Chapitre 7

Feuille d'exercices

Exercice 1.

Déterminer (en justifiant votre réponse) parmi les systèmes suivants lesquels sont linéaires :

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y & = & 1 \\ x^2+(y-5)^2 & = & 4 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+3y & = & 1 \\ -4x+y & = & 2 \\ x-y & = & 5 \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+iy+3z & = & 0 \\ y-(1+i)z & = & 2i \\ x+y+z & = & 1 \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{rcl} x-y+10z & = & 4 \\ 3x+2y-z & = & 2 \\ 4i\,x+(i-1)y & = & 1-yz \end{array}\right.$$

Solution : Les systèmes $a)$ et $d)$ ne sont pas linéaires et les autres systèmes sont linéaires.

Exercice 2.

1) Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x+3y & = & 5 \\ 12x-2y & = & 0 \end{array}\right.$$

Parmi les n-uplets suivants, déterminer ceux qui sont solution de ce système.

$$(a)\ \left(1,\frac{1}{3}\right),\quad (b)\ \left(\frac{1}{2},3,0\right),\quad (c)\ \left(\frac{1}{2},3\right),\quad (d)\ (1,6)$$

2) Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{4}x+y+z & = & \frac{28}{15} \\ -x+3y+10z & = & 0 \\ x+6y & = & 8 \end{array}\right.$$

Parmi les n-uplets suivants, déterminer ceux qui sont solution de ce système.

$$(a)\ \left(4,\frac{1}{5},\frac{2}{3}\right),\quad (b)\ \left(4,\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right),\quad (c)\ \left(\frac{8}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right),\quad (d)\ \left(\frac{8}{2},\frac{1}{5}\right)$$

Exercice 3.

Résoudre les systèmes suivants :

$$a)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+4z &=& 9 \\ -\frac{1}{2}y-z &=& -\frac{3}{2} \\ -12z &=& -24 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y-4z+t &=& 0 \\ 3y+\frac{7}{2}t &=& 4 \\ 7z-\frac{7}{2}t &=& -7 \\ \frac{2}{3}t &=& \frac{10}{3} \end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y-4z+t &=& 0 \\ 3y+\frac{7}{2}t &=& 4 \\ \frac{2}{3}z &=& \frac{10}{3} \end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{rcl} i\,x &=& 3 \\ x+2y &=& 4 \\ x+2y+3i\,z &=& 2+3i \end{array}\right.$$

Solution :

a) Il y a une unique solution : $(1,-1,2)$.

b) Il y a une unique solution : $(\frac{23}{2},-\frac{11}{2},\frac{3}{2},5)$.

c) Il y a donc une infinité de solutions données par l'ensemble

$$\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{22}{3}+\frac{11}{6}\,t,\frac{4}{3}-\frac{7}{6}t,5,t\right)\mid t\in\mathbb{R}\right\}.$$

d) Il y a une unique solution : $(-3i,2+\frac{3}{2}i,1+\dfrac{2}{3}i)$.

Exercice 4.

On pose

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\\0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad u_4=\begin{pmatrix}5\\2\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ est combinaison linéaire de u_1,u_2,u_3 et u_4.

Solution : Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On cherche $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\lambda_1\,u_1+\lambda_2\,u_2+\lambda_3\,u_3+\lambda_4\,u_4.$$

On aboutit au système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 &+& 2\lambda_2 &+& 3\lambda_3 &+& 5\lambda_4 &=& x \\ && 2\lambda_2 &+& \lambda_3 &+& 2\lambda_4 &=& y \\ &&&& 4\lambda_3 &+& 3\lambda_4 &=& z \\ &&&&&& \lambda_4 &=& t. \end{array}\right.$$

Système échelonné (et même triangulaire) qui admet une unique solution ... que l'on sait résoudre.

Exercice 5.

Résoudre les systèmes ci-dessous d'inconnues x, y, z et de paramètre m.

1) $\left\{\begin{array}{rcl} x - my + 2z & = & m \\ y + (m+2)z & = & m^2 - 5 \\ 2z & = & 2m - 4. \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{rcl} x - (m^3 - 1)y + z & = & m \\ (m-1)y - (m-2)z & = & m + 1 \\ (m-2)(m-1)z & = & m^2 - 1. \end{array}\right.$

Solution :

1) La solution est $(-2m+4, -1, m-2)$.

2)
- ▷ Si $m = 2$, aucune solution.
- ▷ Si $m = 1$, infinité de solutions.
- ▷ Sinon, unique solution.

Exercice 6.

Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & 1 \\ 5x & + & 7y & = & 3 \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 4y & = & 10 \\ 3x & + & 6y & = & 15 \end{array}\right.$ **3)** $\left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & - & 2y & = & 5 \\ -6x & + & 3y & = & 1 \end{array}\right.$

Solution :

1) La solution est $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

2) L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(5-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

3) Il n'y a pas de solution.

Exercice 7.

Déterminer à quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d le système ci-dessous admet une unique solution

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax + by & = & 0 \\ cx + dy & = & 0 \end{array}\right.$$

Solution : Il faut $ad - cb \neq 0$.

Exercice 8.

Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcl} y + z & = & 2 \\ x + 3y + 3z & = & 0 \\ x + 3y + 6z & = & 3 \end{array}\right.$ **4)** $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y - 2z & = & 5 \\ x - 2y + 3z & = & 2 \\ 4x - y + 4z & = & 1 \end{array}\right.$ **7)** $\left\{\begin{array}{rcl} z_1 + iz_2 - iz_3 & = & 0 \\ -z_1 + (1-i)z_2 + 2iz_3 & = & 0 \\ 2z_1 - (1-2i)z_2 - 3iz_3 & = & 0 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 11 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \end{array}\right.$ **5)** $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 3 \\ 2x + 3y + 8z & = & 4 \\ 3x + 2y - 17z & = & 1 \end{array}\right.$ **8)** $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - 2z & = & 1 \\ x - 2y + z & = & 1 \\ -2x + y + z & = & 1 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y - 3z & = & 5 \\ 3x - 2y + 2z & = & 5 \\ 5x - 3y - z & = & 16 \end{array}\right.$ **6)** $\left\{\begin{array}{rcl} -2x - 2y + z & = & 1 \\ x + 4y + z & = & -2 \\ x - 2y - 2z & = & 1 \end{array}\right.$ **9)** $\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y + z - t & = & 2 \\ x + 4y + 2z + t & = & 3 \\ x + 2y - z - 2t & = & 1 \end{array}\right.$

Solution :

1) La solution est $(-6, 1, 1)$.

2) La solution est $(1, 3, 2)$.

3) La solution est $(1, -3, -2)$.

4) Le système n'admet pas de solution.

5) La solution est $(-1, 2, 0)$.

6) L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{(z, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$.

7) La solution est $(0, 0, 0)$.

8) La solution est $(3, 3, 4)$.

9) L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(9t - 1, 1 - 3t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 9.

On donne ci-dessous deux systèmes d'inconnues x, y, z avec $k \in \mathbb{R}$ un paramètre. Déterminer (lorsque cela est possible) les valeurs de k de sorte que ces systèmes admettent

- ▷ une unique solution,
- ▷ aucune solution,
- ▷ une infinité de solutions.

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & kz & = & 1 \\ 2x & + & ky & + & 8z & = & 3 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} kx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & kz & = & 1 \end{array}\right.$

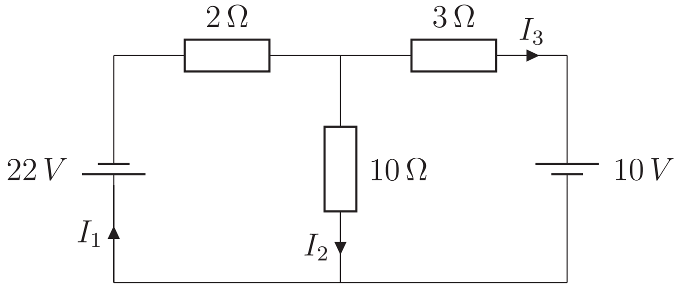
Solution :

1)
- ▷ Si $k = 4$, il n'y a pas de solution.
- ▷ Sinon il y a une infinité de solutions.

2)
- ▷ Si $k = 1$, il y a une infinité de solutions.
- ▷ Si $k = -2$, il n'y a pas de solution.
- ▷ Sinon il y a une unique solution.

Exercice 10. — *Application à un circuit électrique*

On considère le circuit électrique ci-dessous dont on souhaite déterminer la valeur des courants I_1, I_2 et I_3.



D'après la loi de Kirchhoff, on a $I_1 = I_2 + I_3$. En appliquant la loi d'Ohm dans le circuit de gauche, on obtient $22 = 2I_1 + 10I_2$. De même, la loi d'Ohm appliquée au circuit de droite entraîne

$10 = 10I_2 - 3I_3$. On en déduit que les courants I_1, I_2, I_3 sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ 2I_1 & + & 10I_2 & & & = & 22 \\ & & 10I_2 & - & 3I_3 & = & 10 \end{array}\right. \tag{3}$$

Appliquer la méthode de Gauss à ce système et en déduire que les solutions sont $I_1 = \dfrac{93}{28}$, $I_2 = \dfrac{129}{84}$ et $I_3 = \dfrac{25}{14}$.

Exercice 11.

1) Soient $u = (1, 2, 3)$ et $v = (1, 0, 1)$. Trouver tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $x \wedge u = v$.

2) Même question avec $u = (-3, 2, 3)$ et $v = (1, 0, 1)$.

Solution :

1) Il n'existe pas de vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \wedge u = v$.

2) L'ensemble des vecteurs x possibles est $\mathcal{S} = \{(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\,x_3, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$