

**Письменная работа №1**

1. Упростите выражение и посчитайте его значение при  $a = 9.3$ ,  $b = 1.4$

$$\frac{(a+b)^2(a-b)^2(4a^2-b^2)}{(2a-b)(a^4-2a^2b^2+b^4)}$$

2. Доказать, что для любого натурального  $n$  и положительных  $x$  и  $y$  верно

$$2^{n-1} \cdot (x^n + y^n) \geq (x + y)^n$$

3. На стороне  $AB$   $\triangle ABC$  взята точка  $P$ , такая что  $AP : PB = 2 : 1$ , а на стороне  $AC$  середина – точка  $Q$ . Оказалось, что  $CP = 2PQ$ . Докажите, что  $\angle ABC = 90^\circ$ .
4. В лавке Чичикова по кругу расставлены коробочки, в каждой – мёртвые души (быть может, ноль). За один ход Чичиков может взять все души из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одной душе. Докажите, что если в каждом следующем ходу души берут из той коробочки, в которую попала последняя душа на предыдущем ходе, то когда-нибудь повторится начальное размещение душ.
5. В производстве горючего используется т.н. *октановое число* - это концентрация октана в данном горючем, выраженная в процентах. Сколько граммов бензина с октановым числом 98 можно получить из 196 граммов бензина с октановым числом 80?
6. Найдите остаток при делении на 5 числа  $7^{(7^{(7^7)})}$
7. На шахматной доске  $8 \times 8$  в один угол поставили коня, а клетку в противоположном углу вырезали. Может ли конь обойти всё оставшееся поле, побывав в каждой клетке ровно по одному разу?
8. Произведение двух положительных чисел больше их суммы. Докажите, что эта сумма больше 4.