## Отношения эквивалентности

Примеры.

- Отношение = на множестве чисел;
- отношение «быть однокурсником» на множестве студентов ТюмГУ направления «Прикладная информатика»;
- отношение подобия на множестве треугольников;
- отношение параллельности на множестве прямых.

## Отношения эквивалентности

Если отношение ***R*** на множестве ***A*** обладает свойствами *рефлексивности*, *симметричности* и *транзитивности*, то оно называется ***отношением эквивалентности***.

Часто используемое обозначение: **~**

***a* ~ *b*** – элемент ***a*** эквивалентен элементу ***b***.

## Классы эквивалентности

Пусть **~** – отношение эквивалентности на множестве ***M***, $x \in M$.

Подмножество элементов ***M***, эквивалентных ***x***, называется ***классом эквивалентности для x***:

$$[x]_{\sim} \overset{\text{def}}{=} \{y \mid y \in M \;\&\; y \sim x\}.$$

Если отношение подразумевается, то значок отношения может быть опущен.

## Классы эквивалентности

***Теорема***.

Всякое отношение эквивалентности на множестве ***M*** определяет разбиение множества ***M***, причем среди элементов разбиения нет пустых; и обратно, всякое разбиение множества ***M***, не содержащее пустых элементов, определяет отношение эквивалентности на множестве ***M***.

Примеры.

- Отношение «быть однокурсником» на множестве студентов вуза определяет классы эквивалентности: $\boldsymbol{X_1}$ – множество студентов 1 курса, $\boldsymbol{X_2}$ – множество студентов 2 курса, и т. д.;
- разбиение множества $\boldsymbol{M} = \mathbb{Z}$ семейством множеств

$$X_0 = \{x \mid x = 5k,\ k \in Z\},$$
$$X_1 = \{x \mid x = 5k+1,\ k \in Z\},$$
$$X_2 = \{x \mid x = 5k+2,\ k \in Z\},$$
$$X_3 = \{x \mid x = 5k+3,\ k \in Z\},$$
$$X_4 = \{x \mid x = 5k+4,\ k \in Z\}.$$

определяет отношение эквивалентности «иметь одинаковый остаток от деления на 5» на $\mathbb{Z}$.

***Алгоритм построения разбиения множества на классы эквивалентности***.

***Вход***: ***M*** – множество (конечное),

**~** – отношение эквивалентности на ***M***;

***выход***: $\mathcal{B}$ – разбиение множества на классы эквивалентности.

1. $\mathcal{B} = \varnothing$. **Вначале разбиение пусто**

2. Для всех $a \in M$

   2.1 Для всех $B \in \mathcal{B}$ **Выбор одного из уже построенных классов эквивалентности**

   2.1.1 Выбрать $b \in B$ **Выбор любого представителя класса *B***

   2.1.2 Если $b \sim a$, **Пополнение существующего класса и переход к следующему элементу *M***

   то $B = B \cup \{a\}$; переход на шаг 2

   2.2 $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \{a\}$ **Создание нового класса**

3. Вывод $\mathcal{B}$.

## Фактормножество

Если $\sim$ – отношение эквивалентности на множестве ***M***, то множество классов эквивалентности называется ***фактор-множеством множества M*** относительно эквивалентности $\sim$.

Обозначение: $M/_{\sim}$ .

Фактор-множество является подмножеством булеана:

$$M/_{\sim} \subset 2^{M}.$$

## Отношения порядка

Отношения порядка позволяют сравнивать между собой различные элементы одного множества.

Антисимметричное транзитивное отношение называется ***отношением порядка***.

Если отношение порядка обладает свойством рефлексивности, то оно называется отношением ***нестрогого порядка***.

Если отношение порядка обладает свойством антирефлексивности, то оно называется отношением ***строгого порядка***.

## Отношения порядка

Если отношение порядка обладает свойством полноты, то оно называется отношением ***полного*** (или ***линейного***) ***порядка***.

Если отношение порядка <u>**не**</u> обладает свойством полноты, то оно называется отношением ***частичного порядка***.

Обозначения:

$\prec$ – отношение порядка;

$<$ – отношение строгого порядка (полного или частичного);

$\leq$ – отношение нестрогого порядка.

## Отношения порядка

Множество, на котором определено отношение частичного порядка, называется ***частично упорядоченным***.

Множество, на котором определено отношение линейного (полного) порядка, называется ***линейно упорядоченным***.

## Отношения порядка

<u>Примеры</u>.

- Множество $\mathbb{Z}$ с отношением $<$ («меньше») является линейно упорядоченным,
  $<$ – отношение строгого полного порядка;
- множество $\mathbb{Z}$ с отношением $\leq$ («меньше или равно») является линейно упорядоченным,
  $\leq$ – отношение нестрогого полного порядка;
- Булеан $2^M$ с отношением $\subset$ является частично упорядоченным,
  $\subset$ – отношение нестрогого частичного порядка.

## Минимальные элементы

***Теорема.***

Во всяком конечном непустом частично упорядоченном множестве существует минимальный элемент.

Замечание.

Линейно упорядоченное конечное множество содержит ровно один минимальный элемент; в произвольном конечном частично упорядоченном множестве минимальных элементов может быть несколько.

Пример.

Пусть на множестве $M = \{a, b, c, d\}$ задано отношение частичного порядка

$$\{(a,b), (c,d)\},$$

т. е. $a \prec b$ и $c \prec d$.

Элементы ***a*** и ***c*** являются минимальными.

Если задано отношение линейного порядка

$$\{(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d)\},$$

то $a \prec b \prec c \prec d$,

и минимальным является только элемент ***a***.

***Теорема.***

Всякий частичный порядок на конечном множестве может быть дополнен до линейного.

Это означает:

существует отношение линейного порядка, которое является надмножеством заданного отношения частичного порядка.

## Алгоритм топологической сортировки

Это алгоритм дополнения частичного порядка до линейного на конечном множестве.

***Вход***: ***M*** – конечное частично упорядоченное множество;

***выход***: линейно упорядоченное множество ***W***.

Линейный порядок на множестве ***W*** определяется последовательностью, в которой генерируются объекты этого множества.

1. ***W*** = ∅.
2. Пока ***M*** ≠ ∅
   - 2.1 ***m*** = min(***M***) — **Определение минимального элемента в текущем множестве *M* (вызов функции min)**
   - 2.2 ***W*** = ***W*** ∪ {***m***} — **Добавление найденного минимального элемента в множество *W***
   - 2.3 ***M*** = ***M*** \ {***m***} — **Исключение элемента *m* из дальнейшего рассмотрения**

***Описание функции*** **min**.

***Вход***: ***M*** – конечное частично упорядоченное множество;

***выход***: минимальный элемент ***m***.

1. Выбрать любой элемент ***M*** в качестве ***m***
2. Для всех $x \in M$
   если $x \prec m$, то ***m*** = ***x***
3. Возврат ***m***

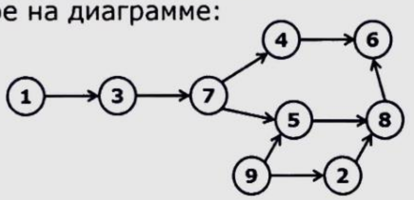
Замечание.

Если отношение порядка представлено матрицей, то функцию **min** можно реализовать, например, так:

найти в матрице отношения первый столбец, содержащий только нули.

Пример.

На множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ задано отношение частичного порядка, показанное на диаграмме:




Для представления отношения упорядоченными парами необходимо множество пар

$$\{(1, 3), (3, 7), (7, 4), (7, 5), (4, 6), (5, 8), (8, 6), (9, 5), (9, 2), (2, 8)\}$$

дополнить до обеспечения выполнения свойства транзитивности.

В результате работы алгоритма будет сгенерирована следующая последовательность элементов множества ***W***:

1, 3, 7, 4, 9, 5, 2, 8, 6.

Она определяет линейный порядок на ***W***:

$$1 \prec 3 \prec 7 \prec 4 \prec 9 \prec 5 \prec 2 \prec 8 \prec 6.$$