《线性代数》期末练习题（一）解答

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1.已知 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 且 $n\geq 2$, 则 $A^n-2A^{n-1}=$ ___0______.

2. 已知矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&2\\3&1&0\\5&2&0\end{pmatrix}$, 则 $\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}=$

$\begin{bmatrix}0&8&-4\\0&-20&12\\2&0&0\end{bmatrix}$______.

3. 已知 4 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4), B=(\beta,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ $|A|=4, |B|=1$,则 $|A+B|=$

40________

4. 设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是正交矩阵，且 $b=(1,0,0)^T, a_{11}=1$ ，则 $Ax=b$ 有一个解为

$(1,0,0)^T$ _____.

5. 设 n 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n}{n},$ ，则当 λ 为__$<\frac{1}{n}$_______,

$|A-\lambda E|$ 为正定矩阵.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a&1\\2&b\end{pmatrix}$ ， A 与 B 可交换（ $AB=BA$ ）的充要条件是

（ A ）

(A) $a=b-1$. (B) $a=b+1$. ((C) $a=b$ (D) $a=2b$.

2. 设 n 阶非零矩阵 A 满足 $A^3=o$ ，则（ D ）

(A) $E-A$ 不可逆， $E+A$ 不可逆．(B) $E-A$ 可逆， $E+A$ 不可逆.

(C) $E-A$不可逆，$E+A$可逆.　　(D) $E-A$可逆，$E+A$可逆.

3. 设A, B均为$m\times n$矩阵，给定下面四个命题：

①若 $Ax=0$ 的解均为 $Bx=0$ 的解，则 $R(A)\ge R(B)$。

②若 $R(A)\ge R(B)$，则 $Ax=0$ 的解均为 $Bx=0$ 的解。

③若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $R(A)=R(B)$。

④若 $R(A)=R(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

则上述命题正确的是（ B 　）

(A）①② 。　　(B)①③ 。　　(C)②④ 。　(D) ③④。

4. 设$n(n\ge 2)$阶可逆矩阵A的伴随矩阵为A^*，交换A的第一行与第二行得到B，则（　C　　）

(A)交换A^*的第一例与第二列得到B^*.

(B)交换A^*的第一行与第二行得到B^*.

(C）交换A^*的第一例与第二列得到$-B^*$.

(D)交换A^*的第一行与第二行得到$-B^*$.

5. 已知η_1,η_2是非齐次线性方程组$Ax=b$的两个不同的解，ξ_1,ξ_2是对应的齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，k_1,k_2为任意实数，则$Ax=b$的通解为(B)

(A) $k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$. (B) $k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$.

(C) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1+\eta_2)+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$. (D) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1-\eta_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$.

三、(12 分)

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots n-1]{r_i - r_{i+1}} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,3,2]{c_i - c_{i-1}} \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n+1} x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)^n + (-1)^{n+1} x^n .$$

四、（12 分）设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{X}$，求矩阵$\boldsymbol{X}$.

解：由$\mathbf{A}^*\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} + 2\mathbf{X}$ 得 $\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{X} = \mathbf{E} + 2\mathbf{A}\mathbf{X}$, 从而

$$\left(|\mathbf{A}|\mathbf{E} - 2\mathbf{A}\right)\mathbf{X} = \mathbf{E}，即 \mathbf{X} = \left(|\mathbf{A}|\mathbf{E} - 2\mathbf{A}\right)^{-1} .$$

而$|\mathbf{A}| = 4$，故

$$\mathbf{X} = \left(|\mathbf{A}|\mathbf{E} - 2\mathbf{A}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

五（12 分）

解： 因为$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$是方程组（Ⅰ）的通解，$l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2$是方程组（Ⅱ）

的通解，所以求方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）的公共解即是令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2,$$

得

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + 2k_3 - l_1 - l_2 = 0, \\ 2k_1 - k_2 + 3k_3 - 4l_1 + 3l_2 = 0, \\ 5k_1 + k_2 + 4k_3 - 7l_1 + 4l_2 = 0, \\ 7k_1 + 7k_2 + 20k_3 - l_1 - 2l_2 = 0, \end{cases}$$

对该方程组的系数矩阵做初等行变换化为最简阶梯矩阵：

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 & 4 \\ 7 & 7 & 20 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

得到通解

$$k_1 = -\frac{3}{14}t, k_2 = \frac{4}{7}t, k_3 = 0, l_1 = \frac{1}{2}t, l_2 = t,\ \ t\text{ 为任意数.}$$

于是方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）的公共解为

$$\frac{1}{2}t\boldsymbol{\beta}_1 + t\boldsymbol{\beta}_2 = \frac{t}{2}(3,\ \ -2,\ \ -1,\ \ 5)^T,\ \ t\text{ 为任意数.}$$

六、（10 分）

证： 因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，故 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 线性无关. 假若 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ 是 $\mathbf{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，则

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \lambda(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2).$$

而 $\mathbf{A}\mathbf{p}_1 = \lambda\mathbf{p}_1, \mathbf{A}\mathbf{p}_2 = \lambda\mathbf{p}_2$，故

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2,$$

于是 $\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 = \lambda\mathbf{p}_1 + \lambda\mathbf{p}_2$，即

$$(\lambda - \lambda_1)\mathbf{p}_1 + (\lambda - \lambda_2)\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}.$$

由 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 线性无关知 $\lambda - \lambda_1 = \lambda - \lambda_2 = 0$，即 $\lambda_1 = \lambda_2$，矛盾. 这说明 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时

$\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2$不是$\mathbf{A}$的特征向量.

七、（12 分）

解：做初等行变换，得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & a & a+1 & 2a & -2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & 2a-5 & -6\end{bmatrix}.$$

（1）当$a\neq 1$时，$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix}=3$, 所以，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

由$a\neq 1$即知

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ a-1 & 2a-5 & -6\end{vmatrix}=-a+1\neq 0,$$

故$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix}=3$, 因此向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示. 从而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$等价.

（2）当$a=1$时,

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -6\end{bmatrix},$$

即$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}<\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}$, 故向量$\boldsymbol{\beta}_2$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

八、（12 分）

解：二次型的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & 4 & -2\\ 4 & a & 2\\ -2 & 2 & 6\end{bmatrix},$$

而$\mathbf{A}$的特征值为 7，7，-2，所以$a+a+6=7+7-2=12$, 即$a=3$.

当 $\lambda_1=7$ 时，解方程组 $(7\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,\quad 1,\quad 0)^T,\quad \boldsymbol{\xi}_2=(-1,\quad 0,\quad 2)^T,$$

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化、单位化得

$$\mathbf{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\quad 1,\quad 0)^T,\qquad \mathbf{q}_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,\quad 1,\quad 4)^T.$$

当 $\lambda_2=-2$ 时，解方程组 $(-2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=(2,\quad -2,\quad 1)^T,$$

单位化得

$$\mathbf{q}_3=\frac{1}{3}(2,\quad -2,\quad 1)^T.$$

令

$$\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_1\quad \mathbf{q}_2\quad \mathbf{q}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

则所用的正交变换为 $\mathbf{x}=\mathbf{Q}\mathbf{y}$.