

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КУРСОВА РОБОТА
Пояснювальна записка

Чисельні методи розв'язання задачі Коші для систем звичайних
диференціальних рівнянь (метод Рунге-Кутта)
(тема роботи)
Чисельні методи
(назва дисципліни)

Керівник _____ доц. каф. ПМ Сидоров М. В.
(підпис, дата, посада, прізвище, ініціали)

Студент СТСА-16-1 _____ Деркач О. С.
(група, підпис, дата, прізвище, ініціали)

Робота захищена
з оцінкою _____
« ____ » _____ 2018 р.

Харків 2018

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти перший (бакалаврський)

Дисципліна Чисельні методи

Спеціальність 124 Системний аналіз

Курс 3

Група СТСА-16-1

Семестр 5

ЗАВДАННЯ НА КУРСОВУ РОБОТУ

студентові Деркачу Олексію Сергійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Чисельні методи розв'язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь (неявні методи Рунге – Кутта)

2. Термін здачі студентом закінченої роботи 26 грудня 2018 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель – система Лотки–Вольтера

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити _____)

1. Теоретична частина (загальні питання теорії чисельних методів розв'язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь)

2. Практична частина (якісний аналіз системи Лотки–Вольтера, застосування неявних методів Рунге–Кутта до розв'язання системи Лотки–Вольтера, результати обчислювального експерименту)

5. Дата видачі завдання 23 листопада 2018 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів курсової роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Вибір теми та отримання завдання на курсову роботу	13 тиждень	виконано
2	Підбір та вивчення літератури за темою роботи	14 тиждень	виконано
3	Виконання теоретичної частини курсової роботи	15 тиждень	виконано
4	Виконання практичної частини курсової роботи	16 тиждень	виконано
5	Оформлення пояснювальної записки	17 тиждень	виконано
6	Захист курсової роботи	18 тиждень	виконано

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____
(підпис)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 49 с., 23 рис., 1 дод., 12 джерел.

ПОХІДНА, ІНТЕГРАЛ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, МЕТОД, СІТКА, ВУЗОЛ, СИСТЕМА РІВНЯНЬ, КРОК ІНТЕГРУВАННЯ, ПОХИБКА

Об'єкт дослідження – система Лотки – Вольтера, яка моделює еволюцію двох співіснуючих біологічних популяцій, особини однієї з яких являються кормом для особин іншої (взаємодія «хижак – жертва»).

Мета роботи – сприйняття більш поглибленого вивчення курсу «Чисельні методи», осмислення його та застосування для розв'язання задач практичного змісту.

Метод дослідження – неявний метод Рунге – Кутта.

Курсова робота містить деякі теоретичні відомості з розділу «Наближені методи розв'язання задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь», опис якісного аналізу системи та результати чисельного розв'язку системи, порівнянні з точним розв'язком.

ЗМІСТ

С.

Вступ	6
1 Теоретична частина	7
1.1 Постановка задачі Коші для ЗДР та систем ЗДР. Класифікація методів розв'язання	7
1.2 Практичні способи оцінювання похибки наближеного розв'язку	10
1.3 Інтегрування зі змінним кроком. Автоматичний вибір кроку інтегрування	13
1.4 Стійкість чисельних методів розв'язання задачі Коші. Жорсткі системи	15
1.5 Неявні методи Рунге – Кути (побудова формул, аналіз стійкості)	22
2 Практична частина	27
2.1 Змістовна та формальна постановка задачі	27
2.2 Якісний аналіз системи Лотки – Вольтера	28
2.3 Застосування метода Рунге – Кути до розв'язання системи Лотки – Воль- тера.....	31
2.4 Результати обчислювального експерименту	35
Висновки	45
Перелік джерел посилання	46
Додаток А. Лістинг програми	47

ВСТУП

Курс «Чисельні методи» займає особливе місце як одна з базових у системі дисциплін, що вивчаються студентами спеціальностей «Прикладна математика» та «Системний аналіз».

Актуальність тематики даної курсової роботи полягає в тому, що питання цієї роботи відіграють важливу роль з точки зору теоретичних та практичних аспектів для отримання задовольняючих наближених значень розв'язків задач.

Виконання курсової роботи з курсу «Чисельні методи» має такі цілі та задачі:

- поглиблення теоретичних знань з конкретних розділів курсу;
- розвиток навичок самостійної роботи студентів;
- набуття навичок самостійної роботи з літературними джерелами;
- практичне застосування чисельних методів під час розв'язання прикладних задач;
- тверде володіння технікою обчислень, пов'язаних з чисельними методами;
- розвиток у студентів логічного та алгоритмічного мислення.

У курсовій роботі розглянуті такі теми: постановка задачі Коші для ЗДР та систем ЗДР, класифікація методів розв'язання, практичні способи оцінювання похибки наближеного розв'язку, інтегрування зі змінним кроком, автоматичний вибір кроку інтегрування, стійкість чисельних методів розв'язку задачі Коші, жорсткі системи та неявні методи Рунге – Кутта. Також у роботі розглянута та чисельно розв'язана система Лотки – Вольтера за допомогою неявного методу Рунге – Кутта.

1 ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

1.1 Постановка задачі Коші для ЗДР та систем ЗДР. Класифікація методів розв'язання

Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідною, ставиться так: знайти функцію $y(x)$, що задовольняє рівняння

$$y' = f(x, y) \quad (1.1)$$

і початковій умові (умові Коші)

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.2)$$

Задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь в нормальній формі ставиться так: знайти функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, що задовольняють рівнянням

$$y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

і початковим умовам (умовам Коші)

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0.$$

Будемо вважати, що $x \in [x_0, x_0 + H]$ і на цьому відрізку існує єдиний

розв'язок для кожної з поставлених задач Коші.

Методи розв'язання задачі Коші можна поділити на три класи:

- точні аналітичні;
- наближені аналітичні;
- чисельні.

Точні аналітичні методи вивчалися у дисципліні «Диференціальні рівняння». Вони дозволяють отримати розв'язок у вигляді формули, однак коло їх застосовності досить вузьке.

У наближених аналітичних методах будуються послідовності функцій, що сходяться (зазвичай рівномірно) до точного розв'язку задачі Коші. Основна складність при їх реалізації – це обчислення великої кількості похідних і інтегралів, серед яких можуть з'явитися такі, що «не беруться».

Чисельні методи носять найбільш універсальний характер. При їх реалізації розв'язок $y(x)$ отримують у вигляді масиву чисел, що є наближеним значенням рішення на деякій системі точок.

Будемо розглядати задачу Коші (1.1), (1.2). Чисельний розв'язок цієї задачі шукають в вузлах x_k , $k = 0, 1, \dots, N$, сітки

$$\Omega_h = \{x_0, x_1, \dots, x_N\},$$

де $x_N = x_0 + H$.

Позначимо $h_{k+1} = x_{k+1} - x_k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, відстань між сусідніми вузлами сітки. Якщо $h_{k+1} = h = \text{const}$, то сітка називається рівномірною (регулярною); у протилежному випадку – нерівномірною (нерегулярною).

У разі рівномірної сітки вузли знаходять за формулою

$$x_{k+1} = x_k + h = x_0 + (k + 1)h, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

На виході чисельного методу ми отримуємо послідовність значень $y_0, y_1,$

\dots, y_N , що є наближеннями до значень $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_N)$ точного розв'язку $y(x)$ в вузлах сітки Ω_h . Набор чисел y_0, y_1, \dots, y_N називається каркасом наближеного розв'язку задачі Коші. По цим точкам, застосувавши апарат теорії апроксимації, можна побудувати неперервну функцію, яка є наближеним розв'язком задачі (1.1), (1.2).

Набор чисел

$$[y(x)]_h = \{y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_N)\}$$

називається проекцією точного розв'язку $y(x)$ задачі Коші (1.1), (1.2) на сітку Ω_h .

Значення y_{k+1} , що знаходимо в вузлі x_{k+1} , може бути обчислено явно

$$y_{k+1} = F(f; x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m+1}, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m+1})$$

або неявно

$$y_{k+1} = F(f; x_{k+1}, x_k, \dots, x_{k-m+1}, y_{k+1}, y_k, \dots, y_{k-m+1}),$$

таким чином, для знаходження y_{k+1} потрібно розв'язати, взагалі кажучи, нелінійне рівняння. Тут F – функція, що характеризує той чи інший чисельний метод. Відповідно до способу знаходження y_{k+1} , чисельні методи діляться на явні і неявні. Неявні методи складніші в реалізації, ніж явні, але часто мають ряд переваг, про які буде сказано далі.

Розрізняють також чисельні методи однокрокові ($m=1$) і m -крокові (багатокрокові). У однокрокових методах для отримання точки (x_{k+1}, y_{k+1}) потрібна лише інформація щодо останньої розрахованої точки (x_k, y_k) . У m -крокових методах для отримання точки (x_{k+1}, y_{k+1}) потрібна інформація щодо

останніх m розрахованих точок.

При використанні чисельних методів основним є питання збіжності. Розглянемо збіжність при $h \rightarrow 0$.

Фіксуємо точку x і будуємо послідовність сіток Ω_h таких, що $h \rightarrow 0$ і $x_k = x_0 + kh = x$ (тоді необхідно $k \rightarrow +\infty$). Кажуть, що чисельний метод збігається у точці x , якщо

$$|y_k - y(x_k)| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, x_k = x.$$

Метод збігається на відрізку $[x_0, x_0 + H]$, якщо він збігається у кожній точці x цього відрізка.

1.2 Практичні способи оцінки похибки наближеного розв'язку за правилом Рунге

Нехай в точці x_k відомо значення $y_k \approx y(x_k)$. Із точки x_k зробимо один крок h з використанням m -етапного однокрокового методу s -го порядку. Отриманий в точці $x_{k+1} = x_k + h$ наближений розв'язок позначимо y_{k+1}^h .

Якщо знехтувати членами порядку $O(h^{2+2})$, то для похибки методу на даному етапі справедлива формула

$$y(x_k + h) - y_{k+1}^h \approx \psi(x_k, y_k) h^{s+1}. \quad (1.3)$$

З цієї ж точки x_k зробимо в точку x_{k+1} з використанням того ж m -етапного однокрокового методу s -порядку два кроки $\frac{h}{2}$. Отриманий в точці

$x_{k+1} = x_k + h$ наближений розв'язок позначимо $y_{k+1}^{\frac{h}{2}}$. Якщо знехтувати членами порядку $O(h^{s+2})$, то можна показати, що для похибки методу на даному етапі справедлива формула

$$y(x_k + h) - y_{k+1}^{\frac{h}{2}} \approx 2\psi(x_k, y_k) \left(\frac{h}{2}\right)^{s+1}. \quad (1.4)$$

Із (1.3), (1.4) отримуємо подання головних членів похибки методу на кроці h і на двох кроках $\frac{h}{2}$:

$$\begin{aligned} \psi(x_k, y_k) h^{s+1} &\approx \frac{y_{k+1}^{\frac{h}{2}} - y_{k+1}^h}{1 - \frac{1}{2^s}}, \\ 2\psi(x_k, y_k) \left(\frac{h}{2}\right)^{s+1} &\approx \frac{y_{k+1}^{\frac{h}{2}} - y_{k+1}^h}{2^s - 1}. \end{aligned}$$

Отже, якщо за наближення до розв'язку в точці x_{k+1} прийняти y_{k+1}^h , то локальна похибка дорівнюватиме

$$y(x_k + h) - y_{k+1}^h \approx \frac{y_{k+1}^{\frac{h}{2}} - y_{k+1}^h}{1 - \frac{1}{2^s}};$$

якщо ж за наближення до розв'язку в точці x_{k+1} прийняти $y_{k+1}^{\frac{h}{2}}$, то похибка методу на двох послідовних кроках $\frac{h}{2}$ дорівнюватиме

$$y(x_k + h) - y_{k+1}^{\frac{h}{2}} \approx \frac{y_{k+1}^2 - y_{k+1}^h}{2^s - 1}.$$

Оскільки $2^s - 1 > 1 - \frac{1}{2^s}$, то значення $y_{k+1}^{\frac{h}{2}}$ є більш точним і можна рекомендувати вибір

$$y_{k+1} = y_{k+1}^{\frac{h}{2}}.$$

Отримане наближене значення y_{k+1}^h або $y_{k+1}^{\frac{h}{2}}$ можна уточнити, додавши до нього величину головного члена похибки, тобто поклавши

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_{k+1}^h + \frac{y_{k+1}^2 - y_{k+1}^h}{1 - \frac{1}{2^s}},$$

або

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_{k+1}^{\frac{h}{2}} + \frac{y_{k+1}^2 - y_{k+1}^h}{1 - \frac{1}{2^s}}.$$

Тоді

$$y(x_{k+1}) - y_{k+1} = O(h^{s+2})$$

В такому способі оцінки похибки формули методу Рунге – Кутти застосовуються три рази і вимагають $3m - 1$ обчислень правої частини $f(x, y)$ диференціального рівняння $y' = f(x, y)$. Тому при складних і трудомістких для обчис-

лення правих частинах цей спосіб спричиняє великі обчислювальні витрати.

1.3 Інтегрування зі змінним кроком. Автоматичний вибір кроку інтегрування

Застосування змінного кроку інтегрування дозволяє враховувати характер поведінки розв'язку та зменшити загальну кількість кроків, зберігаючи при цьому необхідну точність приблизного розв'язку. Тим самим можуть бути знижені обсяги робіт і уповільнений ріст обчислюваної похибки. Розглянемо алгоритм вибору за допомогою подвоєння та ділення кроку навіпіл.

Нехай ρ_{n+1} – оцінка локальної похибки метода на кроці h , яка була допущена при обчисленні наближеного значення розв'язку y_{n+1}^h в точці $x_n + h$. Якщо оцінка перевершує деяку наперед задану межу ε :

$$|\rho_{n+1}| > \varepsilon,$$

то вважається, що значення y_{n+1}^h розв'язку не задовольняє запропонованій точності і крок h вважається не придатним. Отримана точка $x_n + h$ і значення y_{n+1}^h виключаються з розгляду. Вибирається нове значення кроку

$$h^{(1)} = \frac{h}{2}$$

і знову за тою ж формулою Рунге – Кутти з кроком $h^{(1)}$ обчислюється нове значення розв'язку $y_{n+1}^{h^{(1)}}$ в новій точці $x_n + h^{(1)}$.

Нехай $\rho_{n+1}^{(1)}$ – оцінка локальної похибки методу на даному кроці $h^{(1)}$. Якщо оцінка знову перевищує задану границю ε ,

$$|\rho_{n+1}^{(1)}| > \varepsilon,$$

то точка $x_n + h^{(1)}$ і значення $y_{n+1}^{h^{(1)}}$ знову виключаються з розгляду, крок знову ділиться навпіл:

$$h^{(2)} = \frac{h}{2}$$

і обчислення повторюються. Так відбувається доти, поки при якійсь величині кроку (позначимо її h_n) оцінка локальної похибки не стане меншою за ε :

$$|\rho_{n+1}| < \varepsilon.$$

Після цього вважається, що розв'язок диференціального рівняння продовжено до точки $x_{n+1} = x_n + h_n$. Подальше інтегрування рівняння проводиться з точки x_{n+1} з кроком h_{n+1} , котрий обирається наступним чином.

Якщо оцінка локальної похибки на кроці $h_n = x_{n+1} - x_n$ задовольняє нерівності

$$|\rho_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{K},$$

де K – деяка константа, то вважається, що досягнута точність, яка перевищує задану, і шаг інтегрування подвоюється:

$$h_{n+1} = 2h_n.$$

Якщо виконується нерівність

$$\frac{\varepsilon}{K} < |\rho_{n+1}| < \varepsilon,$$

то вважається, що отриманий в точці x_{n+1} розв'язок задовольняє заданій точності і шаг інтегрування залишається без змін

$$h_{n+1} = h_n.$$

Таким чином, на тих ділянках зміни незалежної змінної, де досягається висока точність наближеного розв'язку, крок інтегрування зростає, а там, де точність не досягається, крок інтегрування зменшується до необхідних для її досягнення значень.

1.4 Стійкість чисельних методів розв'язання задачі Коші. Жорсткі системи

Розглянемо задачу Коші для тестового рівняння Дальквіста

$$y'(x) = \lambda y(x), \quad x > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1.5)$$

$$y(0) = y_0. \quad (1.6)$$

Точним розв'язком задачі (1.5), (1.6) є функція $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$.

Запишемо чисельний метод для задачі (1.5), (1.6) у вигляді

$$y_{k+1} = R(z)y_k, \quad (1.7)$$

де $z = \lambda h$, $R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – поліном або дрібно-раціональна функція з дійсними кое-

фіцієнтами. Функцію $R(z)$ називають функцією стійкості чисельного метода.

Відзначимо, також, що будь-який метод Рунге – Кутти може бути записаний у вигляді (1.7).

Означення. Чисельний метод називається абсолютно стійким для заданого $z = \lambda h \in \mathbb{C}$, якщо для цього z виконується нерівність

$$|R(z)| \leq 1. \quad (1.8)$$

Таким чином, якщо $z = \lambda h$ задовольняє умові (1.8), то $|y_{k+1}| \leq |y_k|$. Така вимога є природною для чисельного методу, застосованого до задачі (1.5), (1.6) з $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, оскільки у цьому випадку модуль точного розв'язку є незростаючою функцією.

Означення. Множина всіх точок z , для яких $|R(z)| \leq 1$, називається областю абсолютної стійкості.

Означення. Якщо область абсолютної стійкості містить ліву напівплощину $\operatorname{Re} z \leq 0$, то метод називається A -стійким.

A -стійкість означає безумовну абсолютну стійкість чисельного метода для задачі (1.5), (1.6) при будь-якому λ , для якого $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$.

Перетин області абсолютної стійкості з дійсною віссю називається інтервалом стійкості.

Означення. Чисельний метод називається умовно абсолютно стійким, якщо існує таке число $h_{kr} > 0$, що при застосуванні чисельного методу до рівняння (1.5), (1.6), де $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, з шагом $0 < h \leq h_{kr}$ при $k \rightarrow \infty$ глобальна помилка обмежена.

Величина h_{kr} називається критичним кроком. При $h > h_{kr}$ глобальна помилка може необмежено зростати.

Нехай відома деяка особливість розв'язку диференціального задачі. Тоді можливо вимагати, щоб ця особливість зберігалася у розв'язку різницевого рівняння. Такою вимогою ми звузили клас допустимих різницевих методів.

Розглянемо методи, які можуть бути застосовані для отримання асимптотично стійкого розв'язку задачі Коши (1.5), (1.6).

А. Явний метод Ейлера (метод Рунге – Кутти першого порядку). Розрахункові формули метода

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

застосовані до рівняння (1.5), (1.6), мають вигляд

$$y_{k+1} = (1 + \lambda)y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

та функція стійкості $R(z) = 1 + z$.

Тоді область абсолютної стійкості метода визначається нерівністю $|1 + z| \leq 1$ і задає на комплексній площині (z) коло радіусу 1 з центром в точці $(-1; 0)$.

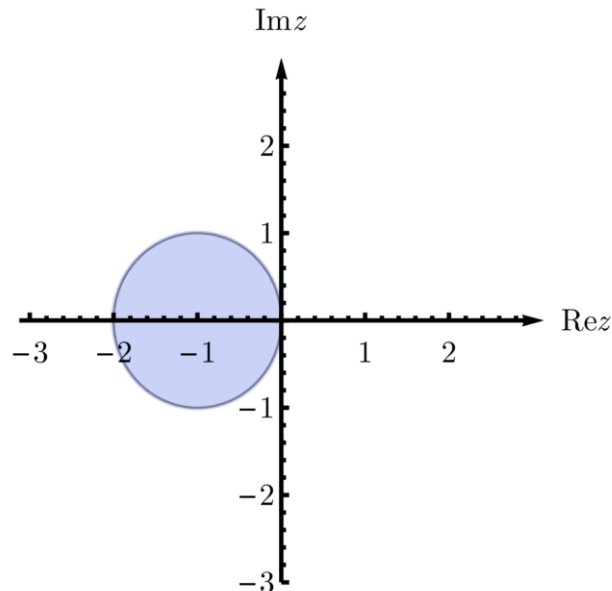


Рисунок 1.1 – Область абсолютної стійкості явного методу Ейлера

Явний метод Ейлера є умовно абсолютно стійким: він є стійким для зада-

чі (1.5), (1.6), якщо $\lambda < 0$ і $0 < h \leq h_{kr} = -\frac{2}{\lambda}$.

Б. Неявний метод Ейлера. Розрахункові формули метода

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

застосовані до рівняння (1.5), (1.6), мають вигляд

$$y_k = (1 - \lambda h)y_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

тобто

$$y_{k+1} = \frac{1}{(1 - \lambda h)} y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

та функція стійкості $R(z) = \frac{1}{1 + z}$.

Тоді область абсолютної стійкості метода визначається нерівністю $|1 - z| \geq 1$.

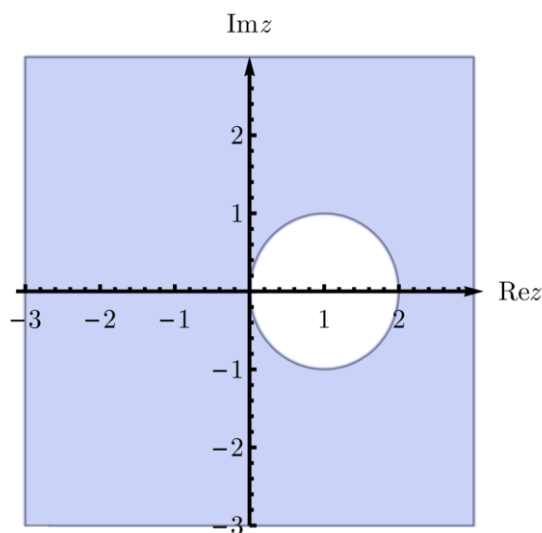


Рисунок 1.2 – Область абсолютної стійкості неявного метода Ейлера

Неявний метод Ейлера є A -стійким методом.

Умовна стійкість є недоліком явного методу, тому що потрібно брати надто малий крок. Неявний метод позбавлений цього недоліку, але його застосування приводить до необхідності розв'язання на кожному кроці системи алгебраїчних рівнянь, в загальному випадку нелінійної.

Розглянемо жорсткі системи. Суть явища жорсткості полягає в тому, що розв'язок, який потрібно отримати, змінюється повільно, але містить в собі збурення, що швидко затухають. Наявність таких збурень ускладнює чисельне отримання повільно змінливого розв'язку. Пояснимо сказане на прикладах.

Спочатку розглянемо скалярну задачу

$$y' = \lambda y + \frac{dF}{dx} - \lambda F(x), \quad x > 0, \quad (1.9)$$

$$y(0) = y_0, \quad (1.10)$$

де $\lambda \ll 0$, $F(x)$ – повільно мінлива функція від x .

Розв'язком задачі (1.9), (1.10) є функція

$$y(x) = F(x) + e^{\lambda x} [y_0 - F(0)].$$

Перехідна частина розв'язку $e^{\lambda x} [y_0 - F(0)]$ називається жорсткою компонентою розв'язку або сильно мінливою компонентою. Оскільки $\lambda \ll 0$, то вже після невеликого відрізка зміни x вона не вносить фактично ніякого вкладу в розв'язок $y(x)$. Таким чином, незалежно від початкового значення y_0 в розв'язку на більшій частині відрізка інтегрування переважає повільно мінлива компонента $F(x)$. Повільно мінливі компоненти розв'язку називають неперехідними або гладкими компонентами.

Таким чином, розв'язок містить член, внесок якого дуже малий, але звичайні методи для збереження стійкості вимагають, щоб цей член апроксимував-

ся досить точно, тобто величина кроку обмежується швидше чисельною стійкістю, ніж точністю. Наприклад, при використанні явного методу Ейлера крок інтегрування на всьому відрізку повинен задовольняти умові $h < -\frac{2}{\lambda}$.

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$y' = Ay, \quad (1.11)$$

$$y(0) = y_0 \quad (1.12)$$

з постійною, тобто незалежною від часу, матрицею A .

Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – власні значення матриці A .

Означення. Система звичайних диференціальних рівнянь $y' = Ay$ з постійною матрицею $A \in M_n(\mathbb{R})$ називається жорсткою, якщо:

а) $\operatorname{Re} \lambda_j < 0, j = 1, 2, \dots, n$, тобто система асимптотично стійка за Ляпуновим;

б) частка $s = \frac{\max_{1 \leq j \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_j|}{\min_{1 \leq j \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_j|}$ є великою.

Число s називається числом жорсткості системи $y' = Ay$, а величини $\frac{1}{\operatorname{Re}(-\lambda_j)}, j = 1, 2, \dots, n$, називається часовими постійними. Фундаментальні розв'язки системи загасають з ростом x зі швидкістю, що пропорційна величині $\frac{1}{\operatorname{Re}(-\lambda_j)}$. Зауважимо, що означення не вказує значення s , починаючи з якого система стає жорсткою.

Для лінійної системи, параметри якої залежать від часу, тобто $A = A(t)$, власні значення і число жорсткості s є також функціями часу, тому означення жорсткої системи приймає наступний вигляд.

Означення. Система звичайних диференціальних рівнянь $y' = Ay$ з пос-

тійною матрицею $A \in M_n(\mathbb{R})$, залежною від x , називається жорсткою на інтервалі $(x_0, x_0 + H)$, якщо:

а) $\operatorname{Re} \lambda_j < 0, j = 1, 2, \dots, n$, для всіх $x \in (x_0, x_0 + H)$;

б) число $\sup_{x \in (x_0, x_0 + H)} s(x)$ велике, де $s(x)$ – число жорсткості, та

$$s(x) = \frac{\max_{1 \leq j \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_j(x)|}{\min_{1 \leq j \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_j(x)|}.$$

Узагальнимо поняття жорсткості для випадку нелінійною системи

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x > 0, \quad (1.13)$$

де $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$, $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_n(x, y))^T$.

Зафіксуємо будь-який точний розв'язок $\tilde{y}(x)$ системи рівнянь (1.13) та в околі цього розв'язку замінимо систему (1.13) лінеаризованою системою

$$\frac{dy}{dx} = f(x, \tilde{y}) + J(x)[y - \tilde{y}],$$

де $J(x)$ – матриця Якобі вектор-функції $f(x, y)$, що обчислена в точці $(x, \tilde{y}(x))$.

Нехай $\lambda_j(x), j = 1, 2, \dots, n$, – власні значення матриці Якобі $J(x)$.

Означення. Система звичайних диференціальних рівнянь

$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x > 0$ називається жорсткою на розв'язку $\tilde{y}(x)$ і на інтервалі

$(x_0, x_0 + H)$, якщо:

а) $\operatorname{Re} \lambda_j(x) < 0, j = 1, 2, \dots, n$, для всіх $x \in (x_0, x_0 + H)$;

Числа $a_i, b_{ij}, \sigma_i, i, j = 1, 2, \dots, m$, вибираються так, щоб розкладання виразу (1.14) за степенями h співпадало з розкладанням $y_{k+1} = y(x_k + h)$ за степенями h до деякої степені h^s включно.

Бутчер довів, що для кожного m існує єдина неявна формула Рунге – Кутти порядку точності $2m$, причому коефіцієнти цієї формули задовольняють наступним умовам:

1) коефіцієнти $a_i = \sum_{j=1}^m b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m$, являються нулями многочлена Лежандра m -ої степені

$$L_m(2a-1) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m (x^2 - 1)^m}{dx^m} \Big|_{x=2a-1};$$

2) коефіцієнти σ_i задовольняють рівнянням

$$\sum_{i=1}^m \sigma_i a_i^{k-1} = \frac{1}{k}, k = 1, \dots, m;$$

3) коефіцієнти b_{ij} задовольняють рівнянням

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} a_i^{k-1} = \frac{1}{k} a_i^k, k = 1, \dots, m.$$

Ці методи називаються методами оптимального порядку.

Побудуємо двохкрокову формулу. Многочлен Лежандра другого степеню має вигляд

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Отже,

$$L_2(a) = \frac{1}{2}(3(2a-1)^2 - 1),$$

звідки

$$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad a_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Коефіцієнти σ_1, σ_2 визначаються з системи рівнянь

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1, \quad \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 = \frac{1}{2}.$$

Звідси знаходимо

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}.$$

Коефіцієнти b_{11}, b_{12} визначаються з системи рівнянь

$$b_{11} + b_{12} = a_1, \quad b_{11} a_1 + b_{12} a_2 = \frac{1}{2} a_1^2,$$

звідки

$$b_{11} = \frac{1}{4}, \quad b_{12} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Коефіцієнти b_{21}, b_{22} визначаються з системи рівнянь

$$b_{21} + b_{22} = a_2, \quad b_{21}a_1 + b_{22}a_2 = \frac{1}{2}a_1^2,$$

звідки

$$b_{21} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad b_{22} = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, двохкрокова формула четвертого порядку має вигляд

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2),$$

де k_1, k_2 є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(x_k + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_k + \frac{1}{4}hk_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hk_2\right), \\ k_2 &= f\left(x_k + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_k + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hk_1 + \frac{1}{4}hk_2\right). \end{aligned}$$

Застосуємо цей метод до тестового рівняння Дальквіста. При $f(x, y) = \lambda y$ система рівняння для знаходження k_1, k_2 приймає вигляд

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda \left(y_k + \frac{1}{4}hk_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hk_2 \right), \\ k_2 &= \lambda \left(y_k + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hk_1 + \frac{1}{4}hk_2 \right). \end{aligned}$$

Звідси

$$k_1 = \frac{2y_k(-6\lambda + \sqrt{3}h\lambda^2)}{12 - 6\lambda h + \lambda^2 h^2}, \quad k_2 = \frac{2y_k(6\lambda + \sqrt{3}h\lambda^2)}{12 - 6\lambda h + \lambda^2 h^2}.$$

Тоді

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left(-\frac{2y_k(-6\lambda + \sqrt{3}h\lambda^2)}{12 - 6\lambda h + \lambda^2 h^2} + \frac{2y_k(6\lambda + \sqrt{3}h\lambda^2)}{12 - 6\lambda h + \lambda^2 h^2} \right) = \frac{12 + 6\lambda + h^2 \lambda^2}{12 - 6\lambda h + \lambda^2 h^2} y_k.$$

Значить, функція стійкості $R(z) = \frac{12 + 6z + z^2}{12 - 6z + z^2}$.

Тоді область абсолютної стійкості метода визначається нерівністю

$$\left| \frac{12 + 6z + z^2}{12 - 6z + z^2} \right| \leq 1.$$

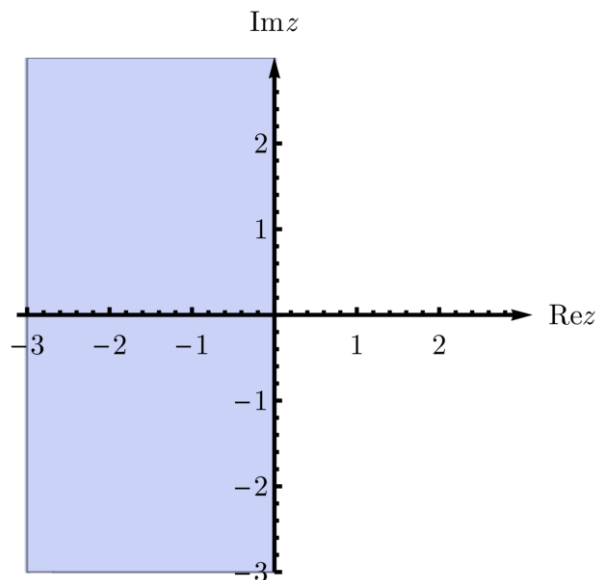


Рисунок 1.3 – Область абсолютної стійкості двохкрокового неявного методу Рунге – Кутти четвертого порядку

2 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

2.1 Змістовна та формальна постановка задачі

Еволюцію двох співіснуючих біологічних популяцій, особини однієї з яких є кормом для особин іншої (взаємодія «хижак – жертва»), моделює наступна система (система Лотки – Вольтера з насиченням хижака)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \frac{bxy}{1+sx}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1+sx}. \end{cases} \quad (2.1)$$

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0,$$

де x та y – щільності популяцій хижака та жертви відповідно, a – швидкість розмноження популяції жертви у відсутності хижака, b – питома швидкість споживання популяцією хижака популяції жертви при одиничній щільності обох популяцій, $\frac{d}{b}$ – коефіцієнт переробки спожитої хижаком біомаси жертви у власну біомасу, s – коефіцієнт насичення хижака.

Необхідно визначити усі положення рівноваги системи та дослідити їх характер в залежності від параметрів моделі, чисельно розв'язати систему неявним методом Рунге – Кутти з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ на інтервалі $[0;100]$ при $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$, $s = 0,1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Результати, отримані неявним методом Рунге – Кутти, порівняти із результатами, отриманими функцією NDSolve пакету Mathematica 10 ©, та з результатами, представленими у літературі. Наближений розв'язок представити у вигляді графіків $x(t)$, $y(t)$, фазового портрету, графіка зміни кроку інтегрування та графіки оцінок локальних похибок. Також, чисельно дослідити поведінку системи при других значеннях параметрів a , b ,

c, d, s і початкових даних x_0, y_0 , зробити висновки.

2.2 Якісний аналіз системи Лотки – Вольтера с насиченням хижака

Знайдемо стаціонарні точки системи (2.1). Для цього прирівняємо похідні до нуля. Маємо систему двох алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} ax - \frac{bxy}{1+sx} = 0, \\ -cy + \frac{dxy}{1+sx} = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо дві точки станів рівноваги:

$$O_1(0,0),$$

$$O_2\left(-\frac{c}{-d+cs}, -\frac{ad}{b(-d+cs)}\right),$$

Лінеарізуємо систему рівнянь в околі точки $O_1(0,0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ax - \frac{bxy}{1+sx}\right)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}\left(ax - \frac{bxy}{1+sx}\right)(y-y_0), \\ \dot{y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-cy + \frac{dxy}{1+sx}\right)(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-cy + \frac{dxy}{1+sx}\right)(y-y_0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x-x_0) + 0(y-y_0), \\ \dot{y} = 0(x-x_0) - c(y-y_0). \end{cases} \quad (2.2)$$

Знайдемо власні значення системи (2.2):

$$\det \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Стан рівноваги точки O_1 визначається характеристичним рівнянням:

$$(a - \lambda)(-c - \lambda) = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -c$. При параметрах $a > 0$, $c > 0$ точка O_1 не є стійкою і має тип сідло. Якщо $a > 0$, $c < 0$ точка O_1 також не є стійкою і має стан рівноваги типу вузол. При $a < 0$, $c > 0$ точка O_1 має стан рівноваги типу стійкий вузол.

Точку O_2 шляхом заміни $x = x - \frac{c}{-d + cs}$, $y = y - \frac{ad}{b(-d + cs)}$ зсунемо до початку координат. В цьому випадку система (2.1) матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{(c + dx - csx)(asx - by)}{cs^2x - d(1 + sx)}, \\ \dot{y} = \frac{x(d - cs)(ad + b(d - cs)y)}{b(d + dsu - cs^2u)}. \end{cases}$$

Лінеарізуємо систему рівнянь в околі точки O_2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{(c + dx - csx)(asx - by)}{cs^2x - d(1 + sx)} \right) (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{(c + dx - csx)(asx - by)}{cs^2x - d(1 + sx)} \right) (y - y_0), \\ \dot{y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x(d - cs)(ad + b(d - cs)y)}{b(d + dsu - cs^2u)} \right) (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x(d - cs)(ad + b(d - cs)y)}{b(d + dsu - cs^2u)} \right) (y - y_0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{acs}{d}(x - x_0) - \frac{bc}{d}(y - y_0), \\ \dot{y} = \frac{a(d - cs)}{b}(x - x_0) + 0(y - y_0). \end{cases} \quad (2.3)$$

Знайдемо власні значення системи (2.3):

$$\det \begin{vmatrix} \frac{acs}{d} - \lambda & -\frac{bc}{d} \\ \frac{a(d - cs)}{b} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Стан рівноваги точки O_1 визначається характеристичним рівнянням:

$$-\lambda \left(\frac{acs}{d} - \lambda \right) + \frac{ca(d - cs)}{d} = 0.$$

Корені цього рівняння

$$\lambda_1 = \frac{acs - \sqrt{ac - 4d^2 + 4c ds + acs^2}}{2d},$$

$$\lambda_2 = \frac{acs + \sqrt{ac - 4d^2 + 4c ds + acs^2}}{2d}.$$

Розглянемо різні випадки значень параметрів:

– при $d < 0, a > 0, c > 0, s < \frac{d}{c}$, або $d > 0, a > 0, c > 0, s > \frac{d}{c}$ точка O_2 не є

стійкою і має тип сідло;

– при $d < 0, a > 0, c > 0, \frac{d}{c} < s \leq -\frac{2d}{a} - 2\sqrt{\frac{ad^2 + cd^2}{a^2c}}$, або $d > 0, a > 0,$

$c > 0$, $-\frac{2d}{a} + 2\sqrt{\frac{ad^2 + cd^2}{a^2c}} \leq s < \frac{d}{c}$ точка O_2 має стан рівноваги типу нестійкий вузол;

– при $d < 0$, $a > 0$, $c > 0$, $s \geq -\frac{2d}{a} + 2\sqrt{\frac{ad^2 + cd^2}{a^2c}}$, або $d > 0$, $a > 0$, $c > 0$,

$s \leq -\frac{2d}{a} - 2\sqrt{\frac{ad^2 + cd^2}{a^2c}}$ точка O_2 має стан рівноваги типу стійкий вузол;

– при $d < 0$, $a > 0$, $c > 0$, $-\frac{2d}{a} - 2\sqrt{\frac{ad^2 + cd^2}{a^2c}} \leq s < 0$, або $d > 0$, $a > 0$, $c > 0$,

$0 < s \leq -\frac{2d}{a} + 2\sqrt{\frac{ad^2 + cd^2}{a^2c}}$ точка O_2 має стан рівноваги типу нестійкий фокус;

– при $d < 0$, $a > 0$, $c > 0$, $0 < s \leq -\frac{2d}{a} - 2\sqrt{\frac{ad^2 + cd^2}{a^2c}}$, або $d > 0$, $a > 0$, $c > 0$,

$-\frac{2d}{a} - 2\sqrt{\frac{ad^2 + cd^2}{a^2c}} \leq s < 0$ точка O_2 має стан рівноваги типу стійкий фокус;

2.3 Застосування неявного методу Рунге – Кутти для розв’язку системи Лотки – Вольтерра с насиченням хижака

Двучлена формула четвертого порядку неявного методу Рунге – Кутти має вигляд:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

$$k_1 = h f \left(x_i + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h, y_i + \frac{1}{4}k_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_2 \right), \quad (2.5)$$

$$k_2 = h f \left(x_i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h, y_i + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1 + \frac{1}{4}k_2 \right).$$

Для задачі (2.1) система для коефіцієнтів k_1, k_2 має вигляд:

$$\begin{aligned}
 x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{2}(k_1^x + k_2^x), \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}(k_1^y + k_2^y), \\
 k_1^x &= h \left(a \left(x_i + \frac{1}{4}k_1^x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_2^x \right) - \frac{b \left(x_i + \frac{1}{4}k_1^x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_2^x \right)}{1 + s \left(x_i + \frac{1}{4}k_1^x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_2^x \right)} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(y_i + \frac{1}{4}k_1^y + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_2^y \right) \right), \\
 k_2^x &= h \left(a \left(x_i + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1^x + \frac{1}{4}k_2^x \right) - \frac{b \left(x_i + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1^x + \frac{1}{4}k_2^x \right)}{1 + s \left(x_i + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1^x + \frac{1}{4}k_2^x \right)} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(y_i + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1^y + \frac{1}{4}k_2^y \right) \right), \\
 k_1^y &= h \left(-c \left(y_i + \frac{1}{4}k_1^y + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_2^y \right) + \frac{d \left(x_i + \frac{1}{4}k_1^x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_2^x \right)}{1 + s \left(x_i + \frac{1}{4}k_1^x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_2^x \right)} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(y_i + \frac{1}{4}k_1^y + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_2^y \right) \right),
 \end{aligned}$$

$$k_2^y = h \left(-c \left(y_i + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1^y + \frac{1}{4} k_2^y \right) - \frac{d \left(x_i + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1^x + \frac{1}{4} k_2^x \right)}{1 + s \left(x_i + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1^x + \frac{1}{4} k_2^x \right)} \cdot \left(y_i + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1^y + \frac{1}{4} k_2^y \right) \right).$$

На кожному кроці потрібно оцінити локальну похибку. За правилом Рунге, локальна похибка оцінюється наступним чином:

$$E_x = x(t_i + h) - x_{i+1}^{\frac{h}{2}} \approx \frac{x_{i+1}^{\frac{h}{2}} - x_{i+1}^h}{2^s - 1},$$

$$E_y = y(t_i + h) - y_{i+1}^{\frac{h}{2}} \approx \frac{y_{i+1}^{\frac{h}{2}} - y_{i+1}^h}{2^s - 1},$$

де x_{i+1}^h, y_{i+1}^h – значення функцій в точці $t_{i+1} = t_i + h$, обчислені за один крок h із точки t_i ;

$x_{i+1}^{\frac{h}{2}}, y_{i+1}^{\frac{h}{2}}$ – значення функцій в точці t_{i+1} , обчислені за два послідовних кроки $\frac{h}{2}$ із точки t_i ;

s – порядок методу, $s = 4$.

Після цього потрібно розрахувати норму оцінки локальної похибки:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

2.4 Результати обчислювального експерименту

У результаті обчислень задачі методом Рунге – Кутти було отримано наступні результати.

Перший етап експерименту: візьмемо значення $a=2$, $b=1$, $c=1$, $d=1$, $s=0,1$. Отримані результати наведені у рис. 2.1 – 2.10

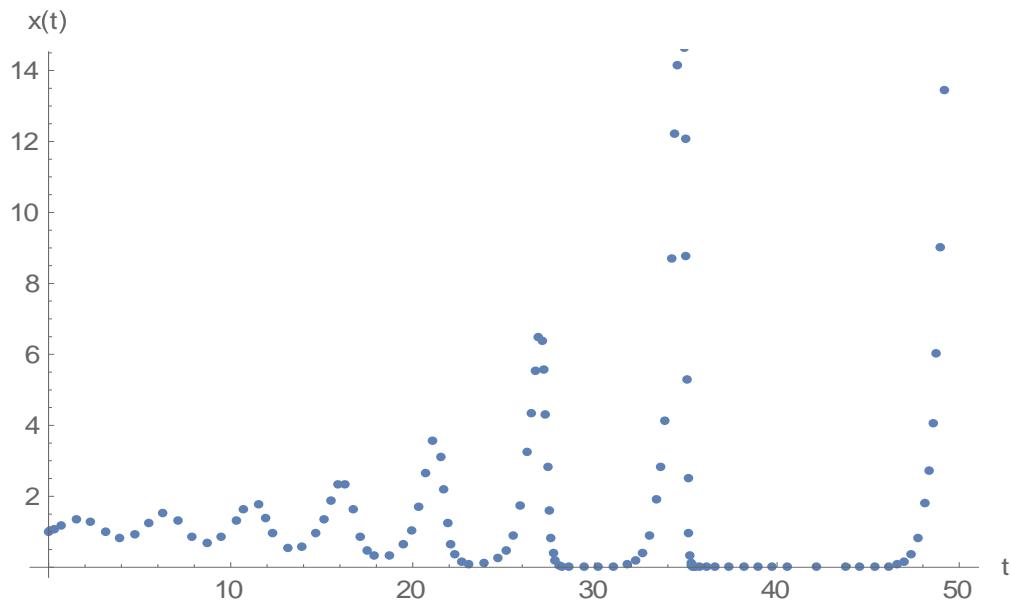


Рисунок 2.1 – Графік розв'язку $x(t)$

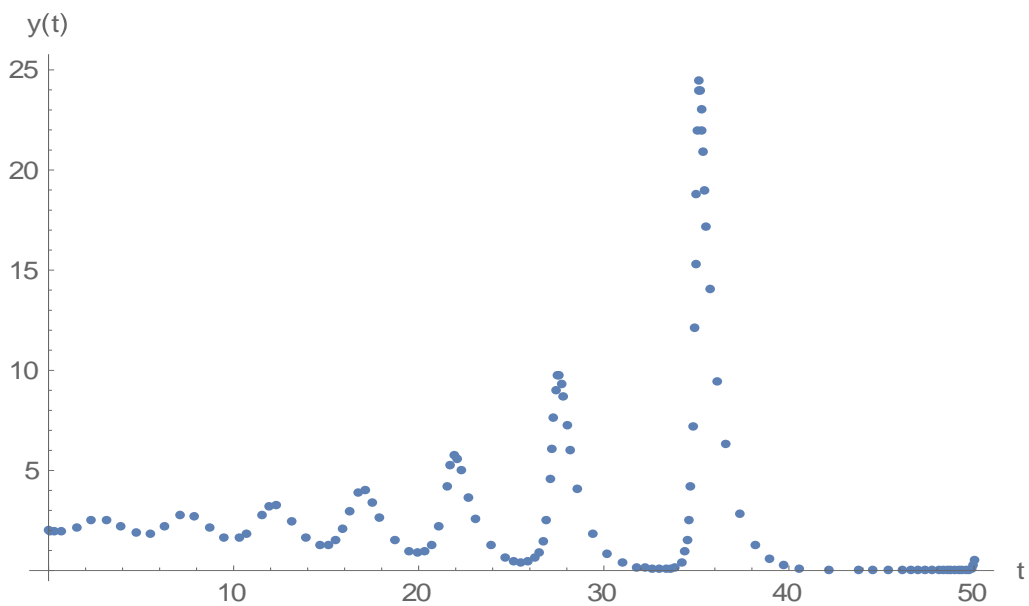


Рисунок 2.2 – Графік розв'язку $y(t)$

Графіки порівняння обчислень, отриманих функцією NDSolve пакету Mathematica 10 та неявним методом Рунге – Кутти, наведено у рис 2.3, 2.4.

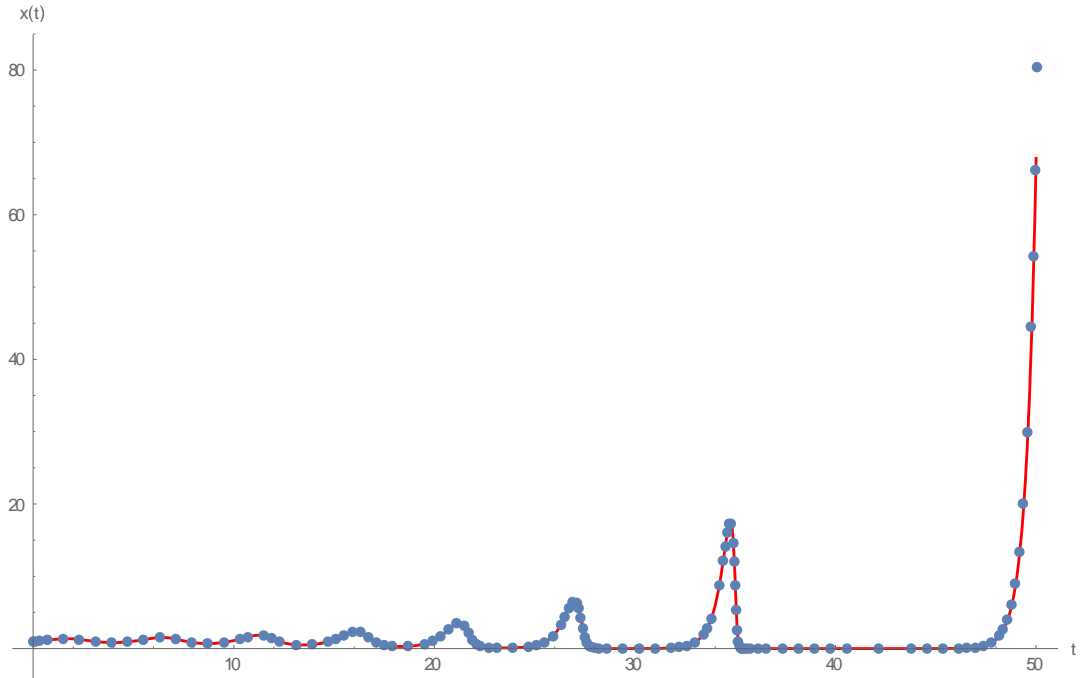


Рисунок 2.3 – Порівняння обчислень для $x(t)$

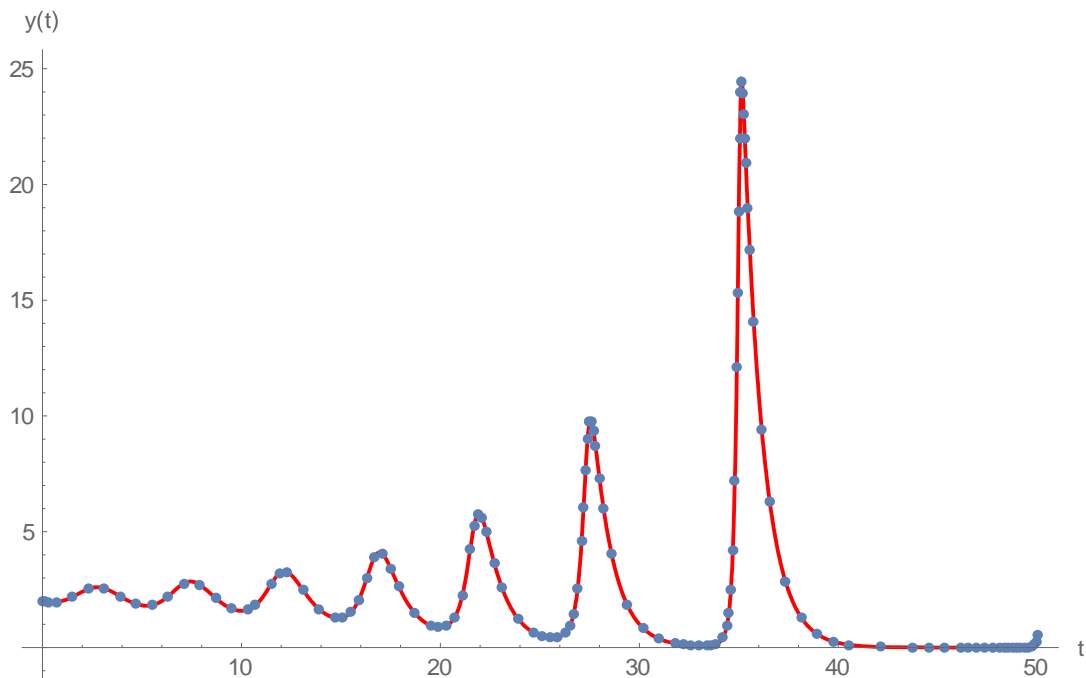
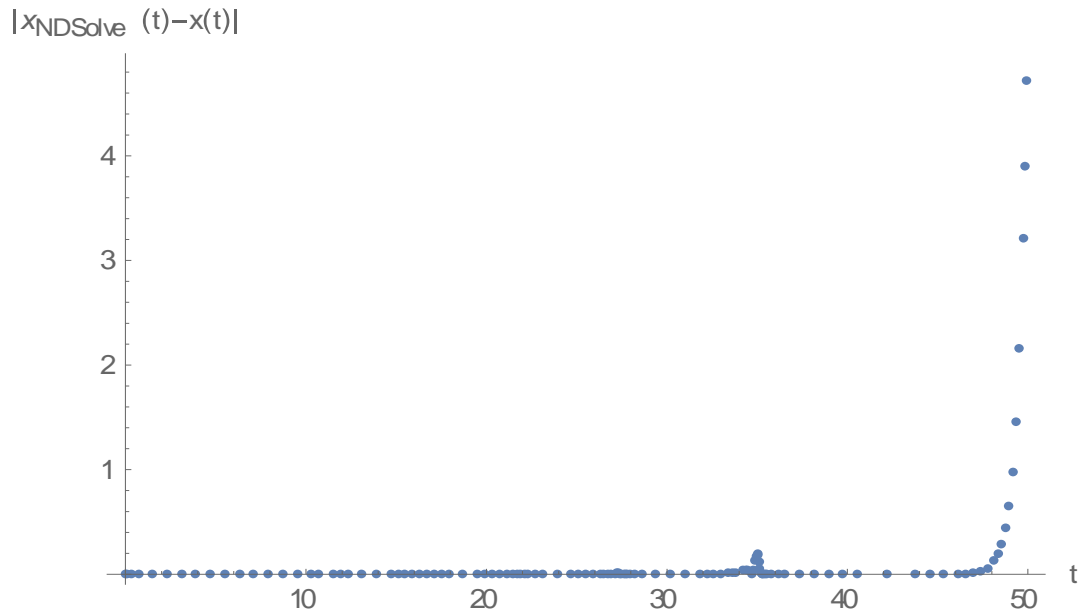
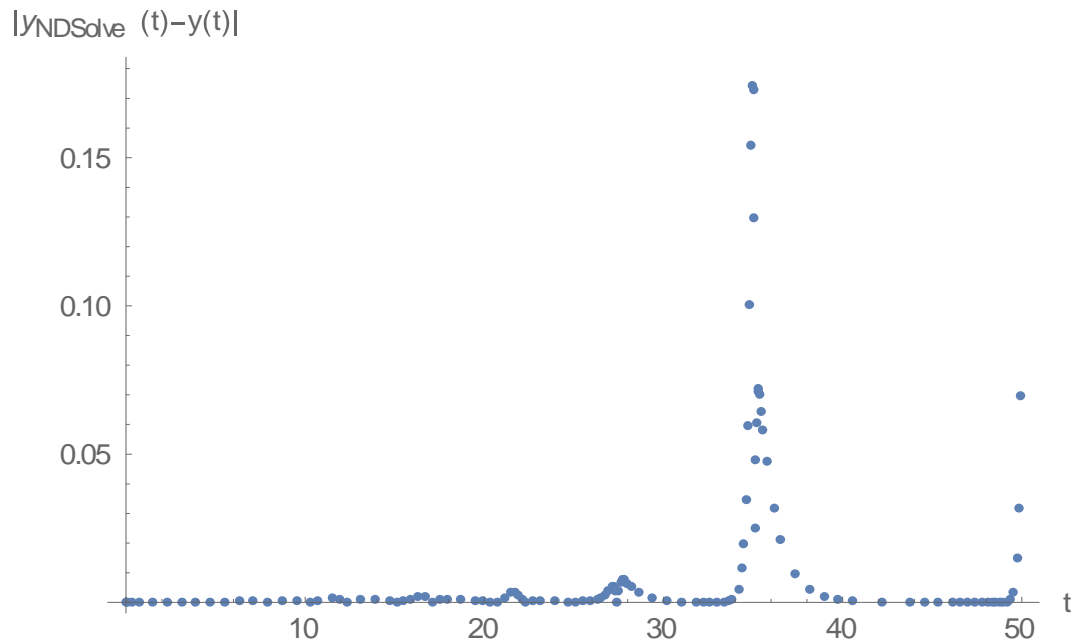


Рисунок 2.4 – Порівняння обчислень для $y(t)$

Графіки похибки обчислень між неявним методом Рунге – Кутти та функції NDSolve пакету Mathematica 10 наведено на рисунках 2.5, 2.6.

Рисунок 2.5 – Графік похибки $x(t)$ Рисунок 2.6 – Графік похибки $y(t)$

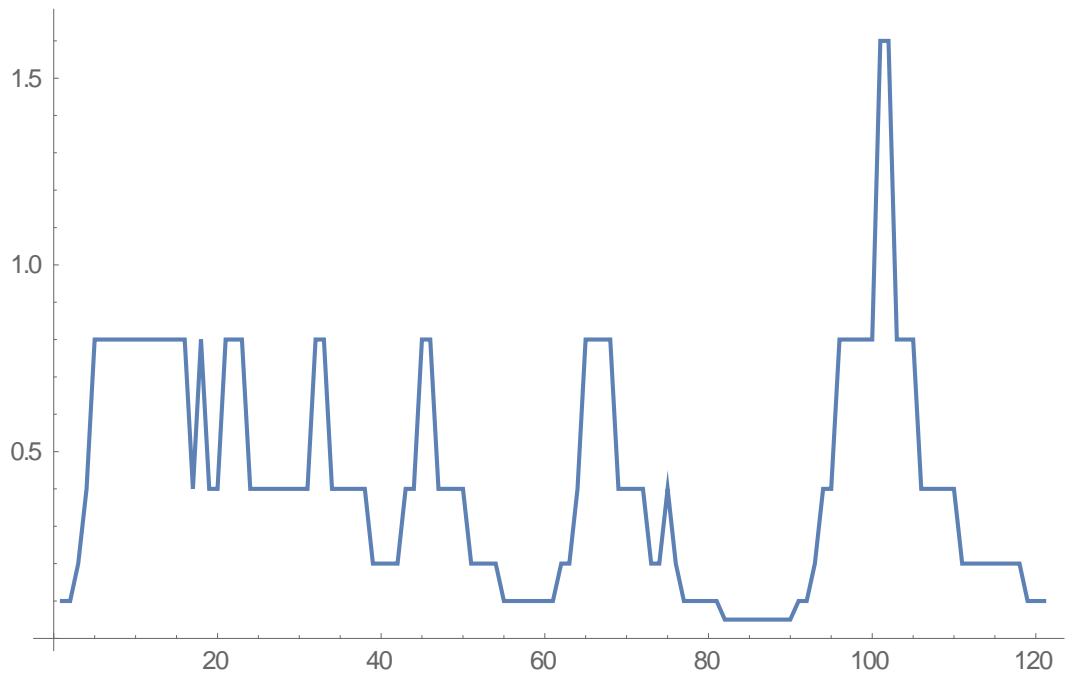
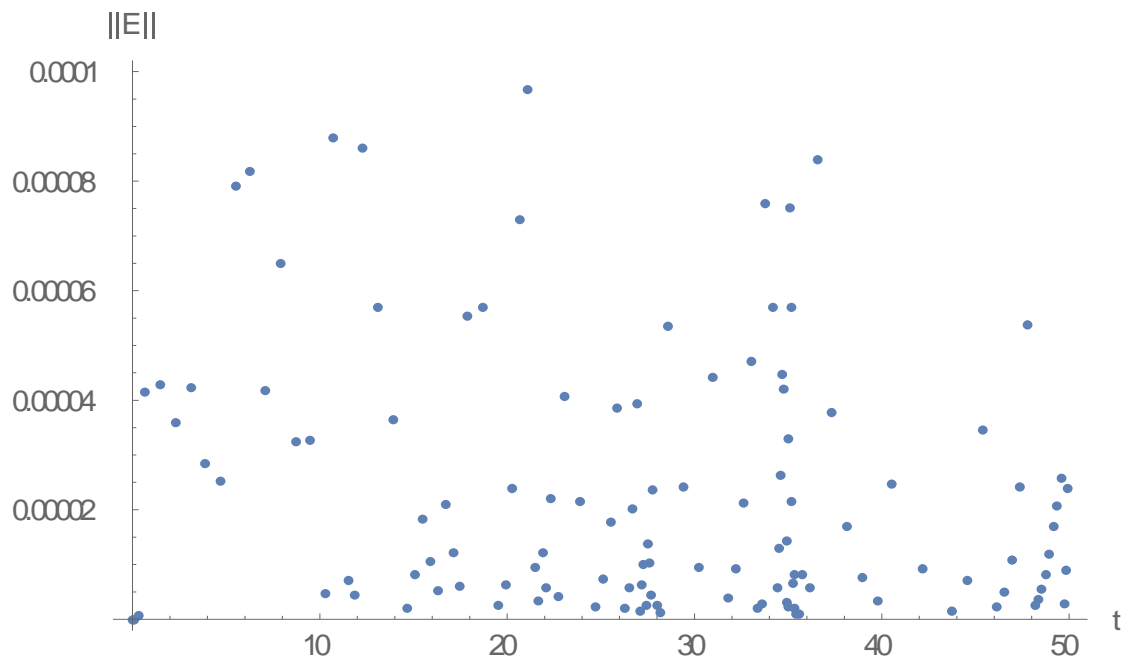
Рисунок 2.7 – Графік зміни кроку $h(t)$ 

Рисунок 2.8 – Графік оцінки локальної похибки

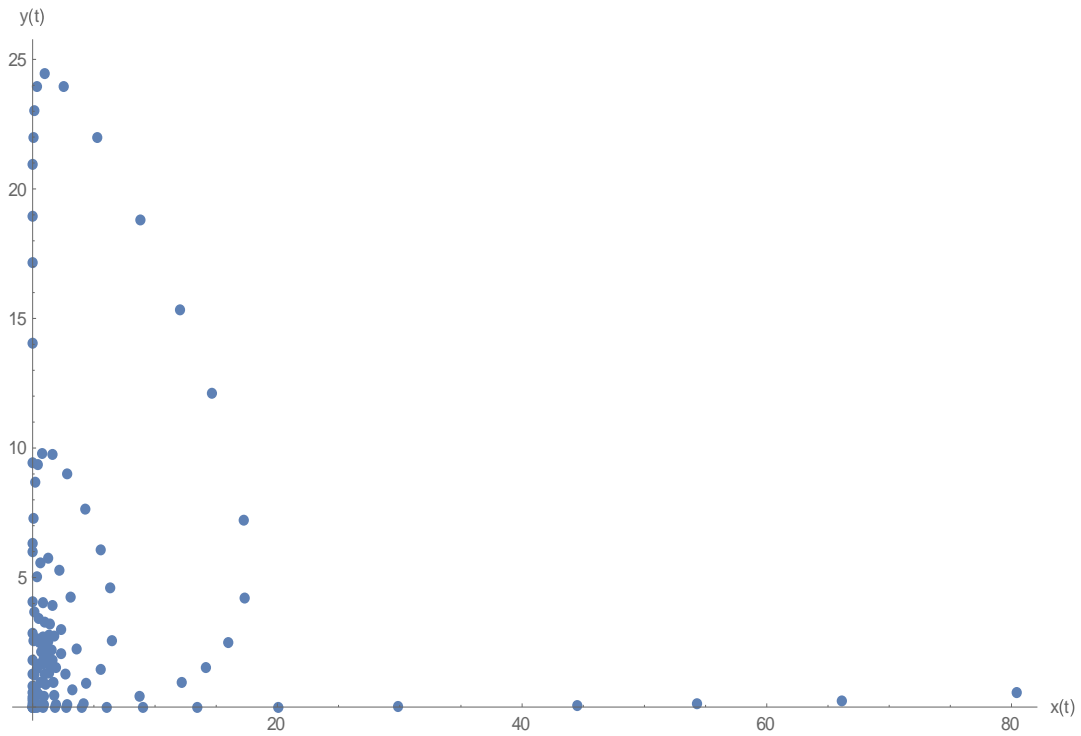


Рисунок 2.9 – Фазовий портрет

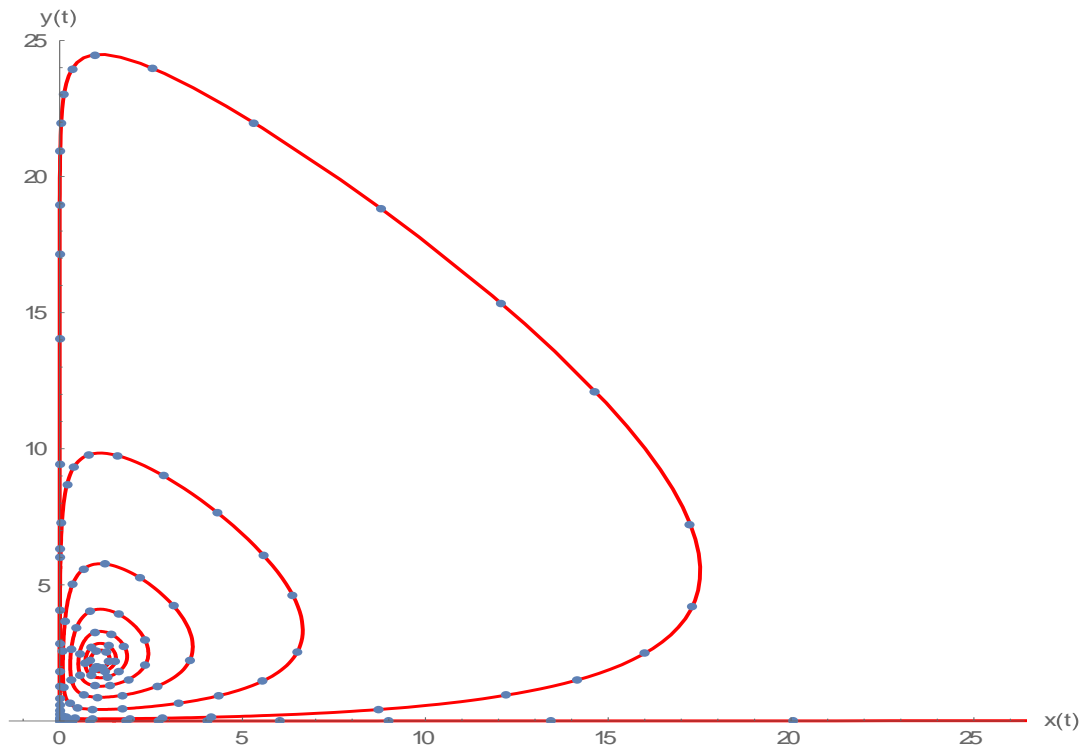


Рисунок 2.10 – Графік порівняння фазових портретів розв’язків, отриманих за допомогою функції `NDSolve` пакету `Mathematica 10` та за допомогою неявного методу Рунге – Кутти

Другий етап експерименту: візьмемо значення $a=2$, $b=1$, $c=1$, $d=1$, $s=-0,1$. Отримані результати наведені у рис. 2.11 – 2.20.

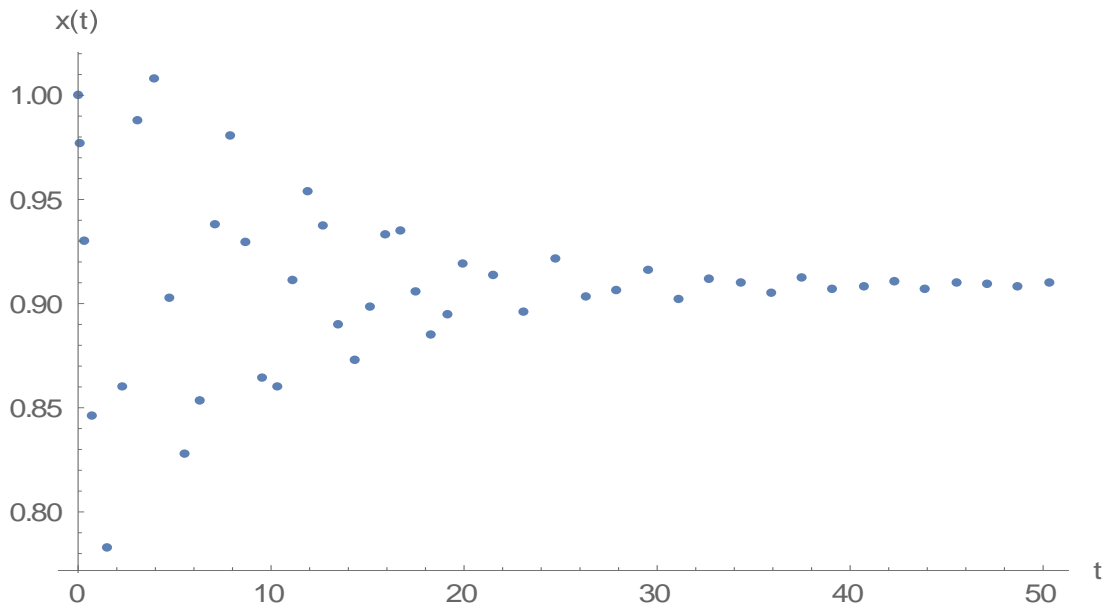


Рисунок 2.11 – Графік розв'язку $x(t)$

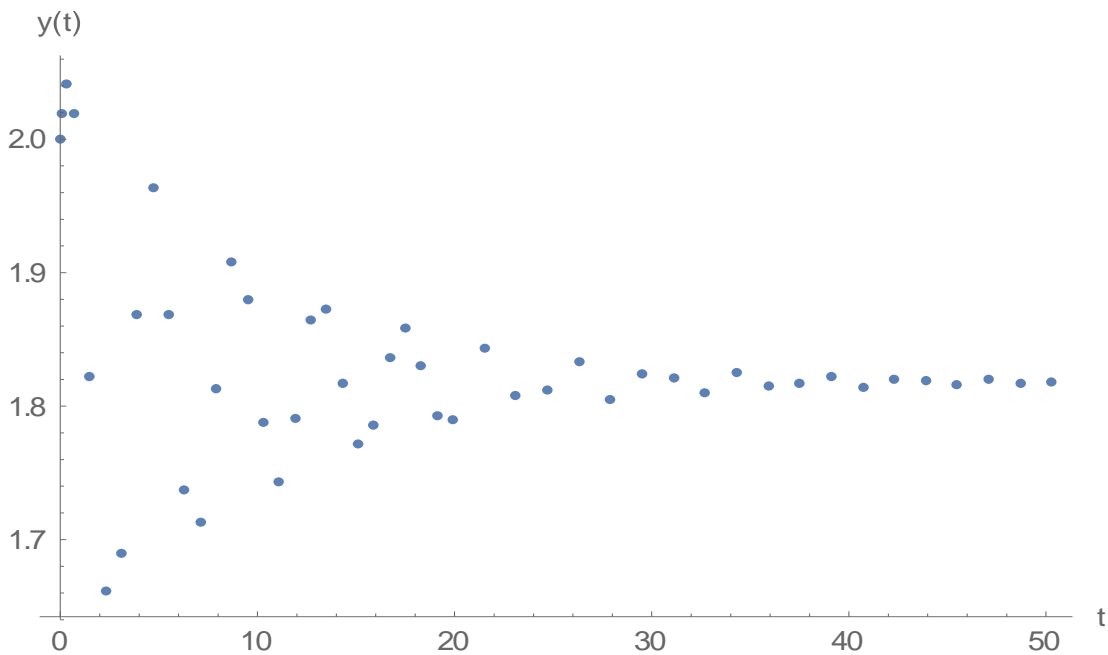


Рисунок 2.12 – Графік розв'язку $y(t)$

Графіки порівнянь обчислень, отриманих функцією NDSolve пакету Mathematica та неявним методом Рунге – Кутти, наведено у рис 2.13, 2.14.

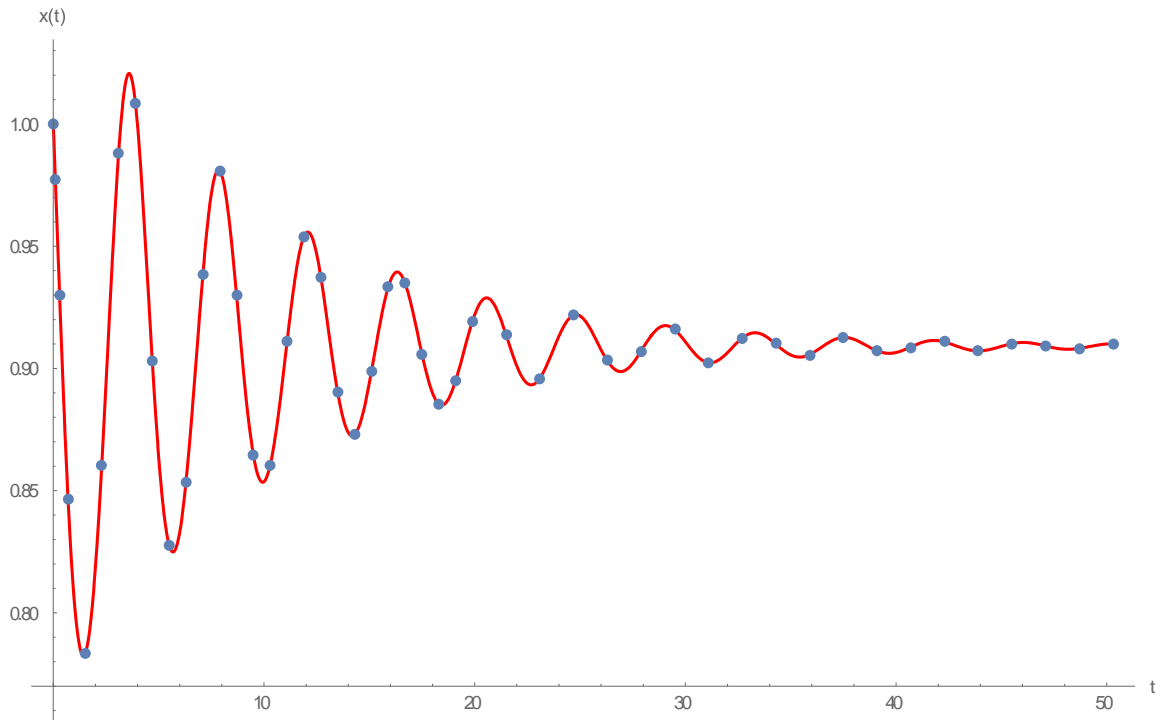


Рисунок 2.13 – Порівняння обчислень для $x(t)$

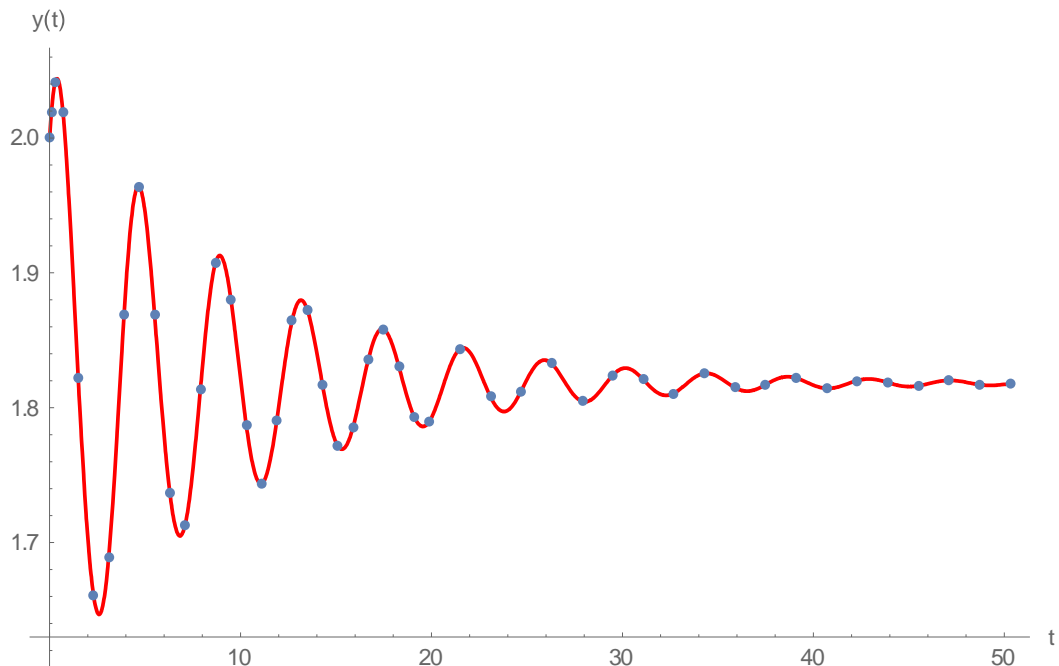


Рисунок 2.14 – Порівняння обчислень для $y(t)$

Графіки похибки обчислень між неявним методом Рунге – Кутти та функції NDSolve пакету Mathematica 10 наведено на рисунках 2.15, 2.16.

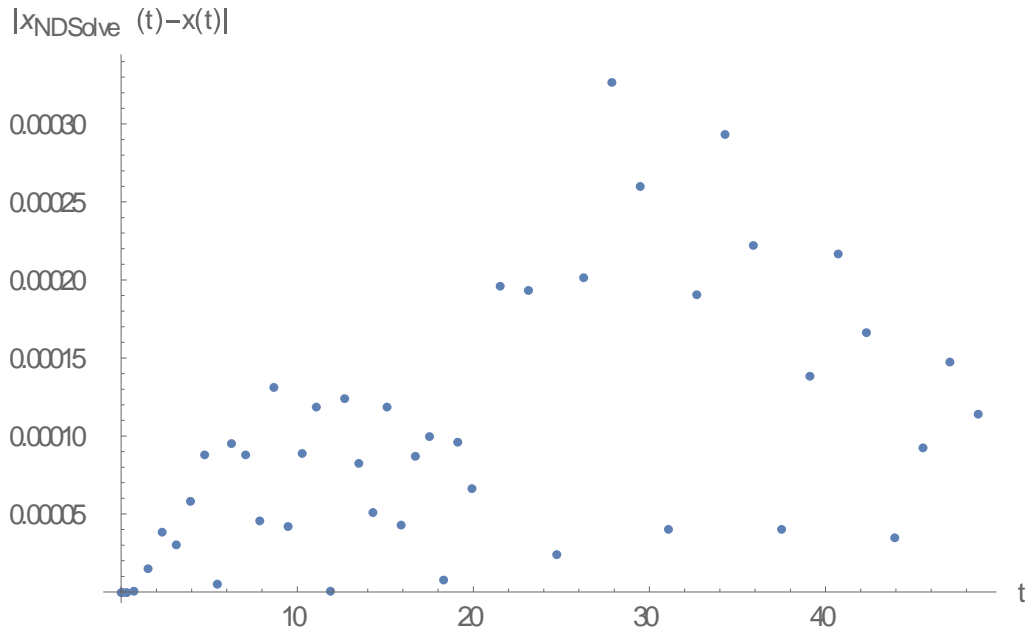


Рисунок 2.15 – Графік похибки $x(t)$

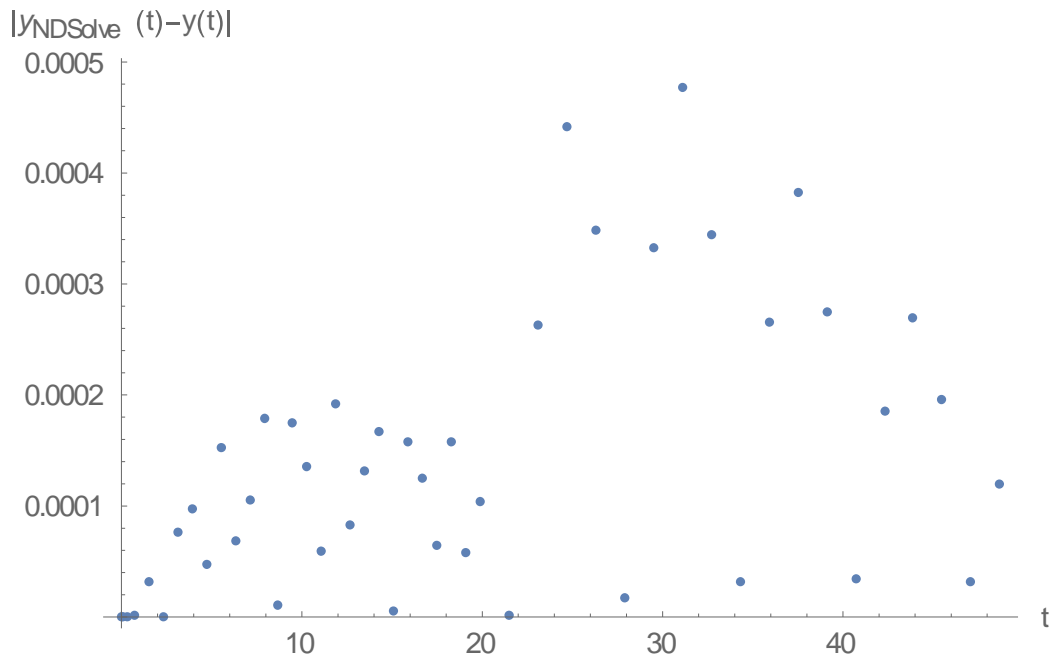


Рисунок 2.16 – Графік похибки $y(t)$

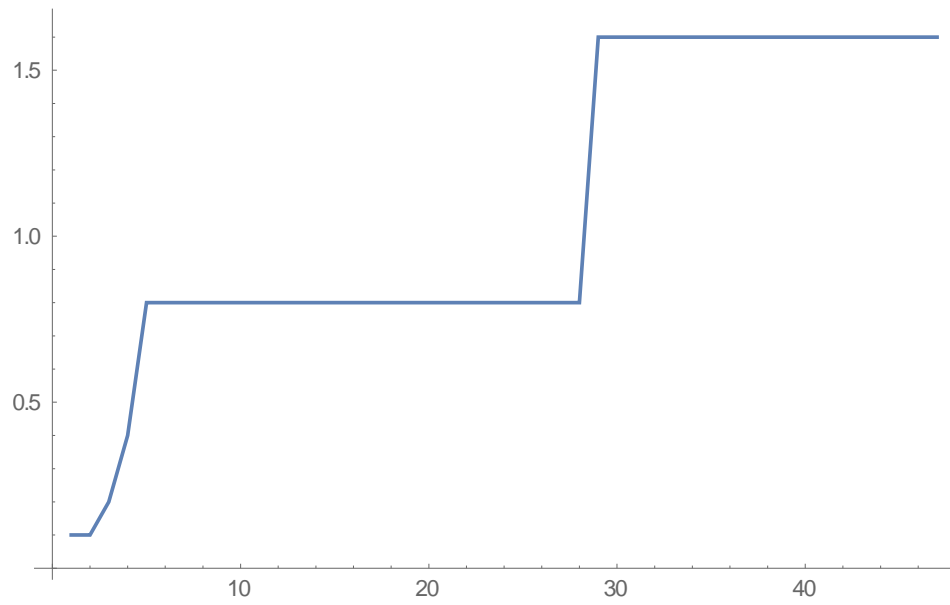
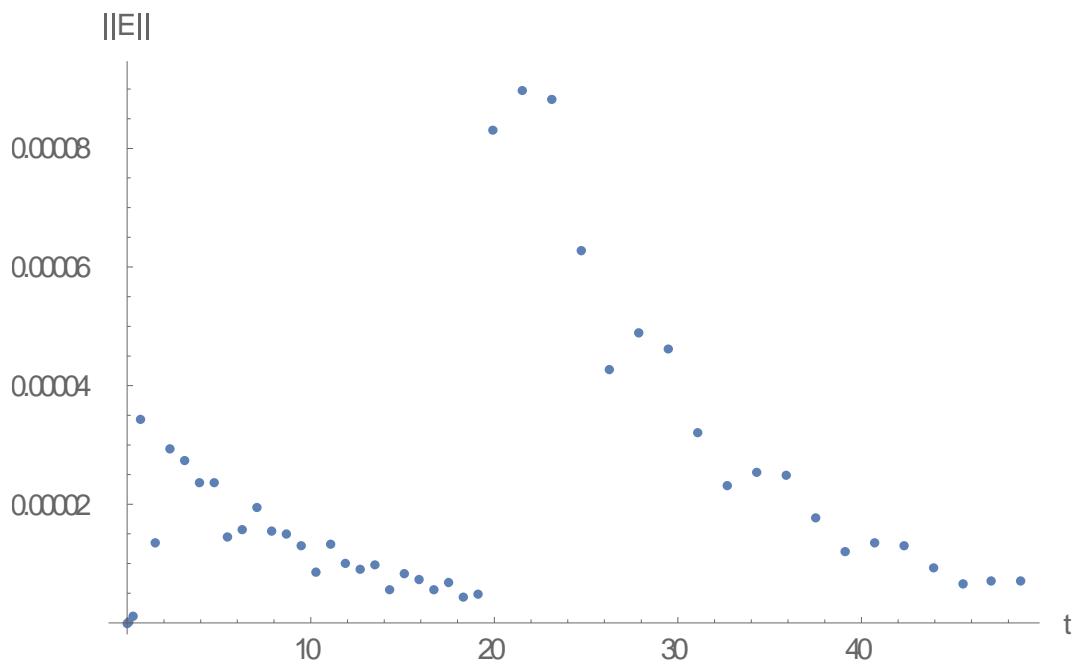
Рисунок 2.17 – Графік зміни кроку $h(t)$ 

Рисунок 2.18 – Графік оцінки локальної похибки

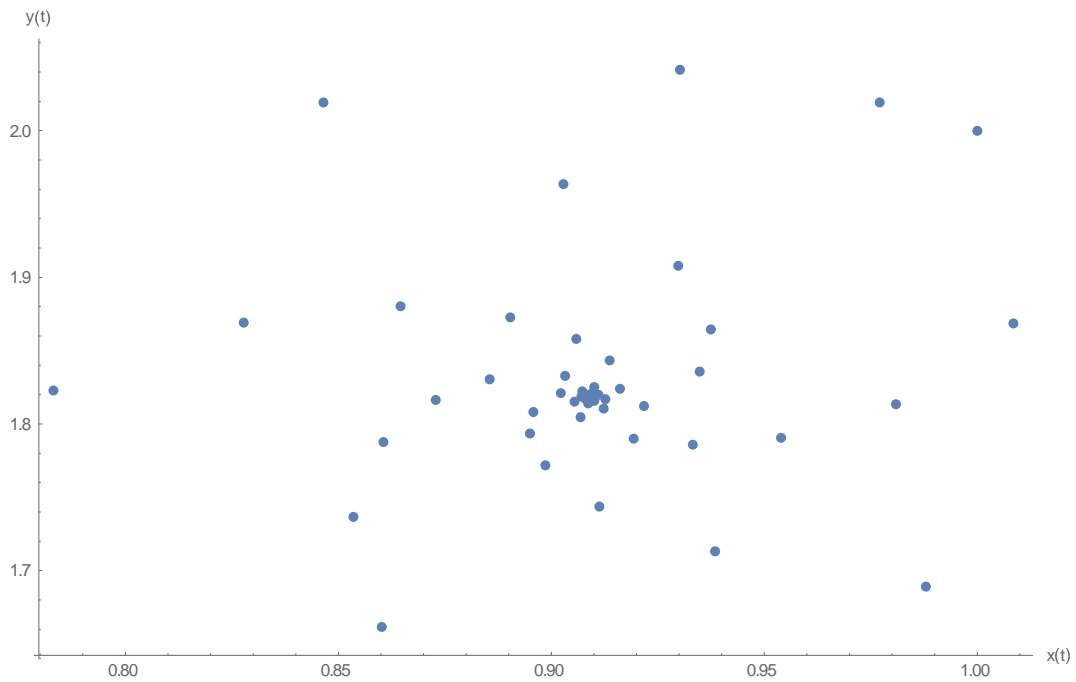


Рисунок 2.19 – Фазовий портрет

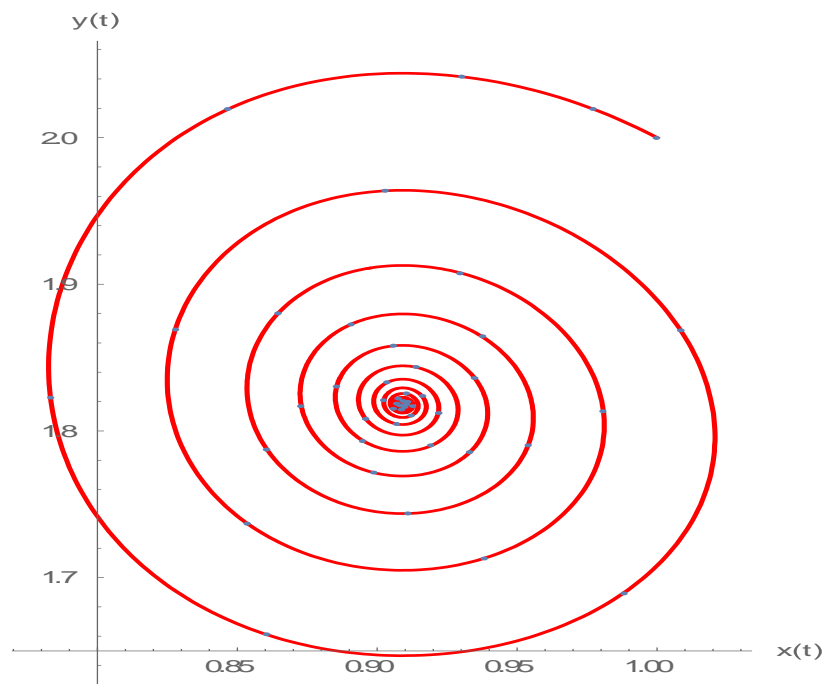


Рисунок 2.20 – Графік порівняння фазових портретів розв’язків, отриманих за допомогою функції NDSolve пакету Mathematica 10 та за допомогою неявного методу Рунге – Кутти

ВИСНОВКИ

У результаті виконання курсової роботи були поглиблені теоретичні знання з розділів «Наближенні методи розв’язання задач Коші для ОДУ». Також практично застосували чисельні методи для розв’язання конкретної прикладної задачі.

В даній курсовій роботі було розглянуто систему Лотки – Вольтера з насиченням хижака. В процесі виконання роботи спостерігалася поведінка системи при різних значеннях параметрів, було знайдено точки рівноваги системи.

Чисельно задача розв’язувалась за допомогою неявного метода Рунге – Кути четвертого порядку. Порівнювали чисельний розв’язок з розв’язком, отриманим за допомогою функції `NDSolve` пакету `Mathematica 10.3`. Можемо бачити, що ці розв’язки системи декілька відрізняються, і зі збільшенням проміжку часу різниця між розв’язками збільшується.

Крім цього, дана курсова робота демонструє актуальність чисельних методів для розв’язання прикладних задач.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ВЦ МГУ, 2004. – 126 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
3. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 496 с.
4. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.
5. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
6. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уотта. – М.: Мир, 1972. – 312 с.
7. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 318 с.
8. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Видавнича група BVH, 2006. – 480 с.
9. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
10. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 688 с.
11. Vallis G. K. El Nino: A chaotic dynamical system? // Science. – 1986. – Т. 232, №. 4747. – С. 243-245.
12. Vallis G. K. Conceptual models of El Nino and the southern oscillation //Journal of Geophysical Research: Oceans. – 1988. – Т. 93, № C11. – С. 13979 – 13991.

ДОДАТОК А

ЛІСТИНГ ПРОГРАМИ

```

an = 0;
bn = 50;
ε = 10-4;
h = 0.1;
b = 1;
a = 2;
d = 1;
s = -0.1;
c = 1;

X[x_, y_] = a*x -  $\frac{b*x*y}{1+s*x}$ ;
Y[x_, y_] = -c*y +  $\frac{d*x*y}{1+s*x}$ ;

NN = 10000;
XY = Array[0, {3, NN + 1}];
XY[[1, 1]] = an;
XY[[2, 1]] = 1;
XY[[3, 1]] = 2;
k = 1;
EEmas = Array[0, {2, NN + 1}];
HH = {h};

xn = yn = zn = tn = hn = lpx = lpy = lpz = {};
AppendTo[xn, 1];
AppendTo[yn, 2];

AppendTo[tn, 0];

Tsol = Flatten[{x[t], y[t]} /. NDSolve[
  {
    x'[t] == X[x[t], y[t]],
    y'[t] == Y[x[t], y[t]],
    x[tn[[1]]] == xn[[1]],
    y[tn[[1]]] == yn[[1]]},
  {x[t], y[t]}, {t, 0, bn}
]]

TX[t_] = Tsol[[1]];
TY[t_] = Tsol[[2]];

```

```

kkX[h_, Xk_, Yk_] := FindRoot[{k1x == h X[Xk +  $\frac{1}{4}$  k1x +  $\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$  k2x, Yk +  $\frac{1}{4}$  k1y +  $\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$  k2y],

k1y == h Y[Xk +  $\frac{1}{4}$  k1x +  $\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$  k2x, Yk +  $\frac{1}{4}$  k1y +  $\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$  k2y],

k2x == h X[Xk +  $\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$  k1x +  $\frac{1}{4}$  k2x, Yk +  $\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$  k1y +  $\frac{1}{4}$  k2y],

k2y == h Y[Xk +  $\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$  k1x +  $\frac{1}{4}$  k2x, Yk +  $\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$  k1y +  $\frac{1}{4}$  k2y]

}, {k1x, 0}, {k1y, 0}, {k2x, 0}, {k2y, 0}];

Dynamic[k]
Dynamic[HH[[k]]]
Dynamic[XY[[2, k]]]
Dynamic[XY[[3, k]]]

While[XY[[1, k]] ≤ bn,
{
k1xh = kkX[h, XY[[2, k]], XY[[3, k]]][[1, 2]];
k1yh = kkX[h, XY[[2, k]], XY[[3, k]]][[2, 2]];
k2xh = kkX[h, XY[[2, k]], XY[[3, k]]][[3, 2]];
k2yh = kkX[h, XY[[2, k]], XY[[3, k]]][[4, 2]];

Yh = {XY[[2, k]] +  $\frac{1}{2}$  (k1xh + k2xh), XY[[3, k]] +  $\frac{1}{2}$  (k1yh + k2yh)}; (*шаг шаг*)

k1xh2 = kkX[ $\frac{h}{2}$ , XY[[2, k]], XY[[3, k]]][[1, 2]];
k1yh2 = kkX[ $\frac{h}{2}$ , XY[[2, k]], XY[[3, k]]][[2, 2]];
k2xh2 = kkX[ $\frac{h}{2}$ , XY[[2, k]], XY[[3, k]]][[3, 2]];
k2yh2 = kkX[ $\frac{h}{2}$ , XY[[2, k]], XY[[3, k]]][[4, 2]];

Yh2 = {XY[[2, k]] +  $\frac{1}{2}$  (k1xh2 + k2xh2), XY[[3, k]] +  $\frac{1}{2}$  (k1yh2 + k2yh2)};

k1xh3 = kkX[ $\frac{h}{2}$ , Yh2[[1]], Yh2[[2]]][[1, 2]];
k1yh3 = kkX[ $\frac{h}{2}$ , Yh2[[1]], Yh2[[2]]][[2, 2]];
k2xh3 = kkX[ $\frac{h}{2}$ , Yh2[[1]], Yh2[[2]]][[3, 2]];
k2yh3 = kkX[ $\frac{h}{2}$ , Yh2[[1]], Yh2[[2]]][[4, 2]];

Yh3 = {Yh2[[1]] +  $\frac{1}{2}$  (k1xh3 + k2xh3), Yh2[[2]] +  $\frac{1}{2}$  (k1yh3 + k2yh3)};

```

```

EE = Abs[ $\frac{Y_h - Y_{h3}}{15}$ ];
Ek =  $\sqrt{EE[[1]]^2 + EE[[2]]^2}$ ;
Which[ $E_k > \epsilon$ ,  $\{h = \frac{h}{2}\}$ ,  $E_k \leq \frac{\epsilon}{16}$ , {XY[[1, k+1]] = XY[[1, k]] + h; XY[[2, k+1]] = Yh3[[1]], XY[[3, k+1]] = Yh3[[2]]};
  EEmas[[2, k]] = Ek;
  HH = AppendTo[HH, h]; h = 2 h;
  k = k + 1,  $\frac{\epsilon}{16} < E_k \leq \epsilon$ , {XY[[1, k+1]] = XY[[1, k]] + h; XY[[2, k+1]] = Yh3[[1]], XY[[3, k+1]] = Yh3[[2]]};
  EEmas[[2, k]] = Ek;
  HH = AppendTo[HH, h]; k = k + 1}];
}]]

EEmas[[1]] = XY[[1]];
ListPlot[Transpose[EEmas], PlotStyle → PointSize[0.01`], AxesLabel → {"t", "|E|"}]

G1 = Plot[TX[t], {t, 0, bn}, PlotStyle → Red, PlotRange → All, AxesLabel → {"t", "x(t)"}]
G2 = Plot[TY[t], {t, 0, bn}, PlotStyle → Red, PlotRange → All, AxesLabel → {"t", "y(t)"}]

m = k - 1;
Xpogr = Array[0, {m, 2}];
Do[Xpogr[[k, 1]] = XY[[1, k]], {k, 1, m}];
Do[Xpogr[[k, 2]] = Abs[XY[[2, k]] - TX[XY[[1, k]]]], {k, 1, m}];

ListPlot[Xpogr, PlotStyle → PointSize[0.01`], PlotRange → All, AxesLabel → {"t", "|XNDSolve(t) - x(t)|"}]
Ypogr = Array[0, {m, 2}];
Do[Ypogr[[k, 1]] = XY[[1, k]], {k, 1, m}];
ListPlot[Ypogr, PlotStyle → PointSize[0.01`], PlotRange → All, AxesLabel → {"t", "|YNDSolve(t) - y(t)|"}]

XX = {{}, {}};
XX[[1]] = XY[[1]];
XX[[2]] = XY[[2]];
Gr1 = ListPlot[Transpose[XX], PlotStyle → PointSize[0.01`], AxesLabel → {"t", "x(t)"}]
Show[G1, Gr1]

YY = {{}, {}};
YY[[1]] = XY[[1]];
YY[[2]] = XY[[3]];
Gr2 = ListPlot[Transpose[YY], PlotStyle → PointSize[0.01`], AxesLabel → {"t", "y(t)"}]
Show[G2, Gr2]

G3 = ParametricPlot[{TX[t], TY[t]}, {t, 0, bn}, PlotStyle → Red, PlotRange → All, AxesLabel → {"x(t)", "y(t)"}]
Parametr = {{}, {}};
Parametr[[1]] = XY[[2]];
Parametr[[2]] = XY[[3]];
Gr3 = ListPlot[Transpose[Parametr], PlotStyle → PointSize[0.01`], AxesLabel → {"x(t)", "y(t)"}]
Show[G3, Gr3]

```