

Пример (Ф.А. Новиков «Дискретная математика для программистов»).

Предположим:

некоторое агентство недвижимости располагает базой данных из n записей, причём каждая запись содержит одно предложение (что имеется) и один запрос (что требуется) относительно объектов недвижимости.

Требуется найти все пары записей, в которых предложение первой записи совпадает с запросом второй и одновременно предложение второй записи совпадает с запросом первой (подбор вариантов обмена).

При «лобовом» алгоритме поиска вариантов (каждая запись сравнивается с каждой) потребуется $n(n - 1)/2$ сравнений.

Предположим:

используемая СУБД позволяет выполнить сравнение одной пары записей за одну миллисекунду.



- При $n = 100$ ответ будет получен через 4,95 сек;
- при $n = 100\,000$ – через 4 999 950 сек (т. е. почти через 1 389 часов).

При этом оценивались только «прямые» варианты (с участием всего 2 записей)

Основополагающими при решении комбинаторных задач и рассмотрении различных комбинаторных конфигураций являются **правило произведения** и **правило суммы**.

Вывод:

прикладные задачи и алгоритмы требуют предварительного анализа и количественной оценки.

Оценка:

- задачи – с точки зрения *размерности* (общего количества вариантов, среди которых нужно найти решение);
- алгоритмы – с точки зрения *сложности*.

В обоих случаях основной инструмент анализа – формулы и методы **комбинаторики**.

Комбинаторика

Задачи, связанные с необходимостью подсчитать количество возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих определенным условиям, называются **комбинаторными**.

Комбинаторика изучает количества комбинаций, которые можно составить из элементов (безразлично какой природы) заданного конечного множества с учетом тех или иных условий.

Название данному направлению дал Г. Лейбниц в работе «Об искусстве комбинаторики».

Правило произведения

Если объект **a** может быть выбран из некоторого множества объектов **m** способами, и после каждого такого выбора объект **b** может быть выбран **n** способами, то выбор упорядоченной пары (**a**, **b**) может быть осуществлен **m·n** способами.

В общем случае:

если один элемент множества **A₁** может быть выбран **|A₁|** способами, элемент множества **A₂** – **|A₂|** способами, ..., элемент множества **A_k** – **|A_k|** способами, то выбрать все **k** элементов в заданном порядке можно

$$N = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|$$

способами.

Примеры.

1. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5.

Сколько двузначных чисел можно составить, используя эти карточки?

Первая цифра выбирается из множества

$$\{1, 2, 3, 4, 5\},$$

ее можно выбрать $m = 5$ способами.

Вторая цифра выбирается из множества цифр, оставшихся после выбора первой цифры; ее можно выбрать $n = 4$ способами.

По правилу произведения двузначное число (упорядоченную пару цифр) можно составить

$$N = m \cdot n = 5 \cdot 4 = 20 \text{ способами.}$$

2. Сколько существует трехзначных шестеричных чисел?

В шестеричной системе счисления используются цифры из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Для обозначения первой цифры 0 не используется, поэтому первая цифра выбирается из множества $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Вторая и третья цифра выбираются из множеств $A_2 = A_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

По правилу произведения трехзначное число можно составить

$$N = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| = 5 \cdot 6 \cdot 6 = 180 \text{ способами.}$$

Правило суммы

Если объект a может быть выбран из некоторого множества объектов m способами, а объект b может быть выбран n способами, то выбор либо a , либо b может быть осуществлен $m+n$ способами.

Обобщение на k объектов – аналогично правилу произведения.

Пример.

Для построения кода могут использоваться десятичные цифры (10 цифр) и символы латинского алфавита (26 символов).

Сколько можно составить различных кодов длины 4?

По правилу суммы каждый из 4 символов кода может быть выбран

$$10 + 26 = 36 \text{ способами.}$$

По правилу произведения код может быть составлен

$$N = 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 1\,679\,616 \text{ способами.}$$

Замечание.

Применение правила суммы является очевидным только в том случае, когда объект a выбирается из множества A , объект b выбирается из множества B , причем

$$A \cap B = \emptyset.$$

Если же $A \cap B \neq \emptyset$, то необходимо использовать обобщение правила суммы – «принцип включения-исключения» (будет рассмотрен далее).

Факториал

Факториал – это функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел, значение которой равно произведению всех натуральных чисел от 1 до натурального числа n , в котором каждое число встречается ровно 1 раз:

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

3.2 Основные комбинаторные конфигурации

Перестановки (без повторений)

Пусть дано множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Зафиксируем элементы этого множества в каком-либо порядке. Получим некоторую комбинацию элементов (включающую все элементы множества A).

Затем переставим местами некоторые элементы → получим новую комбинацию.

Снова переставим местами некоторые элементы, и т. д.

Рассмотренные комбинации элементов множества A называются **перестановками без повторений**.

Перестановки (без повторений)

Перестановками из n элементов (без повторений) называются комбинации, составленные из одних и тех же n различных элементов, и отличающиеся только порядком расположения этих элементов.

Число всех перестановок из n элементов обозначается

$$P_n$$

(или $P(n)$).

Число перестановок без повторений

Формула для определения числа перестановок P_n вытекает из правила произведения:

первый элемент комбинации может быть выбран n способами (любой из элементов множества A);

второй элемент комбинации может быть выбран $n - 1$ способом (любой из $n - 1$ элемента, оставшихся после выбора первого);

.....
элемент с номером n – это последний (не выбранный ранее) элемент множества A .

Число перестановок без повторений

По правилу произведения

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1,$$

откуда

$$P_n = n!$$

(3.1)

Перестановки с повторениями

При определении перестановок без повторений предполагалось, что все элементы, участвующие в создании комбинаций, различны.

Теперь предположим:

имеется n_1 экземпляров элемента a_1 ,

n_2 экземпляров элемента a_2 ,

.....

n_k экземпляров элемента a_k ,

всего $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ объектов.

Перестановки с повторениями

Из этих n объектов образуем комбинации, содержащие все n объектов, и отличающиеся порядком расположения объектов.

Такие комбинации называются **перестановками с повторениями**.

Число перестановок с повторениями будем обозначать \dot{P}_n .

Формула для определения числа перестановок с повторениями получается из формулы для P_n с учетом следующих соображений.

Среди общего числа перестановок $n!$ неразличимыми будут комбинации, связанные с перестановкой местами

n_1 экземпляров a_1 (всего таких комбинаций $n_1!$),

n_2 экземпляров a_2 , (всего таких комбинаций $n_2!$),

и т. д.



число комбинаций следует уменьшить в соответствующее число раз.

Число перестановок с повторениями

Окончательно получим:

$$\dot{P}_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad (3.2)$$

Здесь k – число различных элементов.

Если $k = n$, то

$$\dot{P}_n = P_n = n!$$

Число перестановок с повторениями

Пример.

1. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова

а) «рубин»,

б) «ротор»,

если под словом понимать всякую последовательность из пяти букв?

а) Все буквы различны, поэтому число перестановок равно $P_5 = 5! = 120$;

б) буквы «о» и «р» повторяются по 2 раза, поэтому число различных перестановок равно

$$\dot{P}_5 = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{120}{4} = 30.$$

2. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «облако», если каждое слово должно начинаться с согласной буквы?

Если зафиксировать первую букву, то из оставшихся 5 букв можно составить \dot{P}_5 комбинаций (буква «о» повторяется дважды):

$$\dot{P}_5 = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{120}{2} = 60.$$

Первую букву можно выбрать тремя способами (всего 3 согласных).

По правилу произведения общее число комбинаций равно

$$N = 3 \cdot 60 = 180.$$

Размещения без повторений

Пусть дано множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (все элементы предполагаются различными).

Из этих элементов будем составлять комбинации по m элементов, в которых каждый элемент множества A встречается не более одного раза.

Такие комбинации называются **размещениями без повторений**.

Размещения без повторений

Размещениями без повторений называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов в каждой, и отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m без повторений обозначается

$$A_n^m$$

(или $A(n, m)$).

Формула для определения числа размещений A_n^m вытекает из правила произведения:

первый элемент комбинации может быть выбран n способами (любой из элементов множества A);

второй элемент комбинации может быть выбран $n - 1$ способом (любой из $n - 1$ элемента, оставшихся после выбора первого);

.....

элемент с номером m может быть выбран $n - (m - 1)$ способами (любой из элементов, оставшихся после выбора первых $m - 1$ элементов).

Число размещений без повторений

По правилу произведения

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) \quad (3.3)$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (3.4)$$

Замечание.

Формулы (3.3) и (3.4) с математической точки зрения эквивалентны. При этом формула (3.4) выглядит более «изящной».

С точки зрения алгоритмизации формула (3.3) оказывается намного предпочтительнее формулы (3.4).

Основная причина:

факториал – очень быстро растущая функция → промежуточные результаты (числитель и/или знаменатель в (3.4)) могут не поместиться в разрядную сетку («переполнение»), в то время как окончательный результат мог бы поместиться.

Число размещений без повторений

Примеры.

1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 2 цифры и помнит лишь, что эти цифры различны. Сколько всего комбинаций он может набрать?

Всего имеется 10 цифр, из которых можно выбрать 2 цифры без повторений.

Число таких комбинаций равно

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = 90.$$

2. Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, в которых все цифры различны?

Число не должно начинаться с нуля, поэтому из общего количества всех размещений из 10 цифр по 4 без повторений нужно вычесть количество комбинаций, у которых первая цифра – ноль.

Число комбинаций, начинающихся с нуля, равно A_9^3 , поэтому искомое количество равно

$$A_{10}^4 - A_9^3 = \frac{10!}{6!} - \frac{9!}{6!} = \frac{9!(10-1)}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 = 4536.$$

Размещения с повторениями

При определении размещений без повторов предполагалось, что все элементы, участвующие в создании комбинаций, различны.

Теперь предположим, что из n элементов множества A составляются размещения по m элементов, причем одни и те же элементы могут встречаться в комбинациях многократно.

Такие комбинации называются **размещениями с повторениями**.

Число размещений с повторениями

Число размещений из n элементов по m с повторениями будем обозначать \dot{A}_n^m .

Формула для числа размещений с повторениями непосредственно вытекает из правила произведения:

$$\dot{A}_n^m = n^m.$$

(3.5)

Пример.

Символы кодируются с помощью двоичного кода. Для хранения одного символа используется 1 байт.

Сколько различных символов можно закодировать таким образом?

Множество A , элементы которого используются для составления комбинаций, включает всего 2 элемента: 0 и 1, т. е. $n = 2$.

Каждая комбинация содержит 8 элементов (1 байт = 8 бит), т. е. $m = 8$.

Общее число различных таких комбинаций равно

$$\dot{A}_2^8 = 2^8 = 256.$$

Сочетания (без повторов)

Пусть дано множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (все элементы предполагаются различными).

Выделим из множества A некоторое подмножество, содержащее m элементов, $m \leq n$. Каждое такое подмножество называется **сочетанием из n элементов по m без повторов**.

Без учета порядка расположения элементов!

Сочетания (без повторов)

Число сочетаний из n элементов по m без повторов обозначается C_n^m

$$\left(\text{или } C(n, m) \text{ или } \binom{n}{m} \right).$$