



Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

Επιτάχυνση σωματιδίων σε συμπιεζόμενα πλασμοειδή
και ακτινοβολία σύγχροτρον

Δέσποινα Καράβολα
A.M.: 1110201600053

Επιβλέπουσα καθηγήτρια
Δρ. Μαρία Πετροπούλου

Αθήνα 2021

Περίληψη

Η μαγνητική επανασύνδεση αποτελεί μία αποτελεσματική διαδικασία μετατροπής ενέργειας αποθηκευμένης στο μαγνητικό πεδίο σε άλλες μορφές. Η διαδικασία αυτή λαμβάνει χώρα από τον ίδιο μας τον Ήλιο εώς και αστροφυσικές πηγές μεγάλης κλίμακας, όπως πλανήτες και δίσκοι μελανών οπών. Μέχρι πρόσφατα θεωρούταν πως η μαγνητική επανασύνδεση καθώς και οι μηχανισμοί Fermi ήταν αυτοί που είχαν την δυνατότητα να επιταχύνουν τα σωματίδια σε σχετικιστικές ταχύτητες ενώ τα πλασμοειδή, τα οποία αποτελούν μαγνητισμένες ελλειψοειδείς δομές σχηματιζόμενες στα φύλλα ρεύματος κατά την μαγνητική επανασύνδεση, θεωρούνταν νεκτροταφία υψηλοενεργειακών σωματιδίων. Όμως προσομοιώσεις μαγνητικής επανασύνδεσης μεγάλης κλίμακας που μπορούσαν να μελετήσουν τα πλασμοειδή για μεγάλο χρόνο έδειξαν ότι τα σωματίδια συνεχίζουν να κερδίζουν ενέργεια μέσα σε αυτές τις δομές. Καθώς τα πλασμοειδή συγχωνεύονται μεταξύ τους ή πλάσμα από το περιβάλλον εγχύεται εκ νέου στο εσωτερικό τους, οι δομές αυξάνουν το μέγεθος τους. Κατά συνέπεια το εσωτερικό τους συμπιέζεται συμπαρασύροντας τις μαγνητικές γραμμές του πεδίου με αποτέλεσμα την αύξηση της έντασής του. Πληθυσμοί ήδη επιταχυμένων ηλεκτρονίων και ποζιτρονίων, λόγω πρωτευόντων μηχανισμών επιτάχυνσης, εισέρχονται στα πλασμοειδή και κινούμενα προς τον πυρήνα τους επιταχυνονται εξαιτίας της διατήρησης της πρώτης αδιαβατικής αναλλοίωτης. Συγχρόνως όντα επιταχυνόμενα σωματίδια υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου, θα ακτινοβολούν σύμφωνα με τον μηχανισμό σύγχροτρον. Στην εν λόγω μελέτη ασχολούμαστε με την χρονική εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής των εγχυόμενων πληθυσμών σε πλασμοειδή όταν σε αυτούς επιδρά (i) μόνο ο μηχανισμός επιτάχυνσης συμπιεζόμενων πλασμοειδών, (ii) μόνο ο μηχανισμός ακτινοβολίας σύγχροτρον και τέλος (iii) οι δύο αυτοί μηχανισμοί ταυτόχρονα. Για τον σκοπό αυτό θα επιλύσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος το οποίο αποτελείται (i) από την χαρακτηριστική διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας των σωματιδίων και (ii) από την σχέση του ρυθμού μεταβολής συνάρτησης κατανομής. Η επίλυση του συτήματος, ιδίως για τις πιο σύνθετες περιπτώσεις, γίνεται αριθμητικά σε περιβάλλον Matlab με την χρήση των μεθόδων του παραλληλογράμμου και Simpsons 3/8. Με την χρήση των μεθόδων αυτών θα ολοκληρώσουμε στο ενεργειακό φάσμα την συνάρτηση ισχύος ακτινοβολίας ενός σωματιδίου ώστε να υπολογίσουμε την συνολική ακτινοβολία του πληθυσμού. Ως τελικό σκοπό έχουμε την εξαγωγή των φασμάτων ακτινοβολίας των πληθυσμών αυτών ώστε τα χαρακτηριστικά τους να μπορούν να συγχριθούν με αυτά παρατηρούμενων φασμάτων μη θερμικής εκπομπής αστροφυσικών πηγών.

Abstract

Magnetic reconnection is an efficient process through which energy stored in the magnetic field is converted into other energy forms. This process takes place a variety of astrophysical environments, ranging from our own Sun to the jets and disks of accreting black holes. Until recently it was thought that magnetic reconnection as well as Fermi mechanisms were the ones responsible of accelerating particles at high-relativistic energies while plasmoids, which are magnetized, elliptical structures formed in current sheets during reconnection, were considered to be the graveyards of energetic particles. But large-scale and long-time simulations showed that the particles continue to gain energy within these structures. As plasmoids merge with each other or plasma from the environment is re-injected into them, the structures increase in size. As a result, their interior is compressed, dragging the magnetic field lines along with it. This procedure leads to an increase of the field's intensity. Populations constituted by pre-accelerated electrons and positrons, due to primary acceleration mechanisms, enter the plasmoids moving towards their nucleus. Those particles gain energy due to the preservation of the first adiabatic invariant. At the same time, particles with a non-zero magnitude of acceleration affected by the magnetic field will radiate according to the synchrotron mechanism. In this study we focus on the time evolution of the distribution function of injected populations into plasmoids in systems affected by (i) only the acceleration mechanism of compressing plasmoids, (ii) only the synchrotron radiation mechanism and finally (iii) these two mechanisms simultaneously. For this purpose we will solve the system of differential equations, that define each of the problems, which consists of (i) the characteristic differential equation which describes the time evolution of a particle's initial energy value and (ii) the differential equation that describes how the populations distribution function changes over time. The solution, especially for the most complex cases, will be computed numerically using Matlab, though the methods of the rectangle and Simpsons 3/8. Using these methods we will integrate the power of radiation emitted by a single particle throughout the whole energy spectrum in order to calculate the total radiation of the population. Our goal is to export the radiation spectra of these populations so that their characteristics can be compared with those of non-thermal emission spectra of astrophysical sources.

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract	ii
1 Εισαγωγή	1
2 Στοιχεία από τη θεωρία	3
2.1 Συνάρτηση Κατανομής	3
2.2 Μαγνητική Επανασύνδεση	5
2.3 Κίνηση σωματιδίων σε σταθερό ομογενές μαγνητικό πεδίο	7
2.4 Επιτάχυνση Σωματιδίων	9
2.5 Απώλειες σύγχροτρον	11
2.5.1 Ακτινοβολία κινούμενων σωματιδίων	11
2.5.2 Φάσμα Ακτινοβολίας	12
3 Αποτελέσματα	18
3.1 Συστήματα στιγμιαίας έγχυσης	19
3.1.1 Επίδραση μόνο μηχανισμού επιτάχυνσης	21
3.1.2 Επίδραση μόνο μηχανισμού απώλειών σύγχροτρον	25

3.1.3 Επίδραση μηχανισμών επιτάχυνσης και απωλειών σύγχροτρον	30
3.2 Συστήματα συνεχούς έγχυσης	36
3.2.1 Επίδραση μόνο μηχανισμού επιτάχυνσης	37
3.2.2 Επίδραση μόνο μηχανισμού απωλειών σύγχροτρον	42
3.2.3 Επίδραση μηχανισμών επιτάχυνσης και απωλειών σύγχροτρον	49
3.2.4 Φάσματα Ακτινοβολίας Σύγχροτρον	54
3.3 Εφαρμογή σε υψηλοενεργειακά φάσματα	60
4 Συμπεράσματα	65
Παραρτήματα	65
Α' Διατήρηση Πρώτης Αδιαβατικής Αναλλοίωτης	66
Βιβλιογραφία	67

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σε αστροφυσικά συστήματα μεγάλης κλίμακας και υψηλής μαγνητισμού, όπως άνεμοι αστέρων νετρονίων και πίδακες ενεργών γαλαξιακών πυρήνων, παρατηρείται συχνά ακτινοβολία στο φάσμα των ακτίνων X και γ. Η ακτινοβολία αυτή δεν είναι θερμικής προέλευσης οπότε είναι επόμενο να προκύπτει ένα σημαντικό ερώτημα το οποίο μέχρι σήμερα παραμένει ανοικτό, που αφορά στο πώς τα σωματίδια επιταχύνονται σε σχετικιστικές ταχύτητες ώστε να παράγουν αυτό το φάσμα.

Παλαιότερα υπερίσχυε η πεποίθηση ότι στους πληθυσμούς αυτούς δρούσαν οι μηχανισμοί Fermi (1ης ή 2ης τάξης) προσφέροντας τους την απαραίτητη ενέργεια. Όμως οι μηχανισμοί αυτοί μπορούν να δημιουργήσουν πληθυσμούς σωματιδίων που περιγράφονταν από νόμο δύναμης μοναδικού εκθέτη, αντίθετα με τις παρατηρήσεις όπου οι πληθυσμοί σωματιδίων εμφανίζονται να έχουν μοφές σπασμένων νόμων δύναμης, όπου ο εκθέτης αλλάζει τιμή. Επιπλέον αριθμητικές προσομοιώσεις έδειξαν αργότερα ότι οι μηχανισμοί αυτοί δημιουργούν πληθυσμούς αρκετά μικρών κλίσεων, π.χ. $N(\gamma) \propto \gamma^{-5}$, με αποτέλεσμα πολύ λίγα σωματίδια να επιταχύνονται σε υψηλότερες ενέργειες, μη επαρκή ώστε να ακτινοβοληθεί μέσω φαινένου σύγχροτρον ή Compton ακτινοβολία στις παρατηρούμενες συχνότητες.

Προσομοιώσεις μεγάλης κλίμακας, χωρικά και χρονικά, έχουν δείξει ότι το φαινόμενο της σχετικιστικής μαγνητικής επανασύνδεσης σε τέτοια συστήματα μπορεί να αποβεί πολύ αποτελεσματικό στην μεταφορά ενέργειας από το μαγνητικό πεδίο στα φορτισμένα σωματίδια. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας η μορφολογία του μαγνητικού πεδίου αλλάζει με αποτέλεσμα να δημιουργούνται ασυνέχειες, τις οποίες διαρρέουν ρεύματα (φύλλα ρεύματος), τα οποία με την σειρά τους παράγουν ηλεκτρικά πεδία. Οι δομές πλάσματος που δημιουργούνται στα φύλλα ρεύματος πιστεύαμε ότι αποτελούν νεκροταφεία υψηλοενεργειακών σωματιδίων όμως πρόσφατες αριθμητικές προσομοιώσεις έδειξαν ότι ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια μπορούν να

επιταχυνθούν στις περιοχές αυτές.

Η συνεισφορά του μηχανισμού επιτάχυνσης σωματιδίων μέσα σε συμπιεζόμενα πλασμοειδή στην δημιουργία του παρατηρούμενου πλυσθησμού είναι ακόμα ένα ανοιχτό ερώτημα. Τα αστροφυσικά συστήματα στα οποία συναντάται το φαινόμενο της επανασύνδεσης χαρακτηρίζονται επιπλέον από ισχυρά μαγνητικά πεδία τα οποία οδηγούν στην ακτινοβολία των σωματίδιων μη μηδενικής επιτάχυνσης, μέσω του μηχανισμού σύγχροτρον. Ο μηχανισμός ακτινοβολίας μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να αφαιρέσει ενέργεια από τα φορτισμένα σωματίδια. Ένα επιπλέον ερώτημα που προκύπτει αφορά στις συνθήκες (λ.χ. τιμή του μαγνητικού πεδίου και εξέλιξη του στον χρόνο) υπό τις οποίες υπερισχύει ο κάθε ένας εκ των δύο μηχανισμών. Προσδιορίζοντας τις τιμές των παραμέτρων που περιγράφουν ένα σύστημα, μπορούμε να καταλάβουμε σε ποια συστήματα η επιτάχυνση λόγω συμπίεσης των πλασμοειδών έχει σημαντικό ρόλο.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία από τη θεωρία

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στο φαινόμενο της μαγνητικής επανασύνδεσης, πως ευνοείται και τι συμβαίνει κατά την διάρκεια αυτού, ώστε να φτάσουμε μέσω αυτής στην δημιουργία των πρώτων πλασμοειδών, προτού μιλήσουμε για την χρονική εξέλιξη αυτών. Επιπλέον θα δούμε πως ακτινοβολεί ένα φορτισμένο μη μηδενικής επιτάχυνσης όταν βρεθεί μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο καταλήγοντας στο να εξάγουμε την σχέση που περιγράφει την ισχύ της ακτινοβολίας που παράγει συναρτήσει τις ενέργειας του και του μέτρου του πεδίου. Η σχέση αυτή θα μας φανεί πολύ χρήσιμη στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα την ολοκληρώσουμε στο ενεργειακό φάσμα για να υπολογίσουμε την ενέργεια ολόκληρου του πληθυσμού στο εσωτερικό του πλασμοειδούς.

2.1 Συνάρτηση Κατανομής

Στην στατιστική φυσική ως συνάρτηση κατανομής ονομάζεται μία συνάρτηση συνολικά επτά μεταβλητών, $f(t, \vec{x}, \vec{u})$, του χρόνου, των τριών συνιστωσών της θέσης και των αντίστοιχων της ταχύτητας, η οποία εκφράζει την αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων ενός πληθυσμού που έχουν ταχύτητες σε ένα εύρος $d\vec{u} = (du_x, du_y, du_z)$ στον χώρο των φάσεων, στον χώρο, δηλαδή, των θέσεων και των ορμών. Το ολοκλήρωμα αυτής στις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας ορίζει την ογκική αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων, n .

$$n(x, y, z, t) = \iiint f(t, x, y, z, u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z \quad (2.1)$$

Εφόσον η συνάρτηση n εκφράζει τον αριθμό των σωματιδίων, οποιασδήποτε ταχύτητας, ανά μονάδα όγκου, όταν αυτή ολοκληρώνεται σε όλες τις χωρικές διαστάσεις θα προκύψει ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων του πληθυσμού συναρτήσει του χρόνου, N . Εάν το σύστημα είναι απομονωμένο, όπου ενέργεια και σωματιδία δεν κινούνται προς ή από τον περιβάλλοντα χώρο, ή κλειστό, όπου η ανταλλαγή ενέργειας είναι δυνατή με το περιβάλλον αλλά όχι η μετακίνηση σωματιδίων από ή προς αυτό, αναμένεται ο αριθμός των σωματιδίων να διατηρείται στον χρόνο άρα τόσο αυτός όσο και η συνάρτηση κατανομής να μην εξαρτώνται άμεσα από την μεταβλητή t .

$$N(t) = \iiint n(t, x, y, z) dx dy dz \quad (2.2)$$

Στα προβλήματα που θα μελετηθούν στα επόμενα κεφάλαια τα συστήματα θεωρούνται ομοιογενώς κατανεμημένα στον χώρο και ισοτροπικά ως προς τις ταχύτητες των σωματιδίων. Παρά την ισοτροπία των ταχυτήτων η οποία σχετίζεται με τις κατευθύνσεις των ανυσμάτων, τα μέτρα αυτών διαφοροποιούνται και κατά συνέπεια οι ενέργειες των σωματιδίων καλύπτουν ένα εύρος τιμών. Ως αποτέλεσμα η συνάρτηση κατανομής έχει εξάρτηση από τον χρόνο αλλά και από την ενέργεια των σωματιδίων άρα εφαρμόζοντας τις σχέσεις (2.1) και (2.2) προκύπτει ότι ο αριθμός των σωματιδίων συναρτήσει του χρόνου θα είναι της μορφής $N(t) = c \int f(\gamma, t) d\gamma$, με την c να αποτελεί μία σταθερά καθώς τα ολοκληρώματα είναι ορισμένα. Η σταθερά αυτή μπορεί να απορροφηθεί από τον όρο κανονικοποίησης της συνάρτησης $f(\gamma, t)$ η οποία πλέον περιγράφει τον αριθμό των σωματιδίων ανά ενέργεια.

Η μορφή ενός πληθυσμού σωματιδίων κάποιου αρχικού εύρους ενεργειών, όπως περιγράφηκε παραπάνω, θα διαφοροποιείται με το πέρασμα του χρόνου εφόσον στο σύστημα επιδρούν μηχανισμοί επιτάχυνσης ή ψύξης οι οποίοι προσφέρουν ή αφαιρούν ενέργεια από τα φορτία, αντίστοιχα, αλλά και λόγω πιθανών εγχύσεων ή διαψυγής ηλεκτρονίων ή ιόντων. Οι προαναφερθείσες ενέργειες περιγράφονται από την συνάρτηση $S(\gamma, t)$, που καλείται συνάρτηση πηγής και αποτελεί μία έκφραση των εισερχόμενων σωματιδίων στο σύστημα στην μονάδα του χρόνου. Ως αποτέλεσμα η τελευταία συνδέεται με την $f(\gamma, t)$ ως:

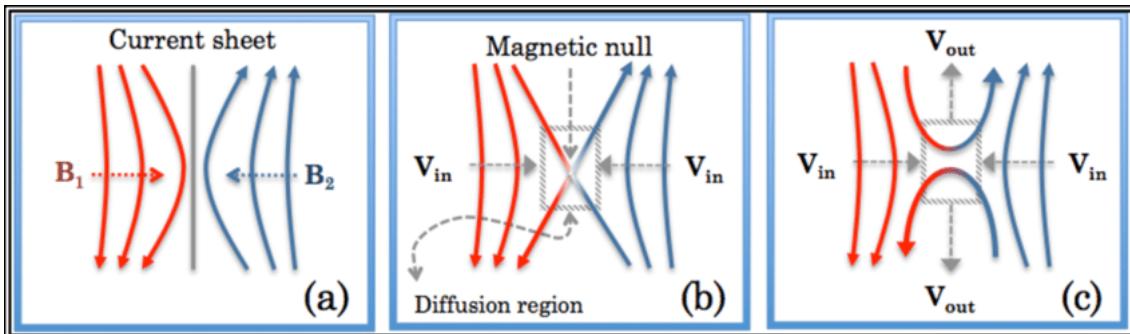
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma}(f \dot{\gamma}) = S(\gamma, t) \Leftrightarrow \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + f \cdot \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} = S(\gamma, t) \Leftrightarrow \quad (2.4)$$

$$\frac{df}{dt} = S(\gamma, t) - f \cdot \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \quad (2.5)$$

2.2 Μαγνητική Επανασύνδεση

Το φαινόμενο της μαγνητικής επανασύνδεσης συμβαίνει σε συστήματα όπου συναντάται σημαντικά αγώγιμο πλάσμα και δημιουργούνται ισχυρά αλληλεπιδρόντα μαγνητικά πεδία. Αναγκαία συνθήκη ώστε να λάβει χώρα η διαδικασία αυτή είναι δύο δυναμικές γραμμές αντίθετου προσανατολισμού, οι οποίες βρίσκονται πάνω σε παράλληλα μεταξύ τους επίπεδα, να πλησιάσουν πολύ κοντά χωρικά. Τότε αυτές θα αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους καθώς σπάνε και επανενόνονται, η κάθε μία με την γειτονική της, δημιουργώντας μία νέα τοπολογία πεδίου. Λόγω της ασυνέχειας του μαγνητικού πεδίου, πάνω στον γεωμετρικό τοπό των σημείων που διαχωρίζουν τα επίπεδα αντίθετης πολικότητας σχηματίζεται ένα φύλλο ρεύματος, παράλληλο στα δύο προαναφερθέντα επίπεδα. Το σημείο στο οποίο συμβαίνει η επανένωση ονομάζεται X λόγω της μορφολογίας του πεδίου στην περιοχή εκείνη. Όσο η προαναφερθείσα συνθήκη για τα πεδία συνεχίζει να ικανοποιείται, θα διαρκεί και η επανασύνδεση^[1], 2].



Σχήμα 2.1: (α) Δυναμικές γραμμές αντίθετης πολικότητας πλησιάζουν χωρικά. (β) Σπάσιμο γραμμών και δημιουργία σημείου X . (γ) Επανένωση γραμμών. Σχήμα από [2].

Σε συστήματα μεγάλης χωρικής πυκνότητας του μαγνητικού πεδίου η μαγνητική επανασύνδεση ευνοείται καθώς οι δυναμικές γραμμές του βρίσκονται σε μικρότερες αποστάσεις η μία από την άλλη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την συχνότερη επανασύνδεση αλλά και την μεγαλύτερη χρονική διάρκεια αυτής.

Η κίνηση του πλάσματος αυτή καθ' αυτή, πέραν του γεγονότος ότι δημιουργεί μαγνητικά πεδία, μπορεί να ευνοήσει και την μαγνητική επανασύνδεση σε αστροφυσικά συστήματα όπου το μαγνητικό πεδίο είναι παγωμένο πάνω στο πλάσμα, εννοώντας ότι η κίνηση του τελευταίου συμπαρασύρει το πρώτο. Η συμπεριφορά αυτή προκύπτει ξεκινώντας από τις εξισώσεις των Faraday, Laplace και Ohm, συνδυάζοντας τες

και καταλήγοντας στην εξίσωση του δυναμό^[3].

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday})$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \quad (\text{Ohm})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (\text{Laplace})$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (\Delta \text{υναμό})$$

Στις παραπάνω σχέσεις τα \vec{B} και \vec{E} είναι αντίστοιχα το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο που αναπτύσσονται λόγω των φορτίων και των κινήσεων του στον χώρο. Επιπλέον με \vec{J} αναφερόμαστε στο ρεύμα το οποίο δημιουργείται εξαιτίας των πληθυσμών φορτίων που κινούνται ο καθένας εξ αυτών, μακροσκοπικά, με ταχύτητα \vec{v} . Ως c συμβολίζουμε την ταχύτητα του φωτός και ως η την ηλεκτρική αγωγιμότητα του πλάσματος η οποία θεωρείται σταθερή. Τέλος ως συντελεστή διάχυσης η ορίζουμε τον λόγο $\frac{c^2}{4\pi\sigma}$ ο οποίος είναι επίσης σταθερός.

Η εξίσωση του δυναμό εκφράζει την εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου στον χρόνο εντός του κινούμενου πλάσματος. Ο πρώτος όρος του αριστερού μέλος είναι αυτός που σχετίζεται με την κίνηση του μέσου και ονομάζεται όρος μεταφοράς ενώ ο δεύτερος όρος είναι αυτός της διάχυσης του πεδίου κατά μήκος του μέσου. Για να καθορίζουμε σε κάθε σύστημα με συγκεκριμένες τιμές των προαναφερθείσων παραμέτρων ορίζεται ο μαγνητικός αριθμός Reynolds ως $R_m = \frac{|\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})|}{\eta \nabla^2 \vec{B}}$ ^[3]. Μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση διαστατικά ως

$$R_m = \frac{|\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})|}{\eta \nabla^2 \vec{B}} = \frac{\frac{vB}{L}}{\frac{\eta B}{L^2}} \Leftrightarrow R_m = \frac{vL}{\eta} \quad (2.6)$$

Η παράμετρος L αντιπροσωπεύει το χροντηριστικό μήκος του συστήματος. Όταν ο αριθμός Reynolds είναι είναι πολύ μεγαλύτερος της μονάδας τότε ο όρος της μεταφοράς κυριαρχεί του όρου της διάχυσης οπότε το μαγνητικό πεδίο λέμε ότι είναι παγωμένο στο πλάσμα και κινείται μαζί με αυτό. Σε αντίθετη περίπτωση κυριαρχεί ο όρος της διάχυσης και το μαγνητικό πεδίο απλώνεται στον χώρο ανεξάρτητα της κίνησης του μέσου. Τα αστροφυσικά πλάσματα είναι καλοί αγωγοί οπότε ο συντελεστής αγωγιμότητας, σ , είναι σημαντικά μεγάλος ενώ αυτός της διάχυσης είναι εξαιρετικά μικρός καθώς οιδύο είναι αντιστρόφως ανάλογοι μεταξύ τους. Τελικά το πλάσμα θα συμπαρασύρει το πεδίο.

Καθώς χωρικοί πληθυσμοί πλάσματος με διαφορετικές ταχύτητες αλληλεπιδρούν συμπιέζοντας ο ένας τον άλλων τα συμπαρασερόμενα μαγνητικά πεδία τους μπορούν να βρεθούν σε συνθήκες που ευνοούν την επανασύνδεση. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας τα σωματίδια των πληθυσμών στην περιοχή εκείνη κερδίζουν ενέργεια καθώς η αλλαγή στην τοπολογία του πεδίου έχει ως συνέπεια την αύξηση της μαγνητικής τάσης η οποία συσσωρεύεται στο σημείο X. Όταν επέλθει κορεσμός η μαγνητική τάση που υπάρχει λόγω της καμπύλωσης των μαγνητικών γραμμών τείνει να τις επαναφέρει σε ευθεία μορφή ώστε να αποκτασταθεί η πρότερη γεωμετρία του πεδίου [1, 2]. Μαζί με την εκ νέου παραμόρφωση των συγκλινουσών γραμμών συμπαρασύρεται και το παγωμένο σε αυτές πλάσμα. Ως αποτέλεσμα ένα μέρος της μαγνητικής ενέργειας που ήταν αποθηκευμένη στο πεδίο μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια καθώς και θερμότητα με μέρος αυτής να διοχετεύεται στα σωματίδια και να οδηγεί στην εκτόξευση δομών πλάσματος αποτελούμενων από θερμότερα σωματίδια συγχριτικά με τα αρχικά [1, 2]. Στο σχήμα (2.2) βλέπουμε την ροή κρύων σωματιδίων να εισέρχεται από τα πλάγια ενώ το θερμό πλάσμα εκτοξεύεται από την κορυφή και την βάση του σημείου X. Αυτός ο μηχανισμός είναι πρωτογεννούς επιτάχυνσης με τους πληθυσμούς αυτούς να φτάνουν σε ενέργειες της τάξης των μερικών σ , με $\sigma = \frac{B^2}{4\pi\omega}$ τον συντελεστή μαγνήτισης του πλάσματος ενώ το B συμβολίζει το μέτρο του μαγνητικού πεδίου του συστήματος και η παράμετρος ω την σχετικιστική ενθαλπία. Στα αστροφυσικά συστήματα το σ συνήθως είναι της τάξης του 10 οπότε αναμένουμε οι πληθυσμοί που δημιουργούνται από την πρωτογενή επιτάχυνση και ακολουθούν νόμους δύναμης ως προς την ενέργεια να βρίσκονται σε ενεργειακό εύρος τάξης μεγέθους σ . Στα συστήματα αυτά η μαγνητική επανασύνδεση αποτελεί τον κυρίαρχο μηχανισμό πρωτογεννούς επιτάχυνσης ούσα αποδοτικότερη από τους μηχανισμούς Fermi [4], τους οποίους πρότινε ο Drake το 2006 ως κύριους μηχανισμούς επιτάχυνσης σωματιδίων. Ο μηχανισμός Fermi πρώτης τάξης σχετίζεται με την ανάλαση των σωματιδίων στα μαγνητισμένα πλασμοειδή και δημιουργεί πληθυσμούς σωματιδίων οι οποίοι περιγράφονται από νόμους δύναμης ως προς τις ενέργειες των σωματιδίων [5], οι οποίοι όμως δεν συμπίπτουν με τις παρατηρούμενες κατανομές σωματιδίων ‘σπασμένων’ νόμων δύναμης.

2.3 Κίνηση σωματιδίων σε σταθερό ομογενές μαγνητικό πεδίο

Πληθυσμοί φορτισμένων σωματιδίων οι οποίοι βρίσκονται σε περιοχές ισχυρών μαγνητικών πεδίων μπορούν να εγκλοβιστούν σε αυτές υπό την προϋπόθεση ότι τα εν λόγω φορτία δεν έχουν επαρκή ενέργεια ώστε να διαφύγουν. Τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα εκτελούν ελικοειδείς κινήσεις γύρω από τις μαγνητικές γραμμές του πεδίου [1, 3, 6]. Στην παράγραφο αυτή επεκτείνουμε την διαδικασία που εφαρμόζεται στα βιβλία των Δαγκλή [1], Τσίγκανου [3] και Μαστιχιάδη-Βλαχάκη [6] καταλήγοντας στα αποτελέσματα των Rybicki

και Lightman [7]. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Newton στην περίπτωση όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι σημαντικά μικρότερο από το μαγνητικό, $\vec{E} \approx 0$, καθώς και την σχέση που περιγράφει την ενέργεια ενός σωματιδίου στο υπερσχετικιστικό όριο, $\epsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \approx pc$, προκύπτει η εικόνα της κίνησης του σωματιδίου.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \approx q \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \vec{u} \frac{d\vec{p}}{dt} \approx c \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} \approx q\vec{u} \cdot \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \Rightarrow \frac{d(\gamma mc^2)}{dt} \approx 0 \quad (2.8)$$

Με την πρώτη από τις παραπάνω εκφράσεις να δηλώνουν την χρονική εξέλιξη της ορμής, \vec{p} ενός σωματιδίου φορτίου q και μάζας m κινούμενο με ταχύτητα \vec{u} μέσα σε μαγνητικό πεδίο \vec{B} . Στην συνέχεια η δεύτερη έκφραση εκφράζει το έργο που η δύναμη Lorentz δημιουργεί κατά την κίνηση το οποίο ισούται με το μηδέν, εφόσον το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να αγνοηθεί και το εξωτερικό γινόμενο $\vec{u} \times \vec{B}$ είναι κάθετο στην ταχύτητα του φορτίου. Ως αποτέλεσμα η ενέργεια του σωματιδίου, και κατά συνέπεια ο παράγοντας γ και το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου, δεν μεταβάλλονται. Αναλύοντας τον νόμο του Newton σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη στο μαγνητικό πεδίο και μία κάθετη σε αυτό και με την χωρική ορμή να δίνεται ως $\vec{p} = \gamma m \vec{u}$:

$$\frac{d(\gamma m \vec{u}_\perp)}{dt} = q \frac{\vec{u}_\perp}{c} \times \vec{B} \xrightarrow{\vec{u}_\perp \perp \vec{B}} \frac{d(\gamma m u_\perp)}{dt} = \frac{qu_\perp B}{c} \xrightarrow{\gamma m = const} \frac{du_\perp}{dt} = \frac{qB}{\gamma mc} u_{per} \quad (2.9)$$

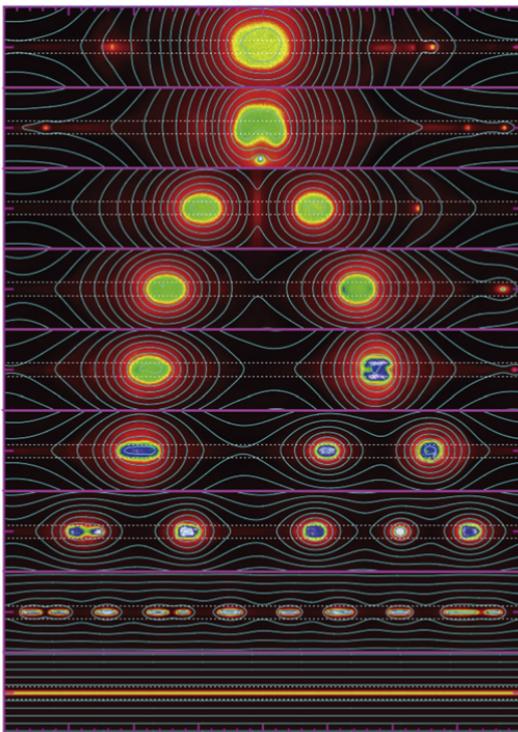
$$\frac{d(\gamma m \vec{u}_\parallel)}{dt} = q \frac{\vec{u}_\parallel}{c} \times \vec{B} \xrightarrow{\vec{u}_\parallel \parallel \vec{B}} \frac{d(\gamma m \vec{u}_\parallel)}{dt} = 0 \Rightarrow u_\parallel = constant \quad (2.10)$$

Η δεύτερη εξίσωση περιγράφει την μία εχ των δύο συνιστώσών της κίνησης η οποία αποτελεί μία μεταφορική κίνηση με σταθερή ταχύτητα παράλληλη στην διεύθυνση του πεδίου, u_\parallel , η οποία διατηρείται σταθερή αν δεν υπάρχουν επιπλέον δυνάμεις πλην της μαγνητικής, για παράδειγμα αυτή ενός ηλεκτρικού ή βαρυτικού πεδίου. Εφόσον τα μέτρα της ολικής και της παράλληλης στο πεδίο ταχύτητας παραμένουν σταθερά τότε, λόγω της έκφρασης $u^2 = u_\parallel^2 + u_\perp^2$, θα παραμένει οναλλοίωτη και η τιμή της συνιστώσας της ταχύτητας κάθετης στο μαγνητικό πεδίο ενώ θα αλλάζει η κατεύθυνση αυτής λόγω της δύναμης του \vec{B} . Εν αντιθέσει με την δεύτερη, η πρώτη εξίσωση αναφέρεται σε μία κυκλική τροχιά σταθερής ακτίνας καθώς και, κάθετης στην τροχιά και το πεδίο, ταχύτητας, γνωστή κι ως Larmor, με το κέντρο της να βρίσκεται πάνω στην δυναμική γραμμή. Η συχνότητα αυτής ισούται με $\omega_B = \frac{qB}{\gamma mc}$ [7]. Η επιτάχυνση που τελικά προκύπτει, στην εν λόγω διαφορική σχέση, είναι κάθετη στις δύο συνιστώσες της ταχύτητας, λόγω της μορφής της δύναμης Lorentz, και έχει τον ρόλο της κεντρομόλου της κίνησης Larmor. Τελικά οι δύο κινήσεις συνθέτουν, λόγω αρχής της επαλληλίας, την τελική ελικοειδή κίνηση του σωματιδίου στον μαγνητισμένο χώρο.

2.4 Επιτάχυνση Σωματιδίων

Από τον πίδακα μίας μελανής οπής, σε έναν περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων εώς και τα μαγνητικά σχοινιά ενός αστέρα, όπως ο δικός μας Ήλιος, συγκεκριμένη γεωμετρία του μαγνητικού πεδίου μπορεί να προκαλέσει την επιτάχυνση ηλεκτρονίων και ιόντων. Στα συστήματα αυτά ο κύριος μηχανισμός που ευθύνεται για την αύξηση της ενέργειας των σωματιδίων είναι η μαγνητική επανασύνδεση [4]. Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο (2.3), στα X σημεία όπου συσσωρεύεται μαγνητική τάση συμβαίνει η πρωτογενής επιτάχυνση.

Εσωτερικά του θερμού και πυκνού φύλλου ρεύματος, το οποίο δημιουργείται στο επίπεδο που διαχωρίζει τις μαγνητικές γραμμές αντίθετης πολικότητας ούσες υπεύθυνες για την επανασύνδεση, δημιουργούνται αστάθειες οι οποίες προκαλούν τον τεμαχισμό του επονομαζόμενου φύλλου Harris και κατά συνέπεια την δημιουργία μικρών, σχεδόν σφαιρικών δομών στις οποίες θα αναφερόμαστε ως πλασμοειδή. Το εσώτερικό των τελευταίων θεωρείται ότι φέρει μαγνητικό πεδίο χωρικά ομοίομορφο στην μορφή ομόκεντρων κύκλων το οποίο μεταβάλεται χρονικά[8].



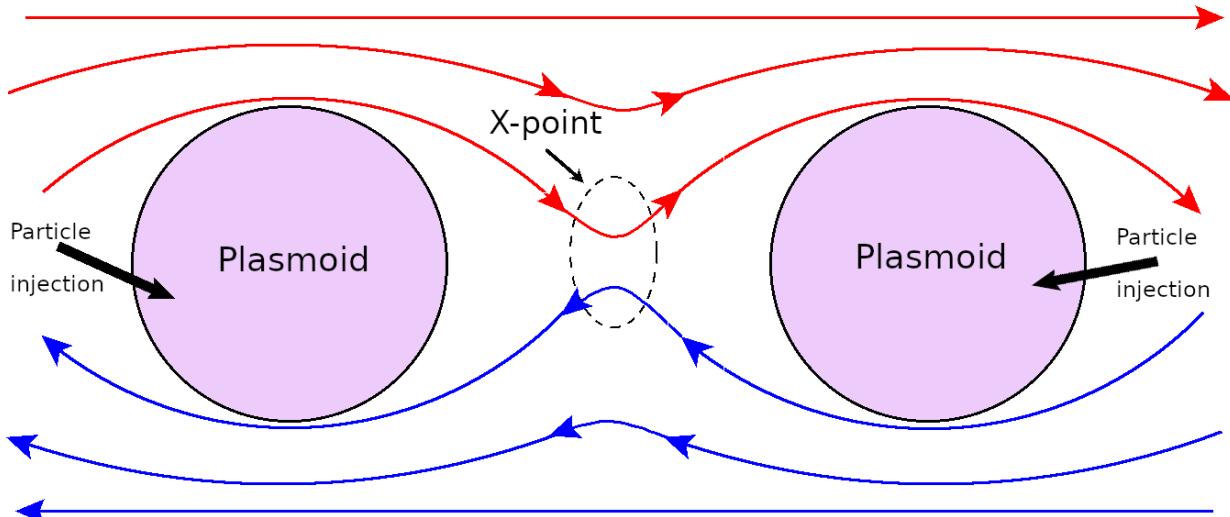
Σχήμα 2.2: Δημιουργία πλασμοειδών στον χρόνο [4].

Σειρά του αυτό θα σπάσει δημιουργόντας τα λεγόμενα δευτερεύοντα πλασμοειδή που σε αντίθεση με τα

Τα πρώτα πλασμοειδή που δημιουργούνται δεν έχουν μαγνητικό πεδίο στην κεντρική τους περιοχή καθώς αποτελούνται από το πλάσμα του φύλλου ρεύματος. Με την πάροδο του χρόνου τροφοδοτούνται με κρύο πλάσμα και χαμηλοενεργειακά σωματίδια από τις περιοχές εκατέρωθεν της ασυνέχειας. Επιπλέον όταν μία τέτοια πρωτογενής δομή πλησιάσει με κάποια όμοια της συμβαίνει συγχώνευση των δύο με αποτέλεσμα την δημιουργία μεγαλύτερων πλασμοειδών[8]. Ελάχιστα πριν πραγματοποιηθεί η συγχώνευση αυτή κι ενώ οι δύο πρωταρχικοί όγκοι πλάσματος βρίσκονται πολύ κοντά δημιουργούνται ξανά οι κατάλληλες συνθήκες μαγνητικής επανασύνδεσης μεταξύ τους. Αυτό έχει ως συνέπεια την δημιουργία νέου φύλλου ρεύματος ανάμεσα τους, κάθετα στο ίδιο υπάρχον. Με την

πρώτα όμως έχουν μαγνητικό πεδίο στον πυρήνα τους λόγω του ότι μαγνητισμένου πλάσματος που τα δημιουργεί^[4, 8].

Ένας επιπλέον τρόπος αύξησης του μεγέθους των πλασμοειδών είναι η εισροή, σε αυτά, πλάσματος και μαγνητικής ροής από το περιβάλλον^[8]. Το φάσμα των σωματιδίων που εισέρχονται μπορεί να είναι είτε κρύα σωματίδια προέλευσης εξωτερικά του φύλλου Harris είτε σωματίδια ήδη μη θερμικώς επιταχυμένα από τους πρωτεύοντες μηχανισμούς, κυρίαρχος εξ αυτών τα σημεία X της επανασύνδεσης. Ο τελευταίος πληθυσμός θα ακολουθεί μία ενεργειακή κατανομή νόμου δύναμης ως το αποτέλεσμα μη θερμικής επιτάχυνσης^[5, 9, 10]. Όταν τα ηλεκτρόνια και ιόντα βρεθούν μέσα στο πλασμοειδές θα εγκλοβιστούν στις δυναμικές γραμμές του πεδίου εκτελόντας κυκλική κίνηση γύρω από αυτές με συχνότητα πολύ μεγαλύτερη από αυτή της χρονικής μεταβολής του μαγνητικού πεδίου. Ο εμπλουτισμός αυτός έχει ως αποτέλεσμα την συμπίεση του πλάσματος στο εσωτερικό της δομής πάνω στο οποίο βρίσκεται παγωμένο το μαγνητικό πεδίο. Το πλάσμα συμπαρασέρνει τις δυναμικές γραμμές του τελευταίου οι οποίες μετακινούνται προς το κέντρο της σφαρικής κατανομής, με τους ομόκεντρους κύκλους να μειώνονται σε ακτίνα όσο περνάνε οι χρονικές στιγμές και το μέτρο του πεδίου να αυξάνεται^[8].



Σχήμα 2.3: Εισροή σωματιδίων στα πλασμοειδή.

Καθώς η χωρική κλίμακα στην οποίο το πεδίο, μέσα στα πλασμοειδή, μεταβάλλεται είναι σημαντικά μικρότερη από την συχνότητα της γυροκίνησης, $|\vec{\nabla}B| \ll \omega_B$, θεωρούμε ότι κατά την διάρκεια μίας περιόδου γυροκίνησης το σωματίδιο κινείται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο.

2.5 Απώλειες σύγχροτρον

2.5.1 Ακτινοβολία κινούμενων σωματιδίων

Σύμφωνα με την έκφραση του Larmor, η οποία αποτυπώθηκε για το σχετικιστικό όριο από τον Lienard, τα σωματίδια εκπέμπουν ακτινοβολία, φαινόμενο που οφείλεται στην επιτάχυνση τους. Για μη σχετικιστικές κινήσεις η ακτινοβολία καλείται Cyclotron ενώ σε αντίθετη περίπτωση σύγχροτρον^[7].

$$P = \frac{2q^2}{3c} \gamma^6 [\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2] \quad (\text{Larmor} - \text{Lienard})$$

Η σχέση του Larmor δίνει την ακτινοβολούμενη ισχύ ενός σωματιδίου φορτίου q και συντελεστή Lorentz $\gamma = \frac{1}{1-\beta^2}$ το οποίο κινείται σε μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα u με το $\vec{\beta}$ να εκφράζει τον λόγο $\frac{u}{c}$ οπότε ο όρος $\dot{\vec{\beta}}$ δηλώνει την επιτάχυνση του σωματιδίου ανά την ταχύτητα του φωτός, c , και το εξωτερικό γινόμενο $\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}$ εκφράζει την προβολή της στην διεύθυνση της κίνησης. Ο όρος εντός της παρένθεσης στην εξίσωση (2.5.1) αναλύεται ως^[6, 7, 11]:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 &= \dot{\vec{\beta}}_{\parallel}^2 - (\vec{\beta}_{\parallel} \dot{\vec{\beta}}_{\perp})^2 = \dot{\vec{\beta}}_{\parallel}^2 + \dot{\vec{\beta}}_{\perp}^2 - (\vec{\beta}_{\parallel} \dot{\vec{\beta}}_{\perp})^2 = \dot{\vec{\beta}}_{\parallel}^2 + \dot{\vec{\beta}}_{\perp}^2 (1 - \vec{\beta}^2) = \dot{\vec{\beta}}_{\parallel}^2 + \frac{\dot{\vec{\beta}}_{\perp}^2}{\gamma^2} \Rightarrow \\ P &= \frac{2q^2}{3c} \gamma^4 [\gamma^2 \dot{\vec{\beta}}_{\parallel}^2 + \dot{\vec{\beta}}_{\perp}^2] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Για το προαναφερθές σύστημα, όπου σωματίδια κινούνται σε μαγνητικό πεδίο, διεξήχθη ότι η επιτάχυνση είναι ανά πάσα χρονική στιγμή κάθετη στην ταχύτητα του σωματιδίου, οπότε και στην τροχιά αυτού (βλέπε παράγραφο 2.3). Κατά συνέπεια ο όρος $\dot{\vec{\beta}}_{\parallel}$ θα είναι μηδενικός. Επιπλέον εφόσον η επιτάχυνση ταυτίζεται με την κεντρομόλο μίας κυκλικής κίνησης γωνιακής συχνότητας ω_B , το μέτρο της θα σχετίζεται με το μέτρο της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας, αυτής που είναι εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά ως $a_{\perp} = \omega_B u_{\perp}$ και $\dot{\vec{\beta}}_{\perp} = \frac{a_{\perp}}{c} = \frac{\omega_B u_{\text{per}}}{c}$. Αντικαθιστώντας στην σχέση (Larmor-Lienard) η ισχύς προκύπτει^[6, 7]:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 \omega_B^2 u_{\perp}^2 \Leftrightarrow P = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 \frac{q^2 B^2}{\gamma^2 m^2 c^2} u_{\text{per}}^2 \Leftrightarrow P = \frac{2q^4 B^2}{3m^2 c^5} u_{\perp}^2 \gamma^2 \xrightarrow[\beta_{\perp} = \frac{u_{\perp}}{c}]{r_0 = \frac{q^2}{mc^2}} \\ P &= \frac{2}{3} r_0^2 c \beta_{\perp}^2 \gamma^2 B^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ο λόγος $r_0 = \frac{q^2}{mc^2}$ εκφράζει την κλασσική ακτίνα ενός σημειακού σωματιδίου φορτίου q και μάζας m , στο διεύθυντα μονάδων, και συνδέεται με τον συντελεστή Thompson, $\sigma_T = \frac{8\pi r_0^2}{3}$. Ο τελευταίος εκφράζει την ενεργό διατομή της αλληλεπίδρασης ενός φωτονίου με το εν λόγω σωματίδιο.

Επιπλέον η πυκνότητα του μαγνητικού πεδίου εκφράζεται ως $u_B = \frac{B^2}{8\pi}$. Τέλος έχουμε θεωρήσει εώς αυτό το σημείο ότι το διάνυσμα της ταχύτητας των σωματιδίων είναι παράλληλη στο μαγνητικό πεδίο. Όμως στο πραγματικό σύστημα η ταχύτητα του καθενός εκ των σωματιδίων σχηματίζει γωνία α με το πεδίο. Θεωρώντας ότι η κατανομή των ταχυτήτων των φορτίων είναι ισοτροπική, η μέση τιμή του τετραγώνου της ύα υπολογίζεται ως^[6, 7]:

$$\langle \beta_{\perp}^2 \rangle = \frac{\langle u_{\perp}^2 \rangle}{c} = \frac{u^2}{c^2} \int \sin^2(a) \frac{d\Omega}{4\pi} \Rightarrow \langle \beta_{\perp}^2 \rangle = \frac{\beta^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3(a) da \Rightarrow \langle \beta_{\perp}^2 \rangle = \frac{2}{3}\beta^2$$

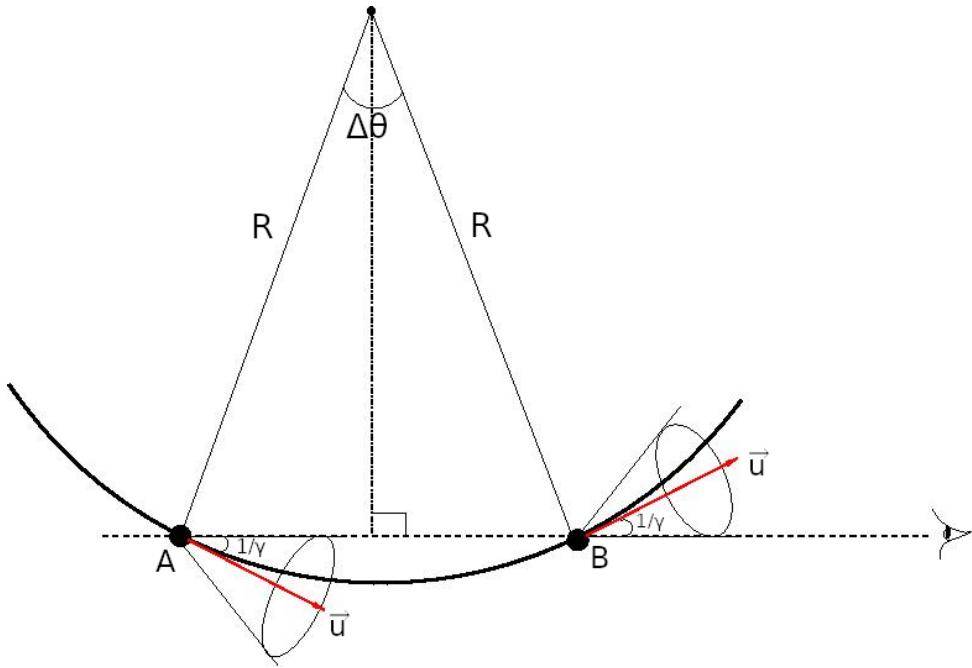
Μετά την αντικατάσταση των παραπάνω ποσοτήτων στην σχέση 2.12 προκύπτει η τελική μορφή^[6, 7] της ισχύος της ακτινοβολίας ενός σωματιδίου που βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο έντασης B και έχει ενέργεια γmc^2 .

$$P = \frac{4}{3} \cdot \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 B^2 \quad (2.13)$$

2.5.2 Φάσμα Ακτινοβολίας

Η ακτινοβολία των σωματιδίων παράγοντα Lorentz γ , που κινούνται ελικοειδώς μέσα σε μαγνητικό πεδίο \vec{B} ακτινοβολώντας λόγω της σύγχροτρον διαδικασίας, είναι χωρικά συγκεντρωμένη σε έναν κώνο εύρους $\frac{1}{\gamma}$ με άξονα συμμετρίας το διάνυσμα της ταχύτητας του φορτίου, ανά πάσα στιγμή. Ένας μακρινός παρατηρητής λαμβάνει ένα ποσό της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας από το κάθε σωματίδιο όσο ευθεία παρατηρησης του βρίσκεται εντός του κώνου ακτινοβολίας του εκάστοτε φορτίου. Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4 η γωνία που διαγράφει το σωματίδιο στην κυκλική του τροχιά όσο η ακτινοβολία του φτάνει στον παρατηρητή, ισούται με $\Delta\theta$. Από την γεωμετρία είναι γνωστό ότι το μήκος του τόξου, ΔS , ενός κύκλου σχετίζεται με την επίκεντρη γωνία η οποία βαίνει σε αυτό μέσω της ακτίνας, ως $R = \frac{\Delta S}{\Delta\theta}$. Επιπλέον παρατηρείται ότι οι πλευρές της γωνίας $\frac{1}{\gamma}$ του κώνου ακτινοβολίας είναι μία προς μία κάθετες με το ήμισυ της επίκεντρης γωνίας, $\Delta\theta$, και στις δύο ακραίες θέσεις του σωματιδίου. Κατά συνέπεια οι δύο θά πρέπει να ισούνται, $\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \Delta\theta = \frac{2}{\gamma}$. Συνδυάζοντας τις δύο συσχετίσεις προκύπτει ότι $\Delta S = R\Delta\theta = \frac{2R}{\gamma}$ ^[6, 7].

Εφόσον η κίνηση είναι ομαλή κυκλική με κεντρομόλο δύναμη την συνιστώσα λόγω του μαγνητικού πεδίου της Lorentz τότε μπορεί να γραφεί ο δεύτερος νόμος του Newton καθώς επίσης γνωρίζουμε για την



Σχήμα 2.4: Παρατήρηση σωματιδίου κινούμενο σε μαγνητικό πεδίο με γυροακτίνα R και ταχύτητα \vec{u} .

μετατόπιση και την μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας τα παρακάτω:

$$S = |\vec{u}| \Delta t = u \Delta t \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta S}{u}$$

$$abs \Delta \vec{u} = |\vec{u}| \Delta \theta = u \Delta \theta$$

$$\gamma m \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{q}{c} \vec{u} \times \vec{B} \quad (\text{Newton})$$

Αντικαθιστώντας τις δύο πρώτες σχέσεις στον νόμο προκύπτει [6, 7]:

$$\gamma m \frac{u \Delta \theta}{\Delta S} = \frac{q}{c} \vec{u} \times \vec{B} \Leftrightarrow \gamma m \frac{u \Delta \theta}{\frac{\Delta S}{u}} = \frac{q \cdot u \cdot B \cdot \sin a}{c} \Leftrightarrow \frac{\Delta \theta}{\Delta S} = \frac{q \cdot B \cdot \sin a}{\gamma \cdot m \cdot u \cdot c} \xrightarrow[\omega_B = \frac{qB}{\gamma mc}]{R = \frac{\Delta S}{\Delta \theta}} \frac{1}{R} = \frac{\omega_B \cdot \sin a}{u} \Leftrightarrow R = \frac{u}{\omega_B \cdot \sin a} \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{2R}{\gamma} = \frac{2u}{\gamma \omega_B \sin a} \quad (2.15)$$

Έστω ότι το σωματίδιο εκπέμπει ένα φωτόνιο τη χρονική, t_1 , καθώς περνάει από τη θέση A κινούμενο προς τα αριστερά και ένα δεύτερο φωτόνιο μία μεταγενέστερη στιγμή t_2 φτάνοντας στην θέση B. Όπως συμπεραίνεται εύκολα η χρονική διαφορά εκπομπής των σημάτων είναι $\Delta t = t_2 - t_1$. Εφόσον η πληροφορία διαδίδεται με πεπερασμένη ταχύτητα, αυτή του φωτός στο κενό, ο παρατηρητής θα λάβει το πρώτο φωτόνιο σε χρόνο $t_{1,obs} > t_1$ και αντίστοιχα το δεύτερο σε χρόνο $t_{2,obs} > t_2$. Η ταχύτητα

της πηγής έχει συνιστώσα πάνω στην διεύθυνση παρατήρησης οπότε είναι αναμενόμενο, λόγω φαινομένου *Doppler*, η χρονική διαφορά $\Delta t_{obs} = t_{2,obs} - t_{1,obs}$ με την οποία ο παρατηρητής λαμβάνει τα σήματα δεν θα ταυτίζεται με αυτή στην οποία εκπέμφησαν αυτά, Δt . Για τον υπολογισμό του χρονικού διαστήματος αυτού που μεσολαβεί για τον παρατηρητή πρώτα θα εκφραστούν οι χρονικές στιγμές $t_{1,obs}$ και $t_{2,obs}$ ως προς τις t_1 και t_2 αντίστοιχα. Θεωρώντας την απόσταση από το σημείο B εώς τον παρατηρητή ως S' , ο χρόνος που απαιτείται για ένα φωτεινό σήμα να την διασχύσει θα ισούται με $\frac{S'}{c}$. Την διαδρομή αυτή εν τέλει θα την ακολουθήσουν και τα δύο φωτόνια. Το πρώτο εξ αυτών θα κινηθεί επιπλέον και κατά μήκος της χορδής του τόξου ΔS η οποία, από γεωμετρία, έχει μήκος $2R \sin(\frac{\Delta\theta}{2})$ οπότε ο αντίστοιχος χρόνος υπολογίζεται ως $\frac{2R}{c} \sin(\frac{\Delta\theta}{2})$. Τελικά^[6, 7]:

$$\left. \begin{array}{l} t_{1,obs} = t_1 + \frac{S'}{c} + \frac{2R}{c} \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \\ t_{2,obs} = t_2 + \frac{S'}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Delta t_{obs} = t_{2,obs} - t_{1,obs} = t_2 - t_1 - \frac{2a}{c} \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \Delta t - \frac{2R}{c} \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \approx \Delta t - \frac{2R}{c} \frac{\Delta\theta}{2} \xrightleftharpoons[\Delta\theta=\frac{2}{\gamma}]{} \Delta t_{obs} = \Delta t - \frac{2R}{\gamma c} \xrightleftharpoons[\Delta t=\frac{\Delta S}{u}=\frac{2R}{\gamma u}]{\Delta t=\frac{\Delta S}{u}=\frac{2R}{\gamma u}} \Delta t_{obs} = \Delta t \left(1 - \frac{u}{c}\right) \quad (2.16)$$

Η τελική λύση^[6, 7] συμφωνεί με το φαινόμενο *Doppler* το οποίο θέλει την παρατηρούμενη συχνότητα των φωτωνίων, η οποία είναι ανάλογη με το αντίστροφο του χρονικού διαστήματος, να παρουσιάζεται αυξημένη συγκριτικά με την εκπεμπόμενη όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή, $f = f_0 \left(\frac{c}{c-u}\right)$.

Σε πολύ σχετικιστικά συστήματα όπου τα σωματίδια έχουν ενέργειες τέτοιες ώστε $\gamma \gg 1$, η ταχύτητα των σωματιδίων θα προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός, $u \approx c \Rightarrow \frac{u}{c} \ll 1$. Οπότε μπορεί να εφαρμοστεί το ανάπτυγμα Taylor της έκφρασης $\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ γύρω από την μονάδα.

$$\gamma^2 \approx -\frac{1}{2(1-x)} = \frac{1}{2(x-1)} = \frac{1}{2(1-\frac{u}{c})} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{u}{c} = \frac{1}{2\gamma^2} \quad (2.17)$$

$$(2.13) \xrightarrow{(2.14)} \Delta t_{obs} = \frac{\Delta t}{2\gamma^2} \quad (2.18)$$

$$\Leftrightarrow \Delta t_{obs} = \frac{\Delta S}{2u\gamma^2} \xrightleftharpoons{(2.12)} \Delta t_{obs} = \frac{1}{\gamma^3 \omega_B \sin a}$$

$$\omega_{obs} \equiv \frac{1}{\Delta t_{obs}} = \gamma^3 \omega_B \sin a \quad (2.19)$$

Η τελευταία έκφραση περιγράφει την συχνότητα των παλμών που λαμβάνει ο παρατηρητής, η οποία είναι

μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της γυροκίνησης κατά έναν παράγοντα γ^3 . Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το εύρος των παλμών είναι κατά τον ίδιο παράγοντα μικρότερο από την περίοδο της κίνησης. Το μετρούμενο φάσμα αναμένεται να αποκόπτεται σε μία οριακή συχνότητα $\omega_c = \frac{3}{2}\omega_{obs}$ ^[6, 7].

Γνωρίζοντας ότι το ηλεκτρικό πεδίο του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που ακτινοβολεί το σωματίδιο είναι μία συνάρτηση της γωνίας ϑ , η οποία αναφέρεται σε απόκλιση γύρω από την διεύθυνση της κίνησης, μέσω του γινομένου $\gamma\theta$, μπορούν να εξαχθούν επιπλέον πληροφορίες για το φάσμα ακτινοβολίας. Τίθεται η χρονική στιγμή $t = 0$ έτσι ώστε ο παλμός που εκπέμπει το σωματίδιο να βρίσκεται στην διεύθυνση παρατήρησης και το μήκος της διαδρομής του φορτίου συμβολίζεται με s . Έπειτα από την γεωμετρία, όμοια με προηγουμένων, ότι $\theta = \frac{s}{R}$ και κατά συνέπεια, αντίστοιχα με την (2.12), $t = \frac{s}{u} \left(1 - \frac{u}{c}\right)$. Οπότε:

$$\begin{aligned} \gamma\theta &= \gamma \frac{s}{R} \xrightarrow{(2.11)} \gamma\theta = \gamma \frac{s \cdot \omega_B \cdot \sin a}{u} = \gamma \cdot \omega_B \cdot \sin a \frac{t}{\left(1 - \frac{u}{c}\right)} \Leftrightarrow \\ &\xrightarrow{(2.14)} \gamma\theta = 2 \cdot \gamma^3 \cdot \omega_B \cdot \sin a \cdot t \\ \gamma\theta &= 2 \cdot \omega_c \cdot t \end{aligned} \quad (2.20)$$

Τελικά το ηλεκτρικό πεδίο ϑ έχει εξάστηση από τον χρόνου μέσω της έκφρασης $\omega_c t$, $E(t) \propto g(\omega_c t)$. Μέσω του μετασχηματισμού Fourier το πεδίο μπορεί να εκφραστεί ως προς την εκάστοτε συχνότητα, ω , $E'(\omega) \propto \int_0^\infty g(\omega_c t) e^{i\omega t} dt \xrightarrow{\xi=\omega_c t} E'(\omega) \propto \int_0^\infty g(\xi) e^{i\frac{\omega}{\omega_c} \xi} d\xi$. Το τετράγωνο του μέτρου της συνάρτησης που προκύπτει είναι ανάλογο της ενέργειας ανά στερεά γωνία ανά κυκλική συχνότητα, $\frac{dW}{d\omega d\Omega}$. Ολοκληρώνοντας ως προς την στερεά γωνία και διαιρώντας με την περίοδο της κίνησης προκύπτει η ισχύς εκπομπής ενός σωματιδίου ανά κυκλική συχνότητα:

$$P(\omega) \equiv \frac{dW}{dt d\omega} = c_1 F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

όπου με c_1 εκφράζεται η σταθερά αναλογίας και την συνάρτηση F να είναι αδιάστατη. Το ολοκλήρωμα ως προς την μεταβλητή ω , θα δώσει την συνολική ισχύ σε όλες τις συχνότητες^[6, 7]:

$$P = \int_0^\infty P(\omega) d\omega \xrightarrow{x=\frac{\omega}{\omega_c}} P = \omega_c c_1 \int_0^\infty F(x) dx$$

Ακόμα και μη γνωρίζοντας την μορφή της ολοκλήρωτέας συνάρτησης, μπορεί να βρεθεί η εξάρτηση της σταθεράς κανονικοποίησης, c_1 , από τις φυσικές παραμέτρους του προβλήματος, καθώς η $F(x)$ είναι αδιάστατη συνάρτηση και το ολοκλήρωμα ορισμένο οπότε το αποτέλεσμα του θα είναι καθαρός αριθμός. Συγκρίνοντας την σχέση με αυτήν που εξήχθη στην παράγραφο για την ισχύ της ακτινοβολίας, $P = \frac{2q^4 B^2 \beta^2 \sin^2 a}{3m^2 c^3} \gamma^2$,

ενός κινούμενου σωματιδίου φορτίου q , μάζας m και συντελεστή ενέργειας γ , ο συντελεστής c_1 βρίσκεται να έχει την μορφή $c_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{q^3 \beta^2 B \sin a}{mc^2}$. Για πολύ σχετικιστικά σωματίδια $u \approx c \Leftrightarrow \beta \approx 1$.

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{q^3 B \sin a}{mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (2.21)$$

Ο όρος $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ επιλέχθηκε για την εξισορρόπηση των συμβάσεων που έγιναν για την μορφή της $F(x)$. Επιπλέον παρατηρείται ότι δεν υπάρχει εξάρτηση της ισχύς ακτινοβολίας ενός επιταχυνόμενου σωματιδίου από την ενέργεια αυτό παρά μόνο στην ίδια την κριτική συχνότητα.

Έχοντας θεωρήσει την ενεργειακή πυκνότητα των σωματιδίων να ακολουθεί νόμο δύναμης, για τα φορτία με ενέργειες σε εύρος $(E, E+dE)$, $N(E) = c_1 \cdot E^{-p} dE$ ή αντίστοιχα $N(\gamma) = c_2 \cdot \gamma^{-p} d\gamma$ καθώς $E = \gamma mc^2$. Πολλαπλασιάζοντας την κατανομή των σωματιδίων ανά ενέργεια, $N(\gamma) d\gamma$, με την σχέση 2.21 που εκράζει την ισχύ ενός εξ αυτών και ολοκλήρωνωντας ως προς τον παράγοντα Lorentz προκύπτει η συνολική ισχύς του πληθυσμού.

$$P_{tot} = c_2 \cdot \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} P(\omega) \gamma^{-p} d\gamma = c_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{q^3 B \sin a}{mc^2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \gamma^{-p} d\gamma$$

Πραγματοποιείται αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα θέτοντας $x = \frac{\omega}{\omega_c}$ και γνωρίζοντας ότι $\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_B \sin a = \frac{3}{2} \frac{q B \sin a}{mc} \gamma^2$.

$$\left. \begin{aligned} x = \frac{\omega}{\omega_c} \Leftrightarrow x = \frac{\omega}{\frac{3}{2} \frac{q B \sin a}{mc} \gamma^2} \Rightarrow x = \frac{\omega}{\frac{3}{2} \frac{q B \sin a}{mc} \gamma^2} \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{\frac{\omega}{\frac{3}{2} \frac{q B \sin a}{mc} x}} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{mc}{q B \sin a}} \omega^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \\ dx = -2 \frac{\omega}{\frac{3}{2} \frac{q B \sin a}{mc} \gamma^3} d\gamma \\ dx = -2 \left(\frac{3}{2} \frac{q B \sin a}{mc} \right)^{\frac{1}{2}} \omega^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} d\gamma \Leftrightarrow d\gamma = - \left(\frac{6 q B \sin a}{mc} \right)^{-\frac{1}{2}} \omega^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (2.22)$$

Οπότε το ολοκλήρωμα της συνολικής ισχύος [6, 7]:

$$\begin{aligned} P_{tot} &= -c_2 \left(\frac{6 q B \sin a}{mc} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{q^3 B \sin a}{mc^2} \left(\frac{2}{3} \frac{mc}{q B \sin a} \right)^{-\frac{p}{2}} \int_{x_1}^{x_2} F(x) \omega^{-\frac{p-1}{2}} x^{\frac{p-3}{2}} dx \\ P_{tot} &= -c_2 3^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{2}+3} q^{\frac{p-1}{2}+3} B^{\frac{p-1}{2}+1} m^{-\frac{p-1}{2}-1} c^{-\frac{p-1}{2}-2} \sin a^{\frac{p-1}{2}+1} \omega^{-\frac{p-1}{2}} \int_{x_1}^{x_2} F(x) x^{\frac{p-3}{2}} dx \\ &\Rightarrow P_{tot} = C \omega^{-\frac{p-1}{2}} \int_{x_1}^{x_2} F(x) x^{\frac{p-3}{2}} dx \end{aligned} \quad (2.23)$$

Τα άκρα x_1 και x_2 του ολοκληρώματος αντιστοιχούν στις ενέργειες γ_1 και γ_2 οπότε εξαρτώνται και από το ω . Όμως για μεγάλα ενεργειακά εύρη μπορούμε να υποθέσουμε $x_1 \approx 0$ και $x_2 \approx \infty$. Το ολοκλήρωμα

τότε γίνεται ορισμένο και το αποτέλεμα του είναι αριθμός που ενσωματώνεται στην σταθερά αναλογίας. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι η η συνολική ισχύς της κατανομής ακολουθεί, επίσης, νόμο δύναμης διαφορετικής κλίσης, $P_{tot}(\omega) \propto \omega^{-s}$. Η τιμή αυτής συσχετίζομένη με την κλίση π της ενεργειακής κατανομής των σωματιδίων του πληθυσμού υπολογίζεται^[6, 7]:

$$s = \frac{p - 1}{2} \quad (2.24)$$

Είναι γνωστή η μορφή του ολοκληρώματος:

$$\int_0^\infty x^\mu F(x) dx = \frac{2^{2\mu+1}}{\mu+2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3}\right) \quad (2.25)$$

Εν κατακλείδι η σχέση 2.23 στην οποία καταλήξαμε λειτουργεί ως γέφυρα μεταξύ των παρατηρησιακών δεδομένων που λαμβάνει ένας επίγειος παρατηρητής ή ένα διαστημόπλοιο σε τροχιά γύρω από τον πλανήτη και του συστήματος στο οποίο παράγεται η ακτινοβολία, για παράδειγμα ενός πίσακα πλάσματος ή υπολείμματος υπερκαινοφανούς. Μέσω αριθμητικών προσομοιώσεων μπορούμε να αφήσουμε συστήματα να εξελιχθούν χρονικά, έχοντας θέσει συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες, δημιουργώντας νόμους δύναμης συγκεκριμένων κλίσεων, p . Συγκρίνοντας αυτούς με την μορφή του φάσματος που λαμβάνουμε καταλήγουμε να απορρίπτουμε ή να δεχόμαστε ότι στο σύστημα δρουν οι εν λόγω μηχανισμοί.

Κεφάλαιο 3

Αποτελέσματα

Σκοπός της διαδικασίας που θα ακολουθηθεί παρακάτω είναι η μελέτη της εξέλιξης πληθυσμών σωματιδίων και έπειτα του φάσματος ακτινοβολίας αυτών, καθώς εισέρχονται σε πλασμοειδή. Για την μελέτη του πρώτου σκέλους θα σχεδιαστούν αλγόριθμοι σε περιβάλλον Matlab οι οποίοι θα επιλύουν την διαφορική εξίσωση (2.5), που αναφέρεται στην περιγραφή των φυσικών διαδικασιών που λαμβάρουν στα πλασμοειδή.

Εκτός από την συνάρτηση κατανομής, $f(\gamma, t)$, η οποία εκφράζει την διαμέριση των σωματιδίων στο ενεργειακό φάσμα, αναγκαία είναι και η χαρακτηριστική εξίσωση της κάθε ενέργειας, $\gamma(t)$. Η έκφραση αυτή περιγράφει πως αλλάζει η αρχική τιμή της ενέργειας ενός εγχυόμενου σωματιδίου στον χρόνο και βρίσκεται από την λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d\gamma}{dt} = R(\gamma, t)$. Η συνάρτηση $R(\gamma, t)$ εξαρτάται από τους μηχανισμούς επιτάχυνσης και απωλειών που δρουν στους πληθυσμούς του συστήματος.

Χαρακτηριστικά εγχυόμενων πληθυσμών:

- Οι εγχυόμενοι πληθυσμοί θα ακολουθούν νόμο δύναμης ως προς την ενεργειακή τους κατανομή, $f(\gamma, t) \propto \gamma^{-p}$. Επιλέγεται η μορφή αυτής καθώς προκύπτει ως αποτέλεσμα πρεωτευόντων εξτερικών μηχανισμών επιτάχυνσης σωματιδίων, όπως οι μηχανισμοί Fermi.
- Η έγχυση σωματιδίων στο πλασμοειδές συμβαίνει στιγμιαία σε χρονική στιγμή t_0 , $f(\gamma, t) \propto \delta(t - t_0)$. Έπειτα από αυτή το σύστημα θα θεωρείται απομονωμένο οπότε δεν θα εισέρχονται ή εξέρχονται σωματίδια.
- Καθώς η προηγούμενη συνθήκη δεν αντικατοπτρίζει ικανοποιητικά το φυσικό σύστημα, στην συνέχεια η έγχυση σωματιδίων στο πλασμοειδές θα γίνει συνεχής, $f(\gamma, t) \propto H(t - t_0)$. Ως αποτέλεσμα

σε κάθε χρονικό βήμα που θα πραγματοποιεί ο αλγόριθμος θα εισέρχονται εκ νέου σωματίδια κατανεμημένα ως προς τις ενέργειες με νόμο δύναμης ταυτόσημο με αυτόν των αρχικών.

4. Για το απλοϊκότερο σύστημα αρχικά θα θεωρείται ότι στο σύστημα δρουν μόνο μηχανισμοί επιτάχυνσης.
5. Η προηγούμενη συνθήκη δεν αποτελεί ικανοποιητική προσέγγιση του συστήματος καθώς τα σωματίδια με επιτάχυνση μη μηδενικού μέτρου ακτινοβολούν. Οπότε θα γραφτεί ένας αλγόριθμος στον οποίο τα σωματίδια θα ακτινοβολούν κατά σύγχροτρον χωρίς όμως να επιταχύνονται.
6. Ως επόμενο βήμα θα συνδυάσουμε τους δύο ώστε να έρθουμε πιο κοντά στην περιγραφή του πραγματικού συστήματος και να συγχρίνουμε τις συνεισφορές των μηχανισμών.

Τέλος, θεωρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο ακολουθεί μία χρονική συνάρτηση μορφής δύναμης

$$B = B_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^a \quad (3.1)$$

Θα εξεταστούν οι περιπτώσεις για $a=0$, ως η απλούστερη, και $a=1$, η οποία από αριθμητικές προσομοιώσεις θεωρείται αντιπροσωπευτική του συστήματος. Στην πρώτη περίπτωση είναι δυνατή η αναλυτική επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν αποτέλεσμα το οποίο θα βοηθήσει στην επαλήθευση των αποτελεσμάτων του κώδικα ώστε αυτός έπειτα να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του συστήματος όπου $a=1$. Στο σύστημα αυτό δεν θα είναι ως επί τω πλείστον δυνατή η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων αναλυτικά όμως πλησιάζει παραπάνω στα πραγματικά συστήματα καθώς το μέτρο του πεδίου αυξάνεται λόγω της συμπίεσης του εσωτερικού των πλασμοειδών, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο (2.4).

3.1 Συστήματα στιγμιαίας έγχυσης

Θεωρούμε ότι αρχικά στο πλασμοειδές δεν υπάρχουν σχετικιστικά φορτισμένα σωμάτια, αλλά την χρονική στιγμή t_0 εισέρχεται ενάς πληθυσμός σωματιδίων ο οποίος ακολουθεί κατανομή νόμου δύναμης ως προς τις ενέργειες των σωματιδίων, γ^{-p} , σε εύρος $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$. Στις επόμενες χρονικές στιγμές το σύστημα θεωρείται απομονωμένο οπότε δεν εισέρχονται ή διαφεύγουν σωματίδια. Ως αποτέλεσμα η συνάρτηση πηγής, $S(\gamma, t)$, που εκφράζει αυτή τη συμπεριφορά κι εμφανίζεται στην διαφορική εξίσωση (2.5) θα έχει την μορφή $S(\gamma, t) = N_0 \cdot \gamma^{-p} \cdot H(\gamma - \gamma_{min}) \cdot H(\gamma_{max} - \gamma) \cdot \delta(t - t_0)$. Ο συντελεστής N_0 δηλώνει την

κανονικοποίηση της $S(\gamma, t)$ ενώ η συνάρτηση $H(x)$ καλείται συνάρτηση βήματος και ορίζεται ως:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Τέλος η συνάρτηση $\delta(x)$ ονομάζεται συνάρτηση *Dirac* και χαρακτηρίζεται από τις εξής ιδιότητες:

- $\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

Οπότε κατά συνέπεια ισχύει για μία συνάρτηση $g(x)$ ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot g(x) dx = g(0)$$

Στις προσομοιώσεις που θα ακολουθήσουν θεωρούμε τις τιμές των παραμέτρων όπως αναγράφονται στον πίνακα (3.1).

Παράμετρος	Σύμβολο	Τιμή	Μονάδες
Συντελεστής κανονικοποίησης	N_0	10^8	—
Εκθέτης νόμου δύναμης	p	1.5	—
Ελάχιστη ενέργεια εγχυόμενου πληθυσμού	γ_{min}	10	—
Μέγιστη ενέργεια εγχυόμενου πληθυσμού	γ_{max}	100	—
Χρονική στιγμή έγχυσης	t_0	0.1	s
Τελική χρονική στιγμή	t_{fin}	$5t_0$	s
Χρονικό βήμα	dt	$10^{-3}t_0$	s
Ενεργειακό βήμα	d γ	10^{-1}	—

Πίνακας 3.1: Λίστα παραμέτρων για το πρόβλημα της στιγμιαίας έγχυσης.

3.1.1 Επίδραση μόνο μηχανισμού επιτάχυνσης

Αρχικά θα θεωρήσουμε ότι τα σωματίδια δεν χάνουν ενέργεια κατά την κίνηση τους αλλά μόνο κερδίζουν λόγω της διατήρησης της μαγνητικής ροπής, $\mu \propto \frac{\gamma^2 - 1}{B}$, βλ. παράρτημα (A').

$$\begin{aligned} \mu = const \Leftrightarrow \dot{\mu} = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\gamma^2 - 1}{B} \right] = 0 \\ \frac{2\gamma\dot{\gamma}}{B} - \frac{(\gamma^2 - 1)\dot{B}}{B^2} = 0 &\stackrel{B \neq 0}{\Leftrightarrow} 2\gamma\dot{\gamma} - \frac{(\gamma^2 - 1)\dot{B}}{B} = 0 \\ \dot{\gamma} &= \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} \frac{\dot{B}}{B} \end{aligned}$$

Εφόσον αναφερόμαστε σε σχετικιστικά σωματίδια το τετράγωνο του συντελεστή Lorentz θα είναι σημαντικά μεγαλύτερο από την μονάδα οπότε μπορούμε να απλοποιήσουμε την προηγούμενη έκφραση στην ακόλουθη:

$$\dot{\gamma} \approx \frac{\gamma}{2} \frac{\dot{B}}{B} \quad (3.3)$$

Θεωρώντας ότι το μαγνητικό πεδίο ακολουθεί μία συνάρτηση του χρόνου της μορφής νόμου δύναμης, $B(t) \propto t^a$:

$$\begin{aligned} \dot{B} = at^{a-1} \Rightarrow \frac{\dot{B}}{B} &= \frac{a}{t} \Leftrightarrow \\ \dot{\gamma} &= a \frac{\gamma}{2t} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Αναλυτική λύση

Επίλυση χαρακτηριστικής καμπύλης $\gamma(t)$:

$$\frac{d\gamma}{dt} = a \frac{\gamma}{2t} \Leftrightarrow \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{a}{2} \frac{dt}{t} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right) = \frac{a}{2} \ln \left(\frac{t}{t_0} \right) \Leftrightarrow \gamma = \gamma_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{a}{2}} \quad (3.5)$$

Επίλυση της σχέσης 2.5:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= S(\gamma, t) - f \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \\ \Rightarrow \frac{df}{dt} &= N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) \delta(t - t_0) - f(\gamma, t) \frac{a}{2t} \\ \Leftrightarrow \frac{df}{dt} + f(\gamma, t) \frac{a}{2t} &= N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) \delta(t - t_0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Για την ομογενή εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} + f(\gamma, t) \frac{a}{2t} = 0 &\Leftrightarrow \frac{df}{f} = -\frac{a}{2} \frac{dt}{t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f}{f_0}\right) = -\frac{a}{2} \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \\ &\Leftrightarrow f_{hom} = f_0 \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

Για την μη ομογενή εξίσωση:

$$\begin{aligned} f(\gamma, t) &= \int_{-\infty}^t S(\gamma_*, t_*) \frac{f_{hom}(\gamma_*, t_*)}{f_0} dt_* \\ f(\gamma, t) &= \int_{-\infty}^t S(\gamma_*, t_*) \left(\frac{t_*}{t}\right)^{\frac{a}{2}} dt_* \\ f(\gamma, t) &= \int_{-\infty}^t N_0 \gamma_*^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) \delta(t_* - t_0) \left(\frac{t_*}{t}\right)^{\frac{a}{2}} dt_* \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\gamma_*}{dt_*} = a \frac{\gamma_*}{2t_*} \\ \gamma = \gamma_* \left(\frac{t}{t_*}\right)^{\frac{a}{2}} \\ \delta(t_* - t_0) = \frac{\delta(\gamma_* - \gamma_0)}{\frac{d\gamma_*}{dt_*}|_{\gamma_0=\gamma_*}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} dt_* = \frac{2t_*}{a\gamma_*} d\gamma_* \\ \frac{\gamma_*}{\gamma} = \left(\frac{t_*}{t}\right)^{\frac{a}{2}} \\ \delta(t_* - t_0) = \delta(\gamma_* - \gamma_0) \frac{d\gamma_*}{dt_*}|_{\gamma_0=\gamma_*} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} dt_* = \frac{2}{a\gamma_*} t \left(\frac{\gamma_*}{\gamma}\right)^{\frac{2}{a}} d\gamma_* \\ \frac{\gamma_*}{\gamma} = \left(\frac{t_*}{t}\right)^{\frac{a}{2}} \\ \delta(t_* - t_0) = \delta(\gamma_* - \gamma_0) a \frac{\gamma_0}{2t_0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(\gamma, t) &= \int_{t_0}^t N_0 \gamma_*^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) \delta(\gamma_* - \gamma_0) a \frac{\gamma_0}{2t_0} \frac{2t}{a\gamma^{\frac{2}{a}}} \gamma_*^{\frac{2}{a}-1} \frac{\gamma_*}{\gamma} d\gamma_* \Leftrightarrow \\ f(\gamma, t) &= \frac{N_0 t \gamma_0}{t_0 \gamma^{\frac{2}{a}+1}} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \gamma_*^{-p+\frac{2}{a}} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) \delta(\gamma_* - \gamma_0) d\gamma_* \Leftrightarrow \\ f(\gamma, t) &= \frac{N_0 t \gamma_0^{-p+\frac{2}{a}+1}}{t_0 \gamma^{\frac{2}{a}+1}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Αριθμητική προσέγγιση

Για την πρόβλεψη της χρονικής εξέλιξης του συστήματος με τις προαναφερθείσες αρχικές συνθήκες σχεδιάστηκε ένα πρόγραμμα σε περιβάλλον Matlab. Το πρόγραμμα αυτό επιλύει το σύστημα των πεπελεγμένων διαφορικών εξισώσεων (3.4) και (3.6). Για την επίλυση αυτή χρησιμοποιείται η συνάρτηση ODE η οποία έχει την δυνατότητα ξεκινώντας από ένα συγκεκριμένο και πεπερασμένο εύρος αρχικών ενεργειακών τιμών, γ_0 , να το εξελίσσει στο χρόνο λύνοντας την (3.4). Η επίλυση αυτή χρησιμοποιεί την μέθοδο του παραλληλογράμμου η οποία υπολογίζει την τιμή για το επακόλουθο χρονικό βήμα μέσω της αναδρομικής σχέσης $\gamma(t + dt) = \gamma(t) + dt \frac{d\gamma}{dt}$, με την $\frac{d\gamma}{dt}$ να δίνεται από την (3.4). Παράλληλα με την διαδικασία αυτή,

η συνάρτηση ODE χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα που διεξάγει ώστε μέσω της ίδιας αναδρομικής σχέσης να λύσει την διαφορική εξίσωση (3.6).

Το πρόγραμμα τρέχει δύο φορές, η πρώτη για σταθερό μαγνητικό πεδίο, δηλαδή ο εκθέτης α της σχέσης (3.1) θα είναι μηδενικός. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η χρονική παράγωγος του πεδίου να είναι μηδενική και να μην υπάρχει επιτάχυνση οπότε δεν θα παρατηρούσαμε κάποια μεταβολή στο σύστημα. Θα θεωρήσουμε ότι παρά το σταθερό πεδίο ο μηχανισμός επιτάχυνσης έχει την μορφή της (3.4) με $\alpha=1$. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα αυτό έχει ως συνέπεια το σύστημα να μην διαφέρει καθόλου από την δεύτερη περίπτωση κατά την οποία το πεδίο είναι ανάλογο του χρόνου. Όμως, να σημειωθεί, ότι η αποδοχή αυτή θα χρειαστεί στις επόμενες παραγράφους όπου θα έχουν ταυτόχρονη επίδραση των μηχανισμών επιτάχυνσης και απωλειών σύγχροτρον και θα μελετάμε την εξέλιξη του συστήματος για σταθερό πεδίο.

Οι υπόλοιπες παράμετροι που εισήχθησαν στον κώδικα ώστε να δώσει τα αποτελέσματα που φαίνονται παρακάτω φαίνονται στον πίνακα (3.1).

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης η ODE ζητάει να εκφραστεί η (3.6) σε μορφή $\frac{\partial f}{\partial t} + c(\gamma, t, f) \frac{\partial f}{\partial \gamma} = u(\gamma, t, f)$. Οπότε η σχέση που επιλύεται είναι η (2.4), η οποία στο συγκεκριμένο πρόβλημα εκφράζεται ως:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\gamma}{2t} = N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) \delta(t - t_0) - f \frac{1}{2t} \quad (3.8)$$

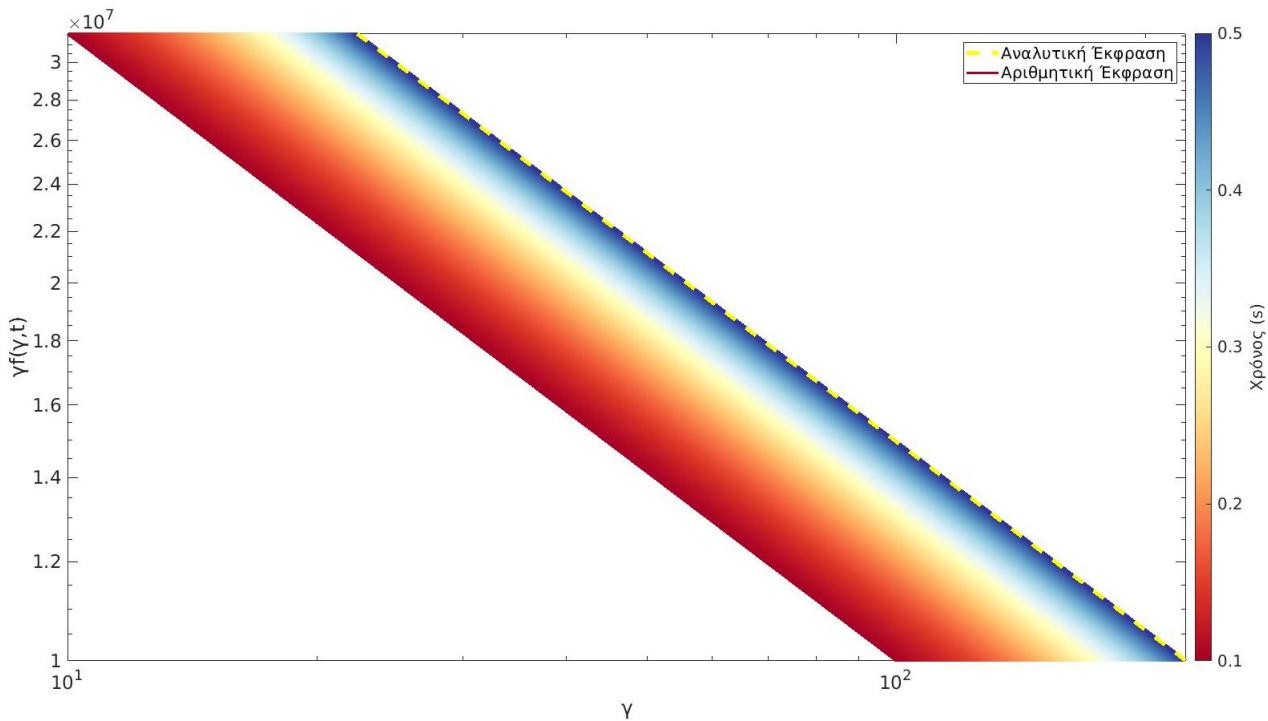
Στο απόσπασμα του προγράμματος που ακολουθεί η επίλυση πραγματοποιείται σε ένα χρονικό εύρος $[t_0, t_{fin}]$, με τις τιμές των ενεργειών των σωματιδίων την χρονική στιγμή t_0 να ισαπέχουν κατά dγ και να καλύπτουν το εύρος $[\gamma_{in}, \gamma_{fin}]$.

```
tval=t0:dt:tfin ;
N=length( tval );
M=fix (( g_max-g_min )/dg)+1;
a=1;
c=@(g ,t ,f) g*a*( 0.5 / t );
u=@(g ,t ,f) N0*g^(-p)*exp( -((t-t0)/0.001)^2 )-a*( 0.5 / t )*f ;
f0=@(g) N0*g^(-p);
i=1;
for g0=g_min:dg:g_max
```

```

G= @(t,w) [ c(w(1), t, w(2)) ; u(w(1), t, w(2)) ];
[ ts ,ws] = ode45(G, tval ,[ g0 ;f0 (g0 ) ]);
gamma (:, i)=ws (:, 1);
dist _fun (:, i)=ws (:, 2);
i=i+1;
end

```



Σχήμα 3.1: Χρονική εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής ηλεκτρονίων, $\gamma f(\gamma, t)$, συναρτήσει του συντελεστή Lorentz γ όπως υπολογίζεται αριθμητικά (χρωματιστές καμπύλες) στην περίπτωση επιτάχυνσης λόγω αδιαβατικής συμπίεσης των πλασμοειδών. Για λόγους σύγχρισης, παρουσιάζεται και η αναλυτική λύση (στικτή γραμμή) για το τελικό που μελετήθηκε το σύστημα. Για τις τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν, βλέπε Πίνακα (3.1)

Στο σχήμα (3.1) φαίνεται η επίδραση του μηχανισμού στην αρχική κατανομή που εγχύθηκε στο πλασμοειδές. Παρατηρούμε την μετατόπιση των σωματιδίων προς τους υψηλότερους Lorentz συντελεστές. Επιπλέον εξάγουμε ότι ο μηχανισμός επιτάχυνσης αυτός δεν αλλάζει την αρχική κλίση της κατανομής σωματιδίων, αποτέλεσμα που αιτιολογείται πλήρως καθώς η κλίση του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης κατανομής ταυτίζεται με αυτήν της χαρακτηριστικής εξίσωσης που δίνει την χρονική εξέλιξη της ενέργειας του εκάστοτε σωματιδίου (βλ. σχέσεις 3.4 και 3.6).

Για την επαλήθευση της αριθμητικής λύσης σχεδιάσαμε και την αναλυτική έκφραση για την τελευταία

χρονική, όπως υπολογίστηκε στην υποενότητα (3.1.1).

3.1.2 Επίδραση μόνο μηχανισμού απωλειών σύγχροτρον

Από την σχέση Larmor (βλ. παράγραφο 2.5), σχέση (2.13), η ισχύς ακτινοβολίας ενός σωματιδίου επιτάχυνσης μη μηδενικού μέτρου είναι ανάλογη των τετραγώνων της ενέργειας αυτού καθώς και του μέτρου του μαγνητικού πεδίου, $\frac{d\gamma}{dt} = -L\gamma(t)^2 B(t)^2$. Συμβολίζουμε την σταθερά αναλογίας με L όπου $L > 0$. Θεωρώντας ότι το μαγνητικό πεδίο ακολουθεί μία συνάρτηση του χρόνου της μόρφης νόμου δύναμης, $B(t) = B_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^a$:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -L\gamma(t)^2 B_0^2 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2a} \quad (3.9)$$

Οι σταθερές B_0 και t_0 αντιπροσωπεύουν τις αρχικές συνθήκες του συστήματος, με την πρώτη να εκφράζει την τιμή του μέτρου του μαγνητικού πεδίου την χρονική στιγμή t_0 . Θεωρούμε για ευκολία ότι το B_0 απορροφάται στην σταθερά L .

$$\frac{d\gamma}{dt} = -L\gamma(t)^2 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2a} \quad (3.10)$$

Αναλυτική λύση

Επίλυση χαρακτηριστικής καμπύλης $\gamma(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} = -L\gamma(t)^2 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2a} \Leftrightarrow \frac{d\gamma}{\gamma^2} = -L \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2a} dt \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} = \frac{L}{(2a+1)t_0^{2a}} (t^{2a+1} - t_0^{2a+1}) \Leftrightarrow \\ \gamma(t) = \left\{ \frac{1}{\gamma_0} + \frac{Lt_0}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Επίλυση της σχέσης 2.5:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= S(\gamma, t) - f \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \\ \Rightarrow \frac{df}{dt} &= N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) \delta(t - t_0) - f(\gamma, t) \left[-2L\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2a} \right] \\ \Leftrightarrow \frac{df}{dt} - 2Lf(\gamma, t)\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2a} &= N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) \delta(t - t_0) \end{aligned}$$

Για την ομογενή εξίσωση:

$$\frac{df}{dt} + -2Lf(\gamma, t)\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{df}{f} = 2L\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2a} dt \xrightarrow{3.11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{f} &= 2L \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \left\{ \frac{1}{\gamma_0} + \frac{Lt_0}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^{-1} dt \Leftrightarrow \\
\frac{df}{f} &= 2L\gamma_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \left\{ \frac{1}{\gamma_0} + \frac{Lt_0}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^{-1} dt \Leftrightarrow \\
\ln \left(\frac{f}{f_0} \right) &= 2\ln \left\{ 1 + \frac{L\gamma_0 t_0}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\} \Leftrightarrow \\
f_{hom} &= f_0 \left\{ 1 + \frac{L\gamma_0 t_0}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^2
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Για την μη ομογενή εξίσωση:

$$\begin{aligned}
f(\gamma, t) &= \int_{-\infty}^t S(\gamma_*, t_*) \frac{f_{hom}(\gamma_*, t_*)}{f_0} dt_* \\
f(\gamma, t) &= \int_{-\infty}^t S(\gamma_*, t_*) \left\{ 1 + \frac{L\gamma_* t_*}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_*} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^2 dt_* f(\gamma, t) &= \int_{-\infty}^t N_0 \gamma_*^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) \delta(t_* - t) dt
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\gamma_*}{dt_*} = -L\gamma_*^2 \left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a} \\ \gamma = \left\{ \frac{1}{\gamma_*} + \frac{Lt_*}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_*} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^{-1} \\ \delta(t_* - t_0) = \frac{\delta(\gamma_* - \gamma_0)}{\frac{d\gamma_*}{dt_*}|_{\gamma_0=\gamma_*}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} dt_* = -\frac{d\gamma_*}{L\gamma_*^2 \left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a}} \\ \gamma = \frac{\gamma_*}{1 + \frac{L\gamma_* t_*}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_*} \right)^{2a+1} - 1 \right]} \\ \delta(t_* - t_0) = \delta(\gamma_* - \gamma_0) \frac{d\gamma_*}{dt_*}|_{\gamma_0=\gamma_*} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} dt_* = -\frac{d\gamma_*}{L\gamma_*^2 \left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a}} \\ \frac{\gamma_*}{\gamma} = 1 + \frac{L\gamma_* t_*}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_*} \right)^{2a+1} - 1 \right] \\ \delta(t_* - t_0) = -\delta(\gamma_* - \gamma_0) L\gamma_0^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
f(\gamma, t) &= N_0 \int_{\gamma_0}^{\gamma} \gamma_*^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) \delta(\gamma_* - \gamma_0) L\gamma_0^2 \left(\frac{\gamma_*}{\gamma} \right)^2 \frac{1}{L\gamma_*^2 \left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a}} d\gamma_* \Leftrightarrow \\
f(\gamma, t) &= \frac{N_0 \gamma_0^2}{\gamma^2} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \gamma_*^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) \delta(\gamma_* - \gamma_0) \frac{1}{\left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a}} d\gamma_* \Leftrightarrow \\
\gamma_*(t) &= \left\{ \frac{1}{\gamma_0} + \frac{Lt_0}{2a+1} \left[\left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^{-1} \Leftrightarrow \frac{t_*}{t_0} = \left[\frac{2a+1}{Lt_0} \left(\frac{1}{\gamma_*} - \frac{1}{\gamma_0} \right) + 1 \right]^{\frac{1}{2a+1}}
\end{aligned}$$

$$f(\gamma, t) = \frac{N_0 \gamma_0^2}{\gamma^2} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \gamma_*^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) \delta(\gamma_* - \gamma_0) \left[\frac{2a+1}{Lt_0} \left(\frac{1}{\gamma_*} - \frac{1}{\gamma_0} \right) + 1 \right]^{-\frac{2a}{2a+1}} d\gamma_* \Rightarrow \\ f(\gamma, t) = \frac{N_0 \gamma_0^{-p+2}}{\gamma^2} \quad (3.13)$$

Αριθμητική προσέγγιση

Όμοια με την διαδικασία που ακολουθήθηκε στην παράγραφο (3.1.1) γράφηκε πρόγραμμα σε Matlab η οποία επιλύει το σύστημα των πεπελεγμένων διαφορικών εξισώσεων (3.10) και 3.18. Για την επίλυση αυτή χρησιμοποιείται ξανά η συνάρτηση ODE.

Τρέχουμε το πρόγραμμα για δύο περιπτώσεις: (i) για σταθερή τιμή μαγνητικού πεδίου, $B = B_0$, όπου $\alpha=0$ και (ii) για την τιμή $\alpha=1$ κατά την οποία το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται ανάλογα με τον χρόνο.

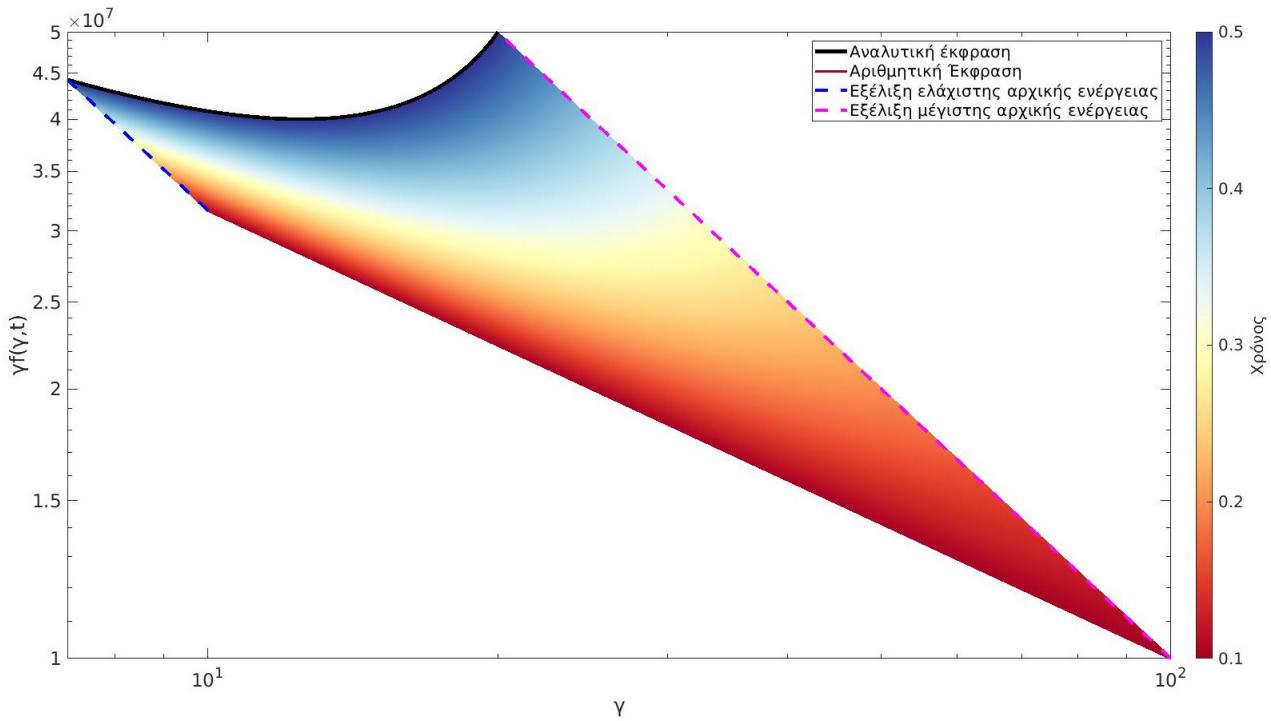
Οι υπόλοιπες παράμετροι που εισήχθησαν στον κώδικα ώστε να δώσει τα αποτελέσματα που φαίνονται παρακάτω φαίνονται στον πίνακα (3.1).

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης η ODE ζητάει να εκφραστεί η (3.6) μερικής διαφορικής της μορφής $\frac{\partial f}{\partial t} + c(\gamma, t, f) \frac{\partial f}{\partial \gamma} = u(\gamma, t, f)$. Οπότε η σχέση που επιλύεται είναι η (2.4). Η οποία στο συγκεκριμένο πρόβλημα εκφράζεται ως:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial \gamma} \left[L\gamma(t)^2 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \right] = N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) \delta(t - t_0) + f(\gamma, t) 2L\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \quad (3.14)$$

Στο απόσπασμα του προγράμματος που ακολουθεί η επίλυση πραγματοποιείται σε ένα χρονικό εύρος $[t_0, t_{fin}]$, με τις τιμές των ενεργειών των σωματιδίων την χρονική στιγμή t_0 να ισαπέχουν κατά dg και να καλύπτουν το εύρος $[\gamma_{in}, \gamma_{fin}]$.

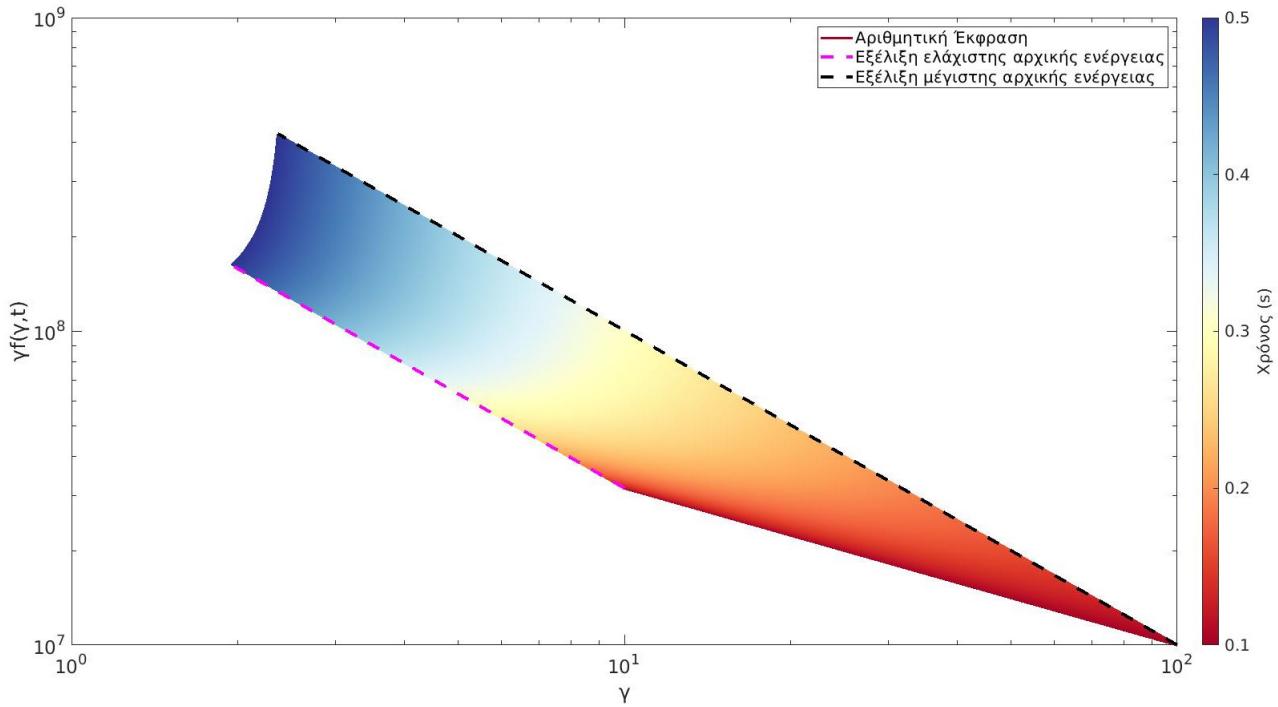
```
a=1;
tval=t0 : dt : tfin ;
c=@(x,t,u) -L*(t/t0)^(2*a)*x^2;
N=length(tval);
M=fix((g_max-g_min)/dg)+1;
i=1;
for g0=g_min : dg : g_max
```



Σχήμα 3.2: Χρονική εξέλιξη συνάρτηση συνάρτησης κατανομής επί τον συντελοτή Lorentz συναρτήσει του συντελεστή Lorentz με μαγνητικό πεδίο σταθερού μέτρου

```
f=@(x,t,u) N0*x0^(-p)*exp(-((t-t0)/0.001)^2)+2.0*L*(t/t0)^(2*a)*g*f;
f0=@(g) N0*g0^(-p);
G= @(t,w) [c(w(1), t, w(2)) ; u(w(1), t, w(2))];
[ts,ws] = ode45(G, tval , [g0;f0(g0)]);
gamma(:, i)=ws(:, 1);
dist_fun(:, i)=ws(:, 2);
i=i+1;
end
```

Σε αντίθεση με τον μηχανισμό επιτάχυνσης, ο μηχανισμός ακτινοβολίας σύγχροτρον, όπως φαίνεται στα σχήματα (3.2) και (3.3), αλλάζει την μορφή της συνάρτησης κατανομής με την πάροδο του χρόνου. Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει λόγω των διαφορετικών εξαρτήσεων των χρονικών μεταβολών της ενέργειας και της συνάρτησης κατανομής από την ενέργεια. Η χρονική μεταβολή της ενέργειας του εκάστοτε σωματιδίου εξαρτάται από το τετράγωνο αυτής (βλ. σχέση 3.18) ενώ η χρονική μεταβολή της συνάρτησης κατανομής είναι ανάλογη της πρώτης δύναμης αυτής όπως και της πρώτης δύναμης της ενέργειας. Ως αποτέλεσμα τα σωματίδια υψηλότερων συντελεστών Lorentz χάνουν ενέργεια γρηγορότερα από τα πιο χαμηλοενέργειακά



Σχήμα 3.3: Χρονική εξέλιξη συνάρτηση συνάρτησης κατανομής επί τον συντελστή Lorentz συναρτήσει του συντελεστή Lorentz με μαγνητικό πεδίο μέτρου ανάλογου του χρόνου

σωματίδια, εφόσον $\gamma^2 > \gamma$. Κατά συνέπεια το εύρος του ενεργειακού φάσματος της κατανομής μικραίνει. Μπορεί να καταλάβει κανείς καλύτερα τη συμπεριφορά αυτή παρατηρώντας την χρονική εξέλιξη των ορίων $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$ (διακεκομένες γραμμές στα σχήματα (3.2) και (3.3)). Επιπλέον, εξαιτίας της εξάρτησης των προαναφερθεισών εξισώσεων, παρατηρούμε, κυρίως από το σχήμα (3.3), ότι εφόσον τα σωματίδια υψηλότερων ενεργειών ψύχονται γρηγορότερα καθώς περνά ο χρόνος τείνουν να αποκτήσουν ενέργεια ίδιας τιμής με αυτή των χαμηλοενεργειακών. Ως αποτέλεσμα μετά από κάποια χρονική στιγμή υπάρχει μία τιμή ενέργειας γύρω από την οποία συσσωρεύονται τα σωματίδια, τείνοντας η κατανομή να αποκτήσει μονοενεργειακή μορφή.

Η συνέπεια του κώδικα επαληθεύεται μέσω του σχήματος (3.2) στο οποίο έχει σχεδιαστεί, για την τελευταία χρονική στιγμή, η αναλυτική έκφραση, όπως υπολογίστηκε στην υποενότητα.

Τέλος συγχρίνοντας τα σχήματα (3.2) και (3.3) βλέπουμε ότι καθώς, στο δεύτερο, το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου, ο μηχανισμός ψύξης γίνεται πιο αποδοτικός. Ως αποτέλεσμα στο ίδιο χρονικό διάστημα το ενεργειακό εύρος της κατανομής έχει μειωθεί σημαντικά σε σχέση με το πρώτο γράφημα και η τιμή του συντελεστή Lorentz γύρω από την οποία τείνουν να συσσωρευτούν τα φορτία είναι μετατοπισμένα προς τις χαμηλότερες ενέργειες.

3.1.3 Επίδραση μηχανισμών επιτάχυνσης και απωλειών σύγχροτρον

Καθώς οι μηχανισμοί είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι η διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει την μεταβολή της ενέργειας ενός σωματιδίου στον χρόνο, από την αρχή της επαλληλίας, θα είναι ίση με το άθροισμα του κέρδους λόγω επιτάχυνσης και των απωλειών λόγω σύγχροτρον, $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_+ + \dot{\gamma}_-$. Θεωρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο έχει την μορφή $B(t) = B_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^a$. Στην περίπτωση αυτή ο όρος $\dot{\gamma}_+$ εκφράζει την σχέση (3.4) ενώ ο όρος $\dot{\gamma}_-$ εκφράζει την σχέση (3.10).

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_+ + \dot{\gamma}_- = a \frac{\gamma(t)}{2t} - L \gamma(t)^2 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2a} \quad (3.15)$$

Αναλυτική λύση

Επίλυση χαρακτηριστικής καμπύλης $\gamma(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= a \frac{\gamma}{2t} - L \gamma^2 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2a} \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} - \frac{a}{2\gamma t} &= -L \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2a} \\ \Leftrightarrow -\frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} t^{\frac{a}{2}} + \frac{a}{2\gamma} t^{\frac{a}{2}-1} &= L \frac{t^{\frac{5a}{2}}}{t_0^{2a}} \\ \Leftrightarrow \frac{t^{\frac{a}{2}}}{\gamma} &= \frac{2L}{5a+2} \frac{t^{\frac{5a+2}{2}}}{t_0^{2a}} + c \end{aligned} \quad (3.16)$$

Με c την σταθερά ολοκλήρωσης. Για $t = t_0 \Rightarrow \gamma = \gamma_0$:

$$\frac{t_0^{\frac{a}{2}}}{\gamma_0} = \frac{2L}{5a+2} \frac{t_0^{\frac{5a+2}{2}}}{t_0^{2a}} + c \Leftrightarrow c = \frac{t_0^{\frac{a}{2}}}{\gamma_0} - \frac{2L}{5a+2} t_0^{\frac{a}{2}+1}$$

Τελικά:

$$\begin{aligned} \frac{t^{\frac{a}{2}}}{\gamma} &= \frac{2L}{(5a+2)t_0^{2a}} \left(t^{\frac{5a+2}{2}} - t_0^{\frac{5a+2}{2}} \right) + \frac{t_0^{\frac{a}{2}}}{\gamma_0} \\ \Leftrightarrow \gamma(t) &= t^{\frac{a}{2}} \left[\frac{2L}{(5a+2)t_0^{2a}} \left(t^{\frac{5a+2}{2}} - t_0^{\frac{5a+2}{2}} \right) + \frac{t_0^{\frac{a}{2}}}{\gamma_0} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Η συνάρτηση κατανομής των σωματιδίων δίνεται από την σχέση (2.5) ως:

$$\frac{df}{dt} = S(\gamma, t) - f \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) \delta(t - t_0) - f(\gamma, t) \left[\frac{a}{2t} - 2L\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{df}{dt} + \left[\frac{a}{2t} - 2L\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \right] f(\gamma, t) = N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) \delta(t - t_0)$$

Για την ομογενή εξίσωση:

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} + \left\{ \frac{a}{2t} - 2Lt^{\frac{a}{2}} \left[\frac{2L}{(5a+2)t_0^{2a}} \left(t^{\frac{5a+2}{2}} - t_0^{\frac{5a+2}{2}} \right) + \frac{t_0^{\frac{a}{2}}}{\gamma_0} \right]^{-1} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \right\} f(\gamma, t) = 0 \quad (3.18)$$

Η συνάρτηση (3.18) δεν λύνεται αναλυτικά.

Παρατηρούμε ότι για σταθερό μαγνητικό πεδίο, δηλαδή $\alpha=0$, δεν υπάρχει ο όρος της επιτάχυνσης (;;).

Οπότε για την περίπτωση σταθερού μαγνητικού πεδίου θεωρούμε τον όρο επιτάχυνσης να έχει την μορφή της σχέσης (3.4) με $\alpha=1$. Για όλες τις υπόλοιπες τιμές του α επιλύουμε την (3.1.3). Για $B = B_0$:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma}{2t} - L\gamma^2 \Leftrightarrow \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} - \frac{1}{2\gamma t} = -L \Leftrightarrow -\frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} \sqrt{t} + \frac{1}{2\gamma \sqrt{t}} = L\sqrt{t} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{t}}{\gamma} = \frac{2}{3} Lt^{\frac{3}{2}} + c' \quad (3.19)$$

Με c' την σταθερά ολοκλήρωσης. Για $t = t_0 \Rightarrow \gamma = \gamma_0$:

$$\frac{\sqrt{t_0}}{\gamma_0} = \frac{2}{3} Lt_0^{\frac{3}{2}} + c' \Leftrightarrow c' = \frac{\sqrt{t_0}}{\gamma_0} - \frac{2}{3} Lt_0^{\frac{3}{2}}$$

Τελικά:

$$\frac{\sqrt{t}}{\gamma} = \frac{2}{3} L(t - t_0) + \frac{\sqrt{t_0}}{\gamma_0}$$

$$\gamma(t) = \frac{\sqrt{t}}{\frac{2}{3} L(t^{\frac{3}{2}} - t_0^{\frac{3}{2}}) + \frac{\sqrt{t_0}}{\gamma_0}} \quad (3.20)$$

Η συνάρτηση κατανομής των σωματιδίων δίνεται από την σχέση (2.5) ως:

$$\frac{df}{dt} = S(\gamma, t) - f \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) \delta(t - t_0) - f(\gamma, t) \left[\frac{1}{2t} - 2L\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{df}{dt} + \left[\frac{1}{2t} - 2L\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \right] f(\gamma, t) = N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) \delta(t - t_0)$$

Για την ομογενή εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} + \left[\frac{1}{2t} - 2L\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \right] f(\gamma, t) &= 0 \\ \frac{df}{dt} + \left[\frac{1}{2t} - 2L \frac{\sqrt{t}}{\frac{2}{3}L(t^{\frac{3}{2}} - t_0^{\frac{3}{2}}) + \frac{\sqrt{t_0}}{\gamma_0}} \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \right] f(\gamma, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Η συνάρτηση (3.21) δεν λύνεται αναλυτικά.

Αριθμητική προσέγγιση

Ο κώδικας για το εν λόγω σύστημα που επιλύει το σύστημα των πεπελεγμένων διαφορικών εξισώσεων (3.15) και (3.18) χρησιμοποιεί ξανά την συνάρτηση ODE.

Το πρόγραμμα τρέχει δύο φορές, μία για σταθερή τιμή μαγνητικού πεδίου, $B = B_0$, όπου $\alpha=0$ και μία για την τιμή $\alpha=1$ κατά την οποία το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται ανάλογα με τον χρόνο. Στην πρώτη περίπτωση η επιτάχυνση, όπως δίνεται από την σχέση (3.4), θα είναι μηδενική οπότε θα επιδρούσε μόνο ο μηχανισμός απωλειών. Για τον λόγω αυτό ως όρος επιτάχυνσης θα θεωρηθεί αυτός που προκύπτει για $\alpha=1$ από την (3.4).

Οι υπόλοιπες παράμετροι που εισήχθησαν στον κώδικα ώστε να δώσει τα αποτελέσματα που φαίνονται παρακάτω φαίνονται στον πίνακα (3.1).

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης η ODE ζητάει να εκφραστεί η 3.6 μερικής διαφορικής της μορφής $\frac{\partial f}{\partial t} + c(\gamma, t, f) \frac{\partial f}{\partial \gamma} = u(\gamma, t, f)$. Οπότε η σχέση που επιλύεται είναι η (2.4). Η οποία στο συγκεκριμένο πρόβλημα εκφράζεται ως:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \left[\frac{\gamma}{2t} - L\gamma(t)^2 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \right] = N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) \delta(t - t_0) - f(\gamma, t) \left[\frac{a}{2t} - 2L\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \right]$$

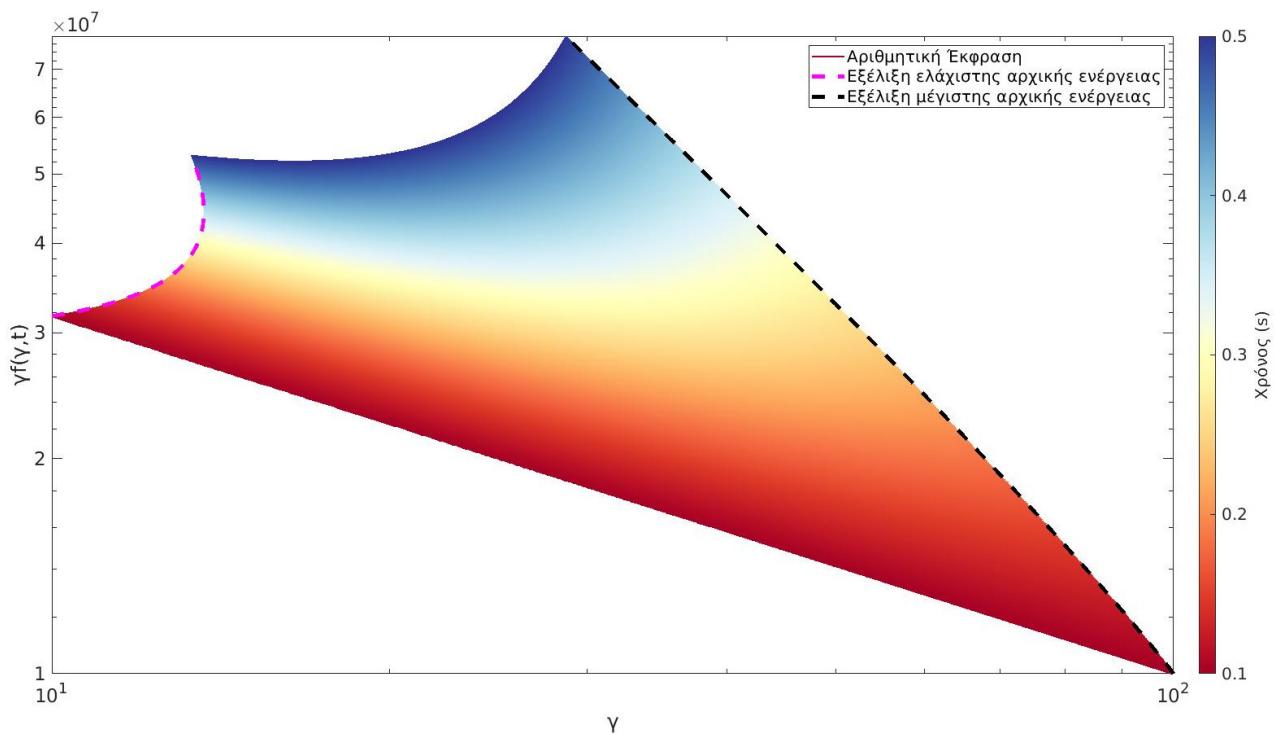
Στο απόσπασμα του προγράμματος που ακολουθεί η επίλυση πραγματοποιείται σε ένα χρονικό εύρος $[t_0, t_{fin}]$, με τις τιμές των ενεργειών των σωματιδίων την χρονική στιγμή t_0 να ισαπέχουν κατά $d\gamma$ και να καλύπτουν το εύρος $[\gamma_{in}, \gamma_{fin}]$.

$a=1;$

```

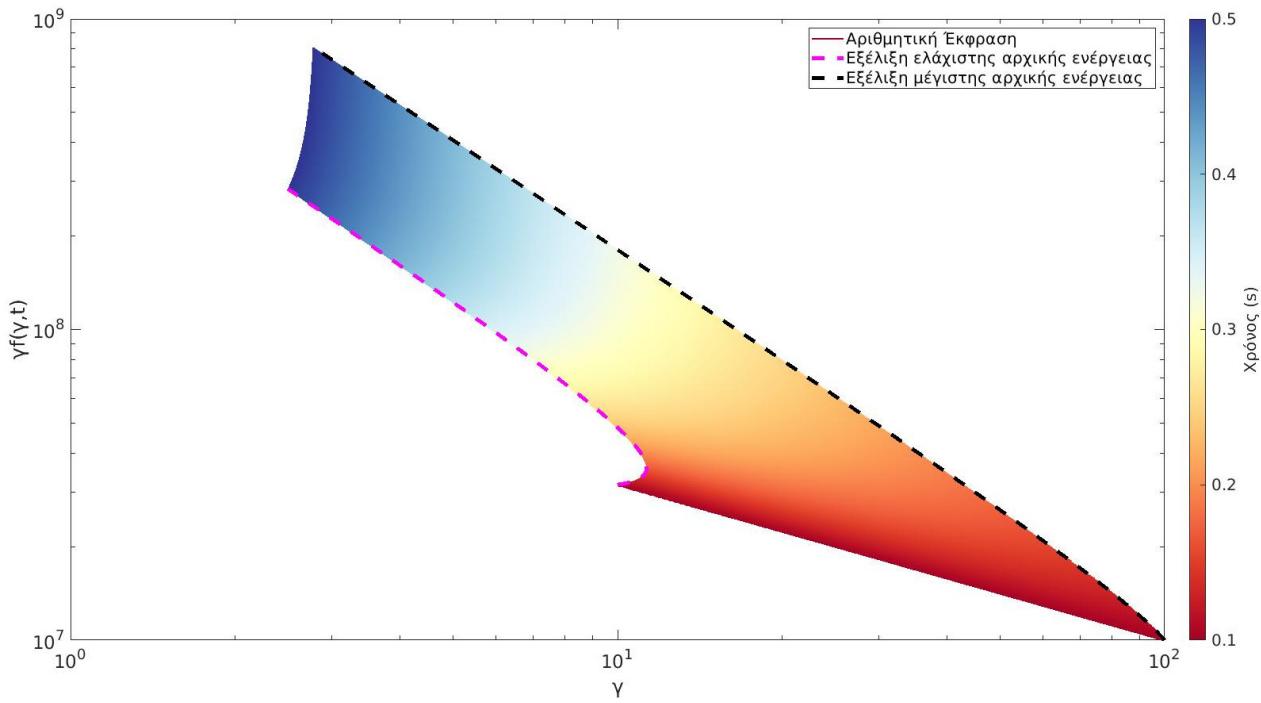
tval=t0:dt:tfin ;
c=@(g,t,f) g*(0.5/t-L*(t/t0)^(2*a)*g);
f=@(g,t,f) N0*g^(-p)*exp(-((t-t0)/0.001)^2)-(0.5/t-2.0*L*(t/t0)^(2*a)*g)*f;
f0=@(g) N0*g^(-p);
M=fix ((g_max-g_min)/dg)+1;
N=length (tval);
i=1;
for g0=g_min:dg:g_max
G= @(t,w) [c(w(1), t, w(2)) ; u(w(1), t, w(2))];
[ts,ws] = ode45(G, tval, [g0; f0(g0)]);
gamma(:, i)=ws(:, 1);
dist_fun(:, i)=ws(:, 2);
i=i+1;
end

```



Σχήμα 3.4: Χρονική εξέλιξη συνάρτηση συνάρτησης κατανομής επί τον συντελεστή Lorentz συναρτήσει του συντελεστή Lorentz με μαγνητικό πεδίο σταθερού μέτρου

Στα σχήματα (3.4) και (3.5), για τις τιμές των παραμέτρων που εξετάζουμε παρατηρούμε χαρακτηριστικά και



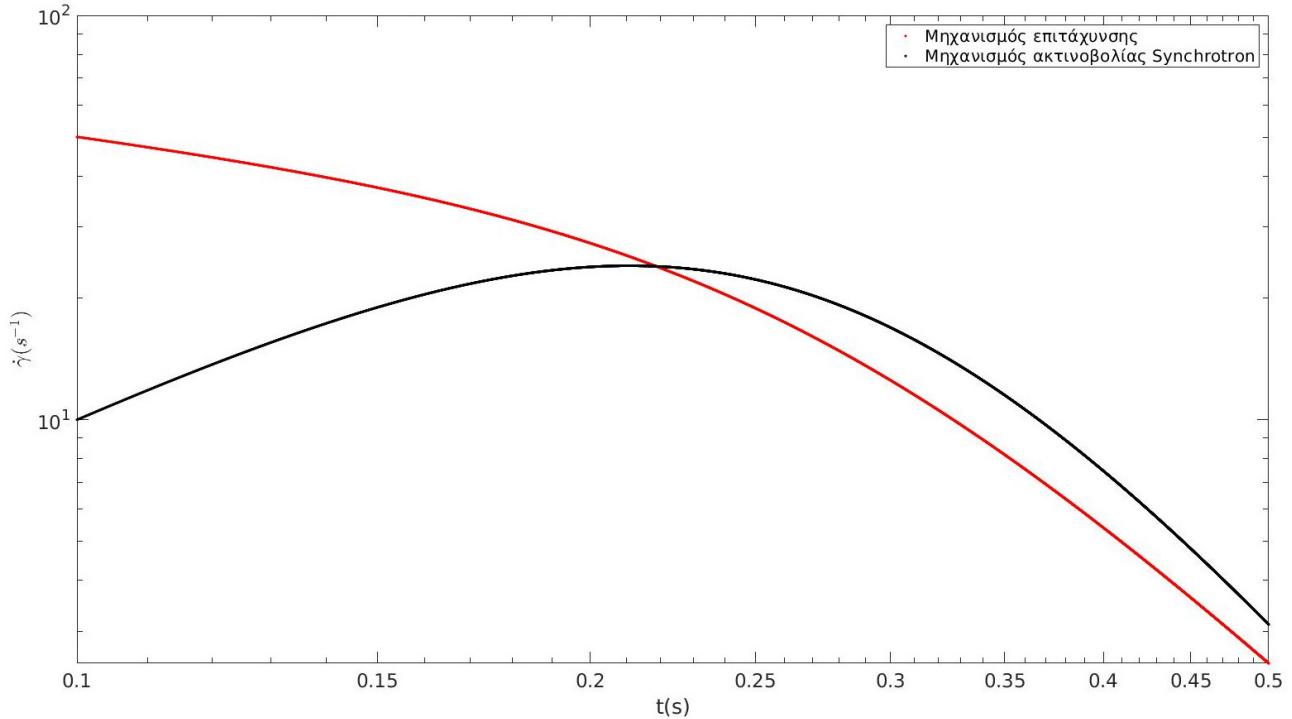
Σχήμα 3.5: Χρονική εξέλιξη συνάρτησης συνάρτησης κατανομής επί τον συντελεστή Lorentz συναρτήσει του συντελεστή Lorentz με μαγνητικό πεδίο ανάλογο του χρόνου

των δύο μηχανισμών, επιτάχυνσης και ακτινοβολίας. Συγκεκριμένα, το γράφημα (3.4) έχει μορφή παρόμοια με το γράφημα (3.2) το οποίο αναφέρεται σε σύστημα στο οποίο επιδρά μόνο ο μηχανισμός ακτινοβολίας σύγχροτρον. Κοιτάζοντας όμως προς τις χαμηλότερες ενέργειες, στο σχήμα (3.4), παρατηρείται επιτάχυνση καθώς κατά τους αρχικούς χρόνους η συνάρτηση κατανομής μετακινείται προς μεγαλύτερες ενέργειες.

Αντιθέτως, στις υψηλές ενέργειες δεν συμβαίνει κάποια αντίστοιχη διαφοροποίηση συγκριτικά με το σύστημα όπου δεν επιδρά ο μηχανισμός της επιτάχυνσης. Κοιτάζοντας την σχέση της χρονικής εξέλιξης του συντελεστή Lorentz του εκάστοτε σωματιδίου (3.15), συμπεραίνουμε ότι για κάθε χρονική στιγμή υπάρχει μία κρίσιμη τιμή της ενέργειας η οποία θέτει το όριο στην επίδραση του κάθε μηχανισμού (βλ. σχήμα 3.6). Το όριο αυτό δίνεται από την συνθήκη $\dot{\gamma} = 0$ (βλ. εξίσωση 3.15). Για ενέργειες μικρότερες αυτού, η επιτάχυνση, η οποία είναι ανάλογη της πρώτης δύναμης της ενέργειας, υπερισχύει των απωλειών, μηχανισμός ο οποίος είναι ανάλογος του τετραγώνου της ενέργειας. Αντιθέτως για τιμές της ενέργειας πάνω από την κρίσιμη τιμή του συντελεστή Lorentz, υπερισχύει ο μηχανισμός ψύξης με αποτέλεσμα να μην παρατηρείται επιτάχυνση. Αντίστοιχα, για κάθε αρχική ενεργειακή τιμή υπάρχει μία χρονική στιγμή στην οποία οι απώλειες υπερισχύουν της επιτάχυνσης, εάν αυτό δεν ισχύει εξαρχής.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα καταλαβαίνουμε ότι αρχικά η κρίσιμη τιμή βρίσκεται ενδιάμεσα των ακραίων τιμών των ενεργειών των σωματιδίων του πληθυσμού. Καθώς ο χρόνος περνά, διαφοροποιούνται (i) τα

ενεργειακά όρια της κατανομής και (ii) η κρίσιμη τιμή της ενέργειας με αποτέλεσμα στα τελευταία χρονικά βήματα η κρίσιμη τιμή να είναι μικρότερη του κάτω ενεργειακού όριο και τελικά ο πληθυσμός να ψύχεται σε όλο του το ενεργειακό εύρος.



Σχήμα 3.6: Χρονική εξέλιξη της επίδρασης των μηχανισμών επιτάχυνσης και ακτινοβολίας σε σωματίδιο αρχικής ενέργειας ίσης με γ_{min} για το πρόβλημα του σχήματος (3.5).

Στο σχήμα (3.6) απεικονίζεται η χρονική εξέλιξη της μέγιστης ελάχιστης ενεργειακής τιμής της αρχικής κατανομής. Παρατηρούμε ότι, για τις τιμές των παραμέτρων που θέσαμε, αρχικά η κόκκινη καμπύλη η οποία αντιπροσωπεύει τον μηχανισμό της επιτάχυνσης βρίσκεται πάνω από αυτή της ακτινοβολίας όποτε ο πρώτος μηχανισμός θα υπερισχύει και το σωματίδιο θα κερδίζει ενέργεια. Μετά το σημείο τομής των δύο η μαύρη καμπύλη αποκτά μεγαλύτερη τιμή από την κόκκινη οπότε η ακτινοβολία υπερισχύει της επιτάχυνσης και το σωματίδιο θα ξεκινήσει να ψύχεται. Για κάθε αρχική τιμή ενέργειας, ο χρόνος στον οποίο οι δύο καμπύλες τέμνονται διαφέρει.

Ένας επιπλέον παράγοντας ο οποίος διαφοροποιεί με τον χρόνο την τιμή της κρίσιμης ενέργειας και οδηγεί στο αποτέλεσμα της μείσωση του κάτω ενεργειακού ορίου μετά από κάποια χρονική στιγμή είναι η εμφάνιση του ίδιου του χρόνου στον παρανομαστή της σχέσης (3.15), ο οποίος όσο αυξάνεται μειώνει την επίδραση της επιτάχυνσης.

Τέλος συγκρίνοντας τα γραφήματα (3.4) και (3.5) μεταξύ τους, παρατηρούμε (όπως και στην παράγραφο 3.1.2) πως καθώς το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται ο μηχανισμός ακτινοβολίας γίνεται πιο αποδοτικός. Επι-

πλέον, εξαιτίας του γεγονότος αυτού σε συνδυσμό με την εξασθένιση του μηχανισμού επιτάχυνσης με τον χρόνο, παρατηρείται ότι η επιτάχυνση που υπάρχει στις αρχικές χρονικές στιγμές στο κάτω ενεργειακό όριο χάνεται γρηγορότερα συγκριτικά με την περίπτωση σταθερού μαγνητικού πεδίου.

3.2 Συστήματα συνεχούς έγχυσης

Θεωρούμε ότι την χρονική στιγμή t_0 στα πλασμοειδή εισέρχονται σωματίδια των οποίων η συνάρτηση κατανομής ακολουθεί νόμο δύναμης ως προς τους συντελεστές Lorentz των σωματιδίων, $f(\gamma, t) = N_0 \gamma^{-p}$, σε εύρος $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$. Κατά τις επόμενες χρονικές στιγμές σωματίδια δεν διαφεύγουν από τα πλασμοειδή όμως, αντιθέτως με τα συστήματα του (3.1), σε κάθε χρονικό βήμα συμβαίνει εκ νέου έγχυση σωματιδίων στο πλασμοειδές, τα οποία ακολουθούν την ίδια ακριβώς κατανομή. Ως αποτέλεσμα η συνάρτηση που εκφράζει την έγχυση των σωματιδίων κι εμφανίζεται στην διαφορική εξίσωση 2.5 θα έχει την μορφή $S(\gamma, t) = N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) H(t - t_0)$. Η συνάρτηση βήματος $H(x)$ δίνεται από την σχέση (3.2), ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι στις προσομοιώσεις που θα ακολουθήσουν δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Παράμετρος	Σύμβολο	Τιμή	Μονάδες
Συντελεστής κανονικοποίησης	N_0	10^8	—
Εκθέτης νόμου δύναμης	p	1.5	—
Ελάχιστη ενέργεια εγχυόμενου πληθυσμού	γ_{min}	10	—
Μέγιστη ενέργεια εγχυόμενου πληθυσμού	γ_{max}	10^3	—
Διάσταση πλασμοειδούς	L_{pl}	10^{15}	cm
Αρχική χρονική στιγμή	t_0	$\frac{L_{pl}}{5c}$	s
Τελική χρονική στιγμή	t_{fin}	$5t_0$	s
Χρονικό βήμα	dt	$8 \cdot 10^{-3} t_0$	s
Ενεργειακό βήμα	d γ	1	—
Αρχική τιμή μαγνητικού πεδίου	B_0	3	G

Πίνακας 3.2: Λίστα παραμέτρων για τη μελέτη του συστήματος με συνεχή έγχυση.

Για να παρατηρήσουμε την επίδραση των μηχανισμών στο σύστημα με τις τιμές των παραμέτρων του πίνακα (3.2), ο κώδικας τρέχει για χρονικό διάστημα $\Delta t \propto \frac{L_{pl}}{c} = 3.33 \cdot 10^4 s$, το οποίο αντιστοιχεί σε κάποιο πολλαπλάσιο του χρόνου που χρειάζεται ένα εισερχόμενο σωματίδιο κινούμενο με την ταχύτητα του φωτός να φτάσει στο κέντρο του πλασμοειδούς.

Για τις τρεις περιπτώσεις συστημάτων που εξετάσαμε, (i) μόνο επιτάχυνση, (ii) ενεργειακές απώλειες χωρίς επιτάχυνση, (iii) επιτάχυνση και ενεργειακές σπώλειες, οι χαρακτηριστικές εξισώσεις, $\gamma(t)$, δεν διαφοροποιούνται από τις αντίστοιχες της παραγράφου (3.1), σε αντίθεση με την συνάρτηση κατανομής, $f(\gamma, t)$.

3.2.1 Επίδραση μόνο μηχανισμού επιτάχυνσης

Η επιτάχυνση συμβαίνει λόγω της διατήρησης μαγνητικής ροπής, βλ. (3.1.1), οπότε η χαρακτηριστική καμπύλη που περιγράφει την χρονική εξέλιξη της αρχικής ενέργειας κάθε σωματιδίου είναι η ίδια με αυτή της παραγράφου (3.1.1). Αντιθέτως η διαφορική εξίσωση που δίνει την χρονική εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής διαφοροποιείται λόγω της μορφής της συνάρτησης $S(\gamma, t)$.

Αναλυτική λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση, (3.4):

$$\gamma = \gamma_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{a}{2}}$$

Επίλυση της σχέσης 2.5:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= S(\gamma, t) - f \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \\ \Rightarrow \frac{df}{dt} &= N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) H(t - t_0) - f(\gamma, t) \frac{a}{2t} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Η ομογενής εξίσωση, όπως λύθηκε στην υποενότητα (3.1.1):

$$\Leftrightarrow f_{hom} = f_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{a}{2}}$$

Για την μη ομογενή εξίσωση:

$$\begin{aligned} f(\gamma, t) &= \int_{-\infty}^t S(\gamma_*, t_*) \left(\frac{t_*}{t} \right)^{\frac{a}{2}} dt_* \Rightarrow \\ f(\gamma, t) &= \int_{-\infty}^t N_0 \gamma_*^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) H(t_* - t_0) \left(\frac{t_*}{t} \right)^{\frac{a}{2}} dt_* \Rightarrow \\ f(\gamma, t) &= \int_{t_0}^t N_0 \gamma_*^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) \left(\frac{t_*}{t} \right)^{\frac{a}{2}} dt_* \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\gamma_*}{dt_*} = a \frac{\gamma_*}{2t_*} \\ \gamma = \gamma_* \left(\frac{t}{t_*} \right)^{\frac{a}{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} dt_* = \frac{2t_*}{a\gamma_*} d\gamma_* \\ \frac{\gamma_*}{\gamma} = \left(\frac{t_*}{t} \right)^{\frac{a}{2}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} dt_* = \frac{2}{a\gamma_*} t \left(\frac{\gamma_*}{\gamma} \right)^{\frac{2}{a}} d\gamma_* \\ \frac{\gamma_*}{\gamma} = \left(\frac{t_*}{t} \right)^{\frac{a}{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(\gamma, t) &= N_0 \int_{\gamma_0}^{\gamma} \gamma_*^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) \frac{\gamma_*}{\gamma} \frac{2}{a\gamma_*} t \left(\frac{\gamma_*}{\gamma} \right)^{\frac{2}{a}} d\gamma_* \\ f(\gamma, t) &= \frac{2N_0 t}{a \gamma^{\frac{2}{a}+1}} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \gamma_*^{-p+\frac{2}{a}} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) d\gamma_* \\ f(\gamma, t) &= \frac{2N_0 t}{a (-p + 1 + \frac{2}{a}) \gamma^{\frac{2}{a}+1}} \left[\gamma_*^{-p+1+\frac{2}{a}} \right]_{\max\{\gamma_0, \gamma_{min}\}}^{\min\{\gamma, \gamma_{max}\}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\text{Av } \gamma_0 \leq \gamma_{min} \xrightarrow{3.4} \gamma \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{a}{2}} \leq \gamma_{min} \Leftrightarrow \gamma \leq \gamma_{min} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{a}{2}}:$$

1. Av $\gamma \geq \gamma_{max}$:

$$f(\gamma, t) = \frac{2N_0 t}{a (1 - p + \frac{2}{a}) \gamma^{\frac{2}{a}+1}} \left(\gamma_{max}^{-p+1+\frac{2}{a}} - \gamma_{min}^{-p+1+\frac{2}{a}} \right) \quad (3.24)$$

2. Av $\gamma \leq \gamma_{max}$:

$$\begin{aligned} f(\gamma, t) &= \frac{2N_0 t}{a (1 - p + \frac{2}{a}) \gamma^{\frac{2}{a}+1}} \left(\gamma^{-p+1+\frac{2}{a}} - \gamma_{min}^{-p+1+\frac{2}{a}} \right) \Leftrightarrow \\ f(\gamma, t) &= \frac{2N_0 t}{a (1 - p + \frac{2}{a})} \gamma^{-p} \left[1 - \left(\frac{\gamma_{min}}{\gamma} \right)^{-p+1+\frac{2}{a}} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\text{Av } \gamma_0 \geq \gamma_{min} \xrightarrow{3.4} \gamma \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{a}{2}} \geq \gamma_{min} \Leftrightarrow \gamma \geq \gamma_{min} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{a}{2}}:$$

1. Av $\gamma \geq \gamma_{max}$:

$$\begin{aligned} f(\gamma, t) &= \frac{2N_0 t}{a (1 - p + \frac{2}{a}) \gamma^{\frac{2}{a}+1}} \left(\gamma_{max}^{-p+1+\frac{2}{a}} - \gamma_0^{-p+1+\frac{2}{a}} \right) \Leftrightarrow \\ f(\gamma, t) &= \frac{2N_0 t}{a (1 - p + \frac{2}{a}) \gamma^{\frac{2}{a}+1}} \left\{ \gamma_{max}^{-p+1+\frac{2}{a}} - \left[\gamma \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{a}{2}} \right]^{-p+1+\frac{2}{a}} \right\} \Leftrightarrow \\ f(\gamma, t) &= \frac{2N_0 t}{a (1 - p + \frac{2}{a})} \gamma^{-p} \left[\left(\frac{\gamma_{max}}{\gamma} \right)^{-p+1+\frac{2}{a}} - \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{a}{2}(-p+1)+1} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

2. Αν $\gamma \leq \gamma_{max}$:

$$\begin{aligned} f(\gamma, t) &= \frac{2N_0t}{a(1-p+\frac{2}{a})\gamma^{\frac{2}{a}+1}} \left\{ \gamma^{-p+1+\frac{2}{a}} - \gamma_0^{-p+1+\frac{2}{a}} \right\} \Leftrightarrow \\ f(\gamma, t) &= \frac{2N_0t}{a(1-p+\frac{2}{a})\gamma^{\frac{2}{a}+1}} \left(\gamma^{-p+1+\frac{2}{a}} - \left[\gamma \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{a}{2}} \right]^{-p+1+\frac{2}{a}} \right) \Leftrightarrow \\ f(\gamma, t) &= \frac{2N_0t}{a(1-p+\frac{2}{a})} \gamma^{-p} \left[1 - \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{a}{2}(-p+1)+1} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Τελικά:

$$f(\gamma, t) = \begin{cases} \frac{2N_0t}{a(1-p+\frac{2}{a})\gamma^{\frac{2}{a}+1}} \left(\gamma_{max}^{-p+1+\frac{2}{a}} - \gamma_0^{-p+1+\frac{2}{a}} \right) & \gamma \leq \gamma_{min} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{a}{2}} \text{ & } \gamma \geq \gamma_{max} \\ \frac{2N_0t}{a(1-p+\frac{2}{a})} \gamma^{-p} \left[1 - \left(\frac{\gamma_{min}}{\gamma} \right)^{-p+1+\frac{2}{a}} \right] & \gamma \leq \gamma_{min} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{a}{2}} \text{ & } \gamma \leq \gamma_{max} \\ \frac{2N_0t}{a(1-p+\frac{2}{a})} \gamma^{-p} \left[1 - \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{a}{2}(-p+1)+1} \right] & \gamma \geq \gamma_{min} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{a}{2}} \text{ & } \gamma \leq \gamma_{max} \\ \frac{2N_0t}{a(1-p+\frac{2}{a})} \gamma^{-p} \left[\left(\frac{\gamma_{max}}{\gamma} \right)^{-p+1+\frac{2}{a}} - \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{a}{2}(-p+1)+1} \right] & \gamma \geq \gamma_{min} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{a}{2}} \text{ & } \gamma \geq \gamma_{max} \end{cases} \quad (3.28)$$

Ο τελευταίος κλάδος, για $\gamma \geq \gamma_{min} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{a}{2}}$ και $\gamma \geq \gamma_{max}$, της συνάρτησης (3.28) δημιουργείται από την επιτάχυνση των σωματιδίων στις υψηλότερες ενέργειες. Για $t_0 \ll t$ ο δεύτερος όρος της παρένθεσης μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος. Ως αποτέλεσμα, η κλίση της $f(\gamma, t)$, λογαριθμικά ως προς γ , θα είναι ίση με -3, εφόσον $\alpha=1$. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με εκείνο των Hakobyan et al. [8].

Αριθμητική προσέγγιση

Για την πρόβλεψη της χρονικής εξέλιξης του συστήματος σχεδιάστηκε κώδικας ο οποίος όμως δεν επικαλείται κάποια συνάρτηση, όπως η ODE που χρησιμοποιήθηκε στα συστήματα στιγμιαίας έγχυσης (Βλ. 3.1).

Το πρόγραμμα τρέχει δύο φορές, η πρώτη για σταθερό μαγνητικό πεδίο όπου ο εκθέτης α της σχέσης (3.1) θα είναι μηδενικός. Όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο (3.1.1) αυτό έχει ως αποτέλεσμα η χρονική παράγωγος του πεδίου να είναι μηδενική και να μην υπάρχει επιτάχυνση οπότε δεν θα παρατηρούσαμε κάποια μεταβολή στο σύστημα. Θα θεωρήσουμε, ξανά, ότι παρά το σταθερό πεδίο ο μηχανισμός επιτάχυνσης έχει την μορφή της (3.4) με $\alpha=1$. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα αυτό έχει ως συνέπεια το σύστημα να μην διαφέρει καθόλου από την δεύτερη περίπτωση κατά την οποία το πεδίο είναι ανάλογο του

χρόνου. Η αποδοχή αυτή θα διαφοροποιήσει το πρόβλημα στις επόμενες παραγράφους όπου θα έχουν ταυτόχρονη επίδραση των μηχανισμών επιτάχυνσης και απωλειών σύγχροτρον και θα μελετάμε την εξέλιξη του συστήματος και για σταθερό πεδίο.

Ο κώδικας λύνει το σύστημα των πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων για την χρονική εξέλιξη της ενέργειας το εκάστοτε σωματιδίου $\gamma(t)$ (3.4) και για την συνάρτηση κατανομής $f(\gamma, t)$ (3.6). Γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση του συστήματος, δηλαδή την ενεργειακή κατανομή των σωματιδίων, $f(\gamma_0, t_0)$ με συγκεκριμένο και πεπερασμένο εύρος αρχικών ενεργειακών τιμών, γ_0 . Με την χρήση των αρχικών συνθηκών αυτών χρησιμοποιούμε την μέθοδο του παραλληλογράμμου η οποία υπολογίζει την τιμή για το επακόλουθο χρονικό βήμα μέσω της αναδρομικής σχέσης $\gamma(t + dt) = \gamma(t) + dt \frac{d\gamma}{dt}$, με την $\frac{d\gamma}{dt}$ να δίνεται από την (3.4). Παράλληλα με την διαδικασία αυτή τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται ώστε μέσω της ίδιας αναφρομικής σχέσης να λύθει την διαφορική εξίσωση (3.6) και τελικά να έχουμε την χρονική εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής, $f(\gamma(t), t)$, αλλά και της χαρακτηριστικής καμπύλης για την χρονική εξέλιξη της εκάστοτε αρχικής ενέργειας, $\gamma(t)$. Οπότε η σχέση που επιλύεται είναι της μορφής (2.5) η οποία στο συγκεκριμένο πρόβλημα εκφράζεται ως την σχέση (3.22):

$$\frac{df}{dt} = N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) H(t - t_0) - f \frac{1}{2t} \quad (3.29)$$

Στο απόσπασμα του προγράμματος που ακολουθεί η επίλυση πραγματοποιείται σε ένα χρονικό εύρος $[t_0, t_{fin}]$, με τις τιμές των ενεργειών των σωματιδίων την χρονική στιγμή t_0 να ισαπέχουν κατά dt και να καλύπτουν το εύρος $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$.

```
s=2;
a=1;
N=fix (( tfin-t0 )/ dt+1);
M=fix (( g_fin-g_in )/ dx)+(N-1)*s+1;
z=zeros (N,M);
y=zeros (N,M);
j=1.;
for g0=g_in : dg : g_fin
g (2,j)=g0;
f (2,j)= dt*N0*g0^(-p);
```

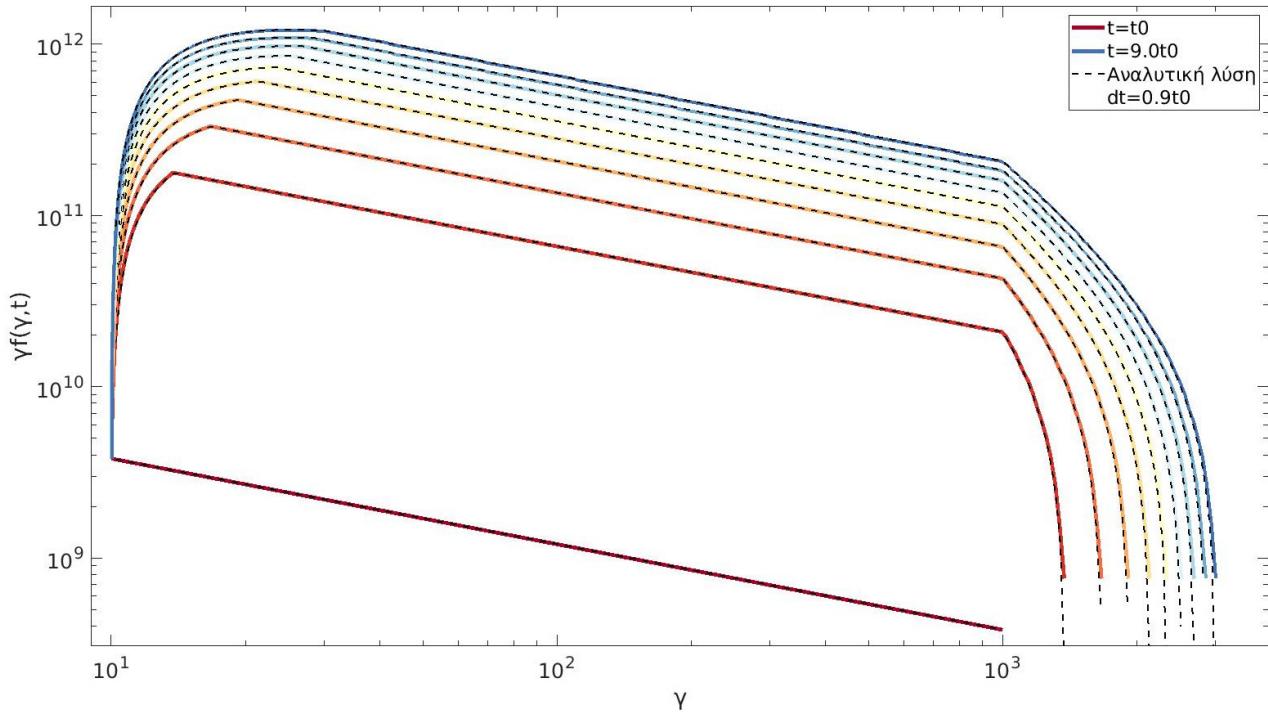
```

j=j+1;
end
i=2;
for t=t0+dt:dt:t fin
j=1;
while j<M+1 && g(i,j)> 0.0
    g(i+1,j)=g(i,j)+dt*a*g(i,j)/(2*t);
    if g(i,j)>=g_min && g(i,j)<=g_max
        f(i+1,j)=f(i,j)+dt*(N0*g(i+1,j)^(-p)-a*f(i,j)/(2*t));
    else
        f(i+1,j)=f(i,j)-dt*a*f(i,j)/(2*t);
    end
    j=j+1;
end
j=j-1;
if min(g(i+1,1:j))>g_min
    dx=(min(g(i+1,1:j))-g_min)/(s-1);
for j=j:j+s-1
    g(i+1,j+1)=g_min+dz;
    f(i+1,j+1)=dt*N0*g(i+1,j+1)^(-p);
end
end
i=i+1;
end

```

Στο γράφημα (3.7) διαχρίνουμε ότι στις υψηλές ενέργειες, για $\gamma > \gamma_{max}$, δημιουργείται εξαιτίας της επιτάχυνσης το μέτωπο του οποίου, με την πάροδο του χρόνου, μετακινείται προς τις μεγαλύτερες ενέργειες υποδεικνύοντας ότι τα σωματίδια συνεχίζουν να κερδίζουν ενέργεια. Το πέρας του μετώπου δίνεται από την εξέλιξη στον χρόνο της μέγιστης αρχικής ενέργειας του πλυθησμού, $\gamma_{max}(t)$.

Στις χαμηλότερες ενέργειες, στο διάστημα $[\gamma_{min}, \gamma_{min} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{a}{2}}]$, δημιουργείται ένας δεύτερος κλάδος καθώς



Σχήμα 3.7: Χρονική εξέλιξη συνάρτηση συνάρτησης κατανομής επί τον συντελστή Lorentz συναρτήσει του συντελστή Lorentz για διάφορες χρονικές στιγμές που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά $0.1L_{pl}/c$.

τα επιταχυνόμενα σωματίδια μετακινούνται προς τις υψηλότερες τιμές του συντελεστή Lorentz ενώ ταυτόχρονα νέα σωματίδια εγχύονται στο σύστημα. Όπως καταλαβαίνει κανείς το άνω όριο του διαστήματος του χαμηλοενεργειακού ακλάδου αλλάζει σύμφωνα με την χρονική εξέλιξη της ελάχιστης τιμής της αρχικής ενέργειας των σωματιδίων, $\gamma_{min}(t)$.

Τέλος μπορεί κανείς να παρατηρήσει εύκολα ότι στην περιοχή ενδιάμεσα των δύο ακραίων συμπεριφορών, όπου συμβαίνει επίσης εκ νέου έγχυση σωματιδίων σε κάθε χρονικό βήμα, η κλίση δεν αλλάζει, οπότε παραμένει ίδια με αυτή του εγχυόμενου πληθυσμού.

3.2.2 Επίδραση μόνο μηχανισμού απωλειών σύγχροτρον

Θεωρούμε ότι στο σύστημα αυτό τα σωματίδια δεν κερδίζουν ενέργεια αλλά ακτινοβολούν λόγω σύγχροτρον, οπότε η χαρακτηριστική καμπύλη που περιγράφει την χρονική εξέλιξη της αρχικής ενέργειας κάθε σωματιδίου είναι η ίδια με αυτή της παραγράφου (3.1.2).

Αναλυτική λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση, (3.11):

$$\gamma(t) = \left\{ \frac{1}{\gamma_0} + \frac{Lt_0}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^{-1}$$

Επίλυση της σχέσης (2.5):

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= S(\gamma, t) - f \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \\ \Rightarrow \frac{df}{dt} &= N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) H(t - t_0) - f(\gamma, t) \left[-2L\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \right] \\ \Leftrightarrow \frac{df}{dt} - 2Lf(\gamma, t)\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} &= N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) H(t - t_0) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Η ομογενής εξίσωση, όπως λύθηκε στην υποενότητα (3.1.2):

$$f_{hom} = f_0 \left\{ 1 + \frac{L\gamma_0 t_0}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^2 \quad (3.31)$$

Για την μη ομογενή εξίσωση:

$$\begin{aligned} f(\gamma, t) &= \int_{-\infty}^t S(\gamma_*, t_*) \frac{f_{hom}(\gamma_*, t_*)}{f_0} dt_* \\ f(\gamma, t) &= \int_{-\infty}^t S(\gamma_*, t_*) \left\{ 1 + \frac{L\gamma_* t_*}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_*} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^2 dt_* \\ f(\gamma, t) &= \int_{-\infty}^t N_0 \gamma_*^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) H(t_* - t_0) \left\{ 1 + \frac{L\gamma_* t_*}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_*} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^2 dt_* \\ f(\gamma, t) &= \int_{t_0}^t N_0 \gamma_*^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) \left\{ 1 + \frac{L\gamma_* t_*}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_*} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^2 dt_* \\ \left. \begin{array}{l} \frac{d\gamma_*}{dt_*} = -L\gamma_*^2 \left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a} \\ \gamma = \left\{ \frac{1}{\gamma_*} + \frac{Lt_*}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_*} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} dt_* = -\frac{d\gamma_*}{L\gamma_*^2 \left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a}} \\ \gamma = \frac{\gamma_*}{1 + \frac{L\gamma_* t_*}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_*} \right)^{2a+1} - 1 \right]} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \left. \begin{array}{l} dt_* = -\frac{d\gamma_*}{L\gamma_*^2 \left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a}} \\ \frac{\gamma_*}{\gamma} = 1 + \frac{L\gamma_* t_*}{2a+1} \left[\left(\frac{t}{t_*} \right)^{2a+1} - 1 \right] \end{array} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\gamma, t) &= -N_0 \int_{\gamma_0}^{\gamma} \gamma_*^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma_*) H(\gamma_* - \gamma_{min}) \left(\frac{\gamma_*}{\gamma} \right)^2 \frac{1}{L \gamma_*^2 \left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a}} d\gamma_* \Leftrightarrow \\
f(\gamma, t) &= -N_0 \int_{\min\{\gamma_0, \gamma_{max}\}}^{\max\{\gamma, \gamma_{min}\}} \gamma_*^{-p} \left(\frac{\gamma_*}{\gamma} \right)^2 \frac{1}{L \gamma_*^2 \left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a}} d\gamma_* \Leftrightarrow \\
f(\gamma, t) &= N_0 \int_{\max\{\gamma, \gamma_{min}\}}^{\min\{\gamma_0, \gamma_{max}\}} \gamma_*^{-p} \left(\frac{\gamma_*}{\gamma} \right)^2 \frac{1}{L \gamma_*^2 \left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a}} d\gamma_* \Leftrightarrow \\
f(\gamma, t) &= \frac{N_0}{L \gamma^2} \int_{\max\{\gamma, \gamma_{min}\}}^{\min\{\gamma_0, \gamma_{max}\}} \gamma_*^{-p} \frac{1}{\left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a}} d\gamma_* \\
\gamma_*(t) &= \left\{ \frac{1}{\gamma_0} + \frac{Lt_0}{2a+1} \left[\left(\frac{t_*}{t_0} \right)^{2a+1} - 1 \right] \right\}^{-1} \Leftrightarrow \frac{t_*}{t_0} = \left[\frac{2a+1}{Lt_0} \left(\frac{1}{\gamma_*} - \frac{1}{\gamma_0} \right) + 1 \right]^{\frac{1}{2a+1}} \quad \left. \right\} \Rightarrow \\
f(\gamma, t) &= \frac{N_0}{L \gamma^2} \int_{\max\{\gamma_0, \gamma_{min}\}}^{\min\{\gamma, \gamma_{max}\}} \gamma_*^{-p} \left[\frac{2a+1}{Lt_0} \left(\frac{1}{\gamma_*} - \frac{1}{\gamma_0} \right) + 1 \right]^{-\frac{2a}{2a+1}} d\gamma_* \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Η (3.32) δεν λύνεται αναλυτικά όταν το α είναι ελεύθερη παράμετρος ή για τιμές του α μη μηδενικές. Όμως για σταθερό μαγνητικό πεδίο, $B = B_0$, δηλαδή για $\alpha=0$ γίνεται:

$$\begin{aligned}
f(\gamma, t) &= \frac{N_0}{L \gamma^2} \int_{\max\{\gamma_0, \gamma_{min}\}}^{\min\{\gamma, \gamma_{max}\}} \gamma_*^{-p} d\gamma_* \Leftrightarrow \\
f(\gamma, t) &= \frac{N_0}{L(1-p)\gamma^2} [\gamma_*^{-p+1}]_{\max\{\gamma_0, \gamma_{min}\}}^{\min\{\gamma, \gamma_{max}\}} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

$$\text{Αν } \gamma_0 \leq \gamma_{min} \xrightarrow[a=0]{3.11} \left\{ \frac{1}{\gamma} - L(t - t_0) \right\}^{-1} \leq \gamma_{min} \Leftrightarrow \gamma \leq \left\{ \frac{1}{\gamma_{min}} + L(t - t_0) \right\}^{-1}:$$

1. Αν $\gamma \geq \gamma_{max}$:

$$f(\gamma, t) = \frac{N_0}{L(1-p)\gamma^2} (\gamma_{max}^{-p+1} - \gamma_{min}^{-p+1}) \quad (3.34)$$

2. Αν $\gamma \leq \gamma_{max}$:

$$\begin{aligned}
f(\gamma, t) &= \frac{N_0}{L(1-p)\gamma^2} (\gamma^{-p+1} - \gamma_{min}^{-p+1}) \Leftrightarrow \\
f(\gamma, t) &= \frac{N_0}{L(1-p)} \gamma^{-p-1} \left[1 - \left(\frac{\gamma_{min}}{\gamma} \right)^{-p+1} \right] \quad (3.35)
\end{aligned}$$

$$\text{Αν } \gamma_0 \geq \gamma_{min} \xrightarrow[a=0]{3.11} \left\{ \frac{1}{\gamma} - L(t - t_0) \right\}^{-1} \geq \gamma_{min} \Leftrightarrow \gamma \geq \left\{ \frac{1}{\gamma_{min}} + L(t - t_0) \right\}^{-1}:$$

1. Αν $\gamma \geq \gamma_{max}$:

$$\begin{aligned} f(\gamma, t) &= \frac{N_0}{L(1-p)\gamma^2} \left(\gamma_{max}^{-p+1} - \left\{ \frac{1}{\gamma} - L(t-t_0) \right\}^{p-1} \right) \Leftrightarrow \\ f(\gamma, t) &= \frac{N_0}{L(1-p)\gamma^2} \left[\gamma_{max}^{-p+1} - \left(\frac{\gamma}{1-\gamma L(t-t_0)} \right)^{-p+1} \right] \Leftrightarrow \\ f(\gamma, t) &= \frac{N_0}{L(1-p)} \gamma^{-p-1} \left[\left(\frac{\gamma_{max}}{\gamma} \right)^{-p+1} - \left(\frac{1}{1-\gamma L(t-t_0)} \right)^{-p+1} \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

2. Αν $\gamma \leq \gamma_{max}$:

$$\begin{aligned} f(\gamma, t) &= \frac{N_0}{L(1-p)\gamma^2} \left(\gamma^{-p+1} - \gamma_0^{-p+1} \right) \Leftrightarrow \\ f(\gamma, t) &= \frac{N_0}{L(1-p)\gamma^2} \left[\gamma^{-p+1} - \left(\frac{\gamma}{1-\gamma L(t-t_0)} \right)^{-p+1} \right] \Leftrightarrow \\ f(\gamma, t) &= \frac{N_0}{L(1-p)} \gamma^{-p-1} \left[1 - \left(\frac{1}{1-\gamma L(t-t_0)} \right)^{-p+1} \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Αριθμητική προσέγγιση

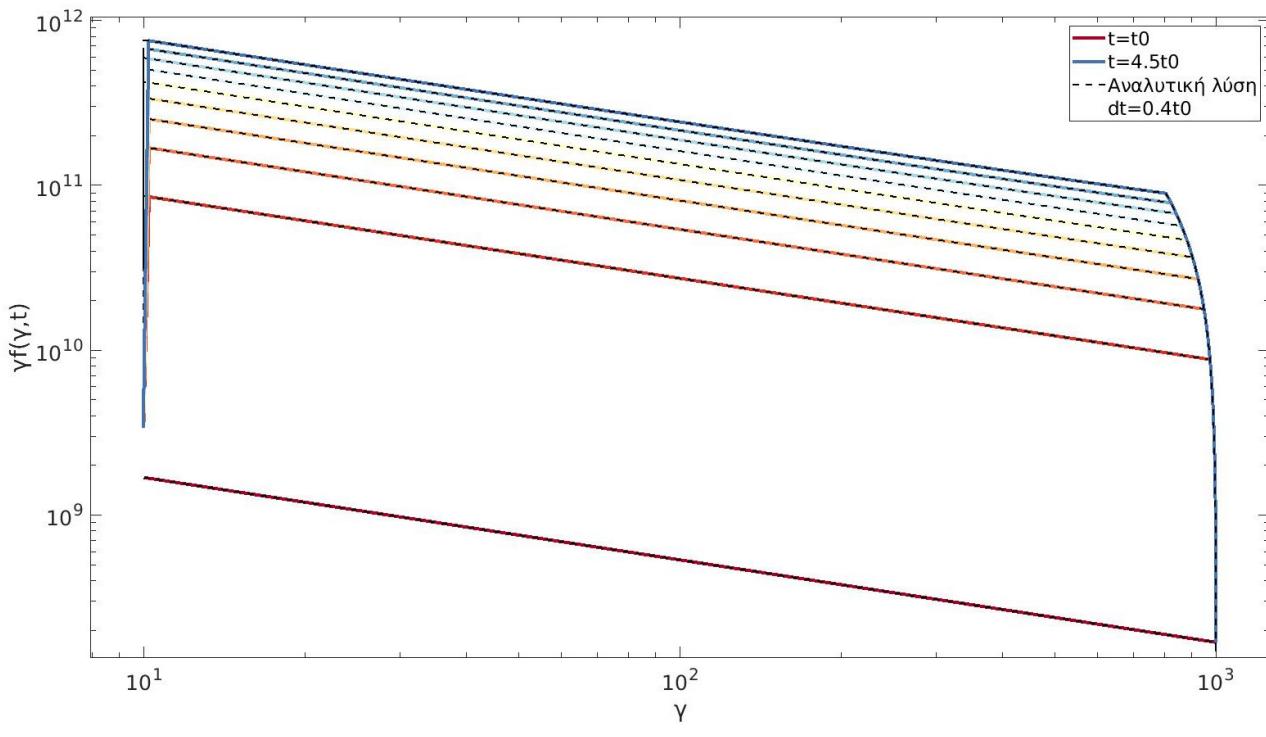
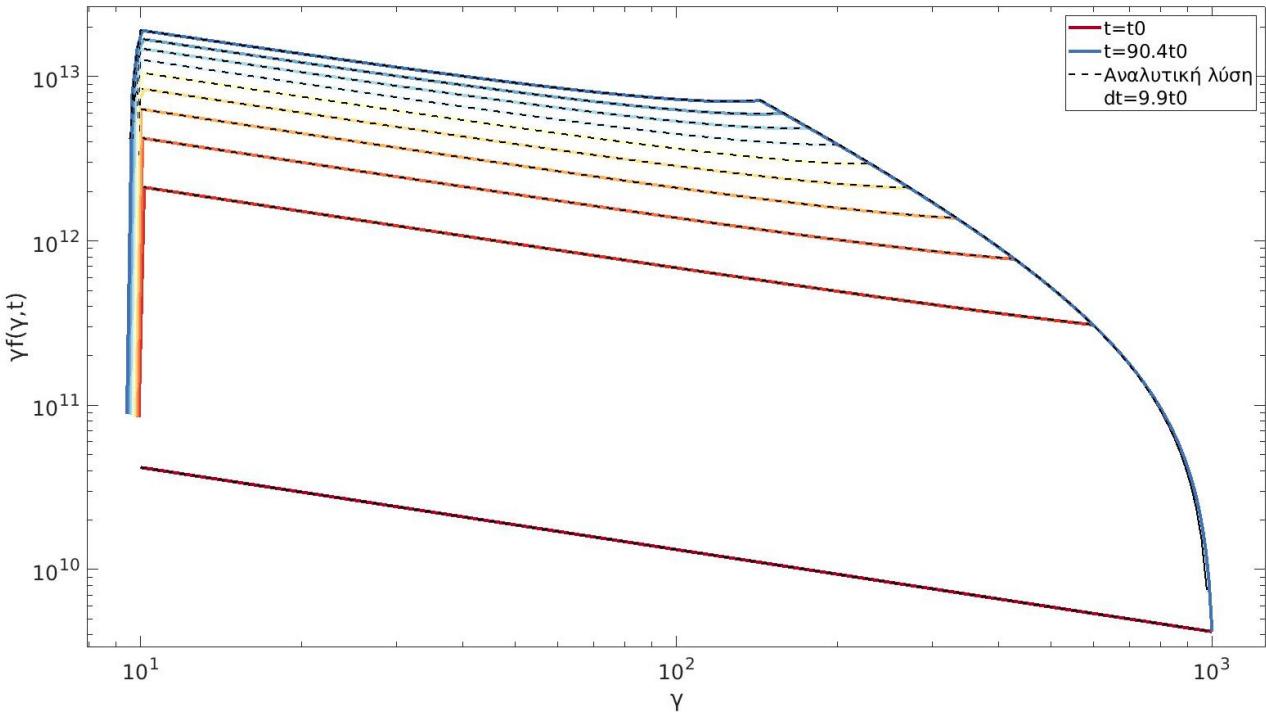
Για την πρόβλεψη της χρονικής εξέλιξης του συστήματος σχεδιάστηκε κώδικας ο οποίος ακολουθεί την ίδια συλλογιστική με τον κώδικα της προηγούμενης περίπτωσης που είχαμε μόνο επιτάχυνση (βλ. παράγραφο 3.2.1). Ο κώδικας λύνει το σύστημα των πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων για την χρονική εξέλιξη της ενέργειας το εκάστοτε σωματιδίου $\gamma(t)$ (3.10) και για την συνάρτηση κατανομής $f(\gamma, t)$ (3.30). Στο απόσπασμα του προγράμματος που ακολουθεί η επίλυση πραγματοποιείται σε ένα χρονικό εύρος $[t_0, t_{fin}]$, με τις τιμές των ενεργειών των σωματιδίων την χρονική στιγμή t_0 να ισαπέχουν κατά dg και να καλύπτουν το εύρος $[\gamma_{in}, \gamma_{fin}]$.

```
s=2;
a=1;
N=fix (( tfin-t0 )/ dt +1);
M=fix (( g_max-g_min )/ dg)+(N-1)*(s-1)+1;
g=zeros (N,M);
f=zeros (N,M);
j=1.;
```

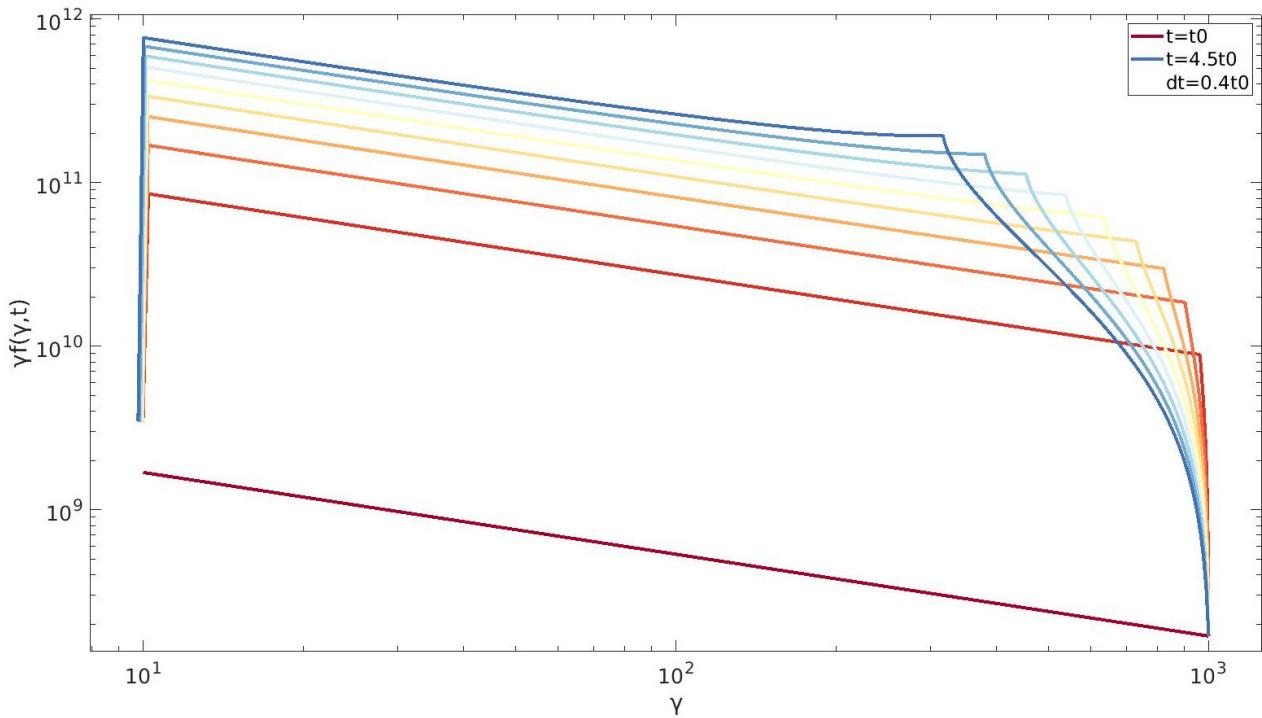
```

for g0=g_min:dx:g_max
g(2,j)=g0;
f(2,j)= dt*N0*g0^(-p);
j=j+1;
end
i=2;
for t=t0+dt:dt:tfin
j=1;
while j<M+1 && g(i,j)> 0.0
if g(i,j)>1.0
g(i+1,j)=g(i,j)-dt*L*(t/t0)^(2*a)*g(i,j)*g(i,j);
else
g(i+1,j)=g(i,j);
end
if g(i,j)>=g_min && g(i,j)<=g_max
f(i+1,j)=f(i,j)+dt*N0*g(i+1,j)^(-p)
+dt*(2.0*L*(t/t0)^(2*k)*f(i,j)*g(i,j));
else
f(i+1,j)=f(i,j)+dt*(2.0*L*(t/t0)^(2*k)*f(i,j)*g(i,j));
end
j=j+1;
end
j=j-1;
dz=(g_max-g(i+1,j))/(s-1);
for j=j:j+s-2
g(i+1,j+1)=g(i+1,j)+dz;
f(i+1,j+1)=dt*N0*g(i+1,j+1)^(-p);
end
i=i+1;
end

```

(α') Χρονική εξέλιξη του σύστηματος εώς $5t_0$.(β') Χρονική εξέλιξη του σύστηματος εώς $100t_0$.

Σχήμα 3.8: Χρονική εξέλιξη συνάρτηση συνάρτησης κατανομής επί τον συντελεστή Lorentz συναρτήσει του συντελεστή Lorentz για σταθερή τιμή μαγνητικού πεδίου ίση με 3G. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους που ισταπέχουν μεταξύ τους κατά dt (βλ. λεζάντα).



Σχήμα 3.9: Χρονική εξέλιξη συνάρτηση συνάρτησης κατανομής επί τον συντελεστή Lorentz συναρτήσει του συντελεστή Lorentz με μαγνητικό πεδίο ανάλογο του χρόνου και αρχικής τιμής 3G (βλ. σχέση 3.1). Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά dt (βλ. λεζάντα).

Τα σχήματα (3.8α') και (3.8β') απεικονίζουν το ίδιο πρόβλημα για διαφορετικό χρονικό εύρος καθώς στο πρώτο εκ των γραφημάτων, όπου η τελική χρονική στιγμή είναι αυτή που αναγράφεται στον πίνακα (3.2), η δράση του μηχανισμού ακτινοβολίας δεν είναι τέτοια ώστε να διωκρίνουμε εμφανώς τα χαρακτηριστικά της μορφής της κατανομής, σε αντίθεση με το δεύτερο σχήμα.

Στα σχήματα (3.8α'), (3.8β') και (3.9) παρατηρούμε την δημιουργία δύο κλάδων, έναν στις υψηλές ενέργειες κι έναν στις χαμηλές, ενώ ενδιάμεσα τους εύκολα παρατηρεί κανείς την μορφή ενός νόμου δύναμης, όχι ίδιας κλίσης με αυτή του εγχυόμενου πληθυσμού (όπως στην παράγραφο 3.2.1)).

Η κορυφή που διαχωρίζει τον νόμο δύναμης από τον υψηλοενεργειακό κλάδο περιγράφεται από την χρονική εξέλιξη της μέγιστης αρχικής ενέργειας της κατανομής, $\gamma_{max}(t)$, σύμφωνα με την σχέση (3.11). Καθώς η κορυφή αυτή μετακινείται προς τα αριστερά καταλαβαίνουμε ότι τα υπάρχοντα στο πλασμοειδές σωματίδια χάνουν ενέργεια. Ταυτόχρονα η εκ νέου έγχυση πληθυσμών προσθέτει σωματίδια και στις ενέργειες δεξιότερα της υψηλοενεργειακής κορυφής, δημιουργώντας την υψηλοενεργειακή ουρά.

Η χαμηλοενεργειακή κορυφή βρίσκεται συνεχώς στο $\gamma = \gamma_{min}$ με την αντίστοιχη ουρά να δημιουργείται με την ψύξη των σωματιδίων σε ενέργειες μικρότερες του ορίου αυτού, περιοχή στην οποία δεν συμβαίνει

έγχυση νέων σωματιδίων.

Συγχρίνοντας τα γραφήματα (3.8α') και (3.9) βλέπουμε τις ίδιες τρεις περιοχές όμως εύκολα καταλαβαίνουμε ότι στο δεύτερο εξ αυτών ο μηχανισμός έχει επιδράσει σε μεγαλύτερο βαθμό, παρόλο που το χρονικό εύρος που εξετάσαμε τα συστήματα είναι το ίδιο. Αυτό συμβαίνει καθώς στην δεύτερη περίπτωση το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται ανάλογα του χρόνου προκαλώντας τον μηχανισμό να γίνεται πιο αποδοτικός.

3.2.3 Επίδραση μηχανισμών επιτάχυνσης και απωλειών σύγχροτρον

Θεωρούμε ότι στο σύστημα αυτό τα σωματίδια κερδίζουν ενέργεια λόγω της συμπίεσης των πλασμοειδών αλλά ακτινοβολούν λόγω σύγχροτρον, οπότε η χαρακτηριστική καμπύλη που περιγράφει την χρονική εξέλιξη της αρχικής ενέργειας κάθε σωματίδιου είναι η ίδια με αυτή της παραγράφου (3.1.3).

Αυτή είναι η περίπτωση που περιγράφει καλύτερα το φυσικό σύστημα που μελετάμε καθώς επιδρούν μηχανισμοί επιτάχυνσης και ακτινοβολίας στο εγχύόμενα σωματίδια ενώ ταυτόχρονα τα πλασμοειδή δεν θεωρούνται απομονωμένα από το περιβάλλοντα χώρο εφόσον προστίθεται η υπόθεση πως οι εν λόγω δομές μπορούν συνεχώς να λαμβάνουν σωματίδια από το εξωτερικό πλάσμα.

Αναλυτική λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση, (3.17):

$$\gamma(t) = t^{\frac{a}{2}} \left[\frac{2L}{(5a+2)t_0^{2a}} \left(t^{\frac{5a+2}{2}} - t_0^{\frac{5a+2}{2}} \right) + \frac{t_0^{\frac{a}{2}}}{\gamma_0} \right]^{-1}$$

Επίλυση της σχέσης 2.5:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= S(\gamma, t) - f \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \\ \Rightarrow \frac{df}{dt} &= N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) H(t - t_0) - f(\gamma, t) \left[\frac{1}{2t} - 2L\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \right] \\ \Leftrightarrow \frac{df}{dt} + f(\gamma, t) \left[\frac{1}{2t} - 2L\gamma(t) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \right] &= N_0 \gamma^{-p} H(\gamma_{max} - \gamma) H(\gamma - \gamma_{min}) H(t - t_0) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Η ομογενής εξίσωση (3.18), όπως εκφράστηκε στην υποενότητα (3.1.3):

$$\frac{df}{dt} + \left\{ \frac{a}{2t} - 2Lt^{\frac{a}{2}} \left[\frac{2L}{(5a+2)t_0^{2a}} \left(t^{\frac{5a+2}{2}} - t_0^{\frac{5a+2}{2}} \right) + \frac{t_0^{\frac{a}{2}}}{\gamma_0} \right]^{-1} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2a} \right\} f(\gamma, t) = 0$$

Η σχέση (3.18) δεν λύνεται αναλυτικά.

Αριθμητική λύση

Για την πρόβλεψη της χρονικής εξέλιξης του συστήματος σχεδιάστηκε κώδικας δομής παρόμοιας με των δύο προηγούμενων παραγράφων (βλ. 3.2.1 και 3.2.2). Οι δύο διαφορικές εξισώσεις που αποτελούν το σύστημα πεπλεγμένων εξισώσεων είναι αυτή που δίνει την χρονική εξέλιξη της εκάστοτε ενέργειας (3.17) και εκείνη που αναφέρεται στην χρονική εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής (3.38).

Επιπλέον θεωρούμε πως και για τις δύο περιπτώσεις του μαγνητικού πεδίου, σταθερό στον χρόνο και ανάλογο αυτού, ο όρος επιτάχυνσης των σωματιδίων δίνεται από την σχέση (3.4) με $\alpha=1$.

Στο απόσπασμα του προγράμματος που ακολουθεί η επίλυση πραγματοποιείται σε ένα χρονικό εύρος $[t_0, t_{fin}]$, με τις τιμές των ενεργειών των σωματιδίων την χρονική στιγμή t_0 να ισαπέχουν κατά dγ και να καλύπτουν το εύρος $[\gamma_{in}, \gamma_{fin}]$.

```
a=1;
s=5;
N=fix (( tfin-t0 )/ dt +1);
M=fix (( g_max-g_min )/ dg)+(N-1)*s+1;
g=zeros (N,M);
f=zeros (N,M);
j =1.;

for g0=g_min : dg : g_max
    g (2 , j)=g0 ;
    f (2 , j)= dt*N0*g0 ^(-p );
    j=j +1;
end

i=2;
for t=t0+dt : dt : tfin -dt
    j=1;
```

```

while j<M+1 && g(i,j)> 0.0
  if g(i,j)>1.0
    g(i+1,j)=g(i,j)+dt*(g(i,j)/(2*t)-L*(t/t0)^(2*a)*g(i,j)*g(i,j));
  else
    g(i+1,j)=g(i,j)+dt*(g(i,j)/(2*t));
  end
  if g(i,j)>=g_min && g(i,j)<=g_max
    f(i+1,j)=f(i,j)+dt*N0*g(i+1,j)^(-p)
    +dt*(-1/(2*(t))*f(i,j)+2.0*(t/t0)^(2*a)*L*f(i,j)*g(i,j));
  else
    f(i+1,j)=f(i,j)+dt*(-f(i,j)/(2*t)+2.0*L*(t/t0)^(2*a)*f(i,j)*g(i,j));
  end
  if g(i+1,j)<1.0
    g(i+1,j)=1.0;
  end

j=j+1;
end

j=j-1;
if max(g(i+1,:))<g_max
  dz=(g_max-max(g(i+1,:)))/(s-1);
  g(i+1,j+1)=max(g(i+1,:))+dz;
  f(i+1,j+1)=dt*N0*g(i+1,j+1)^(-p);
  j=j+1;

if s>2
  for j=j:j+s-2
    g(i+1,j+1)=g(i+1,j)+dz;
    f(i+1,j+1)=dt*N0*g(i+1,j+1)^(-p);
  end

```

```

end

end

if min( z( i+1,1:j ))>g_min
dz=(min( z( i+1,1:j ))-x_in )/( s-1);
z( i+1,j+1)=g_min ;
y( i+1,j+1)=dt*N0*z( i+1,j+1)^(-p );
j=j+1;

if s>2
for j=j : j+s-2
z( i+1,j+1)=z( i+1,j )+dz ;
y( i+1,j+1)=dt*N0*z( i+1,j+1)^(-p );
end
end

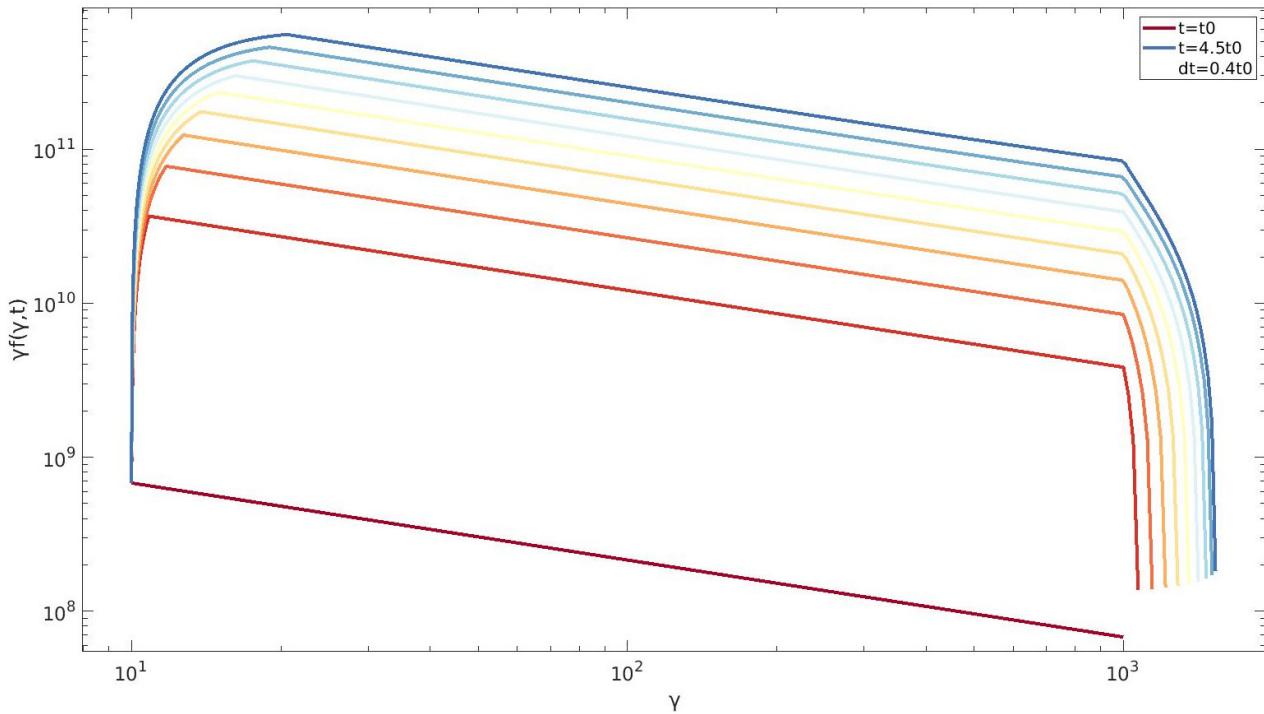
end

i=i+1
end

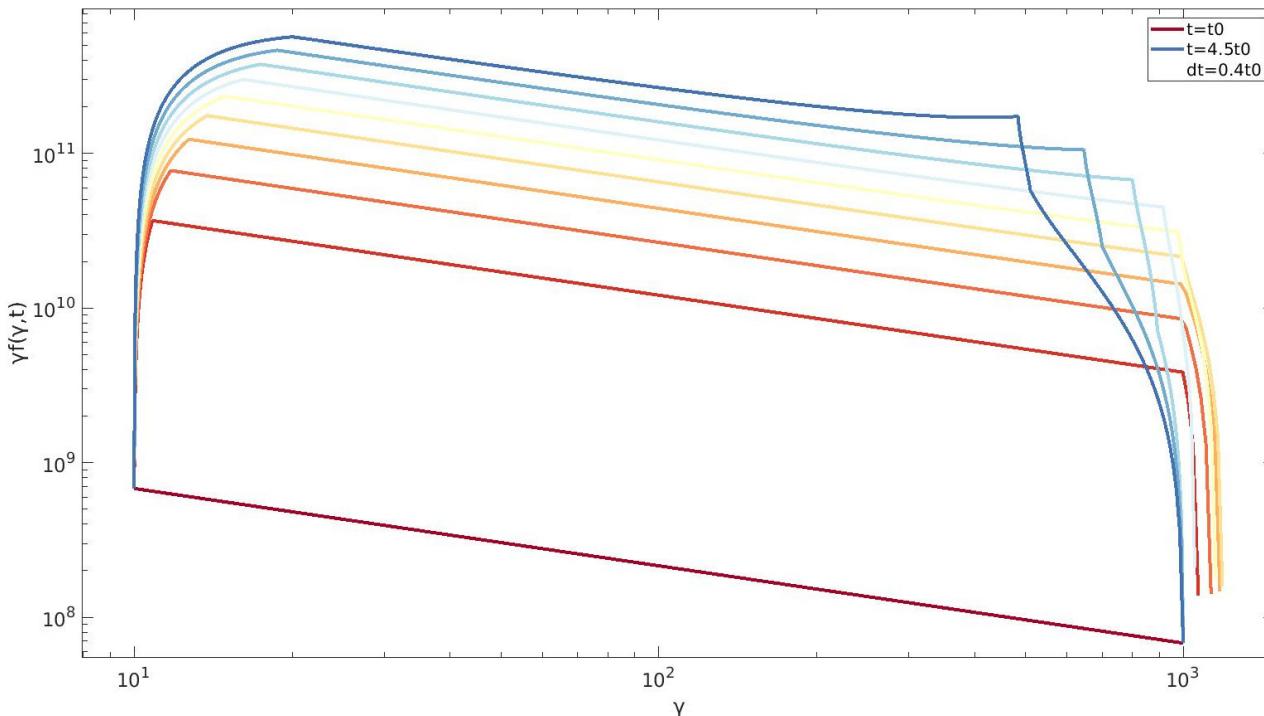
```

Η μορφή του σχήματος (3.10) είναι αρκετά παρόμοια με αυτή του σχήματος (3.7). Παρατηρούμε τις ξανά τους τρεις κλάδους της συνάρτησης: (i) τον υψηλοενεργειακό κλάδο ο οποίος δημιουργείται λόγω επιτάχυνσης των ήδη εγχυμένων σωματιδίων, (ii) τον χαμηλοενεργειακό κλάδο ο οποίος δημιουργείται λόγω μετακίνησης των ήδη εγχυμένων σωματιδίων προς τις μεγαλύτερες ενέργειες σε συνδυασμό με την συνεχή έγχυση του αρχικού νόμου δύναμης και ενδιάμεσα (iii) έναν νόμο δύναμης ο οποίος ενισχύεται κι αυτός με την επανέγχυση σε κάθε χρονικό βήμα.

Η υψηλοενεργειακή κορυφή βρίσκεται στο $\gamma = \gamma_{max}$, για κάθε χρονική στιγμή, ενώ το πέρας του αντίστοιχου κλάδου δίνεται από την χρονική εξέλιξη της μέγιστης τιμής της ενέργειας του εγχυόμενου πλυσθησμού, $\gamma_{max}(t)$. Αντίθετα η χαμηλοενεργειακή κορυφή μετακινείται προς τις υψηλότερες ενέργειες με το πέρασμα του χρόνου ακολουθώντας την χρονική εξέλιξη της χαμηλότερης τιμής της ενέργειας της



Σχήμα 3.10: Χρονική εξέλιξη συνάρτηση συνάρτησης κατανομής επί τον συντελστή Lorentz συναρτήσει του συντελεστή Lorentz με σταθερή τιμή μαγνητικού πεδίου ίση με 3G. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά dt (βλ. λεζάντα)



Σχήμα 3.11: Χρονική εξέλιξη συνάρτηση συνάρτησης κατανομής επί τον συντελστή Lorentz συναρτήσει του συντελεστή Lorentz με μαγνητικό πεδίο ανάλογο του χρόνου (σχέση 3.1) αρχικής τιμής 3G. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά dt (βλ. λεζάντα)

εγχυόμενης κατανομής, $\gamma_{min}(t)$.

Συγκρίνοντας το σχήμα (3.10) με το (3.7), στο οποίο δρα μόνο επιτάχυνση, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για στο ίδιο χρονικό διάστημα τα σωματίδια του πρώτου σχήματος έχουν φτάσει σε χαμηλότερες ενέργειες. Αυτό συμβαίνει γιατί παρόλο που για τις συγκεκριμένες παραμέτρους υπερισχύει η επιτάχυνση, ο μηχανισμός της ακτινοβολίας που έχει προστεθεί στο εν λόγω πρόβλημα, μειώνει την δράση της.

Στο σχήμα (3.11) παρατηρούμε ότι στις αρχικές χρονικές στιγμές υπάρχει ο κλάδος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ο οποίος βρίσκεται δεξιότερα της μέγιστης αρχικής ενέργειας, γ_{max} , οπότε τα σωματίδια επιταχύνονται. Παρόλο που το χρονικό εύρος στο οποίο τρέχει ο κώδικας είναι το ίδιο με αυτό του σχήματος (3.10), βλέπουμε ότι μετέπειτα ο εν λόγω κλάδος μετακινείται προς τις χαμηλότερες ενέργειες με αποτέλεσμα να μην ξεπερνά το άνω ενεργειακό όριο τα σωματίδια παύουν να να κερδίζουν ενέργεια καθώς υπερισχύει ο μηχανισμός ακτινοβολίας, όσο το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται.

Η χαμηλοενεργειακή κορυφή, αντιθέτως, καθ'όλη τη χρονική διάρκεια συνείζει να μετακινείται προς τις υψηλότερες ενέργειες υποδεικνύοντας ότι στα χαμηλοενεργειακά σωματίδια το ισοζύγιο ενέργειας μένει θετικό παρά την διαρκή αύξηση της ισχύος του μηχανισμού σύγχροτρον. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει το συμπέρασμα ότι για δεδομένες τιμές των παραμέτρων του προβλήματος, ο μηχανισμός ακτινοβολίας είναι αποδοτικότερος στις υψηλές ενέργειες.

3.2.4 Φάσματα Ακτινοβολίας Σύγχροτρον

Για τα συστήματα των υποενοτήτων (3.2.2) και (3.2.3) γράψαμε έναν υπολογιστικό κώδικα, ξανά σε περιβάλλον Matlab, ο οποίος υπολογίζει την ισχύ του φάσματος εκπεμπόμενης ακτινοβολίας σύγχροτρον της κατανομής, ολοκληρώνοντας στο ενεργειακό φάσμα την σχέση ακτινοβολίας (2.21) του ενός σωματίδιου, ενέργειας γ.

Ο κώδικας για συγκεκριμένες χρονικές στιγμές και για τιμές συχνοτήτων στο διάστημα [lowlim,uplim] (βλ. πίνακα 3.3) υπολογίζει την ισχύ ανά συχνότητα που εκπέμπεται από τα σωματίδια κάθε ενεργειακής τιμής του πληθυσμού, πολλαπλασιάζοντας την σχέση (2.21) με την συνάρτηση κατανομής για τις εν λόγω συχνότητα και τιμή της ενέργειας. Μέσω της μεθόδου του παραλληλογράμμου ολοκληρώνει την συνάρτηση αυτή στο ενεργειακό φάσμα και τέλος πολλαπλασιάζει με την τιμή της εκάστοτε συχνότητας.

Παρακάτω υπάρχει ένα κομμάτι του κώδικα το οποίο τρέχει με τις τιμές των παραμέτρων του πίνακα (3.3).

Παράμετρος	Σύμβολο	Τιμή	Μονάδες
Κάτω όριο συχνοτήτων	lowlim	10^8	Hz
Άνω όριο συχνοτήτων	uplim	10^{20}	Hz
Αριθμός βημάτων στο εύρος των συχνοτήτων	step	100	—
Λογαριθμικό βήμα στο εύρος των συχνοτήτων	dw1	0.2	—

Πίνακας 3.3: Λίστα παραμέτρων υπολογισμού του φάσματος ακτινοβολίας σύγχροτρον.

```

for t=2:fix (N/10):N
l=1; i=1;
for omega=lowlim :dw1: uplim
    for j=1:length (gamma( t ,:))
        if z(t,j)>0
            omega_c(j)=gamma( t ,j)^2*q*B0*( tval( t )/t0 )^a/
                (mass*c_light)*sin(a_ph);
            x(i,j)=10^(omega)/omega_c(j);
        end
    end
    i=i+1;
end
zmax=log10(100*max(max(x)));
i=1;
for omega=lowlim :dw1: uplim
    for j=1:length (z( t,:))-1
        if z(t,j)>0 && z(t,j+1)>0
            F(i,j)=Ffun(x(i,j),zmax);
            Ptot(i,l)=Ptot(i,l)+F(i,j)*f(t,j)*sqrt(3)*q^3*B0*( tval( t )/t0 )^a*
                sin(a_ph)/(2*pi*mass*c_light^2)*log(10)*gamma(t,j)*
                (log10(gamma(t,j+1))-log10(gamma(t,j)));
        end
    end
    w(i,1)=10^omega;
end

```

```

freq(i,1)=w(i,1)/(2*pi);
Pv_tot(i,l)=Ptot(i,l)*freq(i,1);
end
i=i+1;
end
l=l+1
end

```

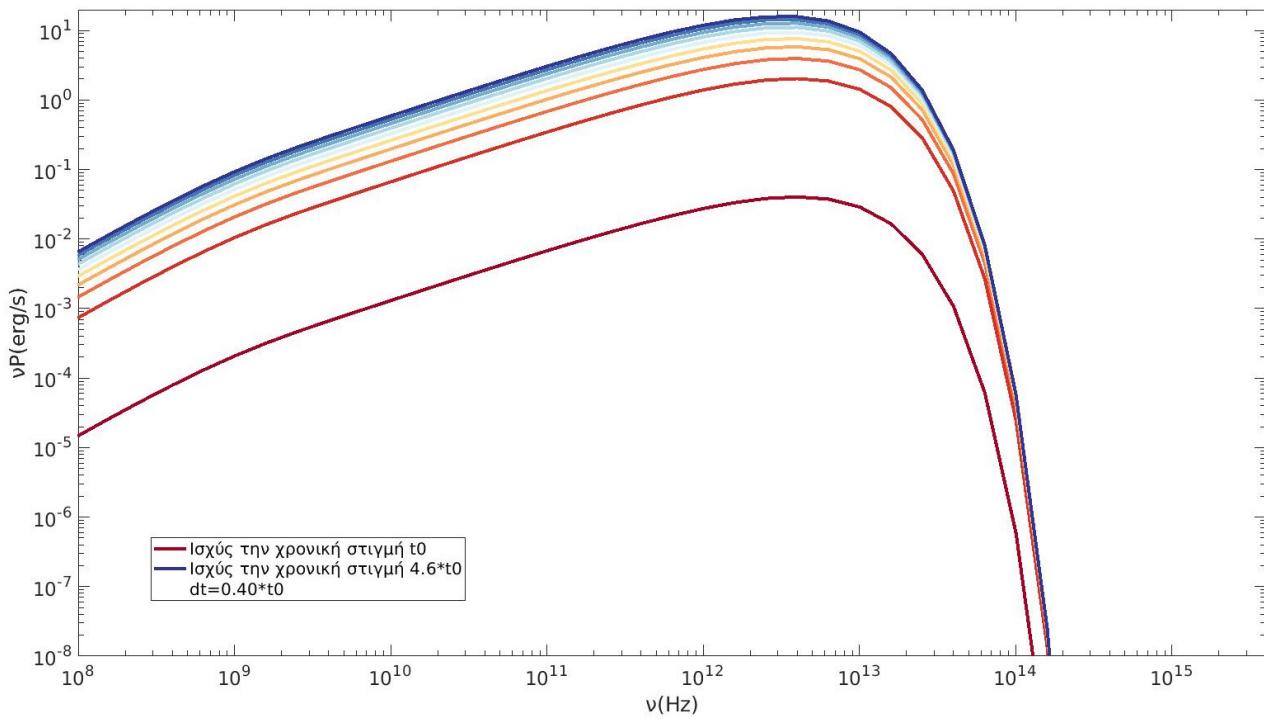
Στα γραφήματα (3.12α'), (3.12β'), (3.13α') και (3.13β') παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που δίνει την συνολική ισχύ της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από το σύνολο των σωματιδίων αποτελείται από τρεις κλάδους, με τους δύο να έχουν μορφή νόμου δύναμης και τον τρίτο να παρουσιάζει εκθετική συμπεριφορά.

Καθώς το φάσμα δίνεται ως η υπέρθεση των φασμάτων των σωματιδίων για κάθε ενεργειακή τιμή, η κεντρική περιοχή της γραφικής παράστασης αποτελείται κυρίως από τις κορυφές των επιμέρους φασμάτων και έχει την μορφή νόμου δύναμης, $P(v) \propto v^{-\beta}$ με $\beta = \frac{p-1}{2}$ για την ισχύ ανά μονάδα συχνότητας. Εφόσον σχεδιάζουμε την ισχύ όταν πολλαπλασίασουμε την προηγούμενη σχέση με την συχνότητα οπότε $vP(v) \propto v^{-\beta+1}$. Για την τιμή της κλίσης p που επιλέξαμε ο εκθέτης θα έχει την τιμή $-\beta + 1 = 3/4$. Εφόσον η τιμή είναι θετική η συνάρτηση είναι αύξουσα οπότε αναμένεται η μέγιστη τιμή της ακτινοβολίας να βρίσκεται προς τις υψηλότερες ενέργειες (όμοια και στο γράφημα 3.14 όπου $p = 2.5$). Η συνθήκη αυτή δεν θα ισχύει για αρνητικό εκθέτη, δηλαδή $p > 3$ (βλ. γράφημα 3.15).

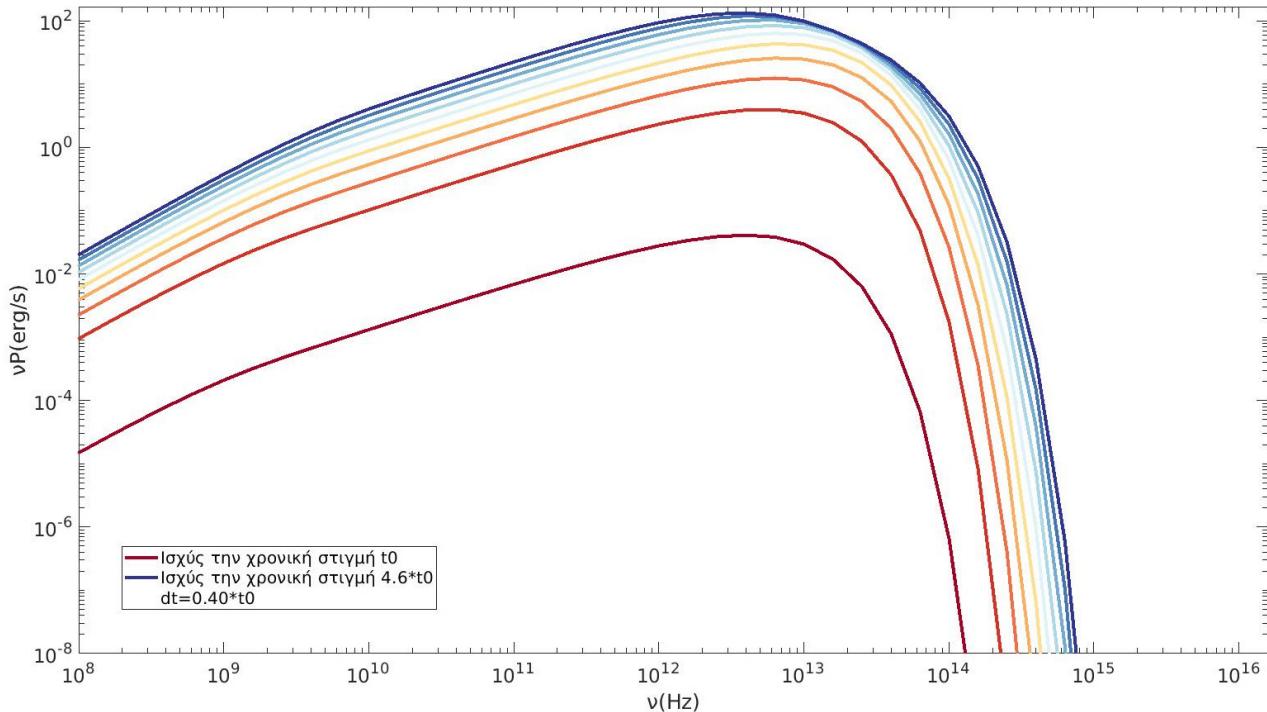
Ο υψηλοενεργειακός κλάδος της συνάρτησης συναντάται αμέσως μετά την μέγιστη τιμή της και περιγράφει την εκθετική πτώση της ακτινοβολίας στις υψηλότερες ενέργειες. Ο κλάδος αυτός οφείλεται στο φάσμα που παράγουν τα σωματίδια της υψηλότερης ενέργειας του πληθυσμού την εκάστοτε χρονική στιγμή.

Ο χαμηλοενεργειακός κάδος συναντάται περίπου μετά τα 10^9 Hz όπου συμβαίνει αλλαγή στη κλίση του νόμου δύναμης. Η νέα τιμή της κλίσης της ισχύος είναι ίση με $4/3$ ενώ ο κλάδος αυτός δημιουργείται λόγω της χαμηλοενεργειακής ‘ουράς’ του φάσματος ακτινοβολίας που εκπέμπεται από τα σωματίδια της χαμηλότερης ενέργειακής τιμής του πληθυσμού.

Στα συγκεκριμένα προβλήματα, με τις παραμέτρους που επιλέξαμε (βλ. πίνακα 3.2), το μέγιστο της ακτινοβολίας παρατηρείται σε τιμές συχνοτήτων $10^{12} - 10^{13}$ Hz οι οποίες αναφέρονται σε κομμάτι του φάσματος που αντιστοιχεί στα όρια υπέρυθρης ακτινοβολίας και οπτικού φάσματος. Όπως αναφέρθηκε, συχνότητα

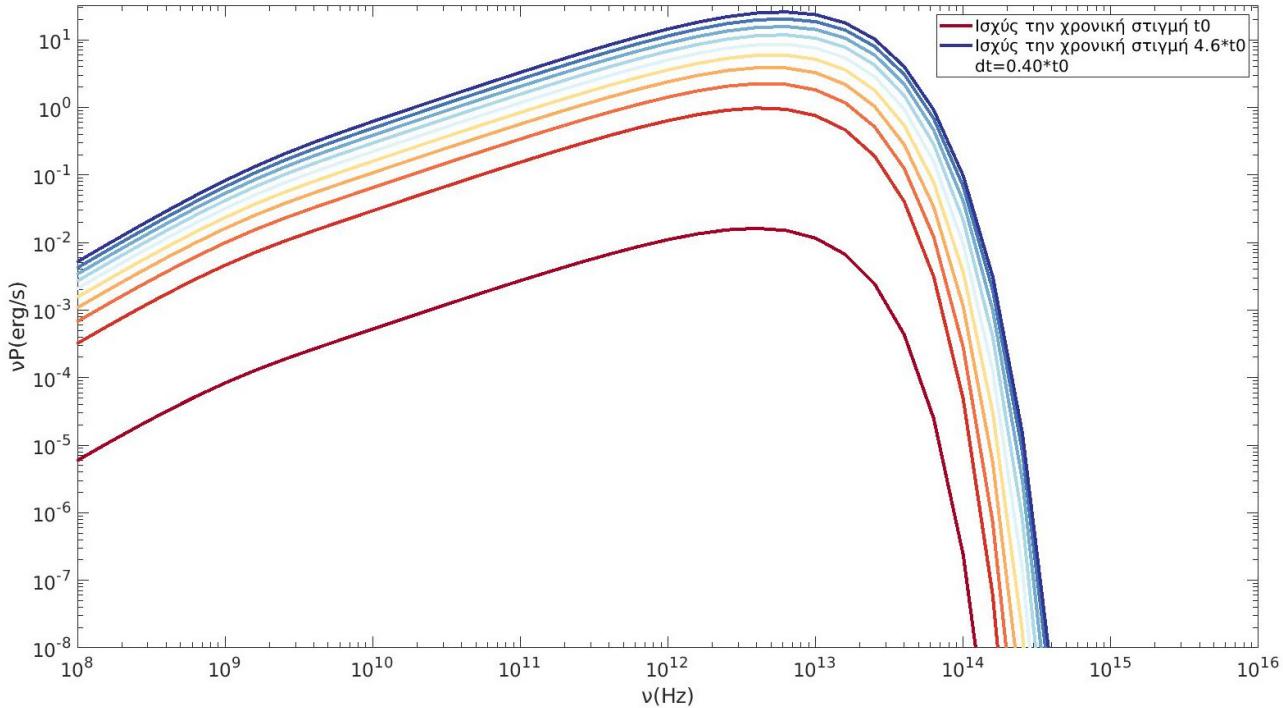


(α') Πρόβλημα σταθερού μαγνητικού πεδίου.

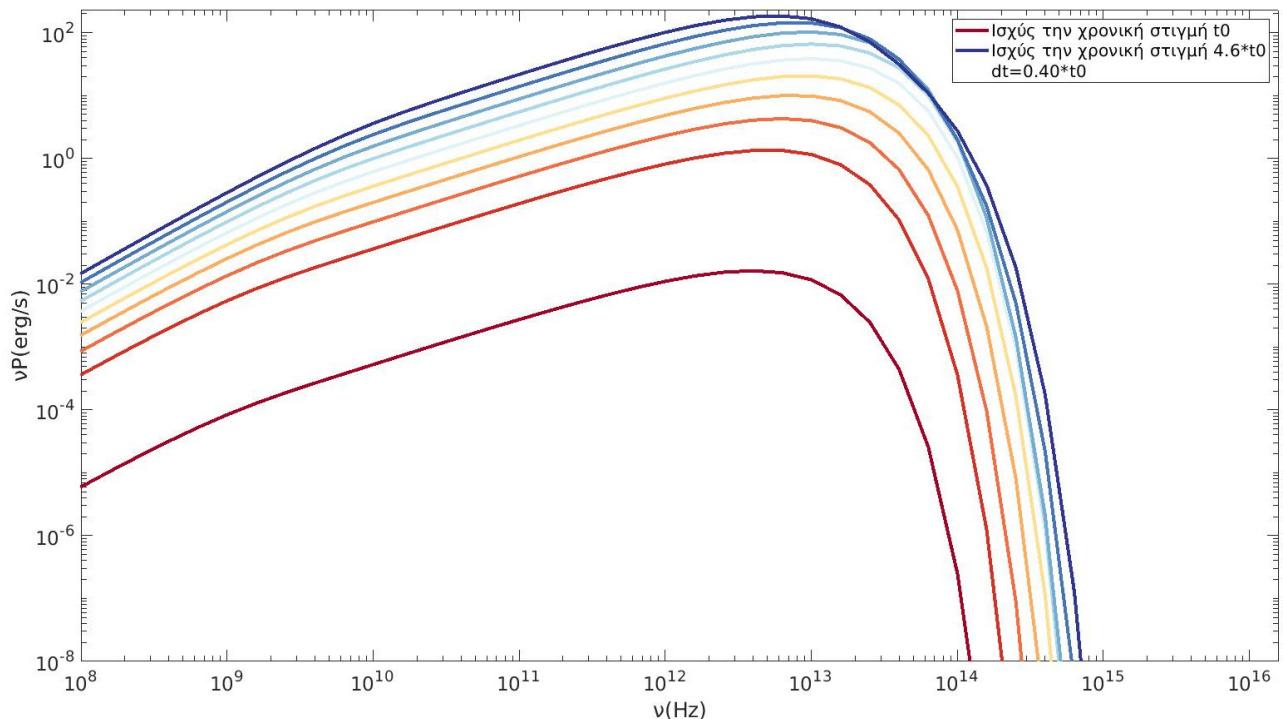


(β') Πρόβλημα χρονομεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου.

Σχήμα 3.12: Χρονική εξέλιξη φασμάτων ακτινοβολίας ισχύος συναρτήσει συχνότητας για σύστημα στο οποίο δρα μόνο ο μηχανισμός ακτινοβολίας σύγχροτρον (υποενότητα 3.2.2). Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά dt (βλ. λεζάντα).

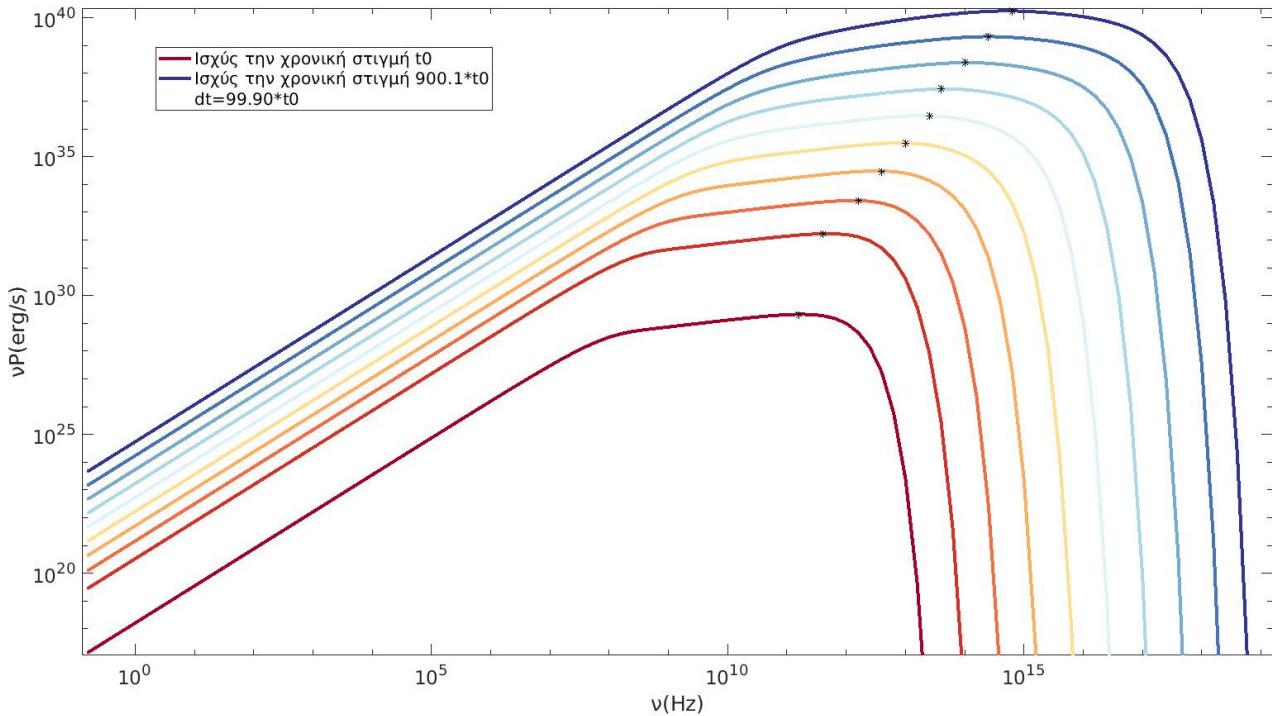


(α') Πρόβλημα σταθερού μαγνητικού πεδίου.



(β') Πρόβλημα χρονομεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου.

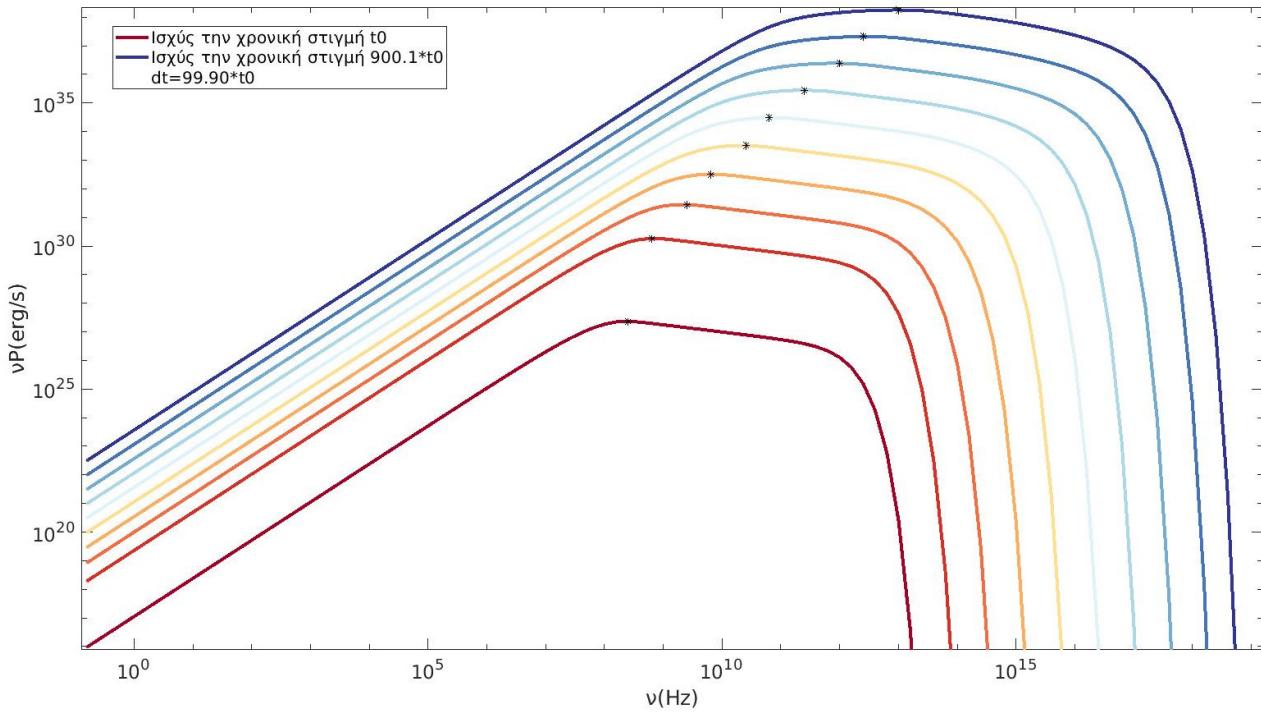
Σχήμα 3.13: Χρονική εξέλιξη φασμάτων ακτινοβολίας ισχύος συναρτήσει συχνότητας για σύστημα στο οποίο δρουν μηχανισμός επιτάχυνσης και ο μηχανισμός ακτινοβολίας σύγχροτρον (υποενότητα 3.2.3). Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά dt (βλ. λεζάντα).



Σχήμα 3.14: Χρονική εξέλιξη φασμάτων ακτινοβολίας ισχύος συναρτήσει συχνότητας για σύστημα στο οποίο δρουν ο μηχανισμός επιτάχυνσης και ο μηχανισμός ακτινοβολίας σύγχροτρον (υποενότητα 3.2.3)

ενώ η τιμή της κλίσης του εγχυόμενου πληθυσμού ισούται με $p = 2.5$. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά dt (βλ. λεζάντα) και τα άστρα επισημαίνουν την μέγιστη τιμή της ακτινοβολίας.

στην οποία παρουσιάζεται το μέγιστο της ακτινοβολίας είναι ανάλογη με το τετράγωνο της χρονικής εξέλιξης της μέγιστης αρχικής ενέργειας του πληθυσμού, $\gamma_{max}(t)$. Οπότε στα γραφήματα (3.12α') και (3.12β') όπου δεν υπάρχει ο μηχανισμός της επιτάχυνσης, τα σώματίδια θα χάνουν συνεχώς ενέργεια συνεπώς με το πέρασμα του χρόνου η κορυφή του γραφήματος της ισχύος θα μετακινείται προς τις χαμηλότερες συχνότητες. Αντιθέτως, στο γράφημα (3.13α') όπου η επιτάχυνση κυριαρχεί του μηχανισμού σύγχροτρον καθ' όλη τη χρονική διάρκεια κατά την οποία παρατηρούμε το σύστημα, τα σώματίδια που αρχικά έχουν την μέγιστη ενέργεια θα συνεχίσουν να επιτχύνονται οπότε και η κορυφή του φάσματος ακτινοβολίας θα μετακινείται προς τις υψηλότερες συχνότητες. Κοιτάζοντας το σχήμα (3.13β') παρατηρούμε έναν συνδυασμό των δύο συμπεριφορών, καθώς τις αρχικές στιγμές κυριαρχεί η επιτάχυνση η συχνότητα στην οποία εμφανίζεται η κορυφή του γραφήματος της ισχύος μετακινείται προς τις υψηλότερες συχνότητες. Έπειτα όπου για την μέγιστη αρχική ενέργειακή τιμή του πληθυσμού ο μηχανισμός των απωλειών κυριαρχεί αυτού της επιτάχυνσης, τα σώματίδια θα χάσουν ενέργεια και η κορυφή του φάσματος της ισχύος θα μετακινηθεί προς τις χαμηλότερες συχνότητες. Γνωρίζοντας ότι στα αστροφυσικά συστήματα εξωτερικά των πλασμοειδών μηχανισμοί πρωτεύουσας επιτάχυνσης δημιουργούν πληθυσμούς που ακολουθούν νόμους δύναμης ως προς τον παράγοντα Lorentz, μπορούμε να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων του συστήματος ώστε το μέγιστο



Σχήμα 3.15: Χρονική εξέλιξη φασμάτων ακτινοβολίας ισχύος συναρτήσει συχνότητας για σύστημα στο οποίο δρουν ο μηχανισμός επιτάχυνσης και ο μηχανισμός ακτινοβολίας σύγχροτρον (υποενότητα 3.2.3)

ενώ η τιμή της κλίσης του εγχυόμενου πληθυσμού ισούται με $p = 3.5$. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά dt (βλ. λεζάντα) και τα άστρα επισημαίνουν την μέγιστη τιμή της ακτινοβολίας.

του φάσματος να βρίσκεται στις ακτίνες X και γ (βλ. υποενότητα 3.3).

Επιπλέον η κανονικοποίηση των τιμών του άξονα τις ισχύος σχετίζεται με τον αριθμό των σωματιδίων της εκάστοτε έγχυσης. Στον πίνακα (3.2) στην παράμετρο αυτή δώσαμε την τιμή 10^8 σωματίδια. Όμως ο αριθμός αυτός είναι κατά πολύ μικρότερος του αντιπροσωπευτικού αριθμού σωματιδίων σε ένα αστροφυσικό σύστημα όπως ένας πίδακας από ενεργό γαλαξία. Καθώς ο αριθμός αυτός είναι μία πολλαπλασιαστική σταθερά στη σχέση που δίνει την ισχύ (σχ. 2.12 επί την συνάρτηση κατανομής), αυξάνοντας την τάξη μεγέθους του N_0 κατά 7 με 10 τάξεις μεγέθους, παρατηρούμε την ίδια μεταβολή στην ισχύ με αποτέλεσμα η εκπομπή της πηγής να είναι σημαντικότερη.

3.3 Εφαρμογή σε υψηλοενεργειακά φάσματα

Το ερώτημα που παραμένει είναι υπό ποιες συνθήκες ένα σύστημα στο οποίο δρουν συνδυαστικά οι μηχανισμοί επιτάχυνσης λόγω συμπιεζόμενων πλασμοειδών και ακτινοβολίας σύγχροτρον μπορεί να παράγει ακτινοβολία στο φάσμα των ακτινών X και γ . Όπως αναφέρθηκε στην υποενότητα (3.2.4), για την συγκε-

χριμένη τιμή της κλίσης του εγχυόμενου πληθυσμού, $p = 1.5 < 3$, το μέγιστο της ισχύος της ακτινοβολίας δίνεται από τα σωματίδια του πληθυσμού με την υψηλότερη ενεργειακή τιμή.

Στην υποενότητα (3.1.2) εξάγαμε την τιμή της συχνότητας αποκοπής της ακτινοβολίας η οποία είναι ίση με $\omega_c = \frac{2}{3}\omega_{obs}$, με $\omega_{obs} = \gamma^3 \omega_B s \sin a = \frac{\gamma^2 q B s \sin a}{mc}$ την συχνότητα των παλμών που λαμβάνει ο παρατηρητής. Οπότε το μέγιστο της ακτινοβολίας θα παρατηρείται σε συχνότητα ίση με $\nu_{peak}(\gamma_{max}) = \frac{\omega_c(\gamma_{max})}{2\pi}$. Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την σχέση η οποία δίνει την μεταβολή του μαγνητικού πεδίου με τον χρόνο, ως $B(t) = B_0 \frac{t}{t_0}$ αλλά και με την χαρακτηριστική καμπύλη $\gamma(t)$, η οποία δίνεται από την σχέση (3.17), συνεπάγονται συνθήκες που πρέπει να πληρούνται ώστε η επιτάχυνση των σωματιδίων να παράξει υψηλοενεργειακή ακτινοβολία:

1.

$$B(kt_0) = B_0 \frac{kt_0}{t_0} = kB_0$$

2.

$$\nu_{peak}(\gamma_{max}) = \frac{\omega_c(\gamma_{max})}{2\pi} \Rightarrow B(t) = \frac{2.38 \cdot 10^{10}}{\gamma_{max}(t)^2}$$

3.

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= t^{\frac{a}{2}} \left[\frac{2L}{(5a+2)t_0^{2a}} \left(t^{\frac{5a+2}{2}} - t_0^{\frac{5a+2}{2}} \right) + \frac{t_0^{\frac{a}{2}}}{\gamma_0} \right]^{-1} \Rightarrow \gamma(kt_0) = (kt_0)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2L}{7t_0^2} \left((kt_0)^{\frac{7}{2}} - t_0^{\frac{7}{2}} \right) + \frac{t_0^{\frac{1}{2}}}{\gamma_0} \right]^{-1} \\ \gamma(kt_0) &= k^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2Lt_0}{7} \left(k^{\frac{7}{2}} - 1 \right) + \frac{1}{\gamma_0} \right]^{-1} \end{aligned}$$

4.

$$L = 1.29 \cdot 10^{-9} B_0^2$$

Επιλέξαμε τιμές για τις παραμέτρους (βλ. πίνακα 3.4) οι οποίες ικανοποιούν τις προαναφερθείσες συνθήκες. Με δεδομένες την συχνότητα στην οποία ζητάμε το σύστημα να ακτινοβολεί μετά από χρόνο $t = kt_0$, τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα k αλλά και την μέγιστη ενέργεια του πληθυσμού εκείνη την χρονική στιγμή, εξάγαμε τις παραμέτρους της αρχικής τιμής του μαγνητικού πεδίου, $B(t_0) = B_0$ και την τιμή της χρονικής στιγμής της αρχικής έγχυσης, t_0 . Τις τιμές των παραμέτρων αυτών τις χρησιμοποιήσαμε στον κώδικα της παραγράφου (3.2.4) για το πρόβλημα στο οποίου δρουν οι μηχανισμοί επιτάχυνσης και ακτινοβολίας ταυτόχρονα και το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται ανάλογα με τον χρόνο, καθώς το πρόβλημα αυτό είναι και το πιο αντιπροσωπευτικό, εξ αυτών που μελετήσαμε, ενός αστροφυσικού συτήματος. Οι παράμετροι που

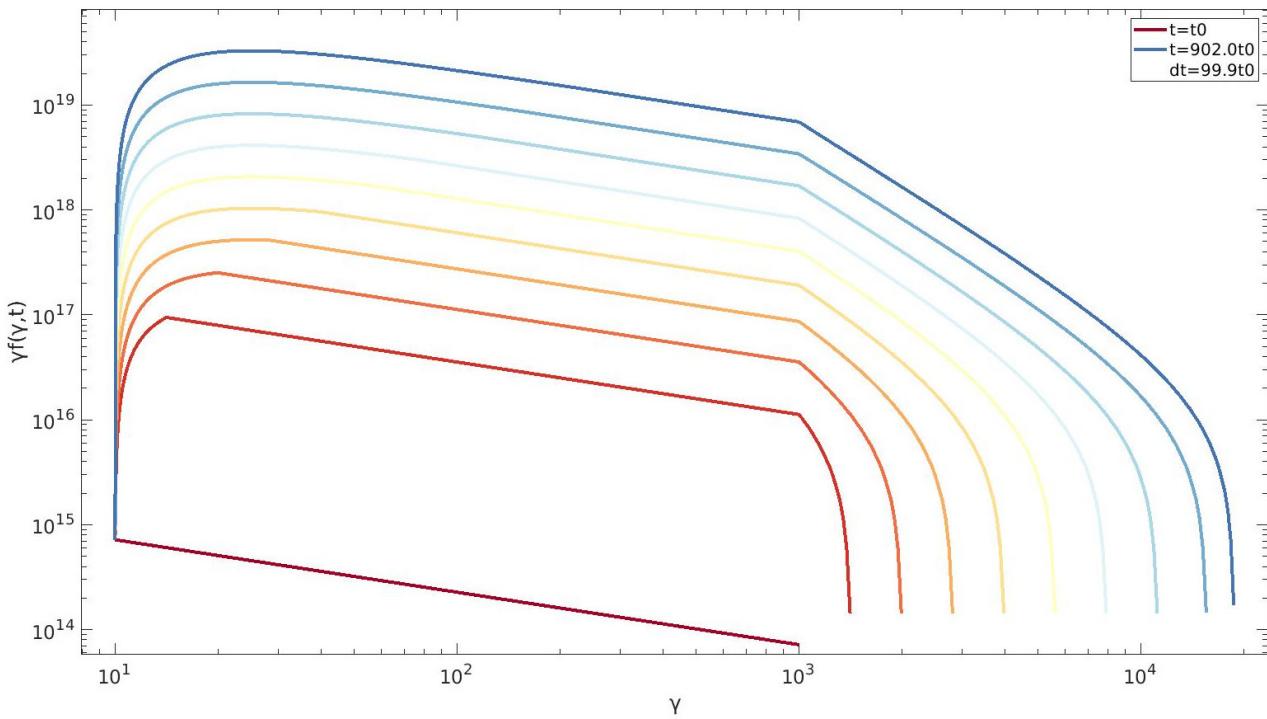
δεν αναφέρονται στον πίνακας παραμένουν ίδιες με αυτές των πινάκων (3.2) και (3.3).

Παράμετρος	Σύμβολο	Τιμή	Μονάδες
Χρονική στιγμή αρχικής έγχυσης	t_0	1.0076	s
Τελική χρονική στιγμή ως πολλαπλάσιο του t_0	kt_0	1000	t_0
Αρχική τιμή του μαγνητικού πεδίου	B_0	0.238	G
Χρονικό βήμα	dt	0.9993	t_0
Ελάχιστη ενέργεια εγχυόμενου πληθυσμού	γ_{min}	10	—
Μέγιστη ενέργεια εγχυόμενου πληθυσμού	γ_{max}	10^3	—
Συντελεστής κανονικοποίησης	N_0	10^{50}	—
Συχνότητα μέγιστης εκπομπής για χρόνο kt_0	f_c	10^{17}	Hz

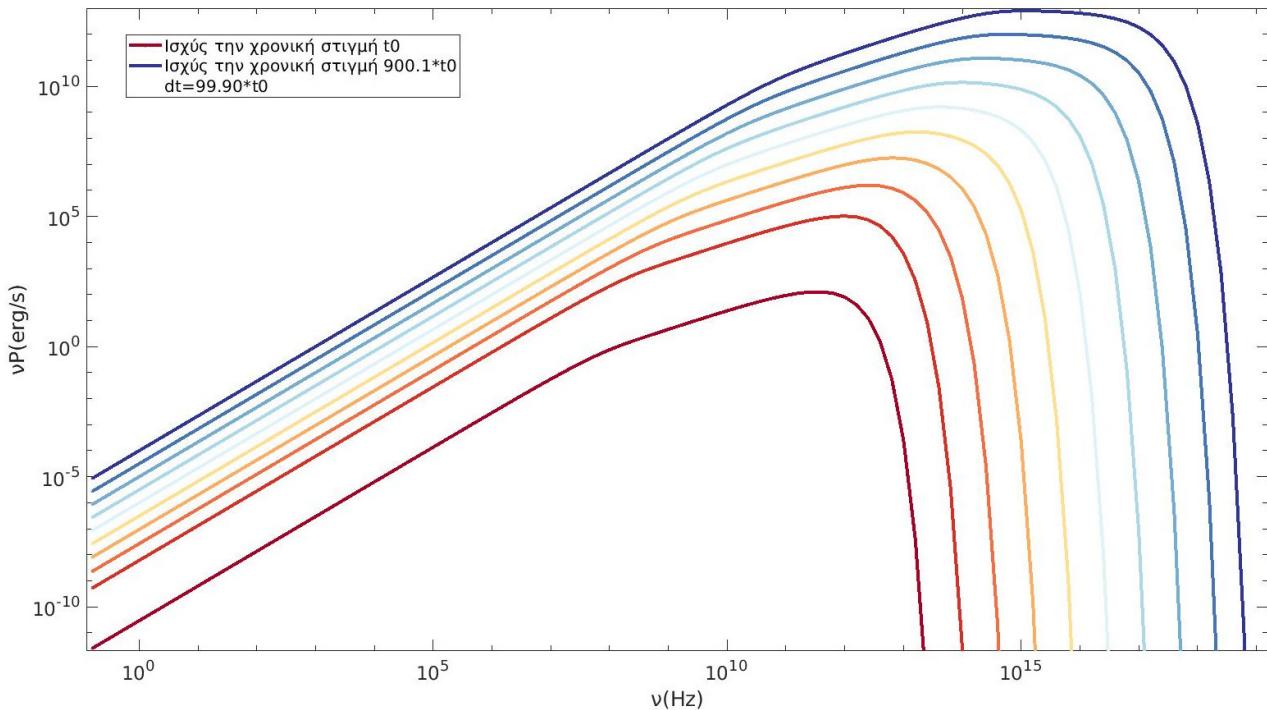
Πίνακας 3.4: Λίστα παραμέτρων υπολογισμού του φάσματος.

Στο σχήμα (3.16) παρατηρούμε καταρχάς ότι για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων η επιτάχυνση κυριαρχεί των απωλειών και ούλη την χρονική διάρκεια στην οποία εξετάζουμε το σύστημα, αναμενόμενο καθώς τέθηκε ως συνθηκή προηγουμένως ώστε η ακτινοβολία του πληθυσμού να φτάσει τις ακτίνες X. Επιπλέον παρατηρούμε, εμφανέστερα από τις υποενότητες (3.2.1), (3.2.2) και (3.2.3), ότι ο πληθυσμός των φορτισμένων σωματιδίων, ενώ αρχικά είχε την μορφή νόμου δύναμης μοναδικής κλίσης, με την πάροδο του χρόνου δημιουργείται ένας κλάδος στην περιοχή $[\gamma_{max}, \gamma_{max}(t)]$ στον οποίο η κλίση αυξάνεται, προτού η συνάρτηση τελικά μειωθεί απότομα, στην γειτονική περιοχή του $\gamma_{max}(t)$. Οι άλλοι δύο κλάδοι για ενεργειακές τιμές μικρότερες του γ_{max} παραμένουν όμοιες με τα σχήματα (3.7) και (3.10), με την χαμηλο-ενεργειακή κορυφή να κινείται προς τις υψηλές ενέργειες σύμφωνα με την χρονική εξέλιξη της ελάχιστης ενεργειακής τιμής του πληθυσμού, $\gamma_{min}(t)$.

Κοιτάζοντας το γράφημα (3.17) παρατηρούμε όντως προς τις τελευταίες χρονικές στιγμές η μέγιστη τιμή του φάσματος ακτινοβολίας του πληθυσμού βρίσκεται κοντά σην γειτονιά συχνοτήτων ίσων με 10^{17} Hz, τιμή που θέσαμε στις συνθήκες του προβλήματος, οπότε και ακτινοβολεί στις ακτίνες X. Παρατηρώντας ξανά το γράφημα (3.16) βλέπει κανείς ότι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών καμπυλών που απέχουν μεταξύ τους χρονικά dt μειώνεται με την πάροδο του χρόνου. Ως αποτέλεσμα η επιτάχυνση γίνεται λιγότερο αποτελεσματική λόγω της εξάρτησης του μηχανισμού από τον χρόνο, όσο αυτός αυξάνεται (βλ. σχέση 3.17), αλλά και λόγω του ισχυρότερου μηχανισμού σύγχροτρον όσο το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται (βλ. σχέση 3.1). Παρ' αυτά είναι εμφανές ότι ακόμα η επιτάχυνση υπερισχύει της ακτινοβολίας οπότε μπορούμε να περιμένουμε τις επόμενες χρονικές στιγμές η κορυφή της ισχύος να μετακινηθεί προς τις υψηλότερες συχνότητες προτού ξεκινήσει να μετατοπίζεται εκτός του φάσματος των ακτίνων X και προς το υπεριώδες



Σχήμα 3.16: Χρονική εξέλιξη συνάρτηση συνάρτησης κατανομής επί τον συντελστή Lorentz συναρτήσει του συντελεστή Lorentz με μαγνητικό πεδίο ανάλογο του χρόνου (σχέση 3.1) αρχικής τιμής 0.238G . Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά dt (βλ. λεζάντα)



Σχήμα 3.17: Χρονική εξέλιξη φασμάτων ακτινοβολίας ισχύος συναρτήσει συχνότητας για σύστημα στο οποίο δρουν οι μηχανισμοί επιτάχυνσης και ακτινοβολίας. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικούς χρόνους που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά dt (βλ. λεζάντα).

φάσμα.

Στον πίδακα μίας μελανής οπής το εύρος τιμών που λαμβάνει το μαγνητικό πεδίο είναι αρκετά μεγάλο και σημαντικής χωρικής μεταβολής, μπορεί κατά μήκος του πίδακα να ξεκινήσει από τιμές της τάξης των 0.1 G και πλησιάζοντας στην βάση του να φτάσει τις εκατοντάδες G. Οπότε κανείς καταλαβαίνει ότι η τιμή που εξάγαμε ως αρχική τιμή για το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό των πλασμοειδών είναι δυνατό να βρεθεί στην χωρική έκταση ενός πίδακα οδηγώντας στο αποτέλεσμα εκπομπής υψηλοενεργειακής ακτινοβολίας.

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα

Μέσω της μελέτης αυτής μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το εσωτερικό των πλασμοειδών δεν αποτελεί περιοχή στην οποία όταν βρεθούν υψηλοενεργειακά σωματίδια, ακτινοβολούν όλη την ενέργεια τους ώσπου να ‘χρυώσουν’. Αντιθέτως τα αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων έδειξαν ότι όχι μόνο ο μηχανισμός των συμπιεζόμενων πλασμοειδών προσφέρει επιπλέον ενέργεια στα σωματίδια που εισέρχονται στις δομές, αλλά και για αστροφυσικά συστήματα που περιγράφονται από σετ παραμέτρων οι οποίες πληρούν κάποιες προϋποθέσεις, ο μηχανισμός της επιτάχυνσης μπορεί να υπερισχύει του μηχανισμού ακτινοβολίας σύγχροτρον οπότε τελικά οι πληθυσμοί εντός των πλασμοειδών θα κερδίζουν ενέργεια για σημαντικές χρονικές περιόδους φτάνοντας σε ακόμα υψηλότερες τιμές του παράγοντα Lorentz. Στις εν λόγω περιπτώσεις το φάσμα της ακτινοβολίας των σωματιδίων αυτών πράγματι εισέρχεται στην περιοχή των ακτινών X δίνοντας αποτέλεσμα μη θερμικής υψηλοενεργειακής εκπομπής. Επιπλέον παρατηρήσαμε ότι με την πάροδο του χρόνου μέσα στα πλασμοειδή δημιουργούνται πληθυσμοί που περιγράφονται από σπασμένους νόμους δύναμης ως προς την ενέργεια των σωματιδίων, χαρακτηριστικό που ενώ έχει παρατηρηθεί πειραματικά σε αστροφυσικά φάσματα δεν προκύπτει από άλλους μηχανισμούς επιτάχυνσης που είναι γνωστό ότι δρουν σε συστήματα υψηλής μαγνήτισης.

Παράρτημα A'

Διατήρηση Πρώτης Αδιαβατικής Αναλλοίωτης

Οι αδιαβατικές αναλλοίωτες δίνονται από ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\oint P \mathrm{d}q \quad (\text{A}'1)$$

όπου ως P αναπαρίσταται η εκάστοτε συνιστώσα της ομρμής και ως q η αντίστοιχη γενικευμένη χωρική συνιστώσα.

Η ορμή που συναντάται στον υπολογισμό της πρώτης αδιαβατικής αναλλοίωτης αντιστοιχεί στην γενικευμένη ορμή του σωματιδίου λόγω γυροκίνησης, η οποία αποτελεί την κάθετη συνιστώσα της ορμής του σωματιδίου συν την δυναμική (\cdot) ορμή λόγω του ανυσματικού δυναμικού, A .

$$P = p_{\perp} + \frac{q}{c} A \quad (\text{A}'2)$$

Μιλώντας για την γυροκίνηση του σωματιδίου γύρω από τις μαγνητικές γραμμές, η γενικευμένη χωρική συνιστώσα αναφέρεται στην ακτίνα γυροκίνησης,

$$r_L = \frac{cp_{\perp}}{qB} \Rightarrow \quad (\text{A}'3)$$

$$dq = dr_L = \frac{c}{qB} dp_{\perp} \quad (\text{A}'4)$$

Εάν η συχνότητα της γυροκίνησης είναι πολύ μεγαλύτερη από τον ρυθμό χωρική μεταβολής του μαγνητικού πεδίου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κατά μία περίοδο γυροκίνησης το μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζεται στο σωματίδιο είναι περίπου σταθερό. Στην περίπτωση αυτή ισχύει, επιπλέον ότι το ολοκλήρωμα A'.1 είναι σταθερά του συστήματος.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω δεδομένα:

$$\begin{aligned}
 & \oint \left(p_{\perp} + \frac{q}{c} A \right) dq = const \Leftrightarrow \\
 & \oint p_{\perp} r_L d\phi + \frac{q}{c} \vec{A} d\vec{q} = const \xrightarrow{\text{Stokes}} \\
 & \frac{cp_{\perp}}{qB} \oint p_{\perp} d\phi + \frac{q}{c} \int \int \vec{\nabla} \times \vec{A} d\vec{q} = const \xrightarrow{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \\
 & \frac{cp_{\perp}}{qB} \oint p_{\perp} d\phi + \frac{q}{c} \int \vec{B} d\vec{S} = const \Leftrightarrow \\
 & \frac{2\pi c}{qB} p_{\perp}^2 + \frac{qB}{c} \pi r_L^2 = const \xrightarrow{\text{A.3}} \\
 & \frac{2\pi c}{qB} p_{\perp}^2 + \frac{qB}{c} \pi \frac{c^2}{q^2 B^2} p_{\perp}^2 = const \xrightarrow{\text{A.3}} \\
 & \frac{2\pi c}{qB} p_{\perp}^2 + \frac{\pi c}{qB} p_{\perp}^2 = const \Leftrightarrow \\
 & \frac{3\pi c}{qB} p_{\perp}^2 = const \xrightarrow{p_{\perp} = psina = \gamma m v \sin a} \\
 & \frac{3\pi c \gamma^2 m^2 v^2 \sin^2 a}{qB} = const \Rightarrow \frac{\gamma^2 v^2 \sin^2 a}{B} = const \xrightarrow{v^2 = c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \\
 & \frac{\gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \sin^2 a}{B} = const \Rightarrow \\
 & \frac{(\gamma^2 - 1) \sin^2 a}{B} = const
 \end{aligned} \tag{A'.5}$$

Βιβλιογραφία

- [1] Ioannis Daglis et. al. *Σημειώσεις διαστημικής φυσικής*.
- [2] Kevin Genestreti, L. Kistler, and Christopher Mouikis. *The role and dynamics of oxygen of ionospheric origin in magnetopause reconnection.* PhD thesis, 05 2012.
- [3] Τσίγκανος Χ. Κανάρης. *Αστροφυσική Πλάσματος.*
- [4] Krzysztof Nalewajko, Dmitri A. Uzdensky, Benoît Cerutti, Gregory R. Werner, and Mitchell C. Begelman. On the Distribution of Particle Acceleration Sites in Plasmoid-dominated Relativistic Magnetic Reconnection. *ApJ*, 815(2):101, December 2015.
- [5] Swisdak M. Che H. et al. Drake, J. Electron acceleration from contracting magnetic islands during reconnection. 2006.
- [6] Απόστολος Μαστιχιάδης, Νεκτάριος Βλαχάκης. *Αστροφυσική Υψηλών Ενέργειών.*
- [7] Alan P. Lightman George B. Rybicki. *Radiative processes in astrophysics.* Haruard-Smithsonian Center for Astrophysics.
- [8] Hayk Hakobyan, Maria Petropoulou, Anatoly Spitkovsky, and Lorenzo Sironi. Secondary energization in compressing plasmoids during magnetic reconnection. *The Astrophysical Journal*, 912(1):48, May 2021.
- [9] Maria Petropoulou and Lorenzo Sironi. The steady growth of the high-energy spectral cut-off in relativistic magnetic reconnection. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 481(4):5687–5701, 10 2018.
- [10] Lorenzo Sironi and Anatoly Spitkovsky. RELATIVISTIC RECONNECTION: AN EFFICIENT SOURCE OF NON-THERMAL PARTICLES. *The Astrophysical Journal*, 783(1):L21, feb 2014.

- [11] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Pearson, Boston, MA, 2013. Re-published by Cambridge University Press in 2017.