3 Kombinatorik

Wir werden uns im nächsten Kapitel mit dem Thema der Wahrscheinlichkeitsrechnung näher befassen. In vielen Fällen ist es möglich durch geschicktes Abzählen Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln. Dazu sind sogenannte *kombinatorische* Überlegungen erforderlich. In diesem Kapitel werden wir die grundlegenden Methoden erläutern.

Bevor wir nun weitergehen wollen wir noch einmal die Definition der Fakultät und des Binomialkoeffizienten betrachten, da wir diese immer wieder benötigen werden.

Definition
Die *Fakultät* $n!$ ist für eine natürliche Zahl n rekursiv definiert.

Für den Startwert 0 gilt: $0! = 1$

und für jeden Nachfolger $n \geq 1$ definiert man $n! = n \cdot (n-1)!$

Zum Beispiel ist mit dieser Definition

$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24.$

Einer der möglichen Python Befehle für die Fakultät lautet *np.math.factorial(n)* aus dem Modul «NumPy»

Definition
Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ ist für natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$, mit Hilfe der Fakultät definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Der *Python Befehl* für den Binomialkoeffizienten lautet *scipy.special.binom(n,k)* aus dem Modul «SciPy».

Nun sind wir bereit ein paar verschiedene Beispiele zu betrachten.

3.1 Vier Grundlegende Methoden des Abzählens

3.1.1 Beispiele

1. **Zahlenschlossproblem**: Sie haben den Zahlencode ihres Zahlenschlosses vergessen. Das Schloss besteht aus 6 Zahlenkränzen mit den Zahlen 0 bis 9. Wie viele Einstellungen müssen Sie im schlimmsten Fall probieren, um ihren Zahlencode zu finden?
2. **Schwimmwettkampf**: Bei einem Schwimmwettbewerb starten 10 Schwimmerinnen. Wie viele mögliche Platzierungen gibt es, wenn Sie nur die ersten drei Plätze betrachten und nicht zulassen, dass Schwimmerinnen zeitgleich im Ziel ankommen können?
3. **Lotto**: Wie gross sind die Chancen beim Lotto 6 aus 49 mit einem Versuch sechs richtige Zahlen vorauszusagen?
4. **Bitproblem**: Wie viele verschiedene natürliche Zahlen können mit 64 Bits binär dargestellt werden?
5. **Zahnarztproblem**: Eine Zahnärztin erlaubt den Kindern, nach der Behandlung zur Belohnung 3 Spielzeuge aus 5 Töpfen auszusuchen. Die 5 Töpfe sind dabei jeweis mit einer Art Spielzeug befüllt (Gummiball, Spielfigur, Toyauto, Jojo, Kreisel). Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat ein Kind?
6. **Fussballmannschaft**: Aus einer Klasse mit 20 Studierenden soll eine Fussballmannschaft mit 11 Spielern zusammengestellt werden. (6a) Wie viele Möglichkeiten gibt es? (6b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Mannschaft genau aus 6 Frauen und 5 Männern bestehen soll und die Klasse aus 8 Frauen und 12 Männern besteht.
7. **Buchstabenproblem**: Mit 10 verschiedenen Buchstaben sollen Wörter von 5 Zeichen gebildet werden. (7a) Wie viele solche Wörter gibt es, wenn dabei kein Buchstabe doppelt vorkommen darf. (7b) Wie viele verschiedene Wörter gibt es, wenn Buchstaben mehrmals vorkommen können.
8. **Tellschiessen**: Wilhelm Tell schiesst mit drei Pfeilen auf eine Zielscheibe, welche in 10 ringförmige Bereiche unterteilt ist. Wie viele verschiedene Resultate gibt es für Wilhelm?
9. **Napoleon** schart seine 10 Generäle für eine Beratung um sich an einem kreisrunden Tisch mit 11 Plätzen. (9a) Wie viele verschiedene Sitzreihenfolgen gibt es? (9b) Wie viele verschiedene Sitzreihenfolgen gibt es, wenn Napoleons Liebling Marschall Ney immer an Napoleons Seite sitzen soll?
10. **Gruppen**: Wie viele verschiedene Personengruppen kann man aus einer Klasse mit 20 Studierenden bilden?
11. **Teilmengen**: (11a) Wie viele dreielementige Teilmengen hat die Menge $\{1,2,3,4\}$? (11b) Wie viele Teilmengen hat die Menge $\{1,2,3,4\}$? Wie viele Teilmengen hat eine Menge mit n Elementen?

3.1.2 Lösungen der Beispiele

Beispiel 1: Zahlenschlossproblem
Das Zahlenschloss hat 6 Zahlenkränze mit den Zahlen 0 bis 9. An jedem Kranz können unabhängig von den anderen Kränzen 10 verschiedene Zahlen eingestellt werden. Dabei kann jede Zahl mehrfach vorkommen.
Unten in der Tabelle ist als Beispiel der Zahlencode 011909 mit Kreuzen markiert. In jeder Spalte können die Kreuze unabhängig von den anderen Spalten gesetzt werden, um alle möglichen Zahlencodes zu finden.

Zahlen 0 bis 9	Kranz1	Kranz2	Kranz3	Kranz4	Kranz5	Kranz6
0	X				X	
1		X	X			
…						
8						
9				X		X

Für jeden der 6 Zahnkränze gibt es also 10 mögliche Belegungen.
Damit gibt es

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$$

mögliche Zahlencodes.

Beispiel 2: Schwimmwettkampf
Für den ersten Platz gibt es
10 mögliche Platzierungen.

Wenn eine Schwimmerin auf dem ersten Platz platziert ist, so gibt es für den zweiten Platz noch
9 mögliche Schwimmerinnen

und ebenso für den dritten Platz noch
8 mögliche Schwimmerinnen.

Somit gibt es
$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$

verschiedene Platzierungen für die ersten drei Plätze.

In der Tabelle ist die Platzierung Schwimmer 1 auf Platz 2, Schwimmer 3 auf Platz 1 und Schwimmer 10 auf Platz 3 mit Kreuzen markiert.

	Schwimmer1	Schwimmer2	Schwimmer3	…	Schwimmer9	Schwimmer10
Platz1	-	-	X	-	-	-
Platz2	X	-	-	-	-	-
Platz3	-	-	-	-	-	X

Auf diese Weise können alle möglichen Platzierungen eingetragen werden. Allerdings muss in jeder Zeile genau ein Kreuz stehen, da wir nicht zulassen, dass Schwimmerinnen gleichzeitig oder gar nicht ins Ziel kommen. Die Einträge beim Abzählen sind nicht unabhängig voneinander, wie beim Zahlenschlossproblem. Wenn man beim Eintragen in der ersten Zeile beginnt, so gibt es 10 Möglichkeiten ein Kreuz zu setzen. In der zweiten Zeile darf das Kreuz nicht unter das Kreuz der ersten Zeile gesetzt werden. Es gibt 9 Möglichkeiten dies zu tun und entsprechend gibt es für die dritte Zeile noch 8 Möglichkeiten.

Beispiel 3: Lotto
Bei der Ziehung 6 aus 49 spielt die Reihenfolge der gezogenen Zahlen keine Rolle, allerdings kann jede der Zahlen nur einmal vorkommen, da die Kugeln nicht mehr zurückgelegt werden. Käme es auf die Reihenfolge an, so hätte man wie im Problem mit den Schwimmerinnen 6 Plätze für mögliche 49 Zahlen zu besetzen. Dazu würde es
$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = \frac{49!}{43!}$ Möglichkeiten geben.

Es kommt aber nur auf die Zahlenauswahl an. Zu jeder bestimmten Auswahl von 6 Zahlen gibt es
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ verschiedene Arten diese anzuordnen.

Also gibt es
$\frac{49!}{43! \cdot 6!}$ Auswahlen

von 6 Zahlen aus 49 ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Die Zahl $$\frac{49!}{43! \cdot 6!}$$

entspricht dem *Binomialkoeffizienten* $$\binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!}$$

in Worten „*6 aus 49*“ oder „*49 tief 6*“.
Die Chancen 6 richtige Zahlen zu erraten sind $1/\binom{49}{6} = \frac{43! \cdot 6!}{49!} \approx 7.1511 \cdot 10^{-8}$.

Beispiel 4: Bitproblem
Entsprechend des $\overset{\text{Zahlenschlossproblems}}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$ gibt es hier 64 Stellen. Unabhängig voneinander, pro Stelle, gibt es zwei mögliche Besetzungen, die Zahlen 1 oder 0.
Insgesamt können
$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{64 \text{ Faktoren}} = 2^{64}$

verschiedene natürliche Zahlen mit 64 Bits binär dargestellt werden.

Beispiel 5: Zahnarztproblem
Das komplizierteste der hier beschriebenen Abzählprobleme wird mit einem *Ersatzproblem* gelöst. Dabei handelt es sich um ein äquivalentes Problem, welches einfacher zu lösen ist.
Jede Auswahl von 3 Objekten aus den 5 Schalen kann eindeutig durch 3 Kreuze XXX und 4 Striche IIII nach der folgenden Regel beschrieben werden: Wir nummerieren die Schalen mit 1 bis 5 und denken uns folgendes System zum Abzählen aller Auswahlen von drei Objekten.

Nehmen wir k_1 Objekte aus Schale 1 heraus so werden k_1 Kreuze nebeneinander geschrieben

$$\underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_1-\mathrm{Mal}}\ \ldots$$

Danach wird ein I geschrieben

$$\underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_1-\mathrm{Mal}}\ \mathrm{I}\ \ldots$$

um zu kennzeichnen, dass jetzt die Objekte aus Schale 2 ausgewählt werden.
Aus Schale 2 werden k_2 Objekte herausgenommen, was mit k_2 Kreuzen notiert wird

$$\underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_1-\mathrm{Mal}}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_2-\mathrm{Mal}}\ \ldots$$

Danach wird wieder ein I geschrieben

$$\underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_1-Mal}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_2-Mal}\ \mathrm{I}\ \ldots$$

um deutlich zu machen, dass nun Objekte aus Schale 3 entnommen werden.
Für k_3 entnommene Objekte werden entsprechend viele Kreuze geschrieben. Anschliessend wird wieder ein Strich geschrieben, um zu kennzeichnen, dass zur Schale 4 übergegangen wird

$$\underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_1-Mal}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_2-Mal}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_3-Mal}\ \mathrm{I}\ \ldots$$

Natürlich muss die Gesamtzahl der Kreuze immer kleiner oder gleich 3 sein, weil insgesamt genau drei Objekte entnommen werden sollen. Aus Schale 4 werden k_4 Objekte gezogen und anschliessend ein letzter Strich I geschrieben

$$\underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_1-Mal}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_2-Mal}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_3-Mal}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_4-Mal}\ \mathrm{I}$$

Schliesslich werden aus Schale 5 noch k_5 Objekte herausgenommen, so dass die Gesamtzahl aller gezogenen Objekte, d.h. die Gesamtzahl der Kreuze, 3 ergibt:

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 3$$

Die so entstandene Zeichenkette besteht aus 3 Kreuzen X und 4 Strichen I, also insgesamt 7 Zeichen

$$\underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_1-Mal}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_2-Mal}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_3-Mal}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_4-Mal}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{X}\ldots\mathrm{X}}_{k_5-Mal}$$

Auf diese Weise korrespondiert jede Auswahl von 3 Objekten aus den 5 Schalen mit einer solchen Zeichenkette und umgekehrt korrespondiert jede solche Zeichenkette mit einer bestimmten Auswahl von 3 Objekten aus den 5 Schalen.
Beispielsweise entspricht die Zeichenfolge

$$\underbrace{\ }_{k_1=0}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\ }_{k_2=0}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{X}}_{k_3=1}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\ }_{k_4=0}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{XX}}_{k_5=2}$$

der Ziehung von einem Objekt aus Schale 3 und zwei Objekten aus Schale 5.
Für das Ziehen aller drei Objekte aus Schale 2 lautet die Zeichenfolge:

$$\underbrace{\ }_{k_1=0}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\mathrm{XXX}}_{k_2=3}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\ }_{k_3=0}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\ }_{k_4=0}\ \mathrm{I}\ \underbrace{\ }_{k_5=0}$$

Das Problem, alle Auswahlen von 3 Objekten aus 5 Schalen zu bestimmen, ist gleichbedeutend mit dem Problem, alle Zeichenfolgen mit 3 Kreuzen und 4 Strichen zu bestimmen. Dies wiederum entspricht der Anzahl aller Möglichkeiten 3 Kreuze (oder alternativ 4 Striche) auf 7 Stellen zu verteilen.
Das systematische Abzählen ist in der folgenden Tabelle angedeutet:

Zeichen1	Zeichen2	Zeichen3	Zeichen4	Zeichen5	Zeichen6	Zeichen7
X	X	X	I	I	I	I
X	X	I	X	I	I	I
X	X	I	I	X	I	I
…						

Dieses Problem ist dem …………………………………………..……………..verwandt. Lottoproblem
Beim Lotto geht es darum 6 Zahlen aus 49 auszuwählen. Hier geht es darum, für ein 7-stelliges Codewort 3 Stellen auszuwählen, an denen Kreuze geschrieben werden. In anderen Worten aus 7 Zahlen (für die 7 Stellen) sollen 3 ausgewählt werden für die Kreuze. Die Antwort ist entsprechend zum Lottoproblem der Binomialkoeffizient

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35 \text{ bzw. } \binom{7}{4} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35 \text{ (für die Striche)}$$

Ein Kind hat demnach 35 Möglichkeiten drei Objekte aus 5 Schalen auszuwählen.

Beispiel 6: Fussballmannschaft
Aus 20 Studierenden sollen 11 Personen ausgewählt werden.
Wie beim Lotto 6 aus 49 ist das Problem hier 11 aus 20.
Es gibt

$$\binom{20}{11} = \frac{20!}{9! \cdot 11!} = 167960$$

solche Auswahlen, d.h. Fussballmannschaften.
Besteht die Klasse aus 8 Frauen und 12 Männern und die Auswahl aus 6 Frauen und 5 Männern so kann man z.B. zuerst die 6 Frauen aus den 8 Frauen der Klasse auswählen. Dafür gibt es

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28 \text{ Möglichkeiten}$$

Danach wählt man die 5 Männer aus den 12 Männern der Klasse aus. Dafür gibt es

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = 792 \text{ mögliche Auswahlen}$$

Jede Auswahl von 6 Frauen kann mit jeder Auswahl von 5 Männern zu einer Mannschaft zusammengesetzt werden. Insgesamt gibt es

$$\binom{8}{6} \cdot \binom{12}{5} = 28 \cdot 792 = 22\,176$$

Auswahlmöglichkeiten von 6 Frauen und 5 Männern.

Beispiel 7: Buchstabenproblem
Das Problem mit 10 verschiedenen Buchstaben Wörter von 5 Zeichen zu bilden entspricht dem
Problem der Platzierung von 10 Schwimmerinnen auf 3 Plätzen.
……………………………………………………………………………………………….
Hier sind es nicht 3 sondern 5 Plätze und Buchstaben, statt Schwimmerinnen.

Wir nummerieren die 5 Buchstaben des zu bildenden Wortes mit 1 bis 5.
Für den ersten Buchstaben im Wort gibt es 10 mögliche Besetzungen, für den zweiten noch 9, für den dritten noch 8, den vierten 7 und den fünften 6. Insgesamt gibt es
$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240$ verschiedene Wörter.

Falls bei der Bildung der Wörter erlaubt ist, dass Buchstaben mehrfach vorkommen dürfen, so
dem Zahlenschloss Problem
entspricht das……………………………………………..

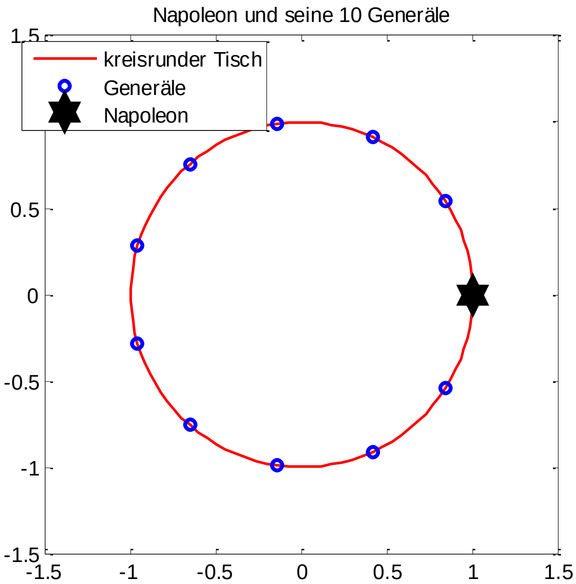
Hier sind es allerdings 5 Stellen, auf denen jeweils unabhängig voneinander 10 verschiedene Buchstaben geschrieben werden können. Insgesamt gibt es

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$ verschiedene Wörter.

Beispiel 8: Tellschiessen
Wilhelm Tell schiesst mit drei Pfeilen auf eine Zielscheibe, welche in 10 ringförmige Bereiche unterteilt ist. Wenn man Wilhelm die Möglichkeit zugesteht daneben zu schiessen, so hat er 3 Versuche mit jeweils 11 verschiedenen Resultaten, wobei Resultate mehrfach vorkommen können.
dem Zahnarztproblem
Dieses Problem entspricht……………………………………………………………………...
3 Objekte aus 5 möglichen Sorten zu wählen.
Hier sind es nicht 5 sondern 11 mögliche Resultate.
Somit gibt es

$$\binom{13}{3} = \frac{13!}{(13-3)! \cdot 3!} = 286 \text{ mögliche Ausgänge des Schiessens.}$$

Beispiel 9: Napoleon
Napoleon schart seine 10 Generäle an einen kreisrunden Tisch mit 11 Plätzen. Bei der Sitzordnung kommt es nur auf die Reihenfolge der Personen an. Man könnte den Tisch auch drehen und die Sitzordnung bleibt dieselbe. Somit kann man für das Abzählen eine bestimmte Person, zum Beispiel Napoleon, immer an dieselbe Stelle positionieren, wie nachfolgend im Bild.



Die 10 Generäle haben 10 Plätze zur Wahl.

wie beim Platzieren der 10 Schwimmer auf 10 Positionen

Das Problem ist…………...………………………………………………………………….

Es gibt $10! = 3628800$ verschiedene Möglichkeiten

die 10 Generäle an den Tisch zu setzen.

Wenn Marschall Ney immer links von Napoleon sitzen soll gibt es

$9! = 362880$ mögliche Sitzordnungen

und ebenso, wenn er zu Napoleons Rechten sitzt. Insgesamt gibt es $2 \cdot 9! = 725760$ mögliche Sitzordnungen mit Marschall Ney an Napoleons Seite.

Beispiel 10: Gruppen

Wie viele verschiedene Personengruppen kann man aus einer Klasse mit 20 Studierenden bilden? Der direkte Ansatz wäre sich zu fragen, wie viele Gruppen es mit einer Person, zwei Personen, drei Personen, vier Personen, …, 20 Personen gibt und diese Zahlen zu addieren. Diese Summe ergibt die Antwort auf das Problem.

Alternativ werden wir ein Ersatzproblem formulieren. Wir nummerieren die Personen von 1 bis 20. Dann kann man eine bestimmte Auswahl eindeutig kennzeichnen, indem man den Mitgliedern der Auswahl den Wert 1 und allen anderen Personen den Wert 0 zuordnet, wie es unten im Bild mit einer Gruppe von 8 Personen gemacht wurde.

Die so beschriebene Gruppe kann mit dem folgenden Bitmuster

1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0

identifiziert werden.

Andererseits entspricht jedes 20 Bit Muster, über den oben beschriebenen Zusammenhang, einer bestimmten Gruppe aus den 20 Personen.

$2^{20} = 1048576$

Es gibt……………………………………………………..verschiedene Bitmuster, also auch so viele verschiedene Gruppen welche man aus den 20 Personen bilden kann.

Allerdings ist dabei auch die leere Gruppe, das Bitmuster mit 20 Nullen.

$2^{20} - 1 = 1048575$

Es gibt…………………………………………………………….....verschiedene Gruppen mit mindestens einer Person.

Beispiel 11: Teilmengen

Eine Möglichkeit die Teilmengen der Menge {1,2,3,4} zu kategorisieren, ist nach der Anzahl der Elemente:

k	Teilmengen mit k Elementen	Anzahl
0	{} «leere Menge»	$\binom{4}{0} = 1$
1	{1},{2},{3},{4}	$\binom{4}{1} = 4$
2	{1,2},{1,3}, {1,4}{2,3},{2,4},{3,4}	$\binom{4}{2} = 6$
3	{1,2,3},{1,2,4},{1,3,4},{2,3,4}	$\binom{4}{3} = 4$
4	{1,2,3,4}	$\binom{4}{4} = 1$

Wir erhalten als Gesamtzahl aller Teilmengen (die leere Menge mit eingerechnet)

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

Verallgemeinern wir das auf eine beliebige Menge, so kann man sagen: Jede Menge mit n Elementen hat

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + .. + \binom{n}{n} = 2^n$$

verschiedene Teilmengen (die leere Menge mit eingerechnet).
Das kennen wir bereits von den Potenzmengen.

3.1.3 Systematik

Bei allen hier betrachteten elementaren Abzählproblemen geht es um eine Auswahl von k Objekten aus einer Gesamtheit von n Objekten.
Beim Zahlenschlossproblem und beim Bitproblem kommt es auf die Reihenfolge der gewählten Objekte an, beim Lottoproblem spielt die Reihenfolge keine Rolle. Beim Zahlenschlossproblem und auch beim Bitproblem ist es möglich, dass Zahlen mehrmals vorkommen können, beim Lottoproblem ist das nicht der Fall. Beim Schwimmwettbewerb kommt es auf die Reihenfolge an, aber keine Schwimmerin darf in der Platzierung mehrmals vorkommen. Beim Tellschiessen kommt es nicht auf die Reihenfolge an und Resultate (getroffene Bereiche) können mehrmals vorkommen. Eine Wiederholung bereits getroffener Bereiche ist möglich.

Man teilt die Probleme daher nach zwei Kriterien ein:

Ob in der Auswahl die Reihenfolge der Objekte eine Rolle spielt und

ob Wiederholung der Objekte in der Auswahl möglich ist.

Eine Auswahl von k Objekten aus n Objekten bei der die Reihenfolge eine Rolle spielt, heisst Variation von k Objekten aus n.

Eine Auswahl von k Objekten aus n Objekten bei der die Reihenfolge keine Rolle spielt, heisst Kombination von k Objekten aus n Objekten.

Die hier besprochenen elementaren Abzählprobleme werden unter diesen beiden Kriterien in die folgenden 4 Klassen eingeteilt:

- *Variation* von k aus n Objekten *mit* Wiederholung.
- *Variation* von k aus n Objekten *ohne* Wiederholung.
- *Kombination* von k aus n Objekten *ohne* Wiederholung.
- *Kombination* von k aus n Objekten *mit* Wiederholung.

Variation (mit Reihenfolge)		Kombination (ohne Reihenfolge)	
Mit Wiederholung	Ohne Wiederholung	Mit Wiederholung	Ohne Wiederholung
Zahlenschloss (1) Bitproblem (4) Buchstabenproblem (7b)	Schwimmwettkampf (2) Buchstabenproblem (7a) Napoleon (9)	Zahnarztproblem (5) Tellschiessen (8)	Lotto (3) Fussballmannschaft (6a) Teilmengenproblem (11)

3.2 Binomialkoeffizienten

3.2.1 Definition

Der **Binomialkoeffizient**

$$\binom{n}{k} \;(k \text{ aus } n \text{ oder } n \text{ tief } k)$$

ist eine handliche Abkürzung für ein elementares Abzählproblem: Wie viele Möglichkeiten gibt es k Objekte aus einer Gesamtheit von n Objekten auszuwählen. Dabei kommt es nicht auf die Reihenfolge der ausgewählten Objekte an und eine Wiederholung von bestimmten Objekten in der Auswahl ist zudem nicht erlaubt.

Bereits im vorangehenden Kapitel wurden Binomialkoeffizienten in diesem Sinne benutzt um die Lösungsformel zweier elementarer kombinatorischer Probleme, das Lottoproblem *6 aus 49*, und das Zahnarztproblem, bzw. das Tellschiessen kurz und prägnant zu formulieren.

Definition

Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ ist für natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$, mit Hilfe der Fakultät definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Dahinter steckt die anschauliche Bedeutung des Binomialkoeffizienten als die Anzahl aller Auswahlen (ohne Reihenfolge und ohne Wiederholung!) von k Objekten aus einer Gesamtheit von n unterscheidbaren

Beispiel 12: Gummibärchen

30 Gummibärchen der gleichen Farbe sollen auf 5 Studierende verteilt werden. Auf wie viele Arten ist dies möglich, wenn jeder Studierende mindestens ein Gummibärchen erhalten soll.

Jeder Studierende erhält mindestens ein Gummibärchen. Bleiben noch 25, die auf 5 Studierende verteilt werden sollen.

Tellschiessen bzw. Zahnarztproblem

Dafür gibt es, entsprechend zum...…………………………………………………………………,

$$\binom{25+5-1}{25} = \binom{29}{25} = \frac{29!}{25! \cdot 4!} = \frac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 29 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13 = 23\,751 \text{ Möglichkeiten}$$

3.2.2 Systematik

Betrachten wir nun nochmals die elementaren Abzählprobleme:

- *Variation* von k aus n Objekten *mit* Wiederholung.
- *Variation* von k aus n Objekten *ohne* Wiederholung.
- *Kombination* von k aus n Objekten *ohne* Wiederholung.
- *Kombination* von k aus n Objekten *mit* Wiederholung.

Dann findet man eine entsprechend einfache Darstellung mit Hilfe des Binomialkoeffizienten.

Variation (mit Reihenfolge)		Kombination (ohne Reihenfolge)	
Mit Wiederholung	Ohne Wiederholung	Mit Wiederholung	Ohne Wiederholung
n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

3.2.3 Eigenschaften

Es gibt genau eine Teilmenge ohne Elemente aus einer Menge von n Objekten, nämlich die leere Menge $\{\}$. Mit dem Binomialkoeffizienten lautet das so, wenn man nach der Anzahl der Teilmengen mit 0 Elementen fragt:
$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = 1.$

Wählt man k Objekte aus n Objekten aus, so bleiben $n-k$ übrig. Deswegen ist die Anzahl aller Möglichkeiten k Objekte aus n Objekten auszuwählen gleich der Anzahl der Möglichkeiten $n-k$ Objekte aus n Objekten auszuwählen. Der Binomialkoeffizient hat folgende Symmetrieeigenschaft:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Schreibt man alle Binomialkoeffizienten zu festem n in einer Reihe mit wachsendem k auf, so ist diese Reihe symmetrisch zu ihrer Mitte:

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \ldots.. \quad \binom{n}{n-3} \quad \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

Will man alle Teilmengen mit 4 Elementen aus der Menge $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ finden, so kann man ein Element, zum Beispiel a, fixieren. Die Teilmengen mit 4 Elementen können danach eingeteilt werden ob sie a enthalten oder nicht. Wir nennen für den Moment eine Teilmenge mit 4 Elementen, welche a enthält, eine Kategorie A Menge. Alle anderen Teilmengen mit 4 Elementen nennen wir Kategorie B Menge. Unten in der Tabelle sind für dieses Beispiel die Kategorie A und B Mengen aufgeführt.

Kategorie A Teilmenge 4-elementige Teilmengen mit Element a	Kategorie B Teilmenge 4-elementige Teilmengen ohne Element a
$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$, $\{a,b,d,e\}$, $\{a,b,d,f\}$, $\{a,b,e,f\}$, $\{a,c,d,e\}$, $\{a,c,d,f\}$, $\{a,c,e,f\}$, $\{a,d,e,f\}$	$\{b,c,d,e\}$, $\{b,c,d,f\}$, $\{b,c,e,f\}$, $\{b,d,e,f\}$, $\{c,d,e,f\}$
$\binom{5}{3} = 10$	$\binom{5}{4} = 5$
Es gilt: $\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 10 + 5 = 15$	

Um eine Kategorie A Menge zu bilden, müssen 3 Elemente aus der Menge $\{b, c, d, e, f\}$ ausgewählt werden.
Dazu gibt es

$$\binom{5}{3} = 10 \text{ Möglichkeiten.}$$

Dagegen müssen für Kategorie B Mengen 4 Elemente aus der Menge $\{b,c,d,e,f\}$ ausgewählt werden.
Dies geht auf

$$\binom{5}{4} = 5 \text{ Arten.}$$

Andererseits ist die Anzahl aller 4-elementigen Teilmengen aus einer Menge mit 6 Elementen gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{6}{4}$.
Aus diesem Grund gilt der folgende Zusammenhang:

$$\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 10 + 5 = 15.$$

Allgemein gilt die folgende Rekursionsformel der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Man rechne die Gültigkeit dieser Formel von Hand nach (am besten von rechts nach links in der Gleichung). Mit Hilfe dieser rekursiven Vorschrift können die Binomialkoeffizienten bestimmt werden, ohne die nötigen Fakultäten und Quotienten explizit ausrechnen zu müssen. Dieses Berechnungsverfahren für Binomialkoeffizienten ist als das *Pascal'sche Dreieck* bekannt. Das Schema unten verdeutlicht die Berechnung einiger Koeffizienten.

n						$k=0$				
0					$\binom{0}{0}=1$		$k=1$			
1				$\binom{1}{0}=1$	$+$	$\binom{1}{1}=1$		$k=2$		
2			$\binom{2}{0}=1$	$+$	$\binom{2}{1}=2$	$+$	$\binom{2}{2}=1$		$k=3$	
3		$\binom{3}{0}=1$	$+$	$\binom{3}{1}=3$	$+$	$\binom{3}{2}=3$	$+$	$\binom{3}{3}=1$		$k=4$
4	$\binom{4}{0}=1$	$+$	$\binom{4}{1}=4$	$+$	$\binom{4}{2}=6$	$+$	$\binom{4}{3}=4$	$+$	$\binom{4}{4}=1$	
…		…		…		…		…		

Die absteigenden Diagonalen von rechts nach links gehören jeweils zum gleichen k Wert. Sie sind in der gleichen Farbe gehalten. Die Zeilen gehören jeweils zu einem bestimmten n Wert. Man beachte, wie die Einträge jeder Zeile aus den Werten der jeweils vorhergehenden Zeile nach obiger Formel berechnet werden.

Bemerkung
Für den *Binomialkoeffizienten* gelten also die folgenden Eigenschaften:

1. Leere Menge: $\binom{n}{0} = 1$
2. Symmetrie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3. Pascal'sches Dreieck – Rekursion: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
4. Binomischer Lehrsatz: für komplexe Zahlen $a,b \in \mathbb{C}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n b^0$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Summe: $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

3.3 Lernziele für dieses Kapitel

- ☐ Ich kenne die 4 grundlegenden Abzählverfahren der Kombinatorik.
- ☐ Ich kann beurteilen wann es sich um eine der vier elementaren Abzählarten handelt.
- ☐ Ich kann die in diesem Kapitel gegebenen Beispiele den 4 grundlegenden Abzählverfahren der Kombinatorik zuordnen.
- ☐ Ich kann an Beispielen erklären was eine Variation von k Objekten aus einer Grundgesamtheit von n Objekten mit und ohne Wiederholung ist.
- ☐ Ich kann an Beispielen erklären was eine Kombination von k Objekten aus einer Grundgesamtheit von n Objekten mit und ohne Wiederholung ist.
- ☐ Ich kann die Formeln für die 4 grundlegenden kombinatorischen Abzählverfahren herleiten und erklären.
- ☐ Ich kann die Formeln für die 4 grundlegenden kombinatorischen Abzählverfahren anwenden, um komplexere Abzählprobleme zu lösen.
- ☐ Ich kenne die Definition des Binomialkoeffizienten.
- ☐ Ich kann die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten an Beispielen erklären.
- ☐ Ich kann die 4 wichtigen Eigenschaften des Binomialkoeffizienten auswendig aufschreiben und erklären.
- ☐ Ich kann das Pascal’sche Dreieck bilden und Binomialkoeffizienten damit berechnen.
- ☐ Ich kann den Begriff des Ersatzproblems mit Hilfe von Beispielen erklären.
- ☐ Ich kenne den Begriff der Potenzmenge und kann diese für eine gegebene Menge bestimmen.
- ☐ Ich kann die Mächtigkeit der Potenzmenge einer gegebenen Menge berechnen.