2014 ~2015 学年春季学期《线性代数 》课程考试试题解析

一、填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分，请将合适的答案填在每题的空中）

1．设 A 为 3 阶可逆矩阵，$|A|=2$，A^*为矩阵 A 的伴随矩阵，则$\left||A|A^*\right|=$____________.

解析：由于$|A|=2,|\,|A^*|=|A|^{3\text{-}1}=2^2$，则

$$||A|A^*|=|A|^3\times|A^*|=2^5=32$$

注释　本题知识点：

（1）　$|A^*|=|A|^{n-1}$;

（2）　$AA^*=A^*A=|A|E;$

（3）　$|\lambda A|=\lambda^n|A|.$

答案：32

2. 设四元非齐次方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3，已知η_1,η_2,η_3是它的三个解向量，

且 $2\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}$，则方程组 $Ax=b$ 的通解为________________.

解析：由于 $R(\mathrm{A})=3$，未知数的个数为 $n=4$，则齐次方程的基础解系有 $n-R(\mathrm{A})=1$ 个向量。

已知η_1,η_2,η_3是 $Ax=b$ 的三个解向量，则

$$A(2\eta_1-\eta_2)=2A\eta_1-A\eta_2=b,\qquad A\eta_3=b$$

所以$A[(2\eta_1-\eta_2)-\eta_3]=0$，即

所以ξ=$(2\eta_1-\eta_2)-\eta_3$是非齐次方程的基础解系，方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$\mathrm{x}=\mathrm{k}[(2\eta_1-\eta_2)-\eta_3]+\eta_3$$

注释　本题知识点：

(1) 如果 $A_{m\times n},R(\mathrm{A})=\mathrm{r}$，则齐次方程的基础解系有 $n-r$ 个向量;

(2) 如果齐次方程组的基础解系为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，非齐次方程组的特解为$\eta^*$，则非齐次方程的通解为$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*$。

(3) 如果η_1,η_2是非齐次方程组的解，则$\eta_1-\eta_2$是其次方程组的解。

答案：$k\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$为任意实数.

3. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+3\alpha_3,\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$，则向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是线性 ________________（相关、无关）的.

解析：方法一，定义法计算；

方法二，$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&-1\\0&3&1\end{pmatrix}$

令$\mathrm{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$K=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&-1\\0&3&1\end{pmatrix}$，则$B=AK$；

又因为$|K|\neq 0$，所以$R(\mathrm{A})=\mathrm{R(B)}$.

又因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$R(\mathrm{A})=\mathrm{R(B)}=3$.

所以向量组β_1,β_2,β_3是线性无关.

注释 本题知识点：

(1) 如果$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_m\beta_m=0$有非零解（仅有零解），向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是线性相关（无关）；

(2) 如果$R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)<m$ (或$=\mathrm{m}$)，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是线性相关（无关）。

(3) $R(\mathrm{AB})\leq\min\{\mathrm{R(A),R(B)}\}$.

答案：无关。

4．若矩阵A与B相似，存在可逆阵P，使得$P^{-1}AP=B$，矩阵B的特征值λ对应的特征

向量为β，则A的特征值λ对应的特征向量为________________.

解析：如果方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相似,则存在可逆阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

矩阵B的特征值λ对应的特征向量为β，则有$B\beta=\lambda\beta$.

即$P^{-1}AP\beta=\lambda\beta$， $A(\mathrm{P}\beta)=\lambda(P\beta)$.

方法二，$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&-1\\0&3&1\end{pmatrix}$

令$\mathrm{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&-1\\0&3&1\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$；

又因为$|\boldsymbol{K}|\neq 0$，所以$\boldsymbol{R}(\mathrm{A})=\mathrm{R}(\mathrm{B})$.

又因为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则$\boldsymbol{R}(\mathrm{A})=\mathrm{R}(\mathrm{B})=3$.

所以向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是线性无关.

注释 本题知识点：

如果方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相似，则$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相似有相同的特征值.

答案：$P\beta$.

5. 若二次型$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=3\boldsymbol{x}_1^2+3\boldsymbol{x}_2{}^2+2\boldsymbol{x}_3{}^2+2\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2+4\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3$为正定二次型，那么$\boldsymbol{a}$的取值范围是 ______________________.

解析：二次型的表示矩阵为$\begin{pmatrix}3&a&0\\a&3&2\\0&2&2\end{pmatrix}$.

因为 $\Delta_1=|3|>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}3&a\\a&3\end{vmatrix}=9-a^2>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}3&a&0\\a&3&2\\0&2&2\end{vmatrix}>0$，则二次型为正定二次型。

注释 本题知识点：

（1） 如果方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相似，则$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相似有相同的特征值.

（2） 如果二次型表示矩阵的所有特征值都大于零，则二次型为正定二次型.

（3） 如果二次型的表示矩阵的各阶顺序主子式都严格大于零（$\Delta_i > 0$），则二次型为正定二次型。

（4） 如果二次型的表示矩阵的各阶顺序主子Δ_i**满足**$(-1)^i\Delta_i > 0$，则二次型为负定二次型。

答案： $a \in (-\sqrt{6},\sqrt{6})$.

二、 选择题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．设矩阵 A 为 n 阶方阵,则下列结论正确的是【　　　　　　】

(A) 若 $|A|=0$，则矩阵 A 的各行成比例；

(B) 若 $|A|=0$，则矩阵 A 中必有一行元素全为零；

(C) 若 $|A|=0$，则矩阵 A 的行向量组线性相关；

(D) 若 $|A|=0$，则矩阵 A 的行向量组线性无关.

解析： 若 $|A|=0$，则矩阵 A 的秩小于 n，A 的行向量组线性相关，必有一行能被其他行表示.

注释 本题知识点：

（1） 若 $|A|=0$，则矩阵 A 的秩小于 n .

（2） 若 $R(A)<n$，则矩阵 A 的行向量组线性相关.

（3）如果矩阵 A 的行向量组线性相关,则必有一行能被其他行表示。

答案： C

2. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，且 A 的列向量组线性无关，则【　　　　　　　】

(A) 方程组 $Ax=b$ 有无穷多解；　　**（B） 方程组 $Ax=b$ 有唯一解**；

(C) 方程组 $Ax=b$ 有无解；　　**(D) 以上结论都不对**.

解析：若A的列向量组线性无关，则矩阵$R(A)=n\le m$，

则$R(A)=n\le R(\mathrm{A}\vdots\mathrm{b})\le \mathrm{m}$.

注释　本题知识点：

（1）　若$R(A)<R(\mathrm{A}\vdots\mathrm{b})$，则非齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$无解.

（2）　若$R(A)=R(\mathrm{A}\vdots\mathrm{b})=n$，则非齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解.

（3）　若$R(A)=R(\mathrm{A}\vdots\mathrm{b})<n$，则非齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解.

（4）　若$R(A)=n$，则齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有唯一零解.

（5）　若$R(A)<n$，则齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有无穷多解（非零解）.

答案：D

3. 设$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ 5 & t & 8\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B$为3阶非零矩阵，且$AB=0$，则$t=$【　　　　　　】

(A)　8；　　　　(B)　-8；　　　　(C)　6；　　　　(D)　-6.

解析：若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则矩阵$R(A)+\mathrm{R(B)}\le 3$.

又因$\boldsymbol{B}$为3阶非零矩阵. 则$\mathrm{R(B)}\ge 1$，即$R(A)\le 3-\mathrm{R(B)}\le 2$.

则$|A|=0$，可得$t=-8$.

注释　本题知识点：

（1）　若$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{0}$，则矩阵$R(A)+\mathrm{R(B)}\le n$.

答案：B

4．设A为n阶方阵，$A\ne E$，且$R(A+3E)+R(A-E)=n$，则A必有一个特征值【　　　】

(A)　$\lambda=1$；　　　(B)　$\lambda=-3$；　　　(C)　$\lambda=3$；　　　(D)　$\lambda=\frac{1}{3}$.

解析：若$\boldsymbol{A}\ne\boldsymbol{E}$，则矩阵$R(A-E)\ge 1$.

又因为$\boldsymbol{R(A+3E)+R(A-E)=n}$. 则$\boldsymbol{R(A+3E)\le n-1}$，

即$\left|A+3E\right|=0$.

则矩阵A的特征值为-3.

注释　本题知识点：

（1）　若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\lambda x}\ (\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$，则$\lambda$是矩阵$A$的特征值，$x$是$\lambda$对应的特征向量.

（2）　若$\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda E}\right|=\boldsymbol{0}$，则$\lambda$是矩阵$A$的特征值.

（3）　若$\lambda\,(\lambda\neq 0)$是矩阵A的特征值，则$\dfrac{1}{\lambda}$是矩阵A^{-1}的特征值

答案：B

5. 矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$ 相似，则【　　　　　　】

(A)　$a=2,b=4$ **;**　　　　**(B)**　$a=-2$，　b=4 **;**

(C)　$a=4,b=-2$ **;**　　　　**(D)**　a=4，　b=2 .

解析：　若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，则$|A|=|B|, tr(\mathrm{A})=\mathrm{tr(B)}$.

即$\begin{aligned}&|A|=8a+6b+4=24,\\&a+6=10.\end{aligned}$.

则$a=4,b=-2$.

注释　本题知识点：

（1）　若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，则$|A|=|B|, tr(\mathrm{A})=\mathrm{tr(B)}$.

（2）　若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征值.

答案：C

三、（本题满分 14 分）计算下列各题

1.　设A是 3 阶方阵，A的特征值分别为$1,2,3$，求行列式$\left|(\frac{1}{2}A)^{-1}-2A^2\right|$的值。

解：因为$\boldsymbol{A}$的特征值分别为$\boldsymbol{1,2,3}$，

则矩阵 $(\frac{1}{2}A)^{-1}-2A^2$ 的特征值分别为 $\frac{2}{\lambda}-2\lambda^2$，即 0，-7，$-\frac{52}{3}$。

因此 $\left|(\frac{1}{2}A)^{-1}-2A^2\right|=0$。

注释：本题知识点：

（1）方阵特征值性质

2. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

解：解法一 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_2+2c_1}{\underset{\substack{\cdots \\ c_n+2c_{n-1}}}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} & 2+2^n \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\overset{r_1+2r_2}{\underset{\substack{\cdots \\ r_1+2^{n-1}r_n}}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 2+2^2+\cdots+2^n \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(2+2^2+\cdots+2^n)\times(-1)^{n+1}\times(-1)^{n-1}=2^{n+1}-2$$

解法二：数学归纳法

按第一行展开有 $D_n=2D_{n-1}+2=2^{n+1}-2$

注释：本题知识点：

（1） **行列式的性质及三角化法**

（2） **行列式按行展开，数学归纳法**

四、（本题满分 10 分）设 4 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$**，又** $(E+A)B=E-A$ **，求**

$E+B$，

解：因$(E+A)B=E-A$，则有$B=(E+A)^{-1}(E-A)$

又因为$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$，**则**$(E+A)^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&&&\\1/4&1/4&&\\1/6&1/6&1/6&\\1/8&1/8&1/8&1/8\end{pmatrix}$

所以

$$B=\begin{pmatrix}1/2&&&\\1/4&1/4&&\\1/6&1/6&1/6&\\1/8&1/8&1/8&1/8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&-2&0&0\\0&4&4&0\\0&0&6&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1/2&-1/2&0&0\\1/3&1/3&2/3&0\\1/4&1/4&5/4&-3/4\end{pmatrix}$$

即$E+B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1/2&1/2&0&0\\1/3&1/3&5/3&0\\1/4&1/4&5/4&1/4\end{pmatrix}$

注释：本题知识点：

（1） 方阵逆矩阵计算

（2） 矩阵方程

五、（本题满分 6 分）

设向量组A：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，

（1）求向量组A的秩；

（2）求向量组A的一个极大线性无关组；

解：$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&-1\\4&1&4&1\\2&0&3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&-1\\0&1&-4&-5/3\\0&0&-1&-1/3\end{pmatrix}$

（1）因为向量组A的秩为 3；

（2）**向量组A的一个极大线性无关组**$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。

注释：本题知识点：

（1） 向量组的秩

（2） 最大线性无关组

六、（本题满分 10 分）

已知三阶方阵 A 的特征值 1，2，3 对应的特征向量分别为 α_1， α_2， α_3。其中：

$\alpha_1=(1,1,1)^T$， $\alpha_2=(1,2,4)^T$， $\alpha_3=(1,3,9)^T$， $\beta=(1,1,3)^T$ 。

（1）将向量 β 用 α_1， α_2， α_3 线性表示；

（2）求 $A^n\beta$， n 为自然数。

解：(1) 把 β 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，即求解方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix}\underset{\sim}{r}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{r}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

故 $\beta=2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$ 。

(2) $A^n\beta=A^n(2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=2A^n\alpha_1-2A^n\alpha_2+A^n\alpha_3$

$$=2\lambda_1{}^n\alpha_1-2\lambda_2{}^n\alpha_2+\lambda_3{}^n\alpha_3=2\alpha_1-2^{n+1}\alpha_2+3^n\alpha_3=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}...$$

注释：本题知识点：

(1) 向量组限行表示，求方程组通解

(2) 特征值性质

七、（本题满分 12 分）

当 a,b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=1\\-x_2+(\mathrm{a}-3)x_3-2x_4=b\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$

有唯一解？无解？有无穷多组解?并求出有无穷多组解时的通解。

解： $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{pmatrix}$

（1）当 $a=1,b\neq-1$ 时，方程组无解；

（2）因为 $a\neq1,$，方程组有唯一解；

（3）当 $a=1,b=-1$ 时，方程组有无穷多解，

$$A\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

且通解为 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}x=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

注释：本题知识点：

（1） 若 $R(A)<R(A\vdots b)$，则非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 无解.

（2） 若 $R(A)=R(A\vdots b)=n$，则非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有唯一解.

（3） 若 $R(A)=R(A\vdots b)<n$，则非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有无穷多解.

（4） 若 $R(A)=n$，则齐次方程组 $\boldsymbol{Ax=0}$ 有唯一零解.

（5） 若 $R(A)<n$，则齐次方程组 $\boldsymbol{Ax=0}$ 有无穷多解（非零解）.

八、（本题满分 12 分）试求一正交变换 $x=Py$，将二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2$-$4x_1x_2$ +$2x_1x_3$+$2x_2x_3$ 化为标准型，并写出标准型。

解答： 二次型所对应的实对称矩阵为 $\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$，

A 的特征多项式为:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 1\\ -2 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & \lambda-3 & 1\\ -2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 2\\ -2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}==-\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)=0$$

得 A 的三个特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-3,\lambda_3=3$；

对于 $\lambda_1=0$，所对应的齐次线性方程 $Ax=0$，求得它的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \text{再单位化}\, e_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_2=-3$，所对应的齐次线性方程 $(A+3E)x=0$，求得它的一个基础解系为

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \text{再单位化}\, e_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{2\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_3=3$，所对应的齐次线性方程 $(A-3E)x=0$，求得它的一个基础解系为

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \text{再单位化}\, e_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix}.$$

正交矩阵为：$P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

所以正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

得二次型标准型 $f=3y_1^2-3y_2^2$.

注释：本题知识点：

(1) 化二次型为标准型.

九、（本题满分 6 分）设 n 阶矩阵 $A_{n\times n}$ 的每列元素之和均为 2.

（1）证明：2 是矩阵 A 的特征值；

（2） 设 $x_0=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$ 为齐次方程组 $Ax=0$ 的非零解向量，证明：

$c_1+c_2+\cdots+c_n=0$。

证明：（1）因为矩阵 $A_{n\times n}$ 的每列元素之和均为 2，则有

$$A^T(1,1,\cdots,1)^T=2(1,1,\cdots,1)^T,$$

所以 2 是矩阵 A^T 的特征值，即 2 是矩阵 A 的特征值。

(2) 因为 $Ax_0=0$，即

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=0, \\ \cdots \\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nn}c_n=0, \end{cases}$$

N 个等式相加，可得

$$2c_1+2c_2+\cdots+2c_n=0$$

即 $c_1+c_2+\cdots+c_n=0$。

注释：本题知识点：

（1） 特征值、特征向量.

（2） 其次方程组解的结构.