8 Schliessende Statistik – Hypothesentests

8.1 Einführung

Problemstellung
Jemand hat eine Behauptung bzw. Hypothese aufgestellt. Diese soll nun durch ein statistisches Verfahren auf der Basis einer Stichprobe überprüft werden.

Beispiele

1. Ein Automobilhersteller gibt an, dass der mittlere Benzinverbrauch für einen bestimmten Autotyp $\mu_0 = 8.2$ ℓ/100 km beträgt. Stimmt diese Angabe?
2. Der Anteil unzufriedener Kunden einer Airline lag bei 32%. Eine Verbesserung des Kundenservices sollte zu einer Reduktion der unzufriedenen Kunden führen. Eine Umfrage nach einem halben Jahr unter 112 zufällig ausgewählten Kunden führt zu 26 unzufriedenen Kunden. Ist eine Verbesserung erkennbar?
3. Die typischen Laufzeiten eines Programms sind bekannt. Nun soll beurteilt werden, ob das System stabil läuft anhand der aktuell gemessenen Laufzeiten.
4. Zwei verschiedene Messmethoden für elektrische Widerstände sollen miteinander verglichen werden. Liefern sie dieselben Resultate?

Es reicht nun nicht, zu überprüfen, ob der Durchschnitt oder der Anteil oder die Verteilung der Stichprobe der Behauptung entspricht. Selbst wenn die Behauptung stimmt, müssen wir mit zufälligen Abweichungen rechnen. Die Frage lautet also:

> *Ist es plausibel, die in der Stichprobe beobachteten Abweichungen von der Behauptung als zufällig zu betrachten? Liegen sie ‚im Rahmen'?*

Wir suchen objektive Kriterien für diese Entscheidung.

8.2 Vorgehen bei einem Hypothesentest

Im Folgenden wird Schritt für Schritt das Vorgehen bei einem Hypothesentest erklärt. Ergänzen Sie bei jedem Schritt die entsprechenden Angaben für das folgende Beispiel:

Beispiel 1: Kraftstoffverbrauch
Ein Automobilhersteller bringt ein neues PKW-Modell auf den Markt, dessen Benzinverbrauch X (in Liter pro 100 km Fahrleistung) eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem Mittelwert $\mu_0 = 8.2$ ℓ/100 km sein soll. Die Redaktion einer Fachzeitschrift überprüft diese Angabe an $n = 25$ zufällig ausgewählten Testfahrzeugen und kommt dabei zu folgendem Ergebnis:

$$\bar{x} = 9.1 \text{ ℓ/100 km} \qquad s = 2.1 \text{ ℓ/100 km}$$

Kann somit die Angabe des Herstellers bezüglich des Mittelwertes μ aufrechterhalten werden?

1. Schritt: Nullhypothese formulieren
Wir stellen die sogenannte *Nullhypothese* H_0 auf, die die Behauptung beschreibt:

$$H_0: \mu = \mu_0 = 8.2$$

Die Nullhypothese wird in einem gewissen Sinn bevorzugt behandelt, nach dem Motto: "Im Zweifelsfall für den Angeklagten". D.h. wir gehen davon aus, dass H_0 wahr ist, bis wir uns vom Gegenteil überzeugt haben.

2. Schritt: Alternativhypothese formulieren
Wir formulieren die sogenannte *Alternativhypothese* H_A. Wenn wir zum Schluss kommen, dass H_0 nicht haltbar ist, nehmen wir an, dass H_A zutrifft.

$H_A: \mu \neq \mu_0 = 8.2$ (der angegebene Durchschnitt ist falsch; 2-seitige Hypothese)

Je nach Fragestellung gibt es auch andere Möglichkeiten für H_A:

$H_A: \mu > \mu_0 = 8.2$ (der angegebene Durchschnitt ist zu klein; 1-seitige Hypothese)

$H_A: \mu < \mu_0 = 8.2$ (der angegebene Durchschnitt ist zu gross; 1-seitige Hypothese)

Die Alternativhypothese ist weniger spezifisch als die Nullhypothese. In unserem Beispiel gibt sie keinen konkreten Wert für μ an.

3. Schritt: Testvariable definieren
Wir bestimmen eine sogenannte *Testvariable*, eine dem konkreten Problem angepasste Stichprobenfunktion:

$$T = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

In unserem Beispiel nehmen wir als Ausgangspunkt die Schätzfunktion für den Mittelwert:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Diese muss nun standardisiert werden (wie bei den Vertrauensintervallen):

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

(Schon hier merkt man die bevorzugte Behandlung von H_0 – bei der Standardisierung gehen wir davon aus, dass $\mu = \mu_0$ gilt.)

4. Schritt: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Testvariable bestimmen
Wir bestimmen die Wahrscheinlichkeitsverteilung, der die Testvariable T folgt mit Tabelle 8.2.1 *unter der Voraussetzung, dass H_0 wahr ist.*

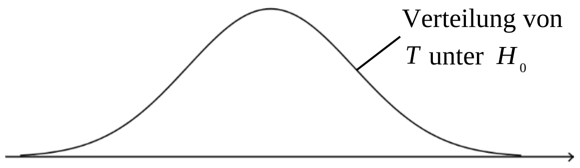
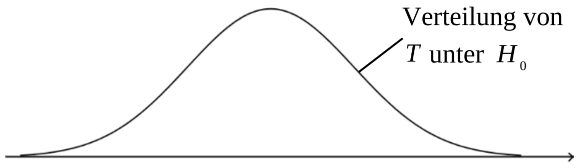
In unserem Beispiel handelt es sich um eine ..... *t*-Verteilung mit $f = n - 1$ .....

5. Schritt: Signifikanzzahl festlegen
Wir wählen eine *Signifikanzzahl*: $\alpha = 5\%$ (ebenfalls üblich ist 1%).

6. Schritt: Kritische Grenzen bestimmen
Wir bestimmen (aus der Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von T) zwei *kritische Grenzen* c_u und c_o derart, dass gilt:

$$P(c_u \leq T \leq c_o) = 1 - \alpha$$

Bei einer zweiseitigen Alternativhypothese wird die Fläche des *kritischen Bereichs*, die α entspricht, je zur Hälfte rechts und links abgetragen, bei einer einseitigen Alternativhypothese nur auf einer Seite. Annahmebereiche grün und kritische Bereiche rot einzeichnen.

	
2-seitige Alternativhypothese ($H_A: \mu \neq \mu_0$)	1-seitige Alternativhypothese ($H_A: \mu > \mu_0$)
c_u =-2.064 c_o =2.064	c_o = 1.711

Bei der 1-seitigen Alternativhypothese $H_A: \mu < \mu_0$ befindet sich der kritische Bereich dann stattdessen links mit $c_u = -1.711$.

7. Schritt: Testwert berechnen
Wir berechnen den *Testwert* $\hat{t}$, indem wir die Stichprobenwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $T = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ einsetzen.

$$\hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{9.1 - 8.2}{2.1/5} = 2.143$$

8. Schritt: Testentscheidung:
Fällt der Testwert $\hat{t}$ in den *Annahmebereich*, gilt also $c_u \leq \hat{t} \leq c_o$, dann wird H_0 als plausibel angenommen.
Fällt der Testwert $\hat{t}$ in den *kritischen Bereich*, gilt also $\hat{t} < c_u$ oder $c_o < \hat{t}$, dann wird H_0 als unwahrscheinlich abgelehnt.

H_0 wird abgelehnt. Die Behauptung des Automobilherstellers ist nicht plausibel.

Bemerkung
Hypothesentests mit t-verteilter Testvariable werden allgemein als t -Tests bezeichnet.

Vorgehen bei einem Parametertest

1. **Nullhypothese H_0 aufstellen**

   Um welchen Parameter geht es? Welchen Wert hat er angeblich? Oder werden zwei Parameter verglichen?

2. **Alternativhypothese H_A aufstellen**

   Kommt es darauf an, in welche Richtung die Abweichung geht? Ist dies der Fall, so beschreibt H_A nur die relevante Alternative.

3. **Die richtige Zeile in der Tabelle 8.2.1 finden**

   Welcher Verteilung folgt die Grundgesamtheit? Um welche Nullhypothese geht es? Welcher Fall liegt vor?

4. **Kritische Grenze(n) bestimmen**

   Dabei müssen wir Folgendes berücksichtigen:
   - Verteilung der Testvariablen gemäss Tabelle 8.2.1 (letzte Kolonne)
   - Signifikanzniveau α
   - Ist H_A einseitig oder zweiseitig? Wenn einseitig, auf welcher Seite befindet sich der kritische Bereich?

5. **Testwert berechnen**

   gemäss Tabelle 8.2.1 (vorletzte Kolonne).

6. **Testentscheidung fällen**

   Liegt der Testwert im Annahmebereich oder im kritischen Bereich?

8.2.1 Übersicht über verschiedene Parametertests

	Verteilung Grundges.	Null-hypothese	Fall	Schätzfunktion	Testvariable (standardisiert)	Verteilung der Test-variablen unter H_0
1	Normal-verteilung	$\mu = \mu_0$	Varianz σ^2 bekannt	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$	$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	Standardnormal-verteilung **T2**
2	Normal-verteilung	$\mu = \mu_0$	Varianz σ^2 unbekannt *	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	t-Verteilung mit $f = n - 1$ **T4**
3	2 Normal-verteilungen	$\mu_1 - \mu_2 = 0$	Abhängige Stichproben, Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 bekannt	$\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}$	$U = \frac{\bar{Z}}{\sigma}$ mit $\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$	Standardnormal-verteilung **T2**
4	2 Normal-verteilungen	$\mu_1 - \mu_2 = 0$	Abhängige Stichproben, Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 unbekannt *	$\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i - \bar{Z})^2$	$T = \frac{\bar{Z}}{S/\sqrt{n}}$	t-Verteilung mit $f = n - 1$ **T4**
5	2 Normal-verteilungen	$\mu_1 - \mu_2 = 0$	Unabhängige Stichproben, Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 bekannt	$Z = \bar{X} - \bar{Y}$	$U = \frac{Z}{\sigma}$ mit $\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$	Standardnormal-verteilung **T2**
6	2 Normal-verteilungen	$\mu_1 - \mu_2 = 0$	Unabhängige Stichproben, Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 gleich, aber unbekannt *	$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}}$		t -Verteilung mit $f = n_1 + n_2 - 2$ **T4**
7	Normal-verteilung	$\sigma^2 = \sigma_0^2$		$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$	$Z = (n-1) \frac{S^2}{\sigma_0^2}$	Chi-Quadrat-Vert. mit $f = n - 1$ **T3**
8	Bernoulli-Verteilung	$p = p_0$		$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$	$U = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$	Standardnormalvert. (näherungsweise) **T2**

*) Falls n (bzw. n_1 und n_2) > 30 ist, so kann der entsprechende Fall für bekannte Varianzen angewendet werden; dabei dient s als Schätzwert für σ

Beispiel 2: Kundenzufriedenheit (Quelle: Martin Frey)
Der Anteil unzufriedener Kunden einer Airline lag bei 32%. Eine Verbesserung des Kundenservices sollte zu einer Reduktion der unzufriedenen Kunden führen. Eine Umfrage nach einem halben Jahr unter 112 zufällig ausgewählten Kunden führt zu 26 unzufriedenen Kunden. Ist eine Verbesserung erkennbar?

Um welchen Parameter geht es hierbei?..p (Bernoulliverteilung)

1. Nullhypothese: $H_0: p = p_0 = 0.32$
2. Alternativhypothese: $H_A: p < 0.32$
3. Welche Zeile der Tabelle 8.2.1 passt zu unserem Problem? 8
4. Die Testvariable folgt einer Standardnormalverteilung (näherungsweise)

   Signifikanzniveau: $\alpha = 0.05$

   H_A: einseitig, kritischer Bereich links

   Kritische Grenze: $c_u = -1.645$

5. Testwert berechnen:

$$\bar{x} = \frac{26}{112} \approx 0.232$$

$$\hat{u} = \frac{\bar{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{\frac{26}{112} - 0.32}{\sqrt{0.32(1-0.32)/112}} \approx -1.993$$

6. Testentscheidung: $\hat{u} < c_u$

$\Rightarrow$ H_0 wird abgelehnt; die Kunden sind anscheinend zufriedener.

Bemerkung
Die Annahme, dass die Testvariable hier einer Standardnormalverteilung folgt ist nur bei grossen Stichprobenzahlen bzw. gemäss der Faustregel $n\hat{p}(1-\hat{p}) > 9$ als Näherung zulässig. Daher nutzen Statistikprogramme teils andere Verteilungsfunktionen für die Testvariable.

Beispiel 3: Programmlaufzeiten
Es ist bekannt, dass die Laufzeit eines Programms (approximativ) normalverteilt ist mit $\mu = 17\text{s}$ und einer bekannten Varianz von $\sigma^2 = 2.25\ \text{s}^2$. Nun werden die aktuellen Programmlaufzeiten gemessen und es soll beurteilt werden, ob es Anpassungen am System benötigt, falls die Laufzeiten abweichen.

Die folgenden Laufzeiten wurden gemessen: 19.2s; 17.4s; 18.5s; 16.5s; 18.9s

1. Nullhypothese: $H_0: \mu = \mu_0 = 17$
2. Alternativhypothese: $H_A: \mu \neq 17$
3. Welche Zeile der Tabelle 8.2.1 passt zu unserem Problem? 1
4. Die Testvariable folgt einer Normalverteilung

   Signifikanzniveau: $\alpha = 0.01$

   H_A: zweiseitig

   Kritische Grenze: $c_u = -2.576$ und $c_o = 2.576$

5. Testwert berechnen:

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^{5} x_i = 18.1$$

$$\hat{u} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{18.1 - 17}{\sqrt{2.25}/\sqrt{5}} \approx 1.640$$

6. Testentscheidung: $c_u < \hat{u} < c_o$

$\Rightarrow$ $\hat{u}$ liegt im Annahmebereich; H_0 wird damit nicht abgelehnt.

Bemerkung
Beim Beibehalten der Nullhypothese wurde also kein Widerspruch zum bisherigen Modell gefunden. Dies heisst nicht, dass die Nullhypothese richtig oder gar bewiesen ist – sie bleibt lediglich plausibel. Mehr dazu später…

Bemerkung
Hypothesentests mit normalverteilter Testvariable werden allgemein als Gauss-Tests bezeichnet.

8.2.2 Hypothesentests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte μ_1 und μ_2 zweier Normalverteilungen

Frage: Sind die Mittelwerte μ_1 und μ_2 zweier normalverteilter Grundgesamtheiten gleich oder unterscheiden sie sich signifikant?

Wir entnehmen den beiden Grundgesamtheiten, die wir durch die Zufallsvariablen X und Y beschreiben, je eine Zufallsstichprobe:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n_1} \qquad \text{bzw.} \qquad y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$$

Nullhypothese H_0: $\mu_1 = \mu_2$ bzw. $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Alternativhypothese H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$ bzw. $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Definition

Zwei Stichproben heissen voneinander *abhängig*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Die Stichproben haben den gleichen Umfang
2. Jedem Wert der einen Stichprobe entspricht genau ein Wert der anderen Stichprobe und umgekehrt.

Fall 1: Abhängige Stichproben

Beispiel 4

Vergleich zweier Messgeräte: Dieselben Bauelemente aus einer Serienproduktion werden auf zwei verschiedenen Messgeräten gemessen. Zu jedem Bauelement gehört also ein Messwert in der 1. Messreihe und ein Messwert in der 2. Messreihe. Die beiden Messreihen können als abhängige Stichproben aufgefasst werden.

Beispiel 5

Gegeben sind die monatlichen Umsätze zweier Fluglinien in [Mio CHF] (wir nehmen an, dass Normalverteilungen zugrunde liegen). Unterscheiden sich die Umsätze dieser Fluglinien signifikant?

Monat.	Januar	Februar	März	April	Mai
Fluglinie A [Mio CHF]	14	9	10	12	15
Fluglinie B [Mio CHF]	9	10	12	10	9

mit den bekannten Varianzen $\sigma_1^2 = 6.5$ [Mio CHF]^2 und $\sigma_2^2 = 1.5$ [Mio CHF]^2

1. Nullhypothese: $H_0: \mu_1 = \mu_2$
2. Alternativhypothese: $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$
3. Welche Zeile der Tabelle 8.2.1 passt zu unserem Problem? 3
4. Die Testvariable folgt Standardnormalverteilung

   Signifikanzniveau: $\alpha = 0.05$

   H_A: zweiseitig

   Kritische Grenze: $c_u = -1.960$ und $c_o = 1.960$
5. Testwert berechnen:

$$\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = 12 - 10 = 2$$
$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n} = \frac{6.5+1.5}{5} = 1.6$$
$$\hat{u} = \frac{\bar{z}}{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{1.6}} = 1.581$$

6. Testentscheidung: $c_u < \hat{u} < c_o$

$\Rightarrow$ H_0 wird angenommen; die Umsätze der Fluglinien unterscheiden sich nicht signifikant.

Beispiel 6 (Quelle: Nollau/Partzsch/Storm/Lange S. 214)

Beim Testen eines neuen Treibstoffs erhalten 5 PKW zunächst 10ℓ des herkömmlichen Treibstoffs (A) und anschliessend 10ℓ des neuen Treibstoffs (B). Zum Vergleich dient die Fahrleistung in km. Ist die mittlere Fahrleistung mit dem neuen Treibstoff signifikant höher als mit dem herkömmlichen? Wir nehmen an, dass die Fahrleistung für jeden Treibstoff normalverteilt ist. Als Irrtumswahrscheinlichkeit wählen wir $\alpha = 5\%$.

PKW-Nr.	1	2	3	4	5
Fahrleistung mit Treibstoff A [km]	95	106	110	115	94
Fahrleistung mit Treibstoff B [km]	96	115	115	114	100
Differenz [km]	–1	–9	–5	1	–6

1. Nullhypothese: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
2. Alternativhypothese: $H_A: \mu_1 - \mu_2 < 0$
3. Welche Zeile der Tabelle 8.2.1 passt zu unserem Problem? 4
4. Die Testvariable folgt einer t-Verteilung mit 5 – 1 = 4 Freiheitsgraden

   Signifikanzniveau: $\alpha = 0.05$

   H_A: einseitig, kritischer Bereich links

   Kritische Grenze: $c_u = -2.132$

5. Testwert berechnen:

$$\bar{z} = \frac{-1-9-5+1-6}{5} = -4\text{km}$$
$$s^2 = \frac{3^2+(-5)^2+(-1)^2+5^2+(-2)^2}{5-1} = 16\text{km}^2$$
$$s = \sqrt{16} = 4\text{km}$$
$$\hat{t} = \frac{\bar{z}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{-4}{\frac{4}{\sqrt{5}}} = -2.236$$

6. Testentscheidung: $\hat{t} < c_u$

$\Rightarrow$ H_0 wird abgelehnt; mit dem neuen Treibstoff ist die Fahrleistung anscheinend höher.

Fall 2: Unabhängige Stichproben

Beispiel 7
Besitzen die auf zwei verschiedenen Maschinen produzierten elektronischen Bauteile im Mittel die gleiche Lebensdauer? Verwenden Sie das Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$.

X: Lebensdauer eines auf Maschine A produzierten Bauteils
Y: Lebensdauer eines auf Maschine B produzierten Bauteils

Wir entnehmen den beiden (normalverteilten) Grundgesamtheiten je eine Stichprobe und erhalten folgende Auswertung:

Maschine A:	$n_1 = 80$	$\bar{x} = 500\text{h}$	$s_1 = 50\text{h}$
Maschine B:	$n_2 = 50$	$\bar{y} = 480\text{h}$	$s_2 = 45\text{h}$

Da die Stichproben gross genug sind (> 30), dürfen wir $\sigma_1^2 = s_1^2$ und $\sigma_2^2 = s_2^2$ annehmen.

1. Nullhypothese: $H_0: \mu_1 = \mu_2$
2. Alternativhypothese: $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$
3. Welche Zeile der Tabelle 8.2.1 passt zu unserem Problem? 5
4. Die Testvariable folgt der Standardnormalverteilung

   Signifikanzniveau: $\alpha = 0.01$

   H_A zweiseitig

   Kritische Grenzen: $c_u = -2.576,\ c_o = 2.576$

5. Testwert berechnen:
   $\sigma^2 \approx \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{2500}{80} + \frac{2025}{50} = 71.75$
   $\hat{u} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sigma} = \frac{500-480}{8.471} = 2.361$

6. Testentscheidung: $c_u < \hat{u} < c_o$
   $\Rightarrow$ H_0 wird angenommen; wir können also nicht widerlegen, dass die beiden Maschinen Bauteile mit gleicher Lebensdauer produzieren

Anwendung aus der Biomechanik: Testen eines dynamischen Stuhls (Bachelorarbeit)
In einer Projekt- und Bachelorarbeit wurde ein dynamischer Stuhl entwickelt. Dieser soll nun mit einem konventionellen, im Handel erhältlichen dynamischen Bürostuhl verglichen werden. Um nachzuweisen, dass der an der ZHAW entwickelte Stuhl besser ist, sitzen Versuchspersonen auf den beiden Stühlen Probe. Dabei werden einerseits Messungen im Bewegungslabor durchgeführt, andererseits geben die Versuchspersonen mittels Fragebogen über ihre subjektive Einschätzung des Sitzkomforts Auskunft (Noten von 1 bis 7).

(a) Welcher Hypothesentest muss hier verwendet werden?
t-Test für abhängige Stichproben (Zeile 4 der Tabelle, weil kleine Stichprobe)
……………………………………………………………………………………

(b) Soll eine einseitige oder eine zweiseitige Hypothese getestet werden?
einseitig nach oben
……………………………………………………………………………………

Bei diesem Beispiel (wie auch bei vielen anderen Anwendungen aus der Biomechanik) ist die Erhebung der Daten ziemlich aufwändig. Deshalb möchte man mit einer möglichst kleinen Stichprobe arbeiten. Um zu bestimmen, wie gross die Stichprobe sein sollte, geht man so vor:

1. Man überlegt sich, welche Abweichung von H_0 relevant ist. Das ist keine mathematische Frage!

2. Man schätzt die Varianz, entweder auf Grund von Daten aus anderen ähnlichen Erhebungen oder auf Grund einer (kleinen) Vorlaufstichprobe.

3. Man wählt die Stichprobengrösse n so, dass die kritische Grenze c_o kleiner ist als der Testwert, der einer relevanten Abweichung vom Parameterwert unter H_0 entspricht.

Für unser Beispiel der subjektiven Einschätzung des Sitzkomforts sieht das so aus ($\alpha = 5\%$):

1. Wir nehmen an, dass eine Abweichung von 1 Notenpunkt relevant ist.

2. Eine Vorlaufstichprobe mit 8 Versuchspersonen ergibt für die Differenzen zwischen den beiden Stühlen eine Varianz von $\sigma^2 = 3.125$.

3. Der Mittelwert $\bar{z}$ der Differenzen befindet sich im kritischen Bereich, falls gilt:

$$\frac{\bar{z}}{s/\sqrt{n}} > c_o \quad \text{bzw.} \quad \bar{z} > \frac{c_o \cdot s}{\sqrt{n}}$$

In unserem Fall soll also n so gewählt werden, dass eine Abweichung von 1 Notenpunkt von $\mu_0 = 0$ sicher im kritischen Bereich liegt, d.h. es soll gelten:

$$1 > \frac{c_o \cdot s}{\sqrt{n}}, \text{ d.h. } c_o < \frac{\sqrt{n}}{s} = \frac{\sqrt{n}}{1.7678}$$

Da c_o auch von n abhängt, probieren wir ein paar Werte für n aus:

$$n = 10 \qquad c_o = 1.833 \qquad \frac{c_o \cdot s}{\sqrt{n}} = 1.03$$
$$n = 12 \qquad c_o = 1.796 \qquad \frac{c_o \cdot s}{\sqrt{n}} = 0.92$$

n = 12 wäre also in diesem Zusammenhang eine vernünftige Grösse für eine Stichprobe, n = 11 wäre auch noch o.k.

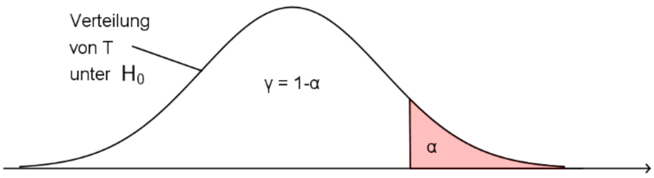
8.3 Mögliche Fehlerquellen bei einem Hypothesentest

Am Ende eines Hypothesentests wird eine Entscheidung gefällt: Entweder wird H_0 angenommen oder abgelehnt. Die Entscheidung beruht auf der Auswertung einer Zufallsstichprobe. Auf dieser Grundlage kann aber nie eine absolut sichere Entscheidung gefällt werden; es besteht immer die Möglichkeit eines Irrtums.

Es gibt zwei Arten von Fehlern:

Realität \ Testentscheidung	H_0 wird angenommen	H_0 wird abgelehnt
H_0 ist wahr	✓	Fehler 1. Art
H_0 ist falsch	Fehler 2. Art	✓

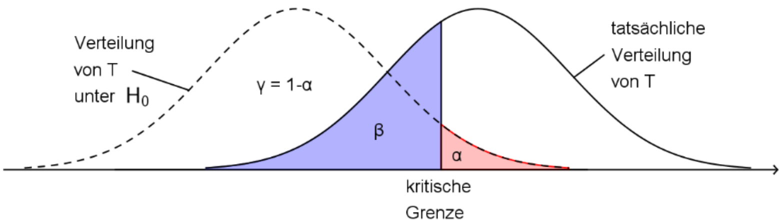
***Fehler 1. Art*: *H*₀ ist wahr und wird trotzdem abgelehnt.**
„Der Alarm geht los, obwohl es nicht brennt.“
Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art wird mit α bezeichnet.

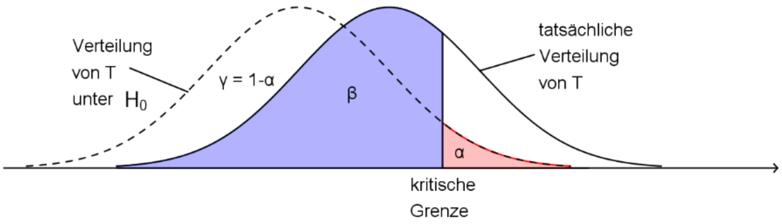


(Alle Illustrationen in diesem Abschnitt für 1-seitige Alternativhypothesen mit kritischem Bereich auf der rechten Seite)

***Fehler 2. Art*: *H*₀ ist falsch und wird trotzdem angenommen.**
„Der Alarm geht nicht los, obwohl es brennt.“
Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art wird mit β bezeichnet.
Die Grösse von β ist abhängig vom tatsächlichen (unbekannten) Wert des Parameters:

Geogebra Demo





Je näher der wahre Wert des Parameters am angenommenen Wert des Parameters ist, desto grösser ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

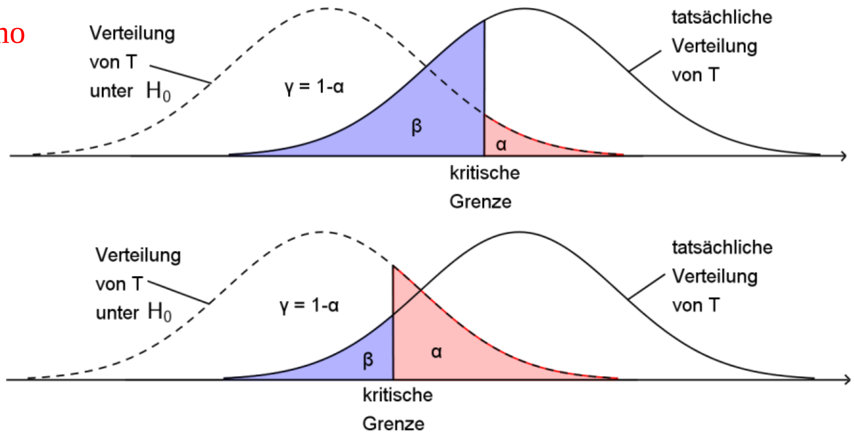
Beispiel 8
Bei der Anlieferung von Ware wird eine Abnahmekontrolle durchgeführt.

Fehler 1. Art: ‚Produzentenrisiko'
Auf Grund der Stichprobe wird die Lieferung zurückgewiesen, obwohl der vereinbarte Ausschussanteil in der Lieferung nicht überschritten wurde.

Fehler 2. Art: ‚Konsumentenrisiko'
Auf Grund der Stichprobe wird die Lieferung angenommen, obwohl der vereinbarte Ausschussanteil in der Lieferung überschritten wurde.

Zusammenhang zwischen Fehlern 1. und 2. Art:

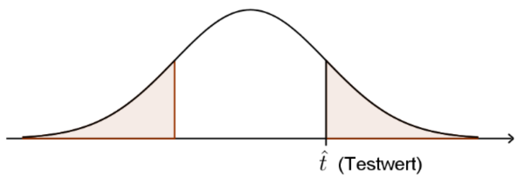
Geogebra Demo



Eine *Verkleinerung* der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art (α) bewirkt bei gleicher Stichprobengrösse stets eine *Vergrösserung* der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art (β) und umgekehrt.

8.4 Allgemeine Bemerkungen zu Hypothesentests

(1) Der p-Wert
Statt einer Ja/Nein-Entscheidung auf Grund einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit α kann man auch den sogenannten p-Wert angeben: die Wahrscheinlichkeit, einen mindestens so extremen Testwert zu erhalten, wenn H_0 wahr ist. Ist der p-Wert grösser oder gleich α, wird die Nullhypothese angenommen. Ist der der p-Wert kleiner als α, wird die Alternative angenommen.



Der p-Wert entspricht der eingefärbten Fläche. Beim 2-seitigen Hypothesentest wird die Fläche symmetrisch eingetragen (wie hier); beim 1-seitigen Hypothesentest nur auf einer Seite.

Beispiel 9 (Quelle: Fahrmeir Bsp.10.1)
In Produktionsfirmen wird vor der Auslieferung einer bestimmten Warenpartie deren Qualität auf Stichprobenbasis kontrolliert. Der Vertrag zwischen Produzenten und Kunde beinhaltet, dass der Kunde die Lieferung akzeptiert, sofern der Ausschussanteil unter 10% liegt mit einer Signifikanz von $\alpha = 5\%$. Aus Zeit- und Kostengründen können nicht alle Produkte getestet

werden, so dass der Ausschussanteil auf Basis einer Stichprobe im Umfang von $n = 1000$ Stück geschätzt wird. In dieser Stichprobe befinden sich 102 Ausschussstücke. Damit ergäbe sich als Schätzer für den wahren, aber unbekannten Ausschussanteil in dieser Lieferung:

$$\hat{p} = \frac{102}{1000} = 0.102 = 10.2\%$$

Für die zugehörige standardisierte Zufallsvariable erhalten wir:

$$u = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0.102 - 0.1}{\sqrt{0.1(1-0.1)/1000}} = 0.21$$

Wir bestimmen nun den zugehörigen p-Wert für den Testwert $\hat{u} = 0.21$ mit $\alpha = 0.05$ für einen einseitigen Test:

p-Wert = $P(|U| \geq \hat{u}) = (1 - N(0,1)(0.21)) = (1 - 0.5832) = 0.4168 \geq \alpha$

Die Nullhypothese wird angenommen, da der p-Wert grösser oder gleich $\alpha = 0.05$ ist.

p-Werte liefern dabei mehr Informationen als die Ja-Nein-Entscheidung bzgl. der Annahme bzw. Ablehnung der Nullhypothese: Man kann an ihnen ablesen, zu welchem Niveau der zugehörige Test die Nullhypothese gerade noch verworfen hätte. Diese letzte Interpretation birgt jedoch die Gefahr eines Missbrauchs insofern, als zunächst der Test durchgeführt, also der p-Wert berechnet werden kann und dann das Signifikanzniveau festgelegt wird und zwar gerade so, dass man H_0 noch annehmen oder ablehnen kann.

(2) ‚Signifikant' heisst ‚nicht zufallsbedingt'

Wird bei einem Hypothesentest H_0 abgelehnt, so sagt man: Die Abweichung von H_0 ist *signifikant*, d.h. man kann davon ausgehen, dass sie nicht zufallsbedingt ist. Das heisst aber noch lange nicht, dass der Unterschied von Bedeutung ist! (engl. ‚significant' = bedeutsam).

Beispiel 10

2500 Schüler aus der Stadt:	Durchschnitt von 26 P. in einem Test
2500 Schüler vom Lande:	Durchschnitt von 25 P. im selben Test

Der p-Wert für die Nullhypothese, dass tatsächlich ein Unterschied besteht, beträgt 5/10'000. Nur: Ist dieser Unterschied relevant!?

Bei einer grossen Stichprobe kann schon ein kleiner Unterschied signifikant sein.

(3) Unterschiede werden nicht erklärt

Ein Test stellt nur fest, dass ein Unterschied nicht zufällig ist; er erklärt den Unterschied nicht.

Beispiel 11

Jemand behauptet, mit parapsychologischen Kräften einen Würfel beeinflussen zu können. Tatsächlich würfelt er in einem Experiment so viele Sechsen, dass man mit einem Hypothesentest nachweisen kann, dass das wohl nicht zufällig ist. Als er aber Einsen würfeln soll, gibt es immer noch zu viele Sechsen – der Sechserüberschuss war also tatsächlich nicht zufällig, aber basierte keineswegs auf parapsychologischen Fähigkeiten, sondern auf einem gefälschten Würfel!
Der Test interpretiert das Resultat nicht. Er kontrolliert auch nicht das Design der Studie.

(4) Hypothesentests basieren auf Zufallsstichproben
All diese Methoden basieren auf der Annahme, dass wir eine Zufallsstichprobe betrachten, und nicht eine ‚praktische' Stichprobe wie ‚die ersten hundert Leute, die mir begegnen und bereit sind, meinen Fragebogen auszufüllen'.

(5) Gegenüberstellung Hypothesentest – Vertrauensintervall
Beim *Hypothesentest* ist der behauptete Wert des Parameters der Ausgangspunkt für die Bestimmung des Annahmebereichs; soll ein *Vertrauensintervall* bestimmt werden, so geht man vom Schätzwert für den betrachteten Parameter aus.

8.5 Lernziele für dieses Kapitel

- ☐ Ich kann an Beispielen erklären, was ein *Hypothesentest* ist.
- ☐ Ich kann *Nullhypothesen* und *Alternativhypothesen* aufstellen.
- ☐ Ich kann Tabelle 8.2.1 einsetzen, um Parametertests zu definieren.
- ☐ Ich kann die Quantiltabellen der Standardnormalverteilung, der Student-t-Verteilung und der Chi Quadrat Verteilung anwenden, um die kritischen Grenzen bei den zugehörigen Hypothesentests zu berechnen.
- ☐ Ich kann die Entscheidung begründen, weswegen Nullhypothesen angenommen oder abgelehnt werden.
- ☐ Ich kann Hypothesentests für die Gleichheit von unbekannten Mittelwerten aufstellen.
- ☐ Ich kann die Begriffe *abhängige* und *unabhängige* Stichproben an Beispielen erklären.
- ☐ Ich kann den p-Wert einer Nullhypothese bestimmen.
- ☐ Ich kann aufgrund des p-Wertes entscheiden, ob die Nullhypothese anzunehmen oder abzulehnen ist.