3. Элементы комбинаторики

3.1 Понятие о комбинаторных задачах

Организация вычислений на дискретных конечных математических структурах требует применения *комбинаторного анализа.*

Цель – установление свойств используемых алгоритмов и оценка их применимости.

Пример (Ф.А. Новиков «Дискретная математика для программистов»).

Предположим:

некоторое агентство недвижимости располагает базой данных из ***n*** записей, причём каждая запись содержит одно предложение (что имеется) и один запрос (что требуется) относительно объектов недвижимости.

Требуется найти все пары записей, в которых предложение первой записи совпадает с запросом второй и одновременно предложение второй записи совпадает с запросом первой (подбор вариантов обмена).

При «лобовом» алгоритме поиска вариантов (каждая запись сравнивается с каждой) потребуется ***n***(***n*** - 1)/2 сравнений.

Предположим:

используемая СУБД позволяет выполнить сравнение одной пары записей за одну миллисекунду.

- При ***n*** = 100 ответ будет получен через 4,95 сек;
- при ***n*** = 100 000 – через 4 999 950 сек (т. е. почти через 1 389 часов).

При этом оценивались только «прямые» варианты (с участием всего 2 записей)

Вывод:

прикладные задачи и алгоритмы требуют предварительного анализа и количественной оценки.

Оценка:

- задачи – с точки зрения *размерности* (общего количества вариантов, среди которых нужно найти решение);
- алгоритмы – с точки зрения *сложности*.

В обоих случаях основной инструмент анализа – формулы и методы ***комбинаторики***.

Комбинаторика

Задачи, связанные с необходимостью подсчитать количество возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих определенным условиям, называются ***комбинаторными***.

Комбинаторика изучает количества комбинаций, которые можно составить из элементов (безразлично какой природы) заданного конечного множества с учетом тех или иных условий.

Название данному направлению дал Г. Лейбниц в работе «Об искусстве комбинаторики».

Основополагающими при решении комбинаторных задач и рассмотрении различных комбинаторных конфигураций являются ***правило произведения*** и ***правило суммы***.

Правило произведения

Если объект ***a*** может быть выбран из некоторого множества объектов ***m*** способами, и после каждого такого выбора объект ***b*** может быть выбран ***n*** способами, то выбор упорядоченной пары (***a***, ***b***) может быть осуществлен ***m·n*** способами.

В общем случае:
если один элемент множества A_1 может быть выбран $|A_1|$ способами, элемент множества A_2 – $|A_2|$ способами, … , элемент множества A_k – $|A_k|$ способами, то выбрать все ***k*** элементов в заданном порядке можно

$$N = |A_1|\cdot|A_2|\cdot \ldots \cdot|A_k|$$

способами.

Примеры.

1. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Сколько двузначных чисел можно составить, используя эти карточки?

Первая цифра выбирается из множества

{1, 2, 3, 4, 5},

ее можно выбрать ***m*** = 5 способами.

Вторая цифра выбирается из множества цифр, оставшихся после выбора первой цифры; ее можно выбрать ***n*** = 4 способами.

По правилу произведения двузначное число (упорядоченную пару цифр) можно составить

$$N = m\cdot n = 5\cdot 4 = 20 \text{ способами.}$$

2. Сколько существует трехзначных шестеричных чисел?

В шестеричной системе счисления используются цифры из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

Для обозначения первой цифры 0 не используется, поэтому первая цифра выбирается из множества $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Вторая и третья цифра выбираются из множеств

$$A_2 = A_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

По правилу произведения трехзначное число можно составить

$$N = |A_1|\cdot|A_2|\cdot|A_3| = 5\cdot 6\cdot 6 = 180 \text{ способами.}$$

Правило суммы

Если объект ***a*** может быть выбран из некоторого множества объектов ***m*** способами, а объект ***b*** может быть выбран ***n*** способами, то выбор либо ***a***, либо ***b*** может быть осуществлен ***m+n*** способами.

Обобщение на ***k*** объектов – аналогично правилу произведения.

Пример.

Для построения кода могут использоваться десятичные цифры (10 цифр) и символы латинского алфавита (26 символов).

Сколько можно составить различных кодов длины 4?

По правилу суммы каждый из 4 символов кода может быть выбран

$$10 + 26 = 36 \text{ способами.}$$

По правилу произведения код может быть составлен

$$\boldsymbol{N} = 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 1\,679\,616 \text{ способами.}$$

Замечание.

Применение правила суммы является очевидным только в том случае, когда объект ***a*** выбирается из множества ***A***, объект ***b*** выбирается из множества ***B***, причем

$$A \cap B = \varnothing.$$

Если же $A \cap B \neq \varnothing$, то необходимо использовать обобщение правила суммы – *«принцип включения-исключения»* (будет рассмотрен далее).

Факториал

Факториал – это функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел, значение которой равно произведению всех натуральных чисел от 1 до натурального числа ***n***, в котором каждое число встречается ровно 1 раз:

$$\boldsymbol{n!} \overset{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (\boldsymbol{n} - 1) \cdot \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n} = 1, 2, \ldots \;;$$

$$\boldsymbol{0!} \overset{\text{def}}{=} 1.$$

Факториал

Примеры.

$$1! = 1,$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2,$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

…………

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800,$$

$$\mathbf{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{\mathbf{7!}}{\mathbf{6}}.$$

3.2 Основные комбинаторные конфигурации

Перестановки (без повторений)

Пусть дано множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Зафиксируем элементы этого множества в каком-либо порядке. Получим некоторую комбинацию элементов (включающую все элементы множества ***A***).

Затем переставим местами некоторые элементы ➔ получим новую комбинацию.

Снова переставим местами некоторые элементы, и т. д.

Рассмотренные комбинации элементов множества ***A*** называются ***перестановками без повторений***.

Перестановки (без повторений)

Перестановками из n элементов **(*без повторений*)** называются комбинации, составленные из одних и тех же ***n*** различных элементов, и отличающиеся только порядком расположения этих элементов.

Число всех перестановок из ***n*** элементов обозначается

$$P_n$$

(или $P(n)$).

Число перестановок без повторений

Формула для определения числа перестановок P_n вытекает из правила произведения:

первый элемент комбинации может быть выбран ***n*** способами (любой из элементов множества ***A***);

второй элемент комбинации может быть выбран ***n*** – 1 способом (любой из ***n*** – 1 элемента, оставшихся после выбора первого);

…………………………

элемент с номером ***n*** – это последний (не выбранный ранее) элемент множества ***A***.

Число перестановок без повторений

По правилу произведения

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,$$

откуда

$$\boxed{P_n = n!} \qquad (3.1)$$

Число перестановок без повторений

Пример.

Сколько существует способов размещения 8 человек на 8 стульях за столом?

Это число перестановок из 8 элементов.

$$P_8 = 8! = 40\ 320.$$

Перестановки с повторениями

При определении перестановок без повторений предполагалось, что все элементы, участвующие в создании комбинаций, различны.

Теперь предположим:

имеется n_1 экземпляров элемента a_1,

n_2 экземпляров элемента a_2,

……………………

n_k экземпляров элемента a_k,

всего $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ объектов.

Перестановки с повторениями

Из этих n объектов образуем комбинации, содержащие все n объектов, и отличающиеся порядком расположения объектов.

Такие комбинации называются ***перестановками с повторениями***.

Число перестановок с повторениями будем обозначать $\dot{P}_n$.

Формула для определения числа перестановок с повторениями получается из формулы для P_n с учетом следующих соображений.

Среди общего числа перестановок $n!$ неразличимыми будут комбинации, связанные с перестановкой местами

n_1 экземпляров a_1 (всего таких комбинаций $n_1!$),

n_2 экземпляров a_2, (всего таких комбинаций $n_2!$),

и т. д.

число комбинаций следует уменьшить в соответствующее число раз.

Число перестановок с повторениями

Окончательно получим:

$$\boxed{\dot{P}_n = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}} \qquad (3.2)$$

Здесь k – число <u>различных</u> элементов.

Если $k = n$, то $\dot{P}_n = P_n = n!$

Число перестановок с повторениями

<u>Пример</u>.

1. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова

a) «рубин»,

b) «ротор»,

если под словом понимать всякую последовательность из пяти букв?

a) Все буквы различны, поэтому число перестановок равно $P_5 = 5! = 120$;

b) буквы «о» и «р» повторяются по 2 раза, поэтому число различных перестановок равно

$$\dot{P}_5 = \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{120}{4} = 30\,.$$

2. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «облако», если каждое слово должно начинаться с согласной буквы?

Если зафиксировать первую букву, то из оставшихся 5 букв можно составить $\dot{P}_5$ комбинаций (буква «о» повторяется дважды):

$$\dot{P}_5 = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{120}{2} = 60\,.$$

Первую букву можно выбрать тремя способами (всего 3 согласных).

По правилу произведения общее число комбинаций равно

$$N = 3\cdot 60 = 180.$$

Размещения без повторений

Пусть дано множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (все элементы предполагаются различными).

Из этих элементов будем составлять комбинации по ***m*** элементов, в которых каждый элемент множества ***A*** встречается не более одного раза.

Такие комбинации называются ***размещениями без повторений***.

Размещения без повторений

Размещениями без повторений называются комбинации, составленные из ***n*** различных элементов по ***m*** элементов в каждой, и отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из ***n*** элементов по ***m*** без повторений обозначается A_n^m

(или ***A***(***n***, ***m***)).

Формула для определения числа размещений A_n^m вытекает из правила произведения:

первый элемент комбинации может быть выбран ***n*** способами (любой из элементов множества ***A***);

второй элемент комбинации может быть выбран ***n*** – 1 способом (любой из ***n*** – 1 элемента, оставшихся после выбора первого);

…………………………

элемент с номером ***m*** может быть выбран ***n*** – (***m*** – 1) способами (любой из элементов, оставшихся после выбора первых ***m*** – 1 элементов).

Число размещений без повторений

По правилу произведения

$$\boxed{A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \dots\ \cdot(n-m+1)} \qquad (3.3)$$

или

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}\,.} \qquad (3.4)$$

Замечание.

Формулы (3.3) и (3.4) с математической точки зрения эквивалентны. При этом формула (3.4) выглядит более «изящной».

С точки зрения алгоритмизации формула (3.3) оказывается намного предпочтительнее формулы (3.4).

Основная причина:

факториал – очень быстро растущая функция ➔ промежуточные результаты (числитель и/или знаменатель в (3.4)) могут не поместиться в разрядную сетку («переполнение»), в то время как окончательный результат мог бы поместиться.

Число размещений без повторений

Примеры.

1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 2 цифры и помнит лишь, что эти цифры различны.

Сколько всего комбинаций он может набрать?

Всего имеется 10 цифр, из которых можно выбрать 2 цифры без повторений.

Число таких комбинаций равно

$$A_{10}^{2} = \frac{10!}{8!} = 9\cdot 10 = 90.$$

2. Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, в которых все цифры различны?

Число не должно начинаться с нуля, поэтому из общего количества всех размещений из 10 цифр по 4 без повторений нужно вычесть количество комбинаций, у которых первая цифра – ноль.

Число комбинаций, начинающихся с нуля, равно A_9^3, поэтому искомое количество равно

$$A_{10}^{4} - A_9^3 = \frac{10!}{6!} - \frac{9!}{6!} = \frac{9!(10-1)}{6!} = 7\cdot 8\cdot 9\cdot 9 = 4536.$$

Размещения с повторениями

При определении размещений без повторений предполагалось, что все элементы, участвующие в создании комбинаций, различны.

Теперь предположим, что из ***n*** элементов множества ***A*** составляются размещения по ***m*** элементов, причем одни и те же элементы могут встречаться в комбинациях многократно.

Такие комбинации называются ***размещениями с повторениями***.

Число размещений с повторениями

Число размещений из ***n*** элементов по ***m*** с повторениями будем обозначать $\dot{A}_n^m$.

Формула для числа размещений с повторениями непосредственно вытекает из правила произведения:

$$\boxed{\dot{A}_n^m = n^m.} \qquad \textbf{(3.5)}$$

<u>Пример</u>.

Символы кодируются с помощью двоичного кода. Для хранения одного символа используется 1 байт.

Сколько различных символов можно закодировать таким образом?

Множество ***A***, элементы которого используются для составления комбинаций, включает всего 2 элемента: 0 и 1, т. е. ***n*** = 2.

Каждая комбинация содержит 8 элементов (1 байт = 8 бит), т. е. ***m*** = 8.

Общее число различных таких комбинаций равно

$$\dot{A}_2^8 = 2^8 = 256.$$

Сочетания (без повторений)

Пусть дано множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (все элементы предполагаются различными).

Выделим из множества ***A*** некоторое подмножество, содержащее ***m*** элементов, ***m*** ≤ ***n***. Каждое такое подмножество называется ***сочетанием из n элементов по m без повторений***.

Без учета порядка расположения элементов!

Сочетания (без повторений)

Число сочетаний из ***n*** элементов по ***m*** без повторений обозначается C_n^m

$\left(\text{или } C(n, m) \text{ или } \binom{n}{m}\right)$.

Число сочетаний без повторений

Формула для определения числа сочетаний C_n^m получается из формулы для числа размещений без повторений A_n^m с учетом следующих соображений.

Размещения, составленные из одних и тех же элементов, и отличающиеся только порядком этих элементов, образуют одно и то же сочетание. Число таких комбинаций равно ***m*!**

Поэтому $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{m!}.$

Окончательно:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}} \qquad (3.6)$$

Число сочетаний без повторений

<u>Примеры</u>.

1. На плоскости расположены 8 точек так, что никакие три точки не лежат на одной прямой.

Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

Число прямых – это число способов выбрать пару точек из 8 (без учета порядка, в котором выбраны точки).

Число таких комбинаций равно

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8}{2} = 28.$$

2. Требуется закодировать 30 букв некоторого алфавита двоичными кодами, содержащими ровно по 2 единицы.

Какова должна быть минимальная длина кода?

Пусть ***n*** – искомая длина кода.

Число различных комбинаций из 0 и 1, содержащих ровно две единицы, равно числу способов выбрать две позиции из ***n***, в которых размещаются 1.

Это число равно

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}.$$

Для кодирования 30 символов необходимо обеспечить выполнение условия

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2} \ge 30,$$

т. е. $n^2 - n \ge 60.$

Наименьшее ***n***, удовлетворяющее этому условию, равно 9.

Для кодирования 30 различных символов с использованием 2 единиц, необходимо использовать 9-значные двоичные коды.

Сочетания с повторениями

При определении сочетаний без повторений предполагалось, что все элементы, участвующие в создании комбинаций, различны.

Теперь предположим, что из n элементов множества A выбираются m элементов, причем в каждую выборку могут входить повторяющиеся элементы и порядок элементов в выборках безразличен.

Такие комбинации называются ***сочетаниями из n элементов по m с повторениями***.

Число сочетаний с повторениями

Число сочетаний из n элементов по m с повторениями будем обозначать $\dot{C}_n^m$.

Формула для определения числа сочетаний с повторениями имеет вид:

$$\boxed{\dot{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}.} \qquad (3.7)$$

<u>Пример</u>.

20 студентов могут сдавать экзамен в любой день из четырех. Количество студентов, подавших заявки на первый, второй, третий и четвертый день, равно, соответственно, n_1, n_2, n_3 и n_4.

Сколько существует различных наборов n_1, n_2, n_3, n_4?

Искомое число – это количество способов распределить 20 объектов (студентов) на 4 группы.

Студенты, подавшие заявки на один и тот же день, могут считаться одним и тем же элементом (возможно, повторяющимся).

Поэтому искомое число наборов равно

$$\dot{C}_4^{20} = C_{4+20-1}^{20} = C_{23}^{20} = \frac{23!}{20!\cdot 3!} = \frac{21\cdot 22\cdot 23}{6} = 1771.$$

Число разбиений множества

Пусть дано множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, которое требуется разбить на k непустых подмножеств A_1, A_2, … , A_k так что

$$A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i = A,$$
$$|A_i| = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Число таких разбиений множества A при фиксированных n_1, n_2, … , n_k будем обозначать

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

В этом случае набор подмножеств A_1, A_2, … , A_k (блоков разбиения) является упорядоченным.

Число разбиений множества

Теорема.

Число разбиений $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ равно

$$\boxed{C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.} \qquad (3.8)$$

Число разбиений множества

Пример.

20 студентов могут сдавать экзамен в любой день из четырех. Количество студентов, которые могут подать заявки на первый, второй, третий и четвертый день, равно, соответственно, n_1, n_2, n_3 и n_4.

Сколькими способами можно разбить студентов на 4 группы для сдачи экзамена при заданных n_1, n_2, n_3 и n_4 ?

Искомое число – это число разбиений

$$C_{20}^{n_1, n_2, n_3, n_4} = \frac{20!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot n_4!}.$$

Число разбиений множества

Например, при $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 5$

$$C_{20}^{5,5,5,5} = \frac{20!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!} = 11\,732\,745\,024.$$

3.3 Бином Ньютона. Свойства сочетаний без повторений

Формула бинома Ньютона

Теорема.

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot x^m \cdot y^{n-m}. \qquad (3.9)$$

Формула (3.9) известна как формула ***бинома Ньютона*** (хотя она была известна среднеазиатским математикам уже в 11-12 вв.)

В силу (3.9) числа C_n^m называются также ***биномиальными коэффициентами***.

Свойства биномиальных коэффициентов

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$. **непосредственно из (3.6)**
2. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.
3. $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$. **$= (1+1)^n$**
4. $\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m = 0$. **$= (1+(-1))^n$**
5. $\sum_{m=0}^{n} m \cdot C_n^m = n \cdot 2^{n-1}$.
6. $C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i \cdot C_n^{k-i}$.

Тождество Коши

Свойства биномиальных коэффициентов

Из свойства 2 вытекает эффективный способ рекуррентного вычисления значений биномиальных коэффициентов.

Графическая форма представления этого способа известна как ***треугольник Паскаля***.

Треугольник Паскаля

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

					1							1
				1		1						2
			1		2		1					3
		1		3		3		1				4
	1		4		6		4		1			5
1		5		10		10		5		1		6
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…		…

C_3^2

C_4^3

В этом равнобедренном треугольнике каждое число, кроме единиц на боковых сторонах, является суммой двух чисел, стоящих над ним. Число C_n^m – в ($\boldsymbol{n}$+1)-м ряду на ($\boldsymbol{m}$+1)-м месте.

3.4 Метод включений и исключений

Практические задачи не всегда прямо сводятся к рассмотренным выше комбинаторным конфигурациям.

В этом случае используются различные методы сведения одних комбинаторных конфигураций к другим.

Один из таких методов – ***метод включений и исключений***.

Применяется в тех случаях, когда комбинаторная конфигурация является объединением других конфигураций, для которых число комбинаций вычислить проще.

В таком случае нужно уметь вычислять <u>число комбинаций в объединении</u>.

<u>Пример</u>.

Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Всего имеется 999 натуральных чисел, меньших 1000.

Из этого количества необходимо вычесть количество чисел, которые делятся либо на 3, либо на 5, либо на 7.

Обозначим:

A – множество чисел от 1 до 999, которые делятся на 3;

B – множество чисел от 1 до 999, которые делятся на 5;

C – множество чисел от 1 до 999, которые делятся на 7.

Тогда $A \cup B \cup C$ – множество чисел, которые делятся либо на 3, либо на 5, либо на 7.

Поэтому искомое количество равно

$$999 - |A \cup B \cup C|.$$

Подлежит определению

$$|A| = \left[\frac{999}{3}\right] = 333;$$

$$|B| = \left[\frac{999}{5}\right] = 199;$$

$$|C| = \left[\frac{999}{7}\right] = 142.$$

[*z*] – целая часть числа *z*

Если найти сумму $|A| + |B| + |C|$, то некоторые числа в ней будут подсчитаны дважды или трижды (те, которые делятся и на 3, и на 5 и т. п.).

$$|A \cap B| = \left[\frac{999}{15}\right] = 66;$$

$$|A \cap C| = \left[\frac{999}{21}\right] = 47;$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{999}{35}\right] = 28.$$

Числа, которые были подсчитаны более одного раза.

Если вычесть их количество из $|A| + |B| + |C|$:

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|,$$

то некоторые числа будут удалены трижды (те, которые делятся и на 3, и на 5, и на 7).

$$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{999}{3 \cdot 5 \cdot 7}\right] = 9.$$

Это число надо добавить к искомому количеству.

Окончательно:

$$|A \cup B \cup C| =$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 333 + 199 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 542.$$

Количество чисел, меньших 1000, которые делятся либо на 3, либо на 5, либо на 7

Ответ на вопрос задачи (количество чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7):

$$999 - |A \cup B \cup C| = 999 - 542 = 457.$$

Замечание.

В процессе разбора примера получена формула для определения мощности объединения трех множеств:

$$|A \cup B \cup C| =$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Далее – обобщение этой формулы.

Формула включений и исключений

***Теорема*.**

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|. \qquad \textbf{(3.10)}$$

Формула (3.10) известна как ***формула включений и исключений***.

Она позволяет вычислить мощность объединения нескольких множеств (которые могут быть пересекающимися).

3.5 Дополнительные сведения о перестановках

В дальнейших рассуждениях будем вместо перестановок элементов множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ рассматривать перестановки элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Это никак не ограничивает общность рассуждений, т. к. числа 1, 2, …, ***n*** могут рассматриваться как номера элементов множества ***A*** ➔ порядок расположения этих чисел определяет и порядок расположения элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Подстановки

Каждую перестановку можно рассматривать как взаимно-однозначную функцию

$$f:\ \{1,\ 2,\ \dots,\ n\} \to \{1,\ 2,\ \dots,\ n\},$$

которую можно определить таблицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix},$$

Значения аргумента

Значения функции

называемой *подстановкой*.

По сути, перестановка и подстановка - синонимы

Подстановки

Например: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

Если принять соглашение, что элементы верхней строки (аргументы) всегда располагаются в определённом порядке, то верхнюю строку можно не указывать.

Функции – частный случай отношений

можно определять композиции (суперпозиции) перестановок. Это результат последовательного выполнения перестановок.

Пример.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},\quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

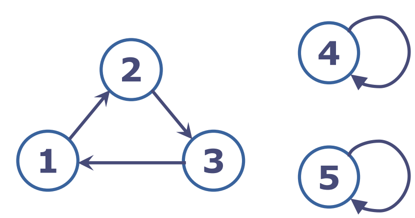
$$f_1 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Графическое представление перестановок

Иногда перестановки удобно представлять в графической форме, проводя стрелки от каждого элемента $\boldsymbol{x}$ к элементу $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Пример.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$



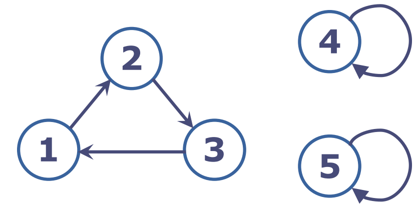
Циклы

Если задана перестановка f, то ***циклом длины k*** в этой перестановке называется последовательность элементов $x_1, \dots, x_k$, такая, что

$$f(x_i) = \begin{cases} x_{i+1}, & 1 \le i < k, \\ x_1, & i = k. \end{cases}$$

Пример.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$



1, 2, 3 – цикл длины 3;
4 – цикл длины 1;
5 – цикл длины 1.

Элементы 1, 2 и 3 переставляются циклическим образом, а остальные элементы остаются на своих местах.

Это принято записывать так:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1 \;\; 2 \;\; 3)(4)(5).$$

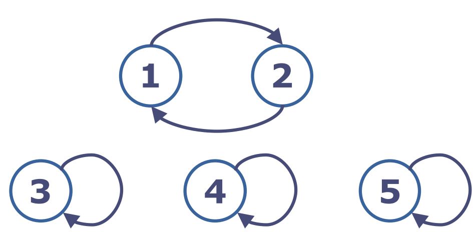
Транспозиции

Цикл длины 2 называется ***транспозицией***.

Транспозиция определяет перестановку, в которой два элемента меняются местами, а остальные элементы остаются на своих местах.

Пример.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$



Теорема.

Произвольную перестановку f можно представить в виде суперпозиции транспозиций соседних элементов.

Следствие.

Всякая сортировка может быть выполнена перестановкой соседних элементов.

На применении этой теоремы основан метод сортировки, известный как ***метод пузырька***.

Алгоритм сортировки методом пузырька

Вход: ***A*** – массив ***n*** элементов типа ***B***, в котором элементы расположены в произвольном порядке;

для значений типа ***B*** задано отношение <;

выход: ***A*** – массив ***n*** элементов типа ***B***, в котором элементы расположены в порядке возрастания.

1. Ввод массива ***A***.
2. Для ***i*** = 2, 3, … , ***n***

   для ***j*** = ***n***, ***n*** – 1, … , ***i***

   если ***A***[***j***] < ***A***[***j*** – 1]

   A[***j***] ↔ ***A***[***j*** – 1]

   Транспозиция соседних элементов
3. Вывод массива ***A***.

Пример.

Применение алгоритма к массиву ***A***: 3, 1, 5, 4, 2.

В данном случае ***n*** = 5.

Первая итерация (по *i*)

i = 2

j = 5

A[5]=2 < ***A***[4]=4

элементы ***A***[4] и ***A***[5] меняются местами:

3, 1, 5, 2, 4;

j = 4

A[4]=2 < ***A***[3]=5

элементы ***A***[3] и ***A***[4] меняются местами:

3, 1, 2, 5, 4;

j = 3

A[3]=2 > ***A***[2]=1;

j = 2

A[2]=1 < ***A***[1]=3

элементы ***A***[1] и ***A***[2] меняются местами:

1, 3, 2, 5, 4.

Конец первой итерации

Вторая итерация (по *i*)

i = 3

j = 5

A[5]=4 < ***A***[4]=5

элементы ***A***[4] и ***A***[5] меняются местами:

1, 3, 2, 4, 5;

j = 4

A[4]=4 > ***A***[3]=2

j = 3

A[3]=2 < ***A***[2]=3

элементы ***A***[2] и ***A***[3] меняются местами:

1, 2, 3, 4, 5.

Конец второй итерации

Легко проверить, что дальнейшие действия не приведут к изменению массива ***A***.

Массив оказался упорядоченным после второй итерации.

<u>Замечание</u>.

Сформулированная выше теорема гарантирует, что **любой** массив может быть упорядочен описанным алгоритмом.

Вместе с тем:

теорема **не** утверждает, что описанный процесс является эффективным.

Алгоритм метода пузырька прост, но является далеко не самым эффективным алгоритмом сортировки.