2013~2014（秋）《线性代数》期末考试试题解析

一．填空题（本题满分 15 分，共 5 道小题，每道小题 3 分，少填、多填或填错均不得分）

1 设 A 为 3阶方阵，且 $|A|=2$，A^* 为 A 的伴随矩阵，A^T 为 A 的转置矩阵，则 $|A^TA^*A^{-1}|=$ 4______.

解析： 因为 $|A|=2$, 所以 $|A^*|=|A|^{n-1}=2^{3-1}=4$．于是 $|A^TA^*A^{-1}|=|A^*|=4$

注释　本题知识点：

（1）　$|A^*|=|A|^{n-1}$;

（2）　$AA^*=A^*A=|A|E$;

（3）　$|\lambda A|=\lambda^n|A|$.

答案：4

2．A 为4阶方阵，且 $R(A+E)=3$，则 A 的一个特征值为 $\underline{-1}$.

解析： 因为 $R(A+E)=3$，所以 $|A+E|=0$ 和 A 特征值为−1.

注释　本题知识点：

（1）降秩矩阵的行列式为 0

（2）特征值的性质

答案：−1

3．已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(2,0,t)^T$，$\alpha_3=(0,-4,5)^T$ 线性相关，则 $t=$ __3__ .

解析： 因为 α_1, α_3 无关，所以 $\alpha_2=k\alpha_1+l\alpha_3$. 于是 $(2,0,t)^T=2(1,2,-1)^T+(0,-4,5)^T$ 和 $t=3$.

注释　本题知识点：

（1）向量组的线性相关性的性质

（2）也可以用行初等变换和矩阵的秩的性质来解答

答案：3

4．已知三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}$，$A^*$ 为 A 的伴随矩阵，则 A^* 的伴随矩阵 $(A^*)^*=$ __0______.

解析： 因为 $R(A)=1$，所以 $R(A^*)=0$. 于是 $A^*=0$. 从而 $(A^*)^*=0$.

注释　本题知识点：

(1) $AA^*=A^*A=|A|E$

（2）$R(A^*)=\begin{cases} n, 如果 R(A)=n, \\ 1, 如果 R(A)=n-1, \\ 0，如果 R(A)<n-1. \end{cases}$

答案：0

5．**二次型** $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ **的秩为** $\underline{\ 2\ }$.

解析：因为原二次型可以化简为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，**所以二次型的秩等于**

$R\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}=2$.

注释　本题知识点：

二次型和二次型秩的定义；

这个题目有很大的迷惑性；首先要把二次型展开写出对称矩阵，然后求对称矩阵的秩。

答案：2

二、　选择填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分）．以下每道题有四个答案，其中只有一个答案是正确的，请选出合适的答案填在空中，多选无效．

1．　3 阶方阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，且 $\alpha_1=2\alpha_2+4\alpha_3$，则 A 的行列式 $|A|=$【　D】.

(A)　2；　　(B)　3；　　(C)　4；　　(D)　0．

解析：因为 $\alpha_1=2\alpha_2+4\alpha_3$，**所以** $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ **线性相关。于是** $R(A)<3$ **和** $|A|=0$.

注释：本题知识点：

行列式的性质

答案：D

2．**设** $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 1 & a\end{pmatrix}$ **与** $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ **相似，则** $a=$【　C　】.

(A) 0; (B) 2; (C) 1; (D) 3.

解析：因为相似矩阵有相同的特征值，又因为矩阵的迹等于特征值之和所以 $-2+0+a=-1+2-2$. 于是 $a=1$.

注释：本题知识点：

（1）相似矩阵的性质

（2）矩阵的迹和特征值的关系

答案：C

3．若 n 维列向量 α 为 n 阶方阵 A 的一个特征向量，n 阶方阵 P 可逆，则 $P^{-1}AP$ 的一个特征向量为【 D 】.

(A) α； (B) $A\alpha$； (C) $P\alpha$； (D) $P^{-1}\alpha$.

解析：因为 $A\alpha=\lambda\alpha$ 所以 $(P^{-1}AP)P^{-1}\alpha=P^{-1}\lambda\alpha=\lambda P^{-1}\alpha$. 于是 $P^{-1}AP$ 的一个特征向量为 $P^{-1}\alpha$.

注释：本题知识点：

特征值和特征向量的定义

答案：D

4．设 4 阶方阵 A 的秩 $R(A)=2$， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个线性无关的解向量，则 $Ax=b$ 的通解不可以表示为【 A 】（c_1,c_2 为任意实数）.

(A) $\alpha_1+c_1(\alpha_2-\alpha_1)+c_2(\alpha_1-\alpha_2)$； (B) $\alpha_2+c_1(\alpha_3-\alpha_1)+c_2(\alpha_2-\alpha_3)$；

(C) $\alpha_1+c_1(\alpha_1-\alpha_3)+c_2(\alpha_2-\alpha_3)$； (D) $\alpha_2+c_1(\alpha_1-\alpha_2)+c_2(\alpha_2-\alpha_3)$.

解析：因为 $R(A)=2$ 所以齐线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系的个数是 2. 又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个线性无关的解向量，所以答案 BCD 中的向量之差都是 $Ax=b$ 的基础解系。只有 A 中的向量之差不是基础解系。于是选项 A 不能表示通解。

注释：本题知识点：

（1）齐次线性方程组和非齐次线性方程组的解的结构

（2）求基础解析的方法

答案：A

5. 设矩阵 A 、B 、C 均为 n 阶方阵，若 $AB=C$，且 B 可逆，以下正确的是【 B 】.

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价；
(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价；
(C 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价；
(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

解析：因为 $AB=C,(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)B=(c_1,c_2\cdots c_n)$，**又因为** B **可逆**

所以 $(c_1,c_2\cdots c_n)$与$(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$ **等价。于是** C **与** A **的列向量组等价。**

注释：本题知识点：

（1）向量组的等价性

答案：B

三、（14 分）

1.（6 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\4&9&16&25\\8&27&64&125\end{vmatrix}$

解：这是一个范德蒙行列式，所以

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\4&9&16&25\\8&27&64&125\end{vmatrix}=(3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4)=12$$

注释：本题知识点：

（1）范德蒙行列式

（2）行列式的性质及三角化法

2.（8 分）证明 n **阶行列式** $D_n=\begin{vmatrix}2a&1&&&&&\\a^2&2a&1&&&&\\&a^2&2a&1&&&\\&&&\cdots&\cdots&&\\&&&a^2&2a&1&\\&&&&a^2&2a&1\\&&&&&a^2&2a\end{vmatrix}=(n+1)a^n$.

证：$n=2$时，$D_2=3\alpha^2$，结论成立

把行列式按最后一行展开，我们有

$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}(n>2)$

设小于n时，结论成立，则$D_n=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}=(n+1)a^n(n>2)$，

于是由数学归纳法知结论成立.

注释：本题知识点：

（1）行列式按行或列展开

（2）递推公式或数学归纳法

四、（12分）已知n阶方阵A、B满足$A^2=A,\ 2A-B-AB=E$，E为n阶单位矩阵，

（1）证明$A-B$可逆；

（2）当$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&6&-2\end{pmatrix}$时，求$B$.

解 (1)由$A^2=A,\ 2A-B-AB=E$知

$$(A+E)(A-B)=E$$

所以$A-B$可逆；

（2）由$A^2=A,\ 2A-B-AB=E$知

$$B=A-(E+A)^{-1}$$

又$(E+A)^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&-6&4\end{pmatrix}$

故$B=A-(E+A)^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&7&-3\\0&18&-8\end{pmatrix}$

注释：本题知识点：

（1）矩阵方程要习惯于先化简

（2）可逆矩阵的求法

五、（12分）若向量$\beta=(2,a+1,1)^T$能被向量组$\alpha_1=(1,0,3)^T,\alpha_2=(1,-1,a)^T,\ \alpha_3=(1,1,6-a)^T$线

性表示.

(1) 求a的值;

(2) 求β由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出的一般表达式.

解　向量$\beta=\begin{pmatrix}2\\a+1\\1\end{pmatrix}$能被向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\6-a\end{pmatrix}$线性表示等价于增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&-1&1&a+1\\3&a&6-a&1\end{pmatrix}$$

的方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ (*) 有解.

将上矩阵化为行阶梯形:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&-1&1&a+1\\3&a&6-a&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&-1&1&a+1\\0&a-3&3-a&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&a+3\\0&-1&1&a+1\\0&0&0&a^2-2a-8\end{pmatrix}$$

(1) 由(*)有解,得$a^2-2a-8=0$,即$a=4$或$a=-2$.

(2) (*)的一般解$x_1=-2x_3+a+3,\ x_2=x_3-a-1$

β由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出的一般表达式:

当$a=4$时$\beta=(-2x_3+7)\alpha_1+(x_3-5)\alpha_2+x_3\alpha_3$

或 当$a=-2$时,$\beta=(-2x_3+1)\alpha_1+(x_3+1)\alpha_2+x_3\alpha_3$ 其中x_3任取 .

注释:本题知识点:

(1)行初等变换化阶梯型

(2)利用系数矩阵和增广矩阵的秩给出方程组的解的判别

六、(12 分)已知3是矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&a&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$的特征值.

(1) 求a的值;　　(2) 求正交矩阵C使C^TAC为对角矩阵,并写出该对角阵.

解　(1) 由3是矩阵A的特征值,知

$$|3E-A|=\begin{vmatrix}3&-1&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&3-a&-1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=8(2-a)=0$$

解得$a=2$.

（2）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda-3)$

A的特征值是1（二重），-1，3.

属于1的线性无关的特征向量为$(1,1,0,0)^T,(0,0,-1,1)^T$，单位化得

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^T,\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1)^T$$

属于-1的线性无关的特征向量为$(1,-1,0,0)^T$，单位化得

$$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^T$$

属于3的线性无关的特征向量为$(0,0,1,1,)^T$，单位化得

$$\eta_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^T$$

令$C=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

则 $C^TAC=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 3\end{pmatrix}$

注释：本题知识点：

（1）求特征值和特征向量的基本方法

（2）施密特正交化

七、（10分）二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，令

$\alpha=\left(a_1,a_2,a_3\right)^T,\beta=\left(b_1,b_2,b_3\right)^T$

（1）证明二次型$f(x_1,x_2,x_3)$对应的矩阵为$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

（2）若α,β正交且均为3维单位维列向量，证明二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$x=Cy$下的标

准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

解：(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$

$=(2a_1^2+b_1^2)x_1^2+(2a_2^2+b_2^2)x_2^2+(2a_3^2+b_3^2)x_3^2$
$+(4a_1a_2+2b_1b_2)x_1x_2+(4a_1a_3+2b_1b_3)x_1x_3+(4a_2a_3+2b_2b_3)x_2x_3$

二次型矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} 2a_1^2+b_1^2 & 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_1a_3+b_1b_3 \\ 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_2^2+b_2^2 & 2a_2a_3+b_2b_3 \\ 2a_1a_3+b_1b_3 & 2a_2a_3+b_2b_3 & 2a_3^2+b_3^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2a_1^2 & 2a_1a_2 & 2a_1a_3 \\ 2a_1a_2 & 2a_2^2 & 2a_2a_3 \\ 2a_1a_3 & 2a_2a_3 & 2a_3^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix}=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$$

(2) $A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha$,

$A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=\beta$,

则 1 和 2 为 A 的特征值，

于是 $R(A)\geq 2$.

又 $R(A)=R(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leq R(2\alpha\alpha^T)+R(\beta\beta^T)=2$，则 $R(A)=2$.

因此 A 另一个特征值为 0，

故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Cy$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

注释：本题知识点：

（1）求二次型的矩阵

（2）二次型的标准型

八、（本题满分 10 分）

（1）（6 分）设 A 为 3 阶矩阵，α_1，α_2 为 A 的分别属于特征值 -1，1 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

证：令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，　　（1）

则 $k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=0$

于是有　$-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0$　（2）

（1）-（2）得 $2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$，

由α_1，α_2线性无关得$k_1=k_3=0$，

代入（1）得 $k_2\alpha_2=0$，由$\alpha_2\neq 0$得$k_2=0$，

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

（2）（4 分）设A为n阶正定矩阵， E为n阶单位矩阵，证明$|A+E|>1$.

证明 因为A为对称矩阵，所以有正交矩阵 C，使得

$$C^TAC=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

而A为正定矩阵，所以$\lambda_i>0\ (i=1,\dots,n)$.

于是

$$\left|C^T(A+E)C\right|=\begin{vmatrix}1+\lambda_1 & & & \\ & 1+\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1+\lambda_n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)>1,$$

又$C^T=C^{-1}$，故

$$|A+E|=|C^{-1}|\cdot|A+E|\cdot|C|=|C^{-1}(A+E)C|=|C^T(A+E)C|>1.$$

注释：本题知识点：

（1）线性相关性的判定

（2）正定矩阵的性质