Chapitre 8

Calcul matriciel

Pré-requis

- ☐ Nombres complexes.
- ☐ Espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$.
- ☐ Systèmes linéaires.

Objectifs

- ☐ Savoir effectuer des opérations sur les matrices.
- ☐ Savoir calculer les puissances, la transposée et le déterminant d'une matrice.
- ☐ Savoir calculer l'inverse d'une matrice.

Sommaire

Chapitre 8 - Séquence 1

Définition et opérations sur les matrices

1 Définition des matrices

Notations

Dans toute la suite,

- $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$,
- n et p sont deux entiers naturels non nuls.

Considérons le système

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & L_1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 & L_2 \\ 3x_1 & & & + & 8x_3 & = & 8 & L_3 \end{cases}$$

Les coefficients du système, suivant chaque ligne, sont $L_1 : 2, 3, 2$, $L_2 : 1, 1, 1$ et $L_3 : 3, 0, 8$. On peut regrouper tous ces coefficients dans un tableau noté :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

C'est ce que l'on appelle une **matrice** (tableau contenant des nombres réels ou complexes).

Définitions

On appelle **matrice** de **taille** $n \times p$ (ou matrice (n, p)) à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau à n lignes et p colonnes de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

où, pour tous $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; p]\!]$, a_{ij} est un élément de $\mathbb{K}$.

- Pour tous $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; p]\!]$, les a_{ij} sont appelés les **coefficients de la matrice** A.
- Pour $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; p]\!]$, a_{ij} est le coefficient de A à la i-ième ligne et j-ième colonne.

Notations

- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut aussi être notée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$
- En général, dans toute la suite, les matrices sont désignées par une majuscule et ses coefficients par la même lettre en minuscule. Par exemple, la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a pour coefficients a_{ij}, pour tous $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; p]\!]$.
- Dans certains cas, on notera les coefficients d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour tous $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; p]\!]$, par $(A)_{ij}$.

Exemples – *Quelques exemples de matrices de différentes tailles*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6i \\ 3-5i & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4i \\ 5 & 6i & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 1+i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C}) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \qquad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

- ▷ Le coefficient de la deuxième ligne et première colonne de la matrice A est : $a_{21} = 2$.
- ▷ Le coefficient de la troisième ligne et quatrième colonne de la matrice B est : $b_{34} = 1+i$.
- ▷ De même, $c_{12} = 2$, $d_{31} = 3-5i$, $e_{11} = 1$, $f_{21} = 2$.

Exercice 1.

Soient A et B les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \times & 6 \\ \times & 2i & \times \\ 4+i & 3 & \times \\ 5 & 7+i & \times \end{pmatrix}.$$

1) Donner la taille de A et identifier les coefficients a_{23}, a_{32}, a_{14} et a_{24}.

2) Compléter l'écriture de $B \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C})$ en sachant que $b_{33} = 2$, $b_{23} = 1+i$, $b_{12} = 0$, $b_{43} = 2+i$ et $b_{21} = 3$.

Vocabulaire

- ▷ L'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ écrits en colonne. Ce sont des **matrices colonnes**.
- ▷ L'ensemble $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{K}^p$ écrits en ligne (sans virgule). Ce sont des **matrices lignes**.
- ▷ Pour $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (resp. $A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$) on note ses coefficients, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, a_i au lieu de a_{i1} (resp. a_{1i}).

Définitions

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- ▷ Si $n = p$, on dit que A est une **matrice carrée d'ordre** n et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, A peut être notée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.
- ▷ Si $n \neq p$, la matrice A est dite **rectangulaire**.
- ▷ La **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $0_{n,p}$ ou simplement 0, est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.
  Autrement dit, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice nulle si, pour tous $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$, on a

$$a_{ij} = 0.$$

Exemples

▷ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est carrée.

▷ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est rectangulaire.

▷ Les matrices nulles de $\mathcal{M}_{32}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{43}(\mathbb{K})$ sont

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition

Soient $(q, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq r}} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ sont **égales** si elles ont la même taille et si leurs coefficients sont égaux, c'est-à-dire $n = q$, $p = r$ et, pour tous $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; p]\!]$

$$a_{ij} = b_{ij}.$$

Dans ce cas, on note $A = B$.

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 3i-2i & 3-1 \\ 6 & 2^2 & i-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & i & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Opérations simples sur les matrices

Définition – *Addition de matrices*

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **somme** de A et B la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $A + B$, donnée par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

Attention

▷ On ne peut additionner que des matrices de mêmes tailles.

▷ La matrice obtenue en effectuant la somme de deux matrices est de la même taille.

Exemples – *Addition de matrices*

▷ Somme de deux matrices de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

▷ Somme de deux matrices de $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+i & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 2i+4 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & i & 1 \\ 3i & 3 & 4-2i & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 5+i & 10 \\ 2+3i & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 6 & 9 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Définition – *Multiplication scalaire-matrice*

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **produit** de A par λ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $\lambda\, A$, donnée par

$$\lambda\, A = (\lambda\, a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}.$$

Exemples – *Multiplication scalaire-matrice*

▷ Soient $\lambda = -2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors, on a :

$$\lambda A = -2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

▷ Soient $\gamma = 3i$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3 \\ 4 & 2i & 1+2i \end{pmatrix}$. Alors, on a :

$$\gamma B = 3i \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3 \\ 4 & 2i & 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i & -3+6i & 9i \\ 12i & -6 & -6+3i \end{pmatrix}.$$

Propriétés

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

1. **Propriétés de l'addition de matrices**
   (a) l'addition est *commutative* : $A + B = B + A$,
   (b) l'addition est *associative* : $A + (B + C) = (A + B) + C$,
   (c) l'addition admet $0_{n,p}$ comme *élément neutre* : $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$,
   (d) toute matrice admet un *opposé* : $A + (-A) = 0_{n,p}$.
2. **Propriétés de la multiplication par un scalaire**
   (a) la multiplication admet 1 comme *élément neutre* : $1\, A = A$,
   (b) la multiplication est *associative et commutative* : $\lambda\,(\mu\, A) = (\lambda\mu)\, A = \mu\,(\lambda\, A)$.
3. **Distributivité entre l'addition et la multiplication**

$$\lambda\,(A + B) = \lambda\, A + \lambda\, B \qquad \text{et} \qquad (\lambda + \mu)\, A = \lambda\, A + \mu\, A.$$

Remarque

Toutes ces propriétés se résument de la façon suivante : le triplet constitué de l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de l'addition $+$ et de la multiplication par un scalaire $\cdot$, que l'on note aussi $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$, forme un **espace vectoriel** (comme c'était le cas pour l'espace $\mathbb{K}^n$).

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants :

1) Déterminer la taille des matrices A_i et B_i pour $i \in \{1,2,3,4\}$.

2) Lorsque cela est possible, calculer C_i pour $i \in \{1,2,3,4\}$.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C_1 = 2A_1 + 3B_1$;

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 2 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ et $C_2 = 3A_2 + 4B_2$;

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $C_3 = (1+i)A_3 - 2B_3$;

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3i & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C_4 = (1+i)A_4 - 2B_4$.

3 Produit matrice-colonne

Considérons le système

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 8x_3 = 8 \end{cases}$$

On a vu en début de séquence que la matrice contenant les coefficients de ce système est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$. Alors, X et B sont matrices colonnes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Le système précédent peut s'écrire plus simplement :

$$AX = B,$$

où le produit *matrice-colonne* AX est donné par la définition ci-dessous.

Définition – *Produit matrice-colonne*

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1\leq i\leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors, le **produit** de A et X est la matrice colonne $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de coefficients, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$(AX)_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}x_k.$$

Autrement dit, la matrice colonne AX est donnée par

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix}.$$

Attention

Pour réaliser le produit AX, le nombre de *colonnes* de A **doit être égal** au nombre de *lignes* de X. On gardera en tête que l'on a

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ (A, X) & \longmapsto & AX \end{array}$$

Méthode – *Calcul du produit matrice-colonne*

On donne ci-dessous une illustration du produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K})$ avec une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{K})$:

▷ Calcul de la 1ère ligne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ \times \\ \times \end{pmatrix}$$

▷ Calcul de la 2ème ligne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ \times \end{pmatrix}$$

▷ Calcul de la 3ème ligne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \end{pmatrix}$$

Exemples – *Produit matrice-colonne*

▷ Soient $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donnés par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice colonne X, donc le produit AX est réalisable. On a alors :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 + 3\times 3 \\ 2\times 1 + 3\times 2 - 4\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

▷ Soient $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$ et $Y \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ donnés par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4i \\ 5 & 6i & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 1+i \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de Y, donc le produit BY est réalisable. On a alors :

$$BY = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4i \\ 5 & 6i & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 + 3\times 3 + 4i\times 4 \\ 5\times 1 + 6i\times 2 + 7\times 3 + 8\times 4 \\ 4\times 1 + 2\times 2 + 3\times 3 + (1+i)\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14+16i \\ 58+12i \\ 21+4i \end{pmatrix}$$

▷ Par contre, pour les matrices C et Z données par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

le produit C et Z n'est pas réalisable car C a trois colonnes alors que Z a deux lignes.

Exercice 3.
Pour les matrices et matrices colonnes données ci-dessous, déterminer tous les produits matrice-colonnes possibles et les calculer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4i \\ 5 & 6i & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 1+i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3 \\ 4 & 5 & 6i \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4 Produit de matrices

Le produit matrice-colonne vu précédemment se généralise comme produit entre deux matrices plus générales.

Définition – *Produit de matrices*
Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On appelle **produit** de A par B la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont les coefficients, pour

tous $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;q]\!]$, sont donnés par

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

On note $C = AB$.

Attention

- Pour réaliser le produit AB, le nombre de *colonnes* de A **doit être égal** au nombre de *lignes* de B. On gardera en tête que l'on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

- Le produit AB peut exister sans pour autant que le produit BA existe.

Remarque

Il s'agit bien d'une généralisation du produit matrice-colonne.
En effet, soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Puisque B est une matrice colonne, ses coefficients s'écrivent

$$b_{j1} = b_j,$$

pour tout $j \in [\![1;p]\!]$. D'après la définition du produit de matrices, $C = AB \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et puisque C est une matrice colonne, ses coefficients s'écrivent c_i et sont donnés par

$$c_i = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{k1} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_k,$$

ce qui est bien la formule du produit matrice-colonne vu précédemment.

Méthode – *Calcul d'un produit de matrices*

On donne ci-dessous une illustration du produit de deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. On note $C = AB$:

- Calcul du coefficient c_{11}

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & \times \\ \times & \times \end{pmatrix}$$

- Calcul du coefficient c_{12}

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ \times & \times \end{pmatrix}$$

▷ Calcul du coefficient c_{21}

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & \times \end{pmatrix}$$

▷ Calcul du coefficient c_{22}

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Exemples – *Produit de matrices*

▷ Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. Alors, on a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 0 + 1\times(-3) & 1\times 1 + 1\times(-2) \\ 2\times 0 + 3\times(-3) & 2\times 1 + 3\times(-2) \\ 1\times 0 - 1\times(-3) & 1\times 1 - 1\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -9 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

▷ Soient $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, on a

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 15 & 19 \\ -6 & 3 & 42 & 55 \end{pmatrix}$$

Par contre le produit DC n'existe pas.

Exercice 4.

Pour chacune des matrices A et B ci-dessous calculer le produit AB lorsque cela est possible.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

Proposition

Soient $q, r \in \mathbb{N}^*$, $A, A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Le produit de matrices est *associatif* :

$$(AB)C = A(BC).$$

2. Le produit et l'addition de matrices sont *distributifs* :

$$(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B \qquad \text{et} \qquad A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2.$$

3. Le produit de matrices et la multiplication par un scalaire sont *distributifs* :

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

Attention

Le produit de matrices n'est *pas commutatif*. Autrement dit, en général, on a $AB \neq BA$.

Exemple – *Non commutativité*

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, donc $AB \neq BA$.

Remarque – *Distributivité*

Montrons la propriété de distributivité $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$. On note :

- ▷ a_{ij} (resp. α_{ij}) les coefficients de A_1 (resp. A_2),
- ▷ b_{ij} les coefficients de B,
- ▷ d_{ij} les coefficients de $(A_1 + A_2)B$.

Alors, la somme et le produit étant distributifs dans $\mathbb{K}$, on obtient

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ik} + \alpha_{ik})b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ik}b_{kj} = (A_1B_1)_{ij} + (A_2B_1)_{ij},$$

ce qui donne le résultat.

Exercice 5.

Montrer la propriété de distributivité $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.

Chapitre 8

Feuille d'exercices : Séquence 1

Exercice 1.

Soient A et B les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \times & 6 \\ \times & 2i & \times \\ 4+i & 3 & \times \\ 5 & 7+i & \times \end{pmatrix}.$$

1) Donner la taille de A et identifier les coefficients a_{23}, a_{32}, a_{14} et a_{24}.

2) Compléter l'écriture de $B \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C})$ avec $b_{33} = 2$, $b_{23} = 1+i$, $b_{12} = 0$, $b_{43} = 2+i$ et $b_{21} = 3$.

Exercice 2.

Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

1) Donner la taille de A.

2) Identifier les coefficients a_{23}, a_{32}, a_{14} et a_{24}.

Exercice 3.

Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \times & 6 \\ \times & 2i & \times \\ 4+i & 3 & \times \\ 5 & 7+i & \times \end{pmatrix}.$$

Compléter l'écriture de $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C})$ avec $a_{33} = 2$, $a_{23} = 1+i$, $a_{12} = 0$, $a_{43} = 2+i$ et $a_{21} = 3$.

Exercice 4.

1) Donner la matrice A de taille 3×3 dont les coefficients a_{ij} sont donnés, pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$, par

$$a_{ij} = 2i - j.$$

2) Donner la matrice B de taille 4×4 dont les coefficients a_{ij} sont donnés, pour tous $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, par

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}.$$

Exercice 5.

1) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A + B$ et $2A - 3B$.

2) Soient

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A + B$.

Exercice 6.

Soient $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$.

1) Trouver $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}$.

2) Trouver $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $2A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5+i \\ 4-2i & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2+i & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3-2i \\ 4 & 1+3i & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer tous les produits matriciels possibles pour les matrices ci-dessus, puis les calculer.

Exercice 8.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la **trace** de A, notée $\mathrm{tr}(A)$, comme étant la somme des éléments diagonaux de A.

1) Redonner la définition de la trace d'une matrice en utilisant le symbole $\sum$.

2) Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).$$

Autrement dit, l'application $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est linéaire (on dit alors que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Exercice 9.

1) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

2) Que peut-on en déduire sur le produit de matrices ?

Exercice 10.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer a, b, c et d tels que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que la matrice B obtenue vérifie $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11.

Soient $q, r \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer les propriétés suivantes :

1) $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$;

2) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$;

3) $(AB)C = A(BC)$.

Chapitre 8 - Séquence 2

Matrices particulières et inverse d'une matrice carrée

5 Matrices particulières

Définitions – *Matrices diagonales et matrices identités*

Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- ▷ Les **coefficients de la diagonale** de la matrice A sont les coefficients a_{ii}, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.
- ▷ La matrice A est dite **diagonale** si, pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tels que $i \neq j$, $a_{ij} = 0$.
  Autrement dit, une matrice carrée est diagonale si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls.
- ▷ On appelle **matrice identité** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n, la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'a que des 1 sur la diagonale.

Attention

Les notions de matrices diagonales et matrice identité n'ont de sens que dans le cadre des matrices carrées.

Exemples – *Matrices diagonales et matrices identités*

- ▷ Les matrices D_1 et D_2 ci-dessous sont des matrices diagonales :

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

- ▷ La matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

  est diagonale (une matrice diagonale peut aussi avoir des coefficients diagonaux nuls).
- ▷ La matrice identité est la même dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
  Voici par exemple les matrices identités de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarques

Pour deux entiers i et j, on définit le **symbole de Kronecker** par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,

- ▷ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a pour coefficients δ_{ij} : $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.
- ▷ si $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale alors ses coefficients vérifient

$$d_{ij} = d_i \, \delta_{ij},$$

  où $d_i \in \mathbb{K}$, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, est le $i$ème terme de la diagonale de D.

Proposition

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $AI_p = A$ et $I_n A = A$.
2. Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$, alors $B = I_n$.

Remarque

La proposition précédente signifie que la matrice I_n est l'unique élément neutre pour la multiplication de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition — *Puissance d'une matrice*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la **puissance** d'une matrice par

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad A^p = AA^{p-1}, \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}^*.$$

Autrement dit, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = \underbrace{AA \ldots A}_{p \text{ fois}}$.

Exemples

- ▷ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(I_n)^p = I_n$.
- ▷ Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour $k = 2, 3, 4$.

Définitions — *Matrice transposée et matrice adjointe*

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. On appelle **matrice transposée** de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée A^t, telle que pour

tous $i \in [\![1;p]\!]$ et $j \in [\![1;n]\!]$,
$$(A^t)_{ij} = a_{ji}.$$

2. On appelle **matrice adjointe** de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée A^*, telle que pour tous $i \in [\![1;p]\!]$ et $j \in [\![1;n]\!]$,
$$(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}.$$

Remarque

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la matrice adjointe est simplement la matrice transposée.

Attention

Si la taille de A est $n \times p$, la taille de A^t et de A^* est $p \times n$.

Exemples

- ▷ Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, on a $A^t = A^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.
- ▷ Pour $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 3+i & 2 \\ 0 & i & 8 & 2+3i \end{pmatrix}$, on a
$$A^t = \begin{pmatrix} 1+2i & 6 & 0 \\ 3 & 4 & i \\ 5 & 3+i & 8 \\ 7 & 2 & 2+3i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1-2i & 6 & 0 \\ 3 & 4 & -i \\ 5 & 3-i & 8 \\ 7 & 2 & 2-3i \end{pmatrix}.$$
- ▷ Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i & i \\ 2-i & 3 & -2i \end{pmatrix}$, on a
$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 2+3i & 3 \\ -i & -2i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-3i & 3 \\ -i & 2i \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

1) Donner les transposées des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Déterminer la matrice adjointe pour chacune des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} i & \sqrt{3}i & 1 \\ 0 & 0 & 1-\frac{2}{3}i \\ 8-6i & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & -2 & 4-\sqrt{7}i \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 1 \\ 0 & i^3 \\ 4 & 0 \\ i^2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarques

- ▷ Une matrice est diagonale si et seulement si elle est égale à sa transposée.
- ▷ Une matrice est diagonale à coefficients réels si et seulement si elle est égale à son adjointe.

Proposition

Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors,

- ▷ $(A^*)^* = A$,
- ▷ $(A^t)^t = A$,
- ▷ $(AB)^* = B^* A^*$,
- ▷ $(AB)^t = B^t A^t$.

Exercice 3.

Montrer la proposition précédente.

6 Inverse d'une matrice carrée

Pour tout $a \in \mathbb{K}^*$, il existe un inverse $\dfrac{1}{a}$, noté aussi a^{-1}, qui vérifie

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

L'équivalent du nombre 1 de $\mathbb{K}$ (l'élément neutre pour la multiplication) pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice identité I_n.
L'équivalent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la notion d'inverse dans $\mathbb{K}$ est donné par la définition ci-dessous.

Définitions – *Matrice inversible et matrice inverse*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Si B existe, elle est unique, on l'appelle l'**inverse** de A, et on la note A^{-1}.
L'ensemble des matrices inversibles est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et est appelé le **groupe linéaire** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Attention

- ▷ La notion de matrice inversible n'existe *que* pour des matrices *carrées*.
- ▷ Toutes les matrices carrées n'admettent pas forcément de matrice inverse.

Exemples – *Matrice inversible et matrice inverse*

- ▷ La matrice identité est inversible et son inverse est elle-même :

$$I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad I_n^{-1} = I_n.$$

- ▷ Soients $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. On a

$$AB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_n,$$

et

$$BA = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_n,$$

donc A est inversible et $B = A^{-1}$.

Exercice 4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A^2 - 2A + I_3 = 0$. En déduire que $-A^2 + 2A = I_3$.

2) Calculer $B = -A + 2I_3$.

3) En déduire que B est l'inverse de A.

Exemple

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque

Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Proposition

Si $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Autrement dit, le produit de matrices inversibles est inversible.

Remarques

Soient $A, B, C \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. D'après la proposition précédente et les propriétés du produit matriciel :

- ▷ $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est *stable* pour le produit matriciel : $AB \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$;
- ▷ le produit matriciel est *associatif* : $(AB)C = A(BC)$;
- ▷ le produit matriciel admet I_n comme *élément neutre* : $I_nA = AI_n = A$;
- ▷ tout élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ admet un *inverse* pour le produit matriciel :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Ces propriétés font de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ muni du produit matriciel, un **groupe** (d'où l'appellation de groupe linéaire).

Proposition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ *ou* $BA = I_n$ et, dans ce cas, $B = A^{-1}$.

Remarque

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$ on dit que A est l'inverse à *gauche* de B et que B est l'inverse à *droite* de A.
La proposition précédente signifie que pour montrer que A est inversible, il suffit de montrer qu'elle admet un inverse à gauche B *ou bien* un inverse à droite B. De plus, dans ce cas, $B = A^{-1}$.

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Donc B est l'inverse à droite de A, d'où A est inversible et $B = A^{-1}$.

Exercice 5.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$.

2) En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

Remarque — *Système linéaire et matrice*

On a vu dans la séquence précédente qu'un système linéaire peut s'écrire sous la forme

$$AX = B,$$

où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Dans le cas où $n = p$, si A est inversible, on obtient

$$X = I_n X = A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Ainsi, si l'on connaît A^{-1}, on obtient la solution X en calculant $A^{-1}B$.

Exemple

Le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & = & 2 \end{array} \right.$$

s'écrit $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ donc

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d'où $x_1 = 5$ et $x_2 = 3$.

Exercice 6.

On rappelle que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vue précédemment a pour inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En déduire les solutions du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \end{array} \right.$$

Chapitre 8

Feuille d'exercices : Séquence 2

Exercice 1.

Pour chacune des matrices A_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, ci-dessous, calculer

1) la transposée A_i^t,

2) l'adjointe A_i^*.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3i \\ i+4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} i & 5 & 2+3i & 1/5 \\ \sqrt{3} & 0 & 8i+2/3 & \pi i \\ 2 & -i & 2 & i-6\sqrt{3} \\ 0 & 3 & 8i & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

1) Trouver une matrice dont la transposée soit son opposée.

2) Donner la matrice A (resp. B) de taille 2×3 dont les coefficients a_{ij} (resp. b_{ij}) sont donnés, pour tous $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, 2, 3\}$, par

$$a_{ij} = i + j + \delta_{ij} \quad \text{et} \quad b_{ij} = i + j - \delta_{ij}.$$

Exercice 3.

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $(A + B)^* = A^* + B^*$.

2) Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que $(AB)^* = B^*A^*$.

Exercice 4.

1) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Que peut-on en déduire ?

2) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ (on dit alors que A et B commutent). Montrer que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 5.

Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 6.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$.

2) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 7.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB = I_n + A + A^2.$$

1) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2) Montrer que A et B commutent.

Exercice 8.
Soit $\theta \in \,]-\pi;\pi]$. On appelle **matrice de rotation d'angle** θ, la matrice $R_\theta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

1) Donner les matrices de rotation d'angle 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$.

2) Vérifier que $R_\theta^t = R_{-\theta}$.

3) Soit $\theta' \in \,]-\pi;\pi]$. Calculer $R_\theta R_{\theta'}$.

4) En déduire que R_θ est inversible et donner R_θ^{-1}.

Exercice 9.
Soient $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $AB \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exercice 10.
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $P^3 - P^2 + P$.

2) En déduire P^{-1}.

3) Calculer $D = P^{-1}AP$.

Exercice 11.
Déterminer à quelle condition une matrice diagonale est inversible et, dans ce cas, déterminer son inverse.

Exercice 12.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2, A^3 et A^4.

2) En déduire A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 13.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Montrer que A^* est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Exercice 14.

Soient $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

1) Déterminer D^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) Soient $A = PDP^{-1}$ et $k \in \mathbb{N}$. Donner A^k en fonction de D et P.

Déterminant d'une matrice carrée

7 Déterminants

Définition — *Déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.*

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on appelle **déterminant** de A, l'élément de $\mathbb{K}$, noté $\det(A)$ défini par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Exemple

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, on a $\det(A) = 1 \times 3 - 2 \times 5 = -7$.

Exercice 1.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(A) = \det(A^t)$.

Définition — *Déterminant d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 3$. On appelle **déterminant** de A, noté $\det(A)$ ou

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

l'élément de $\mathbb{K}$ défini par

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

où $A_{1j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice carrée déduite de A en supprimant la première ligne et la j-ième colonne.

Exemples

▷ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix}$. On a

$$\det(A) = (-1)^{1+1}(1)\det(A_{11}) + (-1)^{1+2}(0)\det(A_{12}) + (-1)^{1+3}(6)\det(A_{13}),$$

et

$$\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 4 & 15 \\ 6 & 21 \end{vmatrix} = 84 - 90 = -6, \quad \det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2,$$

d'où
$$\det(A) = -6 + 6(-2) = -18.$$

▷ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a

$$\det(A) = (-1)^{1+1}(0)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}(3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

or (à faire en exercice)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -28,$$

donc $\det(A) = 4 + 8 + 84 = 96$.

Exercice 2.

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Propriétés

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

▷ $\det(A^t) = \det(A)$.

▷ Si une ligne (resp. une colonne) de A n'est constituée que de zéros, $\det(A) = 0$.

▷ Si deux lignes (resp. deux colonnes) de A sont égales, $\det(A) = 0$.

▷ Si dans A, on échange deux lignes (resp. deux colonnes), le déterminant de la matrice obtenue est égal à $-\det(A)$.

▷ Si on multiplie tous les coefficients d'une ligne (resp. d'une colonne) de A par $\lambda \in \mathbb{K}$, le déterminant de la matrice obtenue est égal à $\lambda \det(A)$.

Exemples — *Calcul de déterminants*

▷ Soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
En échangeant les lignes et en appliquant la propriété 4, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

▷ Soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La seconde ligne pouvant être factorisée par 2, la propriété 5 assure que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant ainsi obtenu est celui d'une matrice ayant deux lignes égales. La propriété 3 assure donc :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple – *Calcul de déterminants suivant différentes lignes*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. D'une part, par définition, on a

$$\det(A) = \boxed{1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \boxed{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \boxed{3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

   Les nombres entourés sont les coefficients de la première ligne de A, c'est le

   développement de $\det(A)$ *suivant la première ligne.*

2. D'autre part, d'après la proposition précédente, en permutant les deux premières lignes, on obtient

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \left(0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= -\boxed{0} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \boxed{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \boxed{1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

   Les nombres entourés sont les coefficients de la deuxième ligne de A, c'est le

   développement de $\det(A)$ *suivant la deuxième ligne.*

Remarque

L'exemple précédent montre qu'il est possible de développer un déterminant suivant une ligne quelconque de la matrice mais en faisant attention aux signes. Il en est de même avec les colonnes.

Plus précisément, on a le résultat ci-dessous.

Proposition – *Développement selon une ligne ou une colonne*

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tous $i, j \in [\![1;n]\!]$, on note $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice carrée déduite de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. Alors,

- le développement de $\det(A)$ suivant la ligne $i \in [\![1;n]\!]$ est

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

- le développement de $\det(A)$ suivant la colonne $j \in [\![1;n]\!]$ est

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

Attention

La différence entre le développement suivant une ligne ou colonne dans les formules précédentes vient de la sommation faite sur i ou sur j.

Exemples

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- Le développement suivant *la troisième ligne* donne

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{3+1}(-1)\det(A_{13}) + (-1)^{3+2}(0)\det(A_{23}) + (-1)^{3+3}(4)\det(A_{33}) \\ &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 4 = 19. \end{aligned}$$

- Le développement suivant *la deuxième colonne* donne

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{2+1}(2)\det(A_{12}) + (-1)^{2+2}(5)\det(A_{22}) + (-1)^{2+3}(0)\det(A_{33}) \\ &= -2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 35 = 19. \end{aligned}$$

Dans certains cas, il est possible de faciliter le calcul du déterminant en appliquant la propriété qui suit.

Proposition – *Déterminant et combinaisons linéaires*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si à une ligne (resp. une colonne) de A, on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes (resp. des autres colonnes), alors on ne change pas la valeur du déterminant de A.

Autrement dit, en notant $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de A et $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A, les transformations suivantes ne changent pas la valeur du déterminant :

$$L_i \longleftarrow L_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \lambda_k L_k \qquad \text{ou} \qquad C_i \longleftarrow C_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \lambda_k C_k,$$

où $\lambda_k \in \mathbb{K}$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $k \neq i$.

Exemples — *Déterminant et combinaisons linéaires*

▷ Considérons de nouveau la matrice suivante, dont le déterminant a été calculé dans l'exemple précédent.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Des combinaisons linéaires permettent d'introduire des zéros pour obtenir une ligne ou une colonne ayant un unique coefficient non nul.
La propriété précédente assure que le déterminant de A est le même que celui de la matrice obtenue en effectuant la combinaison linéaire $C_3 \longleftarrow C_3 + 4C_1$, On a donc :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Le calcul du déterminant peut s'effectuer suivant la dernière ligne :

$$\det(A) = (-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -(16 - 35) = 19.$$

On remarque que la valeur du déterminant est bien celle obtenue dans l'exemple précédent, mais ce résultat a été obtenu avec moins de calculs.

▷ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

En effectuant les opérations

$$\begin{array}{lcl} L_2 & \longleftarrow & L_2 - L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 2L_1 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 - 3L_1, \end{array}$$

puis en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & -10 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -3 \\ 0 & -8 & -10 \end{vmatrix}.$$

Il ne reste donc plus qu'un déterminant 3×3 à calculer.
De la même façon, on peut simplifier le calcul en faisant apparaître des zéros.
Pour cela on effectue l'opération $L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1$, ce qui donne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -3 \\ 0 & -8 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & -8 & -10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -8 & -10 \end{vmatrix} = -(-50 + 72) = -22.$$

Finalement, le calcul du déterminant de la matrice 4×4 s'est ramené à celui d'une matrice 2×2.

On pourra écrire le calcul de manière abrégée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} && \begin{array}{lcl} L_2 & \longleftarrow & L_2 - L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 2L_1 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 - 3L_1 \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -3 \\ 0 & -8 & -10 \end{vmatrix} && L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1 \\
&= \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & -8 & -10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -8 & -10 \end{vmatrix} = -22
\end{aligned}$$

Proposition – *Propriétés du déterminant*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

- ▷ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
- ▷ $\det(I_n) = 1$,
- ▷ A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. De plus, si A est inversible, alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Exercice 3.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & i & 3 & 6 \\ 3 & 1-i & 6i & 8 \\ 2i & -1 & 3i & 6i \end{pmatrix}.$$

Indication : calculer les déterminants et conclure en utilisant la proposition 3 précédente.

8 Calcul de l'inverse d'une matrice

Définition – *Comatrice - Matrice de cofacteurs*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. On appelle **comatrice** de A, ou **matrice des cofacteurs** de A, l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\mathrm{com}(A)$ de coefficients

$$\big(\mathrm{com}(A)\big)_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij}),$$

où, pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$, $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice carrée déduite de A en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne.

Exemples

▷ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors,

$$A_{11} = 4, \quad A_{12} = 3, \quad A_{21} = 2, \quad \text{et} \quad A_{22} = 1.$$

On en déduit $\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

▷ Plus généralement, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

▷ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. On a

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{12}) & \det(A_{13}) \\ -\det(A_{21}) & \det(A_{22}) & -\det(A_{23}) \\ \det(A_{31}) & -\det(A_{32}) & \det(A_{33}) \end{pmatrix}.$$

Or (à vérifier en exercice)

$$\begin{array}{lll} \det(A_{11}) = -3 + 2i, & \det(A_{12}) = -3, & \det(A_{13}) = 3 + i, \\ \det(A_{21}) = -3, & \det(A_{22}) = -3, & \det(A_{23}) = 3, \\ \det(A_{31}) = i, & \det(A_{32}) = 0, & \det(A_{33}) = -i \end{array},$$

d'où

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 + 2i & 3 & 3 + i \\ 3 & -3 & 3 \\ i & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\det(A) \neq 0$. Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\mathrm{com}(A)\right)^t.$$

Exemples

▷ Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, telle que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant $\det(A) \neq 0$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

▷ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, telle que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

On a (à vérifier en exercice) $\det(A) = 3i \neq 0$, donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\operatorname{com}(A)\right)^t = \frac{1}{3i} \begin{pmatrix} -3+2i & 3 & i \\ 3 & -3 & 0 \\ 3+i & 3 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+3i & -3i & 1 \\ -3i & 3i & 0 \\ 1-3i & -3i & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 8

Feuille d'exercices : Séquence 3

Exercice 1.

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 2.

1) Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

2) Calculer $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Exercice 3.

1) Que vaut le déterminant d'une matrice diagonale ?

2) On dit qu'une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire supérieure** si ses coefficients vérifient $t_{ij} = 0$ si $i > j$. Que vaut le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ?

3) On dit qu'une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire inférieure** si ses coefficients vérifient $t_{ij} = 0$ si $i < j$. Que vaut le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure ?

4) En déduire les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ i & 6 & 3-i & 0 \\ 4 & 5 & 7 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A+B)$ et $\det(A) + \det(B)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.

On dit qu'une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **unitaire** (ou **orthogonale** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) si U est inversible et $U^{-1} = U^*$. Montrer que toute matrice unitaire U vérifie $|\det(U)| = 1$.

Exercice 7.

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelles valeurs de m les matrices ci-dessous est inversibles :

$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(m) = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 3 \\ 0 & 1-i & 4 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

1) Donner $\det(A)$ et $\det(P)$, puis justifier que P est inversible.

2) Calculer P^{-1}, puis $P^{-1}AP$.

3) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.

On considère le système

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

1) Écrire le système (S) sous forme matricielles $AX = b$.

2) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

3) En déduire les solutions de (S).

Exercice 10.

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 6y & - & 3z & = & -6 \\ x & - & y & + & 2z & = & 5. \end{array} \right.$$