

中国农业大学

2022~2023 学年春季学期 (2023.06)

高等数学 A (下) 课程考试试题

(本试卷共八道大题, 考试时间 100 分钟)

一、单项选择题 (本题共有 5 道小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1、设有二元函数 $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$, 则函数在 $(0, 0)$ 点处 ().

- (A) 不连续 (B) 连续但偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 不存在
(C) 连续且偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在, 但不可微 (D) 可微

2、函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 1)$ 沿 $l = \{-1, -1\}$ 方向的方向导数为 ().

- (A) 最大 (B) 最小 (C) 0 (D) 1

3、 L 为 $y = x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的一段弧, 则曲线积分 $I = \int_L \sqrt{y} \, ds = ()$.

- (A) $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2} \, dx$ (B) $\int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1+y} \, dy$ (C) $\int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} \, dx$ (D) $\int_0^1 \sqrt{y} \sqrt{1+\frac{1}{y}} \, dy$

4、设有平面区域 $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$,

则 $\iint_D (\sin x \sin y + x^2 y) \, dx dy = ()$.

- (A) $2 \iint_{D_1} x^2 y \, dx dy$ (B) $\iint_{D_1} \sin x \sin y \, dx dy$ (C) $4 \iint_{D_1} (\sin x \sin y + x^2 y) \, dx dy$ (D) 0

5、 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有任意阶导数是函数 $f(x)$ 能展成关于 x 的幂级数的 ().

- (A) 充分但不必要条件 (B) 必要但不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

二、填空题 (本题共有 5 道小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1、若向量 α, β 的模分别为 $|\alpha| = 2, |\beta| = 2\sqrt{3}$, $\alpha + \beta$ 的模为 $|\alpha + \beta| = 2$, 则 α, β 的夹角为_____.

考生诚信承诺

1. 本人清楚学校关于考试管理、考场规则、考试作弊处理的规定,并严格遵照执行.
2. 本人承诺在考试过程中没有作弊行为,所做试卷的内容真实可信.

学院: _____ 班级: _____ 学号: _____ 姓名: _____

2、曲面 $z = y + \ln \frac{x}{z}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程是_____.

3、把积分 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$ 表示为极坐标系下先对 ρ 积分的二次积分为_____.

4、设 $f(x,y)$ 为连续函数, $f(x,y) = x \iint_{\Sigma} f(x,y) dS + y^2$, 其中 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

则 $f(x,y) =$ _____.

5、已知 $f(x) = x + 1, x \in [0,1)$, $S(x)$ 是以 1 为周期的函数 $f(x)$ 傅里叶级数的和函数, 则

$S(0) =$ _____.

三、(本题满分 10 分) 求过点 $M(1,1,1)$ 且与直线

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1}, \quad l_2: \begin{cases} 2x-y-5=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \text{ 都垂直的直线方程.}$$

四、(本题满分 10 分) 设 $z = f(xy, \frac{x}{y})$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

五、(本题满分 12 分) 形状为椭球 $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 16$ 的空间探测器进入地球大气层,其表面开始受热,1 小时后在探测器的点 (x,y,z) 处的温度 $T = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$, 求探测器表面最热的点.

六、(本题满分 12 分) 计算曲线积分 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是以点 $C(1,0)$ 为中心, 以 R 为半径的圆周 ($R \neq 1$), 取逆时针方向.

七、(本题满分 12 分) 设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$ 的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy.$$

八、(本题满分 14 分)

- 1、判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 的收敛性;
- 2、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 的和.