Informe: Solución de Ecuaciones No Lineales

Dervis Martínez
C.I. 31456326

Mayo 2025

1. Introducción

Este informe presenta la implementación y análisis de diversos métodos numéricos para la solución de ecuaciones no lineales. Se abordan cuatro problemas principales utilizando principalmente el método de Newton, así como variantes y otros métodos como el de la secante y falsa posición.

2. Problema 1: Método de Newton para Función Exponencial

2.1. Formulación del Problema

Se busca encontrar las raíces de la función:

$$f(t) = 1 - e^{-(8t^2-32t+27{,}5)/9} - e^{-(5t^2-43t+92{,}25)/6}$$

Utilizando los estimados iniciales: $t_0 = 1{,}85, 2{,}00, 2{,}10, 2{,}15, 2{,}20, 2{,}25$.

2.2. Implementación del Método de Newton

2.2.1. Derivada Analítica

La derivada de la función es:

$$f'(t) = -\left(\frac{32}{9} - \frac{16t}{9}\right) e^{-(8t^2-32t+27{,}5)/9} - \left(\frac{43}{6} - \frac{5t}{3}\right) e^{-(5t^2-43t+92{,}25)/6}$$

2.2.2. Algoritmo Implementado

```
def metodo_newton(f, df, x0, tol=1e-10, max_iter=100):
    x = x0
    for i in range(max_iter):
        fx = f(x)
        dfx = df(x)
        if abs(dfx) < 1e-15:
            break
        x_new = x - fx / dfx
        if abs(x_new - x) < tol:
            break
        x = x_new
    return x, i+1
```

2.3. Resultados Obtenidos

Cuadro 1: Resultados del Método de Newton para diferentes estimados iniciales

Estimado Inicial	Raíz Encontrada	Iteraciones	Comportamiento
1.85	1.249667	8	Convergencia estable
2.00	-11.704604	2	Divergencia aparente
2.10	4.517048	7	Convergencia oscilatoria
2.15	3.980370	5	Convergencia rápida
2.20	4.517048	10	Convergencia lenta
2.25	2.905457	9	Convergencia estable

2.4. Análisis Detallado de los Resultados

2.4.1. Caso $t_0 = 1{,}85$

- **Comportamiento**: Convergencia rápida y estable
- **Explicación**: La función tiene buen comportamiento en esta región, la derivada no es cercana a cero y la curvatura es favorable
- **Iteraciones**: 8 iteraciones para alcanzar tolerancia 10^{-10}

2.4.2. Caso $t_0 = 2{,}00$

- **Comportamiento**: Divergencia aparente
- **Explicación**: En $t = 2{,}00$, la derivada $f'(t)$ es muy pequeña, causando que el término $f(x)/f'(x)$ sea muy grande
- **Resultado**: El método da un paso muy grande a $t = -11{,}704604$, donde $f(t) \approx 1{,}0$ (no es raíz)
- **Análisis**: Aunque técnicamente converge en 2 iteraciones, no encuentra una raíz verdadera

2.4.3. Caso $t_0 = 2{,}10$

- **Comportamiento**: Convergencia oscilatoria inicial
- **Explicación**: El punto inicial está en una región de alta curvatura
- **Trayectoria**: $2{,}10 \rightarrow 5{,}02 \rightarrow 4{,}61 \rightarrow 4{,}53 \rightarrow 4{,}52$
- **Raíz final**: 4.517048

2.4.4. Caso $t_0 = 2{,}15$

- **Comportamiento**: Convergencia más rápida
- **Explicación**: El estimado inicial está bien posicionado para la raíz en 3.980370
- **Eficiencia**: Solo 5 iteraciones necesarias

2.4.5. Caso $t_0 = 2{,}20$

- **Comportamiento**: Camino tortuoso pero convergente
- **Trayectoria compleja**: Múltiples oscilaciones antes de estabilizarse
- **Raíz final**: 4.517048 (misma que $t_0 = 2{,}10$)

2.4.6. Caso $t_0 = 2{,}25$

- **Comportamiento**: Convergencia a tercera raíz diferente
- **Explicación**: Demuestra que la función tiene al menos tres raíces reales
- **Raíz final**: 2.905457

2.5. Conclusión del Problema 1

El método de Newton muestra alta sensibilidad al valor inicial debido a la naturaleza de la función que tiene múltiples raíces y regiones donde la derivada es cercana a cero.

3. Problema 2: Método de Newton para Polinomio Cúbico

3.1. Formulación del Problema

Dado el polinomio:

$$p(x) = x^3 + 94x^2 - 389x + 294$$

con raíces conocidas: $1, 3, -98$. Se utiliza $x_0 = 2$ como estimado inicial.

3.2. Implementación y Resultados

3.2.1. Derivada del Polinomio

$$p'(x) = 3x^2 + 188x - 389$$

3.2.2. Resultado Obtenido

- **Raíz encontrada**: -98.000000
- **Iteraciones**: 2
- **Convergencia**: Extremadamente rápida

3.3. Análisis del Comportamiento

3.3.1. ¿Por qué converge a -98?

- Aunque $x_0 = 2$ está más cerca geométricamente de $x = 1$ y $x = 3$, la dinámica del método lo lleva a $x = -98$
- **Explicación**: La derivada en $x = 2$ es:

$$p'(2) = 3(4) + 188(2) - 389 = 12 + 376 - 389 = -1$$

- El término $p(2)/p'(2) = (-100)/(-1) = 100$, dando:

$$x_1 = 2 - (-100)/(-1) = 2 - 100 = -98$$

- En $x = -98$, $p(-98) = 0$, por lo que converge inmediatamente

3.3.2. Lección Importante

La proximidad geométrica no siempre determina la convergencia en el método de Newton. La dirección del paso depende críticamente del valor y signo de la derivada.

4. Problema 3: Método Modificado vs Newton Tradicional

4.1. Formulación del Problema

Resolver la ecuación:

$$x^3 + 3x = 5x^2 + 7 \Rightarrow f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 7$$

Utilizando el método modificado con:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)}$$

4.2. Implementación de Métodos

4.2.1. Método de Newton Tradicional

```
def f(x):
    return x**3 - 5*x**2 + 3*x - 7

def df(x):
    return 3*x**2 - 10*x + 3
```

4.2.2. Método Modificado

```
def metodo_modificado(f, x0, tol=1e-10, max_iter=100):
    x = x0
    for i in range(max_iter):
        fx = f(x)
        gx = (f(x + fx) - fx) / fx
        x_new = x - fx / gx
        if abs(x_new - x) < tol:
            break
        x = x_new
    return x, i+1
```

4.3. Resultados Comparativos

Cuadro 2: Comparación entre Método Modificado y Newton Tradicional

Método	Raíz Encontrada	Iteraciones	Eficiencia Relativa
Newton Tradicional	4.6785735104	6	100 %
Método Modificado	4.6785735104	11	54.5 %

4.4. Análisis de Convergencia

4.4.1. Trayectoria del Método Modificado

- **Iteración 0**: $x = 4{,}000000$, $f(x) = -11{,}000000$
- **Iteración 1**: $x = 4{,}200000$, $f(x) = -8{,}512000$

- **Iteración 2**: $x = 4{,}592567$, $f(x) = -1{,}815998$
- **Iteración 10**: $x = 4{,}678574$, $f(x) = 2{,}16 \times 10^{-12}$

4.4.2. Trayectoria del Método Newton

- **Iteración 0**: $x = 4{,}000000$, $f(x) = -11{,}000000$
- **Iteración 1**: $x = 5{,}000000$, $f(x) = 8{,}000000$
- **Iteración 2**: $x = 4{,}714286$, $f(x) = 0{,}793210$
- **Iteración 5**: $x = 4{,}678574$, $f(x) = 1{,}01 \times 10^{-13}$

4.5. Análisis Teórico

4.5.1. Ventajas del Método Modificado

- No requiere el cálculo analítico de la derivada
- Útil cuando la derivada es difícil de calcular
- Implementación más simple en algunos casos

4.5.2. Desventajas del Método Modificado

- **Convergencia más lenta**: Lineal vs Cuadrática
- **Aproximación menos precisa**: Usa diferencia finita con paso $f(x)$
- **Inestabilidad numérica**: Cuando $f(x)$ es muy pequeño

4.5.3. Justificación Matemática

El método modificado aproxima la derivada como:

$$g(x) \approx f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)f(x) + O(f(x)^2)$$

Esta aproximación introduce error, reduciendo la tasa de convergencia de cuadrática a lineal.

5. Problema 4: Comparación de Métodos

5.1. Formulación del Problema

Encontrar la raíz de:

$$f(x) = 2x^3 - \frac{34}{7}x^2 + \frac{209}{49}x - \frac{173}{343}$$

en el intervalo $[-1, 1]$ usando:

- Método de la Secante
- Método de Falsa Posición
- Método de Newton (para comparación)

5.2. Implementación de Métodos

5.2.1. Método de la Secante

```
def metodo_secante(f, x0, x1, tol=1e-10, max_iter=100):
    for i in range(max_iter):
        fx0, fx1 = f(x0), f(x1)
        x2 = x1 - fx1 * (x1 - x0) / (fx1 - fx0)
        if abs(x2 - x1) < tol:
            break
        x0, x1 = x1, x2
    return x1, i+1
```

5.2.2. Método de Falsa Posición

```
def metodo_falsa_posicion(f, a, b, tol=1e-10, max_iter=100):
    fa, fb = f(a), f(b)
    for i in range(max_iter):
        c = (a * fb - b * fa) / (fb - fa)
        fc = f(c)
        if abs(fc) < tol:
            break
        if fa * fc < 0:
            b, fb = c, fc
```

```
        else:
            a, fa = c, fc
    return c, i+1
```

5.3. Resultados Comparativos

Cuadro 3: Eficiencia de Diferentes Métodos Numéricos

Método	Iteraciones	Tiempo Relativo
Newton ($x_0 = 0$)	5	1.0×
Newton ($x_0 = -1$)	7	1.4×
Newton ($x_0 = 1$)	8	1.6×
Secante	18	3.6×
Falsa Posición	74	14.8×

5.4. Análisis Detallado por Método

5.4.1. Método de Newton

- **Convergencia más rápida** cuando el estimado inicial es bueno
- **Sensibilidad al punto inicial**: $x_0 = 0$ es óptimo para esta función
- **Tasa cuadrática** de convergencia cerca de la raíz

5.4.2. Método de la Secante

- **Rendimiento aceptable** (18 iteraciones)
- **No requiere derivada** analítica
- **Convergencia superlineal** (orden aproximadamente 1.618)
- **Comportamiento**: Oscilaciones iniciales pero luego estabiliza

5.4.3. Método de Falsa Posición

- **Extremadamente lento** (74 iteraciones) - PROBLEMA
- **Causa**: Uno de los extremos se .^{es}tanca"
- **Convergencia lineal** con constante cercana a 1
- **Ventaja**: Garantiza convergencia si $f(a)f(b) < 0$

5.5. Explicación del Comportamiento de Falsa Posición

5.5.1. Problema del Estancamiento

- En falsa posición, un extremo puede permanecer fijo por muchas iteraciones
- Esto crea intervalos desbalanceados que ralentizan la convergencia
- Ejemplo: Si $f(a)$ es muy grande en magnitud, el punto c se acerca muy lentamente a la raíz

5.5.2. Comparación con Bisección

- **Bisección**: Convergencia garantizada, orden 1, constante 0.5
- **Falsa Posición**: Convergencia garantizada, orden 1, constante aproximadamente 1
- **Secante**: Convergencia no garantizada, orden aproximadamente 1.618
- **Newton**: Convergencia no garantizada, orden 2

6. Conclusiones Generales

6.1. Lecciones Aprendidas

6.1.1. Sobre el Método de Newton

- Alta eficiencia pero alta sensibilidad al punto inicial

- Requiere cálculo de derivada analítica
- Puede divergir o converger a raíces no esperadas
- Crucial: estudio preliminar de la función

6.1.2. Sobre Métodos sin Derivada

- **Secante**: Buen compromiso entre robustez y velocidad
- **Falsa Posición**: Demasiado lento para uso general
- **Método modificado**: Interesante pero menos eficiente que Newton

6.1.3. Recomendaciones Prácticas

1. **Siempre graficar** la función antes de aplicar métodos numéricos
2. **Probar múltiples puntos iniciales** con el método de Newton
3. **Usar método de la secante** cuando no se dispone de la derivada analítica
4. **Evitar falsa posición** excepto para problemas muy específicos
5. **Implementar criterios de parada** robustos (tolerancia absoluta y relativa)

6.2. Perspectivas Futuras

Para mejorar los resultados presentados, se podrían considerar:

- Métodos híbridos (ej: bisección inicial + Newton)
- Técnicas de aceleración de convergencia
- Análisis de estabilidad numérica más detallado
- Implementación de métodos de orden superior