中国农业大学

2020 ~2021 学年秋季学期（2021.01 ）

高等数学 A（上） 课程试题(A 卷)参考答案

一、单项选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cos n-n\sin\frac{1}{n}\right)=$ 【 D 】.

A．0　　B．不存在　　C．1　　D．-1

2. 设方程 $x=y^y\left(y>0\right)$ 确定 y 是 x 的函数，则 $dy=$【 B 】.

A．$\frac{1}{x\left(1+\ln y\right)}$　　B．$\frac{1}{x\left(1+\ln y\right)}dx$

C．$\frac{1-x}{x\ln y}$　　D．$\frac{1-x}{x\ln y}dx$

3. 设 $x\ln x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)dx=$【 D 】, 其中 C 为任意常数.

A．$\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}x^2+C$　　B．$\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

C．$\frac{3}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$　　D．$\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$

4. 曲线 $y=\frac{4}{3}\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}-1$ 介于 $0\le x\le 1$ 之间弧段的长度为【 C 】.

A．$\frac{52}{3}$　　B．$\frac{39}{8}$　　C．$\frac{13}{6}$　　D．$\frac{9}{4}$

5. 微分方程 $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$ 的通解为【 D 】，其中 C 为任意常数.

A．$y=\frac{1}{x}e^{Cx+1}$　　B．$y=\left(x+1\right)e^{Cx}$

C．$y=x^2e^{Cx}$　　D．$y=xe^{Cx+1}$

二、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设函数 $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n-1\right)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ $\underline{\quad\quad 0 \quad\quad}$.

2. 曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点为 $\underline{\left(0,0\right)}$.

3. $\int_{-1}^{1}\left(x^2+e^{\sin|x|}\tan x\right)dx=\underline{\dfrac{2}{3}}$.

4. 当 $x\to 0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小，则正整数 $n=$ $\underline{\quad 5 \quad}$.

5. 瑕积分 $\int_0^1 \ln x\,dx=$ $\underline{-1}$.

三、（本题满分 10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\arctan 2x}$.

解　　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{x^2}}{6x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{6x^2}=-\dfrac{1}{6}$.

四、（本题满分 10 分） 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解　由 $\dfrac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t,\quad \dfrac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t,$ 知

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}.$$

五、（本题满分 10 分） 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，M 和 m 分别为 $f(x)$ 在区间

$[x-a,x+a]$ 上的最大值和最小值，且 $g(x)=\dfrac{\int_{x-a}^{x+a}f(t)dt}{2a}$ （常数 $a>0$）.

证明：$|g(x)-f(x)|\le M-m$.

解　$|g(x)-f(x)|=\left|\dfrac{\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t}{2a}-f(x)\right|=\dfrac{\left|\int_{x-a}^{x+a}[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t\right|}{2a}$

$$\le\frac{\int_{x-a}^{x+a}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t}{2a}\le\frac{\int_{x-a}^{x+a}(M-m)\mathrm{d}t}{2a}=M-m.$$

或由积分中值定理得

$$|g(x)-f(x)|=|f(\xi)-f(x)|,\ \xi\in[x-a,x+a]$$

$$\le M-m.$$

六、（本题满分 10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

（1）证明：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$，

（2）计算 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$.

解　(1)令　$t=a+b-x$，则　$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x.$$

（2）用（1）的结果，取 $a=\dfrac{\pi}{6}$，$b=\dfrac{\pi}{3}$，有

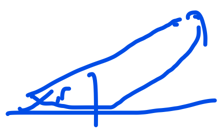
$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi-2x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{x}{\pi-2x}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\pi}\ln 2.$$

七、（本题满分 10 分） 设曲线 $y=ax^2\ (a>0,\ x\ge 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形，问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最大？最大体积是多少？

解　当 $x\ge 0$ 时，由 $\begin{cases} y=ax^2,\\ y=1-x^2\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$，$y=\dfrac{a}{1+a}$，



故直线 OA 的方程为 $y=\dfrac{ax}{\sqrt{1+a}}$，

该平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4\right)dx$$

$$=\pi\left(\frac{a^2}{3(1+a)}x^3-\frac{a^2}{5}x^5\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}$$

$$=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{dV}{da}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{2a(1+a)^{\frac{5}{2}}-a^2\cdot\frac{5}{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5}$$

$$=\frac{(4a-a^2)\pi}{15(1+a)^{\frac{7}{2}}}\qquad(a>0)$$

令 $\dfrac{dV}{da}=0$ ，并由 $a>0$ 得惟一驻点 $a=4$.

由题意知，此旋转体在 $a=4$ 时取最大值，其最大体积为 $V=\dfrac{2\pi}{15}\cdot\dfrac{16}{5^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{32\sqrt{5}}{1875}\pi.$

八、（本题满分 10 分）求微分方程 $y''-6y'+9y=e^x\sin x$ 的通解.

解　先求对应齐次方程的通解.

特征方程为 $\lambda^2-6\lambda+9=0$.

解得两个相等的实根 $\lambda=3$.

故对应齐次方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

再求非齐次方程的特解.

由于 $1\pm i$ 不是特征根，故设方程的特解为 $y^*=e^x(A\cos x+B\sin x)$

由于 $(y^*)'=e^x(A\cos x+B\sin x-A\sin x+B\cos x)$ 且 $(y^*)''=e^x(-2A\sin x+2B\cos x)$，

代入原方程后，有$\begin{cases}3A-4B=0,\\4A+3B=1.\end{cases}$

解得：$A=\dfrac{4}{25},B=\dfrac{3}{25}$.

从而得一特解：$y^*=e^x(\dfrac{4}{25}\cos x+\dfrac{3}{25}\sin x)$.

综上，原方程的通解为：$y=e^x(\dfrac{4}{25}\cos x+\dfrac{3}{25}\sin x)+(C_1+C_2x)e^{3x}$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

九、（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且满足 $f(a)=a,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$，试证：在$(a,b)$内至少有一点$\xi$，使得

$f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$.

证 由

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\quad\Rightarrow\int_a^b\left(f(x)-x\right)\mathrm{d}x=0$$

由积分中值定理，存在$\eta\in(a,b)$使得

$$\int_a^b\left(f(x)-x\right)\mathrm{d}x=\left(f(\eta)-\eta\right)(b-a)=0$$

于是 $f(\eta)-\eta=0\ (a<\eta<b)$

令$\varphi(x)=e^{-x}\left(f(x)-x\right)$，

则$\varphi(x)$在$[a,\eta]$上连续，在(a,η)内可导，且

$$\varphi(a)=\varphi(\eta)=0$$

应用罗尔中值定理知，存在$\xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$使得$\varphi'(\xi)=0$.

因$\varphi'(x)=e^{-x}\left(f'(x)-1-f(x)+x\right)$，

于是 $\varphi'(\xi)=e^{-\xi}\left(f'(\xi)-1-f(\xi)+\xi\right)=0$，

即 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1\quad\xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$.