Feuille d'exercices séquence 1

Exercice 1.

Soient $z_1 = 2+3i$ et $z_2 = 5-6i$. Calculer z_1+z_2, z_1-z_2 et z_1z_2.

Correction : On a

- $z_1+z_2 = 7-3i$,
- $z_1-z_2 = -3+9i$,
- $z_1z_2 = 28+3i$.

Exercice 2.

Soient $z_1 = a_1+ib_1$ et $z_2 = a_2+ib_2$ les formes algébriques des nombres complexes z_1 et z_2, et soit λ un réel. Déterminer les formes algébriques de λz_1, z_1+z_2 et z_1z_2.

Exercice 3.

Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 1+2i$,

b) $z_2 = -i$,

c) $z_3 = 5i-2$,

d) $z_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Correction :

a) $\bar{z}_1 = 1-2i$,

b) $\bar{z}_2 = i$,

c) $\bar{z}_3 = -2-5i$,

d) $\bar{z}_4 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Exercice 4.

Calculer le conjugué et le module des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = i+6-2i+5$,

b) $z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{i}{2} - \dfrac{1}{3}$,

c) $z_3 = (1+2i)(3-3i)$,

d) $z_4 = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2i}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{6i}{5}\right)$,

e) $z_5 = \left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)$,

f) $z_6 = \left(3\sqrt{5}+2i\sqrt{2}\right)^2$.

Correction :

a) $\bar{z}_1 = 11+i$ et $|z_1| = \sqrt{122}$,

b) $\overline{z_2} = \dfrac{5}{6} - i\dfrac{5}{6}$ et $|z_2| = \dfrac{5}{6}\sqrt{\dfrac{1}{2}}$,

c) $\bar{z}_3 = 9-3i$ et $|z_3| = 9\sqrt{10}$,

d) $\bar{z}_4 = -\dfrac{7}{15} + \dfrac{7}{45}i$ et $|z_4| = \dfrac{7}{45}\sqrt{10}$,

e) $\bar{z}_5 = 5$ et $|z_5| = 5$,

f) $\bar{z}_6 = 37-12\sqrt{10}$.

Exercice 5.

Soit $z = 2-5i$. Calculer $z+\bar{z}$, $z-\bar{z}$ et $z\bar{z}$.

Exercice 6.

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$. Calculer $z + \overline{z}$, $z - \overline{z}$ et $z\overline{z}$.

Exercice 7.

1) Calculer les modules des nombres complexes $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = 1 - 2i$.

2) Vérifier que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

3) Vérifier que $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.

Exercice 8.

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes donnés sous forme algébrique. Calculer $|z_1 z_2|^2$, $|z_1|^2$ et $|z_2|^2$.

Exercice 9.

Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $z = ia$. Déterminer le conjugué de z.

Exercice 10.

Par convention, posons $i^0 = 1$.

1) Calculer i^3, i^4, i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, i^{-4}.

2) Calculer i^{4m}, i^{4m+1}, i^{4m+2}, i^{4m+3} pour $m \in \mathbb{Z}$.

3) Calculer i^{2017}.

Exercice 11.

Mettre sous forme algébrique (c'est-à-dire simplifier) les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \dfrac{-1-i}{2-2i}$,

b) $z_2 = \dfrac{5-5i}{-3+4i}$,

c) $z_3 = \dfrac{-1+4i}{-2-i}$,

d) $z_4 = \dfrac{7+6i}{4-i} . \dfrac{3+i}{i}$,

e) $z_5 = \dfrac{2+i}{1+3i} . \dfrac{1-i}{1+i}$,

f) $z_6 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$.

Correction :

a) $z_1 = -\dfrac{i}{2}$.

b) $z_2 = \dfrac{-7-5i}{5}$.

c) $z_3 = \dfrac{-2-9i}{5}$.

d) $z_4 = \dfrac{115-35i}{17}$.

e) $z_5 = -\dfrac{1+i}{2}$.

f) $z_6 = \dfrac{-6}{2} = -3$.

Exercice 12.

Pour chacun des nombres complexes z ci-dessous, donner la forme algébrique du conjugué $\overline{z}$:

a) $z_1 = \dfrac{1}{i}$,

b) $z_2 = \dfrac{2i-1}{1-2i}$,

c) $z_3 = (5+2i)^2$,

d) $z_4 = \dfrac{i}{i+1}$.

Correction :

a) $\overline{z}_1 = i$,

b) $\overline{z}_2 = -1$,

c) $\overline{z}_3 = 21 - 20i$,

d) $\overline{z}_4 = \dfrac{1-i}{2}$.

Exercice 13.

Déterminer sous forme algébrique les solutions des équations suivantes :

1) $2z + 6 - 4i = 0$,

2) $(-1 - 2i)z - 2 = 0$,

3) $-3z + 2 = 4iz - 2i$,

4) $(2 + i)^2 z - (1 - i)^3 = 0$.

Correction :

1) $z = \dfrac{-6 + 4i}{2}$.

2) $z = \dfrac{2 - 4i}{5}$.

3) $z = \dfrac{14 - 2i}{25}$.

4) $z = \dfrac{-14 + 2i}{25}$.

Exercice 14.

1) Montrer que $z^2 - 2z + 5 = (z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)$.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$ sans calculer le discriminant.

Correction :

1) On a

$$(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i) = z^2 - (1 + 2i)z + (-1 + 2i)z - (1 + 2i)(-1 + 2i) = z^2 - 2z + 5.$$

2) D'où

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 + 2i \text{ ou } z = 1 - 2i.$$

Exercice 15.

1) Montrer que $z^2 - 3 - 4i = (z - 2 - i)(z + 2 + i)$.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = 3 + 4i$.

Correction :

1) On a $(z - 2 - i)(z + 2 + i) = z^2 - (2 + i)z + (2 + i)z - (2 + i)^2 = z^2 - 3 - 4i$.

2) D'où

$$z^2 - 3 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - 2 - i)(z + 2 + i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2 + i \text{ ou } z = -2 - i.$$

Exercice 16.

1) Montrer que $z^2 + (4 + i)z + (5 + 5i) = (z + 1 + 2i)(z + 3 - i)$.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + 4z + 5 = -iz - 5i$.

Correction :

1) On a

$$(z + 1 + 2i)(z + 3 - i) = z^2 + (3 - i)z + (1 + 2i)z + (1 + 2i)(3 - i) = z^2 + 4z + iz + 5 + 5i.$$

2) $z^2 + 4z + 5 = -iz - 5i \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + (4 + i)z + (5 + 5i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z + 1 + 2i)(z + 3 - i) = 0$, d'ou $z = -1 - 2i$ ou $z = -3 + i$.

Une application en électronique

On peut rencontrer les nombres complexes lorsque on travaille avec les circuits électriques.

Tout d'abord une précision. En mathématiques, on a vu que le nombre i est utilisé pour définir les nombres complexes. Par contre, en électronique, ce nombre i signifie déjà courant, donc on utilise j pour les nombres complexes (parce que la lettre suivante après i est j).

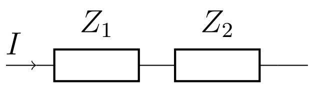
L'impédance électrique mesure la résistance d'un circuit électrique au passage d'un **courant alternatif sinusoïdal**. Il correspond à un nombre complexe, noté Z. L'admittance, notée Y, est l'inverse de l'impédance : $Y = \frac{1}{Z}$.

Si ω définit la pulsation (en radians par seconde) du courant sinusoïdal, alors

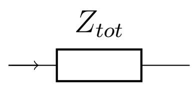
- ▷ l'impédance d'une résistance est $Z_R = R$, où R est la valeur (en ohms Ω) de la résistance,
- ▷ l'impédance d'un condensateur est $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$, où C est la capacité (en farad F) du condensateur,
- ▷ l'impédance d'une bobine est $Z_L = jL\omega$, où L est l'inductance (en henry H) de la bobine.

L'impédance complexe d'un circuit se calcule en suivant les règles suivantes :

- ▷ l'impédance d'éléments en série est la somme des impédances,

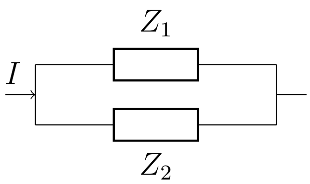


est équivalent à

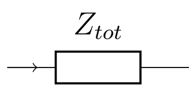


avec $Z_{tot} = Z_1 + Z_2$

- ▷ si on a des éléments en parallèle, l'inverse de l'impédance du circuit est la somme des inverses des impédances. Donc dans ce cas ce sont les admittances qui s'additionnent.



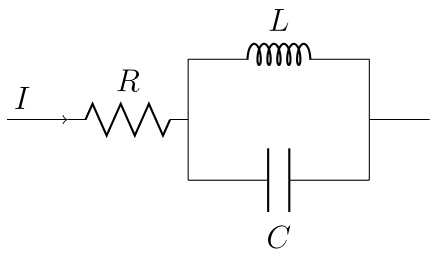
est équivalent à



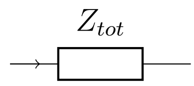
avec $\dfrac{1}{Z_{tot}} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}$

Exemple

Pour le circuit suivant :



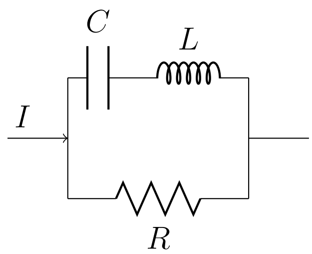
est équivalent à



avec $Z_{tot} = Z_R + \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_L} + \dfrac{1}{Z_C}} = R + \dfrac{1}{\dfrac{1}{jL\omega} + \dfrac{1}{\frac{1}{jC\omega}}} = R + \dfrac{jL\omega}{1 + (jC\omega)(jL\omega)} = R + \dfrac{jL\omega}{1 - CL\omega^2}$.

Exercice 1.

Calculer l'impédance complexe du circuit suivant :



Correction : $\dfrac{1}{Z_{tot}} = \dfrac{jCR\omega + 1 - CL\omega^2}{R(1 - CL\omega^2)}$.