# Chapitre 4 Les lois de Newton

La dynamique est l'étude du mouvement des corps en relation avec les causes, appelées forces, qui les produisent. Les lois physiques sur lesquelles elle s'appuie ont été énoncées partiellement par G. Galilée en 1632 et complètement par I. Newton en 1687 dans « Principia mathematica ».

## 1. Définitions

### 1. La masse

La masse est une propriété fondamentale de la matière qui se manifeste à la fois par l'inertie des corps et leur interaction gravitationnelle. Elle est invariable lors d'un changement de repère dans le cadre de la mécanique newtonienne. C'est une caractéristique du système.

Symbole de la dimension : M.

Unités : dans le système international , $[m] = \mathrm{kg}$.

# Masse et quantité de matière

 Masse ≠ quantité de matière !

La quantité de matière = *n* et est mesurée en mole.

La masse est mesurée en kilogramme.

Exemple :

3 moles d'hélium 4 = 6 moles de protons, 6 moles de neutrons et 6 moles d'électrons = 1 mole de carbone 12.

La masse d'une mole de carbone 12 vaut exactement 12 grammes.

La masse de trois moles d'hélium 4 vaut 3 x 4,0026[1] = 12,0078 grammes.

→ La différence de masse observée s'explique par la différence entre les énergies de liaison nucléaire de l'hélium et du carbone.

# Remarques concernant la masse

Masse ≠ poids !

Masse inerte = masse grave

Masse et énergie

La masse peut se transformer en énergie et réciproquement.

$E = mc^2$

# L'inertie

Elle correspond à la réticence au changement de mouvement d'un corps.

# Le centre d'inertie

Le centre d'inertie d'un système matériel correspond au point noté $G$, barycentre des positions des points matériels affectés de leur masse.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\iiint \overrightarrow{OM}\, dm$$

## 2. La quantité de mouvement

La quantité de mouvement pour un point matériel de masse $m$ se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ est le vecteur : $\vec{p} = m\vec{v}$ .
Ce vecteur dépend du référentiel dans lequel est exprimée la vitesse. Il est colinéaire à celle-ci et s'exprime en $kg.m.s^{-1}$ dans S.I. .
Pour un système matériel constitué de $n$ masses $m_i$ situées aux points $M_i$ et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_i$, on a : $\vec{p} = \sum_i \vec{p_i} = \sum_i m\vec{v_i}$

Ceci peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{p} = \sum_i m_i \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{OG}\right) = m\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m\overrightarrow{v_G}$$

Le vecteur quantité de mouvement d'un système matériel est égal au vecteur quantité de mouvement d'un point matériel fictif confondu avec le centre d'inertie du système où serait concentrée la masse totale du système.

# 2. Lois de Newton

## 1. 1ère loi de Newton – Principe d'inertie (énoncée par Galilée)

Énoncé historique : Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, sauf si des forces « imprimées » le contraignent d'en changer.

Énoncé actuel : Un objet isolé (qui n'est soumis à aucune force) est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Sa vitesse $\vec{V}$ est constante en norme et en direction.

$$\text{si } \sum \vec{F} = 0 \ \text{ alors } \vec{v} = \overrightarrow{cte}$$

De ce principe, on déduit la définition du référentiel galiléen.

On appelle référentiel galiléen, un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique.

# Remarques :

- Tout référentiel accéléré ne peut être considéré comme galiléen. Ceci exclut donc les référentiels en rotation.
- Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui aussi galiléen.
- Le référentiel de Copernic est un excellent référentiel galiléen (vérification expérimentale) malgré le mouvement du Soleil et de la galaxie. Les référentiels géocentrique et terrestre ne sont pas rigoureusement des référentiels galiléens. Cependant on peut les considérer comme tel pour de nombreux problèmes.

## 2. 2ème loi de Newton – Principe fondamental de la dynamique

Énoncé historique : Le changement de mouvement est proportionnel à la force imprimée et s'effectue suivant la droite par laquelle cette force est imprimée.

Énoncé actuel : Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système assimilé à un point matériel de masse *m* est égale à la variation de sa quantité de mouvement.

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \quad \text{si } m = \text{cte}$$

3. 3ème loi de Newton – Principe de l'action et de la réaction

Énoncé historique : La réaction est toujours contraire à l'action ; ou encore les actions que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales et dirigées en sens contraires.

Énoncé actuel : Si un point matériel $A_1$ exerce sur un autre point matériel $A_2$ une force $\overrightarrow{F_{1\to 2}}$, alors $A_2$ exerce sur $A_1$ la force opposée.

$$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = -\overrightarrow{F_{2\to 1}}$$

# 3. Relativité galiléenne

LES LOIS DE LA PHYSIQUE SONT IDENTIQUES DANS TOUT REFERENTIEL GALILEEN.

# 4. Les Forces

L’utilité du PFD et du concept de force vient des propriétés suivantes :

- On sait identifier les forces qui s’exercent sur un objet compte tenu de son environnement et donner des formes exactes ou approchées de leurs lois.
- On sait additionner (composer) ces forces (Principe d’addition vectorielle des forces).

## 1. Les interactions fondamentales

Les forces proviennent toujours d’interactions entre objets. Les interactions fondamentales sont au nombre de 4 et toutes les interactions peuvent se ramener à l’une d’elles.

### 1. L’interaction électromagnétique

Elle régit le plus grand nombre de phénomènes de la vie courante. Il s’agit de l’interaction entre particules électriquement chargées.

Cette interaction est décrite par les équations de Maxwell que vous verrez en électromagnétisme.

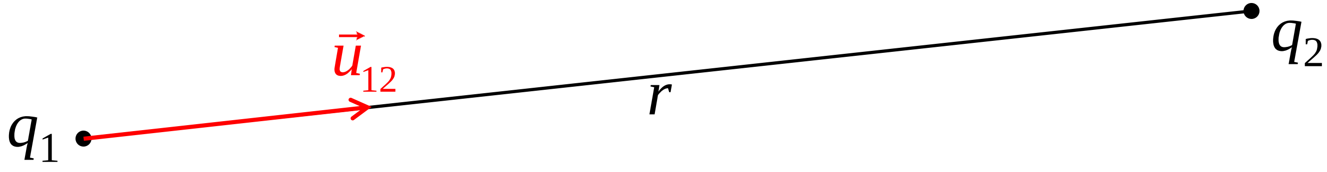
Une particule chargée (de charge $q$) soumise à un champ électrique $\vec{E}$ et à un champ magnétique $\vec{B}$ (créés par la présence d'autres charges, éventuellement en mouvement → circuit électrique) est soumise à une force $\overrightarrow{F_L}$ appelée force de Lorentz :

$$\overrightarrow{F_L} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \text{ où } \vec{v} \text{ est la vitesse de la particule}$$

Un cas particulier de la force de Lorentz est la force de Coulomb entre deux objets portant des charges électriques $q_1$ et $q_2$.

$$\overrightarrow{F_L} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u_{12}} \quad \text{où } \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.}$$

Cette force est attractive si $q_1q_2 < 0$ et répulsive si $q_1q_2 > 0$.



## 2. L’interaction gravitationnelle

Elle est responsable du mouvement des corps célestes et explique pour une partie le poids d’un corps. Cette interaction est décrite en théorie classique par la loi de Newton et concerne tous les corps chargés ou non.

Pour deux masses ponctuelles $m_1$ et $m_2$, la loi de Newton se traduit par la force d’interaction :

$$\overrightarrow{F_G} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u_{12}}$$

où $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I. ($N.m^2.kg^{-2}$) est la constante de gravitation. La force de gravitation est toujours attractive. A l’échelle atomique, elle est négligeable devant l’interaction électrostatique.

A la surface de la Terre, tout objet de masse $m$ est attiré vers son centre (c'est-à-dire verticalement ou radialement vers le bas). Il est soumis à la force de pesanteur (ou poids) :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$$

où $g$ = 9,81 m.s$^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.

Cette loi peut être déduite de la loi de gravitation et en est un cas particulier. $g$ est relié à $G$ au rayon $R$ et à la masse de la Terre $M$ par :

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Remarque :

L'interaction électromagnétique, comme l'interaction gravitationnelle, ont une portée infinie. Leurs effets peuvent se manifester à n'importe quelle distance, aussi grande soit-elle.

<u>exemple :</u> La comète de Haley, avec une période $T$ = 76 ans s'éloigne jusqu'à une distance $d_{max}$ = 5.10$^9$ km du Soleil.

3. L’interaction forte

Elle est responsable de la cohésion des protons et des neutrons à l’intérieur des noyaux. D’intensité environ 100 fois plus forte (à la même distance) que l’interaction électromagnétique, sa portée n’est que de ~ $10^{-15}$ m. Elle devient négligeable à des distances grandes devant les dimensions d’un noyau.

4. L’interaction faible

Elle est responsable de la radioactivité $\beta$. Sa portée est de ~$10^{-17}$ m et son intensité est inférieure à la force électromagnétique. Interaction faible et interaction électromagnétique sont deux manifestations d’une interaction unique, l’interaction électrofaible.

## 2. Les forces de contact

Nous allons nous intéresser aux forces de contact. Ce sont des manifestations déguisées de la force de Coulomb, de la pesanteur et de la mécanique quantique au travers de mécanismes moléculaires très complexes. On se contentera donc de lois approchées aux domaines de validité limités. Il est commode de distinguer deux groupes de force de contact :

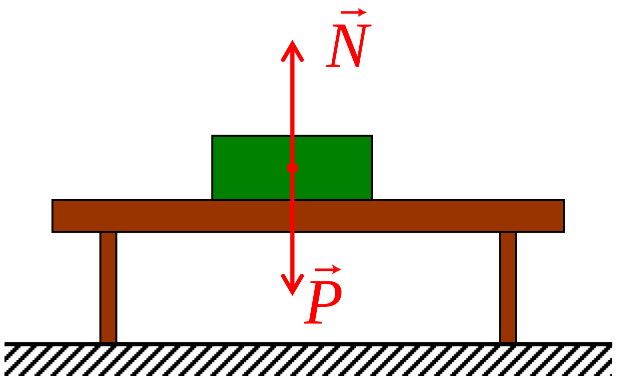
- les force normales ($\perp$) à la surface de contact
- les forces tangentes à cette surface

### 1. Forces de contact normales

- <u>Forces de réaction d'un corps solide</u>

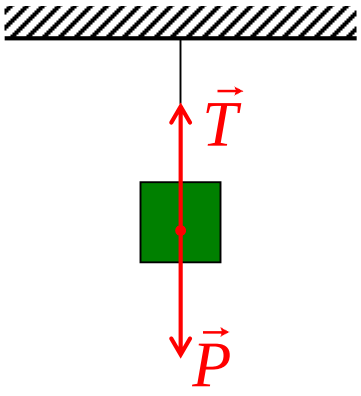
Un objet posé sur une table reste immobile $(\vec{a} = \vec{v} = 0)$ car il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale $\vec{N}$ de la table qui s'équilibrent : $\vec{P} + \vec{N} = 0$ .

Il ne possède pas de vitesse initiale.



- <u>Forces de tension</u>

Un bloc de masse m suspendu à un fil est au repos car il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à une force $\vec{T}$ exercée par le fil ($\|\vec{T}\|$ est la tension du fil) qui s'équilibrent : $\vec{T} + \vec{P} = 0$

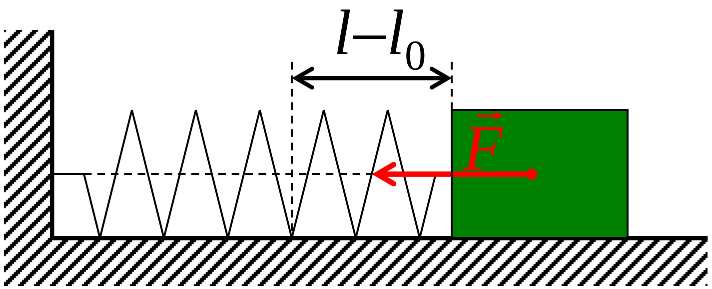



- <u>Forces élastiques</u>

Le bloc de la figure ci-dessous repose sur une table mécanique (frottements négligeables) et est soumis à une force de rappel horizontale proportionnelle à l'élongation ($l$–$l_0$) du ressort par rapport à sa position d'équilibre ($l_0$ est la longueur du ressort au repos) :

$$\|\vec{F}\| = k|l - l_0|$$

où $k$ est appelée raideur du ressort



## 2. Forces de contact tangentielles : les frottements

Les forces de frottement sont les forces qui apparaissent soit lors du mouvement d'un objet soit si cet objet est soumis à une force qui tend à le déplacer. Dans tous les cas, la force de frottement s'oppose au déplacement que l'on cherche à engendrer.

On distingue deux types de frottement : le frottement solide et le frottement visqueux.

- <u>Le frottement solide (contact solide–solide)</u>

Il se produit quand deux solides sont en contact. Il a été étudié par Léonard de Vinci (1452–1519) qui en a découvert les lois à travers des expériences simples. Amontons (1699) et Coulomb (Charles de Coulomb, 1736–1806) les ont annoncé de façon précise. Le frottement solide apparaît dès que l'on cherche à faire glisser un corps sur support. Ce corps, soumis à des forces extérieures qui auraient pour effet de le déplacer, peut rester immobile si les frottements le permettent. La réaction du sol et donc la force de frottement s'adapte pour maintenir l'équilibre. Dans le cas contraire, ce corps se déplacera tout en subissant une force de frottement $\vec{F}$ constante et opposée au sens du mouvement.

La réaction du support sur le corps peut dans les deux cas se décomposer en une réaction $\overrightarrow{R_n}$ (normale au support et qui empêche le corps de s'enfoncer) et une force $\vec{F}$ parallèle au support et qui tend à s'opposer au mouvement du corps. Lorsque le solide se déplace sous l'action d'une force extérieure $\overrightarrow{F_{ext}}$, l'intensité de la force de frottement est proportionnelle à celle de la réaction normale au support. Le coefficient de proportionnalité s'appelle le coefficient de friction $\mu$ ou coefficient de frottement. Il dépend de la nature des surfaces en contact mais pas de la taille de la surface.

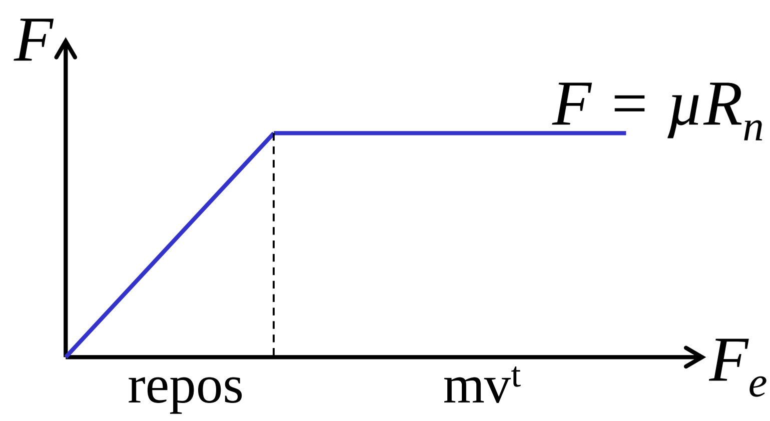
$$F = \mu R_{\text{n}}$$

| Matériaux en contact | $\mu$ |
|---|---|
| acier – acier | 0,2 |
| chêne – sapin | 0,67 |
| caoutchouc – bitume | 0,6 |

Si le frottement se produit sur un plan horizontal, $\overrightarrow{R_n}$ compense le poids et la force de frottement est donc proportionnelle au poids du solide.

<u>Remarque :</u>

Quand $\overrightarrow{F_{ext}}$ varie de 0 à une valeur permettant le mouvement du corps, $\vec{F}$ passe de 0 jusqu'à sa valeur maximale $F = \mu R_{\text{n}}$.



- Le frottement visqueux

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide [gaz (air), liquide (eau)], il subit, de la part du fluide, des forces de frottement. La résultante de ces actions est un vecteur force proportionnel au vecteur vitesse de déplacement de l'objet. Avec $B$ = cte > 0, on a :

$$\vec{F} = -B\vec{v}$$

Dans le cas où la vitesse de l'objet devient très importante, la force de frottement visqueux n'est plus proportionnelle à la vitesse mais au carré de la vitesse, à la surface $S$ de l'objet dans la direction perpendiculaire à la direction du déplacement et à la masse volumique $\rho$ du fluide. Le coefficient de proportionnalité dépend du profil de la surface en contact avec le fluide et est appelé coefficient de pénétration $C_x$. On a :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}C_x S\rho v\vec{v}$$

http://techtv.mit.edu/videos/13675-steel-ball-dropped-in-a-viscous-fluid

- <u>La poussée d’Archimède</u>

« Un corps totalement plongé dans un liquide déplace un volume de ce liquide égal à son propre volume. » Le principe d’Archimède précise ainsi qu’ » un objet immergé dans un fluide paraît plus léger; il est poussé vers le haut avec une force égale au poids du fluide qu’il déplace. ». Cette force verticale, dirigée vers le haut est due à la différence de pression entre la partie supérieure et la partie inférieure de l’objet immergé, la différence de pression étant liée au champ gravitationnel de la Terre.

$$\vec{F}_A = \rho_f g V \vec{k} = -\rho_f V \vec{g} = -m_f \vec{g}$$

où $V$ est le volume de l’objet immergé, $\rho_f$ la densité du fluide et $m_f$ la masse de fluide déplacé. Si l’objet n’est que partiellement immergé, il faut remplacer le volume de l’objet par le volume immergé de l’objet.

# Chapitre 5 Travail, énergie

## 1. Travail, puissance et énergie cinétique

### 1. Le travail

Il a été vu au lycée que le travail d'une force $\vec{F}$ constante le long d'une trajectoire rectiligne ou non entre un point $A$ et un point $B$ est donné par :

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ subie par un point matériel $M$ le long d'un petit déplacement $\overrightarrow{dl}$ est : $dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$

Le travail global effectué par un point matériel d'un point $A$ à un point $B$ d'une trajectoire, est défini par :

$$W_{A \to B} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} . d\vec{l} \qquad [W] = \text{Joules}$$

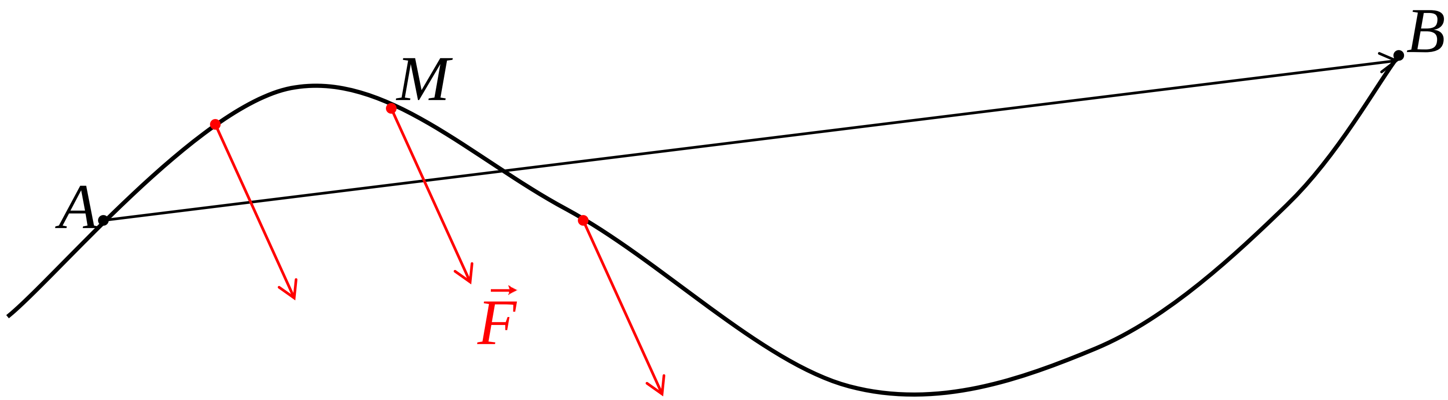
## 2. Exemples de calcul de travail

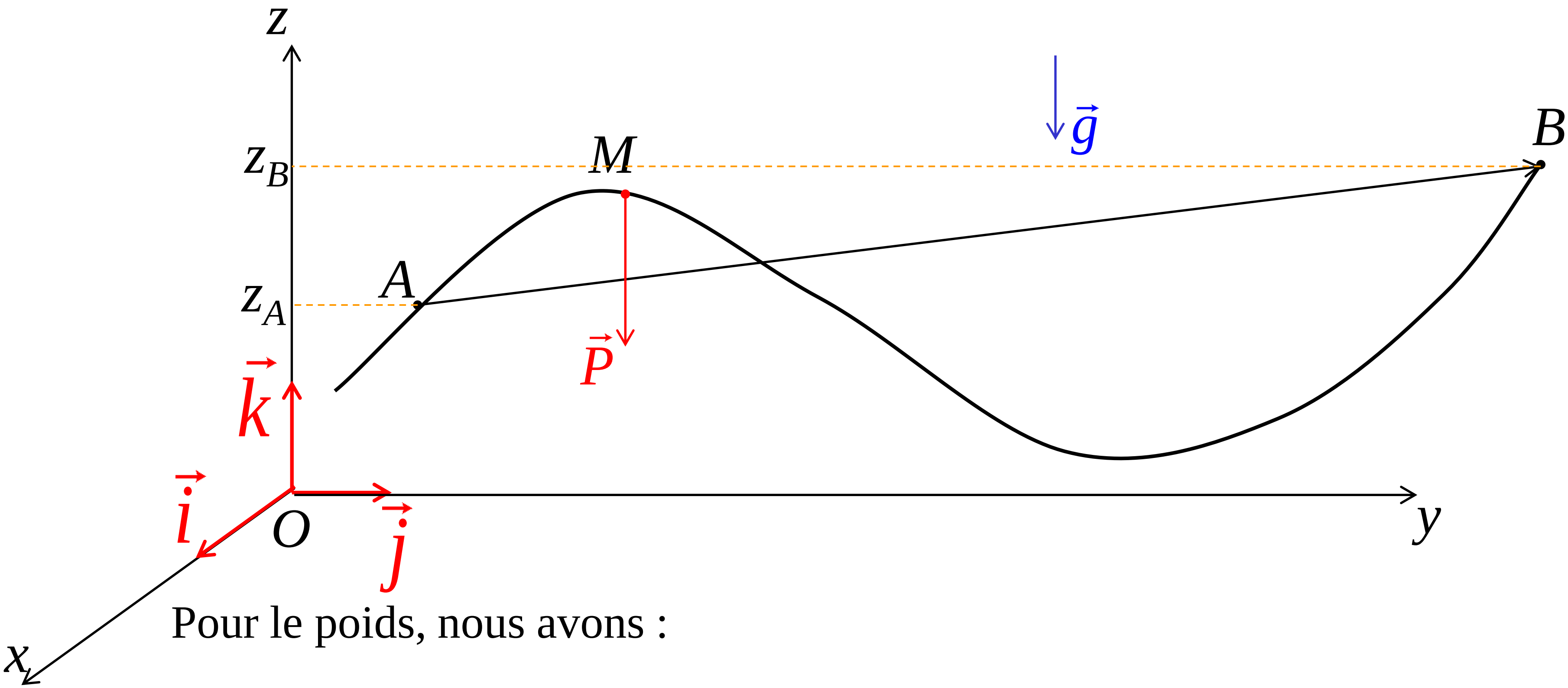
- **Travail d'une force constante : le poids d'un corps**

Lorsque le vecteur force reste constant au cours du déplacement, l'expression du travail de cette force se simplifie :

$$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \vec{F}.\int_A^B d\vec{l} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

Le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale ($A$) et finale ($B$).






Pour le poids, nous avons :

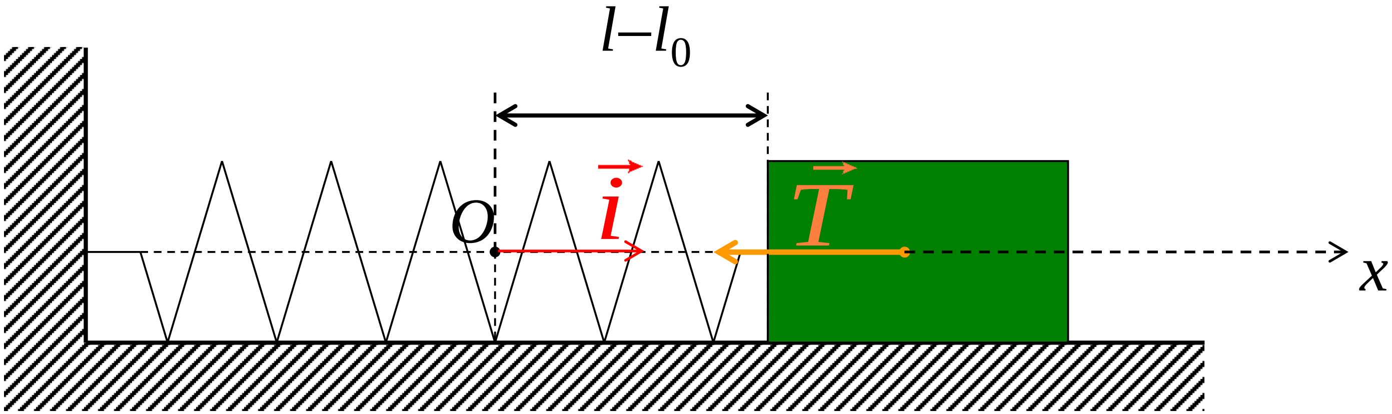
$$\vec{P} = m\vec{g} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix}$$

D'où :

$$W_{A \to B}\left(\vec{P}\right) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = mg\left(z_A - z_B\right)$$

- Travail d'une force élastique

On considère un ressort de raideur $k$, de longueur au repos $l_0$, au bout duquel est accrochée une masse $m$ glissant sans frottement le long de l'axe $Ox$.




$$\vec{F} = -k\left(l - l_0\right)\vec{i} = -kx\,\vec{i}$$

Le travail élémentaire de $\vec{T}$ lorsque la masse passe de $x$ à $x + dx$, s'écrit :

$$dW_{x \to x+dx}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}.d\vec{l} = -kx\,\vec{i}.dx\,\vec{i} = -kx\,dx = -d\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right)$$

$$W_{A \to B}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_A^B -kx\,dx = \frac{1}{2}k\left(x_A^2 - x_B^2\right)$$

- Travail de la force de Lorentz

On considère une particule de masse $m$ se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ soumise à l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$ . La force subie par la particule est la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Le travail élémentaire de cette force au cours d'un déplacement sur sa trajectoire est donné par :

$$dW = \vec{f}.d\vec{l} = \vec{f}.\vec{v}\,dt = q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v}\,dt = 0$$

Il est toujours nul car le déplacement élémentaire de la particule est toujours perpendiculaire à la force magnétique. On peut en conclure que la force de Lorentz du champ magnétique ne travaille pas.

## 3. La puissance

La puissance d’une force s’obtient à partir de la définition du travail élémentaire d’une force effectué entre les instants $t$ et $t + dt$ :

$$dW = \vec{F}.d\vec{l} = \vec{F}.\vec{v}\,dt = P(t)\,dt$$

La définition de la puissance est donc :

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

Elle s’exprime en Watts : [$P$] = W.

## 4. L’énergie cinétique

Dans un référentiel donné, un point de masse $m$ animé d’une vitesse $\vec{v}$ possède une énergie cinétique $E_c$ définie par :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

## 5. Théorème de l'énergie cinétique

On considère toujours un point $M$ de masse $m$ animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. On peut écrire la relation fondamentale de la dynamique pour ce point soumis à la force totale :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

On en déduit son travail élémentaire :

$$dW = \vec{F}.\vec{v}\,dt = m\vec{v}.d\vec{v} = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = dE_c$$

D'où l'expression du travail entre les points $A$ et $B$, c'est-à-dire entre les instants $t_A$ et $t_B$ :

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = E_c\left(t_B\right) - E_c\left(t_A\right)$$

Ceci constitue le théorème de l'énergie cinétique qui s'énonce ainsi :

Le travail de la force totale qui s'exerce sur un point matériel entre deux instants est égal à la variation de l'énergie cinétique du point entre ces deux instants.

# Remarques :

- Le travail dépend à priori du chemin suivi (ex : forces de frottement)
- Le travail d'une force $\perp$ à la trajectoire est nul (ex : force de Lorentz où $\vec{E} = 0$ )
- Si $W > 0$, le travail est dit moteur. Si $W < 0$, il est dit résistant.

# 2. Énergie potentielle

## 1. Les forces conservatives

- Définition

Une force conservative est une force qui ne dépend pas du temps, dont le travail ne dépend que des points de départ $A$ et d'arrivée $B$ et non de la forme de la trajectoire.

Exemples : travail du poids, travail de la tension du ressort, …

- Propriétés

Une force non-conservative est une force dont le travail dépend du chemin suivi.

Le travail d'une force conservative est nul le long d'une trajectoire fermée (courbe fermée avec $B = A$) :

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

## 2. L'énergie potentielle

Il existe une fonction $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$ telle que :

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = U(x_A, y_A, z_A) - U(x_B, y_B, z_B)$$

Une telle fonction est telle que : $F_x(x,y,z) = -\dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}$

$$F_y(x,y,z) = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}$$

$$F_z(x,y,z) = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}$$

On note : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,U$

Le gradient d'une fonction $U(x, y, z)$ est défini par :

$$\overrightarrow{grad}\, U = \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

- Définition

La fonction $U\left(\vec{r}\right)$ associée à une force conservative est appelée Potentiel ou Énergie potentielle.

On la note $E_p$.

Une force qui dérive d'un potentiel indépendant du temps est conservative.

- Remarques

Le potentiel a la dimension du travail.

Il n'est défini qu'à une constante près. $U\left(\vec{r}\right)$ et $U\left(\vec{r}\right)+C$ définissent la même force conservative.

Le travail effectué par une force conservative est l'opposé de la variation du potentiel associé : $dW = -\, dU$.

# Le gradient

- Le gradient de la fonction $U(x, y, z)$ est défini par :

$$\overrightarrow{grad}\, U = \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

Comme : $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$

On a : $\boxed{dU = \overrightarrow{grad}\, U \cdot d\vec{l}}$ où $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

- Le gradient en cylindrique

$d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r + rd\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$ et $\vec{V} = V_r\,\vec{u}_r + V_\theta\,\vec{u}_\theta + V_z\,\vec{u}_z$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r}dr + \frac{\partial U}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \vec{V}.d\vec{l} = V_r dr + V_\theta r d\theta + V_z dz$$

D'où : $\left(V_r - \frac{\partial U}{\partial r}\right)dr + \left(rV_\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}\right)d\theta + \left(V_z - \frac{\partial U}{\partial z}\right)dz = 0$

# Le gradient

- Le gradient de la fonction $U(r,\ \theta, z)$ est défini par : $\overrightarrow{grad}\, U = \vec{V}$

Avec :

$$V_r(r,\theta,z) = \frac{\partial U(r,\theta,z)}{\partial r}$$

$$V_\theta(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial U(r,\theta,z)}{\partial \theta}$$

$$V_z(r,\theta,z) = \frac{\partial U(r,\theta,z)}{\partial z}$$

## 3. Exemples de calcul de l'énergie potentielle

- Énergie potentielle d'une force constante : le poids d'un corps

$$dW\left(\vec{P}\right)=\vec{P}\cdot d\vec{l}=-mg\vec{k}\cdot\left(dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}\right)=-mgdz=-dE_p$$

D'où :

$$\boxed{E_p=mgz+C}$$

En général, l'énergie potentielle de pesanteur est prise nulle en $z$ = 0. Ceci implique que $C$ = 0.

- Énergie potentielle élastique

$$dW\left(\vec{F}\right)=\vec{F}\cdot d\vec{l}=-kx\,\vec{i}\cdot\left(dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}\right)=-kxdx=-dE_p$$

D'où :

$$\boxed{E_p=\tfrac{1}{2}kx^2+C}$$

où $x = l - l_0$.

En général, l'énergie potentielle de pesanteur est prise nulle en pour une déformation nulle. Ceci implique que $C$ = 0.

# 3. Énergie mécanique

## 1. Définition

Pour introduire l'énergie mécanique d'un système, nous partons du théorème de l'énergie cinétique dans lequel nous faisons apparaître le travail des forces conservatives et celui des forces non-conservatives. Soit :

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}^{\,C}\right) + \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}^{\,N.C}\right)$$

En notant Ep l'énergie potentielle totale, somme des énergies potentielles dont dérive chaque force conservative, on peut écrire :

$$\left[E_c(B) - E_c(A)\right] = \left[E_p(A) - E_p(B)\right] + \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}^{\,N.C}\right)$$

$$\left[E_c(B) - E_c(A)\right] - \left[E_p(A) - E_p(B)\right] = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}^{\,N.C}\right)$$

$$\left[E_c(B) + E_p(B)\right] - \left[E_c(A) + E_p(A)\right] = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}^{\,N.C}\right)$$

On introduit une nouvelle fonction d'état appelée énergie mécanique $E$ du système définie par : $E = E_c + E_p$.

Alors : $$\left(E(B) - E(A)\right) = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}^{\,N.C}\right)$$

## 2. Théorème de l’énergie mécanique

La variation d’énergie mécanique d’un système entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces extérieures non-conservative appliquées à ce système.

$$\left(E\left(B\right)-E\left(A\right)\right)=\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}^{\,N.C}\right)$$

Remarques :

- Les forces non-conservatives étant des forces résistantes, l’énergie mécanique d’un système ne peut que diminuer au cours du temps.
- Lorsqu’un système est mécaniquement isolé (c’est-à-dire qu’il n’est soumis à aucune force extérieure non-conservative), son énergie mécanique se conserve.

Système mécaniquement isolé $\Leftrightarrow E = cte$

## 3. Exemple de calcul de l'énergie

- Énergie d'une particule soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

L'énergie potentielle élémentaire de cette force est donnée par :

$$dE_p = -dW = -\vec{f}.\vec{v}\,dt = -q\vec{E}.\vec{v}\,dt - q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v}\,dt = -q\vec{E}.\vec{v}\,dt = -q\vec{E}.d\vec{l}$$

Or, si le champ $\vec{E}$ appliqué est un champ électrostatique, il dérive d'un potentiel noté *V*, tel que : $dV = -\vec{E}.d\vec{l}$ et $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. On en déduit que l'énergie potentielle de la particule s'écrit : $E_p = qV$.

D'où l'énergie mécanique *E* : $E = \frac{1}{2}mv^2 + qV = cte$

La particule n'est soumise qu'à des forces conservatives, elle se conserve.

Ainsi on peut calculer l'énergie cinétique et donc la vitesse de particules initialement au repos, accélérées par un champ électrique qui les amène dans une région de potentiel *V* : $E_c = -qV = eV$ et

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$ pour des électrons.

# 4. États liés et stabilité d'un système

## 1. États liés

Lorsqu'un système est mécaniquement isolé son énergie mécanique se conserve. On a donc : $E = E_c + E_p = cte$.

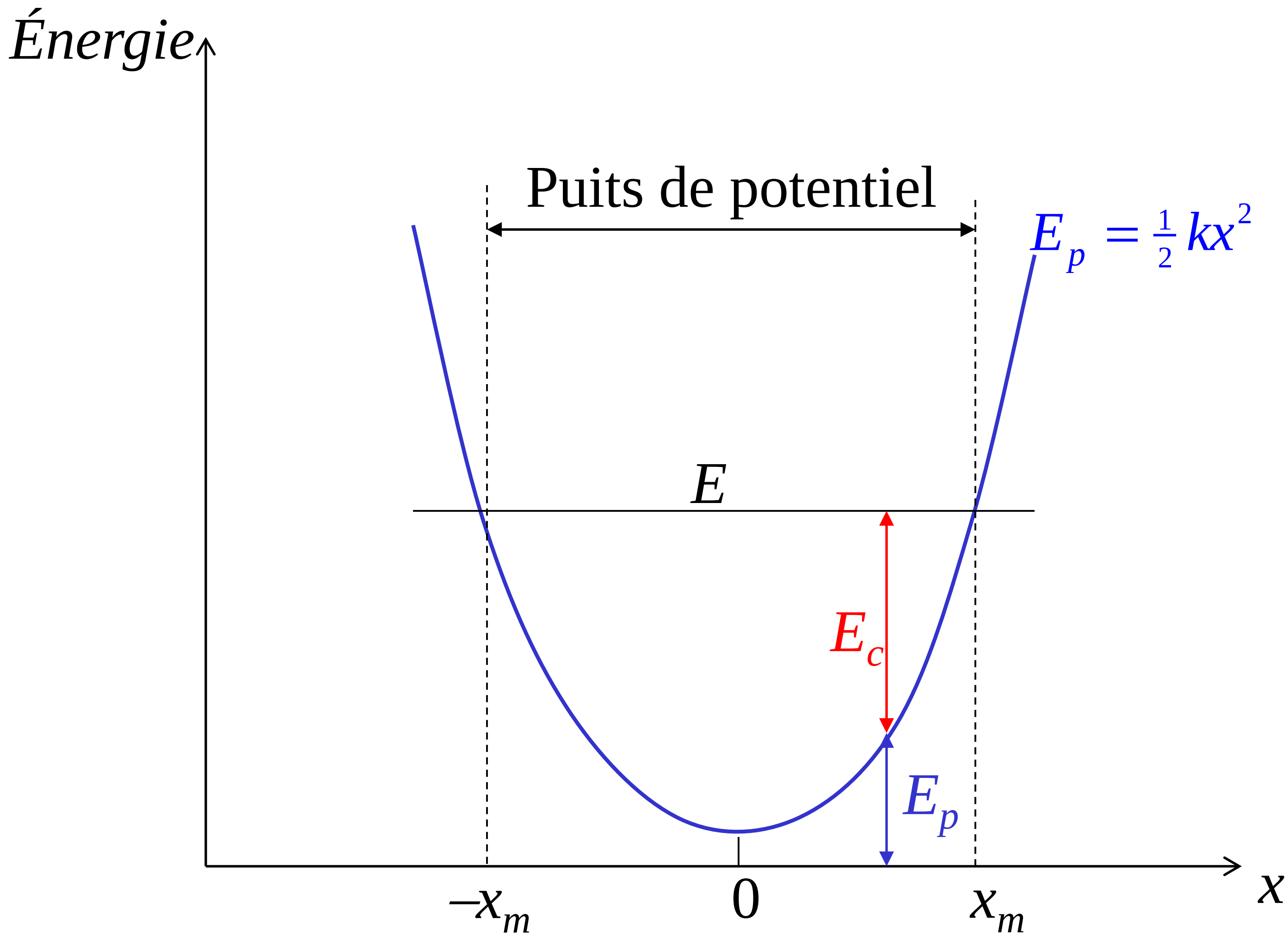
Comme l'énergie cinétique est une grandeur nécessairement positive, nous obtenons une condition restreignant les états énergétiques possibles du système. Cette condition de restriction définit ce que l'on appelle les états liés du système. Ils sont définis par :

$$E_c > 0 \;\Rightarrow\; E - E_p > 0$$

Pour une masse accrochée à un ressort, les états liés du système sont définis par :

$$E - \tfrac{1}{2}kx^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{\frac{2E}{k}} < x < \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

Les valeurs de $x$ en dehors de cet intervalle sont inaccessibles au système qui est dit enfermé dans un puits de potentiel à cause de la forme prise par la fonction énergie potentielle.



Énergie
Puits de potentiel
$E_p = \frac{1}{2}kx^2$
$E$
$E_c$
$E_p$
$-x_m$
0
$x_m$
$x$

## 2. Stabilité du système

- Définition de la stabilité

Pour un système soumis à une force conservative, il est intéressant de savoir s'il existe ou pas des états d'équilibre. La forme locale de l'énergie potentielle permet d'écrire que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p \qquad \text{ou} \qquad \vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i} \ \text{ si } E_p \text{ ne dépend que de } x$$

La condition d'équilibre se traduit donc par un extremum de la fonction énergie potentielle.

$$\frac{dE_p}{dx} = 0$$

Un équilibre est dit stable si, à la suite d'une perturbation qui a éloigné le système de cette position, celui-ci y retourne spontanément. Dans le cas contraire, l'équilibre est dit instable.

- Conditions de stabilité

Dans le cas où l'énergie potentielle ne dépend que de $x$ et dont la dérivée s'annule en $x_0$.

Si, à la suite d'une perturbation $x < x_0$, la force doit être positive pour ramener le système vers $x_0$. Alors :

$$\frac{dE_p}{dx} < 0$$

Si $x > x_0$, la force doit être négative pour ramener le système vers $x_0$. Alors :

$$\frac{dE_p}{dx} > 0$$

La fonction $E_p(x)$ décroît avant $x_0$ et croît après. Elle présente donc un minimum en $x_0$. La condition de stabilité se traduit donc par :

$$\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} > 0$$

Si $E_p(x)$ présente un maximum en $x_0$, la position $x_0$ sera une position d'équilibre instable.

- Résumé

Équilibre stable pour $x = x_0 \Leftrightarrow E_p(x_0)$ minimale

$$\Updownarrow$$

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} > 0$$

Équilibre instable pour $x = x_0 \Leftrightarrow E_p(x_0)$ maximale

$$\Updownarrow$$

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} < 0$$

Un système livré à lui-même évolue spontanément vers les énergies potentielles décroissantes.