

Записки по Логическо Програмиране

Искендер Чобанов

30 март 2022 г.

Съдържание

1	Въведение	3
1.1	Функции над съждения:	3
1.2	Съждителни формули	5
1.3	Еднозначен синтактичен анализ на съждителни функции	7
1.4	Семантика на съждителните формули	9
1.5	Изпълнимост	10
1.6	Логическо следване	13
1.7	Семантична дедукция	15
2	Логически еквивалентни формули	16
2.1	Подформула	18
2.2	Теорема за еквивалентна замяна	21
3	Съждителна резолюция	21
3.1	Конюнктивна нормална форма	23
3.2	Съждителни дизюнкти. Множества от съждителни дизюнкти	23
3.3	Правило за чистия литерал	26
3.4	Правило за едноелементния дизюнкт	26
3.5	Правило за разделяне (Недоказано в записки мое доказателство)	28
3.6	Метод на съждителната резолюция	30
3.7	Важна лема	30
3.8	Резолютивна изводимост	35
4	Трансферзали	38
4.1	Следва продължение..	46
5	References	46

Редакция: Новите дефиниции, важните твърдения, теореми и доказателства се заграждат в съответните кутии:

Дефинция:

Твърдение/Теорема/Лема

Доказателство:

1 Въведение

Започваме с основни дефиниции и техния смисъл:

Дефиниция:

съждение - Някакво изказване, изречение от речта, което носи смисъл като **истина** или **лъжа**

преписва се вярностна стойност ,например:

“ Днес вали дъжд ” - може да му съответства стойност истина или лъжа
нека за удобство: истина ще записваме с И , лъжа с Л

Дефиниция:

Съжденията ги разделяме на **елементарно съждение** и **съставно съждение**.

При елементарните съждения, не се интересуваме от структурата на съждението , оставяме неговата вярност да бъде определена от някого.
Например:

“ Днес вали дъжд ” ние можем да проверим и да кажем дали е истина или лъжа

“ Има черна дупка на 3млн. светлинни години от нас ” това е елементарно съждение,на което ние, не можем да определим неговата вярност и тя се определя от някого,нещо разполагащо с тази информация.Разбира се е въпрос на гледна точка и \cup интерпретация \cup на нещата понякога.

При съставните съждения имаме съждения, които са образувани от елементарни съждения свързани с подходящите съждителни връзки.
съждителни връзки: отрицание , импликация , биимпликация , конюнкция , дизюнкция(има и още, но няма да представляват интерес за нас)

При използването на елементарни съждения и връзките образуваме съставни съждения , на които ще можем да разглеждаме вярност, без да сме ограничени от това кой разполага с информацията за конкретните елементарни съждения.

Например: “ Утре ще вали или (съждителна връзка-дизюнкция) няма да вали ” - това съставно съждение има стойност истина винаги.

1.1 Функции над съждения:

* Отрицание:

$$H_{\neg} : \{И, Л\} \longrightarrow \{И, Л\}$$

$$H_{\neg}(a) = \text{И} \longleftrightarrow^{def} a = \text{Л}$$

за а-съждение

сега защо функцията е от $\{\text{И}, \text{Л}\}$ а взима съждения, защото сме се разбрали да разглеждаме съжденията като вярностни стойности, за да можем да дефинираме функции върху тях, трябва да разполагаме с вярностните стойности, те в случая на елементарно съждение, не ни интересува конкретно стойността на съждение а, а това как, а се оценява от (някого който разполага с тази информация) и съответно спрямо тази оценка, каква оценка ни връща функцията.

* Конюнкция:

$$H_{\&} : \{\text{И}, \text{Л}\}^2 \longrightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$$

$$H_{\&}(a, b) = \text{И} \longleftrightarrow^{def} a = b = \text{И}$$

Най-често разглежданият смисъл в езика е : А и В, пример:

"Деро кара кола и кара бързо" - трябва и двете да са истина, има и случай обаче в който можем да разгледаме следните неща:

"Деро кара кола, а карането е бързо" - това също носи смисъла на конюнкция

"Деро кара кола, но бързо" - това също.

Но това, че в езика използваме такива връзки, не означава че всички изречения с този тип връзки имат предвид конюнкция. Затова трябва да си избираме конкретни съждения и да разпознаваме структурите им. В езика има много моменти в които формалната логика се изкривява например:

"Мира се ожени и роди момче"

"Мира роди момче и се ожени"

От тук нататък се абстрахираме от съжителната логика в езика и философията и започваме да говорим само за формална логика.

* Дизюнкция:

$$H_{\vee} : \{\text{И}, \text{Л}\}^2 \longrightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$$

$$H_{\vee}(a, b) = \text{И} \longleftrightarrow^{def} \text{поне едното } a \text{ или } b = \text{И}$$

не изглежда много неформално нека го направим формално:

$$H_{\vee}(a, b) = \text{Л} \longleftrightarrow^{def} a = b = \text{Л}$$

* Импликация:

$$H_{\Rightarrow} : \{И, Л\}^2 \longrightarrow \{И, Л\}$$
$$H_{\Rightarrow}(a, b) = Л \longleftrightarrow^{def} a = И, b = Л$$

* Эквивалентност (Биимпликация):

$$H_{\Leftrightarrow} : \{И, Л\}^2 \longrightarrow \{И, Л\}$$
$$H_{\Leftrightarrow}(a, b) = И \longleftrightarrow^{def} a = b$$

Така изчерпваме съждителните функции. Според теоремата на Бул ни бяха достатъчни две, примерно конюнкция и отрицание или дизюнкция и отрицание, но за по-интуитивна работа дефинираме тези горните.

1.2 Съждителни формули

Дефинция:

Азбука на съждителните променливи: $PVAR$ - букви
Азбуката е най-много изброимо безкрайна.

Пример за $PVAR$: $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$

Ще искаме да фиксираме азбука която да не е празна т.е $PVAR \neq \emptyset$

Дефинция:

Азбука на съждителните връзки: $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

\neg -едноместна

$\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ - двуместни

Дефинция:

Азбука на помощните символи : $()$, лява и дясна скоба.

Дефинция:

Формална дума: наричаме крайна редица от букви от съответните азбуки.

Дефиниция:

Индуктивна дефиниция на съжителните формули над съжителните променливи:

- PVAR са еднобуквени съжителни формули
- Ако ϕ е съжителна формула то $\neg\phi$ е съжителна формула
- Ако ϕ_1 и ϕ_2 са съжителни формули, а τ е двуместна съжителна връзка, то $(\phi_1\tau\phi_2)$ е съжителна формула
- $\mathcal{F}or$ (PVAR) - множеството на съжителните формули над PVAR

Забележка по-дефиниция, формално се пише винаги φ има св. \mathcal{P} със скобите, но за да се избегне претоварване на синтаксиса ще си позволяваме да третираме като верни изрази и без тях $(\phi \Rightarrow \varphi) \leftrightarrow \phi \Rightarrow \varphi$, ще внимаваме за приоритети за които ще поговорим по-късно. Но за сметка на това такива неща като

$(\phi$

или

$\phi)$

са грешни. Друго важно е, че различаваме двойните черти, символите и единичните черти като единичните черти, използваме за доказателства, а двойните са функции (връзки) в синтактичното представяне на съжителни формули.

Принцип:

Индуктивен принцип за доказване на свойства на съжителни формули:

Нека \mathcal{P} е свойство удовлетворяващо следните условия:

- * Съжителните променливи има св. \mathcal{P}
 - * ако φ има св. \mathcal{P} то $\neg\varphi$ има св. \mathcal{P}
 - * ако ϕ_1 и ϕ_2 имат св. \mathcal{P} то $(\phi_1\tau\phi_2)$ има св. \mathcal{P}
- тогава всяка съжителна формула има св. \mathcal{P}

Наблюдение:

Ако ϕ е съжителна формула то е на лице един от тези три случая:

- ϕ е съжителна променлива.
- ϕ е $\neg\psi$ за ψ съжителна формула
- ϕ е $(\phi_1\tau\phi_2)$ за съжителни формули ϕ_1, ϕ_2 и τ съжителна връзка.

I. Не е възможно две да са едновременно изпълнени:

Ако ϕ е съжителна променлива и е изпълнен и втория случай то имаме отрицание и съжителна формула, не може да е съжителна променлива и да започва с отрицание. Ако е съжителна променлива и е изпълнен третия случай, то ще започваме със скоба и по същата причина, не може

двата случая да са изпълнени аналогично е , ако е изпълнен втория случай започваме с отрицание не можем да сме съждителна променлива и не можем да започваме със скоба. Синтактично ги сравняваме и проверката е тривиална.

II. За всяка съждителна формула е изпълнен поне един от трите случая:

Това се проверява с индукция относно построеното на ϕ

Във всяка съждителна формула броя на левите скоби е равен на броя на десните скоби.

Ако е необходимо ще бъде добавено доказателство, подробно като изображение.

1.3 Еднозначен синтактичен анализ на съждителни функции

Тук ще разгледаме , значението на записването на съждителните формули , ще подсигурием еднозначност , и чак тогава ще можем да продължим с останалите дефиниции.

Нека първо се запознаем с няколко нови символа:

Дефиниция:

\equiv - графическо равно , това е визуално равенство, две неща са графически равни когато изглеждат синтактично по един и същи начин.

Например $1+2 \equiv 1+2$, но $1+2 \not\equiv 2+1$

Да не се заблуждава човек с означенията за формула, като кажем: $\varphi \equiv ???$, φ е просто означение за синтактичния израз, не е как той изглежда спрямо азбуките.

Дефиниция:

\Rightarrow или $:=$ - равно по дефиниция , присвояващо равно.

Сега се спираме на графическото равенство и искаме да докажем следното твърдение:

Ако ϕ е съждителна променлива и $\phi \equiv P$ то P е еднозначно определено. (P е буква от азбуката PVAR)

Ако $\phi \equiv \neg\psi$, за ϕ, ψ - съждителни формули то ψ е еднозначно определено.

Какво значи еднозначно определено , означава, че ако $\phi \equiv \neg\psi$ и $\phi \equiv \neg\psi_1$ то следва че $\psi = \psi_1$

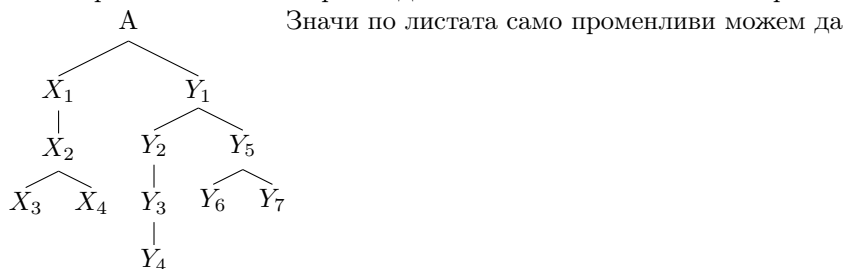
Ако $\phi \equiv (\phi_1 \tau \phi_2)$, за ϕ, ϕ_1, ϕ_2 - съждителни формули и τ -двуместна съждителна връзка , то ϕ_1, ϕ_2, τ са еднозначно определени.

Това е валидно за всяка съждителна формула ϕ и зависимостите са изпълнени за единствени $\psi, \phi_1, \phi_2, \tau$

Дървовидно построение на съждителна формула:
Това е дърво за което са изпълнени следните ограничения:

- дървото е крайно
- индекс на разклонение ≤ 2
- с наредба на преките наследници на всеки връх
- етикетите са съждителни променливи или съжидтелни връзки
- етикетите по листата са съждителни променливи
- етикетите на върхове с един пряк наследник са \neg
- етикетите на върхове с два преки наследника са двуместни съждителни връзки

Нека сега с тези ограничения разгледаме дърво и да помислим спрямо тези ограничения какво трябва да стои като етикет на всеки връх:

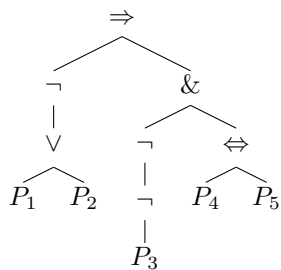


сложим:

При едноразклонение стои отрицание

При двойно разклонение слагаме някой двуместен съждителен символ (връзка)

и получаваме примерно дърво:



Линейно дървото се записва по следния начин:

$$\neg(P_1 \vee P_2) \Rightarrow ((\neg\neg P_3) \& (P_4 \Leftrightarrow P_5))$$

Пояснение/Твърдение:

На всяка съждителна формула съответства дървовидно построение и на всяко дървовидно построение съответства съждителна формула (еднозначно). В дървото, етикета в корена се нарича главна съждителна връзка, в нашия случай: \Rightarrow

Еднозначен синтактичен анализ е важен , защото можем да дефинираме рекурсивно функции.

Нека f е функция дефинирана за всички съждителни променливи ($\text{dom}(f)=\text{PVAR}$),

тогава f може да се разшири до функция с $\text{dom}(f)=\mathcal{F}or(\text{PVAR})$,те функция над всички съждителни формули над PVAR .

Нека разширението е \bar{f} и се дефинира:

$$\bar{f}(P) = f(P)$$

$$\bar{f}(\neg\varphi) = \overline{H_{\neg}}(\bar{f}(\varphi))$$

$$\bar{f}((\varphi_1 \tau \varphi_2)) = \overline{H_{\tau}}(\bar{f}(\varphi_1), \bar{f}(\varphi_2))$$

Това разширение е еднозначно дефинирано при зададени

$$\overline{H_{\neg}}, \overline{H_{\tau}}$$

Разбираме се да се абстрахираме от скоби тогава и само тогава когато знаем приоритетите на съждителните връзки:

Най-висок : \neg

После : $\vee, \&$

Накрая: $\Leftrightarrow, \Rightarrow$

1.4 Семантика на съждителните формули

Оценка / Интерпретация на съждителни формули .

Оценката (или Интерпретацията) е булева оценка която е изображение:

$$I : \text{PVAR} \longrightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$$

Всяка булева оценка I , може еднозначно да се разшири, до функция \bar{I} на множество от съждителни променливи така че:

$$\bar{I}(P) = I(P)$$

$$\bar{I}(\neg\varphi) = H_{\neg}(\bar{I}(\varphi))$$

$$\bar{I}((\varphi_1 \tau \varphi_2)) = H_{\tau}(\bar{I}(\varphi_1), \bar{I}(\varphi_2))$$

$\bar{I}(\varphi)$ се нарича стойност на φ при булева интерпретация, I записва се още $\|\varphi\|^I$

Нека I е булева интерпретация ако $I(\varphi)=\text{И}$, ще казваме, че I е модел за φ или φ е вярна (съждителна формула) при I (булева интерпретация)

Ако пък $I(\varphi)=\text{Л}$, I не е модел за φ или φ не е вярна при I , или φ се опровергава при I . При модел имаме символа: \models

$I \models \varphi$ - I е модел за φ

$I \not\models \varphi$ - I не е модел за φ

Имаме следствието което следва директно от дефиницията на H_{\neg}

$$I \models \neg\varphi \Leftrightarrow I \not\models \varphi$$

идва от

$$H_{\neg}(I(\varphi)) = \text{И} \Leftrightarrow I(\varphi) = \text{Л}, I \not\models \varphi$$

1.5 Изпълнимост

Дефиниция:

Съждителна формула φ - наричаме изпълнима, ако съществува булева интерпретация I , такава че $I \models \varphi$.
Ако φ няма модели, т.е. за всяка булева интерпретация е изпълнено $I(\varphi) = \text{Л}$ или $(I \not\models \varphi)$ то съждителната формула не е изпълнима.

Съждителни формули, ще наричаме само формули вече:

формулите които са верни при всяка булева интерпретация се наричат съждителни тавтологии.

пример за такава е

$$\varphi \vee \neg \varphi$$

тавтологиите означаваме с $\models \varphi$

Твърдение:

Нека φ е формула, всеки път, когато I_1, I_2 са булеви интерпретации, такива че за всяка съждителна променлива P участваща във φ е изпълнено $I_1(P) = I_2(P)$, то е в сила $I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$

Доказателство:

Доказателството е индукция по построението. Защо, защото сме казали, че φ е формула, нека да се върнем на [индуктивната дефиниция на съждителна формула](#), а също и [наблюдението, следствие...](#) Така доказвайки за всеки възможен случай за съждителна формула, че е изпълнено твърдението доказваме и самото твърдение:

*Първи случай $\varphi = P \in PVAR$, формулата ни е само една съждителна променлива, Тогава нека $I_1(Q) = I_2(Q)$ за всяко $Q \in PVAR$ и участваща във φ , но единствената променлива участваща във φ е P , следователно е изпълнено $I_1(P) = I_2(P)$ от което следва $I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$

*Втори случай $\varphi = \neg\varphi_1$ и приемаме, че твърдението е вярно за φ_1 . Нека имаме булевите интерпретации I_1 и I_2 и за всяка съждителна променлива P участваща във φ имаме $I_1(P) = I_2(P)$. Тогава за всяка съждителна променлива Q участваща във φ_1 имаме $I_1(Q) = I_2(Q)$, но с какво се различават φ и φ_1 , с един символ, който не е съждителна променлива. Една стъпка ни дели от това което искаме. Използваме индуктивното предположение за φ_1 и получаваме $I_1(\varphi_1) = I_2(\varphi_1)$, Но сега ние помним [дефиницията на \$H_{\neg}\$](#) . Следователно:

$$H_{\neg}(I_1(\varphi_1))$$

използваме $I_1(\varphi_1) = I_2(\varphi_1)$ от предположението и получаваме:

$$H_{\neg}(I_1(\varphi_1)) = H_{\neg}(I_2(\varphi_1))$$

от [дефиницията на \$H_{\neg}\$](#) получаваме:

$$I_1(\neg\varphi_1) = I_2(\neg\varphi_1)$$

заместваем $\varphi = \neg\varphi_1$ и накрая получаваме търсеното:

$$I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$$

* Трети случай $\varphi = (\phi_1 \tau \phi_2)$, τ -съждителна връзка, а ϕ_1 и ϕ_2 са съждителни формули, за които твърдението е изпълнено. Отново се сещаме вече как да продължим:

Нека I_1 и I_2 са булеви интерпретации, такива че за всяка съждителна променлива Q участваща във φ е изпълнено $I_1(Q) = I_2(Q)$. Ако една съждителна променлива участва във ϕ_1 или ϕ_2 , то тя участва в $(\phi_1 \tau \phi_2)$ значи и във φ , за всяка съждителна променлива която участва във ϕ_1 или ϕ_2 имаме изпълнено $I_1(Q) = I_2(Q)$, поради което имаме $I_1(\phi_1) = I_2(\phi_1)$ и $I_1(\phi_2) = I_2(\phi_2)$, отново разглеждаме този път третата дефиниция [дефиницията на \$H_{\tau}\$](#) и получаваме аналогично:

$$H_{\tau}(I_1(\phi_1), I_1(\phi_2)) = H_{\tau}(I_2(\phi_1), I_2(\phi_2))$$

от което получаваме и желаното:¹¹

$$I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$$

. \square

Сега припомним си

$$I \models \neg\varphi \leftrightarrow I \not\models \varphi$$

Тогава можем ли да твърдим че:

$$\neg\varphi \text{ е изпълнимо} \leftrightarrow \models \varphi$$

Т.е. разпознаване на тавтологии, една съждителна формула φ е тавтология тогава и само тогава когато , не съществува модел за $\neg\varphi$

→

Ако $\neg\varphi$ е изпълнимо , то за всяка булева интерпретация I , следва че $I(\neg\varphi)=\perp$, което пък от своя страна означава, че $H_{\neg}(I(\varphi))=\perp$, от тук следва ,че $I(\varphi) = \top$, и това за всяка булева интерпретация I . Това разсъждение е приложимо и в обратната посока.

Дефинция:

Нека Δ - множество от съждителни формули, Δ е изпълнимо, ако има булева интерпретация I при която са верни всички съждителни формули от Δ .

Интерпретации при които са верни всички съждителни формули от Δ наричаме модели на Δ .

Т.е. има булева интерпретация I , такава че за всяка $\varphi \in \Delta$ следва че $I \models \varphi$.

Всяка формула от Δ може да е изпълнима за интерпретация , но да не съществува конкретна която едновременно да изпълнява всички, например: $\Delta = \{P, \neg P\}$ няма интерпретация която едновременно да е модел за всяка формула от Δ

φ е изпълнима / неизпълнима $\leftrightarrow \{\varphi\}$ е изпълнимо / неизпълнимо

Ако $\Delta \subseteq \Delta_1$ и Δ_1 е изпълнимо тогава Δ е изпълнимо.
вече ще записваме така:

$$I \models \Delta_1 \rightarrow I \models \Delta$$

Защото интерпретацията модел на Δ_1 е валидна интерпретация за модел за Δ , а такава съществува понеже Δ_1 е изпълнимо.

Аналогично ако Δ е неизпълнимо то, нямаме булева интерпретация която да е модел за Δ не можем да разширим никоя до модел на Δ_1

Нека Δ е крайно множество от съждителни формули. Тогава имаме следното разсъждение:

Ако Δ е крайно множество от формули $\Delta = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ за n -естествено число. Тогава формулата $\varphi_{\Delta} = \phi_1 \& (\phi_2 \& \dots \& (\phi_{n-1} \& \phi_n))$, конюнкция на всички формули, тогава:

$$I \models \Delta \leftrightarrow I \models \varphi_{\Delta}$$

В следствие Δ е изпълнено $\leftrightarrow \varphi_\Delta$ е изпълнимо.

1.6 Логическо следване

Нека Δ е множество от съждителни формули, казваме че φ логически следва от Δ , ако всеки модел на Δ е модел на φ .

Означава се $\Delta \models \varphi$.

Тогава $\Delta \not\models \varphi$ ако съществува модел за Δ ($I \models \Delta$), който не е модел за φ . ($I \not\models \varphi$).

Твърдение

Ако Δ е неизпълнимо, тогава за всяка формула φ следва че $\Delta \models \varphi$

Доказателство:

Нека Δ е неизпълнимо, Допускаме, че $\Delta \not\models \varphi$, значи съществува булева интерпретация, $I_0 \models \Delta$ и I_0 не е модел за φ , но как ще съществува като Δ е неизпълнимо, противоречие.

Нека $\Delta \models \varphi$. Тогава всяко множество $\Delta \models \varphi$

Реално ако Δ е неизпълнимо, то няма какъв модел за Δ да покажем, такъв че да не е модел за φ

\emptyset -празното множество има за модели всички булеви интерпретации.

Защо с празното множество се случват такива неща, ами [по дефиницията за модел на множество от формули](#), избираме произволна булева интерпретация, тя дали е модел за всяка съждителна формула от празното множество. Това е въпрос от вида: Изпълнено ли е свойство P за всеки елемент от множество M ?

Нека го формулираме като съждение:

За всяко x принадлежащо на M е вярно свойство P .

Нека приемем, че това е истина.

Отрицанието на това твърдение ще бъде:

Съществува x принадлежащо на M за което свойство P не е вярно.

Тоест понеже в празното множество не съществуват елементи, няма такова съществуващо x от M за което P да не е вярно, следователно отрицанието е \perp което означава, че оригиналното твърдение е \perp .

Нека сега разгледаме логическо следване на формули:

Твърдение

Нека от $\varphi \models \psi$, като φ е изпълнима, а $\not\models \psi$. Тогава имаме съждителна променлива P , която участва и във φ и във ψ

Това е логическо следване по нетривиални причини, при тавтология ψ всяка булева интерпретация е модел за ψ , при φ неизпълнима, означава че не съществува булева интерпретация която да е модел за φ което означава, че не съществува интерпретация която да е модел за $\Delta = \{\varphi\}$, но ние имаме **твърдението**, от което следва, че $\Delta \models \psi$.
Така тези условия горе ни гарантират, че не сме в тривиалните случаи.

Доказателство:

Нека $\varphi \models \psi$, като φ е изпълнима, а $\not\models \psi$, допускаме че φ и ψ нямат общи променливи, тогава всеки път когато P -съждителна променлива участва във φ то следва, че P не участва във ψ . Понеже φ е изпълнима избираме си I_0 булева интерпретация, такава че $I_0 \models \varphi$ избираме булева интерпретация I_1 такава че $I_1 \not\models \psi$ понеже ψ не е тавтология имаме такава, дефинираме си интерпретация J

такава че: $J(Q) = \begin{cases} I_0(Q) & \text{ако } Q \text{ участва във } \varphi \\ I_1(Q) & \text{ако } Q \text{ не участва във } \varphi \end{cases}$

Нека P участва във φ , тогава $J(P) = I_0(P)$ следователно

$J(\varphi) = I_0(\varphi) = \text{И}$, защото избрахме $I_0 \models \varphi$

Нека P участва във ψ , тогава P не участва във φ , тогава

$J(P) = I_1(P)$, значи е изпълнено $J(\psi) = I_1(\psi) = \text{Л}$, защото избрахме

$I_1 \not\models \psi$, така имаме че $\varphi \models \psi$ от приемането с нека, което ни казва, че всяка интерпретация която е модел за φ е модел за ψ , но J е контрапример за интерпретация модел за φ която не е модел за ψ , следователно φ и ψ имат поне една обща съждителна променлива.

Имаме и следното твърдение:

$$\emptyset \models \varphi \leftrightarrow \models \varphi$$

Вече знаем, всяка булева интерпретация е модел за празното множество, от това следва, че празното множество е винаги изпълнимо от всички булеви интерпретации, тогава автоматично следва, че всяка булева интерпретация е модел и за φ , а от това, че φ е тавтология следва, че за всяка булева интерпретация, тя е модел за φ , разбира се ние сме длъжни по дефиницията, ако някое множество от съждителни формули, има модел и имаме логическа изводимост на формула, то за всяка интерпретация която е модел на това множество трябва да е и модел за φ , но всички интерпретации са модел за φ което значи че можем да заключим че $\emptyset \models \varphi$.

$$\varphi \in \Delta \rightarrow \Delta \models \varphi$$

Твърдение

Δ, Γ множества от формули такива че всеки път когато, $\psi \in \Gamma$ следва

$$\Delta \models \psi$$

Ако $\Gamma \models \varphi$ то $\Delta \models \varphi$

Доказателство:

Нека всеки път когато $\psi \in \Gamma$ имаме $\Delta \models \psi$, Нека $\Gamma \models \varphi$, тогава избираме булева интерпретация I която е модел за Δ , и така всеки път когато $\psi \in \Gamma$ имаме $I \models \psi$, защото $\Delta \models \psi$, следователно $I \models \Gamma$, но понеже $\Gamma \models \varphi$ следва че $I \models \varphi$. Така всяка булева интерпретация която е модел за Δ е модел и за φ . Това свойство се нарича обобщена транзитивност:

1.7 Семантична дедукция

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi \leftrightarrow \Gamma, \varphi \models \psi$$

Кое е същото като :

$$\Gamma, \varphi \models \psi \leftrightarrow \Gamma \models \varphi \implies \psi$$

Забележка: това е нова формула

$$\varphi \implies \psi$$

Доказателство:

→

$$\Gamma, \varphi \models \psi$$

Нека I е произволен модел на Γ .

(1сл.) При $I(\varphi) = И$, тогава I е модел за $\Gamma \cup \{\varphi\}$ и тъй като $\Gamma, \varphi \models \psi$ имаме, че $I \models \psi$ тогава $H \Rightarrow (I(\varphi), I(\psi)) = И$ Тогава $I \models \varphi \Rightarrow \psi$

(2сл.) $I(\varphi) = Л$, тогава $H \Rightarrow (Л, I(\psi)) = И$, но това значи че предпоставката в импликация е лъжа т.е импликацията е истина: значи $I \models \varphi \Rightarrow \psi$.

Така понеже и в двата възможни случая имаме истина, пък и I е произволен модел на Γ от което следва че $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \psi$

←

Нека $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \psi$, и нека I е модел на $\Gamma \cup \{\varphi\}$, тогава $I \models \Gamma$ и $I \models \{\varphi\}$, значи $I(\varphi) = И$. От I модел за Γ и от $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \psi$ получаваме че $I \models \varphi \Rightarrow \psi$, т.е $H \Rightarrow (I(\varphi), I(\psi)) = И = I(\varphi \Rightarrow \psi)$ тогава $I(\psi) = И$, следователно $I \models \psi$, следователно $\Gamma, \varphi \models \psi$

$\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ - неизпълнимо

Това е полезно за метода за логическа изводимост, с еизпълнимост ще решим проблема, кога можем да търсим решение (до безкрайност при необходимост) и кога няма решение изводимостта.

→

Нека $\Gamma \models \varphi$, да допуснем, че $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е изпълнимо. Тогава нека I е модел за $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ тогава значи $I \models \Gamma$ и $I \models \neg\varphi$ което е същото като $I \not\models \varphi$, от $\Gamma \models \varphi$ следва че $I \models \varphi$, но така получаваме противоречие значи $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизпълнимо.

←

Нека $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизпълнимо, нека I е произволен модел на Γ , тогава:

(1сл.) Ако $I(\varphi) = Л$, тогава $I(\neg\varphi) = И$, тогава значи $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е изпълнимо, защото I става модел за $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ противоречие.

(2сл.) $I(\varphi) = И$ тогава $I \models \varphi$, тогава всеки модел на Γ е и модел за φ , което означава, че $\Gamma \models \varphi$

→

2 Логически еквивалентни формули

Започваме с дефиниция за логическа еквивалентност:

Дефиниция:

ϕ, ψ са съждителни формули, казваме, че ϕ, ψ
са логически еквивалентни (означава се $\phi \models \psi$),
ако за всяка булева интерпретация $I, I(\phi) = I(\psi)$.

Реално очевидно е следното и по-интуитивно като дефиниция:

$$\phi \models \psi \leftrightarrow \phi \models \psi, \psi \models \phi$$

още едно свойство

$$\phi \models \psi \leftrightarrow \models \phi \iff \psi$$

Това са условия, за да кажем ,че две формули са логически еквивалентни.

Още няколко свойства:

- $\phi \models \psi \rightarrow \neg \phi \models \neg \psi$
- $\phi_1 \models \psi_1$ и $\phi_2 \models \psi_2 \rightarrow$
 $(\phi_1 \tau \phi_1) \models (\psi_2 \tau \psi_2)$

за τ съждителна връзка.

За последното свойство ще се опитаме да го докажем , защото не е толкова очевидно.

Нека I е произволна булева интерпретация. Тогава от $\phi_1 \models \psi_1$ следва ,че $I(\phi_1)=I(\psi_1)$ и аналогично от $\phi_2 \models \psi_2$ следва ,че $I(\phi_2)=I(\psi_2)$. Така вече можем да разгледаме функцията на τ , а именно $I((\phi_1 \tau \phi_1)) = H_\tau(I(\phi_1), I(\phi_2))$ което от своя страна чрез заместването с оценките получаваме $H_\tau(I(\psi_1), I(\psi_2))$ което е точно като оценката $I((\psi_2 \tau \psi_2))$ така получаваме ,че всяка произволна булева интерпретация на $(\phi_1 \tau \phi_1)$ дава същата оценка каквато и $(\psi_2 \tau \psi_2)$.

□

Споменаваме ,че логическата **еквивалентност** е релация на **еквивалентност** в множеството от логически формули. Т.е рефлексивност , симетричност и транзитивност са изпълнени за нея.

Познати свойства от дискретната математика.

$$\begin{aligned} \neg \phi &\implies \psi \models \neg \phi \vee \psi \\ \neg \phi &\iff \psi \models (\phi \implies \psi) \& (\psi \implies \phi) \\ \neg \phi \vee \phi &\models \phi \\ \neg \phi \& \phi &\models \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\phi \vee \psi &\models \psi \vee \phi \\
-\phi \&\psi &\models \psi \&\phi \\
-\phi \vee (\psi \vee \chi) &\models (\phi \vee \psi) \vee \chi \\
-\phi \&(\psi \&\chi) &\models (\phi \&\psi) \&\chi \\
-\phi \&(\psi \vee \chi) &\models (\phi \&\psi) \vee (\phi \&\chi) \\
-\phi \vee (\psi \&\chi) &\models (\phi \vee \psi) \&(\phi \vee \chi) \\
-\neg(\phi \&\psi) &\models \neg\phi \vee \neg\psi \\
-\neg(\phi \vee \psi) &\models \neg\phi \&\neg\psi \\
-\neg\neg\phi &\models \phi
\end{aligned}$$

Това е полезно после при съжителната резолюция, защото интересуват се от логически еквивалентни формули, се абстрахираме от синтаксиса, както в началото гледахме еднозначния синтактичен анализ на думите, относно синтаксис има значение как са представени формулите, от гледна точка на логическа еквивалентност, ако две формули са логически еквивалентни няма.

При нужда от константите И и Л, не можем да използваме директно оценките, трябва да са под формата на логически формули, разбира се ние имаме примери вече за тавтологии и противоречия използваме примерно тях и ги номерираме, както ние си решим. Ето пример за константите:

$$P_0 \& \neg P_0 \models f$$

$$P_0 \vee \neg P_0 \models t$$

2.1 Подформула

Дефиниция:

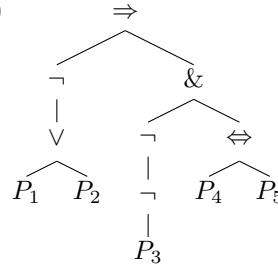
Подформула означава синтактичен (инфикс), една дума да е под-дума на друга дума.

Нека ψ подформула на ϕ и гледаме специфично участие $\phi = \alpha\psi\beta$,

Нека ϕ, ψ - са съжителни формули и $\phi = \alpha\psi\beta$. Нека ψ' е съжителна формула. Тогава думата $\alpha\psi'\beta$ също е формула.

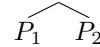
Това твърдение ще го покажа по-скоро със синтактично дърво и идеята зад него преди да продължим нататък:

Нека $\phi = \neg(P_1 \vee P_2) \Rightarrow ((\neg\neg P_3) \& (P_4 \Leftrightarrow P_5))$

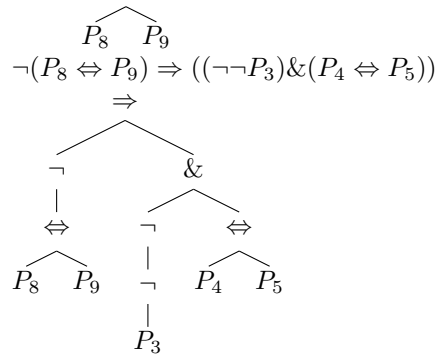


Тогава какво правим, избираме си частича, която да е също съждителна формула. Например:

$\psi = (P_1 \vee P_2)$, ами това е тази част от дървото: \vee Нека сега си



направим собствена съждителна формула: $\psi' = (P_8 \Leftrightarrow P_9)$ тя изглежда така: \Leftrightarrow Сега изрязваме старата и слепваме новата и получаваме:



Нека ϕ' е получена от ϕ при заместване на някое участие ψ във ϕ със ψ' . По друг начин изразени ϕ и ϕ'

$$\phi = \alpha\psi\beta$$

$$\phi' = \alpha\psi'\beta$$

Нека I е булева интерпретация, ако $I(\psi) = I(\psi')$, то $I(\phi) = I(\phi')$

Доказателство:

Индукция относно построението (благодарение на еднозначния синтактичен анализ знаем, че имаме **точно 3 случая на структуриране на формула.**)

$$* \phi = P$$

тогава структурата е $\alpha = \beta = \epsilon$, и $\psi = P$, това значи ,че $\phi' = \alpha\psi'\beta = \psi'$, Тъй като $I(\psi) = I(\psi') = I(\phi')$ тогава значи $I(\phi) = I(P) = I(\psi) = I(\psi') = I(\phi')$ от което автоматично се вижда че $I(\phi) = I(\phi')$

$$* \phi = \neg\phi_1$$

Приемаме ,че твърдението е вярно за ϕ_1

(1сл.) $\alpha = \beta = \epsilon$ и така понеже е съжителна формула ψ , значи $\phi = \psi$, а тогава заместването $\phi' = \psi'$ и значи пак имаме $I(\phi) = I(\psi) = I(\psi') = I(\phi')$

(2сл.) $\phi = \neg\alpha_1\psi\beta$ Тогава вида на ϕ_1 е $\phi_1 = \alpha_1\psi\beta$, и от индуктивното предположение имаме $I(\phi_1) = I(\phi'_1)$ които разложени изглеждат така: $I(\alpha_1\psi\beta) = I(\alpha_1\psi'\beta)$, което значи че при $I(\phi) = H_{\neg}(I(\phi_1)) = H_{\neg}(I(\alpha_1\psi\beta)) \stackrel{\text{предположението}}{=} H_{\neg}(I(\alpha_1\psi'\beta)) = I(\neg\alpha_1\psi'\beta) = I(\phi')$

В това доказателство използваме $\alpha = \neg\alpha_1$ фактически покриваме множество от случаи с това доказателство...

Например два случая да разгледаме $\alpha_1 = \epsilon$ и $\beta = \epsilon$ тогава вида ще бъде: $\phi = \neg\psi$, но в случая когато α_1 е част от дума например

$$\alpha_1 = (P \vee$$

и

$$\beta =)$$

имаме израз от вида $\phi = \neg(P \vee \psi)$

$$\phi = (\phi_1\tau\phi_2)$$

(1сл.) $\alpha = \beta = \epsilon$ разбира се получаваме структурата $\phi = \psi$ този случай вече е покрит.

(2сл.) $\alpha \neq \epsilon$ трябва α да поеме определен брой (поне 1) символи, което понеже искаме ψ също да е формула принуждава $\beta \neq \epsilon$ защото алфа ще изяде минимум 1 скоба, която бета трябва да изплюе после. тогава разглеждайки случая когато $\alpha = (\alpha_1, \beta = \beta_1\tau\phi_2)$

$$\phi_1 = \alpha_1\psi\beta_1$$

нали от структурата имаме:

$$\phi = (\phi_1\tau\phi_2)$$

тогава по заместване във ϕ_1 срещането на ψ със ψ' получаваме:

$$\phi' = (\alpha_1 \psi' \beta_1 \tau \phi_2)$$

и от предположението имаме:

$$I(\alpha_1 \psi \beta_1) = I(\alpha_1 \psi' \beta_1)$$

така

$$I(\phi) = H_\tau(I(\alpha_1 \psi \beta_1), I(\phi_2)) = H_\tau(I(\alpha_1 \psi' \beta_1), I(\phi_2)) = I((\alpha_1 \psi' \beta_1 \tau \phi_2)) = I(\phi')$$

Още един случай вече в който $\alpha = (\phi_1 \tau \alpha_1, \beta = \beta_1)$ така разглеждаме $\phi_2 = \alpha_1 \psi \beta_1$, отново правим същото:

$$I(\alpha_1 \psi \beta_1) = I(\alpha_1 \psi' \beta_1)$$

така

$$I(\phi) = H_\tau(I(\phi_1), I(\alpha_1 \psi \beta_1)) = H_\tau(I(\phi_1), I(\alpha_1 \psi' \beta_1)) = I((\phi_1 \tau \alpha_1 \psi' \beta_1)) = I(\phi')$$

2.2 Теорема за еквивалентна замяна

Нека ϕ' е получена от ϕ при заместване на някое участие ψ във ϕ със ψ' , Ако $\psi \models \psi'$ то следва $\phi \models \phi'$ Съгласно предното твърдение, имаме директно доказателство за теоремата.

За всяка съждителна формула ϕ алгоритмично можем да намерим формула ϕ' такава че $\phi \models \phi'$ и във ϕ' не се срещат импликации и еквивалентности:

Идеята е да използваме , факта ,че можем да заместим формула с формула и да използваме следните твърдения от еквивалентността , а именно:

$$\begin{aligned} \neg \phi &\implies \psi \models \neg \phi \vee \psi \\ \neg \phi &\iff \psi \models (\phi \implies \psi) \& (\psi \implies \phi) \end{aligned}$$

3 Съждителна резолюция

Дефинция:

Нека дефинираме **литерал** (ще записваме L):
Литерал наричаме съждителна променлива P или отрицание на съждителна променлива $\neg P$

Поради тази дефиниция, трябва да внимаваме:

* Ако $L=P$ (т.е. литералът е съждителна променлива) , то $\neg L = \neg P$ отрицанието му също е литерал.

* Ако $L = \neg P$ (т.е. литералът е отрицание на съждителна променлива), то $\neg L = \neg(\neg P)$, това вече е отрицание на съждителна **формула**, не на променлива и следователно не отговаря на дефиницията за литерал.

Дефинция:

Въвеждаме понятието: **Дуален литерал** и го означаваме L^δ

Дуалният литерал се дефинира по следния начин: $L^\delta =$

$$\begin{cases} \neg P & , \text{ако } L = P \\ P & , \text{ако } L = \neg P \end{cases}$$

Както виждаме L и L^δ са взаимно противоположни, и се наричат **контрерна двойка**.

Дефинция:

Елементарна дизюнкция:

Формула от вида $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$, $n \geq 1$, където L_1, L_2, \dots, L_n са литерали.

Индуктивната дефиниция е следната:

- ако L е литерал, то L е елементарна дизюнкция | както в нашия случай покриваме с $n=1$

-ако E е елементарна дизюнкция, а L е литерал ,то $(E \vee L)$ е елементарна дизюнкция.

с втората част градим елементарната дизюнкция , стъпка по стъпка.

Формално дали $(E_1 \vee E_2)$ е елементарна дизюнкция ако E_1, E_2 са елементарни дизюнкции, ами формално синтактично не са, но логически са еквивалентни на елементарна дизюнкция с цялостно абстрахиране от структурата със скобите.

Нека I е булева интерпретация, а $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$ е елементарна дизюнкция. Тогава:

$$I \models L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n \leftrightarrow \text{за някое } i, 1 \leq i \leq n, I \models L_i$$

Разбира се дизюнкцията логически се интересува от поне една стойност която да е истина (при конкретната булева интерпретация) , тогава понеже всеки литерал е свързан с дизюнкция , поне един за който I е

модел , ще направи логически стойността на цялата формула истина при тази интерпретация.

Дефиниция:

Конюнкция на елементарни дизюнкции: Дефиницията е аналогична на структура като тази на елементарната дизюнкция. Тук градивните елементи са елементарни дизюнкции (E).

Формула от вида $E_1 \& E_2 \& \dots \& E_k$, $k \geq 1$, наричаме конюнкция на елементарни дизюнкции и индуктивната дефиниция:

- ако E е елементарна дизюнкция , то E е конюнкция на елементарни дизюнкции.

- ако K е конюнкция на елементарни дизюнкции, и E е елементарна дизюнкция , то $(K \& E)$ е конюнкция на елементарни дизюнкции.

Щом твърдението за дизюнкция изискваше поне един литерал, тук при конюнкция изискваме всички елементарни дизюнкции да бъдат верни при булевата интерпретация:

Нека I е булева интерпретация, а $E_1 \& E_2 \& \dots \& E_k$ е конюнкция на елементарни дизюнкции. Тогава:

$$I \models E_1 \& E_2 \& \dots \& E_k \leftrightarrow \text{за всяко } i, 1 \leq i \leq k, I \models E_i$$

3.1 Конюнктивна нормална форма

За една съждителна формула ψ казваме ,че е във конюнктивна нормална форма ако е представена като конюнкция от елементарни дизюнкции.

В дискретната математика:

Конюнктивна нормална форма е конюнкция от елементарни дизюнкции. Елементарна дизюнкция е дизюнкция , чиито членове са отделни променливи или техните отрицания.

-Цитат от записки по дискретна математика / математическа логика (док. Д. Кралчев).

Двете дефиниции са еквивалентни логически , в нашия случай сме малко по-ограничени от към специфика в синтаксиса поради индуктивните дефиниции.

3.2 Съждителни дизюнкти. Множества от съждителни дизюнкти

Тук вече поради проблемите с които се срещаме заради синтаксис , структури , повторения на литерали и т.н. Ще се опитаме да сведем разглеждането на елементарни дизюнкции и конюнкции от елементарни дизюнкции до множества,

Дефиниция:

Дизюнкт (D) - наричаме крайно множество от литерали. На всеки елементарен дизюнкт съответства елементарна дизюнкция. Ако елементарната дизюнкция е изградена от n на брой литерали, тогава дизюнкта който съответства ще има $\leq n$ на брой литерали, защото елементинира повторенията, едно от готините свойства на множество. Другото готино свойство е, че вече синтаксиса не е от значение, при положение, че нямаме наредба в множеството. Обратно на всеки непразен дизюнкт съответства елементарна дизюнкция. Като за структура можем да изберем конкретна пермутация на разめстване на литералите от дизюнкта. Хайде примерче: Нека $E = L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$, $n \geq 1$ тогава съответства дизюнкт $D = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$, $|D| \leq n$. Обратно $D = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ съответства $E = L_{i_1} \vee L_{i_2} \vee \dots \vee L_{i_n}$, i_1, \dots, i_n е пермутация на $1, 2, \dots, n$. Така вече за целите ни, понеже се интересуваме от вярността на елементарна дизюнкция можем да използваме дизюнкт.

$I \models D \leftrightarrow^{def}$ има литерал $L, L \in D$, и Какво се случва с празния дизюнкт? Ами за него не съществува булева интерпретация I която да е модел за празния дизюнкт, защо поради същата причина поради която, **всяка булева интерпретация е модел за празното множество от съждителни формули**, Ние искаме да **съществува** литерал, който да е верен при булева интерпретация I , но в празния дизюнкт нямаме литерали, и не можем да вземем такъв. Поради което този специален дизюнкт ще го бележим ■

И ще разгледаме следното твърдение:

$$D \text{ е изпълним} \leftrightarrow D \neq \blacksquare$$

и да това означава, че само празният дизюнкт е неизпълним. \cup . Тавтологичен дизюнкт наричаме дизюнкт който е верен при всяка булева интерпретация. Кое то разбира се се получава ако вземем литерал и неговия дуален в един и същи дизюнкт, поради изискването на дизюнкцията поне един да е верен, с контрерната двойка вътре винаги ще си гарантираме, че или $I \models L$ или $I \models L^\delta$, ще видим и че това е това е необходимо и достътно условие един дизюнкт да е тавтологичен. Сега основно ни интересува, логически да се направим работата по-лесна и приятна, това ще стане като се интересуваме основно от изпълнимост/неизпълнимост на множества от съждителни формули. Най-често тези множества ще ги означаваме с Δ както по-горе. Нека за всяка съждителна формула $\phi \in \Delta$ с $\text{КНФ}(\phi)$ означаваме същата формула във конюнктивна нормална форма, както знаем: $\phi \models \text{КНФ}(\phi)$. Цялото множество от формули трансформирани в техните КНФ ще бележим $\text{КНФ}(\Delta)$.

$$I \models \Delta \leftrightarrow I \models \text{КНФ}(\Delta)$$

Това все още, не ни помага особено , но ако разгледаме множеството от всички елементарни дизюнкции които се срещат в някоя формула от Δ , и нека означим това множество $\overline{\Delta}$, тогава :

$$I \models \Delta \leftrightarrow I \models \overline{\Delta}$$

, т.е на нас са ни необходими вече само елементарни дизюнкции и тъй като е множество много от повторенията на тези елементарни дизюнкции ще бъдат изчистени , ще остане едно минимизирано множество от елементарни дизюнкции което ще ни поакже изпълнимост и неизпълнимост, още по минимизиращо множество можем да разгледаме като си припомним как **всяка елементарна дизюнкция има съответстващ елементарен дизюнкт**. Така за множество от формули Δ имаме съответстващо множество от елементарни дизюнкти $S_{\Delta} = \{D_E | E \in \Delta\}$. Кога едно такова множество е изпълнимо при булева интерпретация, изобщо кога дадена булева интерпретация е модел за такова множество ами точно когато, за всеки дизюнкт от S тази интерпретация е модел за този дизюнкт:

$$I \models S \leftrightarrow \text{За всеки } D \in S, I \models D$$

. Така защо тука писах само S а не S_{Δ} , ами не всяко множество S е от вида S_{Δ} може просто множество от дизюнкти да разглеждаме без то да е от някакво множество със съждителни формули. Например какво ще е това множество. Кое то в себе си включва \blacksquare дизюнкта, нямаме формула за това нямаме и елементарна дизюнкция E която да образува $D_E = \blacksquare$. Но в случая на множество от съждителни формули продължава да бъде валидно наблюдението:

$$I \models S_{\Delta} \leftrightarrow I \models \Delta$$

Понеже този дизюнкт \blacksquare е неизпълним при всяка булева интерпретация тогава означава , че от $\blacksquare \in S \rightarrow I \not\models S$. В същия момент е възможно $I \not\models S$ за всяко I без S да съдържа празния дизюнкт и това е например както знаем, едноелементен дизюнкт с литерал и съответно друг съдържащ дуалния му. Визуално $S = \{\{\neg P\}, \{P\}\}$. Ако пък $S = \emptyset$, тогава отново влизаме като случая на конюнкция , имаме че за всеки дизюнкт в S , булевата интерпретация I е модел, тогава не можем да приемем че съществува дизюнкт принадлежащ на S който да не е изпълнен при булева интерпретация I . Какво правим с тавтологичните дизюнкти? Ами премахваме ги , те не ни дават никаква информация относно вярност /изпълнимост/ неизпълнимост затова:

$$I \models S \leftrightarrow I \models S \setminus \{D\}$$

. Разбира се говорих за изпълнимост и неизпълнимост на множеството S , формално не го казах, но едно множество от дизюнкти S е изпълнимо

когато съществува булева интерпретация I която е модел на S . Кое то пък определя и неизпълнимост на S , като за всяка булева интерпретация I съществува поне 1 дизюнкт от S за който I не е модел. Освен горе определените неща, че ако празния дизюнкт се съдържа в S то S е винаги неизпълнимо, ако S е празното множество, то е винаги изпълнимо. Имаме още някои очевидни наблюдения, например ако: $S' \subset S$ и S - изпълнимо следва, че S' е изпълнимо, ако пък S' -неизпълнимо то S е неизпълнимо.

3.3 Правило за чистия литерал

Нека L е литерал, такъв че принадлежи поне на един дизюнкт от S и никой дизюнкт от S не съдържа неговия дуален L^{δ} , Нека $S' = \{D | D \in S, L \notin D\}$. Тогава S е изпълнимо $\leftrightarrow S'$ е изпълнимо

Доказателство:

Понеже S' се състои от дизюнкти на S със специално ограничение то е подмножество на S , Други наблюдения са, че понеже специалното ограничение изключва дизюнктите които съдържат L , имаме че $D \in S \setminus S' \rightarrow L \in D$ и също така $D \in S' \rightarrow L \notin D$ и $L^{\delta} \notin D$, понеже никой дизюнкт от S , не съдържа L^{δ} . Така само от факта че S' е подмножество на S следва, че ако S е изпълнимо то S' е изпълнимо. Сега остава само на обратно да докажем. Нека произволна булева интерпретация I е модел за S' тогава дефинираме $I^L \models L$ по този начин за L и за всяка променлива P която не участва във L се държи по същия начин като I , т.е $I^L[P] = I[P]$, Така покриваме всички абсолютно всички литерали от S' , това значи, че можем да разширим всяка булева интерпретация модел за S' до интерпретация която е модел за S .

3.4 Правило за едноелементния дизюнкт

Нека L е литерал и $\{L\} \in S$. Нека:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{D | D \in S, L \notin D, L^{\delta} \notin D\} \\ S_2 &= \{D \setminus \{L^{\delta}\} | D \in S, L \notin D, L^{\delta} \in D\} \\ S' &= S_1 \cup S_2 \end{aligned}$$

Тогава S е изпълнимо $\leftrightarrow S'$ е изпълнимо.

Доказателство:

Нека $I \models S$. Тогава за всеки D от S имаме $I \models D$, в частност $I \models \{L\}$, от което значи, че $I \models L \rightarrow I \not\models L^\delta$. Ако един дизюнкт от S е от S' то има два случая:

$$D \in S_1$$

В този случай $D \in S$ и значи $I \models D$, другия случай е:

$$D \in S_2$$

Тогава вида на D е $D_1 \setminus \{L^\delta\}$ където $D_1 \in S, L \notin D_1, L^\delta \in D_1$. От първото, че $D_1 \in S$ следва $I \models D_1$. Избираме си литерал $M \in D_1$ такъв, че $I \models M$, знаем че съществува поне един такъв, и този литерал не е L^δ защото $I \not\models L^\delta$. Значи $M \in D_1 \setminus \{L^\delta\}$, и това е поне един литерал който е верен при I , което значи, че $I \models D_1 \setminus \{L^\delta\}$ което е $I \models D$. Токазано, че за всеки произволен литерал от S' и в двата случая булевата интерпретация модел за S е модел и за дизюнкта. Следователно $I \models S \rightarrow I \models S'$.

Обратната посока: Дефинираме си интерпретация I^L която как действа:

ако променлива Q не участва във L , то $I^L[Q] = I[Q]$, като I произволна булева интерпретация модел за S' , разбира се $I^L \models S'$, остава да покажем, че $I^L \models S$. Ами нека за $D \in S$ разгледаме следното:

$$L \in D \text{ и } L^\delta \notin D$$

Тогава $I^L \models D \leftrightarrow I \models D$, значи $I^L \models D$, следващия вариант:

$$L \notin D \text{ и } L^\delta \in D$$

Тогава $D \setminus \{L^\delta\} \in S_2 \subset S'$ и $I^L \models D \setminus \{L^\delta\} \leftrightarrow I \models D \setminus \{L^\delta\}$. Следователно $I^L \models D \setminus \{L^\delta\}$ и $I \models D$. Последен случай:

$$L \in D$$

Тогава да $I^L \models L$ и значи $I^L \models D$.

Така покривайки всички случаи за дизюнкт от S , получаваме, че $I^L \models S$

3.5 Правило за разделяне (Недоказано в записки мое доказателство)

Нека L е литерал има дизюнкт $D_1 \in S$, такъв че $L \in D_1$ и $L^\delta \notin D_1$, има и дизюнкт $D_2 \in S$, такъв че $L^\delta \in D_2$ и $L \notin D_2$. Нека:

$$S_1 = \{D | D \in S, L \notin D, L^\delta \notin D\}$$

$$S_2^+ = \{D \setminus \{L^\delta\} | D \in S, L \notin D, L^\delta \in D\}$$

$$S_2^- = \{D \setminus \{L\} | D \in S, L \in D, L^\delta \notin D\}$$

$$S^+ = S_1 \cup S_2^+$$

$$S^- = S_1 \cup S_2^-$$

Тогава S е изпълнимо \leftrightarrow поне едно S^+, S^- е изпълнимо. Нека S е изпълнимо, т.е. съществува булева интерпретация I модел за S .

Доказателство:

Нека дефинираме I^L такова ,че за всяка променлива Q която не участва в L имаме $I^L[Q] = I[Q]$, а за L имаме $I^L \models L$. Тогава да докажем ,че поне едно от S^+ или S^- има тази булева интерпретация за модел. Защото $I^L \models S$, нека проверим дали $I^L \models S^+$. Нека $D \in S^+$ тогава имаме два случая:

$$D \in S_1$$

От този случай понеже S_1 са дизюнкти от S с ограничения имаме че $S_1 \subset S$ от това ,че $I^L \models S$ следва че $I^L \models S'$. Следващия случай:

$$D \in S_2^+$$

тогава D има вида $D_1 \setminus \{L^\delta\}$ за $D_1 \in S$ от това , че $D_1 \in S$ следва , че $I^L \models D_1$, т.е съществува поне един литерал $M \in D_1$ за който $I^L \models M$, но по дефиниция $I^L \models L$, значи $I^L \not\models L^\delta$, от това имаме че $M \neq L^\delta$, което значи че $M \in D_1 \setminus \{L^\delta\}$ от там следва че $I^L \models D$. Абсолютно пълен аналог с дефиниране на I^{L^δ} за S^- .

Нека S^+ е изпълнимо тогава имаме интерпретация I която е модел за S^+ от което следва че $I \models S_1$ и $I \models S_2^+$, сега можем отново да използваме разширението I^L със същата дефиниция но този път да е булева интерпретация която е модел за S^+ и разширява новото I което избрахме. Така автоматично ако имаме $D \in S$ то за него пак имаме 3те случая:

$$L \in D \text{ и } L^\delta \notin D$$

В този случай понеже $I^L \models L$ имаме директно следствие $I^L \models D$

$$L \notin D \text{ и } L^\delta \in D$$

В този случай имаме $I^L \models S_2^+$ и тъй като това значи ,че $I^L \models D_1 \setminus \{L^\delta\}$ всяко такова то нашето D можем да го представим като $D = D_1 \setminus \{L^\delta\} \cup \{L^\delta\}$ имаме поне един литерал $M \in D_1 \setminus \{L^\delta\}$ от което следва ,че $I^L \models D$ Последния случай:

$$L \notin D \text{ и } L^\delta \notin D$$

Ни казва директно че $D \in S_1$ което понеже $I^L \models S_1$ следва че $I^L \models D$. Така за всеки дизюнкт от S имаме че $I^L \models D$, значи $I^L \models S$.

Абсолютно пълен аналог с дефиниране на I^{L^δ} за S^- .

3.6 Метод на съждителната резолюция

Тук ще се запознаем с **правилото за съждителната резолюция**. И **резолвента**.

Дефинция:

Нека D_1 и D_2 са дизюнкти, а L е литерал. Казваме ,че правилото за съждителната резолюция е приложимо към D_1, D_2 относно L , ако $L \in D_1, L^\delta \in D_2$. Означава се $!R_L(D_1, D_2)$. Добре, но понеже сме с контрерната двойка можем и да го разглеждаме относно L^δ тогава казваме че $!R_{L^\delta}(D_2, D_1)$.

Разбира се това означава че:

$$!R_L(D_1, D_2) \leftrightarrow !R_{L^\delta}(D_2, D_1)$$

Нека $!R_L(D_1, D_2)$ Тогава дизюнктът $(D_1 \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^\delta\})$ наричаме резолвента на D_1, D_2 относно L .

Аналогично дефинирано:

Дизюнктът D е резолвента на D_1, D_2 , ако има литерал L , такъв че $!R_L(D_1, D_2)$ и $D = R_L(D_1, D_2)$

3.7 Важна лема

Важна Лема:

Нека D е резолвента на D_1, D_2 нека I е булева интерпретация.
Ако $I \models \{D_1, D_2\}$, то $I \models D$
Тоест ако булева интерпретация е модел и за двата дизюнкта то тя е модел и за тяхната резолвента спрямо литерал.

Доказателство:

L е литерал за който $D = R_L(D_1, D_2)$. Коеето значи че вида на D е $D = (D_1 \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^\delta\})$. От това че $I \models \{D_1, D_2\}$ следва че $I \models D_1$ и $I \models D_2$. Имаме литерал от D_1 който е верен при I и литерал от D_2 който е верен при I . Нека тези литерали ги означим съответно $M_1 \in D_1, I \models M_1$ и $M_2 \in D_2, I \models M_2$.

За интерпретацията I имаме следните варианти:

Вариант 1. $I \models L$ от което автоматично следва $I \not\models L^\delta$ Следователно $M_2 \neq L^\delta$, поради което $M_2 \in D_2 \setminus \{L^\delta\} \subseteq D$. Следователно $I \models D$ защото този литерал е от D и е верен при интерпретацията I .

Вариант 2. $I \not\models L$, тогава $M_1 \neq L$ така аналогично $M_1 \in D_1 \setminus \{L\} \subseteq D$, така намерихме друг литерал от D който е верен при I от което заключаваме че $I \models D$

Нека $L_1, L_2 \in D_1$, а $L_1^\delta, L_2^\delta \in D_2$ ако искаме да приложим двукратно правилото, не получаваме $(D_1 \setminus \{L_1, L_2\}) \cup (D_2 \setminus \{L_1^\delta, L_2^\delta\})$, а какво получаваме и защо?

Ами приоритетите ни са следните за да приложим веднъж правилото получаваме:

$$D = (D_1 \setminus \{L_1\}) \cup (D_2 \setminus \{L_1^\delta\})$$

следващата резолвента ще можем да направим примерно тъй като $\textcolor{blue}{!R_{L_2}(D, D_2)}$, разглеждаме резолвентата:

$$R_{L_2}(D, D_2) = D' = (D \setminus \{L_2\}) \cup (D_2 \setminus \{L_2^\delta\})$$

Така имаме за финал: D което включва всички литерали от D_1 без L_1 обединено с D_2 без дуалния литерал на L_1 , за D' имаме премахване също L_2 от D но запазваме L_2^δ обединяваме това с D_2 без L_2^δ т.е в нашия случай все още фигурира L_2^δ докато в горния не фигурира. Всъщност дори не премахваме от D_2 дуалното на L_1 и то също си остава.

За множества от дизюнкти се дефинира \mathcal{R} :

Нека S е произволно множество от дизюнкти.

Дефинция:

$$\mathcal{R}(S) \Rightarrow S \cup \{D \mid \text{съществува } D_1, D_2 \in S, D \text{ е резолвента на } D_1, D_2\}$$

Лема 1

Лема 1. Нека S е множество от дизюнкти , а I е булева интерпретация, Тогава $I \models S \leftrightarrow I \models \mathcal{R}(S)$

Доказателство:

Нека $I \models S$, тогава за произволен дизюнкт $D \in \mathcal{R}(S)$ имаме следните два случая:

(1сл) $D \in S$ тогава е ясно , че понеже $I \models S \rightarrow I \models D$

(2сл) D е резолвента на два дизюнкта $D_1, D_2 \in S$, тези два дизюнкта от S за тях е изпълнено , че $I \models D_1$, $I \models D_2$ което значи , че $I \models \{D_1, D_2\}$ което от [важната лема](#) следва че $I \models D$.

това е за всеки произволен дизюнкт от $\mathcal{R}(S)$, което значи, че $I \models \mathcal{R}(S)$.

Другата посока сега: Ами какво да се чудим $S \subseteq \mathcal{R}(S)$. Тогава автоматично следва, че всеки модел за $\mathcal{R}(S)$ е модел и за S .

Дефиниция:

За всяко множество от дизюнкти S , дефинираме S^* , което се дефинира така:

дефинираме редицата $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, индуктивно по следния начин:

$$S_0 = S$$

$$S_{n+1} = \mathcal{R}(S_n)$$

и полагаме

$$S^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$$

Лема 2

Нека S е множество от дизюнкти, I е булева интерпретация тогава:
 $I \models S \leftrightarrow I \models S^*$

Доказателство:

Нека $I \models S$, тогава ако покажем, че за всяко n , $I \models S_n$, тогава ще получим, точно $I \models \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = S^*$.

Правим го чрез индукция относно n .

База $n=0$, $S_0 = S$, значи $I \models S_0$

Нека за някое n е изпълнено, че $I \models S_n$. За $S_{n+1} = R(S_n)$, от [Лема 1](#), следва че $I \models R(S_n)$ което означава, че от $S_{n+1} = R(S_n)$, следва че $I \models S_{n+1}$. За пълнота на доказателството нека си изберем произволен дизюнкт $D \in S^*$, тогава заради структурата на S^* , съществува някое n за което $D \in S_n$ и понеже $I \models S_n$ за всяко n , то $I \models D$, и това беше за произволен дизюнкт, значи сме готови напълно с тази посока.

Другата посока разбира се $S = S_0$, $S_0 \subseteq S^*$, значи $I \models S^* \rightarrow I \models S$ винаги.

Сега може да изглежда, че дефинираме тези неща напразно и просто си играем с измислени дефиниции, но всяко твърдение ни бута една стъпка напред към истинската резолюция. Нещо интересно как да разберем дали едно множество S е неизпълнимо, като използваме, новите дефиниции, ами можем да твърдим следното:

Критерии за неизпълнимост на множество от дизюнкти:

Ако $\blacksquare \in S^*$, то S е неизпълнимо.

Доказателство:

Нека $\blacksquare \in S^*$, допускаме че S е изпълнимо, ми S е изпълнимо т.е има поне един модел, нека го означим I , $I \models S$ от Лема 2. следва автоматично $I \models S^*$, от което следва че всички дизюнкти от S^* са верни при I , в частност, $I \models \blacksquare$ противоречие.

Сега веднага се чудим дали ако S е неизпълнимо, следва че $\blacksquare \in S^*$. За жалост още нямаме знанията да го докажем, но се очаква да е така. Друго интересно нещо е, знаем че ако имаме $\blacksquare \in S^*$, то съществува някое n , за което $\blacksquare \in S_n$, сега дали трябва да изчислим всичките предходни S_k за $0 \leq k < n$, за да решим, че $\blacksquare \in S_n$. За по-лесно проследяване на пътя до \blacksquare ще дефинираме още нещо малко по-късно. Сега се спираме на следното:

Дефиниция:

За множество от дизюнкти S , казваме че е затворено относно правилото за резолюцията, ако за всеки два дизюнкта от S , е вярно че и тяхната резолвента е от S , иначе записано:

$$S = \mathcal{R}(S)$$

(S е неподвижна точка за \mathcal{R})

Твърдение 1:

За всяко множество от дизюнкти S , S^* е затворено относно правилото за резолюциите.

Доказателство:

Трябва да покажем следните две неща:

$$S^* \subseteq \mathcal{R}(S^*) \text{ и } \mathcal{R}(S^*) \subseteq S^*.$$

Първото следва директно от дефиницията за \mathcal{R} .

Второто. Взимаме си произволен дизюнкт от $\mathcal{R}(S^*)$ за него знаем че има два случая:

Първи случай $D \in S^*$, тогава е ясно.

Втори случай D е резолвента на $D_1, D_2 \in S^*$, т.е. има n_1, n_2 , такива че $D_1 \in S_{n_1}, D_2 \in S_{n_2}$, полагаме $m = \max\{n_1, n_2\}$, което е по-голямо от двете, така отново заради наблюдението за подмножества се оказва, че $D_1, D_2 \in S_m$, но ние знаем, че D е резолвента на D_1, D_2 следователно $D \in \mathcal{R}(S_m)$, което пък е $D \in S_{m+1}$, така всеки произволен дизюнкт от $\mathcal{R}(S^*)$ е изпълнено, че $D \in S^*$, и заключаваме че: $\mathcal{R}(S^*) \subseteq S^*$

Твърдение 2:

1. Всеки път когато, X е множество от дизюнкти и е изпълнено $S \subseteq X, X = \mathcal{R}(X)$, е в сила $S^* \subseteq X$.
2. $S^* = \bigcap \{X \mid S \subseteq X, X = \mathcal{R}(X)\}$

Доказателство 1:

Нека $S \subseteq X, X = \mathcal{R}(X)$, използваме индукция относно n , и се стремим да покажем, че за всяко n е изпълнено $S_n \subseteq X$:

База: $S_0 = S$, значи $S_0 \subseteq X$.

Предположение: Нека за някое n , е изпълнено $S_n \subseteq X$, тогава за S_{n+1} имаме следното $S_{n+1} = \mathcal{R}(S_n)$, разбира се $S_n \subseteq \mathcal{R}(S_n)$, и щом $S_n \subseteq X \rightarrow \mathcal{R}(S_n) \subseteq \mathcal{R}(X) = X$, така се оказва че $S_{n+1} \subseteq X$, така и обединението на всички S_n е подмножество на X .

Доказателство 2:

Тук се изискват две посоки първата посока я имаме: $S^* \subseteq \bigcap \{X \mid S \subseteq X, X = \mathcal{R}(X)\}$ идва от първата част, и факта че всяко $X \in \{X \mid S \subseteq X, X = \mathcal{R}(X)\}$. Изпълняват първата част.

В другата посока имаме [твърдение 1](#) и $S \subseteq S^*$ автоматично следва че: $S^* \in \{X \mid S \subseteq X, X = \mathcal{R}(X)\}$, сечението чисти елементи само, така че е валидно, че $\bigcap \{X \mid S \subseteq X, X = \mathcal{R}(X)\} \subseteq S^*$

3.8 Резолутивна изводимост

Дефиниция:

Нека S е множество от дизюнкти.

Дефинираме резолутивен извод като **крайна** редица дизюнкти:

D_1, D_2, \dots, D_n , за n естествено, като всеки дизюнкт е от S или резолвента на два предходни дизюнкта в редицата които са от S , иначе казано за D_1, D_2, \dots, D_n за всяко $1 \leq k \leq n$ е изпълнено $D_k \in S$ или съществуват $1 \leq i, j < k$ такива че D_k е резолвента на D_i, D_j .

Дефиниция:

Един дизюнкт е резолутивно изводим от S , пише се: $S \vdash^r D$, ако има резолутивен извод от S , чийто последен член е D

Добре е да се упоменат следните наблюдения:

Две наблюдения:

1. Нека D_1, D_2, \dots, D_n е резолютивен извод от S , тогава за всяко $k \leq n$, D_1, D_2, \dots, D_k е също резолютивен извод от S
2. Нека имаме два резолютивни извода от s :

$$D_1, D_2, \dots, D_n$$

$$D'_1, D'_2, \dots, D'_n$$

тогава $D_1, D_2, \dots, D_n, D'_1, D'_2, \dots, D'_n$ също е резолютивен извод от S .

Компактност на резолютивна изводимост:

$$S \vdash^r D \leftrightarrow \text{съществува крайно } S_0, S_0 \subseteq S, S_0 \vdash^r D$$

Доказателство:

В дясната посока: Нека $S \vdash^r D$, тогава имаме резолютивен извод на D от S , нека вземем редицата (рез. извод на D от S) D_1, D_2, \dots, D_n . Дефинираме си $S_0 = \{D_k | 1 \leq k \leq n, D_k \in S\}$, така сме взели всички дизюнкти от горната редица(извод) които са от S , понеже редицата е крайна, това множество S_0 е крайно, и разбира се тогава редицата D_1, D_2, \dots, D_n е резолютивен извод и от S_0 на D , защото както споменах в дефиницията на S_0 взимаме само дизюнктите които са от S . Дефиницията е спазена и следователно $S_0 \vdash^r D$.

В лявата посока: Нека вземем подмножество на S , някое S_0 за което е изпълнено, че е крайно и $S_0 \vdash^r D$, тогава разглеждаме един резолютивен извод от S_0 на D , нека е D_1, D_2, \dots, D_n , тогава понеже е подмножество, следва директно, че е резолютивен извод на D от S . $S \vdash^r D$.

И реално всяко подмножество щеше да свърши работа независимо дали безкрайно или крайно, просто в нашия случай се изискваше крайно.

Твърдение 3:

Нека S е множество от дизюнкти. Тогава:
 $D \in S^* \leftrightarrow S \vdash^r D$

Доказателство:

Дясната посока, ще докажем, като искаме да покажем, че ако $D \in S_n$ то $S \vdash^x D$. за всяко n . Щом показваме за всяко n , използваме индукция относно n .

База: $D \in S_0$, едночленна редица D , е резолютивен извод, и тъй като $S_0 = S$ се оказва че $S \vdash^x D$.

Предположение: Нека за някое n е в сила, че за всяко $D \in S_n$ е изпълнено $S \vdash^x D$. Тогава за $D \in S_{n+1}$, имаме $S_{n+1} = \mathcal{R}(S_n)$, имаме два случая за D :

1. $D \in S_n$ тогава от предположението имаме $S \vdash^x D$.
2. D е резолвента на два дизюнкта D', D'' като $D', D'' \in S_n$. Тогава от хипотезата имаме $S \vdash^x D', S \vdash^x D''$, нека вземем съответно резолютивен извод на D' от $S : D'_1, D'_2, \dots, D'_n$ и резолютивен извод на D'' от $S : D''_1, D''_2, \dots, D''_m$. Тогава знаем че $D'_1, D'_2, \dots, D'_n, D''_1, D''_2, \dots, D''_m, D$ е резолютивен извод на D от S , т.е. доказахме, че $S \vdash^x D$. Отново за пълнота взимаме произволен дизюнкт $D \in S^*$, тогава този дизюнкт принадлежи за някое n , на S_n и така получаваме, че за всеки произволен дизюнкт е изпълнено $S \vdash^x D$.

Продължаваме с лявата посока: Малко по интересна, нека $S \vdash^x D$, тогава един резолютивен извод на D от S е D_1, D_2, \dots, D_n , като $D_n = D$. Твърдим, че за всяко $k, 1 \leq k \leq n$ то $D_k \in S^*$. Доказваме с противоречие, нека има такова $k, 1 \leq k \leq n$ то $D_k \notin S^*$, за да докажем, ще се ограничим до най-малкото такова $k_0, 1 \leq k_0 \leq n$ то $D_{k_0} \notin S^*$, Тогава имаме два случая:

$D_{k_0} \in S$, в който случай, не можем да бъде защото $S = S_0 \subseteq S^*$.
Втори случай: D_{k_0} е резолвента на два дизюнкта $D_i, D_j \in S^*$, те са от S^* от това, че $i, j < k_0$ а k_0 е минималния индекс за който $D_{k_0} \notin S^*$, обаче имаме от [твърдение 1](#) че S^* е затворено множество относно правилото за резолюцията и всяка резолвента е елемент на S^* така опровергахме $D_{k_0} \notin S^*$.

Така отиваме на важната теорема за коректност:

Теорема за коректност резолютивната изводимост:

tcorrect Нека S е множество от дизюнкти.

Ако $S \vdash^x \blacksquare$, то S е неизпълнимо.

Доказателство:

Нека $S \vdash^r \blacksquare$, тогава съгласно последното [твърдение 3](#) имаме , че $\blacksquare \in S^*$ и съгласно [критерия за неизпълнимост](#), заключаваме че S е неизпълнимо.

4 Трансферзали

Дефинция:

Нека M е множество, с елементи, които също са множества. За едно множество Y, ще казваме , че Y е трансферзала за M ако $(\forall x \in M)(Y \cap x \neq \emptyset)$.

Забележка:

Едно множество има трансферзала тогава и само тогава когато не съдържа празното множество като елемент. Макар и тривиално твърдение , нека го запишем и да го докажем.

Твърдение:

Нека M е множество от множества.
M има трансферзала $\leftrightarrow (\forall x \in M)(x \neq \emptyset)$

Доказателство:

Доказателство (Дясна посока 1):

Нека M има трансферзала, допускаме че M съдържа празното множество като елемент. Тогава нека Y е трансферзала за M , поради което е изпълнено: $(\forall x \in M)(Y \cap x \neq \emptyset)$, в частност $(Y \cap \emptyset) \neq \emptyset$ което е абсурдно.

(понеже резултата от сечение на всяко множество с празното множество винаги връща празното множество.)

Доказателство (Дясна посока 2):

Нека M има трансферзала и нека Y е трансферзала за M . Взимаме произволен елемент $x \in M$, тогава от Y трансферзала, имаме че $(Y \cap x) \neq \emptyset$, но $(Y \cap x) \subseteq x$, поради което $x \neq \emptyset$.

Лявата посока:

Нека $(\forall x \in M)(x \neq \emptyset)$. Тогава дефинираме множеството $Y = \bigcup_{x \in M} x$.

Това множество е трансферзала за M , защото за всяко $x \in M$ е вярно, че $x \subseteq Y$, от това имаме че е вярно винаги $(Y \cap x = x)$, но никое x не е празното множество, следователно е винаги изпълнено $(\forall x \in M)(Y \cap x \neq \emptyset)$.

Дефиниция:

Нека M е множество от множества, ще казваме че Y е минимална трансферзала ако са изпълнени следните 2 условия:

- Y - е трансферзала
- всеки път когато $Y' \subseteq Y, Y' \neq Y$, следва че Y' не е трансферзала.

Т.е всяко собствено подмножество на Y не е трансферзала за M , а Y е трансферзала за M .

Малко твърдение:

Нек M е множество от множества, Y е трансферзала за M :
 Y - минимална $\leftrightarrow (\forall a \in Y)(\exists x \in M)((Y \setminus \{a\}) \cap x = \emptyset)$

Което иначе казано е тривиално твърдение, че една трансферзала е

минимална тогава и само тогава когато , който и елемент да премахнем спира да е трансферзала.(за някое М)

Доказателство:

Едната посока: Нека Y е минимална трансферзала , ами тогава $Y \setminus \{a\} \subseteq Y$ и $Y \setminus \{a\} \neq Y$. Y е минимална, а $Y \setminus \{a\}$ е собствено подмножество на Y , няма как да е трансферзала.

Другата посока:

Нека Y е трансферзала , избираме си произволно собствено подмножество Y' т.е $Y' \subseteq Y, Y' \neq Y$ тогава $Y \setminus Y'$, понеже има поне един елемент по който се различават Y и Y' , нека $a \in Y \setminus Y'$. Така $Y' \subseteq Y \setminus \{a\} \subseteq Y$ и $Y \setminus \{a\} \neq Y$. Тогава $(\exists x \in M)((Y \setminus \{a\}) \cap x = \emptyset)$ понеже сме в лявата посока твърдението е изпълнено. Но като вземем такова конкретно x нека го означим x_0 , за което $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 = \emptyset$. Тогава имаме следното $Y' \cap x_0 \subseteq (Y \setminus \{a\}) \cap x_0$, понеже знаем , че $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 = \emptyset$, следва че $Y' \cap x_0 = \emptyset$. Тогава Y' не е трансферзала за M , а това беше произволно собствено подмножество на Y , което значи че Y е минимална трансферзала за M .

Твърдение1. Няколко еквивалентности:

Нека Y е трансферзала за множество от множества M .

$$(I) \forall Y'(Y' \subseteq Y \text{ и } Y' \neq Y \rightarrow (\exists x \in M)(Y' \cap x = \emptyset));$$

$$(II) (\forall a \in Y)(\exists x \in M)((Y \setminus \{a\}) \cap x = \emptyset);$$

$$(III) (\forall a \in Y)(\exists x \in M)(Y \cap x = \{a\})$$

Твърденията са еквивалентни.

Доказателство:

(I) \rightarrow (II) и (II) \rightarrow (I):

С предходното твърдение доказахме еквивалентността на двете твърдения. (I) е дефиниция за минимална трансферзала, а (II) беше изпълнено тогава и само тогава когато (I) е изпълнено.

(II) \rightarrow (III):

Нека приемем че (II) е в сила. Тогава нека вземем произволно $a \in Y$. От (II) следва че $(\exists x \in M)((Y \setminus \{a\}) \cap x = \emptyset)$. Взимаме отново конкретно x_0 за което $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 = \emptyset$. Щом Y е трансферзала за M . $Y \cap x_0 \neq \emptyset$. Т.е има поне един елемент нека $b \in Y \cap x_0$. Тогава $b \in Y$ и $b \in x_0$, той е общ, щом е в сечението. Също така избрахме x_0 да е такова че $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 = \emptyset$, тогава $b \notin (Y \setminus \{a\}) \cap x_0$. но $b \in x_0$, тогава $b \notin (Y \setminus \{a\})$, но пък $b \in Y$, какво значи това. Значи че $b \in \{a\}$. но вътре има само елемента a , следователно $b=a$. Това беше обаче за някое произволно b което е във $Y \cap x_0$ тогава всеки произволен елемент на това множество е и елемент на $\{a\}$. Кое то преведено в езика на множества е $Y \cap x_0 \subseteq \{a\}$, възможни са две подмножества само на $\{a\}$, \emptyset и $\{a\}$, но Y е трансферзала за M , значи от $Y \cap x_0 \neq \emptyset$, остава $Y \cap x_0 = \{a\}$.

(III) \rightarrow (II):

Нека (III) е в сила. Нека отново вземем произволно $a \in Y$. От (III) имаме:
 $(\exists x \in M)(Y \cap x = \{a\})$. Нека вземем конкретно $x_0 \in M$ такова че $Y \cap x_0 = \{a\}$. Допускаме, че $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 \neq \emptyset$, ще се опитаме да стигнем до противоречие. Нека $b \in (Y \setminus \{a\}) \cap x_0$. защото сме допуснали че $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 \neq \emptyset$ ще имаме такъв елемент b . Тогава $b \in Y \setminus \{a\}$ и $b \in x_0$. Щом $b \in Y \setminus \{a\}$, имаме че и $b \in Y$ и също $b \notin \{a\}$. Така вторто можем да го гледаме като $b \neq a$. От $b \in Y$ и $b \in x_0$ следва че $b \in Y \cap x_0$, но от (III) имаме $Y \cap x_0 = \{a\}$, тогава $b \in \{a\}$ което е като да кажем $b=a$. Противоречие и това беше за произволно $a \in Y$. Готови сме.

Твърдение 2

Нека M е крайно множество от непразни множества. Тогава M има минимална трансферзала.

Има доста начина да се докаже , но единия начин ни дава ориентация за едно по-голямо твърдение и ще използваме само него;

Доказателство:

Първо БОО (Без ограничение на общността) ,можем да смятаме че $M \neq \emptyset$, защото в този случай имаме трансферзала която е $Y = \emptyset$, защо е трансферзала защото не можем да намерим контрапример за $x \in M$, за да покажем че не е. А защо е минимална , ами защото празното множество няма собствени подмножества.

Започваме доказателството, като си дефинираме едно крайно множество Y_0 което е трансферзала за M . Дефинираме го по следния начин:

По условията всяко $x \in M$ е непразно значи има поне един елемент. Трансферзалата $Y_0 \Rightarrow \{a_0, a_1, \dots, a_{t-1}\}$ като за крайното множество M , елементите ги означаваме с x_0, x_1, \dots, x_{t-1} и $a_0 \in x_0, a_1 \in x_1, \dots, a_{t-1} \in x_{t-1}$. Това е трансферзала за M , защото сечение със всяко множество ще даде точно конкретния елемент който сме взели по дефиницията на Y_0 . Сега дефинираме индуктивно редицата:

$Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \dots \supseteq Y_t$, като:

- Y_0 е дефинирано. (по-горе).

-Нека $n \leq t-1$ и Y_n е дефинирано и е трансферзала за M :

Дефинираме Y_{n+1}

$$Y_{n+1} \Rightarrow \begin{cases} Y_n \setminus \{a_n\} & \text{ако } Y_n \setminus \{a_n\} \text{ е трансферзала за } M \\ Y_n & \text{ако } Y_n \setminus \{a_n\} \text{ не е трансферзала за } M \end{cases}$$

Тогава редицата $Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \dots \supseteq Y_t$ е вярна и всяко едно е трансферзала за M .

За минимална трансферзала твърдим че Y_t е такава. Нека $a \in Y_t$, тогава $a = a_n$ за някое $n \leq t-1$. Тъй като $Y_{n+1} \supseteq Y_t$ има $a_n \in Y_{n+1}$. От дефиницията за Y_{n+1} заключаваме че $Y_{n+1} \neq Y_n \setminus \{a_n\}$ защото $a_n \in Y_{n+1}$ поради което влизаме в случая $Y_{n+1} = Y_n$ и $Y_n \setminus \{a_n\}$ не е трансферзала за M . Тогава за някое $x \in M$ имаме $(Y_n \setminus \{a_n\}) \cap x = \emptyset$, тогава от $Y_t \setminus \{a_n\} \subseteq Y_n \setminus \{a_n\}$ следва че $(Y_t \setminus \{a_n\}) \cap x = \emptyset$ и това е за $a = a_n$, значи $(Y_t \setminus \{a\}) \cap x = \emptyset$, и какво е това ами това (твърдение 1 / дефиниция (II)) за минимална трансферзала.

Твърдение 2

Нека M е фамилия от непразни крайни множества. M е най-много изброимо безкрайно множество. Тогава M има минимална трансферзала.

Доказателство:

Нека M е крайно, тогава използваме горното твърдение и следователно съществува минимална трансферзала за M . Ако пък M е изброимо безкрайно, използваме факта, че елементите на M са крайни множества. Тогава $Y_0 = \bigcup_{x \in M} x$ е изброимо (безкрайно) множество. Понеже вече знаем че Y_0 е трансферзала за M . Това е вече [разглеждано](#). Нека $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ е редица от всички елементи на Y_0 и елементите са два по два различни т.е $n_1 \neq n_2, a_{n_1} \neq a_{n_2}$. Отново индуктивно ще дефинираме редицата: $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}, \dots$ по следния начин:

Y_0 е дефинирано (видяхме го)

Нека за някое n , Y_n е дефинирано.

Дефинираме Y_{n+1} отново така:

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n \setminus \{a_n\} & \text{ако } Y_n \setminus \{a_n\} \text{ е трансферзала за } M \\ Y_n & \text{ако } Y_n \setminus \{a_n\} \text{ не е трансферзала за } M \end{cases}$$

Доказателство (Продължение):

Така с индукция относно n , и поради дефиницията на Y_{n+1} , заключаваме че:

* за всяко n , Y_n е трансферзала за M

* за всяко n , $Y_n \supseteq Y_{n+1}$

Точно както беше в горното доказателство, сега за произволни n и k , ако $n \leq k$, то $Y_n \supseteq Y_k$. Очевидно с нарастване на индекса в редицата или ще запазим трансферзалата или ще я намалим с 1 елемент. Така дефинирахме монотонно намаляваща редица:

$$Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$$

. Сега търсейки нещо минимално и чисто (както по виспа) търсим сечение на нещата, дефинираме:

$$Y = \bigcap_{n=0}^{\infty} Y_n$$

Сега за да докажем, че наистина е минимална трансферзала за M . Първо да се убедим че е трансферзала за M . Нека x е произволен елемент от M . Тогава следва че $x \in Y_0$, заради дефиницията на Y_0 и значи взимайки по-горе редицата на елементи на Y_0 : $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, там елементите на x , ще се срещат точно по веднъж. Това означава, че понеже x е крайно множество елементите са краен брой и в редицата ще се случи момент в който, от даден индекс нататък не можем да имаме повече елемент от x . С други думи: Съществува естествено число n_x , такова че $a_{n_x} \in x$, и за всяко $n > n_x$, $a_n \notin x$. Сега важното от тези заключения е следното:

В редицата

$$Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$$

Спираме се на елемента Y_{n_x} , щом направим само още една стъпка по дефиницията за Y_{n_x+1} , ще получим:

$$\begin{cases} Y_{n_x} \setminus \{a_{n_x}\} & \text{ако } Y_{n_x} \setminus \{a_{n_x}\} \text{ е трансферзала за } M \\ Y_{n_x} & \text{ако } Y_{n_x} \setminus \{a_{n_x}\} \text{ не е трансферзала за } M \end{cases}$$

Доказателство (Продължение 2):

И вече ако го махнем този елемент, привършваме елементите на x . Ако не го махнем, продължаваме и повече няма как да се опитаме да махнем елемент от x .

Така за всяко $n > n_x + 1$ е валидно че: $Y_n \cap x = Y_{n_x+1} \cap x$. Защото както показахме, от там нагоре, няма какво да премахваме като елемент от x и затова се запазва сечението с повишаване на индекса, реално можем да махаме по 1 елемент да чистим постепенно от трансферзалите, но сме сигурни вече, че няма да махнем елемент на x . Така от това че редицата

$$Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$$

е монотонно намаляваща, можем да заключим следното:

$$\bigcap_{n=0}^{n_x+1} Y_n = Y_{n_x+1}$$

. Очевидно по-малките елементи по индекс, на редицата от трансферзали пазят повече непремахнати елементи от x , докато не стигнат Y_{n_x+1} където за последен път се опитваме да махнем елемент от x . Така можем да заключим следното

$$Y \cap x = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} Y_n \right) \cap x =$$

$$\left(\bigcap_{n=0}^{n_x+1} Y_n \cap \bigcap_{n=n_x+2}^{\infty} Y_n \right) \cap x =$$

$$(Y_{n_x+1} \cap \bigcap_{n=n_x+2}^{\infty} Y_n) \cap x =$$

$$(Y_{n_x+1} \cap x) \cap \bigcap_{n=n_x+2}^{\infty} (Y_n \cap x) =$$

припомняме си "за всяко $n > n_x + 1$ е валидно че: $Y_n \cap x = Y_{n_x+1} \cap x$ "

$$(Y_{n_x+1} \cap x) \cap \bigcap_{n=n_x+2}^{\infty} (Y_{n_x+1} \cap x) =$$

$(Y_{n_x+1} \cap x) \cap (Y_{n_x+1} \cap x) = Y_{n_x+1} \cap x$. Тогава понеже за всяко n , Y_n е трансферзала за M , и за произволно $x \in M$ имаме $Y_{n_x+1} \cap x \neq \emptyset$ точно от гаранцията че Y_{n_x+1} е трансферзала. Заключваме че $Y \cap x \neq \emptyset$. Т.е Y е трансферзала за M .

Доказателство (Продължение 3):

Сега дали е минимална тази трансферзала? Нека a е произволен елемент на Y , тогава този елемент a се среща веднъж в редицата a_0, a_1, \dots . Той е някой от тези, нека $a = a_n$. Понеже $Y \subseteq Y_{n+1}$, имаме $a_n \in Y_{n+1}$. Тогава сме във случая в който не сме махнали a_n , т.е. $Y_{n+1} \neq Y_n \setminus \{a_n\}$. Следователно $Y_{n+1} = Y_n$, тогава $Y_n \setminus \{a_n\}$ не е трансферзала за M . Което означава от **твърдение 1 (II)**. Съществува, нека вземем конкретно $x_0 \in M$, за което $(Y_n \setminus \{a_n\}) \cap x_0 = \emptyset$. Но $Y \subseteq Y_n$ тогава $Y \setminus \{a_n\} \subseteq Y_n \setminus \{a_n\}$, което значи че: $(Y \setminus \{a_n\}) \cap x_0 \subseteq (Y_n \setminus \{a_n\}) \cap x_0$, така $(Y \setminus \{a_n\}) \cap x_0 \subseteq \emptyset$ от което следва: $(Y \setminus \{a_n\}) \cap x_0 = \emptyset$, обаче понеже $a = a_n$, успяваме да стигнем до $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 = \emptyset$, това е за произволно a следователно имаме точно **твърдение 1 (II)** изпълнено, което значи че Y е минимална трансферзала за M .

4.1 Следва продължение..

5 References

*Лекции на проф. Тинко Тинчев (Информатика)

*<https://github.com/YanaRGeorgieva/Logic-programming>