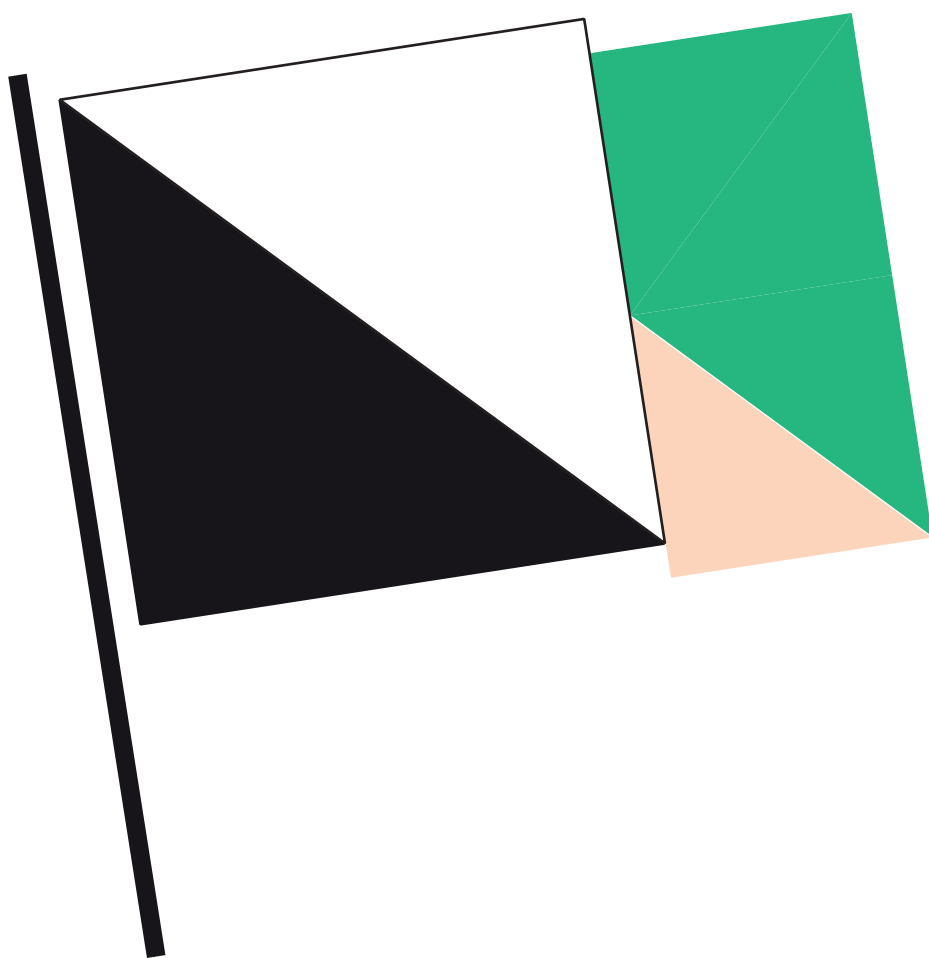
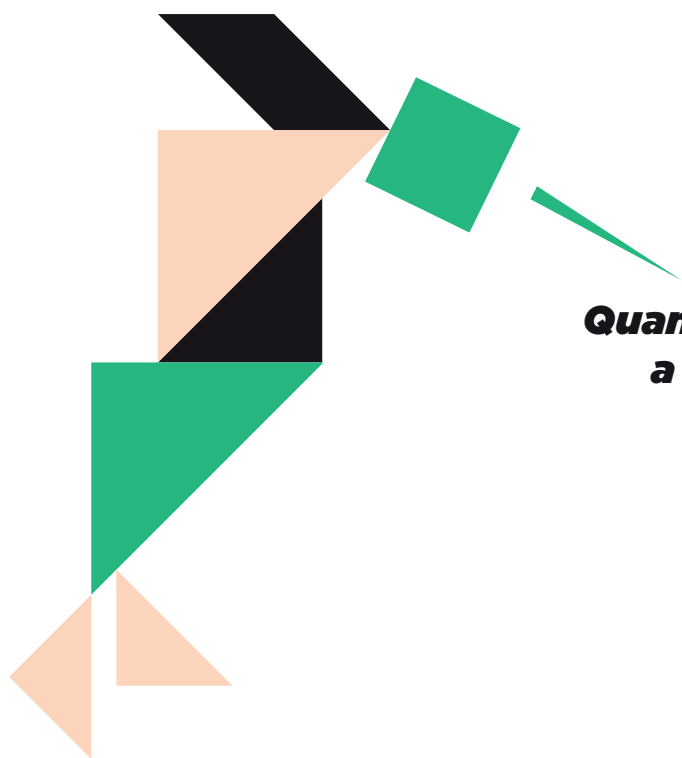


DESAFIO DAS BANDEIRAS



DESCOBRINDO O DESAFIO

O problema foi apresentado às crianças com o seguinte enunciado:



***Quantas são as formas de pintar
a bandeira ao lado utilizando
3 cores diferentes dentre
as 4 abaixo?***



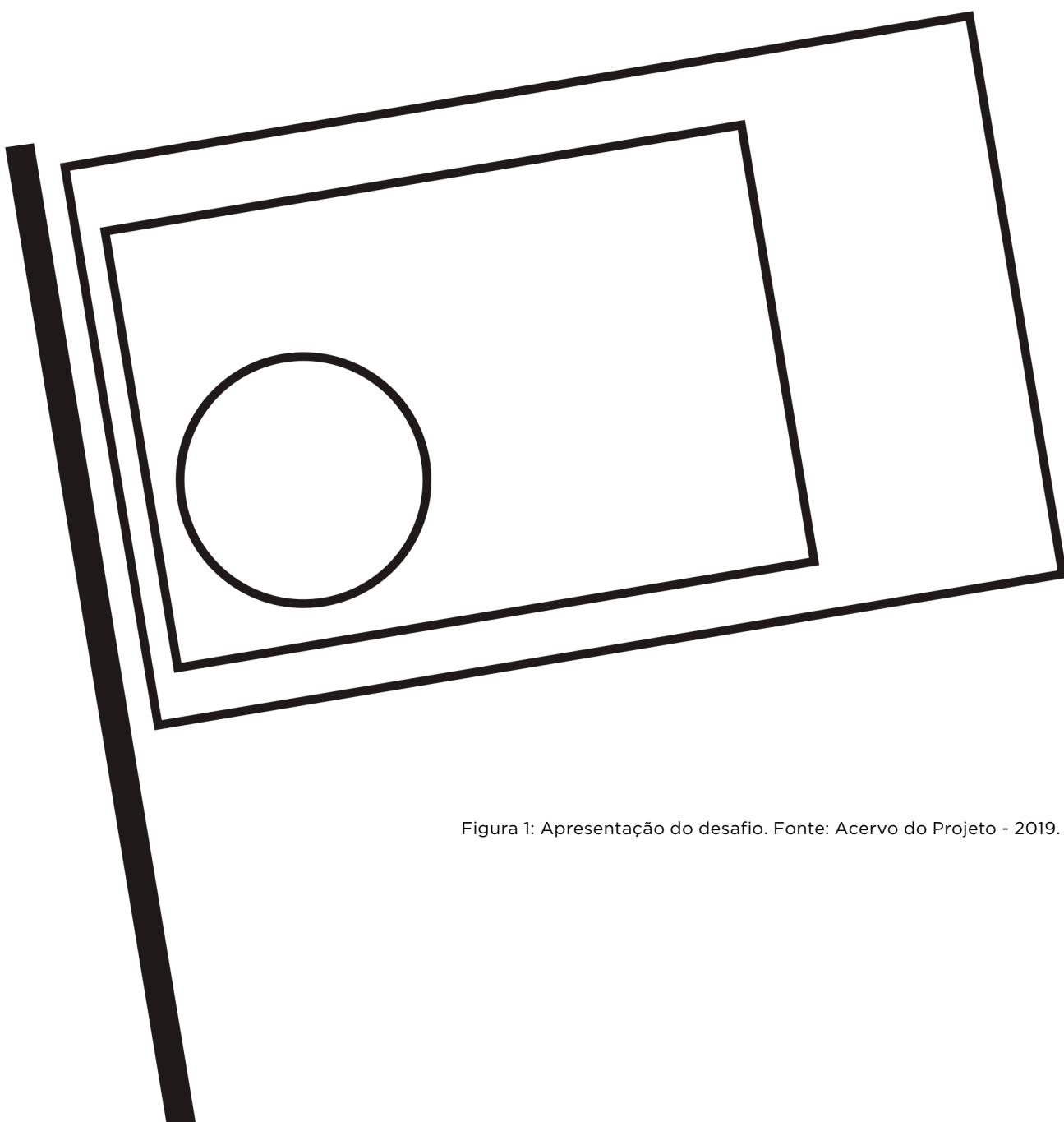
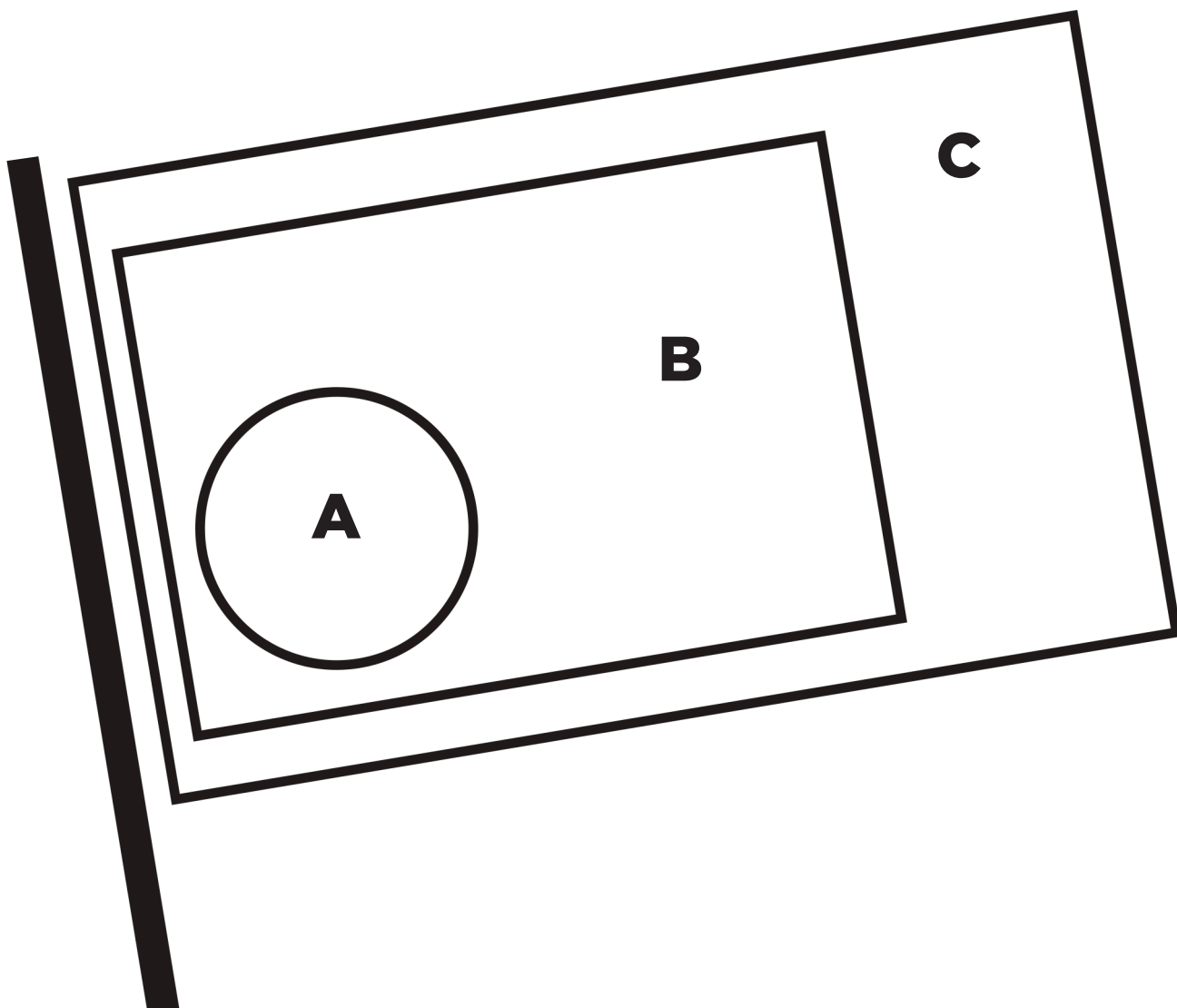
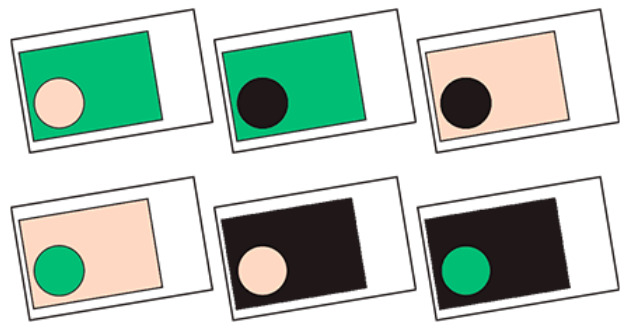
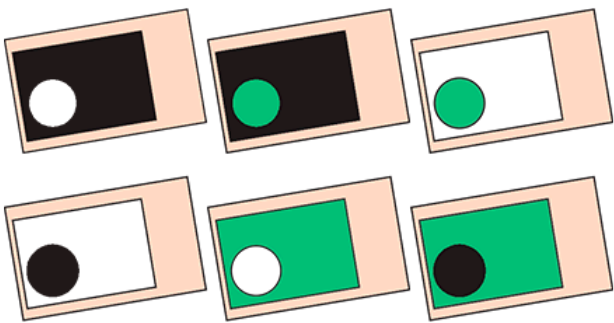
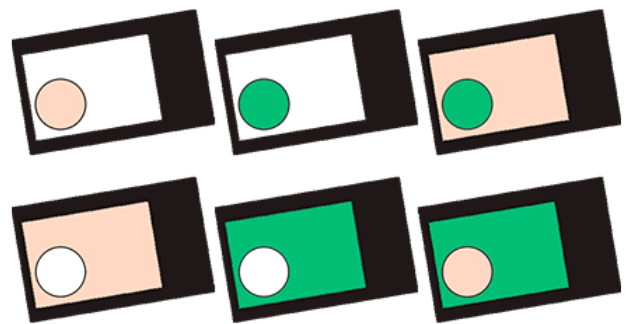
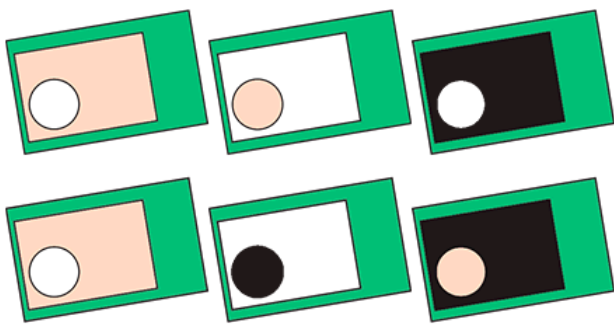


Figura 1: Apresentação do desafio. Fonte: Acervo do Projeto - 2019.

SOLUÇÃO

Escolha qualquer uma das partes da bandeira, por exemplo, a parte “a”. Temos quatro opções de cores para pintar a primeira parte: preta, branca, vermelha ou verde. Pintada a parte “a”, há outras 3 cores que podem ser usadas na segunda parte, por exemplo, a parte “b”, visto que a cor da primeira não poderá ser repetida. Então, para pintar duas partes, temos $4 \times 3 = 12$ possibilidades. Pintadas duas partes, há mais duas possibilidades de cores para a terceira parte (no nosso exemplo, a parte “c”). Assim há $12 \times 2 = 24$ modos de se pintar a bandeira. Perceba que o raciocínio não depende de qual parte você elegeu para ser a primeira. Em resumo: há $4 \times 3 \times 2$ modos diferentes de se pintar a bandeira.





DESCOBERTAS E ANÁLISES

O Desafio das Bandeiras pode ser resolvido por meio do Princípio Multiplicativo, também nomeado como Princípio Fundamental da Contagem. Esse princípio permite resolver problemas que envolvam a contagem, sem, necessariamente, recorrer à enumeração de todos os elementos. O princípio é sintetizado por Carvalho (2017, p. 3) da seguinte maneira:

Se uma decisão D1 pode ser tomada por p modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão D2 pode ser tomada de q modos, então, o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D1 e D2 é igual a pq .

Exemplificando tal princípio, por meio do Desafio das Bandeiras, temos que a parte externa da bandeira poderá ser pintada de 4 cores: preta, branca, vermelha ou verde. Seguindo o que está estabelecido no enunciado, o retângulo interno poderá ser pintado de 3 cores diferentes - excluindo a que foi escolhida para a parte externa. Por fim, o círculo poderá ser pintado de 2 formas diferentes. Assim, há 4 possibilidades para a decisão 1, três possibilidades para a decisão 2 e duas possibilidades para a decisão 3. O Princípio Multiplicativo define que devemos multiplicar as três possibilidades, ou seja, devemos fazer $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilidades.

No contexto do Projeto Descobridores da Matemática, esse desafio foi aplicado em um grupo, composto por estudantes do 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental, que apresentava uma característica singular: eram crianças “*pesquisadoras*”, que já tinham demonstrado grande afinidade com Matemática e raciocínio lógico. Naquele

momento participavam de um trabalho de Iniciação Científica Júnior. Para planejar as atividades, utilizamos o material produzido pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) para o Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Considerando a perspectiva do projeto, buscamos materiais que considerávamos atraentes e que apresentavam caráter de desafio para crianças. Nesse sentido, avaliamos que as propostas da Apostila 2 - Métodos de Contagem e Probabilidade seriam adequadas.

O desafio foi apresentado ao grupo, que, rapidamente, buscou resolvê-lo. Inicialmente, as crianças perguntaram se poderiam buscar soluções por meio de desenhos e foram orientadas a escolher a forma que considerassem mais adequada. A princípio, tentaram resolvê-lo individualmente, quase sem buscar interação. A estratégia de registro por meio de desenho pode ser vista a seguir:

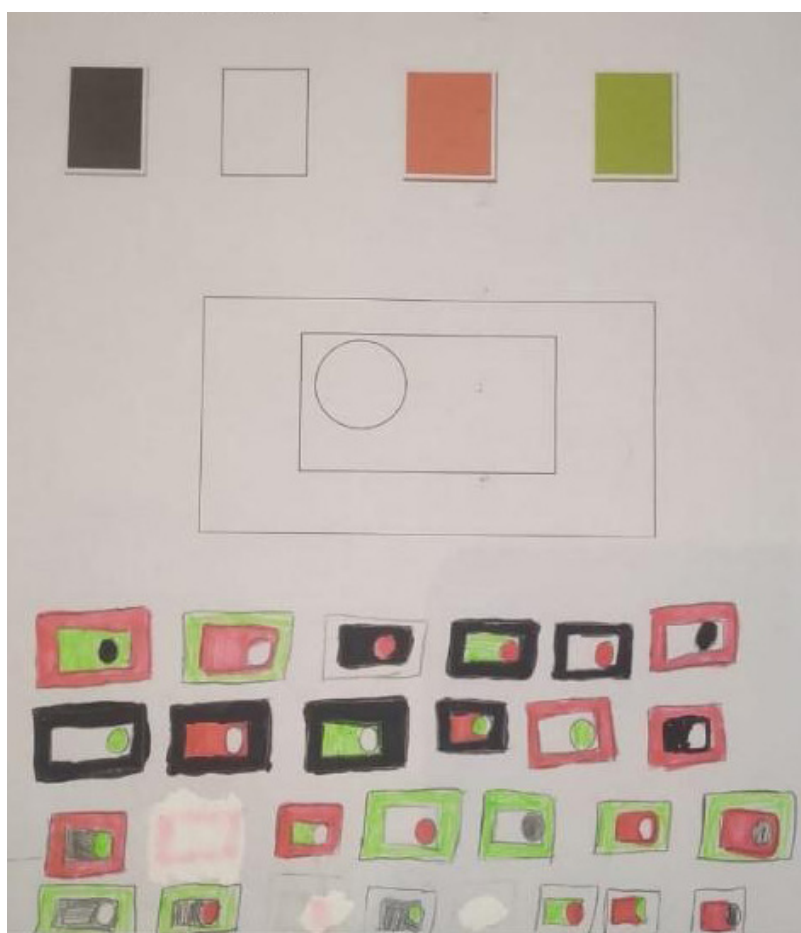


Figura 2: Resolução do desafio a partir de desenhos e cores.
Fonte: Acervo do Projeto - 2019

A criança que resolveu o problema dessa forma, reproduziu as bandeiras como propunha o desenho e coloriu cada uma das partes conforme o enunciado indicava. Contudo, como não criou uma estratégia que permitisse organizar a contagem, escolhendo, por exemplo, a mesma cor para iniciar o colorido de uma das partes, houve repetição em duas das bandeiras que fez. Assim, após a conferência do que havia desenhado, junto a uma colega e à professora, a menina apagou o desenho de duas bandeiras para chegar ao resultado correto.

O segundo desenho ilustra a estratégia de uma criança que realizou a organização por meio das cores iniciais, o que facilitou a contagem, como pode ser visto na imagem a seguir.

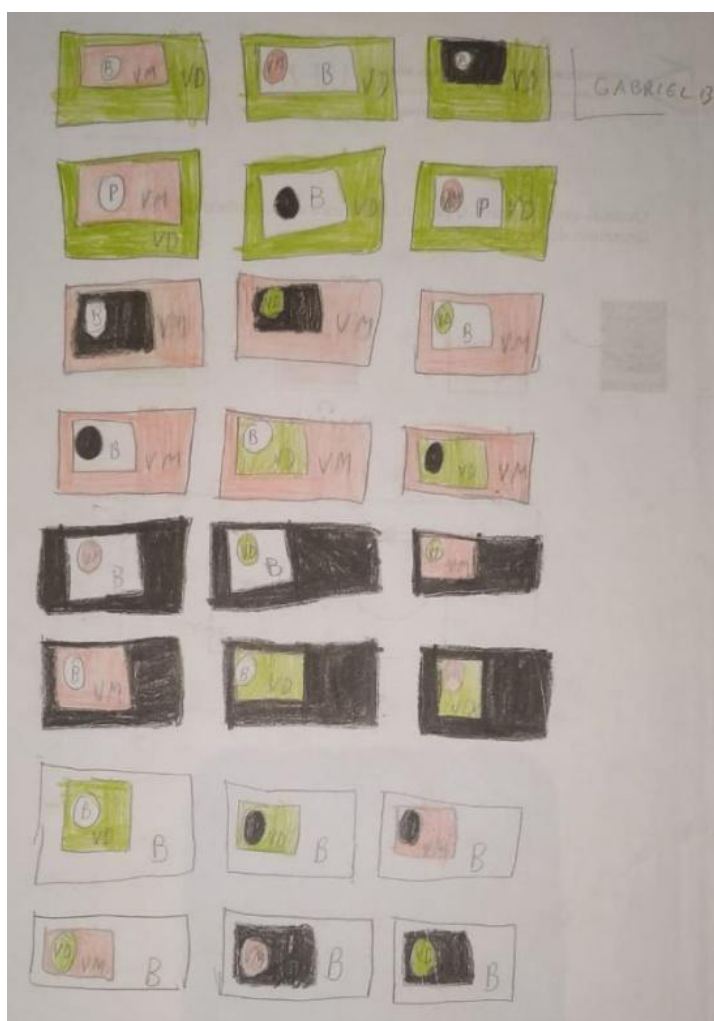


Figura 3: Resolução por meio de desenho, com ordenação da escolha das cores. Fonte: Acervo do Projeto – 2019.

Nesse caso específico, a criança, inicialmente, não coloriu as bandeiras. Sua opção foi a de registrar com letras: cada uma representando uma das cores. Posteriormente, coloriu o desenho, sem, no entanto, ter o objetivo de resolver o desafio. Sua estratégia inicial permitiu que organizasse quantas bandeiras seriam possíveis de serem coloridas com determinada cor na parte externa. Assim, começou fazendo uma bandeira verde com o retângulo interno vermelho e o círculo branco. Na bandeira seguinte, manteve a cor verde na parte externa e inverteu a cor do círculo e do retângulo, procedendo da mesma forma com as quatro bandeiras seguintes, para descobrir quantas bandeiras seria possível formar, considerando a parte externa pintada de verde. A criança repetiu o procedimento com as demais cores na parte externa e, a partir disso, chegou à conclusão a respeito da quantidade que seria possível formar, ou seja, 24 bandeiras. Após desenhar, explicou por escrito o raciocínio que teve, demonstrando uma operação, como mostra a figura 4.

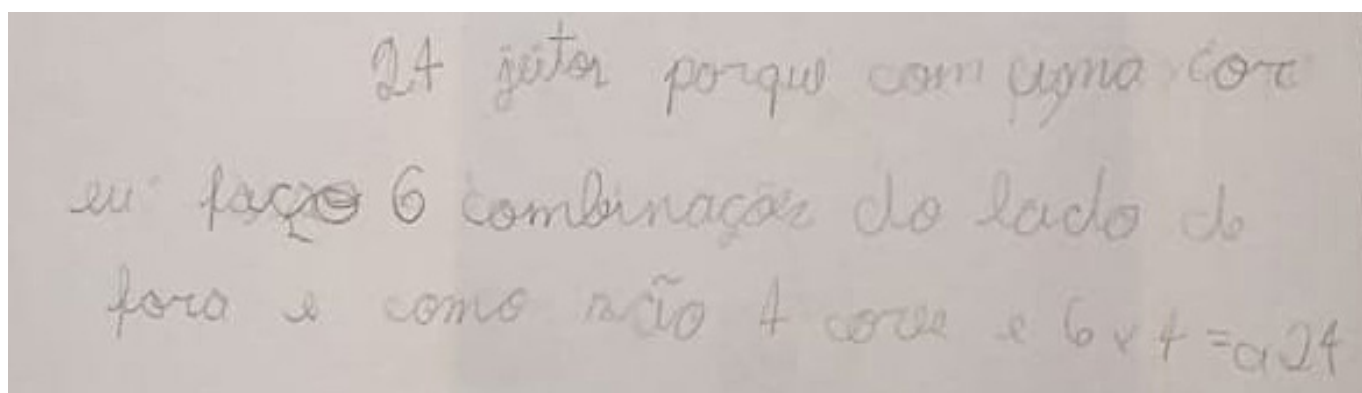


Figura 4: Criança explicando como resolveu o problema. Fonte: Acervo do Projeto.

É possível interpretar que a criança usou o Princípio Multiplicativo, que consiste na multiplicação $4 \times 3 \times 2$, pois demonstrou compreender que, fixada a cor externa, são 6 possibilidades para pintar as partes internas. Como há 4 formas de pintar externamente, a aprendiz multiplicou 6×4 , chegando ao total de bandeiras que poderiam ser pintadas. Embora não se possa afirmar que a criança tenha usado o princípio multiplicativo antes de listar as maneiras possíveis, ela indica corretamente seu uso, a partir da conclusão de que definida uma cor para a parte externa, há seis pinturas possíveis.

Sua resposta apresenta uma generalização importante, ao demonstrar que os problemas de contagem para os aprendizes dos anos iniciais, não devem se restringir àqueles que podem ser resolvidos por meio de desenhos e diagramas, diferentemente daquilo que aponta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC de agora em diante) na unidade temática Estatística. De acordo com o documento, nos anos iniciais do Ensino Fundamental os problemas de contagem devem *“estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo”* (BRASIL, 2018, p. 275).

Por meio da generalização das ideias apresentadas nas soluções que utilizam desenhos, é possível que ocorra uma apropriação de conceitos – como o do Princípio Multiplicativo – que será útil durante, por exemplo, o processo de solução de problemas com maior número de possibilidades, nos quais a listagem completa dos casos seja inviável.

A resposta de uma terceira participante levou as docentes a uma reflexão a respeito da formulação do enunciado e de materiais que seriam adequados nessa faixa de escolarização. A criança optou por desenhar, como suporte para identificar as possibilidades de respostas, como demonstrado na figura 5.



Figura 5: Identificação das bandeiras a partir das cores. Fonte: Acervo do Projeto - 2019.

Diante da pergunta a respeito de quantas seriam as formas de pintar a bandeira utilizando três cores, a estudante não se ateve à ideia de colorir apenas as três áreas delimitadas no desenho. Optou por realizar outras configurações: dividiu as figuras e criou outras bandeiras, usando as três cores. Ao realizar os desenhos, chegou à conclusão de que seria impossível saber quantas bandeiras formaria, pois estas *“eram infinitas”*. De acordo com a sua forma de pensar, seriam inúmeras as possibilidades de *“desenhar”* bandeiras usando as três cores.

Com base na constatação a que chegou, iniciamos uma discussão coletiva sobre como resolver o problema: seriam mesmo, infinitas as possibilidades de construir bandeiras obedecendo a regra estabelecida? Essa foi a questão norteadora. Após debater, as crianças concluíram que deveriam colorir integralmente uma parte sem subdividi-la, diferente do modo que a estudante apresentou. Além disso, discutimos sobre como poderíamos melhorar o enunciado de maneira a deixar mais evidente o objetivo do desafio. Assim, os estudantes concluíram que poderia ser dito que não seria permitido dividir a figura, ou seja, a bandeira não deveria ter a sua forma modificada.

A análise desse desafio suscitou duas questões importantes. A primeira se refere ao fato de que não é simples encontrar materiais adequados à Iniciação Científica Júnior. Há poucos materiais voltados para essa finalidade no Brasil e, quando existem, são para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Se considerarmos que a iniciação à pesquisa se constitui em aspecto importante na formação das crianças, é necessário pensar em materiais específicos para essa faixa etária. A segunda questão refere-se ao fato de considerarmos que os erros das crianças, no processo de resolução de desafios, são tão importantes e significativos quanto os acertos. Assim, as resoluções apresentadas possibilitaram refletir sobre as estratégias utilizadas por elas, bem como problematizar o modo como o desafio foi escrito. Nesse sentido, discutimos, com os descobridores,

os modos de reescrever o enunciado do desafio. Na discussão, sugeriram o seguinte: *“quantas são as maneiras de pintar a bandeira a seguir, utilizando 3 cores diferentes dentre as 4 dadas e sem alterar a forma da bandeira ou dividi-la?”*.

Tal discussão não aponta para a necessidade de modificação do enunciado da questão. Contudo, configurou-se como aspecto relevante para aquele grupo.

Outras considerações

O Desafio das Bandeiras pode ser usado para se iniciar o trabalho com contagens e suscitar a construção de estratégias variadas para resolver problemas, incluindo, por exemplo, o Princípio Multiplicativo. A seguir, apresentamos sugestões que poderão facilitar o desenvolvimento de sua aplicação.

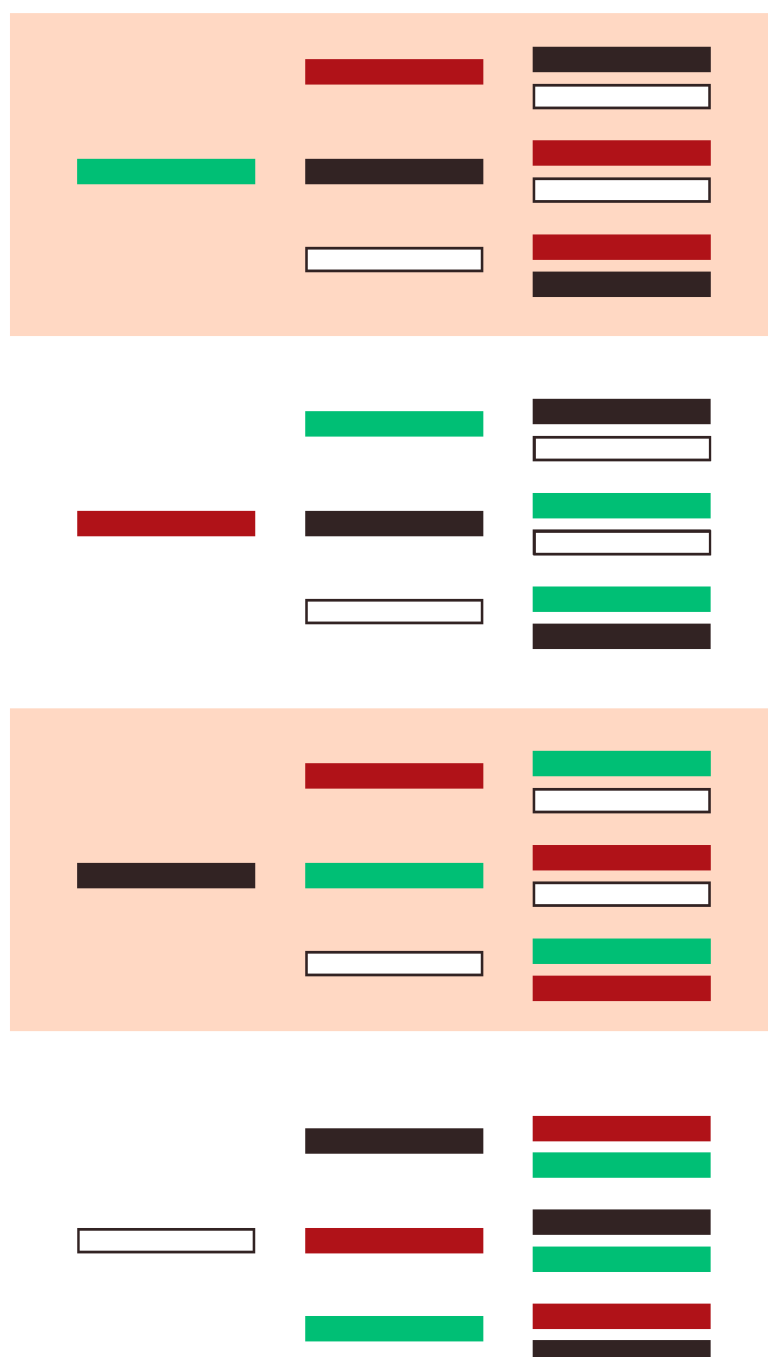
- A necessidade de construção de uma estratégia própria é o mais importante. A partir da interação das crianças, no momento em que compartilham sua forma de pensar, o Princípio Multiplicativo poderá ser apresentado;
- Para garantir a busca por estratégias próprias de resolução é recomendado fazer perguntas em torno da questão central, tais como: faz diferença começar a colorir pelo círculo ou pela parte externa da bandeira? A cor escolhida para começar interfere no resultado?
- Caso sejam feitas por meio de um desenho, o estudante deve ser questionado sobre o modo como organizou a contagem;

De igual importância é pensar nas estratégias de validação, solicitando, por exemplo, que uma criança faça a conferência do desenho da outra, verificando se nenhuma possibilidade de colorido foi esquecida ou se há duplicidade;

- A análise coletiva das respostas constitui-se como estratégia significativa;
- Um desdobramento é tornar o desafio mais complexo, aumentando a quantidade de possibilidades, de maneira a tornar difícil resol-

vê-lo a partir dos desenhos. Propondo, por exemplo, 7 divisões e 15 cores diferentes e perguntando quantas bandeiras é possível formar. Esse tipo de complexificação incentiva a busca por soluções que se valem do Princípio Multiplicativo;

- Um tipo de resposta que não apareceu durante a aplicação aqui relatada é denominado Árvore de Possibilidades. De acordo com tal metodologia, definem-se os primeiros elementos a partir dos quais são pensados os seguintes. É interessante apresentar essa possibilidade para as crianças, caso ela não apareça. Para facilitar, segue a imagem:



REFERÊNCIAS

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Métodos de Contagem e Probabilidade.** Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base nacional comum curricular. Brasília, DF, 2020. Disponível em: <http://base-nacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: 02 nov. 2020.