Cours de Physique du mouvement

Arnaud PRIGENT

Bureau B014

02 35 21 71 24

arnaud.prigent@univ-lehavre.fr

Plan du cours

Outils mathématiques

1. Référentiels et repères
2. Cinématique
3. Exemples de mouvements pour des mouvements de translation
4. Les lois de Newton
5. Travail, Énergie
6. Mouvements de rotation
7. L’oscillateur harmonique
8. Changement de référentiel – Composition des mouvements

Bibliographie

- J.-P. Pérez, Mécanique – Fondements et applications, Masson, 2001
- A. Gibaud et M. Henry, Mécanique du point – Cours et exercices avec solutions, Dunod, 1999
- M. Le Bellac, Introduction à la mécanique, Belin, 1985
- L. Bocquet, J.-P. Faroux et J. Renault, Toute la Mécanique – Cours et exercices corrigés, Dunod, 2002
- Eugène Hecht, Physique, De Boeck Université, 1999
- Alain Thionnet, Mécanique du point, Ellipses, 2008

Outils mathématiques

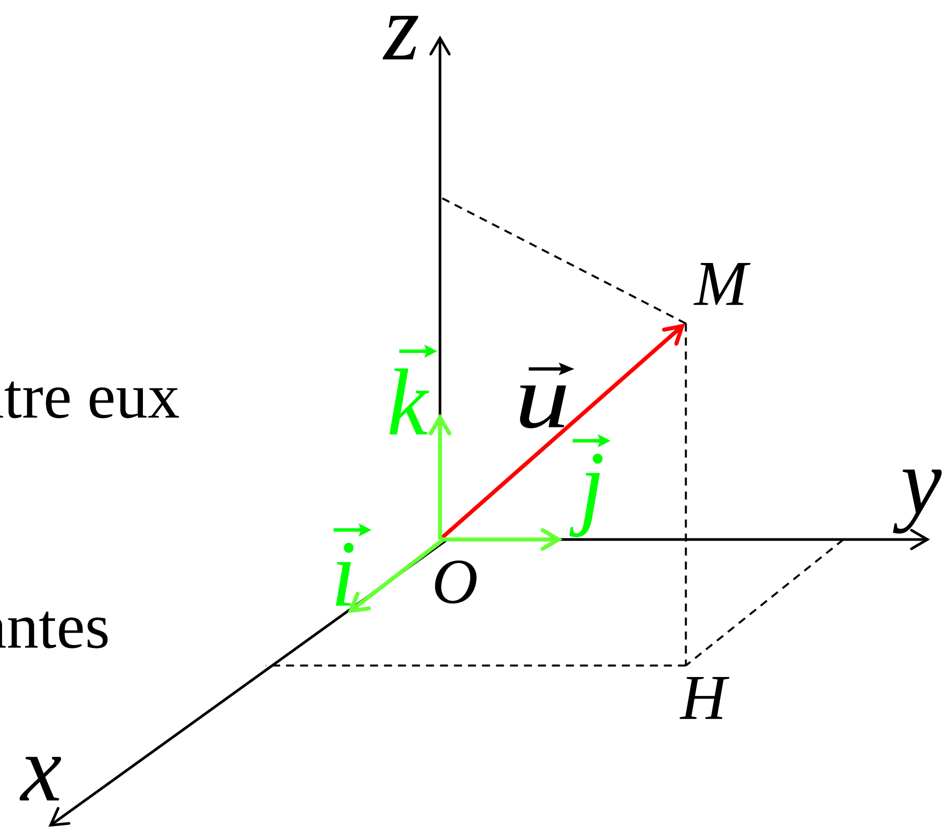
1. Liste des connaissances utiles
    1. Les vecteurs
    2. Le produit scalaire
    3. Le produit vectoriel
    4. Le produit mixte
    5. Dérivée d’une fonction de plusieurs variables
    6. Equation différentielle du second ordre

2. Les vecteurs

1. Définition

- Repère cartésien *Oxyz*
- Vecteurs unitaires, $\perp$ entre eux
- $\left(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ base directe
- $\vec{u}$ donné par 3 composantes

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$



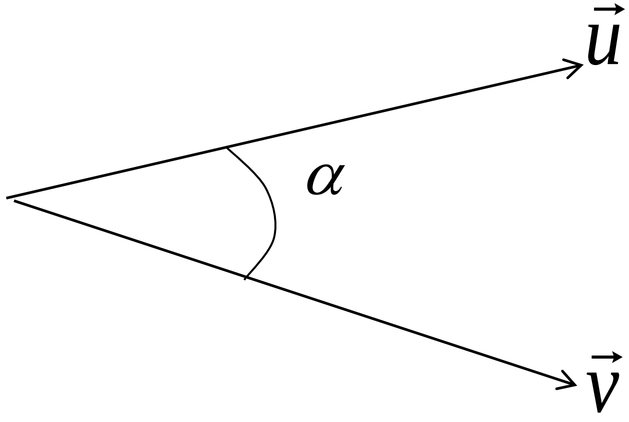
- Module ou longueur :

$$u = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

3. Produit scalaire

1. Définition

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\alpha}$$



où $0 \le \alpha \le \pi$

2. Exemples : les vecteurs $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

On a : $\left|\vec{i}\right| = 1 \ldots$ et $\vec{i} \perp \vec{j} \ldots$

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{i}^{\,2} = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = 1 \times 1 \times \cos \pi/2 = 0$$

3. Expression analytique

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}$$

Remarque :

Si on change de repère u_1, u_2, … changent.

Le produit scalaire change-t-il avec le changement de repère ? $\Rightarrow$ Non

Le produit scalaire ne dépend pas des coordonnées puisque :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\alpha$$

angle

longueurs

4. Produit vectoriel

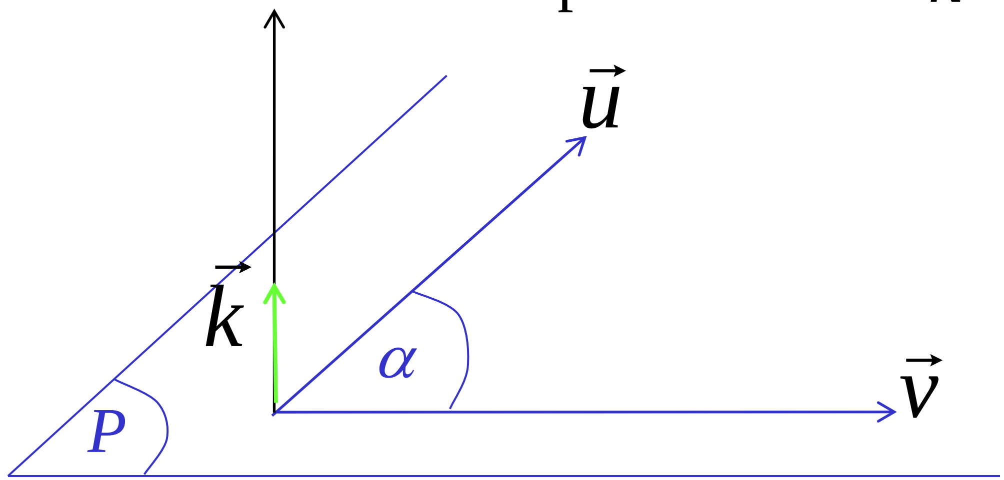
1. Définition

C’est un vecteur.

Notation : $\vec{u}\wedge\vec{v}$

Le module de ce vecteur : $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \sin\alpha$

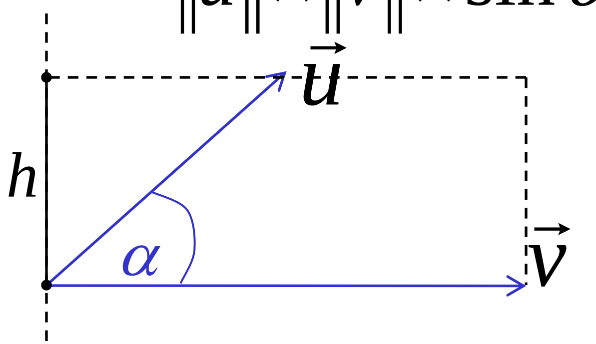
Sa direction est donnée par le vecteur $\vec{k}$ tel que $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{k}\right)$ soit direct



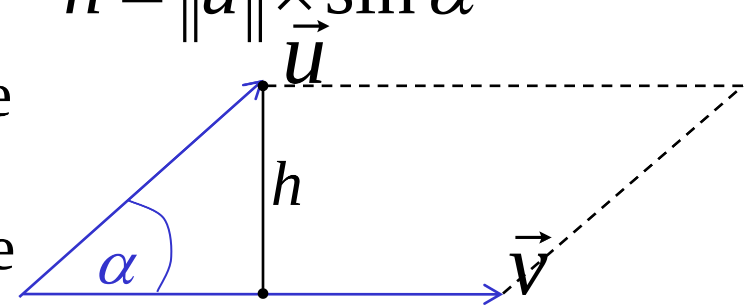
si $\vec{k}$ est unitaire, alors : $\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \left|\sin\alpha\right| \times \vec{k}}$

- Propriété géométrique

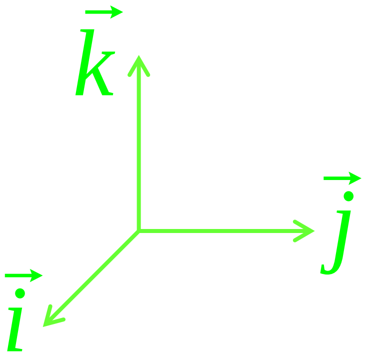
$$\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \sin\alpha = h \times \left\|\vec{v}\right\| \quad \text{où} \quad h = \left\|\vec{u}\right\| \times \sin\alpha$$



aire du rectangle
ou aire du
parallélogramme



2. Exemples



base orthonormée directe

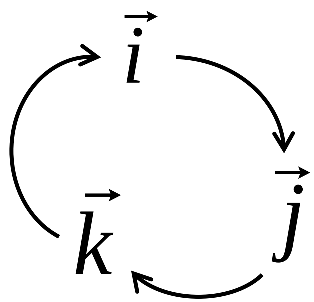
$$\vec{i} \wedge \vec{i} = 1 \times 1 \times \sin 0 = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = 1 \times 1 \times \sin \pi/2 \; \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}}$$

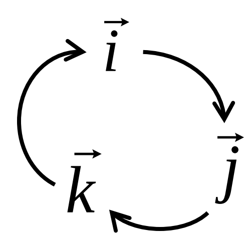
Permutation circulaire

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$
$$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$



- Expression analytique

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} + p.c.}$$



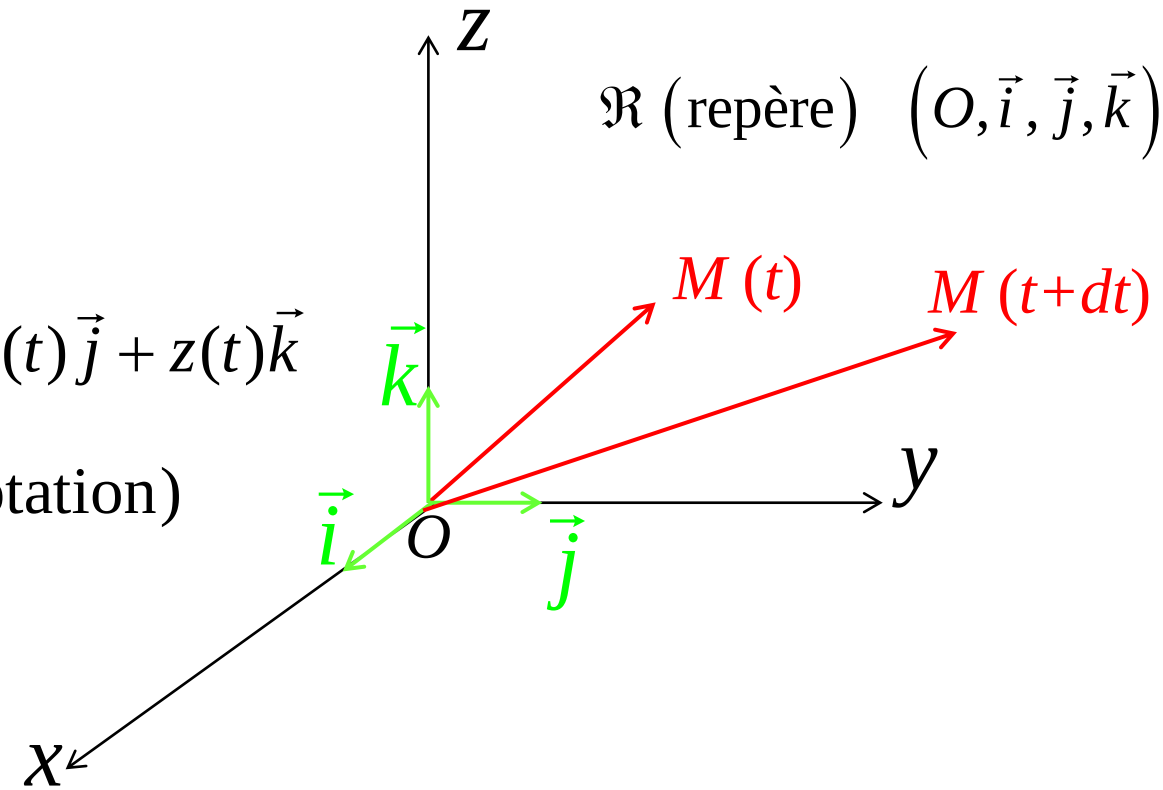
5. Dérivée vectorielle

1. Définition

$\Re$ (repère) $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = x' = \dot{x} \quad \text{(notation)}$$

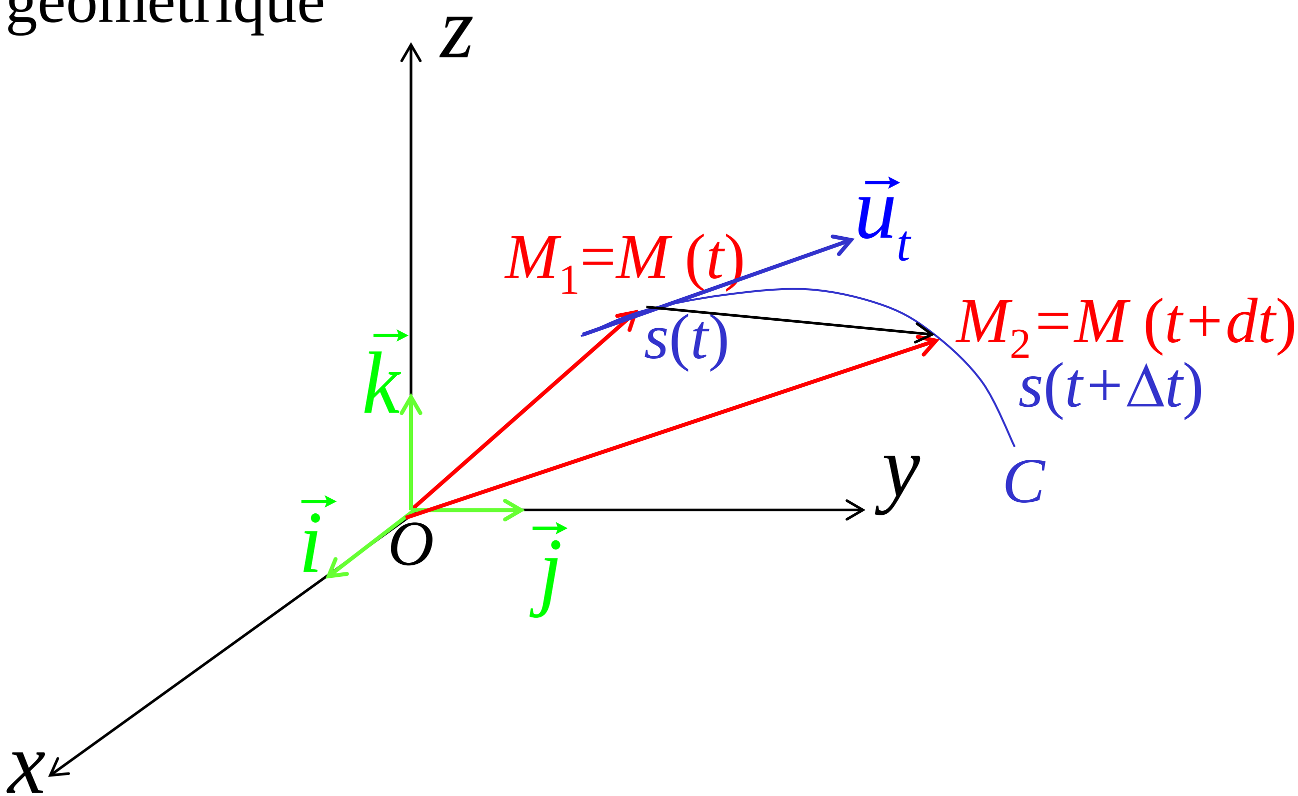


$$\dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM}\right)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}\right\}$$

2. Interprétation géométrique



$$\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OM}(t)=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}\vec{u}_t$$

où $\vec{u}_t$ est le vecteur unitaire tangent à C en M_1 avec $\Delta s = s(t+\Delta t)-s(t)$

3. Propriétés

$$\vec{v}_1(t) \qquad \vec{v}_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) = \frac{d\vec{v}_1}{dt} + \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda\vec{v}\right) = \frac{d\lambda}{dt}\vec{v} + \lambda\frac{d\vec{v}}{dt} \text{ avec } \lambda = \lambda(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right) = \frac{d\vec{v}_1}{dt}\cdot\vec{v}_2 + \frac{d\vec{v}_2}{dt}\cdot\vec{v}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\right) = \frac{d\vec{v}_1}{dt}\wedge\vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{v}\right|^2\right) \text{ si } \left|\vec{v}\right| = cte \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\left|\vec{v}\right|^2\right) = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

6. Produit mixte

1. Définition

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ est la quantité <u>scalaire</u> :

$$\left(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\right) \cdot \vec{v}_3$$

Lorsqu'on effectue une permutation circulaire des indices 1, 2, 3, le produit est inchangé : $\left(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\right) \cdot \vec{v}_3 = \left(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3\right) \cdot \vec{v}_1 = \left(\vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1\right) \cdot \vec{v}_2$

2. Interprétation géométrique

La valeur absolue du produit mixte correspond au volume limité par le parallélépipède construit avec les trois vecteurs. La norme de $\vec{w} = \left(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\right)$ est l'aire de la base et celle de $\vec{v}_3 \cos\left(\vec{w}, \vec{v}_3\right)$ est la hauteur *h*.