Feuille d'exercices : Séquence 1

Exercice 1.

Effectuer, si possible, les opérations suivantes :

1) $(3,-4,5)+(1,1,-2)$,

2) $(0,2,-3)+(4,-5)$,

3) $-3(4,-5,-6)$,

4) $2(2,3,7,6)-5(1,-2,4,-1)$.

Correction :

1) $(3,-4,5)+(1,1,-2)=(4,-3,3)$.

2) $(0,2,-3)+(4,-5)$: impossible car les vecteurs n'ont pas le même nombre de composantes.

3) $-3(4,-5,-6)=(-12,15,18)$.

4) $2(2,3,7,6)-5(1,-2,4,-1)=(-1,16,-6,17)$.

Exercice 2.

Soient $x=(2,7,1)$, $y=(-3,0,4)$ et $z=(0,5,-8)$. Calculer

1) $3x-4y$,

2) $2x+3y-5z$,

3) $x-2iy+(1-i)z$,

4) $\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}y-\dfrac{\sqrt{3}+2i}{4}z$.

Correction :

1) $3x-4y=(6,21,3)-(-12,0,16)=(18,21,-13)$,

2) $2x+3y-5z=(4,14,2)+(-9,0,12)-(0,25,-40)=(-5,-11,54)$,

3) $x-2iy+(1-i)z=(2,7,1)-(-6i,0,8i)+(0,5-5i,-8+8i)=(2+6i,12-5i,-7,$

4) $\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}y-\dfrac{\sqrt{3}+2i}{4}z=$OMG.

Exercice 3.

Soient $u=(3-2i,4i,1+6i)$ et $v=(5+i,2-3i,5)$. Calculer

1) $u+v$,

2) $4i\,u$,

3) $(1+i)\,v$,

4) $(1-2i)u+(3+i)v$.

Correction :

1) $u+v=(3-2i,4i,1+6i)+(5+i,2-3i,5)=(8-i,2+i,6+6i)$,

2) $4i\,u=4i\,(3-2i,4i,1+6i)=(8-12i,-16,-24+4i)$,

3) $(1+i)\,v=(1+i)\,(5+i,2-3i,5)=(4+6i,5-i,5+5i)$,

4) $(1-2i)u+(3+i)v=(1-2i)(3-2i,4i,1+6i)+(3+i)(5+i,2-3i,5)=(13,17-3i,24+9i)$.

Exercice 4.

Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

1) $(a, 3) = (2, a + b)$,

2) $(4, b) = a(2, 3)$,

3) $(2, -3, 4) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0)$.

Correction :

1) $a = 2$ et $b = 1$,

2) $a = 2$ et $b = 6$,

3) $a = 3$, $b = -7$ et $c = 5$.

Exercice 5.

Déterminer, s'il existe, un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ solution de l'équation

$$2((1, 1, 0) - x) + 4(x + (0, 1, -1)) = (2, -1, 2).$$

Même chose pour l'équation $2((1, 1, 0) - x) + 3(x + (0, 1, -1)) - x = (2, 1, -2)$.

Correction : Pour la première équation on a $x = \left(0, -\frac{7}{2}, 3\right)$.
La deuxième équation est impossible.

Exercice 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est un vecteur de $\mathbb{C}^n$, ce qui se note $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Exercice 7.

Soient $x = (2, 1, 0)$, $y = (0, -1, 1)$ et $z = \left(1, -1, \frac{3}{2}\right)$. Calculer

1) $2x + 6y - 4z$,

2) $\frac{1}{3}x + y - \frac{2}{3}z$,

En déduire que z est combinaison linéaire de x et y.

Correction :

1) $2x + 6y - 4z = (0, 0, 0)$

2) $\frac{1}{3}x + y - \frac{2}{3}z = (0, 0, 0)$

On a $2x + 6y - 4z = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $z = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$.

Exercice 8.

Montrer que $(1, 2)$ est combinaison linéaire de $(1, -2)$ et $(2, 3)$.

Correction :

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \frac{4}{7}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Exercice 9.

Soient $v_1 = (2, -1, 1)$, $v_2 = (4, -2, 2)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ et $v_4 = (0, -3, 1)$.
Montrer que l'on a $v_4 = 3v_1 - v_2 - 2v_3$ et $v_4 = 5v_1 - 2v_2 - 2v_3$.

Exercice 10.

Soit $x = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$, où $k \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelle valeur de k, x est combinaison linéaire de $y = (3, 0, 2)$ et $z = (2, -1, -5)$.

Correction : $k = -12$.

Exercice 11.

Soient $x = (2, -3)$ et $y = \left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$. Écrire le vecteur $(0, 0)$ comme combinaison linéaire de x et y en deux façons différentes.

Notation

On écrit $k \in [\![1; n]\!]$ pour signifier que k est un entier compris entre 1 et n.

Exercice 12.

Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on note e_k le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la k-ème coordonnée vaut 1 et toutes les autres sont nulles. On appelle **base canonique** de $\mathbb{R}^n$ le n-uplet de vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$.

1) Donner les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ pour $n = 2, 3, 4$.

2) Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des n vecteurs de la base canonique.

3) Même question dans $\mathbb{C}^n$.

Remarque

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est souvent notée (i, j) et celle de $\mathbb{R}^3$ est souvent notée (i, j, k).

Exercice 13.

Soient $u = (3, 7, 1, 0)$, $u^{(1)} = (2, 0, 0, 0)$, $u^{(2)} = (1, 1, 0, 0)$, $u^{(3)} = (0, 3, 1, 0)$ et $u^{(4)} = (0, 0, 1, 1)$.

1) Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $u = a\,u^{(1)} + b\,u^{(2)} + c\,u^{(3)} + d\,u^{(4)}$.

2) En déduire que u est combinaison linéaire de $u^{(1)}, u^{(2)}$ et $u^{(3)}$.

Correction :

1)

$$u = -\frac{1}{2}\,u^{(1)} + 4\,u^{(2)} + 2\,u^{(3)} + 0\,u^{(4)}$$

2) Immédiat puisque $d = 0$. Donc un vecteur de $\mathbb{R}^4$ peut être combinaison linéaire de seulement 3 vecteurs (et non 4 comme c'était le cas pour les vecteurs de la base canonique).

Exercice 14.

Soient $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 0)$.

1) Montrer que $(1, 2, 3)$ n'est pas combinaison linéaire de u et v.

2) Montrer que $w = (3, 2, 0)$ est combinaison linéaire de u et v.

3) En déduire que $(1, 2, 3)$ n'est pas combinaison linéaire de u, v et w.

Exercice 15.

Soient $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 1)$.

1) Montrer que $(1, 2, 3)$ est combinaison linéaire de u, v et w.

2) Plus généralement, montrer que tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de u, v et w

3) Que peut-on remarquer pour $(x, y, z) = (0, 0, 0)$?

4) En déduire qu'il est impossible d'écrire un des vecteurs u, v ou w comme combinaison linéaire des deux autres.

Lorsque trois vecteurs u, v, w vérifient les points 2) et 4) précédents, on dit que (u, v, w) est une **base** de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16.

- ▷ Émile achète pour sa maman une bague contenant 2g d'or, 5g de cuivre et 4g d'argent. Il la paie 6200 euros.
- ▷ Pauline achète pour sa maman une bague contenant 3g d'or, 5g de cuivre et 1g d'argent. Il la paie 5300 euros.
- ▷ Frédéric achète pour sa chérie une bague contenant 5g d'or, 12g de cuivre et 9g d'argent.

Combien Frédéric va-t-il payer ?

Correction : 14700 euros.