Chapitre 7

Systèmes linéaires

Pré-requis

- ☐ Nombres complexes.
- ☐ Espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$.

Objectifs

- ☐ Savoir reconnaître un système linéaire.
- ☐ Savoir résoudre un système échelonné.
- ☐ Savoir utiliser la méthode de Gauss.

Sommaire

Chapitre 7 - Séquence 1

Systèmes linéaires échelonnés et méthode de Gauss

1 Définition d'un système linéaire

Ce chapitre porte sur la résolution des systèmes linéaires d'équations. La première étape consiste donc à identifier un système linéaire d'équations.

Exemples

- ▷
$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 2y & = & -1 \\ 3x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$
est un système linéaire à 2 équations et 2 inconnues (x et y).
- ▷
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}\right.$$
est un système linéaire à 3 équations et 3 inconnues (x, y et z).
- ▷ Une simple équation comme :
$$2x + 3y + 4z + 5t = 9$$
est aussi un système linéaire mais avec 1 seule équation et 4 inconnues (x, y, z et t).
- ▷
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 5y & & & = & -2 \\ -2x & - & y & + & z & = & -2\sqrt{6} \end{array}\right.$$
est un système linéaire de 2 équations et 3 inconnues.
- ▷
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 39 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 34 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 26 \end{array}\right.$$
est un système linéaire de 3 équations et 4 inconnues (x_1, x_2, x_3 et x_4).

Les inconnues peuvent être écrites avec n'importe quelles lettres. En général, lorsqu'il y a 4 inconnues ou plus, on note celles-ci x_1, x_2, x_3, ...

Attention

Tous les systèmes ne sont pas forcément linéaires.

Exemples

Les systèmes ci-dessous ne sont pas linéaires

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} e^x & + & y & = & 1 \\ x & + & \sin(y) & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & 1 \\ x^2 & + & (y-5)^2 & = & 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & xy & = & 3 \\ x^2 & + & y & = & 2 \end{array}\right.$$

car e^x, $\sin(y)$, x^2, $(y-5)^2$ et xy ne s'écrivent pas ax ou by avec a, b des nombres réels ou complexes (c'est-à-dire : ce ne sont pas des combinaisons linéaires de x et de y).

Pour la suite, on utilisera les notations suivantes :

Notations

1. $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.
2. n et p sont deux entiers naturels non nuls.

De manière rigoureuse, la définition générale des systèmes linéaires d'équations est donnée ci-dessous.

Définition – *Système linéaire*

On appelle **système linéaire à n équations et p inconnues** tout système d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \quad L_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2, \quad L_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n, \quad L_n \end{array}\right. \tag{1}$$

où, pour tous $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$, a_{ij}, b_i sont des réels ou des complexes donnés. Enfin, $L_1, \dots, L_n$ désignent les lignes du système.
Les termes $x_1, \dots, x_p$ sont les **inconnues** du système, le vecteur $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ est appelé le **second membre** et les termes $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$, sont appelés les **coefficients** du système.

Exemples

- Le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & + & 2y & = & -1 \\ 3x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

est de la forme (1) avec $n = p = 2$, $a_{11} = 4$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = -1$ et $b_1 = -1$, $b_2 = 2$.

- Le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}\right.$$

est de la forme (1) avec $n = p = 3$,

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 3, & a_{12} = 2, & a_{13} = 1, \\ a_{21} = 2, & a_{22} = 3, & a_{23} = 1, \\ a_{31} = 1, & a_{32} = 2, & a_{33} = 3, \end{array}$$

et $b_1 = 39$, $b_2 = 34$, $b_3 = 26$.

- L'équation

$$2x + 3y + 4z + 5t = 9,$$

est de la forme (1) avec $n = 1$ et $p = 4$, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 4$, $a_{14} = 5$.

- Le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x_1 - 5x_2 + 2 & = & x_1 \\ 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3 & = & x_2 \end{array}\right.$$

est un système linéaire car il s'écrit aussi

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 5x_2 & & & = & -2 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2\sqrt{6} \end{array}\right.$$

qui est bien de la forme (1) avec $n = 2$ et $p = 3$.

Exercice 1.

Déterminer (en justifiant votre réponse) parmi les systèmes suivants lesquels sont linéaires :

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} -2x + y & = & 1 \\ x^2 + (y-5)^2 & = & 4 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} x + 3y & = & 1 \\ -4x + y & = & 2 \\ x - y & = & 5 \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x + iy + 3z & = & 0 \\ y - (1+i)z & = & 2i \\ x + y + z & = & 1 \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{rcl} x - y + 10z & = & 4 \\ 3x + 2y - z & = & 2 \\ 4i\,x + (i-1)y & = & 1 - yz \end{array}\right.$$

Lorsque l'on veut résoudre un système linéaire, trois cas sont possibles :

- ▷ il existe une unique solution,
- ▷ il existe une infinité de solutions,
- ▷ il n'existe aucune solution.

2 Systèmes échelonnés

Certains systèmes ont une forme particulière qui permet de les résoudre simplement, c'est le cas des systèmes dits *échelonnés*.

Définition

1. Un système est **échelonné** si le nombre de coefficients nuls en début de ligne croît strictement ligne après ligne.
2. Dans un système échelonné, pour chaque ligne, les premières inconnues ayant un coefficient non nul sont appelées **inconnues principales**.
3. Une inconnue non principale est dite **inconnue secondaire**.

Exemples

- ▷ Le système de 3 équations à 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & -x_2 & -2x_3 & & = & 4 \\ & & & 3x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

est échelonné. En effet,

- la première ligne débute par un coefficient non nul ($a_{11} = 2$), l'inconnue x_1 est donc une inconnue principale ;
- la seconde ligne débute avec un coefficient nul ($a_{21} = 0$), le premier coefficient non nul est a_{22} donc l'inconnue x_2 est une inconnue principale ;
- la troisième ligne débute avec trois coefficients nuls ($a_{31} = 0$, $a_{32} = 0$ et $a_{33} = 0$), le premier coefficient non nul est a_{34} donc l'inconnue x_4 est une inconnue principale ;

- l'inconnue x_3 n'est pas une inconnue principale, c'est donc une inconnue secondaire.

▷ Le système de 3 équations et 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & & -2x_3 & & = & 4 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

n'est pas échelonné car la deuxième et la troisième ligne débutent par le même nombre de coefficients nuls (L_2 et L_3 commencent avec x_3).

Remarque

Un système linéaire à n équations et n inconnues échelonné est dit **triangulaire supérieur**. Il est alors de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & \dots & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, & L_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \dots & \dots & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, & L_2 \\ & & & & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3, & L_3 \\ & & & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n, & L_n \end{array}\right. \tag{2}$$

où, pour tous $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;n]\!]$, les coefficients a_{ij} et b_i sont des réels ou des complexes donnés et $x_1, \dots, x_n$ sont les inconnues.

Méthode – *Principe de remontée*

▷ Résoudre la dernière équation. Dans le cas où cette équation admet plusieurs inconnues, exprimer l'inconnue principale en fonction des inconnues secondaires.

▷ Résoudre successivement les équations en remontant le système jusqu'à la première ligne.

Exemples

▷ Résolvons le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 2x & + & 2y & + & z & + & (1+i)t & = & 2 & L_1 \\ & & y & - & z & + & 5t & = & 5i & L_2 \\ & & & & z & + & 2i\,t & = & 2 & L_3 \\ & & & & & & 3t & = & 3 & L_4 \end{array}\right.$$

Ce système est bien échelonné (il est même triangulaire) et les inconnues x, y, z, t sont toutes principales.

- D'après la dernière ligne L_4, on a $3t = 3$ donc $t = 1$.
- En injectant $t = 1$ dans la troisième ligne L_3, on obtient $z+2i = 2$, donc $z = 2-2i$.
- En faisant de même avec L_2, on obtient

$$y - z + t = 5i \implies y = 5i + z - t = 5i + 2 - 2i - 1 = 1 + 3i.$$

- Pour la première ligne L_1, on a

$$2x+2y+z+(1+i)t = 2 \implies 2x = 2-2y-z-(1+i)t = -3-5i \implies x = \frac{-3+5i}{2}.$$

Donc la solution est $(x, y, z, t) = \left(\frac{-3+5i}{2}, 1+3i, 2-2i, 1\right)$. On pourra vérifier que le résultat est juste en réinjectant la solution dans le système.

▷ Résolvons le système

$$\begin{cases} 2x + 2y + z + t = 2 \\ \quad\quad y - z + 5t = 5 \\ \quad\quad\quad\quad z + 2t = 2 \end{cases}$$

Le système est bien échelonné, x, y, z sont des inconnues principales et t est une inconnue secondaire.
La dernière équation contient l'inconnue principale z et l'inconnue secondaire t.
Résoudre cette équation revient donc à exprimer z en fonction de t :

$$z + 2t = 2 \implies z = 2 - 2t.$$

Ensuite, on remonte le système :

- $y - z + 5t = 5 \implies y = 5 - 5t + z = 5 - 5t + (2 - 2t) = 7 - 7t = 7(1 - t)$.
- $2x + 2y + z + t = 2 \implies 2x = 2 - 2y - z - t = 2 - 14 + 14t - 2 + 2t - t = -14 + 15t$ $\implies x = \dfrac{-14 + 15t}{2}$.

Il n'y a pas de valeur précisée pour t. Autrement dit, on peut choisir la valeur que l'on veut pour t. On en déduit que ce système admet une infinité de solutions qui forment l'ensemble suivant :

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{-14 + 15t}{2}, 7 - 7t, 2 - 2t, t\right) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Remarque

Un système échelonné admet

▷ soit une unique solution (lorsque toutes les inconnues sont principales),

▷ soit une infinité.

Exercice 2.

Résoudre les systèmes échelonnés suivants :

$$a) \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ \quad\quad y + 10z = -28 \\ \quad\quad\quad - 14z = 42 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ \quad\quad y - 2z = 2 \end{cases}$$

3 Méthode de résolution de Gauss

Définition

On dit que deux systèmes linéaires S_1 et S_2 sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions, ce que l'on note

$$S_1 \iff S_2.$$

Pour résoudre un système linéaire, on transforme celui-ci en un système linéaire équivalent qui soit simple à résoudre (notamment échelonné). Pour cela, on utilise le résultat suivant :

Théorème

Soit S un système linéaire de lignes $L_1, \ldots, L_n$. Alors, les opérations élémentaires ci-dessous transforment S en un système linéaire équivalent.

- ▷ Permuter deux lignes L_i et L_j, cela sera noté $L_i \longleftrightarrow L_j$.
- ▷ Multiplier une ligne L_i par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$, cela sera noté $L_i \longleftarrow \lambda\, L_i$.
- ▷ Ajouter à la ligne L_i un multiple de la ligne L_j, avec $j \neq i$, cela sera noté $L_i \longleftarrow L_i + \lambda\, L_j$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

À travers des exemples, on applique ce théorème pour transformer un système linéaire donné en un système échelonné.
La méthode de résolution employée s'appelle la **méthode de Gauss**.

Exemple

Considérons le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \\ 3x & & & + & 8z & = & 8 \end{array}\right.$$

En permutant L_1 et L_2, on a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \\ 3x & & & + & 8z & = & 8 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftrightarrow L2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & & & 8z & = & 8 \end{array}\right.$$

- ▷ Pour obtenir un système échelonné, on cherche à éliminer x dans les deux dernières équations.
  Pour cela, on effectue les deux opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & & & + & 8z & = & 8 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & & & = & -5 \\ & - & 3y & + & 5z & = & -1 \end{array}\right.$$

- ▷ De même, on élimine y dans la dernière équation. Pour cela, on effectue $L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & & & = & -5 \\ & - & 3y & + & 5z & = & -1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & & & = & -5 \\ & & & & 5z & = & -16 \end{array}\right.$$

Ces deux étapes peuvent s'écrire succinctement de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & & & + & 8z & = & 8 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & & & = & -5 \\ & - & 3y & + & 5z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & & & = & -5 \\ & & & & 5z & = & -16 \end{array}\right.$$

Il reste donc à résoudre le système échelonné obtenu (exercice).

Attention

Lorsque l'on effectue des opérations sur les lignes, il ne faut pas oublier d'appliquer ces opérations sur le second membre (terme à droite de l'égalité).

On donne ci-dessous d'autres exemples de résolution.

Exemples

- ▷ Résolvons le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & + & 6y & + & 9z & = & 1 \\ 3x & + & 10y & + & 8z & = & 5 \end{array}\right.$$

On a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & + & 6y & + & 9z & = & 1 \\ 3x & + & 10y & + & 8z & = & 5 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ & & 2y & + & 3z & = & -7 \\ & & 4y & - & z & = & -7 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ & & 2y & + & 3z & = & -7 \\ & & & - & 7z & = & 7 \end{array}\right.$$

La résolution du système échelonné donne la solution $(11, -2, -1)$ (exercice). On peut alors vérifier que $(11, -2, -1)$ est bien la solution du système linéaire initial.

- ▷ Résolvons le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}\right.$$

On a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-5L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ & - & 7y & + & 11z & = & 10 \\ & - & 7y & + & 11z & = & 7 \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations sont impossibles car en les soustrayant on obtient $0 = 3$. Le système n'admet donc aucune solution et l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \emptyset$.

- ▷ On considère le système linéaire à 4 inconnues x, y, z, t et trois équations suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0. \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ & & 2y & - & z & + & t & = & 0 \\ & - & y & & & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ & - & y & & & - & t & = & 0 \\ & & 2y & - & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ & - & y & & & - & t & = & 0 \\ & & & - & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce dernier système est échelonné d'inconnues principales x, y, z et d'inconnue secondaire t. On obtient alors $x = 0$ et $y = z = -t$. Ainsi, il existe une infinité de solutions et l'ensemble de ces solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{(0, -t, -t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Afin de se ramener à un système simple, il peut être nécessaire de faire des permutations de lignes comme on peut le voir dans les exemples ci-dessous.

Exemples

▷ Résolvons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & + & 6y & + & 4z & = & 1 \\ 3x & + & 10y & + & 8z & = & 5 \end{array}\right.$$

Ici, puisque L_1 ne contient pas l'inconnue x, il faut d'abord permuter la ligne L_1 avec la ligne L_2 pour pouvoir ensuite éliminer x dans la ligne L_3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & + & 6y & + & 4z & = & 1 \\ 3x & + & 10y & + & 8z & = & 5 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 6y & + & 4z & = & 1 \\ & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 3x & + & 10y & + & 8z & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 6y & + & 4z & = & 1 \\ & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ & & y & + & 2z & = & \frac{7}{2} \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 6y & + & 4z & = & 1 \\ & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ & & & & \frac{1}{2}z & = & 2 \end{array}\right.$$

▷ Résolvons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & + & t & = & 3 \\ 3x & + & y & & & - & t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & + & t & = & 3 \\ 3x & + & y & & & - & t & = & 4 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & & & & z & + & t & = & 1 \\ & - & y & - & z & - & t & = & 1 \\ & - & 2y & - & 3z & - & 4t & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & - & y & - & z & - & t & = & 1 \\ & & & & z & + & t & = & 1 \\ & - & 2y & - & 3z & - & 4t & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & - & y & - & z & - & t & = & 1 \\ & & & & z & + & t & = & 1 \\ & & & - & z & - & 2t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & - & y & - & z & - & t & = & 1 \\ & & & & z & + & t & = & 1 \\ & & & - & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations sont impossibles car en les ajoutant on obtient $0 = 1$. On en déduit qu'il n'existe pas de solution.

Exercice 3.

Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ x+3y+3z & = & 0 \\ x+3y+6z & = & 3 \end{array}\right. \quad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1+2i \\ x+2y+2z & = & 3i \\ 2x+3y+2z & = & 1 \end{array}\right. \quad c)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y-4z+t & = & 0 \\ 7z-\frac{7}{2}t & = & -7 \\ 3y+\frac{7}{2}t & = & 4 \\ -y-2z+\frac{1}{2}t & = & 2 \end{array}\right.$$

Chapitre 7

Feuille d'exercices

Exercice 1.

Déterminer (en justifiant votre réponse) parmi les systèmes suivants lesquels sont linéaires :

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y &=& 1\\ x^2+(y-5)^2 &=& 4 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+3y &=& 1\\ -4x+y &=& 2\\ x-y &=& 5 \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+iy+3z &=& 0\\ y-(1+i)z &=& 2i\\ x+y+z &=& 1 \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{rcl} x-y+10z &=& 4\\ 3x+2y-z &=& 2\\ 4i\,x+(i-1)y &=& 1-yz \end{array}\right.$$

Exercice 2.

1) Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x+3y &=& 5\\ 12x-2y &=& 0 \end{array}\right.$$

Parmi les n-uplets suivants, déterminer ceux qui sont solution de ce système.

$$(a)\ \left(1,\frac{1}{3}\right),\quad (b)\ \left(\frac{1}{2},3,0\right),\quad (c)\ \left(\frac{1}{2},3\right),\quad (d)\ (1,6)$$

2) Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{4}x+y+z &=& \frac{28}{15}\\ -x+3y+10z &=& 0\\ x+6y &=& 8 \end{array}\right.$$

Parmi les n-uplets suivants, déterminer ceux qui sont solution de ce système.

$$(a)\ \left(4,\frac{1}{5},\frac{2}{3}\right),\quad (b)\ \left(4,\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right),\quad (c)\ \left(\frac{8}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right),\quad (d)\ \left(\frac{8}{2},\frac{1}{5}\right)$$

Exercice 3.

Résoudre les systèmes suivants :

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+4z &=& 9\\ -\frac{1}{2}y-z &=& -\frac{3}{2}\\ -12z &=& -24 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y-4z+t &=& 0\\ 3y+\frac{7}{2}t &=& 4\\ 7z-\frac{7}{2}t &=& -7\\ \frac{2}{3}t &=& \frac{10}{3} \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y-4z+t &=& 0\\ 3y+\frac{7}{2}t &=& 4\\ \frac{2}{3}z &=& \frac{10}{3} \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{rcl} i\,x &=& 3\\ x+2y &=& 4\\ x+2y+3i\,z &=& 2+3i \end{array}\right.$$

Exercice 4.

On pose

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\\0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad u_4=\begin{pmatrix}5\\2\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ est combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3 et u_4.

Exercice 5.

Résoudre les systèmes ci-dessous d'inconnues x, y, z et de paramètre m.

1) $$\left\{\begin{array}{rcl} x-my+2z & = & m \\ y+(m+2)z & = & m^2-5 \\ 2z & = & 2m-4. \end{array}\right.$$

2) $$\left\{\begin{array}{rcl} x-(m^3-1)y+z & = & m \\ (m-1)y-(m-2)z & = & m+1 \\ (m-2)(m-1)z & = & m^2-1. \end{array}\right.$$

Exercice 6.

Résoudre les systèmes suivants :

1) $$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & 1 \\ 5x & + & 7y & = & 3 \end{array}\right.$$

2) $$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 4y & = & 10 \\ 3x & + & 6y & = & 15 \end{array}\right.$$

3) $$\left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & - & 2y & = & 5 \\ -6x & + & 3y & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 7.

Déterminer à quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d le système ci-dessous admet une unique solution

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & 0 \\ cx+dy & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 8.

Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

1) $$\left\{\begin{array}{rcl} y+z & = & 2 \\ x+3y+3z & = & 0 \\ x+3y+6z & = & 3 \end{array}\right.$$

2) $$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+3x_2-4x_3 & = & 3 \\ x_1+2x_2+2x_3 & = & 11 \\ x_1+x_2+x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

3) $$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-3z & = & 5 \\ 3x-2y+2z & = & 5 \\ 5x-3y-z & = & 16 \end{array}\right.$$

4) $$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-2z & = & 5 \\ x-2y+3z & = & 2 \\ 4x-y+4z & = & 1 \end{array}\right.$$

5) $$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 3 \\ 2x+3y+8z & = & 4 \\ 3x+2y-17z & = & 1 \end{array}\right.$$

6) $$\left\{\begin{array}{rcl} -2x-2y+z & = & 1 \\ x+4y+z & = & -2 \\ x-2y-2z & = & 1 \end{array}\right.$$

7) $$\left\{\begin{array}{rcl} z_1+iz_2-iz_3 & = & 0 \\ -z_1+(1-i)z_2+2iz_3 & = & 0 \\ 2z_1-(1-2i)z_2-3iz_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

8) $$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-2z & = & 1 \\ x-2y+z & = & 1 \\ -2x+y+z & = & 1 \end{array}\right.$$

9) $$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+z-t & = & 2 \\ x+4y+2z+t & = & 3 \\ x+2y-z-2t & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 9.

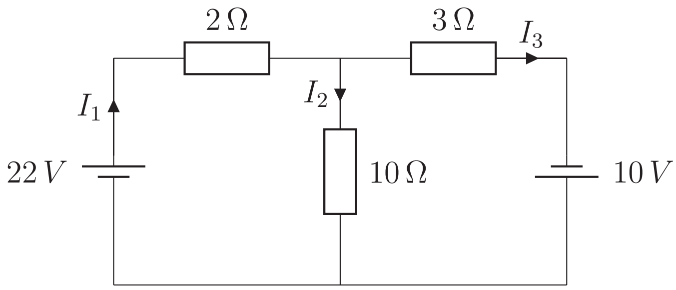
On donne ci-dessous deux systèmes d'inconnues x, y, z avec $k \in \mathbb{R}$ un paramètre. Déterminer (lorsque cela est possible) les valeurs de k de sorte que ces systèmes admettent

- ▷ une unique solution,
- ▷ aucune solution,
- ▷ une infinité de solutions.

1) $\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$

Exercice 10. — *Application à un circuit électrique*

On considère le circuit électrique ci-dessous dont on souhaite déterminer la valeur des courants I_1, I_2 et I_3.



D'après la loi de Kirchhoff, on a $I_1 = I_2 + I_3$. En appliquant la loi d'Ohm dans le circuit de gauche, on obtient $22 = 2I_1 + 10I_2$. De même, la loi d'Ohm appliquée au circuit de droite entraîne $10 = 10I_2 - 3I_3$. On en déduit que les courants I_1, I_2, I_3 sont les solutions du système

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 2I_1 + 10I_2 = 22 \\ 10I_2 - 3I_3 = 10 \end{cases} \tag{3}$$

Appliquer la méthode de Gauss à ce système et en déduire que les solutions sont $I_1 = \dfrac{93}{28}$, $I_2 = \dfrac{129}{84}$ et $I_3 = \dfrac{25}{14}$.

Exercice 11.

1) Soient $u = (1, 2, 3)$ et $v = (1, 0, 1)$. Trouver tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $x \wedge u = v$.

2) Même question avec $u = (-3, 2, 3)$ et $v = (1, 0, 1)$.