

Комбинаторика 3

1. Рассмотрим квадратную табличку. Изначально черепашка стоит в левом верхнем углу, с него и будем отсчитывать координаты.

(a, b) - клетка на пересечении a -й сверху строки и b -го слева столбца.

(a) Запишем в клетку (i, j) количество способов для черепашки добраться до этой клетки. Чему оно равно? Обозначим его $[i, j]$

(b) Заполним несколько диагоналей и покрутим листок в руках, ничего не напоминает?

(c) найдите значения сумм $\sum_{i=0}^k [i, k-i]$, $\sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot [i, k-i]$

2. Вам сказали купить 7 булок в магазине. Вы увидели, что в ассортименте есть три вида булок, причём каждого вида по 10 штук. Сколько различных наборов вы можете принести домой? А если вы решили ещё и купить хотя бы по одной булке каждого вида?

3. Сколькими способами можно составить колоду из n карточек, где на каждой карте написано число от 1 до m ? (Это обобщение предыдущей задачи)

↪ **Определение 1.** *Правильной скобочной последовательностью* длины $2n$ (сокращённо **ПСП**) называется последовательность из открывающих '(' и закрывающих ')' скобок, такая, что:

- В последовательности количество открывающих скобок равно количеству закрывающих
- На каждом префиксе открывающих скобок не меньше, чем закрывающих.

Это формальное определение соотносится с интуитивным - каждая открытая скобка будет закрыта, и каждая закрытая была открыта.

↪ **Определение 2.** n -м числом Каталана является количество ПСП длины $2n$. Обозначается C_n .

4. Сколько ПСП длины 2? длины 6? длины 8?

5. Выведите рекурсивную формулу для чисел Каталана. (Подсказка: надо отцепить некоторый префикс)

6. Выведите формулу для чисел Каталана через числа сочетаний (Которые C_n^k)

(a) Научитесь изображать скобочные последовательности длины $2n$, с n открывающими скобками, но не обязательно правильные, как пути из $(0, 0)$ в (n, n) на плоскости.

(b) Поймите, что отличает правильные последовательности от неправильных

(c) Примените силу симметрии и решите основную задачу.