discriminant ?

4) En déduire que l'on a
$$x \cdot y \leq \|x\| \, \|y\|.$$
Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**.

5) À partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exercice 15.

Soient x, y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur
$$\mathrm{proj}_y x = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y$$
est dit la **projection orthogonale** de x sur y.

1) Montrer que les vecteurs $x - \mathrm{proj}_y x$ et y sont orthogonaux.

2) Soit α l'angle formé par les vecteurs x et y. Montrer que $\|\mathrm{proj}_y x\| = \|x\| \, |\cos\alpha|$.

3) Soient $x = (1, 2, 3)$ et $y = (0, 0, 1)$. Calculer $\mathrm{proj}_y x$.

4) Soient $x = (1, 2, 3)$ et $y = (1, 1, 0)$. Calculer $\mathrm{proj}_y x$.

Exercice 16.

Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.

1) Déterminer tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ orthogonaux à x et de même norme.

2) En déduire tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ orthogonaux à x.