Chapitre 5

Primitives d'une fonction et intégration

Pré-requis

- ☐ Maîtriser la notion de fonction réelle et les opérations sur les fonctions.
- ☐ Savoir calculer des dérivées de fonctions réelles.

Objectifs

- ☐ Apprendre à calculer une primitive d'une composée usuelle.
- ☐ Apprendre à calculer des aires.
- ☐ Apprendre à réaliser une intégration par parties.
- ☐ Apprendre à réaliser une intégration par changement de variable.

Sommaire

Important

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Motivations

Le calcul intégral est un concept très important et très utilisé dans différents domaines. Il sert en statistiques afin de calculer des probabilités ; en physique pour calculer des énergies ; en géométrie pour calculer des longueurs de courbe, des aires et des volumes, etc. Dans ce chapitre, nous verrons que l'intégration d'une fonction peut-être vue comme l'opération inverse de la dérivation. Mais, contrairement à cette dernière, il est souvent très difficile de calculer une intégrale.

Par exemple, considérons une voiture se déplaçant sur une route à une vitesse variant au cours du temps. Notons $v(t)$ la vitesse de la voiture au temps t. Il peut être intéressant de déterminer la distance parcourue par la voiture entre les dates t_0 et t_1. Comme nous le verrons à la fin de ce chapitre, cette distance se calcule facilement à l'aide du calcul intégral. À partir de ce résultat, il est possible de déduire la vitesse moyenne du véhicule entre les dates t_0 et t_1.

Chapitre 5 - Séquence 1

Primitive et intégration

1 Primitives d'une fonction

Définition — *Primitive d'une fonction*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une **primitive** de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I.

Exemples

- ▷ Une primitive de la fonction $f : x \mapsto 1$ est la fonction $F : x \mapsto x$ car $F'(x) = 1$. Notons que la fonction $G : x \mapsto x + 5$ est aussi une primitive de f car $G'(x) = 1$.
- ▷ Une primitive de $g : x \mapsto 2x$ est la fonction $G : x \mapsto x^2$ car $G'(x) = 2x$. Notons que la fonction $x \mapsto x^2 - 3$ est aussi une primitive de g.
- ▷ Les primitives des fonctions usuelles sont données dans la fiche « Fonctions usuelles ». Et une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto \arctan(x)$.

Exercice 1.

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = x^5$, **2)** $f_2(x) = -\sin x$, **3)** $f_3(x) = \frac{1}{x}$, **4)** $f_4(x) = \mathrm{e}^x$.

Attention

Toute primitive d'une fonction définie sur I est forcément *continue* et *dérivable* sur I.

Remarque

Dans la majorité des cas, il est très difficile d'obtenir une primitive d'une fonction.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit F une primitive de f sur I.

1. Une fonction G est une primitive de f si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$.
2. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une et une seule primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$.

Preuve. Pour la première propriété, il faut prouver chaque implication du « si et seulement si ».

1. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$, alors $G' = (F + k)' = f$. D'où, G est une primitive de f.
   Soit G une primitive de f sur I. Posons la fonction $h = G - F$. Alors, sur I, $h' = G' - F' = f - f = 0$. Donc, h est une fonction constante sur I. D'où il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$.
2. D'après ce qui précède, toutes les primitives de f sont de la forme $G = F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Or,
   $$G(x_0) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad F(x_0) + k = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad k = y_0 - F(x_0).$$
   Ainsi, l'unique primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$ est la fonction G définie sur I par,
   $$\text{pour tout } x \in I, \quad G(x) = F(x) + \big(y_0 - F(x_0)\big).$$ □

Exercice 2.

Déterminer la primitive de la fonction $f : x \mapsto x^2$ qui vaut 3 en 1.

Remarque

Si une fonction admet une primitive, elle en admet une infinité.

Propriétés — *Primitives des composées usuelles*

Soit u une fonction *dérivable* de I dans J, et soit f une fonction *dérivable* sur J. Alors, la fonction $f \circ u$ est une primitive de $(f' \circ u)u'$ sur I.

Preuve. La fonction $f \circ u$ est dérivable sur I car elle est la composée de deux fonctions dérivables. Et, pour tout $x \in I$, $(f \circ u)'(x) = (f' \circ u)(x).u'(x)$. Donc, $f \circ u$ est une primitive de $(f' \circ u)u'$. □

Remarque

Ce résultat découle de la formule de la dérivation d'une composée de fonctions.

Propriétés

Fonctions	Primitives	Condition	Fonctions	Primitives	Condition
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{u'}{u^n}$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u \neq 0$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$	$u'u^\alpha$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$u > 0$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$	$u \neq 0$	$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u	−
$u' \cos u$	$\sin u$	−	$u'(1+\tan^2 u)$ $= \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$	$u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$u' \sin u$	$-\cos u$	−	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$	−

Exercice 3.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = \cos(3x)$, **2)** $f_2(x) = 5\,\mathrm{e}^{2x}$, **3)** $f_3(x) = \frac{1}{2x+3}$, **4)** $f_4(x) = \sqrt{x-1}$.

Théorème

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

2 Intégrale d'une fonction continue

Définition – *Intégrale d'une fonction continue*

Soient f une fonction *continue* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, F une primitive de f sur I et $a, b \in I$. Alors, l'intégrale de a à b de f, notée $\int_a^b f(x)\,dx$, est le réel défini par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ce réel est aussi noté $F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$.

Attention

- ▷ L'intégrale de a à b de f est indépendante du choix de la primitive F.
- ▷ La variable x dans l'intégrale est appelée la variable d'intégration et est signalée par la notation « dx ». Cette variable est dite *muette* car elle peut-être remplacée par n'importe quelle lettre :
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.$$
Cependant, il faut respecter la cohérence de l'utilisation de la variable. Par exemple, si la variable d'intégration est t, la variable x ne doit plus être présente dans f.

Exemple

Comme $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $[1;3]$, on a

$$\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$

Exercice 4.

Calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x}\,dx$, **2)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$, **3)** $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{3}{x^2}\,dx$, **4)** $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \exp(3x)\,dx$.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et soient $a, b \in I$. Alors,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Propriétés – *Linéarité de l'intégrale*

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et soient $a, b \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Exemple

$$\int_1^2 (3x^2 - x)\,dx = 3\int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 x\,dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 3\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}.$$

Exercice 5.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 (5x^2 - 2x + 1 + \sqrt{x})\,dx,$ **2)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)\,dx.$

Propriétés – *Relation de Chasles*

Soit f une fonction continue sur I, et soient a, b, c trois éléments de I. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur I, et soient $a, b \in I$ avec $a \leq b$. Si $f \leq g$ sur I, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

En particulier, si $f \geq 0$ sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

3 Lien entre intégrale et primitive

Propriétés

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur un intervalle I et $a \in I$.
Alors, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est l'unique primitive de f définie sur I qui s'annule en a.
En effet, F est dérivable sur I avec $F' = f$ et $F(a) = 0$.

Attention

Pour la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, la variable x est la *variable de la fonction* et la variable t est la *variable d'intégration*. Elles doivent donc porter deux noms différents.

Exemple

L'unique primitive de la fonction cos qui s'annule en 0 est la fonction F définie par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \cos t\,dt = \Big[\sin t\Big]_0^x = \sin x - \sin 0 = \sin x.$$

Remarque

L'expression d'une primitive d'une fonction f se note souvent $\displaystyle\int f(x)\,dx$. C'est-à-dire, si F est une primitive de f sur I, pour tout $x \in I$, on a

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k, \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 5

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition :

1) $f_1(x) = x^3$, **3)** $f_3(x) = \sqrt{x}$, **5)** $f_5(x) = \cos(x)$, **7)** $f_7(x) = (x+3)^{83}$,

2) $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, **4)** $f_4(x) = \dfrac{1}{x^2}$, **6)** $f_6(x) = \dfrac{3}{e^x}$, **8)** $f_8(x) = \dfrac{5}{x+3}$.

Exercice 2.

1) Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto x^3$ qui s'annule en 2.

2) Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto e^{2x}$ qui vaux 1 en 1.

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+3x)\,dx$, **3)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx$, **5)** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$, **7)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x+\pi)\,dx$,

2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$, **4)** $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1-2x}\,dx$, **6)** $\displaystyle\int_0^1 \exp(2x)\,dx$, **8)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

Exercice 4.

Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition :

1) $f_1(x) = x\exp(x^2)$, **3)** $f_3(x) = \dfrac{x}{3x^2+2}$, **5)** $f_5(x) = \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2}$,

2) $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{(\cos x)^3}$, **4)** $f_4(x) = x(x^2-1)^{2017}$, **6)** $f_6(x) = \tan x$.

Exercice 5.

Soient f et g deux fonctions définies sur I, et soient $a, b \in I$. Considérons F et G deux fonctions primitives resp. de f et g.

1) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

2) Vérifier que la fonction $F+G$ est une primitive de $f+g$. En déduire que

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

4) La fonction FG est-elle une primitive de fg ?

Exercice 6.

1) En utilisant la formule d'Euler, linéariser les fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \cos^2 x$, **b)** $f_2(x) = \sin^3 x$, **c)** $f_3(x) = \sin^4 x$.

2) En déduire une primitive pour chacune des fonctions ci-dessus.

Exercice 7.

Rappelons que les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont définies par

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1) En utilisant les définitions des fonctions hyperboliques, simplifier les fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \operatorname{sh}^2 x$, **b)** $f_2(x) = \operatorname{ch}^3 x$, **c)** $f_3(x) = \operatorname{sh}^4 x$.

2) En déduire une primitive pour chacune des fonctions ci-dessus.

Exercice 8.

Calculer les intégrales suivantes en utilisant la linéarité de l'intégrale :

1) $\displaystyle\int_0^2 (3x^2 - x)\, dx$, **2)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{4 - x^2}{x}\, dx$, **3)** $\displaystyle\int_4^1 \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}}\, dx$, **4)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x+1)(4-x)}{\sqrt{x}}\, dx$.

Exercice 9.

Déterminer une expression simplifiée de la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t}\, dt, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 10.

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1) Justifier que F est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$.

2) Montrons que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(a) **Méthode 1 :** Étudier le signe de $F(y) - F(x)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$. En déduire que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) **Méthode 2 :** Calculer la dérivée de F. En déduire que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.

1) Écrire la fraction $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ sous la forme $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\, dx$.

Exercice 12.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{1-x}\, dx$, **2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$, **3)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(1+x)}\, dx$, **4)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx$.

Indication : il est nécessaire de faire apparaître l'expression du dénominateur sur le numérateur.

Exercice 13.

Calculer les intégrales suivantes :

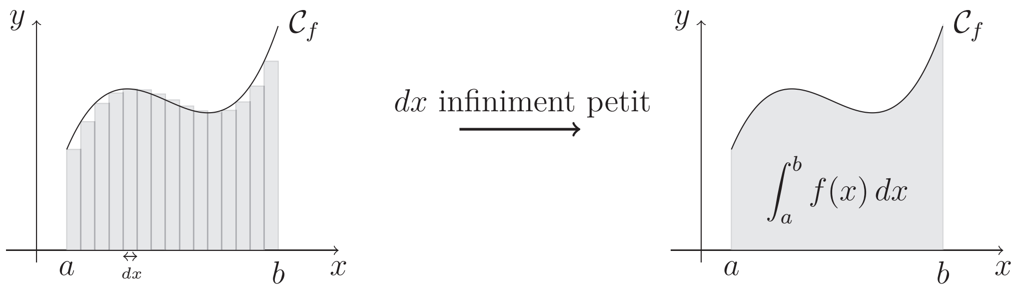
1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$, **2)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$, **3)** $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\, dx$, **4)** $\displaystyle\int_{-1}^2 |x|\, dx$.

4 Interprétation géométrique d'une intégrale

Soient a, b deux réels avec $a \leq b$, et soit f une fonction définie et continue sur $[a; b]$.
Rappelons que l'intégrale de f sur $[a; b]$ est notée

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Le symbole $\int$ représente une somme (d'où sa forme en S allongé) et dx représente une quantité infiniment petite. Enfin, $f(x)\,dx$ est l'aire du rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur dx.
Si f est une fonction positive sur $[a; b]$, alors l'intégrale de f entre a et b représente en réalité une somme infinie d'aires de rectangles dont le résultat donne l'aire sous la courbe de f entre a et b.



Et si f est négative sur $[a; b]$, l'intégrale correspond à la valeur opposée de l'aire du domaine situé entre la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites $x = a$ et $x = b$.

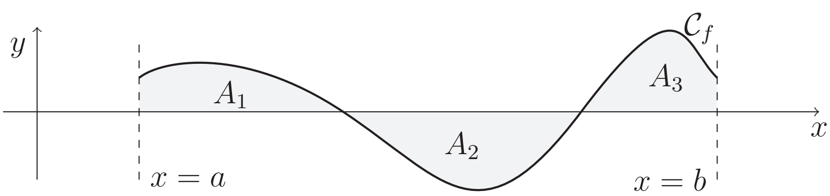
Propriétés

Soit f une fonction *continue* sur un intervalle I, et soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. Considérons sa représentation graphique dans un repère orthonormé. Notons par

- $\mathcal{A}_+$ l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, la courbe représentative de f située au-dessus de l'axe des abscisses.
- $\mathcal{A}_-$ l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, la courbe représentative de f située en-dessous de l'axe des abscisses.

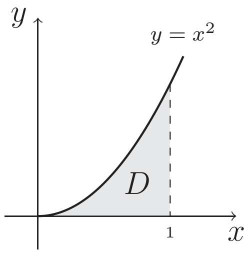
Alors
$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-.$$

Dans l'exemple illustré par la figure ci-dessous, on a $\mathcal{A}_+ = A_1 + A_3$ et $\mathcal{A}_- = A_2$.



Exemple

Soit le domaine D de $\mathbb{R}^2$ dont voici la représentation graphique :



La description en compréhension du domaine D est

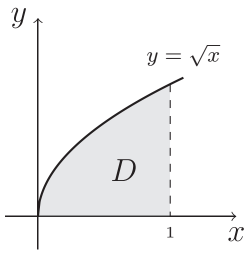
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\right\}.$$

L'aire $\mathcal{A}_D$ du domaine D est égale à :

$$\mathcal{A}_D = \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Exercice 1.

Soit le domaine D de $\mathbb{R}^2$ dont voici la représentation graphique :



Décrire en compréhension le domaine D. En déduire l'aire du domaine D.

Exercice 2.

Soit le trapèze délimité par les droites $x = 1$, $x = 3$, $y = x$ et l'axe des abscisses.
Décrire en compréhension le trapèze, puis calculer son aire.

Définition

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, et $a, b \in I$ avec $a < b$. On appelle **valeur moyenne** de f sur l'intervalle $[a; b]$ le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt.$$

Remarque — *Interprétation graphique de la valeur moyenne*

La relation précédente se réécrit

$$\int_a^b f(t)\, dt = (b-a)\mu.$$

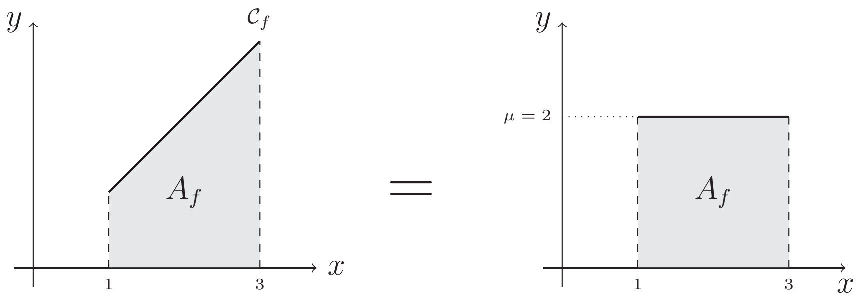
Ainsi, l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de longueur $b - a$ et de hauteur μ.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto x$. Alors, la valeur moyenne de f sur $[1;3]$ est :

$$\mu = \frac{1}{3-1}\int_1^3 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2.$$

Si A_f désigne l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$, alors $A_f = (3-1)\mu = 2\mu$.



5 Intégration par parties

Propriété – *Formule d'intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions *continûment dérivables* sur I. Alors, pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx,$$

où $\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Preuve. D'après la formule $(uv)' = u'v + uv'$, on a, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Or une primitive de $(uv)'$ est uv. Ainsi, $\int_a^b (uv)'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b$ et donc

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

□

Méthode – *Calcul d'une intégrale par intégration par parties*

Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties, on procède comme suit :

1. Poser une fonction u' continue (choisie de telle sorte qu'une primitive soit connue) et une fonction v dérivable telle que $f = u'v$.
2. Calculer une primitive u de u' et calculer la dérivée v' de v.
3. Appliquer la formule d'intégration par parties.

Exemples

- ▷ Soit
$$I=\int_1^3 x\,\mathrm{e}^x\;dx.$$
Posons $u'(x)=\mathrm{e}^x$ et $v(x)=x$. D'où, $u(x)=\mathrm{e}^x$ et $v'(x)=1$. Alors, par intégration par parties, on a
$$I=\Big[x\,\mathrm{e}^x\Big]_1^3-\int_1^3 1\,\mathrm{e}^x\;dx=(3\,\mathrm{e}^3-1\,\mathrm{e}^1)-\Big[\mathrm{e}^x\Big]_1^3=(3\,\mathrm{e}^3-\mathrm{e})-(\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^1)=2\,\mathrm{e}^3.$$
- ▷ Soit
$$J=\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos x\,dx.$$
Posons $u'(x)=\cos x$ et $v(x)=x$. D'où, $u(x)=\sin x$ et $v'(x)=1$. Alors, par intégration par parties, on a
$$\begin{aligned}J=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\,dx &= \left(\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-0\sin 0\right)-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}\\ &= \frac{\pi}{12}-\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos 0\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-2}{2}.\end{aligned}$$

Remarques – *Conseils d'utilisation*

- ▷ Pour pouvoir appliquer une intégration par parties, il est nécessaire d'apprendre à identifier un produit $u'v$ dans la fonction f de telle sorte qu'il soit facile de déterminer une primitive de la fonction u'.
- ▷ Il est important qu'après application de la formule d'intégration par parties, l'intégrale obtenue **ne soit pas plus difficile** que l'intégrale de départ.

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1=\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx$, **2)** $I_2=\displaystyle\int_0^1 x\exp(-3x)\,dx$, **3)** $I_3=\displaystyle\int_1^2 x^2\ln x\,dx$.

Remarque

Il est possible d'adapter la formule d'intégration par parties pour le calcul d'une primitive d'une fonction :
$$\int u'(x)v(x)\,dx=u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)\,dx.$$

Exemple

Déterminons les primitives de $x\mapsto x\,\mathrm{e}^{2x}$. Posons $u'(x)=x$ et $v(x)=\mathrm{e}^{2x}$. D'où, $u(x)=1$ et $v'(x)=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$. Ainsi, par intégration par parties, pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$\int x\,\mathrm{e}^{2x}\;dx=\mathrm{e}^{2x}-\int\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\;dx=\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x}+k=\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{2x}+k,\quad k\in\mathbb{R}.$$

Chapitre 5

Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

1) Représenter graphiquement les domaines de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 5\right\} \quad \text{et} \quad D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \tfrac{1}{x}\right\}.$$

2) En déduire les aires de chacun de ces domaines.

Exercice 2.

Déterminer la valeur moyenne des fonctions suivantes

1) $f_1(x) = x^2$ sur $[-1; 3]$, **2)** $f_2(x) = \cos x$ sur $[0; \pi]$, **3)** $f_3(x) = x\,\mathrm{e}^x$ sur $[0; 1]$.

Exercice 3.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et soient $a, b \in I$.

1) Donner la dérivée de uv. Puis intégrer le résultat entre a et b.

2) En déduire une expression de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

Exercice 4.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties

1) $I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x \ln x\,dx$,

2) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x \operatorname{ch} x\,dx$,

3) $I_3 = \displaystyle\int_0^1 x \exp(-2x)\,dx$,

4) $I_4 = \displaystyle\int_0^1 (x+1) \operatorname{sh}(3x)\,dx$,

5) $I_5 = \displaystyle\int_{-1}^{-\mathrm{e}} (2x+1)\ln(-x)\,dx$,

6) $I_6 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x+1)\cos(3x)\,dx$,

7) $I_7 = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$,

8) $I_8 = \displaystyle\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx$.

Exercice 5.

Soient les réels

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx.$$

1) Calculer $I + J$.

2) Montrer que $I - J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,dx$. Puis calculer $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.

3) En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 6.

Déterminer une primitive pour la fonction ln en utilisant une intégration par parties. Même question pour la fonction arctan.

Exercice 7.

Calculer les intégrales à l'aide de deux intégrations par parties successives

1) $I_1 = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\, dx$, **2)** $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$, **3)** $I_3 = \displaystyle\int_0^1 x^2\, \mathrm{e}^{-2x}\, dx$.

Exercice 8.

Déterminer l'aire des domaines suivants

1) $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq \sqrt{x}\}$, **2)** $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$.

Exercice 9.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de la méthode d'intégration par parties :

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx$, **3)** $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x} \sin x\, dx$, **5)** $I_5 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\pi}} \cos(\ln x)\, dx$.

2) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x} \sin x\, dx$, **4)** $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-x} \cos(2x)\, dx$,

Indication : il faudra observer que l'intégrale de départ réapparaît après une ou plusieurs intégrations par parties.

Exercice 10.

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, \mathrm{e}^{x} \sin x\, dx.$$

Exercice 11.

Déterminer une primitive, à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties, pour les fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = \left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{x}$, **2)** $f_2(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$, **3)** $f_3(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.

Exercice 12.

En appliquant une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Indication : il est nécessaire de faire apparaître l'expression du dénominateur sur le numérateur.

Intégration par changement de variable

Propriété – *Formule d'intégration par changement de variable*

Soient $u : I \to J$ une fonction *continûment dérivable* sur l'intervalle I et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur l'intervalle J. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f\big(u(t)\big)u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx.$$

Preuve. Soit F une primitive de f sur J. Comme $F' = f$, on a $(F \circ u)' = (F' \circ u)u' = (f \circ u)u'$ sur I. Donc, pour tout $a, b \in I$,

$$\int_a^b (F \circ u)'(t)\,dt = \int_a^b f\big(u(t)\big)u'(t)\,dt.$$

Or, une primitive de $(F \circ u)'$ est $F \circ u$. Donc,

$$\int_a^b (F \circ u)'(t)\,dt = \Big[(F \circ u)(t)\Big]_a^b = F\big(u(b)\big) - F\big(u(a)\big) = \Big[F(x)\Big]_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx.$$

Ainsi,

$$\int_a^b f\big(u(t)\big)u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx.$$

□

Méthode – *Calcul d'une intégrale par changement de variable*

Pour calculer, à l'aide d'un changement de variable, l'intégrale

$$\int_a^b g(t)\,dt,$$

on procède comme suit :

1. Choisir une fonction u dérivable, puis calculer la dérivée de u.
2. Faire apparaître la fonction u' dans l'intégrale :
$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b \frac{g(t)}{u'(t)}u'(t)\,dt.$$
3. Transformer la fonction $\dfrac{g}{u'}$ comme une composée d'une fonction f avec u au sein de l'intégrale :
$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b \frac{g(t)}{u'(t)}u'(t)\,dt = \int_a^b f\big(u(t)\big)u'(t)\,dt.$$
4. Appliquer la formule d'intégration par changement de variable en posant $x = u(t)$ et **en n'oubliant pas de changer les bornes** :
$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b \frac{g(t)}{u'(t)}u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx.$$

Remarques — *Conseils d'utilisation*

- Pour déterminer le bon changement de variable, il faut souvent choisir une fonction simple déjà présente dans l'intégrale. Dans le cas contraire, on se ramene à des situations connues.
- Il n'est pas toujours nécessaire de faire apparaître la fonction u' car elle est souvent naturellement présente dans l'intégrale.
- Un changement de variable a fonctionné lorsque $\frac{g}{u'}$ a pu être transformé en une composée d'une fonction f avec la fonction u.

Exemple

Soit le réel

$$I = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln t}\, dt.$$

1. Posons $u(t) = \ln t$. La fonction u est dérivable sur $[\mathrm{e};\mathrm{e}^2]$ et $u'(t) = \frac{1}{t}$.
2. Ainsi,
$$I = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{\ln t}\frac{1}{t}\, dt = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{\ln t} u'(t)\, dt.$$
3. Or, pour tout $t \in [\mathrm{e};\mathrm{e}^2]$, $\dfrac{1}{\ln t} = \dfrac{1}{u(t)} = f\big(u(t)\big)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

   Donc,
$$I = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{\ln t} u'(t)\, dt = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f\big(u(t)\big)u'(t)\, dt.$$
4. Donc, d'après la formule d'intégration par changement de variable en posant $x = u(t)$,
$$I = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f\big(u(t)\big)u'(t)\, dt = \int_{u(\mathrm{e})}^{u(\mathrm{e}^2)} f(x)\, dx = \int_{\ln \mathrm{e}}^{\ln \mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\, dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^2 = \frac{3}{4}.$$

À noter — *Moyen mnémotechnique*

Soit le changement de variable $u = u(t)$. En physique, la dérivée u' de u se note aussi $\frac{du}{dt}$. Ainsi

$$\frac{du}{dt} = u'(t).$$

D'où la notation

$$\text{« } du = u'(t)dt \text{ ».}$$

Alors, appliquer la formule d'intégration par changement de variable revient à remplacer dans l'intégrale les expressions $u(t)$ par u, et $u'(t)\, dt$ par du :

$$\int_a^b f(u(t))\, u'(t)\, dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du.$$

devient

Attention

Lorsqu'on pose le changement de variable $u = u(t)$, il ne faut pas confondre la variable u et la fonction u :

$$\boxed{u} = \boxed{u}(t).$$

ble u la fonction u

Exemples

▷ Soit le réel
$$J = \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} 2t\cos(t^2)\,dt.$$
Posons $u(t) = t^2$. D'où, $u'(t) = 2t$. Ainsi,
$$J = \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \cos\big(u(t)\big)u'(t)\,dt.$$
Donc, en posant le changement de variable $u = t^2$,
$$J = \int_{u(-\sqrt{\pi})}^{u(\sqrt{2\pi})} \cos u\,du = \int_{\pi}^{2\pi} \cos u\,du = \Big[\sin u\Big]_{\pi}^{2\pi} = 0,$$

▷ Soit le réel
$$L = \int_0^1 t^3\,\mathrm{e}^{t^2}\,dt.$$
Posons $u(t) = t^2$. D'où, $u'(t) = 2t$. Ainsi, en posant le changement de variable $u = u(t)$,
$$L = \int_0^1 \frac{1}{2}u(t)\,\mathrm{e}^{u(t)}\,u'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(1)} u\,\mathrm{e}^u\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 u\,\mathrm{e}^u\,du.$$
Et, par intégration par parties, on a donc
$$L = \frac{1}{2}\int_0^1 u\,\mathrm{e}^u\,dx = \frac{1}{2}\left(\Big[u\,\mathrm{e}^u\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^u\,du\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^1 - \Big[\mathrm{e}^u\Big]_0^1\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 1.

Calculer, à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt$ en prenant $u = \ln t$ comme changement de variable.

2) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} t^2\big(1+\cos(t^3)\big)\,dt$ en prenant $u = t^3$ comme changement de variable.

3) $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,dt.$

Chapitre 5

Feuille d'exercices de la séquence 3

Exercice 1.

Calculer les intégrales à l'aide d'un changement de variable :

1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} t\sin(t^2)\,dt$ en posant $u(t) = t^2$,

2) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{t\ln t}\,dt$ en posant $u(t) = \ln(t)$,

3) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{1}{\pi}} \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2}\,dt$ en posant $u(t) = \dfrac{1}{t}$,

4) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$ en posant $u(t) = \exp(t)$,

5) $\displaystyle\int_0^1 t^2(1+\mathrm{e}^{t^3})\,dt$ en posant $u(t) = t^3$,

6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,dt$ en posant $u(t) = \sqrt{t}$.

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

1) $\displaystyle I_1 = \int_0^1 t\exp(t^2)\,dt$,

2) $\displaystyle I_2 = \int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{e}^{\cos(t)}\,dt$,

3) $\displaystyle I_3 = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t\sin(t^2)\cos(t^2)\,dt$,

4) $\displaystyle I_4 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,dt$.

5) $\displaystyle I_5 = \int_1^{\mathrm{e}^{\pi}} \frac{1+\cos(\ln t)}{t}\,dt$,

6) $\displaystyle I_6 = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt$.

Exercice 3.

Calculer, à l'aide d'un changement de variable suivi d'une intégration par parties, les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle I_1 = \int_3^8 \mathrm{e}^{\sqrt{t+1}}\,dt$,

2) $\displaystyle I_2 = \int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{t})\,dt$,

3) $\displaystyle I_3 = \int_0^1 t^3\exp(t^2)\,dt$,

4) $\displaystyle I_4 = \int_1^{\mathrm{e}^{\pi}} \sin(\ln(t))\,dt$,

5) $\displaystyle I_5 = \int_0^1 \arctan(\sqrt{t})\,dt$.

Exercice 4.

Pour cet exercice, il est nécessaire d'utiliser la relation de Chasles.

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et paire. Montrer que, pour tout réel a, on a

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt.$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et impaire. Montrer que, pour tout réel a, on a

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$$

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période T. Montrer que, pour tout réel a, on a

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Exercice 5.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\, dt$,

2) $I_2 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t}\, dt$,

3) $I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}\, dt$,

4) $I_4 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln t}\, dt$,

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t\cos(t^2+\pi)\, dt$,

6) $I_6 = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\, dt$,

Exercice 6.

Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition :

1) $f_1(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}$,

2) $f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

3) $f_3(x) = \frac{1+\cos(\ln x)}{x}$

4) $f_4(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$,

5) $f_5(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

Exercice 7.

La *règle de Bioche* est une règle pour effectuer des changements de variable dans le cas des fonctions rationnelles trigonométriques. Considérons une fonction f définie par

$$f(x) = F(\sin x, \cos x),$$

où $F(\sin x, \cos x)$ est une expression rationnelle ne dépendant que de $\sin x$ et $\cos x$. Il est possible de poser les changements de variable suivants :

- ▷ si $f(-x) = -f(x)$, poser $u(x) = \cos x$ et utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- ▷ si $f(\pi - x) = -f(x)$, poser $u(x) = \sin x$ et utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- ▷ si $f(\pi + x) = f(x)$, poser $u(x) = \tan x$ et utiliser les relations

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}.$$

- ▷ sinon, poser $u(x) = \tan(\frac{x}{2})$ et utiliser les relations

$$\cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}.$$

Appliquer la régle de Bioche pour déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = \cos^5 x$,

2) $f_2(x) = \cos^3 x \sin^2 x$,

3) $f_3(x) = \tan^2 x$,

4) $f_4(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$,

5) $f_5(x) = \frac{1}{1+\sin x}$,

6) $f_6(x) = \frac{1}{\sin^4 x}$,

7) $f_7(x) = \frac{\tan x}{1+\cos x}$.

Chapitre 5

Quelques applications

Application 1.

Considérons un bateau se déplaçant sur une mer dont la vitesse est exprimée en $m.s^{-1}$ par la fonction suivante :

$$v(t) = t^2 + 1, \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+,$$

où t représente le temps exprimé en secondes.

1) Soient t_0 et t_1 deux réels positifs avec $t_0 < t_1$. La distance parcourue entre le temps t_0 et t_1, notée $d([t_0; t_1])$, est définie par :

$$d([t_0; t_1]) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt.$$

Calculer la distance parcourue par le bateau sur l'intervalle de temps $[0; 20]$.

2) Donner une signification de la valeur moyenne de v sur $[t_0; t_1]$.

À retenir

- ☐ Savoir déterminer la primitive d'une fonction.
- ☐ Savoir calculer l'intégrale d'une fonction.
- ☐ Savoir interpréter géométriquement l'intégrale d'une fonction.
- ☐ Savoir réaliser une intégration par parties.
- ☐ Savoir réaliser une intégration par changement de variable.

Pour la suite

- ☐ Résolution d'équations différentielles.
- ☐ Intégration multiple.