# Feuille d'exercices : Séquence 3

## Exercice 1.

Soient $u = (2, 0, 1)$ et $v = (3, 1, -1)$. Déterminer $u \wedge v$, $v \wedge u$ et $(u + v) \wedge (u - v)$.

**Correction :**

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v \wedge u = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (u + v) \wedge (u - v) = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 2.

Montrer que les vecteurs $i, j, k$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vérifient

$$i \wedge j = k, \quad j \wedge k = i \quad \text{et} \quad k \wedge i = j.$$

## Exercice 3.

Soit $(i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère $u = i$, $v = i + j$ et $w = j$. Calculer $(u \wedge v) \wedge w$, puis $u \wedge (v \wedge w)$.
Que peut-on conclure ? Le produit vectoriel est-il associatif ?

**Correction :**

$$(u \wedge v) \wedge w = -i, \quad u \wedge (v \wedge w) = -j.$$

## Exercice 4.

Soient $u = (4, -1, 2)$, $v = (1, 5, -3)$ et $w = (2, 0, -4)$. Calculer et comparer :

**1)** $u \wedge v$ et $v \wedge u$,

**2)** $u \wedge (v + w)$ et $u \wedge v + u \wedge w$,

**3)** $u \wedge (2v)$, $(2u) \wedge v$, et $2(u \wedge v)$,

**4)** $(u \wedge v) \wedge w$ et $u \wedge (v \wedge w)$.

**Correction :**

**1)** $u \wedge v \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}, \quad v \wedge u = \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -21 \end{pmatrix}.$

**2)** $u \wedge (v + w) \begin{pmatrix} -3 \\ 34 \\ 23 \end{pmatrix}, \quad u \wedge w = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}.$

**3)** $u \wedge (2v) = \begin{pmatrix} -14 \\ 28 \\ 42 \end{pmatrix}, \quad (2u) \wedge v = \begin{pmatrix} -14 \\ 28 \\ 42 \end{pmatrix}.$

**4)** $(u \wedge v) \wedge w = \begin{pmatrix} -56 \\ 14 \\ -28 \end{pmatrix}, \quad u \wedge (v \wedge w) \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}.$

## Exercice 5.

Déterminer un vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, -1, 2)$.

**Correction :**

$$\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \quad \text{ou} \quad \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

## Exercice 6.

Soient $u$, $v$, $w$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ On définit le **produit mixte** des vecteurs $u$, $v$, $w$ par le scalaire

$$[u, v, w] = u \cdot (v \wedge w).$$

**1)** Montrer que $[u, w, v] = -[u, v, w]$.

**2)** Montrer que $[u, u, w] = [u, v, u] = 0$.

**3)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $[\lambda u, v, w] = [u, \lambda v, w] = \lambda[u, v, w]$.

**4)** Montrer que $[u, v, w] = 0$ si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma$ non tous nuls tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$.

**5)** Montrer que $|[u, v, w]|$ est le volume du parallélepipede construit sur les vecteurs $u$, $v$ et $w$.

## Exercice 7.

Une particule de charge $q$ et de masse $m$ est soumise à un champ magnétique constant $\overrightarrow{B} = (0, 0, B)$. Elle subit alors la force de Lorentz $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$, et son mouvement est décrit par l'équation $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$ (ici $\overrightarrow{v}$ désigne la vitesse de la particule, et $\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$ son accélération).
Écrire en fonction des coordonnées $(v_x, v_y, v_z)$ de $\overrightarrow{v}$ les équations correspondantes.