

Письменная работа №1

1. Упростите выражение и посчитайте его значение при $a = 9.3$, $b = 1.4$

$$\frac{(a+b)^2(a-b)^2(4a^2-b^2)}{(2a-b)(a^4-2a^2b^2+b^4)}$$

2. Доказать, что для любого натурального n и положительных x и y верно

$$2^{n-1} \cdot (x^n + y^n) \geq (x + y)^n$$

3. На стороне AB $\triangle ABC$ взята точка P , такая что $AP : PB = 2 : 1$, а на стороне AC середина – точка Q . Оказалось, что $CP = 2PQ$. Докажите, что $\angle ABC = 90^\circ$.
4. В лавке Чичикова по кругу расставлены коробочки, в каждой – мёртвые души (быть может, ноль). За один ход Чичиков может взять все души из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одной душе. Докажите, что если в каждом следующем ходу души берут из той коробочки, в которую попала последняя душа на предыдущем ходе, то когда-нибудь повторится начальное размещение душ.
5. В производстве горючего используется т.н. *октановое число* - это концентрация октана в данном горючем, выраженная в процентах. Сколько граммов бензина с октановым числом 98 можно получить из 196 граммов бензина с октановым числом 80?
6. Найдите остаток при делении на 5 числа $7^{(7^{(7^7)})}$
7. На шахматной доске 8×8 в один угол поставили коня, а клетку в противоположном углу вырезали. Может ли конь обойти всё оставшееся поле, побывав в каждой клетке ровно по одному разу?
8. Произведение двух положительных чисел больше их суммы. Докажите, что эта сумма больше 4.