Chapitre 2

Les nombres complexes

Pré-requis

- ☐ Équations de second degré,
- ☐ Trigonométrie,
- ☐ Valeur absolue.

Objectifs

- ☐ Savoir manipuler l'écriture algébrique, l'écriture trigonométrique et l'écriture exponentielle d'un nombre complexe,
- ☐ Savoir effectuer les opérations sur les complexes,
- ☐ Savoir calculer le module et l'argument d'un nombre complexe,
- ☐ Connaître les formules d'Euler et de Moivre,
- ☐ Savoir calculer les racines carrées d'un nombre complexe,
- ☐ Savoir résoudre une équation de second degré dans $\mathbb{C}$.

Sommaire

Séquence 1

Calculs avec les nombres complexes

1 Généralités sur les nombres complexes

Notation

On admet l'existence d'un nombre, noté i, tel que

$$i^2 = -1.$$

Définition

On appelle **nombre complexe** tout élément z pouvant s'écrire sous la forme

$$z = a + i\,b,$$

où a et b sont deux réels.

- ▷ L'écriture $a + ib$ est appelée **l'écriture algébrique** du nombre complexe z.
- ▷ Le réel a est appelé **la partie réelle** de z et se note $\mathcal{R}e(z)$.
- ▷ Le réel b est appelé **la partie imaginaire** de z et se note $\mathcal{I}m(z)$.

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$. De plus, un nombre complexe z est dit **imaginaire pur** si sa partie réelle est nulle.

Remarque

Tous les réels sont des nombres complexes (avec une partie imaginaire nulle), ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Exemples

- ▷ La partie réelle du nombre complexe $z_1 = 1 + i$ vaut 1 et sa partie imaginaire vaut 1 : $\mathcal{R}e(z_1) = 1$ et $\mathcal{I}m(z_1) = 1$.
- ▷ Soit $z_2 = -\sqrt{2}$. Alors, $z = -\sqrt{2} + 0i$. Donc, $\mathcal{R}e(z_2) = -\sqrt{2}$ et $\mathcal{I}m(z_2) = 0$.
- ▷ Soit $z_3 = 2i$. Alors, z_3 est un imaginaire pur car $\mathcal{R}e(z_3) = 0$. Et sa partie imaginaire est $\mathcal{I}m(z_3) = 2$ (et non $\mathcal{I}m(z_3) = 2i$!).

Attention

- ▷ Les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe sont des réels.
- ▷ La forme $z = a + ib$ est l'écriture algébrique de z si et seulement a et b sont *réels*.

2 Calculs avec les nombres complexes

Propriétés

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Alors,

$$z_1 = z_2 \quad \text{si et seulement si} \quad a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2.$$

Définition

Soient $z_1 = a_1 + i\,b_1$ et $z_2 = a_2 + i\,b_2$ deux nombres complexes avec a_1, a_2, b_1, b_2 des réels.

1. La **somme** de z_1 et de z_2 est :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i\,b_1) + (a_2 + i\,b_2) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2).$$

2. Le **produit** de z_1 par z_2 est :

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

Méthode – *Méthode de calcul*

Pour tout calcul algébrique, il faut :

1. développer les produits (comme dans les réels),
2. simplifier, en remplaçant tout i^2 par -1,
3. regrouper toutes les parties réelles et imaginaires.

Exemples

▷ Soient $z_1 = \sqrt{2} + 2i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $\lambda = \sqrt{2}$. Alors

$$\lambda z_1 = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 2i) = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}i = 2 + 2\sqrt{2}i,$$

et

$$z_1 + z_2 = \sqrt{2} + 2i + 1 - i\sqrt{3} = (1 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{3})i.$$

▷ Soient $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -1 + 2i$. Alors,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2-i)(-1+2i) \\ &= -2 + 4i + i - 2i^2 \\ &= -2 + 4i + i + (-2)(-1) \\ &= -2 + 4i + i + 2 \\ &= 0 + 5i = 5i. \end{aligned}$$

après développement du produit

après remplacement de i^2 par -1

après regroupement des parties réelles et imaginaires

Exercice 14.

1) Calculer $(1+i)(2-i)$.

2) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $z = -1 + (1+i)i$.

3) Développer $(a+ib)^2$, où a et b sont deux nombres réels.

3 Module, conjugué et leurs propriétés

Définition

Soit $z = a + ib$, où a et b sont réels. Le **module** de z, noté $|z|$, est le *réel* défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque

Le module d'un nombre complexe z est la valeur absolue si z est réel.

Exemples

- ▷ Pour $z = 1 + i$, on a $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
- ▷ Pour $z = -2 = -2 + 0i$, on a $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$.
- ▷ Pour $z = -i = 0 - i$, on a $|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$.

Propriétés

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

1. $|z| \geq 0$, $|z| \geq |\mathcal{R}e(z)|$ et $|z| \geq |\mathcal{I}m(z)|$,
2. $|z| = 0 \iff z = 0$,
3. $|\lambda z| = |\lambda||z|$,
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (inégalité triangulaire).
5. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,
6. si $z_2 \neq 0$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Exemple

Soient $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -1 + 2i$. Alors, $z_1 z_2 = 5i$ et donc

$$|z_1 z_2| = |5i| = |5||i| = 5.$$

D'autre part, on a :

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

et

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

D'où, $|z_1||z_2| = 5$. Donc, on a bien $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Exercice 15.

Soient $z_1 = 3 + 4i$ et $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$. Calculer $|z_1 z_2|^2$, $|z_1|^2$ et $|z_2|^2$.

Définition

Soit $z = a + ib$, où a et b sont réels. Le **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, est le *nombre complexe* défini par :

$$\overline{z} = a - ib.$$

Exemples

- ▷ Pour $z = 1 + i$, on a $\overline{z} = 1 - i$.
- ▷ Pour $z = -2 = -2 + 0i$, on a $\overline{z} = -2 - 0i = -2$.
- ▷ Pour $z = -i = 0 - i$, on a $\overline{z} = -(-i) = i$.

Propriétés

Soient z, z_1 et z_2 des nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. z est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué :$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
3. $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\qquad \mathcal{I}m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\,i}$, $\qquad z\overline{z} = |z|^2$.
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,
5. Si $z_2 \neq 0$, $\qquad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ et $\qquad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

Exemple

Soient $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -1 + 2i$. Alors, $\overline{z_1} = 2 + i$ et $\overline{z_2} = -1 - 2i$, et ainsi,

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (2 + i)(-1 - 2i) = -2 - 4i - i + -2i^2 = -2 - 5i + 2 = -5i.$$

Or, d'après un exemple précédent, $z_1z_2 = 5i$. D'où, $\overline{z_1z_2} = \overline{5i} = -5i$. On a bien $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Méthode – *Simplification d'une fraction complexe*

Pour simplifier une fraction de la forme $\frac{N}{D}$, où *le dénominateur D est une expression complexe*, il est possible de multiplier la fraction, en haut et en bas, par le conjugué de D :

$$\frac{N}{D} = \frac{N\overline{D}}{D\overline{D}} = \frac{N\overline{D}}{|D|^2}.$$

Exemple

Soit $z = \dfrac{1}{1 + i}$. D'où,

$$z = \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i}{|1 + i|^2} = \frac{1 - i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

car $|1 + i|^2 = (\sqrt{1^2 + 1^2})^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$.

Exercice 16.

1) Mettre $z = \dfrac{3 - 2i}{5 + i}$ sous sa forme algébrique.

2) Calculer $|z|$ de deux façons différentes.

Exercice 17.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $(2 + i)z - 1 + 2i = 0$.

Feuille d'exercices séquence 1

Exercice 1.

Soient $z_1 = 2+3i$ et $z_2 = 5-6i$. Calculer z_1+z_2, z_1-z_2 et z_1z_2.

Exercice 2.

Soient $z_1 = a_1+ib_1$ et $z_2 = a_2+ib_2$ les formes algébriques des nombres complexes z_1 et z_2, et soit λ un réel. Déterminer les formes algébriques de λz_1, z_1+z_2 et z_1z_2.

Exercice 3.

Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 1+2i$,

b) $z_2 = -i$,

c) $z_3 = 5i-2$,

d) $z_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Exercice 4.

Calculer le conjugué et le module des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = i+6+-2i+5$,

b) $z_2 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{3}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{i}{2}-\dfrac{1}{3}$,

c) $z_3 = (1+2i)(3-3i)$,

d) $z_4 = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2i}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{6i}{5}\right)$,

e) $z_5 = \left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)$,

f) $z_6 = \left(3\sqrt{5}+2i\sqrt{2}\right)^2$.

Exercice 5.

Soit $z = 2-5i$. Calculer $z+\overline{z}$, $z-\overline{z}$ et $z\overline{z}$.

Exercice 6.

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a+ib$. Calculer $z+\overline{z}$, $z-\overline{z}$ et $z\overline{z}$.

Exercice 7.

1) Calculer les modules des nombres complexes $z_1 = 2+3i$ et $z_2 = 1-2i$.

2) Montrer que $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.

3) Montrer que $|z_1+z_2| < |z_1|+|z_2|$.

Exercice 8.

Soient $z_1 = a_1+ib_1$ et $z_2 = a_2+ib_2$ deux nombres complexes donnés sous forme algébrique. Calculer $|z_1z_2|^2$, $|z_1|^2$ et $|z_2|^2$.

Exercice 9.

Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $z = ia$. Déterminer le conjugué de z.

Exercice 10.

Par convention, posons $i^0 = 1$.

1) Calculer i^3, i^4, i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, i^{-4}.

2) Calculer i^{4m}, i^{4m+1}, i^{4m+2}, i^{4m+3} pour $m \in \mathbb{Z}$.

3) Calculer i^{2017}.

Exercice 11.

Mettre sous forme algébrique (c'est-à-dire simplifier) les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \dfrac{-1-i}{2-2i}$,

b) $z_2 = \dfrac{5-5i}{-3+4i}$,

c) $z_3 = \dfrac{-1+4i}{-2-i}$,

d) $z_4 = \dfrac{7+6i}{4-i} \cdot \dfrac{3+i}{i}$,

e) $z_5 = \dfrac{2+i}{1+3i} \cdot \dfrac{1-i}{1+i}$,

f) $z_6 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$.

Exercice 12.

Pour chacun des nombres complexes z ci-dessous, donner la forme algébrique du conjugué $\bar{z}$:

a) $z_1 = \dfrac{1}{i}$,

b) $z_2 = \dfrac{2i-1}{1-2i}$,

c) $z_3 = (5+2i)^2$,

d) $z_4 = \dfrac{i}{i+1}$.

Exercice 13.

Déterminer sous forme algébrique les solutions des équations suivantes :

1) $2z + 6 - 4i = 0$,

2) $(-1-2i)z - 2 = 0$,

3) $-3z + 2 = 4iz - 2i$,

4) $(2+i)^2 z - (1-i)^3 = 0$.

Exercice 14.

1) Montrer que $z^2 - 2z + 5 = (z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)$.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

Exercice 15.

1) Montrer que $z^2 - 3 - 4i = (z - 2 - i)(z + 2 + i)$.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = 3 + 4i$.

Exercice 16.

1) Montrer que $z^2 + (4+i)z + (5+5i) = (z + 1 + 2i)(z + 3 - i)$.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + 4z + 5 = -iz - 5i$.

Une application en électronique

On peut rencontrer les nombres complexes lorsque on travaille avec les circuits électriques.

Tout d'abord une précision. En mathématiques, on a vu que le nombre i est utilisé pour définir les nombres complexes. Par contre, en électronique, ce nombre i signifie déjà courant, donc on utilise j pour les nombres complexes (parce que la lettre suivante après i est j).

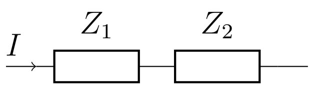
L'impédance électrique mesure la résistance d'un circuit électrique au passage d'un **courant alternatif sinusoïdal**. Il correspond à un nombre complexe, noté Z. L'admittance, notée Y, est l'inverse de l'impédance : $Y = \frac{1}{Z}$.

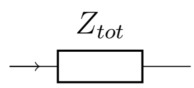
Si ω définit la pulsation (en radians par seconde) du courant sinusoïdal, alors

- ▷ l'impédance d'une résistance est $Z_R = R$, où R est la valeur (en ohms Ω) de la résistance,
- ▷ l'impédance d'un condensateur est $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$, où C est la capacité (en farad F) du condensateur,
- ▷ l'impédance d'une bobine est $Z_L = jL\omega$, où L est l'inductance (en henry H) de la bobine.

L'impédance complexe d'un circuit se calcule en suivant les règles suivantes :

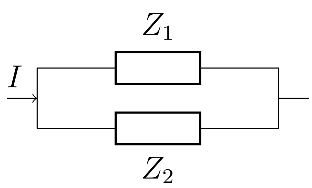
- ▷ l'impédance d'éléments en série est la somme des impédances,

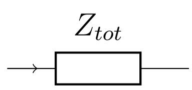


est équivalent à


avec $Z_{tot} = Z_1 + Z_2$

- ▷ si on a des éléments en parallèle, l'inverse de l'impédance du circuit est la somme des inverses des impédances. Donc dans ce cas ce sont les admittances qui s'additionnent.

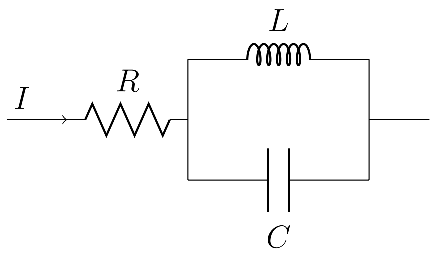


est équivalent à


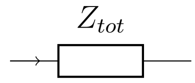
avec $\dfrac{1}{Z_{tot}} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}$

Exemple

Pour le circuit suivant :



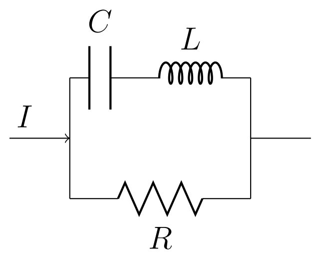
est équivalent à



avec $Z_{tot} = Z_R + \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_L} + \dfrac{1}{Z_C}} = R + \dfrac{1}{\dfrac{1}{jL\omega} + \dfrac{1}{\frac{1}{jC\omega}}} = R + \dfrac{jL\omega}{1 + (jC\omega)(jL\omega)} = R + \dfrac{jL\omega}{1 - CL\omega^2}$.

Exercice 17.

Calculer l'impédance complexe du circuit suivant :



Séquence 2

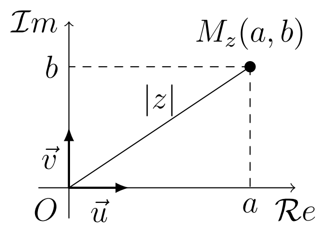
Écriture géométrique d'un nombre complexe

4 Représentation géométrique

Soit le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définition

À tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on associe le point M_z de *coordonnées cartésiennes* (a, b). Le point M_z est appelé **image du nombre complexe** z dans le plan.



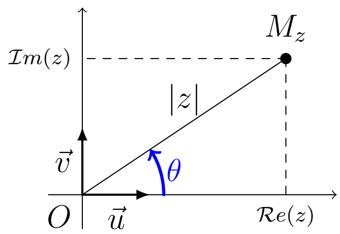
Remarques

- ▷ Si $z \neq 0$, son image M_z est distincte de O : $M_z \neq O$.
- ▷ La longueur de OM_z est égale à $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Définition

Soient $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$ et M_z son image dans le plan. Toute mesure θ en radians de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_z})$ est appelée **argument** de z, noté $\arg z$:

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$



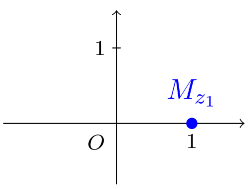
Exemples

Soient les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = i, \quad z_4 = -1.$$

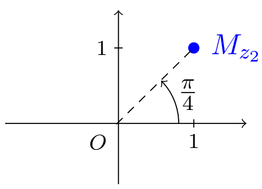
À partir de leur image dans le plan, il est possible de déduire leurs arguments :

$\boxed{z_1 = 1}$



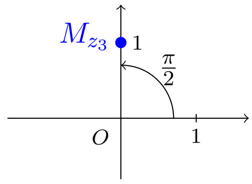
$\boxed{\arg(z_1) = 0 + 2k\pi}$

$\boxed{z_2 = 1 + i}$



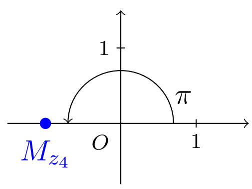
$\boxed{\arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$

$\boxed{z_3 = i}$



$\boxed{\arg(z_3) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

$\boxed{z_4 = -1}$



$\boxed{\arg(z_4) = \pi + 2k\pi}$

Remarques

- ▷ Le nombre complexe $z = 0$ n'a pas d'argument.
- ▷ Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments : si θ est un argument de z, alors $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z.
- ▷ De la représentation graphique, on en déduit

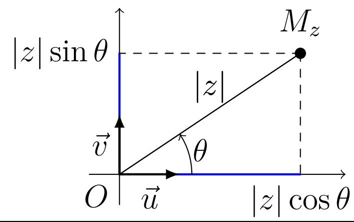
$$\mathcal{R}e(z) = |z| \cos\theta \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m(z) = |z| \sin\theta.$$

Propriétés – *Écriture trigonométrique d'un nombre complexe*

Soit z un nombre complexe non nul, et soit θ un argument de z. Alors

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

C'est la **forme trigonométrique** du nombre complexe z.



Remarque

La position du point M_z dans le plan peut-être obtenue à l'aide simplement du module $|z|$ et d'un argument θ. Le couple $(|z|, \theta)$ est appelé *coordonnées polaires* de z.

Méthode – *Calculer un argument d'un nombre complexe z*

1. Vérifier que $z \neq 0$.
2. Trouver sa forme algébrique $z = a + ib$.
3. Calculer son module $|z|$.
4. Trouver un angle θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$.

Exemples

- ▷ Pour $z_1 = 1$, on a $|z_1| = 1$. D'où,

$$\begin{cases} \cos\theta_1 & = & 1 \\ \sin\theta_1 & = & 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta_1 = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- ▷ Pour $z_2 = 1 + i$, on a $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Ainsi, $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.

$$\begin{cases} \cos\theta_2 & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- ▷ Pour $z_3 = i$, on a $|z_3| = 1$. D'où, $\cos\theta_3 = 0$ et $\sin\theta_3 = 1$. Donc, $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ▷ Pour $z_4 = -1$, on a $|z_4| = 1$. D'où, $\cos\theta_4 = -1$ et $\sin\theta_4 = 0$. Donc, $\theta_4 = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5 Formulation exponentielle

Définition – *Écriture exponentielle d'un nombre complexe*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Posons
$$\exp(i\theta) = \mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$
Si z est un nombre complexe non nul et θ un de ses arguments, alors
$$z = |z|\exp(i\theta) = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta}.$$
C'est la **forme exponentielle** du nombre complexe z.

Exemple

Reprenons les nombres complexes $z_1 = 1$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = i$, $z_4 = -1$. Pour chacun de ces nombres, le module et un argument ont déjà été calculés dans l'exemple précédent. Ainsi,

- ▷ $z_1 = |z_1|\exp(i\theta_1) = \mathrm{e}^{i0}$,
- ▷ $z_2 = |z_2|\exp(i\theta_2) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$,
- ▷ $z_3 = |z_3|\exp(i\theta_3) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$,
- ▷ $z_4 = |z_4|\exp(i\theta_4) = \mathrm{e}^{i\pi}$.

Exercice 1.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 1 - i$, **2)** $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, **3)** $z_3 = -3 + \sqrt{3}i$.

Propriétés

Soient $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{i\theta_2}$ avec $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Alors
$$z_1 = z_2 \text{ si et seulement si } r_1 = r_2 \text{ et } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Propriétés

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
$$|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = 1, \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}.$$

Propriétés – *Formule de Moivre*

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
$$\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}.$$
C'est-à-dire
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Preuve. Montrons le résultat pour $n = 2$. On a
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos\theta)^2 + 2(\cos\theta)(i\sin\theta) + (i\sin\theta)^2 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\cos\theta\,\sin\theta).$$
Or, d'après les formules d'addition trigonométrique,
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta.$$
Donc, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$. □

Exercice 2.

En développant $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ et en utilisant la formule de Moivre, déterminer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$.

Propriétés – *Formules d'Euler*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$

Exemple – *Linéarisation d'un cosinus*

Linéarisons $\cos^2\theta$, c'est-à-dire exprimons $\cos^2\theta$ à l'aide de $\cos(2\theta)$. On a
$$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left((\mathrm{e}^{i\theta})^2 + \mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{-i\theta} + (\mathrm{e}^{-i\theta})^2\right)$$
Or, d'après les formules de Moivre $(\mathrm{e}^{i\theta})^2 = \mathrm{e}^{i2\theta}$ et $(\mathrm{e}^{-i\theta})^2 = \mathrm{e}^{-2i\theta}$. De plus, $\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{-i\theta} = 1$. Donc, $\cos^2\theta = \frac{1}{4}\left(2\cos(2\theta) + 2\right) = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$.

Exercice 3.

Reprendre la démarche de l'exemple pour linéariser $\sin^3\theta$ (c'est-à-dire l'écrire en fonction de $\sin\theta$ et de $\sin 3\theta$). De même pour $\cos^3\theta$.

Propriétés

Soient z, z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ, θ_1 et θ_2. Alors

1. $z_1 z_2 = |z_1||z_2|\,\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}$,
2. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|}\,\mathrm{e}^{-i\theta}$,
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\,\mathrm{e}^{i(\theta_1-\theta_2)}$,
4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = |z|^n\,\mathrm{e}^{(in\theta)}$.

Exemple

Soient $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$. Alors, $z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc,
$$z = z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}.$$
De plus,
$$z^2 = (2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}})^2 = (2\sqrt{2})^2\,\mathrm{e}^{i2\frac{\pi}{12}} = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3} + 4i.$$

Exercice 4.

Soit $z = \dfrac{32}{(\sqrt{3}+i)^9}$.

1) Calculer une forme exponentielle de $\sqrt{3} + i$.

2) En déduire une forme exponentielle de z puis donner sa forme algébrique.

Feuille d'exercices séquence 2

Exercice 1.

Soit $z = 2 + i$. Placer dans un plan le point M_z puis les points $M_{\overline{z}}$, M_{-z} et $M_{-\overline{z}}$. Même question pour $z = -1 + 2i$ et $z = 3 - i$.

Exercice 2.

Déterminer la relation vérifiée par tous les nombres complexes $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) solutions de l'équation $|z| = 1$. Géométriquement, que représentent les solutions de cette équation dans le plan ?

Exercice 3.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$,

b) $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$,

c) $z_3 = 3 - 3i$,

d) $z_4 = -2 + \sqrt{3}i$,

e) $z_5 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\, i$,

f) $z_6 = 3 + 3\sqrt{3}i - 3i + 3\sqrt{3}$.

Exercice 4.

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que

a) $\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = 2\cos\theta$,

b) $\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta} = 2i\sin\theta$,

c) $|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = 1$,

d) $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta}$,

e) $\mathrm{e}^{-i\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$,

f) $\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$,

g) $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$,

h) $(\mathrm{e}^{i\theta})^2 = \mathrm{e}^{i2\theta}$.

Exercice 5.

Soient $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{i\theta_2}$ avec $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que si $r_1 = r_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $z_1 = z_2$.

2) Montrer que si $z_1 = z_2$, alors $r_1 = r_2$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$.

Exercice 6.

Soit $z = \dfrac{2+2i}{1-i}$. Déterminer

a) sa partie réelle,

b) sa partie imaginaire,

c) son module,

d) sa forme exponentielle.

En déduire une simplification de z^5.

Exercice 7.

Calculer le module et les arguments des nombres complexes $u = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $v = -1 + i$. En déduire le module et les arguments de $w = uv$.

Exercice 8.

Simplifier $z = \left(\dfrac{-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i}{-2+i}\right)^3$.

Exercice 9.

Soient $z = 2\sqrt{3}+2i$, $z_1 = (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$ et $z_2 = \frac{z}{z_1}$.

1) Donner la forme algébrique de z_2, puis sa forme exponentielle.

2) Donner la forme exponentielle de z.

3) En déduire la forme exponentielle de z_1, ainsi que les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 10.

Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle, puis sous algébrique :

1) $z = \left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$, **2)** $z = (1+i)^9(1-i)^7$, **3)** $z = \left(\dfrac{-3+3i}{\sqrt{6}-\sqrt{18}i}\right)^6$.

Exercice 11.

Soit $\delta = i$.

1) Déterminer la forme exponentielle de δ.

2) Soit $\Delta = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. Quels sont les valeurs de r et de θ tels que $\Delta^2 = \delta$?

Exercice 12.

Soit $\delta = -3+\sqrt{3}i$.

1) Déterminer la forme exponentielle de δ.

2) Soit $\Delta = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. Quels sont les valeurs de r et de θ tels que $\Delta^2 = \delta$?

Séquence 3

Résolution d'équations du second degré à coefficients complexes

6 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition

Soit Δ un nombre complexe donné. Le nombre $\delta \in \mathbb{C}$ est appelé **racine carrée** de Δ si $\delta^2 = \Delta$.

Attention

Si Δ n'est pas un réel positif, il est **interdit** d'écrire « $\sqrt{\Delta}$ ».

L'objectif est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnu δ

$$\delta^2 = \Delta,$$

Si $\Delta = 0$, il est clair que la seule solution est $\delta = 0$.
Supposons maintenant que $\Delta \neq 0$. Pour résoudre cette équation, il faut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- la **méthode trigonométrique**,
- la **méthode algébrique**.

Propriétés

Soit θ un argument du nombre complexe $\Delta \neq 0$. Alors, l'équation $\delta^2 = \Delta$ admet deux solutions :

$$\delta_1 = \sqrt{|\Delta|}\, \mathrm{e}^{\left(i\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad \delta_2 = -\sqrt{|\Delta|}\, \mathrm{e}^{\left(i\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Méthode – **méthode trigonométrique** *pour le calcul d'une racine d'un complexe*

1. Calculer une forme exponentielle de Δ, c'est-à-dire $\Delta = |\Delta|\, \mathrm{e}^{i\theta}$.
2. Les solutions de l'équation $\Delta = \delta^2$ sont $\pm\sqrt{|\Delta|}\, \mathrm{e}^{\left(i\frac{\theta}{2}\right)}$.

Exemple

Résolvons l'équation $\delta^2 = 2i$ par la méthode trigonométrique. Posons $\Delta = 2i$.

1. Calculons une forme exponentielle de Δ. On a $|\Delta| = 2$, d'où $\Delta = 2(0 + i)$. Donc

$$\begin{cases} \cos(\theta) &= 0, \\ \sin(\theta) &= 1. \end{cases}$$

   Ainsi, $\theta = \frac{\pi}{2}$ est un argument qui convient. Donc, $\Delta = 2\exp(i\frac{\pi}{2})$.

2. Les solutions de l'équation $\delta^2 = 2i$ sont donc

$$\delta = \pm\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm(1 + i).$$

Remarque

La méthode trigonométrique peut être difficile à utiliser si on ne connait pas un argument de Δ. Dans ce cas, il sera nécessaire d'utiliser la **méthode algébrique**.

Propriétés

Supposons que $\Delta = a + ib$, où a et b sont deux réels. Alors, l'équation $\delta^2 = \Delta$ admet deux solutions de la forme $\delta = x + iy$, où x et y sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} |\delta|^2 & = & x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = |\Delta|, \\ \mathcal{R}e(\delta^2) & = & x^2 - y^2 = a, \\ \mathcal{I}m(\delta^2) & = & 2xy = b. \end{array}\right.$$

Méthode – méthode algébrique *pour le calcul d'une racine carrée d'un complexe*

1. Calculer une forme algébrique de Δ, c'est-à-dire déterminer les réels a et b tels que $\Delta = a + ib$.
2. Écrire et résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2}, \\ x^2 - y^2 & = & a, \\ 2xy & = & b. \end{array}\right.$$

   où x et y sont les inconnues.
3. Pour chaque couple (x, y) trouvé, $\delta = x + iy$ est une solution de l'équation $\Delta = \delta^2$.

Exemple

Résolvons l'équation $\delta^2 = -3 + 4i$ par la methode algébrique. Posons $\Delta = -3 + 4i$.

1. Le nombre Δ est déjà sous forme algébrique avec $a = -3$ et $b = 4$.
2. Cherchons $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On a $|\Delta| = 5$, d'où on obtient le système :

$$\delta^2 = -3 + 4i \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 - y^2 = -3, \\ 2xy = 4. \end{array}\right.$$

   En additionnant les 2 premières équations, on obtient

$$2x^2 = 2 \quad \text{donc} \quad x = \pm 1.$$

   En soustrayant ces 2 mêmes équations, on obtient

$$2y^2 = 8 \quad \text{donc} \quad y = \pm 2.$$

   D'après la troisième équation, on a $2xy = 4 > 0$. D'où, les nombres x et y sont de même signe. Ainsi, les solutions possibles du système sont :

$$\big(x = 1 \text{ et } y = 2\big) \qquad \text{ou} \qquad \big(x = -1 \text{ et } y = -2\big).$$

3. Donc, les solutions de $\delta^2 = -3 + 4i$ sont $\delta_1 = 1 + 2i$ ou $\delta_2 = -1 - 2i$.

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $\delta^2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

2) $\delta^2 = -3 - 4i$.

7 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$

Rappel

Soit l'équation du second degré **à coefficients réels**

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où a, b, c sont réels avec $a \neq 0$.
Soit le réel $\Delta = b^2 - 4ac$, le **discriminant** de l'équation. Alors,

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles **distinctes** :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une **unique** solution réelle :

$$z = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation admet **aucune** solution **réelle** mais elle admet deux solutions **complexes conjuguées** :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Remarque

Dans ce cas, le discriminant Δ est une quantité réelle.

Propriétés

Soit l'équation du second dégrée à **coefficients complexes** :

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où a, b, c sont des complexes avec $a \neq 0$. Alors, les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a},$$

où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, c'est-à-dire $\delta^2 = \Delta$.

Méthode – *Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes*

1. Identifier les coefficients complexes a, b et c ; et vérifier que $a \neq 0$.
2. Calculer le discriminant complexe Δ.
3. Trouver une racine carrée δ de Δ, c'est-à-dire résoudre l'équation $\delta^2 = \Delta$ à l'aide la méthode trigonométrique ou géométrique. Puis choisir une des solutions trouvées.
4. Calculer les solutions de l'équation :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Exemple

Résolvons l'équation du second degré $z^2 - (2+3i)z - 5 + i = 0$.

1. Identifions les coefficients : $a = 1 \neq 0$, $b = -2 - 3i$ et $c = -5 + i$.
2. Calculons le discriminant de l'équation :
$$\Delta = (2+3i)^2 - 4(-5+i) = 4 - 9 + 12i + 20 - 4i = 15 + 8i.$$
3. Déterminons une racine carrée δ de $\Delta = 15 + 8i$. Résolvons l'équation :
$$\delta^2 = 15 + 8i.$$
D'où, $|\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$. Il n'est possible d'utiliser la méthode trigonométrique. Donc, utilisons la méthode algébrique en résolvant le système :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, & (1) \\ x^2 - y^2 = 15, & (2) \\ 2xy = 8. & (3) \end{cases}$$
Or,
$$\begin{aligned} (1) + (2) : \quad & 2x^2 = 32 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 4. \\ (1) - (2) : \quad & 2y^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 1. \end{aligned}$$
Et, d'après la troisième équation, on a $xy = 4 > 0$. Donc, les réels x et y sont de même signe, d'où
$$(x = 4 \text{ et } y = 1) \qquad \text{ou} \qquad (x = -4 \text{ et } y = -1).$$
Ainsi, les solutions de $\delta^2 = 15 + 8i$ sont $\pm(4+i)$.
4. Il nous faut qu'une seule racine carrée. Choisissons par exemple $\delta = 4 + i$. Alors, les deux solutions de l'équation du second degré sont :
$$z_1 = \frac{(2+3i) + (4+i)}{2} = 3 + 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{(2+3i) - (4+i)}{2} = -1 + i.$$

Exercice 2.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $3z^2 - 3z + 1 = 0$, **b)** $z^2 + 16 = 0$, **c)** $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$.

Feuille d'exercices séquence 3

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $\delta^2 = 1 - i$,

2) $\delta^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$,

3) $\delta^2 = -8 - 6i$,

4) $\delta^2 = 1 + i\sqrt{3}$,

5) $\delta^2 = 4 - i$,

6) $\delta^2 = 5 - 12i$.

Exercice 2.

Déterminer les racines carrées de $Z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3.

Résoudre l'équation $z^2 = \sqrt{3} + i$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 + 3z + 4 = 0$,

2) $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$,

3) $z^2 - 2iz + 2(1 + 2i) = 0$,

4) $iz^2 - 4iz - 2 + 4i = 0$,

5) $z^4 = 1$,

6) $z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0$.

Exercice 5. – *Généralisation de la méthode trigonométrique*

Soit $\Delta = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Preuve de la méthode : Considérons $\delta = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'}$, avec $r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta' \in \mathbb{R}$, tel que $\delta^2 = \Delta$. Montrer que $r' = \sqrt{r}$ et $\theta' = \frac{\theta}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En déduire que les solutions de $\delta^2 = \Delta$ sont $\pm\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.

2) Généralisation de la méthode : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre $\delta \in \mathbb{C}$ est dit **racine n-ième** *de Δ si $\delta^n = \Delta$.*

Considérons $\delta = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'}$, avec $r' \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$, tel que $\delta^n = \Delta$. Quelle relation existe-t-il entre r' et r ? Même question entre θ' et θ ? En déduire une expression des racines n-ièmes de Δ.

3) Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\delta^6 = i.$$

Exercice 6. – *Démonstration de la méthode algébrique*

Soit $\Delta = a + ib \neq 0$ avec a et b deux réels. Considérons $\delta = x + iy$, avec x et y deux réels, tel que $\delta^2 = \Delta$.

1) Simplifier δ^2. En déduire que $x^2 - y^2 = a$ et $2xy = b$.

2) Montrer que $|\delta^2| = |\delta|^2$. En déduire que $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.