Chapitre 10 - Séquence 3

Les courbes paramétrées

8 Les fonctions vectorielles

Définitions – *Fonction vectorielle*

Soient x et y deux fonctions réelles définies de I dans $\mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$. La fonction $\mathbf{f}$ définie de I dans $\mathbb{R}^2$ par

$$\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t)), \qquad \text{pour tout } t \in I$$

est appelée une **fonction vectorielle**.
Les fonctions x et y sont appelées les **fonctions coordonnées** (ou les **fonctions composantes**) de la fonction $\mathbf{f}$.

Exemple

La fonction $\mathbf{f}$ définie $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$\mathbf{f}(t) = (\cos(t), \sin(t)), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

est une fonction vectorielle.

Remarques

- ▷ Le terme « fonction vectorielle » fait référence au fait que $\mathbf{f}(t)$ est un vecteur.
- ▷ La variable t est une variable indépendante et elle est appelée **paramètre**. En physique et en mécanique, c'est le temps qui joue le plus souvent le rôle du paramètre t.

Définition – *Courbe paramétrée*

Soit $\mathbf{f}$ une fonction vectorielle définie de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ de fonctions coordonnées x et y. Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé, l'ensemble des points M_t de coordonnées $(x(t), y(t))$ avec $t \in I$ est appelé **courbe paramétrée** et souvent notée Γ. Donc

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

Exemples

- ▷ Soient f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ et $\mathbf{f}$ la fonction vectorielle définie sur I par

$$\mathbf{f}(t) = (t, f(t)), \qquad \text{pour tout } t \in I.$$

Dans ce cas, la courbe paramétrée de $\mathbf{f}$ est la courbe représentative de f.

- ▷ Soit $\mathbf{f}$ la fonction vectorielle définie par

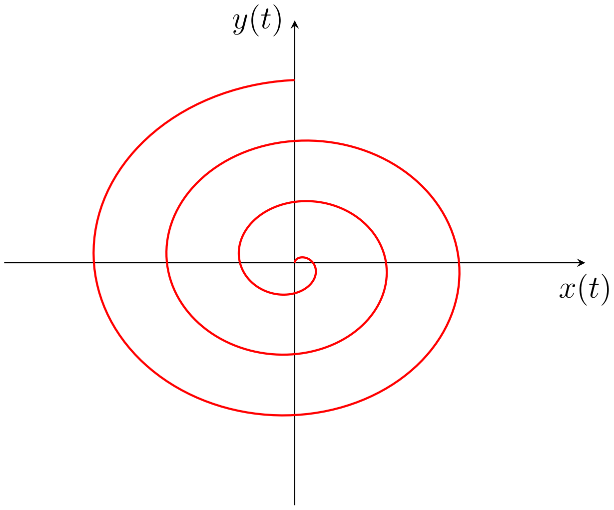
$$\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t)) = (\sin(t), \cos(t)), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $(x(t))^2 + (y(t))^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Ainsi tous les points de Γ satisfont l'équation $x^2 + y^2 = 1$, donc la courbe paramétrée de $\mathbf{f}$ correspond au cercle de centre l'origine et de rayon 1.

▷ Soit **f** la fonction vectorielle définie par

$$\mathbf{f}(t) = (t\sin(t), t\cos(t)), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Voici la courbe paramétrée de **f** :



Exemple

Soit Γ la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $\mathbf{f}(t) = (\cos t, t)$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On peut voir que Γ passe par le point $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. En effet

$$\mathbf{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Par contre la courbe ne passe pas par le point $(2, 1)$ puisque il n'existe pas un $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{f}(t) = (\cos t, t) = (2, 1)$.

Exercice 1.

Soit Γ la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t)) = (t^5 - 4t^3, t^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1) La courbe passe-t-elle par le point $A = (1, 0)$?

2) Montrer que la courbe passe par le point $P = (0, 4)$.

Définition

Soient a, b deux réels, avec $a < b$ et soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé. Soit **f** une fonction vectorielle définie sur I. Dans ce cas, on dit que la courbe paramétrée par **f** est un **arc**, d'**origine** le point $M_a = (x(a), y(a))$ et d'**extrémité** le point $M_b = (x(b), y(b))$.
De plus, si $M_a = M_b$, on dit que l'arc est **fermé**.

Exemple

Soit **f** la fonction vectorielle définie par

$$\mathbf{f}(t) = (\sin(t), \cos(t)), \qquad \text{pour tout} \quad t \in [0; 2\pi].$$

La courbe paramétrée de $\mathbf{f}$ est un arc fermé puisque

$$M_0 = (x(0), y(0)) = (1, 0) = (x(2\pi), y(2\pi)) = M_{2\pi}.$$

En effet, il s'agit à nouveau du cercle de centre l'origine et de rayon 1.

9 Vecteur tangent

Définition

Soient $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ et $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle. On dit que $\mathbf{f}$ est dérivable en t_0 si ses deux fonctions composantes x et y sont dérivables en t_0.
Dans ce cas, on appelle

$$\mathbf{f}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

le **vecteur dérivé** de $\mathbf{f}$ en t_0.

Définition

La fonction $\mathbf{f}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si ses composantes le sont.

Définition – *Tangente et vecteur tangent*

Soit $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^2$ de fonctions coordonnées x et y. Supposons que $\mathbf{f}$ soit dérivable en t_0 et que le vecteur dérivé $\mathbf{f}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ soit non nul. La **tangente à la courbe au point** M_{t_0} est la droite passant par M_{t_0} de vecteur directeur $\mathbf{f}'(t_0)$. Son équation paramétrique est

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

et son équation cartésienne

$$(x - x(t_0)y'(t_0) - (y - y(t_0)x'(t_0) = 0.$$

Pour cette raison souvent le vecteur vitesse est appelé **vecteur tangent**.

Exemple

Soit Γ la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $\mathbf{f}(t) = (3t - t^2, 4t)$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. On veut déterminer l'équation de la tangente à Γ en $(2, 4)$.
Tout d'abord, on doit trouver $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $M_{t_0} = (2, 4)$. On a donc

$$(3t_0 - t_0, 4t_0) = (2, 4),$$

d'où (d'après la deuxième composante) $t_0 = 1$.
On a $\mathbf{f}'(t) = (3 - 2t, 4)$, $\mathbf{f}'(1) = (1, 4)$, donc l'équation de la tangente à Γ en $(2, 4)$ a pour équation cartésienne

$$(x - 2)4 - (y - 4) = 0.$$

Définition

Soient $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ et $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle.

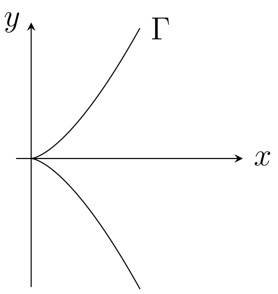
- ▷ Si $\mathbf{f}'(t_0) = (0,0)$, on dit que le point M_{t_0} est un **point stationnaire** (ou un **point singulier**) de la courbe paramétrée.
- ▷ Si $\mathbf{f}'(t_0) \neq (0,0)$ on dit que le point M_{t_0} est un point **régulier**.
- ▷ Si $\mathbf{f}'(t) \neq (0,0)$ pour tout $t \in I$, la courbe est dite **régulière**.

Exemple

Prenons la fonction vectorielle $\mathbf{f}$ définie par :

$$\mathbf{f}(t) = (t^2, t^3) \qquad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}.$$

On a $\mathbf{f}'(t) = (2t, 3t^2)$, donc $\mathbf{f}'(0) = (0,0)$: l'origine est un point singulier.
Voici la courbe Γ paramétrée par $\mathbf{f}$:



Définition

Soit $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle. La dérivée $k$ième de $\mathbf{f}$, notée $\mathbf{f}^{(k)}$ est définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{f}^{(0)} & = \mathbf{f}, \\ \mathbf{f}^{(k)} & = \left(\mathbf{f}^{(k-1)}\right)' \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Définition

Soient $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ et $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle. Si $\mathbf{f}'(t_0) = (0,0)$, mais $\mathbf{f}''(t_0) \neq (0,0)$, on dit que le point M_{t_0} est un **point de rebroussement** de la courbe paramétrée.

Exemple

Prenons l'exemple précédent

$$\mathbf{f}(t) = (t^2, t^3).$$

Puisque $\mathbf{f}'(t) = (2t, 3t^2)$, on a $\mathbf{f}''(t) = (2, 6t)$. On a $\mathbf{f}'(0) = (0,0)$ et $\mathbf{f}''(0) = (2,0)$: l'origine est un point de rebroussement.

Exercice 2.

Soit Γ la courbe paramétrée par $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t)) = (t^5 - 4t^3, t^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1) Calculer le vecteur tangent en chaque point de Γ.

2) Déterminer l'unique point singulier de Γ.

3) Calculer une équation de la tangente au point $(3, 1)$.

10 Longueur d'arc et intégrale curviligne

Définition – *Longueur d'un arc*

Soient $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^1$, de fonctions coordonnées (x, y). La **longueur** de l'arc paramétré associé à $\mathbf{f}$ est définie par

$$L = \int_a^b \|\mathbf{f}'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Exemple

Soit $\mathbf{f}$ la fonction vectorielle définie par

$$\mathbf{f}(t) = (\sin(t), \cos(t)), \qquad \text{pour tout } t \in [0; 2\pi].$$

Alors $\mathbf{f}(t) = (\cos(t), -\sin(t))$, pour tout $t \in [0; 2\pi]$ et la longueur de l'arc paramétré est

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

C'est la circonférence du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Exercice 3.

Calculer la longueur de l'arc paramétré par la fonction vectorielle définie par

$$\mathbf{f}(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t + 1), \qquad \text{pour tout } t \in [0; 1].$$

Notation

On pose habituellement :

$$ds = \|\mathbf{f}'(t)\|\, dt = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

On verra, dans la suite, que l'élément d'arc ds joue, dans les intégrales curvilignes, le même rôle que l'élément dx dans l'intégrale simple.

Définition – *Intégrale curviligne*

Soient $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^1$ de fonctions coordonnées x et y. On note Γ l'arc paramétré associé à $\mathbf{f}$. Soit g une fonction à deux variables continue définie dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ contenant Γ. L'**intégrale curviligne** de g le long de Γ est définie par

$$\int_\Gamma g\, ds = \int_a^b g(x(t), y(t))\|\mathbf{f}'(t)\|\, dt.$$

À noter

Si g est la densité de répartition d'une grandeur physique le long de Γ, l'intégrale représente la quantité totale (de charge, de masse, ...) contenue dans Γ.

Exemple

Soit Γ l'arc paramétré par $\mathbf{f} : [0;1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$. Alors, on a

$$\mathbf{f}'(t) = (1, 2t) \qquad \text{et} \qquad \|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}.$$

Soit $g : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = 3x + \sqrt{y}$. Alors

$$g(x(t), y(t)) = 3t + \sqrt{t^2} = 3t + t = 4t,$$

donc

$$\int_\Gamma g\, ds = \int_0^1 g(x(t), y(t))\|\mathbf{f}'(t)\|\, dt = \int_0^1 4t\sqrt{1+4t^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1).$$

Exercice 4.

Soit Γ l'arc paramétré par $\mathbf{f} : [0;\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$. Calculer

$$\int_\Gamma g\, ds,$$

où $g(x, y) = \sqrt{1-y^2}$.

Chapitre 10

Feuille d'exercices de la séquence 3

Exercice 1.

Soient a, b, m et n des réels positifs. Les courbes d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(mt) \\ y(t) = b\sin(nt) \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$, sont appelées *courbes de Lissajous.*
L'allure de ces courbes change suivant les valeurs des réels m et n.

1) Montrer que ces courbes sont toujours inscrites dans un rectangle.

2) Montrer que si $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ alors la courbe est fermée.

3) Étudier les points singuliers de la courbe de Lissajous suivante

$$\begin{cases} x(t) = \cos(6t) \\ y(t) = \sin(3t). \end{cases}$$

4) On considère la courbe de Lissajous

$$\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t). \end{cases}$$

Déterminer les équations des tangentes aux points $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2.

Soit $\mathbf{f}$ la fonction vectorielle définie par

$$\mathbf{f}(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

1) Dire pourquoi la fonction est $\mathcal{C}^1$.

2) Calculer les composantes de son vecteur dérivé.

3) En déduire que la courbe paramétrée par $\mathbf{f}$ est régulière.

Exercice 3.

Étudier les points singuliers de la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \dfrac{\cos^2(t)}{2 - \cos(t)} \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.

La courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 + t^3 \end{cases} \quad , \qquad t \in \mathbb{R}$$

admet-elle des points de rebroussement ?

Exercice 5.

On appelle *cycloïde* la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer le vecteur tangent à la courbe.

2) Déterminer les tangentes à la courbe aux points. $t = \pi$, $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = 0$.

3) Calculer la longueur de l'arc de cycloïde d'origine O et d'extrémité le point de coordonnées $(2\pi R, 0)$.

Exercice 6.

Calculer la longueur des arcs paramétrés par les fonctions vectorielles suivantes :

1) $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t \cos t \\ y(t) = \mathrm{e}^t \sin t \end{cases} \qquad t \in [-2\pi, 2\pi]$;

2) $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \cos t \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

3) $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \ln(1 - t^2) \end{cases} \qquad t \in [0, \frac{1}{2}]$.

Exercice 7.

1) Écrire sous forme paramétrique le segment $[AB]$ où $A(-1, -2)$ et $B(1, 2)$.

2) Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{[AB]} xy^3 \, ds.$$

Exercice 8.

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma g \, ds,$$

où Γ est la courbe paramétrée associée à la fonction vectorielle $\mathbf{f}$ dans les cas suivants :

1) $g(x, y) = (x - 2)(y - 1) - 1$ et $\mathbf{f}(t) = (2 + 2\cos t, 1 + 2\sin t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$;

2) $g(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ et $\mathbf{f}(t) = (\sin t, \cos t)$, avec $t \in [0, \pi]$;

3) $g(x, y) = \frac{x}{1+y^2}$ et $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$, avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Questionnaire 3

Exercice 1.

Soit Γ la courbe paramétrée par $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t)) = (t^5 - 4t^3, t^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1) Calculer le vecteur tangent en chaque point de Γ.

2) Déterminer l'unique point singulier de Γ.

3) Calculer une équation de la tangente au point $(3, 1)$.

Réponse :

Exercice 2.

Soit Γ l'arc paramétré par $\mathbf{f} : [0; \pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$.
Calculer

$$\int_\Gamma g\, ds,$$

où $g(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$.

Réponse :