Chapitre 1

Feuille d'exercices : Séquence 1

Exercice 1.

Soient A et B les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \times & 6 \\ \times & 2i & \times \\ 4+i & 3 & \times \\ 5 & 7+i & \times \end{pmatrix}.$$

1) Donner la taille de A et identifier les coefficients a_{23}, a_{32}, a_{14} et a_{24}.

2) Compléter l'écriture de $B \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C})$ avec $b_{33} = 2$, $b_{23} = 1+i$, $b_{12} = 0$, $b_{43} = 2+i$ et $b_{21} = 3$.

Solution :

1) $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, $a_{23} = 3$, $a_{32} = 2$, $a_{14} = 4$ et $a_{24} = 11$.

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0s & 6 \\ 3 & 2i & 1+i \\ 4+i & 3 & 2 \\ 5 & 7+i & 2+i \end{pmatrix}.$

Exercice 4.

1) Donner la matrice A de taille 3×3 dont les coefficients a_{ij} sont donnés, pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$, par

$$a_{ij} = 2i - j.$$

2) Donner la matrice B de taille 4×4 dont les coefficients a_{ij} sont donnés, pour tous $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, par

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}.$$

Solution :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.

1) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A+B$ et $2A-3B$.

2) Soient
$$A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 6 & 5\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B=\begin{pmatrix}5 & -1 & -3 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ -1 & 2 & -6 & 6\end{pmatrix}.$$

Calculer $A+B$.

Solution :

1) $A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -7 & 1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 5\\ -3 & 6 & 2\end{pmatrix}$

$2A-3B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 8 & 10 & -12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 0 & 6\\ -21 & 3 & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 0\\ 29 & 7 & -36\end{pmatrix}$

2)
$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 11\end{pmatrix}$$

Exercice 6.

Soient $A=\begin{pmatrix}x & 5\\ 0 & 2x\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}y & 7\\ -1 & 3y\end{pmatrix}$.

1) Trouver $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $A+B=\begin{pmatrix}4 & 12\\ -1 & 16\end{pmatrix}$.

2) Trouver $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $2A-4B=\begin{pmatrix}-5 & -18\\ 4 & -16\end{pmatrix}$.

Solution :

1) $y=8$ et $x=-4$

2) $y=\frac{3}{2}$ et $x=\frac{1}{2}$.

Exercice 7.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 6\\ 4 & 7\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 5+i\\ 4-2i & 6\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 6\\ 2 & 4 & -2\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 3 & 6 & 3\end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix}2+i & 5 & 0\\ 3 & 6 & 3-2i\\ 4 & 1+3i & 2\end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix}1-i\\ 1+i\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0 & 3\\ 3 & 6 & 3 & 5\end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 3 & 6 & 3\\ 2 & 5 & 0\\ 3 & 6 & 3\end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Déterminer tous les produits matriciels possibles pour les matrices ci-dessus, puis les calculer.

Solution : Produits avec A à gauche :

$$AB = \begin{pmatrix} 14-10i & 40+2i \\ 18-12i & 50+3i \\ 22-14i & 62+4i \end{pmatrix}, \quad AD = \begin{pmatrix} 19 & 40 & 15 \\ 24 & 51 & 18 \\ 29 & 62 & 21 \end{pmatrix}, \quad AF = \begin{pmatrix} 7+3i \\ 9+3i \\ 11+3i \end{pmatrix},$$

$$AG = \begin{pmatrix} 19 & 40 & 15 & 31 \\ 24 & 51 & 18 & 39 \\ 29 & 62 & 21 & 47 \end{pmatrix}.$$

Produits avec B à gauche :

$$BB = \begin{pmatrix} 16-8i & 40+8i \\ 16-16i & 48-8i \end{pmatrix}, \quad BD = \begin{pmatrix} 19+3i & 40+6i & 15+3i \\ 22-4i & 46-10i & 18 \end{pmatrix}, \quad BF = \begin{pmatrix} 6+4i \\ 6+2i \end{pmatrix},$$

$$BG = \begin{pmatrix} 19+3i & 40+6i & 15+3i & 31+5i \\ 22-4i & 46-10i & 18 & 36-6i \end{pmatrix}.$$

Produits avec C à gauche :

$$CC = \begin{pmatrix} 16 & 26 & 20 \\ 2 & 4 & -2 \\ 19 & 32 & 17 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 21 & 36 \\ 8 & 20 \\ 33 & 66 \end{pmatrix}, \quad CE = \begin{pmatrix} 21 & 18i & 9+2i \\ 8+2i & 32-6i & 8-8i \\ 33+3i & 48+9i & 21-10i \end{pmatrix},$$

Produits avec D à gauche :

$$DA = \begin{pmatrix} 19 & 40 \\ 36 & 72 \end{pmatrix}, \quad DC = \begin{pmatrix} 10 & 18 & 2 \\ 21 & 36 & 15 \end{pmatrix}, \quad DE = \begin{pmatrix} 18+2i & 40 & 15-10i \\ 36+3i & 54+9i & 24-12i \end{pmatrix},$$

Produits avec E à gauche :

$$EA = \begin{pmatrix} 19+2i & 40+5i \\ 36-8i & 72-14i \\ 19+9i & 40+18i \end{pmatrix}, \quad EC = \begin{pmatrix} 10 & 18-i & 2+6i \\ 21-6i & 36-10i & 15-6i \\ 8+6i & 10+12i & 28-6i \end{pmatrix},$$

$$EE = \begin{pmatrix} 18+4i & 40+5i & 15-10i \\ 36-5i & 60+7i & 24-16i \\ 19+13i & 28+24i & 13+7i \end{pmatrix},$$

Produits avec F à gauche :

$$FI = \begin{pmatrix} -1+i & 4-4i & 5-5i \\ -1-1i & 4+4i & 5+5i \end{pmatrix}$$

Produits avec G à gauche :

$$GH = \begin{pmatrix} 28 & 58 & 24 \\ 45 & 96 & 33 \end{pmatrix}$$

Produits avec H à gauche :

$$HC = \begin{pmatrix} 10 & 18 & 2 \\ 21 & 36 & 15 \\ 10 & 18 & 2 \\ 21 & 36 & 15 \end{pmatrix}, \quad HE = \begin{pmatrix} 19+2i & 40 & 15-10i \\ 36+3i & 54+9i & 24-12i \\ 19+2i & 40 & 15-10i \\ 36+3i & 54+9i & 24-12i \end{pmatrix},$$

Produits avec I à gauche :

$$IA = \begin{pmatrix} 30 & 54 \end{pmatrix}, \quad IC = \begin{pmatrix} 23 & 42 & 1 \end{pmatrix}, \quad IE = \begin{pmatrix} 30-i & 24+15i & 22-8i \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la **trace** de A, notée $\mathrm{tr}(A)$, comme étant la somme des éléments diagonaux de A.

1) Redonner la définition de la trace d'une matrice en utilisant le symbole $\sum$.

2) Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).$$

Autrement dit, l'application $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est linéaire (on dit alors que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Exercice 9.

1) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

2) Que peut-on en déduire sur le produit de matrices ?

Exercice 10.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer a, b, c et d tels que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que la matrice B obtenue vérifie $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution : $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 11.

Soient $q, r \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer les propriétés suivantes :

1) $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$;

2) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$;

3) $(AB)C = A(BC)$.