Chapitre 4

Les fonctions réelles

Pré-requis

- ☐ Maîtriser les notions d'ensembles et leurs opérations
- ☐ Savoir résoudre des équations et des inéquations
- ☐ Connaître la définition d'une droite (équation d'une droite)
- ☐ Connaître les fonctions usuelles et leurs propriétés
- ☐ Connaître les dérivées des fonctions usuelles
- ☐ Avoir une idée de la notion de limite d'une fonction

Objectifs

- ☐ Savoir déterminer le domaine de définition d'une fonction (en particulier pour une fonction composée)
- ☐ Savoir interpréter la signification de la droite tangente à une courbe
- ☐ Maîtriser les opérations sur les dérivées (en particulier pour une fonction composée)
- ☐ Savoir déterminer le sens de variation d'une fonction

Sommaire

Séquence 1 : Les fonctions réelles **5**

Généralités sur les fonctions réelles - Les fonctions bijectives - Les fonctions majorées, minorées et bornées - Les fonctions monotones - Opérations sur les fonctions.

Séquence 2 : Composition de fonctions et continuité, dérivabilité d'une fonction **13**

Composition de fonctions - Continuité d'une fonction - Dérivabilité d'une fonction.

Séquence 3 : Calculs de dérivées **19**

Opérations sur les dérivées - Dérivées successives.

Séquence 4 : L'étude d'une fonction **25**

Étude des variations d'une fonction - Étude de la bijectivité d'une fonction.

Important

Ce chapitre est accompagné d'une fiche contenant toutes les informations sur les fonctions usuelles. Elle est à connaître **par coeur**.

Séquence 1

Les fonctions réelles

1 Généralités sur les fonctions réelles

Définitions – *Fonction réelle, image, antécédent*

Une **fonction réelle** f associe à tout élément x d'un ensemble D de $\mathbb{R}$ un *unique réel* noté $f(x)$. C'est-à-dire

pour tout $x \in D$, il existe un et un seul élément $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.

Soit f une fonction définie sur D.

- ▷ Soit $x \in D$. Le réel $y = f(x)$ est appelé l'**image** de x par f.
- ▷ Soit $y \in \mathbb{R}$. Tout élément $x \in D$ tel que $y = f(x)$ est appelé **antécédent** de y.

Exemples

- ▷ Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 1$. L'image de 4 par f est 7 car $f(4) = 2 \times 4 - 1 = 7$. Un antécédent de -1 est 0 car $f(0) = -1$.
- ▷ Soit la fonction α définie par $\alpha(t) = t^2$. Les antécédents de 4 sont -2 et 2.
- ▷ L'équation $\sin(x) = 1$ a pour solutions $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, les antécédents de 1 par la fonction sinus sont les réels $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarques

- ▷ Toute fonction f définie sur D est une application définie de D dans $\mathbb{R}$.
- ▷ Tout élément de $\mathbb{R}$ peut posséder aucun, un ou plusieurs antécédents. En revanche, l'image d'un élément de D est forcément *unique*.

Définitions – *Domaine de définition et ensemble d'arrivée*

Soit f une fonction réelle définie sur la partie D de $\mathbb{R}$.
L'ensemble D est appelé **domaine de définition** de la fonction f, et noté D_f. L'ensemble des images des éléments de D par f est appelé **ensemble d'arrivée** de f, et noté $f(D_f)$:

$$f(D_f) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in D_f\}.$$

Exemples

- ▷ Soit la fonction réelle f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*.$$
En effet, $D_f = \mathbb{R}^*$ car l'expression $\frac{1}{x}$ existe si et seulement si $x \neq 0$.
De plus, $f(D_f) = \mathbb{R}^*$ car $\frac{1}{x}$ ne s'annule jamais pour $x \in \mathbb{R}^*$.
- ▷ Soit la fonction réelle g définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Alors
$$D_g = [0; +\infty[\ = \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad g(D_g) = [0; +\infty[\ = \mathbb{R}_+.$$
En effet, $D_g = \mathbb{R}_+$ car la racine carrée d'un nombre existe que si et seulement s'il est positif ou nul. Et, $g(D_g) = \mathbb{R}_+$ car la racine carrée d'un nombre est positive ou nulle.

▷ Soit la fonction réelle h définie par $h(x) = \cos(x)$. Alors

$$D_h = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad h(D_h) = [-1; 1].$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Exercice 1.

Donner le domaine de définition et l'ensemble d'arrivée des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = x^2$,
2) $f_2(x) = x^3$,
3) $f_3(x) = \frac{1}{x^2}$,
4) $f_4(x) = \sin x$,
5) $f_5(x) = \tan x$,
6) $f_6(x) = \sqrt[3]{x}$,
7) $f_7(x) = \exp(x)$,
8) $f_8(x) = \ln(x)$.

Attention

Le nom donné aux fonctions ou aux variables n'a pas d'importance, il doit juste être cohérent lors de son utilisation. Par exemple, si la fonction s'appelle g, son domaine de définition est noté D_g (et non D_f).
De plus, il ne faut pas confondre f le nom d'une fonction et $f(x)$ l'image de x par f.

Notation

Soit f une fonction définie sur D de $\mathbb{R}$, et soit F une partie de $\mathbb{R}$ tel que $f(D) \subset F$. Dans ce cas, la fonction se note aussi

$$\begin{aligned} f : D &\to F \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

où

- ▷ $f : D \to F$ se lit « f est définie de D dans F »,
- ▷ $f : x \mapsto f(x)$ se lit « à tout élément x est associé l'élément $f(x)$ ».

Définition

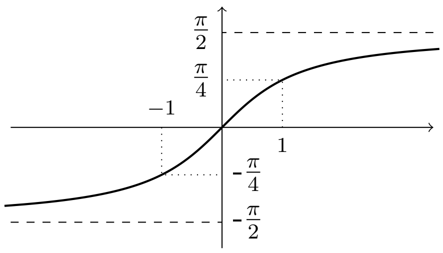
Soit f une fonction définie sur D. Dans un repère orthonormé, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in D$ et $y = f(x)$ est appelé **courbe représentative** (ou **graphe**) de f.

Remarque

Les graphes des fonctions usuelles sont représentés dans la fiche des fonctions usuelles.

Exemple

La fonction arctan est une fonction particulière définie de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dont le graphe est représenté ci-dessous



Les valeurs remarquables

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\tan y$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	y

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(-x) = -\arctan(x).$$

2 Les fonctions bijectives

Définition

Soit $f : E \to F$ une fonction *définie* sur E. La fonction f est dite **bijective** (ou f est une **bijection**) si

tout élément $y \in F$ possède un *unique* antécédent $x \in E$ par f.

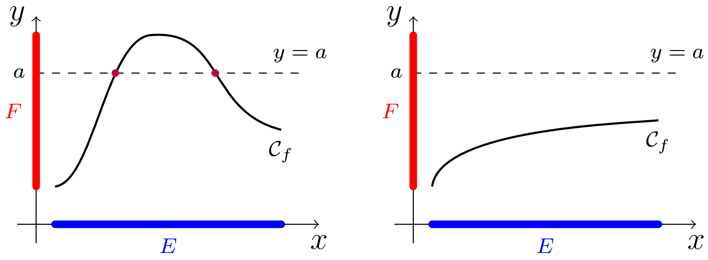
Attention

Il est très important que la fonction f soit définie sur E.

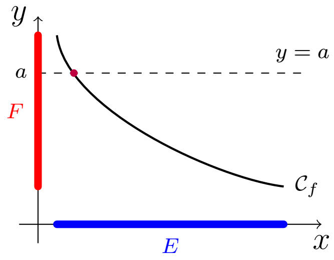
Remarque – *Interprétation géométrique*

Une fonction f est bijective de E dans F si, pour tout $a \in F$, la droite Δ d'équation $y = a$ intersecte la courbe $\mathcal{C}_f$ en un unique point de E.

fonctions non bijectives de E dans F

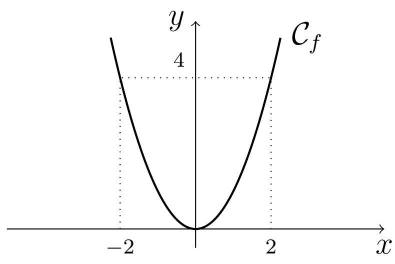


fonction bijective de E dans F



Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ dont voici le graphe



- ▷ La fonction f n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. En effet, $y = 4$ possède deux antécédents : $x = -2$ et $x = 2$.
- ▷ La fonction f n'est pas une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. En effet, $y = -1$ ne possède pas d'antécédents car $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ▷ La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = x^2$: il s'agit de l'élément $x = \sqrt{y}$.

Exercice 2.

1) La fonction exp est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$? de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$?

2) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est-elle bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$? de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$?

3) La fonction ln est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? de $[1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$? de $]0; 1]$ dans $\mathbb{R}_-$?

3 Les fonctions majorées, minorées et bornées

Définitions

Soit f une fonction réelle définie sur $D \subset \mathbb{R}$.

- ▷ La fonction f est dite **positive ou nulle** (ou plus simplement positive) sur D si, pour tout $x \in D$, $f(x) \geq 0$.
- ▷ La fonction f est dite **négative ou nulle** (ou plus simplement négative) sur D si, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq 0$.
- ▷ La fonction f est dite **nulle** sur D si, pour tout $x \in D$, $f(x) = 0$.

Vocabulaire

- ▷ Si, pour tout $x \in D$, $f(x) > 0$, la fonction est dite *strictement* positive sur D.
- ▷ Si, pour tout $x \in D$, $f(x) < 0$, la fonction est dite *strictement* négative sur D.

Exemples

- ▷ Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont positives respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$.
- ▷ La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$.
- ▷ exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- ▷ ln est strictement négative sur $]0;1[$, nulle en 1 et strictement positive sur $]1;+\infty[$.

Définitions

Soient f et g deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$.

- ▷ f est dite **inférieure** à g sur D si, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq g(x)$. On le note $f \leq g$.
- ▷ f est dite **supérieure** à g sur D si, pour tout $x \in D$, $f(x) \geq g(x)$. On le note $f \geq g$.
- ▷ f est dite **égale** à g sur D si, pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$. On le note $f = g$.

Définitions

Soit f une fonction réelle définie sur $D \subset \mathbb{R}$.

- ▷ La fonction f est dite **minorée** sur D s'il existe un réel $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in D$.
- ▷ La fonction f est dite **majorée** sur D s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in D$.
- ▷ La fonction f est dite **bornée** sur D si elle est minorée et majorée sur D.

Remarque

f est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(x)| \leq M$, pour tout $x \in D$.

Exemples

- ▷ Toute fonction positive sur D est minorée sur D par 0, et toute fonction négative sur D est majorée sur D par 0.
- ▷ La fonction arctan est bornée sur $\mathbb{R}$ car, d'après le graphe de la fonction,

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4 Les fonctions monotones

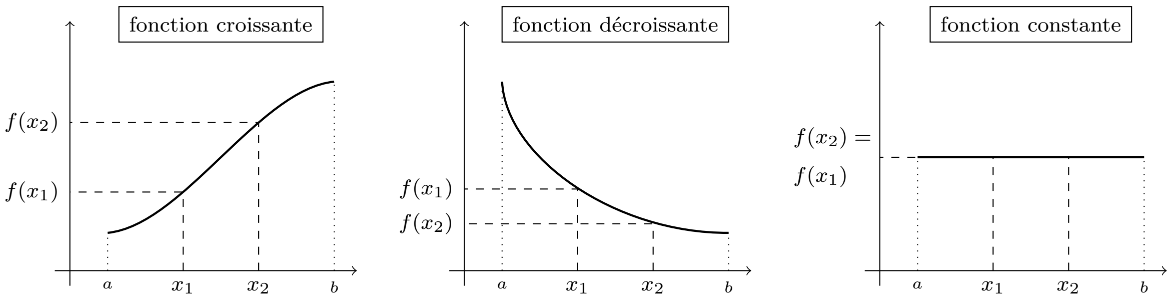
Définitions

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

- ▷ La fonction f est dite **croissante** sur D si pour tous x_1 et x_2 dans D tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- ▷ La fonction f est dite **décroissante** sur D si pour tous x_1 et x_2 dans D tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- ▷ La fonction f est dite **constante** sur D si pour tous x_1 et x_2 dans D, on a $f(x_1) = f(x_2)$.
- ▷ Si une fonction est soit croissante, soit décroissante sur D, la fonction est dite **monotone**.

Remarque – *Interprétation graphique*

Voici la représentation graphique d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante et d'une fonction constante sur l'intervalle $[a; b]$.



Vocabulaire

- ▷ Si, pour tous x_1 et x_2 dans D tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$, la fonction est dite *strictement* croissante.
- ▷ Si, pour tous x_1 et x_2 dans D tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) > f(x_2)$, la fonction est dite *strictement* décroissante.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 \leq x_2$, on a

$$x_1 \leq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{x_1}.$$

Exercice 3.

1) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

2) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$. Est-elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

Attention

La monotonie (croissante ou décroissance) d'une fonction dépend de l'intervalle considéré. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

5 Opérations sur les fonctions

Définitions – *Somme et produit de fonctions*

Soient f et g deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$.

- La **somme** de f et de g est la fonction notée $f+g$ définie sur D par

$$\text{pour tout } x \in D, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

- La **multiplication de f par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{R}$ est la fonction notée λf définie sur D par

$$\text{pour tout } x \in D, \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

- Le **produit** de f par g est la fonction notée fg définie sur D par

$$\text{pour tout } x \in D, \qquad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Exemple

Soient les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \ln(x)$. Les fonctions $f+g$ et fg sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x} + \ln x \quad \text{et} \quad (fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Définitions – *Inverse et quotient de fonctions*

Soient f et g deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$ avec $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$.

- L'**inverse** de g est la fonction notée $\frac{1}{g}$ définie sur D par

$$\text{pour tout } x \in D, \qquad \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}.$$

- Le **quotient** de f par g est la fonction $\frac{f}{g}$ définie sur D par

$$\text{pour tout } x \in D, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Remarque

Si g est une fonction définie sur D_g, alors le domaine de définition de la fonction $\frac{1}{g}$ est

$$D_{\frac{1}{g}} = \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\}.$$

Exemple

Soient les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \ln(x)$. On a $D_f = \mathbb{R}^*$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$. Comme g s'annule en 1, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie par $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ sur

$$D = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid x \neq 1\right\} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.$$

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

Montrer que les fonctions cos et sin sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

Les fonctions suivantes sont-elles bijectives :

1) $f_1(x) = \exp(x)$ de $\mathbb{R}_-$ dans $]0;1]$?

2) $f_2(x) = \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$?

3) $f_3(x) = x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

4) $f_4(x) = \frac{1}{x^2}$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$?

Exercice 3.

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$,

2) $f_2(x) = \tan x$,

3) $f_3(x) = \exp(x - 1)$,

4) $f_4(x) = \arctan(-x)$,

5) $f_5(x) = \ln x + \sqrt{x}$,

6) $f_6(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

Exercice 4.

Les fonctions suivantes sont-elles bijectives sur leur domaine de définition

1) $f_1(x) = \ln(x)$, **2)** $f_2(x) = \cos(x)$, **3)** $f_3(x) = \frac{1}{x}$, **4)** $f_4(x) = \tan(x)$.

Pour les fonctions qui ne sont pas bijectives, donner un intervalle où les fonctions sont bijectives.

Exercice 5.

Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ($D_u = \mathbb{R}$), et soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

1) Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = 0$. Expliquer pourquoi, dans ce cas, l'expression $f(x)$ n'existe pas. En déduire que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \neq 0\}$.

2) Déterminer le domaine de définition de la fonction f pour les fonctions u suivantes

- **a)** $u(x) = 3x - 4$,
- **b)** $u(x) = -18x + 6$,
- **c)** $u(x) = x^2 - 5x + 6$,
- **d)** $u(x) = x^2 + 1$,
- **e)** $u(x) = \cos x$,
- **f)** $u(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

Exercice 6.

Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ($D_u = \mathbb{R}$), et soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\big(u(x)\big)$.

1) Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \leq 0$. Expliquer pourquoi, dans ce cas, l'expression $f(x)$ n'existe pas. En déduire que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > 0\}$.

2) Déterminer le domaine de définition de la fonction f pour les fonctions u suivantes

- **a)** $u(x) = 2x + 4$,
- **b)** $u(x) = 3 - 4x$,
- **c)** $u(x) = x^2 + 1$,
- **d)** $u(x) = x^2 - 2x - 3$,
- **e)** $u(x) = |\cos x|$,
- **f)** $u(x) = \mathrm{e}^{x+1} - 2$.

Exercice 7.

1) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

- **a)** $f_1(x) = \dfrac{x+1}{1-3x}$,
- **b)** $f_2(x) = \dfrac{1-2x}{5-x^2}$,
- **c)** $f_3(x) = \dfrac{-x^2+3x-2}{2x^2-x}$.

2) Étudier le signe de ces fonctions (si nécessaire à l'aide d'un tableau de signe).

Exercice 8.

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

1) Montrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$ en étudiant le signe de $f(x) - \frac{1}{2}$.

2) Montrer que f est minorée par $-\frac{1}{2}$.

Exercice 9.

Soient f et g deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$ telles que $f \leq g$ sur D.

1) **a)** Supposons que f est minorée par le réel m. Traduire cette hypothèse sous la forme d'une inégalité.

b) Justifier que $g(x) \geq m$ pour tout $x \in D$. En déduire que g est minorée par m sur D.

c) En déduire alors que si f est minorée sur D, alors la fonction g est minorée sur D.

2) Montrer que si g est majorée sur D, alors f est majorée sur D.

Exercice 10.

1) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \exp(3-2x)$,

b) $f_2(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2+1}\,\mathrm{e}^{-x}$,

c) $f_3(x) = \exp(5x-1)-1$,

d) $f_4(x) = \ln(7x+5)$,

e) $f_5(x) = \dfrac{\ln(2x+1)}{x^2-1}$,

f) $f_6(x) = \ln(1-3x)-2$.

2) Étudier le signe de ces fonctions (si nécessaire à l'aide d'un tableau de signe).

Exercice 11.

Soit f une fonction croissante sur $D \subset \mathbb{R}$.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction λf est croissante sur D.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_-$. Montrer que la fonction λf est décroissante sur D.

Exercice 12.

Soient f et g deux fonctions croissantes et positives sur $D \subset \mathbb{R}$. Soient $x, y \in D$ tel que $x < y$.

1) Pourquoi l'inégalité $f(x) \leq f(y)$ est vérifiée ? En déduire que $f(x)g(x) \leq f(y)g(x)$?

2) Similairement, montrer que l'inégalité $f(y)g(x) \leq f(y)g(y)$ est vérifiée.

3) En utilisant les questions précédentes, justifier que la fonction fg est croissante sur D.

Exercice 13.

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in D$, $-x \in D$.

> *La fonction f est dite* **paire** *si, pour tout $x \in D$, $f(x) = f(-x)$. La fonction f est dite* **impaire** *si, pour tout $x \in D$, $f(x) = -f(-x)$.*

1) Montrer que les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \sin x$ sont paires.

2) Montrer que les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \tan x$ sont impaires.

3) Montrer que le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.

Séquence 2

Composition de fonctions et continuité, dérivabilité d'une fonction

6 Composition de fonctions

Définition – *Composition de fonctions*

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g. La **composée** de g par f est la fonction notée $g \circ f$ et définie par

$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Son domaine de définition $D_{g\circ f}$ est

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

Remarque

La structure de la fonction est :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x).$$

Exemple

Soient les fonctions $f : x \mapsto x \ln x$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors, $g \circ f$ est définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\,(x \ln x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

Et, comme $D_f = \mathbb{R}_+^*$ et $D_g = \mathbb{R}^*$,

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid f(x) \in \mathbb{R}^*\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid x \ln x \neq 0\right\}.$$

Or, $x \ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1$. Alors,

$$D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid x \neq 0, x \neq 1\right\} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.$$

Remarques

1. On définit de même $f \circ g$. Néanmoins, la fonction $g \circ f$ peut exister sans que la fonction $f \circ g$ existe, et réciproquement.
2. De plus, en général,
$$g \circ f \neq f \circ g \quad \text{et} \quad D_{f\circ g} \neq D_{g\circ f}.$$
Ainsi, l'opération $\circ$ n'est pas **commutative**.

Attention

Il ne faut pas confondre le produit de deux fonctions fg et leur composition $f \circ g$ ou $g \circ f$.

Exemple

Soient les fonctions $f : x \mapsto x-1$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$. Comme $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$, alors $D_{f\circ g} = D_{g\circ f} = \mathbb{R}$. La fonction $g\circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(g\circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{1}{(f(x))^2+1} = \frac{1}{(x-1)^2+1} = \frac{1}{x^2-2x+2}.$$

La fonction $f\circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = g(x)-1 = \frac{1}{x^2+1} - 1 = -\frac{x^2}{x^2+1}.$$

Donc, on a $g\circ f \neq f\circ g$.
Par ailleurs, $(fg)(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$. Ainsi, on a $fg \neq g\circ f$ et $fg \neq f\circ g$.

Exercice 1.

Soient les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x+1$. Déterminer $g\circ f$ et $f\circ g$.

Remarque

En général, plutôt que de construire la fonction $f\circ g$ en partant des fonctions f et g, on réécrit une fonction h sous la forme $h = f\circ g$ avec deux fonctions f et g à déterminer.

Exemple

Soit la fonction $h : x \mapsto \ln(x+4)$. La fonction h est la composée des fonctions $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto x+4$. En effet,

$$(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \ln(g(x)) = \ln(x+4) = h(x).$$

De plus, comme $D_g = \mathbb{R}$ et $D_f = D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} D_h = D_{f\circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}_+^*\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+4 > 0\} = \,]-4;+\infty[\,. \end{aligned}$$

Exercice 2.

Montrer que les fonctions définies ci-dessous sont des composées de deux fonctions à déterminer et en déduire leurs domaines de définition.

a) $h_1(x) = \ln(1-x)$,
b) $h_2(x) = \dfrac{1}{x+1}$,
c) $h_3(x) = \mathrm{e}^{2x^2+1}$,
d) $h_4(x) = (\sin x)^3$,
e) $h_5(x) = (\ln x)^2$,
f) $h_6(x) = \sqrt{x^2-1}$.

7 Continuité d'une fonction

Définition — *Continuité d'une fonction en un point*

Soient f une fonction *définie* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction f est dite **continue** en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Définition — *Continuité d'une fonction sur un intervalle*

Soient f une fonction *définie* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

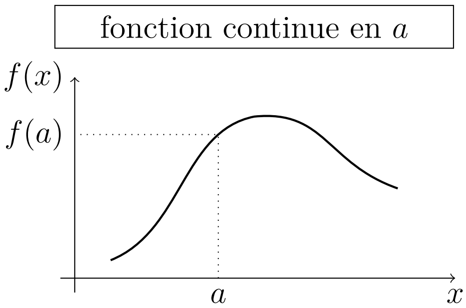
- ▷ La fonction f est dite **continue** sur I si elle est continue en tout point $a \in I$.
- ▷ Une fonction continue sur I est aussi dite **de classe** $\mathcal{C}^0$ sur I, et on le note $f \in \mathcal{C}^0(I)$.

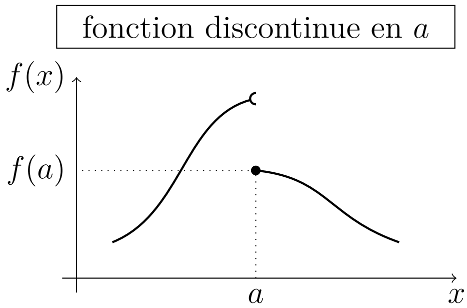
Exemples

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Toutes les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.

Remarque — *Interprétation géométrique*

Graphiquement, une fonction est continue sur l'intervalle I si le graphe de la fonction ne présente aucun saut : il est possible de tracer la courbe en continu « sans lever le stylo ».





8 Dérivabilité d'une fonction

Définition — *Dérivabilité d'une fonction en un point*

Soient f une fonction *continue* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
La fonction f est dite **dérivable** en a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

Cette limite est appelée **dérivée** de f en a et on la note $f'(a)$.

Exemples

1. Soient $c \in \mathbb{R}$, $f : x \mapsto c$ et $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \neq a$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{c - c}{x - a} = 0$. Ainsi,
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0.$$
Donc, la fonction f est dérivable en a et sa dérivée vérifie $f'(a) = 0$.
2. Soient $g : x \mapsto x^2$ et $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \neq a$, $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$. Ainsi,
$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} x + a = 2a.$$
Donc, la fonction g est dérivable en a et sa dérivée vérifie $g'(a) = 2a$.

3. Soit $h : x \mapsto \sqrt{x}$. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Ainsi,

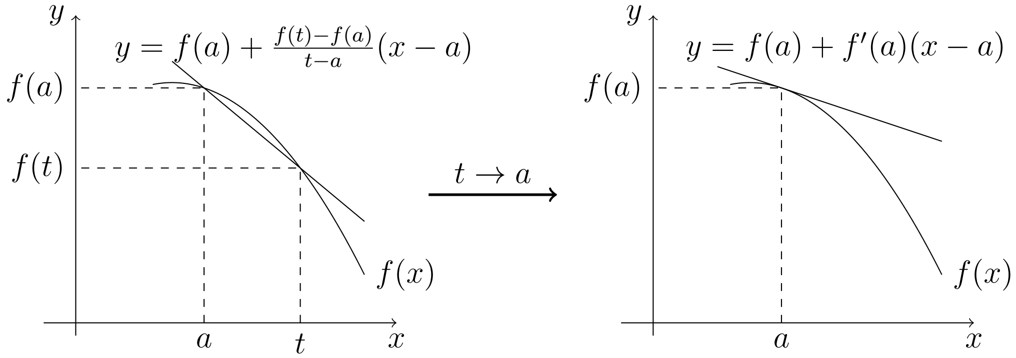
$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Donc, la fonction h n'est pas dérivable en 0.

Remarque – *Interprétation géométrique*

Si f est dérivable en a, la valeur $f'(a)$ représente la pente de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $(a, f(a))$ dont l'équation est

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$



Définitions – *Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle*

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- ▷ La fonction f est dite **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point $a \in I$.
- ▷ La **fonction dérivée** de f est la fonction définie sur I qui à tout $x \in I$ associe $f'(x)$. Elle est notée f'.
- ▷ La fonction f est dite **continûment dérivable** sur I si la fonction dérivée f' est continue sur I. On dit aussi que f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur I, et on le note $f \in \mathcal{C}^1(I)$.

Exemples

- ▷ D'après les exemples précédents, les dérivées des fonctions $f : x \mapsto c$ et $g : x \mapsto x^2$ sont données par
$$f'(x) = 0 \quad \text{et} \quad g'(x) = 2x.$$
En particulier, $D_f = D_g = \mathbb{R}$ et, puisque f' et g' sont continues, on a $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
- ▷ Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leur domaine de définition, exceptées les fonctions $\sqrt{\cdot}$ et $|\cdot|$ qui ne sont pas dérivables en 0. Les dérivées des fonctions usuelles sont données dans la fiche des fonctions usuelles.
- ▷ La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $\mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Attention

Toute fonction dérivable sur I est forcément continue sur I. En revanche, la réciproque est fausse, *e.g.* les fonctions $\sqrt{\cdot}$ et $|\cdot|$ sont continues en 0 mais non dérivables en 0.

Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

1) Calculer la composée $f \circ g$ pour les fonctions f et g suivantes :

a) $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x^2 - 1$,

b) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 2x - 1$,

c) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ et $g(x) = \exp(x)$,

d) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ et $g(x) = \ln(x)$.

2) Déterminer le domaine de définition des fonctions $f \circ g$.

Exercice 2.

Soit u une fonction définie sur un domaine D_u. Déterminer les domaines de définition des fonctions définies par

1) $f_1(x) = \cos(u(x))$,

2) $f_2(x) = u^3(x)$,

3) $f_3(x) = \frac{1}{u(x)}$,

4) $f_4(x) = \sqrt{u(x)}$,

5) $f_5(x) = \ln(u(x))$,

6) $f_6(x) = \exp(u(x))$.

Exercice 3.

1) Exprimer les fonctions définies ci-dessous sont des composées de deux fonctions à déterminer.

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{\cos x}$,

b) $f_2(x) = \sin(\sqrt{x})$,

c) $f_3(x) = \mathrm{e}^{\tan x}$,

d) $f_4(x) = \ln(\ln(x))$,

e) $f_5(x) = \sqrt{x^2 - 4}$,

f) $f_6(x) = (\ln x)^2$.

2) Déterminer le domaine de définition de ces fonctions.

Exercice 4.

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$.

1) **a)** En observant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \leq 2x^2$, montrer que $g(x) \geq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) En étudiant le signe de $g(x) - 2$, montrer que $g(x) < 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire que la fonction $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) En utilisant les questions précédentes, montrer que $-1 \leq (f \circ g)(x) < 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Le **taux d'accroissement** d'une fonction f en a est la fonction τ_a définie par

$$\text{pour tout } x \neq a, \qquad \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

1) Calculer et simplifier le taux d'accroissement pour les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = x$, **b)** $f(x) = 3x$, **c)** $f(x) = 2x - 1$, **d)** $f(x) = x^2$.

2) Calculer la limite des différents taux d'accroissement τ_a précédents lorsque x tend vers a.

3) En déduire que les fonctions f ci-dessus sont dérivables en a. dont il faudra préciser la valeur de la dérivée.

Exercice 6.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^3$ est dérivable en a et $f'(a) = 3a^2$.
Indication : observons que $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$.

Exercice 7.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$, où u est une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$.

1) Déterminer le domaine de définition des fonctions u suivantes :

- **a)** $u(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$,
- **b)** $u(x) = \exp(3x-1)$,
- **c)** $u(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$,
- **d)** $u(x) = \arctan x$,
- **e)** $u(x) = \dfrac{-1-3x}{x^2-x-6}$,
- **f)** $u(x) = \ln(2x-1)$.

2) Déterminer le domaine de définition de la fonction f pour les fonctions u précédentes.

Exercice 8.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(u(x))$, où u est une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$.

1) Déterminer le domaine de définition des fonctions u suivantes :

- **a)** $u(x) = -x^2 - 2x + 3$,
- **b)** $u(x) = \dfrac{x-3}{4x-5}$,
- **c)** $u(x) = \ln(x)$,
- **d)** $u(x) = \dfrac{2-3x}{x^2-1}$,
- **e)** $u(x) = |\cos x|$,
- **f)** $u(x) = \dfrac{2-x}{x^2+2x+1}$.

2) Déterminer le domaine de définition de la fonction f pour les fonctions u précédentes.

Exercice 9.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et soit $a \in \mathbb{R}$.

1) En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction en un point, montrer que

- **a)** $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$,
- **b)** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda u)'(a) = \lambda u'(a)$.

2)

- **a)** Déterminer le taux d'accroissement τ_a pour la fonction uv au point a.
- **b)** Montrer que $\tau_a(x) = \frac{u(x)-u(a)}{x-a} v(x) + u(a)\frac{v(x)-v(a)}{x-a}$, pour tout $x \neq a$.
- **c)** Calculer les limites des expressions $\frac{u(x)-u(a)}{x-a}$, $v(x)$ et $\frac{v(x)-v(a)}{x-a}$ lorsque x tend vers a.
- **d)** En déduire uv est dérivable en a avec $(uv)'(a) = u(a)v'(a) + u'(a)v(a)$.

Exercice 10.

1) Exprimer les fonctions ci-dessous sont des composées de plusieurs fonctions à déterminer.

- **a)** $f_1(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x-1}}$,
- **b)** $f_2(x) = \dfrac{1}{1-\ln x}$,
- **c)** $f_3(x) = \ln^2(\mathrm{e}^x + 1)$,
- **d)** $f_4(x) = \ln(\sqrt{x} - 2)$,
- **e)** $f_5(x) = \dfrac{1}{\ln(1-x)}$,
- **f)** $f_6(x) = \sin(\ln(5-2x))$,
- **g)** $f_7(x) = \cos^3(\mathrm{e}^x + 1) + 1$,
- **h)** $f_8(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 4}$,
- **i)** $f_9(x) = \sqrt{\ln(x-3)}$.

2) Déterminer le domaine de définition de ces fonctions.

Exercice 11.

Soient f et g deux fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$.

1) Supposons que f et g sont deux fonctions impaires. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **a)** Donner une relation entre $g(-x)$ et $g(x)$. Puis appliquer la fonction f sur la relation.
- **b)** Justifier que $f(-g(x)) = -f(g(x))$. En déduire que $f \circ g$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si les fonctions f et g sont paires, alors la fonction $f \circ g$ est paire sur $\mathbb{R}$.

Séquence 3

Calculs de dérivées

9 Opérations sur les dérivées

Propriétés

Soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, sur I, on a

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (\lambda u)' = \lambda u', \qquad (uv)' = u'v + uv'.$$

De plus, si $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(x)\frac{1}{x-1}$. D'après la formule $(uv)' = uv' + u'v$, on a

$$f'(x) = \ln(x)\left(\frac{1}{x-1}\right)' + \Big(\ln(x)\Big)'\frac{1}{x-1} = \ln(x)\left(\frac{1}{x-1}\right)' + \frac{1}{x}\frac{1}{x-1}.$$

Pour calculer la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$, on utilise la formule $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$. Ainsi,

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{(x-1)'}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Au final, on a

$$f'(x) = -\ln(x)\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x\ln(x)}{x(x-1)^2}.$$

Ce résultat se retrouve en appliquant la formule $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ car $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

Remarque

En combinant les formules $(uv)' = u'v + uv'$ et $(\dfrac{1}{v})' = -\dfrac{v'}{v^2}$, on obtient la formule

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Propriétés – *Dérivée d'une composée*

Soient $f : I \to J$ et $u : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors, la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et

$$(f \circ u)' = (f' \circ u)u'.$$

Exemples

1. Soit $g : x \mapsto \sin^3(x)$. Alors $g = f \circ u$ avec $f : x \mapsto x^3$ et $u : x \mapsto \sin(x)$. D'après le tableau des fonctions usuelles, on a $f'(x) = 3x^2$ et $u'(x) = \cos x$, donc
$$g'(x) = (f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big)u'(x) = 3(\sin x)^2 \cos x = 3 \cos x \sin^2 x.$$
2. Soit u une fonction dérivable. Alors, pour $f : x \mapsto x^3$, la fonction $f \circ u$ est définie par $(f \circ u)(x) = u^3(x)$. Comme $f'(x) = 3x^2$, alors
$$(f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big)u'(x) = 3\big(u(x)\big)^2 u'(x) = 3u'(x)u^2(x).$$
3. Soit v une fonction dérivable telle que v ne s'annule pas. Alors, pour $f : x \to \frac{1}{x}$, la fonction $f \circ v$ est définie par $(f \circ v)(x) = \frac{1}{v(x)}$. Comme $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, alors
$$(f \circ v)'(x) = f'\big(v(x)\big)v'(x) = -\frac{1}{v^2(x)}v'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$
Ainsi, on retrouve la formule $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Propriétés – *Dérivées des fonctions composées usuelles*

Fonctions	Dérivées	Condition	Fonctions	Dérivées	Condition
u^n	nu^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^*$	e^u	$u'\,\mathrm{e}^u$	–
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$	$\ln\lvert u\rvert$	$\dfrac{u'}{u}$	$u \neq 0$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$u \neq 0$	$\sin u$	$u' \cos u$	–
$\dfrac{1}{u^n}$	$\dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$	$u \neq 0$ $n \in \mathbb{N}$	$\cos u$	$-u' \sin u$	–
u^α	$\alpha u^{\alpha-1}$	$u > 0$ $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\tan u$	$\dfrac{u'}{\cos^2 u} =$ $u'(1 + \tan^2 u)$	$u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Remarque

Le tableau précédent se déduit de la formule $(f \circ u)' = (f' \circ u)u'$.

Exercice 1.

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes, puis calculer leurs dérivées :

1) $f_1(x) = x^5 - 3x^3 + 5x + 3$,

2) $f_2(x) = \dfrac{3x+1}{x-3}$,

3) $f_3(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$,

4) $f_4(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

5) $f_5(x) = \dfrac{1}{\cos x}$,

6) $f_6(x) = \ln(\ln x)$.

10 Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- ▷ La dérivée de la fonction f', si elle existe, est appelée **dérivée seconde** de la fonction f et est notée f'' ou $f^{(2)}$, c'est-à-dire $f'' = (f')'$.
- ▷ Si f est deux fois dérivable sur I et de dérivée seconde f'' continue sur I, alors f est dite de **classe** $\mathcal{C}^2$ sur I, et on le note $f \in \mathcal{C}^2(I)$.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto x^5 + 3x + \frac{1}{x}$. Sa dérivée f' est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f'(x) = 5x^4 + 3 - \frac{1}{x^2}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)' = \left(5x^4 + 3 - \frac{1}{x^2}\right)' = 20x^3 + \frac{2}{x^3}.$$

De plus, puisque f'' est continue sur $\mathbb{R}^*$, on a $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*)$.

Exercice 2.

Calculer les dérivées secondes des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = -\frac{5}{3}x^3 + x + \frac{7}{5}$, **2)** $f_2(x) = \mathrm{e}^{3x}$, **3)** $f_3(x) = \ln|x|$.

Définition

Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- ▷ La **dérivée d'ordre** n de f (ou **dérivée** n**-ième** de f), notée $f^{(n)}$, est définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} f^{(n)} & = & \left(f^{(n-1)}\right)' \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*, \\ f^{(0)} & = & f. \end{cases}$$

- ▷ Si f est n fois dérivable sur I et de dérivée n-ième $f^{(n)}$ continue sur I , alors elle est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et on le note $f \in \mathcal{C}^n(I)$.
- ▷ De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors elle est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, et on le note $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Dans ce cas, f est dite **indéfiniment dérivable**.

Exemples

- ▷ Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est

$$f'(x) = 2x + 2, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la dérivée seconde de f est

$$f''(x) = 2, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f'' dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(3)}(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 3$, on obtient $f^{(n)} = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.

- ▷ Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = \mathrm{e}^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Et, $f''(x) = \big(f'(x)\big)' = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $f^{(3)}(x) = \big(f''(x)\big)' = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, etc. Ainsi, par récurrence, il est possible de montrer que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \,.$$

▷ Soit $f : x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

La fonction f' est définie sur $\mathbb{R}_+$, mais elle n'est pas dérivable en 0. Donc, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Néanmoins, f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée f'' est

$$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

La fonction f'' est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3.

Calculer les dérivées troisièmes et quatrièmes des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = -\frac{5}{3}x^3 + x + \frac{7}{5}$, **2)** $f_2(x) = \mathrm{e}^{3x}$, **3)** $f_3(x) = \ln|x|$.

À noter

En physique, pour une fonction $t \mapsto x(t)$, la dérivée n-ième est souvent notée $\frac{d^n x}{dt^n}(t)$. En particulier, la dérivée est notée $\frac{dx}{dt}(t)$ ou $\dot{x}(t)$, et la dérivée seconde est notée $\frac{d^2x}{dt^2}(t)$ ou $\ddot{x}(t)$.

Feuille d'exercices de la séquence 3

Exercice 1.

1) Déterminer le domaine de définition des fonctions ci-dessous.

a) $f_1(x) = 2x^2 - 3x - \dfrac{1}{2}$, **c)** $f_3(x) = \dfrac{1}{1-2x}$, **e)** $f_1(x) = \dfrac{2x+3}{x^4+1}$,

b) $f_2(x) = \dfrac{1}{3}x^7 - \dfrac{2}{5}x^2 + 8x$, **d)** $f_4(x) = \dfrac{x-3}{2x-1}$. **f)** $f_6(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2-3x+1}$.

2) Calculer les dérivées pour les fonctions ci-dessus.

Exercice 2.

Soit u une fonction réelle dérivable sur l'intervalle I. Retrouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la formule $(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$:

1) $f_1(x) = u^7(x)$, **3)** $f_3(x) = \sqrt{u(x)}$, **5)** $f_5(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$.

2) $f_2(x) = \dfrac{1}{u^3(x)}$, **4)** $f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$, **6)** $f_6(x) = \ln|u(x)|$.

Exercice 3.

1) Déterminer le domaine de définition des fonctions ci-dessous.

a) $f_1(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$, **c)** $f_3(x) = \sqrt{\exp(-x)}$, **e)** $f_5(x) = \frac{1}{\ln(x)}$,

b) $f_2(x) = \tan^3(x)$, **d)** $f_4(x) = \exp(x^2+1)$, **f)** $f_6(x) = \ln|\cos x|$.

2) Calculer les dérivées pour les fonctions ci-dessus.

Exercice 4.

Soient u une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, et f une fonction définie par $f(x) = \ln(-u(x))$.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f,

2) Calculer la fonction dérivée de f.

Exercice 5.

Soit la fonction $f = \sin$.

a) Donner la dérivée de f. En déduire la valeur en 0.

b) Écrire le taux d'accroissement pour la fonction f en 0.

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Exercice 6.

Calculer la dérivée des fonctions suivantes dont on précisera le domaine de définition :

1) $f_1(x) = \sqrt{\frac{2x^2+1}{x+2}}$, **3)** $f_3(x) = \big(\ln(x^2+1)\big)^7$, **5)** $f_5(x) = \sqrt{1 + x^2(\sin x)^2}$,

2) $f_2(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, **4)** $f_4(x) = (\sin x)^3(\cos x)^3$, **6)** $f_6(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x} - 1}{\mathrm{e}^{1/x} + 1}$.

Exercice 7.

Calculer les dérivées premières et secondes des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = x^3 - 8x - 9,$ **4)** $f_4(x) = \sqrt{x-1},$ **7)** $f_7(x) = \cos(x^2),$

2) $f_2(x) = \ln(x^2),$ **5)** $f_5(x) = \mathrm{e}^{x^2-1},$ **8)** $f_8(x) = \dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x},$

3) $f_3(x) = \dfrac{2}{4-x^2},$ **6)** $f_6(x) = \dfrac{x+1}{x-2},$ **9)** $f_9(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right).$

Exercice 8.

Déterminer les dérivées successives de sin et de cos.

Exercice 9.

Calculer les dérivées n-ième des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = x^4 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{8},$ **2)** $f_2(x) = \cos(3x+1),$ **3)** $f_3(x) = \ln|x|.$

Exercice 10.

1) Montrer que toute fonction $f(x) = Ce^{3x}$, où C est une constante réelle, satisfait l'équation $f' - 3f = 0$.

2) Montrer que toute fonction $f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$, où A et B sont des constantes réelles, satisfait l'équation $f'' + 4f = 0$.

Exercice 11.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

1) Montrer que pour tout $\in \mathbb{R}$ on a $\sqrt{1+x^2}f'(x) = f(x)$.

2) En déduire pour tout réel x que :

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0.$$

Exercice 12.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si f est paire sur $\mathbb{R}$, alors f' est impaire sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si f est impaire sur $\mathbb{R}$, alors f' est paire sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $T \in \mathbb{R}$. Montrer que si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$, alors f' est T-périodique sur $\mathbb{R}$.

Application 13.

Considérons un filtre analogique composé d'une résistance et d'un condensateur. Le déphasage du signal à la sortie du filtre par rapport au signal à l'entrée du filtre est égale à

$$\varphi(f) = -\arctan(2\pi\tau f),$$

où $\tau > 0$ est une constante de temps du filtre et $f \geq 0$ la fréquence du signal.

1) La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est définie par $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Soit u une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la dérivée de la fonction $\arctan \circ u$.

2) Calculer la dérivée de la fonction φ lorsque $f \in [0; +\infty[$.

Séquence 4

L'étude d'une fonction

11 Étude des variations d'une fonction

Définition

On appelle **étude des variations** d'une fonction réelle f, l'étude qui consiste à déterminer les intervalles du domaine de définition où la fonction est croissante et ceux où elle est décroissante.

Généralement, l'étude de variations d'une fonction utilise le résultat suivant.

Propriétés

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Si $f' \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
2. Si $f' \leq 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.
3. Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Ainsi, puisque $f' < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I. Et si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
Attention, ces conditions ne sont pas réciproque. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement décroissante mais sa dérivée en 0 est nulle.

Méthode – *Étude des variations d'une fonction*

1. Calculer f'.
2. Résoudre $f'(x) = 0$.
3. Déterminer les intervalles de x pour lesquels $f'(x) \leq 0$ ou $f'(x) \geq 0$.
4. Dresser le tableau dit **de variation** de la fonction représentant les variations de la fonction.

Attention

Pour pouvoir étudier les variations d'une fonction, il est nécessaire de connaître son domaine de définition. Une fois déterminé, il suffit d'étudier le signe de la dérivée seulement sur ce domaine.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Or,

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-1, 1\}.$$

Et,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty; -1\right] \cup \left[1; +\infty\right[.$$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Donc, la fonction f est croissante sur les intervalles $\left]-\infty; -1\right]$ et $\left[1; +\infty\right[$, et elle est décroissante sur les intervalles $[-1; 0]$ et $[0; 1]$.

Remarque

Pour étudier le signe de la dérivée, on peut aussi utiliser aussi un *tableau de signe*. Pour l'exemple précédent, cela donne :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	$\|$	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Exercice 1.

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 9}.$$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Calculer la dérivée f' de f.

3) En déduire les variations de f.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (x^2 - 3)\,\mathrm{e}^x .$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Calculer la dérivée de f.

3) En déduire les variations de f.

12 Étude de la bijectivité d'une fonction

Théorème – *Théorème de la bijection*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, Si f est *strictement monotone* sur I. Alors, la fonction f est bijective de I dans $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$.

Attention

La continuité et la strictement monotonie de la fonction sont deux conditions suffisantes pour montrer qu'une fonction est bijective. En revanche, il existe des fonctions non continues ou non monotone sur I mais bijectives

Exemple

Soit la fonction $g : x \mapsto \exp(x-1) - x$. Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- ▷ La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$. Ainsi, comme $g(x) > g(0)$ pour tout $x \in]-\infty; 1[$, la fonction g est une bijection de $]-\infty; 1]$ dans $[0; +\infty[$.
- ▷ La fonction g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$. Ainsi, comme $g(x) > g(0)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$, la fonction g est une bijection de $]1; +\infty]$ dans $[0; +\infty[$.

Feuille d'exercices de la séquence 4

Exercice 1.

Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x - 10. \end{array}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Calculer la dérivée de f et établir le tableau de variations de f.

3) La fonction f est-elle monotone sur l'intervalle $]-1;+\infty[$? Et sur l'intervalle $]1;+\infty[$?

Exercice 2.

Soit g la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+5}{x+2}. \end{array}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de g.

2) Calculer la dérivée de g et établir le tableau de variations de g.

3) La fonction g est-elle monotone sur l'intervalle $]-2;+\infty[$?

Exercice 3.

1) La fonction f suivante est-elle bijective ?

$$\begin{array}{rrcl} f : & [0;\pi] & \longrightarrow & [0;1] \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

2) La fonction f suivante est-elle bijective ?

$$\begin{array}{rrcl} g : & \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1;1] \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

Exercice 4.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\sin(x) + \cos(x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Étudions la fonction sur $[0;2\pi]$.

1) Calculer la dérivée de f.

2) En déduire le tableau de variations de f sur $[0;2\pi]$.

3) En déduire que f est une bijection de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ sur un intervalle à déterminer.

Exercice 5.

Soit g la fonction définie par

$$g(x) = 1 - \ln x + 2x^2.$$

1) Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction g.

2) Montrer que $g'(x) = \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x}$.

3) Étudier le signe de g' sur D_g.

4) Calculer $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction g.

5) En déduire que, pour tout nombre réel $x \in D_g$, $g(x)$ est strictement positif.

Exercice 6.

Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, notées respectivement ch et sh, sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1) Montrer que ch est paire et sh est impaire sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Étudier les variations de ces fonctions.

Exercice 7.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - 1 + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right).$$

1) Étudier le signe de $\dfrac{x-2}{x+2}$. En déduire le domaine D_f.

2) Déterminer la dérivée f'.

3) En déduire les variations de f.

Exercice 8.

1) En étudiant le sens des variations de la fonction $f(x) = \sin(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$, en déduire le signe de f puis la propriété :

$$\sin(x) \leq x, \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

2) Montrer que $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que $f = \frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}$.

3) Montrer que la fonction f est une fonction impaire.

4) Calculer f' et dresser le tableau de variations.

5) Déterminer le signe de f.

Feuille d'exercices supplémentaires

Séquence 1

Exercice 1.

Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$.

1) Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) < 0$. Expliquer pourquoi, dans ce cas, l'expression $f(x)$ n'existe pas. En déduire le domaine de définition de la fonction f.

2) Donner le domaine de définition de la fonction f pour les fonctions u suivantes

- **a)** $u(x) = 3x - 1$,
- **b)** $u(x) = -4 - 7x$,
- **c)** $u(x) = x^2 - 2$,
- **d)** $u(x) = x^2 + x - 12$,
- **e)** $u(x) = \sin x$,
- **f)** $u(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}$.

Exercice 2.

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est impaire, croissante et bornée sur $\mathbb{R}$.

Indication : il est nécessaire d'utiliser toutes les propriétés de l'exponentielle.

Exercice 3.

Soient f une fonction croissante et strictement positive sur $D \subset \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est décroissante sur D.

Exercice 4.

Soient f et g deux fonctions croissantes sur $D \subset \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f + g$ est croissante sur D.

Exercice 5.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Notons f_p et f_i les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Montrer que la fonction f peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 6.

Soit $T \in \mathbb{R}$ et soient f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in D$, on a $x + T \in D$.

> *La fonction f est dite* **périodique** *de période T (ou T-périodique) si, pour tout $x \in D$, $f(x+T) = f(x)$.*

1) Montrer que si f est T-périodique sur D, alors $f(x + 2T) = f(x)$, pour tout $x \in D$. En déduire que $2T$ est aussi une période.

2) Montrer que les fonctions cos, sin et tan sont périodiques dont il faudra déterminer la plus petite période.

Séquence 2

Exercice 7.

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = \dfrac{1}{\tan x}$,

2) $f_2(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-1}}$,

3) $f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2x}-3}$,

4) $f_6(x) = \sqrt{5+\ln(x)}$,

5) $f_5(x) = \dfrac{-1-2x}{2-x^2}$,

6) $f_6(x) = \mathrm{e}^{|x|}$,

7) $f_7(x) = \ln|x|$,

8) $f_8(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-4}$,

9) $f_9(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}+1}$,

10) $f_{10}(x) = \ln(\arctan x)$,

11) $f_{11}(x) = \dfrac{1}{\ln(\sqrt{x}-3)}$,

12) $f_{12}(x) = \ln(\tan x)$,

13) $f_{13}(x) = \sqrt{\sin x}$.

Exercice 8.

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si la fonction g est croissante et la fonction f est croissante, alors la fonction $f \circ g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si la fonction g est décroissante et la fonction f est décroissante, alors la fonction $f \circ g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en a et que $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Indication : il est nécessaire d'utiliser l'identité remarquable $A^2 - B^2$.

Exercice 10.

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, et soit $T \in \mathbb{R}$. Montrer que si les fonctions f et g sont T-périodiques, alors la fonction $f \circ g$ est T-périodique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*.$$

1) Calculer f' sur $\mathbb{R}^*$.

2) En déduire une expression simplifiée de f sur $\mathbb{R}_+^*$. Et sur $\mathbb{R}_-^*$?

Exercice 12.

Soient la fonction $f : x \mapsto |x|$ et $g : x \mapsto \frac{|x|}{x}$.

1) Donner le domaine de définition de f. En déduire le domaine de définition de g.

2) Déterminer une expression simplifiée de g sur $\mathbb{R}_+^*$. Même question sur $\mathbb{R}_-^*$.

3) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x) = 1$.

4) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.

5) La fonction $x \mapsto |x|$ est-elle dérivable en 0 ?

Séquence 3

Exercice 13.

Calculer la dérivée de la fonction f définie par

$$f(x) = (\sin x)(\cos x)^3 + (\cos x)(\sin x)^3.$$

Exercice 14.

En utilisant la définition d'une dérivée en un point, montrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Exercice 15.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

> *La fonction f est dite* **convexe** *sur I si, pour tous $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0;1]$*
>
> $$f(\lambda x + (1-\lambda)y \leq \lambda x + (1-\lambda)y.$$

Une caractérisation des fonctions convexes est le théorème suivant

> *Si $f \in \mathcal{C}^2(I)$ et si pour tout $x \in I$ on a $f''(x) \geq 0$, alors f est convexe sur I.*

Soit $f : \,]1; +\infty[\, \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -\ln(\ln x)$ pour tout $x > 1$.

1) Montrer que f est convexe.

2) En déduire que pour tout $x, y \in \,]1; +\infty[$, on a $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{(\ln x)(\ln y)}$.

Exercice 16.

L'objectif de cet exercice est d'approximer une fonction en un point a à l'aide d'un polynôme du premier ou du second degré. Introduisons la notion d'approximation affine d'une fonction :

> *Soit f une fonction dérivable en un réel a. Et notons*
>
> $$\varphi_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a),$$
>
> *où $\varepsilon(x-a)$ est une expression qui tend vers 0 lorsque x tend vers a.*
> *L'expression $\varphi_a(x)$ est appelée* **approximation d'ordre** 1 *(ou approximation affine) de l'expression $f(x)$ lorsque x est proche de a.*

En utilisant la définition ci-dessus, donner une approximation d'ordre 1 des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = x^5 - 3x^3 + 5x + 3$ en 0,

b) $f_2(x) = \sqrt{1+x} - \dfrac{1}{1+x}$ en 1.

Exercice 17.

Soit la fonction g définie par $g(x) = (2x-5)^3$. Montrer que pour tout réel x, on a

$$g(x) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3.$$

où $g^{(k)}(0)$ désigne la valeur en 0 de la k-ème dérivée de g et $k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ est la *factorielle* de k.

Séquence 4

Exercice 18.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - x - 1, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer la fonction dérivée de g.

2) Dresser le tableau de variations de g.

3) Après avoir calculé $g(0)$, étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f.

2) Calculer la dérivée f'.

3) Étudier les variations de f.

4) En déduire que, pour tout $x \in \left]0; +\infty\right[$, on a $\ln x < \sqrt{x}$.

Exercice 20.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à déterminer.

Exercice 21.

1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, croissante sur $\mathbb{R}_-$ et impaire sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire des variations de f sur $\mathbb{R}_+$?

2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et paire. Que peut-on dire des variations de f sur $\mathbb{R}_-$?

3) Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et T-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est croissante sur $\left[0; \frac{T}{2}\right]$, alors la fonction f est croissante sur $\left[T; \frac{3T}{2}\right]$.

Quelques applications

Application 1. — *Étude de la cinétique d'une réaction chimique*

Soit la réaction chimique décrite par le procédé suivant :

$$2N_2O_5 \to 4NO_2 + O_2.$$

L'objectif est d'étudier la *cinétique* de cette réaction, c'est-à-dire la vitesse d'évolution de la concentration du réactif N_2O_5 au cours du temps.

La concentration de N_2O_5 au temps t est noté $[N_2O_5]$; et sa vitesse d'évolution est noté $V = -\frac{d[N_2O_5]}{dt}$. Ainsi, $[N_2O_5]$ est vu comme une fonction f et $\frac{d[N_2O_5]}{dt}$ est vu comme sa dérivée f'.

Or, la réaction chimique précédente est d'ordre 1 pour le réactif N_2O_5. C'est-à-dire que, sa vitesse vérifie l'équation de vitesse suivante :

$$\frac{d[N_2O_5]}{dt} = -k[N_2O_5],$$

où k est la constante de vitesse de la réaction. Mathématiquement, cela se traduit par l'équation $f'(t) = -kf(t)$ à chaque temps t.

Alors, la concentration de N_2O_5 évolue au cours du temps selon la formule :

$$[N_2O_5] = [N_2O_5]_0 \exp(-kt),$$

où $[N_2O_5]_0$ est la concentration initial du réactif N_2O_5.

Vérifier que ce résultat est bon en dérivant la formule ci-dessus puis en contrôlant que le résultat obtenu vérifie l'équation de vitesse.

À retenir

- ☐ Savoir travailler avec les composées de fonctions
- ☐ Savoir dériver une fonction
- ☐ Savoir étudier les variations d'une fonction
- ☐ Interpréter les dérivées d'une fonction

Pour la suite

- ☐ Calcul de primitives de fonctions réelles
- ☐ Étude des fonctions de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$, et calcul de dérivées partielles