

Пример (Ф.А. Новиков «Дискретная математика для программистов»).

Предположим:

некоторое агентство недвижимости располагает базой данных из n записей, причём каждая запись содержит одно предложение (что имеется) и один запрос (что требуется) относительно объектов недвижимости.

Требуется найти все пары записей, в которых предложение первой записи совпадает с запросом второй и одновременно предложение второй записи совпадает с запросом первой (подбор вариантов обмена).

При «лобовом» алгоритме поиска вариантов (каждая запись сравнивается с каждой) потребуется $n(n - 1)/2$ сравнений.

Предположим:

используемая СУБД позволяет выполнить сравнение одной пары записей за одну миллисекунду.



- › При $n = 100$ ответ будет получен через 4,95 сек;
- › при $n = 100\ 000$ – через 4 999 950 сек (т. е. почти через 1 389 часов).

При этом оценивались только «прямые» варианты (с участием всего 2 записей)

Основополагающими при решении комбинаторных задач и рассмотрении различных комбинаторных конфигураций являются **правило произведения** и **правило суммы**.

Вывод:

прикладные задачи и алгоритмы требуют предварительного анализа и количественной оценки.

Оценка:

- › задачи – с точки зрения *размерности* (общего количества вариантов, среди которых нужно найти решение);
- › алгоритмы – с точки зрения *сложности*.

В обоих случаях основной инструмент анализа – формулы и методы **комбинаторики**.

Комбинаторика

Задачи, связанные с необходимостью подсчитать количество возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих определенным условиям, называются **комбинаторными**.

Комбинаторика изучает количества комбинаций, которые можно составить из элементов (безразлично какой природы) заданного конечного множества с учетом тех или иных условий.

Название данному направлению дал Г. Лейбниц в работе «Об искусстве комбинаторики».

Правило произведения

Если объект **a** может быть выбран из некоторого множества объектов **m** способами, и после каждого такого выбора объект **b** может быть выбран **n** способами, то выбор упорядоченной пары (**a**, **b**) может быть осуществлен **m·n** способами.

В общем случае:

если один элемент множества **A₁** может быть выбран $|A_1|$ способами, элемент множества **A₂** – $|A_2|$ способами, ..., элемент множества **A_k** – $|A_k|$ способами, то выбрать все **k** элементов в заданном порядке можно

$$N = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|$$

способами.

Примеры.

1. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5.

Сколько двузначных чисел можно составить, используя эти карточки?

Первая цифра выбирается из множества

$$\{1, 2, 3, 4, 5\},$$

ее можно выбрать $m = 5$ способами.

Вторая цифра выбирается из множества цифр, оставшихся после выбора первой цифры; ее можно выбрать $n = 4$ способами.

По правилу произведения двузначное число (упорядоченную пару цифр) можно составить

$$N = m \cdot n = 5 \cdot 4 = 20 \text{ способами.}$$

2. Сколько существует трехзначных шестеричных чисел?

В шестеричной системе счисления используются цифры из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Для обозначения первой цифры 0 не используется, поэтому первая цифра выбирается из множества $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Вторая и третья цифра выбираются из множеств $A_2 = A_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

По правилу произведения трехзначное число можно составить

$$N = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| = 5 \cdot 6 \cdot 6 = 180 \text{ способами.}$$

Правило суммы

Если объект a может быть выбран из некоторого множества объектов m способами, а объект b может быть выбран n способами, то выбор либо a , либо b может быть осуществлен $m+n$ способами.

Обобщение на k объектов – аналогично правилу произведения.

Замечание.

Применение правила суммы является очевидным только в том случае, когда объект a выбирается из множества A , объект b выбирается из множества B , причем

$$A \cap B = \emptyset.$$

Если же $A \cap B \neq \emptyset$, то необходимо использовать обобщение правила суммы – «принцип включения-исключения» (будет рассмотрен далее).

Пример.

Для построения кода могут использоваться десятичные цифры (10 цифр) и символы латинского алфавита (26 символов).

Сколько можно составить различных кодов длины 4?

По правилу суммы каждый из 4 символов кода может быть выбран

$$10 + 26 = 36 \text{ способами.}$$

По правилу произведения код может быть составлен

$$N = 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 1\ 679\ 616 \text{ способами.}$$

Факториал

Факториал – это функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел, значение которой равно произведению всех натуральных чисел от 1 до натурального числа n , в котором каждое число встречается ровно 1 раз:

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n, \quad n = 1, 2, \dots ;$$

$$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

Перестановки (без повторений)

Пусть дано множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Зафиксируем элементы этого множества в каком-либо порядке. Получим некоторую комбинацию элементов (включающую все элементы множества **A**).

Затем переставим местами некоторые элементы → получим новую комбинацию.

Снова переставим местами некоторые элементы, и т. д.

Рассмотренные комбинации элементов множества **A** называются **перестановками без повторений**.

3.2 Основные комбинаторные конфигурации

Перестановки (без повторений)

Перестановками из n элементов (без повторений) называются комбинации, составленные из одних и тех же n различных элементов, и отличающиеся только порядком расположения этих элементов.

Число всех перестановок из n элементов обозначается

$$P_n$$

(или $P(n)$).

Число перестановок без повторений

Формула для определения числа перестановок P_n вытекает из правила произведения:

первый элемент комбинации может быть выбран n способами (любой из элементов множества **A**);

второй элемент комбинации может быть выбран $n - 1$ способом (любой из $n - 1$ элемента, оставшихся после выбора первого);

.....

элемент с номером n – это последний (не выбранный ранее) элемент множества **A**.

Число перестановок без повторений

По правилу произведения

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1,$$

откуда

$$P_n = n!$$

(3.1)

Перестановки с повторениями

При определении перестановок без повторений предполагалось, что все элементы, участвующие в создании комбинаций, различны.

Теперь предположим:

имеется n_1 экземпляров элемента a_1 ,
 n_2 экземпляров элемента a_2 ,

.....

n_k экземпляров элемента a_k ,

всего $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ объектов.

Перестановки с повторениями

Из этих n объектов образуем комбинации, содержащие все n объектов, и отличающиеся порядком расположения объектов.

Такие комбинации называются **перестановками с повторениями**.

Число перестановок с повторениями будем обозначать \dot{P}_n .

Формула для определения числа перестановок с повторениями получается из формулы для P_n с учетом следующих соображений.

Среди общего числа перестановок $n!$ неразличимыми будут комбинации, связанные с перестановкой местами

n_1 экземпляров a_1 (всего таких комбинаций $n_1!$),

n_2 экземпляров a_2 , (всего таких комбинаций $n_2!$),

и т. д.



число комбинаций следует уменьшить в соответствующее число раз.

Число перестановок с повторениями

Окончательно получим:

$$\dot{P}_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad (3.2)$$

Здесь k – число различных элементов.

Если $k = n$, то

$$\dot{P}_n = P_n = n!$$

2. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «облако», если каждое слово должно начинаться с согласной буквы?

Если зафиксировать первую букву, то из оставшихся 5 букв можно составить \dot{P}_5 комбинаций (буква «о» повторяется дважды):

$$\dot{P}_5 = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{120}{2} = 60.$$

Первую букву можно выбрать тремя способами (всего 3 согласных).

По правилу произведения общее число комбинаций равно

$$N = 3 \cdot 60 = 180.$$

Число перестановок с повторениями

Пример.

1. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова

a) «рубин»,

b) «ротор»,

если под словом понимать всякую последовательность из пяти букв?

- a) Все буквы различны, поэтому число перестановок равно $P_5 = 5! = 120$;

- b) буквы «о» и «р» повторяются по 2 раза, поэтому число различных перестановок равно

$$\dot{P}_5 = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{120}{4} = 30.$$

Размещения без повторений

Пусть дано множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (все элементы предполагаются различными).

Из этих элементов будем составлять комбинации по m элементов, в которых каждый элемент множества A встречается не более одного раза.

Такие комбинации называются **размещениями без повторений**.

Размещения без повторений

Размещениями без повторений называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов в каждой, и отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m без повторений обозначается A_n^m (или $A(n, m)$).

Формула для определения числа размещений A_n^m вытекает из правила произведения:

первый элемент комбинации может быть выбран n способами (любой из элементов множества A);

второй элемент комбинации может быть выбран $n - 1$ способом (любой из $n - 1$ элемента, оставшихся после выбора первого);

.....
элемент с номером m может быть выбран $n - (m - 1)$ способами (любой из элементов, оставшихся после выбора первых $m - 1$ элементов).

Число размещений без повторений

По правилу произведения

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) \quad (3.3)$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (3.4)$$

Замечание.

Формулы (3.3) и (3.4) с математической точки зрения эквивалентны. При этом формула (3.4) выглядит более «изящной».

С точки зрения алгоритмизации формула (3.3) оказывается намного предпочтительнее формулы (3.4).

Основная причина:

факториал – очень быстро растущая функция → промежуточные результаты (числитель и/или знаменатель в (3.4)) могут не поместиться в разрядную сетку («переполнение»), в то время как окончательный результат мог бы поместиться.

Число размещений без повторений

Примеры.

1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 2 цифры и помнит лишь, что эти цифры различны.

Сколько всего комбинаций он может набрать?

Всего имеется 10 цифр, из которых можно выбрать 2 цифры без повторений.

Число таких комбинаций равно

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = 90.$$

2. Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, в которых все цифры различны?

Число не должно начинаться с нуля, поэтому из общего количества всех размещений из 10 цифр по 4 без повторений нужно вычесть количество комбинаций, у которых первая цифра – ноль.

Число комбинаций, начинающихся с нуля, равно A_9^3 , поэтому искомое количество равно

$$A_{10}^4 - A_9^3 = \frac{10!}{6!} - \frac{9!}{6!} = \frac{9!(10-1)}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 = 4536.$$

Размещения с повторениями

При определении размещений без повторений предполагалось, что все элементы, участвующие в создании комбинаций, различны.

Теперь предположим, что из n элементов множества A составляются размещения по m элементов, причем одни и те же элементы могут встречаться в комбинациях многократно.

Такие комбинации называются **размещениями с повторениями**.

Пример.

Символы кодируются с помощью двоичного кода.

Для хранения одного символа используется 1 байт.

Сколько различных символов можно закодировать таким образом?

Множество A , элементы которого используются для составления комбинаций, включает всего 2 элемента: 0 и 1, т. е. $n = 2$.

Каждая комбинация содержит 8 элементов (1 байт = 8 бит), т. е. $m = 8$.

Общее число различных таких комбинаций равно

$$A_2^8 = 2^8 = 256.$$

Сочетания (без повторений)

Число сочетаний из n элементов по m без повторений обозначается

$$C_n^m$$

(или $C(n, m)$ или $\binom{n}{m}$).

Число размещений с повторениями

Число размещений из n элементов по m с повторениями будем обозначать A_n^m .

Формула для числа размещений с повторениями непосредственно вытекает из правила произведения:

$$A_n^m = n^m. \quad (3.5)$$

Сочетания (без повторений)

Пусть дано множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (все элементы предполагаются различными).

Выделим из множества A некоторое подмножество, содержащее m элементов, $m \leq n$. Каждое такое подмножество называется **сочетанием из n элементов по m без повторений**.

Без учета порядка расположения элементов!