Chapitre 3

Espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

Pré-requis

- ☐ Nombres complexes.

Objectifs

- ☐ Savoir effectuer les opérations dans $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ (addition, multiplication par un scalaire).
- ☐ Savoir calculer un produit scalaire/hermitien,
- ☐ Connaître la notion d'orthogonalité,
- ☐ Savoir calculer une norme,
- ☐ Savoir calculer un produit vectoriel.

Sommaire

Séquence 1

Opérations sur les vecteurs

1 Définitions et opérations de base

▷ $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble de tous les couples de réels (a, b). Il s'écrit :

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}.$$

▷ $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble de tous les triplets de réels (a, b, c). Il s'écrit :

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\}.$$

▷ De manière plus générale, on peut considérer l'ensemble des n-uplets de nombres réels : $(x_1, \ldots, x_n)$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Cet ensemble est appelé $\mathbb{R}^n$.

Définitions

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de tous les n-uplets de nombres réels, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

L'entier n est appelé la **dimension** de $\mathbb{R}^n$. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont appelés des **vecteurs**. Pour tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on appelle **composantes** (ou **coordonnées**) de x les réels $x_1, \ldots, x_n$.

Remarque

En général, on écrit les vecteurs en colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ plutôt que $(x_1, \ldots, x_n)$ (notation en ligne). Néanmoins, on utilisera souvent la notation en ligne pour un gain de place.

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ 2/25 \\ 1/7 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

Propriétés

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors, $x = y$ si et seulement si $x_i = y_i$, pour tout entier i compris entre 1 et n.

Attention

En particulier, cela signifie que l'ordre des composantes d'un vecteur est important : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarques – *Opérations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$*

- Dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}.$$

- En particulier,

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

- De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\, a\\\lambda\, b\end{pmatrix}.$$

Ces règles de calcul s'étendent à $\mathbb{R}^n$ pour tout entier $n \geq 2$:

Définitions – *Opérations dans $\mathbb{R}^n$*

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Somme de deux vecteurs.**

$$x+y=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}.$$

- **Produit d'un vecteur par un scalaire.**

$$\lambda\, x=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\, x_1\\\vdots\\\lambda\, x_n\end{pmatrix},$$

le nom scalaire vient du fait que, dans le cadre de $\mathbb{R}^n$, les réels sont appelés des scalaires.

- Le **vecteur nul** de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur $0_{\mathbb{R}^n}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

Remarque

En prenant $\lambda = -1$, on a $\lambda\, x = -x$ qui est appelé **opposé** de x et vérifie

$$x+(-x)=x-x=0_{\mathbb{R}^n}.$$

Attention

La somme de deux vecteurs n'est définie que si ceux-ci ont le même nombre de composantes. Par exemple, il n'est pas possible d'additionner un vecteur de $\mathbb{R}^4$ et un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Exemples

▷ On a

$$2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\\12\\7\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix}3\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}+\pi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\\pi\\0\end{pmatrix}.$$

▷ L'expression $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ n'a pas de sens.

Exercice 1.

1) Calculer (lorsque cela est possible) le résultat des opérations suivantes :

$$a)\ (2,1,3)+(5,6,7),\quad b)\ (3,1,0)+(4,-5),\quad c)\ -2(1,3,-5),\quad d)\ -(-6,7,-8).$$

2) Soient $x=(2,-7,1)$, $y=(-3,0,4)$ et $z=(0,5,-8)$. Calculer $3x-4y$ et $2x-5z$.

Propriétés

Soient x,y,z trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

1. **Propriétés de l'addition de vecteurs**
   (a) l'addition est *commutative* : $x+y=y+x$,
   (b) l'addition est *associative* : $x+(y+z)=(x+y)+z$,
   (c) l'addition admet $0_{\mathbb{R}^n}$ comme *élément neutre* : $x+0_{\mathbb{R}^n}=0_{\mathbb{R}^n}+x=x$,
   (d) tout vecteur admet un *opposé* : $x+(-x)=0_{\mathbb{R}^n}$.
2. **Propriétés de la multiplication par un scalaire**
   (a) la multiplication admet 1 comme *élément neutre* : $1\,x=x$,
   (b) la multiplication est *associative et commutative* : $\lambda\,(\mu\,x)=(\lambda\mu)\,x=\mu\,(\lambda\,x)$.
3. **Distributivité entre l'addition et la multiplication**

$$\lambda\,(x+y)=\lambda\,x+\lambda\,y\qquad\text{et}\qquad(\lambda+\mu)\,x=\lambda\,x+\mu\,x.$$

Remarque

Chacune de ces propriétés découle directement de la définition de la somme de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et de leur multiplication par un scalaire. Ces propriétés font de $\mathbb{R}^n$ muni de ces opérations un **espace vectoriel** noté $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$. Dans un cadre plus général, ce sont ces propriétés qui définissent ce qu'est un espace vectoriel (cours du 2^{nd} semestre).

Définition

Soient $k\in\mathbb{N}^*$ et $u^{(1)},\dots,u^{(k)}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle **combinaison linéaire** de $u^{(1)},\dots,u^{(k)}$ tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$\lambda_1\,u^{(1)}+\lambda_2\,u^{(2)}+\cdots+\lambda_k\,u^{(k)},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Cette expression s'écrit plus simplement

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, u^{(i)}.$$

Le symbole $\sum$ désigne une somme.

Exemples

- $\triangleright$ Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $u^{(1)} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

- $\triangleright$ On a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

Exercice 2.

Soient

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les combinaisons linéaires $\frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{2} u^{(3)}$ et $u^{(1)} + 2u^{(2)} + 3u^{(3)}$.

2) Montrer que le vecteur $(3, 8, 6, 26)$ est combinaison linéaire de $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$.

Tout ce que l'on a vu précédemment se généralise à des vecteurs ayant des composantes complexes :

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle $\mathbb{C}^n$ l'ensemble de tous les n-uplets de nombres complexes, c'est-à-dire

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \mid z_1 \in \mathbb{C}, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}.$$

Dans le cadre de $\mathbb{C}^n$, les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés des **scalaires**.

Dans $\mathbb{C}^n$, l'addition de vecteurs et la multiplication par un scalaire sont définis comme dans $\mathbb{R}^n$, et $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \quad i \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ 3i \end{pmatrix}, \quad (1-i) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 3-3i \end{pmatrix}.$$

Feuille d'exercices : Séquence 1

Exercice 1.

Effectuer, si possible, les opérations suivantes :

1) $(3,-4,5)+(1,1,-2)$,

2) $(0,2,-3)+(4,-5)$,

3) $-3(4,-5,-6)$,

4) $2(2,3,7,6)-5(1,-2,4,-1)$.

Exercice 2.

Soient $x=(2,7,1)$, $y=(-3,0,4)$ et $z=(0,5,-8)$. Calculer

1) $3x-4y$,

2) $2x+3y-5z$,

3) $x-2iy+(1-i)z$,

4) $\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}\,y-\dfrac{\sqrt{3}+2i}{4}\,z$.

Exercice 3.

Soient $u=(3-2i,4i,1+6i)$ et $v=(5+i,2-3i,5)$. Calculer

1) $u+v$,

2) $4i\,u$,

3) $(1+i)\,v$,

4) $(1-2i)u+(3+i)v$.

Exercice 4.

Trouver $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que

1) $(a,3)=(2,a+b)$,

2) $(4,b)=a(2,3)$,

3) $(2,-3,4)=a(1,1,1)+b(1,1,0)+c(1,0,0)$.

Exercice 5.

Déterminer, s'il existe, un vecteur $x\in\mathbb{R}^3$ solution de l'équation

$$2((1,1,0)-x)+4(x+(0,1,-1))=(2,-1,2).$$

Même chose pour l'équation $2((1,1,0)-x)+3(x+(0,1,-1))-x=(2,1,-2)$.

Exercice 6.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est un vecteur de $\mathbb{C}^n$, ce qui se note $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}^n$.

Exercice 7.

Soient $x=(2,1,0)$, $y=(0,-1,1)$ et $z=\left(1,-1,\dfrac{3}{2}\right)$. Calculer

1) $2x+6y-4z$,

2) $\dfrac{1}{3}\,x+y-\dfrac{2}{3}\,z$,

En déduire que z est combinaison linéaire de x et y.

Exercice 8.

Montrer que $(1, 2)$ est combinaison linéaire de $(1, -2)$ et $(2, 3)$.

Exercice 9.

Soient $v_1 = (2, -1, 1)$, $v_2 = (4, -2, 2)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ et $v_4 = (0, -3, 1)$.
Montrer que l'on a $v_4 = 3v_1 - v_2 - 2v_3$ et $v_4 = 5v_1 - 2v_2 - 2v_3$.

Exercice 10.

Soit $x = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$, où $k \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelle valeur de k, x est combinaison linéaire de $y = (3, 0, 2)$ et $z = (2, -1, -5)$.

Exercice 11.

Soient $x = (2, -3)$ et $y = \left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$. Écrire le vecteur $(0, 0)$ comme combinaison linéaire de x et y en deux façons différentes.

Notation

On écrit $k \in [\![1; n]\!]$ pour signifier que k est un entier compris entre 1 et n.

Exercice 12.

Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on note e_k le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la k-ème coordonnée vaut 1 et toutes les autres sont nulles. On appelle **base canonique** de $\mathbb{R}^n$ le n-uplet de vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$.

1) Donner les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ pour $n = 2, 3, 4$.

2) Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des n vecteurs de la base canonique.

3) Même question dans $\mathbb{C}^n$.

Remarque

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est souvent notée (i, j) et celle de $\mathbb{R}^3$ est souvent notée (i, j, k).

Exercice 13.

Soient $u = (3, 7, 1, 0)$, $u^{(1)} = (2, 0, 0, 0)$, $u^{(2)} = (1, 1, 0, 0)$, $u^{(3)} = (0, 3, 1, 0)$ et $u^{(4)} = (0, 0, 1, 1)$.

1) Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $u = a\,u^{(1)} + b\,u^{(2)} + c\,u^{(3)} + d\,u^{(4)}$.

2) En déduire que u est combinaison linéaire de $u^{(1)}, u^{(2)}$ et $u^{(3)}$.

Exercice 14.

Soient $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 0)$.

1) Montrer que $(1, 2, 3)$ n'est pas combinaison linéaire de u et v.

2) Montrer que $w = (3, 2, 0)$ est combinaison linéaire de u et v.

3) En déduire que $(1, 2, 3)$ n'est pas combinaison linéaire de u, v et w.

Exercice 15.

Soient $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 1)$.

1) Montrer que $(1, 2, 3)$ est combinaison linéaire de u, v et w.

2) Plus généralement, montrer que tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de u, v

et w

3) Que peut-on remarquer pour $(x, y, z) = (0, 0, 0)$?

4) En déduire qu'il est impossible d'écrire un des vecteurs u, v ou w comme combinaison linéaire des deux autres.

Lorsque trois vecteurs u, v, w vérifient les points 2) et 4) précédents, on dit que (u, v, w) est une **base** de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16.

- ▷ Émile achète pour sa maman une bague contenant 2g d'or, 5g de cuivre et 4g d'argent. Il la paie 6200 euros.
- ▷ Pauline achète pour sa maman une bague contenant 3g d'or, 5g de cuivre et 1g d'argent. Il la paie 5300 euros.
- ▷ Frédéric achète pour sa chérie une bague contenant 5g d'or, 12g de cuivre et 9g d'argent.

Combien Frédéric va-t-il payer ?

Séquence 2

Produit scalaire et norme

2 Produit scalaire et produit hermitien

Exemples — *Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$*

1. Le produit scalaire de deux vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ est défini par

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

2. Le produit scalaire de deux vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ est défini par

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Plus généralement, on a :

Définition

Le **produit scalaire** de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ est le *réel* défini par

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 + 2 + 6 = 14, \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4/3 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{35}{6}.$$

Remarque

D'autres notations existent pour le produit scalaire. Les plus fréquentes sont (x, y), $(x \mid y)$, $\langle x, y \rangle$ et $\langle x \mid y \rangle$.

Attention

Le produit scalaire de deux vecteurs n'est défini que si ceux-ci ont le même nombre de composantes. Par exemple, il n'est pas possible de calculer le produit scalaire d'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ et d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.

Pour les différents vecteurs x, y ci-dessous calculer, lorsque cela est possible, le produit scalaire $x \cdot y$:

1) $x = (1, 2)$ et $y = (3, 4)$,

2) $x = (2, -3, 6)$ et $y = (8, 2, -3)$,

3) $x = (1, 5, 13)$ et $y = (0, 3, 4, 1)$,

4) $x = (1, -8, 0, 5)$ et $y = (3, -5, 2, 1)$.

Propriétés

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le produit scalaire est :

- **symétrique** : $x \cdot y = y \cdot x$,
- **bilinéaire** :

$$(\lambda\, x) \cdot y = \lambda\, x \cdot y, \qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

et

$$x \cdot (\lambda\, y) = \lambda\, x \cdot y, \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Les propriétés précédentes se démontrent très simplement. Par exemple, pour la symétrie, on a

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n = y \cdot x,$$

ce qui montre le résultat. On pourra remarquer que l'on a seulement utilisé le fait que le produit est commutatif dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire$ab = ba$ pour tous réels a, b.

Définition

Le **produit hermitien** de deux vecteurs u et v de $\mathbb{C}^n$ est le *complexe* défini par

$$u \cdot v = u_1 \overline{v_1} + \cdots + u_n \overline{v_n} = \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k},$$

où, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\overline{v}_k$ désigne le conjugué de v_k.

Attention

Pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$u \cdot v = \overline{v \cdot u} \quad \text{et} \quad u \cdot (\lambda\, v) = \overline{\lambda}\, u \cdot v.$$

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + i \times 1 = 1 + i \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times (-i) = 1 - i = \overline{1 + i},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2i \\ i \end{pmatrix} = 2 \times (-2i) + 3 \times (-i) = -7i = -i \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Pour les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ ci-dessous, calculer tous les produits hermitiens possibles :

$$(1 - 2i, 3 + i), \quad (3 - 2i, 4i, 1 + 6i), \quad (4 + 2i, 5 - 6i), \quad (5 + i, 2 - 3i, 7 + 2i).$$

Notation
L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$. Ainsi, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ est soit $\mathbb{R}^n$, soit $\mathbb{C}^n$.

Définition
On dit que deux vecteurs x et y de $\mathbb{K}^n$ sont **orthogonaux** s'ils vérifient $x \cdot y = 0$.

Exercice 3.
1) Parmi les vecteurs ci-dessous déterminer ceux qui sont orthogonaux :

$$x = \left(1, 2, \sqrt{2}, \frac{3}{4}\right), \quad y = \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, 5, \frac{1}{3}\right) \quad \text{et} \quad z = \left(-2\sqrt{2}, \frac{3}{2}, 2, -4\right).$$

2) Déterminer le réel k de sorte que les deux vecteurs suivants soient orthogonaux : $(1, k, -3)$ et $(2, -5, 4)$.

3) Montrer que $(1+i, -2, 0)$ et $(1+i, 1, 2i)$ sont orthogonaux.

3 Norme

Définition
La **norme** d'un vecteur x de $\mathbb{K}^n$ est le *réel*, noté $\|x\|$, défini par

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Remarque
En particulier, on a $\|x\|^2 = x \cdot x$.

Exemples
- ▷ Soit $x = (1, 2, 3, 4)$. On a

$$x \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 + 4 + 9 + 16 = 30,$$

d'où $\|x\| = \sqrt{30}$.

- ▷ Soit $x = (3+4i, 5-2i, 1-3i)$. Alors,

$$\|x\|^2 = |3+4i|^2 + |5-2i|^2 + |1-3i|^2 = 9 + 16 + 25 + 4 + 1 + 9 = 64,$$

d'où $\|x\| = 8$.

Exercice 4.
Calculer les normes des vecteurs suivants :

$$u_1 = (6, 2, -1), \quad u_2 = (4-i, 2i, 3+2i, 1-5i), \quad u_3 = (5, 3, -2, -4, -1), \quad u_4 = (1+i, -3-6i).$$

Propriétés

Soient x, y, z trois vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. La norme vérifie les propriétés suivantes :

- ▷ **séparation** : $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0_{\mathbb{K}^n}$,
- ▷ **homogénéité** : $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$,
- ▷ **inégalité triangulaire** : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition

Un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|x\| = 1$ est dit **vecteur unité** (ou **vecteur unitaire**).

Proposition

Pour tout vecteur non nul $x \in \mathbb{K}^n$, le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|}$ est un vecteur unité.

Démonstration. C'est une conséquence de l'homogénéité et de la séparation de la norme. En effet, si $x \in \mathbb{K}^n$ est non nul, alors $\|x\| \neq 0$ et on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|}\, \|x\| = 1.$$

□

Exemple

Pour $u = (1, -1)$, on a $\|u\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Alors,

$$v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

est un vecteur unité. En effet, on peut vérifier :

$$\|v\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Exercice 5.

Soit $u = (1, -1, 0)$. Déterminer $v = \dfrac{u}{\|u\|}$ et vérifier que l'on a bien un vecteur unité.

Feuille d'exercices : Séquence 2

Exercice 1.

Soient $u = (1,2,3)$, $v = (2,0,6)$ et $w = (6,0,2)$. Calculer :

1) $u \cdot v$,
2) $u \cdot w$,
3) $v \cdot w$,
4) $\|u\|$,
5) $\|v\|$,
6) $\|w\|$.

Exercice 2.

Calculer les normes et tous les produits scalaires possibles pour les vecteurs ci-dessous

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

Calculer les normes et tous les produits hermitiens possibles pour les vecteurs ci-dessous

$$u = \begin{pmatrix} i \\ 2i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-2i \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}i}{2} \\ \frac{3}{4} - i \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Calculer tous les produits scalaires et/ou hermitiens possibles pour les vecteurs ci-dessous

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}i}{2} \\ \frac{3}{4} - i \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Calculer $u \cdot v$ et $v \cdot u$ pour u et v donnés par

1) $u = (1+7i, 2-6i)$ et $v = (5-2i, 3-4i)$,

2) $u = (3-7i, 2i, -1+i)$ et $v = (4-i, 11+2i, 8-3i)$.

Que remarque t-on ?

Exercice 6.

Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de même norme. Montrer que les vecteurs $x+y$ et $x-y$ sont deux vecteurs orthogonaux. Le résultat est-il encore vrai pour des vecteurs de $\mathbb{C}^n$?

Exercice 7.

Faire la démonstration de la bilinéarité du produit scalaire.

Exercice 8.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1) Calculer le produit scalaire $e_i \cdot e_j$, pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, calculer $x \cdot e_i$.

Exercice 9.

Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Montrer l'égalité

$$\mathcal{R}e(x \cdot y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

En déduire le *théorème de Pythagore* : deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Exercice 10.

Soient $u = (1, 2)$ et $v = (3t+1, -2t)$. Trouver les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ telles que

1) u et v soient colinéaires.

2) u et v soient orthogonaux.

Exercice 11.

Soient $u = (1, 1, 0)$ et $v = (-1, 0, 1)$. Calculer $\|u - v\|$ et $\|u\| - \|v\|$. Que remarque t-on ?

Exercice 12.

Trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ dont la norme est égale à 4 et dont la première composante est deux fois plus grande que la deuxième composante.

Exercice 13.

Soient $x = (2, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer un vecteur y orthogonal à x et au vecteur k de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et tel que $\|y\| = \sqrt{3}\,\|x\|$.

Exercice 14.

Soient x, y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $P(t) = (x+ty) \cdot (x+ty)$. Donner l'expression développée de P en fonction de $\|x\|, \|y\|$ et $(x \cdot y)$.

2) Quel type de fonction usuelle est P ?

3) Si un polynôme du second degré est toujours positif ou nul, quel est le signe de son discriminant ?

4) En déduire que l'on a

$$x \cdot y \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**.

5) À partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exercice 15.

Soient x, y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur

$$\text{proj}_y x = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y$$

est dit la **projection orthogonale** de x sur y.

1) Montrer que les vecteurs $x - \text{proj}_y x$ et x sont orthogonaux.

2) Soit α l'angle formé par les vecteurs x et y. Montrer que $\|\text{proj}_y x\| = \|x\| \, |\cos \alpha|$.

3) Soient $x = (1, 2, 3)$ et $y = (0, 0, 1)$. Calculer $\text{proj}_y x$.

4) Soient $x = (1, 2, 3)$ et $y = (1, 1, 0)$. Calculer $\text{proj}_y x$.

Exercice 16.

Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.

1) Déterminer tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ orthogonaux à x et de même norme.

2) En déduire tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ orthogonaux à x.

Séquence 3

Dans $\mathbb{R}^3$: le produit vectoriel

4 Le produit vectoriel

Définition

Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on appelle **produit vectoriel** des vecteurs u et v le vecteur noté $u \wedge v$ défini par

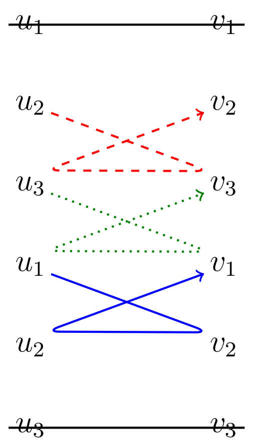
$$u \wedge v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Remarque

1. On prendra garde de ne pas confondre les deux notions de produit de vecteurs : le produit *scalaire* est un *scalaire* tandis que le produit *vectoriel* est un *vecteur*.
2. Le produit vectoriel est parfois noté $u \times v$ (notamment dans la littérature anglophone et allemande).

Méthode – *Moyen mnémotechnique*

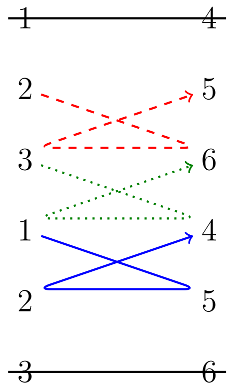
- ▷ On écrit les vecteurs u, v deux fois par colonnes,
- ▷ on barre la première et la dernière ligne,
- ▷ pour obtenir la 1^re^ composante de $u \wedge v$ on effectue le produit en croix entre les 2^es^ et 3^es^ lignes (en tirets rouges sur la figure),
- ▷ pour obtenir la 2^e^ composante de $u \wedge v$ on effectue le produit en croix entre les 3^es^ et 4^es^ lignes (en pointillé vert sur la figure),
- ▷ pour obtenir la 3^e^ coordonnée de $u \wedge v$ on effectue le produit en croix entre les 4^es^ et 5^es^ lignes (en bleu sur la figure)



$$\text{d'où} \qquad u \wedge v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times 6-3\times 5\\3\times 4-1\times 6\\1\times 5-2\times 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$



Attention

Le produit vectoriel n'existe que dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition

Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$. Alors, $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.

Démonstration. En effet, on a

$$(u \wedge v)\cdot u = \begin{pmatrix}u_2v_3 - u_3v_2\\u_3v_1 - u_1v_3\\u_1v_2 - u_2v_1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_1u_2v_3 + u_1u_3v_2 - u_2u_3v_1 = 0,$$

ce qui montre que $u \wedge v$ est orthogonal à u. On procède de même pour v. □

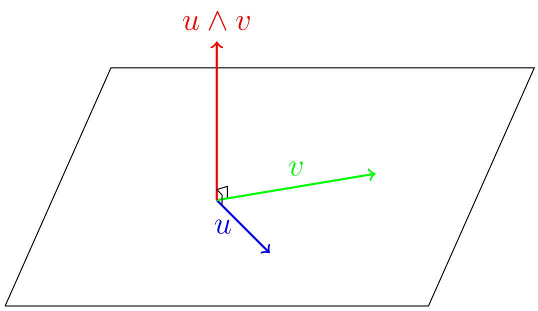
Rappel

On rappelle que deux vecteurs non nuls u et v de $\mathbb{R}^n$ sont dits **colinéaires** s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u = k\,v$.

À noter

Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$ deux vecteurs non nuls. Alors,

- ▷ si u et v sont colinéaires, $u \wedge v = 0_{\mathbb{R}^3}$,
- ▷ si u et v ne sont pas colinéaires,
  - $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v,
  - $\|u \wedge v\| = \|u\|\,\|v\|\,|\sin(u, v)|$, où (u, v) est l'angle orienté entre u et v,
  - le triplet $(u, v, u \wedge v)$ est de sens direct (c'est-à-direvérifie les règles du bonhomme d'Ampère ou du tire-bouchon de Maxwell).



Propriétés

Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

- $\triangleright$ le produit vectoriel est *bilinéaire* :

$$(u + \lambda v) \wedge w = u \wedge w + \lambda v \wedge w \quad \text{et} \quad u \wedge (v + \lambda w) = u \wedge v + \lambda u \wedge w,$$

- $\triangleright$ le produit vectoriel est *anti-symétrique* : $u \wedge v = -v \wedge u$.

Remarque

Lorsque l'on utilise des produits vectoriels, il est très important de faire attention à l'ordre d'écriture des facteurs.

Exemple

Soient $u = (1, 4, -2)$ et $v = (-1, -3 + 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. A partir du produit vectoriel on peut déterminer tous les vecteurs orthogonaux à u et à v. En effet, le produit vectoriel $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v. On a :

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 - (-2) \times (-3) \\ -2 \times (-1) - 1 \times 1 \\ 1 \times (-3) - 4 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, tout vecteur colinéaire à $u \wedge v$ est orthogonal à u et v. Ainsi, on peut prendre $w = \lambda(-2, 1, 1)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq 0$.

Remarque

Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs de la base canonique e_1, e_2, e_3 sont généralement notés i, j, k. Ceux-ci vérifient

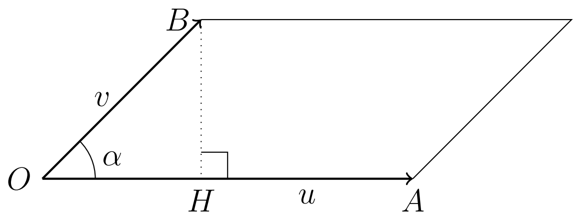
$$i \wedge j = k, \quad j \wedge k = i \quad \text{et} \quad k \wedge i = j.$$

Exercice 1.

Soient $u = (2, 3, -1)$ et $v = (1, 4, -2)$. Calculer $u \wedge v$, $v \wedge u$ et $(u + v) \wedge (u - v)$.

Remarque — *Interprétation géométrique du produit vectoriel*

Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors $\|u \wedge v\|$ est l'aire du parallélogramme ayant comme cotés les vecteurs u et v.



En effet, $BH = OB \times |\sin \alpha| = \|v\| \, |\sin \alpha|$ et donc l'aire du parallélogramme est

$$OA \times BH = \|u\| \|v\| \sin \alpha| = \|u \wedge v\|.$$

Feuille d'exercices : Séquence 3

Exercice 1.

Soient $u = (2, 0, 1)$ et $v = (3, 1, -1)$. Déterminer $u \wedge v$, $v \wedge u$ et $(u + v) \wedge (u - v)$.

Exercice 2.

Montrer que les vecteurs i, j, k de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vérifient

$$i \wedge j = k, \quad j \wedge k = i \quad \text{et} \quad k \wedge i = j.$$

Exercice 3.

Soit (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère $u = i$, $v = i + j$ et $w = j$. Calculer $(u \wedge v) \wedge w$, puis $u \wedge (v \wedge w)$.

Que peut-on conclure ? Le produit vectoriel est-il associatif ?

Exercice 4.

Soient $u = (4, -1, 2)$, $v = (1, 5, -3)$ et $w = (2, 0, -4)$. Calculer et comparer :

1) $u \wedge v$ et $v \wedge u$,

2) $u \wedge (v + w)$ et $u \wedge v + u \wedge w$,

3) $u \wedge (2v)$, $(2u) \wedge v$, et $2(u \wedge v)$,

4) $(u \wedge v) \wedge w$ et $u \wedge (v \wedge w)$.

Exercice 5.

Déterminer un vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, -1, 2)$.

Exercice 6.

Soient u, v, w deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ On définit le **produit mixte** des vecteurs u, v, w par le scalaire

$$[u, v, w] = u \cdot (v \wedge w).$$

1) Montrer que $[u, w, v] = -[u, v, w]$.

2) Montrer que $[u, u, w] = [u, v, u] = 0$.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $[\lambda u, v, w] = [u, \lambda v, w] = \lambda[u, v, w]$.

4) Montrer que $[u, v, w] = 0$ si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe des réels α, β, γ non tous nuls tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$.

5) Montrer que $|[u, v, w]|$ est le volume du parallélepipede construit sur les vecteurs u, v et w.

Exercice 7.

Une particule de charge q et de masse m est soumise à un champ magnétique constant $\overrightarrow{B} = (0, 0, B)$. Elle subit alors la force de Lorentz $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$, et son mouvement est décrit par l'équation $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$ (ici $\overrightarrow{v}$ désigne la vitesse de la particule, et $\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$ son accélération).

Écrire en fonction des coordonnées (v_x, v_y, v_z) de $\overrightarrow{v}$ les équations correspondantes.