2.9 Зависимость и независимость случайных величин

Системы случайных величин

СВ X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют ***систему двух СВ*** (или ***двумерную СВ***).
Каждую из СВ X и Y называют ***составляющей*** (или ***компонентой***) двумерной СВ.

Понятие системы СВ легко обобщается на случай более, чем двух компонент.

Примеры.

- Точка приземления летательного аппарата характеризуется системой двух СВ – географических координат.
- Контролируемые размеры детали, изготавливаемой станком-автоматом, образуют систему СВ (число компонент – количество контролируемых размеров).

Системы случайных величин

Двумерные СВ могут быть

- *дискретными* (если составляющие дискретны),
- *непрерывными* (составляющие непрерывны),
- *смешанными* (одна из составляющих дискретна, а другая непрерывна).

Закон распределения дискретной двумерной СВ

Законом распределения дискретной двумерной СВ называется перечень возможных значений (x_i, y_j) и их вероятностей

$$p(x_i, y_j) = P\left((X = x_i)\cdot(Y = y_j)\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1.$$

Закон распределения дискретной двумерной СВ

Обычно представляется таблицей вида

Y	X					
	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	...	$p(x_i, y_1)$	...	$p(x_n, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	...	$p(x_i, y_2)$	...	$p(x_n, y_2)$
...	...	...	...	...	...	...
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	...	$p(x_i, y_j)$	...	$p(x_n, y_j)$
...	...	...	...	...	...	...
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	...	$p(x_i, y_m)$	...	$p(x_n, y_m)$

Законы распределения дискретных составляющих

Зная закон распределения двумерной СВ, можно найти законы распределения составляющих:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j), \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j), \qquad j = 1, 2, \dots, m.$$

Функция распределения двумерной СВ

Функцией распределения двумерной СВ (X, Y) называется функция

$$F(x, y) = P\big((X < x) \cdot (Y < y)\big).$$

Плотность распределения непрерывной двумерной СВ

Пусть функция распределения $F(x, y)$ всюду непрерывна и имеет непрерывные смешанные частные производные второго порядка.

Плотностью распределения вероятностей $f(x, y)$ двумерной СВ (X, Y) называется функция

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}.$$

График этой функции – *поверхность распределения*.

Плотность распределения непрерывной двумерной СВ

Зная плотность совместного распределения $f(x, y)$, можно найти функцию совместного распределения:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dx dy .$$

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D плоскости xOy может быть найдена как

$$P\big((X, Y) \in D\big) = \iint_D f(x, y)\, dx dy .$$

Зависимость и независимость случайных величин

Ранее было дано определение:

две СВ называются ***независимыми***, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие из возможных значений приняла другая СВ.

В противном случае эти СВ называются ***зависимыми***.

Зависимость и независимость случайных величин

Теорема.

Для того, чтобы СВ X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) ,$$

где $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ – функции распределения составляющих.

Зависимость и независимость случайных величин

Следствие.

Для того, чтобы непрерывные СВ X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) ,$$

где $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ – плотности распределения составляющих.

Корреляционный момент СВ X и Y

Корреляционным моментом K_{xy} СВ X и Y называется величина, равная математическому ожиданию произведения отклонений СВ X и Y:

$$K_{xy} = M\Big(\big(X - M(X)\big)\cdot\big(Y - M(Y)\big)\Big)\,, \qquad (2.26)$$

или

$$K_{xy} = M\left(\overset{\circ}{X}\cdot\overset{\circ}{Y}\right).$$

Корреляционный момент СВ X и Y

Для дискретных СВ X и Y из (2.26) и (2.15) следует: корреляционный момент K_{xy} равен

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\big(x_i - M(X)\big)\cdot\big(y_j - M(Y)\big)\cdot p\big(x_i, y_j\big). \qquad (2.27)$$

Для непрерывных СВ X и Y из (2.26) и (2.16) следует: корреляционный момент K_{xy} равен

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(x - M(X)\big)\cdot\big(y - M(Y)\big)\cdot f(x,y)\,dxdy. \qquad (2.28)$$

Корреляционный момент СВ X и Y

Из свойств математического ожидания:

$$K_{xy} = M(X\cdot Y) - M(X)\cdot M(Y).$$

С учетом этого формулы (2.27) и (2.28) можно переписать в более удобном для вычислений виде.

Корреляционный момент СВ X и Y

Для дискретных СВ X и Y

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\cdot y_j\cdot p\big(x_i, y_j\big) - M(X)\cdot M(Y). \qquad (2.29)$$

Для непрерывных СВ X и Y

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot y\cdot f(x,y)\,dxdy - M(X)\cdot M(Y). \qquad (2.30)$$

Корреляционный момент СВ X и Y

Корреляционный момент служит для характеристики связи между СВ X и Y.

Теорема.

Если СВ X и Y независимы, то $K_{xy} = 0$.

Прямое следствие свойств математического ожидания.

Упражнение: самостоятельно доказать утверждение теоремы

Обратное утверждение неверно:

из $K_{xy} = 0$ в общем случае НЕ СЛЕДУЕТ независимость СВ X и Y.

Корреляционный момент СВ X и Y

Следствие.

Если $K_{xy} \neq 0$, то СВ X и Y зависимы.

Корреляционный момент СВ X и Y

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей СВ X и Y

$\Downarrow$

его величина зависит от единиц измерения СВ X и Y (например: 2 см^2 или 200 мм^2).

Это недостаток (затрудняет сравнение корреляционных моментов разных систем СВ).

Для устранения этого недостатка вводят еще одну числовую характеристику системы СВ – *коэффициент корреляции*.

Коэффициент корреляции

Коэффициентом корреляции r_{xy} СВ X и Y называется величина

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Это безразмерная величина, значение которой не зависит от выбора единиц измерения СВ X и Y.

Очевидно: для независимых СВ X и Y $r_{xy} = 0$.

Коэффициент корреляции

Теорема.

Для любых СВ X и Y

$$|r_{xy}| \leq 1.$$

Коррелированные и некоррелированные случайные величины

СВ X и Y называются ***коррелированными***, если $K_{xy} \neq 0$ (или $r_{xy} \neq 0$);

СВ X и Y называются ***некоррелированными***, если $K_{xy} = 0$ (или $r_{xy} = 0$).

Резюме о коррелированности и зависимости СВ

- Из коррелированности СВ X и Y следует зависимость этих СВ.
- Из зависимости СВ X и Y в общем случае не следует их коррелированность (зависимые СВ могут быть как коррелированными, так и некоррелированными).
- Из независимости СВ X и Y следует их некоррелированность.
- Из некоррелированности СВ X и Y в общем случае не следует их независимость.

Резюме о коррелированности и зависимости СВ

При этом:

из некоррелированности **нормально распределенных** СВ вытекает их независимость.

Для нормально распределенных СВ независимость и некоррелированность эквивалентны

Коэффициент корреляции как характеристика линейной зависимости СВ

Коэффициент корреляции характеризует <u>линейную</u> зависимость СВ.

Линейная вероятностная зависимость СВ заключается в том, что при возрастании одной СВ другая имеет тенденцию возрастать/убывать по линейному закону. Эта зависимость может быть более или менее выражена.

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между СВ.

Коэффициент корреляции как характеристика линейной зависимости СВ

Если СВ X и Y связаны точной линейной зависимостью

$$Y = a \cdot X + b,$$

то

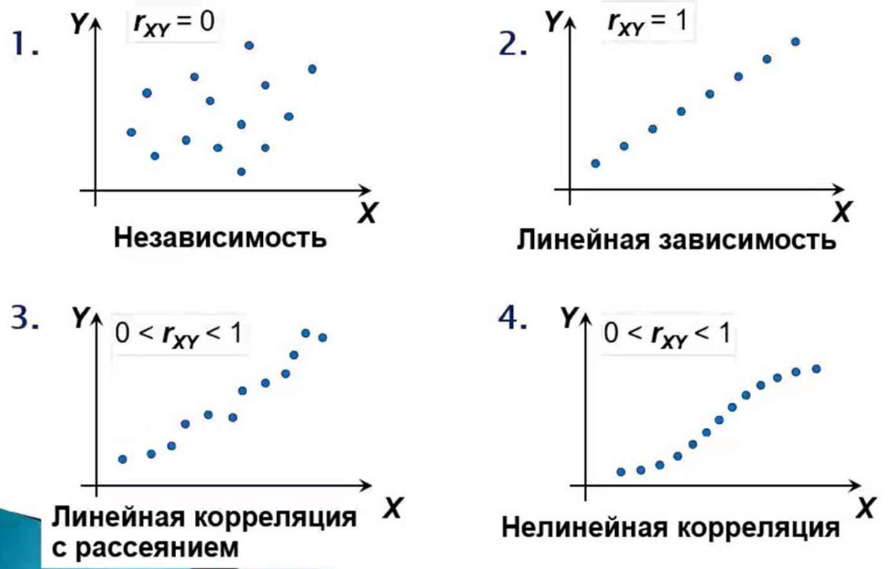
$$r_{xy} = \pm 1,$$

причем знак r_{xy} совпадает со знаком a.

В общем случае произвольной вероятностной зависимости

$$-1 < r_{xy} < 1.$$

Различные случаи корреляции нормально распределенных СВ.



Числовые характеристики системы нескольких СВ

Минимальное количество числовых характеристик, с помощью которых может быть охарактеризована система n СВ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, сводится к следующему:

- n математических ожиданий

$$m_1, m_2, \ldots, m_n,$$

- n дисперсий

$$D_1, D_2, \ldots, D_n,$$

- $n \cdot (n-1)$ корреляционных моментов K_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, характеризующих попарную корреляцию СВ, входящих в систему.

Корреляционная матрица

<u>Замечание</u>.

Дисперсия $D(X_i)$ – частный случай корреляционного момента: $D(X_i) = K_{ii}$.

Все корреляционные моменты и дисперсии записывают в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется ***корреляционной матрицей*** системы СВ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Корреляционная матрица

Очевидно:

$$K_{ij} = K_{ji},$$

т. е. матрица симметрична.

Если СВ $X_1, X_2, \dots, X_n$ не коррелированы, то корреляционная матрица будет диагональной:

$$\begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{pmatrix}.$$