Feuille d'exercices séquence 2

Exercice 1.

Soit $z = 2 + i$. Placer dans un plan le point M_z puis les points $M_{\overline{z}}$, M_{-z} et $M_{-\overline{z}}$. Même question pour $z = -1 + 2i$ et $z = 3 - i$.

Exercice 2.

Déterminer la relation vérifiée par tous les nombres complexes $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) solutions de l'équation $|z| = 1$. Géométriquement, que représentent les solutions de cette équation dans le plan ?

Exercice 3.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$,

b) $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$,

c) $z_3 = 3 - 3i$,

d) $z_4 = -1 + \sqrt{3}i$,

e) $z_5 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\, i$,

f) $z_6 = 3 + 3\sqrt{3}i - 3i + 3\sqrt{3}$.

Correction :

a) $z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) $z_2 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

c) $z_3 = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$.

d) $z_4 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

e) $z_5 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}$.

f) $z_6 = z_2 z_3 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \times 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = 6\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$.

Exercice 4.

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que

a) $\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = 2\cos\theta$,

b) $\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta} = 2i\sin\theta$,

c) $|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = 1$,

d) $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta}$,

e) $\mathrm{e}^{-i\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$,

f) $\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$,

g) $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$,

h) $(\mathrm{e}^{i\theta})^2 = \mathrm{e}^{i2\theta}$.

Exercice 5.

Soient $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{i\theta_2}$ avec $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que si $r_1 = r_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $z_1 = z_2$.

2) Montrer que si $z_1 = z_2$, alors $r_1 = r_2$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$.

Exercice 6.

Soit $z = \dfrac{2 + 2i}{1 - i}$. Déterminer

a) sa partie réelle,

b) sa partie imaginaire,

c) son module,

d) sa forme exponentielle.

En déduire une simplification de z^5.

Correction : On a $z = 2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$. D'où

a) $\mathcal{R}e(z) = 0$, **b)** $\mathcal{I}m(z) = 2$, **c)** $|z| = 2$, **d)** $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Alors $z^5 = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{2}} = 32$.

Exercice 7.

Calculer le module et les arguments des nombres complexes $u = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $v = -1 + i$. En déduire le module et les arguments de $w = uv$.

Correction : On a

$$|u| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}, \quad \cos\theta_u = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta_u = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

D'où, $\theta_u = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. De plus,

$$|v| = \sqrt{2}, \quad \cos\theta_v = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta_v = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc, $\theta_v = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $|w| = |u||v| = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ et $\theta_w = \theta_u + \theta_v = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8.

Simplifier $z = \left(\dfrac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i}{-2 + i}\right)^3$.

Correction : Posons $z' = \dfrac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i}{2 + i}$. Alors $z' = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}$. Ainsi

$$z = (z')^3 = 2^3 e^{-\frac{3\pi}{4}i} = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i.$$

Exercice 9.

Soient $z = 2\sqrt{3} + 2i$, $z_1 = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$ et $z_2 = \frac{z}{z_1}$.

1) Donner la forme algébrique de z_2, puis sa forme exponentielle.

2) Donner la forme exponentielle de z.

3) En déduire la forme exponentielle de z_1, ainsi que les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Correction :

1) $z_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) $z = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

3) $z_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{12}}$. Donc

$$z_1 = \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = (1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i.$$

D'où $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 10.

Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle, puis sous algébrique :

1) $z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$, **2)** $z = (1+i)^9(1-i)^7$, **3)** $z = \left(\frac{-3+3i}{\sqrt{6}-\sqrt{18}i}\right)^6$.

Correction :

1) Posons $v = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ Puisque $v = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, on a $z = v^6 = e^{i4\pi} = 1$.

2) Posons $u = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $v = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Alors, $z = u^9v^7 = 2^8 e^{i\frac{\pi}{2}} = 256i$.

3) Posons $u = -3+3i$ et $v = \sqrt{6} - \sqrt{18}i$. On a $u = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $v = 2\sqrt{6}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Ainsi,

$$\frac{u}{v} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)^6 = \frac{3^3}{2^3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{27}{8}i.$$

Exercice 11.

Soit $\delta = i$.

1) Déterminer la forme exponentielle de δ.

2) Soit $\Delta = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. Quels sont les valeurs de r et de θ tels que $\Delta^2 = \delta$?

Exercice 12.

Soit $\delta = -3 + \sqrt{3}i$.

1) Déterminer la forme exponentielle de δ.

2) Soit $\Delta = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs de r et de θ tels que $\Delta^2 = \delta$?