Chapitre 1

Feuille d'Exercices : Séquence 4

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-6x+1}{x^2-x-6}\,dx$,

2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x-8}{(x-5)^2}\,dx$,

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$,

4) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$.

Solution :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-6x+1}{x^2-x-6}\,dx = \frac{3}{2}+3\ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x-8}{(x-5)^2}\,dx = 2\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}$.

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

4) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = -2\pi$.

Exercice 2.

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$$I_n(x)=\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt.$$

1) Soit $n\in\mathbb{N}$. Donner une primitive de $t\mapsto \dfrac{t}{(t^2+1)^n}$.

2) Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$.

3) Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$I_n(x)=I_{n-1}(x)-\int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^n}\,dt.$$

En déduire, en faisant une intégration par parties, que pour $n\geq 2$:

$$I_n(x)=\frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}(x)+\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

4) Calculer, pour $x\in\mathbb{R}$, $I_2(x)$, puis $I_3(x)$.

Exercice 3.

On rappelle que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\,x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Calculer les intégrales suivantes en effectuant un changement de variable approprié.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\operatorname{ch} t}\,dt$, **2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\operatorname{sh} t}{1+\operatorname{ch} t}\,dt$.

Solution :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\operatorname{ch} t}\,dt = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}$.

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\operatorname{sh} t}{1+\operatorname{ch} t}\,dt = 2\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right) - \frac{2}{\mathrm{e}+1}$.

Exercice 4.

La *règle de Bioche* est une règle pour effectuer des changements de variable dans le cas des fonctions rationnelles trigonométriques. Considérons une fonction f définie par

$$f(x) = F(\sin x, \cos x),$$

où $F(\sin x, \cos x)$ est une expression rationnelle ne dépendant que de $\sin x$ et $\cos x$. Il est possible de poser les changements de variable suivants :

- ▷ si $f(-x) = -f(x)$, poser $u(x) = \cos x$ et utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- ▷ si $f(\pi - x) = -f(x)$, poser $u(x) = \sin x$ et utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- ▷ si $f(\pi + x) = f(x)$, poser $u(x) = \tan x$ et utiliser les relations

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}.$$

- ▷ sinon, poser $u(x) = \tan(\frac{x}{2})$ et utiliser les relations

$$\cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}.$$

Appliquer la régle de Bioche pour calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t) - 5\sin(t) + 6}\,dt$, **3)** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)-2}{\sin(t)}\,dt$,

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(t)}{1+\cos(t)}\,dt$, **4)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{1+\tan(t)}\,dt$,

Solution :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t) - 5\sin(t) + 6}\,dt = \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 = 2\ln 2 - \ln 3$.

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(t)}{1+\cos(t)}\,dt = -\ln 2 - \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2$.

3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)-2}{\sin(t)}\,dt = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} = \frac{3}{2}\ln 3 - \ln 2$.

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{1+\tan(t)}\,dt = \ln\left(\sqrt{3}+1\right) - \ln 2 + \frac{\pi}{3}$.