Графы 1

△ **Определение I. Граф** – абстрактный математический объект, представляющий собой множество *«вершин»* и множество *«рёбер»*, каждое из которых соединяет пару вершин. Легко представлять граф на бумаге как точки и линии, соединяющие их. **Петля** – ребро, соединяющее вершину саму с собой. **Кратные рёбра** – рёбра, соединяющие одну и ту же пару вершин. Граф без петель и кратных рёбер называется **простым**.

1. Филч каждую ночь обходит коридоры Хогвартса так, что ни по какому из коридоров не проходит дважды. В эту ночь на перекрёстке перед спальней Гриффиндора он побывал 5 раз. Сколько коридоров ведут к спальне, если Филч:

   (a) не с неё начал и не на ней закончил;

   (b) с неё начал, но не на ней закончил;

   (c) с неё начал и на ней закончил?

2. Рон учится играть в шахматы на доске 3×3. Гермиона поставила в верхние углы доски два белых коня, а в нижние – два чёрных и спросила: «Можно ли сделать так, чтобы кони белого цвета стояли на одной диагонали, а чёрного – на другой?». Рон ответил на вопрос, а вы?

△ **Определение II. Степень** вершины v – число входящих-выходящих из неё рёбер (петли считают дважды).

3. В честь праздника Дамблдор провесил гирлянды между восемью башнями Хогвартса так, что от каждой идёт гирлянда ровно к трём другим. Сколько всего на это у него ушло гирлянд?

4. Гарри заметил, что Дамблдор забыл о девятой башне – Директорской. У Гарри есть запасные гирлянды, но сможет ли он перевесить гирлянды так, чтобы от каждой башни снова вело ровно три гирлянды?

△ **Определение III. Полный** граф – граф, в котором между каждой парой вершин есть ребро.

5. Ночью привидения замка Хогвартс обожают пожимать друг другу руки и делают это при первой возможности, но только один раз в сутки. В эту ночь Плакса Миртл насчитала n привидений под потолком своего туалета. Сколько рукопожатий ей пришлось пронаблюдать?

6. Докажите, что среди любых 6 Уизли найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых.

7. Профессор Снегг варит противоядие. Получить его можно из трёх разных искристых зелий одинакового цвета. Как назло, у профессора в кладовой только 17 не искристых зелий. Но как профессор он знает, какие получаются зелья при смешивании любых двух из 17. Для каждой пары – разный результат, но все получившиеся зелья – искристые красного, зелёного или жёлтого цвета. К сожалению, у профессора осталось время только на то, чтобы взять три зелья из 17. Удастся ли Снеггу приготовить противоядие?

△ **Определение IV. Ориентированный граф** – граф, на каждом ребре которого задано направление.

8. У Певерелла было 3 сына. Из его потомков 100 имело по 2 сына, два по одному сыну, остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у Певерелла? (Потомки могут быть только мужского пола).

9. В межшкольном турнире по квиддичу каждая команда сыграла с каждой 1 раз. Ничьих не было. Можно ли пронумеровать команды так, чтобы первая команда выиграла у второй, вторая – у третьей, и т. д.?

10. В лавке Олливандера по кругу расставлены коробочки, в каждой – волшебные палочки (быть может, ноль). За один ход мастер Олливандер может взять все палочки из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одной палочке.

    (a) Докажите, что если в каждом следующем ходу палочки берут из той коробочки, в которую попала последняя палочка на предыдущем ходе, то когда-нибудь повторится начальное размещение палочек.

    (b) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения палочек по коробочкам можно получить любое другое (можно брать из любой коробки).

Графы 2

△ **Определение V. Путь** – это последовательность вершин $v_1, v_2, \ldots, v_n$, таких, что между двумя соседними вершинами на пути есть ребро (в случае ориентированного графа – ребро в нужную сторону). Путь называется *вершинно-простым*, если все вершины на пути различны, кроме, возможно, v_1 и v_n. Путь называется *рёберно-простым*, если все рёбра на пути различны. Путь называется *циклом*, если первая и последняя вершины на пути совпадают. Путь называется *простым циклом*, если он цикл и он рёберно-простой.

11. Все знают, что в Запретный лес ходить нельзя, однако там откуда-то всё равно появляются тропы. Хагрид насчитал 49 тропинок, ведущих от Хогвартса, одну тропинку, выводящую к пещере Арагога, и по 4 или 6 тропинок на перекрёстках. Докажите, что Хагрид всегда может попасть по тропам от Хогвартса к Арагогу.

△ **Определение VI. Связный граф** – граф, в котором между любой парой вершин есть путь.

12. Арахниды широко распространены по территории Запретного леса, у каждой – своя ловчая паутина, которую они не любят покидать. Пауки придумали интересный способ общения: от каждой такой паутины отходит чётное число переговорных нитей к другим паутинам (не обязательно к различным), через эти нити сигнал передаётся от паутины к паутине, пока не достигнет места назначения. Сейчас с любой паутины можно передать сообщение на любую другую. Докажите, что одна оборванная паутинка не помешает паукам общаться.

△ **Определение VII. Компонента связности** графа – множество вершин, достижимых из вершины v. Граф разбивается на непересекающиеся компоненты связности, в частности, связный граф состоит из ровно одной компоненты.

13. На первом уроке вождения метлы было n учеников. К концу урока оказалось, что каждый ученик столкнулся не меньше, чем с $\frac{n-1}{2}$ другими, причём сталкивались только ученики с одного факультета. Докажите, что в тот раз мадам Трюк вела занятие только у одного факультета.

14. В Выручай-комнате есть n перекрёстков, а сколько там коридоров – неизвестно. Попав в Выручай-комнату, Драко Малфой насчитал $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ различных коридоров. Докажите, что он побывал на всех перекрёстках.

15. В каминной сети из одного камина можно попасть в другой только тогда, когда они напрямую соединены связью, либо существует последовательность связанных каминов, ведущих от первого камина ко второму. Долорес Амбридж пригрозила закрыть два камина, но каких – не сказала. К счастью, сеть устроена так, что при закрытии любых двух каминов всё равно из любого камина можно добраться в любой другой. Какое минимальное количество связей должно быть в такой сети из $2n$ каминов?

16. Днём из любого перекрёстка Хогвартса можно попасть в любой другой меньше, чем за 5 минут. При этом в школе нет коридоров, по которым нужно идти 5 и больше минут. Ночью же в одном из коридоров спит дух Пивз, который перебудит весь замок, если кого-нибудь услышит. Докажите, что любой переход, который можно совершить, не разбудив духа, можно совершить за 15 минут.

17. Про каждую пару из n учеников Хогвартса можно с уверенностью сказать, друзья они или враги. Более того, после исследований Гермиона смогла с уверенностью заявить, что выполняются два правила: «Друг моего друга – мой друг» и «Враг моего друга – мой враг» Разъехавшись по домам на Рождество, ученики заскучали и отправили сов всем своим друзьям. Известно, что Гарри и Драко – враги.

    (a) Какое наименьшее число писем могло быть отправлено?

    (b) А наибольшее?

18. На Гремучей иве есть несколько узлов. Некоторые узлы соединены ветками, причём между каждыми двумя узлами существует единственный несамопересекающийся путь по веткам. Известно, что на иве ровно 100 узла, из которых выходит по одной ветке. Докажите, что можно вырастить 50 новых веток так, что после этого даже если одна из веток сломается, можно будет из каждого узла попасть в любой другой.

Графы 3

△ **Определение VIII. Дерево** – связный граф без циклов.

19. Приведите пример дерева из книг Джоан Роулинг «Гарри Поттер и . . . ».

20. В Хогсмиде от каждой площади ведёт ровно один простой путь к другой. Докажите, что это эквивалентно утверждению «Хогсмид – дерево».

21. Сколько в Хогсмиде улиц, если площадей – 7?

22. Каждая дорожка в ботаническом саду Хогвартса соединяет две теплицы. На каждой дорожке растёт по 8 мандрагор, а около каждой теплицы – по 3. Сколько мандрагор растёт в ботаническом саду из 17 теплиц, если сад – дерево?

△ **Определение IX. Висячая вершина** или **лист** – вершина степени 1.

23. Сказания кентавров утверждают, что даже в самую лютую зиму на каждом дереве, у которого есть хотя бы одно ребро, сохраняется хотя бы два листа. Докажите, что сказания не врут.

24. Докажите, что из связного графа можно удалить несколько рёбер так, чтобы получилось дерево.

△ **Определение X. Остовное дерево** – дерево из предыдущей задачи.

25. Докажите, что связный граф является деревом если и только если число вершин в нём на 1 больше числа рёбер.

26. Тролль зашёл в Хогвартс поспать. Прогнать его трудно, поэтому преподаватели решили дать ему выспаться одном из перекрёстков до вечера. Смогут ли они выбрать перекрёсток так, чтобы ученики могли свободно перемещаться по остальной части замка? (До прихода тролля из любой точки замка можно было попасть в любую другую)

27. Невилл и Гарри поставили на каждый угол клеток поля $m \times n$ по шоколадному осьминогу и заставили соседних по стороне взяться за щупальца. За ход можно съесть одну такую связь. Тот, кто не сможет съесть связь, не развалив поле на две части, проиграл. Первым ходит Невилл. Кто выиграет при правильной игре?

28. В дереве есть 8 вершин степени три, 10 вершин степени 4 и несколько висячих вершин. Других вершин нет. Найти число висячих вершин.

29. В подземельях Хогвартса каждый ход соединяет два карцера, от любого карцера можно дойти до любого. Филч насчитал ровно 20 больших карцера (туда ведут три и больше ходов) и ровно 21 малый (туда ведёт один ход). Также, возможно, есть какие-то ещё карцеры, о которых Филч ничего не сказал. Докажите, что можно выбрать несколько карцеров и посадить в них по ученику так, что у каждого ученика будет ровно два соседа.

30. Можно ли провести в каждом квадратике на поверхности кубика Рубика диагональ так, чтобы получился вершинно-простой путь?

31. В подземельях Гринготтса 100 ячеек и 199 скоростных узкоколеек, соединяющих пары ячеек. Докажите, что можно закрыть на реконструкцию какой-нибудь кольцевой маршрут так, что ни одна ячейка не останется без обслуживания.

32. Управляя ладьёй, Гарри за 64 хода обошёл все поля шахматной доски 8×8 и вернулся на исходное поле. Докажите, что число ходов по вертикали не равно числу ходов по горизонтали.