

2.9 Зависимость и независимость случайных величин

Системы случайных величин

СВ X и Y , рассматриваемые одновременно, образуют *систему двух СВ* (или *двумерную СВ*). Каждую из СВ X и Y называют *составляющей* (или *компонентой*) двумерной СВ.

Понятие системы СВ легко обобщается на случай более, чем двух компонент.

Примеры.

- Точка приземления летательного аппарата характеризуется системой двух СВ – географических координат.
- Контролируемые размеры детали, изготавливаемой станком-автоматом, образуют систему СВ (число компонент – количество контролируемых размеров).

Системы случайных величин

Двумерные СВ могут быть

- *дискретными* (если составляющие дискретны),
- *непрерывными* (составляющие непрерывны),
- *смешанными* (одна из составляющих дискретна, а другая непрерывна).

Закон распределения дискретной двумерной СВ

Законом распределения дискретной двумерной СВ называется перечень возможных значений (x_i, y_j) и их вероятностей

$$p(x_i, y_j) = P((X = x_i) \cdot (Y = y_j)),$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) = 1.$$

Закон распределения дискретной двумерной СВ

Обычно представляется таблицей вида

Y	X					
	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$...	$p(x_i, y_1)$...	$p(x_n, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$...	$p(x_i, y_2)$...	$p(x_n, y_2)$
...
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$...	$p(x_i, y_j)$...	$p(x_n, y_j)$
...
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$...	$p(x_i, y_m)$...	$p(x_n, y_m)$

Законы распределения дискретных составляющих

Зная закон распределения двумерной СВ, можно найти законы распределения составляющих:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Функция распределения двумерной СВ

Функцией распределения двумерной СВ (X, Y) называется функция

$$F(x, y) = P((X < x) \cdot (Y < y)).$$

Плотность распределения непрерывной двумерной СВ

Пусть функция распределения $F(x, y)$ всюду непрерывна и имеет непрерывные смешанные частные производные второго порядка.

Плотностью распределения вероятностей $f(x, y)$ двумерной СВ (X, Y) называется функция

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

График этой функции – *поверхность распределения.*

Плотность распределения непрерывной двумерной СВ

Зная плотность совместного распределения $f(x, y)$, можно найти функцию совместного распределения:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy.$$

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D плоскости xOy может быть найдена как

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Зависимость и независимость случайных величин

Ранее было дано определение:

две СВ называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие из возможных значений приняла другая СВ.

В противном случае эти СВ называются *зависимыми*.

Зависимость и независимость случайных величин

Теорема.

Для того, чтобы СВ X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

где $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ – функции распределения составляющих.

Зависимость и независимость случайных величин

Следствие.

Для того, чтобы непрерывные СВ X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

где $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ – плотности распределения составляющих.

Корреляционный момент СВ X и Y

Корреляционным моментом K_{xy} СВ X и Y называется величина, равная математическому ожиданию произведения отклонений СВ X и Y :

$$K_{xy} = M((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))), \quad (2.26)$$

или

$$K_{xy} = M(\overset{\circ}{X} \cdot \overset{\circ}{Y}).$$

Корреляционный момент СВ X и Y

Для дискретных СВ X и Y из (2.26) и (2.15) следует: корреляционный момент K_{xy} равен

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - M(X)) \cdot (y_j - M(Y)) \cdot p(x_i, y_j). \quad (2.27)$$

Для непрерывных СВ X и Y из (2.26) и (2.16) следует: корреляционный момент K_{xy} равен

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X)) \cdot (y - M(Y)) \cdot f(x, y) dx dy. \quad (2.28)$$

Корреляционный момент СВ X и Y

Из свойств математического ожидания:

$$K_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y).$$

С учетом этой формулы (2.27) и (2.28) можно переписать в более удобном для вычислений виде.

Корреляционный момент СВ X и Y

Для дискретных СВ X и Y

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i \cdot y_j \cdot p(x_i, y_j) - M(X) \cdot M(Y). \quad (2.29)$$

Для непрерывных СВ X и Y

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f(x, y) dx dy - M(X) \cdot M(Y). \quad (2.30)$$

Корреляционный момент СВ X и Y

Корреляционный момент служит для характеристики связи между СВ X и Y .

Теорема.

Если СВ X и Y независимы, то $K_{xy} = 0$.

Прямое следствие свойств математического ожидания.

Упражнение: самостоятельно доказать утверждение теоремы

Обратное утверждение неверно:

из $K_{xy} = 0$ в общем случае НЕ СЛЕДУЕТ независимость СВ X и Y .

Корреляционный момент СВ X и Y

Следствие.

Если $K_{xy} \neq 0$, то СВ X и Y зависимы.