Изоморфность множеств

Говорят, что между множествами **A** и **B** установлено **взаимно-однозначное соответствие,** если каждому элементу множества **A** соответствует один и только один элемент множества **B,** и каждому элементы множества **B** соответствует некоторый элемент множества **A**

Множества A и **B** называются **изоморфными,** если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие

Обозначение:

A ~ B

Изоморфность множеств

Примеры.

- Преобразование $n \to 2n$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством четных натуральных чисел $2\mathbb{N}$.

  Поэтому $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$.

- Кодовые страницы сопоставляют каждому символу из некоторого набора распространенных символов (печатных и управляющих) числовой код – номер символа в кодовой таблице.

  Существует множество кодовых таблиц.

  При использовании конкретной кодовой таблицы устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством символов и множеством кодов.

Обобщение на случай бесконечных множеств

Для бесконечного множества ***A*** используется обозначение: $|A| = \infty$.

Если $A \sim B$, то множества ***A*** и ***B*** ***равномощны*** (имеют одинаковую мощность).

Обозначение: $|A| = |B|$.

Множество ***A*** ***имеет мощность, большую*** чем множество ***B***, если существует подмножество множества ***A***, изоморфное ***B***, но не существует подмножества ***B***, изоморфного ***A***.

Счетные множества

Множество называется ***счетным***, если оно изоморфно (равномощно) множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Счетное множество характеризуется свойством:

его элементы можно перенумеровать с помощью натуральных чисел.

Например: множество $2\mathbb{N}$.

Несчетные множества

Существование бесконечного множества, не являющегося счетным, обосновывает следующая теорема.

Теорема Кантора.
Множество всех действительных чисел, принадлежащих интервалу (0, 1) (отрезку [0, 1]) несчетно.

Следствие.
Множество всех действительных чисел, принадлежащих интервалу (a, b) (отрезку [a, b]) несчетно.

Пояснение: (a, b) ~ (0, 1).

Несчетные множества

Мощность отрезка [0, 1] называется ***континуумом***.

Примеры других множеств, имеющих мощность континуума:

- $\mathbb{R}$,
- множество всех точек прямой, плоскости, поверхности сферы, шара,
- множество всех прямых на плоскости…

Континуум-гипотеза

Вопрос:

существует ли множество, мощность которого превышает мощность счетного множества, но меньше мощности континуума?

Континуум-гипотеза (Г. Кантор, 1878):

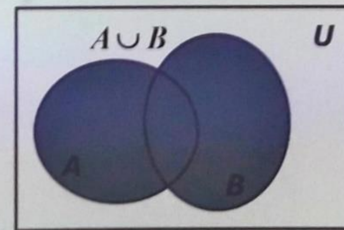
всякое бесконечное подмножество континуума $\mathbb{R}$ равномощно либо множеству натуральных чисел, либо $\mathbb{R}$.

«Промежуточных» мощностей между счетным множеством и континуумом нет

Объединение множеств

Объединением множеств ***A*** и ***B*** называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами множества ***A*** или множества ***B***.

Формально: $A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.



Алгебра подмножеств множества U

Пересечение, объединение и разность подмножеств множества **U** (универсума) также являются подмножества **U.**

Множество всех подмножеств (булеан) U с операциями пересечения, объединения, разности и дополнения образуют **алгебру подмножеств** множества **U**

Разбиение множества

Пусть ***M*** – произвольное множество.

Семейство непустых множеств $\{X_i\}_{i \in I}$, где ***I*** – некоторое множество индексов (конечное или бесконечное), называется ***разбиением M***, если

1) $X_i \cap X_j = \varnothing$ для любых $i, j \in I, \quad i \neq j$;

2) $M = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$.