2021-2022(秋) 《线性代数 》 第一次阶段考试试题参考答案

一、单选题（本题满分 30 分，共有 10 道小题，每道小题 3 分）

1、（A）．　2、（D）．　3、（C）．　4、（A）．　5、（C）．
6、（A）．　7、（A）．　8、（B）．　9、（B）．10、（D）．

二、选择题（本题满分 20 分，共有 5 道小题，每道小题 4 分）

11、（B）．12、（D）．13、（C）．14、（C）．15、（B）．

三、（满分 10 分）求三次多项式 $p(x)$ 满足： $p(0)=0$，$p(1)=-1$，$p(2)=4$， $p(-1)=1$． 解：设 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，由已知条件，有

$$\begin{aligned}
&p(0)=d=0;\\
&p(1)=a+b+c=-1;\\
&p(2)=8a+4b+2c=4;\\
&p(-1)=-a+b-c=1.
\end{aligned}$$

解三元线性方程组 $\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 8a+4b+2c=4 \\ -a+b-c=1 \end{cases}$

由 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=12\neq 0$，知有唯一解．

且有 $a=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{12}{12}=1,\quad b=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{0}{12}=0,\quad c=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{-24}{12}=-2$．

因此， $p(x)=x^3-2x$．

四、（满分 10 分）计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}.$$

解：

$$D_n \overset{增}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix} \overset{散}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{聚}}{=\!=}\begin{vmatrix} 1+\sum_{k=1}^{n}a_k^2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+\sum_{k=1}^{n}a_k^2 .$$

五、（满分 10 分） 已知$\alpha=(1,2,1)^T,\beta=(2,-1,2)^T,A=\alpha\beta^T$，求$(A+I)^{2020}$.

解：$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(2,-1,2)=\begin{pmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{pmatrix}$， $\beta^T\alpha=(2,-1,2)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$，

因此，$A^k=\underbrace{\alpha\beta^T\alpha\beta^T\ldots\alpha\beta^T\alpha\beta^T}_{k-1}=2^{k-1}A$，

$$(A+I)^{2020}=\sum_{k=0}^{2020}C_n^kA \ =I+\sum_{k=1}^{2020}C_n^k2^{k-1}$$
$$=\frac{3^{2020}-1}{2}A+I.$$

另：利用数学归纳法：

$$(A+I)^1=\frac{3^1-1}{2}\alpha\beta^T+I$$

$$(A+I)^2=(\alpha\beta^T+I)^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T+2\alpha\beta^T+I=\frac{3^2-1}{2}\alpha\beta^T+I$$

$$(A+I)^3=(A+I)^2(A+I)=\frac{3^3-1}{2}\alpha\beta^T+I$$

$\cdots\ \cdots$

$$(A+I)^{2020}=\sum_{k=0}^{2020}C_{202}^k\ A^k=I-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2020}C^{2020}2^kA=\frac{3^{2020}-1}{2}A+I\ .$$

注：阅卷老师，没有必要像中学那样严谨的书写.

答案写作$(A+I)^{2020}=\dfrac{3^{2020}-1}{2}A+I=\dfrac{3^{2020}-1}{2}\begin{pmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；

或$(A+I)^{2020}=\begin{pmatrix}3^{2020}&\dfrac{1-3^{2020}}{2}&3^{2020}-1\\2(3^{2020}-1)&2-3^{2020}&2(3^{2020}-1)\\3^{2020}-1&\dfrac{1-3^{2020}}{2}&3^{2020}\end{pmatrix}$.

六、（满分 10 分）设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，求矩阵 Q，使得 $AQ=C$.

解：由题意，得 $AP_1=B$，其中 $P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；

$BP_2=C$，其中 $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，

因此，$AP_1P_2=BP_2=C$，即

$$Q=P_1P_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

七、（满分 10 分）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{C}^{2020}$.

解：由 $\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{B}$，得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}).$$

再由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 可逆，得

$$\boldsymbol{C}=-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}).$$

因此，
$$\boldsymbol{C}^{2020}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}^{2020}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$$
$$=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}.$$