群论基础知识

作者：陈德铭

组织：SCHOOL OF PHYSICS, PEKING UNIVERSITY

时间：October 22, 2021

版本：1.0

Algebra is generous; she often gives more than is asked of her. — Jean le Rond d'Alembert

前言

2021 年暑假, 我自学了李新征老师的群论. 我重新按照李老师讲课的逻辑, 并用自己证明的逻辑重新编写了笔记, 因为只有完整地用文字将证明与逻辑展现出来, 才能知道自己是否真的掌握.

由于笔者的《高等代数》学的不错, 所以在《高等代数》中出现的定义与定理这里不再重复, 读者可以参考 [1-2].

陈德铭

July 21, 2021

数学符号

$\lvert a \rvert$	群 G 中元素 a 的阶
$\lvert G \rvert$	群 G 的阶
G'	群 G 的导群
$[G, G]$	群 G 的换位子群
$(G/H)_l$	群 G 关于子群 H 的左商集
$(G/H)_r$	群 G 关于子群 H 的右商集
$[G : H]$	H 在群 G 中的指数
$H \leqslant G$	群 H 是群 G 的子群
$\mathbb{N}$	自然数集 $\{0, 1, 2, \cdots\}$
$\mathbb{N}^*$	正整数集 $\{1, 2, 3, \cdots\}$
$N \lhd G$	N 是群 G 的不变子群
$\mathbb{Q}$	有理数集
$[x, y]$	群元素 x, y 的换位子
$\mathbb{Z}$	整数集

目录

第 一 章　多重线性代数

第 二 章　群的基本概念

2.1 群与子群

像环和域一样，群也是一种代数结构，它的定义如下:

定义 2.1. 群

一个**群**是指一个非空集合 G，它满足下列 4 个条件:

(1) 在 G 上定义了一个 (二元) 代数运算;

(2) G 上运算适合结合律;

(3) G 中有一个元素 e，满足下述性质:

$$ae = ea = a, \forall a \in G, \tag{2.1}$$

称 e 是 G 的**单位元素**;

(4) G 中每一个元素都有逆元。

如果群 G 中有无限多个元素，则称之为**无限群**；反之称为**有限群**。有限群的元素个数称为群的**阶** (order), 记为 $|G|$. 如果 G 上的运算还满足交换律，则称群 G 为 Abel **群**.

♣

群中每一个元素都由群的运算相互联系，这之间有一个重要的定理，在以后其他定理的证明过程中非常有用，先介绍于此.

定理 2.1. 重排定理

设 G 是一个群, 给定元素 $u \in G$, 则 g 当取遍 G 中所有元素时，ug 也取遍 G 中所有元素，且每个元素仅仅被取一次。也就是说，映射 $g \mapsto ug$ 是双射.

♡

就像环有子环，线性空间有线性子空间一样，群也有子群。它的定义如下:

定义 2.2. 子群

群 G 的非空集合 H 如果对于 G 的运算也成一个群，则称 H 为 G 的**子群**, 记做 $H \leqslant G$. $\{e\}$ 和 G 本身称为 G 的**平凡子群**，其余的称为**非平凡子群**.

♣

子群有如下的性质:

性质 若群 H 是群 G 的子群，则:

(1) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$;

(2) G 的单位元也是 H 的单位元;

(3) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

给定群 G 的非空集合 H，我们如何判定 H 是不是 G 的子群呢? 事实上，只要 H 满足

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H \tag{2.2}$$

那么 H 就是 G 的子群。这是因为,首先,H 中的运算自然满足结合律;其次令 $b=a$,可以推出 $e\in H$;接下来,令 $a=e$,可以推出 H 中的元素都有逆元,这个逆元就是元素在 G 中的逆元,所以 H 如果对于 G 的运算也成一个群.

下面举一些常见群的例子.

(1) **一般线性群**

域 F 上所有 n 级可逆矩阵组成的集合,对于矩阵乘法构成一个群,称为*一般线性群* (General Linear Group),记为 $GL_n(F)$;

(2) **特殊线性群**

域 F 上所有行列式为 1 的 n 级可逆矩阵组成的集合,对于矩阵乘法构成一个群,称为*特殊线性群* (Special Linear Group),记为 $SL_n(F)$;

(3) **n 级正交群**

实数域上所有 n 级正交矩阵组成的集合,对于矩阵的乘法构成一个群,称为*n 级正交群* (Orthogonal Group),记为 O_n;其中行列式为 $+1$ 的矩阵构成 O_n 的子群,称为*n 级特殊正交群* (Special Orthogonal Group),记做 SO_n;

(4) **集合的全变换群**

非空集合 Ω 到自身所有双射组成的集合,对于映射的复合构成一个群,称为*集合 Ω 的全变换群* (Full Transformation Group),记做 S_Ω;特别地,若 Ω 是一个含 n 个元素的有限群,称 Ω 的全变换群为*n 元对称群* (Symmetric Group on n Letters),记做 S_n,S_n 中的元素称为*n 元置换*;

(5) **二面体群**

平面上正 n 边形的对称性群称为*二面体群* (Dihedral Group),记做 D_n;

(6) **n 元交错群**

S_n 中所有偶置换组成的集合,关于映射复合构成一个群,称为*n 元交错群* (Alternating Group),记做 A_n.

有一个简单的群,却有许多非平凡的性质,这就是 3 元对称群 S_3,它也可以看成三维空间中正三角形的对称变换群 D_3. 设正三角形 ABC 位于 $x-y$ 平面内,它有 6 种对称操作[1]:

(1) e: 保持不动 (在 S_3 中表示置换 $(1,2,3)$);
(2) d: 绕过重心垂直于三角形平面的轴 c 旋转 $2\pi/3$ (在 S_3 中表示置换 $(2,3,1)$);
(3) f: 绕过重心垂直于三角形平面的轴 c 旋转 $-2\pi/3$ (在 S_3 中表示置换 $(3,1,2)$);
(4) a: 绕过 A 点的轴 1 旋转 π (在 S_3 中表示置换 $(1,3,2)$);
(5) b: 绕过 B 点的轴 2 旋转 π (在 S_3 中表示置换 $(3,2,1)$);
(6) c: 绕过 C 点的轴 3 旋转 π (在 S_3 中表示置换 $(2,1,3)$).

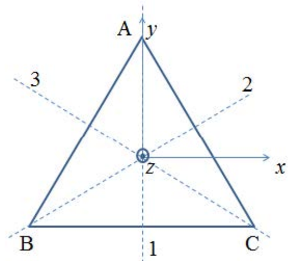

图 2.1: D_3 群示意图

[1]这 6 中操作中,轴也会随三角形一起转动,例如进行 d 操作后,轴 1, 2, 3 也都随点 A,B,C 旋转了 $2\pi/3$;进行 a 操作后,轴 c 也跟着旋转 π.

该群的乘法表如表2.1所示[2]:

表 2.1: D_3 群乘法表

	e	d	f	a	b	c
e	e	d	f	a	b	c
d	d	f	e	c	a	b
f	f	e	d	b	c	a
a	a	b	c	e	d	f
b	b	c	a	f	e	d
c	c	a	b	d	f	e

下面我们分析一下群的结构。具有最简单结构的群是循环群。

定义 2.3. 循环群

若群 G 的每个元素都可以写成 G 中某一个元素 a 的方幂，则称群 G 为**循环群** (Cyclic Group), 把 a 称为群 G 的**生成元** (Generator), 此时可以把群 G 记为 $\langle a\rangle$. ♣

分析群结构时，我们可以先考察群与子群的一些关系。首先我们有如下命题:

命题 2.1

群 G 的任意子群族 $\{H_i|i\in I\}$ 的交 $\bigcap\limits_{i\in I} H_i$ 仍然是 G 的子群. ♠

对于群 G 中一些元素，他们不一定构成 G 的子群，但他们总包含于 G 的某个子群中。为了说明这种关系，我们给出如下定义.

定义 2.4. 子群的生成

设 S 是群 G 的一个非空子集，$\langle S\rangle=\bigcap\limits_{S\subseteq H\leqslant G} H$ 是包含 S 的最小子群，称为**由 S 生成的子群** (Subgroup Generated by S); 称 S 为子群 $\langle S\rangle$ 的**生成元集**。♣

由 S 生成的子群 $\langle S\rangle$ 到底是什么呢? 我们有如下命题.

命题 2.2

设 S 是群的一个非空子集，则

$$\langle S\rangle=\{x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_k^{m_k}|x_i\in S, m_i\in\mathbb{Z}, 1\leqslant i\leqslant k, k\in\mathbb{N}^*\} \tag{2.3}$$

其中 $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_k^{m_k}$ 不必是相同的. ♠

例如，对于二面体群 D_n, 它有两个生成元 σ(绕中心 $2\pi/n$ 的旋转) 和 τ(关于某条对称轴的反射)。

又例如，对于 S_n 中 n 元置换，它对不重复的 k 个元素做了操作:$x_1\mapsto x_2, x_2\mapsto x_3,\cdots,x_{k-1}\mapsto x_k, x_k\mapsto x_1$, 我们把它称为轮换，记为 $(x_1x_2\cdots x_k)$. 有如下性质:

[2]此表最左边一列表示被乘数，最上面一列表示乘数.

性质 不相交的两个轮换对乘法是可交换的，且任一非单位元的置换都能表示成一些两两不相交轮换的乘积，除了轮换的排列次序外，表示法是唯一的.

所以，n 元对称群 S_n 可以由 $(n-1)$ 个对换生成:

$$S_n = \langle (12), (13), \cdots, (1n) \rangle = \langle (12), (23), \cdots, (n-1\ n) \rangle,$$

也可以由两个生成元生成:

$$S_n = \langle (12), (123\cdots n) \rangle;$$

n 元交错群 $(n \geqslant 3)$ 可以由 $(n-1)$ 个 3-轮换生成:

$$A_n = \langle (123), (124), \cdots, (12n) \rangle.$$

定义 2.5. 群中元素的阶

群 G 中，由一个元素 a 生成的子群 $\langle a \rangle$ 是一个循环群。如果 $\langle a \rangle$ 是无限群，则称 a 是无限阶元素，记做 $|a| = \infty$; 若 $\langle a \rangle$ 的阶是 m, 则称 a 的阶是 m, 记做 $|a| = m$. ♣

由命题2.2知, 群 G 是循环群当且仅当 G 由一个元素生成。由此可得:

命题 2.3

(1) 群 G 中元素 a 的阶为 $\infty \Longleftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*, a^m \neq e$;

(2) 群 G 中元素 a 的阶为 $m \Longleftrightarrow m$ 是使 $a^m = e$ 成立的最小正整数. ♠

群中元素的阶还满足如下性质:

性质 群 G 中元素 a 的阶为 n, 元素 b 的阶为 m, 则

(1) $a^p = e \Longleftrightarrow n|p$;

(2) 设 $k \in \mathbb{N}^*$, $|a^k| = \dfrac{n}{(n,k)}$;

(3) 若 $ab = ba$, 且 m, n 互质，则 ab 的阶为 mn.

2.2 群的等价划分

群的结构可以让我们把群的元素划分为一些等价类。这样我们可以研究同一类元素的共通性质，也可以以等价类为单位研究高一层次的性质。本节介绍两种等价类：陪集与共轭类。

定义 2.6. 陪集

给定群 G 的一个子群 H，定义两个群元素的二元关系:

$$a \sim b \overset{def}{\Longleftrightarrow} b^{-1}a \in H, \tag{2.4}$$

可以证明该关系是一个等价关系，它给出了一个群 G 的划分。a 确定的等价类

$$\overline{a} = \{x \in G | a^{-1}x \in H\} = \{ah | h \in H\} \overset{def}{=\!=} ah$$

称为子群 H 的一个**左陪集**, 记为 aH，a 称为左陪集 aH 的一个**代表**. H 本身也是一个左陪集，单位元 e 是它的一个代表. 类似地可以定义**右陪集**Ha。 ♣

由于陪集是群 G 的中等价类，所以子群 H 的任意两个左 (右) 陪集要么相等，要么

不相交。类似于线性代数中的商空间，我们可以基于陪集定义商集.

定义 2.7. 商集

群 G 中，子群 H 的所有左陪集组成的集合称为**群 G 关于 H 的左商集** (Left Quotient Set), 记为 $(G/H)_l$. 类似可以定义**右商集** (Right Quotient Set), 记为 $(G/H)_r$. ♣

左商集和右商集结构非常类似，如果 $b = ah \in aH$, 则 $a^{-1} = hb^{-1}$, 所以他们之间存在一个双射:

$$\begin{aligned} f : (G/H)_l &\to (G/H)_r \\ aH &\mapsto Ha^{-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

为了准确地讨论陪集与商集中的元素个数，特别是无限多个元素的情况，我们先定义集合的基数.

定义 2.8. 集合的基数

如果两个集合之间有一个双射，则称这两个集合有相同的**基数** (Cardinal Number), 用 $|\Omega|$ 表示集合 Ω 的基数。当 Ω 是无限集时，记 $|\Omega| = \infty$; 当 Ω 为有限集时，$|\Omega|$ 等于 Ω 中元素个数. ♣

注意，两个无限集的基数都记为 ∞，但他们的基数可能不同。例如 $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ 有相同的基数，但 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 的基数却不同。特别地，对于商集来说，我们有:

定义 2.9. 群的指数

群 G 关于子群 H 的左 (右) 商集的基数称为 H 在群 G 中的**指数** (Index), 记做 $[G : H]$. ♣

如果 $[G : H] = r$, 则:

$$G = H \cup a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_{r-1}H \tag{2.6}$$

其中 $H, a_1H, a_2H, \cdots, a_{r-1}H$ 两两不相交. 称式 (2.6) 是群 G 关于子群 H 的左陪集分解式, $\{e = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}\}$ 称为为 H 在群 G 中的左陪集代表系.

如果群 G 是有限群，则它子群 H 的阶与指数都是有限的。子群每一个陪集的基数都等于这个 H 的阶. 再注意到左陪集分解式 (2.6) 中每一个陪集两两不相交，于是可以推出以下定理:

定理 2.2. Lagrange 定理

有限群 G 的任一子群 H 的阶必为群 G 阶的因子。更详细地，我们有:

$$|G| = |H|[G : H]. \tag{2.7}$$

♡

下面结合 Lagrange 定理讨论有限阶循环群，可以得到:

命题 2.4

设 $G=\langle a\rangle$ 是 n 阶循环群，则：

(1) G 的每一个子群都是循环群;

(2) 对于 G 的阶 n 的每一个因子 s, 都存在唯一的一个 s 阶子群.

证明 设 b 是 G 的子群 H 中关于 a 正幂次最小的元素，设 $b=a^r$. 对于任意的 $h\in H$，设 $h=a^m$, 做带余除法:

$$m=pr+q,$$

这里 $0\leqslant q\leqslant r$. 由子群的定义知:$h\cdot b^{-p}=a^q\in H$, 由于 b 是 H 中关于 a 正幂次最小的元素，所以 $q=0$, 即 H 中所有元素都可以表示成 b 的方幂，所以 H 是循环群.

对于 n 的因子 s，设 $n=ds$, 由群元素阶的性质知:

$$|a^d|=\frac{n}{(n,d)}=s,$$

所以 $\langle a^d\rangle$ 是 G 的 s 阶子群.

设 H 是群 G 的任意 s 阶子群，由 (1) 知，H 是循环群，设 $H=\langle a^k\rangle$. 则

$$s=\frac{n}{(n,k)}=\frac{n}{d},$$

所以 $(n,k)=d$, 则存在正整数 u,v, 使得:

$$un+kv=d.$$

所以 $a^d=a^{un+kv}=(a^k)^v\in\langle a^k\rangle$, 那么 $\langle a^d\rangle\subseteq\langle a^k\rangle$. 又因为 $\langle a^d\rangle$ 和 $\langle a^k\rangle$ 的阶都是 s，所以 $\langle a^d\rangle=\langle a^k\rangle$, 这就说明了 $\langle a^d\rangle$ 是唯一的 s 阶子群.

根据 Lagrange 定理，n 阶群 G 的每一个子群的阶都是 n 的因数，所以上述得到的子群就是 n 阶循环群的全部子群.

我们知道，循环群都是 Abel 群，但 Abel 群不一定是循环群。下面我们来讨论有限 Abel 群是循环群的条件。

命题 2.5

设 G 为有限 Abel 群，则 G 中存在一个元素，它的阶是 G 中所有元素阶的倍数.

证明 略.

根据上面的命题，我们可以得到有限 Abel 群为循环群的条件.

命题 2.6

设 G 为有限 Abel 群，则 G 为循环去的充要条件是对于任意正整数 m, 方程 $x^m=e$ 在 G 中解的个数不超过 m。

在讨论了陪集之后，我们再来讨论群的另外一种等价划分.

定义 2.10. 群元素的共轭

设 G 是群，对于 G 中两个元素 a,b, 如果存在元素 $g\in G$, 使得 $gag^{-1}=b$, 则称元素 a,b **共轭**。共轭关系是一种等价关系，它把群 G 划分为一些**共轭类**。

群 G 的共轭类有如下性质:

性质 共轭类的性质

(1) 群 G 中单位元素自成一个共轭类;

(2) Abel 群的所有元素自成一个共轭类;

(3) 同一个共轭类中的元素阶相同.

证明 我们只说明第 (3) 条性质.

设群 G 中元素 a, b 共轭，他们满足 $gag^{-1} = b$. 考虑映射

$$\begin{aligned} \tau : \langle a \rangle &\to \langle b \rangle \\ a^k &\mapsto ga^k g^{-1}, \end{aligned}$$

容易看出该映射是一个双射，所以 $\langle a \rangle$ 和 $\langle b \rangle$ 有相同的基数, 于是我们证明了: 同一个共轭类中的元素阶相同.

类似于 Lagrange 定理，对于共轭类也有:

命题 2.7

有限群的每个共轭类的元素个数都是群阶的因子.

证明 设 a 是群 G 中一共元素，$\overline{a}$ 是 a 的共轭类.

我们先考察所有与 a 可交换的元素组成的集合 G_a. 设 $g, h \in G_a$, 则

$$ga = ag = a(b^{-1}b)g = ab^{-1}gb,$$

故 $gab^{-1} = ab^{-1}g$, 也就是说，G_a 是群 G 的一个子群.

为了证明命题，我们尝试利用 Lagrange 定理. 所以我们考虑 G_a 的左商集 $(G/G_a)_l$, 考虑如下对应关系:

$$\begin{aligned} f: \quad \overline{a} \quad &\to (G/G_a)_l \\ gag^{-1} &\mapsto \quad gG_a, \end{aligned}$$

注意到:

$$gag^{-1} = hah^{-1} \Longleftrightarrow ag^{-1}h = g^{-1}ha \Longleftrightarrow gG_a = hG_a, \tag{2.8}$$

所以对应关系 f 是一个映射. 由式 (2.8) 也可以看出，映射 f 是一个单射. 此外，对于 gG_a 中任意一个元素 g，$gag^{-1} \in \overline{a}$, 所以映射 f 是一个满射，所以 f 是一个双射. 由 Lagrange 定理，G_a 的左商集 $(G/G_a)_l$ 的元素个数是是群 G 阶的因子，所以 a 的共轭类 $\overline{a}$ 的元素个数也是群 G 阶的因子.

类似于群元素的共轭，我们还可以定义子群的共轭.

定义 2.11. 共轭子群

设 H 是群 G 的一个子群. 容易验证，$\forall g \in G, gHg^{-1}$ 也是群 G 的一个子群，称之为子群 H 的一个**共轭子群** (Conjugate Subgroup).

有了共轭子群的概念，我们可以引入下面一个非常重要的概念.

定义 2.12. 不变子群

群 G 的一个子群 N 如果满足:

$$\forall g \in G, gNg^{-1} = N, \tag{2.9}$$

即与 N 共轭的子群只有 N 自身，则称 N 是群 G 的一个**不变子群** (或**正规子群**, Normal Subgroup), 记做 $N \lhd G$.

如何判断群的一个子群是不是不变子群呢？我们有下面的命题。

命题 2.8

群 G 的一个子群 N 是其不变子群的充要条件是:

$$\forall a \in G, aN = Na. \tag{2.10}$$

证明 必要性. 设 $N \lhd G$，对于任意给定的 $a \in G, \forall h \in N$, 有 $aha^{-1} \in N$, 设 $aha^{-1} = g$, 则 $ah = ga \in Na$, 也就是说，$aN \subseteq Na$; 同理，我们有 $Na \subseteq aN$, 所以 $aN = Na$.

充分性. 假设 $\forall a \in G, aN = Na$, 那么对于任意的 $g \in G$, 对于任意的 $h \in N$, 记 $ghg^{-1} = b$, 则 $gh = bg \in gN = Ng$, 所以 $b \in N$, 也就是说，$gNg^{-1} \subseteq N$. 另一方面，我们也知道了 $g^{-1}Ng \subseteq N$, 所以对于任意的 $h \in N, g^{-1}hg = c \in N$, 于是 $h = gcg^{-1} \in gNg^{-1}$, 也就是说，$N \in gNg^{-1}$. 我们证明了 $g \in G, gNg^{-1} = N$, 也就是说，N 是群 G 的不变子群.

注：如果企图直接用 $aNa^{-1} = Naa^{-1} = N$ 来证明的话，在我看来这是纯粹的伪证！

从充分性的证明我们可以推出, 在证明 N 是群 G 的不变子群时，可以采用以下方法:

推论 2.1

设 H 是群 G 的一个子群，如果对于任意给定的 $g \in G$, 对于任意的 $h \in H$, 都有 $ghg^{-1} \in H$, 则 H 是群 G 的不变子群。

此外，从命题2.8可以推得:

推论 2.2

若 H 是群 G 的指数为 2 的子群，则 H 是群 G 的不变子群.

从式 (2.10) 可以看出，不变子群的左陪集等于右陪集，那么它的左商集就等于右商集. 如果我们定义群 G 两个子集 A, B 的乘法运算:

$$AB \xlongequal{def} \{ab | a \in A, b \in B\}, \tag{2.11}$$

容易看出，这个乘法自然满足结合律。对于一个元素与一个集合相乘:

$$\begin{aligned} aB &\xlongequal{def} \{ab | b \in B\}, \\ Ba &\xlongequal{def} \{ba | b \in B\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

如果把元素 a 看成只有一个元素的集合 $\{a\}$, 那么式 (2.12) 也可以用式 (2.11) 统一表示, 自然也符合结合律.

对于不变子群的陪集来说:

$$(aN)(bN) = a(Nb)N = a(bN)N = (ab)NN = (ab)N, \tag{2.13}$$

所以不变子群的所有陪集关于上述乘法组成一个群. 于是我们有:

定义 2.13. 商群

设 N 是群 G 的不变子群, 它的左商集等于右商集, 统称为**商集**, 记做 G/N. 商集中的元素, 也就是所有陪集关于式 (2.11) 定义的乘法构成一个群, 称为**商群** (Quotient Group). 由式 (2.13) 知, N 自身是商群的单位元. ♣

2.3 群的同构与同态

正如维数相同的有限维线性空间有相同的结构，很多群也有相同的结构，我们称之为同构关系。有的群之间相似性没有那么强，不过元素之间也能有良好的对应关系，我们称之为同态. 这一节我们来介绍群的同构与同态.

定义 2.14. 群的同构

设 G 和 $G^{'}$ 是两个群, 如果存在一个 G 到 $G^{'}$ 的双射 σ, 使得:

$$\forall a, b \in G, \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b), \tag{2.14}$$

那么称群 G 和 $G^{'}$ 是**同构的** (Isomorphic), 记做 $G \cong G^{'}$, 称 σ 为群 G 到 $G^{'}$ 的一个**同构映射** (Isomorphism). ♣

例 2.1 无限循环群都与 $\mathbb{Z}$ (的加法群) 同构; 任意一个 m 阶循环群都与 $\mathbb{Z}_m$(的加法群) 同构;

证明 如果 $\langle a\rangle$ 是一个无限循环群, 考虑映射 $\sigma: n \mapsto a^n$, 由于 $\langle a\rangle$ 是无限群, 所以映射 σ 是单射, 它显然也是满射, 所以是双射。此外,

$$\sigma(n_1 + n_2) = a^{n_1+n_2} = a^{n_1}a^{n_2} = \sigma(n_1)\sigma(n_2), \tag{2.15}$$

所以 σ 是同构映射.

类似可以证明任意一个 m 阶循环群都与 $\mathbb{Z}_m$ 同构.

同构是非常强的性质，如果两个群同构，我们就可以认为这它们是同一个群了。所以，以后我们就用与 $\mathbb{Z}_m$(的加法群) 来表示 m 阶循环群，用 $\mathbb{Z}$ (的加法群) 来表示无限循环群. 但不是所有情况群之间都有如此强的对应关系，我们再引入一种比较弱的关系.

定义 2.15. 群的同态

设 G 和 $G^{'}$ 是两个群, 如果 G 到 $G^{'}$A 有一个映射 σ, 使得:

$$\forall a, b \in G, \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b), \tag{2.16}$$

称 σ 为群 G 到 $G^{'}$ 的一个**同态映射** (Homomorphism), 简称同态. ♣

同态映射有如下性质:

性质 设 σ 是群 G 到 $G^{'}$ 的一个同态,

(1) e 和 e' 分别是群 G 和 G' 的单位元，则 $\sigma(e) = e'$;

(2) $\forall a \in G, \sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$;

(3) G 的子群 H 在 σ 下的像 $\sigma(H)$ 是 G' 的子群.

证明 对于任意的 $a \in G$，$\sigma(a)\sigma(e) = \sigma(ae) = \sigma(a)$, 同时消去 $\sigma(a)$ 有可得，$\sigma(e) = e'$。

对于任意的 $a \in G$, 由于

$$e' = \sigma(e) = \sigma(aa^{-1}) = \sigma(a)\sigma(a^{-1}),$$

所以 $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$.

对于任意的 $\sigma(a), \sigma(b) \in \sigma(H)$, 有

$$\sigma(a)\sigma(b)^{-1} = \sigma(ab^{-1}) \in \sigma(H),$$

所以 $\sigma(H)$ 是 G' 的子群.

定义 2.16. 同态的核

设 σ 是群 G 到 G' 的一个同态, 则 G' 的单位元 e' 的原像集称为 σ 的**核** (Kernal), 记做 $Ker\sigma$, 即 $Ker\sigma \xlongequal{def} \{a \in G | \sigma(a) = e'\}$.

同态核具有如下性质:

性质 设 $Ker\sigma$ 是群 G 到 G' 的一个同态 σ 的核,

(1) σ 是单射 $\Longleftrightarrow Ker\sigma = e$;

(2) $Ker\sigma$ 是 G 的不变子群.

证明 假设 $Ker\sigma = e$, 则对于任意的 $a, b \in G$, 如果 $\sigma(a) = \sigma(b)$, 那么

$$\sigma(ab^{-1}) = \sigma(a)\sigma(b)^{-1}) = e',$$

所以 $ab^{-1} = e$, 即 $a = b$, 得出 σ 是单射. 另一方面，假设 σ 是单射，设 $a \in Ker\sigma$, 对于任意的 $g \in G$,

$$\sigma(g) = \sigma(g)e' = \sigma(g)\sigma(a) = \sigma(ga)$$

, 由于 σ 是单射，所以 $g = ga$, 消去 g 得 $a = e$, 即 $Ker\sigma = e$.

为了说明 $Ker\sigma$ 是 G 的不变子群，我们先说明 $Ker\sigma$ 是 G 的子群，这是因为对于任意的 $a, b \in Ker\sigma$, 有 $\sigma(ab^{-1}) = \sigma(a)\sigma(b)^{-1} = e'$, 得 $ab^{-1} \in Ker\sigma$. 对于任意的 $g \in G, h \in Ker\sigma$, 有 $\sigma(ghg^{-1}) = \sigma(g)\sigma(h)\sigma(g)^{-1} = e'$, 所以 $ghg^{-1} \in Ker\sigma$, 由推论2.1知 $Ker\sigma$ 是 G 的不变子群.

关于群的同态，有一个非常重要的定理:

定理 2.3. 群同态基本定理

设 σ 是群 G 到 G' 的一个同态, 则:

$$G/Ker\sigma \cong Im\sigma.$$

证明 考虑映射:

$$\begin{aligned} \tau: \quad & G/Ker\sigma \to Im\sigma \\ & aKer\sigma \mapsto \sigma(a), \end{aligned}$$

对于任意的 $a, b \in G$, 由式 (2.13) 知:

$$\tau[(aKer\sigma)(bKer\sigma)] = \tau[(ab)Ker\sigma] = \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(B) = \tau(aKer\sigma)\tau(bKer\sigma),$$

所以映射 τ 是商群 $G/Ker\sigma$ 到 $Im\sigma$ 的同态映射。由 τ 的定义知 τ 是满射。此外，设 $\tau(gKer\sigma) = e' \in Im\sigma \subseteq G$, 则 $\sigma(g) = e'$, 所以 $g \in Ker\sigma$, 也就是说，$gKer\sigma = Ker\sigma$, 这正是商群 $G/Ker\sigma$ 的单位元，于是得到 τ 是单射.

综上所述，映射 τ 是同构映射，$G/Ker\sigma \cong Im\sigma$.

基于群同态基本定理，可以推出以下两个定理:

定理 2.4. 群同构第一定理

设 G 是群，$H \leqslant G, N \lhd G$, 则

(1) $HN \leqslant G$;

(2) $H \cap N \lhd H$, 且 $H/(H \cap N) \cong (HN)/N$.

♡

证明 对于任意的 $h_1, h_2 \in H, a_1, a_2 \in N$, 有

$$(h_1a_1)(h_2a_2)^{-1} = h_1a_1a_2^{-1}h_2^{-1} = (h_1h_2^{-1})(h_2a_1a_2^{-1}h_2^{-1}),$$

由于 $N \lhd G, h_2a_1a_2^{-1}h_2^{-1} \in N$, 所以 $(h_1a_1)(h_2a_2)^{-1} \in HN$, 于是我们证明了 HN 是群 G 的子群.

容易知道，$H \cap N$ 是 H 的子群. 设 $a \in H \cap N$, 对于任意的 $h \in H$, 自然 $hah^{-1} \in H$, 由于 $N \lhd G$, 所以 $hah^{-1} \in N$, 故 $hah^{-1} \in H \cap N$, 于是我们证明了 $H \cap N \lhd H$. 另外，对于任意的 $a, b \in N, h \in H$，由于 $N \lhd G$, 所以

$$(hb)a(hb)^{-1} = h(bab^{-1})h^{-1} \in N,$$

于是我们证明了 $N \lhd (HN)$。

考虑映射:

$$\begin{aligned} \sigma: \quad & H \to G/N \\ & h \mapsto hN, \end{aligned}$$

由式 (2.13) 知:

$$\sigma(h_1h_2) = (h_1h_2)N = (h_1N)(h_2N) = \sigma(h_1)\sigma(h_2),$$

所以 σ 是同态映射. 而 $Ker\sigma = \{h \in H | hN = N\} = \{h \in H | h \in N\} = H \cap N$; 又 $Im\sigma = \{hN | h \in H\} = (HN)/N$, 结合群同态基本定理，我们证明了:

$$H/(H \cap N) \cong (HN)/N.$$

定理 2.5. 群同构第二定理

设 G 是一个群，$H \lhd G, N \lhd G$, 且 $N \subseteq H$, 则:

$$(H/N) \lhd (G/N), 且 (G/N)/(H/N) \cong G/H.$$

♡

证明 由于 N 是群 G 的子群，自然也就是 H 的子群. 对于任意的 $h \in H \subseteq G, A \in N$, 由于 $N \lhd G$，自然 $hah^{-1} \in N$, 所以 $N \lhd H$.

由式 (2.13) 容易推出 H/N 是 G/N 的子群. 而对于任意的 $h \in H, g \in G$, 由于 $H \lhd G$, 所以 $ghg^{-1} \in H$, 故 $(gN)(hN)(gN)^{-1} = (ghg^{-1})N \in H/N$, 于是我们证明了 $(H/N) \lhd (G/N)$.

考虑映射:

$$\begin{aligned} \sigma: \quad G/N &\to G/H \\ gN &\mapsto gH \end{aligned}$$

结合式 (2.13) 知

$$\sigma[(g_1N)(g_2N)] = \sigma(g_1g_2N) = (g_1g_2)H = (g_1H)(g_2H) = \sigma(g_1N)\sigma(g_2N),$$

得出映射 σ 是同态映射. 而 $Ker\sigma = \{gN \in G/N | gH = H\} = \{gN \in G/N | g \in H\} = H/N$, 又 $Im\sigma = G/H$, 结合群同态基本定理知:

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H.$$

而从群同态基本定理知道，群 G 的每一个同态像都同构于 G 对于同态核的商群. 又同态核是 G 的正规子群，反之亦然. 因此只要掌握了群 G 的所有正规子群，那么就把握了群 G 的所有同态像，从而可了解群 G 的结构. 这就是为什么说正规子群在研究群的结构中起着十分重要的作用。

定义 2.17. 单群

如果一个群 G 只有平凡的不变子群 (即 $\{e\}$ 和 G)，则称 G 是**单群** (Simple Group). ♣

单群是群的基本构建，不能被“拆开”。我们能不能找出尽量多的单群?

命题 2.9

Abel 群 G 是单群的充要条件是：G 是素数阶循环群或平凡群. ♠

证明 由命题2.4(1) 知有限循环群的子群都是循环群，所以充分性显然.

下面考察必要性. 如果 Abel 群 G 是单群，但不是平凡群，则 G 中有非单位元 a, $\langle a \rangle$ 是群 G 的子群，对于任意的 $g \in G$, $gag^{-1} = a \in \langle a \rangle$, 于是 $\langle a \rangle$ 是群 G 的不变子群，故 $\langle a \rangle = G$，所以群 G 是循环群。由命题2.4(2) 知群 G 的阶只能为素数.

定义 2.18. 换位子群 (导群)

设 x, y 是群 G 中的元素，把 $xyx^{-1}y^{-1}$ 称为 x 与 y 的**换位子** (Commutator), 记做 $[x, y]$. 群 G 所有换位子生成的子群称为群 G 的**换位子群** (Commutator Subgroup) 或者**导群** (Derived Group), 记做 $[G, G]$ 或者 G', 即 $G' = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} | x, y \in G\} \rangle$. ♣

不难证明，对于 Abel 群，我们有:

命题 2.10

群 G 为 Abel 群的充要条件是:

$$G' = \{e\}.$$

♠

换位子群还有性质:

命题 2.11

群 G 的换位子群 G' 是 G 的一个不变子群.

证明 由命题2.2知,

$$G' = \{(x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1})(x_2y_2x_2^{-1}y_2^{-1})\cdots(x_ky_kx_k^{-1}y_k^{-1})|x_i,y_i\in G,1\leqslant i\leqslant k,k\in\mathbb{N}^*\}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k,y_1,y_2,\cdots,y_k$ 不必是不同的.

对于任意的 $(x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1})(x_2y_2x_2^{-1}y_2^{-1})\cdots(x_ky_kx_k^{-1}y_k^{-1})\in G'$, 对于任意的 $g\in G$, 有:

$$\begin{aligned}&g[(x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1})(x_2y_2x_2^{-1}y_2^{-1})\cdots(x_ky_kx_k^{-1}y_k^{-1})]g^{-1}\\=&(gx_1g^{-1})(gy_1g^{-1})(gx_1g^{-1})^{-1}(gy_1g^{-1})^{-1}\cdots(gx_kg^{-1})(gy_kg^{-1})(gx_kg^{-1})^{-1}(gy_kg^{-1})^{-1}\\\in&G'\end{aligned}$$

所以 G' 是 G 的一个不变子群.

2.4 群在集合上的作用

第三章 群表示论

在前几章了解群的基本知识后,我们来看群的表示. 在本章将会认识到,群与群代数有着相同的结构,群的表示与群代数的表示可以等同起来;而代数的表示可以与代数的模等同起来,所以群的表示、群代数的表示、群代数的模都可以等同起来.

3.1 代数的表示与代数的模

代数是线性空间与环的联合体,代数中也可以定义同态映射, 自然, 它既表示线性映射, 又是环同态. 这里我们引入环同态的概念.

定义 3.1. 环的同态

设 R,R' 是两个环, 若存在映射 $\sigma : R \to R'$, 它满足 $\forall a, b \in R$, 有:

$$\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b), \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b), \tag{3.1}$$

如果 R 有单位元, 还要求 $\sigma(1) = 1'$, 则称 σ 是环 R 到 R' 的一个**同态**.

♣

有了环同态的概念,就可以引入代数的表示.

定义 3.2. 代数的表示

设是 A 一个 F 代数, V 是 F 上的 n 维线性空间. 称代数同态 $X : A \to End_F(V)$ 为 A 的一个**线性表示**, 而称 $X : A \to M_n(F)$ 为的一个**矩阵表示**.

♣

一个代数有很多表示,我们把其中相似的分为一类,称为表示的等价类.

定义 3.3. 代数表示的等价性

代数的两个表示 $X_1 : A \to End_F(V_1)$ 和 $X_2 : A \to End_F(V_2)$ 称为**等价的**, 如果存在线性同构 $S : V_1 \to V_2$, 使得:

$$\forall a \in A, SX_1(a) = X_2(a)S,$$

记做 $X_1 \sim X_2$.

♣

如果两个表示都是矩阵表示,那么等价的表示意味着表示矩阵是相似的,且 A 中每一个的元素对应的相似变换矩阵都是同一个. 接下来再引入代数的模的概念.

定义 3.4. 代数的模

设 A 是一个 F 代数, V 是 F 上的 n 维线性空间. 如果存在一个映射

$$\phi : A \times V \to V$$

$$(x, v) \mapsto xv$$

它满足 $\forall x, y \in A, v, w \in V, f \in F$, 下列条件成立:

(1) $\phi(x, v + w) = \phi(x, v) + \phi(x, w)$, 简记为 $x(v + w) = xv + xw$;

(2) $\phi(x+y,v)=\phi(x,v)+\phi(y,v)$, 简记为 $(x+y)v=xv+yv$;

(3) $\phi(y,\phi(x,v))=\phi(yx,v)$, 简记为 $y(xv)=(yx)v$;

(4) $\phi(x,fv)=f\phi(x,v)=\phi(fx,v)$, 简记为 $x(fv)x=f(xv)=(fx)v$;

(5) $\phi(1,v)=v$, 简记为 $1\cdot v=v$;

则称 V 为一个 **(左)A 模**.

实际上, $\forall x\in A,\phi(x,\cdot)$ 都是 V 上的线性变换, 用 $X(x)$ 表示, 即 $X:A\to End_F(V)$. 这个映射保持加法, 乘法与数乘运算, 且把 A 的乘法单位元 1 映成上 V 的恒等变换, 故 X 是 A 到 $End_F(V)$ 内的代数同态, 给出了 A 的一个表示. 反之, 对于 A 的任一线性表示 X, 规定

$$\forall x\in A,v\in V,\text{都有}\phi(x,v)=xv=X_x(v), \tag{3.2}$$

便可使 V 成为一个 A 模, 叫做表示 X 的表示模. 于是我们可以把的 A 表示与 A 模等同起来.

例 3.1 设 A 是一个 F 代数, 规定 $\phi(a,b)=ab$, 则 A 作为 F 上的线性空间可以看出一个 A 模, 这个 A 模叫做代数 A 的 (左) **正则 A 模**。

我们知道线性空间有子空间, 而代数的模本身就是一个线性空间, 所以自然我们想到引入子模的概念.

定义 3.5. 子模

设 V 是一个 A 模, W 是 V 作为线性空间的一个子空间. 若 W 在 A 的作用下不变, 即 $\forall w\in W,x\in A$, 都有 $xw\in W$, 则称 W 为 V 的一个 A **子模**. 显然, $\{0\}$ 和 V 都是 V 的 A 子模, 叫做 V 的**平凡子模**.

子模的意思就是, 对于任意 A 中元素 x, w 都是 $X(x)$ 的不变子空间.

有了子模的概念, 我们自然想到一个模能不能分解为子模的直和. 但不是所有的子模都能分解, 我们先引入如下概念:

定义 3.6. 代数表示的可约性与可分解性

设 $X:A\to End_F(V)$ 是代数 A 的表示, V 是相应的 A 模。如果 V 中存在一个非平凡的 A 子模 W, 则称表示 X 及模 V 为**可约的**, 否则称为**不可约的**; 如果 V 可表示成的两个非平凡 A 子模 W_1 和 W_2 的直和:$V=W_1\bigoplus W_2$, 则称表示及模为**可分解的**, 否则称为**不可分解的**; 如果对 V 的任一 A 子模 W 都存在 V 的一个 A 子模 W_2, 使得 $V=W_1\bigoplus W_2$, 则称表示 X 及 A 模 V 为**完全可约的**.

我们发现, 有的代数, 它的模可约就完全可约, 我们提出如下概念:

定义 3.7. 半单代数

称 F 代数 A 为**半单代数**, 如果任一 A 模 V 都是完全可约的.

任何结构都有同态关系, 模自然也有同态关系, 下面定义模的同态.

定义 3.8. 模同态

设 V, W 是两个 A 模, $\phi \in Hom_F(V, W)$, 且满足:

$$\forall x \in A, v \in V, \text{都有} \phi(xv) = x\phi(v),$$

则称是 ϕ 是 A 模 V 到 A 模 W 的一个**同态**. 将全体 V 到 W 的 A 模同态的结合记为 $Hom_A(V, W)$.

♣

前文说过，代数的模可以与代数的表示等同起来，那么模同态的定义在代数表示中如何呈现呢？设 X 和 Y 分别是模 V 和 W 对应的 A 的表示，则对于 $v \in V, a \in A, av = X_a(v), a\phi(v) = Y_a(\phi(v))$, 于是我们有:

命题 3.1

设 X 和 Y 分别是模 V 和 W 对应的 A 的表示，则 $\phi \in Hom_A(V, W)$ 意味着

$$\forall a \in A, \text{都有} \phi \circ X_a = Y_a \circ \phi.$$

♠

模同态映射具有如下性质:

性质 模同态的性质

(1) $Hom_A(V, W)$ 也是域上的线性空间;

(2) $Hom_A(V_1 \bigoplus V_2, W) \cong Hom_A(V_1, W) \bigoplus Hom_A(V_2, W)$

(3) 设 V, W 是两个 A 模, $\phi \in Hom_A(V, W)$, 则 $Ker\phi$ 是的 V 一个 A 子模, 则 $Im\phi$ 是的 W 一个 A 子模;

(4) 两个模同构 (即存在可逆同态映射) 的充要条件是它们 (对应的 A 的表示) 等价;

证明

(1) 若 $\phi, \psi \in Hom_A(V, W), f \in F$, 则:

$$(\phi + \psi)(xv) = \phi(xv) + \psi(xv) = x\phi(v) + x\psi(v) = x(\phi + \psi)(v),$$

$$(f\phi)(xv) = fx\phi(v) = x(f\phi)(v)$$

所以 $(\phi + \psi) \in Hom_A(V, W), (f\phi) \in Hom_A(V, W)$, 所以 $Hom_A(V, W)$ 线性空间;

(2) 我们记 $V_1 \bigoplus V_2 = V$, 现在我们需要先知道 $Hom_A(V_1, W) \bigoplus Hom_A(V_2, W)$ 指什么？本来 $Hom_A(V_1, W)$ 和 $Hom_A(V_2, W)$ 是两个没有关系的线性空间，但我们考察 $Hom_A(V, W)$ 的两个子空间 H_1 和 H_2，其中 $H_1 = \{\phi \in Hom_A(V, W) | \forall \alpha \in V_2, \phi(\alpha) = 0\}, H_2 = \{\phi \in Hom_A(V, W) | \forall \alpha \in V_1, \phi(\alpha) = 0\}$.

一方面, $H_1 \bigcap H_2 = 0$; 另一方面, $\forall \phi \in Hom_A(V, W), \forall \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \in V, where\, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$, 令 $\phi_1 : \alpha \mapsto \phi(\alpha_1), \phi_2 : \alpha \mapsto \phi(\alpha_2)$, 则 $\phi = \phi_1 + \phi_2$, 且由于 V_1 和 V_2 是的 A 的子模，所以 $\forall x \in A$, $\alpha_1 x \in V_1$, $\alpha_2 x \in V_2$,

$$\phi_1(\alpha)x = \phi(\alpha_1)x = \phi(\alpha_1 x) = \phi_1(\alpha x)$$

故 $\phi_1 \in H_1$，同理，$\phi_2 \in H_2$，所以 $Hom_A(V, W) = H_1 \bigoplus H_2$. 我们知道 H_1 到 $Hom_A(V_1, W)$ 有一个很自然的同构映射 $\phi_1 \mapsto \phi_1|_{V_1}$, H_2 到 $Hom_A(V_2, W)$ 也有一

个很自然的同构映射 $\phi_2 \mapsto \phi_2|_{V_2}$, 最终我们证明了:

$$Hom_A(V_1 \bigoplus V_2, W) \cong Hom_A(V_1, W) \bigoplus Hom_A(V_2, W).$$

(3) 对于任意的 $\alpha \in Ker\phi$, $x \in A$, 有 $\phi(x\alpha) = x\phi(\alpha) = 0$, 所以 $x\alpha \in Ker\phi$, 所以 $Ker\phi$ 是的 V 一个 A 子模；对于任意的 $\phi(\alpha) \in Im\phi$, $x \in A$, 有 $x\phi(\alpha) = \phi(x\alpha) \in Im\phi$, 所以 $Im\phi$ 是的 W 一个 A 子模。

(4) 由命题3.1即可推出.

什么样的线性映射是模同态呢？我们有一个简单的例子:

命题 3.2

设 V 是 A 模，它可以分解为两个 A 子模 W 与 U 的直和 $V = W \bigoplus U$，那么 V 平行于 W 到 U 的投影映射 $\mathcal{P}$ 就是模同态.

证明 设 $v \in V$, 它按照直和分解为 $v = w + u$, 其中 $w \in W, u \in U$. 由于 W 与 U 是两个 A 子模，所以 $\forall x \in A, xw \in W, xu \in U$. 那么:

$$\mathcal{P}(xv) = \mathcal{P}(xw + xu) = xw = x\mathcal{P}(w) = x\mathcal{P}(v)$$

所以 $\mathcal{P}$ 就是模同态.

当然，这个命题也可以推广到有限多个子模直和的情形.

最后，我们介绍 Schur 引理。

引理 3.1. Schur 引理 1

设 V 和 W 是不可约 A 模，则 $Hom_A(V, W)$ 中的每个非零元素在 $Hom_A(W, V)$ 中都有逆.

证明 设 $\phi \in Hom_A(V, W)$, 且 $\phi \neq 0$。则 $Ker\phi$ 是的 V 一个 A 子模，而 V 是不可约的，故 $Ker\phi = 0$ 或 V. 又 $\phi \neq 0$，故 $Ker\phi = 0$，由此推出 ϕ 是单射；另一方面，$Im\phi$ 是 W 的一个 A 子模，而 W 是不可约的，故 $Im\phi = 0$ 或 W. 又 $\phi \neq 0$，故 $Im\phi = W$，由此推出 ϕ 是满射. 所以 ϕ 是双射，它有逆映射.

引理 3.2. Schur 引理 2

设 V 是有限维不可约 A 模，F 是代数封闭域，则

$$End_A(V) = F \circ I = \{f \circ I | f \in F\}$$

这里 I 表示 V 上的恒等变换.

证明 设 $\phi \in End_A(V)$, 它的一个特征值是 λ. 显然 $\lambda I \in End_A(V)$, 故 $(\phi - \lambda I) \in End_A(V)$, 而 $(\phi - \lambda I)$ 不是可逆的，由 Schur 引理 1 知, $(\phi - \lambda I) = 0$, 即 $\phi = \lambda I$.

3.2 群的表示与群代数

上一节描述了代数的表示，那么本节描述群的表示. 此外，通过群代数的定义，我们可以把群的表示与代数的表示联系起来.

定义 3.9. 群的表示

设 V 是域 F 上的线性空间. 称群 G 到 $GL(V)$ 内的一个同态映射 X 为 G 的一个**线性表示**, 并称 F 为表示的**基域**, 叫做 V 表示空间, 而 $dimV$ 叫做表示的**级**; 同样, 称群 G 到 $GL(n,F)$ 内的一个同态映射 X 为 G 的一个**矩阵表示**. 称同态核 $kerX$ 为表示 X 的核, 如果 $kerX=\{e\}$, 即是 X 是单射, 则 X 称 G 为的一个**忠实表示**. ♣

例 3.2 考察三维欧式空间中的三个 2 阶群:$\{e,\sigma_{\boldsymbol{k}}\}$(对 xy 平面的反射), $\{e,\sigma_{\boldsymbol{k}}(\pi)\}$(绕 z 轴旋转 π 角), $\{e,I\}$(空间反演), 表示空间就是三维欧式空间. 那么 $\{e,\sigma_{\boldsymbol{k}}\}$ 可表示为:

$$X(e)=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},X(\sigma_{\boldsymbol{k}})=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$\{e,\sigma_{\boldsymbol{k}}(\pi)\}$ 可表示为:

$$X(e)=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},X(\sigma_{\boldsymbol{k}})=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$\{e,I\}$ 可表示为:

$$X(e)=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},X(I)=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

从这个例子可以看出, 如果群 G 就是某个线性空间 V 上的一些线性变换组成的群, 那么把每个群元映射成自身就是一种表示, 此时这些线性变换看成群 G 在集合 V 上的作用.

例 3.3 置换表示与正则表示

设群 G 作用在集合 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$ 上, 对于任意 $a\in G$, 令 $P(a)=(a_{ij})_{n\times n}$, 其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果 } a\circ j=i;\\ 0 & \text{如果 } a\circ j\neq i.\end{cases}$$

容易验证, $P(a)$ 每一行和每一列中都恰有一个 1, 而其余元素是 0, 所以 $P(a)$ 是可逆矩阵. 我们又知道 $\forall a,b\in G$:

$$[P(a)P(b)]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}P(a)_{ik}P(b)_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{a\circ k,i}\delta_{b\circ j,k}=\delta_{a\circ(b\circ j),i}=P(ab)_{ij},$$

所以 P 是同态映射。则映射 $P:a\mapsto P(a)$ 是 G 的一个 n 级矩阵表示, 叫做 G 在 Ω 上的一个**置换表示**。

特别地, 如果该作用是在集合 $G=\{e=a_1,a_2,\cdots,a_g\}$ 上的右平移, 对于每一个 $a\in G$, 令 $R(a)=(a_{ij})_{g\times g}$, 其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果 } a_ia=a_j;\\ 0 & \text{其他情形.}\end{cases}$$

则映射 $R: a \mapsto R(a)$ 是 G 的一个表示，叫做 G 的**右正则表示**。

定义 3.10. 群代数

设是 F 域, 是 $G=\{a_i\}_{i\in I}$ 一个群, 令

$$F[G]=\{f_1a_{i_1}+f_2a_{i_2}+\cdots+f_ka_{i_k}|k\in\mathbb{N}^*,i_1,i_2,\cdots,i_k\in I,f_1,f_2,\cdots,f_k\in F\}$$

是 G 中元素用 F 中的元素作系数的所有形式线性组合. 规定:

$$\sum_{j=1}^k f_ja_{i_j}=\sum_{j=1}^k f_j'a_{i_j}\Longleftrightarrow \forall j=1,2,\cdots,k,f_j=f_j'$$

在 $F[G]$ 中规定加法:

$$\sum_{j=1}^k f_ja_{i_j}+\sum_{j=1}^k f_j'a_{i_j}=\sum_{j=1}^k(f_j+f_j')a_{i_j},$$

规定数量乘法[a]:

$$f(\sum_j f_ja_{i_j})=(\sum_j ff_ja_{i_j}),$$

规定乘法:

$$(\sum_j f_ja_{i_j})(\sum_l f_l'a_{i_l})=\sum_{j,l}(f_jf_l')(a_{i_j}a_{i_l}),$$

$F[G]$ 成为一个 F 代数, 称为群 G 在 F 上的**群代数**.

[a]这里的求和都指有限求和

群代数与群有相同的结构信息. 有了一个群, 我们可以得到它的群代数; 反之有了一个有乘法单位元和逆元的代数, 我们可以得到它的乘法群. 群代数的表示与群的表示也可以联系起来. 有了群的一个表示 $X: G\to GL(V)$, 我们可以构造群代数的表示

$$\begin{aligned}\widetilde{X}:\quad F[G]&\to End_F(V)\\ \sum_{j=1}^k f_ja_{i_j}&\mapsto\sum_{j=1}^k f_jX(a_{i_j})\end{aligned}\tag{3.3}$$

容易验证, $\widetilde{X}$ 是线性映射, 且保持乘法不变:

$$\begin{aligned}\widetilde{X}((\sum_j f_ja_{i_j})\cdot(\sum_l f_l'a_{i_l}))&=\widetilde{X}(\sum_{j,l}(f_jf_l')(a_{i_j}a_{i_l}))=\sum_{j,l}(f_jf_l')X(a_{i_j}a_{i_l})\\&=\sum_{j,l}(f_jf_l')X(a_{i_j})X(a_{i_l})=\widetilde{X}(\sum_j f_ja_{i_j})\cdot\widetilde{X}(\sum_l f_l'a_{i_l})\end{aligned}$$

所以 $\widetilde{X}$ 是 $F[G]$ 到 $End_F(V)$ 的代数同态.

有了群代数的概念，我们还可以描述线性 (右) 正则表示。对于任意的 $a\in G$, 考虑 $F[G]$ 上的映射 $\mathcal{R}(a):\sum\limits_{j=1}^k f_ja_{i_j}\mapsto\sum\limits_{j=1}^k f_ja_{i_j}a^{-1}$, 它是 $F[G]$ 作为线性空间上的线性变换，且保持乘法不变，$\mathcal{R}$ 成为 $F[G]$ 上的一个表示。如果 G 是有限群，则 $\mathcal{R}(a)$ 在基 $\{a_1,a_2,\cdots,a_g\}$ 上的矩阵就是 $(a_{ij})_{g\times g}$，其中 $a_{ij}=\delta_{a_ia,j}$.

群代数 $F[G]$ 的两个表示等价，可以用群表示的语言来描述.

定义 3.11. 群表示的等价性

对于群 G 的两个表示 $X_1 : G \to GL(V_1)$ 和 $X_2 : G \to GL(V_2)$, 如果存在线性同构 $S : V_1 \to V_2$, 使得:

$$\forall a \in G, SX_1(a) = X_2(a)S,$$

则称表示 X_1 和 X_2 是**等价的**, 记做 $X_1 \sim X_2$. ♣

我们可以有群 (代数) 的表示，得到相应的 $F[G]$ 模:

$$v(\sum_{j=1}^{k} f_j a_{i_j}) \xlongequal{def} \sum_{j=1}^{k} f_j X(a_{i_j})(v), \tag{3.4}$$

这样我们可以由群代数表示的可约性与可分解性来定义群表示的可约性和可分解性。我们只需要注意到以下命题:

命题 3.3

W 是 $F[G]$ 的子模 $\Longleftrightarrow \forall g \in G, W$ 是 $X(g)$ 的不变子空间. ♠

3.3 有限群表示理论

接下来我们重点讨论有限群. 对于一个群的表示来说，我们关心它可不可约。所以我们先引入如下定理[1].

定理 3.1. Maschke 定理

设是 G 有限群，F 是域。若 $charF = 0$ 或 $charF = p$, 但$p \nmid |G|$, 则群代数 $F[G]$ 是半单的. ♡

证明 设 V 是任一 $F[G]$ 模, W 是它的子模。我们先找到 W 的补空间 $U, V = W \bigoplus U$, 记 V 平行于 U 到 W 的投影映射 $\mathcal{P}$，而 $\mathcal{P}$ 不一定是 $F[G]$ 同态，由命题3.2知 U 就不一定是 A 子模. 我们构造:

$$\begin{aligned} \psi : V &\to W \\ v &\mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \mathcal{P}(va)a^{-1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

对于任意的 $v \in V, x \in G$, 都有

$$\psi(vx) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \mathcal{P}(vxa)a^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \mathcal{P}(va)(x^{-1}a)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \mathcal{P}(va)a^{-1}x = \psi(v)x$$

所以 ψ 是 $F[G]$ 同态, 由模同态性质 (3), $Ker\psi$ 是 $F[G]$ 模. 对于任意 $w \in W$, 有

$$\psi(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \mathcal{P}(wa)a^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} (wa)a^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} w = w,$$

所以 $Im\psi = W$. 故

$$\psi^2 = \psi$$

[1]这个定理对应于李新征老师讲义上的定理 2.1: " 对于有限群，表示可约则完全可约". 在李老师的证明中，默认了条件"$charF = 0$ 或 $charF \nmid |G|$". 但这里的证明绕过了矩阵表示，可以不用限制表示空间的维数.

于是 $V = Ker\psi \bigoplus W$，这样 V 就表示为两个子模的直和.

物理学中，我们常用复数域 $\mathbb{C}$ 上的 Hermite 空间，所以本节接下来都认为群表示空间 V 是有限维 Hermite 空间[2]. 在 Hermite 空间中，酉变换是很重要的线性变换，我们据此定义一种 Hermite 空间上的特殊的表示.

定义 3.12. 酉表示

设 G 是群，V 是 Hermite 空间，称群表示 $X: G \to V$ 是**酉表示**，如果

$$(X_g\alpha_1, X_g\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2), \forall g \in G, \alpha_1, \alpha_2 \in V.$$

♣

由 Maschke 定理可知，当 $F = \mathbb{C}$ 时，群表示一定是完全可约的。现在我们证明，酉表示也完全可约.

定理 3.2

Hermite 空间上的酉表示完全可约.

♡

证明 设 G 是群，X 是 Hermite 空间 V 上的酉表示. 设 W 是任意 $\mathbb{C}[G]$ 子模，我们考虑 W 的正交补空间 $W^{\perp}$, 对于任意的 $a \in G, \beta \in W^{\perp}$, 对于任意的 $\alpha \in W$, 有 $X_a^{-1}\alpha \in W$, 故

$$(X_a\beta, \alpha) = (\beta, X_a^{-1}\alpha) = 0 \tag{3.6}$$

故 $X_a\beta \in W^{\perp}$, W 的正交补空间 $W^{\perp}$ 也是 $\mathbb{C}[G]$ 子模.

既然酉表示具有很好的性质，但如果一个表示不是酉表示怎么办呢？我们有下面的定理.

定理 3.3

设 G 是有限群，V 是 n 维 Hermite 空间，则 G 在 V 上的每一个表示都有等价的酉表示.

♡

3.4 群特征标

3.5 诱导特征标

3.6 无限群表示理论

[2]这里先认为空间维数是有限的，因为我暂时理不清 Hermite 空间中哪些结论只针对有限维的，哪些可以适用于无限维的，我甚至不能保证无限维 Hermite 空间是否存在标准正交基.

附录 A 附录

参考文献

[1] 丘维声. 高等代数. 上册[M]. [出版地不详]: 高等教育出版社, 2015.
[2] 丘维声. 高等代数. 下册[M]. [出版地不详]: 高等教育出版社, 2015.