Morphologie Mathématique

Morpho.Math. Historique

1964 G. MATHERON : Mathématicien
J. SERRA : Physicien

J. SERRA : Docteur Ingénieur de l'école des Mines de Nancy (1962), Docteur en géologie mathématique de l'université de Nancy (1967).

1968 : création du Centre de Géostatistique et Morphologie Mathématiques à Fontainebleau (ENSMP)

1971 : commercialisation de l'analyseur de texture TAS en collaboration avec LEITZ

1984 : Développement du logiciel VISOMAT (ALLEN-BRADLEY)

1987 : Création de VISILOG avec NOESIS

Définition

THEORIE ENSEMBLISTE DE L'IMAGE

Géométrie intégrale ↑ Probabilités géométriques ↑ Analyse harmonique ↑ Processus stochastiques ↑

But : **CARACTERISER quantitativement des images ou objets 3D**

Méthodes souvent mises en œuvre dans des approches empiriques sans le savoir

G. MATHERON
J. SERRA

METHODOLOGIE nouvelle du traitement d'images
Outils puissants et appropriés

Définition (J.SERRA)

Mathématique

Algèbre des treillis
Géométrie ensembliste et intégrale
Modèles topologico-probabilistes

Physique

Démarche fondée sur la théorie des ensembles destinée à lier propriétés physiques des objets

Traitement du signal

Techniques non linéaires de traitement du signal reposant sur des opérations de sup. et d'inf.

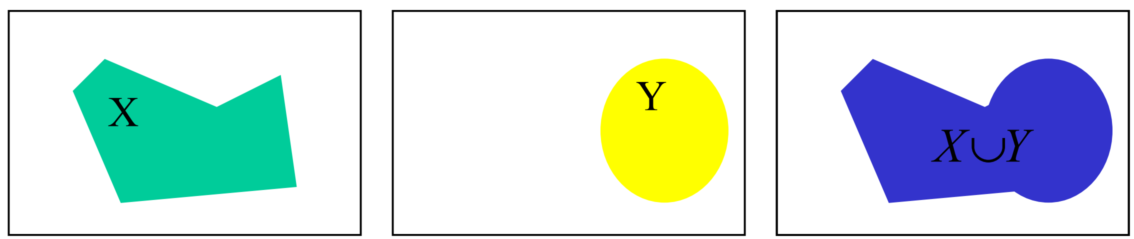
Informatique

Algorithmes permettant d'effectuer des traitements d'image sur ordinateur ou sur des matériels spécialisés

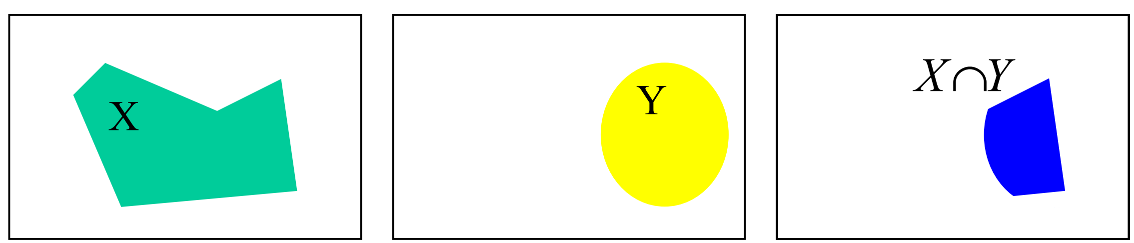
Transformations ensemblistes classiques

Considérons deux ensembles X et Y les opérations classiques sont :

- l'union : $X \cup Y$



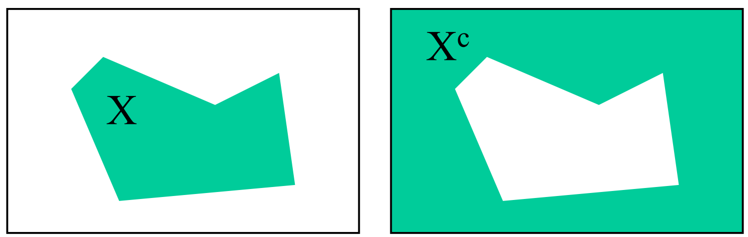
- l'intersection : $X \cap Y$



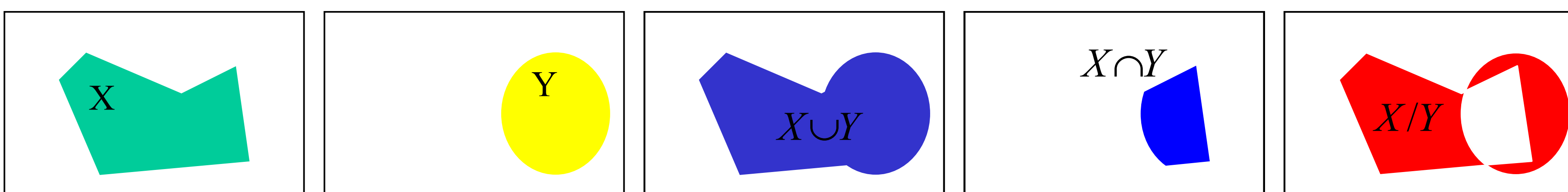
Transformations ensemblistes classiques

Considérons deux ensembles X et Y les opérations classiques sont :

- la complémentation : $X^c=\{x : x\notin X\}$ $\quad x\in X^c \Leftrightarrow x\notin X$

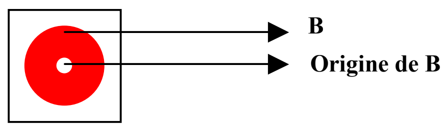


- la différence ensembliste : $X/Y=X\cup Y-X\cap Y$



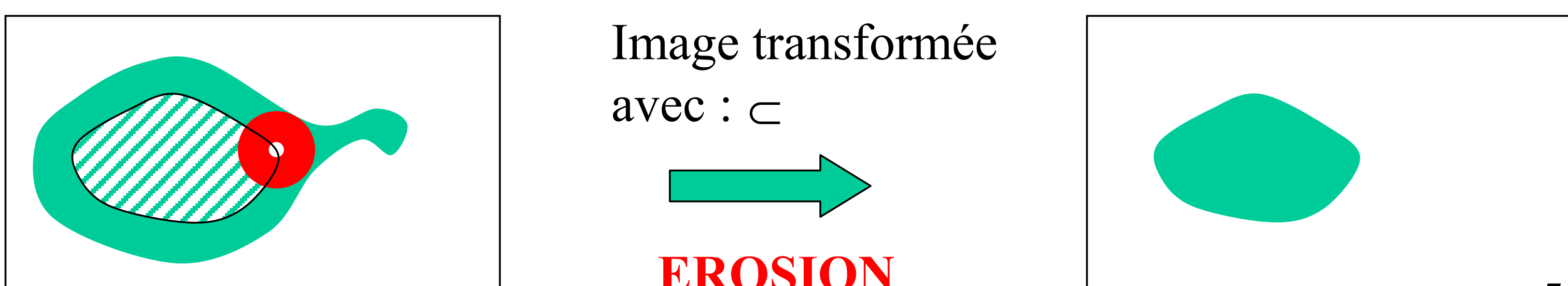
Transformations en tout ou rien par un élément structurant

Soit un élément B, de géométrie connue que l'on appelle élément structurant, par exemple un disque avec le centre comme choix de l'origine:



La transformation en tout ou rien (**T**) consiste à déplacer l'élément structurant sur l'image. Pour chaque position on pose une question $(\cap, \cup, \subset)$. La réponse est binaire (vrai/faux). L'ensemble des centres de B pour lesquels la réponse est positive forme l'image transformée.

Exemple :

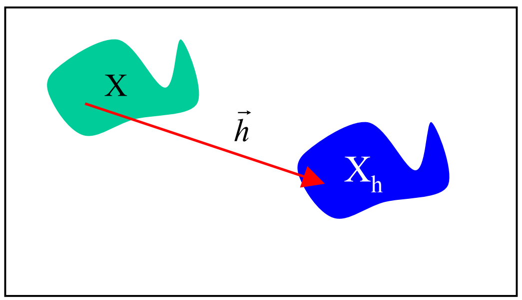


Conditions que doit remplir une transformation en tout ou rien

1. Invariance par translation

Si T est une transformation alors : $T(X_h) = [T(X)]_h$

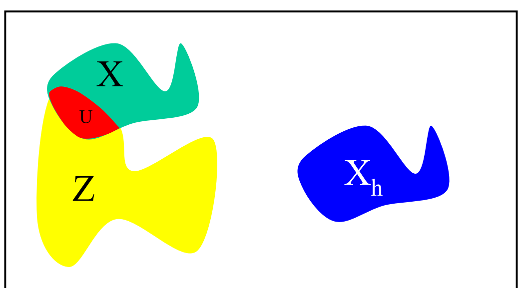
T est indépendante de l'origine



$X = \{x : x \in X\}$

$X_h = \{y : y = x + h, x \in X\}$

Exemple de l'intersection :



$X \cap Z = U$
$X_h \cap Z = \phi$ ⇨ $X_h \cap Z \neq (X \cap Z)_h$

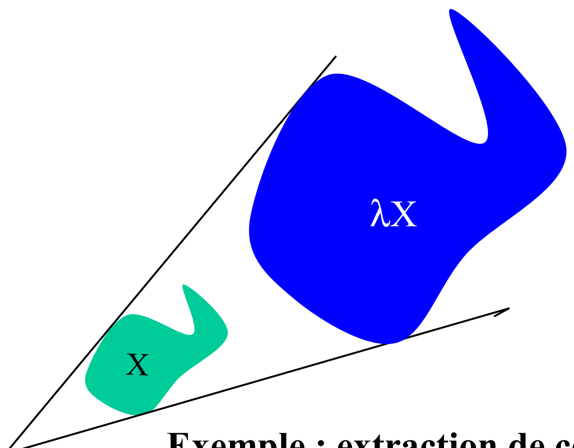
L'intersection ne vérifie pas l'invariance par translation

On a : $(Z \cap X_h) = (X \cap Z_{-h})_h$

Conditions que doit remplir une transformation en tout ou rien

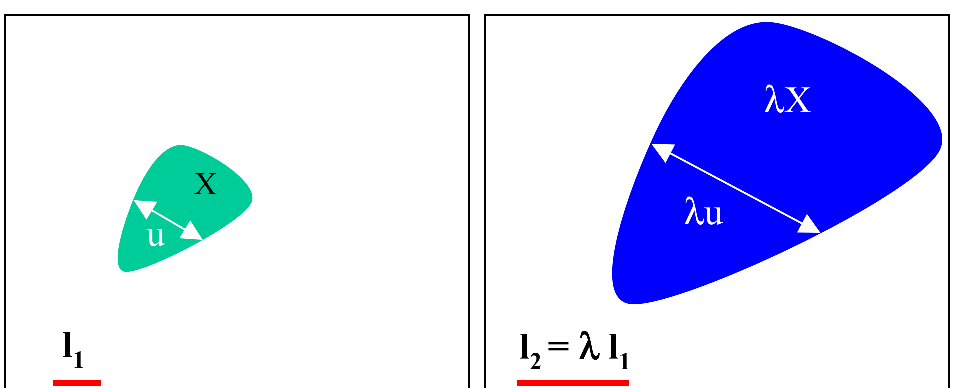
2. Compatibilité avec les homothéties

Si T est une transformation alors : $T(\lambda X) = \lambda[T(X)] \quad avec \quad \lambda > 0$



Le centre de gravité d'un objet est compatible avec l'homothétie

Exemple : extraction de cordes



Extraire les cordes de longueur u sur X est équivalent à extraire les cordes de longueur λu sur λX

$$T(X) = \frac{1}{\lambda} T(\lambda X)$$

Propriétés algébriques des transformations en tout ou rien

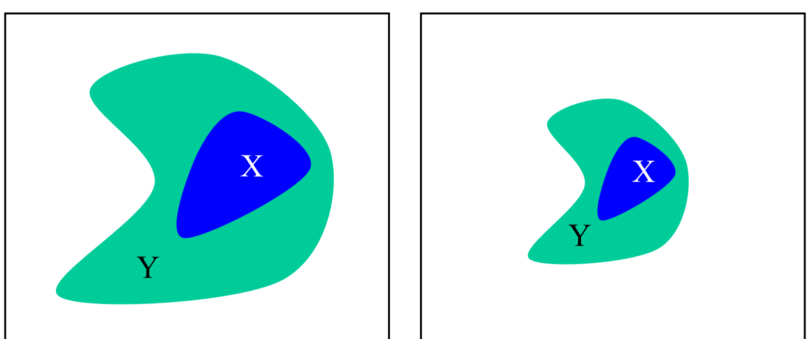
1. Propriétés algébriques

1.1 Croissance

Croissance d'une fonction : $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

Croissance des ensembles : $x\subset y \Rightarrow f(x)\subset f(y)$

Exemple : l'homothétie est croissante

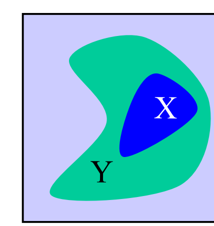


$$X\subset Y \Rightarrow \lambda X\subset \lambda Y$$

Remarques :

$$X\subset Y \Rightarrow X\cap Y^c=\phi$$

$$Y\subset X^c \Rightarrow X\cap Y=\phi$$



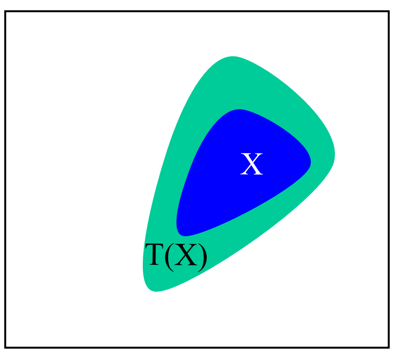
Propriétés algébriques des transformations en tout ou rien

1.2 Extensivité

T est extensive si : $X \subset T(X)$

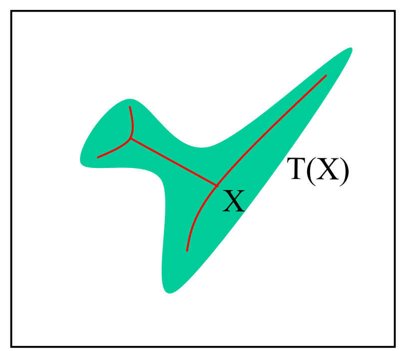
T est anti-extensive si : $T(X) \subset X$

Extensive



Epaississement

Anti-extensive



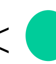
Squelette

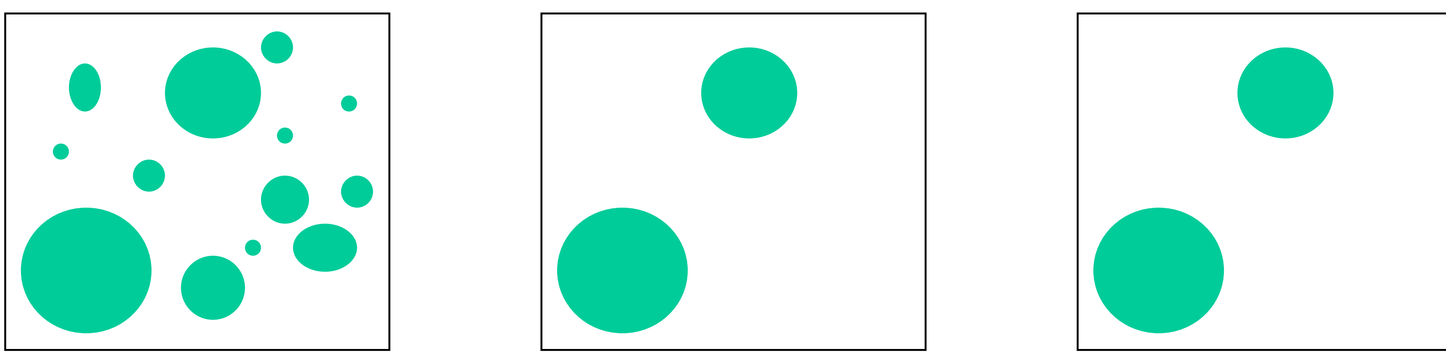
Propriétés algébriques des transformations en tout ou rien

1.3 Idempotence

T est idempotente si : $T(X) = T[T(X)]$

Une opération de tamisage est idempotente

Soit T la transformation qui supprime les particules de taille < 

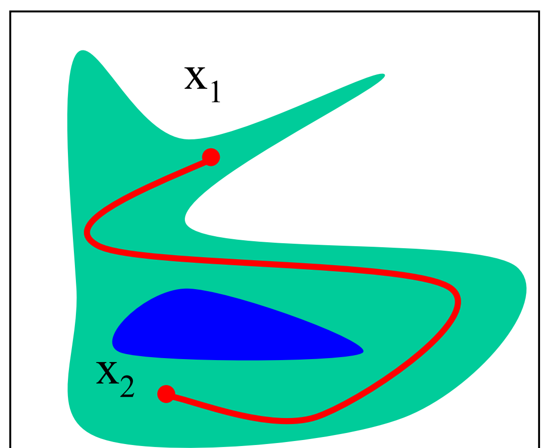


X $\qquad$ $T(X)$ $\qquad$ $T[T(X)]$

Quelques notions de topologie

1.1. Connexité

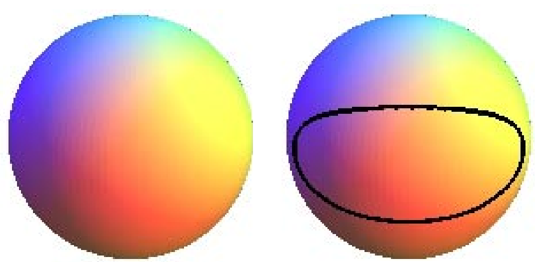
Un ensemble X est connexe si à toute paire de points x_1 et x_2 appartenant à X, on peut tracer au moins un chemin totalement inclus dans X.



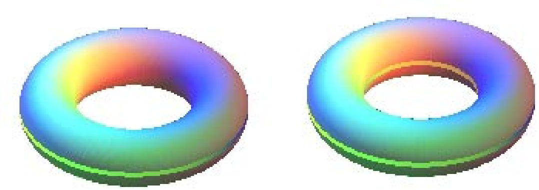
Quelques notions de topologie

1.2. Genre d’une surface

Le *genre* d'une surface connexe est le nombre maximum de courbes fermées simples sans points communs que l'on peut tracer à l'intérieur de cette surface sans la déconnecter (c'est-à dire que le complémentaire de ces courbes reste connexe) ; concrètement, si l'on considère que la surface est en papier, le genre est le nombre maximal de découpages fermés que l'on peut effectuer sans que la surface ne soit séparée en plusieurs morceaux.



La sphère est de genre 0 : toute courbe fermée simple la déconnecte



Le tore est de genre 1 : une courbe peut le laisser connexe, mais deux courbes sans point commun le déconnectent.

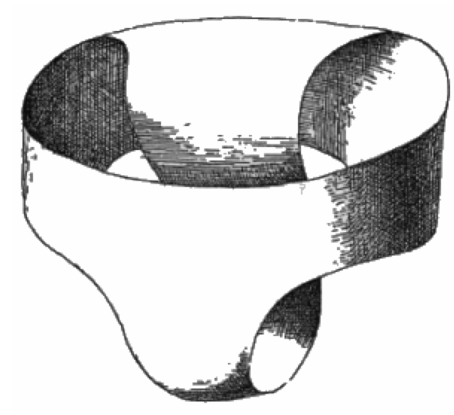
Quelques notions de topologie

Une surface close (sans bord) percée d'un nombre fini de trous conserve le genre de la surface close associée.

Exemples

- le plan (sphère moins un point), le cylindre, avec ou sans bords (sphère percée de 2 trous), sont de genre nul.

Découper un ruban de Möbius en son centre ne le déconnecte pas ; son genre est égal à 1.



Le slip de Möbius est de genre 2.

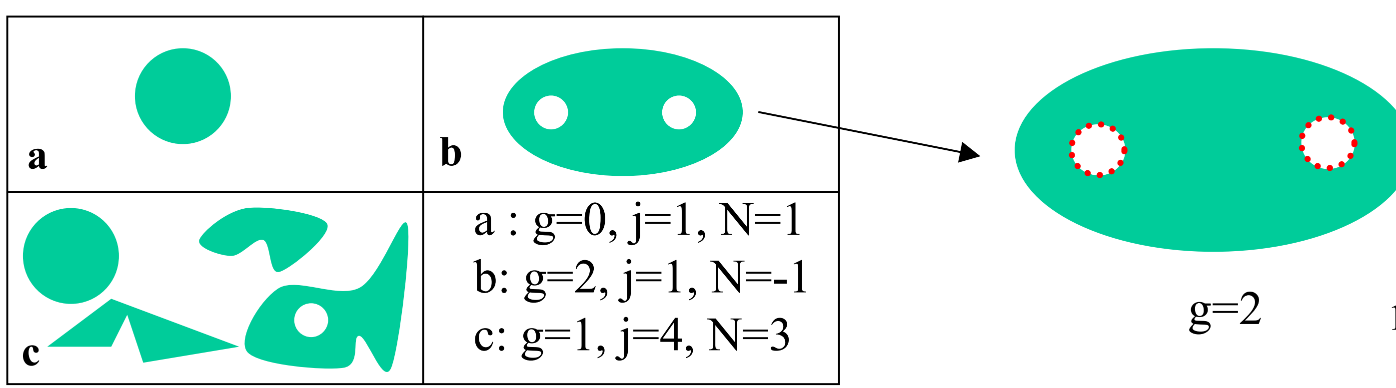
Quelques notions de topologie

1.3. Nombre de connexité

Soit un ensemble X de R^2 ou R^3 constitué de j surfaces S_i de genre $g_i(S_i)$ délimitant l'ensemble X. Le nombre de connexité de X se calcule par :

$$N(X) = \sum_{i=1}^{j} \left(1 - g_i(S_i)\right)$$

La sphère et le disque ont un genre égal à 0, le nombre de connexité est donc égal à 1.
Le tore a un genre égal à 1, le nombre de connexité est donc égal à 0.



Propriétés topologiques des transformations en tout ou rien

1.1. L'homotopie

Une transformation T est homotopique si elle ne modifie pas le nombre de connexités :

$$N[T(X)] = N(X)$$

1.2. Connexité

Une transformation T préserve la connexité si, X étant connexe, on a T(X) connexe.

Transformations en tout ou rien

1. Définition

Soit X un ensemble,
Soient A(x) et B(x) deux sous ensembles liés,
Une transformation tout ou rien consiste à tester si A(x) est dans X^c et B(x) dans X.

$$\varphi(X)=\{z : Az(z)\subset X^c ; Bz(z)\subset X\}$$

Quand A=ϕ, φ devient l'érodé de X par l'élément structurant B et s'écrit:

$$\psi_B(X)=\{z : Bz(z)\subset X\}$$

Transformations en tout ou rien

2. Exemple

$A = \{1, x, x, x, 1\}$ $B = \{x, 1, 1, 1, x\}$

Centre Centre

0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1

$$\varphi(X) = \{z : A_z(z) \subset X^c ; B_z(z) \subset X\}$$

$\Rightarrow$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	**1**	0	0
0	0	**1**	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	**1**	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Cette transformation a extrait les segments horizontaux de longueur 3

Erosion

3. Exemples d'érosion

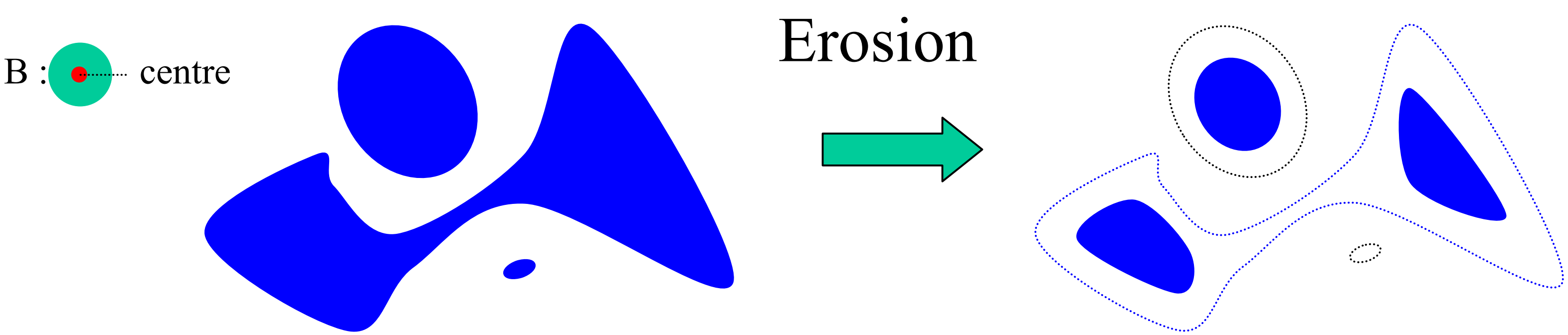
$$B = \{1, 1, 1\}$$

Centre

0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1

$$\psi_B(X) = \{z : B_z(z) \subset X\}$$

0	0	0	0	**1**	**1**	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	**1**	0	0
0	0	**1**	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	**1**	0	0
0	0	**1**	**1**	**1**	0	0	0

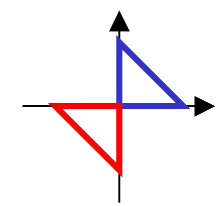


Erosion/Dilatation

4. Définitions ensemblistes

Erosion : $\psi_B(X) = \{z : B_z(z) \subset X\} = A \ominus \breve{B}$ Soustraction de Minkowski

avec $\breve{B}$ transposé de B (symétrique/origine)

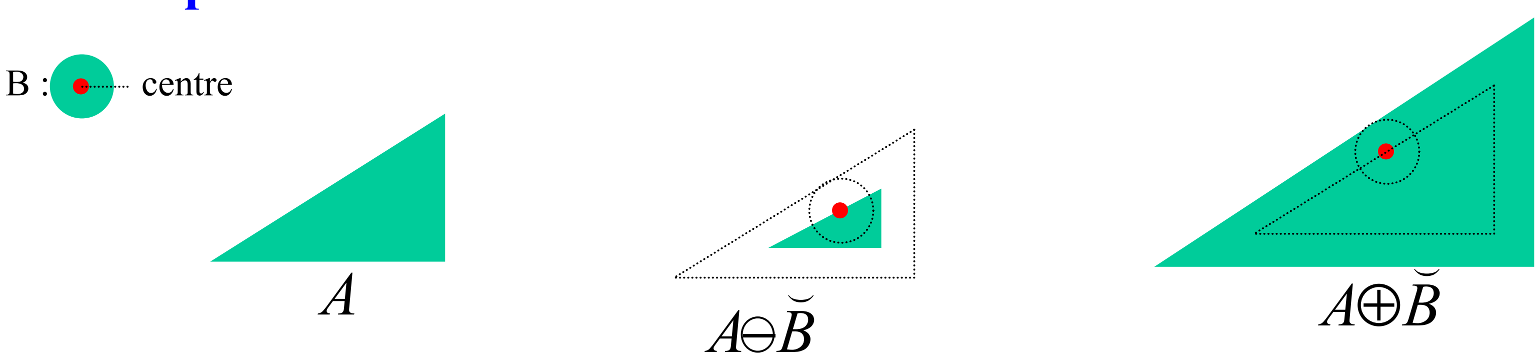


Dilatation :

$$\zeta_B(X) = \{z : B_z(z) \subset X^c\} = \{z : B_z(z) \cap X \neq \phi\} = A \oplus \breve{B}$$

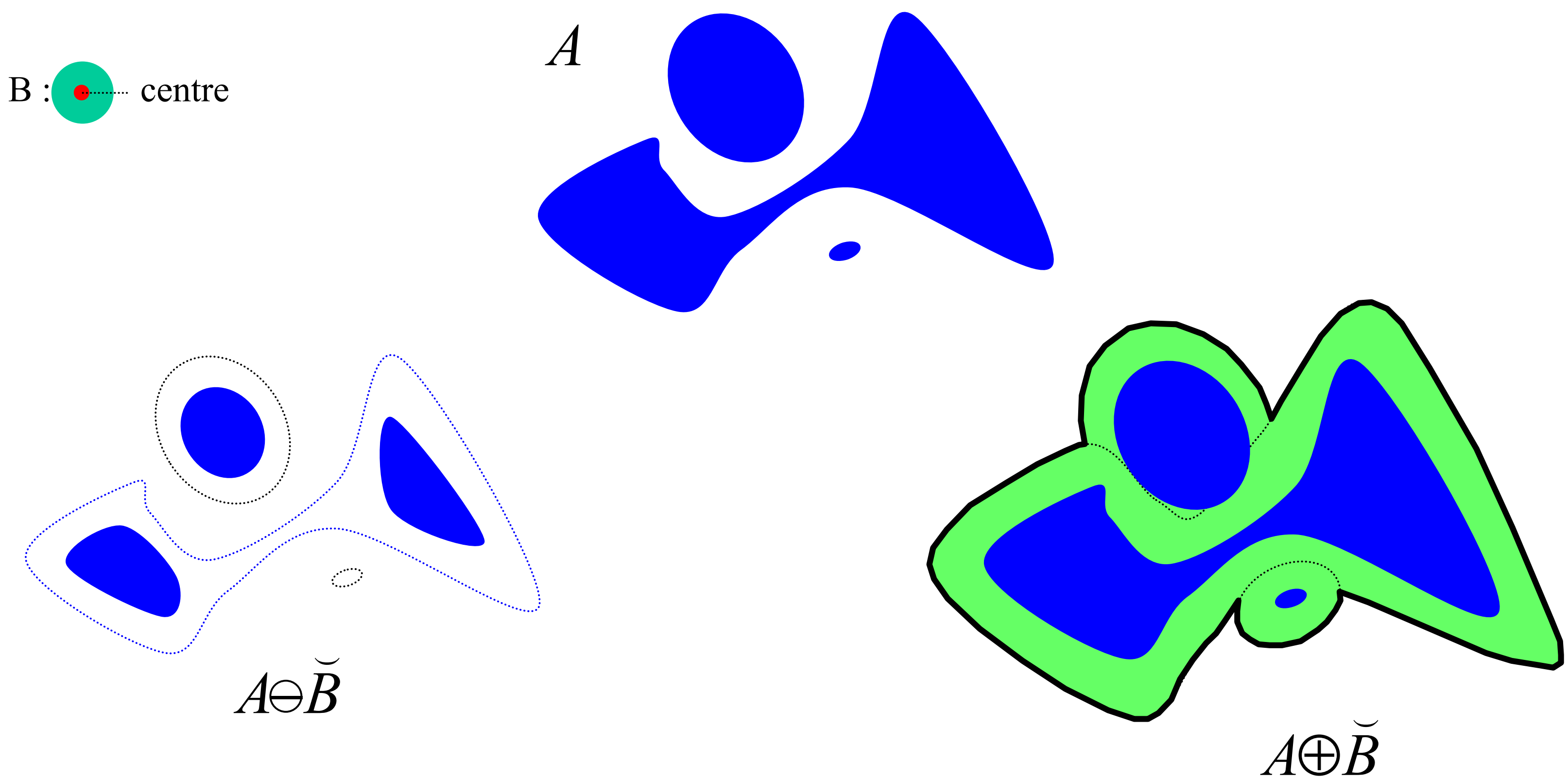
Addition de Minkowski

Exemples :



Dilatation

Exemples :



Propriétés de l'érosion et la dilatation

1. Translation

L'érosion et la dilatation sont invariantes par translation :

$$\psi_B(X_k) = (\psi_B(X))_k \quad ou \quad X_k \ominus \breve{B} = (X \ominus \breve{B})_k$$

$$\zeta_B(X_k) = (\zeta_B(X))_k \quad ou \quad X_k \oplus \breve{B} = (X \oplus \breve{B})_k$$

2. Homothétie

L'érosion et la dilatation sont compatibles avec les homothéties :

$$\psi_B(X) = \frac{1}{\lambda}(\psi_B^{\lambda}(\lambda X))_k \quad ou \quad X \ominus \breve{B} = \frac{1}{\lambda}(\lambda X \ominus \lambda \breve{B})$$

$$\zeta_B(X) = \frac{1}{\lambda}(\zeta_B^{\lambda}(\lambda X))_k \quad ou \quad X \oplus \breve{B} = \frac{1}{\lambda}(\lambda X \oplus \lambda \breve{B})$$

3. Continuité

On admet que l'érosion et la dilatation sont des opérations continues :

Propriétés de l'érosion et la dilatation

4. Croissance

L'érosion et la dilatation sont des transformations croissantes :

$$X \subset X' \Rightarrow \begin{cases} \psi_B(X) \subset \psi_B(X') \;\; ou \;\; X \ominus \breve{B} \subset X' \ominus \breve{B} \\ \zeta_B(X) \subset \zeta_B(X') \;\; ou \;\; X \oplus \breve{B} \subset X' \oplus \breve{B} \end{cases}$$

5. Extensivité

L'érosion est une transformation anti-extensive alors que la dilatation est une transformation extensive :

$\psi_B(X) \subset X \;\; ou \;\; X \ominus \breve{B} \subset X$: anti-extensivité de l'érosion

$X \subset \zeta_B(X) \;\; ou \;\; X \subset X \oplus \breve{B}$: extensivité de la dilatation

Propriétés de l'érosion et la dilatation

6. Idempotence

L'érosion et la dilatation ne sont pas des transformations idempotentes car elles sont itératives :

$$\psi_{B'}(\psi_B(X)) = \psi_{\zeta(B')}(X) \quad ou \quad (X \ominus \breve{B}) \ominus \breve{B}' = X \ominus (\breve{B} \oplus \breve{B}')$$

$$\zeta_{B'}(\zeta_B(X)) = \zeta_{\zeta_{B'}(B)}(X) \quad ou \quad (X \oplus \breve{B}) \oplus \breve{B}' = X \oplus (\breve{B} \oplus \breve{B}')$$

Les propriétés d'itérativité sont extrêmement importantes en pratique. Si on suppose que l'on a un élément structurant circulaire de taille unitaire et un élément structurant circulaire de taille 4, on peut écrire :

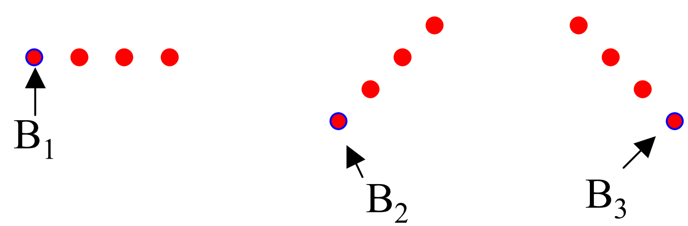
$$B_{T4} = \zeta_{B_{T1}}(\zeta_{B_{T1}}(\zeta_{B_{T1}}(B_{T1}))) \quad \Longleftrightarrow \quad B_{T4} = ((B_{T1} \oplus \breve{B}_{T1}) \oplus \breve{B}_{T1}) \oplus \breve{B}_{T1}$$

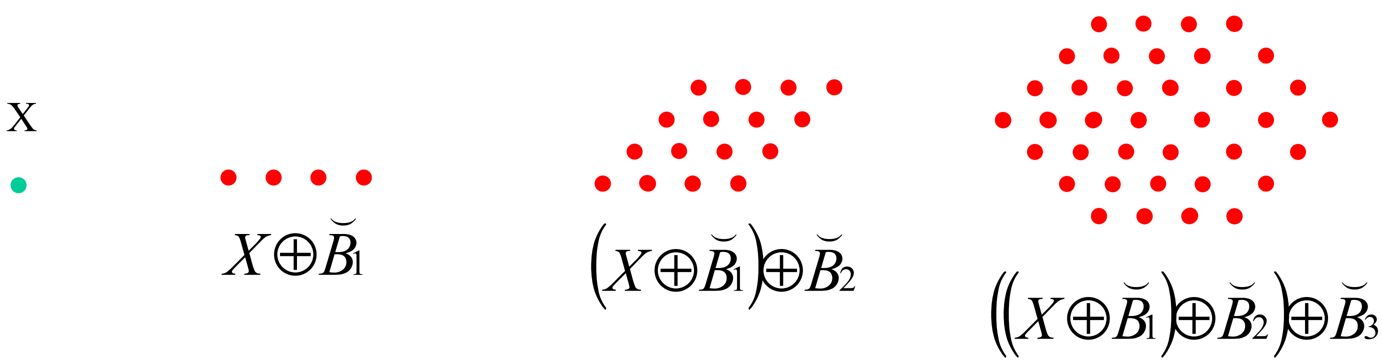
$$\zeta_{B_{T4}}(X) = \zeta_{B_{T1}}(\zeta_{B_{T1}}(\zeta_{B_{T1}}(X))) \quad \Longleftrightarrow \quad \zeta_{B_{T4}}(X) = ((X \oplus \breve{B}_{T1}) \oplus \breve{B}_{T1}) \oplus \breve{B}_{T1}$$

Propriétés de l'érosion et la dilatation

Exemple d'application de l'itérativité

Soient les éléments structurants suivant :





Propriétés de l'érosion et la dilatation

7. Distributivité

$$\psi_{B\cup B'}(X)=\psi_B\cap\psi_{B'}(X) \ ou\ X\ominus(\breve{B}\cup\breve{B}')=(X\ominus\breve{B})\cap(X\ominus\breve{B}')$$

$$\zeta_{B\cup B'}(X)=\zeta_B(X)\cup\zeta_{B'}(X) \ ou\ X\oplus(\breve{B}\cup\breve{B}')=(X\oplus\breve{B})\cup(X\oplus\breve{B}')$$

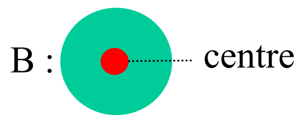
Intérêt pratique important : décomposition d'un élément structurant en éléments plus simples dont l'union redonne cet élément.

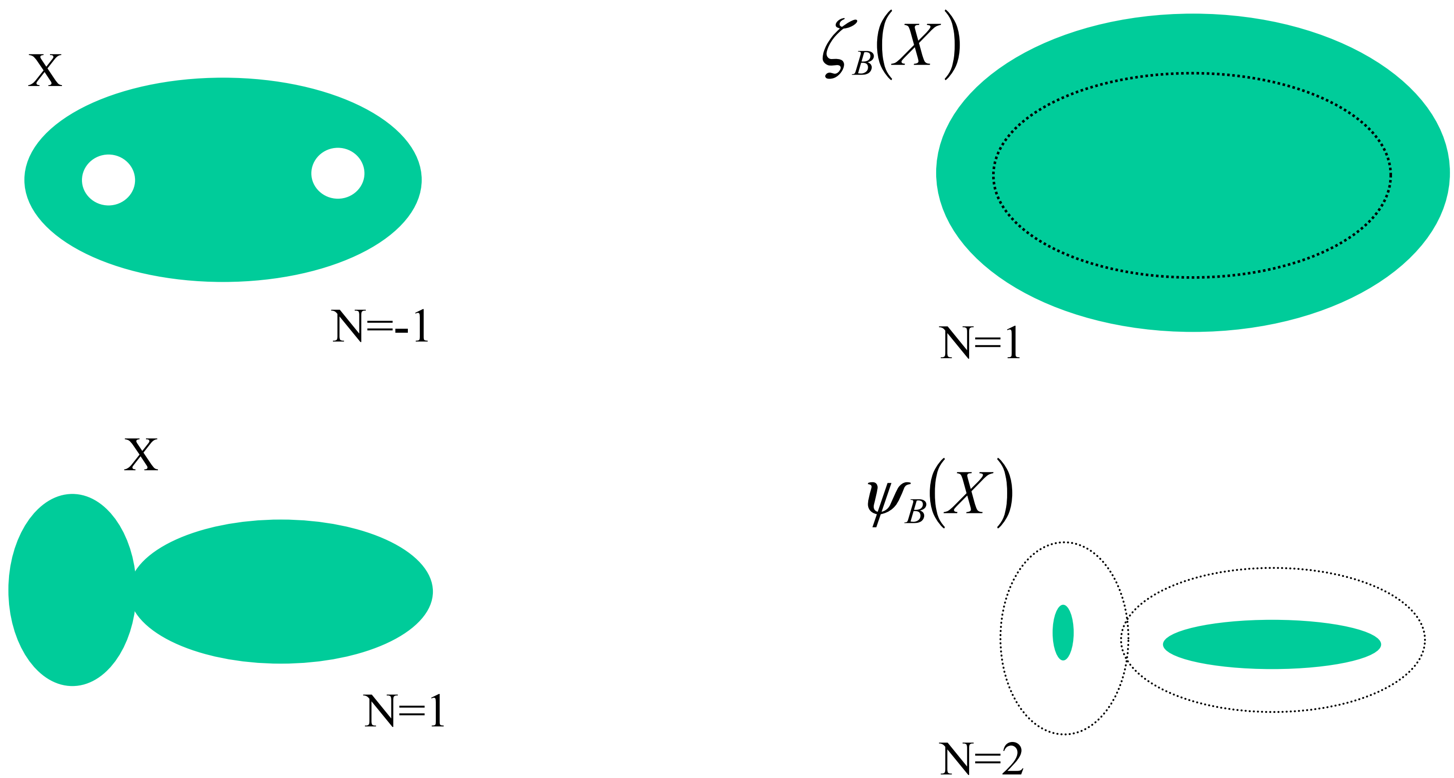
7. Homotopie

L'érosion et la dilatation ne sont pas des transformations homotopiques :

Propriétés de l'érosion et la dilatation

Exemples :





Effets de l'érosion et la dilatation

1. Erosion

L'érosion par un disque :
- sépare les objets au niveau de leur étranglement,
- élimine les objets trop étroits ne contenant pas le disque,
- rétrécit les objets d'une taille correspondant au rayon du disque.

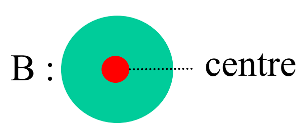
2. Dilatation

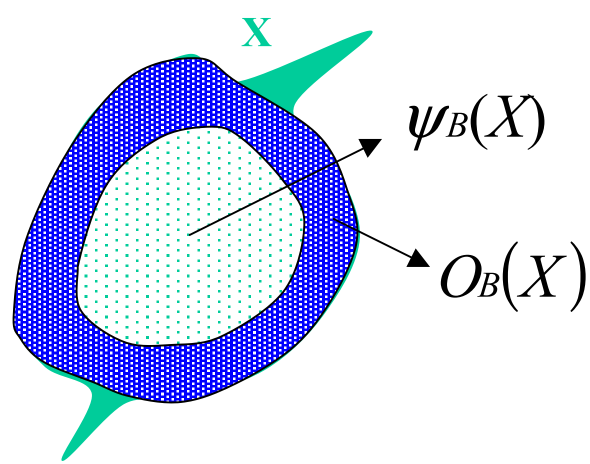
La dilatation par un disque :
- connecte les objets quand ils sont proches,
- comble les trous étroits présents dans les objets,
- élargit les objets d'une taille correspondant au rayon du disque.

Ouverture

L'érosion et la dilatation sont des opérations itératives. Une érosion suivie d'une dilatation constitue une ouverture

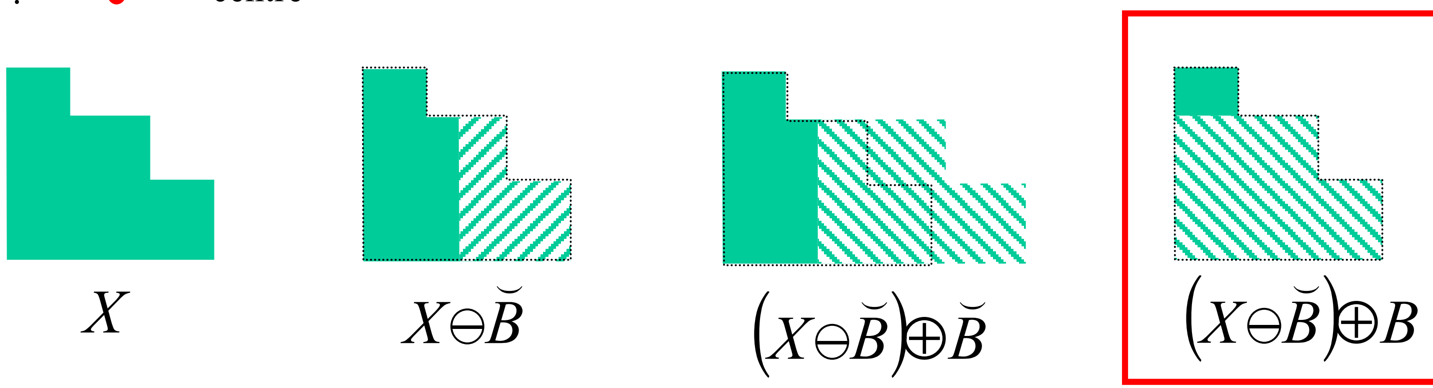
$$O_B(X) = \zeta_B(\psi_B(X)) = (X \ominus \breve{B}) \oplus B$$





Ouverture

Remarque : $O_B(X) = \zeta_B(\psi_B(X)) = (X \ominus \breve{B}) \oplus B$



En algèbre la définition d'une ouverture impose : $O_B(X) \subset X$

Effets de l'ouverture :

- adoucissement des contours (augmentation de la régularité et perte de détails),
- coupure des isthmes étroits
- suppression des îles et des caps étroits.

Fermeture

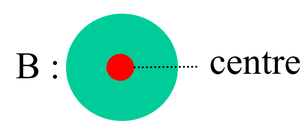
En algèbre, si un ensemble est ouvert, son complément est fermé, donc :

$$(O_B(X))^c = F_B(X^c) \ et \ O_B(X^c) = (F_B(X))^c$$

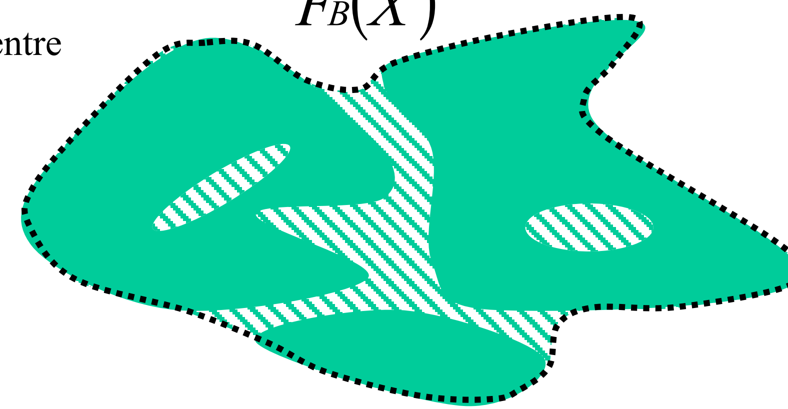
$$O_B(X^c) = \zeta_{\breve{B}}(\psi_B(X^c)) = \zeta_{\breve{B}}(\zeta_B(X))^c = (\psi_{\breve{B}}(\zeta_B(X)))^c$$

$\Rightarrow$ $\boxed{F_B(X) = \psi_{\breve{B}}(\zeta_B(X))}$ La fermeture est une dilatation suivie d'une érosion

X



$F_B(X)$



La fermeture bouche les canaux étroits et supprime les petits lacs et les golfes étroits

Propriétés de l'ouverture et la Fermeture

En algèbre, une opération est appelée ouverture si elle est :

- anti-extensive : $O_B(X) \subset X$
- croissante : $X_1 \subset X_2 \Rightarrow O_B(X_1) \subset O_B(X_2)$
- idempotente : $O_B(O_B(X)) = O_B(X)$

L'ouverture morphologique (telle que définie) vérifie ces propriétés

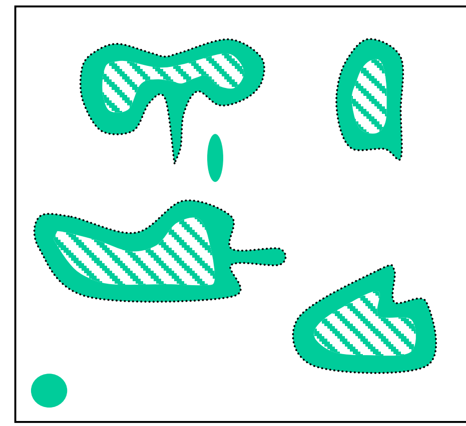
Par dualité par rapport à la complémentation, la fermeture possédera les propriétés suivantes :

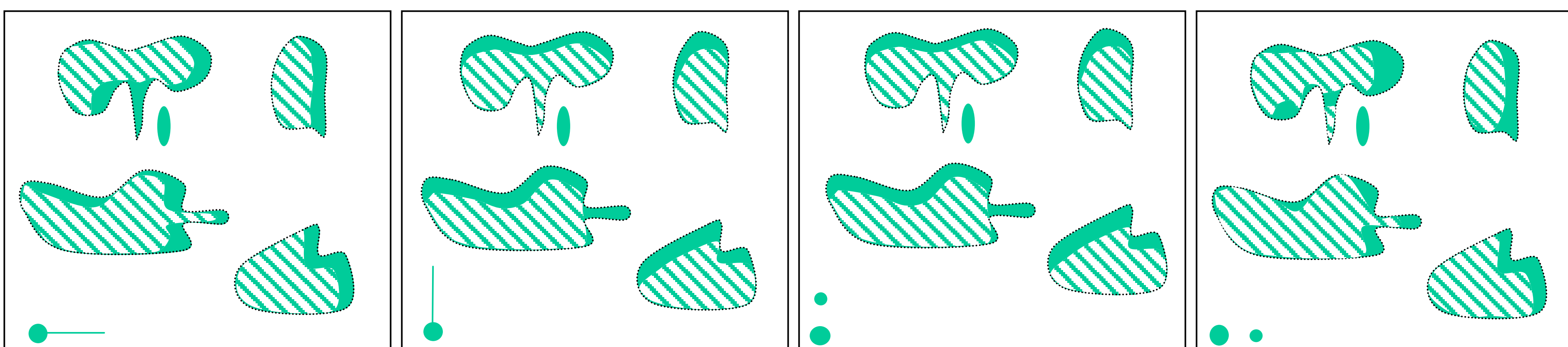
- extensive : $F_B(X) \supset X$
- croissante : $X_1 \subset X_2 \Rightarrow F_B(X_1) \subset F_B(X_2)$
- idempotente : $F_B(F_B(X)) = F_B(X)$

L'idempotence différencie l'ouverture et la fermeture par rapport à l'érosion et la dilatation

Principales classes d'éléments structurants

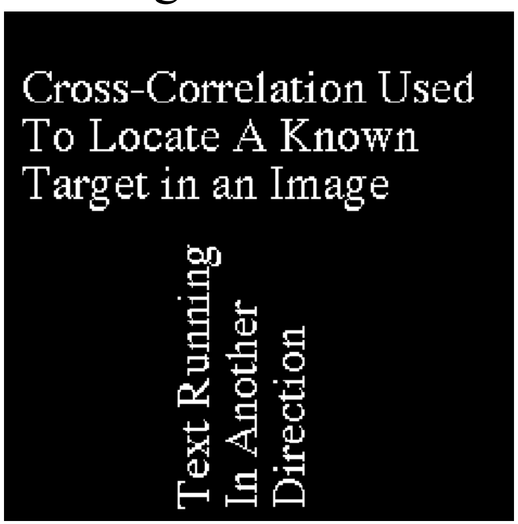
	convexe	non convexe
isotrope	disque	cercle
non isotrope	segment	bi-point



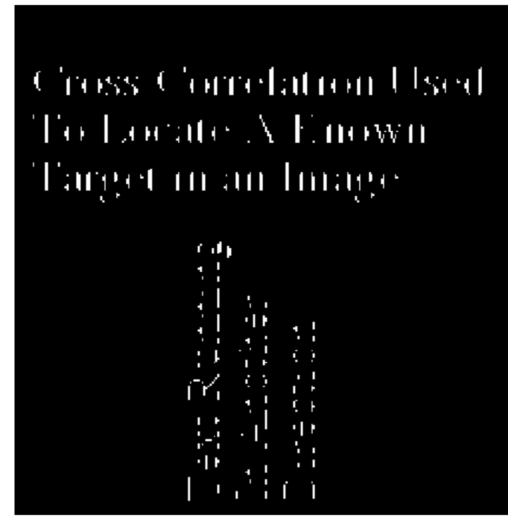


Exemples

Image source : I

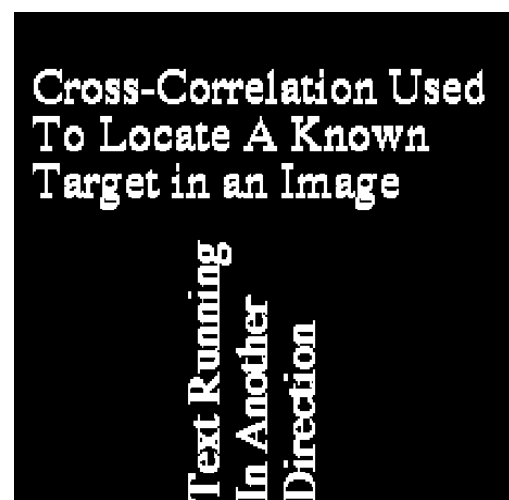


$$\psi_B(I) = I \ominus \breve{B}$$



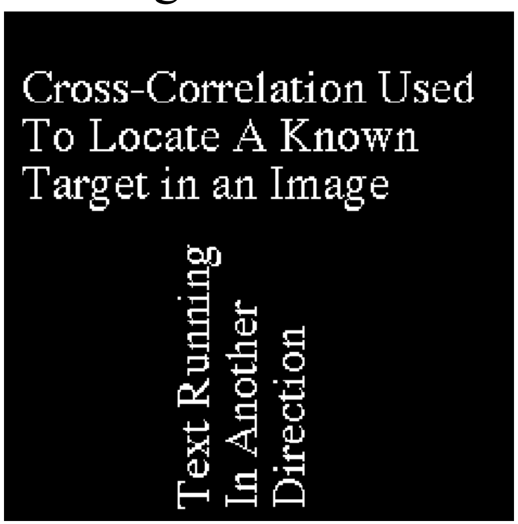
$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\zeta_B(I) = I \oplus \breve{B}$$



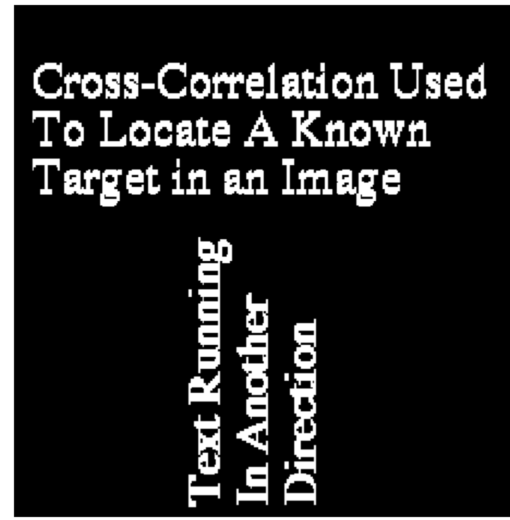
Exemples

Image source : I



Ouverture

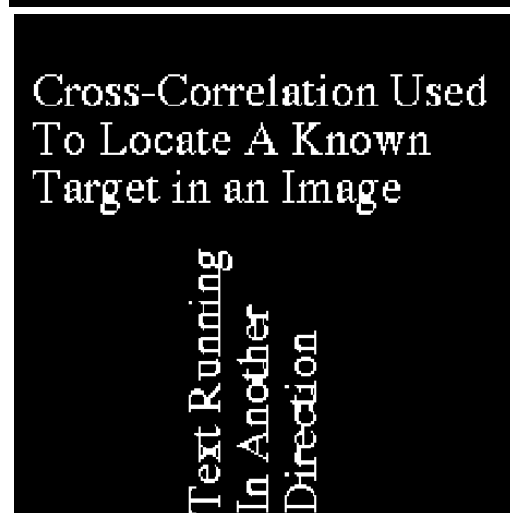
$$O_B(I)=(I\ominus\breve{B})\oplus B$$



$$B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

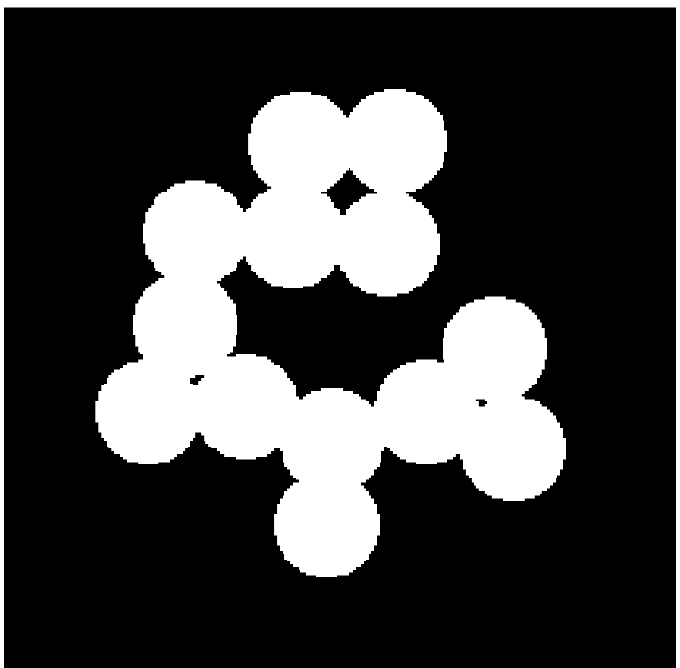
Fermeture

$$\zeta_B(I)=(I\oplus B)\ominus\breve{B}$$

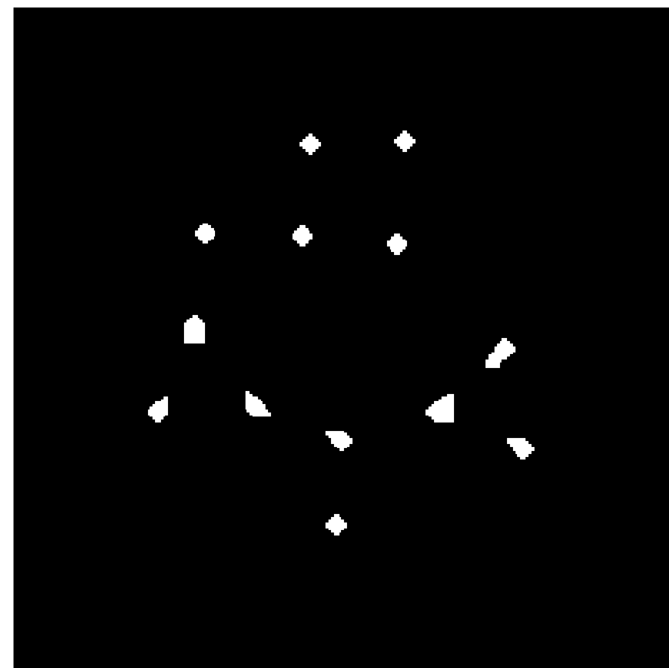


Comptage de particules

Image source : I

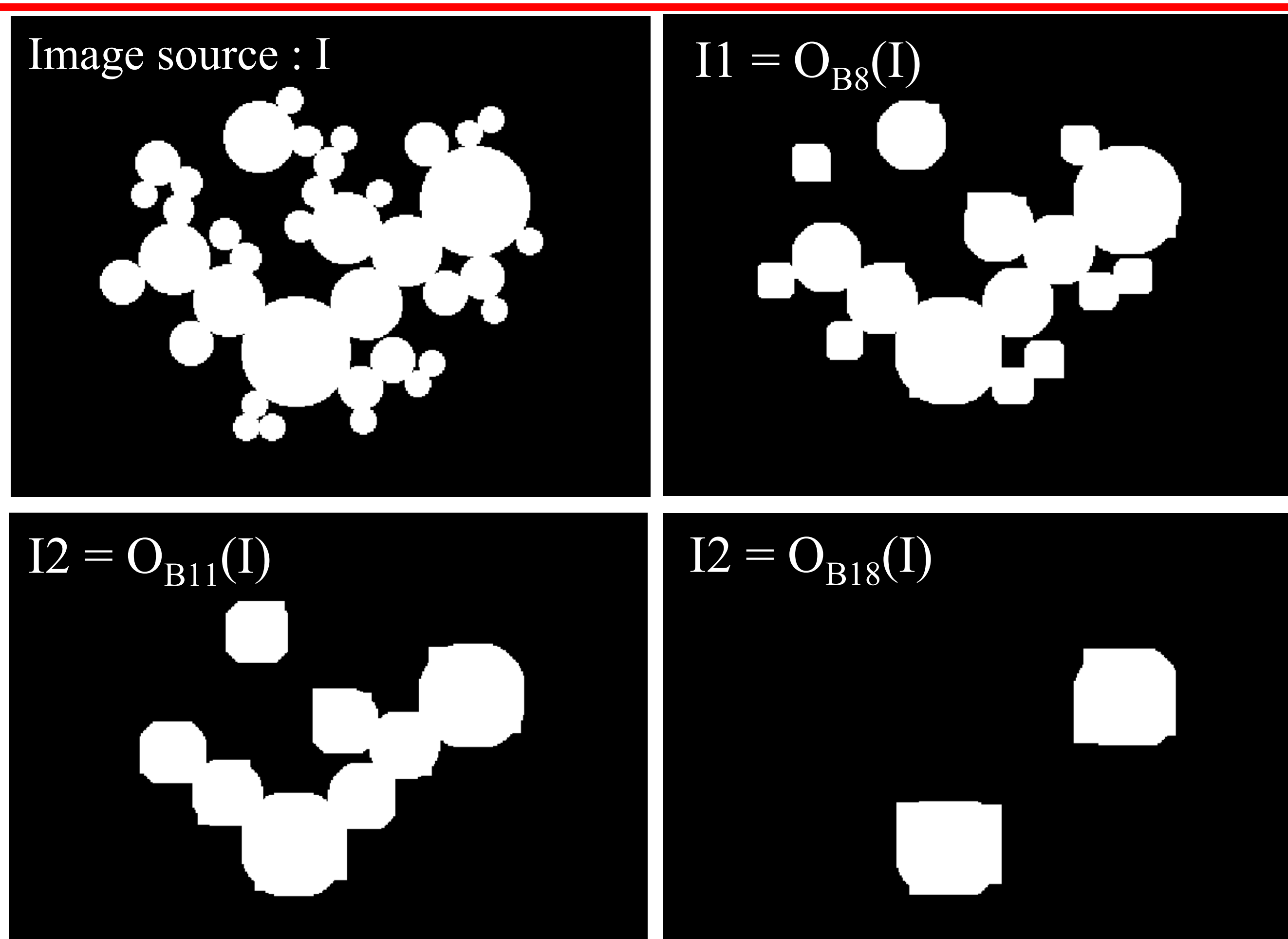


I’ : Erosion de I par un disque de taille 8



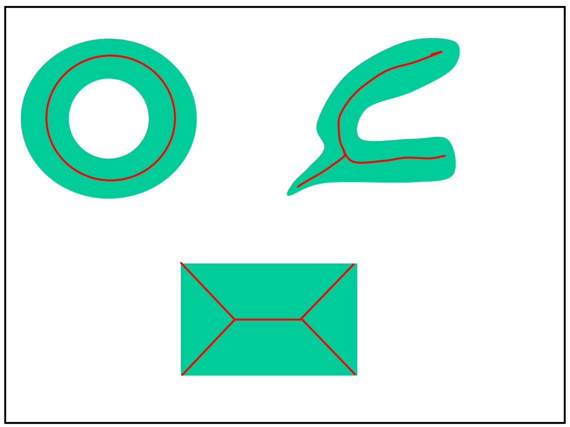
Calcul du nombre de connexité N(I’)=13

Granulométrie



En comptant le nombre de particules de chaque image, on peut obtenir (par différence) le nombre de particules de chaque taille (principe du tamis).

Squelettisation

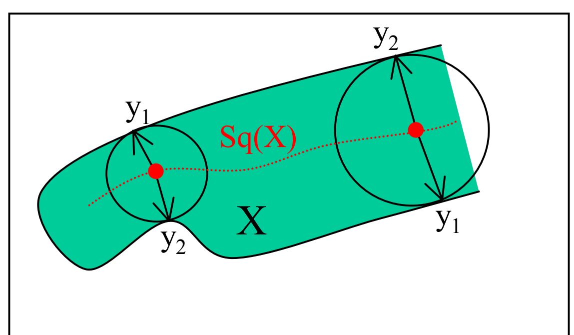


Définition : un point s de X appartient au squelette de X, noté Sq(X), si la distance euclidienne de s à la frontière F_X de X est atteinte en au moins deux points distincts de X :

$$s \in S_q(X) \Leftrightarrow \exists y_1, y_2 \in F_X,\ y_1 \neq y_2 \quad tel\ \ que$$

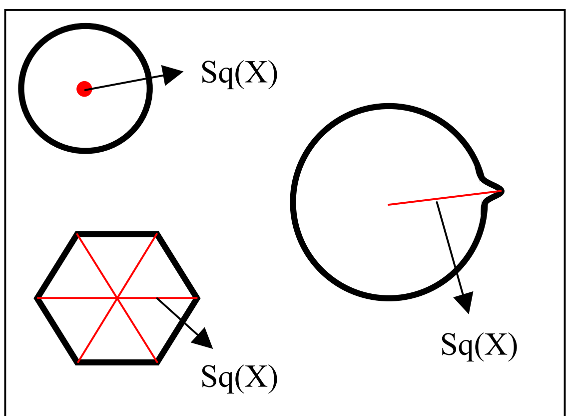
$$d(s, F_X) = d(s, y_1) = d(s, y_2)$$

Le squelette peut aussi être défini comme le lieu des boules maximales B contenues dans X



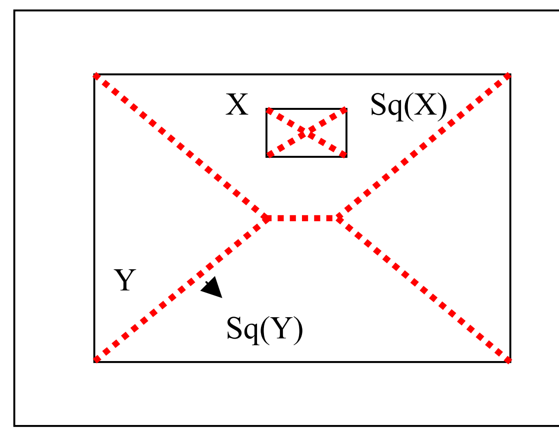
Propriétés du Squelette

Continuité : En général on peut le considérer comme continu, cependant :



Croissance : La squelettisation n'est ni croissante ni décroissante :

$$X \subset Y \not\Rightarrow S_q(X) \subset S_q(Y)$$

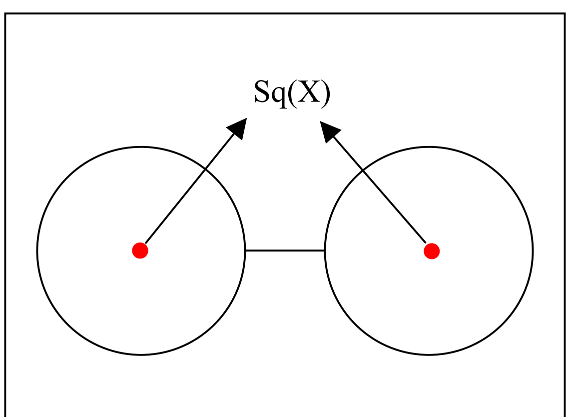


Extensivité : Le squelette est une transformation anti-extensive : $S_q(X) \subset X$

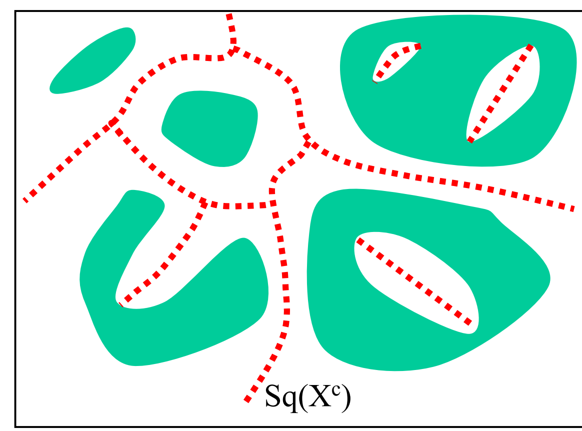
Propriétés du Squelette

Idempotence : La squelettisation est idempotente (définition à partir des « boules »)

Connexite : La connexité est vraie si X ne présente pas de parties infiniment étroites :



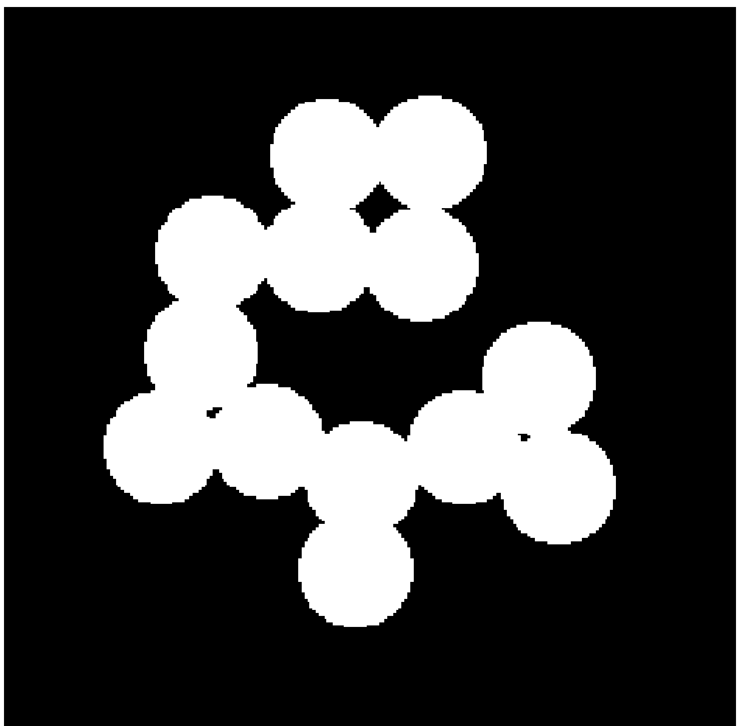
Homotopie : Si la squelettisation préserve la connexité, elle préserve aussi l'homotopie



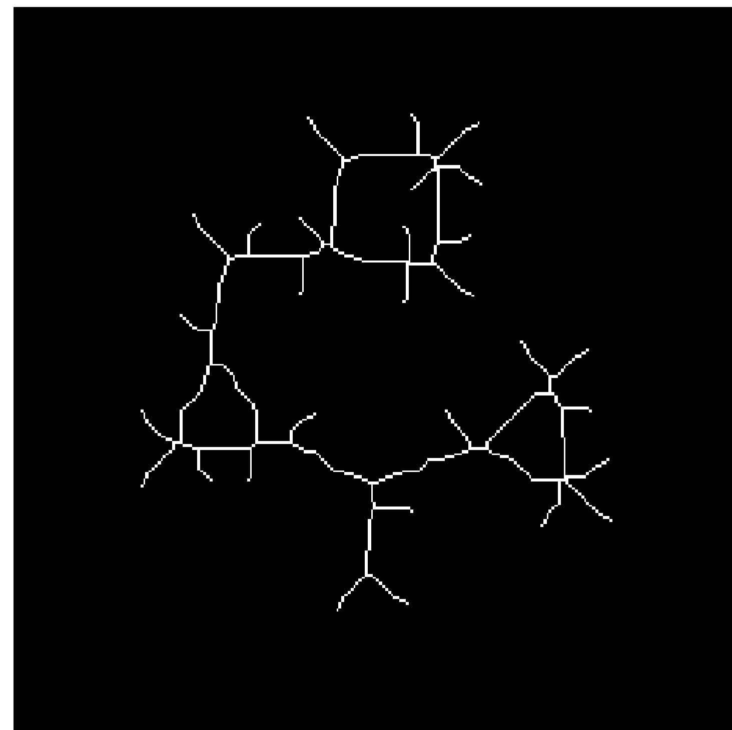
Squelettisation d'un ensemble ouvert : son squelette est homotopique de l'ensemble de départ.

Exemples

Image source : I



Squelette de I



Filtrage morphologique (1978)

Transposition des transformations morphologiques appliquées aux images binaires sur des images en niveaux de gris.

Rappel sur le filtrage linéaire

Un filtre linéaire est une transformation continue, linéaire, commutant avec les translations et pouvant avoir des propriétés d'idempotence (filtre passe bas parfait)

Propriétés du filtrage morphologique

Un filtre morphologique n'a aucune propriété de linéarité :

Soient f(x) et g(x) deux fonctions de gris (2 lignes d'une image) et T une transformation morphologique. On aura généralement :

$$T[f(x)+g(x)] \neq T[f(x)]+T[g(x)]$$

Filtrage morphologique

Par définition un filtre morphologique devra posséder les propriétés suivantes :

1. Commutation avec les translations

$$Tkf(x) = kTf(x)$$

2. Idempotence

$$T[Tf(x)] = T[f(x)]$$

3. Continuité

$$Si\ f(x) \to g(x) \Rightarrow T[f(x)] \to T[g(x)]$$

4. Croissance

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow T[f(x)] \leq T[g(x)]$$

La propriété de croissance remplace la relation d'additivité des filtres linéaires. La croissance peut aussi s'écrire d'une autre manière :

$$Sup(f(x), g(x)) \geq Sup(T[f(x)], T[g(x)])$$

$$Inf(f(x), g(x)) \leq Inf(T[f(x)], T[g(x)])$$

Filtrage morphologique

Remarque :

La croissance exclut la linéarité car le *Sup* (*Inf*) est un opérateur irréversible à la différence de l'opérateur + :

$$Inf\left[Sup\left(f(x),g(x)\right),g(x)\right]\neq f(x)$$

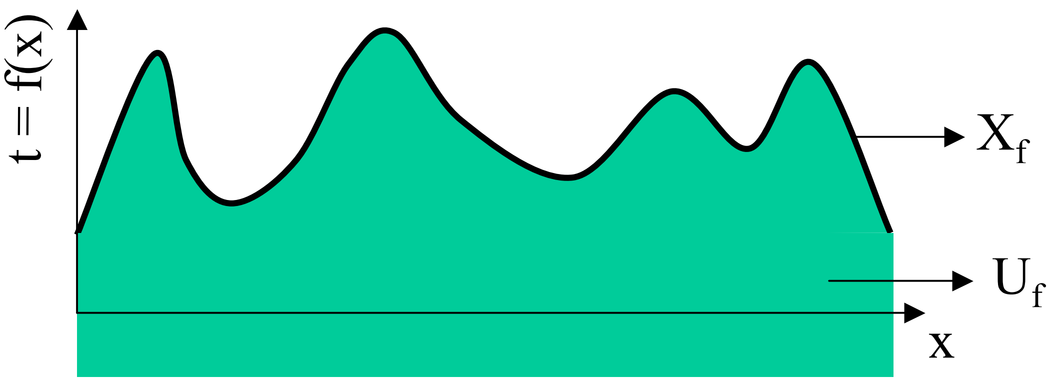
$$Sub\left[Add\left(f(x),g(x)\right),g(x)\right]=\left(f(x)+g(x)\right)-g(x)=f(x)$$

Fonctions et ensembles :

Les filtres morphologiques utilisent des transformations équivalentes à celles définies pour les ensembles. Le lien entre ensemble et fonction fait appel à la notion de sous-graphe introduite par *J. Serra*.

Fonction et ensemble

Soit pour simplifier f(x) une fonction représentant une ligne d'image (l'extension dans R^2 ne pose pas de problème)



f(x) peut être considérée comme appartenant à R^2, chaque point étant défini par (x,t)

On a : $X_f = \{x, t : t = f(x)\}$ et on définit le sous-graphe U_f de f(x) par : $U_f = \{x, t : t \leq f(x)\}$

Un point de U_f ne permet pas de retrouver f(x), mais connaissant U_f, on peut connaître f(x) : $X_f = Sup\{t : x, t \in U_f\}$

Erosion et Dilatation

Soit le sous graphe U_f définit précédemment.C'est un ensemble que l'on peut éroder afin d'obtenir l'ensemble U_{f1}:

$$U_{f1}=\psi_B(U_f)=U_f\ominus\breve{B}$$

Au sous graphe U_{f1} correspond la fonction $f_1(x)$ dont le graphe est :

$$X_{f1}=Sup\{t:x,t\in U_{f1}\}$$

Pour simplifier la notation, on écrira **l'érosion** :

$$f_1(x)=\psi_B(f(x))=f(x)\ominus\breve{B}$$

De même pour la **dilatation**, on écrira :

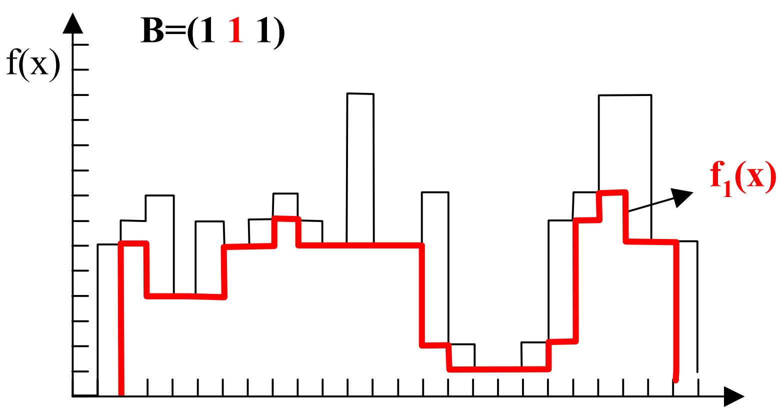
$$f_2(x)=\zeta_B(f(x))=f(x)\oplus\breve{B}$$

Erosion et Dilatation

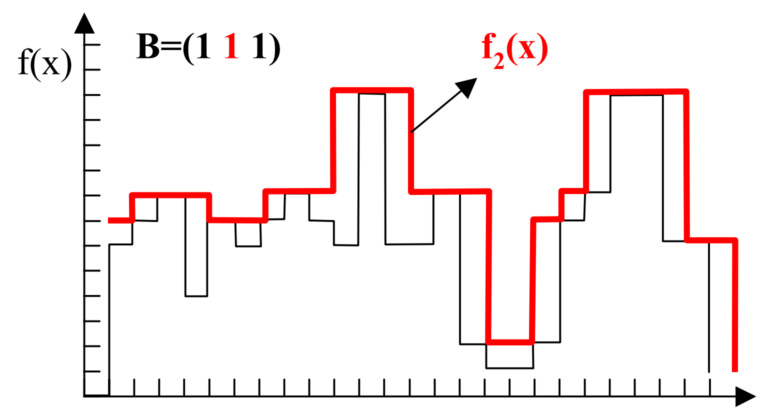
Exemples :

$$f_1(x) = \psi_B\left(f(x)\right) = f(x) \ominus \breve{B}$$

$$f_2(x) = \zeta_B\left(f(x)\right) = f(x) \oplus \breve{B}$$



Erosion



Dilatation

Remarques :

$$\psi_B\left(f(x)\right) = Inf\left\{f(u) : u \in B_x\right\} \bigcirc$$

$$\zeta_B\left(f(x)\right) = Sup\left\{f(u) : u \in B_x\right\}$$

Ouverture et Fermeture

D'après la définition :

$$O_B f(x) = \zeta_{\breve{B}} \psi_B \left(f(x) \right) = \left(f(x) \ominus \breve{B} \right) \oplus B$$

$$O_B f(x) = Sup\left\{ \psi_B \left(f(y) \right) : y \in \breve{B}_x \right\} = Sup\left(Inf\left\{ f(z) : y \in \breve{B}_x, z \in B_y \right\} \right)$$

De même :

$$F_B f(x) = \psi_{\breve{B}} \zeta_B \left(f(x) \right) = \left(f(x) \oplus \breve{B} \right) \ominus B$$

$$F_B f(x) = Inf\left(Sup\left\{ f(z) : y \in \breve{B}_x, z \in B_y \right\} \right)$$

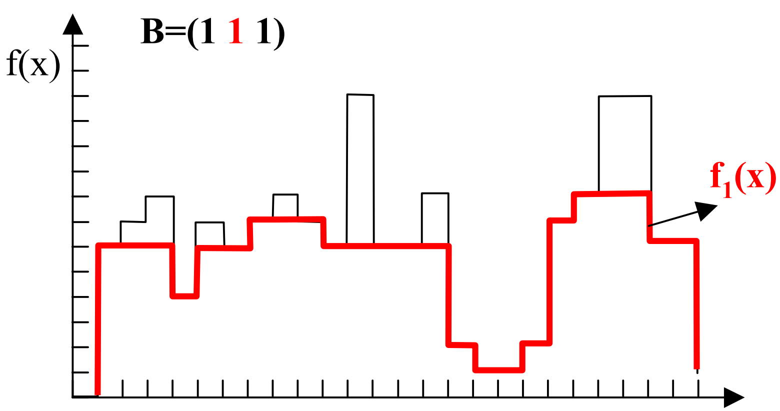
L'ouverture et la fermeture vérifient toutes les propriétés des filtres morphologiques. Ce n'est pas le cas de l'érosion et la dilatation (continuité, croissance, commutation avec les translations mais pas d'idempotence).

Ouverture, Fermeture

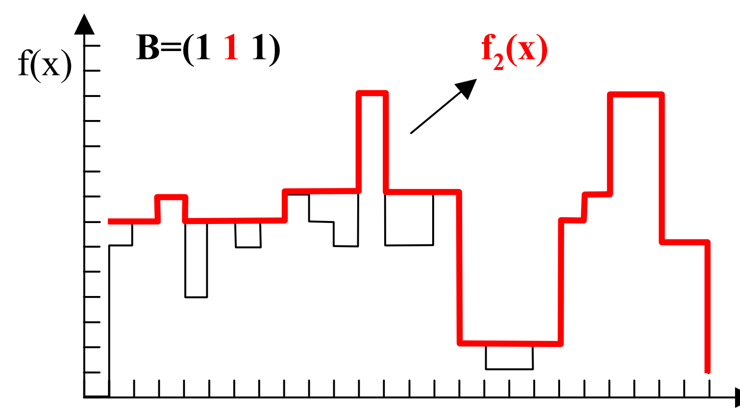
Exemple :

$$f_1(x) = O_B\, f(x)$$

$$f_2(x) = F_B\, f(x)$$



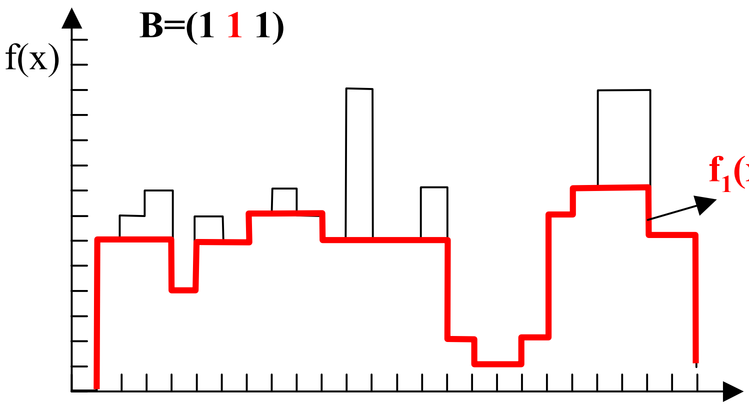
Ouverture



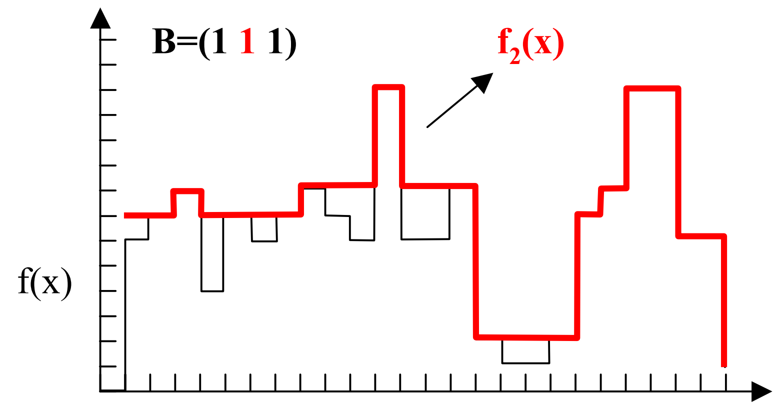
Fermeture

Comparaison avec la convolution

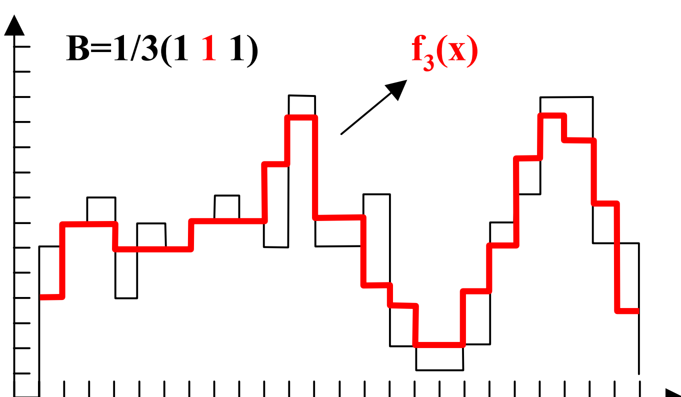
$f_1(x) = O_B\, f(x)$



$f_2(x) = F_B\, f(x)$

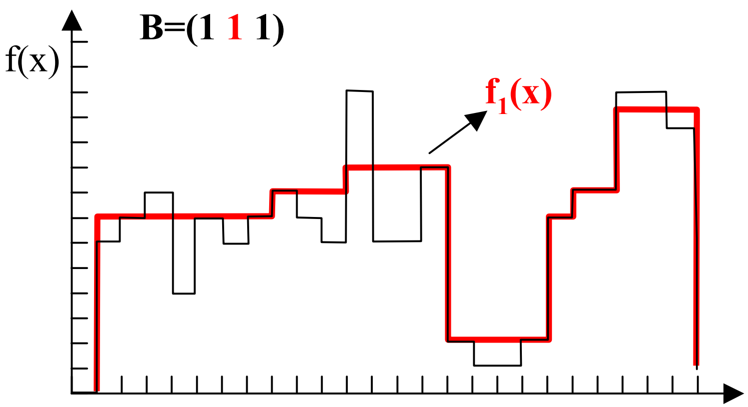


$f_3(x) = f(x) * B(x)$

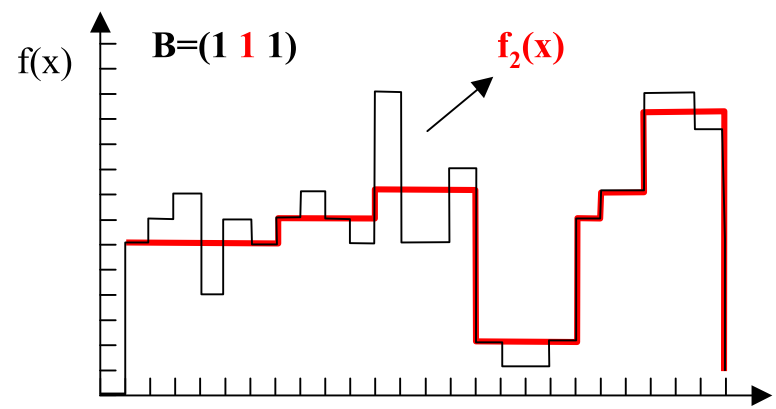


Autres filtres morphologiques

$$f_1(x) = (FOF)_B f(x)$$



$$f_2(x) = (OFO)_B f(x)$$

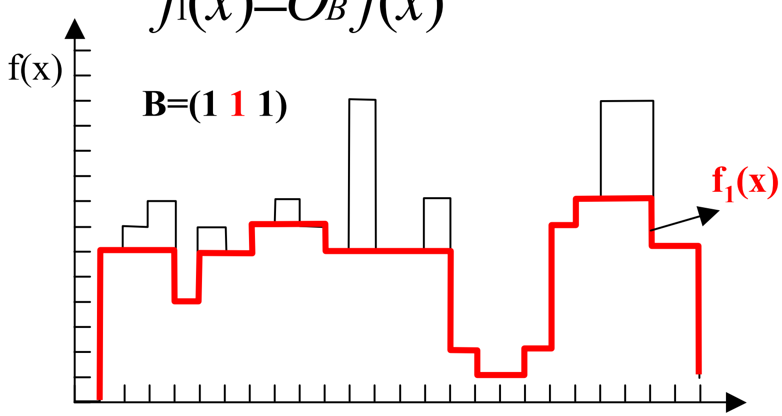


Autres transformations morphologiques

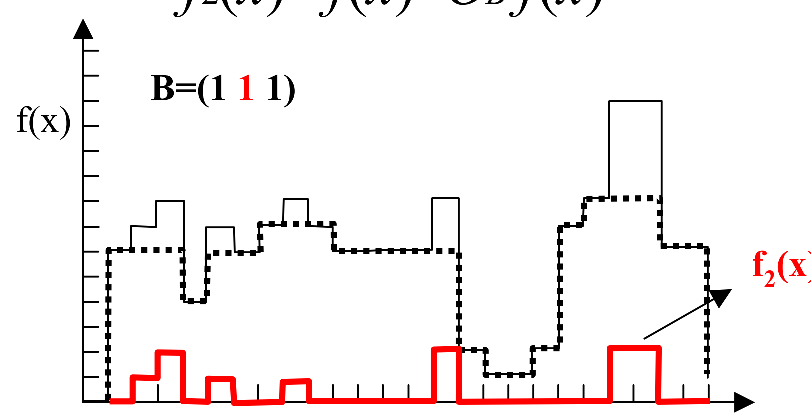
… qui ne sont pas des filtres.

Différence entre l'image et son ouvert ou son fermé. L'ouvert par un élément convexe élimine les pics dont la largeur est inférieure à l'élément structurant de taille λB. En faisant la différence avec l'image initiale, on obtient l'image « des pics ». De même avec la fermeture pour les vallées.

$$f_1(x) = O_B\, f(x)$$



$$f_2(x) = f(x) - O_B\, f(x)$$

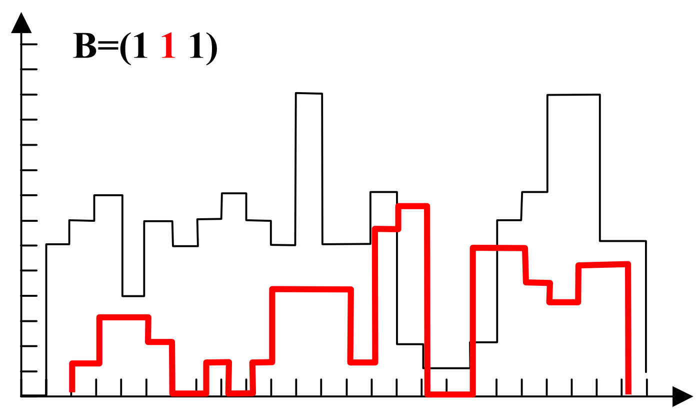


Gradients par transformations morphologiques

A l'image du gradient définit en filtrage linéaire, on peut définir un gradient morphologique. Soit une fonction f(x), autour du point x dans un rayon λ f(x) admet un minimum et un maximum. Leur différence divisée par 2λ définit un gradient.

Le minimum est donné par $\psi_{\lambda B}f(x)$et le maximum par $\zeta_{\lambda B}f(x)$. Le gradient g(x) est par définition :

$$g(x)=\frac{\zeta_B f(x)-\psi_B f(x)}{2}$$

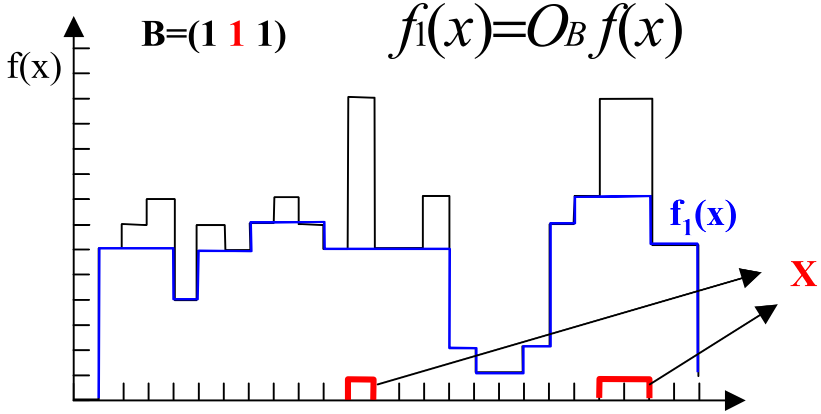


Gradient morphologique

Le chapeau haut de forme

Définition : $X = \{x : (f(x) - O_{\lambda B}\, f(x)) \geq S\}$

$$f_1(x) = O_B\, f(x)$$



La différence entre f(x) et son ouvert sélectionne les sommets en fonction de leur largeur (paramètre λ). La transformée chapeau haut de forme complète la sélection en fonction de la hauteur des sommets (le seuil S).

$$X = TCHF[f(x)] = \{x : (f(x) - O_B\, f(x)) \geq 2\}$$

En faisant varier S et λ on peut classer les « pics » en fonction de leurs largeur et hauteur. On peut aussi définir une transformation analogue à partir de la fermeture:

$$X = \{x : (f(x) - F_{\lambda B}\, f(x)) \geq S\}$$

Transformée chapeau haut de forme « tache sombre » extraction des vallées.

Analyse de mammographie