Chapitre 10

Fonctions de plusieurs variables

Pré-requis

- ☐ Connaître la géométrie du plan et de l'espace.
- ☐ Maîtriser la notion de vecteur.
- ☐ Maîtriser la notion de fonction.
- ☐ Savoir dériver et intégrer une fonction.

Objectifs

- ☐ Savoir identifier une fonction à deux variables.
- ☐ Savoir déterminer le domaine de définition d'une fonction à deux variables.
- ☐ Savoir calculer les dérivées partielles et secondes d'une fonction à deux variables.
- ☐ Savoir calculer le gradient et le laplacien d'une fonction à deux variables
- ☐ Savoir calculer une intégrale double sur un pavé ou un domaine quelconque.
- ☐ Savoir calculer une intégrale double sur un disque ou un portion de disque.
- ☐ Savoir identifier une fonction vectorielle ou une courbe paramétrée.
- ☐ Savoir déterminer le vecteur tangent d'une fonction vectorielle.
- ☐ Savoir calculer la longueur d'une courbe et une intégrale curviligne.

Sommaire

Séquence 1 : Les fonctions de plusieurs variables **3**
Les fonctions à deux variables réelles - Les dérivées partielles - Les dérivées partielles secondes - Représentation graphique.
Séquence 2 : Intégrales doubles **11**
Intégration sur un pavé - Intégration sur un domaine quelconque - Intégrale sur un disque.
Séquence 1 : Notations et symboles mathématiques **5**
Les ensembles - Applications.
Séquence 2 : Raisonnements **19**
Les propriétés - Raisonnements - Raisonnement par l'absurde - Raisonnement par contraposée.

Chapitre 10 - Séquence 1

Les fonctions de plusieurs variables

Pour cette séquence, D désigne une partie de $\mathbb{R}^2$.

1 Les fonctions à deux variables réelles

Définition – *Fonction de deux variables réelles*

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Toute application f définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée **fonction réelle de deux variables réelles**, c'est-à-dire

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y). \end{array}$$

L'ensemble D est appelé **domaine de définition** de f et est noté D_f.

Exemples

- ▷ Soit la fonction f définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une fonction de deux variables, x et y, définie sur $\mathbb{R}^2$.
- ▷ Soit f la fonction de deux variables définie par

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Pour que f soit définie, il faut que son dénominateur soit non nul. D'où,

$$D_f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 0\big\} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\big\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Remarque

Soit f une fonction à deux variables définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$, et soit $(a, b) \in D$.

- ▷ La fonction $g_b : x \mapsto f(x, b)$ définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in D\}$ est une fonction à une variable construite à partir de f en fixant la variable y à la valeur b.
- ▷ La fonction $h_a : y \mapsto f(a, y)$ définie sur $\{y \in \mathbb{R} \mid (a, y) \in D\}$ est une fonction à une variable obtenue à partir de f en fixant la variable x à la valeur a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Alors,

- ▷ Soit $b \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g_b(x) = f(x, b) = \frac{x^3+b^3}{x^2+b^2}$. Alors, la fonction g_b est une fonction construite à partir de f en fixant la variables y à b.
- ▷ La fonction $h : y \mapsto y$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est une fonction réelle construite à partir de f en fixant la valeur de x à 0. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a $f(0, y) = \frac{0+y^3}{0+y^2} = y = h(y)$.

Exercice 1.

Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
Déterminer le domaine de définition de la fonction f. Donner-en une interprétation géométrique.

Remarque — *Fonction de plusieurs variables réelles*

Il est possible de généraliser cette notion à des fonctions à n variables réelles où $n \in \mathbb{N}^*$:

> *Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$. Une* **fonction réelle de n variables réelles** *f associe à tout vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ de D un unique réel noté $f(x_1, \dots, x_n)$.*

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = x + yz^2$$

est une fonction à trois variables réelles dont le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}^3$.

Pour la suite, certains résultats ne sont vrais que pour des fonctions définies et continues sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. La notion de continuité d'une fonction à deux variables n'est pas du niveau L1. Intuitivement, on dira qu'une fonction f est *continue* sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ si sa surface ne possède pas de « saut » dans son tracé.

2 Les dérivées partielles

Exercice 2.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Discuter, suivant les valeurs de a, des domaines de définition des fonctions réelles suivantes, puis les dériver :

a) $f_a : x \mapsto x^2 + 2ax + a^2$, **b)** $g_a : x \mapsto \ln(x + a)$, **c)** $h_a : x \mapsto \dfrac{ax}{x^2 - a^2}$.

Définition — *Dérivées partielles en un point d'une fonction de deux variables réelles*

Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$, et soit $(a, b) \in D$. Posons $g_b : x \mapsto f(x, b)$ et $h_a : y \mapsto f(a, y)$.

- ▷ Si la fonction g_b est dérivable en a, alors sa dérivée en a se note $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et s'appelle la **dérivée partielle** de f au point (a, b) par rapport à la variable x.
- ▷ Si la fonction h_a est dérivable en b, alors sa dérivée en b se note $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ et s'appelle la **dérivée partielle** de f au point (a, b) par rapport à la variable y.

Exemple

Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto xy^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- ▷ Posons $g_b(x) = f(x, b) = xb^2$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_b'(x) = b^2$ et ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g_b'(a) = b^2.$$

- ▷ Posons $h_a(y) = f(a, y) = ay^2$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $h_a'(y) = 2ay$ et ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = h_a'(b) = 2ab.$$

Exemple

Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto x\ln(y)$ définie sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Soit $(a, b) \in D$.

- ▷ Posons $g_b(x) = f(x, b) = x\ln(b)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_b'(x) = \ln(b)$, et ainsi
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g_b'(a) = \ln(b).$$
- ▷ Posons $h_a(y) = f(a, y) = a\ln(y)$. D'où, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $h_a'(y) = \frac{a}{y}$ et ainsi
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = h_a'(b) = \frac{a}{b}.$$

Remarque

D'après la définition, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}.$$

Définition – *Dérivées partielles d'une fonction de deux variables réelles*

Soit f une fonction définie dans $D \subset \mathbb{R}^2$.

- ▷ Supposons que, pour tout $(x, y) \in D$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe. La fonction $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ définie de D dans $\mathbb{R}$ est appelée **fonction dérivée partielle** par rapport à x et notée $\frac{\partial f}{\partial x}$.
- ▷ Supposons que, pour tout $(x, y) \in D$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe. La fonction $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ définie de D dans $\mathbb{R}$ est appelée **fonction dérivée partielle** par rapport à y et notée $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Méthode

Pour calculer la fonction dérivée partielle d'une fonction par rapport à la variable x, il suffit de dériver la fonction en considérant la variable y comme un paramètre fixé.
Similairement, pour calculer la dérivée partielle par rapport à y, il faut considérer la variable x comme constante.

Exemple

Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto x\cos(y) + x^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Alors, en dérivant la fonction f selon la variable x, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(y) + 2x.$$
Similairement, en dérivant f selon y, on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x\sin(y)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1) $f_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^3$, **2)** $f_2 : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, **3)** $f_3 : (x, y) \mapsto 2xy + y\exp(x)$.

Notation

Soit f une fonction définie de la partie D de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dite de **classe $\mathcal{C}^1$** sur D si toutes les dérivées partielles existent et sont continues sur D. On note aussi $f \in \mathcal{C}^1(D)$.

Remarque – *Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables réelles*

Il est possible de généraliser la notion de dérivées partielles à des fonctions à n variables réelles où $n \in \mathbb{N}^*$:

> *Soit f une fonction définie sur $D \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$, soit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D$, et $i \in [\![1; n]\!]$. Si la fonction $f_i : x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ est dérivable en a_i, alors sa dérivée est appelée dérivée partielle de f au point $\mathbf{a}$ par rapport à la variable x_i, et se note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbf{a} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ est appelée dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i.*

Le calcul de la dérivée partielle de f par rapport à x_i se réalise en considérant fixées toutes les variables autre que x_i et en dérivant la fonction f seulement par rapport à la variable x_i.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = x + yz^2$. Alors, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = z^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2yz.$$

Définition – *Gradient d'une fonction de deux variables réelles*

Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles sur D. Le **gradient** de f au point $(a, b) \in D$, noté $\nabla f(a, b)$, est le vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont les dérivées partielles de f au point (a, b), c'est-à-dire

$$\nabla f(a, b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}.$$

La fonction $(x, y) \mapsto \nabla f(x, y)$ définie de D dans $\mathbb{R}^2$ est appelée **gradient** de f et est notée ∇f.

Exemples

- ▷ Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto x + y^2$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$,

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \end{pmatrix}$$

car $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$.

- ▷ Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{xy}}{y}$ définie sur $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Alors, pour tout $(x, y) \in D$,

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{xy} \\ \frac{xy-1}{y^2}\,\mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}$$

car $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mathrm{e}^{xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{xy}}{y} - \dfrac{\mathrm{e}^{xy}}{y^2} = \dfrac{xy-1}{y^2}\,\mathrm{e}^{xy}$.

Exercice 4.

Calculer le gradient des fonctions suivantes :

1) $f_1 : (x, y) \mapsto 3x^4 - 2y^2$, **2)** $f_2 : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{xy}$, **3)** $f_3 : (x, y) \mapsto x\sin(xy)$.

3 Les dérivées partielles secondes

Définition — *Dérivées secondes d'une fonction de deux variables réelles*

Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Supposons que f est de *classe* $\mathcal{C}^1$ sur D.
Les **dérivées partielles secondes** de f sont les fonctions définies de D dans $\mathbb{R}$ par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Exemple

Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2x^2 y + y^3$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 + 3y^2$. Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x + 4xy) = 2 + 4y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 4xy) = 4x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2 + 3y^2\right) = 4x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2 + 3y^2\right) = 6y.$$

Exercice 5.

Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :

1) $f_1 : (x, y) \mapsto xy$, **2)** $f_2 : (x, y) \mapsto x\,\mathrm{e}^y$, **3)** $f_3 : (x, y) \mapsto \cos(xy)$.

Notation

Soit f une fonction définie de la partie D de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dite de **classe** $\mathcal{C}^2$ sur D si toutes ses dérivées secondes existent et sont continues sur D. On note aussi $f \in \mathcal{C}^2(D)$.

Théorème — *Théorème de Schwarz*

Soit f une fonction de *classe* $\mathcal{C}^2$ sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. Le **laplacien** de f, noté Δf, est la fonction définie de D dans $\mathbb{R}$ par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Exemple

Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^x y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \mathrm{e}^x y^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2\,\mathrm{e}^x.$$

Ainsi, le laplacien de f est la fonction Δf définie par, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\Delta f)(x, y) = \mathrm{e}^x (y^2 + 2).$$

4 Représentation graphique

Définition – *Surface représentative d'une fonction de deux variables réelles*

Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $(x, y) \in D$ et $z = f(x, y)$ est appelé **surface représentative** de f.

Remarques

- ▷ Pour une fonction réelle à une variable réelle, son graphe est une courbe dans $\mathbb{R}^2$.
- ▷ Pour une fonction réelle à deux variables réelles, son graphe est une surface dans $\mathbb{R}^3$.

Définition – *Lignes de niveau d'une fonction de deux variables réelles*

Soient f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau** de f associé à la valeur λ l'ensemble

$$\Lambda_\lambda = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = \lambda\}.$$

Remarque

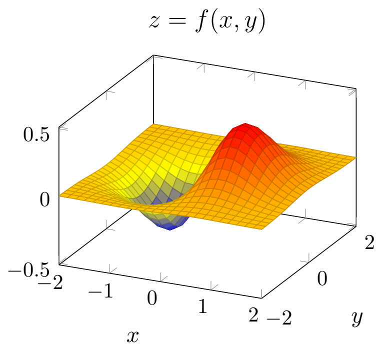
Une ligne de niveau correspond à l'ensemble de antécédents de λ par f.

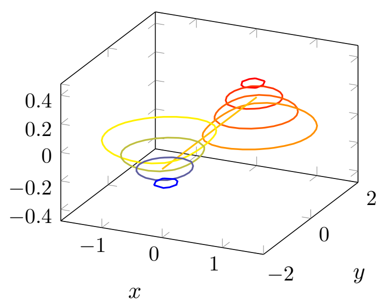
Exemples

- ▷ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = x \exp(-x^2 - y^2).$$

Voici la surface représentative de f (figure de gauche) et la représentation de quelques lignes de niveaux (figure de droite) :





- ▷ Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau de f associée à λ est l'ensemble des points

$$\Lambda_\lambda = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \lambda\right\}.$$

Alors, on a trois cas :

- Si $\lambda < 0$, l'équation $x^2 + y^2 = \lambda$ n'a pas de solution car $x^2 + y^2 \geq 0$. D'où, on a $\Lambda_\lambda = \emptyset$ et il n'existe pas de ligne de niveau associé à λ.
- Si $\lambda = 0$, l'équation $x^2 + y^2 = 0$ a une unique solution, le point $(0, 0)$. D'où, on a $\Lambda_\lambda = \{(0, 0)\}$ et la ligne de niveau est réduite au point $(0, 0)$.
- Si $\lambda > 0$, l'équation $x^2 + y^2 = \lambda$ possède une infinité de solutions : l'ensemble des points situés sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{\lambda}$. Cet ensemble défini Λ_λ.

Chapitre 10

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

Déterminer le domaine de définition des fonctions à deux variables réelles définies par les expressions suivantes :

1) $f_1(x,y) = x^2 + y^3\,\mathrm{e}^x$,

2) $f_2(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$,

3) $f_3(x,y) = \ln(xy)$,

4) $f_4(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2-1}$,

5) $f_5(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$,

6) $f_6(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x+y}}$.

Exercice 2.

1) Représenter graphiquement les domaines suivants :

a) $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$,

b) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y > 1\}$,

c) $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$,

d) $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$.

2) Soit la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Parmi les domaines ci-dessus, déterminer ceux pour lesquels la fonction f est définie.

Exercice 3.

Déterminer et représenter graphiquement les domaines de définition des fonctions à deux variables réelles définies par les expressions suivantes :

1) $f_1(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$, **2)** $f_2(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$, **3)** $f_3(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \ln(x^2-y)$.

1) Déterminer le domaine de définition D de f.

2) Calculer les dérivées partielles de f. En déduire $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)$ et $\nabla f(1,-2)$.

Exercice 5.

Pour les fonctions définies par les expressions suivantes, déterminer le domaine de définition de ces fonctions, puis calculer le gradient de ces fonctions :

1) $f_1(x,y) = x^2 + xy^2 + y^3$,

2) $f_2(x,y) = x\,\mathrm{e}^{y^2}$,

3) $f_3(x,y) = y\sin(xy)$,

4) $f_4(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$,

5) $f_5(x,y) = \dfrac{xy^2}{x+y}$,

6) $f_6(x,y) = \ln\dfrac{x}{y}$,

7) $f_7(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Exercice 6.

Calculer les dérivées partielles des fonctions définies par les expressions suivantes :

1) $f_1(x,y) = \mathrm{e}^{\cos(x^2+y^2)}$,

2) $f_2(x,y) = \cos\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$,

3) $f_3(x,y) = \sqrt{x\,\mathrm{e}^{xy^2}}$,

4) $f_4(x,y) = \ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)$,

5) $f_5(x,y) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$,

6) $f_6(x,y) = \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{y}\right)\right)$.

Exercice 7.

Calculer les dérivées partielles secondes et le laplacien des fonctions suivantes :

1) $f_1 : (x,y) \mapsto xy^3 + x^2y$,

2) $f_2 : (x,y) \mapsto \dfrac{x}{y}\,\mathrm{e}^x$,

3) $f_3 : (x,y) \mapsto x\,\mathrm{e}^{xy}$,

4) $f_4 : (x,y) \mapsto \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$,

5) $f_5 : (x,y) \mapsto x\sqrt{x+y^2}$,

6) $f_6 : (x,y) \mapsto x\ln\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$.

Exercice 8.

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. On appelle **matrice hessienne** de f au point $(x,y) \in D$, notée $H_f(x,y)$, la matrice de taille 2×2 définie par

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice hessienne des fonctions suivantes pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1) $f_1 : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$,

2) $f_2 : (x,y) \mapsto x^3 - xy + y^3$,

3) $f_3 : (x,y) \mapsto y\,\mathrm{e}^x$.

Exercice 9.

Soit la fonction f définie par, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2-1)(y^2+1)$. Tracer la ligne de niveau 0.

Exercice 10.

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = y^2 + \ln x$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que les points $A = (1,0)$ et $B = (\frac{1}{\mathrm{e}}, 1)$ appartiennent à la ligne de niveau 0 de f.

3) Déterminer l'équation des lignes de niveau de la fonction f.

Exercice 11.

Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. Considérons la fonction f définie de D dans $\mathbb{R}^2$ par, pour tout $(x,y) \in D$, $f(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$. On appelle **matrice jacobienne** de f au point (x,y), notée $J_f(x,y)$, la matrice de taille 2×2 définie par

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice jacobienne des fonctions définies par les expressions suivantes.

1) $f(x,y) = (x^2+y^2, xy)$,

2) $g(x,y) = \big(\mathrm{e}^{xy^2}, \ln(xy)\big)$.

Exercice 12.

Soit $D = [0;+\infty[\ \times [0;2\pi[$ et soit la fonction f définie de D dans $\mathbb{R}^2$ par

$$\text{pour tout } (r,\theta) \in D, \qquad f(r,\theta) = \big(r\cos\theta, r\sin\theta\big).$$

Calculer la matrice jacobienne de f en chaque point (r,θ) puis calculer le déterminant de cette matrice.

Chapitre 10 - Séquence 2

Intégrales doubles

Pour la suite, on considère seulement des fonctions de $\mathbb{R}^2$ continues sur leur domaine de définition.

5 Intégration sur un pavé

Définitions – *Pavé et intégrale sur un pavé*

On appelle **pavé** toute partie P de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$P = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\},$$

où a, b, c, d sont quatres réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$. Le pavé P est noté $[a; b] \times [c; d]$.
Soit f une fonction *continue* sur le pavé P. On appelle **intégrale double** de f sur le pavé P, notée $\displaystyle\iint_{[a;b]\times[c;d]} f(x, y)\, dx\, dy$ le réel défini par

$$\iint_{[a;b]\times[c;d]} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx.$$

Méthode – *Calcul d'une intégrale double sur un pavé*

Pour calculer une intégrale double, il faut procèder en deux étapes :

1. Calculer une expression de la fonction I définie sur $[a; b]$ par, pour tout $x \in [a; b]$,

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

   Pour cela, il suffit de considérer la variable x fixée et d'intégrer la fonction f seulement par rapport à la variable y.

2. Intégrer la fonction I sur $[a; b]$ pour déterminer l'intégrale double :

$$\iint_{[a;b]\times[c;d]} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b I(x)\, dx.$$

Exemple

Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 y$ définie sur le pavé $P = [0; 1]^2$. Calculons l'intégrale de f sur P :

$$I = \iint_P f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 y\, dy\right) dx.$$

1. Pour tout $x \in [0; 1]$, on a

$$I(x) = \int_0^1 x^2 y\, dy = \left[\frac{1}{2} x^2 y^2\right]_0^1 = \frac{x^2}{2}.$$

2. Ainsi, on a

$$I = \iint_P f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 I(x)\, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\, dx = \left[\frac{1}{6} x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Le théorème suivant indique que l'ordre d'intégration des variables n'a pas d'importance :

Théorème – *Théorème de Fubini*

Soit f une fonction *continue* sur le pavé $[a;b]\times[c;d]$ de $\mathbb{R}^2$. On a les égalités suivantes

$$\iint_{[a;b]\times[c;d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Exemple

On peut intégrer la fonction $f:(x,y)\mapsto x^2\,\mathrm{e}^y$ sur le domaine $D=[0;1]\times[0;1]$ de deux façons :

- ▷ $\displaystyle\iint_D x^2\,\mathrm{e}^y\,dx\,dy = \int_0^2\left(\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^y\,dy\right)\,dx = \int_0^2\left[x^2\,\mathrm{e}^y\right]_0^1 dx = \int_0^2 x^2(\mathrm{e}-1)\,dx = \frac{8(\mathrm{e}-1)}{3}.$
- ▷ $\displaystyle\iint_D x^2\,\mathrm{e}^y\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^2 x^2\,\mathrm{e}^y\,dx\right)\,dy = \int_0^1\left[\frac{x^3}{3}\,\mathrm{e}^y\right]_0^2 dy = \int_0^1 \frac{8}{3}\,\mathrm{e}^y\,dy = \frac{8(\mathrm{e}-1)}{3}.$

Remarques

- ▷ Il est toujours possible d'intégrer d'abord selon une première variable choisie entre x et y, puis d'intégrer selon la seconde variable.
- ▷ Si la fonction f est de la forme $f(x,y)=g(x)h(y)$, où g et h sont deux fonctions réelles continues, alors on a la relation

$$\iint_{[a;b]\times[c;d]} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right).$$

Exemple

$$\int_{[0;2]\times[0;1]} x\,\mathrm{e}^y\,dx\,dy = \left(\int_0^2 x\,dx\right)\left(\int_0^1 \mathrm{e}^y\,dy\right) = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\left[\mathrm{e}^y\right]_0^1 = 2(\mathrm{e}-1).$$

Exercice 1.

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1) $\displaystyle\iint_{[0;2]\times[1;3]} xy\,dx\,dy,$ **2)** $\displaystyle\iint_{[0;1]^2} x\,\mathrm{e}^{x+y}\,dx\,dy,$ **3)** $\displaystyle\iint_{[0;\pi]^2} \cos(x+y)\,dx\,dy.$

Proposition – *Linéarité de l'intégrale double*

Soient f et g deux fonctions *continues* sur un pavé P de $\mathbb{R}^2$, et soient λ et μ deux réels. Alors,

$$\iint_P (\lambda f+\mu g)(x,y)\,dx\,dy = \lambda\iint_P f(x,y)\,dx\,dy + \mu\iint_P g(x,y)\,dx\,dy.$$

Exemple

$$\begin{aligned}\iint_{[0;1]^2}(4x+3y^2\,\mathrm{e}^x)\,dx\,dy &= 4\iint_{[0;1]^2} x\,dx\,dy + 3\iint_{[0;1]^2} y^2\,\mathrm{e}^x\,dx\,dy\\ &= 4\left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 dy\right) + 3\left(\int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx\right)\left(\int_0^1 y^2\,dy\right) = \mathrm{e}+1.\end{aligned}$$

6 Intégration sur un domaine quelconque

Considérons un domaine D de $\mathbb{R}^2$.

▷ Supposons que D est défini par

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\big\}\,, \tag{1}$$

où a et b sont deux réels tels que $a \leq b$, et c et d sont deux fonctions *continues* sur $[a; b]$. Soit $\alpha \in [a; b]$. L'ensemble

$$D_\alpha = \{(x, y) \in D \mid x = \alpha\}$$

est appelé *section* du domaine D selon la variable x en α (cf. figure ci-dessous à gauche). La section D_α correspond alors au segment $[AB]$ où A est le point de coordonnées $\big(\alpha, c(\alpha)\big)$ et B le point de coordonnées $\big(\alpha, d(\alpha)\big)$. Alors, le domaine D est défini par

$$D = \{(x, y) \in D_\alpha \mid a \leq \alpha \leq b\}\,.$$

▷ Supposons que D est défini par

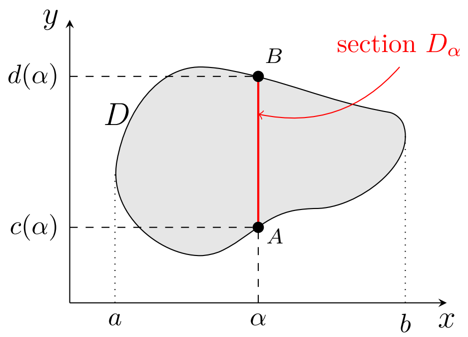
$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq d(y)\big\}\,, \tag{2}$$

où c et d sont deux réels tels que $c \leq d$, et a et b sont deux fonctions *continues* sur $[c; d]$. Soit $\beta \in [c; d]$. L'ensemble

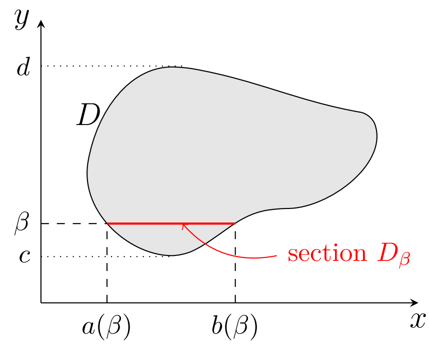
$$D_\beta = \{(x, y) \in D \mid y = \beta\}$$

est appelé *section* du domaine D selon la variable y en β (cf. figure ci-dessous à droite).

Domaine D décrit selon le type I



Domaine D décrit selon le type II



Définitions

Un domaine D est dit décrit selon

▷ le **type I** (ou décrit selon les sections en x) s'il peut s'écrire sous la forme (1).

▷ le **type II** (ou décrit selon les sections en y) s'il peut s'écrire sous la forme (2).

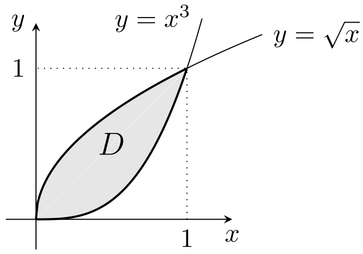
Méthode – *Détermination d'un domaine*

▷ Pour décrire un domaine selon le type I, il faut
- fixer un réel x entre a et b,
- déterminer les réels $c(x)$ et $d(x)$ qui délimitent la section D_x du domaine D en x.

▷ Pour décrire un domaine selon le type II, il faut
- fixer un réel y entre c et d,
- déterminer les réels $a(y)$ et $b(y)$ qui délimitent la section D_y du domaine D en y.

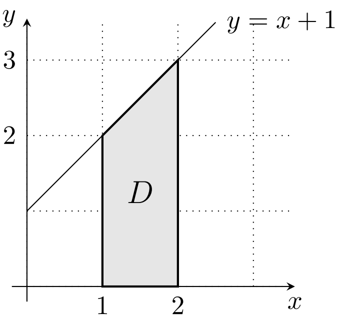
Exemples

- ▷ Soit le domaine D défini par
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}.$$
C'est un domaine de type I dont la représentation graphique est

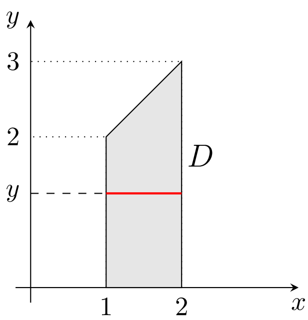


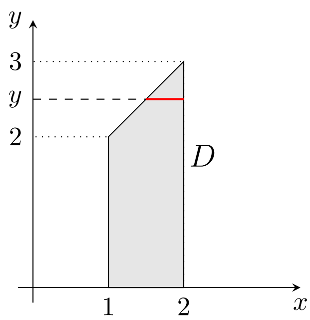
Le domaine D peut également être décrit selon le type II :
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y}\right\},$$
car, pour tout $0 \leq y \leq 1$,
$$x^3 \leq y \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{y} \qquad \text{et} \qquad y \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 \leq x.$$

- ▷ Soit le domaine D de $\mathbb{R}^2$ dont la représentation graphique dans le plan $\mathbb{R}^2$ est



Si on fixe un réel x compris entre 1 et 2, alors y doit être compris entre 0 et $x+1$. Ainsi, le domaine D peut-être décrit selon le type I :
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x+1\right\}.$$
Cependant, décrire le domaine D selon le type II s'avère plus compliqué : si on fixe un réel y compris entre 0 et 3, alors, x doit être compris entre les réels $a(y)$ et $b(y)$ définis par
$$\text{pour tout } y \in [0;3], \qquad a(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq 2, \\ y-1 & \text{si } y > 2, \end{cases} \qquad \text{et} \quad b(y) = 2.$$
En effet, pour $y \leq 2$, les points (x,y) de la section D_y de D en y vérifient $1 \leq x \leq 2$ (cf. figure gauche). Et, pour $y > 2$, les points (x,y) de la section D_y de D en y vérifient $y - 1 \leq x \leq 2$ (cf. figure droite).





Remarque

Souvent, un domaine D peut se décrire selon le type I et selon le type II. Cepedant, il arrive que cela ne soit pas toujours possible.

Exercice 2.

Représenter graphiquement les domaines suivants, puis les décrire selon le type II.

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$, **b)** $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$.

Exercice 3.

Décrire le disque D de centre O et de rayon 1 selon le type I.

Définitions – *Intégrale double*

Soit f une fonction définie sur un domaine D.

▷ Si le domaine D est décrit selon le type I, l'**intégrale double de f sur le domaine** D, notée $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$, est le réel

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

▷ Si le domaine est décrit selon le type II, l'**intégrale double de f sur le domaine** D, notée $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$, est le réel

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Méthode – *Calcul d'une intégrale double sur un domaine quelconque*

Pour calculer une intégrale sur un domaine de type I, il est possible de procèder en deux étapes :

1. Calculer une expression de la fonction I définie sur $[a; b]$ par, pour tout $x \in [a; b]$,

$$I(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy = F\big(x, d(x)\big) - F\big(x, c(x)\big).$$

   Pour cela, il suffit de considérer la variable x fixée et d'intégrer la fonction f par rapport à la variable y.

2. Intégrer la fonction I sur $[a; b]$ pour déterminer l'intégrale double :

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b I(x)\, dx.$$

Il est possible de procéder de manière similaire pour un domaine de type II.

Exemples

▷ Soit le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\right\},$$

et soit la fonction f définie sur D par, pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) = x^2 y$.

Alors, comme le domaine est décrit selon le type I, l'intégrale double de f sur D est

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2x} x^2 y\,dy\right)\,dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left(\int_0^{2x} y\,dy\right)\,dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2x} dx = \int_0^1 2x^4\,dx = \left[\frac{2}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

car $x \mapsto x^2$ est indépendant de y

▷ Soit le domaine D défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}$. Alors, on a

$$\iint_D y\,\mathrm{e}^x\,dx\,dy = \int_0^1 y \left(\int_{y^2}^{y} \mathrm{e}^x\,dx\right)\,dy = \int_0^1 y\Big[\,\mathrm{e}^x\,\Big]_{y^2}^{y}\,dy = \int_0^1 y\,\mathrm{e}^y\,dy - \int_0^1 y\,\mathrm{e}^{y^2}\,dy.$$

Ainsi, en réalisant une intégration par parties pour la première intégrale, on a

$$\iint_D y\,\mathrm{e}^x\,dx\,dy = \Big[y\,\mathrm{e}^y\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^y\,dy - \int_0^1 y\,\mathrm{e}^{y^2}\,dy = \mathrm{e} - \Big[\mathrm{e}^y\Big]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{y^2}\right]_0^1 = \frac{3-\mathrm{e}}{2}.$$

Exercice 4.

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3, x \leq y \leq x^2\}$.

b) $\iint_D y\sqrt{x}\,dx\,dy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

Remarque

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine D vérifie la relation $\mathcal{A} = \iint_D dx\,dy$.

Proposition – *Linéarité de l'intégrale double*

Soient f et g deux fonctions *continues* sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$, et soient λ et μ deux réels. Alors

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)(x,y)\,dx\,dy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \mu \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

Exemple

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \mathrm{e}^x\}$. Alors,

$$\begin{aligned}\iint_D (3y^2 + 2xy)\,dx\,dy &= 3\iint_D y^2\,dx\,dy + 2\iint_D xy\,dx\,dy \\ &= 3\int_0^1 \left(\int_0^{\mathrm{e}^x} y^2\,dy\right)\,dx + 2\int_0^1 x\left(\int_0^{\mathrm{e}^x} y\,dy\right)\,dx \\ &= 3\int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\mathrm{e}^x} dx + 2\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\mathrm{e}^x} dx \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,dx + \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^3 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 - \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

7 Intégrale sur un disque

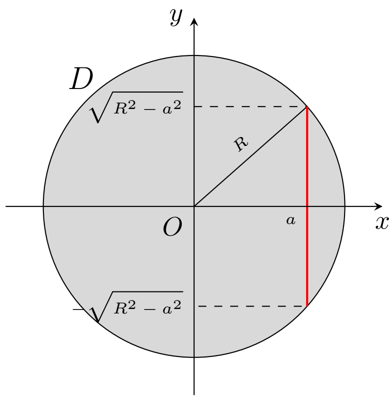
Considérons le cercle C dans $\mathbb{R}^2$ de centre O et de rayon R, avec $R > 0$. D'après le théorème de Pythagore, la relation vérifiée par tous les points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ situés sur le cercle C est

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Ainsi, l'ensemble des points situés dans le disque D de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) telles que $x^2 + y^2 \leq R$. Donc

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$$

Voici la représentation graphique du disque D.



Alors, le domaine D est aussi défini par :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\right\}.$$

Soit f une fonction *continue* sur le disque D. Alors, l'intégrale de f sur le disque D est

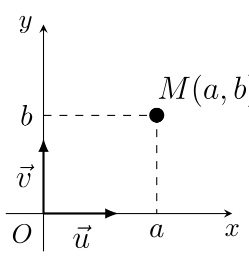
$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y)\,dy \right) dx.$$

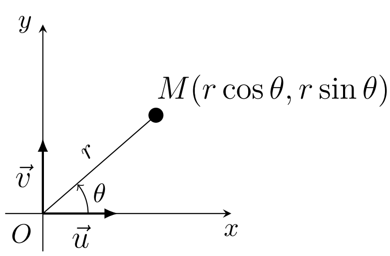
Cependant, dans de nombreux cas, le calcul de cette intégrale est difficile. C'est pour cette raison que, dans certains cas, il vaut mieux se ramener à un système de coordonnées polaires.

Définition — *Système de coordonnées polaires*

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, tout point M de coordonnées (x, y) peut être représenté par un système de coordonnées (r, θ) où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que

$$x = r\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad y = r\sin(\theta).$$





Ce système de coordonnées est appelée *coordonnées polaires*.

Théorème — *Calcul d'une intégrale double sur un disque*

Soit D le disque de centre O et de rayon R, avec $R > 0$, et soit f une fonction *continue* sur D. L'intégrale de f sur le disque D vérifie la relation

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr \right) d\theta.$$

Attention

Il est important de ne pas oublier la variable r devant dr.

Exemple

Soit la fonction f définie sur le disque unité D de centre O par, pour tout $(x,y) \in D$,

$$f(x,y) = xy.$$

Alors, en remplaçant x par $r\cos\theta$ et y par $r\sin\theta$, on a

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R (r\cos\theta)(r\sin\theta) r\, dr \right) d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \right) \left(\int_0^R r^3\, dr \right) = \left[\frac{1}{2}\sin^2(\theta) \right]_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 5.

Considérons le disque D de centre O et de rayon $R > 0$. Calculer l'intégrale sur les disques des fonctions suivantes :

a) $f_1 : (x,y) \mapsto x + y$, **b)** $f_2 : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$,

Théorème

Soient $R_1, R_2 \geq 0$ tels que $R_1 < R_2$ et soient $\alpha_1, \alpha_2 \in [0; 2\pi]$ tels que $\alpha_1 < \alpha_2$. Considérons le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid R_1 \leq r \leq R_2, \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2\}.$$

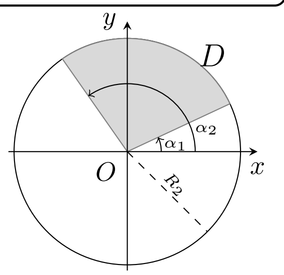
Soit f une fonction *continue* sur D. L'intégrale de f sur le domaine D vérifie la relation

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_{R_1}^{R_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr \right) d\theta.$$

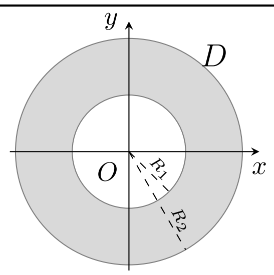
Exemples

Voici quelques représentations de domaines D définis comme dans le théorème précédent

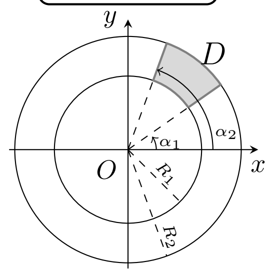
Cas $R_1 = 0$ et $R_2 > 0$



Cas $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 2\pi$



Cas général



Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\iint_P x^3 y \, dx \, dy$ où $P = [0;2] \times [1;3]$,
2) $\iint_P \frac{x}{y} \, dx \, dy$ où $P = [0;2] \times [1;2]$,
3) $\iint_P x \, e^{xy} \, dx \, dy$ où $P = [1;2]^2$,
4) $\iint_P \sin(x+y) \, dx \, dy$ où $P = [0;\pi] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,
5) $\iint_P \sqrt{x+y} \, dx \, dy$ où $P = [0;3] \times [0;1]$,
6) $\iint_P \frac{1}{x+y} \, dx \, dy$ où $P = [1;3]^2$,
7) $\iint_P \frac{xy}{x+y} \, dx \, dy$ où $P = [1;2]^2$,
8) $\iint_P \frac{xy}{x^2+y^2} \, dx \, dy$ où $P = [1;2]^2$.

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes

1) $\int_1^3 \left(\int_0^{\frac{1}{y}} xy \, dx \right) dy$,
2) $\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x \, e^y \, dx \right) dy$,
3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_{-2x}^{x} \cos(x+y) \, dy \right) dx$.

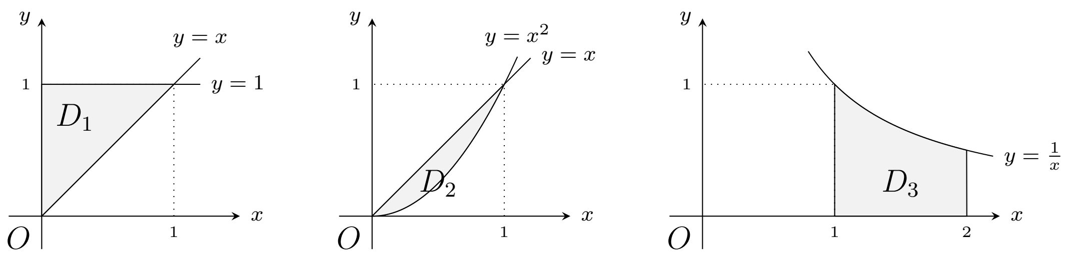
Exercice 3.

Représenter graphiquement les domaines suivants :

1) $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 1\}$,
2) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$,
3) $D_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$,
4) $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 4.

Décrire les domaines suivants selon le type I (selon des sections en x) et selon le type II (selon des sections en y), puis calculer leurs aires :



Exercice 5.

Après avoir représenté graphiquement le domaine D associé aux intégrales suivantes, calculer les.

1) $I_1 = \iint_D xy \, dx \, dy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$,
2) $I_2 = \iint_D x^2 \, dx \, dy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,
3) $I_3 = \iint_D \sin(x+y) \, dx \, dy$ avec $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -3x \leq y \leq 2x\right\}$.

Exercice 6.

Considérons le disque $D \subset \mathbb{R}^2$ de centre O et de rayon $R > 0$. Calculer l'aire du disque D à l'aide d'une intégrale double exprimée dans un système de coordonnées polaires.

Exercice 7.

Notons D_+ le quart de disque de centre O et de rayon $R > 0$ situé dans $\mathbb{R}^2_+$.

1) Décrire en compréhension le domaine D_+ selon le type I. Puis calculer l'intégrale suivante en utilisant les coordonnées cartésiennes :

$$I = \iint_{D_+} xy\, dx\, dy.$$

2) Décrire le domaine D_+ dans un système de coordonnées polaires. Puis calculer l'intégrale suivante en utilisant les coordonnées polaires :

$$I = \iint_{D_+} xy\, dx\, dy.$$

Exercice 8.

Considérons D le disque de $\mathbb{R}^2$ de centre O et de rayon $R > 0$. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\iint_D xy\, dx\, dy$, **2)** $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$, **3)** $\displaystyle\iint_D \cos(x^2+y^2)\, dx\, dy$.

Exercice 9.

Après avoir représenté graphiquement leurs domaines associés, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy$ sur $D = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right\}$,

2) $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\, dx\, dy$ sur $D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

Exercice 10.

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1) $\displaystyle I_1 = \iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\, dx\, dy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$,

2) $\displaystyle I_2 = \iint_D \sin(x+y)\, dx\, dy$ avec $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x+y \leq \pi\right\}$,

3) $\displaystyle I_3 = \iint_D yx^2\, dx\, dy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1, y \geq 0, y^2 \leq x\}$.

Application 11.

Considérons un matériau dont l'épaisseur est négligeable. Ce matériau peut être représenté par un domaine D dans le plan (Oxy). Notons par $\mu(x,y)$ la masse du matériau au point (x,y) de D. Alors, la masse totale m du matériau est donnée par

$$m = \iint_D \mu(x,y)\, dx\, dy.$$

De plus, le centre de gravité du matériau est le point G de coordonnées (x_G, y_G) défini par

$$x_G = \iint_D x\mu(x,y)\, dx\, dy \qquad \text{et} \qquad y_G = \iint_D y\mu(x,y)\, dx\, dy.$$

Calculer la masse et le centre de gravité pour le disque de centre O et de rayon 1 de masse $\mu(x,y) = x^2+y^2$ pour tout $(x,y) \in D$.