2.9 Зависимость и независимость случайных величин

Системы случайных величин

СВ X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют ***систему двух СВ*** (или ***двумерную СВ***). Каждую из СВ X и Y называют ***составляющей*** (или ***компонентой***) двумерной СВ.

Понятие системы СВ легко обобщается на случай более, чем двух компонент.

Примеры.

- Точка приземления летательного аппарата характеризуется системой двух СВ – географических координат.
- Контролируемые размеры детали, изготавливаемой станком-автоматом, образуют систему СВ (число компонент – количество контролируемых размеров).

Системы случайных величин

Двумерные СВ могут быть

- *дискретными* (если составляющие дискретны),
- *непрерывными* (составляющие непрерывны),
- *смешанными* (одна из составляющих дискретна, а другая непрерывна).

Закон распределения дискретной двумерной СВ

Законом распределения дискретной двумерной СВ называется перечень возможных значений (x_i, y_j) и их вероятностей

$$p(x_i, y_j) = P\left((X = x_i)\cdot(Y = y_j)\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1.$$

Закон распределения дискретной двумерной СВ

Обычно представляется таблицей вида

Y	X					
	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	$p(x_1,\ y_1)$	$p(x_2,\ y_1)$	…	$p(x_i,\ y_1)$	…	$p(x_n,\ y_1)$
y_2	$p(x_1,\ y_2)$	$p(x_2,\ y_2)$	…	$p(x_i,\ y_2)$	…	$p(x_n,\ y_2)$
…	…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1,\ y_j)$	$p(x_2,\ y_j)$	…	$p(x_i,\ y_j)$	…	$p(x_n,\ y_j)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1,\ y_m)$	$p(x_2,\ y_m)$	…	$p(x_i,\ y_m)$	…	$p(x_n,\ y_m)$

Законы распределения дискретных составляющих

Зная закон распределения двумерной СВ, можно найти законы распределения составляющих:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j), \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j), \qquad j = 1, 2, \dots, m.$$

Функция распределения двумерной СВ

Функцией распределения двумерной СВ $(X,\ Y)$ называется функция

$$F(x, y) = P\big((X < x) \cdot (Y < y)\big).$$

Плотность распределения непрерывной двумерной СВ

Пусть функция распределения $F(x,\ y)$ всюду непрерывна и имеет непрерывные смешанные частные производные второго порядка.

Плотностью распределения вероятностей $f(x,\ y)$ двумерной СВ $(X,\ Y)$ называется функция

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}.$$

График этой функции – *поверхность распределения*.

Плотность распределения непрерывной двумерной СВ

Зная плотность совместного распределения $f(x, y)$, можно найти функцию совместного распределения:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dxdy.$$

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D плоскости xOy может быть найдена как

$$P\big((X,Y) \in D\big) = \iint_{D} f(x,y)\,dxdy\ .$$

Зависимость и независимость случайных величин

Ранее было дано определение:

две СВ называются ***независимыми***, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие из возможных значений приняла другая СВ.

В противном случае эти СВ называются ***зависимыми***.

Зависимость и независимость случайных величин

Теорема.

Для того, чтобы СВ X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)\,,$$

где $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ – функции распределения составляющих.

Зависимость и независимость случайных величин

Следствие.

Для того, чтобы непрерывные СВ X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)\,,$$

где $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ – плотности распределения составляющих.

Корреляционный момент СВ X и Y

Корреляционным моментом K_{xy} СВ X и Y называется величина, равная математическому ожиданию произведения отклонений СВ X и Y:

$$K_{xy} = M\Big(\big(X - M(X)\big)\cdot\big(Y - M(Y)\big)\Big)\,, \qquad (2.26)$$

или

$$K_{xy} = M\big(\mathring{X}\cdot\mathring{Y}\big)\,.$$

Корреляционный момент СВ X и Y

Для дискретных СВ X и Y из (2.26) и (2.15) следует: корреляционный момент K_{xy} равен

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\big(x_i - M(X)\big)\cdot\big(y_j - M(Y)\big)\cdot p\big(x_i, y_j\big)\,. \qquad (2.27)$$

Для непрерывных СВ X и Y из (2.26) и (2.16) следует: корреляционный момент K_{xy} равен

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(x - M(X)\big)\cdot\big(y - M(Y)\big)\cdot f(x,y)\,dxdy\,. \qquad (2.28)$$

Корреляционный момент СВ X и Y

Из свойств математического ожидания:

$$K_{xy} = M(X\cdot Y) - M(X)\cdot M(Y)\,.$$

С учетом этого формулы (2.27) и (2.28) можно переписать в более удобном для вычислений виде.

Корреляционный момент СВ X и Y

Для дискретных СВ X и Y

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\cdot y_j\cdot p\big(x_i, y_j\big) - M(X)\cdot M(Y)\,. \qquad (2.29)$$

Для непрерывных СВ X и Y

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot y\cdot f(x,y)\,dxdy - M(X)\cdot M(Y). \qquad (2.30)$$

Корреляционный момент СВ X и Y

Корреляционный момент служит для характеристики связи между СВ X и Y.

Теорема.

Если СВ X и Y независимы, то $K_{xy} = 0$.

Прямое следствие свойств математического ожидания.

Упражнение: самостоятельно доказать утверждение теоремы

Обратное утверждение неверно:

из $K_{xy} = 0$ в общем случае НЕ СЛЕДУЕТ независимость СВ X и Y.

Корреляционный момент СВ X и Y

Следствие.

Если $K_{xy} \neq 0$, то СВ X и Y зависимы.