

Письменная работа №1

1. Упростите выражение и посчитайте его значение при $a = 9.3, b = 1.4$

$$\frac{(a+b)^2(a-b)^2(4a^2-b^2)}{(2a-b)(a^4-2a^2b^2+b^4)}$$

2. Доказать, что для любого натурального n верно

$$2^{n-1} \cdot (x^n + y^n) \geq (x + y)^n$$

3. На стороне AB $\triangle ABC$ взята точка P такая, что $AP : PB = 2 : 1$, а на стороне AC середина - точка Q . Оказалось, что $CP = 2PQ$. Найдите угол $\angle ABC$.
4. На первом этапе соревнований по бегу состоялись парные забеги, причём каждый бегун бежал с каждым ровно один раз. В каждом забеге кто-то выигрывал (ничьих не было). Теперь букмекеры анализируют эти данные, чтобы заработать кучу денег: считается, что бегун A *может обогнать* бегуна B , если выполнено хотя бы одно из условий:
- В забеге этих двух бегунов победил бегун A .
 - Есть такой бегун C , что в забеге бегунов A и C победил A , а в забеге бегунов C и B победил C

Докажите, что найдётся бегун, который *может обогнать* любого другого бегуна.

5. В производстве горючего используется т.н. *октановое число* - это концентрация октана в данном горючем, выраженная в процентах. Сколько граммов бензина с октановым числом 98 можно получить из 196 граммов бензина с октановым числом 80?
6. Найдите остаток при делении на 5 числа $7^{(7^{(7^7)})}$
7. Найдите количество расстановок двух ладей одного цвета, не бьющих друг друга. (Если при повороте одной позиции получится другая, считать их одинаковыми)
8. Произведение двух положительных чисел больше их суммы. Докажите, что эта сумма больше 4.