中国农业大学

2018~2019 学年春季学期

线性代数（B）课程考试试题（A 卷）（2019.6.）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

注：本试卷共八页、八道大题

一、 填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分，请将合适的答案填在每题的空中）

1. 已知 3 阶矩阵 $A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right], B=\left[3\alpha_1-\alpha_2, 3\alpha_2-2\alpha_3, -\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3\right]$，且 $|B|=16$，则 $|A|=$ ___4___.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的所有元素的代数余子式之和是___1___.

3. 设 A 为 3 阶方阵且行列式 $|E-A|=|2E-A|=|3E-A|=0$，（其中 E 为 3 阶单位阵）. 则 $\left|A^*\right|=$ ___36___.

4. 若方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+ax_3=1 \end{cases}$ 无解，则 a 的值为___−2___.

5. 已知实二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+tx_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 是正定的，则常数 t 的取值范围是 ___$t>3$___.

二、 选择题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，$A^*$ 为 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$【 D 】.

(A) A；　(B) A^{-1}；　(C) $6A^{-1}$；　(D) $6^{-1}A$.

考生诚信承诺

1．本人清楚学校关于考试管理、考场规则、考试作弊处理的规定，并严格遵照执行.

2．本人承诺在考试过程中没有作弊行为，所做试卷的内容真实可信.

学院：______________ 班级：___________ 学号：____________姓名：___________

2. 设A,B都为n阶可逆矩阵，且$(A+B)^2=E$，则$(E+BA^{-1})^{-1}=$【 C 】

(A) $(A+B)B$； (B) $E+AB^{-1}$； (C) $A(A+B)$； (D) $(A+B)A$

3. 设$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若矩阵$A$的伴随矩阵$A^*$的秩为1，则必有【 D 】.

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$； (B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$；

(C) $a\neq b$ 或 $a+2b\neq 0$； (D) $a\neq b$ 或 $a+2b=0$.

4．设矩阵A通过初等行变换变成矩阵B，则下列结论正确的是【 A 】

(A) A的行向量组与B的行向量组一定等价；

(B) A的行向量组与B的行向量组一定不等价；

(C) A的列向量组与B的列向量组一定等价；

(D) A的列向量组与B的列向量组一定不等价；

5. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则下列结论正确的是【 C 】

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的部分组一定线性相关；

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的部分组一定线性无关；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的缩短组一定线性相关；

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的延伸组一定线性相关.

三、（10 分） 计算下面 n 阶行列式的值

$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & \ddots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

解. 第 2 行乘以 λ，…，第 n−1 行乘以 λ^{n-2}，第 n 行乘以 λ^{n-1}，然后全部加到第 1 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{n-2}\lambda^{n-2}+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n \\ -1 & \lambda & \ddots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

再按第 1 行展开，得

$$D_n=(-1)^{1+n}(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n)\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}(-1)^{n-1}(a_0+a_1\lambda+\cdots a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n)=a_0+a_1\lambda+\cdots a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n.$$

另解：按第 1 行展开可以建立递推关系式

$$D_n=\lambda D_{n-1}+a_0$$ （其中 D_{n-1} 为 D_n 右下角的 n−1 阶行列式）

然后用归纳法得出结果．按步骤相应给分.

四、（14 分） 当 a,b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=-1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=b \end{cases}$$

无解，有惟一解，有无穷多解？并在有无穷多解的情况下，写出它的通解.

解 将原方程组的增广矩阵化为阶梯型：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{pmatrix}.$$

（1）当 $b \neq -2,$ 时原方程组无解；

（2）由于系数矩阵的秩小于 4，因此不论 a,b 取何值，原方程组都没有唯一解；

（3）当 $b=-2, a=-8$ 时，原方程组有无穷多解.

此时原方程组等价于：

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 - x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \end{cases}$$

一般解为

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{取任何值；}$$

（4）当 $b=-2, a\neq -8$ 时原方程组也有无穷多解. 此时原方程组等价于：

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 - 1, \\ x_2 = -2x_4 + 1, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

一般解为

$$k\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; k \text{取任何值。}$$

五、(12 分) 设 A,B 是 3 阶方阵，且 $2A^{-1}B = B - 4E$，其中 E 是 3 阶单位矩阵。

（1）证明 $A-2E$ 可逆；　　（2）若 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求矩阵 A.

解 （1）由$2A^{-1}B=B-4E$，得$(A-2E)(B-4E)=8E$，

故$A-2E$可逆.

(2) $A=8(B-4E)^{-1}+2E$,

$$B-4E=\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\ (B-4E)^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2&2&0\\-1&-3&0\\0&0&-4\end{pmatrix},$$

得

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

六、(12 分)　设 3 阶矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\k&-1&-k\\4&2&-3\end{pmatrix}$.

（1）问k为何值时，A相似于对角阵？

（2）当A相似于对角阵时，求可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角矩阵。

解 （1）$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\-k&\lambda+1&k\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$.

特征值 1 的几何重数等于代数重数 1，因此A相似于对角阵当且仅当特征值
-1 的几何重数等于代数重数 2，从而秩$(-E-A)=3-2=1$.
所以 k=0.

(2) 对应于特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1$的两个线性无关特征向量为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\qquad \eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix};$$

对应于特征值$\lambda_3=1$的特征向量为$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，　则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$.

七、（14 分） 已知二次曲面方程

$$2{x_1}^2+2{x_2}^2+2{x_3}^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=5$$

经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ **化为标准形** ${y_1}^2+{y_2}^2+4{y_3}^2=5$

（1） 求 a 的值；　　　　（2）求正交变换矩阵 P。

解　（1）　令

$$A=\begin{pmatrix}2&a&1\\a&2&1\\1&1&2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix},$$

则 $D=P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP$.

由|A|=|D|,知 a=0, 或 a=1.

再由 A 与 D 有相同的特征值，得 a=1.

（2）属于特征值 1 的特征向量是线性方程组($E-A$)X=0 的非零解，即方程组

$$x_1+x_2+x_3=0$$

的非零解. 解得属于特征值 1 的线性无关特征向量为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

正交化、单位化得 $\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},$

属于特征值 4 的特征向量是线性方程组(4E -A)X=0 的非零解，即方程组

$$x_1=x_2=x_3$$

的非零解. 解得属于特征值 4 的线性无关特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$

单位化得 $\beta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$　　从而

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

八 、（本题满分 8 分）

（1）设 A,B,C 都是 n 阶矩阵，E 是 n 阶单位矩阵. 若

$$B=E+AB,\ C=A+CA,$$

证明：$E-A$ 可逆，且其逆为 B；进一步验证 $B-C=E$.

（2）设 A 是 n 阶实矩阵，证明：若 $2A^{\mathrm{T}}A-E$ 正定，则 A 的秩为 n.

证 （1）由 $B=E+AB$ 知 $(E-A)B=E$，所以 $E-A$ 可逆，且其逆为 B.

、

又 $C=A+CA$，故 $C(E-A)=A$. 因此，$C=A(E-A)^{-1}=AB$.

所以 $B-C=B-AB=E$. 、

(2) 由 $2A^{\mathrm{T}}A-E$ 正定，知 $2A^{\mathrm{T}}A=(2A^{\mathrm{T}}A-E)+E$ 也正定，从而 A^TA 的秩为 n.

又因为秩（A）=秩（A^TA），所以 A 的秩为 n.