Chapitre 6

Équations Différentielles Linéaires du Premier et du Second Ordre

Pré-requis

- ☐ Résolution d'équations du second degré ;
- ☐ Nombres complexes ;
- ☐ Vecteurs de $\mathbb{R}^n$;
- ☐ Dérivation, dérivation successive ;
- ☐ Primitives et intégrales.

Objectifs

- ☐ Identifier les différentes classes d'équations différentielles.
- ☐ Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- ☐ Résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2.
- ☐ Résoudre un problème de Cauchy.

Sommaire

Introduction

Tout au long de votre cursus universitaire, vous allez rencontrer de nombreuses utilisations des équations différentielles. C'est en effet un outil très souvent utilisé pour modéliser des phénomènes physiques ou biologiques par exemple. La datation au carbone 14, les mouvements du pendule, la dynamique de population, l'épidémiologie, sont autant de domaines dans lesquels les équations différentielles sont utilisées pour mieux comprendre, reproduire ou encore anticiper des comportements.

Exemple – *Le pendule*

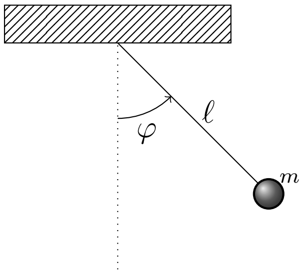
Le mouvement d'une masse ponctuelle m suspendue à un fil inextensible de longueur ℓ est décrit par l'équation :

$$\varphi''(t) + \frac{g}{\ell}\sin\varphi(t) = 0,$$

où φ est l'angle entre la verticale et la direction du fil. En supposant que les valeurs de φ sont petites on peut faire l'approximation suivante, $\sin\big(\varphi(t)\big) \simeq \varphi(t)$, et l'équation décrivant le mouvement de cette masse devient :

$$\varphi''(t) + \frac{g}{\ell}\varphi(t) = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.



Exemple – *Malthus (1766-1834)*

La dynamique de population est l'étude de l'évolution d'une ou de plusieurs population(s). Dans le cas où il n'y a qu'une population de taille $N(t)$ à l'instant t, l'évolution de cette quantité au cours du temps se traduit par $\dfrac{dN(t)}{dt} = N'(t)$. Il est alors assez naturel de considérer que cette évolution va dépendre des naissances et des morts. Autrement dit :

$$\frac{dN(t)}{dt} = naissances\ -\ morts$$

Afin de détailler cette évolution, Malthus suppose que les naissances et les morts sont proportionnelles à la taille de la population $N(t)$. Si on note b le taux de natalité et d le taux de mortalité, alors l'évolution est donnée par

$$\frac{dN(t)}{dt} = bN(t) - dN(t) = (b-d)N(t).$$

Si on pose $r = b - d$, le modèle de Malthus est donnée par :

$$N'(t) = \frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Chapitre 6 - Séquence 1

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et équations homogènes

Notation

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1.1 Généralités

Définition – *Équation différentielle linéaire du premier ordre*

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre**, une équation de la forme :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t), \tag{1}$$

- ▷ a et b sont des fonctions données, définies sur I, appelées **coefficients** de l'équation ;
- ▷ f est une fonction donnée, définie sur I, appelée **second membre** de l'équation ;
- ▷ y est une fonction inconnue, y' sa dérivée ;
- ▷ t est la variable de toutes ces fonctions.

fonction inconnue

$$\boxed{a(t)}\,y'(t) + \boxed{b(t)}\,y(t) = \boxed{f(t)} \longleftarrow \text{second membre}$$

coefficients de l'équation

Cette équation est une équation

- ▷ **différentielle** car (au moins) une dérivée de la fonction inconnue intervient dans l'équation ;
- ▷ **linéaire** car les coefficients et le second membre ne dépendent pas de y et de ses dérivées ;
- ▷ **d'ordre** 1 car seule la dérivée d'ordre 1 de la fonction inconnue intervient dans l'équation ;
- ▷ **à coefficients constants** si les coefficients a et b de l'équation sont des fonctions constantes ;
- ▷ **définie sur** I car les coefficients a et b et le second membre f sont définis sur I.

Exemples

- ▷ L'équation

$$4y'(t) + 3y(t) = t$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec

$$a(t) = 4,\ \ b(t) = 3 \text{ et } \quad f(t) = t.$$

- ▷ L'équation

$$(t^2 + 1)y'(t) - \ln(t)y(t) = \mathrm{e}^t$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, avec

$$a(t) = t^2 + 1, \ b(t) = -\ln(t) \text{ et } f(t) = \mathrm{e}^t .$$

Cette équation est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (intervalle le plus grand sur lequel les fonctions a, b et f sont définies).

Exemples – *Contres-exemples*

Les équations données ici ne sont pas des équations différentielles linéaires du premier ordre.

▷ Dans l'équation

$$y^2 + y + 1 = 0,$$

l'inconnue n'est pas une fonction, mais un réel (ou un complexe) y. C'est une *équation réelle* (ou *complexe*).

▷ Dans l'équation

$$y(ab) = y(a) + y(b),$$

l'inconnue est bien une fonction, mais ses dérivées n'interviennent pas. C'est une *équation fonctionnelle.*

▷ Dans l'équation

$$2y''(t) + 3y(t) = t,$$

la dérivée seconde intervient, c'est donc une équation différentielle d'ordre 2.

▷ Dans l'équation

$$(t^2 + 1)y'(t) - y^2(t) = t^2,$$

le terme $y^2(t)$ ne peut pas s'écrire sous la forme $b(t)y(t)$ avec b qui ne dépend que de la variable t et pas de y. Ce n'est donc pas une équation linéaire.

Exercice 1.

Parmi les équations différentielles suivantes, préciser celles qui sont linéaires d'ordre 1 et identifier alors les coefficients et le second membre.

1) $e^t y'(t) + ty(t) = 2t$,

2) $y'(t) + ty^3(t) = 1$,

3) $y(t)y'(t) + t = 0$,

4) $y(t) + 2 = 2y'(t) + 2y(t) + 1$,

5) $3x - 2y'(t) = \ln(t)y(t) - y'(t) + 5 - y'(t)$,

6) $y'(t) + y(t) = 3\sin x - \cos x + y(t)$.

1.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 sous forme canonique

Définition – *Équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme canonique*

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme canonique**, une équation différentielle de la forme (1) dans laquelle le coefficient associé à y' est constant et égal à 1. Elle s'écrit donc :

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t), \tag{2}$$

où a et f sont deux fonctions définies sur un intervalle I.

Exemples

L'équation

$$y'(t) + \ln(t)y(t) = 0$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sous forme canonique avec $a(t) = \ln(t)$ et $f(t) = 0$. Cette équation est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intervalle le plus grand sur lequel les fonctions a et f sont définies.

Passage de la forme générale à la forme canonique

Les équations de la forme (1) peuvent se ramener à des équations de la forme (2).
En effet, supposons que l'on ait l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t),$$

On peut alors distinguer :

- ▷ le cas où la fonction a ne s'annule pas sur I,
- ▷ le cas où elle s'annule pour certaines valeurs de I.

Méthode – *Cas où a ne s'annule pas sur I*

Le passage de la forme générale (1) à la forme canonique (2) se fait aisément dans le cas où le coefficient a ne s'annule pas sur I. En effet, on a :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \Longleftrightarrow y'(t) + \frac{b(t)}{a(t)}y(t) = \frac{f(t)}{a(t)}.$$

En posant sur I, $\tilde{a}(t) = \dfrac{b(t)}{a(t)}$ et $\tilde{f}(t) = \dfrac{f(t)}{a(t)}$, l'équation (1) s'écrit :

$$y'(t) + \tilde{a}(t)y(t) = \tilde{f}(t).$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sous la forme canonique (2).

Exemples

- ▷ L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

  $$4y'(t) + 3y(t) = t$$

  se réécrit sous forme canonique :

  $$y'(t) + \frac{3}{4}y(t) = \frac{t}{4}.$$

  Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$.
- ▷ L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

  $$(t^2 + 1)y'(t) + ty(t) = e^t$$

  se réécrit sous forme canonique :

  $$y'(t) + \frac{t}{t^2 + 1}y(t) = \frac{e^t}{t^2 + 1}.$$

  Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

Mettre sous la forme canonique les équations différentielles suivantes :

1) $\sqrt{2}y'(t) + \sin(t)y(t) = 2t$,

2) $\mathrm{e}^t\, y'(t) - \dfrac{1}{1+t^4}y(t) = \dfrac{1}{3}t^2$.

Méthode – *Cas où a s'annule sur I*

Si le coefficient a de l'équation sous la forme générale (1) s'annule pour certaines valeurs de I, on se ramène à la forme canonique (2) sur les plus grands sous-intervalles de I possibles, sur lesquels a ne s'annule pas.

Exemple

Soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(t+1)y'(t) + ty(t) = (t+1)^2.$$

C'est bien une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$ avec $a(t) = t+1$, $b(t) = t$ et $f(t) = (t+1)^2$.
Ici, a s'annule en -1.
On peut donc la réécrire, sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$ ou $I_2 =]-1; +\infty[$:

$$y'(t) + \frac{t}{(t+1)}y(t) = (t+1).$$

On est ainsi ramené à l'étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sous forme canonique sur I_1 ou sur I_2.

Exercice 3.

Mettre sous la forme $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$ les équations différentielles d'ordre 1 suivantes, en précisant les intervalles sur lesquels elles sont définies :

1) $ty'(t) + t^2y(t) = 1$,

2) $(t^2-4)y'(t) - y(t) + t = 0$.

Remarque

L'intervalle d'étude n'est pas toujours précisé. Il est alors défini implicitement par l'équation différentielle. Dans le cas où il y a plusieurs intervalles et si rien n'est précisé, l'étude doit être faite sur chacun des intervalles possibles.

Notations

D'autres notations peuvent être utilisées :

- ▷ pour la fonction inconnue : y, u, v, x, ou tout autre symbole ;
- ▷ pour la variable : t, x, θ, ω , ou tout autre symbole ;
- ▷ pour la dérivée en t de la fonction inconnue y : $y'(t)$, $\dfrac{dy}{dt}(t)$, $\dot{y}(t)$;
- ▷ pour l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$: $y' + ay = f$. C'est la **notation fonctionnelle**. C'est en effet une égalité de fonctions et la variable n'est pas précisée.

1.3 Équation homogène

Définitions – *Équation homogène et équation homogène associée*

- ▷ Toute équation différentielle dont le second membre est nul est appelée **équation homogène**.
- ▷ On appelle **équation homogène associée** à l'équation (2), l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 où le second membre est nul :

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0. \tag{3}$$

On l'appelle aussi **équation sans second membre** .

Exemples

L'équation

$$y'(t) + \frac{t}{(t+1)}y(t) = 0$$

est l'équation homogène associée à

$$y'(t) + \frac{t}{(t+1)}y(t) = f(t).$$

où f est une fonction donnée.

Exercice 4.

Déterminer l'équation homogène associée aux équations différentielles linéaires suivantes :

1) $y'(t) - 2y(t) = 3t$,

2) $y'(t) + y(t) - \sin(t) = 2y(t)$.

2 Solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1

2.1 Généralités

Définition – *Solution de l'équation différentielle* (1)

Une **solution** d'une équation différentielle d'ordre 1 de la forme (1) est une fonction y dérivable sur I telle que :

$$\forall t \in I, \qquad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t).$$

Exemple

Considérons l'équation suivante :

$$y'(t) - 2ty(t) = 4t.$$

C'est bien une équation différentielle linéaire du premier ordre définie sur $\mathbb{R}$, et la fonction $y(t) = \mathrm{e}^{t^2} - 2$ est solution de cette équation. En effet, cette fonction,

- ▷ est bien une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $y'(t) = 2t\,\mathrm{e}^{t^2}$;
- ▷ l'équation est bien vérifiée sur $\mathbb{R}$:

$$y'(t) - 2ty(t) = 2t\,\mathrm{e}^{t^2} - 2t\left(\mathrm{e}^{t^2} - 2\right) = 4t.$$

Remarquons que pour les mêmes raisons, pour tout réel C, les fonctions y définies par $y(t) = C\,\mathrm{e}^{t^2} - 2$ sont aussi des solutions de cette équation : il n'y a donc pas une unique solution, mais une infinité.

Exercice 5.

1) Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont solutions de l'équation différentielle :

$$y'(t) + 2y(t) = 0.$$

a) $y_1(t) = 3e^{-2t}$, **b)** $y_2(t) = -2e^{2t}$, **c)** $y_3(t) = \frac{1}{2}t$, **d)** $y_4(t) = \sqrt{3}e^{-2t}$.

2) Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont solutions de l'équation différentielle :

$$y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

a) $y_1(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$, **b)** $y_2(x) = 2e^{-x}\ln(1+e^x)$.

Exercice 6.

Soient $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive sur I et $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a sur I. Vérifier que $t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0.$$

2.2 Solutions de l'équation homogène

Théorème

Soit a une fonction définie sur I admettant des primitives. On note A l'une d'elles.
Les solutions de l'équation homogène

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{3}$$

sont les fonctions, notées y_H, définies sur I par :

$$y_H(t) = C\exp\big(-A(t)\big), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Notation

Dans la suite, l'ensemble des solutions d'une équation homogène est noté $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_H = \{y_H :\ t \mapsto C\exp(-A(t)) \mid C \in \mathbb{R}\},$$

ou par abus de notation :

$$\mathcal{S}_H = \{C\exp(-A(t)) \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque

Ce théorème se lit également de la façon suivante.

1. Toutes les fonctions de la forme $t \mapsto C\exp\big(-A(t)\big)$ où $C \in \mathbb{R}$ sont solutions de

l'équation homogène (3). Ainsi :

$$\left\{t \mapsto C\exp\big(-A(t)\big) \mid C \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathcal{S}_H;$$

2. Toutes les solutions de l'équation homogène (3) sont de la forme $t \mapsto C\exp\big(-A(t)\big)$, où $C \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\mathcal{S}_H \subset \left\{t \mapsto C\exp\big(-A(t)\big) \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Preuve. La remarque précédente montre la nécessité de procéder en deux étapes.

1. Soit $C \in \mathbb{R}$. On montre tout d'abord que $y_H(t) = Ce^{-A(t)}$ est une solution de (3). (À faire, voir exercice 6).

2. Soit y une solution de (3). Montrons qu'alors, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $y(t) = Ce^{-A(t)}$. Tout d'abord, multiplions l'équation (3) par $\mathrm{e}^{A(t)}$:

$$\underbrace{y'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} + a(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,y(t)}_{=\left(y(t)e^{A(t)}\right)'} = 0.$$

   On a donc

$$\left(y(t)e^{A(t)}\right)' = 0.$$

   Puisqu'une fonction de dérivée nulle est constante, on peut dire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $y(t)e^{A(t)} = C$ et par suite,

$$y(t) = Ce^{-A(t)}.$$

□

Exemples

1. Les solutions de l'équation $y' + 2y = 0$ sont les fonctions y_H définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y_H(t) = C\exp(-2t),\ \ C \in \mathbb{R}.$$

2. Les solutions de l'équation $3y' + 2y = 0$ sont les fonctions y_H définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y_H(t) = C\exp\left(-\frac{2}{3}t\right),\ \ C \in \mathbb{R}.$$

3. Les solutions de l'équation $y'(t) + t^2y(t) = 0$ sont les fonctions y_H définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y_H(t) = C\exp\left(-\frac{t^3}{3}\right),\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7.

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1) $3y' + 12y = 0$; **2)** $2y'(t) - t^4y(t) = 0$.

Chapitre 6

Feuille d'exercices séquence 1

Exercice 1.

Donner les primitives des fonctions suivantes :

1) $f_1(t) = \mathrm{e}^{4t} + \dfrac{1}{2}\cos(t)$, **2)** $f_2(x) = \dfrac{4x^2+2x+3}{x^2}$, **3)** $f_3(v) = \dfrac{4v+1}{2v^2+v+5}$.

Exercice 2.

Soient les équations suivantes :

a) $y'(t) - t^2y(t) - 3 = \sqrt{5}$,

b) $\sin(t)\dfrac{v'(t)}{v(t)} = 0$,

c) $\sqrt{x}\theta(x) = (\theta'(x))^2$,

d) $(1+\omega^2)w(\omega) = \omega^3$.

e) $\sqrt{2}u'(t) - u(t) = 3t^2$,

f) $v'(\theta) + 3v^3(\theta) = 0$,

g) $y'' - y' + y = 4$.

1) Préciser celles qui sont différentielles linéaires d'ordre 1.

2) Mettre les équations différentielles linéaires d'ordre 1 sous forme canonique en précisant les intervalles de définition.

Exercice 3.

Donner les équations homogènes associées aux équations différentielles suivantes :

1) $2y'(t) + 3y(t) = \ln(t)y(t) - 1$, **2)** $\sqrt{2} + \mathrm{e}^t\, y(t) - \frac{1}{t} + y'(t) = 0$,

Exercice 4.

Parmi les fonctions données, préciser celles qui sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 2y(x) = x^2.$$

1) $y(x) = x^2 - 2x$,

2) $y(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} + \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-2x}$,

3) $y(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$,

4) $y(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$,

Justifier vos réponses.

Exercice 5.

Parmi les fonctions données, préciser celles qui sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) + y(t) = t - \mathrm{e}^t + \cos t.$$

1) $y(t) = t - 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \dfrac{1}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\sin t$,

2) $y(t) = t - 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\sin t$,

3) $y(t) = t - 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\sin t + \sqrt{5}\,\mathrm{e}^{-t}$,

4) $y(t) = t - 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$.

Justifier vos réponses.

Exercice 6.

Déterminer les solutions des équations différentielles homogènes suivantes :

1) $y' - 4y = 0$,

2) $\sqrt{2}y' + 3y = 0$,

3) $2y'(t) + ty(t) = 0$,

4) $y'(t) - \cos(t)y(t) = 0$,

5) $\frac{1}{3}y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = 0$,

6) $y'(t) + \sqrt{t}y(t) = 0$,

Exercice 7.

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles mentionnés. Dans le cas où les intervalles ne sont pas donnés, déterminer les domaines sur lesquels la résolution est effectuée.

1) $\cos(t)y'(t) + \sin(t)y(t) = 0$, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2) $y'(x) + \ln(x)y(x) = 0$.

3) $e^t y'(t) + t^2 y(t) = 0$,

4) $y'(t) + y(t) = -t^2 y'(t)$,

5) $\mathrm{e}^{-t}\, y'(t) + \sin(t)y(t) = 0$,

6) $\mathrm{e}^t \big(y'(t) + y(t)\big) = y'(t)$.

Exercice 8.

1) Déterminer α et β tels que

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t+1}.$$

2) Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]-1; 1[$:

$$(t+1)y'(t) + \frac{1}{t-1}y(t) = \frac{1}{1-t}y(t).$$

Exercice 9.

Soient $s \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, trois réels donnés et P_1 et P_2, deux polynômes donnés. On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = \exp(st)\big(P_1(t)\cos(\omega t + \varphi) + P_2(t)\sin(\omega t + \varphi)\big).$$

Pour chaque cas ci-dessous, donner l'expression de la fonction f.

1) $s = \omega = \varphi = 0$, $P_2(t) = 0$ et $P_1(t) = t$;

2) $s = \varphi = 0$, $\omega = 2$, $P_1(t) = 1$ et $P_2(t) = t$;

3) $s = 1$, $\omega = \varphi = 0$, $P_2(t) = 0$ et $P_1(t) = t^2 + 1$.

4) $s = -1$, $\omega = 1$, $\varphi = 0$, $P_1(t) = 0$ et $P_2(t) = -t$.

Exercice 10.

Pour chaque fonction f donnée ci-dessous, déterminer trois paramètres s, ω et φ, et deux polynômes, P_1 et P_2, de tels sorte que la fonction f puisse s'écrire sous la forme :

$$f(t) = \exp(st)\big(P_1(t)\cos(\omega t + \varphi) + P_2(t)\sin(\omega t + \varphi)\big).$$

1) $f(t) = t^2 + t$,

2) $f(t) = 2\sin(t)$,

3) $f(t) = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}$,

4) $f(t) = t^3\cos(3t)\,\mathrm{e}^{-3t}$.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On s'intéresse ici aux solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 de la forme :

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t), \tag{2}$$

où a et f sont deux fonctions définies et continues sur I.

On a vu que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est donné par :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y_H : \ t \mapsto C \exp\big(-A(t)\big) \mid C \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive quelconque de a sur I.
On s'intéresse maintenant aux solutions de l'équation différentielle générale (2).

2.3 Solutions générales

Théorème

Soient a et f deux fonctions définies et continues sur I et soit y_p une solution (particulière) de l'équation différentielle :

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t).$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions, notées y_G, définies sur I par :

$$y_G(t) = C \exp\big(-A(t)\big) + y_p(t), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Notation

Dans la suite, l'ensemble des solutions générales d'une équation différentielle linéaire est noté $\mathcal{S}_G$:

$$\mathcal{S}_G = \{ y_G : \ t \mapsto C \exp(-A(t)) + y_p(t) \mid C \in \mathbb{R} \}.$$

Remarque

Cet ensemble s'écrit aussi sous la forme :

$$\mathcal{S}_G = \{ y_H + y_p \mid y_H \in \mathcal{S}_H \}.$$

On écrit aussi

$$\mathcal{S}_G = \mathcal{S}_H + y_p.$$

L'addition de l'ensemble $\mathcal{S}_H$ avec y_p, $\mathcal{S}_H + y_p$, décrit ici l'ensemble des toutes les fonctions s'écrivant comme la somme d'une fonction de $\mathcal{S}_H$ avec la solution particulière y_p.

Méthode

Afin de déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1, il convient de procéder en trois étapes.

1. Résoudre l'équation homogène associée.

2. Déterminer une solution particulière de cette équation linéaire d'ordre 1.
3. Toutes les solutions sont alors de la forme $y_G = y_H + y_p$.

Nous avons déjà vu dans la séquence précédente comment résoudre l'équation homogène associée. Il reste donc à déterminer une solution particulière quelconque de l'équation (2).

Remarque

Dans certains cas, il est facile de trouver immédiatement une solution particulière, appelée **solution évidente**.
Si de telles solutions existent, elles sont en général de la forme :

- ▷ $t \mapsto c$,
- ▷ $t \mapsto ct$ (si t est la variable de l'équation),

où c est un réel à déterminer.

Exemples

- ▷ On recherche une solution particulière évidente de l'équation

$$y'(t) - 2ty(t) = 4t.$$

Supposons que y_p est constante, on a alors $y_p' = 0$. En injectant dans l'équation, on obtient rapidement que la fonction définie par $y_p(t) = 2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, est solution.

- ▷ On recherche une solution particulière simple de l'équation

$$y'(t) + y(t) = t + 1.$$

Supposons que y_p est constante, $y_p = c$, on obtient l'équation suivante

$$c = t + 1.$$

Il n'existe donc pas de fonction $y_p = c$ solution de l'équation différentielle (une constante ne peut pas dépendre de la variable t). On cherche alors des solutions de la forme $y_p(t) = ct$, où la constante c est à déterminer.
L'équation devient alors $c + ct = t + 1$. La solution $c = 1$ convient et la fonction y_p définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(t) = t$ est solution de l'équation différentielle.

Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = \frac{1}{t}$.

2) $3y'(t) - ty(t) = 6t$.

3) $y'(t) - \sin(t)y(t) = 1 - t\sin(t)$.

4) $y'(t) + \frac{3}{2}y(t) = 6t + 4$.

Dans le cas où on ne trouve pas de solution particulière dite évidente de l'équation (2), on pourra utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

- ▷ méthode de la variation de la constante,
- ▷ méthode des formes pré-déterminées.

2.4 Solution particulière : méthode de la variation de la constante

Soient a et f deux fonctions continues sur I et soit A une primitive de a sur I.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante sur I :

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t),$$

On a vu que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y_H \ : \ t \mapsto C \exp\big(-A(t)\big) \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

La méthode de la variation de la constante consiste à remplacer la constante C par une fonction inconnue c. On recherche donc une solution particulière y_p sous la forme :

$$y_p(t) = c(t) \exp\big(-A(t)\big).$$

On dit qu'on fait *varier la constante*. L'objectif est donc de déterminer une telle fonction c.
En dérivant y_p, on a :

$$y_p'(t) = c'(t) \exp\big(-A(t)\big) - a(t).\underbrace{c(t) \exp\big(-A(t)\big)}_{y_p(t)}.$$

Après injection dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\underbrace{c'(t) \exp\big(-A(t)\big) - a(t)y_p(t)}_{y_p'(t)} + a(t)y_p(t) = f(t) \iff c'(t) \exp\big(-A(t)\big) = f(t),$$

puis,

$$c'(t) = f(t) \exp\big(A(t)\big).$$

On vérifie alors que si c est une primitive de $t \mapsto f(t) \exp\big(A(t)\big)$, alors la fonction y_p définie par :

$$y_p(t) = c(t) \exp\big(-A(t)\big),$$

est bien une solution (particulière) de l'équation différentielle.

Remarque

Les formules ci-dessus ne sont pas à retenir par cœur ! La méthode de variation de la constante est résumée dans l'encadré qui suit.

Méthode – *Variation de la constante*

1. Donner l'expression d'une solution particulière en faisant varier la constante :

$$y_p(t) = c(t) \exp\big(-A(t)\big).$$

2. Dériver puis injecter dans l'équation différentielle pour obtenir une expression de c'.
3. Déterminer une primitive de c'.
4. Donner l'expression d'une solution (particulière) : $y_p(t) = c(t) \exp\big(-A(t)\big)$.
5. Vérifier qu'il n'y a pas d'erreurs de calculs : on vérifie que y_p est bien une solution.

Exemple

On considère l'équation différentielle suivante définie sur $I = \mathbb{R}$:

$$y'(t) + 2ty(t) = \cos(t)\, \mathrm{e}^{-t^2}.$$

Son équation homogène associée est

$$y'(t) + 2ty(t) = 0.$$

Comme $t \mapsto t^2$ est une primitive de $t \mapsto 2t$, alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y_H \ : \ t \mapsto C\, \mathrm{e}^{-t^2} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

On recherche maintenant une solution particulière.
Tout d'abord, on voit aisément qu'il n'y a pas de solution évidente (les fonctions constantes tout comme les fonctions de la forme $t \mapsto ct$ ne conviennent pas).
On applique la méthode de la variation de la constante.

1. On cherche une solution particulière de la forme :
$$y_p(t) = c(t)\, \mathrm{e}^{-t^2},$$
où c est une fonction à déterminer.
2. On dérive : $y_p'(t) = c'(t)\, \mathrm{e}^{-t^2} + 2tc(t)\, \mathrm{e}^{-t^2}$ et on injecte dans l'équation différentielle :
$$c'(t)\, \mathrm{e}^{-t^2} - 2tc(t)\, \mathrm{e}^{-t^2} + 2tc(t)\, \mathrm{e}^{-t^2} = \cos(t)\, \mathrm{e}^{-t^2} \Leftrightarrow c'(t) = \cos t.$$
3. On détermine une primitive de $t \mapsto \cos t$: $c(t) = \sin t$ convient.
4. Finalement, une solution particulière de l'équation différentielle est donnée par :
$$y_p(t) = \sin(t)\, \mathrm{e}^{-t^2}.$$
5. Par soucis de vérification, on dérive à nouveau $y_p(t) = \sin(t)\, \mathrm{e}^{-t^2}$ et on injecte à nouveau dans l'équation différentielle pour vérifier que l'on a pas fait d'erreur de calcul et qu'on est bien en présence d'une solution particulière.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc :

$$\mathcal{S}_G = \left\{ t \mapsto C\, \mathrm{e}^{-t^2} + \sin(t)\, \mathrm{e}^{-t^2} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2.

Résoudre par la méthode de la variation de la constante les équations différentielles suivantes :

1) $y'(t) - \dfrac{1}{t} y(t) = t^2\, \mathrm{e}^{-t}$,

2) $y'(t) + y(t) = 2 + 3t + 4t^2 + t^3$,

2.5 Solution particulière : formes pré-déterminées

On suppose maintenant que l'équation différentielle est une équation différentielle à coefficients constants sous forme canonique :

$$y'(t) + ay(t) = f(t), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

On suppose que le second membre f peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = \mathrm{e}^{st}\big(P_1(t)\cos(\omega t+\varphi) + P_2(t)\sin(\omega t+\varphi)\big), \tag{4}$$

où

- s, ω et φ sont trois réels donnés,
- P_1 et P_2 sont deux polynômes donnés.

Remarque

Un polynôme P à coefficients réels d'indéterminée X est tout expression pouvant s'écrire sous la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n,$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Si $a_n \neq 0$, on dit alors que P est un polynôme de degré n et on note $\mathrm{d}^\circ(P) = n$. Si pour tout $0 \leq i \leq n$, $a_i = 0$, alors $P(X) = 0$ est appelé le polynôme nul et par convention, son degré est égal à $-\infty$: $\mathrm{d}^\circ(P) = -\infty$.

Suivant les valeurs de ces différents paramètres, le second membre f peut prendre différentes formes (voir figure et tableau ci-dessous).

(si $s = 0$, $\mathrm{e}^{st} = 1$)

$$f(t) = \boxed{\mathrm{e}^{st}}\Big(P_1(t)\boxed{\cos(\omega t+\varphi)}+P_2(t)\boxed{\sin(\omega t+\varphi)}\Big).$$

si $\omega = \varphi = 0$, alors :
$\cos(\omega t+\varphi) = 1$ et $\sin(\omega t+\varphi) = 0$.

$s = 0$ pas d'exponentielle	$\omega = \varphi = 0$ pas de sinus ni de cosinus	P_1 quelconque et $P_2 = 0$	$f(t) = P_1(t)$
	$\omega \neq 0$	P_1, P_2 quelconques	$f(t) = P_1(t)\cos(\omega t+\varphi) + P_2(t)\sin(\omega t+\varphi)$
$s \neq 0$	$\omega = \varphi = 0$ pas de sinus ni de cosinus	P_1 quelconque et $P_2 = 0$	$f(t) = P_1(t)\,\mathrm{e}^{st}$
	$\omega \neq 0$	P_1, P_2 quelconques	$f(t) = \mathrm{e}^{st}\,(P_1(t)\cos(\omega t+\varphi) + P_2(t)\sin(\omega t+\varphi))$

Exercice 3.

Pour chaque fonction f donnée ci-dessous, trouvez les valeurs de s, ω et φ et les polynômes P_1 et P_2 de telle sorte que f s'écrive sous la forme :

$$f(t) = \exp(st)\big(P_1(t)\cos(\omega t+\varphi) + P_2(t)\sin(\omega t+\varphi)\big).$$

1) $f(t) = t^2 - 1$;

2) $f(t) = t\,\mathrm{e}^{-2t}$;

3) $f(t) = t\cos(t) + \sin(t)$;

4) $f(t) = \sin(t)\,\mathrm{e}^{-t}$.

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants suivante :

$$y'(t) + ay(t) = f(t),$$

On suppose que le second membre f peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = \exp(st)\big(P_1(t)\cos(\omega t + \varphi) + P_2(t)\sin(\omega t + \varphi)\big), \tag{4}$$

où s, ω et φ sont trois réels donnés et P_1 et P_2 sont deux polynômes donnés.
Alors il existe une solution particulière qui peut s'écrire sous la forme :

$$y_p(t) = t^\alpha \exp(st)\big(Q_1(t)\cos(\omega t + \varphi) + Q_2(t)\sin(\omega t + \varphi)\big), \tag{5}$$

où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes à déterminer de degré inférieur ou égal à $\max\{d°(P_1), d°(P_2)\}$, et où

$$\alpha = \begin{cases} 0 \text{ si } s + i\omega \neq -a, \\ 1 \text{ si } s + i\omega = -a. \end{cases}$$

Exemple

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + y(x) = x^2.$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec $a = 1$ et un second membre f de la forme (4), où $s = \omega = \varphi = 0$, $P_2(x) = 0$ et $P_1(x) = x^2$:

$$f(x) = \exp(0.x)\big(x^2\cos(0.x + 0) + 0.\sin(0.x + 0)\big) = x^2.$$

On recherche donc une solution particulière sous la forme (5), où :

- ▷ $\alpha = 0$ car $s + i\omega = 0 \neq -1 = -a$,
- ▷ Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré $\leq 2 = \max\{\underbrace{d°(P_1)}_{=2}, \underbrace{d°(P_2)}_{=-\infty}\}$,

c'est à dire :

$$y_p(x) = x^0\exp(0.x)\big(Q_1(x)\cos(0.x + 0) + Q_2(x)\sin(0.x + 0)\big) = Q_1(x),$$

et comme Q_1 est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, y_p est de la forme :

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

où A, B et C sont à déterminer.
Si y_p une une solution de l'équation différentielle, en dérivant, puis en injectant dans l'équation, on obtient :

$$\begin{array}{rrcl} & y_p'(x) + y_p(x) & = & x^2 \\ \Leftrightarrow & 2Ax + B + Ax^2 + Bx + C & = & x^2 \\ \Leftrightarrow & Ax^2 + (2A + B)x + B + C & = & x^2 \\ \Leftrightarrow & (A-1)x^2 + (2A + B)x + (B + C) & = & 0. \end{array}$$

Puisqu'un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on obtient :

$$A - 1 = 0, \qquad 2A + B = 0, \qquad \text{et} \qquad B + C = 0,$$

c'est à dire, $A = 1$, $B = -2$ et $C = 2$ et par suite, y_p s'écrit :

$$y_p(x) = x^2 - 2x + 2.$$

Enfin, par soucis de vérification, on dérive et on injecte $y_p(x) = x^2 - 2x + 2$ pour s'assurer que c'est bien une solution de l'équation différentielle.

Exemple

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) - y(t) = \sin t.$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec $a = -1$ et un second membre f de la forme (4), où $s = 0$, $\omega = 1$, $\varphi = 0$, $P_1(t) = 0$ et $P_2(t) = 1$:

$$f(t) = \exp(0.t)\big(0.\cos(1.t + 0) + 1.\sin(1.t + 0)\big) = \sin t.$$

On recherche donc une solution particulière sous la forme (5), où $\alpha = 0$ car

$$s + \imath\omega = 0 + \imath.1 = i \neq 1 = -a,$$

et Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $0 = \max\{\underbrace{\deg(P_1)}_{=0}, \underbrace{\deg(P_2)}_{=-\infty}\}$, c'est à dire :

$$y_p(t) = t^0 \exp(0.t)\big(Q_1(t)\cos(1.t + 0) + Q_2(t)\sin(1.t + 0)\big) = Q_1(t)\cos(t) + Q_2(t)\sin(t),$$

et comme Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 0 (c'est à dire qu'ils sont constants), y_p est de la forme :

$$y_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t),$$

où A et B sont à déterminer.
Si y_p une solution de l'équation différentielle, en dérivant, puis en injectant dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} y_p'(t) - y_p(t) &= (B\cos(t) - A\sin(t)) - (A\cos(t) + B\sin(t)) \\ &= (-A + B)\cos(t) + (-A - B)\sin(t) \\ &= \sin t. \end{aligned}$$

Par identification, on a :

$$-A + B = 0 \quad \text{et} \quad -A - B = 1,$$

c'est à dire, $A = -\dfrac{1}{2}$ et $B = -\dfrac{1}{2}$ et par suite, y_p s'écrit :

$$y_p(t) = -\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$

Enfin, on vérifie aisément que $y_p(t) = -\dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{2}\sin t$ est bien une solution de l'équation différentielle.

Exercice 4.

Déterminer une solution particulière de chacune des équations différentielles linéaires d'ordre 1 suivantes :

1) $y'(t) + y(t) = (2t + 1)\,\mathrm{e}^{-t}$,

2) $2y'(t) - 3y(t) = 7\cos(2t) + \sin(2t)$.

2.6 Théorème de superposition

Dans certains cas, le théorème suivant peut également permettre de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Théorème – *Théorème de superposition*

Soit y_{p_1} une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$y'(t) + a(t)y(t) = f_1(t).$$

Soit y_{p_2} une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$y'(t) + a(t)y(t) = f_2(t).$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $y_p = \lambda y_{p_1} + y_{p_2}$ est une solution de

$$y'(t) + a(t)y(t) = \lambda f_1(t) + f_2(t).$$

Exemple

Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$y'(t) + y(t) = 2(t^2 + e^t).$$

On a vu que $y_{p_1}(t) = t^2 - 2t + 2$ est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$y'(t) + y(t) = t^2$$

De plus, $y_{p_2}(t) = \mathrm{e}^t$ est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$y'(t) + y(t) = 2\,\mathrm{e}^t$$

Ainsi, $y_p(t) = 2(t^2 - 2t + 2) + \mathrm{e}^t$ est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$y'(t) + y(t) = 2(t^2 + e^t).$$

Exercice 5.

1) Résoudre sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$\cos(t)y'(t) + \sin(t)y(t) = 1 + \sin(t).$$

2) Résoudre (sur $\mathbb{R}$) l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$y'(t) - y(t) = 1 - t + 2t\,\mathrm{e}^t + \cos(t) - \sin(t).$$

Chapitre 6

Feuille d'exercices séquence 2

Exercice 1.

Déterminer une solution particulière évidente pour chacune des équations différentielles linéaire d'ordre 1 suivantes :

1) $y'(t) + \mathrm{e}^{t^2} y(t) = \mathrm{e}^{t^2}$, **2)** $t^2 y'(t) - y(t) = -t^2 + t$, **3)** $\dfrac{y'(t)}{t} + \ln(t) y(t) = t \ln t + 1$.

Exercice 2.

En utilisant la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière pour chacune des équations différentielles linéaire d'ordre 1 suivantes :

1) $y'(t) + y(t) = (1 + 2t + 3t^2)\,\mathrm{e}^{-t}$

2) $y'(t) + y(t) = \cos t + \sin t$,

3) $y'(t) + \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} + \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$,

4) $t y'(t) - 2y(t) = t^2$.

Exercice 3.

Reconnaître les formes pré-déterminées afin de déterminer une solution particulière pour chacune des équations différentielles linéaire d'ordre 1 suivantes :

1) $y'(t) + y(t) = (1 + 2t + 3t^2)\,\mathrm{e}^{-t}$

2) $y'(t) + y(t) = \cos t + \sin t$,

3) $y'(t) - y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(-4t^2 + 2t - 4) + y(t)$.

4) $2y(t) - y'(t) + t \sin(t) = \cos(t) - 2y'(t) + 3y(t)$.

Exercice 4.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'(x) - 3y(x) = \cos(x) \exp(3x)$;

2) $7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$;

3) $y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3$;

4) $y'(x) + y(x) = xe^{-x}$;

5) $y'(x) - 2y(x) = \cos x + 2 \sin x$;

6) $y'(x) + y(x) = \cos(2x) + \sin(x)$;

Exercice 5.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $\sin(x)\big(y'(x) + \cos(x)y(x)\big) = \cos(x)\big(2 + \sin(x)\big)^3 - 2y'(x)$

2) $\sin(x)\big(y'(x) + \cos(x)y(x)\big) = \sin(x)\cos(x) - 2y'(x)$

Chapitre 6 - Séquence 3

Équations différentielles linéaires homogènes du 2nd ordre

3 Équation Différentielles Linéaires du Second Ordre

3.1 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et équations caractéristiques associées

Définitions – *Équation différentielle linéaire du second ordre*

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre** (EDL2), une équation différentielle de la forme :

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t),$$

où :

- ▷ a, b et c sont des fonctions données, définies sur I, appelés **coefficients** de l'équation ;
- ▷ f est une fonction donnée, définie sur I, appelé **second membre** de l'équation ;
- ▷ y est une fonction inconnue à déterminer ;
- ▷ t est la variable de toutes ces fonctions.

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre homogène**, une équation différentielle linéaire du second ordre où le second membre est nul :

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0.$$

On appelle **équation homogène associée** à une équation différentielle linéaire du second ordre, l'équation différentielle linéaire du second ordre sans son second membre :

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0.$$

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants**, une équation différentielle linéaire du second ordre où les coefficients a, b et c sont des constantes, avec $a \neq 0$:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t). \tag{6}$$

Enfin, on appelle **équation caractéristique associée** à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, l'équation du second degré suivante :

$$(\mathcal{C}) : \qquad ar^2 + br + c = 0, \tag{7}$$

qui est obtenue en annulant le second membre et en remplaçant les dérivées d'ordre k de y, $y^{(k)}$, par r^k.

Remarques

- ▷ Les coefficients a, b et c et le second membre f étant définies sur I, on dit que l'EDL2

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

est définie sur I.

- ▷ Pour une EDL2 à coefficients constants, les coefficients a, b et c étant définies sur $\mathbb{R}$, seul le second membre f détermine le domaine de définition de l'EDL2.
- ▷ L'équation caractéristique d'une EDL2 n'est définie que pour les équations à coefficients constants.

Exemples

L'équation

$$3x^2y''(x) + y'(x) - \ln(x)y(x) = e^x$$

est une EDL2 tout comme l'équation

$$3x^2y''(x) - y(x) = e^x.$$

Par contre, l'équation

$$x^2y''(x) - y^2(x) = e^x$$

n'est pas une EDL2 : c'est bien une équation différentielle du second ordre, mais elle n'est pas linéaire en raison de la présence du terme en y^2.
L'équation

$$y''(t) + 2y'(t) - y(t) = t$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation homogène associée est

$$y'' + 2y' - y = 0$$

et son équation caractéristique associée est

$$r^2 + 2r - 1 = 0.$$

Exercice 1.

Parmi les équations suivantes, préciser celles qui sont linéaires d'ordre 2 et justifier.

1. $3^2y'' - x^3y' + xy = 2x$; 2. $y'' + 2y' + xy^3 = 1$; 3. $yy'' - y' + x = 0$.

Exercice 2.

Donner les équations caractéristique associées aux équations différentielles linéaires d'ordre 2 suivantes :

1) $4y''(t) - y'(t) = 1 - \sqrt{2}y(t)$ **2)** $\frac{1}{2}y''(t) + y(t) = 2t$

3.2 Solutions d'une équation différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition

Soient a, b,c et f des fonctions définies sur I. On appelle solution de l'EDL2 suivante,

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t),$$

toute fonction y dérivable sur I et vérifiant l'équation en tout point t de I :

$$\forall t \in I, \qquad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t).$$

Remarque

L'équation caractéristique $(\mathcal{C})$ associée à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une équation du second degré à coefficients réels (a, b et c sont réels). On a donc trois possibilités suivant le discriminant Δ de $(\mathcal{C})$:

- ▷ $\Delta > 0$: $(\mathcal{C})$ admet deux racines réels distincts ;
- ▷ $\Delta = 0$: $(\mathcal{C})$ admet une racine réel ; On dit que cette racine est une **racine double**.
- ▷ $\Delta < 0$: $(\mathcal{C})$ admet deux racines complexes conjuguées.

Dans le cas où $\Delta = 0$, on dit que la racine de $(\mathcal{C})$ est une **racine double**. Sinon, les racines de $(\mathcal{C})$ sont des **racines simples**.

Théorème – *Solution de l'équation homogène*

Soient a, b,c trois réels tels que $a \neq 0$ et soit f une fonction définie sur I. On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène suivante,

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0,$$

et on note $(\mathcal{C})$ l'équation caractéristique associée.

1. On suppose que $(\mathcal{C})$ admet deux racines réelles distinctes notées r_1 et r_2. Alors
$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \in I \mapsto y_H(t) = A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
2. On suppose que $(\mathcal{C})$ admet une racine réelle, dite double, r_0. Alors
$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \in I \mapsto y_H(t) = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{r_0 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
3. On suppose que $(\mathcal{C})$ admet deux racines complexes conjuguées, notées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$. Alors
$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \in I \mapsto y_H(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t) \right) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1, les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants sont données par le théorème suivant.

Théorème

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$ et f une fonction définie sur I. On note $\mathcal{S}_G$ l'ensemble des solutions de l'équation suivante,

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t),$$

et soit $y_p \in \mathcal{S}_G$ une solution (particulière). Alors on a :

$$\mathcal{S}_G = y_p + \mathcal{S}_H = \{ t \in I \mapsto y_p(t) + y_H(t) \mid y_H \in \mathcal{S}_H \}.$$

Ainsi, pour avoir toutes les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée et une solution particulière.

Pour déterminer une solution particulière, on pourra utiliser la méthode des solutions évidentes (voir séquence précédente) ou la méthode des formes prédéterminée.

Théorème

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante,

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t),$$

et on suppose que le second membre f peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = \exp(st)\big(P_1(t)\cos(\omega t + \varphi) + P_2(t)\sin(\omega t + \varphi)\big),$$

où s, ω et φ sont trois réels données et P_1 et P_2 sont deux polynômes donnés.
Alors il existe une solution particulière qui peut s'écrire sous la forme :

$$y_p(t) = t^\alpha \exp(st)\big(Q_1(t)\cos(\omega t + \varphi) + Q_2(t)\sin(\omega t + \varphi)\big), \tag{8}$$

où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes à déterminer de degré inférieure ou égale à $\max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$ et où

$$\alpha = \begin{cases} 0 \text{ si } s + \imath\omega \text{ n'est pas racine de } (\mathcal{C}), \\ 1 \text{ si } s + \imath\omega \text{ est racine simple de } (\mathcal{C}), \\ 2 \text{ si } s + \imath\omega \text{ est racine double de } (\mathcal{C}). \end{cases}$$

Exemple

Soit l'équation différentielle $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)e^{-t}$.

▷ L'équation homogène associée à cette équation est :

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 0,$$

et son équation caractéristique associée est :

$$(\mathcal{C}): \qquad r^2 - 4r + 3 = 0,$$

dont les racines sont données par :

$$\mathcal{S}_\mathcal{C} = \{1, 3\}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc :

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto y_H(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

▷ Le second membre est de la forme :

$$f(t) = \exp(st)\big(P_1(t)\cos(\omega t + \varphi) + P_2(t)\sin(\omega t + \varphi)\big),$$

où $s = -1$, $\omega = \varphi = 0$ et $P_1(t) = 2t + 1$ et $P_2(t) = 0$.
On cherche donc une solution particulière y_p de la forme :

$$y_p(t) = t^\alpha \exp(st)\big(Q_1(t)\cos(\omega t + \varphi) + Q_2(t)\sin(\omega t + \varphi)\big),$$

où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes à déterminer de degré inférieure ou égale à

$$1 = \max\{\underbrace{\deg(P_1)}_{=1}, \underbrace{\deg(P_2)}_{=-\infty}\}$$

et où $\alpha = 0$ car $s + \imath\omega = -1$ n'est pas racine de $(\mathcal{C})$. En résumé, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^{-t},$$

où A et B sont à déterminer. Pour cela, on dérive,

$$y_p'(t) = \mathrm{e}^{-t}(-At + A - B),$$

et

$$y_p''(t) = \mathrm{e}^{-t}(At - 2A + B).$$

En injectant ces expressions dans l'équation, on obtient :

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = \mathrm{e}^{-t}(8At - 6A + 8B) = \mathrm{e}^{-t}(2t + 1).$$

En identifiant, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 8A & & & = & 2, \\ -6A & + & 8B & = & 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(A = \frac{1}{4} \text{ et } B = \frac{5}{16}\right).$$

Finalement,

$$y_p(t) = \left(\frac{t}{4} + \frac{5}{16}\right) e^{-t}.$$

On vérifie bien sûr que cette fonction est bien une solution particulière de l'équation différentielle et on conclut :

$\triangleright$

$$\mathcal{S}_G = y_p + \mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto C_1 e^t + C_2 e^{3t} + \left(\frac{t}{4} + \frac{5}{16}\right) e^{-t} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 3.

Résoudre les équations suivantes :

1) $y''(t) + y(t) = t + 1$,

2) $y"(t) + 2y'(t) + y(t) = 6t\,\mathrm{e}^{-t}$,

3) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^t \left(\cos(t) + 3\sin(t)\right)$,

4) $y"(t) + 2y'(t) + 2y(t) = \sin(t)\,\mathrm{e}^{-t}$,

Tout comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, on a le théorème suivant.

Théorème – *Théorème de superposition*

Soit y_{p_1} une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_1(t).$$

Soit y_{p_2} une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_2(t).$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $y_p = \lambda y_{p_1} + y_{p_2}$ est une solution de

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \lambda f_1(t) + f_2(t).$$

4 Problème de Cauchy

Définition – *Problème de Cauchy*

Un **problème de Cauchy** est un problème constitué d'une équation différentielle et d'une condition initiale donnée.

Exemple

Résoudre

$$\left\{\begin{array}{l} y' + 2y = 3, \\ y(0) = -1. \end{array}\right.$$

revient à résoudre le problème de Cauchy qui consiste à déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 3$ qui vrifie $y(0) = -1$.

Remarque

Pour résoudre un problème de Cauchy, il faut résoudre l'équation différentielle, puis déterminer, parmi toutes les solutions, celle qui vérifie la condition initiale donnée.

Exemple

On veut résoudre l'équation différentielle suivante : $y' + 2y = 3$, pour ensuite déduire la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} y' + 2y = 3, \\ y(0) = -1. \end{array}\right.$$

L'équation homogène est $y' + 2y = 0$, dont les solutions sont données par :

$$S_H = \{y_H(t) = C\exp(-2t),\ C \in \mathbb{R}\}.$$

Remarquons ici que la variable est notée t. En effet, nulle part ailleurs, il n'est fait mention d'une notation pour la variable. On peut alors la notée par une lettre de son choix (x ou t ou une autre lettre/symbole).
Résolution de l'équation générale :
Les solutions de $y' + 2y = 3$ sont données par :

$$S_G = \{y_G(t) = y_p(t) + y_H(t),\ y_H \in S_H\} = \{y_G(t) = y_p(t) + C\exp(-2t),\ C \in \mathbb{R}\}.$$

Il nous reste donc à trouver une solution particulière y_p.
Le second membre est de la forme :

$$f(x) = \exp(sx)\big(P_1(x)\cos(\omega x + \varphi) + P_2(x)\sin(\omega x + \varphi)\big),$$

où $s = \omega = \varphi = 0$, $P_1(t) = 3$ et $P_2(t) = 0$. On recherche donc y_p sous la forme :

$$y_p(x) = x^\alpha \exp(sx)\big(Q_1(x)\cos(\omega x + \varphi) + Q_2(x)\sin(\omega x + \varphi)\big) = Q_1(x),$$

avec $\alpha = 0$ car $s + \imath\omega = 0 \neq -2 = -a$, et Q_1 est un polynôme de degré $\deg(P_1) = 0$. Plus précisément, on cherche y_p sous la forme :

$$y_p(t) = c.$$

On a alors $y_p'(t) = 0$ et par suite, en injectant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$y_p'(t) + 2y_p(t) = 0 + 2c = 3 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}.$$

Finalement, $y_p(t) = \frac{3}{2}$ est un solution particulière et on a :

$$S_G = \{y_G(t) = C\exp(-2t) + \frac{3}{2},\ C \in \mathbb{R}\}.$$

La solution du problème de Cauchy est donc de la forme :

$$y(t) = C\exp(-2t) + \frac{3}{2},$$

où C est un réel à déterminer. Or on a $y(0) = -1$ et $y(0) = C + \frac{3}{2}$. On obtient alors la solution du problème de Cauchy suivante :

$$y(t) = -\frac{5}{2}\exp(-2t) + \frac{3}{2}.$$

Chapitre 6

Feuille d'exercices séquence 3

Exercice 1.

Parmi les équations suivantes, préciser en justifiant celles qui sont différentielles linéaires d'ordre 2.

1) $\sqrt{3}y''(u) - y(u)y'(u) + 3y(u) = 0$,

2) $y''(v) + 2y'(v) - 4 = y''(v) + 2y(v)$,

3) $y(w) - 2y''(w) = y'(w) - \sin(w)$,

4) $y''(x) = 2$.

Exercice 2.

Pour chacune des équations différentielles d'ordre 2 suivantes, donner l'équation homogène associée et l'équation caractéristique associée et les solutions de l'équation homogène.

1) $\sqrt{3}y''(u) - y'(u) + 3y(u) = 0$,

2) $y''(v) + 2y'(v) - 4 = 2y(v) + \mathrm{e}^x$,

3) $y(w) - 2y''(w) = y'(w) - \sin(w)$,

4) $y''(x) - 3 = 0$.

Exercice 3.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x,\ y(0) = y'(0) = 0$;

2) $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = (2x+1)e^{-x}$;

3) $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = (2x+1)e^{x}$;

4) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (x^2+1)e^{x} + e^{3x}$;

5) $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = x^2e^{x} + xe^{2x}\cos x$;

6) $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = (-4x+2)e^{-x}\cos(x) + (7x-4)e^{-x}\sin(x) - 4e^{x}\sin(2x)$;

Chapitre 6

Questionnaire - Séquence 1

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

1) Parmi les équations différentielles suivantes, préciser celles qui sont linéaires d'ordre 1 et identifier alors les coefficients et le second membre.

a) $e^t y'(t) + ty(t) = 2t$, **b)** $y(t)y'(t) + t = 0$.

Réponse :

2) Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont solutions de l'équation différentielle :

$$y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

a) $y_1(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$, **b)** $y_2(x) = 2e^{-x}\ln(1+e^x)$.

Réponse :

suite au verso.

3) Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$2y'(t) - t^4 y(t) = 0.$$

Réponse :

Chapitre 6

Questionnaire - Séquence 2

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

1) Résoudre l'équation différentielle suivante en trouvant une solution particulière *évidente* :

$$y'(t) - \sin(t)y(t) = 1 - t\sin(t)$$

Réponse :

2) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante par la *méthode de la variation de la constante* :

$$y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-t}$$

Réponse :

3) Résoudre l'équation différentielle suivante par la *méthode des formes pré-déterminées* :

$$y'(t) + y(t) = (2t + 1)\,\mathrm{e}^{-t}$$

Réponse :

Chapitre 6

Questionnaire - Séquence 3

1) Parmi les équations suivantes, préciser celles qui sont linéaires d'ordre 2 et justifier. Déterminer l'équation caractéristique associées aux équations différentielles linéaires d'ordre 2 et résoudre cette équation caractéristique.

a) $3^2y''(x) - x^3y'(x) + xy(x) = 2x\,;$ **b)** $yy'' - y' + x = 0.$

Réponse :

2) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y"(t) + 2y'(t) + y(t) = 6t\,\mathrm{e}^{-t}$$

Réponse :

Réponse :