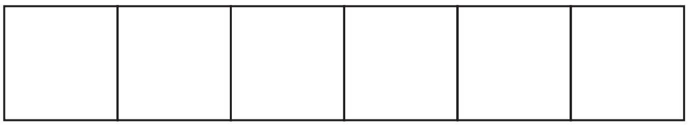
QUANTOS RETÂNGULOS?

DESCOBRINDO O DESAFIO

Você sabia que conseguimos construir retângulos com qualquer número de quadrados?

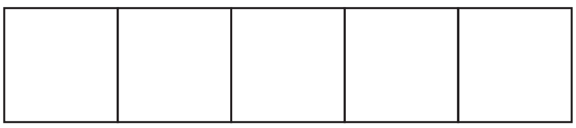
Por exemplo, com 6 quadrados podemos fazer 2 retângulos.



1x6

2x3

Mas com 5 quadrados, construímos apenas um retângulo.



1x5

Com 3 quadrados, quantos retângulos você consegue formar?

E com 12?

Tenho menos que 15 quadrados, e com essa quantidade só consigo formar um retângulo.

Você consegue descobrir quantos quadrados eu tenho?

Eita! Não dá pra ter certeza!

Então, quais são as possibilidades?

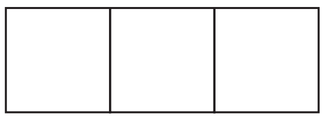
O desafio foi adaptado do site Math is Fun, de Rod Pierce: **http://www.mathsisfun.com/index.htm.**
Acessado em setembro de 2019.

SOLUÇÃO

No enunciado são apresentados dois exemplos. Analisando-os, vemos que ambos poderão ser construídos com uma linha e, nesse caso, o número de colunas é equivalente à quantidade de quadrados. Também percebemos que, no caso dos 6 quadrados, o segundo retângulo que pode ser formado é equivalente a escrever o número 6 como o produto de dois números diferentes de 1.

Constata-se que quando temos uma quantidade de quadrados que só nos permite construir um retângulo[1], essa quantidade, ou é o próprio número 1, ou é um número primo - um número maior que 1 divisível apenas por ele mesmo e por 1. Logo, na primeira pergunta do problema 1, sabendo que o número 3 é primo, só teremos um modo de construção.

3x1 = 3



Para os propósitos deste desafio, a posição do retângulo não importa: apenas um retângulo pode ser construído, com o lado maior 3 e o lado menor 1.

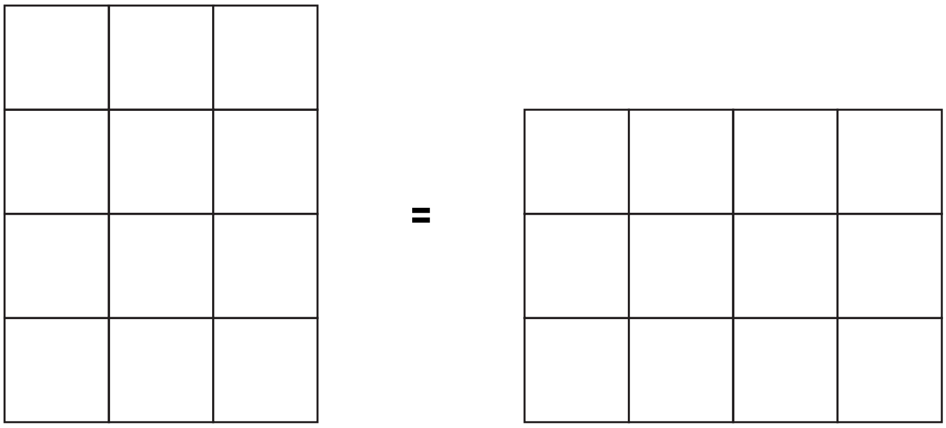
No entanto, para os números não-primos, ou seja, os compostos, a quantidade de retângulos é dada pela quantidade de decomposições do número num produto de dois fatores. Sendo assim, para a segunda pergunta

---

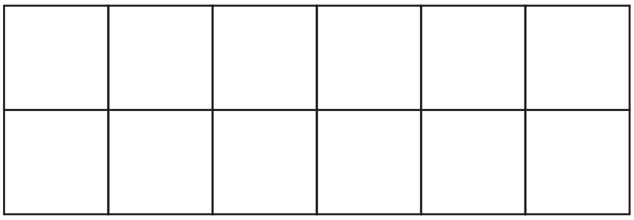
1 Na análise, comentaremos sobre a inclusão de classes dos quadriláteros, ou seja, sobre o quadrado ser um retângulo.

do problema 1, como o número de quadrados é 12, poderemos obter tantos retângulos quantas decomposições diferentes o número tiver:

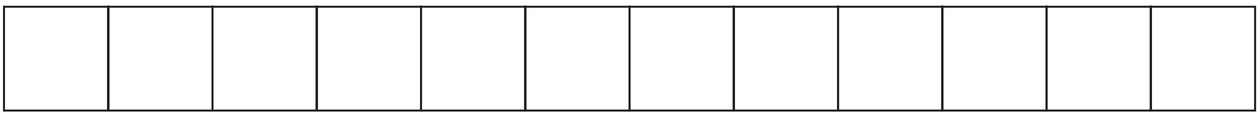
12 = 3 x 4 = 4 x 3



12 = 6x2



12 = 12x1

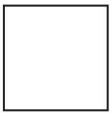


Após fazer a decomposição, constatamos que há 3 formas de construir retângulos – as formas relatadas acima.

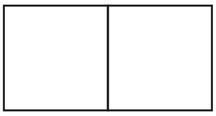
No Problema 2, a pergunta é quais são as quantidades de quadrados com as quais é possível formar apenas um retângulo, considerando um número de quadrados menor que 15.

Considerando que só pode haver uma maneira de construir o retângulo, podemos afirmar que será um número primo ou o número 1. Então, é necessário buscar os números primos que são menores que 15 e incluir nessa lista o número 1, para obter a resposta completa do problema.

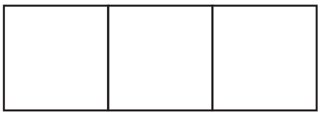
1ª solução - 1 quadrado



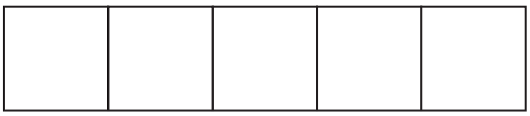
2ª solução - 2 quadrados



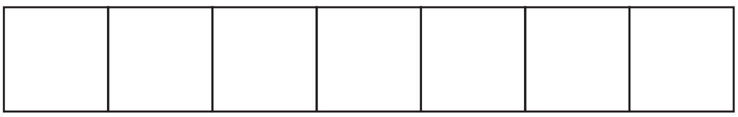
3ª solução - 3 quadrados



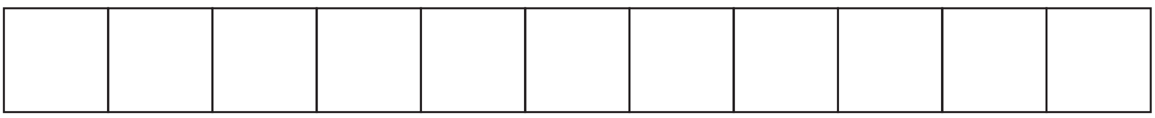
4ª solução - 5 quadrados



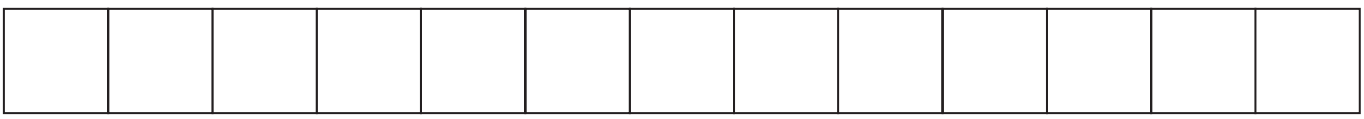
5ª solução - 7 quadrados



6ª solução – 11 quadrados



7ª solução – 13 quadrados



Dessa forma, obtivemos que as quantidades de quadrados que formam apenas um retângulo. São elas: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13.

ANÁLISE

O desafio foi aplicado em uma turma do 5° ano, na Escola Municipal de Belo Horizonte, parceira do projeto Descobridores da Matemática.

A aplicação desse problema possibilita o desenvolvimento de habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, de agora em diante). Para a turma do 5º ano, destacamos: *(EF05MA17) - "Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais".*

É possível situar esse desafio no âmbito de possibilidades de *"Descoberta Guiada"* dos números primos, associando-os às quantidades de quadrados para as quais é possível construir apenas um retângulo. Nessa metodologia, o professor *"formula o problema ou escolhe a situação com o objetivo em mente e conduz o aluno para a solução ou objetivo"* (Ernest, 1998, p. 32). O material concreto e as discussões, auxiliam os estudantes a observarem que existe um conjunto de números para os quais é possível construir apenas um retângulo e, depois, cabe ao professor, sistematizar, junto à turma, essa conclusão e nomear o conjunto como os Números Primos.

A BNCC preconiza algumas competências específicas para a Matemática que compartilham esse mesmo propósito - o de incentivar uma postura ativa dos estudantes na construção do Conhecimento Matemático. Mesmo que essa conexão não seja direta, consideramos importante compreender que o incentivo a esse tipo de postura encontra consonância no trabalho empreendido. Destacamos:

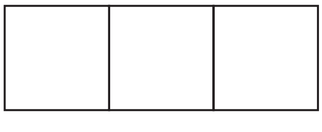
> Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convin-

> centes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo (2);
>
> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (6).

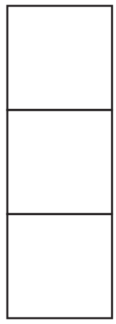
Reconhecemos a importância do desenvolvimento do raciocínio lógico, mas a expressão *"produzir argumentos convincentes"* não é considerada adequada para descrever esse trabalho, uma vez que um argumento pode ser convincente e bem construído, sem que a conclusão esteja logicamente bem encadeada. De modo que a expressão mais apropriada é "produzir argumentos válidos".

Na aplicação, o enunciado foi lido com as crianças, com o intuito de sanar suas dúvidas com relação ao solicitado. Aproveitamos a leitura para esclarecer que apenas fazer uma rotação com o retângulo formado, não seria, no caso desse desafio, formar um novo retângulo, como no exemplo abaixo, ou seja, retângulos com as mesmas dimensões, porém girados - da posição horizontal para a vertical - não são considerados retângulos diferentes.

1x3



3x1



Após a leitura, as crianças desenvolveram, de modo geral, a estratégia de desenhar retângulos com o número de quadrados apresentados, verificando as possibilidades de formá-los. É possível que essa estratégia tenha sido adotada para melhor visualização da situação-problema. A decomposição dos números, para se obter as dimensões do retângulo, não foi realizada utilizando cálculos mentais por todos os estudantes, pois muitos mobilizaram os desenhos buscando resolver o problema por tentativa e erro. Os descobridores tentavam diferentes formas até conseguirem obter as construções desejadas. Por outro lado, alguns apresentavam uma ideia de decomposição e realizavam-na mentalmente, utilizando os desenhos para conferir.

Para exemplificar, tomamos os registros da Bárbara que apresentou a resolução por meio de desenhos. O uso da borracha evidencia a utilização da estratégia de tentativa e erro – na qual são apagadas aquelas que não são bem-sucedidas, como mostra a figura 1.

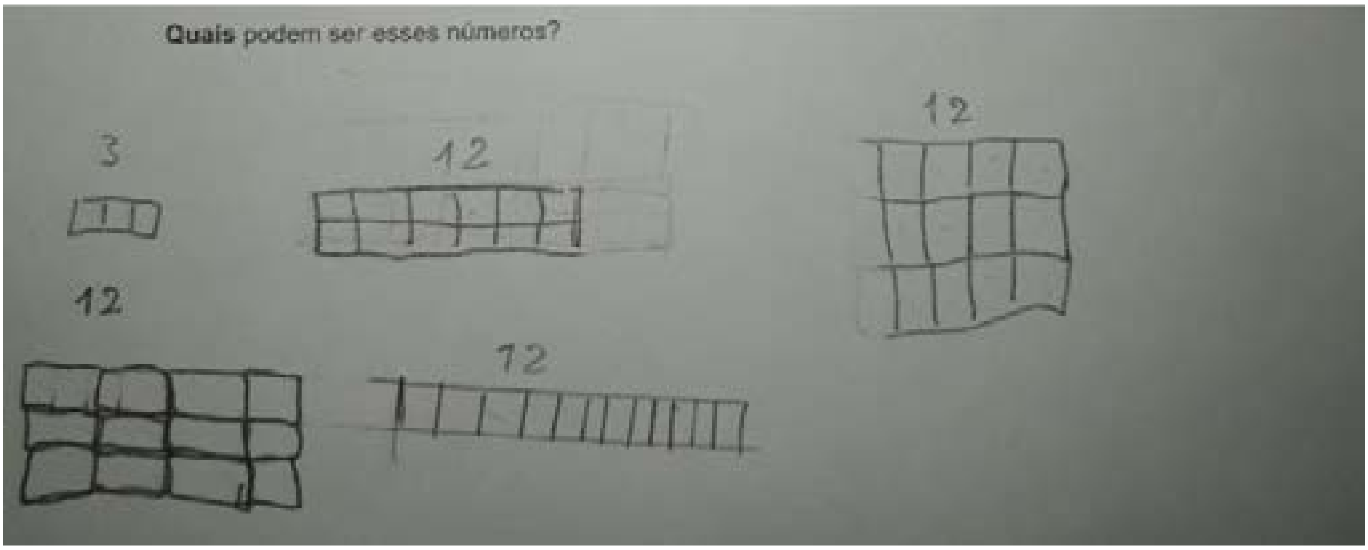


Figura 1- Registro da Bárbara. Fonte- Acervo do projeto.

Hellen, outra descobridora, utilizou a estratégia de decompor mentalmente e desenhou apenas para expor os resultados, como mostra a figura 2. A interpretação, do procedimento que a menina utilizou - o da decomposição mental, foi inferida a partir dos relatos dos professores sobre o desenrolar do desafio e pela ausência de marcas de borracha no registro dela.

Vale notar que, apesar da discussão realizada sobre a rotação do retângulo, os estudantes consideraram os retângulos 3 x 4 e 4 x 3 como diferentes, indicando que os participantes ainda não tinham conseguido visualizar o aspecto da equivalência.

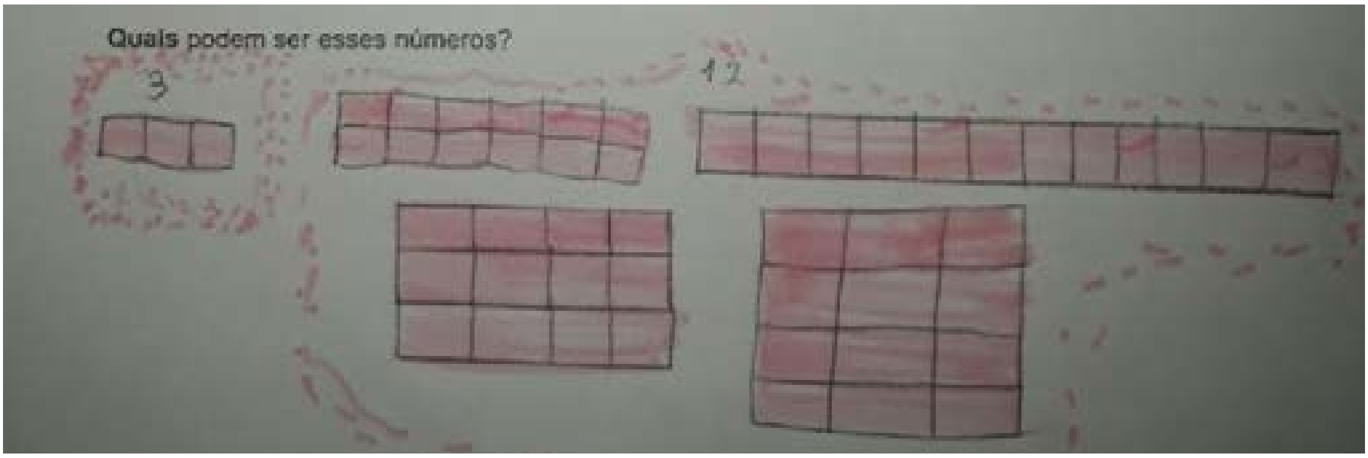


Figura 2 - Registro da Hellen. Fonte - Acervo do projeto.

No problema 2, o desafio apresentava a ordem da questão alterada, ou seja, foi perguntado quais eram os números de quadrados com os quais é possível formar apenas um retângulo. Essa nova proposição possibilitou o engajamento da turma na obtenção de respostas, pois tal formatação do problema não se mostrava tão usual para os estudantes. Enfatizamos que as estratégias didáticas de ampliar problemas, propor métodos diferentes e instigar uma posição ativa da parte dos estudantes, gera curiosidade e ação diferenciada, o que contribui para enriquecer as aulas.

Assim, com o objetivo de discutir a resolução do desafio, que perpassa pelos números primos e pelas formas geométricas, o problema foi resolvido no quadro, após um tempo para que a turma pensasse em possíveis soluções.

Optamos por uma resolução coletiva. A mediação foi iniciada perguntando às crianças como deveríamos resolver o problema. A maior parte da turma indicou que desenhar possíveis retângulos para descobrir quais seriam os números de quadrados com os quais só é possível formar um retângulo, seria a melhor maneira. Então, à medida que os estudantes indicavam o retângulo a ser feito, o professor fazia o desenho no quadro.

A primeira hipótese que a turma levantou, talvez influenciada pelos exemplos do enunciado e pelo primeiro problema, foi a de que se o número fosse ímpar só possibilitaria a construção de um retângulo. Nos primeiros números testados, a hipótese estava sendo verificada e com os números 1, 3, 5 e 7 foi possível fazer apenas uma construção. Quando se passou à análise do número 9, os descobridores perceberam que não bastava tomar os números ímpares. Ao desenhar os retângulos formados com 9 quadrados, formou-se uma figura 3x3, que é um quadrado e que também foi reconhecida pelos estudantes como um retângulo.

Ficamos surpresos com os estudantes do 5° ano por apresentarem essa noção geométrica, de que o quadrado é um retângulo, justificando que para ser retângulo é necessário ter 4 ângulos retos, condição atendida pelo quadrado[2]. É possível que, quando aplicado em outras turmas, os aprendizes apresentem dúvidas relacionadas ao quadrado. Nesse caso, indicamos que seja discutida a questão de se considerar ou não o quadrado como retângulo, bem como os fundamentos disso, orientando a concluírem que o quadrado satisfaz a propriedade de ter 4 ângulos retos, que o caracteriza como um retângulo.

O professor regente da turma havia discutido com os estudantes essa propriedade, comentando a definição geométrica do retângulo e, a partir dessa conversa, alguns compreenderam o que foi apresentado.

Essa percepção, de que o quadrado 3x3 é um retângulo, além de demonstrar que não bastava o número ser ímpar para se formar apenas

---

2 Como não é o objetivo deste trabalho fazer uma discussão mais teórica, optamos por não nos aprofundarmos sobre a inclusão de classes de quadriláteros. Entretanto, recomendamos a leitura sobre os níveis de Van Hiele. Para saber mais acesse: **https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2404060/mod_resource/content/1/Silva%20%20Candido%20-%20Modelo%20de%20Aprendizagem%20da%20Geometria%20do%20Casal%20Van%20Hiele.pdf**

um retângulo, se aplica também ao retângulo 1x1, formado apenas por 1 quadrado, portanto o "1" faz parte da solução.

Ao ser concluída a busca das possibilidades de respostas, os professores aproveitaram a oportunidade para introduzir o conceito de números primos. Os descobridores notaram que se houvesse outro modo de representar o número, por meio de multiplicação, tal número não formaria apenas um retângulo. Por exemplo, se houvesse duas multiplicações diferentes que resultassem em um mesmo número, teríamos dois retângulos distintos. Essa noção foi empregada para abordar a decomposição dos números naturais e a definição de números primos.

É importante mencionar como foi analisada a solução com dois quadrados. Mesmo que a turma tenha se pautado na hipótese de que os números ímpares formariam somente um retângulo, não houve dúvidas quanto ao número 2 formar apenas um retângulo, mesmo sendo par. Os estudantes tiveram clareza de que, com o número 2 só seria possível colocar um quadrado ao lado do outro, formando, assim, somente um retângulo.

Na discussão sobre os números primos, não ocorreu estranhamento quanto ao número 2 ser o único par. Consideramos que, como tinham o suporte do desenho, essa visualização foi facilitada e, dessa forma, concluíram que o 2 é um número primo.

Por fim, consideramos que, além de poder ser utilizado na introdução do conteúdo relacionado a números primos, esse desafio, poderá ser aproveitado para ampliação do trabalho com formas geométricas, raciocínio lógico e números, por meio de aprofundamento e outros problemas. O professor poderá abordar outras questões a partir dessa proposta. O desafio "Quantos Retângulos?" é oportuno para ser aplicado como atividade investigativa, ou seja, sem a intencionalidade de trabalhar um conteúdo específico, e também para a apresentação dos números primos, pois possibilita uma experimentação empírica e rica discussão.

Para a apresentação em momento de aula, sugerimos o uso de materiais como suporte para a busca de soluções. No presente relato, dissemos que após um primeiro contato com o problema, os estudantes optaram por fazer desenhos da situação. Outra possibilidade de aplicação é com a utilização de material concreto, por exemplo, oferecendo quadrados recortados para que montem os retângulos. Avaliamos que o material concreto motiva a participação e incita a criatividade.

A realização de uma discussão coletiva dos resultados, bem como dos meios utilizados, é uma boa estratégia, tal como a de resolver parte do problema coletivamente. Esse tipo de mediação estimula a atenção, possibilita o surgimento de novas ideias e potencializa a participação de todos.

Asseveramos a importância dos registros para a análise do que foi produzido pelas crianças e da transmissão do que foi aprendido além da reflexão a respeito da resolução encontrada para o problema proposto. Na nossa análise, notamos que, em alguns momentos, como o da resolução coletiva, os estudantes apresentaram resistência para realizar o registro. Nessas situações, consideramos importante que o professor insista e incentive-os a registrar. O que nem sempre é fácil, pois é necessário construir para os aprendizes um significado para a tarefa, o que exigirá criatividade do professor. O trabalho em grupo e a horizontalidade na condução pelo professor são condições que favorecem a participação das crianças, desinibindo-as.

É possível fazer adaptações e ampliações alterando as perguntas ou propondo, para o problema 1, um número diferente de quadrados, como por exemplo: com 4 e com 19 quadrados. É possível pensar em outras versões como, no lugar dos quadrados usar triângulos, assim podendo formar outros triângulos, quadrados, ou, até mesmo, retângulos, como mostrado na figura 3. No entanto, para propor uma ampliação ou desdobramento do desafio, o professor deve pesquisar ou criar situações-problema que despertem o interesse em seus estudantes, o que, mais uma vez, ratifica o papel decisivo do planejamento das atividades.

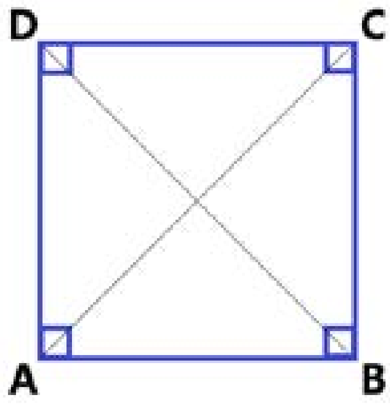


Figura 3- Formação de quadrados e triângulos com figuras de triângulos. Fonte: Site Saber Matemática[3].

Uma última observação, a respeito da definição de números primos, é que o 1 não é primo. O número 1 é excluído da definição para garantir a unicidade da decomposição de um número natural em fatores primos no Teorema Fundamental da Aritmética[4].

---

3 Site saber matemática: https://sabermatematica.com.br/quadrado.html. Acessado em dezembro de 2020

4 Como não é o objetivo deste trabalho fazer uma discussão mais teórica, optamos por não nos aprofundarmos sobre o Teorema Fundamental da Aritmética. Entretanto, recomendamos assistir ao vídeo sobre o tema. Para saber mais acesse : **https://www.youtube.com/watch?v=CTuofyXZLqk&feature=youtu.be.** Acessado em dezembro de 2020

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Fundamentos Pedagógicos e Estrutura Geral da BNCC. Brasília, Distrito Federal, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Último acesso em: 13/10/2020.

ERNEST, Paul. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: ABRANTES, P., LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Orgs.). **Investigar para aprender matemática.** Lisboa: Projeto MPT e APM, 1998, p. 25 – 48.

Math is Fun. Disponível em: http://www.mathsisfun.com/index.htm. Acesso em: 01 set. 2019.

Saber Matemática. Disponível em: https://sabermatematica.com.br Acesso em: 03 dez. 2020.

Khan Academy. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/computing/computer-science/cryptography/modern-crypt/v/the-fundamental-theorem-of-arithmetic-1?v=CTuofyXZLqk. Acesso em: 21 dez. 2020.