Chapitre 1

Feuille d'exercices : Séquence 2

S Exercice 1.

Déterminer la forme irréductible des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ ci-dessous :

1)
$$F_1(X) = \frac{2X^2 - 10X + 12}{3X^2 - 9X + 6}$$
,

3)
$$F_3(X) = \frac{12X^2 + 5X - 3}{X^3 + 3X^2 + 4X}$$

2)
$$F_2(X) = \frac{X^2 + 1}{X^3 + 2X^2 + X + 2}$$

4)
$$F_4(X) = \frac{X^3 - X^2 - 4X + 4}{X^6 - X^4 - 16X^2 + 16}$$
.

Solution:

1)
$$F_1(X) = \frac{2(X-2)(X-3)}{3(X-2)(X-1)} = \frac{2(X-3)}{3(X-1)}$$
.

2)
$$F_2(X) = \frac{X^2 + 1}{(X^2 + 1)(X + 2)} = \frac{1}{X + 2}.$$

 ${\bf 3)}\,$ Est déjà sous forme irréductible.

4)
$$F_4(X) = \frac{(X-1)(X^2-4)}{(X-1)(X+1)(X^2-4)(X^2+4)} = \frac{1}{(X+1)(X^2+4)}$$
.

Exercice 2.

Déterminer la partie entière des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ ci-dessous :

1)
$$F_1(X) = \frac{2X^2 + 3X + 5}{X^3 + 4X - 1}$$

3)
$$F_3(X) = \frac{3X^3 + 16X^2 - 6X - 4}{X^2 + 6X + 2}$$
,

2)
$$F_2(X) = \frac{X^2 - X - 1}{X + 1},$$

4)
$$F_4(X) = \frac{X^5 + 3X^4 + 11X^3 + 16X^2 + 23X + 6}{X^3 + 2X^2 + 3X}$$

Solution:

1) La partie entière est nulle.

2)
$$E_2(X) = X - 2$$
.

3)
$$E_3(X) = 3X - 2$$

4)
$$E_4(X) = X^2 + X + 6$$
.

Exercice 3.

Pour les fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ ci-dessous :

1. déterminer leur forme irréductible,

2. justifier que la partie entière de leur forme irréductible est nulle,

3. donner la forme de leurs décompositions en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$, puis sur $\mathbb{C}(X)$.

25

1)
$$F_1(X) = \frac{1}{X(X^2+1)}$$
,

3)
$$F_3(X) = \frac{3X^7 + 5X^5 + 25X^3 + 2}{(X^4 - 1)^2},$$

2)
$$F_2(X) = \frac{2X+1}{(X-3)(X^2+1)^2}$$

4)
$$F_4(X) = \frac{1}{X(X-1)^5}$$
.

Solution:

1) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$:

$$F_1(X) = \frac{c}{X} + \frac{aX + b}{X^2 + 1},$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$:

$$F_1(X) = \frac{1}{X(X-i)(X+i)} = \frac{c_1}{X} + \frac{c_2}{X-i} + \frac{c_3}{X+i},$$

où $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3$.

2) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$:

$$F_2(X) = \frac{c}{X-3} + \frac{a_1X + b_1}{X^2 + 1} + \frac{a_2X + b_2}{(X^2 + 1)^2},$$

et les constantes sont dans \mathbb{R} .

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$:

$$F_2(X) = \frac{2X+1}{(X-3)(X-i)^2(X+i)^2} = \frac{a}{X-3} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{(X-i)^2} + \frac{d}{X+i} + \frac{e}{(X+i)^2},$$

et les constantes sont dans \mathbb{C} .

3) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$:

$$F_3(X) = \frac{3X^7 + 5X^5 + 25X^3 + 2}{(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{A_1X + B_1}{X^2 + 1} + \frac{A_2X + B_2}{(X^2+1)^2}$$

et les constantes sont dans \mathbb{R} .

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$:

$$F_3(X) = \frac{3X^7 + 5X^5 + 25X^3 + 2}{(X-1)^2(X+1)^2(X+i)^2(X-i)^2}$$

$$= \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{e}{X-i} + \frac{f}{(X-i)^2} + \frac{g}{X+i} + \frac{h}{(X+i)^2}$$

et les constantes sont dans \mathbb{C} .

4) La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$ est :

$$F_4(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X-1)^3} + \frac{e}{(X-1)^4} + \frac{f}{(X-1)^5},$$

où $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$.

S Exercice 4.

Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$, puis sur $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ ci-dessous :

1)
$$F_1(X) = \frac{2X^3 + X^2 - 5X - 5}{X^2 - X - 2}$$
,

2)
$$F_2(X) = \frac{X^3 - 8X^2 + 18X - 12}{X^2 - 3X + 2}$$

3)
$$F_3(X) = \frac{X^4 - 3X^2 + 6X - 4}{X^3 - 2X^2 + 2X - 1}$$

4)
$$F_4(X) = \frac{X^7 - 3X^6 + 9X^5 - 3X^4 - 3X^3 + 25X^2 + 12X - 38}{X^5 - 5X^4 + 18X^3 - 34X^2 + 45X - 25}$$

Indication:
$$X^4 - 4X^3 + 14X^2 - 20X + 25 = (X^2 - 2X + 5)^2$$
.

Solution:

1) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$:

$$F_1(X) = 3 + 2X + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-2},$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$:

$$F_2(X) = X - 5 + \frac{1}{X - 1}.$$

3) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$:

$$F_4(X) = X^2 + 2X + 1 + \frac{a_1X + b_1}{X^2 - 2X + 5} + \frac{a_2X + b_2}{(X^2 - 2X + 5)^2},$$

avec $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$:

$$F_4(X) = X^2 + 2X + 1 + \frac{2X^3 - 6X^2 + 17X - 13}{(X - 1 - 2i)^2(X - 1 + 2)^2}$$

$$= X^2 + 2X + 1 + \frac{a}{X - 1 - 2i} + \frac{b}{(X - 1 - 2i)^2} + \frac{c}{X - 1 + 2i} + \frac{d}{(X - 1 + 2i)^2},$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$.