

2015~2016 学年秋季学期《线性代数》课程考试试题解析

一、填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分，请将合适的答案填在每题的空中）

1. 设 $|a_1, a_2, a_3| = 2$ ，则 $|2a_1 - 3a_3, 4a_2 + 3a_1, a_2| = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析：

$$\begin{aligned} |2a_1 - 3a_3, 4a_2 + 3a_1, a_2| &= |2a_1 - 3a_3, 3a_1, a_2| = 3|2a_1 - 3a_3, a_1, a_2| \\ &= 3|-3a_3, a_1, a_2| = -9|a_3, a_1, a_2| = -9(-1)(-1)|a_1, a_2, a_3| = -18 \end{aligned}$$

注释 本题知识点：行列式的性质

- (1) 行列式的某一列乘以一个倍数加到另一列；
- (2) 行列式的某一列提一个公因数；
- (3) 行列式某两列互换.

答案： -18

2. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (k, 2, 3)^T$, $\alpha_3 = (1, k, 1)^T$, $k > 0$ ，如果向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关，则常数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析： 由 a_1, a_2, a_3 线性相关有，

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (k-1)(3k-2) = 0$$

$$\text{得 } k = 1, \text{ 或 } k = \frac{2}{3}.$$

注释 本题知识点：

n 个 n 维列向量组线性相关的充分必要条件是，由他们组成的行列式等于 0.

答案： $k = 1$, 或 $k = \frac{2}{3}$, 结果不唯一.

3. 已知三阶矩阵 A 的特征值互不相同，且 $|A| = 0$ ，又 η_1, η_2, η_3 是非齐次方程组 $Ax = b$ 的三个不同解向量，则方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析： 由 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0$ 得特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 至少有一个为 0.

由 A 的特征值互不相同，得 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中一个为 0 另两个不为 0，所以由 A 的秩为 2.

从而 $Ax = 0$ 的基础解系含一个向量.

由 η_1, η_2, η_3 是非齐次方程组 $Ax = b$ 的三个不同解向量，得 $\eta_1 - \eta_2$ ，或 $\eta_1 - \eta_3$ 为 $Ax = 0$

的基础解系。所以，方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $k_1(\eta_1 - \eta_2)$ ，或 $k_2(\eta_1 - \eta_3)$ ， k_1, k_2 为任意实数。

注释 本题知识点：

- (1) 矩阵行列式的值等于它的所有特征值的乘积；
- (2) 齐次线性方程组的基础解系所含向量的个数等于未知量的个数减去系数矩阵的秩；
- (3) 非齐次方程组和齐次方程组解之间的关系。

答案： $k_1(\eta_1 - \eta_2)$ ，或 $k_2(\eta_1 - \eta_3)$ ， k_1, k_2 为任意实数。

4. 设 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ 和 $\alpha_2 = (0, 1, 0)^T$ 都是方阵 A 对应于特征值 3 的特征向量。又 $\beta = (3, 2, 3)^T$ ，
则 $A\beta =$ _____。

解析： $A\alpha_1 = 3\alpha_1$ ， $A\alpha_2 = 3\alpha_2$ 。

$$\beta = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$$

$$A\beta = 3A\alpha_1 + 2A\alpha_2 = 9\alpha_1 + 6\alpha_2 = (9, 6, 9)^T。$$

注释 本题知识点：

- (1) 矩阵特征值、特征向量的定义；
- (2) 把一个向量表示成其它向量的线性组合。

答案： $(9, 6, 9)^T$ 。

5. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_3^2 + 2ax_1x_2 - 4x_2x_3$ 为负定二次型，那么 a 的取值范围是 _____。

解析： 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} -3 & a & 0 \\ a & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ 。

A 负定当且仅当 $-A$ 正定，当且仅当 $-A$ 的所有顺序主子式都大于 0；

当且仅当 $15 - a^2 > 0$ ， $9 - a^2 > 0$ ，当且仅当 $-3 < a < 3$ 或 $a \in (-3, 3)$ 。

注释 本题知识点：

- (1) 二次型的矩阵；
- (2) 矩阵正定与负定的关系；
- (3) 矩阵正定的充分必要条件。

答案： $a \in (-3, 3)$ 。

二、 选择题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $R(B) = 2$, 则 $R(AB) = (\quad)$
- (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

解析: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$, A 可逆

$$R(AB) = R(B) = 2.$$

注释 本题知识点:

矩阵左乘或右乘一个可逆矩阵其秩不变.

答案: C

2. 设 A, B 都为 n 阶非零矩阵, 且 $AB = 0$, 则()
- (A) 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解; (B) 方程组 $Ax = b$ 有唯一解;
- (C) 方程组 $Ax = 0$ 有无穷多解; (D) 方程组 $Ax = 0$ 仅有零解..

解析: $AB = 0$ 表明 B 的列向量都是 $Ax = 0$ 的解,

由 B 为 n 阶非零矩阵得 $Ax = 0$ 有非零解,

从而 $R(A) < n$, $Ax = 0$ 有无穷多解.

注释 本题知识点:

(1) $AB=0$ 与齐次线性方程组解之间的关系;

(2) 齐次线性方程组有非零解的判别条件.

答案: C

3. 下列矩阵哪个不是正交矩阵()

(A) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$

(B) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$

$$(C) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(D) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

解析 根据正交矩阵的定义或等价条件, 可得(B)是正交矩阵.

注释 本题知识点:

正交矩阵的定义 $A^T A = E$ 或 A 的列(行)向量组两两正交且长度为 1.

答案 B

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 A 属于特征值 λ 的特征向量, 则 a, b 的值为 ()

(A) $a = -2, b = 1$; (B) $a = 2, b = -1$; (C) $a = -2, b = -1$; (D) $a = 2, b = 1$.

解析 由 $A\alpha = \lambda\alpha$, 得

$$\begin{cases} a+1+1=\lambda \\ -1+1=-\lambda \\ 1-b=\lambda \end{cases}, \text{ 解得 } a=-2, b=1.$$

注释 本题知识点:

特征值、特征向量的定义及计算.

答案 A

5. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, 则下列结论正确的是 ()

- (A) 若 $AB = E$, 则矩阵 A 列向量组线性无关;
- (B) 若 $AB = E$, 则矩阵 A 列向量组线性相关;
- (C) 若 $BA = E$, 则矩阵 A 列向量组线性无关;
- (D) 若 $BA = E$, 则矩阵 A 列向量组线性相关.

解析 由 $AB = E$ 得 A 的秩为 m , A 的行向量组线性无关.

由 $BA = E$ 得 A 的秩为 n , A 的列向量组线性无关.

注释 本题知识点:

- (1) 矩阵乘积的秩不超过其中每一个的秩;

(2) 矩阵的秩不超过它的行数和列数.

答案 C

三、(本题满分 12 分) 计算下列各题

解析:

$$1. \text{ 设行列式 } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \text{ 计算 } A_{31} + A_{32} + A_{33}.$$

$$A_{31} + A_{32} + A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$2. \text{ 计算 } n \text{ 阶行列式 } D_n = \begin{vmatrix} x+2 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+2 \end{vmatrix}.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} nx+2 & nx+2 & nx+2 & \cdots & nx+2 \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_1+r_n]{r_1+p_2, \dots, r_1+p_n} = (nx+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+2 \end{vmatrix}$$

$$= (nx+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 2^{n-1} (nx+2).$$

注释 本题知识点:

(1) 行列式展开与代数余子式的关系;

(2) 行列式的性质及三角化法.

四、(本题满分 20 分)

解析:

(1) 已知 A 和 B 均三阶方阵, 将 A 的第三行 2 倍加到第一行得到矩阵 A_1 , 将 B 的第 1 列加到第 2 列得

到矩阵 B_1 , 又已知 $A_1 B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 AB .

由已知可得 $PA = A_1, BQ = B_1$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

显然 P, Q 都为可逆阵, 且 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

则 $AB = P^{-1} A_1 B_1 Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) 设 4 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵, 且满足方程 $A^*X = A^{-1} - 3X$,

求矩阵 X .

因为 $A^*X = A^{-1} + 3X$, 两边同乘以 A , 可得 $(|A| + 3A)X = E$

又 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $X = (|A| + 3A)^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 3/10 & 0 & 0 \\ 3/10 & -1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/10 & 3/10 \\ 0 & 0 & -3/10 & 1/10 \end{pmatrix}$.

注释 本题知识点:

(1) 矩阵的初等行、列变换与矩阵左乘、右乘初等矩阵之间的关系;

(2) 利用 A^* 的性质 $AA^* = |A|E$ 解矩阵方程;

(3) 矩阵求逆.

五、(本题满分 10 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

- (1) 求矩阵 A 的秩; (2) 求矩阵 A 的列向量组的一个最大线性无关组.

解析:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 9 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) 矩阵 A 的秩的秩为 4;

(2) 矩阵 A 的列向量组的一个最大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

注释 本题知识点:

(1) 利用初等变换化矩阵为阶梯形;

(2) 利用矩阵的阶梯形求矩阵的秩及求矩阵列向量组的最大线性无关组.

六、(本题满分 12 分) 已知向量 $\beta = (0, 1, b, -1)^T$, $\alpha_1 = (1, 0, 0, 3)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, -1, 2)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, a-3, 1)^T$,

$\alpha_4 = (1, 2, -2, a)^T$, 试讨论 a, b 为何值时,

(1) β 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示;

(2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 唯一的表示;

(3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 表示, 但表达式不唯一, 并求出表达式.

解析: 将向量组写成矩阵 B 用初等行变换化为阶梯矩阵:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{r} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array} \right]$$

所以, (1) 当 $a \neq 1$ 时, $R(B) = R(A) = 4$, 此时线性方程组有唯一解.

(2) 当 $a = 1$, $b \neq -1$ 时, $R(A) = 2$, $R(B) = 3$, 此时线性方程组无解.

(3) 当 $a = 1$, $b = -1$ 时, $R(B) = R(A) = 2$, 此时线性方程组有无穷多组解.

此时, 原线性方程组化为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

因此，原线性方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

或者写为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$$

注释 本题知识点：

- (1) 利用初等行变换化矩阵为阶梯形；
- (2) 利用矩阵的阶梯形判断线性方程组解的情况；
- (3) 非齐次线性方程组的解与向量的线性表出之间的关系.

七、(本题满分 10 分) 试求一正交变换 $x = Py$ ，将二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$ 化为标准型，并写出标准型.

解析： f 的矩阵及标准形的矩阵分别为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

矩阵 A 的三个特征值分别为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

特征值 $\lambda_1 = 0$ 对应的特征向量为 $\alpha_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T$,

特征值 $\lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为 $\alpha_2 = (0, 0, 1)^T$,

特征值 $\lambda_3 = 2$ 对应的特征向量为 $\alpha_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T$.

因此令： $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

因此所作的正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

标准形 $y_2^2 + 2y_3^2$ 。

注释 本题知识点：

- (1) 二次型的矩阵；
- (2) 实对称矩阵的正交化对角化。

八、(本题满分 6 分) 设 A 为 3 阶方阵, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 A 的三个不同特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为相应的特征向量,

又 $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$. 试向量组 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 证明线性无关.

解析: 设存在常数 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1\beta + k_2A\beta + k_3A^2\beta = 0$ (*)

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 A 的三个不同特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为相应的特征向量, 可得

$$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, i=1, 2, 3$$

代入 (*) 有

$$(k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2)\alpha_1 - (k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2)\alpha_2 + (k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2)\alpha_3 = 0$$

又因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关可得

$$k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2 = k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2 = k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2 = 0$$

因为系数阵 $\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$ 的行列式不等于零, 有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

所以向量组 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 证明线性无关

注释 本题知识点：

- (1) 特征值、特征向量的定义及性质；
- (2) 向量组线性无关的定义及与齐次线性方程组是否有零解之间的关系。