

Отчет по лабораторной работе №5

Построение модели хищник-жертва

Евсеева Дарья Олеговна

10 марта, 2022

Содержание

Цель работы	5
Задание	6
Теоретическое введение	7
Выполнение лабораторной работы	9
1. Написание заготовки для построения моделей	9
2. Построение модели “хищник-жертва”	9
3. Нахождение стационарного состояния	12
Выводы	14
Список литературы	15

Список таблиц

Список иллюстраций

1	Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры	8
1	Основа программы для построения моделей	9
2	Программа для модели “хищник-жертва”	10
3	График с отображением x	10
4	График с отображением у	11
5	График с отображением x и у	11
6	График зависимости	12
7	Программа для стационарного состояния	12
8	График с отображением x и у в стационарном состоянии	13
9	График зависимости в стационарном состоянии	13

Цель работы

Целью данной работы является построение модели “хиппи-жертва” в среде OpenModelica.

Задание

Вариант №21.

Для модели “хищник-жертва”:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.42x(t) + 0.043x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.44y(t) - 0.045x(t)y(t) \end{cases}$$

1. Постройте график зависимости численности хищников от численности жертвы, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 4$, $y_0 = 13$.
2. Найдите стационарное состояние системы.

Теоретическое введение

OpenModelica — свободное открытое программное обеспечение для моделирования, симуляции, оптимизации и анализа сложных динамических систем. Основано на языке Modelica.

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа “хищник-жертва” — модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases} \quad (1)$$

В этой модели x — число жертв, y — число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c — естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность

взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxu$ и dxy в правой части уравнения).

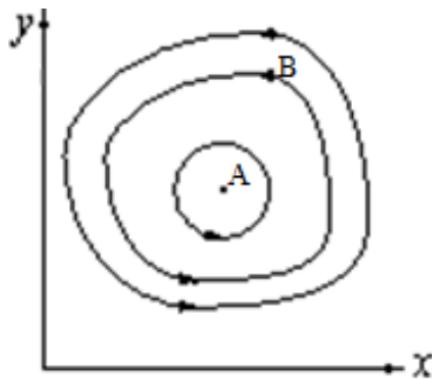


Рис. 1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рисунке выше), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B .

Стационарное состояние системы (1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}$, $y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяются начальными значениями численностей $x(0)$, $y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Выполнение лабораторной работы

1. Написание заготовки для построения моделей

Напишем основу программы для построения требуемых моделей. Работу будем выполнять в среде OpenModelica.

Определим необходимые переменные и параметры и запишем исходные уравнения.

```
1 model lab5case1
2   parameter Real a; // коэффициент естественного прироста жертв
3   parameter Real b; // коэффициент смертности жертв
4   parameter Real c; // коэффициент естественной смертности хищников
5   parameter Real d; // коэффициент увеличения числа хищников
6
7   parameter Real x0;
8   parameter Real y0;
9
10  Real x; // число жертв
11  Real y; // число хищников
12 |
13 initial equation
14   x = x0;
15   y = y0;
16
17 equation
18   der(x) = a*x - b*x*y;
19   der(y) = -c*y + d*x*y;
20
21 end lab5case1;
```

Рис. 1: Основа программы для построения моделей

2. Построение модели “хищник-жертва”

Дополним код заготовки программы в соответствии с данными задачи для того, чтобы построить модель “хищник-жертва”.

Зададим значения для параметров и начальных данных.

```

1 model lab5case1
2   parameter Real a = -0.42; // коэффициент естественного прироста жертв
3   parameter Real b = -0.043; // коэффициент смертности жертв
4   parameter Real c = -0.44; // коэффициент естественной смертности хищников
5   parameter Real d = -0.045; // коэффициент увеличения числа хищников
6
7   parameter Real x0 = 4;
8   parameter Real y0 = 13;
9   |
10  Real x; // число жертв
11  Real y; // число хищников
12
13 initial equation
14   x = x0;
15   y = y0;
16
17 equation
18   der(x) = a*x - b*x*y;
19   der(y) = - c*y + d*x*y;
20
21 end lab5case1;

```

Рис. 2: Программа для модели “хищник-жертва”

Запустим симуляцию и отобразим на графиках значения переменных x и y , то есть изменение численности жертв и хищников соответственно.

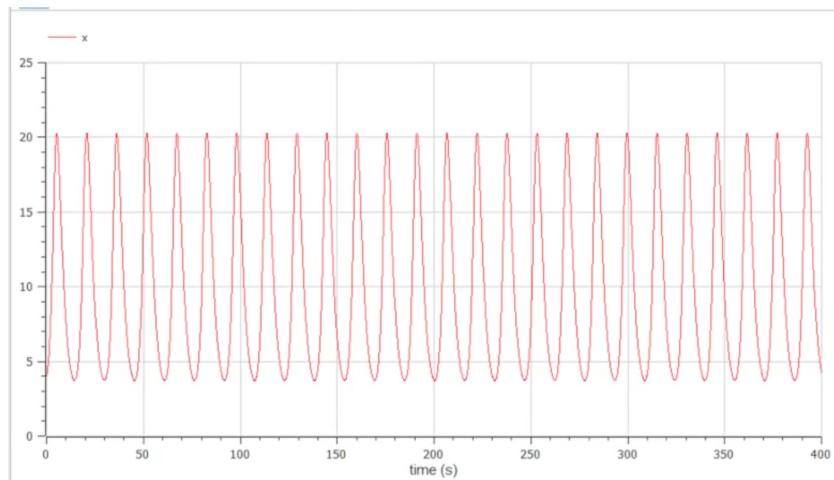


Рис. 3: График с отображением x

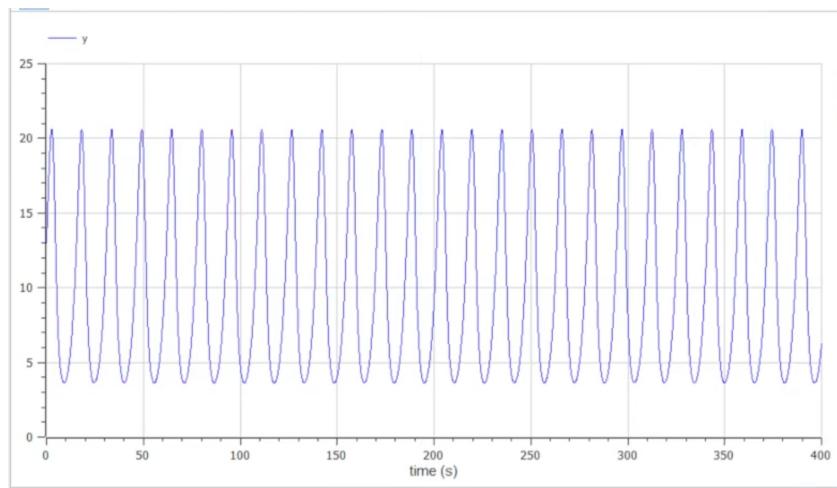


Рис. 4: График с отображением y

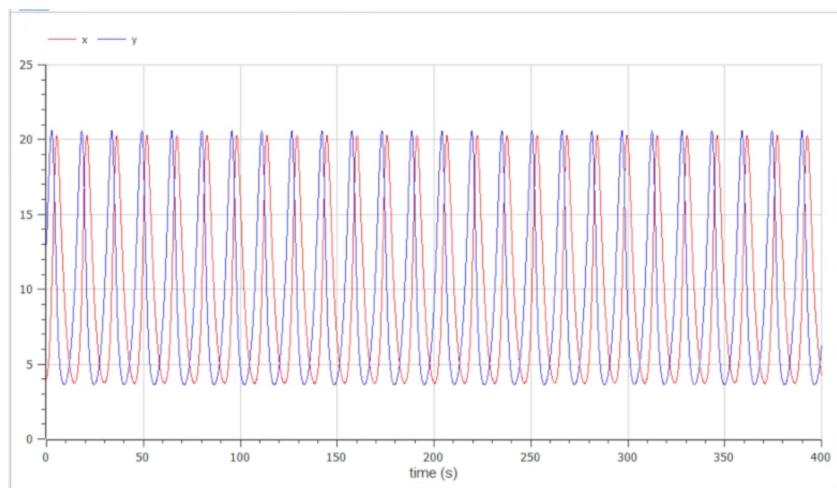


Рис. 5: График с отображением x и y

Также откроем параметрическое отображение графика, чтобы увидеть зависимость численности хищников от численности жертв.

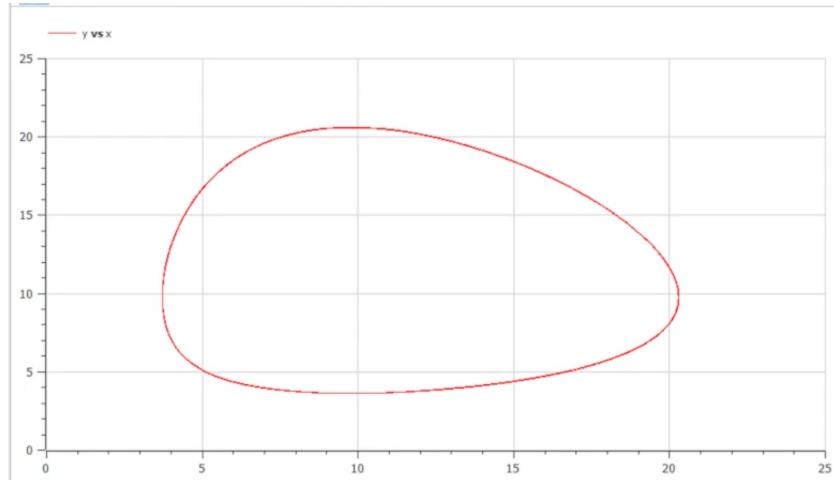


Рис. 6: График зависимости

3. Нахождение стационарного состояния

Теперь для нахождения стационарного состояния системы подставим в начальные данные соответствующие формулы вместо значений, заданных в условиях задачи.

```

1 model lab5case2
2   parameter Real a = -0.42; // коэффициент естественного прироста жертв
3   parameter Real b = -0.043; // коэффициент смертности жертв
4   parameter Real c = -0.44; // коэффициент естественной смертности хищников
5   parameter Real d = -0.045; // коэффициент увеличения числа хищников
6
7   // стационарное состояние:
8   parameter Real x0 = c/d;
9   parameter Real y0 = a/b;
10
11  Real x; // число жертв
12  Real y; // число хищников
13
14 initial equation
15   x = x0;
16   y = y0;
17
18 equation
19   der(x) = a*x - b*x*y;
20   der(y) = - c*y + d*x*y;
21
22 end lab5case2;

```

Рис. 7: Программа для стационарного состояния

Запустим симуляцию и отобразим на графике значения переменных x и y , то есть изменение численности жертв и хищников соответственно.

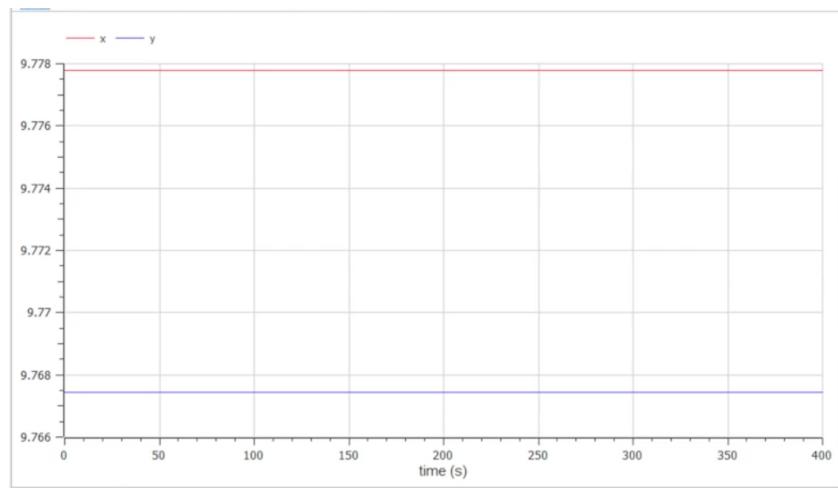


Рис. 8: График с отображением x и y в стационарном состоянии

Как можно видеть из полученного графика, значения со временем остаются на одном уровне, соответственно данное состояние действительно является стационарным.

Также откроем параметрическое отображение графика.

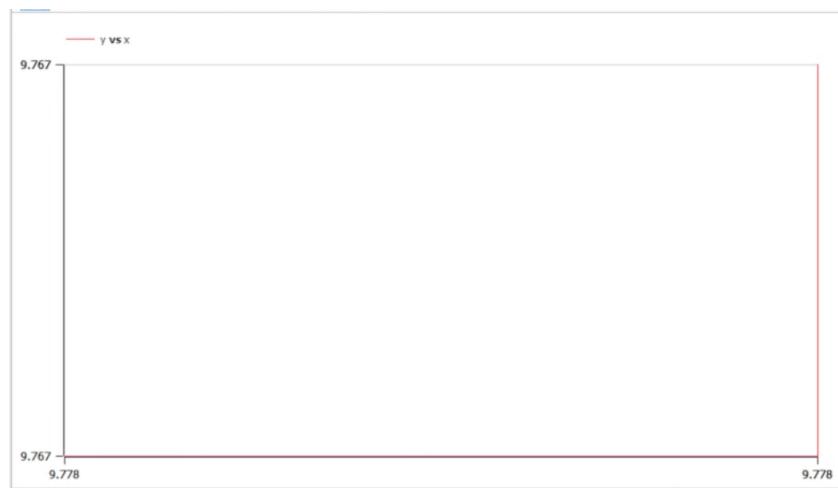


Рис. 9: График зависимости в стационарном состоянии

Выводы

В результате проделанной работы мы научились строить модели типа “хищник-жертва” в среде OpenModelica.

Список литературы

- Методические материалы к лабораторной работе, представленные на сайте “ТУИС РУДН” <https://esystem.rudn.ru/>
- Документация OpenModelica <https://www.openmodelica.org/doc/OpenModelicaUsersGuide/latest/>