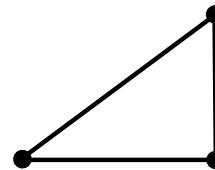


5. Основы теории графов (продолжение)

- Граф, состоящий из одной вершины, называется **тривиальным**.
- Граф, состоящий из простого цикла с k вершинами, обозначается C_k .

Пример.

Граф C_3 :



5.5 Некоторые специальные виды графов

- Граф, в котором любые две вершины смежны, называется **полным**.
- Полный граф с n вершинами обозначается K_n .
Он имеет максимально возможное число рёбер:

$$m(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

**! Обосновать самостоятельно
(используя правила комбинаторики)**

Двудольные графы

Граф $G(V, E)$ называется **двудольным** (или **биграфом**), если множество его вершин V может быть разбито на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 , такие что

$$V_1 \cup V_2 = V, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset,$$

причём всякое ребро из E инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2 (т. е. соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2).

Множества V_1 и V_2 называются **долями** двудольного графа.

Теорема.

Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит простых циклов нечётной длины.

Следствие.

Ациклические графы двудольны.

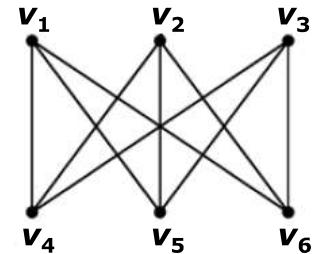
Если двудольный граф содержит все рёбра, соединяющие множества V_1 и V_2 , то он называется **полным двудольным графом**.

Если $|V_1| = p$ и $|V_2| = q$, то полный двудольный граф обозначается $K_{p,q}$.

Пример.

Граф $K_{3,3}$:

$$\begin{aligned}V_1 &= \{v_1, v_2, v_3\}, \\V_2 &= \{v_4, v_5, v_6\}.\end{aligned}$$



Направленные графы

Если в неорграфе ориентировать все рёбра, то получится орграф, который называется **направленным (антисимметричным)**.

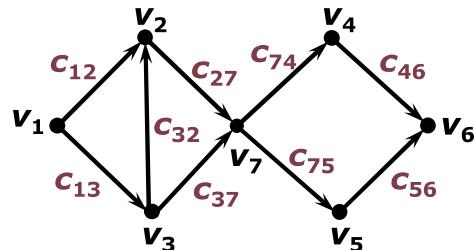
В антисимметричном орграфе не может быть «встречных» дуг (u, v) и (v, u) .

Направленный орграф, полученный из полного графа, называется **турниром**.

Может представлять результаты однокругового спортивного турнира (дуги соединяют победителей и побежденных)

Нагруженные графы

Если каждому ребру (дуге) графа приписано некоторое число (может характеризовать протяженность ребра, стоимость прохождения по ребру и т. п.), называемое **весом** (или **длиной**) ребра (дуги), то граф называется **взвешенным** (или **нагруженным**).



5.6 Орграфы и бинарные отношения

Для представления нагруженного (n, m) -графа $\mathbf{G}(V, E)$ используется **матрица весов (длин)** – квадратная матрица \mathbf{C} порядка n , элементы которой определяются правилами:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ \text{вес ребра } (v_i, v_j), & \text{если } (v_i, v_j) \in E, \\ \infty, & \text{если } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$$

Связь между орграфами и бинарными отношениями

Любой орграф $\mathbf{G}(V, E)$ с петлями, но без кратных дуг задаёт бинарное отношение E на множестве V , и обратно.

А именно:

пара элементов принадлежит отношению на множестве V : $(a, b) \in E \subset V \times V$,

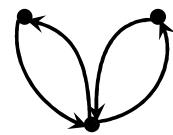
тогда и только тогда, когда в графе \mathbf{G} есть дуга (a, b) .

Полный граф соответствует универсальному отношению.

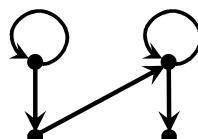
Таким образом:

имеется полная аналогия между орграфами и бинарными отношениями – фактически, это один и тот же класс объектов, описанный разными средствами.

- если в орграфе для всех пар смежных узлов $\{u, v\}$ существует как дуга (u, v) , так и дуга (v, u) , то орграф представляет симметричное отношение;

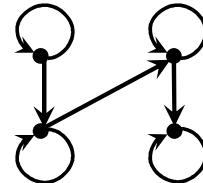


- в орграфе, представляющем антисимметричное отношение, нет ни одной пары узлов $\{u, v\}$ такой, что если существует дуга (u, v) , то существует и дуга (v, u) , но допускаются петли;

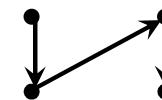


В частности:

- орграф, представляющий рефлексивное отношение, обязательно имеет петли при каждом узле;

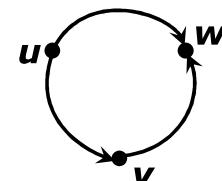


- орграф, представляющий антирефлексивное отношение, не имеет ни одной петли;



- в орграфе, представляющем транзитивное отношение, для любых трех узлов u, v и w должно выполняться условие: если существуют дуги (u, v) и (v, w) , то существует и дуга (u, w) .

Дуга (u, w) называется **транзитивно замыкающей** дугой.



Достижимость и частичное упорядочение

Напоминание:

узел v в орграфе $\mathbf{G}(V, E)$ называется **достижимым из узла u** , если существует путь $\langle u, v \rangle$ из узла u в узел v .

Пусть на множестве V задано отношение строгого частичного порядка $\succ \subset V \times V$ (обладает свойствами антирефлексивности, транзитивности и антисимметричности).

Отношению \succ можно сопоставить орграф $\mathbf{G}(V, E)$, такой что

$$v_1 \succ v_2 \Leftrightarrow (v_1, v_2) \in E.$$

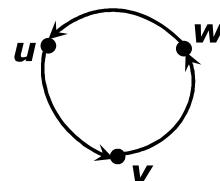
Теорема 1.

Если отношение E есть строгое частичное упорядочение, то орграф $\mathbf{G}(V, E)$ не имеет контуров.

Иллюстрация:

u, v, w, u – контур;

тогда $u \succ v, v \succ w, w \succ u,$



что противоречит свойству транзитивности, в соответствии с которым должно выполняться $u \succ w$.

Теорема 2.

Если орграф $\mathbf{G}(V, E)$ не имеет контуров, то отношение достижимости узлов в этом орграфе есть строгое частичное упорядочение.

Теорема 3.

Если орграф не имеет контуров, то в нем есть узел, полустепень захода которого равна 0.

Такой узел называется источником

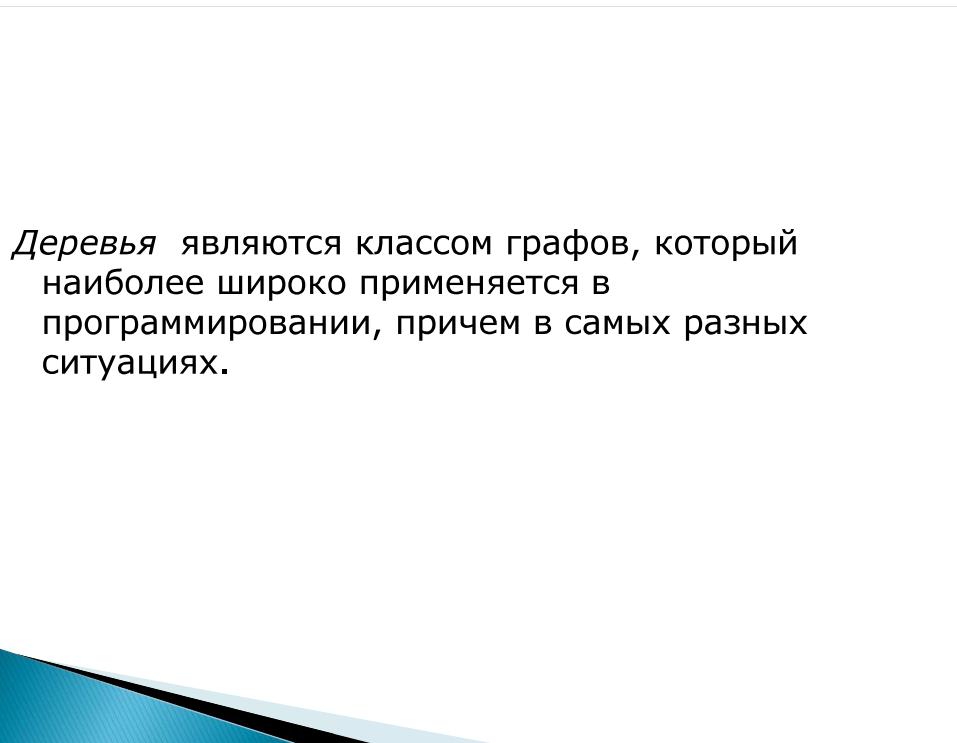
Теорема 3 позволяет обосновать процедуру нахождения минимального элемента в конечном частично упорядоченном множестве (используется в алгоритме топологической сортировки):

найти узел, которому в матрице смежности соответствует нулевой столбец.

Транзитивное замыкание

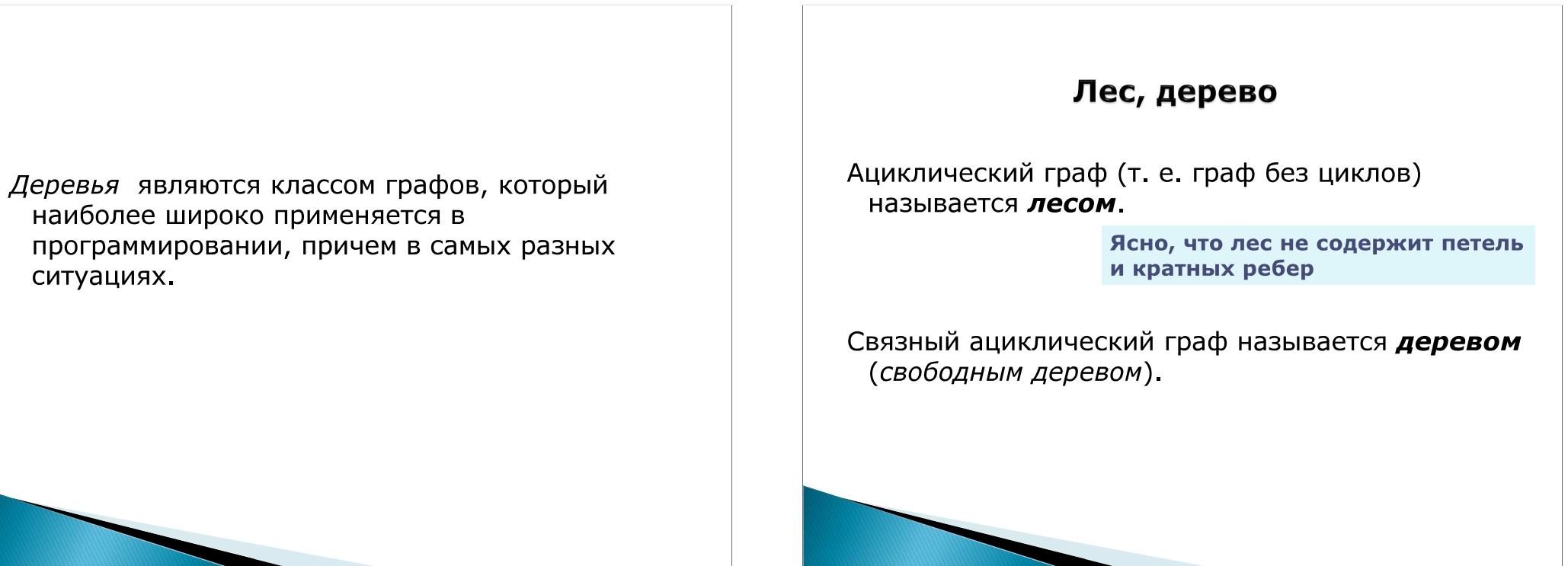
Если E – бинарное отношение на множестве V ,
то транзитивным замыканием E^+ на множестве V
будет отношение достижимости узлов на
орграфе $G(V, E)$.

Матрица достижимости T может быть вычислена
по матрице смежности M с помощью алгоритма
Уоршалла.



Деревья являются классом графов, который наиболее широко применяется в программировании, причем в самых разных ситуациях.

5.7 Деревья



Лес, дерево

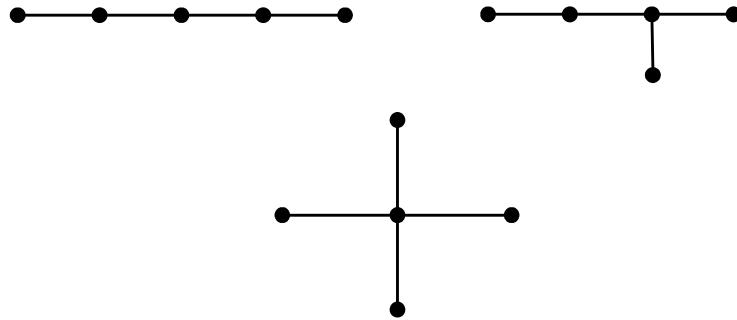
Ациклический граф (т. е. граф без циклов)
называется **лесом**.

Ясно, что лес не содержит петель
и кратных ребер

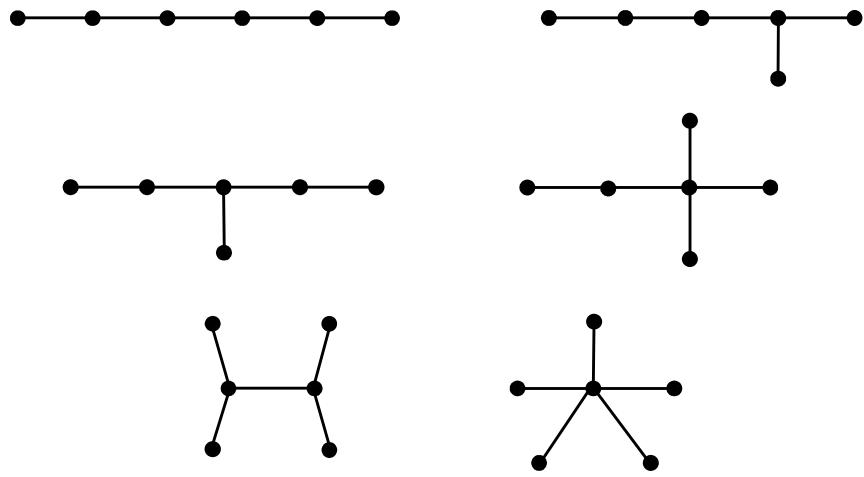
Связный ациклический граф называется **деревом**
(свободным деревом).

Примеры.

Все различные деревья с 5 вершинами:



Все различные деревья с 6 вершинами:



Основные свойства деревьев

Теорема.

Для (n, m) -графа $\mathbf{G}(V, E)$ следующие условия эквивалентны:

- 1) граф \mathbf{G} является деревом;
- 2) \mathbf{G} – связный граф и $m = n - 1$;
- 3) \mathbf{G} – ациклический граф и $m = n - 1$;
- 4) \mathbf{G} – граф, в котором любые две вершины соединены единственной простой цепью;
- 5) \mathbf{G} – ациклический граф, и добавление нового ребра приводит к появлению ровно одного простого цикла.

Следствие 1.

Если (n, m) -граф \mathbf{G} является деревом и $n > 1$, то \mathbf{G} имеет по крайней мере две висячие вершины.

В частности, висячими вершинами в дереве являются концы любого диаметра

Следствие 2.

Если \mathbf{G} – дерево, то каждая не висячая вершина \mathbf{G} является точкой сочленения.

Следствие 3.

Если \mathbf{G} – связный граф, и в \mathbf{G} нет висячих вершин, то \mathbf{G} содержит цикл.

В противном случае \mathbf{G} является деревом, и \Rightarrow содержит висячие вершины

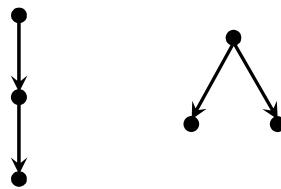
Центр дерева

Теорема.

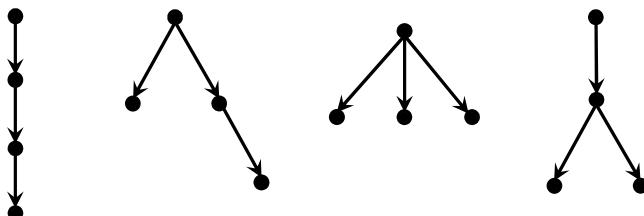
Центр дерева состоит из одной вершины или из двух смежных вершин.

Примеры.

Все различные ориентированные деревья с 3 узлами:



Все различные ориентированные деревья с 4 узлами:



Ориентированные деревья

Ориентированным деревом (или **ордеревом**, или **корневым деревом**) называется орграф со следующими свойствами:

1. Существует единственный узел, полустепень захода которого равна 0. Этот узел называется **корнем ордерева**.
2. Полустепень захода всех остальных узлов равна 1.
3. Каждый узел достижим из корня.

Ориентированные деревья представляют модель иерархических отношений

Свойства ориентированных деревьев

Теорема.

Если (n, m) -граф \mathbf{G} является ордеревом, то он обладает следующими свойствами:

- 1) $m = n - 1$;
- 2) если в \mathbf{G} устраниТЬ ориентацию дуг, то получится свободное дерево;
- 3) в \mathbf{G} нет контуров;
- 4) для каждого узла \mathbf{G} существует единственный путь, ведущий в этот узел из корня;
- 5) подграф, определяемый множеством узлов, достижимых из узла v , является ордеревом с корнем v .

Это ордерево называется поддеревом узла v

Кроме того, справедливо следующее **утверждение**:

если в свободном дереве любую вершину назначить корнем и задать ориентацию ребер «от корня», то получится ордерево.

Замечание.

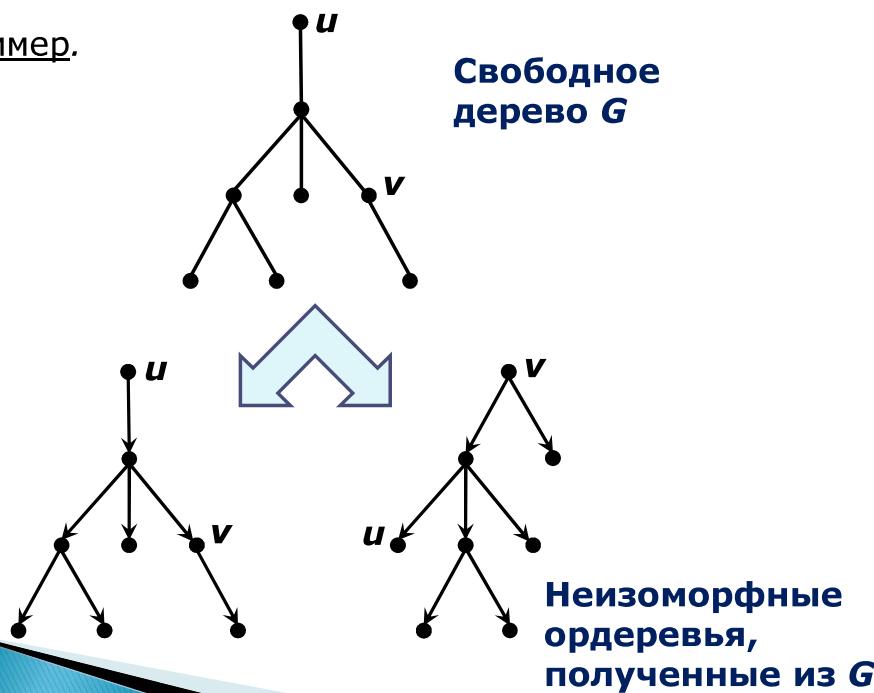
В свободном дереве с n вершинами каждую из n вершин можно назначить корнем и получить ордерево.

Некоторые из полученных ордеревьев могут оказаться изоморфными.



Свободное дерево определяет не более n различных ориентированных деревьев.

Пример.



Еще о терминологии

Концевая вершина ордерева называется **листом**.

Множество листьев называется **кроной**.

Путь из корня в лист называется **ветвью ордерева**.

Длина наибольшей ветви ордерева называется его **высотой**.

Уровень узла ордерева – это расстояние от корня до узла. Корень имеет уровень 0.

Узлы одного уровня образуют **ярус** ордерева.

Наряду с «растительной» используется также «генеалогическая» терминология.

Узлы, достижимые из узла u , называются **потомками** узла u . Потомки одного узла образуют поддерево.

Если узел v является потомком узла u , то узел u называется **предком** узла v .

Если в дереве существует дуга (u, v) , то узел u называется **отцом** (или **родителем**) узла v , а узел v называется **сыном** узла u .

Сыновья одного отца называются **братьями**.

Упорядоченные деревья

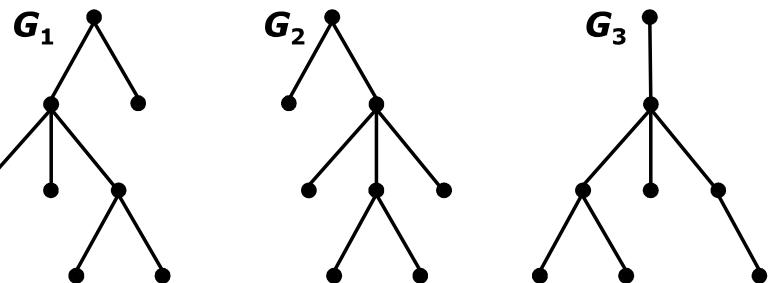
Упорядоченным деревом называется ордерево, у которого дуги, выходящие из каждого узла, упорядочены по определенному критерию.

Общепринятая практика при изображении деревьев:

соглашение о том, что корень находится наверху и все дуги ориентированы сверху вниз, поэтому стрелки можно не изображать.

В таком случае может потребоваться дополнительное уточнение, какого класса дерево изображено на диаграмме. Часто это бывает ясно из контекста.

Пример.



Как свободные деревья G_1 , G_2 и G_3 изоморфны ($G_1 = G_2 = G_3$);

как ориентированные деревья G_1 и G_2 изоморфны; G_2 и G_3 – не изоморфны ($G_1 = G_2$, $G_2 \neq G_3$);

как упорядоченные деревья G_1 , G_2 и G_3 различны:

$G_1 \neq G_2$, $G_2 \neq G_3$, $G_1 \neq G_3$.

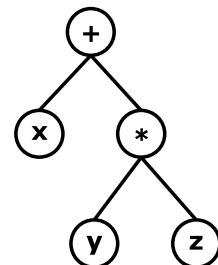
Примеры применения деревьев

□ Представление выражений, подлежащих обработке в программе.

Используются ориентированные упорядоченные деревья.

Пример:

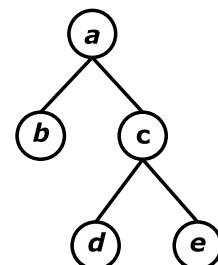
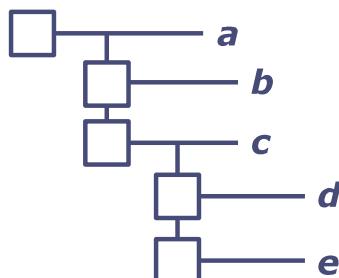
Выражение $x+y*z$



□ Представление структуры вложенности каталогов и файлов в операционных системах.

Используются упорядоченные ориентированные деревья.

Пример:



a – «корневой каталог»

□ Представление блочной структуры программы и связанной с ней структуры областей определения идентификаторов.

Используются ориентированные деревья (может быть, неупорядоченные, т. к. порядок определения переменных часто несущественен).

Пример:

Структура областей определения идентификаторов **a, b, c, d, e**

