2012~2013学年秋季学期**线性代数（B）**课程考试试题解析

一．填空题（本题满分15分，共5道小题，每道小题3分）

1. 设A为 3阶方阵，且$|A|=3$，A^*为A的伴随矩阵，若交换A的第1行与第2行得到B，则$|BA^*|=\underline{-27}$．

解析：

$|BA^*|=|B||A^*|=(-3)|A|^2=-27$

注释　本题知识点：

1. 互换行列式的两行，行列式改变符号。

2. $|A^*|=|A|^{n-1}$

2. 　A为n阶矩阵，且$R(A-E)<n$，则A的一个特征值为$\underline{1}$.

解析：

由于$R(A-E)<n$，所以$|A-E|=0$，所以A的一个特征值为1.

注释　本题知识点：

1. $R(A-E)<n$，知道$A-E$不可逆，其行列式值为0.

2. 特征值的定义。

3．设A为3×4矩阵，$R(A)=3$，且已知非齐次线性方程组$Ax=b$的两个解为

$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix}$，则非齐次线性方程组$Ax=b$的通解为$\underline{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}(k\in R)}$.

解析：

由于$R(A)=3$，对应的齐次线性方程组的基础解系有一个解向量，$\eta_2-\eta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}$就是对应的齐次线性方程组的基础解系。$\eta_1$是非齐次线性方程组的特解。所以非齐次线性方程组$Ax=b$的通解为

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}(k\in R)$$

注释　本题知识点：

1. 基础解系的概念

2. 非齐次线性方程组解的构成。

4. **若 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 为正定二次型，则 t 的取值范围（$\underline{-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}}$）.**

解析：

正定二次型对应的矩阵为$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&t/2\\0&t/2&1\end{pmatrix}$，它的各阶顺序主子大于零，所以$\begin{vmatrix}2&1&0\\1&1&t/2\\0&t/2&1\end{vmatrix}>0$

$1-\frac{1}{2}t^2>0$，所以$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$。

注释　本题知识点：

1.二次型对应的矩阵是对称矩阵。

2.正定矩阵的各阶顺序主子大于零。

5. 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若 $Q=(\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2)$，则 $Q^{-1}AQ=\underline{\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$.

解析：

由于$Q=P\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$，$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

注释　本题知识点：

1.初等矩阵左乘变行，右乘变列

2.初等矩阵。

二、　选择填空题（本题满分１５分，共有５道小题，每道小题３分）．以下每道题有四个答案，其中只有一个答案是正确的，请选出合适的答案填在空中，多选无效．

1． $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶可逆方阵，则以下结论正确的是（　A　）

(A) 可用行初等变换把 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{B}$；　　(B) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；

(C) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆；　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆.

解析：

由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶可逆方阵，它们的行最简形都是 $\boldsymbol{n}$ 阶单位矩阵，所以 A 正确。

注释　本题知识点：

1.　可逆矩阵的行最简形是单位矩阵。初等行变换是等价的。

2.　$|AB| = |A||B|$

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\C_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\C_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\C_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\C_4\end{pmatrix}$，其中 C_1,C_2,C_3,C_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为（　C　）

（A） $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$; (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$; (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

解析：

$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = -C_1$

$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4| = C_1$

$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4| = 0$

$|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4| = -(C_3 + C_4)$

所以选 C

注释　本题知识点：

1.　一组向量如果可以构成一个方阵，这组向量线性相关的充分必要条件是它的行列式值为零。

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=2$，而 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{AB})=$（ D ）.

(A) 0；　(B) 1；　(C) 3；　(D) 2.

解析：

由于 $\left|\boldsymbol{B}\right|=12$，所以 B 矩阵可逆，而 $R(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=2$

注释　本题知识点：

1. 秩的性质中，若 P，Q 可逆，

   则 $\boldsymbol{R(AP)=R(A), R(QA)=R(A), R(PAQ)=R(A)}$

4．已知 $\alpha=(1,2,3)^T,\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})^T$，设 $A=\alpha\beta^T$，其中 β^T 是 β 的转置，则 $\boldsymbol{A}^{2013}=$（B）

(A) $3\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 2 & 1 & 2/3\\ 3 & 3/2 & 1\end{pmatrix}$；　**(B)** $3^{2012}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 2 & 1 & 2/3\\ 3 & 3/2 & 1\end{pmatrix}$；

(C) $2^{2012}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 2 & 1 & 2/3\\ 3 & 3/2 & 1\end{pmatrix}$；　**(D)** $3\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2/3\\ 3 & 3/2 & 1\end{pmatrix}$.

解析：

$$\boldsymbol{A}^{2013}=\alpha\beta^T\alpha\beta^T\cdots\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)\beta^T=3^{2012}\alpha\beta^T=3^{2012}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 2 & 1 & 2/3\\ 3 & 3/2 & 1\end{pmatrix}$$

注释　本题知识点：

1. 矩阵的乘法中，注意相同维数的一个行向量乘以一个列向量的结果是一个数。
2. 矩阵乘法满足结合律。

5．$\boldsymbol{n}$ 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是(　D　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都有 $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的特征向量；（B）$\boldsymbol{R(A)=R(B)}$；

（C）$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的主对角线上元素之和相等；（D）$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有 $\boldsymbol{n}$ 个相同的特征值.

解析：

必要性：当 $\boldsymbol{n}$ 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似时，由于相似矩阵具有相同的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有 $\boldsymbol{n}$ 个相同的特征值。

充分性：设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ，则存在着正交矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ ，使得

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = P_2^{-1}AP_2 \text{，即有，} P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B$$

令 $P = P_1P_2^{-1}$ ，则 $P^{-1}AP = B$，即 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似。

注释　本题知识点：

1. 相似矩阵有相同的特征值。
2. 是对称矩阵一定可以存在正交矩阵使其对角化。

三、（本题满分 12 分） 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{pmatrix}$

计算行列式 $|A|, \begin{vmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{vmatrix}$.

解析:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix} \underline{\underline{c_i - c_2 (i \neq 2)}} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

$$\begin{vmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{vmatrix} = \left|A^{-1}\right|\left|B^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}\frac{1}{|B|} = -\frac{1}{4(n-2)!}.$$

注释　本题知识点：

1. 行列式的性质和按行（列）展开的运算法则。

2. $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|$

四、（10 分）设 4 阶方阵 A 、B 、C 满足 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$，试求矩阵 A，其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解析：

由于 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$，两边左乘矩阵 C，则得到 $(2C - B)A^T = E$，所以 $A^T = (2C - B)^{-1}$

$$A^T = (2C - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

注释　本题知识点：

1. 逆矩阵的性质。

2. 矩阵方程的解法。

五、（ 本题满分 14 分）

1. (8 分) 向量组 $A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 且 A 的秩为 2，

（1）求 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$；

(2) 求向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个最大无关组，并把其余向量用最大无关组线性表示.

解析：

$$A=\begin{pmatrix}1&4&2&a\\2&6&b&3\\1&2&3&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&4&2&a\\0&-2&b-4&3-2a\\0&0&5-b&a-2\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2 得，a=2,b=5。

由于 α_1,α_2 的秩为 2，所以 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2}$ 向量组 A 的一个最大无关组.

$$A\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\alpha_3=4\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2,\alpha_4=\frac{1}{2}\alpha_2$

注释　本题知识点：

1. 经过矩阵的初等行变换求矩阵的秩。
2. 最大线性无关组的概念。
3. 向量的线性表示。
4. 求非齐次线性方程组。

2. 求方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=5\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=1\\5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3\end{cases}$ 的通解.

解析：

对增广矩阵施以行初等变换得，

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&2&-4\\0&1&-1&-2&9\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{pmatrix},$$

于是得，特解 $\boldsymbol{\eta}^*=\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}$，基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，

通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}(k\in R)$.

注释　本题知识点：

1. 非齐次线性方程组的增广矩阵的初等行变换。
2. 求行最简形。
3. 求对应的齐次线性方程组的基础解系。
4. 非齐次线性方程组的通解构成。

六、（本题满分 8 分）设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2+2A=O$，且 $R(A)=2$，

（1）　求 A 的全部特征值；

（2）　m 为何值时，$mE+A$ 为正定矩阵.

解析：

（1）设 λ 为 A 的特征值，p 是与 λ 对应的特征向量，则 $Ap=\lambda p$

由 $A^2+2A=O$ 得 $(\lambda^2+2\lambda)p=0$，

由 $p\neq 0$ 得，$(\lambda^2+2\lambda)=0$，则有 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=0$

由 $R(A)=2$ 知，A 的三个特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=-2$.

（2）$mE+A$ 的特征值为 $m,m-2$，

则当 $m>2$ 时，$mE+A$ 为正定矩阵.

注释　本题知识点：

1. 特征值的性质。
2. 对称矩阵可以通过正交矩阵对角化，对角矩阵的对角线的元素就是该对称矩阵的特征值。
3. 正定矩阵的特征值大于零。

七、（本题满分 12 分） 设 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 A 属于特征值 λ 的特征向量，

（1） 求 a,b 的值；

（2） 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Q，使得 $P^{-1}AP=Q$.

解析：

（1）由特征值、特征向量的定义得，

$$A\alpha=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-a \\ 2 \\ -1-b \end{pmatrix}=\lambda\alpha=\begin{pmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix},$$

则得 $a=0,b,=1,\lambda=-2$.

（2）特征多项式为 $\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，

特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$，

$\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

$\lambda_3=-2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

则可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，对角矩阵 $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，有

$P^{-1}AP=Q$

注释　本题知识点：

1. 特征值、特征向量的定义。
2. 求特征值的方法。
3. 求特征向量。

4. 矩阵的对角化。

八、（本题满分 14 分）

1.（8 分）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，$\beta$满足$A\beta\neq 0$，证明：

$\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots\alpha_s+\beta,\beta$ 线性无关.

2. （6 分）设n阶方阵A满足：$r(A)=r$．证明：A可以表示成r个秩为1的矩阵之和.

解析：

（1）令$k_1(\alpha_1+\beta)+k_2(\alpha_2+\beta)+\cdots+k_s(\alpha_s+\beta)+k\beta=0$

整理得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+(k+k_1+\cdots+k_s)\beta=0$，

上式两端左乘A得$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s+(k+k_1+\cdots+k_s)A\beta=0$，

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，

所以$A\alpha_1=A\alpha_2=A\alpha_s=0$

则有$(k+k_1+\cdots+k_s)A\beta=0$，由$A\beta\neq 0$得$(k+k_1+\cdots+k_s)=0$，

于是有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关得$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，从而有$k=0$，

故$\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots\alpha_s+\beta,\beta$ 线性无关.

（2）由已知，存在n阶可逆阵P、Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}1&&&&&\\&0&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&&&&&\\&1&&&&\\&&0&&&\\&&&\ddots&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}}_{r\text{个}}$$

$$=E_{r1}+E_{r2}+\cdots+E_{rr}$$

因此，$A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}=P^{-1}E_{r1}Q^{-1}+P^{-1}E_{r2}Q^{-1}+\cdots+P^{-1}E_{rr}Q^{-1}$，

且 $R(P^{-1}E_{ri}Q^{-1})=1$，$i=1,2,\cdots,r$.

注释　本题知识点：

1. 基础解系的定义。
2. 向量组线性无关的定义。
3. 矩阵的标准型。
4. 矩阵秩的概念。