Chapitre 9

Polynômes et fractions rationnelles

Pré-requis

- ☐ Nombres complexes.
- ☐ Polynômes du second degré : racines réelles et complexes.
- ☐ Notation $\sum$ pour les sommes.

Objectifs

- ☐ Savoir identifier un polynôme.
- ☐ Savoir déterminer le degré d'un polynôme.
- ☐ Connaître les opérations simples sur les polynômes : addition, multiplication de polynômes.
- ☐ Savoir effectuer la division euclidienne de deux polynômes.
- ☐ Savoir décomposer un polynôme en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.
- ☐ Savoir décomposer une fraction rationnelle en éléments simples.

Sommaire

Chapitre 9 - Séquence 1

Les polynômes

1 Les polynômes

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, soit l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$.

Définitions

- On appelle **polynôme** P **de l'indéterminée** X**, à coefficients dans** $\mathbb{K}$, tout objet mathématique de la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k,$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{K}$, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$.
- Les a_k, pour $k \in [\![0;n]\!]$, sont appelés les **coefficients** du polynôme P.
- Si, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = 0$, alors P est appelé **le polynôme nul** et est noté $P(X) = 0$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes de l'indéterminée X à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemples – *de polynômes*

- $P(X) = 2 + 3X$ est un polynôme à coefficients réels :

$$P(X) = a_0 + a_1X, \quad \text{où} \quad n = 1,\ a_0 = 2 \in \mathbb{R} \text{ et } a_1 = 3 \in \mathbb{R}.$$

- $P(X) = iX^2 + X^3$ est un polynôme à coefficients complexes :

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, \quad \text{où} \quad n = 3,\ a_0 = a_1 = 0,\ a_2 = i \text{ et } a_3 = 1.$$

Exemples – *Puissances non entières*

- $P(X) = \frac{1}{X} = X^{-1}$ n'est pas un polynôme car la puissance n'est pas un entier naturel.
- $P(X) = \sqrt{X} = X^{\frac{1}{2}}$ n'est pas un polynôme car la puissance n'est pas un entier.

Exemples – *Ne peut pas s'écrire sous la forme donnée*

- $P(X) = \sin X$ n'est pas un polynôme car n'est pas de la forme demandée.
- $P(X) = 1 + \mathrm{e}^X X$ n'est pas un polynôme car même si on prend $a_0 = 1$ et $a_1 = \mathrm{e}^X$, on a bien $P(X) = a_0 + a_1X$, mais, dans ce cas, a_1 n'est pas une constante : il dépend de X.

Théorème

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ donnés par :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^{m} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \ldots + a_m X^m, \\ Q(X) &= \sum_{k=0}^{n} b_k X^k = b_0 + b_1 X + \ldots + b_m X^m + \ldots + b_n X^n, \end{aligned}$$

où $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $m \leq n$, $a_k \in \mathbb{K}$ pour tout $k \in [\![0;m]\!]$, et $b_k \in \mathbb{K}$ pour tout $k \in [\![0;n]\!]$. Alors,

$$P = Q \iff \begin{cases} \forall k \in [\![0;m]\!]\,,\ a_k = b_k, \\ \forall k \in [\![m+1;n]\!]\,,\ b_k = 0. \end{cases}$$

Remarque

Ce théorème dit simplement que deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux. Il est très souvent utilisé à travers la méthode d'identification.

Exemple

On cherche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$(a-1)X^2 + (a+b)X + b + c = 2X + 1.$$

Par identification, on a :

$$(a-1)X^2 + (a+b)X + b + c = 2X + 1 \underset{\substack{\text{par} \\ \text{identification}}}{\iff} \begin{cases} a - 1 = 0, \\ a + b = 2, \\ b + c = 1. \end{cases}$$

Théorème

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.
Alors, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $a_n \neq 0$ et

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Définitions

On reprend les notations du théorème précédent.

- ▷ L'entier n est appelé le **degré du polynôme** P et est noté $\deg P$.
- ▷ Par convention, le **degré du polynôme nul** est égal à $-\infty$.

Remarque

Toujours avec les notations du théorème précédent, $\deg P$ est le plus grand entier naturel $k \in [\![0;n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$.

Définitions

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ donné par

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{K}$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$.

- ▷ Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, le coefficient a_k est appelé **coefficient de degré** k, tandis que l'expression $a_k X^k$ est appelée le **terme de degré** k.
- ▷ Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de l'indéterminée X, à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré inférieur ou égal à n :

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}.$$

Exemples

- ▷ $P(X) = 2$ est un polynôme à coefficients réels de degré 0. En effet, il est de la forme

$$P(X) = a_n X^n, \quad \text{où} \quad n = 0 \quad \text{et} \quad a_0 = 2 \in \mathbb{R}.$$

- ▷ $P(X) = iX^2 + 3X^3$ est un polynôme à coefficients complexes et de degré 3. En effet, il est de la forme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3,$$

avec

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = i \quad \text{et} \quad a_3 = 3.$$

Exemple – *Forme trompeuse*

Considérons l'expression

$$P(X) = X^2 + X + 1 + X - X^2.$$

Alors, $P \in \mathbb{R}[X]$ mais son expression n'a pas la forme demandée. En effet, il y a, par exemple, plusieurs termes de degré 2.
Pour déterminer son degré, on rassemble les termes de même degré et on obtient

$$P(X) = 1 + 2X.$$

Ainsi, on peut voir facilement que P est un polynôme de degré 1 : $\deg P = 1$.

Autrement dit, ce n'est pas parce qu'il y a un terme en X^2 dans une expression de P que c'est un polynôme de degré 2.

Définition – *Polynômes particuliers*

- ▷ Un polynôme P est appelé **polynôme constant** si P est le polynôme nul ou si $\deg P = 0$. On a alors $P(X) = a_0$, où $a_0 \in \mathbb{K}$.
- ▷ Un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$ est un **polynôme unitaire** si son coefficient de degré n est égal à 1 (son terme de degré n est X^n).

Exemples – *Polynômes particuliers*

- ▷ $P(X) = 2$ est un polynôme constant car tous ses coefficients sont nuls sauf a_0.
- ▷ Soit $P(X) = iX^2 + X^3$. Alors, $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg P = 3$. Il est unitaire car son terme de degré 3 est X^3.
- ▷ Le polynôme $P(X) = iX^2 + 4X^3$ est aussi un polynôme de degré 3 à coefficients complexes mais *n'est pas unitaire* car son terme de degré 3 est $4X^3$.

Remarques

On munit l'ensemble $\mathbb{K}[X]$:

- ▷ de l'addition naturelle de deux polynômes,
- ▷ de la multiplication naturelle de deux polynômes.

Exemples

Soient $P(X) = 2 + 3X + 4X^2$, $Q_1(X) = X + iX^2 + 5X^3$ et $Q_2(X) = 2i$, des polynômes de $\mathbb{C}[X]$. On a :

- ▷ $(P + Q_1)(X) = 2 + 4X + (4 + i)X^2 + 5X^3$.
- ▷ $$\begin{aligned}(PQ_1)(X) &= (2 + 3X + 4X^2)(X + iX^2 + 5X^3) \\ &= 2X + 2iX^2 + 10X^3 + 3X^2 + 3iX^3 + 15X^4 + 4X^3 + 4iX^4 + 20X^5 \\ &= 2X + (2i + 3)X^2 + (14 + 3i)X^3 + (15X + 4i)X^4 + 20X^5.\end{aligned}$$
- ▷ $(PQ_2)(X) = (2 + 3X + 4X^2)(2i) = 4i + 6iX + 8iX^2$.

Remarque

Comme on le voit dans le dernier exemple ci-dessus, la multiplication d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ n'est rien d'autre que la multiplication de deux polynômes (l'un étant un polynôme constant ou encore de degré 0).

Exercice 1.

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$.

1) Dans chacun des cas ci-dessous, calculer $P + Q$ et donner $\deg P + Q$.

a) $P(X) = X^2 + 1$, $Q(X) = X + 1$ **b)** $P(X) = X^2 + 1$, $Q(X) = 2X^2 + 1$ **c)** $P(X) = X^2 + 1$, $Q(X) = -X^2 + 1$

2) Dans chacun des cas ci-dessous, calculer PQ et donner $\deg PQ$.

a) $P(X) = X^2 + 1$, $Q(X) = -X^2 + X - 1$ **b)** $P(X) = X^4 + 1$, $Q(X) = -X$ **c)** $P(X) = X^3 + 1$, $Q(X) = 2$

Exercice 2.

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) Que pouvez vous dire de $\deg P + Q$? Faites attention.

2) Que pouvez vous dire de $\deg PQ$?

3) Que pouvez vous dire de $\deg \lambda P$? Soyez rigoureux.

2 Division euclidienne et racines

Théorème – *Théorème de la division euclidienne*
Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$. Alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg B.$$

Définitions
On reprend les notations du théorème précédent :
- ▷ Q est **quotient de la division euclidienne** de A par B,
- ▷ R est le **reste de la division euclidienne** de A par B,
- ▷ A est le **dividende** (c'est le polynôme divisé),
- ▷ B est le **diviseur** (c'est le polynôme qui divise).

Exemple
Effectuons la division euclidienne de $A(X) = 2X^3 + 1 \in \mathbb{K}[X]$ par $B(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{K}[X]$.

1) On pose la division :
- ▷ le dividende, $2X^3 + 1$, à gauche,
- ▷ le diviseur, $X^2 + 1$, à droite,

où les deux polynômes sont rangés selon les puissances décroissantes.
Remarquons aussi qu'à gauche, on a prévu de la place pour tous les termes de chaque degré.

$$\begin{array}{cccc|cc} 2X^3 & +0X^2 & +0X & +1 & X^2 & +1 \\ \cline{5-6} & & & & & \end{array}$$

2) On ne considère que les deux termes de plus haut degré (en bleu) et on fait la division de ces deux termes :

$$2X^3 = (X^2)(\mathbf{2X}).$$

$$\begin{array}{cccc|cc} \mathbf{2X^3} & & & +1 & \mathbf{X^2} & +1 \\ \cline{5-6} & & & & \mathbf{2X} & \end{array}$$

3) On multiplie $X^2 + 1$ par $2X$:

$$(2X)(X^2 + 1) = \mathbf{2X^3} + \mathbf{2X}.$$

$$\begin{array}{ccccc|cc} & 2X^3 & & & +1 & X^2 & +1 \\ \cline{6-7} -(& \mathbf{2X^3} & +0X^2 & \mathbf{+2X}) & & 2X & \end{array}$$

4) On fait la soustraction et on obtient un premier reste

$$R_1(X) = \mathbf{-2X + 1}.$$

$$\begin{array}{ccccc|cc} & 2X^3 & & & +1 & X^2 & +1 \\ \cline{6-7} - & (2X^3 & +0X^2 & +2X & +0) & 2X & \\ \cline{2-5} & +0X^3 & +0X^2 & \mathbf{-2X} & \mathbf{+1} & & \end{array}$$

5) Si $\deg R_1 < \deg B$, on s'arrête (ce qui est le cas ici) et on a :

$$\underbrace{2X^3 + 1}_{A(X)} = \underbrace{(X^2 + 1)}_{B(X)} \underbrace{(2X)}_{Q(X)} + \underbrace{(-2X + 1)}_{R(X)}.$$

Sinon, on refait la division de ce reste par B et cela jusqu'à ce que l'on obtienne un reste de degré strictement inférieur à $\deg B$.

Exemple

On fait la division euclidienne de $A(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 2X^2 + 3X + 2$ par $B(X) = X^3 + X + 1$.

$$
\begin{array}{ccccccc|ccc}
 & X^5 & +2X^4 & +3X^3 & +2X^2 & +3X & +2 & X^3 & +X & +1 \\
\cline{8-10}
- & (X^5 & +0X^4 & +X^3 & +X^2 & +0X & +0) & X^2 & & \\
\cline{2-7}
(R_1) & & 2X^4 & +2X^3 & +X^2 & +3X & +2 & & +2X & \\
 & - & (2X^4 & +0X^3 & +2X^2 & +2X & +0) & & & \\
\cline{3-7}
(R_2) & & & 2X^3 & -X^2 & +X & +2 & & & +2 \\
 & & - & (2X^3 & +0X^2 & +2X & +2 & & & \\
\cline{4-7}
(R) & & & & -X^2 & -X & & & &
\end{array}
$$

$$\underbrace{X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 2X^2 + 3X + 2}_{A(X)} = \underbrace{(X^3 + X + 1)}_{B(X)}\underbrace{(X^2 + 2X + 2)}_{Q(X)} + \underbrace{(-X^2 - X)}_{R(X)}.$$

Exercice 3.

Faire la division euclidienne de $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ par $X^4 + X^2$.

Définition

On dit qu'un polynôme B **divise** un polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$, ou encore si le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul.

Exemples

1. Le polynôme $X^2 + 1$ divise le polynôme $X^3 - X^2 + X - 1$ car en effectuant la division euclidienne de $X^3 - X^2 + X - 1$ par $X^2 + 1$, on obtient :

$$X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X^2 + 1).$$

2. En développant $(X - 1)^2(X^2 + 1)$, on obtient :

$$(X - 1)^2(X^2 + 1) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1.$$

On en déduit que $X - 1$ (et aussi $(X - 1)^2$ ou $X^2 + 1$) divise $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.

Définition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x_0 \in \mathbb{K}$. On dit que x_0 est **racine** de P si :

$$P(x_0) = 0.$$

Proposition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x_0 \in \mathbb{K}$. Alors,

$$x_0 \text{ est racine de } P \text{ si et seulement si } (X - x_0) \text{ divise } P.$$

Remarques

- ▷ Si x_0 est racine de $P \in \mathbb{K}[X]$, alors nécessairement, $x_0 \in \mathbb{K}$.
  Par exemple, si $P(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ (vu comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$),

alors i n'est pas une racine de P bien que l'on ait $P(i) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

▷ Si x_0 est racine de P, alors P s'écrit $P(X) = (X - x_0)Q(X)$, où Q est le quotient de la division euclidienne de P par $(X - x_0)$.

Exemples

▷ Soit $P(X) = a_0 + a_1 X \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré 1 ($a_1 \neq 0$). Alors, son unique racine est $x_0 = -\dfrac{a_0}{a_1}$ et on a : $P(X) = a_1(X - x_0)$.

▷ Soit $P(X) = X^2 - 1 \in \mathbb{K}[X]$. Il est clair que les seules racines de P sont -1 et 1 :

$$P(X) = (X - 1)(X + 1).$$

▷ Soit $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1 \in \mathbb{K}[X]$. On vérifie aisément que 1 est racine de P. Alors, en effectuant la division euclidienne de P par $X - 1$, on a $P(X) = (X - 1)(X^2 + 1)$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = (X - 1)(X^2 + 1)$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $P(X) = (X - 1)(X - i)(X + i)$.

Définitions

Soient $k \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x_0 \in \mathbb{K}$.

▷ On dit que x_0 est **racine d'ordre de multiplicité** k de P si $(X - x_0)^k$ divise P et $(X - x_0)^{k+1}$ ne divise pas P, c'est-à-dire : il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(X) = (X - x_0)^k Q(X) \quad \text{et} \quad Q(x_0) \neq 0.$$

▷ On dit que x_0 **racine simple** de P si x_0 est racine d'ordre de multiplicité 1.

▷ On dit que x_0 est **racine double** de P si x_0 est racine d'ordre de multiplicité 2.

▷ On dit que x_0 est **racine triple** de P si x_0 est racine d'ordre de multiplicité 3.

Remarque

L'ordre de multiplicité d'une racine $x_0 \in \mathbb{K}$ d'un polynôme P est le plus grand entier k tel que $(X - x_0)^k$ divise P.

Exemples

▷ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels ($a_2 \neq 0$) et soit Δ son discriminant. Si $\Delta > 0$, P a deux racines simples. Si $\Delta = 0$, P a une racine double. Si $\Delta < 0$, P n'a pas de racine.

▷ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré 2 ($a_2 \neq 0$) à coefficients complexes et soit Δ son discriminant. Si $\Delta \neq 0$, P a deux racines simples. Si $\Delta = 0$, P a une racine double.

▷ Soit $P(X) = X^2 + 2X + 1$. On a : $P(X) = (X + 1)^2$. Le polynôme P a une unique racine double $x_0 = -1$.

▷ Soit $P(X) = 2X^6 - 4X^5 + 4X^4 - 4X^3 + 2X^2 \in \mathbb{R}[X]$.
On remarque que 0 est racine de P et on a :

$$P(X) = 2X^2 \underbrace{(X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1)}_{Q_1(X)}.$$

Puis en évaluant Q_1 en 1 et en effectuant la division euclidienne de Q_1 par $X - 1$, on obtient :

$$(X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1) = (X - 1)\underbrace{(X^3 - X^2 + X - 1)}_{Q_2(X)}.$$

En évaluant encore Q_2 en 1 et en effectuant la division euclidienne de Q_2 par $X - 1$, on a encore :

$$(X^3 - X^2 + X - 1) = (X - 1)(X^2 + 1),$$

et $X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}[X]$. Au final, on a :

$$P(X) = 2X^2(X - 1)^2(X^2 + 1).$$

Ainsi, les racines de P sont 0 et 1 qui sont toutes les deux des racines doubles.

Définition

L'expression **racine évidente** d'un polynôme P désigne toute racine de P que l'on peut trouver sans faire appel à une méthode élaborée.
En général, une racine évidente est trouvée par tentative en évaluant P en certaines valeurs dites simples de X (par exemple, 0, ± 1, ou ± 2 ou $\pm i$).

Exercice 4.

1) Trouver une racine évidente de $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$. En déduire toutes ses racines dans $\mathbb{C}$.

2) Trouver les racines de $X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - X^2$.

3 Décomposition de polynôme en produit de polynômes irréductibles

Définition

On appelle **polynôme irréductible** tout polynôme non constant, $P \in \mathbb{K}[X]$, n'ayant comme diviseurs que des polynômes constants et les polynômes λP, pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

On donnera par la suite les polynômes irreductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis ceux de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré 1.

1) Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant et diviseur de P. Donner $\deg B$.

2) On note Q le quotient de la division euclidienne de P par B. Donner $\deg Q$.

3) En déduire que P est irréductible.

Remarques

- ▷ Un polynôme constant n'est pas irréductible.
- ▷ Tout polynôme de degré 1 est irréductible.

Théorème — *d'Alembert-Gauss*

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.

Exercice 6.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P \geq 2$.

1) Montrer que P admet au moins une racine complexe x_0.

2) En déduire un polynôme Q diviseur de P.

3) En déduire que P n'est pas un polynôme irréductible.

Corollaire

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Remarque

Autrement dit, les polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de la forme $X - \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{C}$.

Théorème

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme *non constant*. Alors, P s'écrit de manière unique sous la forme suivante :

$$P(X) = a \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k},$$

où $a \in \mathbb{K}$ et, pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $\alpha_k \in \mathbb{K}$ et $m_k \in \mathbb{N}^*$.
On dit que P est décomposé en **produit de polynômes irréductibles** de $\mathbb{C}[X]$.

Remarque

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n. Alors, avec les notations du théorème précédent, on a :

$$\deg P = \deg a \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k} = \sum_{k=1}^{p} m_k = n.$$

Ce qui signifie qu'un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ a exactement n racines (en comptant l'ordre de multiplicité) dans $\mathbb{C}$.

Exemple

- ▷ Le polynôme $(X+2)^4(X-i)^2$ a une racine d'ordre de multiplicité 4 et une racine d'ordre de multiplicité 2. C'est un polynôme de degré 6 : il a donc 6 racines (en comptant l'ordre de multiplicité) qui sont : -2, -2, -2, -2, i et i.
- ▷ Soit $P(X) = X^7 - X^6 - X^5 + X^4 - 2X^3 + 2X^2 \in \mathbb{C}[X]$.
  Il est clair que $X^2 = (X-0)^2$ divise P :

  $$P(X) = X^2(X^5 - X^4 - X^3 + X^2 - 2X + 2).$$

  Par évaluation en 1, $X^5 - X^4 - X^3 + X^2 - 2X + 2$ a pour racine évidente 1 et en effectuant la division euclidienne par $(X-1)$, on obtient :

  $$X^5 - X^4 - X^3 + X^2 - 2X + 2 = (X-1)(X^4 - X^2 - 2).$$

On a $X^4 - X^2 - 2 = (X^2)^2 - (X^2) - 2 = Y^2 - Y - 2$, où $Y = X^2$. Trouvons les racines du polynômes $Y^2 - Y - 2$: son discriminant Δ vaut $\Delta = 3^2$. Les racines de $Y^2 - Y - 2$ sont donc $x = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $x = \dfrac{1+3}{2} = 2$. Pour trouver les racines de $X^4 - X^2 - 2$, il suffit de résoudre : $X^2 = -1$ et $X^2 = 2$. Les solutions de $X^2 = -1$ sont $\pm i$ tandis que les solutions de $X^2 = 2$ sont $\pm\sqrt{2}$. On a donc :

$$X^4 - X^2 - 2 = (X - i)(X + i)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}),$$

et par suite P a exactement 7 racines (en comptant l'ordre de multiplicité) qui sont 0, 0, $-i$, i, 1, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$:

$$P(X) = X^2(X-1)(X-i)(X+i)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}).$$

Exercice 7.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2 de discriminant strictement négatif, soit $B \in \mathbb{R}[X]$ un diviseur non constant de P et soit Q le quotient de la division euclidienne de P par B.

1) On suppose que $\deg B = 1$. Montrer une contradiction. En déduire que $\deg B \neq 1$.

2) Donner $\deg B$ et $\deg Q$. En déduire que P est irréductible.

Corollaire

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminants strictement négatifs.

Remarque

Autrement dit, les polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de la forme :

- ▷ $X - \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$,
- ▷ $X^2 + \beta X + \gamma$, où $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ avec $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Théorème

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme *non constant*. Alors, P s'écrit de manière unique sous la forme suivante :

$$P(X) = a \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^{q} (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{n_k},$$

où $a \in \mathbb{K}$, pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $\alpha_k \in \mathbb{K}$ et $m_k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1; q]\!]$, $(\beta_k, \gamma_k) \in \mathbb{K}^2$, $n_k \in \mathbb{N}^*$ et $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$.
On dit que P est décomposé en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exemples

Le polynôme $P(X) = 2X^6 - 4X^5 + 4X^4 - 4X^3 + 2X^2$ se décompose sous la forme :

$$2X^2(X-1)^2(X^2+1).$$

Chapitre 9

Feuille d'exercices : Séquence 1

Exercice 1.

Soient $P(X) = 2X^2 - 3 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) = X^4 - 7X^3 + X - 5 \in \mathbb{K}[X]$.
Donner les polynômes $P + Q$, PQ et $P - 2Q$.

Exercice 2.

Trouver le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

Exercice 3.

Effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1,\ B = X^2 + 2X + 3$
2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1,\ B = X^3 + X + 2$
3. $A = X^4 - X^3 + X - 2,\ B = X^2 - 2X + 4$
4. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9,\ B = X^2 - 5X + 4$

Exercice 4.

À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 5.

Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le polynôme

$$P(X) = X^3 + \lambda X^2 + (\lambda + 1)X + \lambda + 2 \in \mathbb{K}[X]$$

est-il divisible par $(X + 3)$?

Exercice 6.

Justifiez le fait que $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ divise $P_1 \in \mathbb{K}[X]$ dans les cas suivants :

1) $P_0(X) = X + 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) = -X^2 + 2X + 3,$

2) $P_0(X) = X^2 + X + 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) = 2X^3 + X^2 + X - 1,$

3) $P_0(x) = X^2 - 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) = X^4 + X^3 - X - 1.$

Exercice 7.

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont tous les coefficients sont réels et soit α une racine de P. Montrer que $\bar{\alpha}$ est une racine de P.

Exercice 8.

Soit P un polynôme $\mathbb{K}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ de P, $m \geq 2$.

1) Exprimer grâce au cours, P en fonction de α et de m.

2) Montrer que α est une racine d'ordre $m-1$ de P' le polynôme dérivée de P sur $\mathbb{K}$.

Exercice 9.

On considère le polynôme $P(X) = 2X^3 + 3X^2 - 8X + 3 \in \mathbb{K}[X]$. Calculer $P(1)$. En déduire la factorisation de $P(X)$ en un produit de polynômes de degré 1.

Exercice 10.

Décomposer les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ ci-dessous en facteurs irréductibles pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, puis pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1) $2X^3 - X^2 - 5X - 6$.

2) $X^4 - 1$.

3) $X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 11X - 6$.

4) $X^3 - 27$.

5) $6X^4 + 7X^3 + 4X^2 - X - 2$.

6) $X^4 + 5X^2 + 4$.

7) $X^4 + 4$.

8) $X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 3X + 2$.

Exercice 11.

Dans cet exercice, on souhaite décomposer un polynôme en produit de polynômes irréductibles.

1) Effectuer la division euclidienne de $P(X) = X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 3X - 6 \in \mathbb{R}[X]$ par $Q(X) = X^2 + 3X \in \mathbb{R}[X]$.

2) Calculer $Q(X) + 1$. En déduire une expression de P en fonction de Q.

3) Décomposer le polynôme $Y^2 + Y - 6$ dans $\mathbb{R}[Y]$.

4) En déduire une expression de P en produit de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ du second degré.

5) Donner la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 12.

On cherche s'il existe un polynôme P de degré 3 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

1) Montrer que $2X^2 + 7X + 6 = 2(X+2)(X+\frac{3}{2})$.

2) On suppose qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2$.

- **a)** Donner $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ $P(3)$.
- **b)** En déduire un système de 4 équations dont les inconnues sont les coefficients de P.
- **c)** En déduire P.

3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2$.

Chapitre 9 - Séquence 2

Fractions Rationnelles

4 Définitions

Définitions

On appelle **fraction rationnelle à coefficients dans** $\mathbb{K}$ tout quotient $F = \dfrac{P}{Q}$ de deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ avec $Q \neq 0$.
L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$, c'est-à-dire

$$\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{P}{Q} \,\middle|\, P \in \mathbb{K}[X],\ Q \in \mathbb{K}[X],\ Q \neq 0 \right\}.$$

Pour $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, on dit que P est le **numérateur** de F et Q le **dénominateur** de F.

Remarques

- ▷ Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ (de dénominateur 1). Autrement dit, $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.
- ▷ Toute fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, $\mathbb{R}(X) \subset \mathbb{C}(X)$.

Attention

On prendra garde de ne pas confondre les notations (voir le cours sur eureka pour les couleurs) :

- ▷ $\mathbb{K}[X]$ (crochets) pour les polynômes,
- ▷ $\mathbb{K}(X)$ (parenthèses) pour les fractions rationnelles.

Exemples

- ▷ Quelques fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$F_1(X) = \frac{X}{X^2-1}, \quad F_2(X) = X^3, \quad F_3(X) = \frac{2X^6 - 4X^5 + 4X^4 - 4X^3 + 2X^2}{X^2 - X}.$$

- ▷ Quelques fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$F_4(X) = \frac{X-1}{X^2-1}, \quad F_5(X) = (X+2i)^3, \quad F_6(X) = \frac{3iX^2 - 4X + 5 - i}{X-2}.$$

Remarque

Dans l'écriture d'une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, le couple (P, Q) n'est pas unique.

En effet, pour tout polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ non nul, on a

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{PR}{QR}.$$

Exemple

$$\begin{aligned} F_3(X) &= \frac{2X^5 - 4X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 2X}{X - 1} = \frac{(2X^5 - 4X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 2X){\color{red}X}}{(X-1){\color{red}X}} \\ &= \frac{2X^6 - 4X^5 + 4X^4 - 4X^3 + 2X^2}{X^2 - X}. \end{aligned}$$

Définitions

- On dit que deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont **premiers entre eux** si le seul polynôme unitaire qui divise à la fois P et Q est le polynôme 1.
- Une fraction rationnelle $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ est dite sous forme **irréductible** si P et Q sont premiers entre eux.

Exemples

- La fraction rationnelle $\frac{X}{X(X+1)} \in \mathbb{K}(X)$ n'est pas sous forme irréductible car le polynôme X est un polynôme unitaire qui divise à la fois X et $X(X+1)$. Par contre, on a
$$\frac{X}{X(X+1)} = \frac{1}{X+1},$$
et la fraction rationnelle $\frac{1}{X+1}$ est sous forme irréductible car 1 est le seul polynôme unitaire qui divise 1.
- De façon plus générale, toute fraction rationnelle s'écrivant $\frac{1}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ est sous forme irréductible. De même, tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est une fraction rationnelle $P \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible.

Proposition

Toute fraction rationnelle admet une forme irréductible.
Autrement dit, pour tout $F \in \mathbb{K}(X)$, il existe deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$, $Q \neq 0$, avec P et Q premiers entre eux tels que $F = \frac{P}{Q}$.

Remarque

La forme irréductible d'une fraction rationnelle n'est pas unique.
Par exemple, $\frac{1}{X+1} = \frac{2}{2(X+1)}$ et les deux fractions rationnelles sont irréductibles.

Méthode – *Détermination de la forme irréductible*

Pour obtenir la forme irréductible d'une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, on procède de la manière suivante :

1. On détermine les racines de P et de Q.
   Si P et Q n'ont aucune racine en commun, alors $\frac{P}{Q}$ est irréductible.
   (Il suffit de calculer les racines de l'un des deux et de vérifier si elles sont racines de l'autres).
2. Supposons que P et Q ont une racine commune x_0.
   Alors, $P(X) = (X - x_0)P_1(X)$ et $Q(X) = (X - x_0)Q_1(X)$. Donc
   $$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{(X - x_0)P_1(X)}{(X - x_0)Q_1(X)} = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}.$$
3. On reprend à l'étape 1. avec P_1 et Q_1.

Exemples

- Soient $P(X) = X - 1 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) = 2X - 4 \in \mathbb{K}[X]$.
  Le polynôme P a 1 pour seule racine qui n'est pas racine de Q. Donc $\dfrac{P}{Q}$ est sous forme irréductible.
- Soient $P(X) = X^2 - 4X + 4 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) = X^2 - 5X + 6 \in \mathbb{K}[X]$.
  Le polynôme P a une seule racine : 2 qui est une racine double. Tandis que Q a deux racines simples : 2 et 3. Donc 2 est la seule racine commune de P et Q.
  On a $P(X) = (X - 2)^2$ et $Q(X) = (X - 2)(X - 3)$, donc
  $$\frac{X^2 - 4X + 4}{X^2 - 5X + 6} = \frac{(X - 2)^2}{(X - 2)(X - 3)} = \frac{X - 2}{X - 3}.$$
  Alors, $\dfrac{X - 2}{X - 3}$ est une forme irréductible de $\dfrac{P}{Q}$.
- Soient $P(X) = X^3 - 4X^2 + 4X - 3 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) = (X - 3)^2 \in \mathbb{K}[X]$.
  1. D'une part, Q a une seule racine double : $x_0 = 3$.
  2. D'autre part, $P(3) = 0$ donc 3 est aussi une racine de P.
  3. On calcule la division euclidienne de P par $X - 3$: $P(X) = (X^2 - X + 1)(X - 3)$.
     Donc
     $$\frac{X^3 - 4X^2 + 4X - 3}{(X - 3)^2} = \frac{X^2 - X + 1}{X - 3}.$$

  La seule racine de $X - 3$ est 3 qui n'est pas racine de $X^2 - X + 1$. Donc, $\dfrac{X^2 - X + 1}{X - 3}$ est une forme irréductible de $\dfrac{P}{Q}$.

Exercice 1.

Déterminer les formes irréductibles des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ suivantes :

$$F_1(X) = \frac{X^2 - 2X + 1}{X^3 - X^2 + X - 1} \quad \text{et} \quad F_2(X) = \frac{2X^3 + 8X^2 + 7X + 3}{X^2 + 2X - 3}.$$

5 Décomposition en éléments simples

On a vu en séquence 1, que tout polynôme peut se décomposer en produit de polynômes irréductibles. Dans cette section, on va utiliser ce résultat pour obtenir une décomposition du même type pour les fractions rationnelles appelée la **décomposition en éléments simples**.

Exercice 2.

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ donnée par

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{X^3 + 3X^2 - X - 2}{X^2 - 1}.$$

1) Déterminer les racines de Q.

2) En déduire que $F = \frac{P}{Q}$ est sous forme irréductible.

3) Effectuer la division euclidienne de P par Q et en déduire l'égalité

$$F(X) = X + 3 + \frac{1}{(X+1)(X-1)}.$$

4) Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{(X+1)(X-1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-1}$.

5) En déduire que F se décompose sous la forme suivante :

$$F(X) = X + 3 + \frac{1}{2(X+1)} - \frac{1}{2(X-1)}.$$

Les termes $\dfrac{1}{2(X+1)}$ et $-\dfrac{1}{2(X-1)}$ sont appelés des éléments simples, ainsi la décomposition précédente est appelée la décomposition en éléments simples de F.

On va voir dans la suite comment généraliser l'exemple vue en exercice à toute fraction rationnelle.

Théorème

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. Alors, il existe un unique couple de polynômes (E, R) de $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q} \quad \text{et} \quad \deg R < \deg Q.$$

Le polynôme E est appelé la **partie entière** de $\dfrac{P}{Q}$.

De plus, si $\deg P < \deg Q$, alors $E = 0$.

Méthode

Pour calculer la partie entière d'une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, il suffit d'effectuer la division euclidienne de P par Q.

Exemples

- ▷ Soit $F_1(X) = \dfrac{X^2+3X+1}{X^4+3X^2-6} = \dfrac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{K}(X)$.
  Alors, $\deg P = 2 < 4 = \deg Q$ donc la partie entière de F_1 est $E_1 = 0$.
- ▷ Soit $F_2(X) = \dfrac{X^3+2}{X^2-X} \in \mathbb{K}(X)$.
  En effectuant la division euclidienne de X^3+2 par X^2-X (le faire en exercice), on obtient
  $$X^3+2 = (X^2-X)(X+1)+X+2.$$
  On en déduit
  $$F_2(X) = \frac{(X^2-X)(X+1)+X+2}{X^2-X} = X+1+\frac{X+2}{X^2-X},$$
  donc la partie entière de F_2 est $E_2(X) = X+1$.

Dans toute la suite, on va s'intéresser au terme $\dfrac{R}{Q}$ du théorème précédent. Plus précisément, on va voir comment on peut décomposer ce terme en éléments simples. Pour cela on aura besoin de la notion de pôle :

Définitions

Soit $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle *irréductible*.

1. On appelle **pôles** (dans $\mathbb{K}$) de $\dfrac{P}{Q}$ les racines (dans $\mathbb{K}$) de Q.
2. Un pôle de **multiplicité** m de $\dfrac{P}{Q}$ est une racine de multiplicité m de Q.

Vocabulaire

Soient $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle *irréductible* et $\alpha \in \mathbb{K}$ un pôle de $\dfrac{P}{Q}$ de multiplicité m.

- ▷ Si $m = 1$, on dit que α est un **pôle simple**.
- ▷ Si $m = 2$, on dit que α est un **pôle double**.
- ▷ Si $m = 3$, on dit que α est un **pôle triple**.

Exemples

- ▷ La fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{X^2-X+1}{X(X-1)} \in \mathbb{K}(X)$ est sous forme irréductible et a deux pôles simples : 0 et 1.

▷ La fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{X^2-1}{(X-1)^3} \in \mathbb{K}(X)$ n'est pas sous forme irréductible car 1 est racine du numérateur et du dénominateur. On a

$$\frac{X^2-1}{(X-1)^3} = \frac{(X-1)(X+1)}{(X-1)^3} = \frac{X+1}{(X-1)^2}.$$

Alors, $\dfrac{X+1}{(X-1)^2}$ est une forme irréductible de F.
On en déduit que F a un pôle double : 1.

▷ La fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{(X+1)(X^2+1)^2} \in \mathbb{K}(X)$ est sous forme irréductible.

- Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il y a un seul pôle : -1.
- Par contre, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il y a trois pôles : -1, i, $-i$ et on a

$$F(X) = \frac{1}{(X+1)(X-i)^2(X+i)^2}.$$

Puisque la décomposition de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ en polynômes irréductibles est différente pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour obtenir une décomposition sur les fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$, il est nécessaire de considérer séparément les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.1 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Théorème

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ sous forme *irréductible*. Soient p le nombre de pôles de F et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les pôles complexes de F de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$, c'est-à-dire

$$Q(X) = a(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_p)^{m_p} = a\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_i)^{m_i},$$

où $a \in \mathbb{C}$.
Alors, la **décomposition en éléments simples** de F est

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{p}\mathcal{P}_k,$$

où E est la partie entière de F et, pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $\mathcal{P}_k$ est donnée par

$$\mathcal{P}_k = \frac{c_{k,1}}{X-\alpha_k} + \frac{c_{k,2}}{(X-\alpha_k)^2} + \dots + \frac{c_{k,m_k}}{(X-\alpha_k)^{m_k}} = \sum_{j=1}^{m_k}\frac{c_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j},$$

avec $c_{k,1}, \dots, c_{k,m_k}$ des nombres complexes .

Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $\mathcal{P}_k$ est appelée la **partie polaire** de F relative au pôle α_k.

Définition

Avec les notations du théorème précédent : le terme $\dfrac{c_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j}$, $k \in [\![1;p]\!]$ et $j \in [\![1;m_k]\!]$, est appelé **élément simple de première espèce**.

Exemples – *Avec partie entière nulle*

Dans les exemples suivants, on considère uniquement des fractions rationnelles de partie entière nulle.

▷ Soit $F(X) = \dfrac{1}{X^2+1} \in \mathbb{C}(X)$. Alors, F admet deux pôles (complexes) simples : $\alpha_1 = i$ et $\alpha_2 = -i$.
Avec les notations du théorème, on a $p = 2$ et $m_1 = m_2 = 1$. On obtient donc

$$F(X) = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i},$$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ (on a noté a au lieu de $c_{1,1}$ et b au lieu de $c_{2,1}$).

▷ Soit $F(X) = \dfrac{1}{(X-i)(X^2+2X+1)} = \dfrac{1}{(X-i)(X+1)^2} \in \mathbb{C}(X)$. La fraction rationnelle F admet un pôle simple $\alpha_1 = i$ et un pôle double $\alpha_2 = -1$.
Avec les notations du théorème, on a $p = 2$, $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$. On obtient donc

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{a}{X-\alpha_1} + \frac{b}{X-\alpha_2} + \frac{c}{(X-\alpha_2)^2} \\ &= \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2} \end{aligned}$$

De plus,

- la partie polaire relative à α_1 est $\dfrac{a}{X-\alpha_1}$,
- la partie polaire relative à α_2 est $\dfrac{b}{X-\alpha_2} + \dfrac{c}{(X-\alpha_2)^2}$.

Exemple – *Étude d'un cas complet*

On considère la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{3X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X + 2}{X^4 + 2X^2 + 1} \in \mathbb{C}(X).$$

Pour simplifier l'écriture pour la suite, on pose

$$P(X) = 3X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X + 2 \in \mathbb{C}[X] \quad \text{et} \quad Q(X) = X^4 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X].$$

1. Déterminons les racines de Q : $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2$ et $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$, d'où
$$X^4 + 2X^2 + 1 = (X-i)^2(X+i)^2.$$
Ainsi, Q a deux racines doubles qui sont i et $-i$.
2. On regarde si P et Q ont des racines communes.
On a $P(i) = 4i \neq 0$ et $P(-i) = -6i \neq 0$. Donc i et $-i$ ne sont pas des racines de P.
3. On en déduit que F est bien sous forme irréductible et possède deux pôles doubles : i et $-i$.
4. On effectue la division euclidienne de $3X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X + 2$ par $X^4 + 2X^2 + 1$:
$$3X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X + 2 = (X^4 + 2X^2 + 1)(3X - 2) - 8X^3 + 4X^2 - 2X + 4.$$

Donc

$$F(X) = 3X - 2 + \frac{-8X^3 + 4X^2 - 2X + 4}{X^4 + 2X^2 + 1} = 3X - 2 + \frac{-8X^3 + 4X^2 - 2X + 4}{(X-i)^2(X+i)^2}.$$

En particulier la partie entière de F est $3X - 2$.

5. Alors, puisque F a deux pôles doubles i et $-i$, la décomposition en éléments simples de F s'écrit :

$$F(X) = 3X - 2 + \frac{a}{X-i} + \frac{b}{(X-i)^2} + \frac{c}{X+i} + \frac{d}{(X+i)^2},$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$.

5.2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Théorème

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ sous forme *irréductible*. Soient p le nombre de pôles de F et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les pôles réels de F de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$, c'est-à-dire

$$Q(X) = a \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^{q} (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{n_k},$$

où $a \in \mathbb{R}$ et, pour tout $k \in [\![1; q]\!]$, $(\beta_k, \gamma_k) \in \mathbb{R}^2$ avec $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$.

Alors, la **décomposition en éléments simples** de F est

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{p} \mathcal{P}_k^1 + \sum_{k=1}^{q} \mathcal{P}_k^2,$$

où E est la partie entière de F, pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $\mathcal{P}_k^1$ est donnée par

$$\mathcal{P}_k^1 = \frac{c_{k1}}{X - \alpha_k} + \cdots + \frac{c_{k,m_k}}{(X - \alpha_k)^{m_k}} = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{k,j}}{(X - \alpha_k)^j},$$

avec $c_{k,1}, \ldots, c_{k,m_k}$ des nombres réels, et pour tout $k \in [\![1; q]\!]$, $\mathcal{P}_k^2$ est donnée par

$$\mathcal{P}_k^2 = \frac{a_{k,1}X + b_{k,1}}{X^2 + \beta_k X + \gamma_k} + \cdots + \frac{a_{k,q}X + b_{k,q}}{(X^2 + \beta_q X + \gamma_q)^{n_k}} = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{a_{k,j}X + b_{k,j}}{(X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{n_k}},$$

avec $a_{k,1}, \ldots, a_{k,n_k}$ et $b_{k,1}, \ldots, b_{k,n_k}$ des nombres réels.

Définition

Avec les notations du théorème précédent : pour tous $k \in [\![1; q]\!]$ et $j \in [\![1; n_k]\!]$, le terme

$$\frac{a_{k,j}X + b_{k,j}}{(X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{n_k}}$$

est appelé **élément simple de seconde espèce**.

Exemples

▷ Soit $F(X) = \dfrac{1}{X(X^2+1)} \in \mathbb{R}(X)$.
La fraction rationnelle F ne possède qu'un seul pôle qui est simple : $\alpha_1 = 0$.
Avec les notations du théorème précédent, on a

$$p = 1, \quad q = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad m_1 = 1, \quad (X^2 + \beta_1 X + \gamma_1)^{n_1} = X^2 + 1.$$

On en déduit que F admet pour décomposition en éléments simples :

$$F(X) = \frac{c}{X} + \frac{aX+b}{X^2+1},$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

▷ Soit $F(X) = \dfrac{1}{X(X^2+1)^2} \in \mathbb{R}(X)$.
La fraction rationnelle F ne possède toujours qu'un seul pôle qui est simple : $\alpha_1 = 0$.
Avec les notations du théorème précédent, on a

$$p = 1, \quad q = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad m_1 = 1, \quad (X^2 + \beta_1 X + \gamma_1)^{n_1} = (X^2 + 1)^2.$$

On en déduit que F admet pour décomposition en éléments simples :

$$F(X) = \frac{c}{X} + \frac{a_1X+b_1}{X^2+1} + \frac{a_2X+b_2}{(X^2+1)^2},$$

où $(c, a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^5$.

▷ Soit $F(X) = \dfrac{1}{(X-1)(X+2)(X^2-X+1)^3} \in \mathbb{R}(X)$.
Le discriminant de $X^2 - X + 1$ est $\Delta = -3 < 0$ donc les pôles de F sont les racines de $(X-1)(X+2)$.
Il y a donc deux pôles qui sont simples : $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = -2$.
Avec les notations du théorème précédent, on a

$$p = 2, \quad q = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad m_1 = m_2 = 1, \quad (X^2 + \beta_1 X + \gamma_1)^{n_1} = (X^2 - X + 1)^3.$$

On en déduit que F admet pour décomposition en éléments simples :

$$F(X) = \frac{c_1}{X-1} + \frac{c_2}{X+2} + \frac{a_1X+b_1}{X^2-X+1} + \frac{a_2X+b_2}{(X^2-X+1)^2} + \frac{a_3X+b_3}{(X^2-X+1)^3},$$

où les constantes c_i, a_i et b_i sont des nombres réels.

Méthode – *Décomposition en éléments simples*

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Pour déterminer la décomposition en éléments simples de F, on effectue les étapes ci-dessous.

1. On détermine la forme irréductible $\dfrac{P}{Q}$ de F.

2. On effectue la division euclidienne de P par Q pour obtenir la décomposition :

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q} \quad \text{et} \quad \deg R < \deg Q.$$

3. On écrit le polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.
4. On en déduit la forme de la décomposition en éléments simples de F.
5. Pour finir, on calcule les différentes constantes apparaissant dans la décomposition (cette étape sera étudiée en séquence 3).

Chapitre 9

Feuille d'exercices : Séquence 2

Exercice 1.

Déterminer la forme irréductible des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ ci-dessous :

1) $F_1(X) = \dfrac{2X^2 - 10X + 12}{3X^2 - 9X + 6}$,

2) $F_2(X) = \dfrac{X^2 + 1}{X^3 + 2X^2 + X + 2}$,

3) $F_3(X) = \dfrac{12X^2 + 5X - 3}{X^3 + 3X^2 + 4X}$,

4) $F_4(X) = \dfrac{X^3 - X^2 - 4X + 4}{X^6 - X^4 - 16X^2 + 16}$.

Exercice 2.

Déterminer la partie entière des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ ci-dessous :

1) $F_1(X) = \dfrac{2X^2 + 3X + 5}{X^3 + 4X - 1}$,

2) $F_2(X) = \dfrac{X^2 - X - 1}{X + 1}$,

3) $F_3(X) = \dfrac{3X^3 + 16X^2 - 6X - 4}{X^2 + 6X + 2}$,

4) $F_4(X) = \dfrac{X^5 + 3X^4 + 11X^3 + 16X^2 + 23X + 6}{X^3 + 2X^2 + 3X}$.

Exercice 3.

Pour les fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ ci-dessous :

1. déterminer leur forme irréductible,
2. justifier que la partie entière de leur forme irréductible est nulle,
3. donner la forme de leurs décompositions en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$, puis sur $\mathbb{C}(X)$.

1) $F_1(X) = \dfrac{1}{X(X^2 + 1)}$,

2) $F_2(X) = \dfrac{2X + 1}{(X - 3)(X^2 + 1)^2}$,

3) $F_3(X) = \dfrac{3X^7 + 5X^5 + 25X^3 + 2}{(X^4 - 1)^2}$,

4) $F_4(X) = \dfrac{1}{X(X - 1)^5}$.

Exercice 4.

Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$, puis sur $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ ci-dessous :

1) $F_1(X) = \dfrac{2X^3 + X^2 - 5X - 5}{X^2 - X - 2}$,

2) $F_2(X) = \dfrac{X^3 - 8X^2 + 18X - 12}{X^2 - 3X + 2}$,

3) $F_3(X) = \dfrac{X^4 - 3X^2 + 6X - 4}{X^3 - 2X^2 + 2X - 1}$,

4) $F_4(X) = \dfrac{X^7 - 3X^6 + 9X^5 - 3X^4 - 3X^3 + 25X^2 + 12X - 38}{X^5 - 5X^4 + 18X^3 - 34X^2 + 45X - 25}$.

Indication : $X^4 - 4X^3 + 14X^2 - 20X + 25 = (X^2 - 2X + 5)^2$.

Chapitre 9

Questionnaire - Séquence 1

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Exercice 1.

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) Que pouvez vous dire de $\deg P + Q$? Faites attention.

2) Que pouvez vous dire de $\deg PQ$?

3) Que pouvez vous dire de $\deg \lambda P$? Soyez rigoureux.

Réponse :

Exercice 2.

Faire la division euclidienne de $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ par $X^4 + X^2$.

Réponse :

Chapitre 9

Questionnaire - Séquence 2

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Exercice 1.

Déterminer les formes irréductibles des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ suivantes :

$$F_1(X) = \frac{X^2 - 2X + 1}{X^3 - X^2 + X - 1} \quad \text{et} \quad F_2(X) = \frac{2X^3 + 8X^2 + 7X + 3}{X^2 + 2X - 3}.$$

Réponse :

Exercice 2.

Donner la forme de la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{1}{X^2(X^2+1)}$ sur $\mathbb{R}(X)$, puis sur $\mathbb{C}(X)$.

Réponse :