Записки по Логическо Програмиране

Искендер Чобанов

19 април 2022 г.

Съдържание

Редакция:Новите дефиниции, важните твърдения, теореми и доказателства се заграждат в съответните кутии:

Дефинция:

Твърдение/Теорема/Лема

Доказателство:

1 Въведение

Започваме с основни дефиниции и техния смисъл:

Дефинция:

съждение - Някакво изказване, изречение от речта, което носи смисъл като истина или лъжа

преписва се вярностна стойност ,например:
¨ Днес вали дъжд ¨ - може да му съотвества стойност истина или лъжа
нека за удобство: истина ще записваме с И , лъжа с Л

Дефинция:

Съжденията ги разделяме на елементарно съждение и съставно съждение.

При елементарните съждения, не се интересуваме от структурата на съждението , оставяме неговата вярност да бъде определена от някого.
Например:
¨ Днес вали дъжд¨ ние можем да проверим и да кажем дали е истина или лъжа
¨ Има черна дупка на 3млн. светлинни години от нас ¨ това е елементарно съждение,на което ние, не можем да определим неговата вярност и тя се определя от някого,нещо разполагащо с тази информация.Разбира се е въпрос на гледна точка и ⌣ интерпретация ⌣ на нещата понякога.
При съставните съждения имаме съждения, които са образувани от елементарни съждения свързани с подходящите съждителни връзки.
съждителни връзки: отрицание , импликация , биимпликация , конюнкция , дизюнкция ....(има и още, но няма да представляват интерес за нас)
При използването на елементарни съждения и връзките образуваме съставни съждения , на които ще можем да разглеждаме вярност, без да сме ограничени от това кой разполага с информацията за конкретните елементарни съждения.
Например: ¨ Утре ще вали или (съждителна връзка-дизюнкция) няма да вали ¨ - това съставно съждение има стойност истина винаги.

1.1 Функции над съждения:

---

* Отрицание:

$$H_{\neg} : \{И, Л\} \longrightarrow \{И, Л\}$$

$$H_{\neg}(a) = \text{И} \overset{def}{\longleftrightarrow} a = \text{Л}$$

за а-съждение
сега защо функцията е от {И,Л} а взима съждения, защото сме се разбрали да разглеждаме съжденията като вярностни стойности , за да можем да дефинираме функции върху тях ,трябва да разполагаме с вярностните стойности, те в случая на елементарно съждение, не ни интересува конкретно стойността на съждение а, а това как, а се оценява от (някого който разполага с тази информация) и съответно спрямо тази оценка , каква оценка ни връща функцията.

---

* Конюнкция:

$$H_{\&} : \{\text{И}, \text{Л}\}^2 \longrightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$$

$$H_{\&}(a, b) = \text{И} \overset{def}{\longleftrightarrow} a = b = \text{И}$$

Най-често разглежданият смисъл в езика е : А и В , пример:
"Деро кара кола и кара бързо¨ - трябва и двете да са истина , има и случай обаче в който можем да разгледаме следните неща:
"Деро кара кола, а карането е бързо¨ - това също носи смисъла на конюнкция
"Деро кара кола, но бързо¨ - това също.
Но това ,че в езика използваме такива връзки , не означава че всички изречения с този тип връзки имат предвид конюнкция.Затова трябва да си избираме конкретни съждения и да разпознаваме структурите им. В езика има много моменти в които формалната логика се изкривява например:
"Мира се ожени и роди момче¨
"Мира роди момче и се ожени¨

От тук нататък се абстрахираме от съждителната логика в езика и философията и започваме да говорим само за формална логика.

---

* Дизюнкция:

$$H_{\vee} : \{\text{И}, \text{Л}\}^2 \longrightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$$

$$H_{\vee}(a, b) = \text{И} \overset{def}{\longleftrightarrow} \text{поне едното a или b} = \text{И}$$

не изглежда много неформално нека го направим формално:

$$H_{\vee}(a, b) = \text{Л} \overset{def}{\longleftrightarrow} a = b = \text{Л}$$

---

* Импликация:

$$H_{\Rightarrow} : \{\text{И}, \text{Л}\}^2 \longrightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$$

$$H_{\Rightarrow}(a, b) = \text{Л} \ \longleftrightarrow^{def} \ a = \text{И} \ , \ b = \text{Л}$$

---

* Еквивалентност (Биимпликация):

$$H_{\Leftrightarrow} : \{\text{И}, \text{Л}\}^2 \longrightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$$

$$H_{\Leftrightarrow}(a, b) = \text{И} \ \longleftrightarrow^{def} \ a = b$$

Така изчерпваме съждителните функции.Според теоремата на Бул ни бяха достатъчни две, примерно конюнкция и отрицание или дизюнкция и отрицание, но за по-интуитивна работа дефинираме тези горните.

1.2 Съждителни формули

Дефинция:

Азбука на съждителните променливи: PVAR - букви
Азбуката е най-много изброимо безкрайна.

Пример за PVAR : $P_1, P_2, ., P_n, ..$
Ще искаме да фиксираме азбука която да не е празна т.е $PVAR \neq \emptyset$

Дефинция:

Азбука на съжидтелните връзки: $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

$\neg$ -едноместна
$\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ - двуместни

Дефинция:

Азбука на помощните символи : ( ) , лява и дясна скоба.

Дефинция:

Формална дума: наричаме крайна редица от букви от съответните азбуки.

Дефинция:

Индуктивна дефиниция на съждителните формули над съждителните променливи:
- PVAR са еднобуквени съждителни формули
- Ако ϕ е съждителна формула то $\neg\phi$ е съждителна формула
- Ако ϕ_1 и ϕ_2 са съждителни формули, а τ е двуместна съждителна връзка , то $(\phi_1\tau\phi_2)$ е съждителна формула
- $\mathscr{F}or$ (PVAR) - множеството на съждителните формули над PVAR

Забележка по-дефиниция, формално се пише винаги φ има св. $\mathscr{P}$ със скобите, но за да се избегне претоварване на синтаксиса ще си позволяваме да третираме като верни изрази и без тях $(\phi \Rightarrow \varphi) \leftrightarrow \phi \Rightarrow \varphi$, ще внимаваме за приоритети за които ще поговорим по-късно. Но за сметка на това такива неща като

$$(\phi$$

или

$$\phi)$$

са грешни. Друго важно е, че различваме двойните черти, символите и единичните черти като единичните черти, използваме за доказателства, а двойните са функции (връзки) в синтактичното представяне на съждителни формули.

Принцип:

Индуктивен принцип за доказване на свойства на съждителни формули:
Нека $\mathscr{P}$ е свойство удволетворяващо следните условия:
* Съждителните променливи има св. $\mathscr{P}$
* ако φ има св. $\mathscr{P}$ то $\neg\varphi$ има св. $\mathscr{P}$
* ако ϕ_1 и ϕ_2 имат св. $\mathscr{P}$ то $(\phi_1\tau\phi_2)$ има св. $\mathscr{P}$
тогава всяка съждителна формула има св. $\mathscr{P}$

Наблюдение:
Ако ϕ е съждителна формула то е на лице един от тези три случая:
-ϕ е съждителна променлива.
-ϕ е $\neg\psi$ за ψ съждителна формула
-ϕ е $(\phi_1\tau\phi_2)$ за съждителни формули ϕ_1, ϕ_2 и τ съждителна връзка.

I. Не е възможно две да са едновременно изпълнени:
Ако ϕ е съждителна променлива и е изпълнен и втория случай то имаме отрицание и съждителна формула , не може да е съждителна променлива и да започва с отрицание. Ако е съждителна променлива и е изпълнен третия случай , то ще започваме със скоба и по същата причина, не може

двата случая да са изпълнени аналогично е , ако е изпълнен втория случай започваме с отрицание не можем да сме съждителна променлива и не можем да започваме със скоба. Синтактично ги сравняваме и проверката е тривиална.
II.За всяка съждителна формула е изпълнен поне един от трите случая:
Това се проверява с индукция относно построението на ϕ
Във всяка съждителна формула броя на левите скоби е равен на броя на десните скоби.
Ако е необходимо ще бъде добавено доказателство,подробно като изображение.

1.3 Еднозначен синтактичен анализ на съждителни функции

Тук ще разгледаме , значението на записването на съждителните формули , ще подсигурим еднозначност , и чак тогава ще можем да продължим с останалите дефиниции.
Нека първо се запознаем с няколко нови символа:

Дефинция:

$\eqcirc$ - графическо равно ,това е визуално равенство, две неща са графически равни когато изглеждат синтактично по един и същи начин.

Например 1+2 $\eqcirc$ 1+2 , но 1+2 $\not\eqcirc$ 2+1

Да не се заблуждава човек с означенията за формула, като кажем: $\varphi \eqcirc$??? , φ е просто означение за синтактичния израз, не е как той изглежда спрямо азбуките.

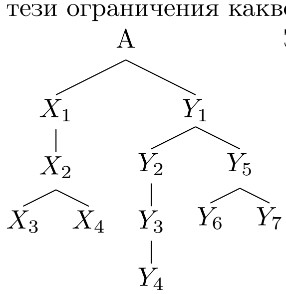
Дефинция:

$\rightleftharpoons$ или :=- равнао по дефиниция , присвояващо равно.

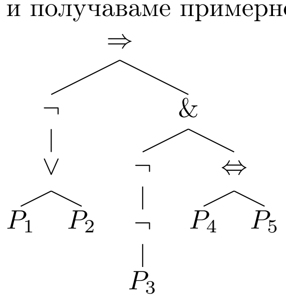
Сега се спираме на графическото равенство и искаме да докажем следното твърдение:

Ако ϕ е съждителна променлива и $\phi \eqcirc P$ то P е еднозначно определено.
(P е буква от азбуката PVAR)
Ако $\phi \eqcirc \neg\psi$, за ϕ, ψ -съждителни формули то ψ е еднозначно определено.
Какво значи еднозначно определено , означава, че ако $\phi \eqcirc \neg\psi$ и $\phi \eqcirc \neg\psi_1$ то следва че $\psi = \psi_1$
Ако $\phi \eqcirc (\phi_1 \tau \phi_2)$, за ϕ, ϕ_1, ϕ_2 - съждителни формули и τ-двуместна съждителна връзка , то ϕ_1, ϕ_2, τ са еднозначно определени.
Товя е валидно за всяка съждителна формула ϕ и зависимостите са изпълнени за единствени $\psi, \phi_1, \phi_2, \tau$

Дървовидно построение на съждителна формула:
Това е дърво за което са изпълнени следните ограничения:
-дървото е крайно
-индекс на разклонение ≤ 2
-с наредба на преките наследници на всеки връх
-етикетите са съждителни променливи или съжидтелни връзки
-етикетите по листата са съждителни променливи
-етикетите на върхове с един пряк наследник са $\neg$
-етикетите на върхове с два преки наследника са двуместни съждителни връзки
Нека сега с тези ограничения разгледаме дърво и да помислим спрямо тези ограничения какво трябва да стои като етикет на всеки връх:



Значи по листата само променливи можем да сложим:
При едноразклонените стои отрицание
При двойно разклонение слагаме някой двуместен съждителен символ (връзка)
и получаваме примерно дърво:



Линейно дървото се записва по следния начин:
$\neg(P_1 \vee P_2) \Rightarrow ((\neg\neg P_3)\&(P_4 \Leftrightarrow P_5))$

Пояснение/Твърдение:

На всяка съждителна формула съотвества дървовидно построение и на всяко дървовидно построение съотвества съждтелна формула (еднозначно). В дървото, етикета в корена се нарича главна съждителна връзка , в нашия случай: $\Rightarrow$

Еднозначен синтактичен анализ е важен , защото можем да дефинираме рекурсивно функции.
Нека f е функция дефинирана за всички съждителни променливи (dom(f)=PVAR),
тогава f може да се разшири до функция с dom(f)=$\mathscr{F}or(PVAR)$,те функция над всички съждителни формули над PVAR.
Нека разширението е $\overline{f}$ и се дефинира:

$$\overline{f}(P) = f(P)$$

$$\overline{f}(\neg\varphi) = \overline{H_\neg}(\overline{f}(\varphi))$$

$$\overline{f}((\varphi_1\tau\varphi_2)) = \overline{H_\tau}(\overline{f}(\varphi_1), \overline{f}(\varphi_2))$$

Това разширение е еднозначно дефинирано при зададени

$$\overline{H_\neg}, \overline{H_\tau}$$

Разбираме се да се абстрахираме от скоби тогава и само тогава когато знаем приоритетите на съждителните връзки:
Най-висок : $\neg$
После : $\vee, \&$
Накрая: $\Leftrightarrow, \Rightarrow$

1.4 Семантика на съждителните формули

Оценка / Интерпретация на съждителни формули .
Оценката (или Интерпретарцията) е булева оценка която е изображение:
$I : PVAR \longrightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$
Всяка булева оценка I , може еднозначно да се разшири, до функция $\overline{I}$ на множество от съждителни променливи така че:

$$\overline{I}(P) = I(P)$$

$$\overline{I}(\neg\varphi) = H_\neg(\overline{I}(\varphi))$$

$$\overline{I}((\varphi_1\tau\varphi_2)) = H_\tau(\overline{I}(\varphi_1), \overline{I}(\varphi_2))$$

$\overline{I}(\varphi)$ се нарича стойност на φ при булева интерпретация, I записва се още $||\varphi||^I$
Нека I е булева интепретация ако I(φ)=И , ще казваме, че I е модел за φ или φ е вярна (съждителна формула) при I (булева интерпретация)
Ако пък I(φ)=Л , I не е модел за φ или φ не е вярна при I , или φ се опровергава при I. При модел имаме символа: $\models$
I $\models \varphi$ - I е модел за φ
I $\not\models \varphi$ - I не е модел за φ
Имаме следствието което следва директно от дефиницията на $H_\neg$

$$I \models \neg\varphi \leftrightarrow I \not\models \varphi$$

идва от

$$H_\neg(I(\varphi)) = \text{И} \leftrightarrow I(\varphi) = \text{Л}, I \not\models \varphi$$

1.5 Изпълнимост

Дефинция:

Съждителна формула φ - наричаме изпълнима, ако съществува булева интерпретация I , такава че $I \models \varphi$.
Ако φ няма модели , т.е за всяка булева интерпретация е изпълнено I(φ)=Л или ($I \not\models \varphi$) то съждителната формула не е изпълнима.

Съждителни формули , ще наричаме само формули вече:

формулите които са верни при всяка булева интерпретация се наричат съждителни тавтологии.
пример за такава е

$$\varphi \vee \neg\varphi$$

тавтологиите означаваме с $\models \varphi$

Твърдение:

Нека φ е формула , всеки път, когато I_1, I_2 са булеви интерпретации, такива че за всяка съждителна променлива P участваща във φ е изпълнено $I_1(P) = I_2(P)$,то е в сила $I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$

Доказателство:

Доказателството е индукция по построението. Защо , защото сме казали ,че φ е формула , нека да се върнем на индуктивната дефиниция на съждителна формула, а също и наблюдението , следствие... Така доказвайки за всеки възможен случай за съждителна формула ,че е изпълнено твърдението доказваме и самото твърдение:
*Първи случай $\varphi \rightleftharpoons P \in PVAR$, формулата ни е само една съждителна променлива, Тогава нека $I_1(Q) = I_2(Q)$ за всяко $Q \in PVARS$ и участваща във φ , но единствената променлива участваща във φ е P , следователно е изпълнено $I_1(P) = I_2(P)$ от което следва $I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$
*Втори случай $\varphi \rightleftharpoons \neg\varphi_1$ и приемаме , че твърдението е вярно за φ_1.Нека имаме булевите интерпретации I_1 и I_2 и за всяка съждителна променлива P участваща във φ имаме $I_1(P) = I_2(P)$. Тогава за всяка съждителна променлива Q участваща във φ_1 имаме $I_1(Q) = I_2(Q)$, но с какво се различават φ и φ_1, с един символ, който не е съждителна променлива.Една стъпка ни дели от това което искаме. Използваме индуктивното предположение за φ_1 и получаваме $I_1(\varphi_1) = I_2(\varphi_1)$, Но сега ние помним дефиниция на $H_\neg$
Следователно:

$$H_\neg(I_1(\varphi_1))$$

използваме $I_1(\varphi_1) = I_2(\varphi_1)$ от предположението и получаваме:

$$H_\neg(I_1(\varphi_1)) = H_\neg(I_2(\varphi_1))$$

от дефиниция на $H_\neg$ получаваме:

$$I_1(\neg\varphi_1) = I_2(\neg\varphi_1)$$

заместваме $\varphi \rightleftharpoons \neg\varphi_1$ и накрая получаваме търсеното:

$$I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$$

* Трети случай $\varphi = (\phi_1 \tau \phi_2)$, τ-съждителна връзка , а ϕ_1 и ϕ_2 са съждителни формули, за които твърдението е изпълнено. Отново се сещаме вече как да продължим:
Нека I_1 и I_2 са булеви интерпретации, такива че за всяка съждителна променлива Q- участваща във φ е изъплнено $I_1(Q) = I_2(Q)$. Ако една съждителна променлива , участва във ϕ_1 или ϕ_2 ,то тя участва в $(\phi_1 \tau \phi_2)$ значи и във φ, за всяка съждителна променлива която участва във ϕ_1 или ϕ_2 имаме изпълнено $I_1(Q) = I_2(Q)$, поради което имаме $I_1(\phi_1) = I_2(\phi_1)$ и $I_1(\phi_2) = I_2(\phi_2)$, отново разглеждаме този път третате дефиниция дефиниция на H_τ и получаваме аналогично:

$$H_\tau(I_1(\phi_1), I_1(\phi_2)) = H_\tau(I_2(\phi_1), I_2(\phi_2))$$

от което получаваме и желаното:

$$I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$$

. $\square$

Сега припомняме си

$$I \models \neg\varphi \leftrightarrow I \not\models \varphi$$

Тогава можем ли да твърдим че:

$$\neg\varphi \text{ е неизпълномо} \leftrightarrow \models \varphi$$

Т.е разпознаване на тавтологии, една съждителна формула φ е тавтология тогава и само тогава когато , не съществува модел за $\neg\varphi$

$$\rightarrow$$

Ако $\neg\varphi$ е неизпълнимо , то за всяка булева интерпретация I, следва че I($\neg\varphi$)=Л , което пък от своя страна означава, че $H_{\neg}(I(\varphi))$=Л , от тук следва ,че I(φ) =И , и това за всяка булева интерпретация I.Това разсъждение е приложимо и в обратната посока.

Дефинция:

Нека Δ - множество от съждителни формули, Δ е изпълнимо, ако има булева интерпретация I при която са верни всички съждителни формули от Δ.
Интерпретации при които са верни всички съждителни формули от Δ наричаме модели на Δ.

Т.е има булева интерпретация I , такава че за всяка $\varphi \in \Delta$ следва че $I \models \varphi$.
Всяка формула от делта може да е изпълнима за интерпретация , но да не съществува конкретна която едновременно да изпълнява всички, например: $\Delta = \{P, \neg P\}$ няма интерпретация която едновременно да е модел за всяка формула от Δ
φ е изпълнима / неизпълнима $\leftrightarrow$ $\{\varphi\}$ е изпълномо / неизпълнимо

Ако $\Delta \subseteq \Delta_1$ и делта Δ_1 е изпълнимо тогава Δ е изпълнимо.
вече ще записваме така:

$$I \models \Delta_1 \rightarrow I \models \Delta$$

Защото интерпретацията модел на Δ_1 е валидна интерпретация за модел за Δ, а такава съществува понеже Δ_1 е изпълнимо.
Аналогично ако Δ е неизпълнимо то, нямаме булева интерпретация която да е модел за Δ не можем да разширим никоя до модел на Δ_1

Нека Δ е крайно множество от съждителни формули. Тогава имаме следното разсъждение:
Ако делта е крайно множество от формули $\Delta = \{\phi_1, .., \phi_n\}$ за n-естествено число.Тогава формулата $\varphi_\Delta = \phi_1 \& (\phi_2 \& .. \& (\phi_{n-1} \& \phi_n))$, конюнкция на всички формули, тогава:

$$I \models \Delta \leftrightarrow I \models \varphi_\Delta$$

В следствие Δ е изпълномо $\leftrightarrow \varphi_\Delta$ е изпълнимо.

1.6 Логическо следване

Нека Δ е множество от съждителни формули , казваме че φ логически следва от Δ , ако всеки модел на Δ е модел на φ.
Означава се $\Delta \models \varphi$.

Тогава $\Delta \not\models \varphi$ ако съществува модел за Δ $(I \models \Delta)$,който не е модел за φ. $(I \not\models \varphi)$.

Твърдение

Ако Δ е неизпълнимо ,тогава за всяка формула φ следва че $\Delta \models \varphi$

Доказателство:

Нека делта е неизпълнимо, Допускаме , че $\Delta \not\models \varphi$, значи съществува булева интерпретация, $I_0 \models \Delta$ и I_0 не е модел за φ, но как ще съществува като Δ е неизпълнимо , противоречие.
Нека $\models \varphi$. Тогава всяко множество $\Delta \models \varphi$
Реално ако Δ е неизпълнимо, то няма какъв модел за Δ да покажем , такъв че да не е модел за φ

$\emptyset$-празното множество има за модели всички булеви интерпретации.
Защо с празното множество се случват такива неща, ами по дефиницията за модел на множество от формули, избираме произволна булева интерпретация, тя дали е модел за всяка съждителна формула от празното множество. Това е въпрос от вида: Изпълнено ли е свойство P за всеки елемент от множество M?
Нека го формулираме като съждение:
За всяко x принадлежащо на M е вярно свойство P.
Нека приемем, че това е истина.
Отрицанието на това твърдение ще бъде:
Съществува x прнаджлежащо на M за което свойство P не е вярно.
Тоест понеже в празното множество не съществуват елементи, няма такова съществуващо x от M за което P да не е вярно, следователно отрицанието е Л което означава ,че оригиналното твърдение е И.

Нека сега разгледаме логическо следване на формули:

Твърдение

Нека от $\varphi \models \psi$, като φ е изпълнима , а $\not\models \psi$.Тогава имаме съждителна променлива P, която участва и във φ и във ψ

Това е логическо следване по нетривиални причини, при тавтология ψ всяка булева интерпретация е модел за ψ , при φ неизпълнима , означава че не съществува булева интерпретация която да е модел за φ което означава ,че не съществува интерпретация която да е модел за $\Delta = \{\varphi\}$, но ние имаме твърдението , от което следва ,че $\Delta \models \psi$.
Така тези условия горе ни гарантират ,че не сме в тривиалните случаи.

Доказателство:

Нека $\varphi \models \psi$, като φ е изпълнима , а $\not\models \psi$, допускаме че φ и ψ нямат общи променливи, тогава всеки път когато P -съждителна променлива участва във φ то следва ,че P не участва във ψ.Понеже φ е изпълнима изибираме си I_0 булева интерпретация , такава че $I_0 \models \varphi$ избираме булева интерпретация I_1 такава че $I_1 \not\models \psi$ понеже ψ не е тавтология имаме такава, дефинираме си интерпретация J такава че: $J(Q) = \begin{cases} I_0(Q) & \text{ако } Q \text{ участва във } \varphi \\ I_1(Q) & \text{ако } Q \text{ не участва във } \varphi \end{cases}$
Нека P участва във φ , тогава J(P)=I_0(P) следователно J(φ)=$I_0(\varphi)$=И , защото избрахме $I_0 \models \varphi$
Нека P участва във ψ , тогава P не участва във φ , тогава J(P)=$I_1(P)$, значи е изпълнено J(ψ)=$I_1(\psi)$=Л , защото избрахме $I_1 \not\models \psi$, така имаме че $\varphi \models \psi$ от приемането с нека, което ни казва ,че всяка интерпретация която е модел за φ е модел за ψ , но J е контрапример за интерпретация модел за φ която не е модел за ψ , следователно φ и ψ имат поне една обща съждителна променлива.

Имаме и следното твърдение:

$$\emptyset \models \varphi \leftrightarrow \models \varphi$$

Вече знаем, всяка булева интерпретация е модел за празното множество, от това следва , че празното множество е винаги изпълнимо от всички булеви интерпретации, тогава автоматично следва ,че всяка булева интерпретация е модел и за φ,а от това ,че φ е тавтология следва , че за всяка булева интерпретация , тя е модел за φ , разбира се ние сме длъжни по дефиницията , ако някое множество от съждителни формули , има модел и имаме логическа изводимост на формула, то за всяка интерпретация която е модел на това множество трябва да е и модел за φ , но всички интерпретации са модел за φ което значи че можем да заключим че $\emptyset \models \varphi$.

$$\varphi \in \Delta \rightarrow \Delta \models \varphi$$

Твърдение

$$\Delta, \Gamma \text{ множества от формули такива че всеки път когато}, \psi \in \Gamma$$

следва

$$\Delta \models \psi$$

Ако $\Gamma \models \varphi$ то $\Delta \models \varphi$

Доказателство:

Нека всеки път когато $\psi \in \Gamma$ имаме $\Delta \models \psi$,Нека $\Gamma \models \varphi$, тогава избираме булева интерпретация I която е модел за Δ , и така всеки път когато $\psi \in \Gamma$ имаме $I \models \psi$, защото $\Delta \models \psi$, следователно $I \models \Gamma$, но понеже $\Gamma \models \varphi$ следва че $I \models \varphi$. Така всяка булева интерпретация която е модел за Δ е модел и за φ
Това свойство се нарича обобщена транзитивност:

1.7 Семантична дедукция

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi \leftrightarrow \Gamma, \varphi \models \psi$$

Което е същото като :

$$\Gamma, \varphi \models \psi \leftrightarrow \Gamma \models \varphi \implies \psi$$

Забележка: това е нова формула

$$\varphi \implies \psi$$

Доказателство:

$$\rightarrow$$

$$\Gamma, \varphi \models \psi$$

Нека I е произволен модел на Γ.
(1сл.) При I(φ) = И , тогава I е модел за $\Gamma \cup \{\varphi\}$ и тъй като $\Gamma, \varphi \models \psi$ имаме , че $I \models \psi$ тогава $H_{\Rightarrow}(I(\varphi), I(\psi)) =$ И Тогава $I \models \varphi \implies \psi$
(2сл.) I(φ)=Л , тогава $H_{\Rightarrow}($Л$, I(\psi))$ = И, но това значи че предпоставката в импликация е лъжа т,е импликацията е истина: значи $I \models \varphi \implies \psi$.
Така понеже и в двата възможни случая имаме истина , пък и I е произволен модел на Γ от което следва че $\Gamma \models \varphi \implies \psi$

$$\leftarrow$$

Нека $\Gamma \models \varphi \implies \psi$, и нека I е модел на $\Gamma \cup \{\varphi\}$, тогава $I \models \Gamma$ и $I \models \{\varphi\}$, значи I(φ)= И.От I модел за Γ и от $\Gamma \models \varphi \implies \psi$ получаваме че $I \models \varphi \implies \psi$, т.е $H_{\Rightarrow}(I(\varphi), I(\psi))$=И=$I(\varphi \implies \psi)$ тогава I(ψ)=И , следователно $I \models \psi$, следователно $\Gamma, \varphi \models \psi$

$\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ - неизпълнимо
Това е полезно за метода за логическа изводимост, с еизпълнимост ще решим проблема , кога можем да търсим решение (до безкрайност при необходимост) и кога няма решение изводимостта.

$$\rightarrow$$

Нека $\Gamma \models \varphi$, да допуснем ,че $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е изпълнимо.Тогава нека I е модел за $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ тогава значи $I \models \Gamma$ и $I \models \neg\varphi$ което е същото като $I \not\models \varphi$, от $\Gamma \models \varphi$ следва че $I \models \varphi$, но така получаваме противоречние значи $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е незипълнимо.

$$\leftarrow$$

Нека $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизпълнимо, нека I е произволен модел на Γ , тогава:
(1сл.) Ако I(φ)=Л , тогава I($\neg\varphi$)=И , тогава значи $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е изпълнимо, защото I става модел за $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ протвиоречие.
(2сл.) I(φ) = И тогава $I \models \varphi$, тогава всеки модел на Γ е и модел за φ , което означава ,че $\Gamma \models \varphi$

$$\rightarrow$$

2 Логически еквивалентни формули

Започваме с дефиниция за логическа еквивалентност:

Дефиниция:

$$\phi, \psi \text{ са съждителни формули, казваме, че } \phi, \psi$$

$$\text{са логически еквивалентни (означава се } \phi \models\mid \psi\text{),}$$

$$\text{ако за всяка булева интерпретация } I, I(\phi) = I(\psi).$$

Реално очевидно е следното и по-интуитивно като дефиниция:

$$\phi \models\mid \psi \leftrightarrow \phi \models \psi, \psi \models \phi$$

още едно свойство

$$\phi \models\mid \psi \leftrightarrow \models \phi \iff \psi$$

Това са условия, за да кажем ,че две формули са логически еквивалентни. Още няколко свойства:

$$- \;\; \phi \models\mid \psi \to \neg\phi \models\mid \neg\psi$$

$$- \;\; \phi_1 \models\mid \psi_1 \text{ и } \phi_2 \models\mid \psi_2 \to$$

$$(\phi_1 \tau \phi_1) \models\mid (\psi_2 \tau \psi_2)$$

за τ съждителна връзка.
За последното свойство ще се опитаме да го докажем , защото не е толкова очевидно.

Нека I е произволна булева интерпретация.Тогава от $\phi_1 \models\mid \psi_1$ следва ,че I(ϕ_1)=I(ψ_1) и аналогично от $\phi_2 \models\mid \psi_2$ следва ,че I(ϕ_2)=I(ψ_2). Така вече можем да разгледаме функцията на τ, а именно
$I((\phi_1 \tau \phi_1))) = H_\tau(I(\phi_1), I(\phi_2))$ което от своя страна чрез заместването с оценките получаваме $H_\tau(I(\psi_1), I(\psi_2))$ което е точно като оценката $I((\psi_2 \tau \psi_2))$ така получаваме ,че всяка произволна булева интерпретация на $(\phi_1 \tau \phi_1)$ дава същата оценка каквато и $(\psi_2 \tau \psi_2)$.

$$\square$$

Споменаваме ,че логическата еквивалентност е релация на еквивалентност в множеството от логически формули. Т.е рефлексивност , симетричност и транзитивност са изпълнени за нея.

Познати свойства от дискретната математика.

$$-\phi \implies \psi \models\mid \neg\phi \vee \psi$$

$$-\phi \iff \psi \models\mid (\phi \implies \psi)\&(\psi \implies \psi)$$

$$-\phi \vee \phi \models\mid \phi$$

$$-\phi\&\phi \models\mid \phi$$

$$-\phi \vee \psi \models\!\!\!\!\!= \psi \vee \phi$$

$$-\phi \& \psi \models\!\!\!\!\!= \psi \& \phi$$

$$-\phi \vee (\psi \vee \chi) \models\!\!\!\!\!= (\phi \vee \psi) \vee \chi$$

$$-\phi \& (\psi \& \chi) \models\!\!\!\!\!= (\phi \& \psi) \& \chi$$

$$-\phi \& (\psi \vee \chi) \models\!\!\!\!\!= (\phi \& \psi) \vee (\phi \& \chi)$$

$$-\phi \vee (\psi \& \chi) \models\!\!\!\!\!= (\phi \vee \psi) \& (\phi \vee \chi)$$

$$-\neg(\phi \& \psi) \models\!\!\!\!\!= \neg\phi \vee \neg\psi$$

$$-\neg(\phi \vee \psi) \models\!\!\!\!\!= \neg\phi \& \neg\psi$$

$$-\neg\neg\phi \models\!\!\!\!\!= \phi$$

Това е полезно после при съждителната резолюция, защото интересувайки се от логически еквивалентни формули, се абстрахираме от синткасиса , както в началото гледахме еднозначния синтактичен анализ на думите, отностно синтаксис има значение как са представени формулите , от гледна точка на логическа еквивалентност , ако две формули са логически еквивалентни няма.
При нужда от константите И и Л , не можем да използваме директно оценките, трябва да са под формата на логически формули , разбира се ние имаме примери вече за тавтологии и противоречия използваме примерно тях и ги номерираме, както ние си решим.Ето пример за константите:

$$P_0 \& \neg P_0 \models\!\!\!\!\!= f$$

$$P_0 \vee \neg P_0 \models\!\!\!\!\!= t$$

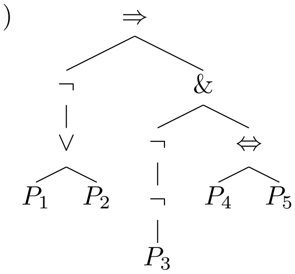
2.1 Подформула

Дефинция:

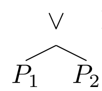
Подформула означава синтактичен (инфикс) ,една дума да е поддума на друга дума.

Нека ψ подформула на ϕ и гледаме специфично участие $\phi = \alpha\psi\beta$,
Нека ϕ, ψ - са съждителни формули и $\phi = \alpha\psi\beta$. Нека ψ' е съжидтелна формула. Тогава думата $\alpha\psi'\beta$ също е формула.
Това твърдение ще го покажа по-скоро със синтактично дърво и идеята зад него преди да продължим нататък:

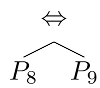
Нека $\phi = \neg(P_1 \vee P_2) \Rightarrow ((\neg\neg P_3)\&(P_4 \Leftrightarrow P_5))$



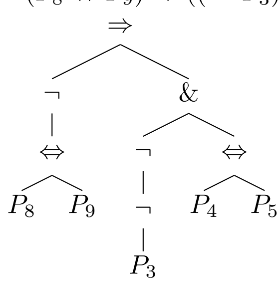
Тогава какво правим, избираме си частича, която да е също съждителна формула.Например:
$\psi = (P_1 \vee P_2)$, ами това е тази част от дървото:



Нека сега си направим собствена съждителна формула: $\psi' = (P_8 \Leftrightarrow P_9)$ тя изглежда така:



Сега изрязваме старата и слепваме новата и получаваме:
$\neg(P_8 \Leftrightarrow P_9) \Rightarrow ((\neg\neg P_3)\&(P_4 \Leftrightarrow P_5))$



Нека ϕ' е получена от ϕ при заместване на някое участие ψ във ϕ със ψ'. По друг начин изразени ϕ и ϕ'

$$\phi = \alpha\psi\beta$$

$$\phi' = \alpha\psi'\beta$$

Нека I е булева интерпретация , ако $I(\psi) = I(\psi')$, то $I(\phi) = I(\phi')$

Доказателство:

Индукция относно построението (благодарение на еднозначния синтактичен анализ знаем, че имаме точно 3 случая на структуриране на формула.)

$$* \ \phi \eqcirc P$$

тогава структурата е $\alpha = \beta = \epsilon$, и $\psi \eqcirc P$, това значи ,че $\phi' = \alpha\psi'\beta = \psi'$, Тъй като $I(\psi) = I(\psi') = I(\phi')$ тогава значи $I(\phi) = I(P) = I(\psi) = I(\psi') = I(\phi')$ от което автоматично се вижда че $I(\phi) = I(\phi')$

$$* \ \phi \eqcirc \neg\phi_1$$

Приемаме ,че твърдението е вярно за ϕ_1
(1сл.) $\alpha = \beta = \epsilon$ и така понеже е съждителна формула ψ, значи $\phi \eqcirc \psi$, а тогава заместването $\phi' = \psi'$ и значи пак имаме $I(\phi) = I(\psi) = I(\psi') = I(\phi')$
(2сл.) $\phi \eqcirc \neg\alpha_1\psi\beta$ Тогава вида на ϕ_1 е $\phi_1 = \alpha_1\psi\beta$, и от индуктивното предположение имаме $I(\phi_1) = I(\phi_1')$ които разложени изглеждат така: $I(\alpha_1\psi\beta) = I(\alpha_1\psi'\beta)$, което значи че при $I(\phi) = H_\neg(I(\phi_1)) = H_\neg(I(\alpha_1\psi\beta)) =^{\text{предположението}}= H_\neg(I(\alpha_1\psi'\beta)) = I(\neg\alpha_1\psi'\beta) = I(\phi')$

В това доказателство използваме $\alpha = \neg\alpha_1$ фактически покриваме множество от случаи с това доказателство...
Например два случая да разгледаме $\alpha_1 = \epsilon$ и $\beta = \epsilon$ тогава вида ще бъде: $\phi = \neg\psi$, но в случая когато α_1 е част от дума например

$$\alpha_1 = (P \vee$$

и

$$\beta =)$$

имаме израз от вида $\phi \eqcirc \neg(P \vee \psi)$

$$\phi \eqcirc (\phi_1\tau\phi_2)$$

(1сл.) $\alpha = \beta = \epsilon$ разбира се получаваме структурата $\phi = \psi$ този случай вече е поркит.
(2сл.) $\alpha \neq \epsilon$ трябва α да поеме определен брой (поне 1) символи , което понеже искаме ψ също да е формула принуждава $\beta \neq \epsilon$ защото алфа ще изяде минимум 1 скоба, която бета трябва да изплюе после. тогава разглеждайки случая когато $\alpha = (\alpha_1$, $\beta = \beta_1\tau\phi_2)$

$$\phi_1 = \alpha_1\psi\beta_1$$

нали от структурата имаме:

$$\phi \eqcirc (\phi_1\tau\phi_2)$$

тогава по заместване във ϕ_1 срещането на ψ със ψ' получаваме:

$$\phi' \eqcirc (\alpha_1\psi'\beta_1\tau\phi_2)$$

и от предположението имаме:

$$I(\alpha_1\psi\beta_1) = I(\alpha_1\psi'\beta)$$

така

$$I(\phi) = H_\tau(I(\alpha_1\psi\beta_1), I(\phi_2)) = H_\tau(I(\alpha_1\psi'\beta_1), I(\phi_2)) = I((\alpha_1\psi'\beta_1\tau\phi_2)) = I(\phi')$$

Още един случай вече в който $\alpha = (\phi_1\tau\alpha_1, \beta = \beta_1)$ така разглеждаме $\phi_2 = \alpha_1\psi\beta_1$, отново правим същото:

$$I(\alpha_1\psi\beta_1) = I(\alpha_1\psi'\beta)$$

така

$$I(\phi) = H_\tau(I(\phi_1), I(\alpha_1\psi\beta_1)) = H_\tau(I(\phi_1), I(\alpha_1\psi'\beta_1),) = I((\phi_1\tau\alpha_1\psi'\beta_1)) = I(\phi')$$

2.2 Теорема за еквивалентна замяна

Нека ϕ' е получена от ϕ при заместване на някое участие ψ във ϕ със ψ' , Ако $\psi \models\mathrel{\mkern-9mu}\models \psi'$ то следва $\phi \models\mathrel{\mkern-9mu}\models \phi'$ Съгласно предното твърдение, имаме директно доказателство за теоремата.

За всяка съждителна формула ϕ алгоритмично можем да намерим формула ϕ' такава че $\phi \models\mathrel{\mkern-9mu}\models \phi'$ и във ϕ' не се срещат импликации и еквивалентности:
Идеята е да използваме , факта ,че можем да заместим формула с формула и да използваме следните твърдения от еквивалентността , а именно:

$$-\phi \implies \psi \models\mathrel{\mkern-9mu}\models \neg\phi \vee \psi$$
$$-\phi \iff \psi \models\mathrel{\mkern-9mu}\models (\phi \implies \psi)\&(\psi \implies \psi)$$

---

3 Съждителна резолюция

Дефинция:

Нека дефинираме литерал (ще записваме L):
Литерал наричаме съждителна променлива P или отрицание на съждителна променлива $\neg P$

Поради тази дефиниция, трябва да внимаваме:
* Ако L=P (т.е литералът е съждителна променлива) , то $\neg L = \neg P$ отрицанието му също е литерал.
* Ако $L = \neg P$ (т.е литералът е отрицание на съждителна променлива), то $\neg L = \neg(\neg P)$, това вече е отрицане на съждителна формула, не на променлива и следователно не отговаря на дефиницията за литерал.

Дефинция:

Въвеждаме понятието: Дуален литерал и го означаваме L^δ
Дуалният литерал се дефинира по следния начин: $L^\delta \quad =$
$$\begin{cases} \neg P & ,\text{ако } L = P \\ P & ,\text{ако } L = \neg P \end{cases}$$

Както виждаме L и L^δ са взаимно противоположни, и се наричат контрерна двойка.

Дефинция:

Елементарна дизюнкция:
Формула от вида $L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_n$, $n \geq 1$, където $L_1, L_2, ..., L_n$- са литерали.
Индуктивната дефиниция е следната:
- ако L е литерал, то L е елементарна дизюнкция | както в нашия случай покриваме с n=1
-ако E е елементарна дизюнкция, а L е литерал ,то (E ∨ L) е елементарна дизюнкция.

с втората част градим елементарната дизюнкиця , стъпка по стъпка.
Формално дали $(E_1 \vee E_2)$ е елементарна дизюнкция ако E_1, E_2 са елементарни дизюнкции, ами формално синтактично не са, но логически са еквивалентни на елементарна дизюнкция с цялостно абстрахиране от структурата със скобите.
Нека I е булева интерпретация, а $L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_n$ е елементарна дизюнкция. Тогава:

$$I \models L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_n \leftrightarrow \text{за някое } i, 1 \leq i \leq n, I \models L_i$$

Разбира се дизюнкцията логически се интересува от поне една стойност която да е истина (при конкретната булева интерпретация) , тогава понеже всеки литерал е свързан с дизюнкция , поне един за който I е модел , ще направи логически стойността на цялата формула истина при тази интерпретация.

Дефинция:

Конюнкция на елементарни дизюнкции: Дефиницията е аналогична структура като тази на елементарната дизюнкция. Тук градивните елементи са елементарни дизюнкции (E).
Формула от вида $E_1 \& E_2 \& ... \& E_k$, $k \geq 1$, наричаме конюнкция на елементарни дизюнкции и индуктивната дефиниция:
- ако E е елементарна дизюнкция , то E е конюнкция на елементарни дизюнкции.
- ако K е конюнкция на елементарни дизюнкции, и E е елементарна дизюнкция , то $(K \& E)$ е конюнкция на елементарни дизюнкции.
Щом твърдението за дизюнкция изискваше поне един литерал, тук при конюнкция изискваме всички елементарни дизюнкции да бъдат верни при булевата интерпретация:
Нека I е булева интерпретация, а $E_1 \& E_2 \& ... \& E_k$ е конюнкция на елементарни дизюнкции. Тогава:

$$I \models E_1 \& E_2 \& ... \& E_k \leftrightarrow \text{за всяко } i, 1 \leq i \leq k, I \models E_i$$

3.1 Конюнктивна нормална форма

За една съждителна формула ψ казваме ,че е във конюнктивна нормална форма ако е представена като конюнкция от елементарни дизюнкции.

В дискретната математика:
Конюнктивна нормална форма е конюнкция от елементарни дизюнкции.Елементарна дизюнкция е дизюнкция , чиито членове са оделни променливи или техните отрицания.
-Цитат от записки по дискретна математика / математическа логика (док. Д. Кралчев).

Двете дефиниции са еквивалентни логически , в нашия случай сме малко по-ограничени от към специфика в синтактиса поради индуктивните дефиниции.

3.2 Съждителни дизюнкти.Множества от съждителни дизюнкти

Тук вече поради проблемите с които се срещаме заради синтаксис , структури , повторения на литерали и т,н. Ще се опитаме да сведем разглеждането на елементарни дизюнкции и конюнкции от елементарни дизюнкции до множества, Дефинция:

Дизюнкт (D) - наричаме крайно множество от литерали. На всеки елементарен дизюнкт съответства елементарна дизюнкция. Ако елементарната дизюнкция е изградена от n на брой литерали , тогава дизюнкта който съответства ще има $\leq\ n$ на брой литерали, защото елеменинира повторенията, едно от готините свойства на множество.Другото готино свойство е , че вече синтаксиса не е от значение , при положение ,че нямаме наредба в множеството. Обратно на всеки непразен дизюнкт съотвества елементарна дизюнкция. Като за структура можем да изберем конкретна пермутация на разместване на литералите от дизюнкта.Хайде примерче:
Нека $E = L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_n$, $n \geq 1$ тогава съотвества дизюнкт $D = \{L_1, L_2, ..., L_n\}$, |D|$\leq\ n$. Обратно $D = \{L_1, L_2, ..., L_n\}$ съотвества $E = L_{i_1} \vee L_{i_2} \vee ... \vee L_{i_n}$, $i_1, .., i_n$ е пермутация на 1,2,..,n. Така вече за целите ни, понеже се интересуваме от вярността на елементарна дизюнкция можем да използваме дизюнкт.

$I \models D \leftrightarrow^{def}$ има литерал $L, L \in D,$ и Какво се случва с празния дизюнкт? Ами за него не съществува булева интерпретация I която да е модел за празния дизюнкт, защо поради същата причина поради която, всяка булева интерпретация е модел за празното множество от съждителни формули, Ние искаме да съществува литерал , който да е верен при булева интепретация I , но в празния дизюнкт нямаме литерали, и не можем да вземем такъв. Поради което този специален дизюнкт ще го бележим ■
И ще разгледаме следното твърдение:

$$D \text{ е изпълним} \leftrightarrow D \neq \blacksquare$$

и да това означава ,че само празният дизюнкт е неизпълним. $\smile$.
Тавтологичен дизюнкт наричаме дизюнкт който е верен при всяка булева интерпретация. Което разбира се се получава ако вземем литерал и неговия дуален в един и същи дизюнкт , поради изискването на дизюнкцията поне един да е верен , с контрерната двойка вътре винаги ще си гарантираме , че или $I \models L$ или $I \models L^{\delta}$, ще видим и че това е това е необходимо и достътъчно условие един дизюнкт да е тавтологичен.
Сега основно ни интересува, логически да се направим работата по-лесна и приятна, това ще стане като се интересуваме основно от изпълнимост/неизпълнимост на множества от съждителни формули.Най-често тези множества ще ги означаваме с Δ както по-горе. Нека за всяка съждителна формула $\phi \in \Delta$ с КНФ(ϕ) означаваме същата формула във конюнктивна нормална форма, както знаем: $\phi \mathrel{\models\!\!\!\dashv}$ КНФ(ϕ). Цялото множество от формули трансформирани в техните КНФ ще бележим КНФ(Δ).

$$I \models \Delta \leftrightarrow I \models \text{КНФ}(\Delta)$$

Това все още, не ни помага особено , но ако разгледаме множеството от всички елементарни дизюнкции които се срещат в някоя формула от Δ, и нека означим това множество $\overline{\Delta}$, тогава :

$$I \models \Delta \leftrightarrow I \models \overline{\Delta}$$

, т.е на нас са ни необходими вече само елементарни дизюнкции и тъй като е множество много от повторенията на тези елементарни дизюнкции ще бъдат изчистени , ще остане едно минимизирано множество от елементарни дизюнкции което ще ни поакже изпълнимост и неизпълнимост, още по минимизиращо множество можем да разгледаме като си припомним как всяка елементарна дизюнкция има съотвестващ елементарен дизюнкт. Така за множество от формули Δ имаме съотвестващо множество от елементарни дизюнкти $S_\Delta = \{D_E | E \in \Delta\}$. Кога едно такова множество е изпълнимо при булева интерпретация, изобщо кога дадена булева интерпретация е модел за такова множество ами точно когато, за всеки дизюнкт от S тази интерпретация е модел за този дизюнкт:

$$I \models S \leftrightarrow \text{За всеки } D \in S, I \models D$$

. Така защо тука писах само S а не S_Δ, ами не всяко множество S е от вида S_Δ може просто множество от дизюнкти да разглеждаме без то да е от някакво множество със съждителни формули.Например какво ще е това множество. Което в себе си включва $\blacksquare$ дизюнкта, нямаме формула за това нямаме и елементарна дизюнкция E която да образува $D_E = \blacksquare$.Но в случая на множество от съждителни формули продължава да бъде валидно наблюдението:

$$I \models S_\Delta \leftrightarrow I \models \Delta$$

Понеже този дизюнкт $\blacksquare$ е неизпълним при всяка булева интерпретация тогава означава , че от $\blacksquare \in S \rightarrow I \not\models S$. В същия момент е възможно $I \not\models S$ за всяко I без S да съдържа празния дизюнкт и това е например както знаем, едноелементен дизюнкт с литерал и съответно друг съдържащ дуалния му.Визуално $S = \{\{\neg P\}, \{P\}\}$. Ако пък S=$\emptyset$, тогава отново влизаме като случая на конюнкция , имаме че за всеки дизюнкт в S , булевата интерпретация I е модел, тогава не можем да примем че съществува дизюнкт принадлежащ на S който да не е изпълнен при булева интерпратация I.Какво правим с тавтологичните дизюнкти? Ами премахваме ми ги , те не ни даваът никаква информация относно вярност /изпълнимост/неизпълнимост затова:

$$I \models S \leftrightarrow I \models S \setminus \{D\}$$

. Разбира се говорих за изпълнимост и неизпълнимост на множеството S , формално не го казах, но едно множество от дизюнкти S е изпълнимо когато съществува булева интерпреатация I която е модел на S. Което пък определя и неизпълнимост на S, като за всяка булева интерпратация I съществува поне 1 дизюнкт от S за който I не е модел. Освен горе определените неща, че ако празния дизюнкт се съдържа в S то S е винаги неизпълнимо , ако S е празното множество ,то е винаги изпълнимо. Имаме още някои очевидни наблюдения , например ако: $S' \subset S$ и S - изпълнимо следва ,че S' е изпълнимо, ако пък S'-неизпълнимо то S е неизпълнимо.

3.3 Правило за чистия литерал

Нека L е литерал, такъв че принадлежи поне на един дизюнкт от S и никой дизюнкт от S не съдържа неговия дуален L^{delta}, Нека $S' = \{D|D \in S, L \notin D\}$. Тогава S е изпълнимо ↔ S' е изпълнимо

Доказателство:

Понеже S' се състои от дизюнкти на S със специално ограничение то е подмножество на S, Други наблюдения са, че понеже специалното ограничение изключва дизюнктите които съдържат L , имаме че $D \in S \setminus S' \rightarrow L \in D$ и също така $D \in S' \rightarrow L \notin D$ и $L^{\delta} \notin D$, понеже никой дизюнкт от S, не съдържа L^{δ}. Така само от факта че S' е подмножество на S следва, че ако S е изпълнимо то S' е изпълнимо. Сега остава само на обратно да докажем. Нека произволна булева интерпретация I е модел за S' тогава дефинираме $I^L \models L$ по този начин за L и за всяка променлива P която не участва във L се държи по същия начин като I , т.е $I^L[P] = I[P]$, Така покриваме всички абсолютно всички литерали от S', това значи ,че можем да разширим всяка булева интерпратация модел за S' до интерпретация която е модел за S.

3.4 Правило за едноелементния дизюнкт

Нека L е литерал и $\{L\} \in$ S. Нека:

$$S_1 = \{D|D \in S, L \notin D, L^{\delta} \notin D\}$$

$$S_2 = \{D \setminus \{L^{\delta}\}|D \in S, L \notin D, L^{\delta} \in D\}$$

$$S' = S_1 \cup S_2$$

Тогава S е изпълнимо ↔ S' е изпълнимо.

Доказателство:

Нека $I \models S$. Тогава за всеки D от S имаме $I \models D$, в частност $I \models \{L\}$,от което значи ,че $I \models L \rightarrow I \not\models L^{\delta}$. Ако един дизюнкт от S е от S' то има два случая:

$$D \in S_1$$

В този случай $D \in S$ и значи $I \models D$, другия случай е:

$$D \in S_2$$

Тогава вида на D е $D_1 \setminus \{L^{\delta}\}$ където $D_1 \in S, L \notin D_1, L^{\delta} \in D_1$. От първото ,че $D_1 \in S$ следва $I \models D_1$. Избираме си литерал $M \in D_1$ такъв , че $I \models M$, знаем че съществува поне един такъв, и този литерал не е L^{δ} защото $I \not\models L^{\delta}$. Значи $M \in D_1 \setminus \{L^{\delta}\}$, и това е поне един литерал който е верен при I , което значи ,че $I \models D_1 \setminus \{L^{\delta}\}$ което е $I \models D$. Токазано , че за всеки произволен литерал от S' и в двата случая булевата интерпретация модел за S е модел и за дизюнкта. Следователно $I \models S \rightarrow I \models S'$.
Обратната посока: Дефинираме си интерпреатция I^L която как действа:
ако променлива Q не участва във L , то $I^L[Q] = I[Q]$, като I произволна булева интерпреатация модел за S', разбира се $I^L \models S'$, остава да покажем ,че $I^L \models S$. Ами нека за $D \in S$ разгледаме следното:

$$L \in D \text{ и } L^{\delta} \notin D$$

Тогава $I^L \models D \leftrightarrow I \models D$, значи $I^L \models D$, следващия вариант:

$$L \notin D \text{ и } L^{\delta} \in D$$

Тогава $D \setminus \{L^{\delta}\} \in S_2 \subset S'$ и $I^L \models D \setminus \{L^{\delta}\} \leftrightarrow I \models D \setminus \{L^{\delta}\}$. Следователно $I^L \models D \setminus \{L^{\delta}\}$ и $I \models D$.Последен случай:

$$L \in D$$

Тогава да $I^L \models L$ и значи $I^L \models D$.
Така покривайки всички случаи за дизюнкт от S , получаваме ,че $I^L \models S$

3.5 Правило за разделяне (Недоказано в записки мое доказателство)

Нека L е литерал има дизюнкт $D_1 \in S$, такъв че $L \in D_1$ и $L^\delta \notin D_1$, има и дизюнкт $D_2 \in S$, такъв че $L^\delta \in D_2$ и $L \notin D_2$.Нека:

$$S_1 = \{D | D \in S, L \notin D, L^\delta \notin D\}$$

$$S_2^+ = \{D \setminus \{L^\delta\} | D \in S, L \notin D, L^\delta \in D\}$$
$$S_2^- = \{D \setminus \{L\} | D \in S, L \in D, L^\delta \notin D\}$$
$$S^+ = S_1 \cup S_2^+$$
$$S^- = S_1 \cup S_2^-$$

Тогава S е изпълнимо $\leftrightarrow$ поне едно S^+, S^- е изпълнимо. Нека S е изпълнимо , т.е съществува булева интерпретация I модел за S.

Доказателство:

Нека дефинираме I^L такова ,че за всяка променлива Q която не участва в L имаме $I^L[Q] = I[Q]$, а за L имаме $I^L \models L$. Тогава да докажем ,че поне едно от S^+ или S^- има тази булева интерпретация за модел. Защото $I^L \models S$, нека проверим дали $I^L \models S^+$.Нека $D \in S^+$ тогава имаме два случая:

$$D \in S_1$$

От този случай понеже S_1 са дизюнкти от S с ограничения имаме че $S_1 \subset S$ от това ,че $I^L \models S$ следва че $I^L \models S'$. Следващия случай:

$$D \in S_2^+$$

тогава D има вида $D_1 \setminus \{L^\delta\}$ за $D_1 \in S$ от това , че $D_1 \in S$ следва , че $I^L \models D_1$, т.е съществува поне един литерал $M \in D_1$ за който $I^L \models M$, но по дефиниция $I^L \models L$, значи $I^L \not\models L^\delta$, от това имаме че $M \neq L^\delta$, което значи че $M \in D_1 \setminus \{L^\delta\}$ от там следва че $I^L \models D$. Абсолютно пълен аналог с дефиниране на I^{L^δ} за S^-.
Нека S^+ е изпълнимо тогава имаме интерпретация I която е модел за S^+ от което следва че $I \models S_1$ и $I \models S_2^+$, сега можем отново да използваме разширението I^L със същата дефиниция но този път да е булева интерпреатация която е модел за S^+ и разширява новото I което избрахме. Така автоматично ако имаме $D \in S$ то за него пак имаме 3те случая:

$$L \in D \text{ и } L^\delta \notin D$$

В този случай понеже $I^L \models L$ имаме директно следствие $I^L \models D$

$$L \notin D \text{ и } L^\delta \in D$$

В този случай имаме $I^L \models S_2^+$ и тъй като това значи ,че $I^L \models D_1 \setminus \{L^\delta\}$ всяко такова то нашето D можем да го представим като $D = D_1 \setminus \{L^\delta\} \cup \{L^\delta\}$ имаме поне един литерал $M \in D_1 \setminus \{L^\delta\}$ от което следва ,че $I^L \models D$ Последния случай:

$$L \notin D \text{ и } L^\delta \notin D$$

Ни казва директно че $D \in S_1$ което понеже $I^L \models S_1$ следва че $I^L \models D$. Така за всеки дизюнкт от S имаме че $I^{\models} D$, значи $I^L \models S$.

Абсолютно пълен аналог с дефиниране на I^{L^δ} за S^-.

3.6 Метод на съждителната резолюция

Тук ще се запознаем с правилото за съждителната резолюция. И резолвента.

Дефинция:

Нека D_1 и D_2 са дизюнкти, а L е литерал. Казваме ,че правилото за съждителната резолюция е приложимо към D_1, D_2 относно L , ако $L \in D_1, L^\delta \in D_2$. Означава се $!R_L(D_1, D_2)$. Добре, но понеже сме с контрерната двойка можем и да го разглеждаме относно L^δ тогава казваме че $!R_{L^\delta}(D_2, D_1)$.

Разбира се това означава че:

$$!R_L(D_1, D_2) \leftrightarrow !R_{L^\delta}(D_2, D_1)$$

Нека $!R_L(D_1, D_2)$ Тогава дизюнктът $(D_! \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^\delta\})$ наричаме резолвента на D_1, D_2 отностно L.

Аналогично дефинирано:
Дизюнктът D е резолвента на D_1, D_2 , ако има литерал L, такъв че $!R_L(D_1, D_2)$ и D=$R_L(D_1, D_2)$

3.7 Важна лема

Важна Лема:

Нека D е резолвента на D_1, D_2 нека I е булева интерпретация.
Ако $I \models \{D_1, D_2\}$, то $I \models D$
Тоест ако булева интерпретация е модел и за двата дизюнкта то тя е модел и за тяхната резолвента спрямо литерал.

Доказателство:

L е литерал за който $D = R_L(D_1, D_2)$. Което значи че вида на D е $D = (D_1 \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^\delta\})$. От това че $I \models \{D_1, D_2\}$ следва че $I \models D_1$ и $I \models D_2$. Имаме литерал от D_1 който е верен при I и летрал от D_2 който е верен при I. Нека тези литерали ги означим съответно $M_1 \in D_1, I \models M_1$ и $M_2 \in D_2, I \models M_2$.
За интерпретацията I имаме следните варианти:
Вариант 1. $I \models L$ от което автоматично следва $I \not\models L^\delta$ Следователно $M_2 \neq L^\delta$, поради което $M_2 \in D_2 \setminus \{L^\delta \subseteq D$. Следователно $I \models D$ защото този литерал е от D и е верен при интепретацията I.
Вариант 2. $I \not\models L$, тогава $M_1 \neq L$ така аналогично $M_1 \in D_1 \setminus \{L\} \subseteq D$, така намерихме друг литерал от D който е верен при I от което заключваме че $I \models D$

Нека $L_1, L_2 \in D_1$, а $L_1^\delta, L_2^\delta \in D_2$ ако искаме да приложим двукратно правилото, не получаваме $(D_1 \setminus \{L_1, L_2\}) \cup (D_2 \setminus \{L_1^\delta, L_2^\delta\})$, а какво получаваме и защо?
Ами приоритетите ни са следните за да приложим веднъж правилото получаваме:

$$D = (D_1 \setminus \{L_1\}) \cup (D_2 \setminus \{L_1^\delta\})$$

следващата резолвента ще можем да направим примерно тъй като !$R_{L_2}(D, D_2)$,разглеждаме резолвентата:

$$R_{L_2}(D, D_2) = D' = (D \setminus \{L_2\}) \cup (D_2 \setminus \{L_2^\delta\})$$

Така имаме за финал: D което включва всички литерали от D_1 без L_1 обединено с D_2 без дуалния литерал на L_1, за D' имаме премахваме също L_2 от D но запазваме L_2^δ обединяваме това с D_2 без L_2^δ т.е в нашия случай все още фигурира L_2^δ докато в горния не фигурира.Всъщностъ дори не премахваме от D_2 дуалното на L_1 и то също си остава.

За множества от дизюнкти се дефинира $\mathscr{R}$:
Нека S е произволно множество от дизюнкти.

Дефинция:

$\mathscr{R}(S) \rightleftharpoons S \cup \{D |$съществува $D_1, D_2 \in S, D$ е резолвента на $D_1, D_2\}$

Лема 1

Лема 1. Нека S е множество от дизюнкти , а I е булева интерпретация,Тогава $I \models S \leftrightarrow I \models \mathscr{R}(S)$

Доказателство:

Нека $I \models S$, тогава за произволен дизюнкт D $\in \mathscr{R}(S)$ имаме следните два случая:
(1сл) $D \in S$ тогава е ясно , че понеже $I \models S \rightarrow I \models D$
(2сл) D е резолвента на два дизюнкта $D_1, D_2 \in S$, тези два дизюнкта от S за тях е изпълнено ,че $I \models D_1$, $I \models D_2$ което значи , че $I \models \{D_1, D_2\}$ което от важната лема следва че $I \models D$.
това е за всеки произволен дизюнкт от $\mathscr{R}(S)$, което значи, че $I \models \mathscr{R}(S)$.
Другата посока сега: Ами какво да се чудим $S \subseteq \mathscr{R}(S)$.Тогава автоматично следва, че всеки модел за $\mathscr{R}(S)$ е модел и за S.

Дефинция:

За всяко множество от дизюнкти S , дефинираме S^* , което се дефинира така:
дефинираме редицата $S_0, S_1, S_2, .., S_n, ..$, индуктивно по следния начин:

$$S_0 = S$$

$$S_{n+1} = \mathscr{R}(Sn)$$

и полагаме

$$S^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$$

Лема 2

Нека S е множество от дизюнкти , I е булева интерпретация тогава:
$I \models S \leftrightarrow I \models S^*$

Доказателство:

Нека $I \models S$, тогава ако покажем ,че за всяко n, $I \models S_n$, тогава ще получим, точно $I \models \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = S^*$.
Правим го чрез индукция относно n.
База n=0 , $S_0 = S$, значи $I \models S_0$
Нека за някое n е изпълнено ,че $I \models S_n$. За $S_{n+1} = R(S_n)$, от Лема 1, следва че $I \models R(S_n)$ което означава ,че от $S_{n+1} = R(S_n)$, следва че $I \models S_{n+1}$. За пълнота на доказателството нека си изберем произволен дизюнкт $D \in S^*$, тогава заради структурата на S^* , съществува някое n за което $D \in S_n$ и понеже $I \models S_n$ за всяко n , то $I \models D$, и това беше за произволен дизюнкт, значи сме готови напълно с тази посока.
Другата посока разбира се $S = S_0$, $S_0 \subseteq S^*$, значи $I \models S^* \rightarrow I \models S$ винаги.

Сега може да изглежда, че дефинираме тези неща напразно и просто си играем с измислени дефиниции, но всяко твърдение ни бута една стъпка напред към истинската резолюция.Нещо интересно как да разберем дали едно множество S е неизпълнимо, като използваме , новите дефиниции, ами можем да твърдим следното:

Критерии за неизпълнимост на множество от дизюнкти:

Ако $\blacksquare \in S^*$, то S е неизпълнимо.

Доказателство:

Нека $\blacksquare \in S^*$,допускаме че S е изпълнимо, ми S е изпълнимо т.е има поне един модел, нека го означим I ,$I \models S$ от Лема 2. следва автоматично $I \models S^*$, от което следва че всички дизюнкти от S^* са верни при I, в частност, $I \models \blacksquare$ противоречие.

Сега веднага се чудим дали ако S е неизпълнимо, следва че $\blacksquare \in S^*$. За жалост още нямаме знанията да го докажем , но се очаква да е така. Друго интересно нещо е, знаем че ако имаме $\blacksquare \in S^*$, то съществува някое n , за което $\blacksquare \in S_n$, сега дали трябва да изчислим всичките предходни S_k за $0 \leq k < n$, за да решим ,че $\blacksquare \in S_n$. За по-лесно проследяване на пътя до $\blacksquare$ ще дефинираме още нещо малко по-късно.Сега се спираме на следното:

Дефиниция:

За множество от дизюнкти S , казваме че е затворено относно правилото за резолюцията, ако за всеки два дизюнкта от S ,е вярно че и тяхната резолвента е от S , иначе записано:

$$S = \mathscr{R}(S)$$

(S е неподвижна точка за $\mathscr{R}$)

Твърдение 1:

За всяко множество от дизюнкти S , S^* е затворено относно правилото за резолюциите.

Доказателство:

Трябва да покажем следните две неща:
$S^* \subseteq \mathscr{R}(S^*)$ и $\mathscr{R}(S^*) \subseteq S^*$.
Първото следва директно от дефиницията за $\mathscr{R}$.
Второто. Взимаме си произволен дизюнкт от $\mathscr{R}(S^*)$ за него знаем че има два случая:
Първи случай $D \in S^*$, тогава е ясно.
Втори случай D е резолвента на $D_1, D_2 \in S^*$, т.е има n_1, n_2, такива че $D_1 \in S_{n_1}, D_2 \in S_{n_2}$, полагаме m=max$\{n_1, n_2\}$, което е по-голямо от двете , така отново заради наблюдението за подмножества се оказва , че $D_1, D_2 \in S_m$, но ние знаем, че D е резолвента на D_1, D_2 следователно $D \in \mathscr{R}(S_m)$, което пък е $D \in S_{m+1}$, така всеки произволен дизюнкт от $\mathscr{R}(S^*)$ е изпълнено ,че $D \in S^*$, и заключваме че:
$\mathscr{R}(S^*) \subseteq S^*$

Твърдение 2:

1. Всеки път когато, X е множество от дизюнкти и е изпълнено $S \subseteq X$,$X = \mathscr{R}(X)$, е в сила $S^* \subseteq X$.
2. $S^* = \bigcap\{X \mid S \subseteq X, X = \mathscr{R}(X)\}$

Доказателство 1:

Нека $S \subseteq X, X = \mathscr{R}(X)$, използваме индукция относно n, и се стремим да покажем ,че за всяко n е изпълнено $S_n \subseteq X$:
База: $S_0 = S$, значи $S_0 \subseteq X$.
Предположение: Нека за някое n , е изпълнено $S_n \subseteq X$, тогава за S_{n+1} имаме следното $S_{n+1} = \mathscr{R}(S_n)$, разбира се $S_n \subseteq \mathscr{R}(S_n)$, и щом $S_n \subseteq X \rightarrow \mathscr{R}(S_n) \subseteq \mathscr{R}(X) = X$, така се оказва че $S_{n+1} \subseteq X$, така и обеднинието на всички S_n е подмножество на X.

Доказателство 2:

Тук се изискват две посоки първата посока я имаме: $S^* \subseteq \bigcap\{X \mid S \subseteq X, X = \mathscr{R}(X)\}$ идва от първата част, и факта че всяко $X \in \{X \mid S \subseteq X, X = \mathscr{R}(X)\}$. Изпълняват първата част.
В другата посока имаме твърдение 1 и $S \subseteq S^*$ автоматично следва че: $S^* \in \{X \mid S \subseteq X, X = \mathscr{R}(X)\}$, сечението чисти елементи само, така че е валидно , че $\bigcap\{X \mid S \subseteq X, X = \mathscr{R}(X)\} \subseteq S^*$

3.8 Резолютивна изводимост

Дефинция:

Нека S е множество от дизюнкти.
Дефинираме резолютивен извод като крайна редица дизюнкти: $D_1, D_2, .., D_n$, за n естествено, като всеки дизюнкт е от S или резолвента на два предходни дизюнкта в редицата които са от S, иначе казано за $D_1, D_2, .., D_n$ за всяко $1 \leq k \leq n$ е изпълнено $D_k \in S$ или съществуват $1 \leq i, j < k$ такива че D_k е резолвента на D_i, D_j.

Дефинция:

Един дизюнкт е резолютивно изводим от S , пише се: $S \overset{r}{\vdash}$ D , ако има резолютивен извод от S, чийто последен член е D

Добре е да се упоменат следните наблюдения:

Две наблюдения:

1. Нека $D_1, D_2, .., D_n$ е резолютивен извод от S, тогава за всяко $k \leq n$, $D_1, D_2, .., D_k$ е също резолютивен извод от S
2. Нека имаме два резолютивни извода от s:

$$D_1, D_2, .., D_n$$

$$D'_1, D'_2, .., D'_n$$

тогава $D_1, D_2, .., D_n, D'_1, D'_2, .., D'_n$ също е резолютивен извод от S.

Компактност на резолютивна изводимост:

$S \overset{r}{\vdash}$ D $\leftrightarrow$ съществува крайно S_0 , $S_0 \subseteq S$, $S_0 \overset{r}{\vdash}$ D

Доказателство:

В дясната поска: Нека $S \overset{r}{\vdash}$ D , тогава имаме резолютивен извод на D от S, нека вземем редицата (рез. извод на D от S) $D_1, D_2, .., D_n$. Дефинираме си $S_0 = \{D_k | 1 \leq k \leq n, D_k \in S\}$, така сме взели всички дизюнкти от горната редица(извод) които са от S , понеже редицата е крайна , това множество S_0 е крайно, и разбира се тогава редицата $D_1, D_2, .., D_n$ е резолютивен извод и от S_0 на D, защото както споменах в дефиницията на S_0 взимаме само дизюнктите които са от S . Дефиницията е спазена и следователно $S_0 \overset{r}{\vdash}$ D.

В лявата посока: Нека вземем подмножество на S , някое S_0 за което е изпълнено, че е крайно и $S_0 \overset{r}{\vdash}$ D , тогава разглеждаме един резолютивен изовд от S_0 на D , нека е $D_1, D_2, .., D_n$, тогава понеже е подмножество , следва директно , че е резолютивен извод на D от S. $S \overset{r}{\vdash}$ D.
И реално всяко подмножество щеше да свърши работа независимо дали безкрайно или крайно , просто в нашия случай се изискваше крайно.

Твърдение 3:

Нека S е множество от дизюнкти.Тогава:
$D \in S^* \leftrightarrow S \overset{r}{\vdash}$ D

Доказателство:

Дясната посока , ще докажем , като искаме да покажем , че ако $D \in S_n$ то $S \overset{r}{\vdash}$ D. за всяко n. Щом показваме за всяко n , използваме индукция относно n.
База: $D \in S_0$, едночленна редица D, е резолютивен извод, и тъй като $S_0 = S$ се оказва че $S \overset{r}{\vdash}$ D.
Предположение: Нека за някое n е в сила ,
че за всяко $D \in S_n$ е изпълнено $S \overset{r}{\vdash}$ D. Тогава за $D \in S_{n+1}$, имаме $S_{n+1} = \mathscr{R}(S_{n+1})$, имаме два случая за D:
1. $D \in S_n$ тогава от преположението имаме $S \overset{r}{\vdash}$ D.
2. D е резолвента на два дизюнкта D', D'' като $D', D'' \in S_n$. Тогава от хипотезата имаме $S \overset{r}{\vdash}$ D', $S \overset{r}{\vdash}$ D", неква вземем съответно резолютивен извод на D' от S : $D'_1, D'_2, .., D'_n$ и
резолютвен извод на D" от S : $D''_1, D''_2, .., D''_m$
Тогава знаем че $D'_1, D'_2, .., D'_n, D''_1, D''_2, .., D''_m, D$ е резолютивен извод на D от S , т.е доказахме ,че $S \overset{r}{\vdash}$ D. Отново за пълнота взимаме произволен дизюнкт $D \in S*$, тогава този дизюнкт принадлежи за някое n , на S_n и така получаваме , че за всеки произволен дизюнкт е изпълнено $S \overset{r}{\vdash}$ D.

Продължаваме с лявата посока: Малко по интересна , нека $S \overset{r}{\vdash}$ D , тогава един резолютивен извод на D от S е $D_1, D_2, .., D_n$, като $D_n = D$. Твърдим ,че за всяко k , $1 \leq k \leq n$ то $D_k \in S^*$. Доказваме с противоречие, нека има такова k,$1 \leq k \leq n$ то $D_k \notin S^*$, за да докажем , ще се ограничим до най-малкото такова k_0,$1 \leq k_0 \leq n$ то $D_{k_0} \notin S^*$, Тогава имаме два случая:
$D_{k_0} \in S$, в който случай, не можем да бъде защото $S = S_0 \subseteq S^*$.
Втори случай: D_{k_0} е резолвента на два дизюнкта $D_i, D_j \in S^*$, те са от S^* от това , че i,j<k_0 а k_0 е минималния индекс за който $D_{k_0} \notin S^*$, обаче имаме от твърдение 1 че S^* е затворено множество отностно правилото за резолюцията и всяка резолвента е елемент на S^* така опровергахме $D_{k_0} \notin S^*$.

Така отиваме на важната теорема за коректност:

Теорема за коректност резолютивната изводимост:

Нека S е множество от дизюнкти.
Ако $S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$, то S е неизпълнимо.

Доказателство:

Нека $S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$, тогава съгласно последното твърдение 3 имаме ,че $\blacksquare \in S^*$ и съгласно критерия за неизпълнимост, заключваме че S е неизпълнимо.

4 Трансферзали

Дефиниция:

Нека M е множество, с елементи, които също са множества. За едно множество Y, ще ще казваме , че Y е трансферзала за M ако $(\forall x \in M)(Y \cap x \neq \emptyset)$.
Забележка:
Едно множество има трансферзала тогава и само тогава когато не съдържа празното множество като елемент. Макар и тривиално твърдение , нека го запишем и да го докажем.

Твърдение:

Нека M е множество от множества.
M има трансферзала $\leftrightarrow (\forall x \in M)(x \neq \emptyset)$

Доказателство:

Доказателство (Дясна посока 1):

Нека M има трансферзала , допускаме че M съдържа празното множество като елемент. Тогава нека Y е трансферзала за M , поради което е изпълнено: $(\forall x \in M)(Y \cap x \neq \emptyset)$, в часност $(Y \cap \emptyset) \neq \emptyset$ което е абсурдно.

(понеже резултата от сечение на всяко множество с празното множестово винаги връща празното множество.)

Доказателство (Дясна посока 2):

Нека M има трансферзала и нека Y е трансферзала за M. Взимаме произволен елемент $x \in M$, тогава от Y трансферзала, имаме че $(Y \cap x) \neq \emptyset$, но $(Y \cap x) \subseteq x$,поради което $x \neq \emptyset$.

Лявата посока:
Нека $(\forall x \in M)(x \neq \emptyset)$. Тогава дефинираме множеството $Y \rightleftharpoons \bigcup_{x \in M} x$.
Това множество е трансферзала за M, защото за всяко $x \in M$ е вярно ,че $x \subseteq Y$, от това имаме че е вярно винаги $(Y \cap x = x)$, но никое x не е празното множество, следователно е винаги изпълнено $(\forall x \in M)(Y \cap x \neq \emptyset)$.

Дефинция:

Нека M е множество от множества, ще казваме че Y е минимална трансферзала ако са изпълнени следните 2 условия:

$\cdot$ Y- е трансферзала

$\cdot$ всеки път когато $Y' \subseteq Y, Y' \neq Y$, следва че Y' не е трансферзала.

Т.е всяко собствено подмножество на Y не е трансферзала за M,а Y е трансферзала за M.

Малко твърдение:

Нек M е множество от множества, Y е трансферзала за M:
Y - минимална $\leftrightarrow (\forall a \in Y)(\exists x \in M)((Y \setminus \{a\}) \cap x = \emptyset)$

Което иначе казано е тривиално твърдение, че една трансферзала е минимална тогава и само тогава когато , който и елемент да премахнем спира да е трансферзала.(за някое M)

Доказателство:

Едната посока: Нека Y е минимална трансферзала , ами тогава $Y \setminus \{a\} \subseteq Y$ и $Y \setminus \{a\} \neq Y$.Y е минимална, а $Y \setminus \{a\}$ е собствено подмножество на Y, няма как да е трансферзала.

Другата посока:
Нека Y е трансферзала , избираме си произволно собствено подмножество Y' т.е $Y' \subseteq Y, Y' \neq Y$ тогава $Y \setminus Y'$, понеже има поне един елемент по който се различават Y и Y', нека $a \in Y \setminus Y'$. Така $Y' \subseteq Y \setminus \{a\} \subseteq Y$ и $Y \setminus \{a\} \neq Y$. Тогава $(\exists x \in M)((Y \setminus \{a\}) \cap x = \emptyset)$ понеже сме в лявата посока твърдението е изъплнено. Но като вземем такова конкретно x нека го означим x_0, за което $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 = \emptyset$. Тогава имаме следното $Y' \cap x_0 \subseteq (Y \setminus \{a\}) \cap x_0$,понеже знаем , че $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 = \emptyset$, следва че $Y' \cap x_0 = \emptyset$. Тогава Y' не е трансферзала за M, а това беше произволно собствено подмножество на Y , което значи че Y е минимална трансферзала за M.

Твърдение1. Няколко еквивалентности:

Нека Y е трансферзала за множество от множества M.

$$(I)\ \forall Y'(Y' \subseteq Y \text{ и } Y' \neq Y \rightarrow (\exists x \in M)(Y' \cap x = \emptyset));$$

$$(II)\ (\forall a \in Y)(\exists x \in M)((Y \setminus \{a\}) \cap x = \emptyset);$$

$$(III)\ (\forall a \in Y)(\exists x \in M)(Y \cap x = \{a\})$$

Твърденията са еквивалентни.

Доказателство:

(I)->(II) и (II)->(I):

С предходното твърдение доказахме еквивалентността на двете твърдения. (I) е дефиниция за минимална трансферзала, а (II) беше изпълнено тогава и само тогава когато (I) е изпълнено.

(II)->(III):

Нека приемем че (II) е в сила. Тогава нека вземем произволно $a \in Y$. От (II) следва че $(\exists x \in M)((Y \setminus \{a\}) \cap x = \emptyset)$. Взимаме отново конкретно x_0 за което $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 = \emptyset$. Щом Y е трансферзала за M. $Y \cap x_0 \neq \emptyset$. Т.е има поне един елемент нека $b \in Y \cap x_0$. Тогава $b \in Y$ и $b \in x_0$, той е общ , щом е в сечението. Също така избрахме x_0 да е такова че $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 = \emptyset$, тогава $b \notin (Y \setminus \{a\}) \cap x_0$. но $b \in x_0$, тогава $b \notin (Y \setminus \{a\})$, но пък $b \in Y$, какво значи това.Значи че $b \in \{a\}$. но вътре има само елемента a , следователно b=a.Това беше обаче за някое произволно b което е във $Y \cap x_0$ тогава всеки произволен елемент на това множество е и елемент на {a} . Което преведено в езика на множества е $Y \cap x_0 \subseteq \{a\}$, възможни са две подмножества само на {a}, $\emptyset$ и {a} , но Y е трансферзала за M , значи от $Y \cap x_0 \neq \emptyset$, остава $Y \cap x_0 = \{a\}$.

(III)->(II):

Нека (III) е в сила. Нека отново вземем произволно $a \in Y$.
От (III) имаме:
$(\exists x \in M)(Y \cap x = \{a\})$. Нека вземем конкретно $x_0 \in M$ такова че $Y \cap x_0 = \{a\}$. Допускаме , че $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 \neq \emptyset$, ще се опитаме да стигнем до противоречие. Нека $b \in (Y \setminus \{a\}) \cap x_0$. защото сме допуснали че $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 \neq \emptyset$ ще имаме такъв елемент b. Тогава $b \in Y \setminus \{a\}$ и $b \in x_0$. Щом $b \in Y \setminus \{a\}$, имаме че и $b \in Y$ и също $b \notin \{a\}$. Така второто можем да го гледаме като $b \neq a$. От $b \in Y$ и $b \in x_0$ следва че $b \in Y \cap x_0$, но от (III) имаме $Y \cap x_0 = \{a\}$, тогава $b \in \{a\}$ което е като да кажем b=a. Противоречеие и това беше за произволно $a \in Y$.Готови сме.

Твърдение 2

Нека M е крайно множество от непразни множества. Тогава M има минимална трансферзала.

Има доста начина да се докаже , но единия начин ни дава ориентация за едно по-голямо твърдение и ще използваме само него;

Доказателство:

Първо БОО (Без ограничение на общността) ,можем да смятаме че $M \neq \emptyset$, защото в този случай имаме трансферзала която е $Y = \emptyset$, защо е трансферзала защото не можем да намерим контрапример за $x \in M$, за да покажем че не е. А защо е минамална , ами защото празното множество няма собствени подмножества.
Започваме доказателството, като си дефинираме едно крайно множество Y_0 което е трансферзала за M.Дефинираме го по следния начин:
По условията всяко $x \in M$ е непразно значи има поне един елемент.Трансферзалата $Y_0 \rightleftharpoons \{a_0, a_1, ., a_{t-1}\}$ като за крайното множество M , елементите ги означаваме с $x_0, x_1, ., x_{t-1}$ и $a_0 \in x_0, a_1 \in x_1, ., a_{t-1} \in x_{t-1}$. Това е трансферзала за M , защото сечение със всяко множество ще даде точно конкретния елемент който сме взели по дефиницията на Y_0.Сега дефинираме индуктивно редицата: $Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq .. \supseteq Y_t$, като:
-Y_0 е дефинирано. (по-горе).
-Нека $n \leq t-1$ и Y_n е дефинирано и е трансферзала за M:
Дефинираме Y_{n+1}

$$Y_{n+1} \rightleftharpoons \begin{cases} Y_n \setminus \{a_n\} & \text{ако } Y_n \setminus \{a_n\} \text{ е трансферзала за M} \\ Y_n & \text{ако } Y_n \setminus \{a_n\} \text{ не е трансферзала за M} \end{cases}$$

Тогава редциата $Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq .. \supseteq Y_t$ е вярна и всяко едно е трансферзала за M.
За минимална трансферзала твърдим че Y_t е такава. Нека $a \in Y_t$, тогава $a = a_n$ за някое $n \leq t-1$. Тъй като $Y_{n+1} \supseteq Y_t$ има $a_n \in Y_{n+1}$.От дефиницията за Y_{n+1} заключваме че $Y_{n+1} \neq Y_n \setminus \{a_n\}$ защото $a_n \in Y_{n+1}$ поради което влизаме в случая $Y_{n+1} = Y_n$ и $Y_n \setminus \{a_n\}$ не е трансферзала за M.Тогава за някое $x \in M$ имаме $(Y_n \setminus \{a_n\}) \cap x = \emptyset$, тогава от $Y_t \setminus \{a_n\} \subseteq Y_n \setminus \{a_n\}$ следва че $(Y_t \setminus \{a_n\}) \cap x = \emptyset$ и това е за $a = a_n$, значи $(Y_t \setminus \{a\}) \cap x = \emptyset$, и какво е това ами това (твърдение 1 / дефиниция (II)) за минимална трансферзала.

4.1 Теорема за минималната трансферзала

Теорема за минималната трансферзала

Нека M е фамилия от непразни крайни множества.M е най-много изброимо безкрайно множество. Тогава M има минимална трансферзала.

Доказателство:

Нека M е крайно , тогава използваме горното твърдение и следователно съществува минимална трансферзала за M.Ако пък M е изброимо безкрайно, използваме факта ,че елементите на M са крайни множества.Тогава $Y_0 = \bigcup_{x \in M} x$ е изброимо (безкрайно) множество. Понеже вече знаем че Y_0 е трансферзала за M. Това е вече разглеждано. Нека $a_0, a_1, ., a_n, .$ е редица от всички елементи на Y_0 и елементите са два по два различни т.е $n_1 \neq n_2, a_{n_1} \neq a_{n_2}$.Отново индуктивно ще дефинираме редицата: $Y_0, Y_1, .., Y_n, Y_{n+1}, .$ по следния начин:
Y_0 е дефинирано (видяхме го)
Нека за някое n, Y_n е дефинирано.
Дефинираме Y_{n+1} отново така:

$$Y_{n+1} \rightleftharpoons \begin{cases} Y_n \setminus \{a_n\} & \text{ако } Y_n \setminus \{a_n\} \text{ е трансферзала за M} \\ Y_n & \text{ако } Y_n \setminus \{a_n\} \text{ не е трансферзала за M} \end{cases}$$

Доказателство (Продължение):

Така с индукция относно n, и поради дефиницията на Y_{n+1}, заключваме че:
* за всяко n , Y_n е трансферзала за M
* за всяко n, $Y_n \supseteq Y_{n+1}$
Точно както беше в горното доказателство, сега за произволни n и k , ако $n \leq k$, то $Y_n \supseteq Y_k$. Очевидно с нарастване на индекса в редицата или ще запазим трансферзалата или ще я намалим с 1 елемент. Така дефинирахме монотонно намаляваща редица:

$$Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq .. \supseteq Y_n \supseteq ..$$

. Сега търсейки нещо минимално и чисто (както по висша) търсим сечение на нещата, дефинираме:

$$Y \rightleftharpoons \bigcap_{n=0}^{\infty} Y_n$$

Сега за да докажем, че наистина е минимална трансферзала за M. Първо да се убедим че е трансферзала за M.Нека x е произволен елемент от M.Тогава следва че $x \in Y_0$, заради дефиницията на Y_0 и значи взимайки по-горе редицата на елементи на Y_0: $a_0, a_1, ., a_n, .$, там елементите на x , ще се срещат точно по веднъж.Това означава ,че понеже x е крайно множество елементите са краен брой и в редицата ще се случи момент в който , от даден индекс нататък не можем да имаме повече елемент от x. С други думи: Съществува естествено число n_x , такова че $a_{n_x} \in x$, и за всяко $n > n_x$, $a_n \notin x$.Сега важното от тези заключения е следното:
В редицата

$$Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq .. \supseteq Y_n \supseteq ..$$

Спираме се на елемента Y_{n_x}, щом направим само още една стъпка по дефиницията за Y_{n_x+1}, ще получим:

$$\begin{cases} Y_{n_x} \setminus \{a_{n_x}\} & \text{ако } Y_{n_x} \setminus \{a_{n_x}\} \text{ е трансферзала за M} \\ Y_{n_x} & \text{ако } Y_{n_x} \setminus \{a_{n_x}\} \text{ не е трансферзала за M} \end{cases}$$

Доказателство (Продължение 2):

И вече ако го махнем този елемент, привършваме елементите на x. Ако не го махнем, продължаваме и повече няма как да се опитаме да махнем елемент от x.
Така за всяко $n > n_x + 1$ е валидно че: $Y_n \cap x = Y_{n_x+1} \cap x$. Защото както показахме, от там нагоре, няма какво да премахваме като елемент от x и затова се запазва сечението с повишаване на индекса, реално можем да махаме по 1 елемент да чистим постепенно от трансферзалите , но сме сигурни вече ,че няма да махнем елемент на x. Така от това че редицата

$$Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq .. \supseteq Y_n \supseteq ..$$

е монотонно намаляваща, можем да заключим следното:

$$\bigcap_{n=0}^{n_x+1} Y_n = Y_{n_x+1}$$

. Очевидно по-малките елементи по индекс , на редицата от трансферзали пазят повече непремахнати елементи от x,докато не стигнат Y_{n_x+1} където за последен път се опитваме да махнем елемент от x.Така можем да заключим следното
$Y \cap x = (\bigcap_{n=0}^{\infty} Y_n) \cap x =$
$(\bigcap_{n=0}^{n_X+1} Y_n \cap \bigcap_{n=n_x+2}^{\infty} Y_n) \cap x =$
$(Y_{n_x+1} \cap \bigcap_{n=n_x+2}^{\infty} Y_n) \cap x =$
$(Y_{n_x+1} \cap x) \cap \bigcap_{n=n_x+2}^{\infty} (Y_n \cap x) =$
припомняме си "за всяко $n > n_x+1$ е валидно че: $Y_n \cap x = Y_{n_x+1} \cap x$"
$(Y_{n_x+1} \cap x) \cap \bigcap_{n=n_x+2}^{\infty} (Y_{n_x+1} \cap x) =$
$(Y_{n_x+1} \cap x) \cap (Y_{n_x+1} \cap x) = Y_{n_x+1} \cap x$. Тогава понеже за всяко n , Y_n е трансферзала за M, и за произволно $x \in M$ имаме $Y_{n_x+1} \cap x \neq \emptyset$ точно от гаранцията че Y_{n_x+1} е трансферзала. Заключваме че $Y \cap x \neq \emptyset$. Т.е Y е трансферзала за M.

Доказателство (Продължение 3):

Сега дали е минимална тази трансферзала?,Нека a е произволен елемент на Y, тогава този елемент a се среща веднъж в редицата $a_0, a_1, .$ Той е някой от тези , нека $a = a_n$. Понеже $Y \subseteq Y_{n+1}$, имаме $a_n \in Y_{n+1}$. Тогава сме във случая в който не сме махнали a_n , т.е $Y_{n+1} \neq Y_n \setminus \{a_n\}$. Следователно $Y_n + 1 = Y_n$, тогава $Y_n \setminus \{a_n\}$ не е трансферзала за M. Което означава от твърдение 1 (II). Съществува, нека вземем конкретно $x_0 \in M$,за което $(Y_n \setminus \{a_n\}) \cap x_0 = \emptyset$. Но $Y \subseteq Y_n$ тогава $Y \setminus \{a_n\} \subseteq Y_n \setminus \{a_n\}$, което значи че: $(Y \setminus \{a_n\}) \cap x_0 \subseteq (Y_n \setminus \{a_n\}) \cap x_0$, така $(Y \setminus \{a_n\}) \cap x_0 \subseteq \emptyset$ от което следва: $(Y \setminus \{a_n\}) \cap x_0 = \emptyset$, обаче понеже $a = a_n$, успяваме да стигнем до $(Y \setminus \{a\}) \cap x_0 = \emptyset$, това е за произволно a следователно имаме точно твърдение 1 (II) изпълнено , което значи че Y е минимална трансферзала за M.

5 Резолютивна изводимост (Продължение)

Преговаряме си първо:
Критерии за неизпълнимост на множество от дизюнкти:
(Ако $\blacksquare \in S^*$, то S е неизпълнимо.)
За всяко множество от дизюнкти S , S^* е затворено относно прави- лото за резолюциите.
Нека представим една лема:

Лема:

Нека Y е множество от литерали. Тогава:
Y е изпълнимо $\leftrightarrow$ за всеки литерал L , най-много един от литералите L,L^δ е от Y.

Сега разглеждаме следното твърдение/теорема:

Теорема:

Нека S е множество то дизюнкти, зваторено отностно правилото на резолюцията.Ако $\blacksquare \notin S$, то S е изпълнимо.

Доказателство:

Нека S е затворено относно правилото за резолюция и $\blacksquare \notin S$. Следователно S е множество от крайни (непразни) множества от дизюнкти. Съгласно теоремата за минимална трансферзала, S има минимална трансферзала , нека я ознаим с Y. Т.е
$(\forall D \in S)(Y \cap D \neq \emptyset)$ и $(\forall a \in Y)(\exists D \in S)(Y \cap D = \{a\})$. Тоест Y е множество от литерали. Допускаме че за някой литерал L , L и L^δ са от Y.Значи $(\exists D \in S)(Y \cap D = \{L\})$, $(\exists D \in S)(Y \cap D = \{L^\delta\})$. Нека ги вземем $D_1 \in S$, $Y \cap D_1 = \{L\}$ и $D_2 \in S$, $Y \cap D = \{L^\delta\}$. Следователно $L \in D_1, L^\delta \in D_2$, тогава $!R_L(D_1, D_2)$.И понеже S е затворено относно правилото за резолюцията $R(D_1, D_2) \in S$. Което Y като трансферзала ни казва , че $Y \cap R_L(D_1, D_2) \neq \emptyset$. Но това е равно на $Y \cap ((D_1 \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^\delta\})) =$
$(Y \cap (D_1 \setminus \{L\})) \cup (Y \cap (D_1 \setminus \{L^\delta\})) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, понеже знаем че $Y \cap D_1 = \{L\}, Y \cap D_2 = \{L^\delta\}$. Противореие! Сега разбрахме, че за всеки литерал L , най-много един от литералите L, L^δ е от Y. от лемата (последната лема)
Заключваме че има булева интерпретация I_Y за Y , такава че всеки път когат $D \in Y$ следва че $I_Y \models D$, тогава е ясно че това е модел за S, защото за всяко $D \in S$ понеже Y е минимална транферзала $Y \cap D \neq \emptyset$, има поне един литерал L от D който е и от Y , но $I_Y \models L$ за всеки литерал т.е $I_Y \models D$ за всяко D от S. Така теоремата е доказана.

Твърдение:

Нека S е множество то дизюнкти.Ако $\blacksquare \notin S^*$, то S е изпълнимо.

Доказателство:

Доказателството е лесно следствие понеже S^* е затворено относно правилото за резолюцията, Тогава следва от горната теорема че е изпълнимо , но $S \subseteq S^*$ тогава и S е изпълнимо.

Теорема за пълнотата на резолютивна изводимост:

Нека S е множество то дизюнкти.Ако S е неизпълнимо тогава
$S \vdash^{r} \blacksquare$

Доказателство:

Контрапозиция на твърдението:
Нека S е множество то дизюнкти.Ако $\blacksquare \notin S^*$, то S е изпълнимо.Е точно:
Ако S е неизпълнимо то $\blacksquare \in S^*$ Имаме и тв3. Теоремата е доказана.

Теорема за пълнотата на резолютивна изводимост (Обобщен вариант):

Нека S е множество от дизюнкти тогава:
S е неизпълнимо $\leftrightarrow S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$

5.1 Теореми за компактност

Теорема за компактност на изпълнимост/неизпълнимост на множество от съждителни дизюнкти:

S е неизпълнимо $\leftrightarrow$ има крайно $S_0, S_0 \subseteq S$, S_0 е неизпълнимо
S е изпълнимо $\leftrightarrow$ за всяко крайно $S_0, S_0 \subseteq S$, S_0 е изпълнимо.

Доказателство:

$\rightarrow$
Ако имаме неизпълнимо подмножество на S , тогава S е неизпълнимо. (Няма значение крайно безкрайно подмножество).
$\leftarrow$
От теорема за пълнотата имаме , че от S неизпълнимо следва $S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$, по-горе имаме доказане теорема за компактност на резолютивен извод (ткри) имаме крайно S_0 такова че $S_0 \overset{r}{\vdash} \blacksquare$ Което от обобщения вариант на теоремата за пълнотата ни казва че S_0 е неизпълнимо. Или можем да ползваме теорема за коректност резолитивна изводимист. Второто твърдение е еквивалентно с първото.

6 Правило на съждителната резолюция с ограничения

Тук се разглеждат варианти за прилагане на правилото за съждителната резолюция с добавени допълнителни ограничения.Ще разгледаме следните две:

Дефиниция:

i-резолюция от S
(input resolution)
Наричаме крайна редица от дизюнкти $D_1, D_2, .., D_n$, таква че всеки нейн член е от S или е резолвента на два предходни члена, поне един, който е от S.

Така един дизюнкт D е i-резолютивно изводим от S , ако имаме i-резолютивен извод от S, чийто последен член е D.
Бележим $S \overset{i-r}{\vdash}$D Понеже не нарушаваме дефиницията за резолютивевн извод, то следва че:

Наблюдение:

$S \overset{i-r}{\vdash} \text{D} \rightarrow S \overset{r}{\vdash} \text{D}$

Поради което е валидна и теоремата за коректност. Теоремата за пълнота не е валидна обаче, защото пример
$S = \{\{P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\}$. Вижда се, че е неизпълнимо множе да се покаже с всичките твърдения досега а може и просто да вземем интерпретациите спрямо вярността на P,Q.Но не можем да изведем: $S \overset{i-r}{\vdash} \blacksquare$, Защото ограничението за два предходни поне един да е от S , няма как да го изпълним за да стигнем до празния дизюнкт накрая ще останат две резолвенти и празния дизюнкт, както и да прилагаме правилото.Нито една резолвента няма да е дизюнкт от S.
Сега разглеждаме втората вриация на правилото за съждителна резолюция:

Дефиниция:

u-резолюция от S
(unit-resolution)
Наричаме крайна редица от дизюнкти $D_1, D_2, .., D_n$, таква че всеки нейн член е от S или е резолвента на два предходни члена, поне един, който е едноелементен дизюнкт.

Така един дизюнкт D е u-резолютивно изводим от S , ако имаме u-резолютивен извод от S, чийто последен член е D.
Бележим $S \overset{u-r}{\vdash}$D
Понеже не нарушаваме дефиницията за резолютивевн извод, то следва че:

Наблюдение:

$S \overset{u-r}{\vdash} \text{D} \rightarrow S \overset{r}{\vdash} \text{D}$

Отново е изпълнена теоремата за коректност и отново НЕ е изпълнена теоремата за пълнотата. Дори същия пример върши работа за контрапример.

Важно!:

$S \vdash^{i-r} \mathrm{D} \not\leftrightarrow S \vdash^{u-r} \mathrm{D}$
$S \vdash^{i-r} \blacksquare \leftrightarrow S \vdash^{u-r} \blacksquare$

Първото е ясно , но второто е по-важно и по-интересно:

Доказателство:

Не е проверено все още.

7 References

*Лекции на проф. Тинко Тинчев (Информатика)
*https://github.com/YanaRGeorgieva/Logic-programming