Индукция 1

Во всех задачах данного листка присутствует, пусть иногда и не совсем в явном виде, некоторый пошаговый процесс. В ходе решения задачи необходимо выделить в таком процессе нечто, не меняющееся на протяжении всего процесса. Доказательство неизменности этого в задачах данного листка предлагается проводить по следующему алгоритму:

1. установить, что нечто верно в начале процесса;
2. объяснить, почему наличие этого в некоторый момент влечет за собой наличие его и после очередного шага пошагового процесса.

Это позволяет утверждать, что нечто сохраняется на протяжении всего процесса.

1. Придумайте 10 различных натуральных чисел, чтобы каждые два имели общий делитель, больший 1, но при этом чтобы НОД всех чисел был равен 1.
2. Докажите, что уголок из трех клеток можно разрезать на 1024 одинаковых уголка такой же формы, но меньшего размера.
3. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество квадратов, начиная с шести.
4. Докажите, что если после очередной денежной реформы в России будут введены в обращение монеты достоинством в 5 и 26 копеек, то пользуясь только ими можно будет уплатить без сдачи любую сумму, начиная с 1 рубля.
5. Докажите, что прямоугольник, площадь которого делится на 8, а каждая из сторон не менее 2, можно разрезать на фигурки из четырех клеток в форме буквы «Г».
6. На столе стоят тридцать два стакана с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Как с помощью таких операций добиться того, чтобы во всех стаканах воды стало поровну?
7. В девять одинаковых мензурок налито до краев девять разных жидкостей (в каждую мензурку — своя особая жидкость), кроме того, имеется одна пустая мензурка. Можно ли составить одинаковые смеси этих жидкостей в каждой из девяти мензурок, оставив при этом десятую мензурку пустой? Выливать жидкости не разрешается, из мензурки можно отмерить и отлить любую часть имеющейся там жидкости.
8. Известно, что в туристическом клубе каждый участник знаком не более чем с пятью другими. Докажите, что можно разделить участников на не более чем шесть групп для похода выходного дня таким образом, что ни в какую группу не попадут двое знакомых.
9. Торт разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдется хотя бы один чистый кусок.
10. Маленькому Коле подарили ножницы. Он отрезал от занавески треугольный кусок, после чего принялся резать его на части: Коля выбирает какой-нибудь из уже имеющихся кусочков занавески, после чего разрезает его прямолинейным разрезом на две части. Докажите, что сколько бы Коля так не работал, среди получившихся кусочков занавески всегда можно будет найти треугольник. Пусть после нескольких таких разрезаний получилось пять треугольных кусков занавески. Может ли спустя какое-то время их оказаться только три?

Индукция 2

11. По кругу написано 10 чисел: 5 единиц и 5 минус единиц. Каждую минуту между любыми двумя соседними числами записывают их сумму, после чего имевшиеся до этого момента числа стирают. Чему будет равна сумма чисел, которые будут написаны спустя один час?

12. В двух сосудах находится поровну воды. Из первого сосуда переливают половину имеющейся в нем воды во второй, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и т.д. В каком сосуде окажется больше воды после 100 переливаний: в первом или во втором?

13. На доске написаны два числа 1, 1. Затем между ними вписывают их сумму; получается 1, 2, 1. Затем между каждыми двумя снова вписывают их сумму: 1, 3, 2, 3, 1. Такое действие выполняют ещё 10 раз.
    (a) Сколько чисел будет на доске?
    (b) Какова будет их сумма?

14. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым другим одну партию. Докажите, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему.

15. Докажите, что квадрат $2n \times 2n$ без одной клетки при любом натуральном $n > 2$ можно разрезать на «уголки» из трех клеток.

16. Перед шеренгой новобранцев стоит капрал и командует: «Нале-ВО!» По этой команде некоторые солдаты поворачиваются налево, остальные — направо. После этого через каждую секунду каждые два солдата, оказавшиеся лицом друг к другу, поворачиваются друг к другу затылками. Докажите, что через некоторое время движение прекратится.

17. *(Неравенство Бернулли)* Докажите, что для любого натурального n и $\alpha \geqslant -1$ выполнено неравенство $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n$.

18. Докажите, что $1 + (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n) = 2^{n+1}$

19. Докажите, что
    (a) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$
    (b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

20. Докажите, что $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$

Привет, сегодняшняя тема - индукция.

Метод математической индукции применяется для доказательства утверждений в общем виде, чтобы не проверять каждый частный случай. Например, неравенство, которое часто применяется в доказательстве разных вещей, называется Неравенство Бернулли, вот оно:

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha, \quad \alpha \geqslant -1$$

Мы можем легко проверить для каких-нибудь фиксированных маленьких n и α, но так не хочется проверять каждый раз это утверждение, которое вроде бы всегда верно.

С другой стороны, непонятно, как его доказывать. С положительными числами ещё можно сказать, что там скобки раскрываются, как надо, и все слагаемые положительные. Но для отрицательных α ничего по-прежнему непонятно. В дальнейшем мы не будем писать $\alpha \geqslant -1$, а запомним это.

Заведём последовательность вспомогательных утверждений: A_i - неравенство верно, если вместо n подставить i. Чтобы доказать неравенство, осталось лишь показать, что все вспомогательные утверждения верны. Их, конечно, многовато, чтобы проверять каждое. Проверим первое из них - $n=1$.

$$(1+\alpha)^1 = 1+\alpha$$

Неравенство выполнено для всех α, ничего не скажешь.

Докажем теперь, что из каждого утверждения A_i следует следующее в цепочке - A_{i+1}. В этом и заключается основная идея доказательств методом мат. индукции - доказательство утверждений через предыдущие. Ведь если мы докажем это, то все утверждения окажутся верны: A_1 мы уже рассмотрели (и это важная часть), $A_1 \implies A_2$, значит, и A_2 верно, $A_2 \implies A_3$, и т. д.

Важно, что мы доказываем для непонятного i, ведь так мы докажем много "стрелочек" в следующие утверждения, а не одну, как если бы мы зафиксировали i.

Итак, доказательство того, что $A_i \implies A_{i+1}$. Пусть утверждение A_i верно. Тогда верно, что

$$(1+\alpha)^i \geqslant 1+i\cdot\alpha$$

Мы хотим доказать следующее *(написать справа на доске)*

$$(1+\alpha)^{i+1} \geqslant 1+(i+1)\alpha$$

Умножим обе части на $(1+\alpha)$. Это число неотрицательно из-за нашего ограничения на α, вот мы и можем умножать.

$$(1+\alpha)^{i+1} \geqslant (1+i\alpha)\cdot(1+\alpha)$$

Слева уже то, что мы хотим. Раскроем скобки в правой части:

$$(1+i\alpha)\cdot(1+\alpha) = (1+i\alpha+\alpha+i\alpha^2) \xrightarrow{\text{Квадрат всегда неотрицательный, можем убрать и поставить нужный знак}} \geqslant 1+(i+1)\alpha$$

Что получаем:

$$(1+\alpha)^{i+1} \geqslant (1+i\alpha)\cdot(1+\alpha) \geqslant 1+(i+1)\alpha$$

Убираем центральную часть и получаем, что A_{i+1} верно.

Мы доказали не то, что для любого i A_{i+1} верно, не совсем. Мы доказали, что если A_i верно, то и A_{i+1} тоже верно. Но раньше всего этого мы доказывали очень простое утверждение, частный случай - про $n=1$. Теперь мы можем быть уверены, что неравенство Бернулли верно для любого натурального n. (порисовать стрелочки).

Немного терминов, облегчающих жизнь всем, кто их использует - доказательство по индукции состоит из двух частей: База индукции - доказательство первого утверждения, из которого потом будет расти цепочка стрелочек, и Шаг индукции - Доказательство того, что мы имеем право проводить стрелочки.

При доказательстве шага индукции мы предполагаем, что утверждения для меньших i верны - это называется предположением индукции.

Нарисовать на доске, где база, где шаг, где пользуешься предположением.