2012-2013 学年春季学期《线性代数 》课程考试试题解析

一、　填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分，请将合适的答案填在每题的空中）

1．设 A 为 3 阶方阵，A 的第 2 行的元素分别为 $-2,3,1$，其对应的余子式为 $3,2,3$，则

$|A|=$ ___9___.

解析:

行列式等于某行元素与其对应的代数余子式乘积之和，所以 $|A|=-2\cdot(-3)+3\cdot2+1\cdot(-3)=9$

注释 本题知识点:

（1）$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$

答案：9

2.设 A 为 4 阶矩阵，A^* 为其伴随矩阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，则 $\left|(2A)^{-1}-3A^*\right|=$ ___2___.

解析：$\left|(2A)^{-1}-3A^*\right|=\left|\frac{1}{2}A^{-1}-3|A|A^{-1}\right|=\left|-A^{-1}\right|=(-1)^4\left|A^{-1}\right|=2$

注释 本题知识点：

（1） $AA^*=A^*A=|A|E;$

（2） $|\lambda A|=\lambda^n|A|.$

答案：2

3．设 α,β 是非齐次方程 $(\lambda E-A)x=b$ 的两个不同的解，则 A 对应于特征值 λ 的特征向量为 $\underline{\alpha-\beta}$

解析：A 对应于特征值 λ 的特征向量为满足 $(\lambda E-A)x=0$ 的解

注释　本题知识点:

1）. 非齐次线性方程组解的结构, 若 η_1，η_2 是 $Ax=b$ 的解, 则 η_1-η_2 是齐次方程 $Ax=0$ 的解

2）. 特征值与特征向量的定义: 若有实数 λ 以及非零向量 α，使得 $A\alpha=\lambda\alpha$ 即 $(A-\lambda E)\alpha=0$ 则

λ为矩阵A的特征值，非零向量α为矩阵A的特征向量

答案：$\alpha-\beta$

4. 已知矩阵$\alpha^T=(0,1,0,1)$.若矩阵$E+b\alpha\alpha^T$是矩阵$E+2\alpha\alpha^T$的逆矩阵（其中b是数），则$b=$______________ .

解析：若矩阵$E+b\alpha\alpha^T$是矩阵$E+2\alpha\alpha^T$的逆矩阵，则$(E+b\alpha\alpha^T)(E+2\alpha\alpha^T)=E$，由此可得，$E+b\alpha\alpha^T+2\alpha\alpha^T+2b\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=E$，因为$\alpha^T\alpha=2$，所以$5b\alpha\alpha^T+2\alpha\alpha^T=0$，$b=-\frac{2}{5}$

注释 本题知识点：

（1）逆矩阵定义，若矩阵 AB=E，则 B 为 A 的逆矩阵。

答案：$b=-\frac{2}{5}$

5. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&3\\0&3&a\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$相似，则$a=$ ____________.

解析：

矩阵 A，B 相似，故有相同的特征值，因此 1+1+a=1+3-3,可知 a=-1.

注释 本题知识点：

（1）矩阵 A，B 相似，故有相同的特征值

（2）矩阵特征值之和等于其主对角线元素的乘积

答案：-1

二、 选择题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 设n阶矩阵A与B等价,则下列结论不正确的是【 】

(A) 当$|A|=0$时,$|B|=0$； (B) A可以通过初等变换得到B；

(C) $R(A)=R(B)$； (D) A与B相似。

解析:

若矩阵 A 与 B 等价,则存在可逆矩阵 P,Q，使得 PAQ=B,因此$|B|=|P||A||Q|$,所以当$|A|=0$时,$|B|=0$ ，选项 A 正确。

A可以通过初等变换得到B, 则称矩阵 A 与 B 等价,选项 B 正确

若矩阵 A 与 B 等价，则 A，B 秩相同，选项 C 正确

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则存在可逆矩阵 P，$P^{-1}AP=B$，选项 D 不正确

注释 本题知识点：

(1) 矩阵 A，B 等价，则存在可逆矩阵 P，Q， 使得 PAQ=B

(2) 若矩阵 A 与 B 等价，则 A，B 秩相同，选项 C 正确

(3) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则存在可逆矩阵 P，$P^{-1}AP=B$

答案：C

2. 若向量组 α,β,γ 线性无关，α,β,δ 线性相关，则【　　　　】.

(A) α 必可由 β,γ,δ 线性表示； (B) β 必可由 α,γ,δ 线性表示；

(C) γ 必可由 α,β,δ 线性表示； (D) δ 必可由 α,β,γ 线性表示.

解析：

α,β,γ 线性无关，则 α,β 线性无关，又 α,β,δ 线性相关，则 δ 必可由 α,β,γ 线性表示，故选项 D 正确

注释 本题知识点：

(1)若向量组线性无关，则其任何一个部分组均线性无关

(2)若向量组 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ **线性无关，** $\alpha_1,\cdots\alpha_m$**，**β**线性相关，则**β**可由** $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ **线性表示**

答案：D

3. 设 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为 1，则必有【　　　　】.

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$； (B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$；

(C) $a\neq b$ 或 $a+2b\neq 0$； (D) $a\neq b$ 或 $a+2b=0$.

解析：

由于 $R(A^*)=1$，则在 A 中存在一个非零二阶子式，且 $|A|=0$，因此 R(A)=2；

$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} b & b & a \\ b & a & b \\ a & b & b \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} b & b & a \\ 0 & a-b & b-a \\ a-b & 0 & b-a \end{pmatrix}$，若 a=b，则 R(A)=1，不合题意，因此 $a\neq b$，

从而

$$\begin{pmatrix} b & b & a \\ 0 & a-b & b-a \\ a-b & 0 & b-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b & b & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ b & b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ b & b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & b & a+b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix},$$

R(A)=2,所以 $a+2b=0$

注释 本题知识点

(1) $AA^*=|A|E$

(2)伴随矩阵的定义

(3).矩阵秩的定义及求法

答案：D

4. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$， 则 $A^{-2013}=$【　　　　】.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^{2013}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^{2013}} \end{pmatrix}$；　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2013} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2013} \end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$；　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^{2013}} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2013} \end{pmatrix}$.

解析：

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & & & \\ & {\lambda_2}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & {\lambda_n}^k \end{pmatrix}$ 选项 B 正确

注释 本题知识点：

（1） 对角矩阵高次幂的求法

答案： B

5．设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵，则如下结论正确的是【　　　　】.

(A) A 与 B 等价，则 A 与 B 相似；　　　(B) A 与 B 相似，则 A 与 B 合同；

(C) A 与 B 合同，则 A 与 B 相似；　　　(D) A 与 B 等价，则 A 与 B 合同.

解析：

A,B 都是 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则存在正交矩阵 P，$\boldsymbol{P^{-1}AP=B}$，从而有 $\boldsymbol{P^{T}AP=B}$，

即 A，B 合同。选项 B 正确

注释 本题知识点：

(1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则存在可逆矩阵 P，Q，使得 PAQ=B

(2)A 与 B 合同，则存在可逆矩阵 C,使得 $\boldsymbol{C^{T}AC=B}$

(3)A 与 B 相似，则存在可逆矩阵 P，使得 $\boldsymbol{P^{-1}AP=B}$

答案 ：B

三、（本题满分 12 分）计算如下矩阵的行列式

（1）$\mathrm{D}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$，　　　(2) $\mathrm{D}_{n\times n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{x} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{x}\end{vmatrix}$..

解析：（1）

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -7 & -7 & -5\\ 0 & -3 & -2 & -4\\ 0 & 2 & 1 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-7 & -7 & -5\\ -3 & -2 & -4\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & -7 & 16\\ 1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}7 & 16\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2;$$

$$（2）|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{x} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{x}\end{vmatrix}\xlongequal[\boldsymbol{i=2,3,\cdots,n}]{\boldsymbol{r_1+r_i},}\begin{vmatrix}\boldsymbol{x+(n-1)a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x+(n-1)a} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x+(n-1)a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{x} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{x+(n-1)a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x+(n-1)a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{x}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[k=2,3,\cdots,n]{C_k-C_1,}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\1 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0\\1 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\1 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0\\1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

注释 本题知识点：

（1）利用行列式的性质及展开定理计算行列式

（2）行和或列和相等的行列式的计算

四、（本题满分 10 分）设n阶方阵A 和B，满足$A-B=AB$.

证明：1. $E-B$可逆； 2. 若$B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\3 & 4 & 4\end{pmatrix}$，求$A$.

解析：

1. 证明：因为$A-B=AB$，则有 $(A+E)(E-B)=E$；

又因 $|(A+E)(E-B)|=|A+E|\times|E-B|=1\neq 0$，

所以$E-B$可逆；

2. 由（1）知，$A+E=(E-B)^{-1}$，则有

$A=(E-B)^{-1}-E$；

且$B-E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 2 & 1\\3 & 4 & 3\end{pmatrix}$，

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0\\0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2\\0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5\\0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2\\0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

则

$$(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

所以

$$A=-(B-E)^{-1}-E=-\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ -3/2 & -2 & 5/2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

注释 本题知识点:

（1）矩阵可逆的定义

（2）初等变换求逆矩阵的方法

五、(本题满分 16 分）

1．设向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$

（1）求向量组 A 的秩;

（2）求向量组 A 的极大线性无关组;

（2）用极大线性无关组表示其余向量.

解析:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -5 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -5 & -1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1\end{pmatrix}\sim\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1/2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1/2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1\end{pmatrix}$$

（1） $R(A)=3;$

（2）极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

（3）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\alpha_4=1/2\alpha_1-1/2\,\alpha_2+1/2\,\alpha_3$;

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ $\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$.

2. 求方程组$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11\\-3x_1+x_2-4x_3+2x_4=-5\\-x_1-9x_2-4x_4=17\end{cases}$的通解，

求同时满足上述方程组和方程$5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1$的全部解.

解：同时满足两个条件的解即为方程组$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11\\-3x_1+x_2-4x_3+2x_4=-5\\-x_1-9x_2-4x_4=17\\5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1\end{cases}$的解. 对方程的增广

矩阵做行初等变换得

$$(Ab)=\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\-3&1&-4&2&-5\\-1&-9&0&-4&17\\5&3&6&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&-14&2&-7&28\\0&-14&2&-7&28\\0&28&-4&14&-56\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&1&-1/7&1/2&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&9/7&-1/2&1\\0&1&-1/7&1/2&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由上，$R(Ab)=R(A)=2,$ 方程组有无穷多解，且两个方程组同解

方程组的通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-9/7\\1/7\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$, $c_1,c_2\in R$.

或$\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-9\\1\\7\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-4\\0\\\frac{7}{2}\\1\end{bmatrix}$。

注释 本题知识点:

（1）向量组秩的求法

（2）最大无关组的定义

（3）向量用最大无关组表示,即解方程组线性方程组的求解

（4）非齐次线性方程组的求解

六、（本题满分 6 分）设$\mathbf{0}$是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&a\end{pmatrix}$的特征值，求$\boldsymbol{a}$及$\boldsymbol{A}$的特征值。

解析： 因为 0 是矩阵 A 的特征值，则有 $|A|=0;$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&a\end{vmatrix}=a+18+18-9-9-4a=-3a+18=0 \text{ 可得 } 3a=18 \quad \Rightarrow a=6;$$

对应特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-1-\lambda&\lambda+1&0\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-3\\0&\lambda+1&0\\-6&-3&\lambda-6\end{vmatrix}=(1+\lambda)(\lambda^2-9\lambda)=0;$$

所以 $\lambda_1=0; \quad \lambda_2=-1; \lambda_3=9.$

注释 本题知识点:

（1） 矩阵特征值的定义

（2） 通过特征方程求特征值

七、（本题满分 12 分） 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+2x_2{}^2+kx_3{}^2+4x_2x_3$,

1. 求k为何值时，此二次型为正定二次型；

2. 当$k=2$时，求一正交变换$x=Py$，将此二次型化为标准型；

3. 写出正交变换和标准型。

解析：

二次型对应的对称矩阵为 $$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&k\end{pmatrix};$$

1. $\Delta_1=|1|>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}>0,\Delta_3=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&k\end{vmatrix}=2k-4>0;$

   可得 $k>2;$

2. 当 $k=2$ 时， $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix};$

   对应的特征多项式为

   $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-2&-2\\0&-2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda)=0;$$

   特征值为 $\lambda_1=0;\quad \lambda_2=1,\lambda_3=4.$

当 $\lambda_1=0$ 时，对应的特征向量为方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 解得

$x_1=\begin{pmatrix}0&-1&1\end{pmatrix}^T$, 单位化得 $e_1=\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}^T;$

当 $\lambda_1=1$ 时，对应的特征向量为方程组 $(A-E)x=0$ 的基础解系, 解得

$x_2=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}^T$, 单位化得 $e_2=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}^T;$

当 $\lambda_1=4$ 时，对应的特征向量为方程组 $(A-4E)x=0$ 的基础解系, 解得

$x_3=\begin{pmatrix}0&1&1\end{pmatrix}^T$, 单位化得 $e_3=\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}^T;$

因此，正交变换为 $x=Py=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}y$, 标准型为

$f(x_1,x_2,x_3)=y_2^{\,2}+4y_3^{\,2}.$

3. 正交变换为$\begin{cases} x_1 = y_2 \\ x_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} y_3 \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} y_3 \end{cases}$.

注释 本题知识点:

（1）二次型的矩阵

（2）矩阵正定的充分必要条件

（3）通过正交变换将二次型标准化

八、（本题满分 14 分）

1.（8 分）设n阶矩阵A 的非零互异特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，对应的特征向量为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$，又有齐次线性方程组 $Ax=0$的一个基础解系为$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_m$，试问：当$1\le m\le s$时，向量组$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_m,\zeta_1+\eta_1,\zeta_2+\eta_2,\cdots,\zeta_m+\eta_m$是否线性无关，证明你的结论.

解析： 向量组线性无关。

证明：不妨假设存在$k_1,k_2,\cdots,k_m,x_1,x_2,\cdots,x_m$，使得

$$k_1\zeta_1+k_2\zeta_2+\cdots+k_m\zeta_m+x_1(\zeta_1+\eta_1)+x_2(\zeta_2+\eta_2)+\cdots+x_m(\zeta_m+\eta_m)=0,$$

即

$$(k_1+x_1)\zeta_1+(k_2+x_2)\zeta_2+\cdots+(k_m+x_m)\zeta_m+x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_m\eta_m=0,$$

又因$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_m,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$是矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量，因此线性无关，

所以有 $k_1+x_1=k_2+x_2=\cdots=k_m+x_m=x_1=x_2=\cdots=x_m=0,$

即$k_1=k_2=\cdots=k_m=x_1=x_2=\cdots=x_m=0,$

因此向量组$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_m,\zeta_1+\eta_1,\zeta_2+\eta_2,\cdots,\zeta_m+\eta_m$是否线性无关。

注释 本题知识点:

（1）属于不同特征值的特征向量线性无关

（2）向量组线性无关的定义

2. （6 分）设 α,β 是两个 n 维列向量，$\alpha^T\beta\neq 0$，矩阵 $C=\alpha\beta^T$，其中 $Q=(q_1,q_2,\cdots,q_{n-1},\beta)$ 是 n 阶正交矩阵，$P=(q_1,q_2,\cdots,q_{n-1},\alpha)$ 是 n 阶矩阵，

证明（1）n 维列向量 $q_1,q_2,\cdots,q_{n-1}$ 是矩阵 C 的特征向量；

（2）P 是可逆矩阵.

证明：（1）因为 $Q=(q_1,q_2,\cdots,q_{n-1},\beta)$ 是正交矩阵，所以 β **与** $q_1,q_2,\cdots,q_{n-1}$ **分别正交，**

即 $(\beta, q_i)=\beta^Tq_i=0, i=1,\cdots,n-1.$

由上可得 $Cq_i=\alpha\beta^Tq_i=0=0\times q_i$，$i=1,\cdots,n-1.$

所以向量 $q_1,q_2,\cdots,q_{n-1}$ 是矩阵 C 的特征向量

注释 本题知识点：

（1）正交矩阵的定义

（2）特征值与特征向量的定义

（2）不妨假设存在 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k_1q_1+k_2q_2+\cdots+k_{n-1}q_{n-1}+k_n\alpha=0$

方程两端同时左乘 β^T 可得，$k_n\beta^T\alpha=0$，可得 $k_n=0;$

即有 $k_1q_1+k_2q_2+\cdots+k_{n-1}q_{n-1}=0$

因为 $Q=(q_1,q_2,\cdots,q_{n-1},\beta)$ 是正交矩阵，所以 $q_1,q_2,\cdots,q_{n-1}$ **线性无关，**

可得 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，

向量组 $q_1,q_2,\cdots,q_{n-1},\alpha$ **线性无关，即** $R(P)=n$，所以 P 是可逆矩阵.

注释 本题知识点：

（1）矩阵可逆的充分必要条件

（2）正交的非零向量组线性无关