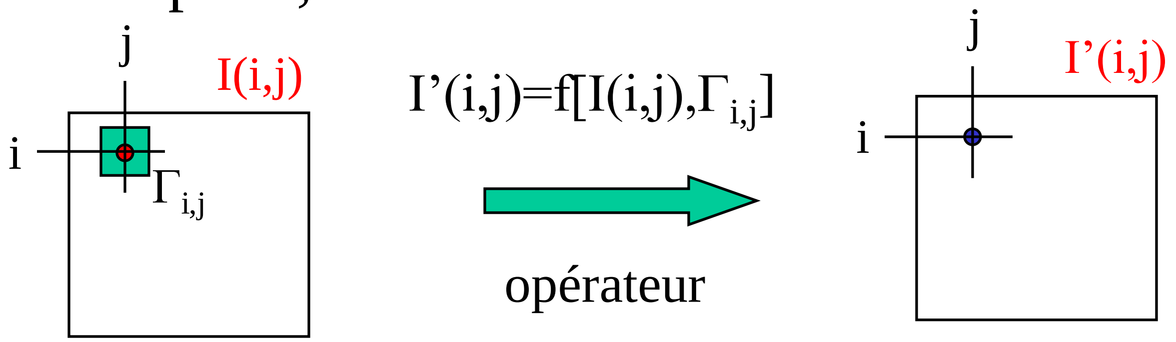
Traitements locaux

Traitement sur un voisinage

- La valeur d’un pixel n’est généralement pas indépendante de ses voisins,
- Il est donc souhaitable de tenir compte du voisinage pour traiter un pixel,



- Deux possibilités :
  - Opérateur linéaire
  - Opérateur non linéaire

Opérateur linéaire – rappels (1)

e(x) $\longrightarrow$ **[Système Opérateur]** $\longrightarrow$ s(x)

- e(x) :entrée du système,
- s(x) : sortie du système.

Linéarité : $\forall(\lambda,\mu)\in R^2$ si $e_1 \rightarrow s_1$ et $e_2 \rightarrow s_2$

alors : $\lambda e_1 + \mu e_2 \Rightarrow \lambda s_1 + \mu s_2$

Opérateur linéaire – rappels (2)

- **Invariance par translation :**

L'opérateur commute avec les translations

$$\begin{tikzcd}
e(x) \arrow[r] \arrow[d, "\text{translation}"'] & s(x) \arrow[d, "\text{translation}"] \\
e(x-x_0) \arrow[r] & s\,(x-x_0)
\end{tikzcd}$$

Opérateur linéaire – rappels (3)

- Si le système (opérateur) est linéaire, invariant par translation et préserve la continuité alors on peut le décrire par :

A. Une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 e' + a_0 e = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 s' + b_0 s$$

avec n<m

⇨ Fonction de transfert :

$$\frac{s(p)}{e(p)} = G(p) \quad \text{en continu} \qquad \frac{s(z)}{e(z)} = G(z) \quad \text{en discret}$$

Opérateur linéaire – rappels (4)

B. Une équation de convolution :

$$s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(u)h(x-u)du$$ qui s'écrit symboliquement : $s(x)=e(x)*h(x)$

avec h : réponse impulsionnelle du système

h(x)=s(x) pour e(x)=δ(x) : impulsion de Dirac

G(p) =T.L (h) en continu

G(z) = T.Z (h) en discret

La réponse impulsionnelle définit le système

Dans les images, on utilise très souvent l'équation de convolution pour réaliser des opérateurs linéaires.

La causalité

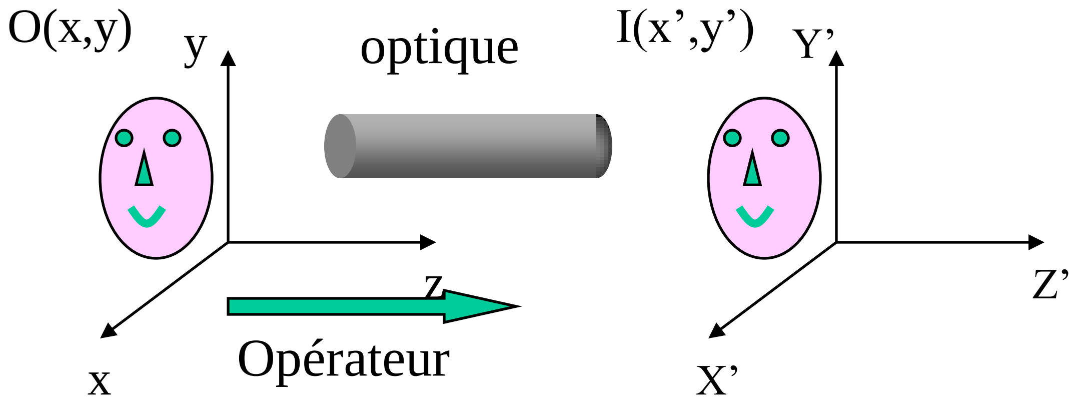
- **Définition** : un système est causal si $s_1(x)$ et $s_2(x)$ étant les réponses aux signaux $e_1(x)$ et $e_2(x)$, la condition $e_1(x)=e_2(x)$ pour $x<\zeta$ entraîne $s_1(x)=s_2(x)$ pour $x<\zeta$.

- **Théorème :** pour qu'un système décrit par un opérateur de convolution soit causal il faut et il suffit que sa réponse impulsionnelle soit nulle pour les valeurs négatives de la variable.

- **Remarque :** les systèmes qui dépendent du temps sont causaux alors que ceux qui dépendent de l'espace ne le sont généralement pas (optique).

Convolution et image (1)

- Formation d'une image :



1. La continuité est préservée,
2. Les intensités lumineuses s'ajoutent (éclairage incohérent),
3. L'invariance par translation est vérifiée.

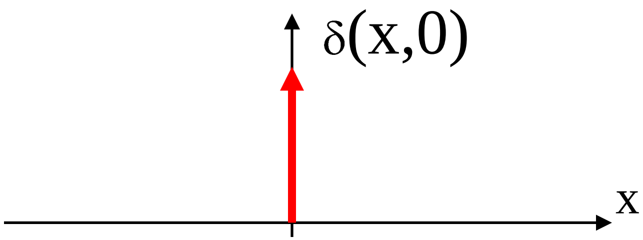
Convolution et image (2)

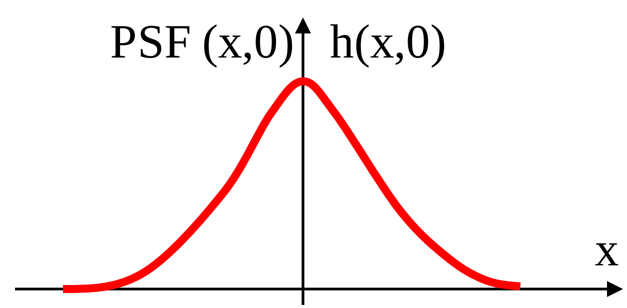
- Dans ces conditions :

$$I(x,y) = O(x,y) ** h(x,y)$$

$**$: convolution à deux dimensions
h(x,y) : réponse impulsionnelle de l'optique
Ou PSF : Point Spread Function

Ce n'est pas un système causal





Convolution : exercice

On photographie un objet. L'image enregistrée peut être représentée par la densité obtenue en chaque point du film.

Soit S(x,y), cette densité lorsque l'appareil est immobile pendant la pose.

Au cours d'un cliché, l'appareil a bougé et l'image obtenue est représentée par la densité R(x,y).

1. Sous quelles hypothèse a-t-on une relation du type :

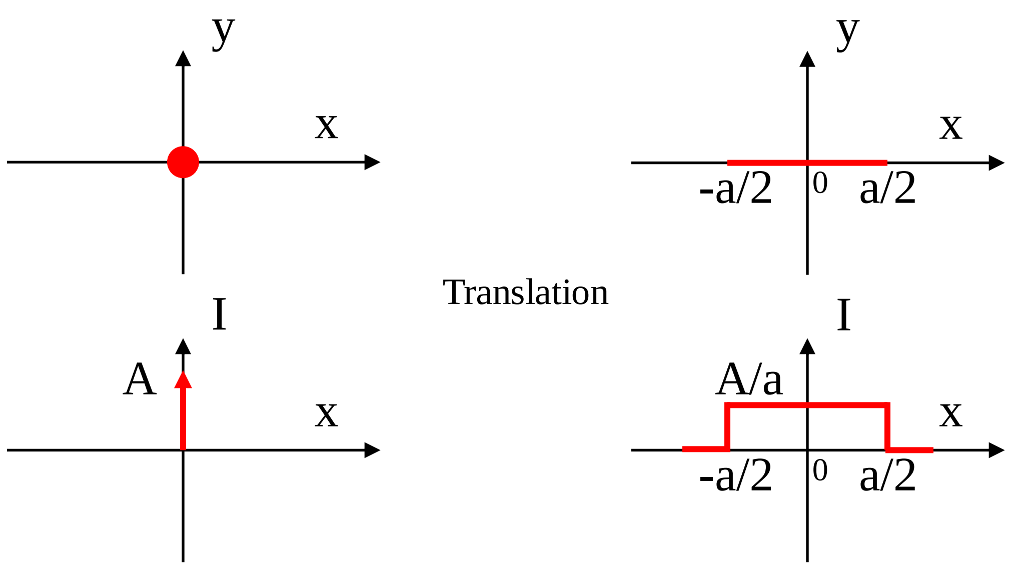
$$R(x,y) = S(x,y) \ast\ast h(x,y)$$

2. Déterminer la réponse impulsionnelle, lorsque l'image à subi un mouvement de translation à vitesse constante suivant l'axe x pendant la pose.

3. Expliciter dans ce dernier cas le produit de convolution

Convolution : exercice/Solution

1. Il faut que les densités s'ajoutent linéairement et que l'effet dû au mouvement soit le même en tout point de l'image.
2. Supposons un point lumineux



Réponse impulsionnelle

$$h(x,y) = \frac{1}{a}\Pi\left(\frac{x}{a}\right)\delta(y)$$

3. $R(x,y) = S(x,y) \overset{*}{*} h(x,y)$

$$R(x,y) = \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} S(x-x',y)\,dx'$$

Propriétés importantes (1)

- La convolution est commutative :

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$$

- La convolution est associative :

$$f(x) * [g(x) * h(x)] = [f(x) * g(x)] * h(x)$$

- La convolution est distributive :

$$f(x) * [g(x) + h(x)] = f(x) * g(x) + f(x) * h(x)$$

Propriétés importantes (2)

- **Convolution par δ :**

$$f(x)*\delta(x)=f(x)$$

$$f(x)*\delta(x-a)=f(x-a)$$

- **Convolution par δ' :**

$$f(x)*\delta'(x)=f'(x)$$

$$f(x)*\delta^{m}(x)=f^{m}(x)$$

- **Dérivation d'un produit de convolution :**

$$\boxed{f(x)*g'(x)=f'(x)*g(x)}$$

Pour dériver un produit de convolution il suffit de dériver l'un des facteurs

Propriétés importantes (3)

- **Régularisation**

Soit f un signal, une fonction ou une distribution et φ une fonction indéfiniment dérivable :

Si h = f∗φ existe, alors h est une fonction indéfiniment dérivable

ayant pour dérivées : $h^{m}(x) = f(x) * \varphi^{m}(x)$

La convolution supprime les singularités

Les « bonnes propriétés » de la fonction φ (le filtre) se transportent sur le résultat de la convolution.

Application : filtrage et en particulier gaussien

Propriétés importantes (4)

- **Convolution par une exponentielle complexe**

Soit la convolution de h(t) réponse impulsionnelle par :

$$f(x) = e^{2\pi j f x}$$ f : fréquence et $j^2 = -1$

$$s(x) = h(x) * e^{2\pi j f x} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u).e^{2\pi j f (x-u)} du$$

$$s(x) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u).e^{-2\pi j f u} du \right] e^{2\pi j f x} = \hat{h}(f) e^{2\pi j f x}$$

S(x) est sinusoïdal d'amplitude complexe : $\hat{h}(f)$

$$\boxed{\hat{h}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u).e^{-2\pi j f u} du}$$: Transformée de Fourier de h

Filtrage linéaire des images

- Une image est un signal numérique bidimensionnel :

$$I(i,j) \rightarrow nvg \quad \text{avec :} (i,j) \in Z^2 \quad 0 \leq i \leq N \quad 0 \leq j \leq M$$

NxM : taille de l'image.

- Le filtre est définit par sa réponse impulsionnelle h(k,l) :

$$h(k,l) \rightarrow nvg \quad \text{avec :} (k,l) \in Z^2$$

$$\text{et} \quad -K/2 \leq k \leq K/2 \quad -L/2 \leq l \leq L/2 \quad (K/2, L/2) \in Z^2$$

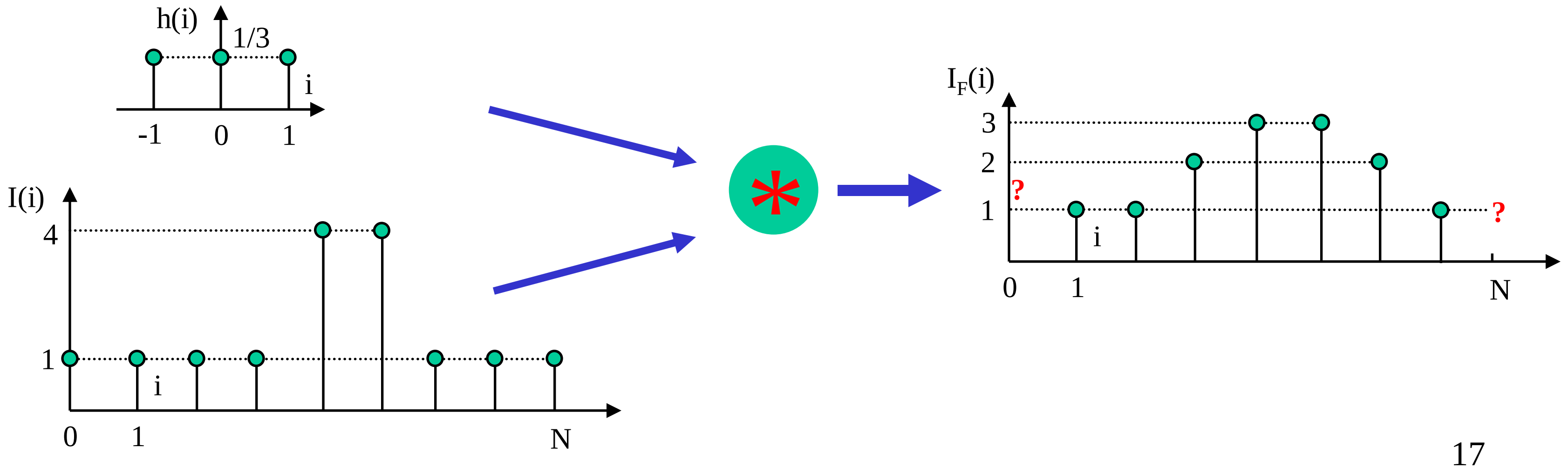
(K+1)x(L+1) : taille du filtre bidimensionnel non causal

Filtrage par convolution(1)

- Le filtrage est réalisé par une convolution discrète non causale :

$$I_F(i,j)=I(i,j)*h(i,j)=\sum_{k=-K/2}^{K/2}\sum_{l=-L/2}^{L/2}h(k,l).I(i-k,j-l)$$

- Exemple en une dimension :



Filtrage par convolution(2)

- Exemple sur une image :

2	2	2	2	2	2	2
2	3	3	4	3	3	2
2	3	5	6	7	3	2
2	4	6	7	6	4	2
2	3	6	8	7	3	2
2	3	3	4	3	3	2
2	2	2	2	2	2	2

*

1	1	1
1	1	1
1	1	1

=

?	?	?	?	?	?	?
?	24	30	34	32	26	?
?	30	41	47	43	32	?
?	33	48	58	57	36	?
?	31	44	50	45	32	?
?	25	33	37	34	26	?
?	?	?	?	?	?	?

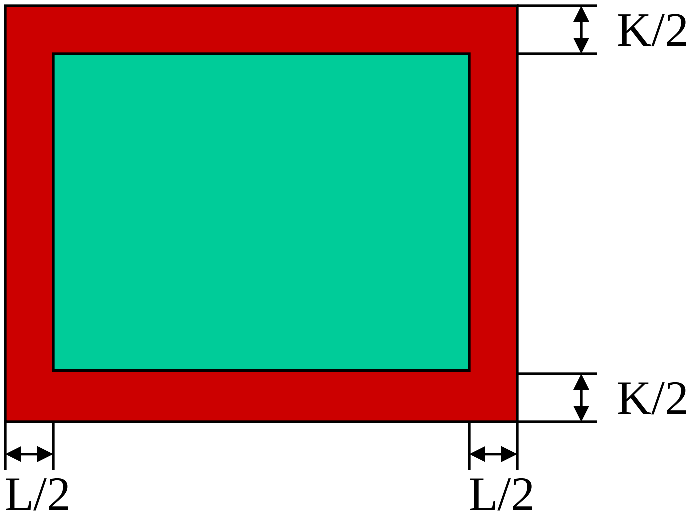
$$\begin{aligned} I_F(i,j) = {} & 1.I(i-1,j-1) + 1.I(i-1,j) + 1.I(i-1,j+1) + \\ & 1.I(i,j-1) + 1.I(i,j) + 1.I(i,j+1) + \\ & 1.I(i+1,j-1) + 1.I(i+1,j) + 1.I(i+1,j+1) \end{aligned}$$

Coût de calcul : 9 multiplications, 8 additions par pixel

Effet de bords (?)

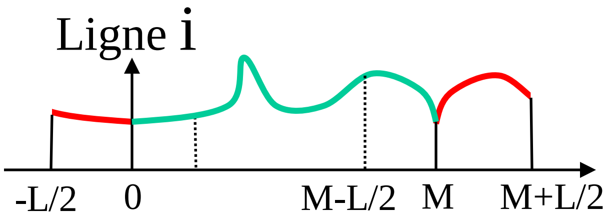
• Les filtres ont toujours un nombre impair de coefficients (K+1)x(L+1)

• Si l'image est de taille NxM, le calcul de la convolution fournira une image (N-K)x(M-L). Les K/2 premières et dernières lignes sont perdues, de même pour L/2 premières et dernières colonnes.



Solutions possibles :

- Réduction de la taille de l'image résultat,
- Filtrage avec les pixels disponibles,
- Effet miroir de l'image source.



Convolution : mise en œuvre (1)

• **Coût de calcul**

Soit un filtre à K^2 coefficients et une image à N^2 pixels

- Par pixel il y a K^2 multiplications et K^2-1 additions,

Supposons N = 512 (taille d'une image standard),

K = 3 (filtre assez petit : 3x3),

2 359 296 multiplications et 2 097 152 additions

Si on souhaite le temps réel : 25 i/s

$\approx 10^8$ opérations/seconde

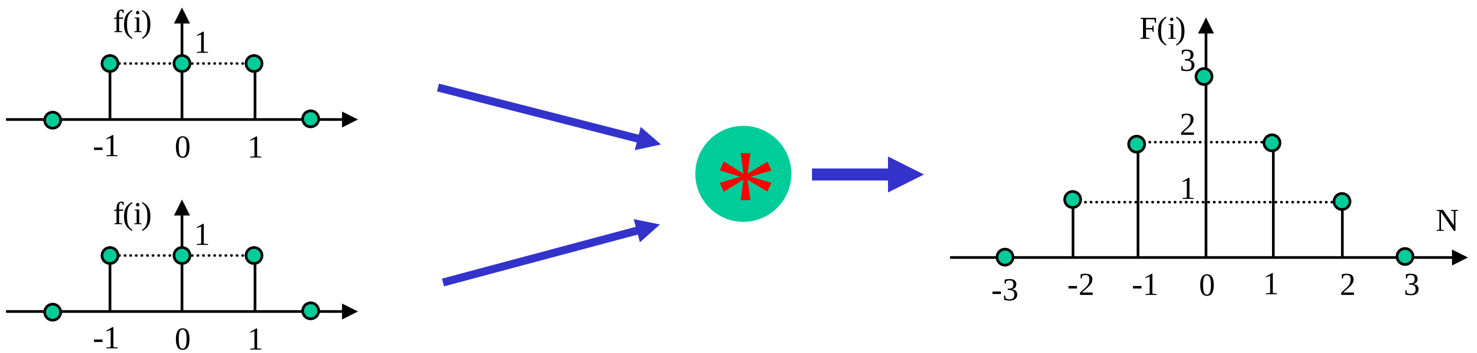
- En pratique on choisit des filtre de taille relativement faible 3x3 à 9x9,
- Il est souhaitable d'avoir les images et les filtres codés sur des nombres entiers.

Convolution : mise en œuvre (2)

Réduction du temps de calcul

- Supposons le filtre 1D suivant :F(i) = [1 2 **3** 2 1]
- ce filtre peut être obtenu à partir de la convolution :

F = f∗f où f = [1 **1** 1]



0 1 1 1 0	0 1 1 1 0	0 1 1 1 0	0 1 1 1 0
+ 0 1 1 1 0	+ 0 1 1 1 0	+ 0 1 1 1 0	+ 0 1 1 1 0
F(-4) = 0	F(-3) = 0	F(-2) = 1	F(-1) = 2

Convolution : mise en œuvre (3)

En 2D

- Supposons le filtre 2D suivant :$F(i,j) = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$

F(i,j) peut être obtenu à partir de la convolution des filtres f(i,j) :

$$f(i,j) = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad F(i,j) = f(i,j) * f(i,j) = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} * \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Intérêt :

- soit l'image I(i,j) que l'on veut convoler avec F(i,j),

On a le choix entre deux possibilités (associativité de la convolution)

Convolution : mise en œuvre (4)

soit calculer : $I(i,j)*F(i,j)$
ou alors : $I(i,j) * f(i,j) * f(i,j)$

Dans le premier cas il y a (25 +24) = 49 opérations par pixels,
Dans le second cas 2(9+8) = 34 opérations par pixels.

Du point de vue temps de calcul la seconde solution
est plus performante

Inconvénient : tous les filtres (1D et 2D) ne peuvent pas être décomposés en produit de convolution de filtres plus simples.

Convolution : mise en œuvre (5)

Construction d’un filtre 2D à partir de filtres 1D :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Filtre directionnel}$$

Gain en calculs :

- convolution 1D : 2 (5+4) = 18 opérations/pixel,
- convolution 2D : (25+24) = 49 opérations/pixel.

Convolution : mise en œuvre (6)

La construction d'un filtre 2D à partir de filtres 1D impose que le filtre 2D soit à « noyau séparable »

Le filtre gaussien est dit à noyau (Kernel) séparable :

$$G(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right] \qquad I(x,y)*G(x,y)=I(u,v)*\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$I(x,y)*G(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}I(u,v).\exp\left[-\frac{(x-u)^2+(y-v)^2}{2\sigma^2}\right]du.dv$$

$$I(x,y)*G(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}I(u,v).\exp\left[-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right]du\right)}\exp\left[-\frac{(y-v)^2}{2\sigma^2}\right]dv$$

$$I(x,y)*G(x,y)= \quad I(x,y)*G_x(x) \quad *G_y(y)$$

G(x,y) peut donc être appliqué à partir de deux convolutions successives avec les deux filtres 1D.

filtrage

On décrit un filtre par :

- sa réponse impulsionnelle : $h(k,l)$
- sa réponse fréquentielle : $\hat{h}(f_x, f_y)$

$$\boxed{\hat{h}(f_x, f_y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(k,l) . e^{-2\pi j \left(f_x k + f_y l \right)}}$$

Remarque :

$$\hat{h}(f_x = 0, f_y = 0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(k,l) = C$$

Si C = 0 alors c'est un filtre passe-haut
Sinon c'est un filtre passe-bas

Filtrage passe-bas(1)

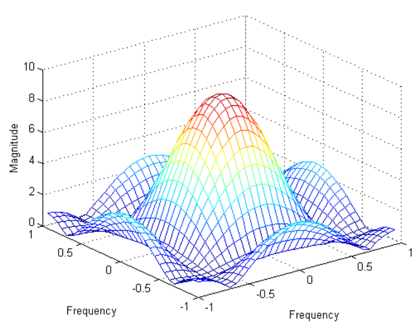
Propriétés - intérêt :

- atténuation des hautes fréquences ⇒ réduction des variations brutales dans l’image ⇒ effet de flou,

- si l’image est altérée par du bruit concentré dans les hautes fréquences et qu’elle possède assez peu de variations brutales le filtrage passe bas est une bonne solution.

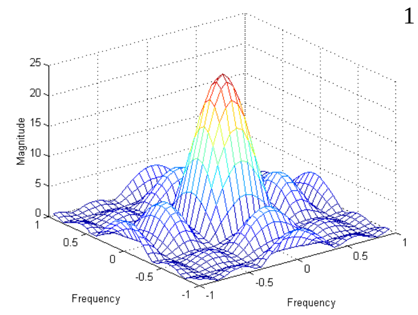
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

(3x3)



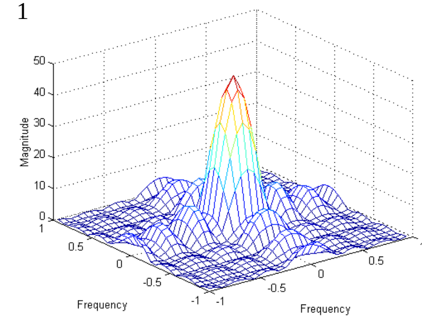
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

(5x5)



$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

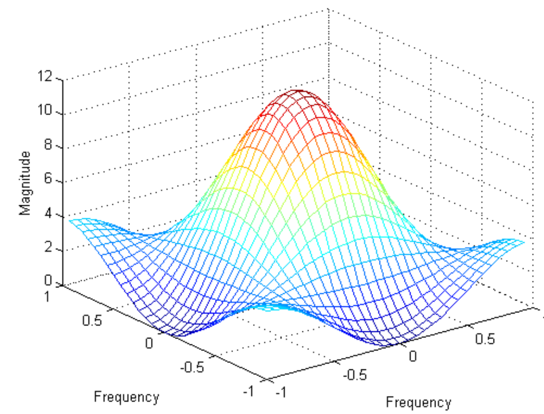
(7x7)



Filtrage passe-bas(2)

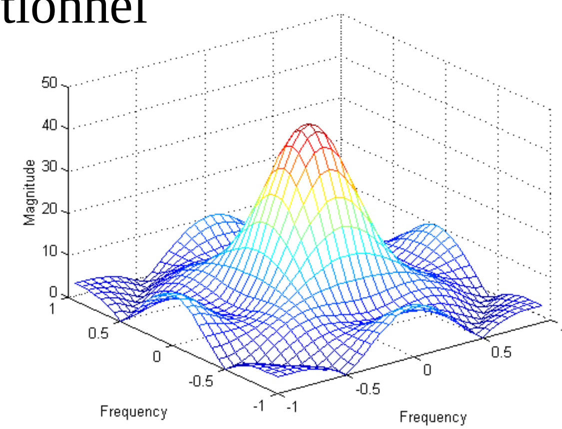
Autres exemples de filtres:

1	**1**	**1**
1	**4**	**1**
1	**1**	**1**



Filtre directionnel

1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**4**	**1**	**1**
1	**4**	**8**	**4**	**1**
1	**1**	**4**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**



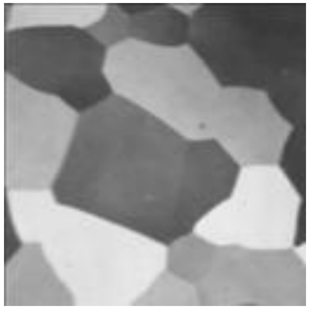
Note :
- Les filtres numériques sont périodiques et continus en fonction de la fréquence.
- La période fréquentielle est égale à la fréquence d'échantillonnage.
- Si on admet $T_e=1/f_e=1$ alors fmax = ½ ou $\omega_{max} = \pi$.
- Les logiciels normalisent les graphiques
 $[-1/2(-\pi),1/2\ (\pi)] \longrightarrow [-1,1]$

Filtrage passe-bas(3)

Exemples d'applications sur des images:

Image originale

Image originale

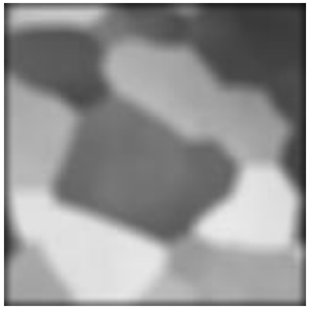


Filtres

$$\frac{1}{25}\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Image filtrée

Image filtrée



Filtrage passe-bas(4)

Exemples d'applications sur une image bruitée:

Image originale

Filtres

1/9

1	**1**	**1**
1	**1**	**1**
1	**1**	**1**

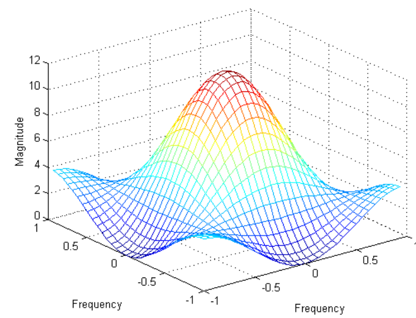


Image filtrée

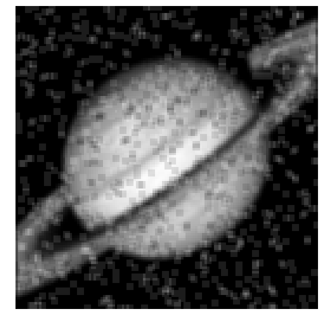
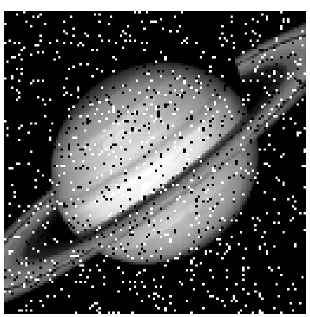


Image bruitée



1/25

1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

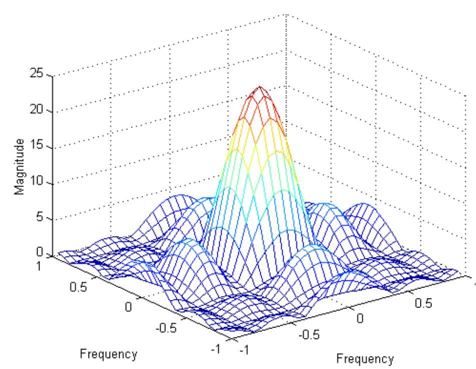
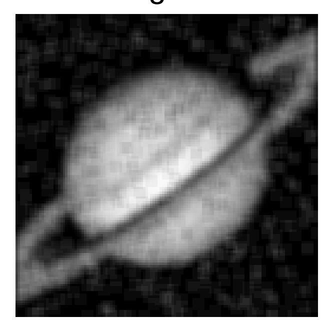


Image filtrée



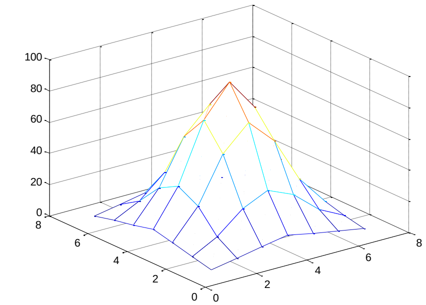
Filtrage gaussien(5)

Intérêt :

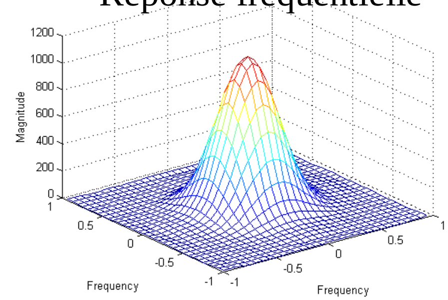
- filtre séparable et indéfiniment dérivable,
- meilleure résolution spatio-fréquentielle possible, la plus courte réponse spatiale pour la bande passante fréquentielle la plus faible,
- invariant par rotation (isotropie),
- un seul paramètre de réglage : σ,
- réponse fréquentielle gaussienne.

Filtre 7x7

1	4	7	10	7	4	1
4	12	26	33	26	12	4
7	26	55	71	55	26	7
10	33	71	91	71	33	10
7	26	55	71	55	26	7
4	12	26	33	26	12	4
1	4	7	10	7	4	1



Réponse fréquentielle



Construction d’un filtre gaussien

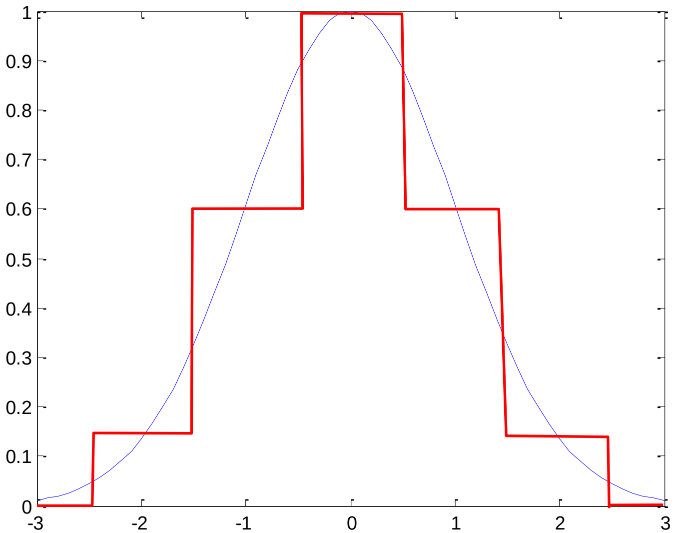
1. Choisir une taille impaire pour le masque

Pour que le masque couvre environ 98,76% de l'aire sous la courbe, on choisit en général

Taille= w = 5 * σ   (où σ est en pixels)

2. Echantillonner la courbe de Gauss

$$G(x) = e^{\frac{-x^2}{2.\sigma^2}}$$



Construction d'un filtre gaussien

3. Calculer des valeurs entières pour les grandeurs du masque

- Fixer la plus petite valeur à 1
- Appliquer le facteur multiplicatif aux autres coefficients et arrondir
- Pour conserver un gain unitaire. Calculer le facteur de gain à appliquer (1/somme des coefficients du masque)
- Ne pas oublier que ce n'est qu'une approximation d'une gaussienne

Exemple : $\sigma = 1$

x	G(x)	Coeff
0	1	7
1	0,6	4
2	0,14	1

$$g = [1,4,7,4,1]$$

$$G(k,l) = \frac{1}{289}[g * g'] = \frac{1}{289}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 28 & 16 & 4 \\ 7 & 28 & 49 & 28 & 7 \\ 4 & 16 & 28 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtrage passe-haut(1)

Propriétés - intérêt :

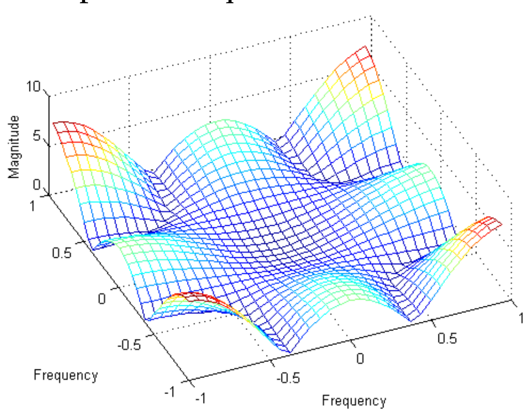
- atténuation des basses fréquences ➡ augmentation des variations brutales dans l'image ➡ effet de piqué,

- si l'image est constituée d'objets bien contrastés, le filtre passe haut met en évidence les contours .

Filtre 3x3

1	-1	1
-1	0	-1
1	-1	1

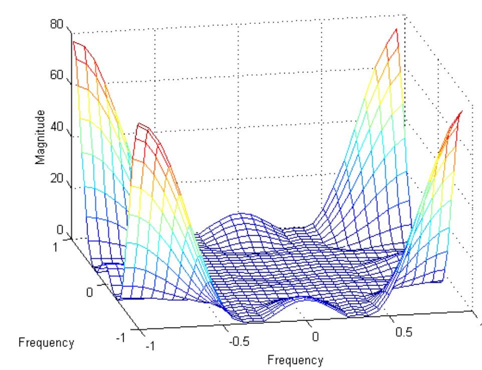
Réponse fréquentielle



Filtre 5x5

1	-2	3	-2	1
-2	4	-6	4	-2
3	-6	8	-6	3
-2	4	-6	4	-2
1	-2	3	-2	1

Réponse fréquentielle



Filtrage passe-haut(2)

Image originale

Image filtrée

Image originale

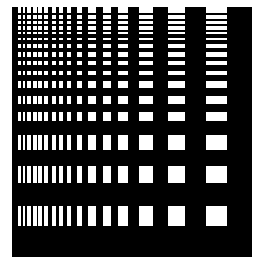
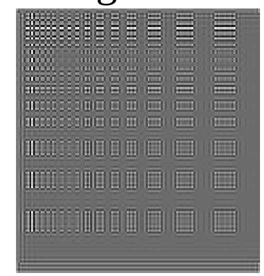
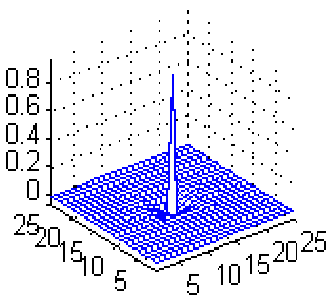
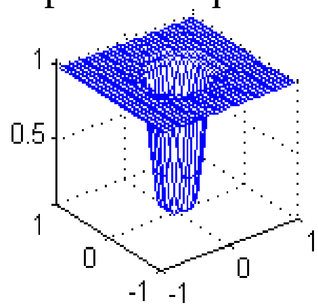


Image filtrée

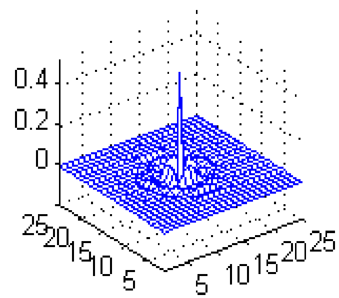




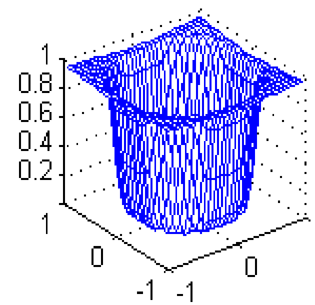
Réponse fréquentielle



Réponse impulsionnelle



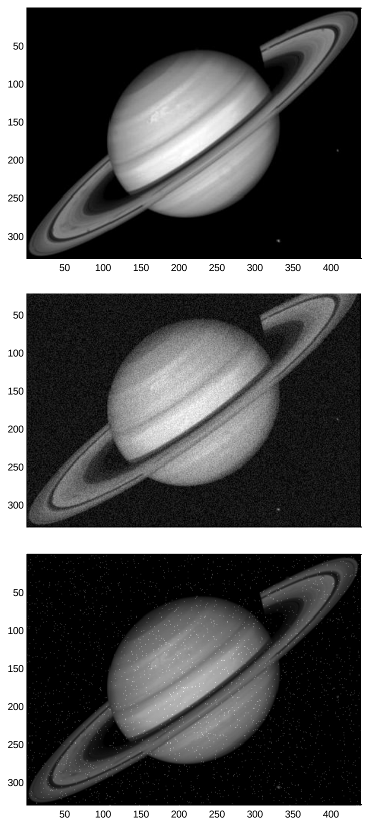
Réponse fréquentielle



Réponse impulsionnelle

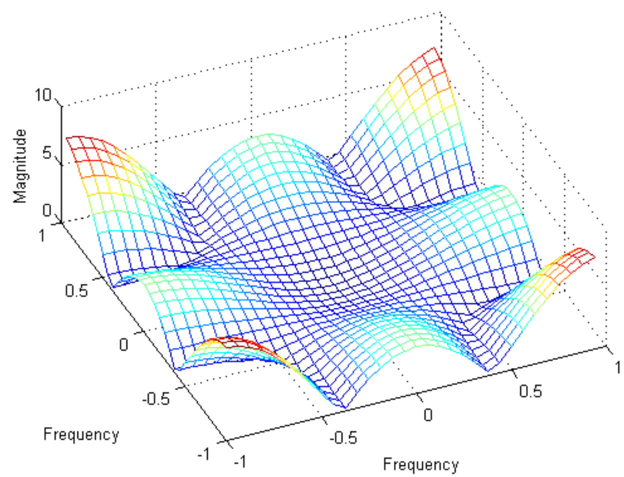
Filtrage passe-haut(3)

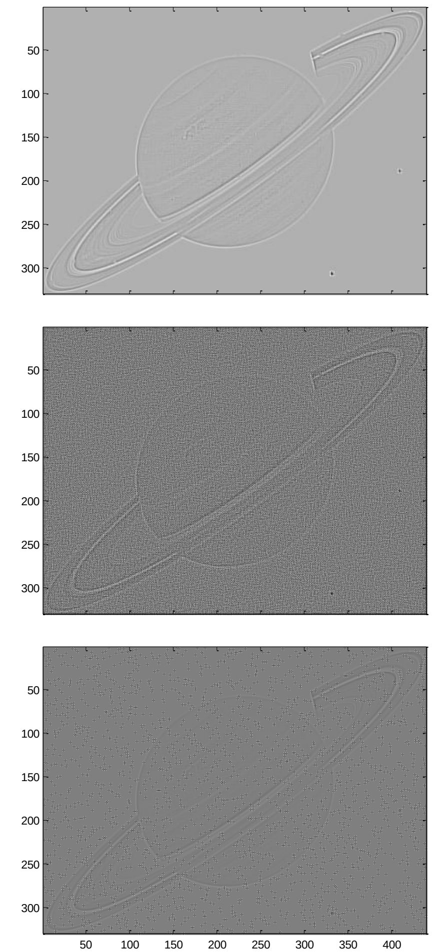
Exemples d'application sur une image bruitée:



Filtre

1	-1	1
-1	0	-1
1	-1	1





Filtrage récursif(1)

Filtrage par convolution :

$$I_F(k,l) = \sum_{k=-K/2}^{K/2} \sum_{l=-L/2}^{L/2} h(k,l).I(i-k, j-l)$$

Le résultat $I_F(i,j)$dépend de :
- des valeurs de I, dans le voisinage de (i,j), (non-causalité)
- des valeurs de k(k,l), la fonction filtre.

Filtrage récursif :

$$I_F(k,l) = \sum_{k=-K/2}^{K/2} \sum_{l=-L/2}^{L/2} a(k,l).I(i-k, j-l) + \sum_{k=-K'/2}^{K'/2} \sum_{l=-L'/2}^{L'/2} b(k,l).I_F(i-k, j-l)$$

Le résultat $I_F(i,j)$dépend de :
- des valeurs de I, et de $\mathbf{I_F}$ dans le voisinage de (i,j), (non-causalité)
- des valeurs de a(k,l) et b(k,l) représentant le filtre.

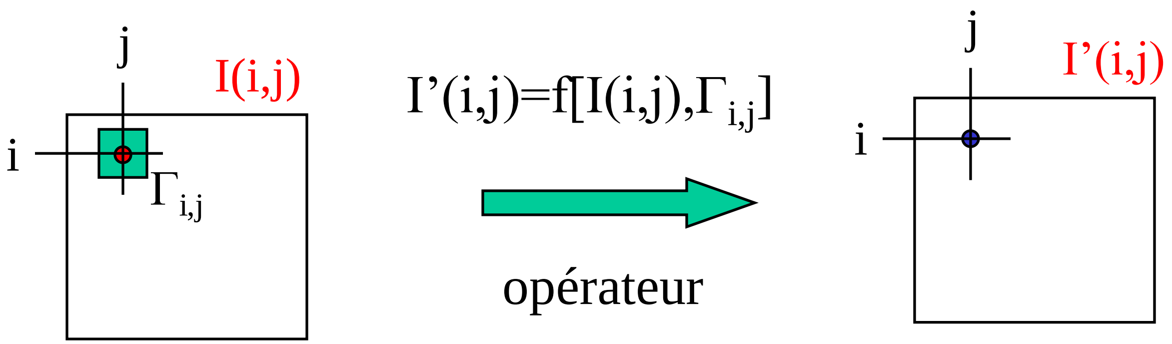
Filtrage récursif(2)

Conséquences :

-la réponse impulsionnelle peut être infinie RII,

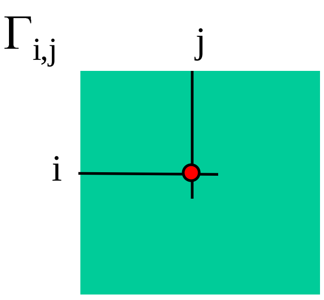
- le gain en temps de calcul est considérable pour un filtre RII
- il est possible d'obtenir un filtrage puissant avec peu de coefficients,
- en pratique : génération de deux équations aux différences (dans les directions positives et négatives),
- Fonction de transferts bilatérales (stabilité des filtres!),

Filtrage non-linéaire



f est une fonction non-linéaire

Exemple du filtre médian



28	56	102
54	95	64
14	100	67

Classement par ordre croissant

14
28
54
56
64
67
95
100
102

Affectation de la valeur de la médiane au pixel central

28	56	102
54	**64**	64
14	100	67

Filtre médian

Image bruitée

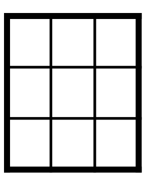
Image débruitée avec un Filtre médian 3x3

Filtre médian

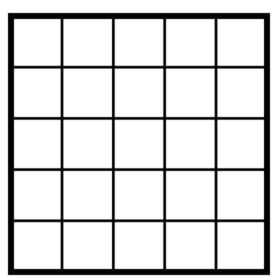
Caractéristiques :

- plus le masque est grand plus le filtrage est efficace mais plus il déforme l'image,
- suppression des valeurs qui semblent illogiques dans la suite,
- filtrage surtout utilisé pour visualiser des images,
- filtre très efficace sur du bruit impulsionnel,
- une pondération des points peut être effectuée avant classement,
- plusieurs types de voisinage sont possibles :

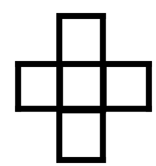
3x3



5x5



3 directionnel

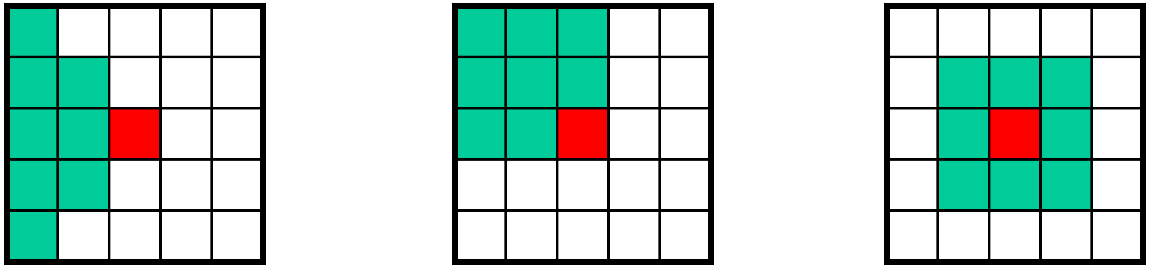


Filtre de Nagao

Principe :

Remplacer le pixel central par la valeur moyenne des pixels contenus dans une fenêtre particulière. Il s'agit de choisir la fenêtre la mieux adaptée parmi un certain nombre de fenêtres prédéfinies.

9 fenêtres sont définies, chacune contenant 9 pixels, *dont le pixel à remplacer*. Elles s'inscrivent dans une fenêtre de taille 5x5 centrée sur le pixel à modifier.



- 4 fenêtres sont issues de celle de gauche (par rotations de 0, 90, 180 et 270 degrés) ;
- 4 sont issues de celle du milieu de la même façon ;
- 1 est celle de droite.

Filtre de Nagao

La moyenne de la fenêtre dont la variance est la plus faible définit la nouvelle valeur du pixel central.

Ce filtrage permet de lisse l'image (moyennage). Le fait de choisir la fenêtre de plus petite variance implique que la moyenne est faite sur une région assez homogène. Les contours sont conservés : un pixel proche d'un contour sera remplacé par une valeur homogène à la zone à laquelle il appartient, et non pas par une valeur moyenne entre la zone à laquelle il appartient et celle de l'autre côté du contour.

Filtre de Nagao - exemples

Bruit gaussien

Image filtrée

Bruit impulsionnel

Image filtrée

Filtre Bilatéral (1)

Le principe combine les avantages des filtres médian et convolutif tout en se débarassant de leurs défauts. L'idée consiste à faire un filtrage gaussien ou rectangulaire mais sur les pixels de valeurs proches dans le voisinage.
Il y a donc deux paramètres : la taille de la fenêtre et la distance de niveau de gris au delà de laquelle on ne compte pas le pixel dans le voisinage.
Cet algorithme s'avère être très efficace, robuste et rapide. Il préserve les contours.

Convolution :

$$I_F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x-u).h(u)du$$

Filtrage bilatéral :

$$I_F(x) = \frac{1}{K(x)} \int_{-\infty}^{\infty} I(x-u).h(u).\boxed{[s\|I(x-u)-I(x)\|]}du$$

avec : $K(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u).s\|I(x-u)-I(x)\|.du$

Filtre Bilatéral (2)

Filtrage bilatéral :

$$I_F(x) = \frac{1}{K(x)} \int_{-\infty}^{\infty} I(x-u).h(u).\boxed{\left[s\left\|I(x-u)-I(x)\right\|\right]}du$$

En présence de contour et $\forall u \neq 0, \Delta = \left\|I(x-u)-I(x)\right\|$ est grand

Si s est une gaussienne de moyenne nulle alors $\forall u \neq 0, \quad s(\Delta) \rightarrow 0$,
$pour\, u = 0 \quad \Delta = 0 \Rightarrow s(\Delta) = 1$

➡ le filtrage convolutif est supprimé : $I_F(x) = I(x)$

En présence de régions uniformes bruitées : $\Delta = \left\|I(x-u)-I(x)\right\|$ est petit

Si s est une gaussienne de moyenne nulle alors $s(\Delta) \rightarrow 1$, le filtrage convolutif est totalement appliqué

En général :

$h(x) = e^{\frac{-x^2}{2.\sigma_h^2}}$: masque de convolution gaussien

$s(x) = e^{\frac{-x^2}{2.\sigma_s^2}}$: masque de pondération gaussien

Filtre Bilatéral (3)

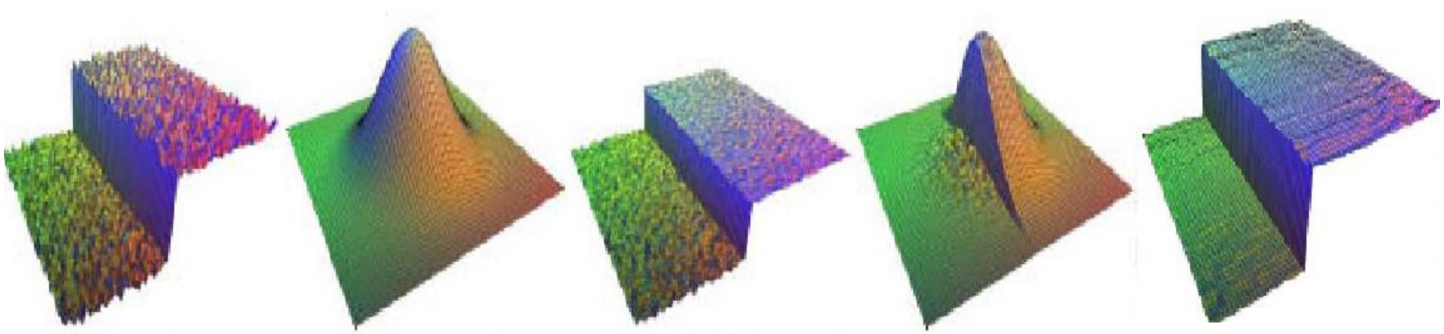
Filtrage bilatéral classique en numérique avec des fonctions gaussiennes:

$$I(x) = \frac{1}{C} . \sum_{u \in V(X)} \exp\left(\frac{-\|x-u\|^2}{2.\sigma_h{}^2}\right) . \exp\left(\frac{-\|I(x)-I(u)\|^2}{2.\sigma_s{}^2}\right) . I(u)$$

Deux paramètres de réglage :

σ_h : puissance du filtrage linéaire

σ_s : puissance du filtrage non-linéaire



Données à filtrer

Noyau de convolution h(x)

Influence de s(x) sur les intensités pour le pixel central

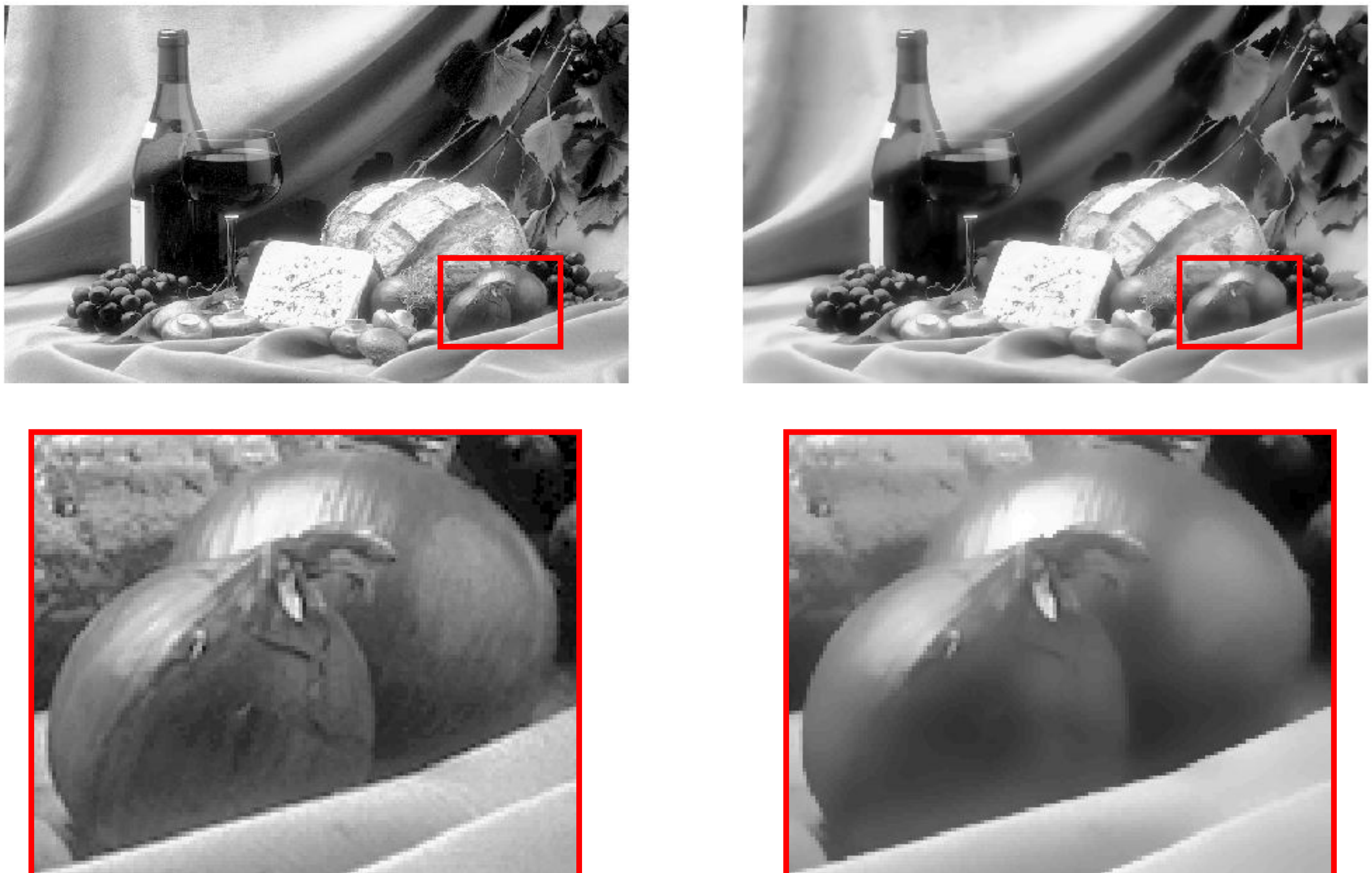
Coefficients : h(x).s(x) Pour le pixel central

Données filtrées

Filtre Bilatéral (4)

Tomasi et Manduchi, ICCV 98

Filtre Bilatéral (5)



Tomasi et Manduchi, ICCV 98

Filtre Bilatéral (6)

Image originale   Image filtrée passe-bas   Image filtrée « bilatérale »

Weiss, Siggraph 2006