Annexe

Outils d'analyse et de raisonnement

Pré-requis

- ☐ Maîtriser la langue française.
- ☐ Avoir du bon sens.

Objectifs

- ☐ Utiliser à bon escient les différentes notations et les symboles mathématiques.
- ☐ Construire un raisonnement correct et l'écrire.

Séquence 1

Notations et symboles mathématiques

Comme toutes langues, le langage mathématique a sa propre structure, ses propres règles, ses propres symboles. Chacun des symboles a une signification bien précise et doit être utilisé dans un contexte bien précis.

Dans ce chapitre, nous allons présenter ces éléments de langage et ces notations qui permettront de lire et d'écrire des raisonnements mathématiques.

1 Les ensembles

1.1 Notions d'ensembles

Définitions

Un **ensemble** est une collection (ou un groupement) d'objets distincts ; ces objets s'appellent **les éléments** de cet ensemble.

Soit E un ensemble. Lorsque a est un élément de E, nous disons que « a est dans E » et nous écrivons

$$a \in E,$$

ce qui se lit « a appartient à E ».
Lorsque a n'est pas un élément de E, nous écrivons

$$a \notin E,$$

ce qui se lit « a n'appartient pas à E ».

On appelle **ensemble vide** l'ensemble n'ayant aucun élément. Celui-ci est noté $\{\}$ ou plus souvent $\emptyset$.

Notations

On notera :

- ▷ $\mathbb{N}$, l'**ensemble des entiers naturels** ;
- ▷ $\mathbb{Z}$, l'**ensemble des entiers relatifs** ;
- ▷ $\mathbb{Q}$, l'**ensemble des rationnels** ;
- ▷ $\mathbb{R}$, l'**ensemble des nombres réels**.

Remarques

- ▷ Les entiers naturels sont les « entiers positifs ou nuls ».
- ▷ Les entiers relatifs, ou **les entiers** (sans autre précision), sont les « entiers positifs, négatifs ou nuls ».
- ▷ Les rationnels sont les nombres réels qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers.

Exemples

Considérons les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. On a :

- ▷ $0 \in \mathbb{N}$,
- ▷ $20 \in \mathbb{N}$,
- ▷ $-1 \notin \mathbb{N}$,
- ▷ $0 \in \mathbb{Z}$,
- ▷ $-2 \in \mathbb{Z}$,
- ▷ $10 \in \mathbb{Z}$,
- ▷ $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$,
- ▷ $-\dfrac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$,
- ▷ $-5 \in \mathbb{Q}$,
- ▷ $-\dfrac{4}{5} \in \mathbb{Q}$,
- ▷ $\pi \notin \mathbb{Q}$,
- ▷ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
- ▷ $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$,
- ▷ $\ln 2 \notin \mathbb{Q}$,
- ▷ $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$.

Un ensemble peut être défini *en extension* ou *en compréhension*.

1.2 Ensemble défini en extension

La manière la plus simple de décrire un ensemble « fini » est de lister ses éléments entre accolades et en séparant chaque élément par une virgule. L'ensemble est alors défini **en extension**.

Exemples

1. L'ensemble $\{0, 1\}$ représente l'ensemble dont les éléments sont 0 et 1.
2. L'ensemble $\{\text{lundi}, \text{mardi}, \text{mercredi}, \text{jeudi}, \text{vendredi}, \text{samedi}, \text{dimanche}\}$ représente l'ensemble des jours de la semaine.
3. Un ensemble réduit à un élément, par exemple $\{0\}$, est appelé un **singleton**.

Remarques

- ▷ L'ordre des éléments n'a aucune importance. Par exemple,

$$\{0, 1\} = \{1, 0\}.$$

- ▷ La répétition d'éléments entre les accolades ne modifie pas l'ensemble. Par exemple,

$$\{0, 1, 1\} = \{0, 0, 0, 1\} = \{0, 1\}.$$

Lorsqu'un ensemble possède une structure simple, claire et évidente, nous pouvons décrire l'ensemble en listant ses premiers éléments suivis de points de suspension. Ainsi il est aussi possible de décrire des ensembles « infinis » en extension.

Exemples

1. L'**ensemble des entiers naturels** $\mathbb{N}$ se décrit en extension par

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

2. L'**ensemble des entiers relatifs** $\mathbb{Z}$ se décrit en extension par

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

3. Pour n un entier naturel non nul, l'ensemble $[\![1; n]\!]$ se décrit en extension par

$$[\![1; n]\!] = \{1, 2, \dots, n\}.$$

4. L'ensemble des puissances de 10 est $\{1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots\}$.

Exercice 1.

1) Soit $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Donner $\mathbb{N}^*$ en extension.

2) Soit P l'ensemble des entiers pairs. Donner P en extension.

3) Donner une expression mathématique traduisant la phrase « Soit k un entier compris entre 1 et n ».

1.3 Ensemble défini en compréhension

Pour définir un ensemble en compréhension, on a besoin d'un ensemble déjà connu, noté ici E. Le sous-ensemble composé des éléments de E qui vérifient une même propriété P sera alors noté par :

$$\{x \in E \mid P(x)\}\,.$$

Cette dernière notation se comprend ainsi :

$$\{\ \underbrace{x \in E}\ \mid\ \underbrace{P(x)}\ \}$$

L'ensemble	des éléments x appartenant à E	tel que	x vérifie la propriété P

Remarque

L'expression $\{x \in E \mid P(x)\}$ peut aussi se lire :

l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété P.

Exemples

▷ Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Les intervalles réels peuvent être décrits en compréhension. Par exemple, on a :

- $]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $[a; b[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \text{ et } x < b\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

▷ L'ensemble des entiers pairs peut se décrire ainsi :

$$\begin{aligned} \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{« } n \text{ est pair »}\} &= \left\{n \in \mathbb{Z} \mid \tfrac{n}{2} \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ vérifiant } n = 2k\} \end{aligned}$$

En effet, un entier n est pair si et seulement si $\frac{n}{2}$ est un entier, c'est-à-dire $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$. De plus, $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{n}{2} = k$, c'est-à-dire $n = 2k$.

Exercice 2.

Décrire en compréhension les intervalles $[a; +\infty[$, $]a; b]$ et $[a; b]$.

Notations

Soit E un ensemble de réels (autrement dit $E \subset \mathbb{R}$).

▷ On note par E^*, lu « E étoile », l'ensemble des éléments de E différents de 0 :

$$E^* = \{x \in E \mid \text{« } x \text{ est non nul »}\} = \{x \in E \mid x \neq 0\}\,.$$

▷ On note par E_+, lu « E plus », l'ensemble des éléments de E supérieurs ou égaux à 0 :

$$E_+ = \{x \in E \mid \text{« } x \text{ est positif »}\} = \{x \in E \mid x \geq 0\}.$$

▷ On note par E_+^*, lu « E plus étoile », l'ensemble des éléments de E non nuls et supérieurs à 0 (c'est-à-dire supérieurs strictement à 0) :

$$E_+^* = \{x \in E \mid x \neq 0 \text{ et } x \geq 0\} = \{x \in E \mid x > 0\}.$$

Exercice 3.
Soit $E \subset \mathbb{R}$.

1) Décrire en une phrase ce que représente E_-, puis donner une écriture en compréhension de cet ensemble.

2) Même question pour E_-^*.

1.4 Inclusion et égalité d'ensembles

Définitions – *Inclusion et parties*

Soient E et F deux ensembles. Si tous les éléments de E sont des éléments de F, nous disons que « E est contenu dans F » et nous écrivons

$$E \subset F,$$

ce qui se lit « E est **inclus** dans F ». On dit aussi : « E est **une partie** de F » ou « E est un **sous-ensemble** de F ».

Remarque

Si E est un ensemble, alors l'ensemble vide est une partie de E : $\emptyset \subset E$.

Exemples

▷ Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs et tous les entiers relatifs sont des rationnels. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

▷ Si on considère l'ensemble des jours de la semaine, on a

$$\{\text{mardi}, \text{mercredi}, \text{samedi}\} \subset \{\text{lundi}, \text{mardi}, \text{mercredi}, \text{jeudi}, \text{vendredi}, \text{samedi}, \text{dimanche}\}.$$

▷ $\{a, i\} \subset \{a, e, i, o, u, y\}$.

▷ Les parties de $\{0, 1\}$ sont l'ensemble vide $\emptyset$, les sous-ensembles à un seul élément $\{0\}$ et $\{1\}$, et le sous-ensemble à 2 éléments $\{0, 1\}$.

Attention

Une erreur classique consiste à utiliser le symbole $\in$ au lieu de $\subset$ ou l'inverse.

$$\text{« un élément »} \in E \qquad \text{et} \qquad \text{« un ensemble »} \subset E.$$

Exemple

Soit l'ensemble A défini en extension par $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Alors

$$1 \in A \quad \text{et} \quad 2 \in A$$

donc tous les éléments de $\{1, 2\}$ sont des éléments de A. C'est-à-dire $\{1, 2\} \subset A$. Mais il est faux d'écrire $\{1, 2\} \in A$ car

$$\text{l'ensemble } \{1, 2\} \text{ n'est pas un élément de } A,$$

c'est un ensemble qui contient des éléments de A.

Exercice 4.

Soient E un ensemble et x un élément de E. Parmi les assertions ci-dessous lesquelles ont un sens ?

1) $x \in E$ **2)** $x \subset E$ **3)** $\{x\} \subset E$ **4)** $\{x\} \in E$

Exercice 5.

Donner toutes les parties de l'ensemble à deux éléments $\{a, b\}$.

Propriété

Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Remarque

Garder à l'esprit cette propriété qui est très utile lorsque l'on désire montrer que deux ensembles sont égaux. Nous verrons des illustrations de son utilisation plus tard.

1.5 Opérations sur les ensembles

Définitions – *Intersection et union*

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.

- ▷ L'**intersection** de A et de B, notée $A \cap B$ et lue « A inter B », est l'ensemble :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \textbf{ et } x \in B\}.$$

- ▷ La **réunion** de A et de B, notée $A \cup B$ et lue « A union B », est l'ensemble :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

Exemples

Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{0, 2, 4, 6\}$. On a :

$$A \cap B = \{2, 4\} \qquad \text{et} \qquad A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}.$$

Définitions – *Différence et complémentaire*

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.

- La **différence** de A et B, notée $A \setminus B$ et lue « A privé de B », est l'ensemble :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

- Le **complémentaire** de A dans E, noté $\complement_E A$ ou A^c, est l'ensemble $E \setminus A$.

Exemples

Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{0, 2, 4, 6\}$. On a :

$$A \setminus B = \{1, 3\} \qquad \text{et} \qquad \complement_{A \cup B} A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{0, 1, 3, 6\}.$$

Remarque

La notation $\bar{A}$ existe aussi pour le complémentaire de A. Cette notation est utilisé notamment dans le domaine des probabilités.

1.6 Produits cartésiens, couples, n-uplets

Définitions

Soient E et F deux ensembles. Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, *pris dans cet ordre*, on peut construire un nouvel objet mathématique, noté (x, y) et appelé **couple**.
On appelle **produit cartésien** de E par F l'ensemble, noté $E \times F$, défini par :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, \ y \in F\}.$$

Notation

L'ensemble $E \times E$ se note aussi E^2.

Exemples

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.
- Soient E et F les ensembles définis par

$$E = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad F = \{2, 3, 4\}.$$

Alors, $(0, 2) \in E \times F$ et $(1, 4) \in E \times F$. Par contre, $(2, 0) \notin E \times F$ (d'où l'importance de l'ordre dans les couples). On a :

$$E \times F = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

et

$$F \times E = \{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1)\}.$$

Ici $E \times F \neq F \times E$.

Remarques

- $\triangleright$ En général, $E \times F \neq F \times E$.
- $\triangleright$ Il y a au moins deux grandes différences entre un couple (x, y) et l'ensemble $\{x, y\}$:
  1. le couple (x, y) est décrit par des parenthèses tandis que l'ensemble $\{x, y\}$ est décrit par des accolades ;
  2. le couple (x, y) est (en général) différent du couple (y, x) alors que les ensembles $\{x, y\}$ et $\{y, x\}$ sont toujours les mêmes.

Propriétés

Soient E et F deux ensembles. Alors, deux couples (x, y) et (a, b) de $E \times F$ sont égaux si et seulement si $x = a$ et $y = b$.

Exercice 6.

Soient $E = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$.

1. Représenter dans le plan les éléments de $E \times E$ puis en déduire le nombre d'éléments de $E \times E$.
2. Déterminer $E \times E$, $A \times B$ et $B \times A$.

Plus généralement, nous avons :

Définitions

Soient $n \geq 2$ un entier et E_1, E_2, $\ldots$, E_n, n ensembles.

- $\triangleright$ Le produit cartésien de E_1, E_2, $\ldots$, E_n, est l'ensemble, noté $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, défini par :

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, \ldots,\ x_n \in E_n\}.$$

- $\triangleright$ Les éléments de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ sont appelés des **n-uplets**.
- $\triangleright$ Si i est un entier compris entre 1 et n, la **$i$ème coordonnée** de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou sa **$i$ème composante** est x_i.
- $\triangleright$ Un 3-uplet s'appelle aussi un **triplet**.

Notations

- $\triangleright$ L'ensemble $\underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$ se note aussi E^n.
- $\triangleright$ Un n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ se note aussi $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Exemples

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}}_{n \text{ fois}}.$$

Remarque

Un couple de $\mathbb{R}^2$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, un n-uplet de $\mathbb{C}^n$ est un vecteur de $\mathbb{C}^n$.

Notation

L'expression « pour tout $1 \leq i \leq n$ » doit se lire et se comprendre comme suit :

$$\text{« pour tout entier } i \text{ compris entre } 1 \text{ et } n \text{ ».}$$

On peut aussi l'écrire « pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ ».

Propriétés

Soient $E_1, \ldots, E_n$ n ensembles. Deux n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de $E_1 \times \cdots \times E_n$ sont égaux si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$x_i = y_i.$$

2 Applications

Définitions

Soient E et F deux ensembles.

- ▷ Une **application** f de E dans F est une relation qui associe à tout élément de E, un unique élément de F.
- ▷ L'ensemble E est appelé **ensemble de départ**.
- ▷ L'ensemble F est appelé **ensemble d'arrivée**.
- ▷ Si $x \in E$, l'unique élément de F qui est associé à x par f, est noté $f(x)$ et est appelé **l'image** de x par f.
- ▷ Si $y = f(x)$, x est appelé **un antécédent** de y par f.
- ▷ L'application est représentée par son symbole, ici f, et a un nom (souvent confondu avec son symbole).

Notations

Une application f de E dans F est notée :

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Dans cette notation, x est **la variable** de l'application et $f(x)$ son expression. Il est possible de ne pas les mentionner. Dans ce cas, l'application est notée :

$$f \ : \ E \to F \qquad \text{ou} \qquad E \xrightarrow{f} F.$$

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.

Remarque

Pour définir une application, il faut associer à chaque élément de l'ensemble de départ, un élément de l'ensemble d'arrivée.

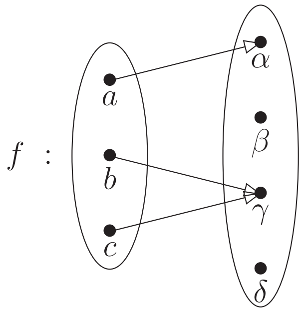
Lorsque l'ensemble E possède un petit nombre d'éléments, l'application peut être définie en donnant explicitement l'image de chaque élément de l'ensemble de départ.

Exemple

Soit l'application $f : \{a,b,c\} \to \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ définie par :

$$f(a) = \alpha,\ f(b) = \gamma \text{ et } f(c) = \gamma.$$

Elle peut aussi être définie par le graphe suivant :



ou encore en donnant son expression :

$$\begin{array}{cccc} f : & \{a,b,c\} & \to & \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \\ & x & \mapsto & f(x), \end{array}$$

avec

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = a, \\ \gamma & \text{si } x = b \text{ ou } x = c. \end{cases}$$

Cette dernière écriture est appelée l'expression de la fonction f.

Exemple – *Application identité*

Soit E un ensemble. L'application qui à x associe x de E dans E s'appelle l'application identité sur E, elle est notée Id_E. Elle est définie par :

$$\begin{array}{cccc} Id_E : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x. \end{array}$$

Attention

L'écriture $f(x)$ représente la valeur de l'application f en x (c'est-à-dire un élément de l'ensemble d'arrivée). Il ne faut pas dire ou écrire « l'application $f(x)$ » mais « l'application f ».

Exercice 7.

Soient $E = \{0,1\}$ et $F = \{0\}$.

1) Donner toutes les applications de E dans F. Combien y en a t-il ?

2) Donner toutes les applications de F dans E. Combien y en a t-il ?

2.1 Ensemble défini comme image directe

Définition

Soient E, F des ensembles, $f : E \to F$ une application et $A \subset E$ une partie de E.
L'**image directe de A par f**, noté $f(A)$, est définie par :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Remarques

- ▷ L'ensemble $f(A)$ est un sous-ensemble de F.
- ▷ Soit $y \in F$. On a alors $y \in f(A)$ si et seulement s'il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$:

$$f(A) = \{y \in F \mid \text{il existe } x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

Exemples

- ▷ Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ défini par : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(k) = 2^k$. On a :

$$f(\mathbb{N}) = \left\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\right\} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots\}.$$

- ▷ Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ défini par : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(k) = k\pi$. On a :

$$f(\mathbb{Z}) = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}.$$

- ▷ L'ensemble des solutions réels de l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ est :

$$\left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 8.

Décrire ces ensembles en extension :

$$\left\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Feuille d'exercices : séquence 1

Exercice 1.
Soit E l'ensemble dont les éléments sont 1, 3 et 5. Donner E en extension.

Exercice 2.
1) Soit $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Donner $\mathbb{N}^*$ en extension.

2) Soit P l'ensemble des entiers pairs. Donner P en extension.

Exercice 3.
Soit $E = \{a, b, c\}$. Parmi les assertions ci-dessous lesquelles ont un sens ?

1) $a \in E$ **2)** $a \subset E$ **3)** $\{a\} \subset E$ **4)** $\{a\} \in E$

Exercice 4.
1) Soit A l'ensemble des lettres de l'alphabet (alphabet français). Donner A.

2) Soit $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers non nuls. Donner $\mathbb{Z}^*$.

3) Soit P_+ l'ensemble des entiers naturels pairs. Donner P_+

Exercice 5.
Donner ces ensembles en extension :

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 1 \text{ ou } x = -2\}, \qquad \{x \in \mathbb{N} \mid 5x = 2\}, \qquad \{n \in \mathbb{N} \mid \text{« } n \text{ est impair »}\}.$$

Exercice 6.
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions réels de l'équation $-\frac{3}{4}x + \frac{4}{3} = -\frac{3}{2}$

1) Sans résoudre l'équation, donner une expression de $\mathcal{S}$ en compréhension.

2) Donner $\mathcal{S}$ en extension.

Exercice 7.
Donner les ensembles suivants en extension :

1) $\mathbb{Z}_+$ **2)** $\mathbb{Z}_-$ **3)** $\mathbb{Z}^*$

Exercice 8.
Donner en une expression en compréhension de l'ensemble des entiers impairs.

Exercice 9.
Dire si les affirmations suivantes sont vraies :

1. $3 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x + 9 = 0\}$
2. $\{-1, 5\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4x - 5 = 0\}$
3. $\{8\} = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{2}x - 4 = 0\right\}$
4. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 4 = 0\} = \emptyset$
5. $-\frac{9}{4} \in \left\{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{9}{4}x + \frac{9}{7} = 0\right\}$
6. $\{1\} \in \{x \in \mathbb{Q} \mid (x - 1)(x + 6) = 0\}$

7. $\dfrac{1}{7} \in \left\{x \in \mathbb{Q} \mid \dfrac{2x-3}{7x-1} = 0\right\}$

8. $\{0\} \subset \left\{x \in \mathbb{Q} \mid \dfrac{x^2-x}{2x+3} = 0\right\}$

Exercice 10.

Soit $E = \{a, b, c\}$. Parmi les assertions ci-dessous lesquelles ont un sens ?

1) $\emptyset \in E$ **2)** $\emptyset \subset E$ **3)** $\{\emptyset\} \subset E$ **4)** $\{\emptyset\} \in E$

indication : $\emptyset$ est un ensemble. Tout ensemble admet l'ensemble vide comme partie. Si x est un objet mathématique, $\{x\}$ est un ensemble d'objet. Si E est un ensemble d'objets, alors une partie de E est un ensemble d'objets.

Exercice 11.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Donner une expression de $\mathcal{S}$ en compréhension. En déduire $\mathcal{S}$ en extension.

Exercice 12.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions réels de l'équation

$$z^2 + (2-i)z - 2i = 0.$$

Donner une expression de $\mathcal{S}$ en compréhension. En déduire $\mathcal{S}$ en extension.

Exercice 13.

Soit E l'ensemble dont les éléments sont 0, 1 et 2. Donner E et l'ensemble de ses parties, noté $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 14.

1) Donner toutes les parties de l'ensemble à trois éléments $\{a, b, c\}$.

2) Donner toutes les parties de l'ensemble à quatre éléments $\{a, b, c, d\}$.

Exercice 15.

Soit $\mathcal{E}_5$ l'ensemble des nombres multiples de 5, c'est-à-dire les nombres qu'on peut diviser par 5.

1) Soit x un entier. Que pouvez vous dire de $\dfrac{x}{5}$?

2) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 5a$.

3) Donner une expression en compréhension des multiples de 5.

Exercice 16.

Donner la nature des objets mathématiques suivants :

1) $\{-1, 1\}$, **2)** $[-1, 1]$, **3)** $(-1, 1)$.

Exercice 17.

Soient $E = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$.

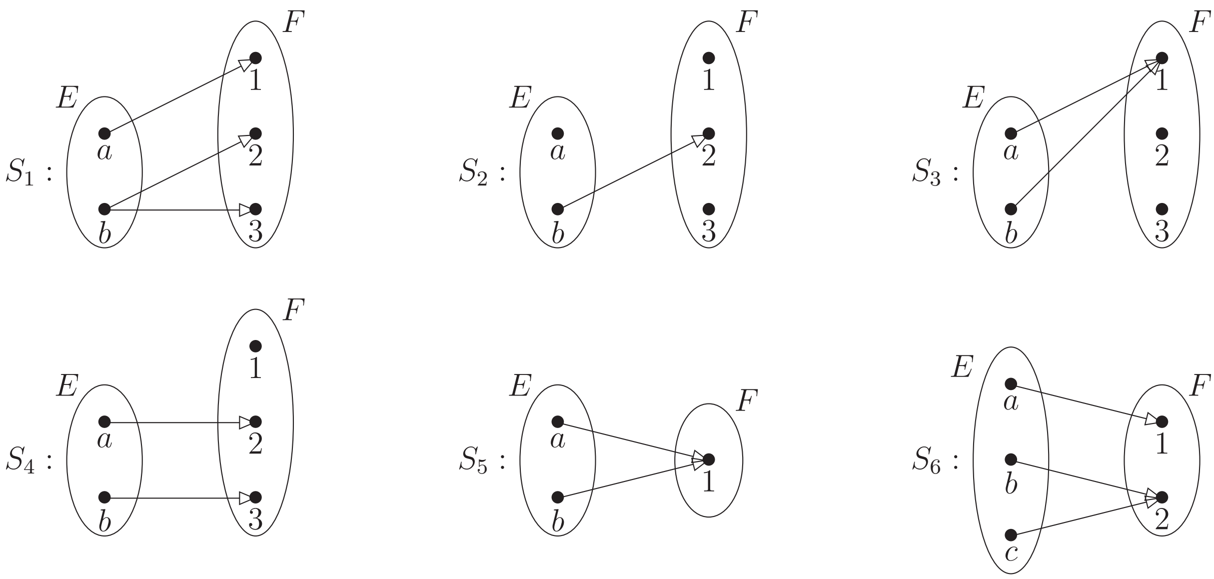
1. Représenter dans le plan les éléments de $E \times E$ puis en déduire le nombre d'éléments de

$E \times E$.

2. Déterminer $E \times E$, $A \times B$ et $B \times A$.
3. Déterminer $\complement_E A \times \complement_E B$ et $\complement_{E\times E}(A \times B)$.

Exercice 18.

Parmi les représentations suivantes, déterminer celles qui correspondent à une application.



Exercice 19.

Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres ayant un nombre fini de chiffres après la virgule (dans son écriture en base décimale).

1) Parmi les nombres suivants, lesquels sont des nombres décimaux ?

a) 1, **b)** $-\dfrac{1}{2}$, **c)** $\dfrac{1}{3}$, **d)** $\dfrac{111111}{10^5}$, **e)** π.

2) Soit x un nombre décimal ayant exactement n chiffres après la virgule dans son écriture en base décimale.

a) Que pouvez-vous dire de $x.10^n$?

b) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \dfrac{a}{10^n}$.

3) Donner une expression en compréhension des nombres décimaux.