《线性代数》期末练习题（三）解答

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 a_1, a_2, a_3 是 Euclid 空间的标准正交基，则向量 $2a_1 - a_2 + 3a_3$ 的长度为__ $\sqrt{\mathbf{14}}$.

2. 设 $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ a & b & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 为正交矩阵，则 $ab =$___ $\mathbf{0}$ ____.

3. 若实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$ 为正定二次型，则 λ 的取值范围为__ $\mathbf{-2 < \lambda < 1}$ ______.

4. 已知 a_1, a_2 是非其次方程组 $A_{2\times3}x = b$ 的两个线性无关的解，且 $rank\ A = 2$. 若 $a = ka_1 + la_2$ 是方程组 $Ax = b$ 的通解，则常数 k, l 需满足关系式__ $k + l = 1, l \in R.$

5. 设 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 + 2A - 3E = 0$，且 $\lambda=1$ 是 A 的一重特征值，则行列式 $|A + 2E| =$________. $(-1)^{n-1}3$

6. 设 n 阶可逆矩阵 A 的每一行元之和都等于常数 $a \neq 0$，则 A^{-1} 的每一行元之和为__ $\frac{1}{a}$ _____.

二、单选题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，A 的第二行乘以 2 得到矩阵 B，则（ D ）

(A) A^{-1} 的第二行乘以 2 为 B^{-1}；　　(B) A^{-1} 的第二列乘以 2 为 B^{-1}；

(C) A^{-1} 的第二行乘以 $\frac{1}{2}$ 为 B^{-1}；　　(D) A^{-1} 的第二列乘以 $\frac{1}{2}$ 为 B^{-1}.

2. 设向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，a_2, a_3, a_4 线性相关，以下命题中错误的是（B ）

(A) a_1 不能被 a_2, a_3, a_4 线性表示；　　(B) a_2 不能被 a_1, a_3, a_4 线性表示；

(C) a_4 能被 a_1, a_2, a_3 线性表示；　　(D) a_1, a_2, a_3, a_4 线性相关.

3. 设 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$，则二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)^2$ 的矩阵为（ C ）

(A) A；　　(B) A^2；　　(C) $A^T A$；　　(D) AA^T.

4. 设 A,B 均为四阶方阵，且 $rank\ A=4, rank\ B=3$, A 和 B 的伴随矩阵为 A^* 和 B^*，则 $rank(A^*B^*)$ 等于（ A ）

(A) 1;　　　　(B) 2;　　　　(C) 3;　　　　(D) 4.

5. 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是向量空间 V 的一个基，则下面向量组中为 V 的基的是（ C ）

(A) $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_1$;

(B) $a_1-a_2, a_2-a_3, a_3-a_4, a_4-a_1$;

(C) $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4-a_1$;

(D) $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3-a_4, a_4-a_1$;

6. 设三阶方阵 A 的三个特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=3, \lambda_3=-6$，对应于 λ_1,λ_2 的特征向量分别为 $p_1=(1,0,-1)^T, p_2=(2,1,1)^T$，则 $p_3=p_1+p_2$ 应当（ D ）.

(A) 是对应于 $\lambda_1=0$ 的特征向量;　　　　(B) 是对应于 $\lambda_2=3$ 的特征向量;

(C) 是对应于 $\lambda_3=-6$ 的特征向量;　　　　(D) 不是 A 的特征向量.

三、（10 分）计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x_n \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1)+x_{n-1} & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2+x_2 & \cdots & n-1 & n \\ 1+x_1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

其中 $x_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

解：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x_n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & (n-1)+x_{n-1} & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 2+x_2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1+x_1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2 & \cdots & -(n-1) & -n\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}x_i\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{x_i} & -\frac{1}{x_1} & -\frac{2}{x_2} & \cdots & -\frac{(n-1)}{x_{n-1}} & -\frac{n}{x_n}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{x_i}\right)\prod_{i=1}^{n}x_i\ .$$

四、（10 分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$满足关系式 $A^2B-A-B=E$，试求矩阵 B.

解：由 $\left(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 得

$$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

五、（10 分）判定向量组

$$a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix},a_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},a_3=\begin{bmatrix}1\\3\\3\\5\end{bmatrix},a_4=\begin{bmatrix}4\\-2\\5\\7\end{bmatrix},a_5=\begin{bmatrix}-3\\-1\\-5\\-8\end{bmatrix}$$

的线性相关性，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解：因为

$$\left[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4\quad\boldsymbol{\alpha}_5\right]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5\\ 3 & 1 & 5 & 7 & -8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$为其一个极大无关组，且

$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4$.

六、（10 分）设线性方程组为$\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=0, \\ x_1-4x_2+ax_3=b, \\ 2x_1-x_2+3x_3=5, \end{cases}$ 问a,b取何值时，方程组无解、

解：$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & a & b \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & b+1 \end{bmatrix}$$

有唯一解、有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解.

当$a\neq-2$时，方程组有唯一解；

当$a=-2,b\neq-1$时，方程组无解；

当 $a=-2,b=-1$ 时，$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\tilde{\boldsymbol{A}}=2<3$，方程组有无穷多组解，其通解为

$\boldsymbol{\alpha}=(3,1,0)^{\mathrm{T}}+k(-2,-1,1)^{\mathrm{T}},k$ 为任意数 .

七、（12 分）将实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1$用正交变换化为标准形，并写出所用的正交变换.

解： 二次型f的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，其特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2$，对应的线性无关的

特征向量为

$\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

将它们正交化、单位化得

$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，

于是正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，即$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_3=\frac{2}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3, \end{cases}$

化二次型为标准形$f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.

八、（12 分）设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，$\beta\neq 0$ 是 m 维实列向量，证明：

（1）$rank\ A = rank\ (A^T A)$;

（2）方程组 $A^T Ax = A^T\beta$ 有解.

证:　(1) 若 $\boldsymbol{A\xi}=0$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=0$. 反之，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=0$，则

$|\boldsymbol{A\xi}|^2=(\boldsymbol{A\xi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}\right)=0,$

得 $\boldsymbol{A\xi}=0$. 因此齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$ 同解，故 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)$.

(2) 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)&\leq\mathrm{rank}\left[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right]=\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}\right]\right)\\&\leq\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right),\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{rank}\left[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right]=\mathrm{rank}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)$，故方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 有解 .