## Бинарные отношения

Пусть **A** и **B** – два непустые множества.

***Бинарным отношением R между множествами A и B*** называется всякое подмножество декартова произведения **A×B**:

$$R \subset A \times B.$$

Тот факт, что $(a,b) \in R$, т. е. между элементами $a \in A$ и $b \in B$ существует отношение ***R***, обозначается так: ***aRb***.

## Бинарные отношения

Пример.

Рассмотрим множества

$$A = \{1,2,3\}, \quad B = \{1,2,3,4,5\}.$$

Декартово произведение ***A*** на ***B*** равно

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)\}.$$

Определим отношение ***R*** («больше») следующим образом:

***aRb***, если ***a*** > ***b***, $a \in A$ & $b \in B$.

$$R = \{(2,1),(3,1),(3,2)\} \subset A \times B.$$

## Отношения на множестве

Если ***A*** = ***B***, т. е. $R \subset A^2$, то говорят, что ***R*** есть отношение ***на множестве A***.

Примеры.

- отношения =, <, >, ≤, ≥, ≠, определенные на множестве чисел (натуральных, целых, действительных);
- отношение «быть однокурсником» на множестве студентов направления «Прикладная информатика», обучающихся в ТюмГУ;
- отношение включения на множестве $2^U$ ...

## Многоместные отношения

Обобщение бинарного отношения:

***n-местное (n-арное) отношение R*** – это подмножество декартова произведения множеств $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ (множество упорядоченных наборов – кортежей):

$$R \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$$
$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \,\&\, a_2 \in A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, a_n \in A_n\}.$$

## Дополнение отношения

Пусть ***R*** есть отношение между множествами ***A*** и ***B***: $R \subset A \times B$.

***Дополнением отношения R*** называется отношение $\overline{R}$, определяемое следующим образом:

$$\overline{R} \overset{\text{def}}{=} \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\} \subset A \times B.$$

## Универсальное отношение

Пусть ***R*** есть отношение между множествами ***A*** и ***B***: $R \subset A \times B$.

***Универсальное отношение U*** содержит все пары (***a***, ***b***), принадлежащие декартову произведению ***A × B***:

$$U \overset{\text{def}}{=} \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B\} = A \times B.$$

## Композиция отношений

Пусть $R_1 \subset A \times C$ – отношение между **A** и **C**,
$R_2 \subset C \times B$ – отношение между **C** и **B**.

***Композицией двух отношений*** $R_1$ и $R_2$ называется отношение $R \subset A \times B$ между **A** и **B**, определяемое следующим образом:

$$R = R_1 \circ R_2 \overset{\text{def}}{=}$$
$$= \{(a, b) \mid a \in A \;\&\; b \in B \;\&\; \exists c \in C : aR_1c \;\&\; cR_2b\}.$$

Композиция отношений на множестве **A** является отношением на множестве **A**.

### *Свойства композиции отношений:*

1. Композиция отношений *ассоциативна*:

$$\forall R_1 \subset A \times B,\; R_2 \subset B \times C,\; R_3 \subset C \times D$$
$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$$

2. Композиция отношений, в общем случае, <u>не</u> *коммутативна*:

$$R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1 .$$

<u>Пример</u>: отношения $R_1$ – кровного родства и $R_2$ – супружества на множестве людей.
$R_1 \circ R_2$ – супруги кровных родственников;
$R_2 \circ R_1$ – кровные родственники супругов.

## Представление отношений в компьютерных программах

Один из возможных способов – представление с помощью булевых матриц.

Пусть **R** – отношение на множестве **A**: $R \subset A^2$ и |**A**| = ***n***. Перенумеруем элементы множества **A**: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Тогда отношение **R** можно представить булевой матрицей **R**:

$$\mathrm{r}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 R a_j, \\ 0, & \text{если } a_1 \overline{R} a_j. \end{cases}$$

2. В универсальное отношение **U** входят все пары элементов множества **A**, поэтому все элементы матрицы **U** универсального отношения равны 1.

<u>Примеры.</u>

1. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

***R*** – отношение «меньше либо равно» на множестве **A**.

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),$$
$$(2,5),(3,3),(3,4),(3,5),(4,4),(4,5),(5,5)\}.$$

Представление булевой матрицей:

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### *Матрица отношения* $\overline{R}$.

Пусть отношение $R \subset A^2$ имеет матрицу **R**.
Тогда отношение $\overline{R}$ (дополнение отношения **R**) имеет матрицу

$$\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{U} - \mathrm{R},$$

т. е.

$$\overline{\mathrm{r}}_{ij} = 1 - \mathrm{r}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

---

Разность **C** булевых матриц **A** и **B** определяется правилом:

$$\mathrm{c}_{ij} = \mathrm{a}_{ij} \;\&\; (1 - \mathrm{b}_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

# 2.2.СВОЙСТА ОТНОШЕНИЙ

## Рефлексивность

Пусть $R \subset A^2$.

Отношение $R$ называется ***рефлексивным***, если

$$\forall a \in A \quad a R a.$$

Матрица рефлексивного отношения содержит 1 на главной диагонали:

$$\mathbf{r}_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

## Рефлексивность

Примеры.

- Отношения =, ≤, ≥ на множестве чисел;
- отношение параллельности на множестве прямых;
- отношение «быть похожим» на множестве людей.

## Антирефлексивность

Отношение $R$ называется ***антирефлексивным***, если

$$\forall a \in A \quad \neg a R a.$$

Матрица антирефлексивного отношения содержит 0 на главной диагонали:

$$\mathbf{r}_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

## Симметричность

Отношение $R$ называется ***симметричным***, если $\forall a, b \in A$ из $aRb$ следует $bRa$.

Матрица симметричного отношения является симметричной:

$$\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

## Антисимметричность

Отношение $R$ называется ***антисимметричным***, если

$$\forall a, b \in A \text{ из } aRb \ \& \ bRa \text{ следует } a = b.$$

Примеры.

- Отношения ≤, ≥ на множестве чисел;
- отношение включения на множестве $2^U$.

## Антирефлексивность

Примеры.

- Отношения <, >, ≠ на множестве чисел;
- отношение перпендикулярности на множестве прямых.

## Полнота

Отношение **R** называется ***полным***, если $\forall a, b \in A$ имеет место

либо $a = b$, либо $a R b$, либо $b R a$.

Примеры.

- Отношения <, >, ≤, ≥ на множестве чисел (целых, действительных);
- отношение «быть старше» (по возрасту) на множестве людей.

## Замыкание отношения относительно свойства

Пусть ***R*** и ***R'*** – отношения на множестве ***A***.

Отношение ***R'*** называется ***замыканием R*** относительно свойства ***C***, если:

1. ***R'*** обладает свойством ***C***: ***C***(***R'***);
2. ***R'*** является надмножеством ***R***: $R \subset R'$;
3. ***R'*** является наименьшим:

$$C(R'') \,\&\, R \subset R'' \;\Rightarrow\; R' \subset R''.$$

В задачах обработки данных иногда требуется получить *транзитивное замыкание* (т. е. замыкание относительно свойства транзитивности) отношения ***R***.

Одним из наиболее эффективных алгоритмов вычисления транзитивного замыкания отношения является ***алгоритм Уоршалла***.

## Алгоритм Уоршалла

***Вход***: ***R*** – отношение, заданное на множестве ***A***, |**A**| = ***n***, представленное булевой матрицей **R**;

***выход***: транзитивное замыкание отношения ***R***, представленное булевой матрицей **T**.