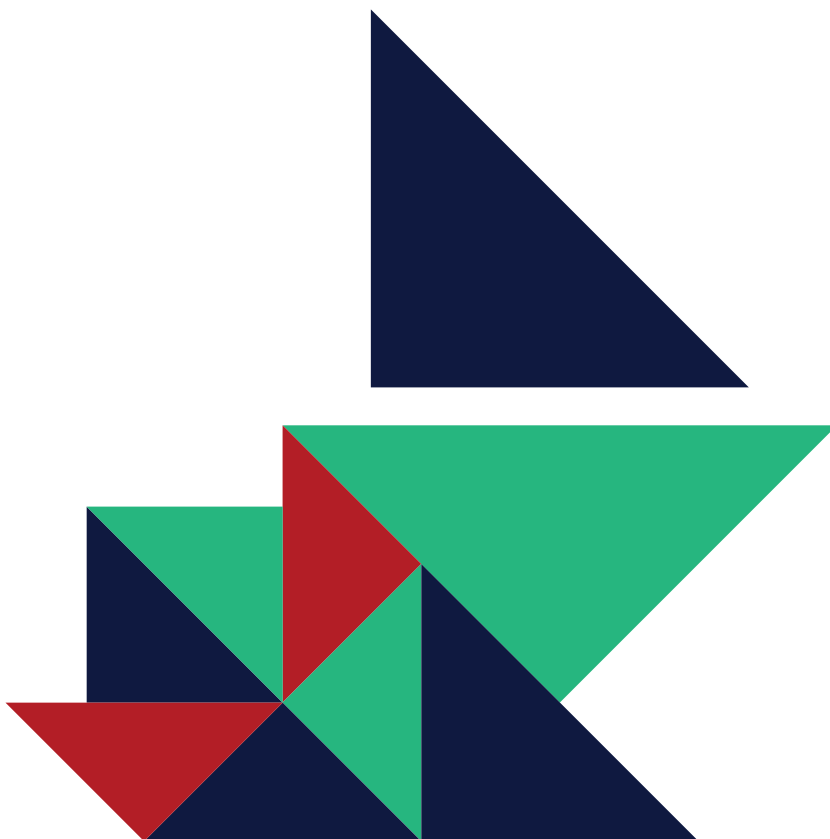


# TRIÂNGULOS NO PENTÁGONO



## DESCOBRINDO O DESAFIO

O problema foi apresentado às crianças com o seguinte enunciado:

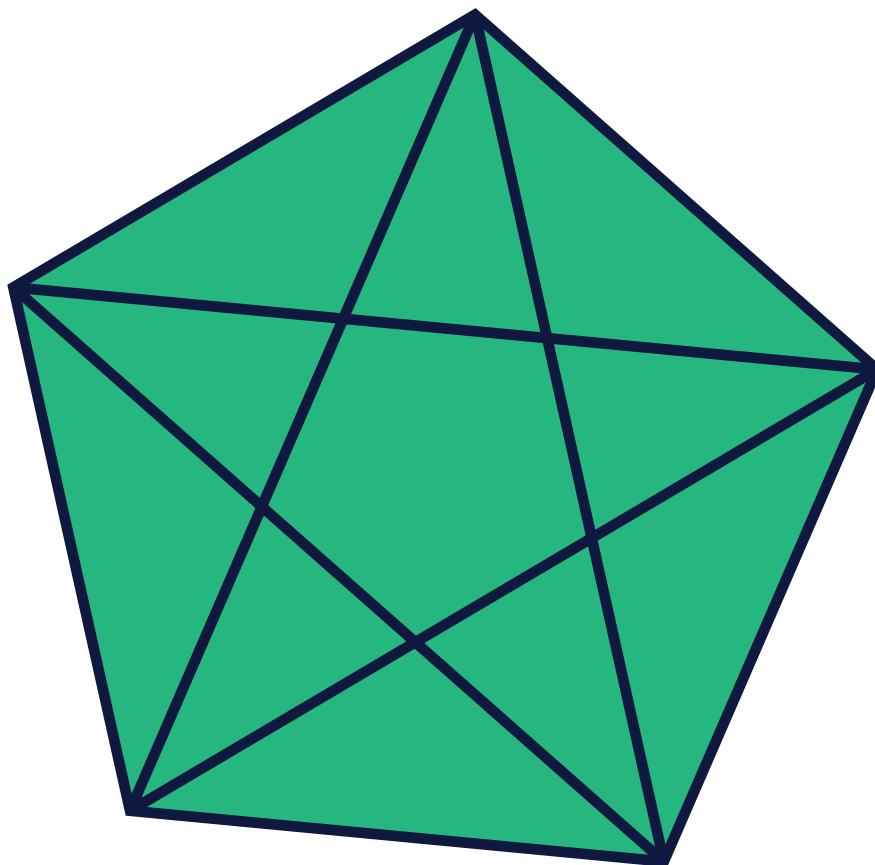
***Quantos triângulos existem na figura ao lado?***



***Opa!  
Eu já contei  
mais de 10!***

Adaptado do site Quebra-Cabeças de Matemática

[https://portaldaobmep.impa.br/uploads/quebra\\_cabeca/c639lw52mgow8.pdf](https://portaldaobmep.impa.br/uploads/quebra_cabeca/c639lw52mgow8.pdf)



## SOLUÇÃO

Para solucionar o Desafio dos Triângulos você deverá contar cada triângulo individualmente e também aqueles compostos por dois triângulos, três triângulos, dois triângulos e um pentágono e os compostos por quatro triângulos e um pentágono, conforme mostrado a seguir.

Na figura 1 há 10 triângulos individuais destacados e numerados.

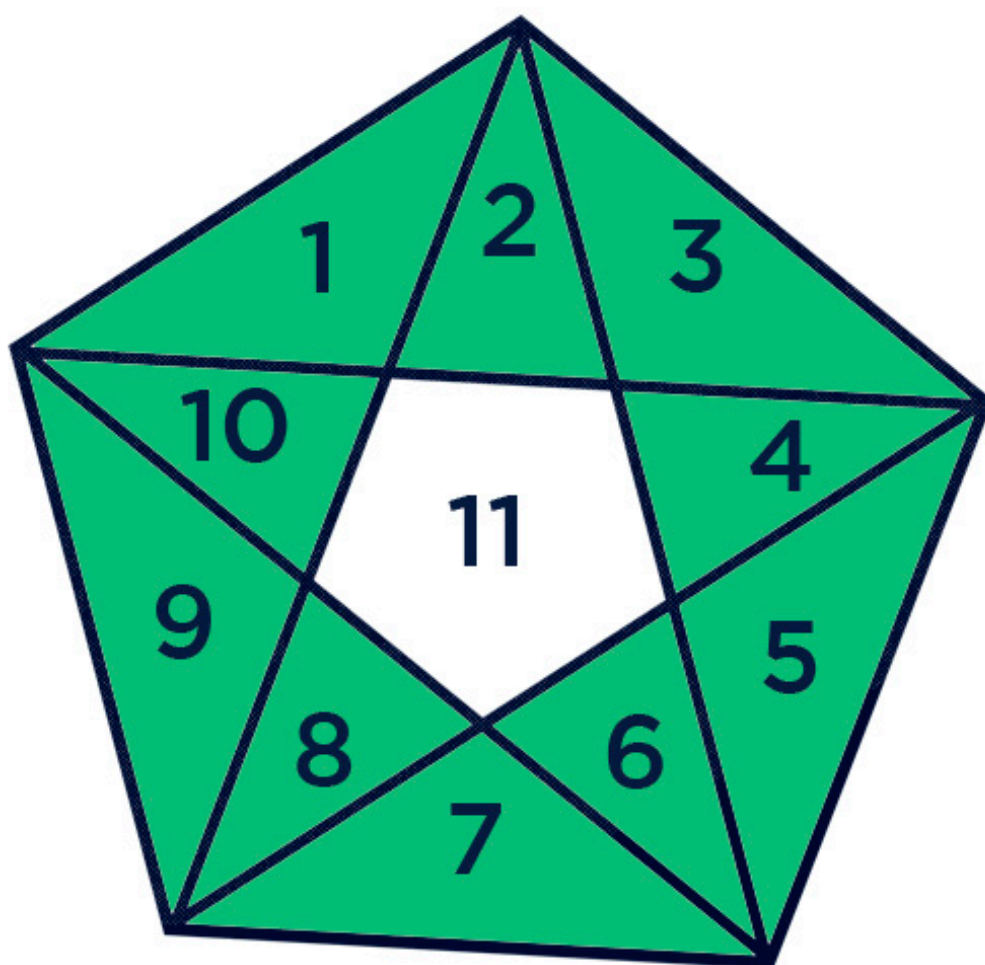


Figura 1: Triângulos individuais.

Nas figuras 2 e 3 existem 4 triângulos destacados – são aqueles formados por dois triângulos. Para contá-los, podemos associá-los aos vértices do pentágono. Por exemplo, há dois deles onde o triângulo 2 aparece, eles estão associados ao vértice superior.

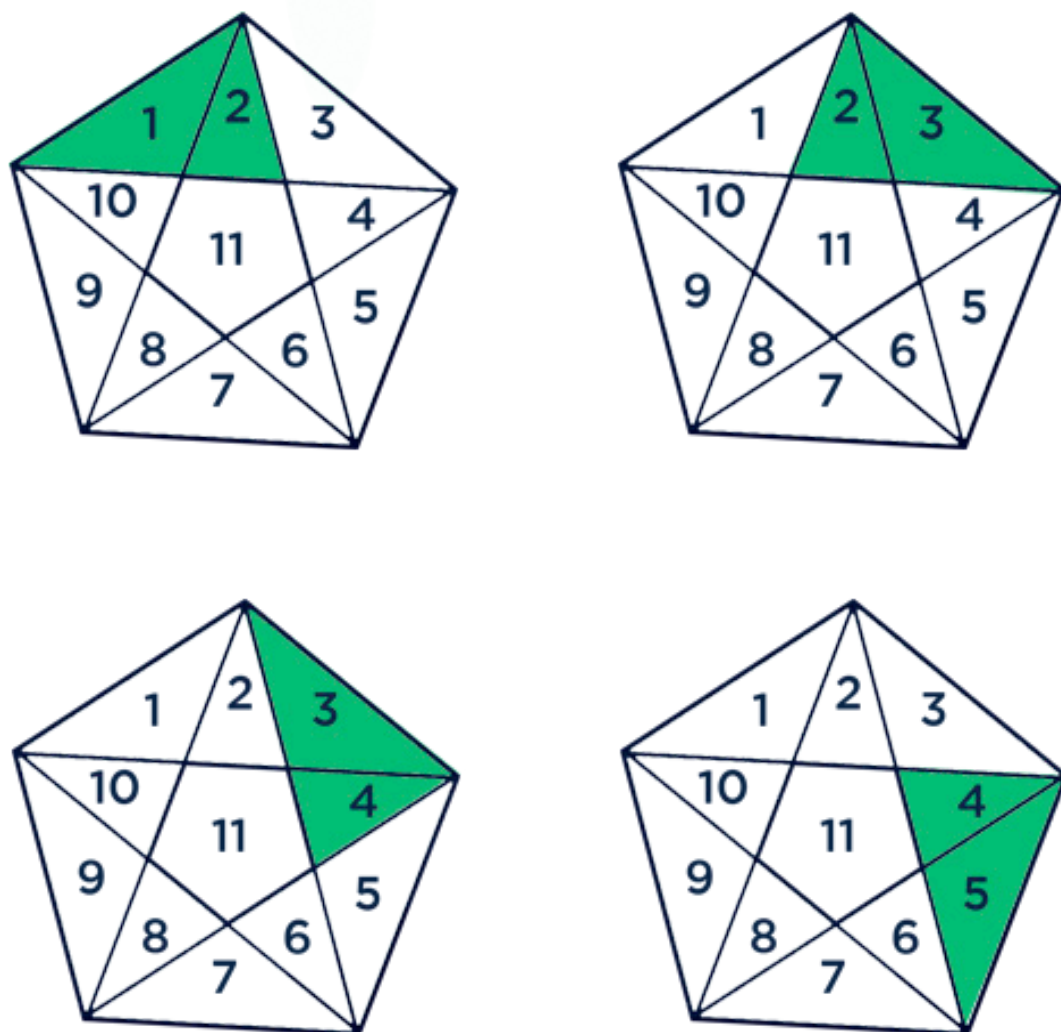


Figura 2: Triângulos formados por dois triângulos.

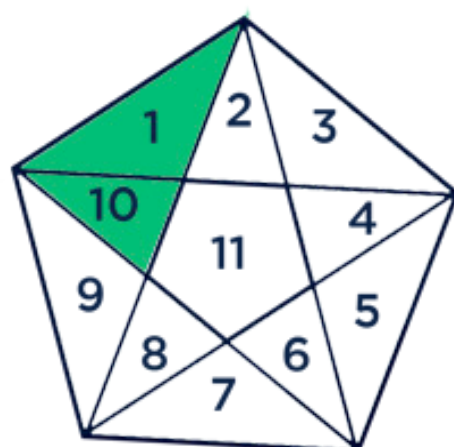
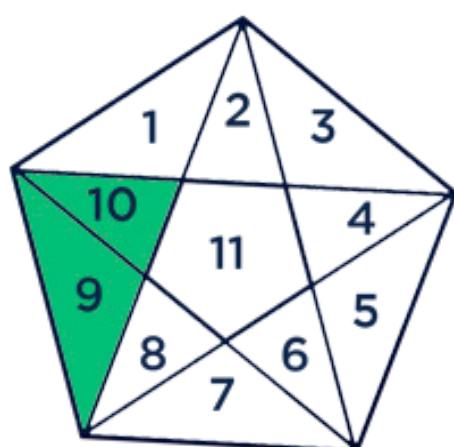
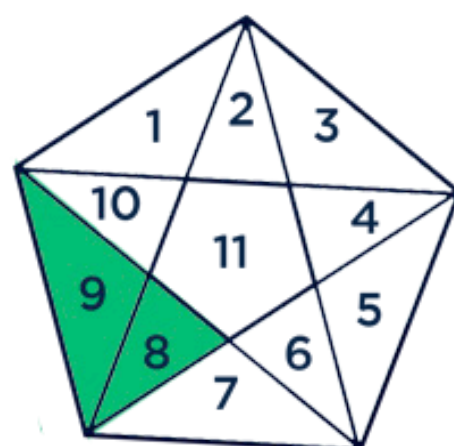
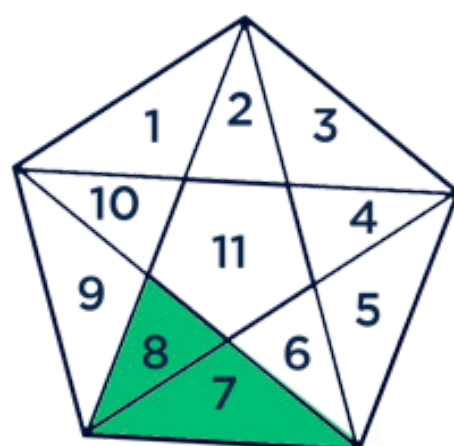
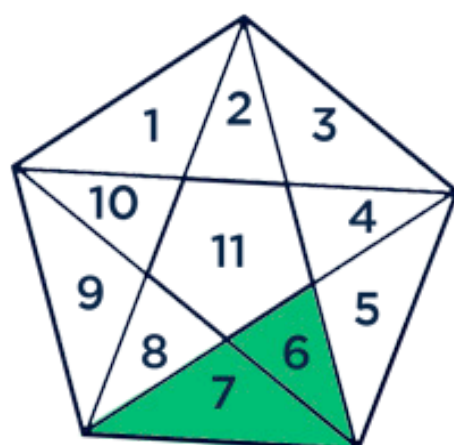
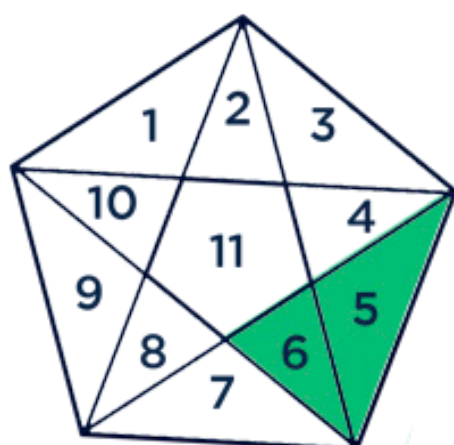


Figura 3: Triângulos formados por dois triângulos.

Na figura 4 estão destacados cinco triângulos, formados por trios de triângulos. Novamente, para contá-los, podemos associá-los aos vértices do pentágono.

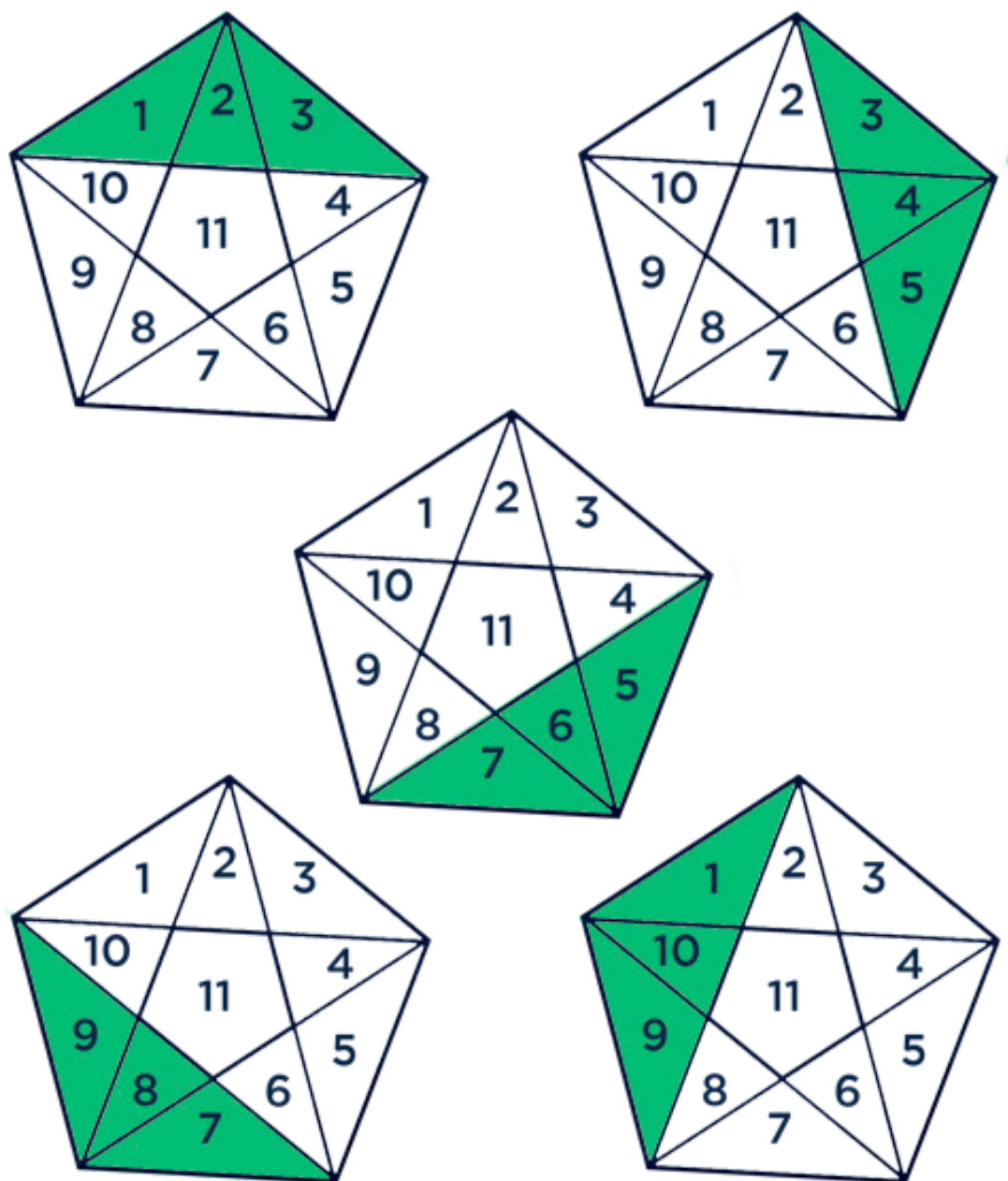


Figura 4: Triângulos formados por 3 triângulos.

Na figura 5, há triângulos formados por 2 triângulos e pelo pentágono que está localizado no interior da figura.

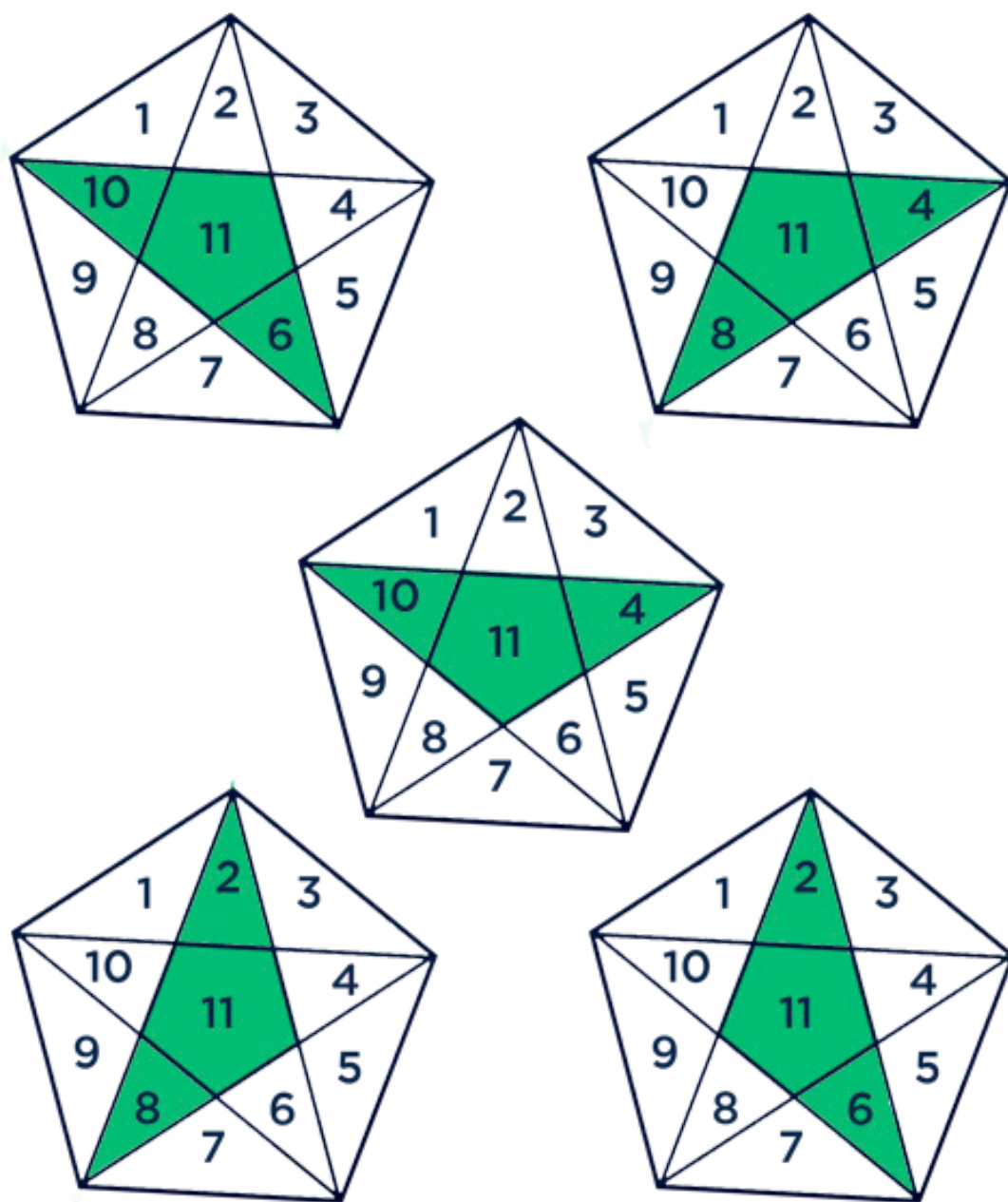


Figura 5: Triângulos formados por 2 triângulos e o pentágono.



Na figura 6 estão indicados 5 triângulos formados por 4 triângulos e pelo pentágono interior.

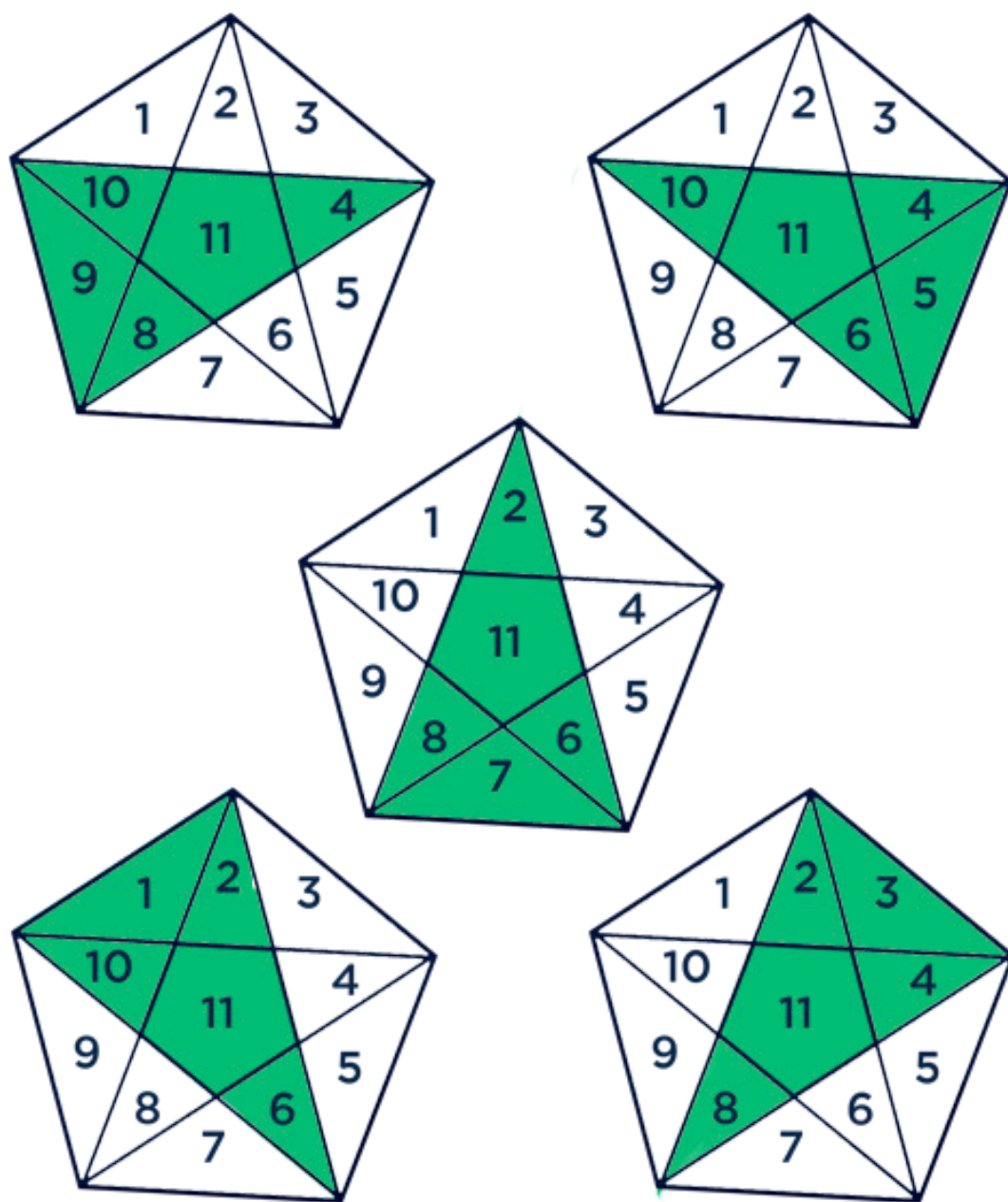


Figura 6: Triângulos formados por 4 triângulos e o pentágono.

A partir da listagem dos tipos de triângulos presentes no pentágono fica didaticamente visível que o total de triângulos presentes na figura é 35.

## **DESCOBERTAS E ANÁLISES**

O Desafio dos Triângulos foi realizado por três grupos de crianças do Centro Pedagógico da UFMG: um grupo de 3º ano, um de 4º e outro de 5º ano. Foi trabalhado também em uma turma de 4º e outra do 5º ano da Escola Municipal Lídia Angélica e, ainda, junto a uma turma de 5º ano da Escola Municipal Belo Horizonte.

O desafio em análise exige que os aprendizes identifiquem triângulos que são compostos por várias figuras e em diferentes posições. Para analisar, descreveremos o processo de trabalho ocorrido no grupo do 5º ano do Centro Pedagógico da UFMG e na Escola Municipal Lídia Angélica.

Na Escola Municipal Lídia Angélica, o problema foi proposto para duplas ou trios de estudantes e foram feitas perguntas para que pudessem perceber que há no pentágono, além dos triângulos individuais, outros que são compostos por mais figuras. Inicialmente estimaram o total de triângulos e concordaram que deveriam identificar outros na figura apresentada. Isso nos inspirou no sentido de que o enunciado fosse apresentado, desde o início, contendo a informação de que há mais de 10 triângulos no pentágono.

Durante a primeira aula, as crianças tiveram a liberdade de resolver o problema utilizando estratégias espontâneas, sem a intervenção dos monitores e professores presentes. Algumas crianças apenas contaram e registraram o total, outras fizeram marcas na figura ou listaram os triângulos encontrados de acordo com o número de figuras que os formavam.

Descobridora usando as mãos para delimitar área da figura - identificação de triângulos.  
Fonte: Acervo do Projeto - 2019.



No decorrer da aula, as crianças passaram a perceber a necessidade de fazer algum registro que as auxiliassem na contagem dos triângulos. Algumas identificaram as figuras que compunham o pentágono utilizando números e, outras, utilizaram letras, conforme mostrado na figura 7. Outras crianças agruparam os triângulos pela quantidade de figuras que os compunham, conforme mostrado na figura 8.

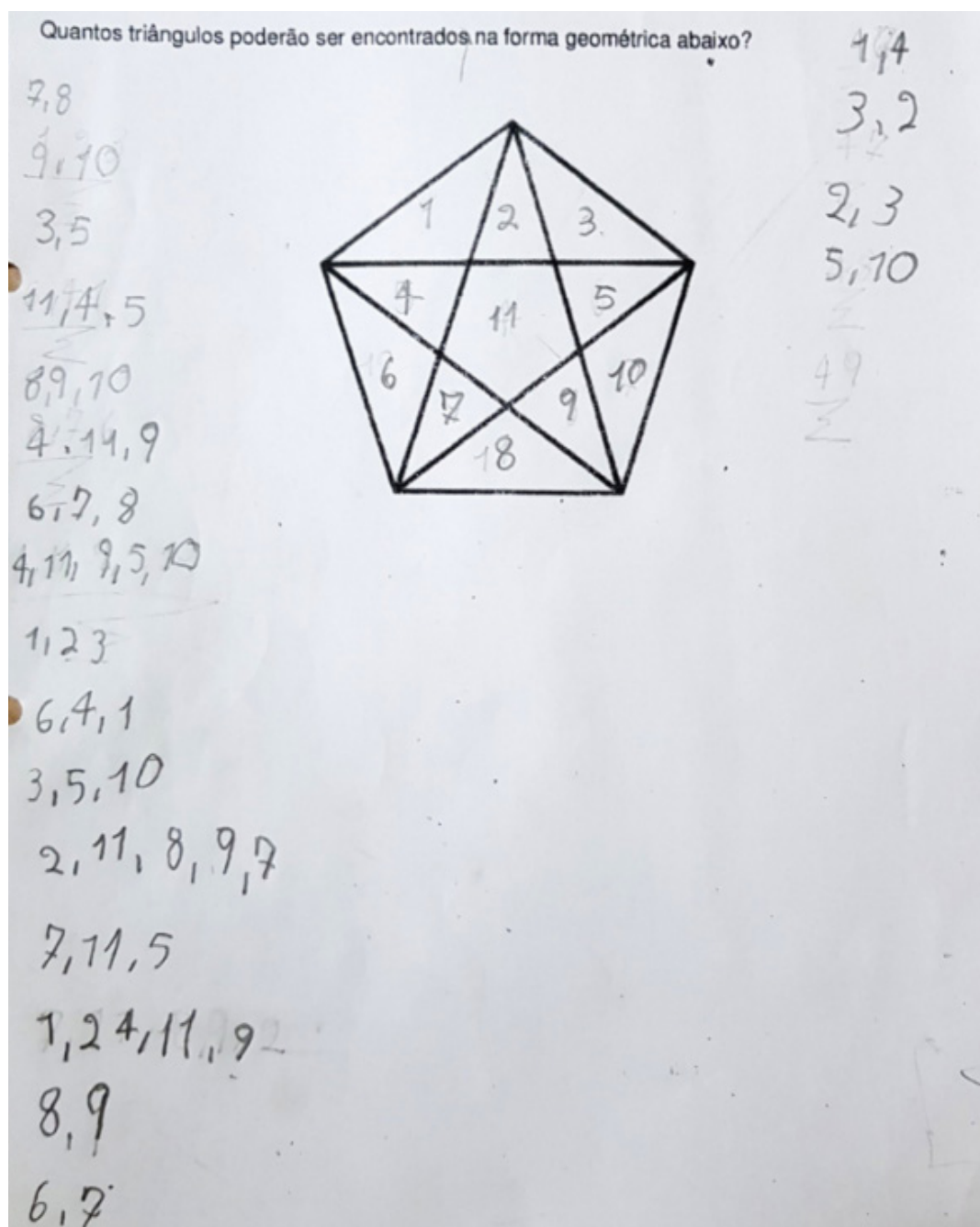


Figura 7 - Registro de descobridor do 5o ano - identificação das figuras com números.  
Fonte: Acervo do Projeto - 2019.



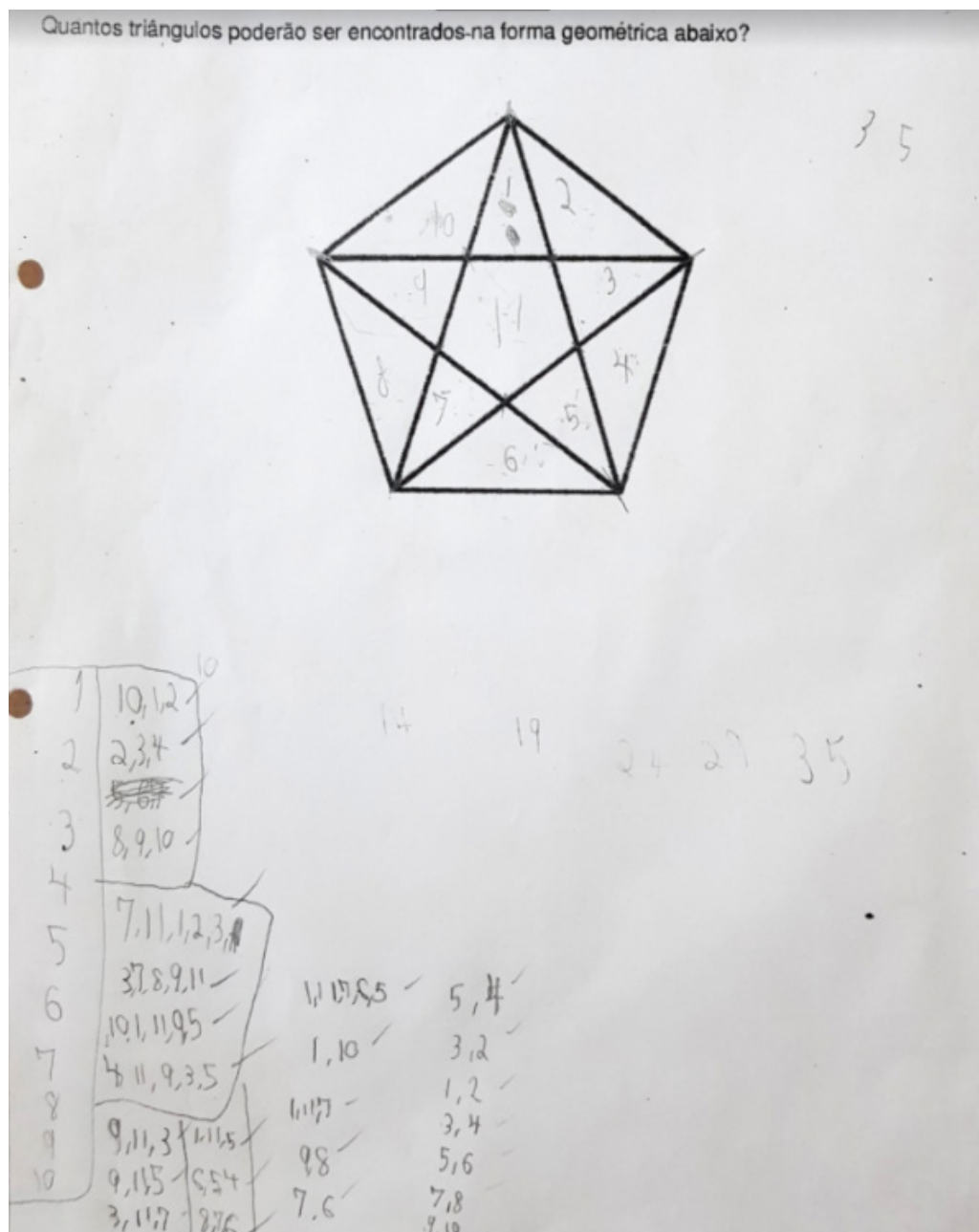


Figura 8 – Registro de uma criança do 5º ano – separação dos triângulos em grupos.  
Fonte: Acervo do Projeto - 2019.

Como várias crianças registraram os triângulos sem seguir um padrão, continuavam sem saber se já haviam identificado todos os triângulos ou se ainda poderiam encontrar outros. Algumas vezes, solicitaram ao professor que confirmasse se haviam encontrado o total de triângulos. No entanto, ainda sem apresentar a resposta, o docente incentivou a realização do registro, de maneira mais organizada e que representasse os triângulos que haviam identificado, para que verificassem se haviam encontrado todos os triângulos do pentágono.

Como os estudantes registraram apenas o número das figuras que compunham os triângulos observados, sem agregá-lo a um registro pictórico, tinham dificuldades para perceber um padrão que os ajudassem a solucionar o desafio. Fischbein (1993), defende que os entes geométricos possuem duas componentes: uma conceitual e outra figural. De acordo com tal colocação, entendemos ser importante que os estudantes raciocinem sobre os entes geométricos articulando sua definição com suas respectivas imagens.

Na aula subsequente o desafio foi retomado. A equipe do projeto discutiu com a turma como poderiam organizar seus registros para chegarem à solução. Para tanto, algumas crianças sugeriram fazer um quadro, listando os triângulos separados por tipos. Após pequena discussão, sobre quais agrupamentos seriam mais adequados, as crianças do 5º ano decidiram agrupar os triângulos de acordo com o número de figuras que os compõem. No 4º ano, os aprendizes pensaram inicialmente em agrupar de acordo com a quantidade de triângulos e depois entenderam, como as crianças do 5º ano, que seria necessário incluir o pentágono central e decidiram agrupar de acordo com a quantidade de figuras.

Logo após, cada equipe recebeu uma cartolina com o desenho do pentágono com as diagonais traçadas, além de recortes de papel no formato das figuras. Assim, as crianças puderam movimentar as peças buscando identificar os triângulos de cada grupo, conforme mostrado na figura 9.

Figura 9 – Descobridores manuseando o material concreto e fazendo o registro escrito dos triângulos encontrados.  
Fonte: Acervo do Projeto - 2019.



Algumas crianças buscaram identificar os vários tipos de triângulos sem seguir um padrão. Porém, foram orientadas a identificar, primeiramente, todos os triângulos de determinada configuração para depois passar ao próximo grupo. Assim, foram identificando os triângulos, ditando as respostas para que o professor registrasse, em uma cartolina, conforme mostrado nas figuras 10 e 11.

1 TRIANGULO	2 TRIANGULOS	FIGURAS 3 TRIANGULOS	5 FIGURAS
<ul style="list-style-type: none"> <li>• C</li> <li>• F</li> <li>• K</li> <li>• G</li> <li>• D</li> <li>• B</li> <li>• J</li> <li>• I</li> <li>• A</li> <li>• H</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F, H</li> <li>• A, D</li> <li>• I, K</li> <li>• H, J</li> <li>• A, B</li> <li>• C, F</li> <li>• G, D</li> <li>• B, C</li> <li>• J, K</li> <li>• I, G</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• H, J, K</li> <li>• C, F, H</li> <li>• B, E, J</li> <li>• B, E, I</li> <li>• E, F, I</li> <li>• E, D, J</li> <li>• G, D, A</li> <li>• A, B, C</li> <li>• D, E, F</li> <li>• G, I, K</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• B, E, I, J, K</li> <li>• D, E, J, F, H</li> <li>• I, E, B, F, C</li> <li>• J, E, D, B, A</li> <li>• F, E, D, I, G</li> </ul>

Figura 10- Registro dos triângulos, feito por um professor - 4º ano. Fonte: Acervo do Projeto - 2019.



<u>1 FIGURA</u>	<u>2 FIGURAS</u>	<u>3 FIGURAS</u>	<u>5 FIGURAS</u>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 10</li> <li>• 8</li> <li>• 4</li> <li>• 3</li> <li>• 5</li> <li>• 9</li> <li>• 2</li> <li>• 1</li> <li>• 6</li> <li>• 7</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 8, 7</li> <li>• 6, 5</li> <li>• 3, 4</li> <li>• 1, 2</li> <li>• 8, 9</li> <li>• 9, 10</li> <li>• 2, 3</li> <li>• 6, 7</li> <li>• 4, 5</li> <li>• 1, 10</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 2, 8, 11</li> <li>• 5, 6, 7</li> <li>• 7, 8, 9</li> <li>• 1, 2, 3</li> <li>• 3, 4, 5</li> <li>• 1, 9, 10</li> <li>• 4, 10, 11</li> <li>• 6, 10, 11</li> <li>• 2, 6, 11</li> <li>• 4, 8, 11</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 4, 8, 9, 10, 11</li> <li>• 1, 2, 6, 10, 11</li> <li>• 4, 5, 6, 10, 11</li> <li>• 2, 6, 7, 8, 11</li> <li>• 2, 3, 4, 8, 11</li> </ul>

Figura 11 - Registro dos triângulos, feito por um professor - 5º ano. Fonte: Acervo do Projeto - 2019.

É importante ressaltar que o material manipulável foi importante para que as crianças pudessem realizar a identificação de todos os triângulos e para que ficassem seguras com a resposta encontrada.

No Centro Pedagógico -UFMG o Desafio dos Triângulos foi apresentado ao final de uma das aulas. Após a leitura do enunciado, as crianças logo responderam que havia na figura 10 triângulos. Então, o professor incentivou a identificação de outros triângulos no pentágono. Dessa maneira, passaram a perceber que havia outros triângulos, compostos por duas ou mais figuras. Logo após, foi solicitado, como tarefa de casa, que descobrissem o total de triângulos. Na aula da semana seguinte, os estudantes foram convidados a apresentar suas resoluções para o grupo. Cada um apresentou uma quantidade diferente e, no momento da apresentação, ficaram confusos quanto à quantidade de triângulos que haviam encontrado em casa. Contornaram os triângulos e anotaram as quantidades, mas com essa estratégia não foi possível apresentar as soluções com clareza, como podemos observar na figura 12.

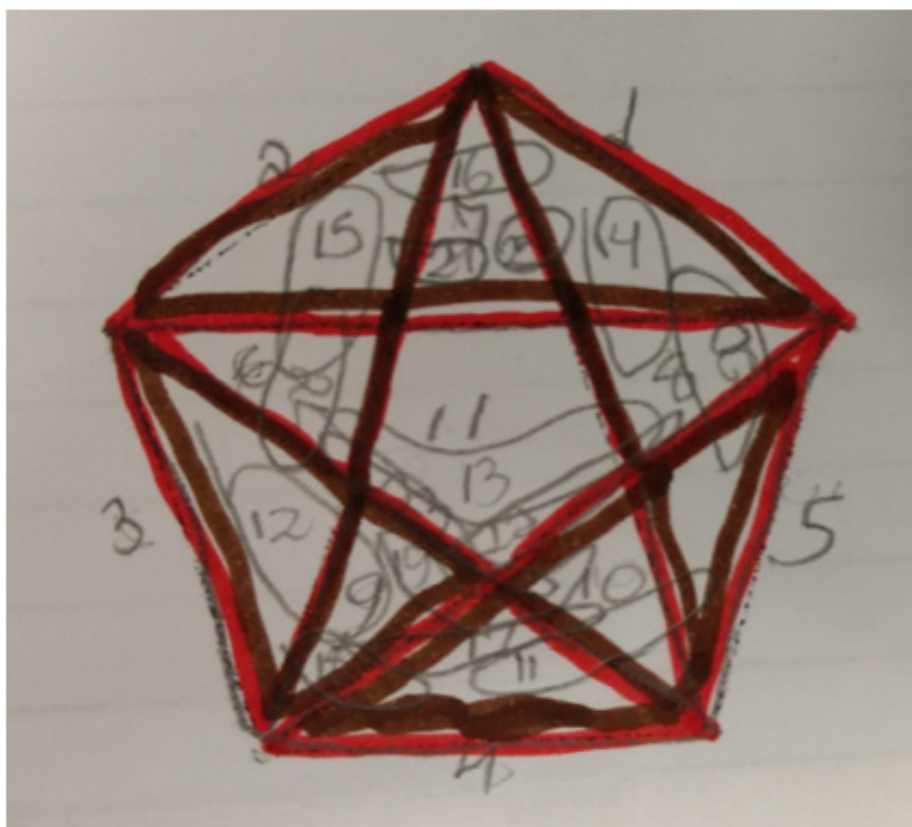


Figura 12 – Resolução de estudante – contorno dos diferentes triângulos e registro das quantidades observadas.  
Fonte: Acervo do Projeto - 2017

Diante dessa situação, o professor incentivou os estudantes a registrar, de forma organizada, os diferentes tipos de triângulos que visualizaram, sem no entanto, indicar como. Algumas crianças, contudo, continuaram a contornar os triângulos e insistiram para que o professor informasse a resposta correta. O professor, entretanto, continuou a solicitar que explicassem como haviam obtido o total de triângulos. A partir daí, as crianças perceberam a necessidade de ter uma forma de contar que fosse mais sistemática e, com isso, desenvolveram maneiras de registrar os tipos de triângulos observados, de forma a não gerar confusão.

A figura 13 mostra a resolução de uma descobridora que teve como estratégia o desenho do pentágono com suas diagonais. Em cada figura contorna um tipo de triângulo e indica a quantidade observada, de cada tipo, logo abaixo de cada pentágono. Uma tentativa de organização do registro que ainda não se mostrou eficiente.

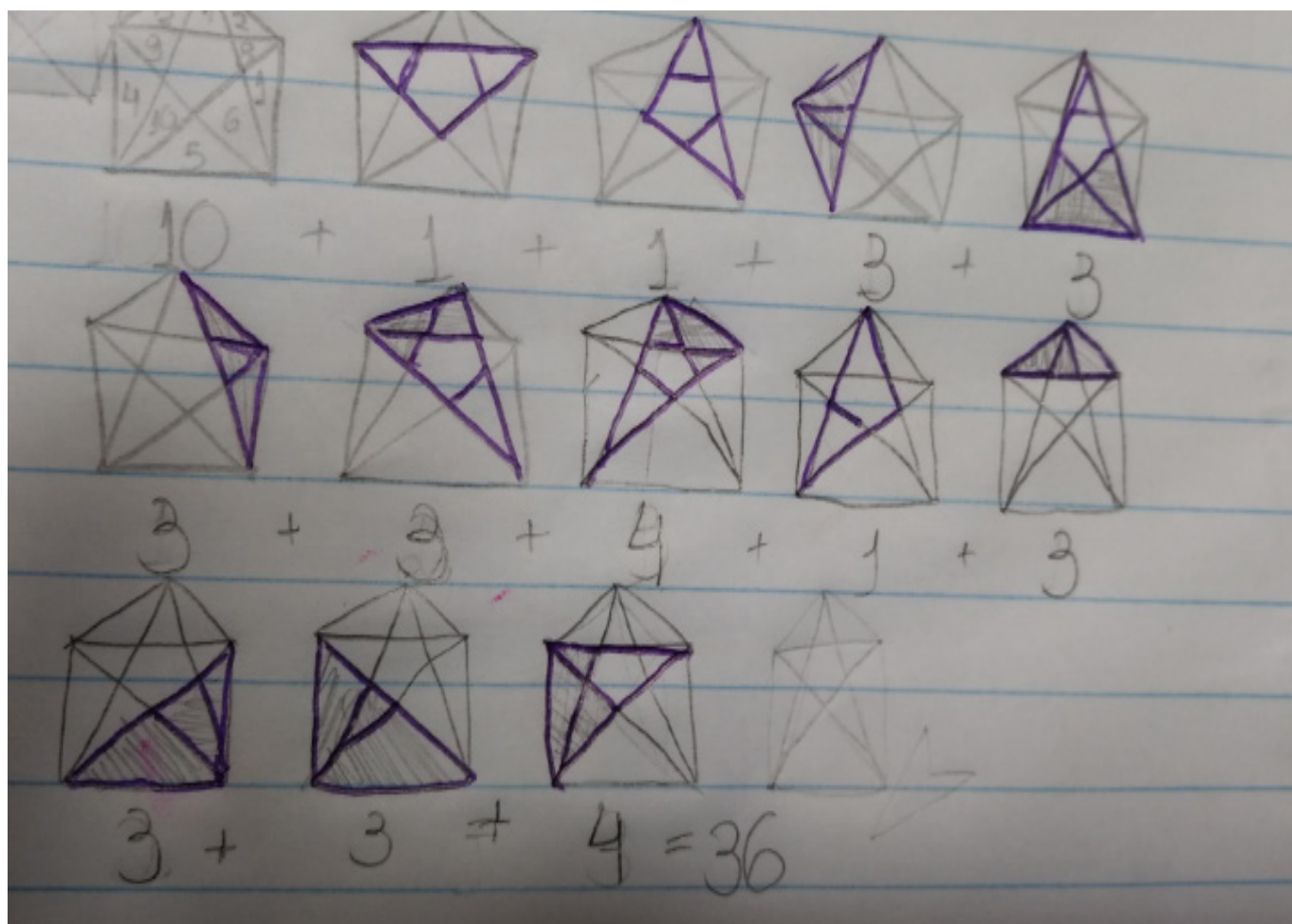


Figura 13 – Descobridora desenha pentágonos buscando identificar a quantidade por tipo de triângulo.  
Fonte: Acervo do Projeto - 2017.

O registro de um descobridor, que agrupou os triângulos de acordo com o número de figuras que compunha cada um, e denominou os grupos como: triângulos pequenos, triângulos médios, triângulos grandes e triângulos gigantes, está mostrado na figura 14.

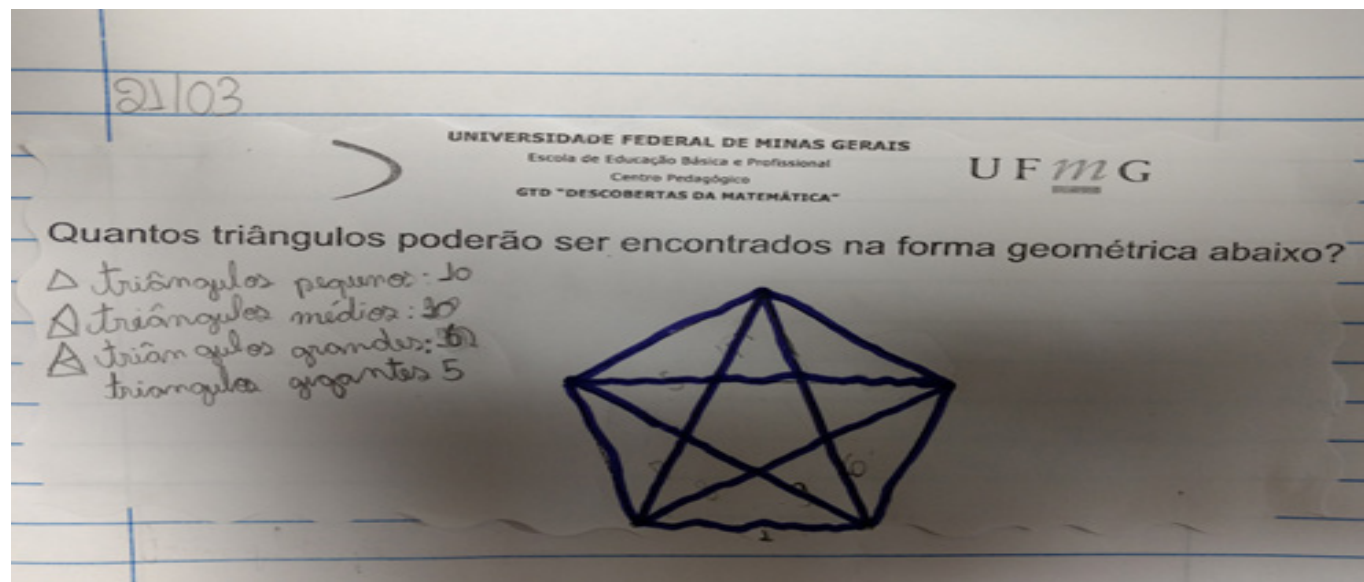


Figura 14 - Registro de um descobridor do 5º ano. Fonte: Acervo do Projeto - 2017.

A figura 15 mostra os grupos de triângulos definidos com as respectivas quantidades observadas por outro descobridor, que fez 3 agrupamentos, chegando ao total de 32 triângulos - embora tenha escrito o resultado 34: “Eu encontrei 34 triângulos. Para achar esses triângulos eu fui virando a folha e juntando um triângulo com outro.”

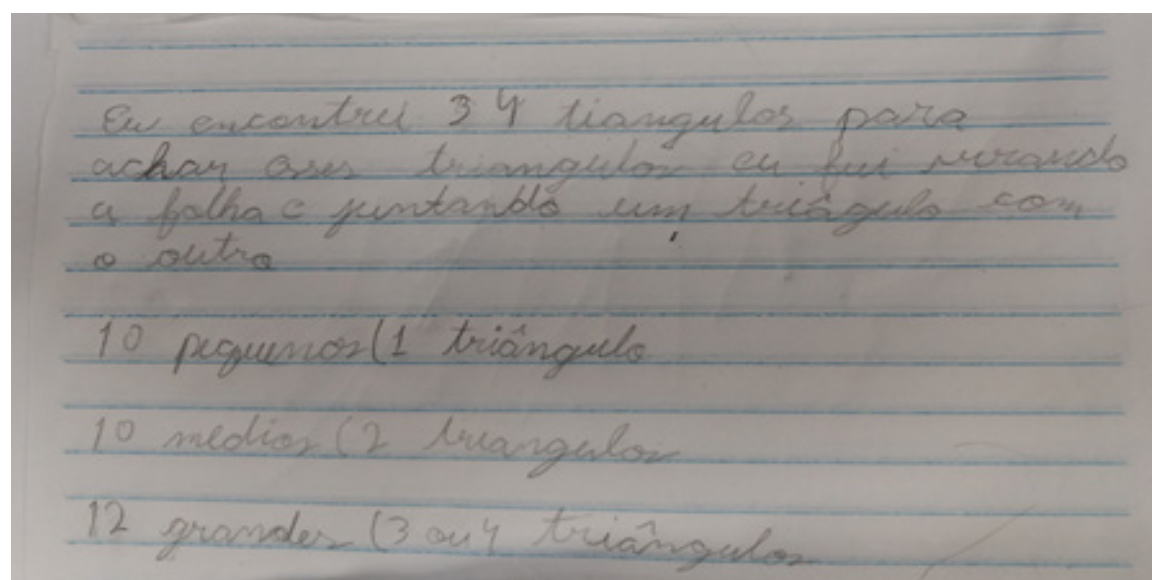


Figura 15 - Registro de um descobridor do 5º ano. Fonte: Acervo do Projeto - 2017.



Handwritten mathematical diagrams and calculations on lined paper. The diagrams show various geometric shapes (polygons, triangles) with internal lines and numbers, likely representing a combinatorial or geometric problem. The calculations involve sums of 1's and 10's, leading to a final result of 25.

Diagram 1 (Top Left): A complex polygon with internal lines and numbers (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824,

A figura 17 mostra mais uma forma de registro, na qual a criança identifica 7 tipos de triângulos, obtendo o total de 30 triângulos.

Figura 17 - Registro de 7 tipos de triângulos identificados por uma descobridora. Fonte: Acervo do Projeto - 2017.

Depois que os aprendizes haviam avançado em contagens, o professor os convidou para comunicar suas soluções. Consideramos a socialização das estratégias como necessária para que as crianças reflitam a respeito do que fizeram, ao elaborar explicações para os colegas, assim como para que os métodos utilizados sejam apreciados e analisados por toda a turma.

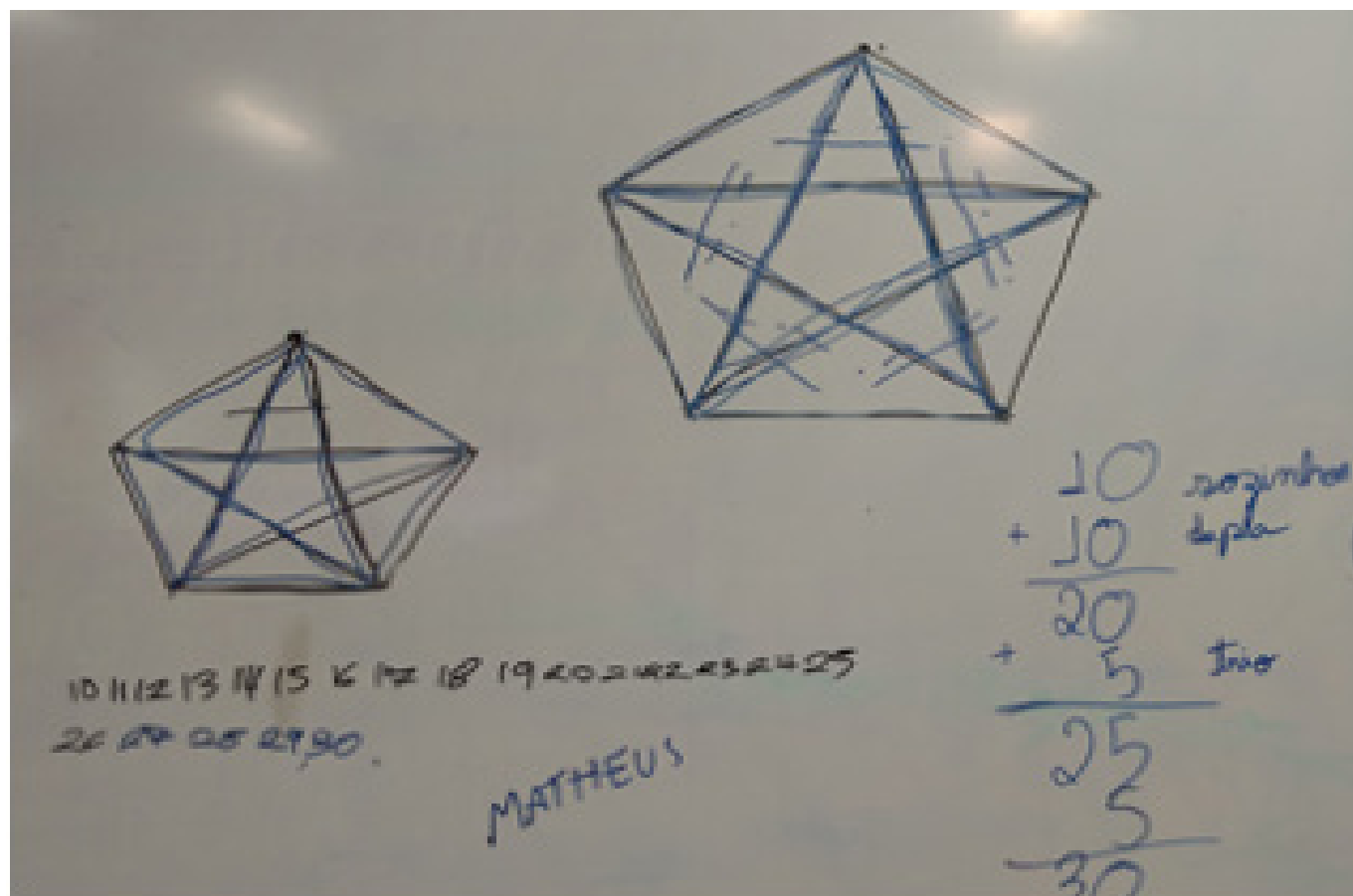


Figura 18 – Registros feitos na lousa - explicação da resolução do problema. Fonte: Acervo do projeto - 2017.

No encontro seguinte, o desafio foi retomado. Alguns estudantes encontraram a resposta esperada e outros um valor maior ou menor. Isto ocorreu por repetirem triângulos ou por não considerarem algum triângulo presente na figura. Então, o professor fez a conferência com os estudantes. Para tanto, foram utilizadas figuras feitas em cartolina, com recortes, em cores diferentes, para representar cada um dos tipos de triângulos, conforme mostrado nas figuras 19 e 20.

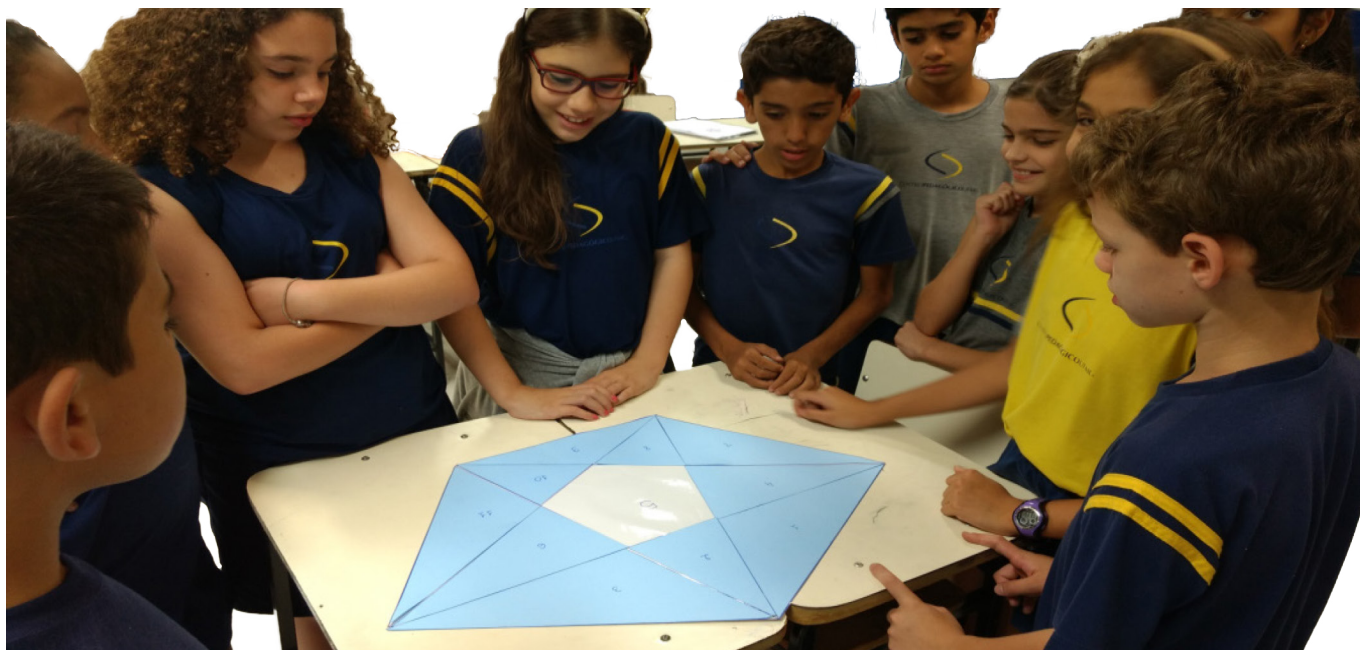


Figura 19 – Conferência coletiva da quantidade de triângulos. Fonte: Acervo do Projeto - 2017.



Figura 20- Conferência coletiva da quantidade de triângulos. Fonte: Acervo do Projeto - 2017.

Consideramos que o uso do material concreto, para fazer a verificação final da solução do desafio, foi propício para que as crianças pudessem observar as quantidades dos diferentes tipos de triângulos. Dessa forma, o grupo conseguiu concluir que há 35 triângulos na figura. A utilização de cores diferentes para cada um dos tipos facilitou, sobremaneira, a chegada ao resultado esperado. O tamanho do material contribuiu, de forma significativa, para que as crianças pudessem visualizar os diferentes tipos de

triângulos, isto é, as classes de congruência dos triângulos que aparecem na figura.

É importante considerar que o processo de conferência tornou visível o significado que a atividade proporcionou às crianças, pois, nessa etapa, continuaram demonstrando envolvimento na validação da solução.

O Desafio Triângulos no Pentágono possibilita uma aula de Matemática dinâmica e atrativa, podendo ser apresentado para estudantes de vários níveis de escolaridade.

Consideramos que é importante ter atenção especial ao modo como apresentamos o desafio, de forma a garantir que os aprendizes compreendam o que é solicitado e ao mesmo tempo tenham interesse em resolvê-lo.

É possível que os descobridores se confundam no processo de identificação e contagem. Caso isso ocorra, incentive-os a registrar os triângulos que consigam identificar, à sua própria maneira. Contudo, pode ser necessário ajudá-los a pensar em como organizar os diferentes tipos de triângulos, dando importância para o método encontrado pelos aprendizes. Desse modo, é preciso evitar frases do tipo “*não é assim que se faz*”, ou “*está errado*”. As mediações devem ocorrer no sentido de incentivá-los a pensar a respeito daquilo que podem mudar em suas hipóteses, para que encontrem o resultado esperado.

Consideramos importante explicitar a nossa concepção de problemas, a qual se aproxima daquela apresentada por Alevatto (2005, p. 41), quando afirma que “*uma questão é um problema se o aluno ainda não conhece os meios necessários à resolução, mas está interessado em resolvê-la*”. O Desafio dos Triângulos configurou-se como uma dessas situações, por ter despertado o interesse das crianças, além de ter praticamente exigido a elaboração de registros.



Podemos afirmar que o desafio se mostrou eficiente para o desenvolvimento de ideias matemáticas. Percebemos que as crianças aproveitaram a oportunidade para constatar que uma figura pode ser obtida por decomposição e composição, além de terem identificado a diversidade de tipos de triângulos dispostos em posições variadas. Reconheceram a necessidade do registro escrito para resolver o problema e compreenderam a importância do estabelecimento de um padrão para organização das informações. Sobretudo, criaram agrupamentos que favoreceram a identificação dos diferentes tipos de triângulos presentes no pentágono. Compreendemos que todo o processo de trabalho, aqui apresentado, contribuiu, de forma significativa, para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos aprendizes envolvidos.

## REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Tese de Doutorado, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Fundamentos Pedagógicos e Estrutura Geral da BNCC. Brasília, Distrito Federal, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Último acesso em: 13/10/2020.

FISCHBEIN, Efraim. The Theory of Figural Concepts. In: Educational Studies in Mathematics. v.24, n.2, p.139-162. Dordrecht: Publishedby: Springer, 1993.