Chapitre 1

Feuille d'exercices : Séquence 3

Exercice 1.

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Solution :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 94.$$

Exercice 2.

1) Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

2) Calculer $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Solution :

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -16$

Exercice 3.

1) Que vaut le déterminant d'une matrice diagonale ?

2) On dit qu'une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire supérieure** si ses coefficients vérifient $t_{ij} = 0$ si $i > j$. Que vaut le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ?

3) On dit qu'une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire inférieure** si ses coefficients vérifient $t_{ij} = 0$ si $i < j$. Que vaut le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure ?

4) En déduire les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ i & 6 & 3-i & 0 \\ 4 & 5 & 7 & i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A+B)$ et $\det(A) + \det(B)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution :

- ▷ A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ▷ B est inversible et

$$B^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- ▷ C n'est pas inversible.

Exercice 6.

On dit qu'une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **unitaire** (ou **orthogonale** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) si U est inversible et $U^{-1} = U^*$. Montrer que toute matrice unitaire U vérifie $|\det(U)| = 1$.

Exercice 7.

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelles valeurs de m les matrices ci-dessous est inversibles :

$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(m) = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Solution :

- ▷ $A(m)$ est inversible si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$.
- ▷ $B(m)$ est inversible si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 2, 1\}$.

Exercice 8.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 3 \\ 0 & 1-i & 4 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

1) Donner $\det(A)$ et $\det(P)$, puis justifier que P est inversible.

2) Calculer P^{-1}, puis $P^{-1}AP$.

3) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1) $\det(A) = (1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2$.
$\det(P) = i \neq 0$ donc P est inversible.

2) On a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11i \\ 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

et

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}.$$

3) On a $A^n = PD^nP^{-1}$, d'où

$$A^n = 2^{-\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} & 2^{\frac{n}{2}+1} - 2e^{-i\frac{n\pi}{4}} & 2^{\frac{n}{2}} 11i - 4ie^{-i\frac{n\pi}{4}} - 7ie^{i\frac{n\pi}{4}} \\ 0 & e^{-i\frac{n\pi}{4}} & 4\sin(\frac{n\pi}{4}) \\ 0 & 0 & e^{i\frac{n\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

Exercice 9.

On considère le système

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 5 \\ -x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

1) Écrire le système (S) sous forme matricielles $AX = b$.

2) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

3) En déduire les solutions de (S).

Solution :

1) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'écriture matricielle du système est :

$$AX = B.$$

2) $\det(A) \neq 0$ et

$$A^{-1} = -\frac{1}{41}\begin{pmatrix} -16 & 6 & -1 \\ 2 & -11 & -5 \\ 5 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

3) $X = -\dfrac{1}{41}\begin{pmatrix} -16 & 6 & -1 \\ 2 & -11 & -5 \\ 5 & -7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{41}\begin{pmatrix} 14 \\ -53 \\ -30 \end{pmatrix}.$

Exercice 10.

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 6y & - & 3z & = & -6 \\ x & - & y & + & 2z & = & 5. \end{array}\right.$$

Solution :

- $\triangleright$ $X = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$
- $\triangleright$ $X = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$