# 6. Алгоритмы на графах (продолжение)

# 6.3 Построение кратчайшего остова

Задача отыскания кратчайшего остова графа является классической задачей теории графов.

Исследование методов решения этой задачи послужили основой для многих других важных результатов теории графов.

## Остов

Напоминание:

граф ***G'***(***V'***, ***E'***) называется *подграфом* графа ***G***(***V***, ***E***), если $V' \subset V \;\&\; E' \subset E$.

Если $V' = V \;\&\; E' \subset E$, то ***G'*** называется ***остовным подграфом G***.

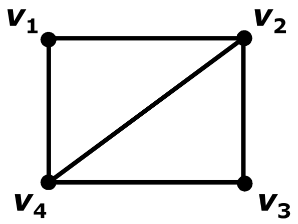
Остовный подграф, который является деревом, называется ***остовом*** или ***каркасом***.

Несвязный граф не имеет остовов.

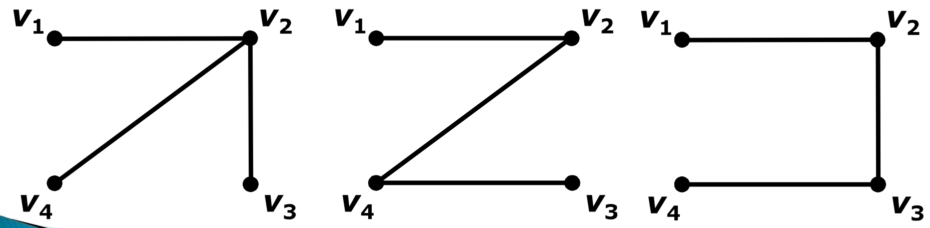
Связный граф может иметь множество остовов.

Пример.

***G***(***V***, ***E***):




Остовы графа ***G***:




Замечание.

Для определения остова достаточно определить ребра (т. к. вершины остова – это все вершины графа ***G***).

Если граф ***G*** является взвешенным (заданы длины ребер), то возникает ***задача нахождения кратчайшего остова***.

Эта задача имеет множество практических интерпретаций.

Например:

имеется заданное множество населенных пунктов и соединяющих их дорог;
требуется определить минимальный (по сумме расстояний) набор рейсовых маршрутов, который позволил бы попасть из каждого населенного пункта в любой другой.

Можно указать множество способов определения какого-нибудь остова графа.

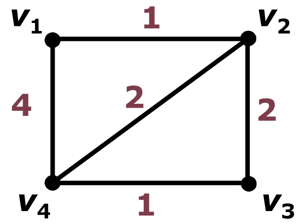
Например:

- алгоритм поиска в глубину строит остов (по ребрам возврата);
- множество кратчайших путей из заданной вершины до всех остальных вершин образует остов.

Однако полученные таким образом остовы не обязательно являются кратчайшими.

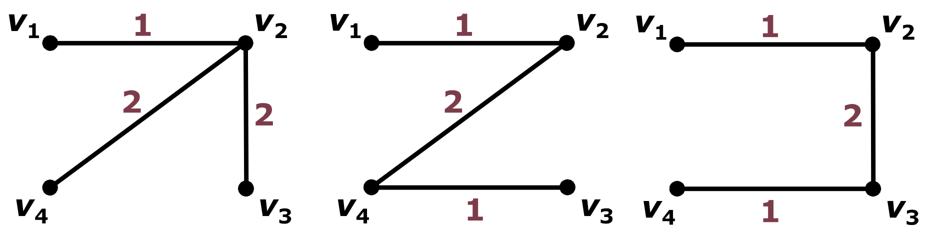
Пример.

$G(V, E)$:




Остовы графа $G$:

$G_1$ $G_2$ $G_3$




$G_1$ – дерево кратчайших путей от вершины $v_2$ (не является кратчайшим остовом);

$G_2$ и $G_3$ – кратчайшие остовы.

## Схема алгоритма построения кратчайшего остова

***Вход***: $C$ – матрица весов (длин) дуг графа $G(V, E)$;

***выход***: $T$ – кратчайший остов $G$.

В процессе работы алгоритма $T$ – множество непересекающихся деревьев, являющихся подграфами $G$.

В начале работы алгоритма $T$ включает отдельные вершины $G$, в конце работы – содержит единственный элемент – кратчайший остов $G$.

***Схема алгоритма***:

1. $T = V$
2. Пока $T$ содержит больше одного элемента, выполнять
   - 2.1 взять любой элемент из $T$,
   - 2.2 найти ближайшее к нему поддерево,
   - 2.3 соединить эти деревья в $T$.

Различные способы выбора поддерева для наращивания на шаге 2.1 приводят к различным конкретным вариантам алгоритма построения кратчайшего остова.

В ***алгоритме Прима*** кратчайший остов порождается в процессе разрастания одного дерева, к которому присоединяются одиночные вершины.

При этом для каждой вершины $v$, кроме начальной, используются две пометки:

$\alpha[v]$ – ближайшая к $v$ вершина, уже включённая в остов,

$\beta[v]$ – длина ребра, соединяющего $v$ с ближайшей вершиной остова.

Если вершину $v$ на данном этапе ещё нельзя соединить с остовом одним ребром, то

$$\alpha[v] = 0, \quad \beta[v] = \infty.$$

## Алгоритм Прима

***Вход***: ***C*** – матрица весов (длин) дуг (квадратная матрица порядка ***n***);

***выход***: ***T*** – множество ребер кратчайшего остова.

***S*** – множество вершин, включенных в кратчайший остов.

***Описание алгоритма***:

**1.** Выбор $u \in V$;
***S*** = {***u***};
***T*** = Ø

**Выбираем произвольную вершину; включаем ее в кратчайший остов**

**2.** Для $v \in V \setminus \{u\}$
если $v \in \Gamma(u)$,
то
***α***[***v***] = ***u***;
***β***[***v***] = $c_{uv}$

**$u$ – ближайшая вершина остова; $c_{uv}$ – длина соответствующего ребра**

иначе
***α***[***v***] = 0;
***β***[***v***] = ∞

**Ближайшая вершина остова и расстояние до нее неизвестны**

**3.** Для ***i*** = 1, 2, … , ***n*** – 1

**3.1** ***x*** = ∞ **Начальное значение для поиска новой вершины**

**3.2** Для $v \in V \setminus S$
если ***β***[***v***] < ***x***
то
***w*** = ***v***;
***x*** = ***β***[***v***]

**Найдена более близкая вершина; сохраняем расстояние до нее**

**3.3** ***S*** = ***S*** ∪ {***w***};
***T*** = ***T*** ∪ (***α***[***w***], ***w***)

**Добавляем найденную вершину в остов, а найденное ребро – в множество ребер остова**

**3.4** Для $v \in \Gamma(w)$
если $v \notin S$,
то
если ***β***[***v***] > $c_{vw}$,
то
***α***[***v***] = ***w***;
***β***[***v***] = $c_{vw}$

**Изменяем ближайшую вершину остова и длину ведущего к ней ребра**

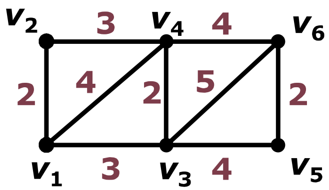
<u>Замечание</u>.

Алгоритм Прима буквально следует приведенной выше схеме алгоритма построения кратчайшего остова.

В качестве первого из соединяемых деревьев используется одно и то же разрастающееся дерево ***T***;
в качестве второго – ближайшая одиночная вершина (еще не включенная в остов).

Пример.

Рассмотрим граф:




Матрица весов (длин) имеет вид

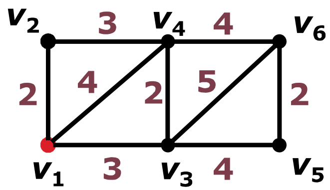
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 5 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 1:

Выбрана вершина $\boldsymbol{v_1}$;

$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{v_1}\}$;

$\boldsymbol{T} = \varnothing$




Шаг 2:

$V \setminus \{v_1\} = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_2}$

$v_2 \in \Gamma(v_1)$

$\Downarrow$

$\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{v_2}] = \boldsymbol{v_1}$;

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_2}] = \boldsymbol{c_{12}} = 2$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_3}$

$v_3 \in \Gamma(v_1)$

$\Downarrow$

$\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{v_3}] = \boldsymbol{v_1}$;

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_3}] = \boldsymbol{c_{13}} = 3$

Шаг 2 (продолжение):

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_4}$

$v_4 \in \Gamma(v_1)$

$\Downarrow$

$\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{v_4}] = \boldsymbol{v_1}$;

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_4}] = \boldsymbol{c_{14}} = 4$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_5}$

$v_5 \notin \Gamma(v_1)$

$\Downarrow$

$\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{v_5}] = 0$;

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_5}] = \infty$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_6}$

$v_6 \notin \Gamma(v_1)$

$\Downarrow$

$\boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{v_6}] = 0$;

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_6}] = \infty$

Итог:

$\boldsymbol{\alpha} = (-, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}, 0, 0)$;

$\boldsymbol{\beta} = (-, 2, 3, 4, \infty, \infty)$.

Шаг 3: $\underline{\boldsymbol{i} = 1}$

**3.1** $\boldsymbol{x} = \infty$

**3.2** $V \setminus S = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_2}$

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_2}] = 2 < \boldsymbol{x}$

$\Downarrow$

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v_2}$;

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_2}] = 2$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_3}$

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_3}] = 3 > \boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_4}$

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_4}] = 4 > \boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_5}$

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_5}] = \infty > \boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_6}$

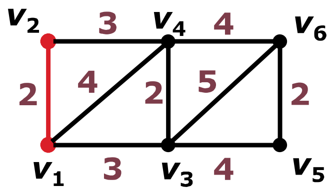
$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_6}] = \infty > \boldsymbol{x}$

Шаг 3 (продолжение):

**3.3** $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S} \cup \{\boldsymbol{w}\} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$;

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \cup (\boldsymbol{a}[\boldsymbol{w}], \boldsymbol{w}) = \{(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})\}$

**3.4** $\Gamma(w) = \Gamma(v_2) = \{v_1, v_4\}$




$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_1}$

$v_1 \in S$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_4}$

$v_4 \notin S$

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_4}] = 4 > \boldsymbol{c_{42}} = 3$

$\boldsymbol{a}[\boldsymbol{v_4}] = \boldsymbol{v_2}$;

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_4}] = \boldsymbol{c_{42}} = 3$

Итог:

$\boldsymbol{a} = (-, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, 0, 0)$;

$\boldsymbol{\beta} = (-, 2, 3, 3, \infty, \infty)$.

Шаг 3: $\boldsymbol{i} = 2$

**3.1** $\boldsymbol{x} = \infty$

**3.2** $V \setminus S = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_3}$

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_3}] = 3 < \boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v_3}$;

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_3}] = 3$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_4}$

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_4}] = 3 = \boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_5}$

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_5}] = \infty > \boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_6}$

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_6}] = \infty > \boldsymbol{x}$

Шаг 3 (продолжение):

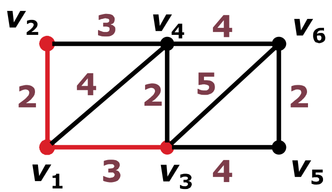
**3.3** $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S} \cup \{\boldsymbol{w}\} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$;

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \cup (\boldsymbol{a}[\boldsymbol{w}], \boldsymbol{w}) = \{(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}), (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_3})\}$

**3.4** $\Gamma(w) = \Gamma(v_3) = \{v_1, v_4, v_5, v_6\}$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_1}$

$v_1 \in S$




$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_4}$

$v_4 \notin S$

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_4}] = 3 > \boldsymbol{c_{43}} = 2$

$\boldsymbol{a}[\boldsymbol{v_4}] = \boldsymbol{v_3}$;

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_4}] = \boldsymbol{c_{43}} = 2$

Шаг 3 (продолжение):

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_5}$

$v_5 \notin S$

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_5}] = \infty > \boldsymbol{c_{53}} = 4$

$\boldsymbol{a}[\boldsymbol{v_5}] = \boldsymbol{v_3}$;

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_5}] = \boldsymbol{c_{53}} = 4$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_6}$

$v_6 \notin S$

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_6}] = \infty > \boldsymbol{c_{63}} = 5$

$\boldsymbol{a}[\boldsymbol{v_6}] = \boldsymbol{v_3}$;

$\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{v_6}] = \boldsymbol{c_{63}} = 5$

Итог:

$\boldsymbol{a} = (-, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_3})$;

$\boldsymbol{\beta} = (-, 2, 3, 2, 4, 5)$.

Шаг 3: <u>$i = 3$</u>

**3.1** $x = \infty$

**3.2** $V \setminus S = \{v_4, v_5, v_6\}$

$v = v_4$

$\beta[v_4] = 2 < x$

$w = v_4$;

$x = \beta[v_4] = 2$

$v = v_5$

$\beta[v_5] = 4 > x$

$v = v_6$

$\beta[v_6] = 5 > x$

Шаг 3 (продолжение):

**3.3** $S = S \cup \{w\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$;

$T = T \cup (a[w], w) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_4)\}$

**3.4** $\Gamma(w) = \Gamma(v_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$

$v_1 \in S,\ v_2 \in S,\ v_3 \in S$

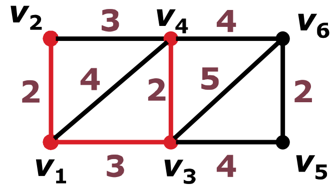
$v = v_6$

$v_6 \notin S$

$\beta[v_6] = 5 > c_{64} = 4$

$a[v_6] = v_4$;

$\beta[v_6] = c_{64} = 4$




<u>Итог</u>:

$a = (-, v_1, v_1, v_3, v_3, v_4)$;

$\beta = (-, 2, 3, 2, 4, 4)$.

Шаг 3: <u>$i = 4$</u>

**3.1** $x = \infty$

**3.2** $V \setminus S = \{v_5, v_6\}$

$v = v_5$

$\beta[v_5] = 4 < x$

$w = v_5$;

$x = \beta[v_5] = 4$

$v = v_6$

$\beta[v_6] = 4 = x$

Шаг 3 (продолжение):

**3.3** $S = S \cup \{w\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;

$T = T \cup (a[w], w) =$

$= \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5)\}$

**3.4** $\Gamma(w) = \Gamma(v_5) = \{v_3, v_6\}$

$v = v_3$

$v_3 \in S$

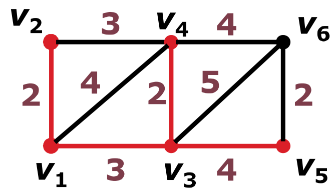
$v = v_6$

$v_6 \notin S$

$\beta[v_6] = 4 > c_{65} = 2$

$a[v_6] = v_5$;

$\beta[v_6] = c_{65} = 2$




<u>Итог</u>:

$a = (-, v_1, v_1, v_3, v_3, v_5)$;

$\beta = (-, 2, 3, 2, 4, 2)$.

Шаг 3: $\underline{i = 5} = n - 1$

**3.1** $x = \infty$

**3.2** $V \setminus S = \{v_6\}$

$v = v_6$

$\beta[v_6] = 2 < x$

⇩

$w = v_6$;

$x = \beta[v_6] = 2$

Шаг 3 (продолжение):

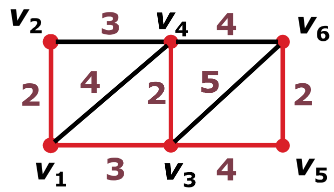
**3.3** $S = S \cup \{w\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$;

$T = T \cup (a[w], w) =$

$= \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_5, v_6)\}$

**3.4** $\Gamma(w) = \Gamma(v_6) = \{v_3, v_4, v_5\}$

$v_3 \in S,\ v_4 \in S,\ v_5 \in S$




Конец работы алгоритма.

Кратчайший остов определяется множеством ребер
$T = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_5, v_6)\}$

# 6.4 Потоки в сетях. Нахождение максимального потока

## Сеть

В литературе можно встретить различные определения *сети*.

Это связано с широким применением сетевых моделей к решению задач различных классов.

В рамках данной дисциплины будем использовать следующее определение.

***Сетью*** (***транспортной сетью***) будем называть ориентированный (***n***, ***m***)-граф ***G***(***V***, ***E***), для которого выполняются условия:

1) существует одна и только одна вершина ***s***, называемая ***источником***, для которой

$$d^{+}(s)=0;$$ **нет ни одной дуги, входящей в *s***

2) существует одна и только одна вершина ***t***, называемая ***стоком***, для которой

$$d^{-}(t)=0;$$ **нет ни одной дуги, исходящей из *t***

3) каждой дуге $(u,v)\in E$ поставлено в соответствие некоторое число ***c***(***u***, ***v***) ≥ 0, называемое ***пропускной способностью дуги***.

**Граф *G*(*V*, *E*) – нагруженный граф, который может быть задан матрицей весов (пропускных способностей дуг)**

Замечание.

Нулевое значение элемента $\boldsymbol{c_{uv}} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ матрицы **C** пропускных способностей дуг соответствует дуге с нулевой пропускной способностью (т. е. отсутствию дуги);

положительное значение $\boldsymbol{c_{uv}} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ – дуге с ненулевой пропускной способностью (т. е. дуга присутствует).

В дальнейшем будем предполагать:

нумерация узлов сети такова, что узел $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{s}$ является источником, а узел $\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{t}$ – стоком.

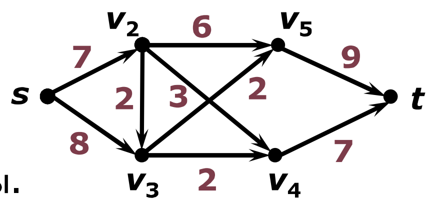
Узлы сети, отличные от источника и стока, иногда называют *промежуточными*.

Пример.

***s*** – источник,

***t*** – сток,

$\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}$ – промежуточные узлы.




**Примеры приложений.**

- Имеется сеть автомобильных дорог, по которым можно проехать из пункта ***A*** в пункт ***B***.

  Дороги могут пересекаться в промежуточных пунктах.

  Количество автомобилей, которые могут проехать по каждому отрезку дороги в единицу времени (пропускная способность дороги), ограничено.

  Вопросы:
  - какое максимальное количество автомобилей, которые могут проехать из ***A*** в ***B*** за единицу времени без образования пробок?
  - какие дороги и насколько нужно расширить, чтобы увеличить максимальный автомобильный поток на заданную величину?

- Имеется сеть трубопроводов, соединяющих пункт ***A*** (нефтепромысел) с пунктом ***B*** (нефтезаводом).

  Трубопроводы могут соединяться и разветвляться в промежуточных пунктах.

  Количество нефти, которое может быть перекачано по каждому отрезку трубопровода в единицу времени (пропускная способность трубопровода), ограничено.

  Вопрос:

  сколько нефти можно прокачать через такую сеть в единицу времени?

  И т. д.

## Поток в сети

Функция

$$f: E \to R$$

называется ***потоком в сети G***(***V***, ***E***), если выполняются условия:

**1)** для любой дуги $(u, v) \in E$

$$0 \le f(u, v) \le c(u, v)$$

**Поток через любую дугу неотрицателен и не превосходит пропускной способности дуги**

**2)** для любого промежуточного узла ***v***

$$\sum_{\{u \mid (u,v) \in E\}} f(u, v) - \sum_{\{u \mid (v,u) \in E\}} f(v, u) = 0 .$$

**Сумма потоков по дугам, входящим в узел, равна сумме потоков по дугам, исходящим из него**

***Утверждение***.

Для любого потока ***f*** в сети ***G***(***V***, ***E***) справедливо равенство

$$\sum_{\{u \mid (s,u) \in E\}} f(s, u) = \sum_{\{u \mid (u,t) \in E\}} f(u, t).$$

Число

$$w(f) = \sum_{\{u \mid (s,u) \in E\}} f(s, u) \qquad \left( \text{или} \quad \sum_{\{u \mid (u,t) \in E\}} f(u, t) \right)$$

называется ***величиной потока f***.

Пусть ***f*** – поток в сети ***G***(***V***, ***E***).

Дуга $(u, v) \in E$ называется ***насыщенной***, если

$$f(u, v) = c(u, v).$$

**Поток по дуге равен пропускной способности этой дуги**

Поток называется ***полным***, если любой путь $\overrightarrow{\langle s, t \rangle}$ содержит, по крайней мере, одну насыщенную дугу.

Поток ***f*** * называется ***максимальным***, если для любого потока ***f*** в сети ***G*** справедливо

$$w(f) \le w(f^*).$$

Замечание.

Ясно, что максимальный поток ***f*** обязательно является полным:
в противном случае в ***G*** существует простой путь $\langle \overrightarrow{s,t} \rangle$, не содержащий насыщенных дуг и, следовательно, можно увеличить потоки по всем дугам этого пути, тем самым увеличив величину потока ***w***(***f***) – противоречие с предположением о максимальности ***f***.

Обратное в общем случае неверно:
существуют полные потоки, не являющиеся максимальными.

***Задача о максимальном потоке:***
в данной сети найти поток максимальной величины.

Примеры интерпретации (см. выше):

- определение максимально возможного объема жидкости или газа, который может быть перекачан по сети трубопроводов от источника до пункта потребления;
- аналогично – определение максимально возможного потока транспорта в сети автострад, максимального потока грузов при железнодорожных перевозках и т. п.

!

Принципиальное отличие этой задачи от рассмотренных ранее задач дискретной оптимизации:

перебор всех возможных вариантов невозможен;

более того, само существование максимального потока не очевидно.

Ответом на второе замечание является

***Теорема***.

В каждой сети существует максимальный поток.

## Разрезы

Напоминание:

***разрезом связного графа G***(***V***, ***E***) называется множество ребер $P \subset E$, удаление которых делает граф несвязным.

Пусть ***G***(***V***, ***E***) – связный граф,
***u*** и ***w*** – две его несмежные вершины.

Пусть $P \subset E$ – подмножество ребер ***G***, такое что ***u*** и ***w*** принадлежат разным компонентам связности графа ***G*** – ***P*** (графа, полученного из ***G*** путем удаления всех ребер, принадлежащих ***P***).

Такое множество ***P*** называется (***u***, ***w***)-***разрезом графа G***.

Всякий (***u***, ***w***)-разрез графа ***G***(***V***, ***E***) определяется разбиением множества вершин ***V*** на два подмножества ***U*** и ***W***, такие что

$$U \subset V,\ \ W \subset V,\ \ U \cup W = V,\ \ U \cap W = \varnothing,$$
$$u \in U,\ \ w \in W,$$

при этом множество ***P*** содержит все ребра, соединяющие вершины из ***U*** и ***W***.

Пусть ***G***(***V***, ***E***) – сеть,

$P \subset E$ – (***s***, ***t***)-разрез сети ***G***.

Тогда

$$V = S \cup T,\ \ S \cap T = \varnothing,\ \ s \in S,\ \ t \in T,$$

причем ***P*** содержит как дуги, идущие от узлов множества ***S*** к узлам множества ***T***, так и дуги, идущие от узлов множества ***T*** к узлам множества ***S***.

Обозначим:

***P*** $^{+}$ – множество дуг от ***S*** к ***T***,

***P*** $^{-}$ – множество дуг от ***T*** к ***S***,

$$P = P^{+} \cup P^{-}.$$

Обозначим:

***F***(***P***) – сумма потоков через дуги разреза ***P***:

$$F(P) \overset{\text{def}}{=} \sum_{(u,v)\in P} f(u,v);$$

***C***(***P***) – ***пропускная способность разреза P*** (сумма пропускных способностей дуг разреза ***P***):

$$C(P) \overset{\text{def}}{=} \sum_{(u,v)\in P} c(u,v);$$

***F***(***P*** $^{+}$) и ***F***(***P*** $^{-}$) – суммы потоков через «положительную» и «отрицательную» части разреза ***P***:

$$F(P^{+}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{u\in S,\, v\in T} f(u,v);\quad F(P^{-}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{u\in T,\, v\in S} f(u,v).$$

***Лемма 1***.

$$w(f) = F(P^{+}) - F(P^{-}).$$

***Лемма 2***.

$$w(f) \le F(P).$$

***Лемма 3***.

$$\max_{f} w(f) \le \min_{P} C(P).$$

***Теорема Форда-Фалкерсона*** (1956 г).

Пусть ***G***(***V***, ***E***) – сеть.

Максимальный поток в сети ***G*** равен минимальной пропускной способности «положительной» части (***s***, ***t***)-разреза сети:

$$w(f^*) = \max_f w(f) = \min_P C(P^+).$$

## Алгоритм нахождения максимального потока

Алгоритм реализует идею доказательства теоремы Форда-Фалкерсона:

используется граф ***G′***, полученный из ***G*** «удалением» ориентации дуг.

В множество вершин ***S*** включаются вершины $u \in V$, обладающие свойством:

в ***G′*** существует цепь $\langle s, u \rangle$, причем дуги вдоль пути $\overrightarrow{\langle s, u \rangle}$ в ***G*** не насыщены, а дуги против направления пути имеют положительный поток.

Такие цепи $\langle s, u \rangle$, называются ***аугментальными цепями***.

Если оказывается, что $t \in S$, то это означает, что поток не максимальный и его можно увеличить на некоторую величину ***δ***.

***Вход***: ***C*** – матрица пропускных способностей дуг сети ***G***(***V***, ***E***) с источником ***s*** и стоком ***t*** (квадратная матрица порядка ***n***);

***выход***: ***F*** – матрица максимального потока (квадратная матрица порядка ***n***).

Используются обозначения:

$\boldsymbol{N}$ – вектор меток узлов сети (0 или 1) – вектор размерности $\boldsymbol{n}$;

$\boldsymbol{S}$ – вектор принадлежности узлов сети множеству $\boldsymbol{S}$ (0 или 1) – вектор размерности $\boldsymbol{n}$;

Для каждого узла сети: **Векторы размерности *n***

- $\boldsymbol{p}$ – номер предшествующей вершины в аугментальной цепи (от 1 до $\boldsymbol{n}$);
- $\boldsymbol{d}$ – метка («–» или «+»), определяющая знак возможного изменения потока по входящим в узел дугам;
- $\boldsymbol{\delta}$ – величина возможного изменения потока.

***Описание алгоритма***:

**1.** Для всех $u, v \in V$
$f_{uv} = 0$

**Формирование нулевого потока**

**2.** Для $v \in V$
$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{v}] = 0$;
$\boldsymbol{N}[\boldsymbol{v}] = 0$;
$\boldsymbol{d}[\boldsymbol{v}] =$ «+»
$\boldsymbol{p}[\boldsymbol{v}] = 0$;
$\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{v}] = 0$;

**Инициализация:**
**все узлы не принадлежат *S*,**
**все узлы не помечены,**
**поток по всем дугам может возрастать,**
**предшествующая вершина в аугментальной цепи отсутствует ,**
**изменение потока по всем дугам равно нулю**

**3.** $\boldsymbol{S}[\boldsymbol{s}] = 1$;
$\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{s}] = \infty$;

**Добавляем источник сети в множество *S*,**
**изменение потока, входящего в *s*, не ограничено**

**4.** $\boldsymbol{a} = 0$ **Признак расширения *S***

**5.** Для $v \in V$

если ($\boldsymbol{S}[\boldsymbol{v}] = 1$) & ($\boldsymbol{N}[\boldsymbol{v}] = 0$)

**Узел *v* принадлежит *S* и не помечен**

то

**5.1** для $u \in \Gamma(v)$

если ($\boldsymbol{S}[\boldsymbol{u}] = 0$) & ($\boldsymbol{f}_{vu} < \boldsymbol{c}_{vu}$)

**Узел *u* не принадлежит *S* и поток по дуге (*v*, *u*) меньше ее пропускной способности**

то

$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{u}] = 1$;
$\boldsymbol{d}[\boldsymbol{u}] =$ «+»;
$\boldsymbol{p}[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{v}$;
$\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{u}] = \min\{\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{v}], \boldsymbol{c}_{vu} - \boldsymbol{f}_{vu}\}$;
$\boldsymbol{a} = 1$

**Узел *u* включается в *S*, допускается увеличение потока по дугам, входящим в *u*, узел *v* становится предшествующим *u*, определяется величина возможного увеличения потока *δ***

**5.2** Для $u \in \Gamma^{-1}(v)$

если ($\boldsymbol{S}[\boldsymbol{u}] = 0$) & ($\boldsymbol{f}_{uv} > 0$)

**Узел *u* не принадлежит *S* и поток по дуге (*u*, *v*) положителен**

то

$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{u}] = 1$;
$\boldsymbol{d}[\boldsymbol{u}] =$ «–»;
$\boldsymbol{p}[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{v}$;
$\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{u}] = \min\{\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{v}], \boldsymbol{f}_{uv}\}$;
$\boldsymbol{a} = 1$

**5.3** $\boldsymbol{N}[\boldsymbol{v}] = 1$ **Помечаем узел *v***

**6.** Если $S[t] = 1$

то

**6.1** $x = t$;

$\delta = \delta[t]$

**$x$ – текущий узел аугментальной цепи,**
**$\delta$ – величина изменения потока**

**6.2** пока $x \neq s$

выполнять

**6.2.1** если $d[x]$ = «+»

то

$f_{p[x],\, x} = f_{p[x],\, x} + \delta$

иначе

$f_{x,\, p[x]} = f_{x,\, p[x]} - \delta$

**6.2.2** $x = p[x]$

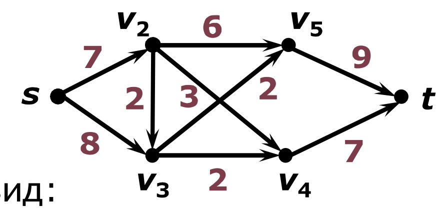
**6.3** переход на шаг 2

**7.** Если $a \neq 0$

то переход на шаг 4.

Пример.

Рассмотрим сеть:




Матрица пропускных способностей дуг имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 1.

Формирование нулевого потока:

все элементы матрицы $F$ равны нулю.

Шаг 2.

Инициализация: $N = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$;

$S = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$;

$d = (+, +, +, +, +, +)$;

$p = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$;

$\delta = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$

Шаг 3.

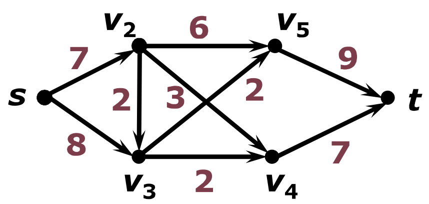
$S = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$;

$\delta = (\infty, 0, 0, 0, 0, 0)$

**Добавляем источник в множество $S$**

Шаг 4.

$a = 0$




Шаг 5.

$v = v_1$ (т. е. $v = s$)

$(S[v] = 1)$ & $(N[v] = 0)$

**5.1** $\Gamma(v_1) = \{v_2, v_3\}$

$u = v_2$

$(S[2] = 0)$ & $(f_{12} < c_{12})$

$S[2] = 1$;

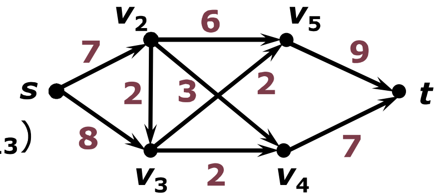
$d[2]$ = «+»;

$p[2] = 1$;

$\delta[2] = \min\{\delta[1], c_{12} - f_{12}\} = 7$;

$a = 1$

<u>Шаг 5</u> (продолжение).




$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_3}$

$(\boldsymbol{S}[3] = 0)\ \&\ (\boldsymbol{f_{13}} < \boldsymbol{c_{13}})$

⇩

$\boldsymbol{S}[3] = 1;$

$\boldsymbol{d}[3] = «+»;$

$\boldsymbol{p}[3] = 1;$

$\boldsymbol{\delta}[3] = \mathbf{min}\{\boldsymbol{\delta}[1],\ \boldsymbol{c_{13}} - \boldsymbol{f_{13}}\} = 8;$

$\boldsymbol{a} = 1$

**5.2** $\Gamma^{-1}(v) = \varnothing$

**5.3** $\boldsymbol{N}[1] = 1$

Итог:

$\boldsymbol{N} = (1, 0, 0, 0, 0, 0);$

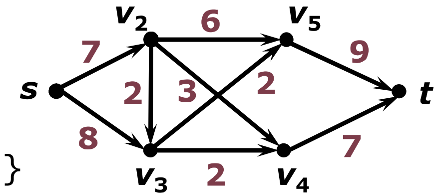
$\boldsymbol{S} = (1, 1, 1, 0, 0, 0);$

$\boldsymbol{d} = (+, +, +, +, +, +);$

$\boldsymbol{p} = (0, 1, 1, 0, 0, 0);$

$\boldsymbol{\delta} = (\infty, 7, 8, 0, 0, 0)$

<u>Шаг 5</u> (продолжение).




$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_2}$

$(\boldsymbol{S}[\boldsymbol{v}] = 1)\ \&\ (\boldsymbol{N}[\boldsymbol{v}] = 0)$

**5.1** $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{v_2}) = \{\boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}\}$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_3}$

$\boldsymbol{S}[3] \neq 0$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_4}$

$(\boldsymbol{S}[4] = 0)\ \&\ (\boldsymbol{f_{24}} < \boldsymbol{c_{24}})$

⇩

$\boldsymbol{S}[4] = 1;$

$\boldsymbol{d}[4] = «+»;$

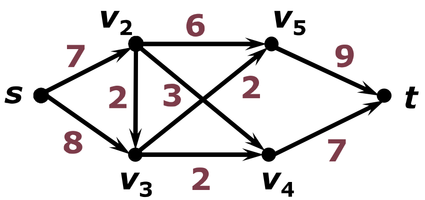
$\boldsymbol{p}[4] = 2;$

$\boldsymbol{\delta}[4] = \mathbf{min}\{\boldsymbol{\delta}[2],\ \boldsymbol{c_{24}} - \boldsymbol{f_{24}}\} =$

$= \mathbf{min}\{7, 3\} = 3;$

$\boldsymbol{a} = 1$

<u>Шаг 5</u> (продолжение).




$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_5}$

$(\boldsymbol{S}[5] = 0)\ \&\ (\boldsymbol{f_{25}} < \boldsymbol{c_{25}})$

⇩

$\boldsymbol{S}[5] = 1;$

$\boldsymbol{d}[5] = «+»;$

$\boldsymbol{p}[5] = 2;$

$\boldsymbol{\delta}[5] = \mathbf{min}\{\boldsymbol{\delta}[2],\ \boldsymbol{c_{25}} - \boldsymbol{f_{25}}\} = \mathbf{min}\{7, 6\} = 6;$

$\boldsymbol{a} = 1$

**5.2** $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{v_2}) = \{\boldsymbol{v_1}\}$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_1}$

$\boldsymbol{S}[1] \neq 0$

**5.3** $\boldsymbol{N}[2] = 1$

Итог:

$\boldsymbol{N} = (1, 1, 0, 0, 0, 0);$

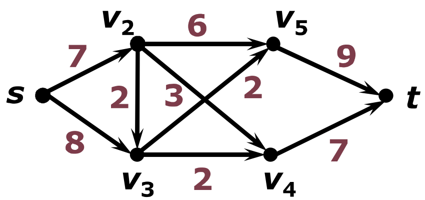
$\boldsymbol{S} = (1, 1, 1, 1, 1, 0);$

$\boldsymbol{d} = (+, +, +, +, +, +);$

$\boldsymbol{p} = (0, 1, 1, 2, 2, 0);$

$\boldsymbol{\delta} = (\infty, 7, 8, 3, 6, 0)$

<u>Шаг 5</u> (продолжение).




$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_3}$

$(\boldsymbol{S}[\boldsymbol{v}] = 1)\ \&\ (\boldsymbol{N}[\boldsymbol{v}] = 0)$

**5.1** $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{v_3}) = \{\boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}\}$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_4}$

$\boldsymbol{S}[4] \neq 0$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_5}$

$\boldsymbol{S}[5] \neq 0$

**5.2** $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{v_3}) = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_1}$

$\boldsymbol{S}[1] \neq 0$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_2}$

$\boldsymbol{S}[2] \neq 0$

**5.3** $\boldsymbol{N}[3] = 1$

Итог:

$\boldsymbol{N} = (1, 1, 1, 0, 0, 0);$

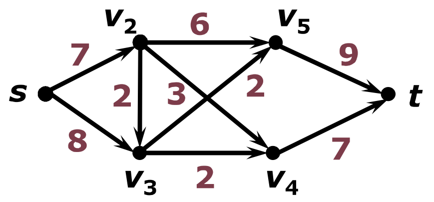
$\boldsymbol{S} = (1, 1, 1, 1, 1, 0);$

$\boldsymbol{d} = (+, +, +, +, +, +);$

$\boldsymbol{p} = (0, 1, 1, 2, 2, 0);$

$\boldsymbol{\delta} = (\infty, 7, 8, 3, 6, 0)$

Шаг 5 (продолжение).




$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_4}$

$(\boldsymbol{S}[\boldsymbol{v}] = 1)$ & $(\boldsymbol{N}[\boldsymbol{v}] = 0)$

**5.1** $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{v_4}) = \{\boldsymbol{v_6}\} = \{\boldsymbol{t}\}$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_6}$

$(\boldsymbol{S}[6] = 0)$ & $(\boldsymbol{f_{46}} < \boldsymbol{c_{46}})$

$\boldsymbol{S}[6] = 1;$

$\boldsymbol{d}[6] =$ «+»;

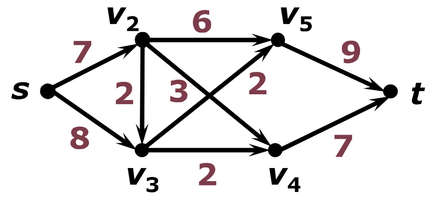
$\boldsymbol{p}[6] = 4;$

$\boldsymbol{\delta}[6] = \mathbf{min}\{\boldsymbol{\delta}[4], \boldsymbol{c_{46}} - \boldsymbol{f_{46}}\} =$

$= \mathbf{min}\{3, 7\} = 3;$

$\boldsymbol{a} = 1$

Шаг 5 (продолжение).




**5.2** $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{v_4}) = \{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_2}$

$\boldsymbol{S}[2] \neq 0$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_3}$

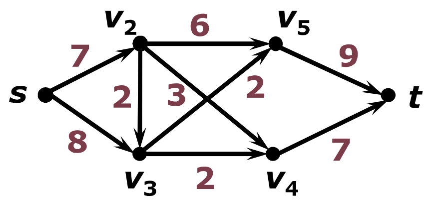
$\boldsymbol{S}[3] \neq 0$

**5.3** $\boldsymbol{N}[4] = 1$

Итог:

$\boldsymbol{N} = (1, 1, 1, 1, 0, 0);$
$\boldsymbol{S} = (1, 1, 1, 1, 1, 1);$
$\boldsymbol{d} = (+, +, +, +, +, +);$
$\boldsymbol{p} = (0, 1, 1, 2, 2, 4);$
$\boldsymbol{\delta} = (\infty, 7, 8, 3, 6, 3)$

Шаг 5 (продолжение).




$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_5}$

$(\boldsymbol{S}[\boldsymbol{v}] = 1)$ & $(\boldsymbol{N}[\boldsymbol{v}] = 0)$

**5.1** $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{v_5}) = \{\boldsymbol{v_6}\} = \{\boldsymbol{t}\}$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_6}$

$\boldsymbol{S}[6] \neq 0$

**5.2** $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{v_5}) = \{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_2}$

$\boldsymbol{S}[2] \neq 0$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_3}$

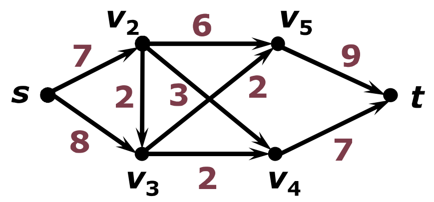
$\boldsymbol{S}[3] \neq 0$

**5.3** $\boldsymbol{N}[5] = 1$

Итог:

$\boldsymbol{N} = (1, 1, 1, 1, 1, 0);$
$\boldsymbol{S} = (1, 1, 1, 1, 1, 1);$
$\boldsymbol{d} = (+, +, +, +, +, +);$
$\boldsymbol{p} = (0, 1, 1, 2, 2, 4);$
$\boldsymbol{\delta} = (\infty, 7, 8, 3, 6, 3)$

Шаг 5 (продолжение).




$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_6} = \boldsymbol{t}$

$(\boldsymbol{S}[\boldsymbol{v}] = 1)$ & $(\boldsymbol{N}[\boldsymbol{v}] = 0)$

**5.1** $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{t}) = \varnothing$

**5.2** $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{t}) = \{\boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}\}$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_4}$

$\boldsymbol{S}[4] \neq 0$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_5}$

$\boldsymbol{S}[5] \neq 0$

**5.3** $\boldsymbol{N}[6] = 1$

Итог:

$\boldsymbol{N} = (1, 1, 1, 1, 1, 1);$
$\boldsymbol{S} = (1, 1, 1, 1, 1, 1);$
$\boldsymbol{d} = (+, +, +, +, +, +);$
$\boldsymbol{p} = (0, 1, 1, 2, 2, 4);$
$\boldsymbol{\delta} = (\infty, 7, 8, 3, 6, 3)$

Шаг 6.

$S[t] = 1$

**6.1** $x = t$;

$\delta = \delta[t] = 3$

$x = 6 \neq s$

**6.2.1** $d[x] =$ «+»

$f_{46} = f_{46} + \delta = 0 + 3 = 3$

**6.2.2** $x = p[6] = 4$

$x = 4 \neq s$

**6.2.1** $d[x] =$ «+»

$f_{24} = f_{24} + \delta = 0 + 3 = 3$

**6.2.2** $x = p[4] = 2$

Шаг 6 (продолжение).

$x = 2 \neq s$

**6.2.1** $d[x] =$ «+»

$f_{12} = f_{12} + \delta = 0 + 3 = 3$

**6.2.2** $x = p[2] = 1$

$x = 1 = s$

**6.3** переход на шаг 2.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаги 2 – 4 повторяются без изменений.

Изменения на шаге 5:

$v = v_1$

$\delta[2] = \min\{\delta[1], c_{12} - f_{12}\} = \min\{\infty, 7 - 3\} = 4$;

$v = v_2$

$f_{24} = c_{24} \rightarrow S = (1, 1, 1, 0, 1, 0)$; $p = (0, 1, 1, 2, 2, 0)$;

$\delta = (\infty, 4, 8, 0, 0, 0)$

$\delta[5] = \min\{\delta[2], c_{25} - f_{25}\} = \min\{4, 6\} = 4$;

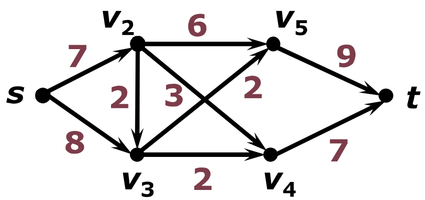
Итог:

$N = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$;

$S = (1, 1, 1, 0, 1, 0)$;

$p = (0, 1, 1, 0, 2, 0)$;

$\delta = (\infty, 4, 8, 0, 4, 0)$




$v = v_3$

$(S[v] = 1)$ & $(N[v] = 0)$

**5.1** $\Gamma(v_3) = \{v_4, v_5\}$

$u = v_4$

$(S[4] = 0)$ & $(f_{34} < c_{34})$

$S[4] = 1$;

$d[4] =$ «+»;

$p[4] = 3$;

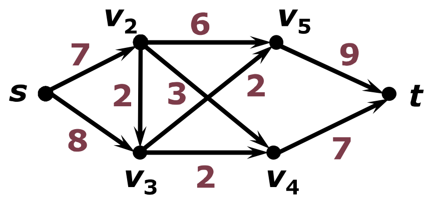
$\delta[4] = \min\{\delta[3], c_{34} - f_{34}\} =$

$= \min\{8, 2\} = 2$;

$a = 1$

$u = v_5$

$S[5] \neq 0$




$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_4}$

$(\boldsymbol{S}[\boldsymbol{v}] = 1)$ & $(\boldsymbol{N}[\boldsymbol{v}] = 0)$

**5.1** $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{v_4}) = \{\boldsymbol{v_6}\} = \{\boldsymbol{t}\}$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v_6}$

$(\boldsymbol{S}[6] = 0)$ & $(\boldsymbol{f_{46}} < \boldsymbol{c_{46}})$

$\boldsymbol{S}[6] = 1;$

$\boldsymbol{d}[6] =$ «+»;

$\boldsymbol{p}[6] = 4;$

$\boldsymbol{\delta}[6] = \mathbf{min}\{\boldsymbol{\delta}[4], \boldsymbol{c_{46}} - \boldsymbol{f_{46}}\} =$

$= \mathbf{min}\{2, 7 - 3\} = 2;$

$\boldsymbol{a} = 1$

При $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_5}$ и $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_6}$ изменений нет.

Итог:

$\boldsymbol{N} = (1, 1, 1, 1, 1, 1);$

$\boldsymbol{S} = (1, 1, 1, 1, 1, 1);$

$\boldsymbol{d} = (+, +, +, +, +, +);$

$\boldsymbol{p} = (0, 1, 1, 3, 2, 4);$

$\boldsymbol{\delta} = (\infty, 4, 8, 2, 6, 2)$

<u>Шаг 6</u>.

$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{t}] = 1$

**6.1** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t};$

$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{t}] = 2$

$\boldsymbol{x} = 6 \neq \boldsymbol{s}$

**6.2.1** $\boldsymbol{d}[\boldsymbol{x}] =$ «+»

$\boldsymbol{f_{46}} = \boldsymbol{f_{46}} + \boldsymbol{\delta} = 3 + 2 = 5$

**6.2.2** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}[6] = 4$

$\boldsymbol{x} = 4 \neq \boldsymbol{s}$

**6.2.1** $\boldsymbol{d}[\boldsymbol{x}] =$ «+»

$\boldsymbol{f_{34}} = \boldsymbol{f_{34}} + \boldsymbol{\delta} = 0 + 2 = 2$

**6.2.2** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}[4] = 3$

<u>Шаг 6</u> (продолжение).

$\boldsymbol{x} = 3 \neq \boldsymbol{s}$

**6.2.1** $\boldsymbol{d}[\boldsymbol{x}] =$ «+»

$\boldsymbol{f_{13}} = \boldsymbol{f_{13}} + \boldsymbol{\delta} = 0 + 2 = 2$

**6.2.2** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}[3] = 1$

$\boldsymbol{x} = 1 = \boldsymbol{s}$

**6.3** переход на шаг 2.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаги 2 – 4 повторяются без изменений.

После завершения шага 5:

$\boldsymbol{d} = (+, +, +, -, +, +)$;

$\boldsymbol{S} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$;

$\boldsymbol{p} = (0, 1, 1, 6, 2, 5)$;

$\boldsymbol{\delta} = (\infty, 4, 6, 7, 4, 4)$.

Шаг 6.

$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{t}] = 1$

**6.1** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}$;

$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{t}] = 4$

$\boldsymbol{x} = 6 \neq \boldsymbol{s}$

**6.2.1** $\boldsymbol{d}[\boldsymbol{x}]$ = «+»

$\boldsymbol{f}_{56} = \boldsymbol{f}_{56} + \boldsymbol{\delta} = 0 + 4 = 4$

**6.2.2** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}[6] = 5$

$\boldsymbol{x} = 5 \neq \boldsymbol{s}$

**6.2.1** $\boldsymbol{d}[\boldsymbol{x}]$ = «+»

$\boldsymbol{f}_{25} = \boldsymbol{f}_{25} + \boldsymbol{\delta} = 0 + 4 = 4$

**6.2.2** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}[5] = 2$

Шаг 6 (продолжение).

$\boldsymbol{x} = 2 \neq \boldsymbol{s}$

**6.2.1** $\boldsymbol{d}[\boldsymbol{x}]$ = «+»

$\boldsymbol{f}_{12} = \boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{\delta} = 3 + 4 = 7$

**6.2.2** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}[2] = 1$

$\boldsymbol{x} = 1 = \boldsymbol{s}$

**6.3** переход на шаг 2.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаги 2 – 4 повторяются без изменений.

После завершения шага 5:

$\boldsymbol{d} = (+, -, +, -, +, +)$;

$\boldsymbol{S} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$;

$\boldsymbol{p} = (0, 3, 1, 6, 3, 5)$;

$\boldsymbol{\delta} = (\infty, 2, 6, 2, 2, 2)$.

Шаг 6.

$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{t}] = 1$

**6.1** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}$;

$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{t}] = 2$

$\boldsymbol{x} = 6 \neq \boldsymbol{s}$

**6.2.1** $\boldsymbol{d}[\boldsymbol{x}] =$ «+»

$\boldsymbol{f}_{56} = \boldsymbol{f}_{56} + \boldsymbol{\delta} = 4 + 2 = 6$

**6.2.2** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}[6] = 5$

$\boldsymbol{x} = 5 \neq \boldsymbol{s}$

**6.2.1** $\boldsymbol{d}[\boldsymbol{x}] =$ «+»

$\boldsymbol{f}_{35} = \boldsymbol{f}_{35} + \boldsymbol{\delta} = 0 + 2 = 2$

**6.2.2** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}[5] = 3$

Шаг 6 (продолжение).

$\boldsymbol{x} = 3 \neq \boldsymbol{s}$

**6.2.1** $\boldsymbol{d}[\boldsymbol{x}] =$ «+»

$\boldsymbol{f}_{13} = \boldsymbol{f}_{13} + \boldsymbol{\delta} = 2 + 2 = 4$

**6.2.2** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}[3] = 1$

$\boldsymbol{x} = 1 = \boldsymbol{s}$

**6.3** переход на шаг 2.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаги 2 – 4 повторяются без изменений.

После завершения шага 5:

$\boldsymbol{d} = (+, +, +, +, +, +)$;

$\boldsymbol{S} = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$;

$\boldsymbol{N} = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$;

$\boldsymbol{p} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$;

$\boldsymbol{\delta} = (\infty, 0, 4, 0, 0, 0)$,

$\boldsymbol{a} = 1$.

Шаг 6.

$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{t}] = 0$

Шаг 7.

$\boldsymbol{a} \neq 0 \rightarrow$ переход на шаг 4.

Шаг 4.

$\boldsymbol{a} = 0$

На шаге 5 изменений нет.

Шаг 6.

$\boldsymbol{S}[\boldsymbol{t}] = 0$

Шаг 7.

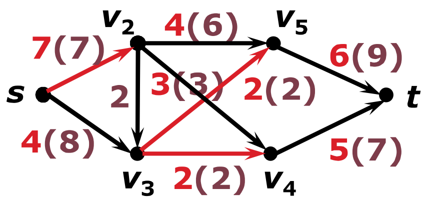
$\boldsymbol{a} = 0 \rightarrow$ конец.

Итог:

Матрица максимального потока

$$F^* = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

**Красным цветом выделен минимальный разрез**




величина максимального потока равна

$$w(f^*) = f(s, v_2) + f(s, v_3) = f(v_4, t) + f(v_5, t) = 11,$$

дуги ***(s, v₂)***, ***(v₂, v₄)***, ***(v₃, v₄)*** и ***(v₃, v₅)*** являются насыщенными.