《线性代数》期末练习题 （四）解答

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，若 $AB=E$，则 $rank\ A+rank\ B=$ __$2m$____.

2．已知 η_1,η_2,η_3 是四元线性方程组 $Ax=b$ 的三个解，$rank\ A=3,\eta_1=(1,2,3,4)^T,\eta_2+\eta_3=(4,4,4,4)^T$，则方程组 $Ax=b$ 的通解为_$(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+k(1,0,-1,-2)^{\mathrm{T}},k\in\mathbb{R}$_____.

3．若 n 阶矩阵 A 有一个特征值 2，则 $|2E-A|=$____0___.

4．若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是_____ $-\dfrac{4}{5}<t<0$__.

5．设 A 为四阶实对称矩阵，且 $A^2+4A=0,rank\ A=3,$ 则二次型 $f=x^TAx$ 在正交变换下的标准形为_ $-4y_1^2-4y_2^2-4y_3^2$_______.

6．设向量组 $a_1=(1,1,1)^T,a_2=(1,2,3)^T,a_3=(1,3,t-2)^T$ 的秩为 2，则 $t=$____7___.

二、单选题（每小题 3 分，共 18 分）

1．若齐次方程组 $\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=0,\\x_1+kx_2-x_3=0,\\2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$ 仅有零解，则（ C）

(A) $k=4$ 或 $k=-1$； (B) $k=-4$ 或 $k=1$；

(C) $k\neq 4$ 且 $k\neq -1$； (D) $k\neq -4$ 且 $k\neq 1$

2. 向量组 $a_1,a_2,\dots,a_s(s\geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是（ D ）

(A) $a_1,a_2,\dots,a_s$ 都不是零向量；

(B) 任意两个向量的分量不成比例；

(C) 至少有一个向量不可由其余向量线性表示；

(D) 向量组中每一个向量均不能由其余向量线性表示.

3. 设 A,B 均为 n 阶方阵，下列命题中成立的是（ D ）

(A) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$；

(B) $(AB)^T=A^TB^T$；

(C) 设 $AB=0$，则 $A=0$ 或 $B=0$;

(D)若$|A+AB|=0$，则$|A|=0$或$|E+B|=0$.

4. 设A为n阶矩阵，且$A^2+A-5E=0$,则$A+2E$的逆矩阵为（　C　）

(A) $A-E$　;　　(B) $A+E$；

(C) $\frac{1}{3}(A-E)$；　　(D) $\frac{1}{3}(A+E)$.

5. 设A为$m\times n$矩阵，则（　B　）

(A)若$m<n$，则$Ax=b$有无穷多解；

(B)若A有n阶子式不为零，则$Ax=0$仅有零解；

(C)若A有n阶子式不为零，则$Ax=b$有唯一解；

(D)若$m<n$，则$Ax=0$有非零解，且基础解系含有$n-m$个线性无关解向量.

6. 设n阶矩阵A,B有相同特征值，且各有n个线性无关的特征向量，则（　A　）

(A) A与B相似；

(B) $A\neq B$，但$|A-B|=0$；

(C) $A=B$；

(D) A与B不一定相似，但$|A|=|B|$.

三、（10分）计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}, x_i\neq a_i, i=1,2,\cdots,n.$$

解：$$D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-a_1} & \frac{a_2}{x_2-a_2} & \frac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)$$

四、（10 分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 且 $A^*BA=2BA-8E, A^*$ 为 A 的伴随矩阵，求矩阵 B .

解：将 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}$ 、右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ ，得

$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{AB}-8\boldsymbol{E}$,

故 $\left(2\boldsymbol{A}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{B}=8\boldsymbol{E}$. 于是

$$\boldsymbol{B}=8(2\boldsymbol{A}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

五、（10 分）已知向量空间 R^3 的基 a_1,a_2,a_3 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 C ，且

$$a_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, a_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, a_3=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 2 & -2\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix},$$

试求出在基 a_1,a_2,a_3 与 β_1,β_2,β_3 下有相同坐标的全体向量.

解：设 $\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3\right], \boldsymbol{B}=\left[\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_3\right]$ ，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$. 设所求向量在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right)^{\mathrm{T}}$ ，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{ACx}$ ，即 $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=0$.

由 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，得 $\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=0$ ，解得

$\boldsymbol{x}=k(1,-1,1)^{\mathrm{T}}, k$ 为任意数，

故所求向量 $\boldsymbol{\alpha}=k\left(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\right)=k(2,1,3)^{\mathrm{T}}, k$ 为任意数 .

六、（10 分）设 A 为 n 阶方阵， n 维列向量组 $a_1,a_2,...,a_s$ ， $\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 线性无关，且 $a_1,a_2,...,a_s$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系. 证明 $A\beta_1,A\beta_2,...,A\beta_t$ 线性无关.

证：设有常数 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 使得

$k_1\boldsymbol{A\beta}_1+k_2\boldsymbol{A\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{A\beta}_t=0,$

令 $\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t$ ，则 $\boldsymbol{A\gamma}=0$ ，

若 $\gamma\neq 0$, 则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系知 γ 可由 α_1 , $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示，

从而存在一组不全为零的常数$l_1,l_2,\cdots,l_s$，使得$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s$，这与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关矛盾，于是$\boldsymbol{\gamma}=0$．再由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关知$k_1=k_2=\cdots=k_t=0$，这证明了$\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_t$线性无关．

七、（12 分）设A为n阶矩阵，证明$A^2=A$当且仅当$rank\ A+rank\ (A-E)=n$.

证：充分性．由$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)=n$可得

$$\left(n-\mathrm{rank}\boldsymbol{A}\right)+\left(n-\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)\right)=n,$$

即方程组$\boldsymbol{Ax}=0$与$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=0$两个解空间的维数之和为$n$，故$\boldsymbol{A}$有$n$个分别属于特征值0，1 的线性无关的特征向量，于是存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & 0_{n-r}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\quad r=\mathrm{rank}\boldsymbol{A},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & 0_{n-r}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{A}\ .$$

必要性．因为$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，所以$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)=0$，于是

$$n=\mathrm{rank}\boldsymbol{E}\le\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)\le n,$$

故$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)=n$．

八、（12 分）已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+(a+2)x_2+(a+1)x_3=a+3, \\ x_1+2x_2+ax_3=3 \end{cases}$$

有无穷多解，且$a_1=(1,a,0)^T,a_2=(-a,1,0)^T,a_3=(0,0,a)^T$是矩阵$A$的属于特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$的特征向量，求$A$.

解：因为

$$\begin{cases} x_1'+\quad x_2+\quad x_3=1, \\ 2x_1+(a+2)x_2+(a+1)x_3=a+3, \\ x_1+\quad 2x_2+\quad ax_3=3 \end{cases}$$

有无穷多解，所以系数行列式 $(a-1)^2=0$，即 $a=1$．因此，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值

$\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$ 的特征向量分别为

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$