1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1+x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{行和相等}]{c_1+(c_2+c_3+c_4)} x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[c_4+c_1]{c_2+c_1,\ c_3-c_1} x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 0 & & & x \\ 0 & & x & \\ 0 & x & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} = x^4.$ (A)

2. 若 $f(x) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ x & 2 & 5 \\ 1 & 4 & x \end{vmatrix}$，则其一次项系数为 4. (D)

$f(x) \xlongequal{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ x & 2 & 5 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ 对角线法则 $f(x) = \cdots + \underline{4x} + \cdots$

3. $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} 6x & -2y & -10z \\ -9 & 0 & 10 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 6\cdot(-2)\cdot 10 \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1.5 & 0 & -1 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \end{vmatrix}$

$= -30 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -30$ (D)

4. $\begin{vmatrix} 2x & x & -5 & 2 \\ 1 & x & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -x & 3 \\ -2 & 4 & 9 & -x \end{vmatrix} \xlongequal{r_1-r_2} \begin{vmatrix} 2x-1 & 0 & -7 & 5 \\ 1 & x & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -x & 3 \\ -2 & 4 & 9 & -x \end{vmatrix}$

x^3与x^4只能出现在主对角线上：$(2x-1)x(-x)(-x) = 2x^4 - x^3$

∴ x^4与x^3的系数分别为2和-1. (A)

5. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解，则λ应满足 $\underline{\lambda \neq -2, 1}$ (C.)

$R(A)=R(B)=3 \iff R(A)=3 \iff |A| \neq 0$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda+2 & \lambda+2, & \lambda+2 & 1+\lambda+\lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & * \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & * \\ 0 & \lambda-1 & 0 & * \\ 0 & 0 & \lambda-1 & * \end{pmatrix} \quad \lambda-1 \neq 0$$

$\lambda+2 \neq 0$

且

$\Rightarrow \lambda \neq -2, \lambda \neq 1$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & 9 & x^2 \\ 1 & 8 & 27 & x^3 \end{vmatrix} = (2-1)(3-2)(3-1)(x-3)(x-2)(x-1)$ 根之和为 $\underline{1+2+3}$

范德蒙行列式 (A.)

7. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 则 $2A_{11} + 3M_{12} + 2M_{13} - A_{14} = \underline{6}$ (A)

$= 2A_{11} - 3A_{12} + 2A_{13} - A_{14}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & -1 \\ \cancel{2} & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{3} & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 & -1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 6$$

8. $A = \begin{pmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ A_3 & & \end{pmatrix}$ 其中A_1, A_2, A_3分别为k_1, k_2, k_3阶方阵. 则 $|A| = \underline{B}$

$$|A| = (-1)^{k_3(k_1+k_2)} \begin{vmatrix} & & A_1 \\ A_2 & & \\ & & A_3 \end{vmatrix} = (-1)^{k_3k_1+k_3k_2+k_1k_2} \underbrace{\begin{vmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{vmatrix}}_{} = (-1)^{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3} |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3|$$

(从最后一列开始)

将A_3的列依次往后调

同理将A_2的列往后调

9. A^* 是 $n\times n$ 方阵 A 的伴随矩阵，则有（　　）(B)

(A) $A^*=|A|\cdot A^{-1}$　(B) $|A^*|=|A|^{n-1}$，(C) $(kA)^*=k^nA^*$，(D) $A^{**}=0$.

解：$AA^*=|A|E$（关键），　(A)错，因为 A^{-1} 不一定存在.

(B). 由 $|A|\cdot|A^*|=|A|^n$

$|A|\neq 0$　$|A^*|=|A|^{n-1}$

$|A|=0$，则 $AA^*=0$，若 $|A^*|\neq 0$，则 A^* 可逆

$\Rightarrow A=0$，此时 $A^*=0$，矛盾. 所以 $A^*=0$.

(B) ✓. $|A^*|=|A|^{n-1}$

(C) 由于 kA 的代数余子式为 A 的代数余子式的 k^{n-1} 倍（$n-1$ 阶行列式）.

$\therefore (kA)^*=k^{n-1}A^*$

(D) 显然错，A 可逆时 A^* 可逆，A^{**} 也可逆

实际上 若 $|A|\neq 0$ 时　$AA^*=|A|\cdot E$，$A^*A^{**}=|A^*|E=|A|^{n-1}E$

$\Rightarrow A^{**}=|A|^{n-2}A$.　此式当 $|A|=0$ 时，也成立（$n\geq 2$）

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{**}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

（$n=2$ 情形）

证明（摄动法）

若 $|A|=0$，取 ε 充分小的正数，使得 $A-\varepsilon E$ 可逆.

$(A-\varepsilon E)^{**}=|A-\varepsilon E|^{n-2}(A-\varepsilon E)$　左右两端每个元素都是 ε 的多项式

因此关于 ε 连续，令 $\varepsilon\to 0^+$，即得 $A^{**}=|A|^{n-2}A$.

10. $A\ B\ C$ n阶方阵, I单位阵 且 $ABC=I$, 则有

key: $XY=I$, X, Y n阶方阵 $\Rightarrow YX=I$ (X, Y互为逆, 可交换)

$A\underset{\sim}{BC}=I \Rightarrow BCA=I$ 选 (D)

$\Rightarrow CAB=I$

二. 11. ~~A~~ $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1)$ $|A|=2$

$B=(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2)$ $|B|=3=|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2|$

$|A+B|=|\alpha_1+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \beta_1+\beta_2|=?$

$=|\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3\ \beta_1+\beta_2|$ 将第1列拆成两列

$+|\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2\ \alpha_2+\alpha_3, \beta_1+\beta_2|$

$=|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\ \beta_1+\beta_2|$ 用第1列去减第2列, 第3列

$+|\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1+\beta_2|$

$=2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1+\beta_2|=2(2+3)=10$ (B)

12. n阶方阵A, $|A|=0$的必要条件是 ( )

必要条件: $|A|=0 \Rightarrow \therefore$

选 (D) $Ax=0$有至少两组解 ($|A|=0 \Leftrightarrow R(A)<n$)

13. A 为3阶方阵，$|A|=4$，A^* 为 A 的伴随阵 $|(A^*)^*-2A|=$

由9题的分析，$(A^*)^*=|A|^{n-2}A=4A$，$\therefore |A^{**}-2A|=|2A|$

$B^*=|B|\cdot B^{-1}$ $\quad\quad =8|A|=32$

或 $A^{**}=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}(|A|\cdot A^{-1})^{-1}$

$=|A|^{n-2}A.$ $\quad$ (C)

14. A, B, A+B, $A^{-1}+B^{-1}$ 均可逆 则

$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(A^{-1}(A+B)\cdot B^{-1})^{-1}$

$=B(A+B)^{-1}A$

验证 $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$

$=B^{-1}(A+B)A^{-1}$

$\Rightarrow (A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(B^{-1}(A+B)A^{-1})^{-1}$

$=A(A+B)^{-1}B$ 选 (C)

15. A, B n阶方阵，B是对换A的第一,三列所得矩阵，若 $|A|\neq|B|$，

则有.(　　) $|B|=-|A|\neq|A| \Rightarrow |A|\neq 0$ 选 (B)

$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\cdots|$ $\quad$ $|A+B|=|\alpha_1+\alpha_3, 2\alpha_2, \alpha_1+\alpha_3, \cdots|=0$

$|B|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\cdots|$ $\quad$ $|A-B|=|\alpha_1-\alpha_3\ \ 0\ \ \alpha_3-\alpha_1\cdots|=0$