Mathématiques générales

Devoir Maison

Vacances de la Toussaint
29 Octobre 2017 - 5 Novembre 2017
À rendre pour le lundi 6 novembre 2017.

Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Exercice 1
On considère les vecteurs suivants :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

où $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^6$, et les expressions ci-dessous :

a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \overline{y_3} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

d) $x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}$ **e)** $\overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$ **f)** $\overline{\overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3}$

1) Calculer les expressions a), b), c) et f).

2) Parmi toutes les expressions ci-dessus, $a), \dots, f)$, lesquelles sont égales à $X \cdot Y$?

3) Pour les vecteurs X et Y ci-dessous, calculer les expressions a), c) et f) :

$$X = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+3i \\ 1-i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 2+i \\ -2i+1 \\ -i+1 \end{pmatrix}.$$

4) Pour les deux vecteurs X et Y donnés à la question 3), calculer $\|X\|$ et $\|Y\|$.

Exercice 2
Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x^2+2x+1}\right).$$

Exercice 3
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Calculer sa dérivée f'.

3) Étudier les variations de f.

4) En déduire que, pour tout $x \in \,]0;+\infty[$, on a $\ln x < \sqrt{x}$.

Exercice 4
Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1) Justifier que F est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$.

2) Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(a) *Méthode 1 :* Étudier le signe de $F(y) - F(x)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$. En déduire que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) *Méthode 2 :* Calculer la dérivée de F. En déduire que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5
Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^2\, \mathrm{e}^{-2x}\, dx,$ **2)** $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}\, dt.$

Exercice 6
Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0;\pi[$:

$$\sin(x)y'(x) - \cos(x)y(x) = x\sin^3 x.$$

Exercice 7
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = e^{3x}.$$