Chapitre 8 L'oscillateur harmonique

1. Définition générale d'un oscillateur harmonique

1. Introduction

En mécanique, un oscillateur est un système qui effectue des oscillations autour d'une position d'équilibre stable, c'est-à-dire un mouvement de va-et-vient autour de cette position. Quand ce mouvement se répète à intervalles réguliers, on dit qu'il est périodique et la période T est l'intervalle de temps entre deux oscillations successives, c'est-à-dire le temps d'un aller-retour. La fréquence f est l'inverse de la période $f = 1/T$, il s'agit du nombre d'oscillations par unité de temps.

L'exemple le plus simple d'oscillateur est l'oscillateur harmonique pour lequel le mouvement d'oscillation est sinusoïdal. Cet oscillateur est souvent une bonne approximation de systèmes physiques réels. Des oscillations non sinusoïdales (oscillateur anharmonique) peuvent se décomposer en somme d'oscillations sinusoïdales. L'amortissement éventuel des oscillations est souvent suffisamment faible pour que l'oscillateur harmonique soit une bonne approximation de l'oscillateur amorti.

2. Mouvement d'un point au voisinage d'une position d'équilibre

Nous nous limiterons ici aux oscillations à un degré de liberté, c'est-à-dire caractérisée par un paramètre unique (x, θ, …).

On considère un point matériel de masse m se déplaçant sur un axe Ox et soumis à un champ de force dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x)$. La force qui s'exerce sur ce point s'exprime donc ainsi :

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$$

Nous avons vu au chapitre 7 que la position x_0 est une position d'équilibre stable si :

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} > 0$$

Ceci signifie que : $\left.\frac{dF}{dx}\right)_{x_0} < 0$. La force est dite force de rappel.

Si on considère M au voisinage de la position d'équilibre stable x_0, le développement de Taylor de l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} + \text{t.o.s.}$$

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} + \text{t.o.s.}$$

Avec : $k = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0$

Dans l'approximation des petits déplacements par rapport à la position d'équilibre, on peut négliger les termes d'ordre supérieur à 2. Dans ces conditions :

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -k(x - x_0)$$

C'est une force de rappel (qui ramène le point en x_0) linéaire.

L'équation du mouvement s'écrit : $m\ddot{x}+k\left(x-x_0\right)=0$.

On peut l'écrire sous la forme réduite $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$ où $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre de l'oscillateur.

Par définition, on appelle oscillateur harmonique à une dimension un point mobile sur un axe (ou plus généralement tout système dépendant d'un paramètre) dont le mouvement est décrit par l'équation différentielle linéaire $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$.

Son énergie totale est donnée par :

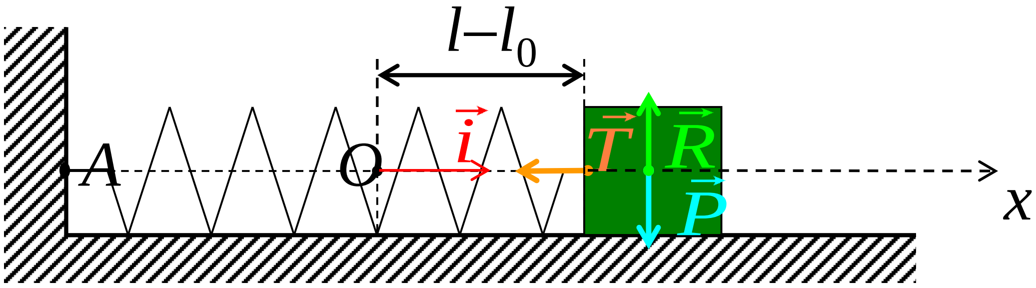
$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}k\left(x-x_0\right)^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\omega_0^2\left(x-x_0\right)^2\right)$$

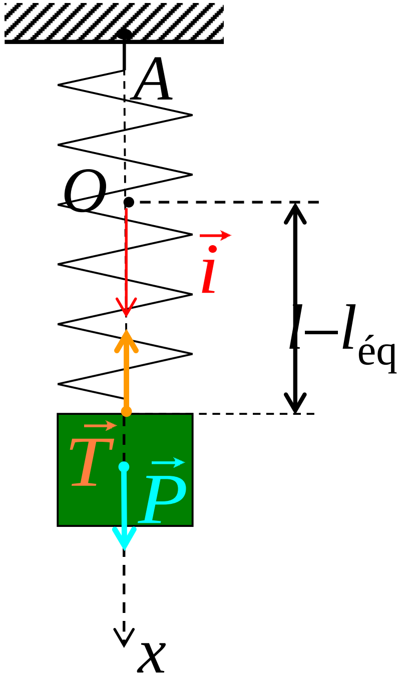
C'est une constante du mouvement (on vérifie que $\frac{dE}{dt}=0$).

2. Exemples de base

1. Système ressort et masse

On considère un ressort de masse négligeable, de raideur k, de longueur au repos l_0 fixé en un point A rigide. Une masse m est accrochée à l'autre extrémité. Il faut alors considérer deux cas : une configuration horizontale où la masse glisse sans frottement sur un plan horizontal le long de l'axe Ox, une configuration verticale où se déplace le long de l'axe Ox (disposé verticalement).





- Configuration horizontale

Dans ce cas, la réaction du plan compense exactement le poids de la masse *m*. La relation fondamentale de la dynamique projetée sur l'axe *Ox* s'écrit :

$$m\ddot{x}+k\left(l-l_0\right)=0$$

soit $m\ddot{x}+kx=0$ en plaçant l'origine à la position d'équilibre c'est-à-dire en l_0.

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique avec : $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

- configuration verticale

Dans ce cas, le poids de la masse n'est plus compensé par la réaction du plan. La position d'équilibre correspond à l'équilibre statique pour lequel on a :

$\vec{P}+\vec{T}=0$ soit $mg = k\,(l_{éq} - l_0)$

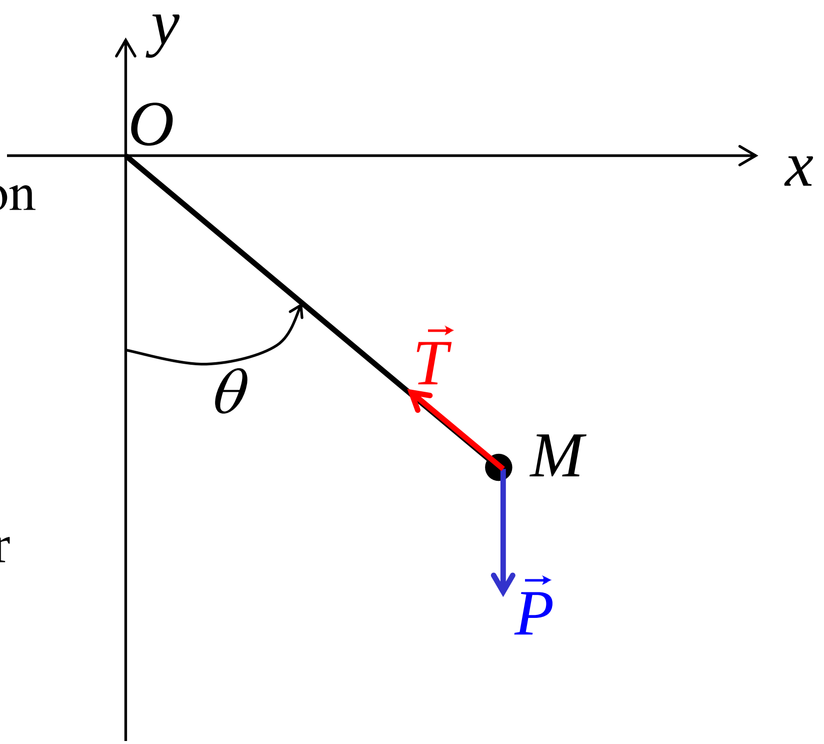
La relation fondamentale de la dynamique projetée sur l'axe *Ox* s'écrit :

$$m\ddot{x}=mg-k(l-l_0)=k\left(l_{éq}-l_0\right)-k(l-l_0)=-k\left(l-l_{éq}\right)$$

soit $m\ddot{x}+kx=0$ en plaçant l'origine à la position d'équilibre c'est-à-dire en $l_{éq}$. On trouve la même équation que précédemment.

2. Pendule simple

On considère une masse ponctuelle *m* fixée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable, de longueur *l*, pivotant sans frottement autour de l'axe Oz perpendiculaire au plan de la figure.



Pour un tel système, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

(voir le TD n°6 pour la démonstration)

Dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre stable $\theta_0 = 0$, cette équation s'écrit :

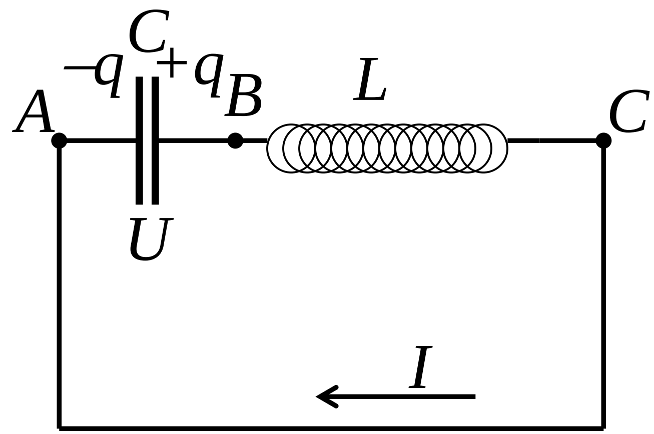
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

3. Circuit oscillant *LC*

On considère un circuit à courant variable constitué par un condensateur de capacité C et une inductance L (self) montés en série. Les conventions de signe sont telles que l'on ait :

$$I = \frac{dq}{dt}$$



(q augmente lorsque $I > 0$, et inversement)

L'inductance L est le siège d'un phénomène d'auto-induction avec apparition d'une f.e.m., qui tend à s'opposer au courant I. On a :

$$U_{AC} = 0 = U_{AB} + U_{BC} = (V_B - V_A) + (V_C - V_B)$$

$$U_{AB} = V_B - V_A = \frac{q}{C}$$ tension aux bornes condensateur

$$U_{BC} = V_C - V_B = L\frac{dI}{dt}$$ tension aux bornes de l'inductance

D'où : $L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$ l'équation d'un oscillateur harmonique avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Cette équation s'obtient aussi en dérivant l'énergie :

$$E = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = cte$$

3. Oscillations libres non amorties

1. Description du mouvement

La solution générale de l'équation $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants et sans second membre) est donnée par :

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

où ω_0 est la pulsation du mouvement (rd.s^{-1}) = $2\pi f_0$ (f_0 : fréquence (Hz))

A est l'amplitude du mouvement (A est toujours positif $A > 0$)

φ est la phase

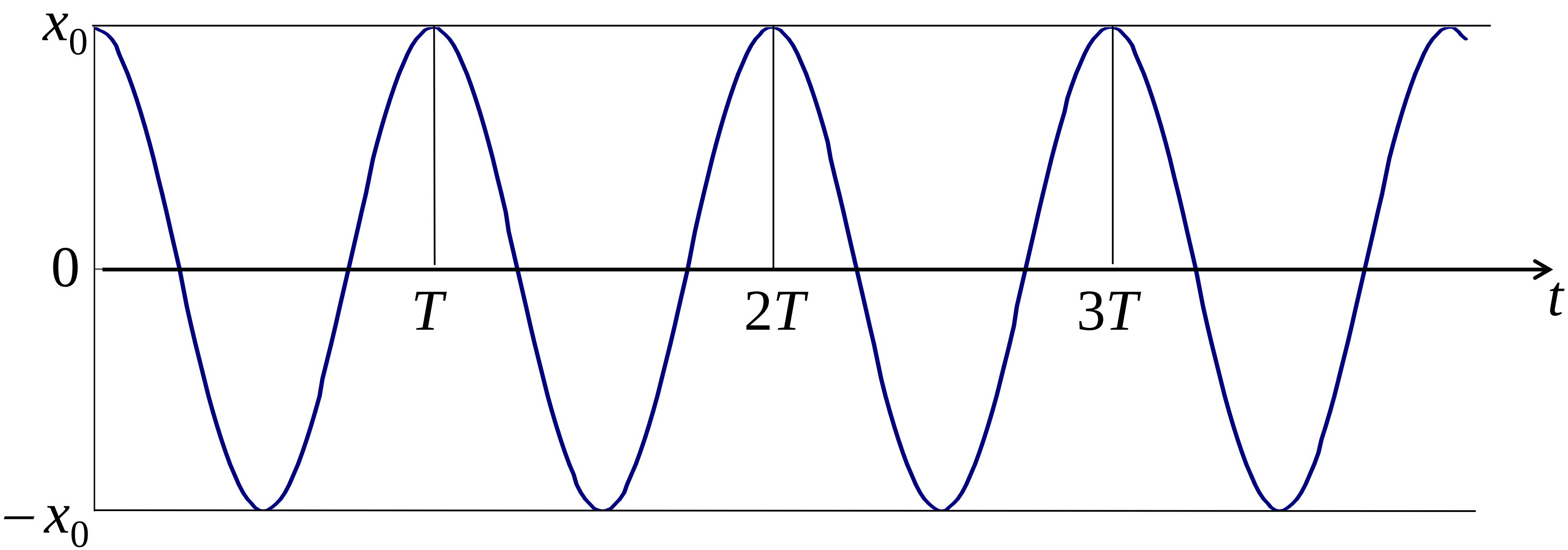
A et φ sont des constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales pour le déplacement et la vitesse.

Par exemple, si au temps $t = 0$, $x = x_0$ et $v = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} A\cos\varphi = x_0 \\ A\omega_0 \sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \varphi = 0 \quad A = x_0 \quad \text{si } x_0 > 0 \\ \varphi = \pi \quad A = -x_0 \quad \text{si } x_0 < 0 \end{matrix}$$

La solution s'écrit : $x = x_0 \cos \omega_0 t$

L'amplitude A = |x0| est le déplacement maximum du mobile.



Le mouvement de l'oscillateur harmonique à une dimension est périodique, sa période est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

La période d'oscillation ne dépend pas de l'amplitude A des oscillations. On dit qu'il y a isochronisme des oscillations. Cette période est appelée période propre de l'oscillateur.

2. Aspect énergétique

L’énergie potentielle est donnée par : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

(où l’on a choisit $x_0 = 0$ et $E_p(0) = 0$)

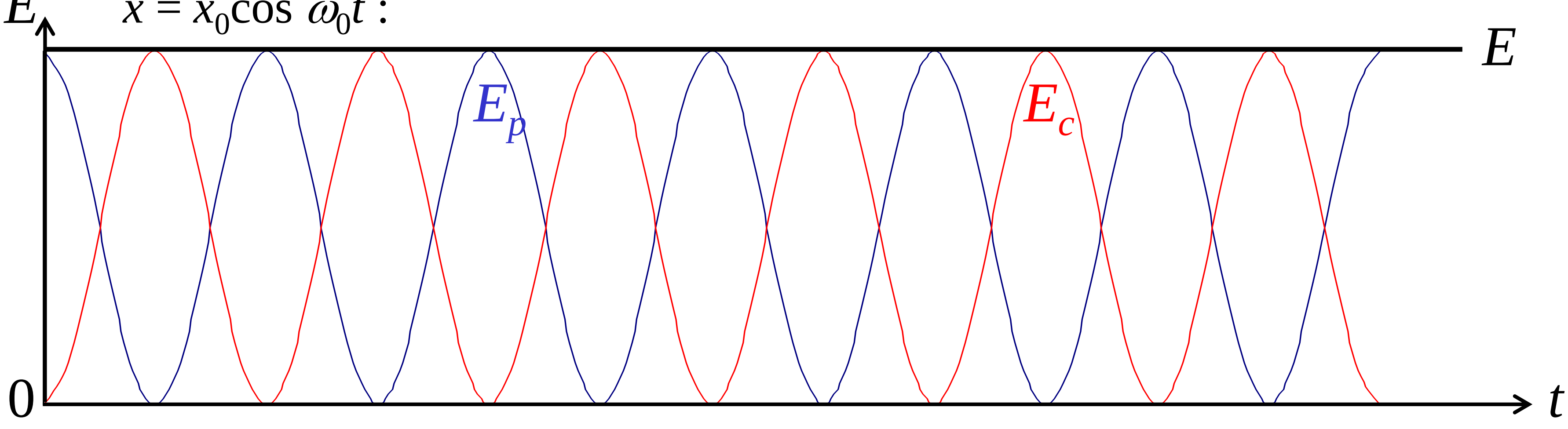
Par ailleurs, l’énergie cinétique est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

Donc :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) = \frac{1}{2}kA^2$$

L’énergie est bien une constante du mouvement. Elle passe périodiquement de la forme énergie potentielle à la forme énergie cinétique. Par exemple, si $x = x_0\cos\omega_0 t$:



La période de E_c et E_p est $T/2$.

$$E_c = \frac{1}{2} k x_0^2 \, \frac{1 - \cos\left(2\omega_0 t\right)}{2} \qquad E_p = \frac{1}{2} k x_0^2 \, \frac{1 + \cos\left(2\omega_0 t\right)}{2}$$

Valeurs moyennes de E_c et E_p :

$$\left\langle E_c \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_c dt = \frac{1}{2} k A^2 \int_0^T \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) dt$$

$$\left\langle E_p \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_p dt = \frac{1}{2} k A^2 \int_0^T \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) dt$$

$$\left\langle \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) \right\rangle = \left\langle \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) \right\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\left\langle E_c \right\rangle = \left\langle E_p \right\rangle = \frac{1}{4} k A^2 = \frac{E}{2}$$

4. Oscillations libres de l'oscillateur harmonique amorti

1. Amortissement par frottement visqueux

En pratique un mouvement oscillatoire non entretenu ne dure pas indéfiniment : il s'arrête à cause des frottements. On peut penser au cas des frottements solide-solide (par exemple un bloc fixé à un ressort et oscillant sur un plan horizontal). L'étude de ce mouvement est assez simple, et on trouve que la période est inchangée.

Le cas le plus intéressant est celui des forces de viscosité, proportionnelles à la vitesse : $\vec{F} = -f\vec{v}$.

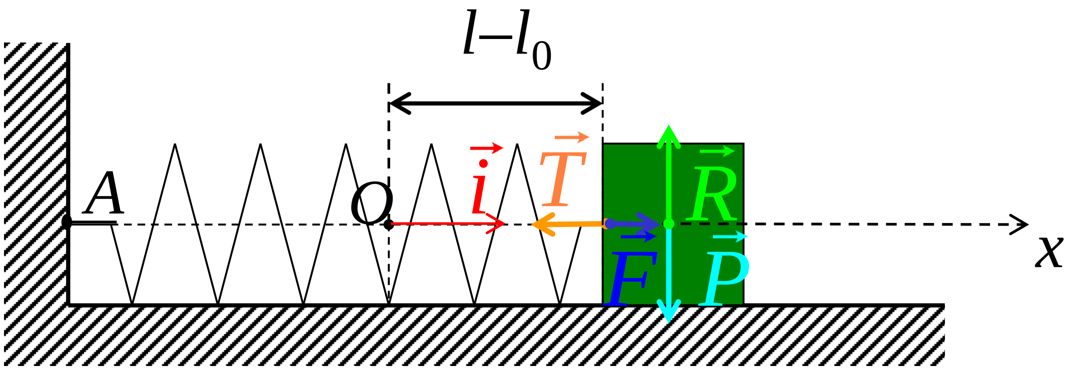
Dans le cas d'un mouvement rectiligne le long de l'axe Ox, $F = -f\,\dot{x}$.
L'équation du mouvement s'écrit alors, dans le cas général :

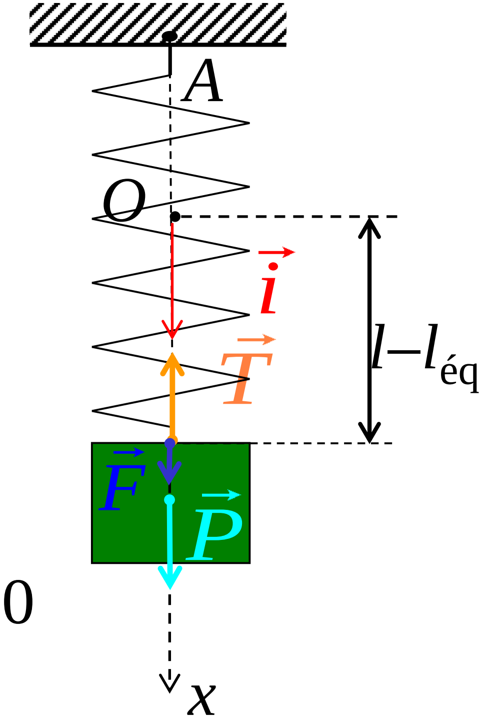
$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\gamma = \dfrac{f}{m}$ l'inverse d'un temps.

2. Application aux trois exemples de base

- Système ressort et masse

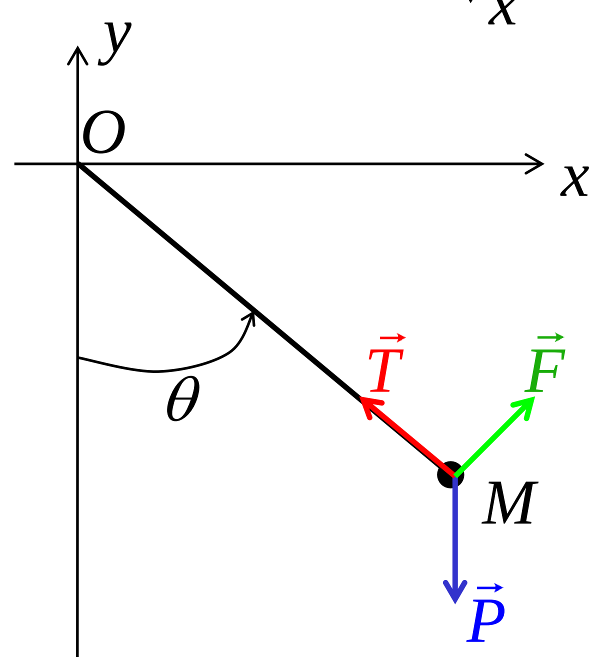




L'équation du mouvement s'écrit : $m\ddot{x} + f\,\dot{x} + kx = 0$

Avec : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\gamma = \dfrac{f}{m}$

- Pendule



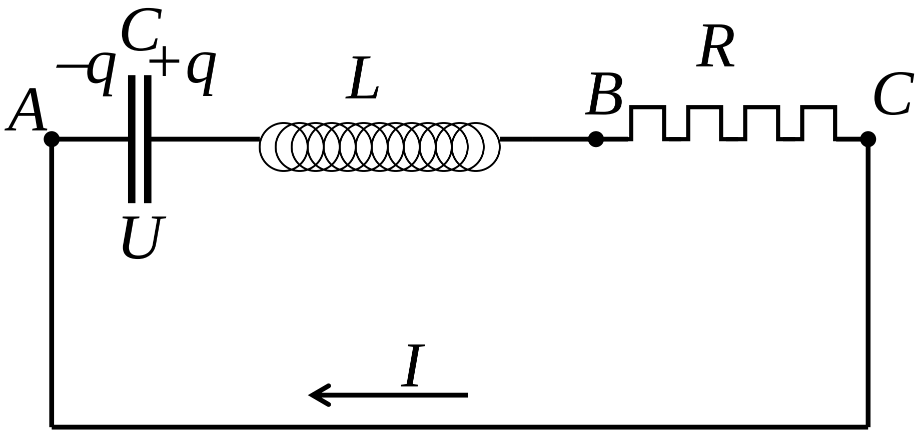
L'équation du mouvement s'écrit :

$ml\ddot{\theta} + fl\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0$ soit :

$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

et $\gamma = f/m$

- Circuit RLC



Une résistance R est introduite dans le circuit LC. Ceci provoque une chute de potentiel supplémentaire : $RI = R\dot{q}$.

$U_{AC} = 0 = U_{AB} + U_{BC}$ avec :

$U_{BC} = RI$

L'équation du mouvement s'écrit : $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$

Soit : $\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$

Avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et $\gamma = \frac{R}{L}$

3. Énergie du système

L'énergie totale du système n'est plus constante dans les trois cas considérés ci-dessus.

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$dW = \left(\sum \vec{F}\right).\vec{v}\,dt = m\vec{v}.d\vec{v} = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = dE_c \quad \text{soit :} \quad \frac{dE_c}{dt} = \left(\sum \vec{F}\right).\vec{v}$$

Ceci s'écrit aussi : $\dfrac{dE_c}{dt} = \left(\sum \vec{F}\right).\vec{v} = -\dfrac{dE_p}{dt} + \left(\sum \vec{F}^{N.C}\right).\vec{v}$

C'est-à-dire : $\boxed{\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{dE_c}{dt} + \dfrac{dE_p}{dt} = \left(\sum \vec{F}^{N.C}\right).\vec{v}}$

Appliqué aux trois exemples, ceci donne :

- Pour le système masse-ressort : $\dfrac{dE}{dt} = -f\,\dot{x}^2 < 0$
- Pour le pendule : $\dfrac{dE}{dt} = -fl^2\dot{\theta}^2$
- Pour le circuit RLC (effet Joule) : $\dfrac{dE}{dt} = -R\dot{q}^2$

4. Régimes d'amortissement

Nous cherchons des solutions de l'équation $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0$ dont la forme générale est Ae^{rt}. Après introduction dans l'équation différentielle, on obtient l'équation caractéristique vérifiée par r : $r^2 + \gamma r + \omega_0^2 = 0$.

Comme il s'agit d'une équation du second degré, il faut distinguer trois cas correspondant à la valeur positive, nulle ou négative du discriminant. Celui-ci est donné par : $\Delta=\gamma^2-4\omega_0^2$

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
$r_\pm=-\frac{\gamma}{2}\pm i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2/4}$ $=-\frac{\gamma}{2}\pm i\omega_1$	$r=-\frac{\gamma}{2}$	$r_\pm=-\frac{\gamma}{2}\pm\sqrt{\gamma^2/4-\omega_0^2}$ $=-\frac{\gamma}{2}\pm\omega_1$
$x=x_++x_-$ $x_+=Ae^{-\gamma t/2}e^{i\omega_1 t}$ $x_-=Be^{-\gamma t/2}e^{-i\omega_1 t}$	$x=\left(At+B\right)e^{-\gamma t/2}$	$x=x_++x_-$ $x_+=Ae^{-\gamma t/2}e^{\omega_1 t}$ $x_-=Be^{-\gamma t/2}e^{-\omega_1 t}$

- Cas où $\Delta > 0$ ($\gamma > 2\omega_0$)

L'équation caractéristique admet deux racines réelles r_+ et r_-.

$$r_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \omega_1 \qquad \text{où} \qquad \omega_1 = \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}$$

La solution s'écrit : $x = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} = e^{-\gamma t/2}\left(Ae^{\omega_1 t} + Be^{-\omega_1 t}\right)$

Il s'agit d'un régime apériodique composé d'une combinaison linéaire de deux exponentielles décroissantes.

- Cas où $\Delta = 0$ ($\gamma = 2\omega_0$)

L'équation caractéristique admet une racine double $r = -\frac{\gamma}{2} < 0$.

La solution s'écrit : $x = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} = e^{-\gamma t/2}\left(At + B\right)$

Ce régime est appelé régime critique. Il s'agit du régime le plus amorti, le système revient le plus rapidement à sa position d'équilibre.

- Cas où $\Delta < 0$ ($\gamma < 2\omega_0$)

L'équation caractéristique admet deux racines complexes r_+ et r_-.

$$r_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_1 \qquad \text{où} \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$$

La solution s'écrit : $x = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} = e^{-\gamma t/2}\left(Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t}\right)$

ou $x = e^{-\gamma t/2}\left(A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t\right)$

ω_1 est appelée la pseudo-pulsation et $T_1 = 2\pi/\omega_1$ est la pseudo-période des oscillations amorties. A et B sont déterminées par les C.I..

Exemple :

On considère un système pour lequel $x = 0$ et $v = v_0$ à $t = 0$.

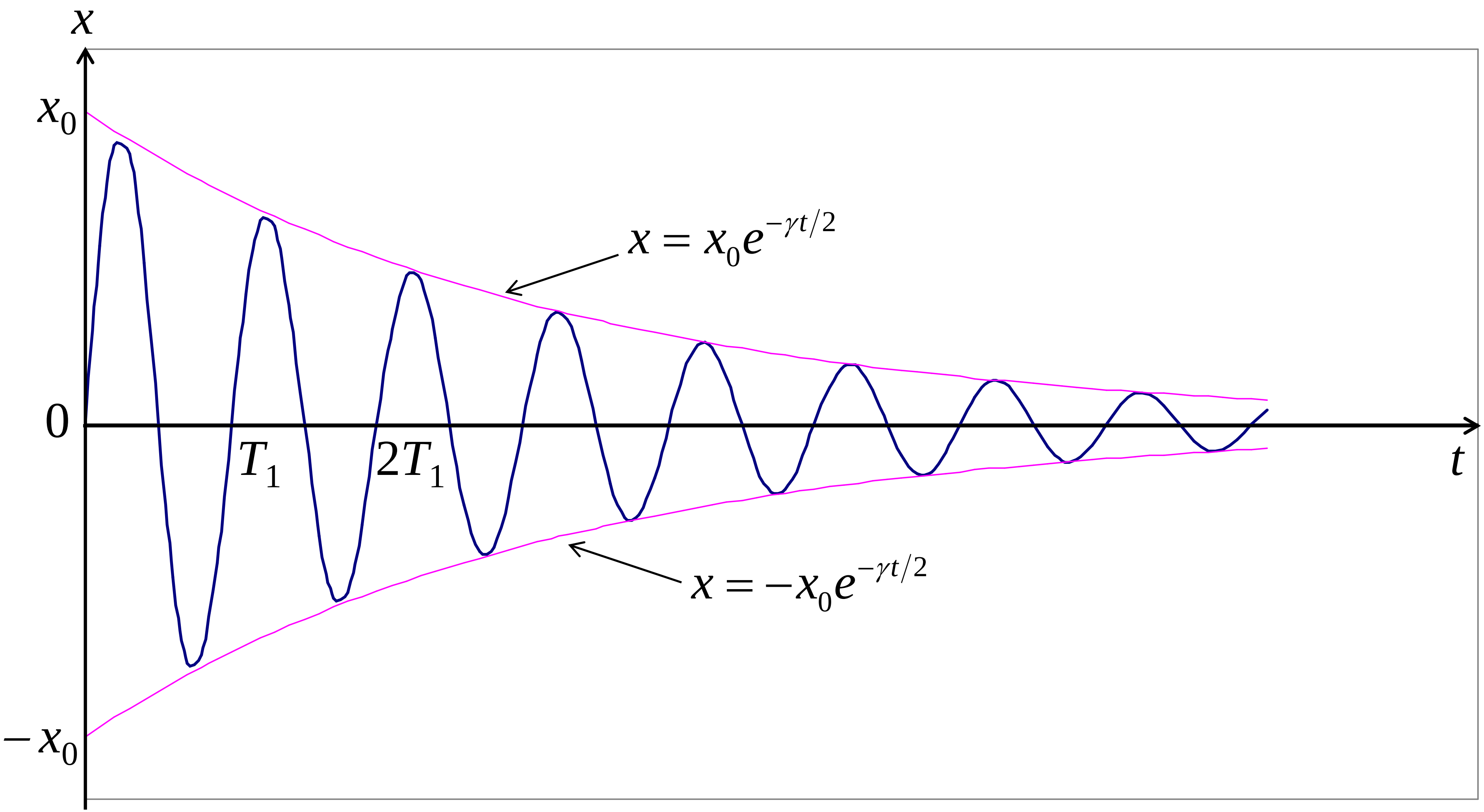
La 1ère C.I. impose $B = 0$.

La 2ème impose : $\dot{x} = Ae^{-\gamma t/2}\left(\omega_1\cos\omega_1 t - \gamma/2\sin\omega_1 t\right)$

Avec $\dot{x}(0) = A\omega_1 = v_0$, $A = v_0/\omega_1$ et on pose : $x_0 = v_0/\omega_1$

La solution s'écrit alors : $x = x_0 e^{-\gamma t/2}\sin\omega_1 t$

avec $\omega_1 = \omega_0\sqrt{1 - \gamma^2/4\omega_0^2}$



Pendant un intervalle $T_1 = 2\pi / \omega_1$, la décroissance de $x(t)$ est donnée par :

$$x(t+T_1)/x(t) = e^{-\gamma T_1/2}$$

5. Oscillations faiblement amorties

$\gamma << \omega_0$, alors ω_1 s'écrit : $\omega_1 \approx \omega_0(1 - \gamma^2 / 8\omega_0^2)$ qui devient $\omega_1 \approx \omega_0$ lorsqu'on néglige les termes d'ordre 2. La pseudo-période est alors pratiquement égale à la période propre du système considéré.

$$x \approx x_0 e^{-\gamma t/2} \sin \omega_0 t$$

Cela revient à multiplier une fonction sinusoïdale de pulsation ω_0 par une fonction très lentement variable avec le temps $e^{-\gamma t/2}$. Sur la durée d'une période T, on peut négliger la variation de $e^{-\gamma t/2}$.

- Dissipation d'énergie

L'énergie $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ n'est plus constante et décroît lentement. Elle s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 e^{-\gamma t}\left(\sin^2 \omega_1 t + \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\cos^2 \omega_1 t + \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}\cos^2 \omega_1 t - \frac{\gamma\omega_1}{\omega_0^2}\sin \omega_1 t \cos \omega_1 t\right)$$

Dans l'approximation $\gamma << \omega_0$, $\omega_1 \approx \omega_0$: $E \approx E_0\, e^{-\gamma t}$

où E_0 est l'énergie totale au temps $t = 0$: $E_0 = \frac{1}{2}kx_0^2$

L'énergie totale (comme les énergies cinétique et potentielle moyennes) décroît exponentiellement avec le temps. L'énergie perdue est dissipée par le jeu des frottements.

La puissance instantanée fournie par la force de frottement est $P = -f\,\dot{x}^2$

La puissance moyenne vaut alors $<P> = -f <\dot{x}^2>$ c'est-à-dire :

$$<P> = -\frac{1}{2} f \omega_0^2 x_0^2 e^{-\gamma t} = -\frac{1}{2} \gamma m \omega_0^2 x_0^2 e^{-\gamma t} = -\gamma E$$

La puissance moyenne dissipée $<P_d>$ définie comme étant la variation de l'énergie totale par unité de temps vaut :

$$<P_d> = -\frac{dE}{dt} = \gamma E$$

Elle est égale à l'opposé de la puissance moyenne due au travail de la force de frottement. $<P_d> = -<P>$

- Facteur de qualité Q

Le facteur de qualité Q d'un système oscillant est un terme très largement employé. Par définition :

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie emmagasinée}}{\text{perte d'énergie en 1 période}} = 2\pi \frac{E}{<P_d>T} = \omega_0 \frac{E}{<P_d>} = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

Q est un facteur sans dimension qui mesure l'inverse du rapport γ / ω_0 et donc $Q >> 1$. Il est d'autant plus grand que l'amortissement est faible.