

Chapitre 1

Trigonométrie



Pré-requis

- ☐ Notion d'angles
- ☐ Notion de repère orthonormé du plan, axe des abscisses, axe des ordonnées, coordonnées d'un point du plan
- ☐ Bissectrice, théorème de la bissectrice
- ☐ Propriétés des triangles isocèles, propriétés des triangles équilatéraux
- ☐ Propriétés des triangles rectangles, théorème de Pythagore



Objectifs

- ☐ Mesures d'un angle, mesure principale, radian, angles remarquables
- ☐ Cosinus, sinus, tangente, valeurs remarquables et leurs propriétés
- ☐ Formules et équations trigonométriques

Sommaire

Séquence 1 :	3
<i>Cercle trigonométrique et angles remarquables - Cosinus, sinus et tangente.</i>	
Séquence 2 :	11
<i>Propriétés - Formules élémentaires - Équations trigonométriques élémentaires - Formules d'addition .</i>	

1 Cercle trigonométrique et angles remarquables

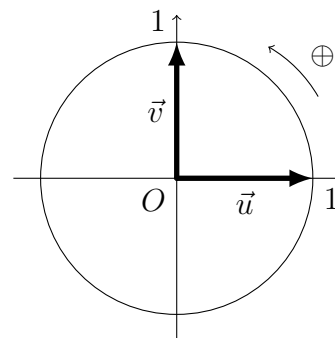
Le cercle trigonométrique est un moyen de visualiser et de mémoriser facilement des notions de trigonométrie telles que le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle ainsi que quelques unes de leurs propriétés.



Définition

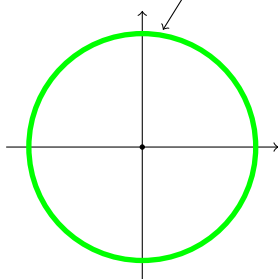
Considérons le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On appelle **cercle trigonométrique**, le cercle de centre O et de rayon 1.

Il est **orienté positivement**, *i.e.* les angles positifs sont lus dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

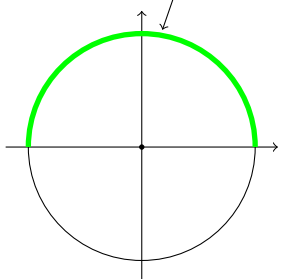


Rappel

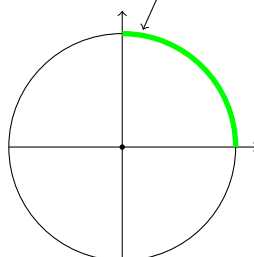
La longueur de cet arc (le cercle en entier) est le périmètre d'un cercle de rayon 1, c'est-à-dire 2π .



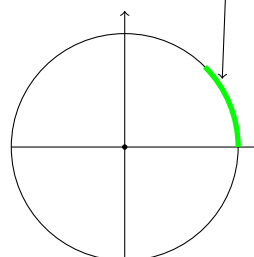
La longueur de cet arc est π : c'est la moitié du périmètre du cercle trigonométrique.



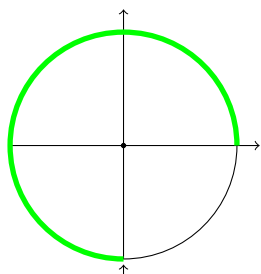
La longueur de cet arc est $\frac{\pi}{2}$.



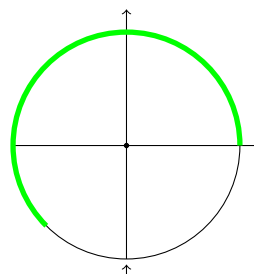
La longueur de cet arc est $\frac{\pi}{4}$.



Cet arc est constitué de 3 arcs de longueur $\frac{\pi}{2}$. La longueur de cet arc est donc $\frac{3\pi}{2}$.



Cet arc est constitué d'un arc de longueur π et d'un arc de longueur $\frac{\pi}{4}$. La longueur de cet arc est donc $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

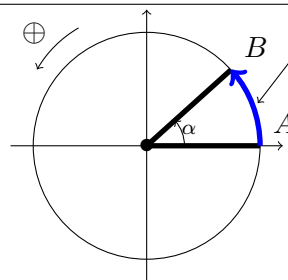




Définition

Une mesure en **radians** d'un angle est la longueur orientée d'un parcours sur le cercle trigonométrique partant de A et arrivant à B .

Une mesure en radians de l'angle α est la longueur de ce parcours bleu.



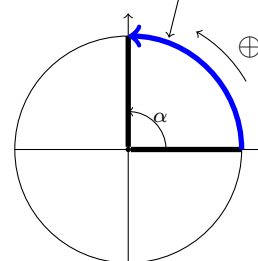
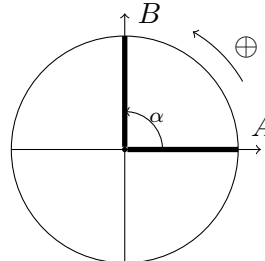
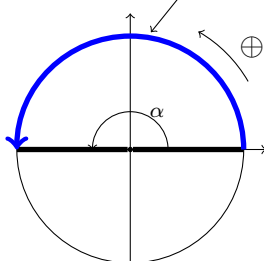
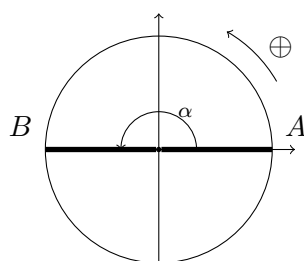
Exemple

L'angle plat.

Une mesure de l'angle plat est la longueur de ce parcours bleu, c'est-à-dire π .

L'angle droit.

Une mesure de l'angle droit est la longueur de ce parcours bleu, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$.

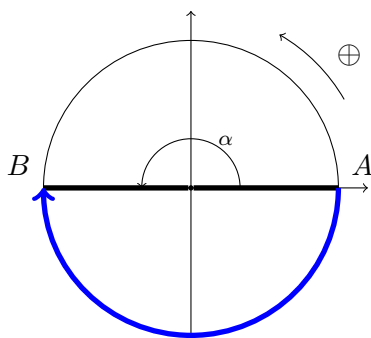


Remarque

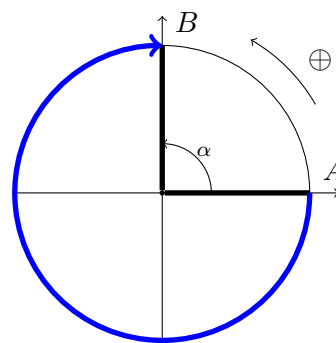
On peut parcourir le cercle trigonométrique dans le sens inverse du sens trigonométrique. La longueur d'un parcours est alors négative.



Exemple



Un autre parcours sur le cercle trigonométrique partant de A arrivant à B . Une autre mesure de l'angle plat est donc la longueur (orientée) de ce parcours bleu, c'est-à-dire $-\pi$.

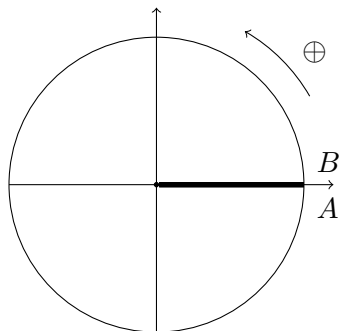


Un autre parcours sur le cercle trigonométrique partant de A arrivant à B . Une autre mesure de l'angle droit est donc la longueur (orientée) de ce parcours bleu, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2}$.

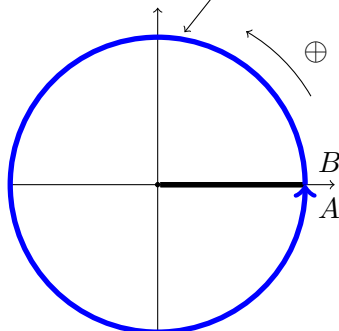
Exemple

L'angle nul.

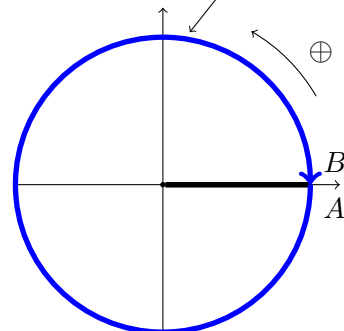
Le parcours partant de A et de longueur 0 arrive bien en B puisque les points A et B sont confondus. Une mesure en radian de cet angle est donc 0.



Une mesure de l'angle nul est aussi la longueur de ce parcours bleu, c'est-à-dire 2π .



Une autre mesure de l'angle nul est la longueur orientée de ce parcours bleu, c'est-à-dire -2π .

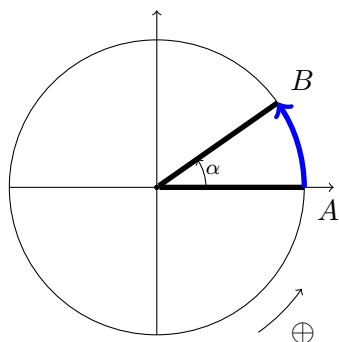


Remarque

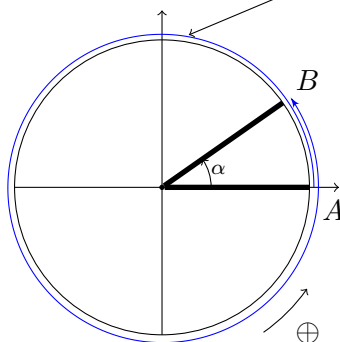
Au lieu de considérer un parcours qui s'arrête immédiatement en B , on peut aussi faire un certain nombre de tours complets supplémentaires (dans le sens trigonométrique ou non). Un tour complet étant de longueur 2π , il suffira alors d'ajouter $k \times 2\pi$ à la longueur jusqu'ici parcourue, où k est le nombre de tours supplémentaires. L'entier k est positif si on parcourt les tours supplémentaires dans le sens trigonométrique et négatif sinon.

Exemple

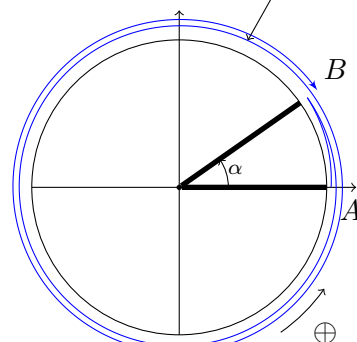
L'angle α .



Une autre mesure de l'angle α est la longueur de ce parcours bleu sur le cercle trigonométrique partant de A et arrivant en B , c'est-à-dire $\alpha + 2\pi$.



Un autre parcours possible est partir de A , aller à B dans le sens positif, puis faire deux tours complets dans le sens inverse. La longueur de ce parcours bleu est $\alpha - 2 \times 2\pi$.



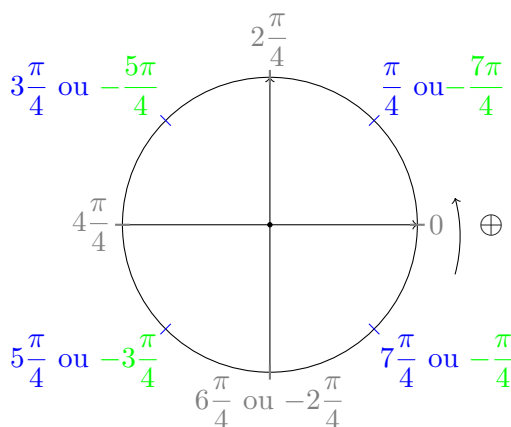
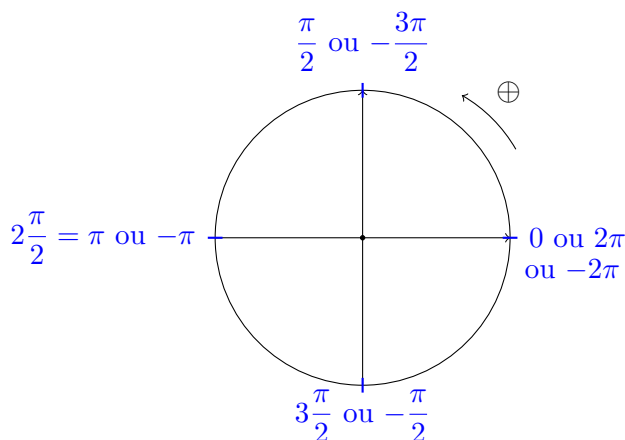
Méthode

Soit un angle de mesure α . Toutes les mesures de cet angle sont $\alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
Donc lorsqu'on a une mesure d'un angle, on obtient toutes les mesures de cet angle en ajoutant $2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

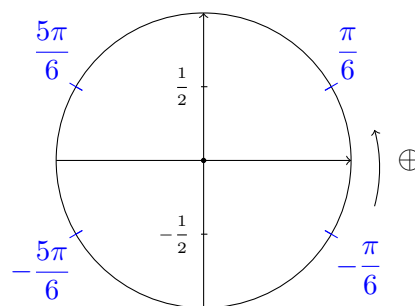
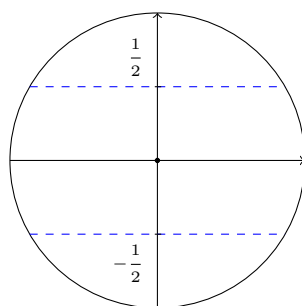
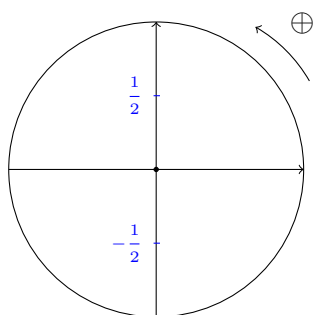


Méthode — Les angles remarquables

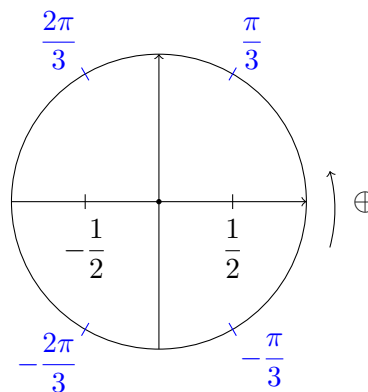
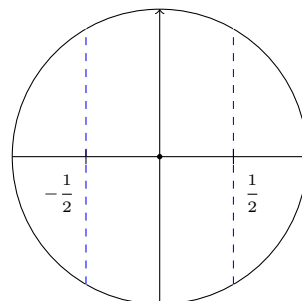
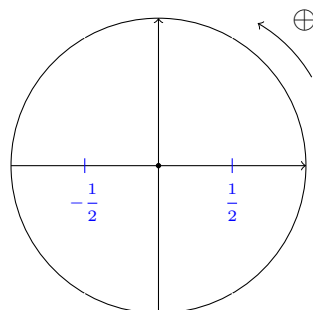
1. Les angles $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ et 2π sont faciles à placer.
2. On en déduit les angles $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$ (bissectrices).



3. Les angles $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ sont obtenus en traçant les droites parallèles à l'axe des abscisses, d'ordonnées $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$:



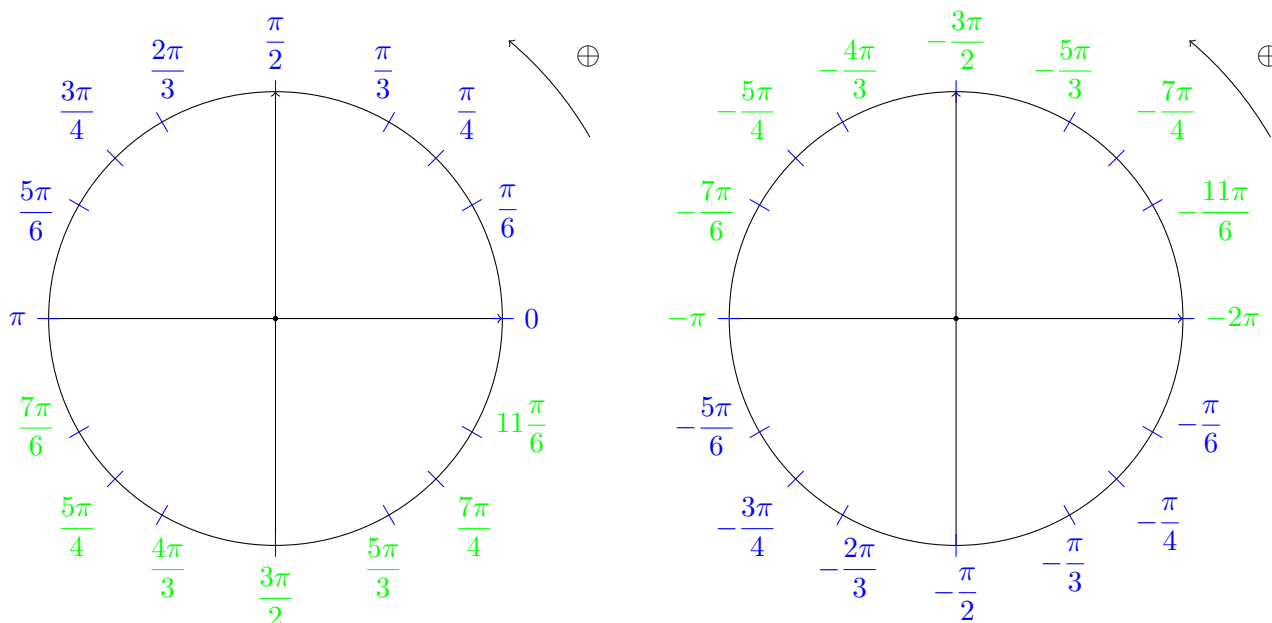
4. Les angles $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$ sont obtenus en traçant les droites parallèles à l'axe des ordonnées, d'abscisses $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$:



Définition

On appelle **mesure principale** d'un angle sa mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

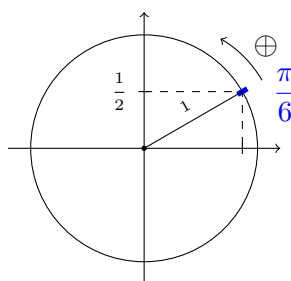
Les angles remarquables et quelques unes de leurs mesures.



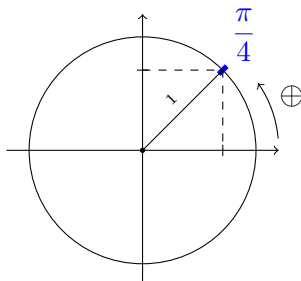
Exercice 1.

Calculer les coordonnées (abscisses et ordonnées) de tous les points signalés sur les cercles trigonométriques ci-dessous.

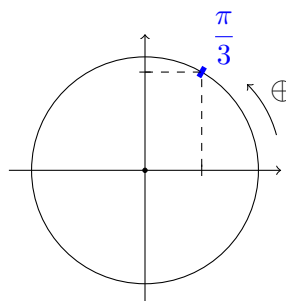
1)



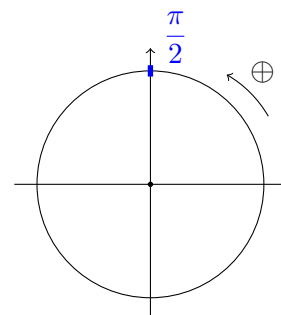
2)



3)



4)



2 Cosinus, sinus et tangente

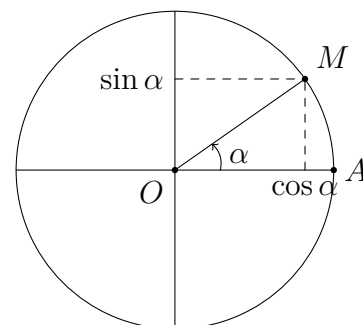
Soient A le point de coordonnées $(1, 0)$ dans le repère orthonormé et M un point du cercle trigonométrique. Notons α l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) : \alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.



Définition

On appelle respectivement **cosinus** et **sinus** de l'angle α , notés $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$, l'abscisse et l'ordonnée du point M :

$$\cos \alpha = \text{abscisse}(M) \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \text{ordonnée}(M).$$



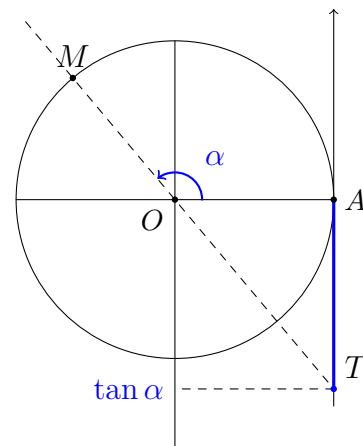


Définition

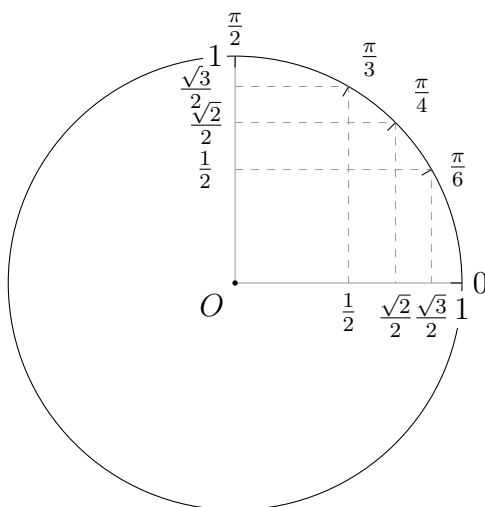
On appelle l'**axe des tangentes** la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A .

Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, la droite (OM) rencontre l'axe des tangentes en T : on appelle **tangente** de l'angle α , notée $\tan \alpha$, la longueur orientée \overline{AT} :

$$\tan \alpha = \text{ordonnée}(T) = \overline{AT} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$



Valeurs remarquables des cos, sin et tan à connaître



α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini



Exercice 2.

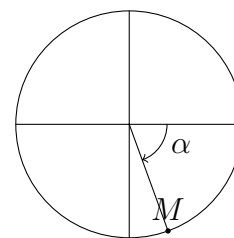
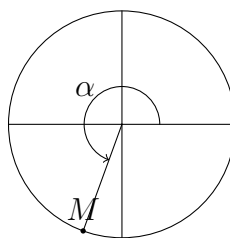
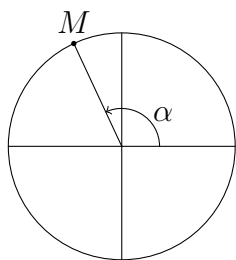
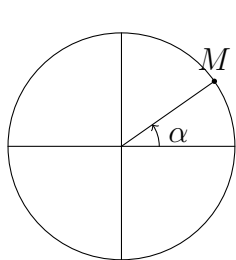
Pour chacune des quatre configurations ci-dessous, représenter sur le cercle trigonométrique le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle donné :

1) $0 < \alpha_1 < \pi/2$,

2) $\pi/2 < \alpha_2 < \pi$,

3) $\pi < \alpha_3 < 3\pi/2$,

4) $-\pi/2 < \alpha_4 < 0$.



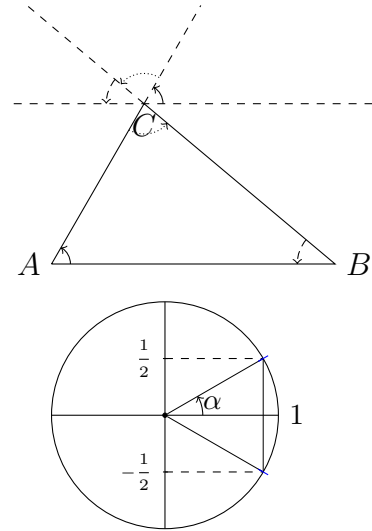
Exercice 3. — À savoir faire absolument

- 1) Représenter un cercle trigonométrique (ne pas oublier l'orientation).
- 2) Représenter (rigoureusement) sur ce cercle, tous les angles remarquables.
- 3) Faire apparaître sur ce cercle, toutes les valeurs remarquables (le cosinus et le sinus de ces angles).

Feuille d'exercices : Séquence 1

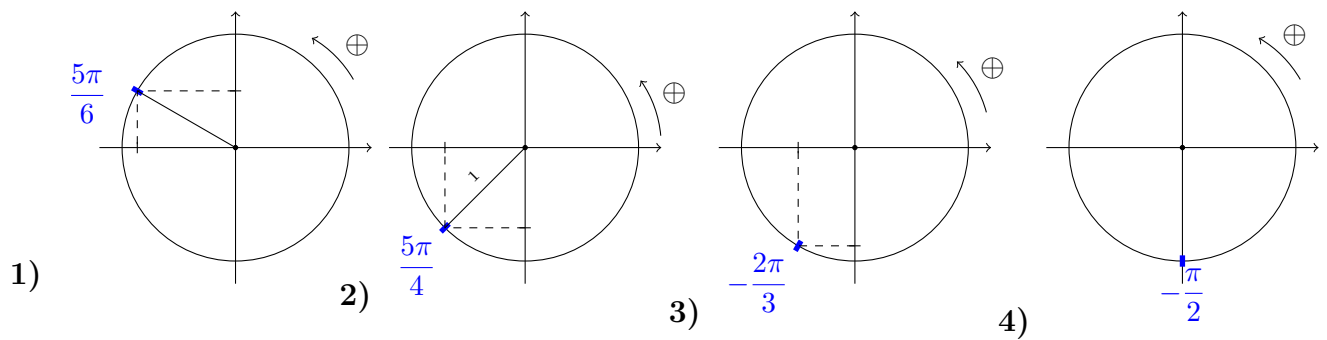
Exercice 9.

- 1) Que vaut, en radian, la somme des mesures des angles d'un triangle ABC ?
- 2) En déduire la mesure, en radian, d'un angle d'un triangle équilatéral.
- 3) En déduire la valeur de l'angle α sur la figure ci-contre.



Exercice 10.

Calculer les coordonnées (abscisses et ordonnées) de tous les points signalés sur les cercles trigonométriques ci-dessous.



Exercice 11.

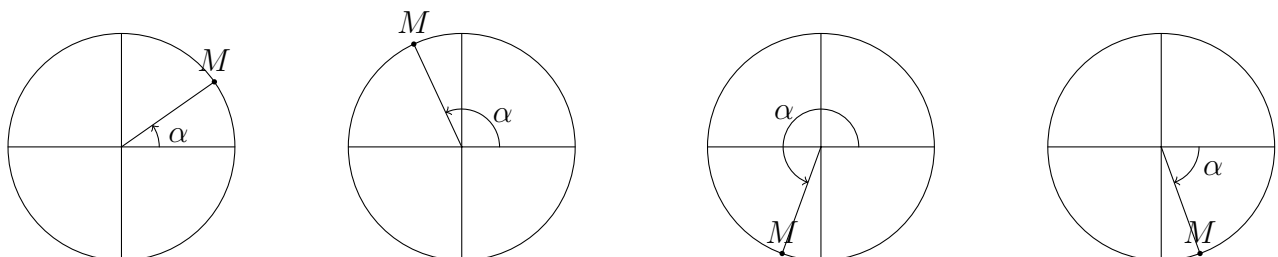
Pour chacune des quatre configurations ci-dessous, représenter sur le cercle trigonométrique le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle donné :

- 1) $0 < \alpha < \pi/2$,

2) $\pi/2 < \alpha < \pi$,

3) $\pi < \alpha < 3\pi/2$,

4) $-\pi/2 < \alpha < 0$.



Exercice 12. — À savoir faire absolument

- 1) Représenter un cercle trigonométrique (ne pas oublier l'orientation).
- 2) Représenter (rigoureusement) sur ce cercle, tous les angles remarquables.
- 3) Faire apparaître sur ce cercle, toutes les valeurs remarquables (le cosinus et le sinus de ces angles).

Exercice 13.

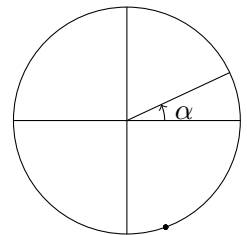
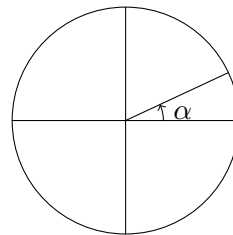
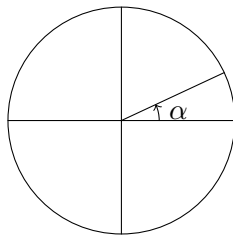
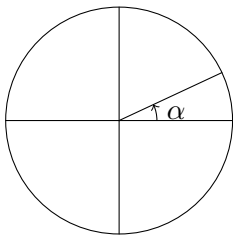
Soit α un angle. Pour chacune des quatre configurations ci-dessous, représenter sur le cercle trigonométrique l'angle demandé.

1) $-\alpha$?

2) $\frac{\pi}{2} - \alpha$?

3) $\pi + \alpha$?

4) $-\frac{\pi}{2} - \alpha$?



Exercice 14.

Donner le cosinus, le sinus et la tangente des angles suivants :

1) $\frac{7\pi}{6}$,

2) $\frac{5\pi}{3}$,

3) $-\frac{11\pi}{6}$,

4) $-\frac{5\pi}{4}$,

5) $\frac{5\pi}{2}$,

6) $\frac{10\pi}{3}$,

7) $-\frac{15\pi}{6}$,

8) $-\frac{9\pi}{2}$,

9) -55π ,

10) $\frac{22\pi}{4}$.

Exercice 15.

- 1) Sur le cercle trigonométrique, représenter un angle α , son cosinus et son sinus.
- 2) Représenter ensuite l'angle $\pi + \alpha$.
- 3) En déduire son cosinus et son sinus en fonction de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

Exercice 16.

- 1) Représenter dans un repère orthonormé un cercle trigonométrique et le point de coordonnées $(0, -\frac{1}{2})$.
- 2) Représenter sur le cercle trigonométrique tous les angles dont le sinus vaut $-\frac{1}{2}$.
- 3) Donner une mesure de ces angles. En déduire toutes les mesures de ces angles.
- 4) En déduire les solutions de l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$.

3 Propriétés



Propriétés

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

et

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{et} \quad -\infty < \tan \alpha < +\infty.$$

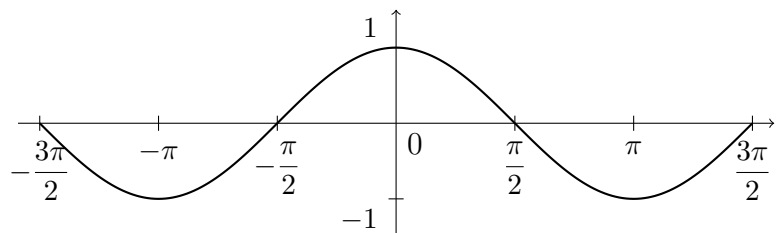


Propriétés – Périodicité

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

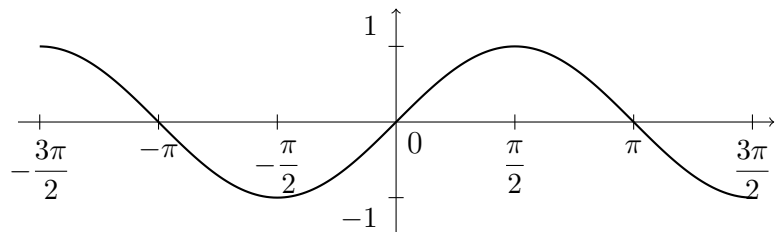
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha.$$



Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

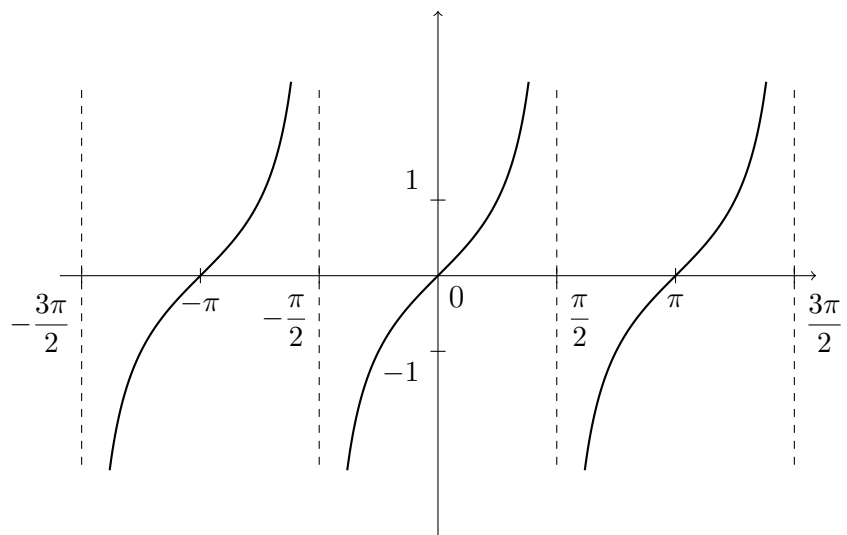
$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha.$$



Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \tilde{k}\pi$, où $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$,

alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$$



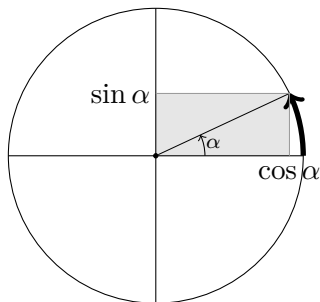
Exercice 4.

Compléter le tableau suivant :

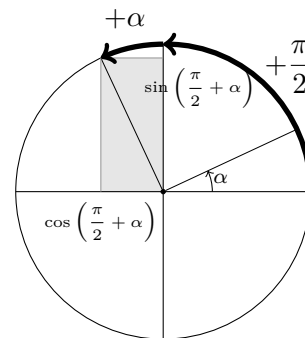
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$						
Mesure principale										
$\cos(x)$					$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$		-1
$\sin(x)$					$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\tan(x)$									$-\sqrt{3}$	0

4 Formules élémentaires

Nous représentons sur la figure ci-dessous un angle α , son cosinus et son sinus.



Nous représentons maintenant l'angle $\frac{\pi}{2} + \alpha$ ainsi que son cosinus et son sinus.



En comparant les deux rectangles sur les deux cercles trigonométriques, on en déduit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha.$$

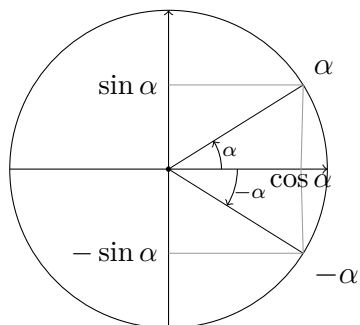
Exercice 5.

- 1) Sur le cercle trigonométrique, représenter un angle α , son cosinus et son sinus.
- 2) Représenter ensuite l'angle $\pi - \alpha$.
- 3) En déduire son cosinus et son sinus en fonction de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

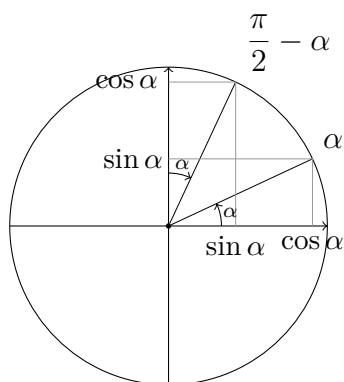


Propriétés

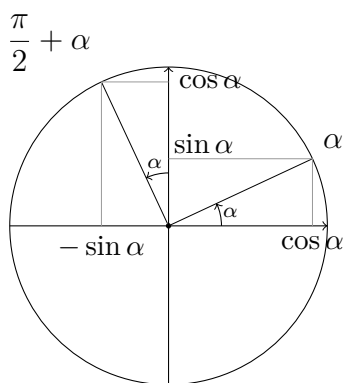
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \end{aligned}$$



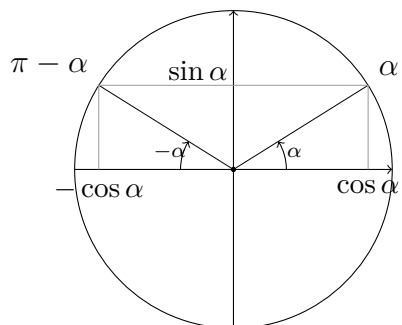
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \end{aligned}$$



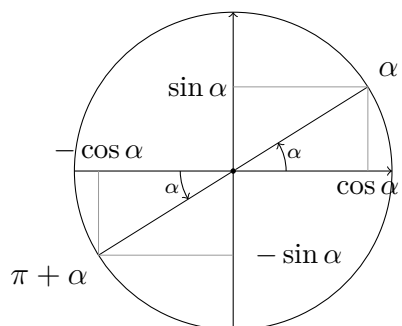
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha \end{aligned}$$



$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \end{aligned}$$



$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha \end{aligned}$$



5 Équations trigonométriques élémentaires



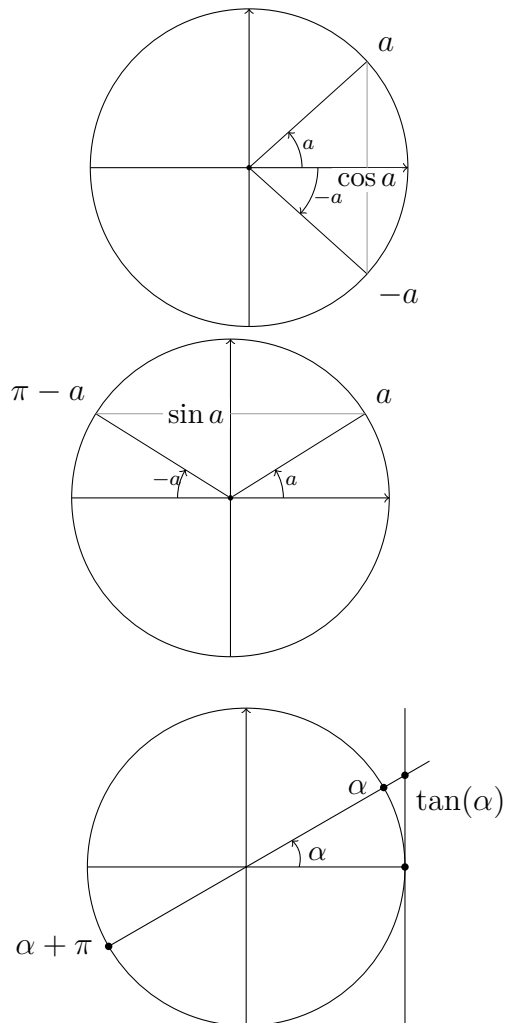
Propriétés

Soient a un réel donné et x une inconnue.

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Méthode — Résolution d'une équation trigonométrique

Comment résoudre une équation du type $\cos x = c$ (resp. $\sin x = c$ ou $\tan x = c$).

1. Transformer c de sorte que $c = \cos a$ (resp. $c = \sin a$ ou $c = \tan a$) : il vous faut trouver l'angle a vérifiant $\cos a = c$.
2. Utiliser le cercle trigonométrique ou les expressions ci-dessus pour obtenir toutes les solutions de l'équation.



Exemple

On veut résoudre l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'après le tableau des valeurs remarquables, on sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc on a

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

d'où $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6.

- 1) Représenter sur un cercle trigonométrique le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
- 2) Représenter sur le cercle trigonométrique tous les angles dont le sinus vaut $\frac{1}{2}$.
- 3) Donner une mesure de ces angles. En déduire toutes les mesures de ces angles.
- 4) En déduire les solutions de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$.

6 Formules d'addition



Propriétés

Soient a et b deux réels. On a :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

Exercice 7.

Soient a et b deux réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

- 1) Donner une expression de $\tan(a + b)$ en fonction de $\sin(a + b)$ et $\cos(a + b)$.
- 2) En factorisant par $\cos(a) \cos(b)$, montrer que :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

Mentionner les hypothèses là où elles sont utilisées.

Exercice 8.

- 1) Soit a un réel. Montrer :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a,$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a.$$

- 2) Soit a un réel tel que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
Montrer :

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

Feuille d'exercices : Séquence 2

Exercice 17. — À savoir faire absolument

Représenter rigoureusement un cercle trigonométrique complet, avec tous les angles remarquables et les valeurs remarquables.

Exercice 18.

Compléter le tableau suivant :

x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	28π	$-\frac{11\pi}{3}$				
Mesure principale										
$\cos(x)$							0	$-\frac{1}{2}$		-1
$\sin(x)$							1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\tan(x)$									$-\sqrt{3}$	0

Exercice 19.

Justifier les propriétés suivantes :

1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

et

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{et} \quad -\infty < \tan \alpha < +\infty.$$

Exercice 20.

- 1) Sur le cercle trigonométrique, représenter un angle α , son cosinus et son sinus.
- 2) Représenter ensuite l'angle $\pi + \alpha$.
- 3) En déduire son cosinus et son sinus en fonction de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

Exercice 21.

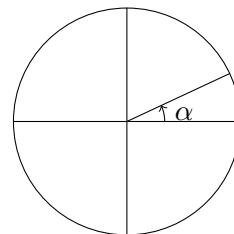
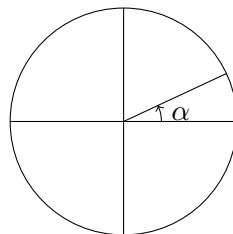
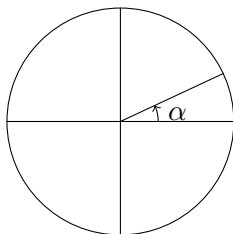
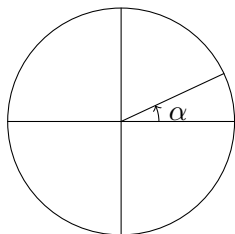
Soit α un angle. Pour chacune des quatre configurations ci-dessous, représenter sur le cercle trigonométrique l'angle β demandé ainsi que son cosinus et son sinus. Donner alors $\cos \beta$ et $\sin \beta$ en fonction de $\cos \alpha$ et de $\sin \alpha$.

1) $\beta = -\alpha$.

2) $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

3) $\beta = \frac{3\pi}{2} + \alpha$.

4) $\beta = -\frac{\pi}{2} - \alpha$.



Exercice 22.

Résoudre les équations suivantes :

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$,

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

3) $\tan x = 0$,

4) $\sin x = -\frac{1}{2}$,

5) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

6) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

7) $\cos x = -1$,

8) $\tan x = 1$,

9) $\tan x = -\sqrt{3}$.

Exercice 23.

Résoudre les équations suivantes :

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$,

3) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$,

5) $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$,

2) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$,

4) $\tan x = \sqrt{3}$,

6) $3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$.

Exercice 24.

1) Donner une expression de $\cos(2a)$.

2) En factorisant par $\cos^2 a$ et en remarquant que $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, montrer que :

$$\cos(2a) = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}.$$

3) En posant $x = 2a$, montrer que :

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

4) En procédant de la même façon, montrer que

$$\sin x = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}.$$

Exercice 25.

Soit a et b deux réels. On pose $p = a + b$ et $q = a - b$.

- 1) Exprimer a et b en fonction de p et q .
- 2) Donner une expression de $\cos p$ et $\cos q$ en fonction des cosinus et des sinus de a et b .
- 3) Calculer $\cos p + \cos q$ et montrer que

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right).$$

- 4) En procédant de la même façon, montrer que

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right),$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right),$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right).$$

Exercice 26.

Résoudre l'équation suivante :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x - 1 = 0,$$

Indications :

- ▷ Mettre l'équation sous la forme $\cos a \cos x - \sin a \sin x = \frac{1}{2}$.
- ▷ A l'aide des formules d'addition, résoudre l'équation obtenue.

Exercice 27.

Résoudre les équations suivantes

1) $\cos(5x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$

2) $\sin(x) = \tan(x),$

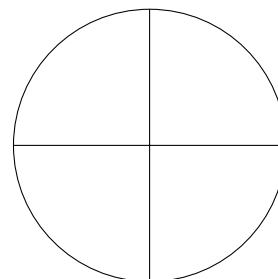
3) $\sin(2x) = \cos(x),$

4) $\tan(5x) = 1.$

Questionnaire : Séquence 2

Exercice 1.

- 1) Indiquer l'orientation sur le cercle trigonométrique ci-contre.
- 2) Représenter sur ce cercle tous les angles remarquables et les valeurs remarquables (cosinus et sinus de ces angles).



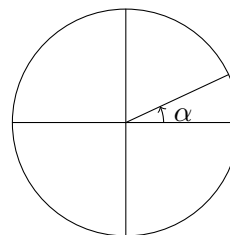
Exercice 2.

Représenter sur le cercle trigonométrique ci-dessous l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ainsi que son cosinus et son sinus. Donner alors $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ en fonction de $\cos \alpha$ et de $\sin \alpha$.

Réponse

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$



Exercice 3.

- 1) Représenter sur un cercle trigonométrique le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.
- 2) Représenter sur le cercle trigonométrique tous les angles dont le cosinus vaut $-\frac{1}{2}$.
- 3) Donner une mesure de ces angles. En déduire toutes les mesures de ces angles.
- 4) En déduire les solutions de l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Réponse

