Chapitre 9 - Séquence 3

Calcul de la décomposition en éléments simples

6 Méthodes de détermination des coefficients

La notation suivante sera très utile pour la suite.

Notation

Soient $F \in \mathbb{K}(X)$ et $a \in \mathbb{K}$. Lorsque l'on évalue F pour $X = a$, on note

$$[F(X)]_{X=a}.$$

Autrement dit, $[F(X)]_{X=a} = F(a)$.

6.1 La méthode d'identification

Il s'agit de la méthode la plus basique. Celle-ci devient rapidement inutilisable.

Exemples

- La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X(X-1)}$ s'écrit

$$\frac{1}{X(X-1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{(X-1)}.$$

En mettant les termes de droite sous le même dénominateur, on obtient

$$\frac{1}{X(X-1)} = \frac{a(X-1)+bX}{X(X-1)} = \frac{-a+(a+b)X}{X(X-1)},$$

puis par identification, on en déduit $-a = 1$ et $a + b = 0$. Donc $a = -1$ et $b = 1$, d'où

$$F(X) = -\frac{1}{X} + \frac{1}{(X-1)}.$$

- La même méthode appliquée à la fraction rationnelle :

$$\frac{2X+1}{(X-3)(X^2+1)^2} = \frac{c}{X-3} + \frac{a_1X+b_1}{X^2+1} + \frac{a_2X+b_2}{(X^2+1)^2},$$

donne

$$\frac{2X+1}{(X-3)(X^2+1)^2} = \frac{c(X^2+1)^2 + (a_1X+b_1)(X^2+1) + a_2X+b_2}{(X-3)(X^2+1)^2},$$

ce qui amène à de nombreux calculs et à la résolution d'un système à 5 inconnues.

Comme on le voit avec le deuxième exemple, cette méthode devient très rapidement fastidieuse. Elle est à éviter.

6.2 Méthode des pôles simples

Cette méthode permet d'obtenir un coefficient pour un élément simple de première espèce.

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible ayant $\alpha \in \mathbb{K}$ pour pôle *simple*. Alors, on a :

$$F(X) = \frac{P(X)}{(X-\alpha)Q_1(X)},$$

où $(P, Q_1) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $Q_1(\alpha) \neq 0$. La forme de F en produit d'éléments simples s'écrit :

$$F(X) = \underbrace{E(X)}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{c}{X-\alpha}}_{\text{partie polaire associée à } \alpha} + \underbrace{\mathcal{P}(X)}_{\text{parties polaires associées aux autres pôles}}.$$

En multipliant F par $(X-\alpha)$, on a

$$(X-\alpha)F(X) = \frac{P(X)}{Q_1(X)} \quad \text{et} \quad (X-\alpha)F(X) = (X-\alpha)E(X) + c + (X-\alpha)\mathcal{P}(X).$$

Donc

$$\frac{P(X)}{Q_1(X)} = (X-\alpha)E(X) + c + (X-\alpha)\mathcal{P}(X).$$

Méthode – *Pôles simples*

1. On multiplie F par $(X-\alpha)$:

$$\frac{P(X)}{Q_1(X)} = (X-\alpha)E(X) + c + (X-\alpha)\mathcal{P}(X).$$

2. On évalue pour $X = \alpha$:

$$\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = [(X-\alpha)F(x)]_{X=\alpha} = c + \underbrace{\underbrace{[(X-\alpha)]_{X=\alpha}}_{=0}\mathcal{P}(\alpha)}_{=0} = c.$$

Exemples

On reprend les exemples vus précédemment

▷ On a

$$\frac{1}{X(X-1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{(X-1)}.$$

Les pôles 0 et 1 sont simples, on peut donc appliquer la méthode précédente.

- On multiplie par X :

$$\frac{1}{X-1} = a + X\frac{b}{(X-1)},$$

puis on évalue en $X = 0$:

$$\underbrace{\left[\frac{1}{X-1}\right]_{X=0}}_{=-1} = a + \underbrace{\left[X\frac{b}{(X-1)}\right]_{X=0}}_{=0},$$

ce qui donne $-1 = a$.

- On multiplie par $X-1$:
$$\frac{1}{X} = (X-1)\frac{a}{X} + b,$$
puis on évalue en $X=1$:
$$\underbrace{\left[\frac{1}{X}\right]_{X=1}}_{=1} = \underbrace{\left[(X-1)\frac{a}{X}\right]_{X=1}}_{=0} + b,$$
ce qui donne $1=b$.
$$F(X) = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X}.$$

On remarquera qu'il n'a pas été nécessaire de faire le moindre calcul.

▷ Considérons la fraction rationnelle :
$$\frac{2X+1}{(X-3)(X^2+1)^2} = \frac{c}{X-3} + \frac{a_1X+b_1}{X^2+1} + \frac{a_2X+b_2}{(X^2+1)^2}.$$
Alors 3 est un pôle simple. En multipliant par $X-3$ et en évaluant en $X=3$, on obtient
$$\frac{7}{100} = c.$$
Ainsi, on a pu facilement déterminer le coefficient c.

Remarque

Cette méthode est aussi efficace pour déterminer le coefficient c de l'élément simple d'ordre maximal associé à un pôle multiple. Au lieu de multiplier par $(X-\alpha)$, on multiplie par $(X-\alpha)^m$, où α est un pôle d'ordre m et on évalue en $X=\alpha$.

Exemple

Soit $F(X) = \dfrac{1}{X^2(X-1)^3} \in \mathbb{R}(X)$. Sa décomposition en éléments simples est
$$F(X) = \frac{1}{X^2(X-1)^3} = \underbrace{\frac{c_1}{X} + \frac{c_2}{X^2}}_{\text{partie polaire associée à 0}} + \underbrace{\frac{c_3}{X-1} + \frac{c_4}{(X-1)^2} + \frac{c_5}{(X-1)^3}}_{\text{partie polaire associée à 1}},$$
où $c_k \in \mathbb{R}$, pour $k \in [\![1;5]\!]$, sont à déterminer.

▷ On multiplie par X^2 puis on évalue en $X=0$: $c_2=-1$.

▷ On multiplie par $(X-1)^3$ puis on évalue en $X=1$: $1=c_5$.

Au final, on a :
$$F(X) = \frac{c_1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{c_3}{(X-1)} + \frac{c_4}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)^3},$$
et les coefficients c_1, c_3 et c_4 sont à déterminer par d'autres méthodes.

6.3 Méthode des limites infinies

Rappel

On rappelle que la limite à l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient des termes de plus haut degré.

Exemples

- $\triangleright$ $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{X^3+X^2+1}{X^2+X+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^3}{X^2} = \lim_{X\to+\infty} X = +\infty.$
- $\triangleright$ $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{2X^2+1}{-3X^2+X+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{2X^2}{-3X^2} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$
- $\triangleright$ $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{X+1}{-X^4+X+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{-X^4} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{1}{X^3} = 0.$

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ telle que *sa partie entière est nulle.*
On écrit la décomposition en éléments simples de F, puis on calcule la limite :

$$\lim_{X\to\infty} XF(X).$$

Exemple

La forme de la décomposition en éléments simples de $F(X) = \dfrac{X+1}{(X-1)^2}$ est

$$\frac{X+1}{(X-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}.$$

Par la méthode des pôles simples, on obtient $b = 2$.
En multipliant par X, on a

$$\frac{X^2+X}{(X-1)^2} = \frac{aX}{X-1} + \frac{bX}{(X-1)^2}.$$

En prenant la limite pour $X \to \infty$, on obtient

$$\underbrace{\lim_{X\to\infty} \frac{X^2+X}{(X-1)^2}}_{=1} = \underbrace{\lim_{X\to\infty} \frac{aX}{X-1}}_{=a} + \underbrace{\lim_{X\to\infty} \frac{bX}{(X-1)^2}}_{=0}.$$

d'où $a = 1$. Au final,

$$F(X) = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}.$$

Remarque

Lorsque F admet une partie entière E non nulle, on peut appliquer la méthode à $F - E$ c'est-à-dire on calcule la limite

$$\lim_{X\to\infty} X\left(F(X) - E(X)\right).$$

Exemple

La fraction rationnelle
$$F(X) = \frac{2X^2+1}{(X-1)^2}$$
a une partie entière non nulle. En faisant la division euclidienne, on a
$2X^2+1 = 2(X-1)^2 + 4X - 1$, d'où :
$$F(X) = \underbrace{2}_{E(X)} + \underbrace{\frac{4X-1}{(X-1)^2}}_{F_2(X)}.$$
La décomposition en élément simples de $F_2(X) = F(X) - E(X)$ est :
$$F_2(X) = \frac{4X-1}{(X-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}.$$
Par la méthode des pôles simples, on obtient $b = 3$.
En multipliant par X, puis en passant à la limite, on obtient :
$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{4X^2-X}{(X-1)^2}}_{=4} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{aX}{X-1}}_{=a} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{bX}{(X-1)^2}}_{=0}.$$
d'où $a = 4$. Finalement, on a $F(X) = 2 + \frac{4}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2}$.

6.4 Méthode d'évaluations

Lorsqu'il ne reste qu'un ou deux coefficients de la décomposition en éléments simples à déterminer, il suffit d'évaluer la fraction rationnelle et sa décomposition en éléments simples en des valeurs adéquates de X.

Exemple

Soit $F(X) = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$.
La décomposition en élément simples de F est de la forme (le faire en exercice) :
$$F(X) = \frac{a}{(X-1)} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X+1)} + \frac{d}{(X+1)^2}.$$
La méthode des pôles simples permet d'obtenir : $b = \frac{3}{4}$ et $d = -\frac{1}{4}$.
La méthode des limites infinies donne $1 = a + c$.
On évalue $F(X)$ en $X = 0$:
$$\underbrace{\left[\frac{X^3+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}\right]_{X=0}}_{=1} = \underbrace{\left[\frac{a}{X-1}\right]_{X=0}}_{=-a} + \underbrace{\left[\frac{3}{4(X-1)^2}\right]_{X=0}}_{=\frac{3}{4}} + \underbrace{\left[\frac{c}{(X+1)}\right]_{X=0}}_{=c} - \underbrace{\left[\frac{1}{4(X+1)^2}\right]_{X=0}}_{=\frac{1}{4}},$$
ce qui donne $1 = -a + \frac{3}{4} + c - \frac{1}{4}$, d'où $-a + c = \frac{1}{2}$.
Les deux équations : $a + c = 1$ et $-a + c = \frac{1}{2}$ permettent d'obtenir $a = \frac{1}{4}$ et $c = \frac{3}{4}$.
Finalement, on a $F(X) = \frac{1}{4(X-1)} + \frac{3}{4(X-1)^2} + \frac{3}{4(X+1)} - \frac{1}{4(X+1)^2}$.

6.5 Pôles complexes

La méthode des pôles complexes conjugués s'applique lorsque la décomposition en éléments simples contient un élément simple de seconde espèce. Pour l'employer nous aurons besoin du résultat suivant :

Proposition

Soit $\rho \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{I}m(\rho) \neq 0$. Alors, pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$a\rho + b = c\rho + d \iff a = c \quad \text{et} \quad b = d.$$

On dit qu'on procède par identification.

Remarque

Soit $X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}(X)$ un polynôme du second degré à discriminant négatif et soit $\rho \in \mathbb{C}$ une de ses racines complexes. Alors :

$$\mathcal{I}m(\rho) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \rho^2 = -\beta\rho - \gamma.$$

Cette dernière relation est très utile pour évaluer un polynôme en ρ plutôt que d'avoir explicitement l'expression de ρ.

Exemples

Soit $\rho \in \mathbb{C}$ une racine du polynôme $X^2 - X + 1$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 = -3 < 0$. Donc $\mathcal{I}m(\rho) \neq 0$.

- ▷ On cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a - 5)\rho + (b + 1) = 3\rho + 2$. Par identification, on a :

$$(2a - 5)\rho + (b + 1) = 3\rho + 2) \iff \begin{cases} 2a - 5 &= 3, \\ b + 1 &= 2, \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 4, \\ b &= 1. \end{cases}$$

- ▷ Grâce à l'égalité $\rho^2 - \rho + 1 = 0$, on a $\rho^2 = \rho - 1$ et les évaluations suivantes sont plus faciles à calculer et cela sans connaitre l'expression exacte de ρ :

$$[X^2 + X + 2]_{X=\rho} = \rho^2 + \rho + 2 = (\rho - 1) + \rho + 2 = 2\rho + 1,$$

ou

$$[X^3 + X^2 + 1]_{X=\rho} = \rho^3 + \rho^2 + 1 = \rho \underbrace{(\rho - 1)}_{=\rho^2} + \underbrace{(\rho - 1)}_{\rho^2} + 1 = \underbrace{\rho^2 - \rho}_{=\rho(\rho-1)} + \rho = \rho^2 = \rho - 1.$$

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle irréductible et contenant un pôle de seconde espèce d'ordre 1 :

$$F(X) = \frac{P(X)}{(X^2 + \beta X + \gamma)Q_1(X)},$$

où $(P, Q_1) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$, $\beta^2 - 4\gamma < 0$ et $X^2 + \beta X + \gamma$ ne divise ni P, ni Q_1. La décomposition de F en éléments simples est :

$$F(X) = \underbrace{E(X)}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{aX + b}{X^2 + \beta X + \gamma}}_{\substack{\text{partie polaire} \\ \text{associée à } X^2+\beta X+\gamma}} + \underbrace{\mathcal{P}(X)}_{\substack{\text{parties polaires} \\ \text{associées aux autres pôles}}},$$

où a et b sont à déterminer.
Multiplions F par $X^2+\beta X+\gamma$. On a d'une part :

$$(X^2+\beta X+\gamma)F(X)=\frac{P(X)}{Q_1(X)},$$

et d'autre part :

$$(X^2+\beta X+\gamma)F(X)=\big(E(X)+\mathcal{P}(X)\big)(X^2+\beta X+\gamma)+(aX+b),$$

d'où :

$$\frac{P(X)}{Q_1(X)}=\big(E(X)+\mathcal{P}(X)\big)(X^2+\beta X+\gamma)+aX+b.$$

Pour déterminer a et b, on procède comme avec la méthode des pôles simples :

Méthode – *Pôles complexes*

- ▷ Soit $\rho\in\mathbb{C}$ une racine de $X^2+\beta X+\gamma$. On ne calcule pas ρ, par contre on a :

$$\rho^2=-\beta\rho-\gamma.$$

- ▷ On multiplie $F(X)$ par $(X^2+\beta X+\gamma)$:

$$\frac{P(X)}{Q_1(X)}=\big(E(X)+\mathcal{P}(X)\big)\underbrace{(X^2+\beta X+\gamma)}_{=0\text{ pour }X=\rho}+aX+b.$$

- ▷ On évalue l'expression précédente en $X=\rho$:

$$\frac{P(\rho)}{Q_1(\rho)}=a\rho+b\iff P(\rho)=(a\rho+b)Q_1(\rho).$$

- ▷ En utilisant $\rho^2=-\beta\rho-\gamma$, on évalue $P(\rho)$ et $Q_1(\rho)$ et on réécrit :
  - $P(\rho)$ sous la forme $c\rho+d$;
  - $(a\rho+b)Q_1(\rho)$ sous la forme $\hat{a}\rho+\hat{b}$, où $\hat{a}$ et $\hat{b}$ dépendent de a et b.
- ▷ Par identification, on a $\hat{a}=c$ et $\hat{b}=d$ ce qui nous permet d'obtenir a et b.

Exemple

Considérons la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X^2}{(X^2+X+1)(X-1)(X+1)}=\frac{aX+b}{X^2+X+1}+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X+1}.$$

La méthode des pôles simples donne $c=\frac{1}{6}$ et $d=-\frac{1}{2}$. Il reste les coefficients a et b à déterminer.
Soit $\rho\in\mathbb{C}$ une racine de X^2+X+1. En multipliant par X^2+X+1, on a

$$\frac{X^2}{(X-1)(X+1)}=aX+b+(X^2+X+1)\left(\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X+1}\right).$$

En évaluant en ρ, on obtient

$$\underbrace{\left[\frac{X^2}{(X-1)(X+1)}\right]_{X=\rho}}_{=\frac{\rho^2}{\rho^2-1}}=\underbrace{[aX+b]_{X=\rho}}_{=a\rho+b}+\underbrace{\left[(X^2+X+1)\left(\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X+1}\right)\right]_{X=\rho}}_{=0},$$

ce qui donne
$$\frac{\rho^2}{\rho^2-1} = a\rho + b \iff \rho^2 = (a\rho+b)(\rho^2-1).$$
Puisque ρ est une racine de X^2+X+1, on a $\rho^2 = -\rho-1$, d'où
$$-\rho-1 = (a\rho+b)(-\rho-2) = -a\rho^2+(-2a-b)\rho-2b = -a(-\rho-1)+(-2a-b)\rho-2b = -a\rho+a-2b.$$
Par identification, on obtient :
$$-a\rho+(a-2b) = -\rho-1) \iff \left\{\begin{array}{rcl} -a & = & -1, \\ a-2b & = & -1, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1, \\ b & = & 1. \end{array}\right.$$
D'où :
$$F(X) = \frac{X^2+X+1}{(X^2+1)(X^2-1)} = \frac{X+1}{X^2+1} + \frac{\frac{1}{6}}{X-1} - \frac{\frac{1}{2}}{X+1}.$$

Remarque

Tout comme la méthode des pôles simples, cette méthode est aussi efficace pour déterminer les coefficients a_m et b_m de l'élément simple associé à un pôle multiple de seconde espèce d'ordre maximal m :
$$\frac{a_mX+b_m}{(X^2+\beta X+\gamma)^m}.$$
Au lieu de multiplier par $X^2+\beta X+\gamma$, on multiplie par $(X^2+\beta X+\gamma)^m$ et on évalue en $X=\rho$, une racine de $X^2+\beta X+\gamma$.

Exemple

Soit $F(X) = \dfrac{1}{X^2(X^2+X+1)^3} \in \mathbb{R}(X)$. Sa décomposition en éléments simples est
$$F(X) = \frac{1}{X^2(X^2+X+1)^3} = \underbrace{\frac{c_1}{X} + \frac{c_2}{X^2}}_{\text{partie polaire associée à } 0} + \underbrace{\frac{a_1X+b_1}{X^2+X+1} + \frac{a_2X+b_2}{(X^2+X+1)^2} + \frac{a_3X+b_3}{(X^2+X+1)^3}}_{\text{partie polaire associée à } X^2+X+1},$$
où $(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2$ sont à déterminer ainsi que $(a_k,b_k)\in\mathbb{R}^2$, pour $k\in[\![1;3]\!]$.

- ▷ On multiplie par X^2 puis on évalue en $X=0$: $c_2=-1$.
- ▷ On multiplie par $(X^2+X+1)^3$ puis on évalue en $X=\rho$, avec $\rho^2=-\rho-1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^2} = a_3\rho+b_3 &\iff 1 = (a_3\rho+b_3)(-\rho-1) \\
&\iff 1 = -a_3\rho^2+(-a_3-b_3)\rho-b_3, \\
&\iff 1 = -a_3(-\rho-1)+(-a_3-b_3)\rho-b_3, \\
&\iff 1 = -b_3\rho-a_3-b_3, \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & -b_3, \\ 1 & = & -a_3-b_3, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b_3 & = & 0, \\ a_3 & = & -1, \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Au final, on a :
$$F(X) = \frac{c_1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{a_1X+b_1}{X^2+X+1} + \frac{a_2X+b_2}{(X^2+X+1)^2} - \frac{X}{(X^2+X+1)^3},$$
et les coefficients c_1, c_3 et c_4 sont à déterminer par d'autres méthodes.

Chapitre 9

Feuille d'Exercices : Séquence 3

Exercice 1.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles de $\mathbb{R}[X]$ ci-dessous en utilisant, suivant les cas, les méthodes :

- ▷ des pôles simples,
- ▷ des limites infinies,
- ▷ d'évaluations.

1) $F_1(X) = \dfrac{X+3}{X(X-1)}$,

2) $F_2(X) = \dfrac{X^3 - 2X^2 - X + 3}{(X+1)(X+2)}$,

3) $F_3(X) = \dfrac{X+3}{X(X-1)^3}$,

4) $F_4(X) = \dfrac{X^3 - 3X^2 + 7X - 3}{(X-1)(X^2 - 2X + 3)}$.

Exercice 2.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles de $\mathbb{R}(X)$ ci-dessous en utilisant la méthode des pôles complexes.

1) $F_1(X) = \dfrac{X^3 - 3X^2 + 7X - 3}{(X-1)(X^2 - 2X + 3)}$,

2) $F_2(X) = \dfrac{X^2 + 2X - 1}{(X^2 + X + 1)^2(X-2)}$,

3) $F_3(X) = \dfrac{2X+4}{(X+1)^2(X^2+1)}$.

4) $F_4(X) = \dfrac{X^2 + X + 4}{(X+1)^2(X^2+1)^2}$.

Exercice 3.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles de $\mathbb{R}(X)$ ci-dessous.

1) $F_1(X) = \dfrac{X^2 - X - 2}{(X-1)(X-2)^3(X^2 - 4X + 5)}$,

2) $F_2(X) = \dfrac{10X^6 + 7X^5 - X^4 - 66X^3 + 82X^2 - 24X + 184}{(X^2 + 3X + 4)^2(X^2 - 3X + 2)(X-2)}$,

7 Intégration des fractions rationnelles

La décomposition en éléments simples permet d'intégrer *toutes* les fractions rationnelles.

7.1 Primitives des éléments simples de première espèce

Rappel

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)^n}$ admet sur $]-\infty;\alpha[$ et sur $]\alpha;+\infty[$ les primitives suivantes :

1. $x \mapsto \ln|x-\alpha|$ si $n=1$,
2. $x \mapsto \dfrac{-1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}}$ si $n \geq 2$.

Exemple

Calculons l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x+1)^3}\,dx.$$

La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(X-2)(X+1)^3} \in \mathbb{R}(X)$ est donnée par

$$\frac{1}{(X-2)(X+1)^3} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{d}{(X+1)^3},$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
La méthode des pôles simples donne : $a = \frac{1}{27}$ et $d = -\frac{1}{3}$.
La méthode des limites infinies donne : $0 = a + b$ donc $b = -\frac{1}{27}$.
En évaluant en $X = 0$ on obtient : $-1 = -a + 2b + 2c + 2d$ donc $c = -\frac{1}{9}$.
On en déduit

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{1}{27(x-2)} - \frac{1}{27(x+1)} - \frac{1}{9(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)^3}\,dx \\
&= \frac{1}{27}\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{27}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{9}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx \\
&= \frac{1}{27}\Big[\ln|x-2|\Big]_0^1 - \frac{1}{27}\Big[\ln|x+1|\Big]_0^1 - \frac{1}{9}\left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{2(x+1)^2}\right]_0^1 dx \\
&= -\frac{1}{27}\ln 2 - \frac{1}{27}\ln 2 - \frac{1}{18} - \frac{1}{8} = -\frac{2}{27}\ln 2 - \frac{13}{72}.
\end{aligned}$$

L'exemple précédent n'a posé aucun problème car la décomposition en éléments simples ne contenaient que des éléments simples *de première espèce*. Il n'en est pas de même lorsque celle-ci contient un élément simple de seconde espèce.

7.2 Intégration des éléments simples de seconde espèce d'ordre 1

Exemple

Soit l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2-2x+2}\,dx.$$

Puisque le polynôme X^2-2X+2 a pour discriminant $4-8=-4<0$, la fraction rationnelle $\frac{X+1}{X^2-2X+2}$ est déjà décomposée en éléments simples et ne contient qu'un élément simple de seconde espèce. Calculons cette intégrale.

1. On fait apparaître le terme de la forme $\frac{u'}{u}$, où $u(x) = x^2-2x+2$. On a alors $u'(x) = 2x-2$.

$$\frac{x+1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{2}x+\mathbf{2}}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\frac{2x\mathbf{-2}+\mathbf{4}}{x^2-2x+2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\underbrace{\frac{2x-2}{x^2-2x+2}}_{=\frac{u'(x)}{u(x)}} + \mathbf{2}\frac{1}{x^2-2x+2}$$

2. On transforme $\dfrac{1}{x^2-2x+2}$ sous la forme $\dfrac{1}{t^2+1}$.
Pour cela, on détermine la forme canonique du polynôme x^2-2x+2 :

$$x^2-2x+2 = \underbrace{(x-1)^2}_{=t^2}+1.$$

3. On calcule l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x+1}{x^2-2x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln|x^2-2x+2|\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\ln(2) + 2\underbrace{\Big[\arctan(x-1)\Big]_0^1}_{=-\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Finalement, $I = -\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{2}$.

Méthode — *Intégration d'un élément simple de seconde espèce d'ordre 1*

Soit $(a,b,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^4$ avec $\beta^2-4\gamma<0$. On souhaite calculer une primitive de la fonction suivante :

$$x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+\beta x+\gamma}.$$

1. On pose $u(x) = x^2+\beta x+\gamma$, puis on détermine $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{ax+b}{x^2+\beta x+\gamma} = c\underbrace{\frac{u'(x)}{u(x)}}_{\text{primitive connue}} + \frac{d}{x^2+\beta x+\gamma}.$$

2. On réécrit $\frac{d}{x^2+\beta x+\gamma}$ sous la forme

$$\frac{d}{x^2+\beta x+\gamma} = \frac{e}{t^2+1},$$

où $e \in \mathbb{R}$.

3. On calcule l'intégrale en sachant qu'une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$ et qu'une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est $t \mapsto \arctan(t)$.

Exemple

Calculons l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+x+1}\, dx.$$

On a

$$\frac{2X+3}{X^2+X+1} = \frac{2X+1+2}{X^2+X+1} = \frac{2X+1}{X^2+X+1} + 2\,\frac{1}{X^2+X+1}.$$

De plus, la forme canonique de X^2+X+1 est

$$X^2+X+1 = \left(X-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+1\right).$$

On note $\alpha = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, alors

$$X^2+X+1 = \frac{3}{4}\left(\left(\alpha X - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1\right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx + 2\int_1^2 \frac{1}{x^2+x+1}\, dx \\
&= \Big[\ln|x^2+x+1|\Big]_1^2 + \frac{8}{3}\int_1^2 \frac{1}{\left(\alpha x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}\, dx \\
&= \Big[\ln|x^2+x+1|\Big]_1^2 + \frac{8}{3\alpha}\left[\arctan\left(\alpha x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]_1^2 \\
&= \ln 7 - \ln 3 + \frac{8}{3\alpha}\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

7.3 Intégration des éléments simples de seconde espèce d'ordre n

On a vu précédemment comment intégrer un élément simple de seconde espèce d'ordre 1, c'est-à-dire de la forme

$$\frac{aX+b}{X^2+\beta X+\gamma},$$

où $(a,b,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^4$. Or une décomposition en éléments simples peut contenir des éléments simples de seconde espèce d'ordre $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, c'est-à-dire de la forme

$$\frac{aX+b}{(X^2+\beta X+\gamma)^n},$$

où $(a,b,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^4$.

Méthode – *Intégration d'un élément simple de seconde espèce d'ordre n*

Soit $(a,b,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^4$ avec $\beta^2 - 4\gamma < 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.
Pour intégrer la fonction

$$x \mapsto \frac{ax+b}{(x^2+\beta x+\gamma)^n},$$

on procède de la manière suivante :

1. On décompose en deux fractions rationnelles :
$$\frac{aX+b}{(X^2+\beta X+\gamma)^n} = a_1 \underbrace{\frac{2X+\beta}{(X^2+\beta X+\gamma)^n}}_{\frac{u'}{u^n}} + a_2 \frac{1}{(X^2+\beta X+\gamma)^n},$$
où a_1 et a_2 sont des réels à déterminer. Le premier terme admet une primitive usuelle.
2. On calcule la forme canonique du polynôme $X^2+\beta X+\gamma$ pour le mettre sous la forme t^2+1 :
$$X^2+\beta X+\gamma = \delta^2 \Big(\underbrace{\left(\frac{X+\frac{\beta}{2}}{\delta}\right)^2}_{t^2} + 1 \Big), \quad \text{où} \quad \delta^2 = -\frac{\beta^2-4\gamma}{4} > 0.$$
3. En effectuant le changement de variable $t = \frac{x+\frac{\beta}{2}}{\delta}$, on se ramène à un calcul d'intégrale de la forme :
$$\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\, dt.$$
4. On calcule $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\, dt$ par la méthode donnée ci-dessous.

Méthode – *Calcul de la primitive de $t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)^n}$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$R_n = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\, dt.$$

▷ Si $n = 1$,
$$R_1 = \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \arctan(t) + k,$$
où $k \in \mathbb{R}$.

▷ Si $n \geq 2$,
$$R_n = \int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^n}\, dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}\, dt - \int \underbrace{t}_{u(t)} \underbrace{\frac{t}{(t^2+1)^n}}_{v'(t)}\, dt.$$
En faisant une intégration par parties sur le dernier terme, on obtient une expression de la forme :
$$R_n(t) = \frac{2n-3}{2(n-1)} R_{n-1}(t) + g_n(t),$$
et connaissant $R_1(t)$, on calcule de proche en proche $R_n(t)$.

Chapitre 9

Feuille d'Exercices : Séquence 4

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-6x+1}{x^2-x-6}\,dx$,

2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x-8}{(x-5)^2}\,dx$,

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$,

4) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$.

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt.$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une primitive de $t \mapsto \dfrac{t}{(t^2+1)^n}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$.

3) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$I_n(x) = I_{n-1}(x) - \int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^n}\,dt.$$

En déduire, en faisant une intégration par parties, que pour $n \geq 2$:

$$I_n(x) = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}(x) + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

4) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $I_2(x)$, puis $I_3(x)$.

Exercice 3.

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Calculer les intégrales suivantes en effectuant un changement de variable approprié.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\operatorname{ch} t}\,dt$,

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\operatorname{sh} t}{1+\operatorname{ch} t}\,dt$.

Exercice 4.

La *règle de Bioche* est une règle pour effectuer des changements de variable dans le cas des fonctions rationnelles trigonométriques. Considérons une fonction f définie par

$$f(x) = F(\sin x, \cos x),$$

où $F(\sin x, \cos x)$ est une expression rationnelle ne dépendant que de $\sin x$ et $\cos x$. Il est possible de poser les changements de variable suivants :

- ▷ si $f(-x) = -f(x)$, poser $u(x) = \cos x$ et utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- ▷ si $f(\pi - x) = -f(x)$, poser $u(x) = \sin x$ et utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- ▷ si $f(\pi + x) = f(x)$, poser $u(x) = \tan x$ et utiliser les relations

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}.$$

- ▷ sinon, poser $u(x) = \tan(\frac{x}{2})$ et utiliser les relations

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}.$$

Appliquer la régle de Bioche pour calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t) - 5\sin(t) + 6}\, dt,$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(t)}{1 + \cos(t)}\, dt,$

3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) - 2}{\sin(t)}\, dt,$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{1 + \tan(t)}\, dt,$