Отчет по лабораторной работе №3

Построение моделей Ланчестера

Евсеева Дарья Олеговна

25 февраля, 2022

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

Цель работы

Целью данной работы является построение моделей Ланчестера — простейших моделей боевых действий — в среде OpenModelica.

Задание

Даны условия задачи (вариант №21):

Между страной X и страной Y идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью 20 500 человек, а в распоряжении страны Y армия численностью в 21 500 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывные функции.

Необходимо построить графики изменения численности войск армии X и армии Y для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками

$$\frac{dx}{dt} = -0.21x(t) - 0.74y(t) + sin(t) + 0.5$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.68x(t) - 0.19y(t) + cos(t) + 0.5$$

2. Модель ведения боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\frac{dx}{dt} = -0.09x(t) - 0.79y(t) + sin(2t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.62x(t)y(t) - 0.11y(t) + cos(2t)$$

Теоретическое введение

OpenModelica — свободное открытое программное обеспечение для моделирования, симуляции, оптимизации и анализа сложных динамических систем. Основано на языке Modelica.

Рассмотрим некоторые простейшие модели боевых действий — модели Ланчестера. В противоборстве могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

Рассмотрим три случая ведения боевых действий:

1. Боевые действия между регулярными войсками
2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов
3. Боевые действия между партизанскими отрядами

В первом случае численность регулярных войск определяется тремя факторами:

- скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);
- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связанно с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$, члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя.

Коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ указывают на эффективность боевых действий со стороны ó и õ соответственно, $a(t)$, $h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции $P(t)$, $Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам X и Y в течение одного дня.

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска, в отличие от постоянной армии, менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что темп потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан.

В результате модель принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

В этой системе все величины имеют тот же смысл, что и в системе в первом случае.

Модель ведения боевых действий между партизанскими отрядами с учетом предположений, сделанных в предыдущем случаем, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)x(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -h(t)y(t) - c(t)x(t)y(t) + Q(t)$$

Выполнение лабораторной работы

1. Написание заготовки для построения моделей

Напишем основу программы для построения требуемых моделей. Работу будем выполнять в среде OpenModelica.

Определим необходимые переменные и параметры и обозначим начальные условия.

```
model lab3case1
  parameter Real a; // степень влияния различных факторов на потери x
  parameter Real b; // эффективность боевых действий со стороны y
  parameter Real c; // эффективность боевых действий со стороны x
  parameter Real h; // степень влияния различных факторов на потери y

  parameter Real x0;  // численность армии x в нач. момент времени
  parameter Real y0;  // численность армии y в нач. момент времени

  Real x;
  Real y;

  // возможность подхода подкрепления к войскам в течение дня:
  // для войск x:
  // для войск y:

initial equation
  x = x0;
  y = y0;

equation

end lab3case1;
```

Рис. 0.1: Основа программы для построения моделей

2. Построение модели боевых действий между регулярными войсками

Дополним код заготовки программы в соответствии с данными задачи для того, чтобы построить модель боевых действий между регулярными войсками.

Зададим уравнения и значения для коэффициентов и начальных данных.

```
model lab3case1
  parameter Real a = 0.21; // степень влияния различных факторов на потери x
  parameter Real b = 0.74; // эффективность боевых действий со стороны y
  parameter Real c = 0.68; // эффективность боевых действий со стороны x
  parameter Real h = 0.19; // степень влияния различных факторов на потери y

  parameter Real x0 = 20500;  // численность армии x в нач. момент времени
  parameter Real y0 = 21500;  // численность армии y в нач. момент времени

  Real x;
  Real y;

  // возможность подхода подкрепления к войскам в течение дня:
  // для войск x: sin(time) + 0.5
  // для войск y: cos(time) + 0.5

initial equation
  x = x0;
  y = y0;

equation
  der(x) = -a*x -b*y + sin(time) + 0.5;
  der(y) = -c*x -h*y + cos(time) + 0.5;

end lab3case1;
```

Рис. 0.2: Программа для первой битвы

Запустим симуляцию и отобразим на графике значения переменных x и y.

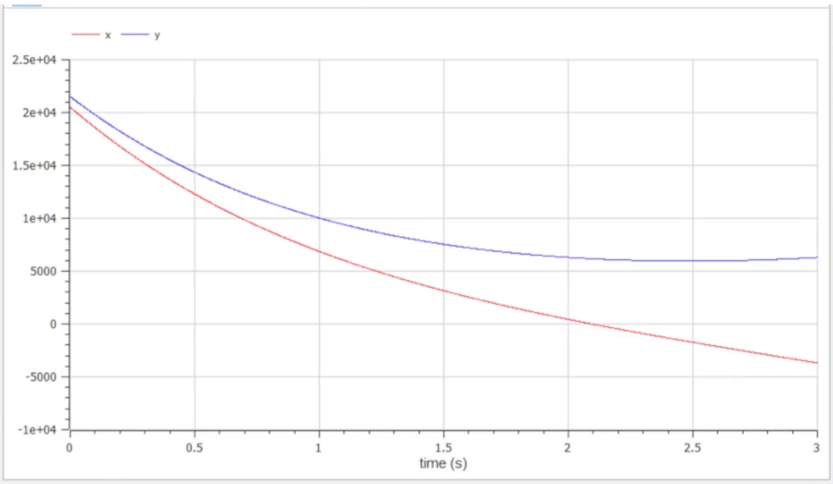

Рис. 0.3: График с результатами первой битвы

Из графика можно видеть, что победителем битвы станет армия y.

Приблизим часть графика, в которой численность армии x достигает 0, и посмотрим на примерное значение численности армии победителя y.

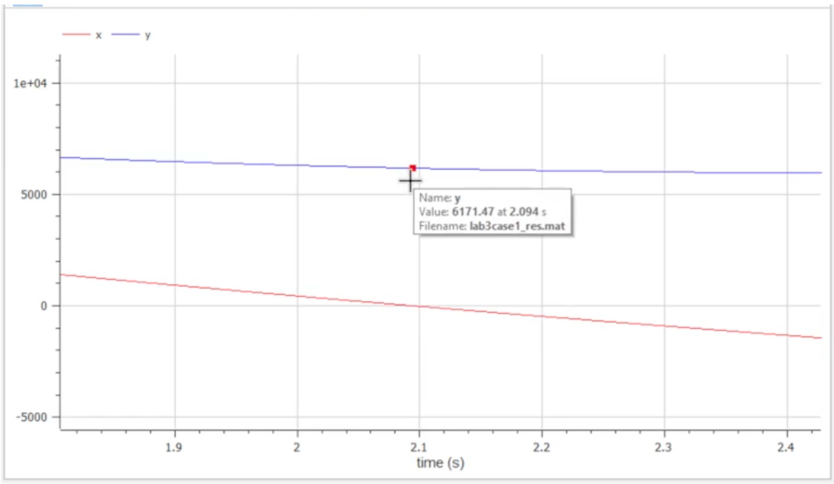

Рис. 0.4: Численность армии победителя первой битвы

3. Построение модели боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

Теперь дополним код заготовки программы в соответствии с данными задачи для того, чтобы построить модель боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов.

Зададим уравнения и значения для коэффициентов и начальных данных.

```
model lab3case2
  parameter Real a = 0.09; // степень влияния различных факторов на потери x
  parameter Real b = 0.79; // эффективность боевых действий со стороны y
  parameter Real c = 0.62; // эффективность боевых действий со стороны x
  parameter Real h = 0.11; // степень влияния различных факторов на потери y

  parameter Real x0 = 20500;  // численность армии x в нач. момент времени
  parameter Real y0 = 21500;  // численность армии y в нач. момент времени

  Real x;
  Real y;

  // возможность подхода подкрепления к войскам в течение дня:
  // для войск x: sin(2 * time)
  // для войск y: cos(2 * time)

initial equation
  x = x0;
  y = y0;

equation
  der(x) = -a*x -b*y + sin(2 * time);
  der(y) = -c*x*y -h*y + cos(2 * time);

end lab3case2;
```

Рис. 0.5: Программа для второй битвы

Запустим симуляцию и отобразим на графике значения переменных x и y.

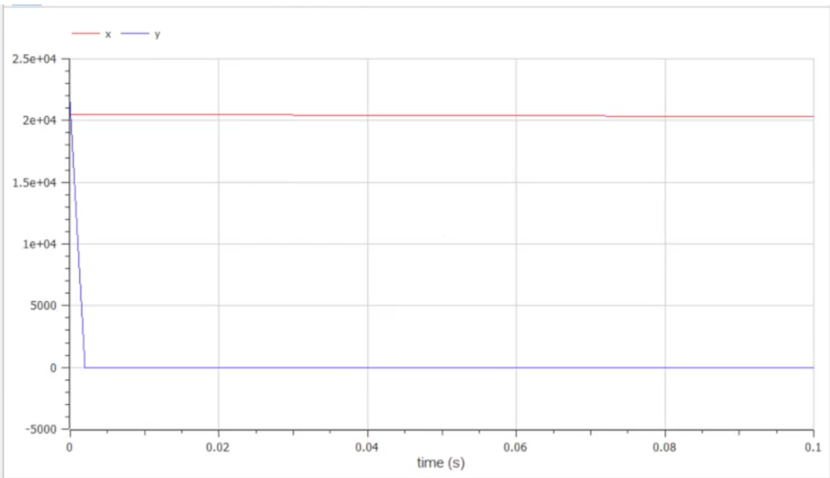

Рис. 0.6: График с результатами второй битвы

Из графика можно видеть, что победителем битвы станет армия x.

Приблизим часть графика, в которой численность армии y достигает 0, и посмотрим на примерное значение численности армии победителя x.

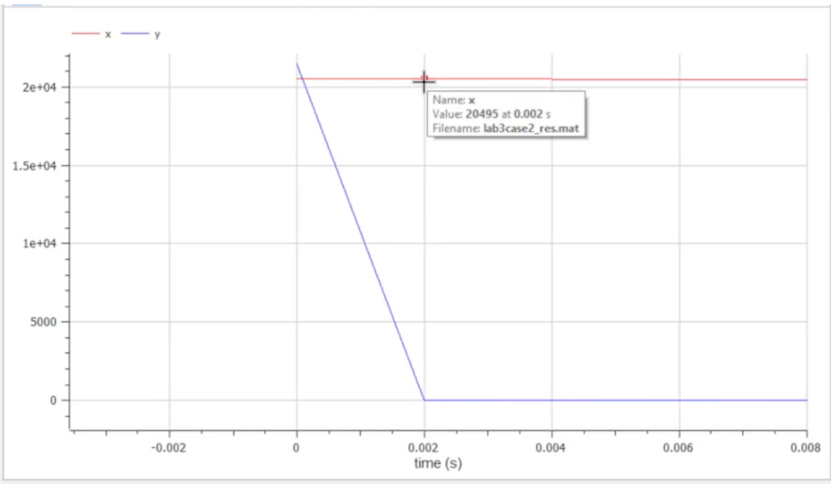

Рис. 0.7: Численность армии победителя второй битвы

Выводы

В результате проделанной работы мы научились строить математические модели Ланчестера с использованием среды OpenModelica.

Список литературы

- Методические материалы к лабораторной работе, представленные на сайте "ТУИС РУДН" https://esystem.rudn.ru/
- Документация OpenModelica https://www.openmodelica.org/doc/OpenModelicaUsersGuide/late