《线性代数》期末练习题（一）解答

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1.已知 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 且 $n\ge 2$, 则 $A^n-2A^{n-1}=$ ___0________.

2. 已知矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&2\\3&1&0\\5&2&0\end{pmatrix}$, 则 $\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}=$

$\begin{bmatrix}0&8&-4\\0&-20&12\\2&0&0\end{bmatrix}$______.

3. 已知 4 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4), B=(\beta,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ $|A|=4, |B|=1$, 则 $|A+B|=$

40________

4.设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 是正交矩阵，且 $b=(1,0,0)^T, a_{11}=1$，则 $Ax=b$ 有一个解为

$(1,0,0)^T$ ____.

5. 设 n 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n}{n},$，则当 λ 为 ___ $\overline{<\frac{1}{n}}$

$A-\lambda E$，为正定矩阵.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a&1\\2&b\end{pmatrix}$，$A$ 与 B 可交换（$AB=BA$）的充要条件是

（ A ）

(A) $a=b-1$. (B) $a=b+1$. ((C) $a=b$ (D) $a=2b$.

2. 设 n 阶非零矩阵 A 满足 $A^3=o$，则（ D ）

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆. (B) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

(C) $E-A$不可逆，$E+A$可逆.　　(D) $E-A$可逆，$E+A$可逆.

3.设A, B均为$m\times n$矩阵，给定下面四个命题：

①若$Ax=0$的解均为$Bx=0$的解，则$R(A)\geq R(B)$。

②若$R(A)\geq R(B)$，则$Ax=0$的解均为$Bx=0$的解。

③若$Ax=0$与$Bx=0$同解，则$R(A)=R(B)$。

④若$R(A)=R(B)$，则$Ax=0$与$Bx=0$同解.

则上述命题正确的是（ B ）

(A)①② 。　　(B)①③ 。　　(C)②④ 。　(D) ③④。

4.设$n(n\geq 2)$阶可逆矩阵A的伴随矩阵为A^*，交换A的第一行与第二行得到B，则（ C ）

(A)交换A^*的第一例与第二列得到B^*.

(B)交换A^*的第一行与第二行得到B^*.

(C) 交换A^*的第一例与第二列得到$-B^*$.

(D)交换A^*的第一行与第二行得到$-B^*$.

5. 已知η_1,η_2是非齐次线性方程组$Ax=b$的两个不同的解，ξ_1,ξ_2是对应的齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，k_1,k_2为任意实数，则$Ax=b$的通解为(B)

(A) $k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$. (B) $k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$.

(C) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1+\eta_2)+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$. (D) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1-\eta_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$.

三、(12 分)

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots n-1]{r_i - r_{i+1}}\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,3,2]{c_i - c_{i-1}}\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$=(1-x)\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1}x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(1-x)^n+(-1)^{n+1}x^n.$$

四、（12 分）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，求矩阵$\boldsymbol{X}$.

解：由$\mathbf{A}^*\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}+2\mathbf{X}$得$\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{X}=\mathbf{E}+2\mathbf{A}\mathbf{X}$，从而

$$\left(|\mathbf{A}|\mathbf{E}-2\mathbf{A}\right)\mathbf{X}=\mathbf{E}，即\ \mathbf{X}=\left(|\mathbf{A}|\mathbf{E}-2\mathbf{A}\right)^{-1}.$$

而$|\mathbf{A}|=4$，故

$$\mathbf{X}=\left(|\mathbf{A}|\mathbf{E}-2\mathbf{A}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

五（12 分）

解： 因为$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$是方程组（Ⅰ）的通解，$l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$是方程组（Ⅱ）

的通解，所以求方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）的公共解即是令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,$$

得

$$\begin{cases} k_1+3k_2+2k_3-l_1-l_2=0, \\ 2k_1-k_2+3k_3-4l_1+3l_2=0, \\ 5k_1+k_2+4k_3-7l_1+4l_2=0, \\ 7k_1+7k_2+20k_3-l_1-2l_2=0, \end{cases}$$

对该方程组的系数矩阵做初等行变换化为最简阶梯矩阵：

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & -\beta_1 & -\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 & 4 \\ 7 & 7 & 20 & -1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

得到通解

$$k_1=-\frac{3}{14}t, k_2=\frac{4}{7}t, k_3=0, l_1=\frac{1}{2}t, l_2=t,\ \ t\text{ 为任意数.}$$

于是方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）的公共解为

$$\frac{1}{2}t\boldsymbol{\beta}_1+t\boldsymbol{\beta}_2=\frac{t}{2}(3,\ \ -2,\ \ -1,\ \ 5)^T,\ \ t\text{ 为任意数.}$$

六、（10 分）

证： 因$\lambda_1\neq\lambda_2$，故$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$线性无关. 假若$\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2$是$\mathbf{A}$的对应于特征值$\lambda$的特征向量，则

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)=\lambda(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2).$$

而$\mathbf{A}\mathbf{p}_1=\lambda\mathbf{p}_1,\mathbf{A}\mathbf{p}_2=\lambda\mathbf{p}_2$，故

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)=\lambda_1\mathbf{p}_1+\lambda_2\mathbf{p}_2,$$

于是$\lambda_1\mathbf{p}_1+\lambda_2\mathbf{p}_2=\lambda\mathbf{p}_1+\lambda\mathbf{p}_2$,即

$$(\lambda-\lambda_1)\mathbf{p}_1+(\lambda-\lambda_2)\mathbf{p}_2=\mathbf{0}.$$

由$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$线性无关知$\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$，即$\lambda_1=\lambda_2$，矛盾. 这说明$\lambda_1\neq\lambda_2$时

$\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2$ 不是 $\mathbf{A}$ 的特征向量.

七、（12 分）

解：做初等行变换，得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1\\0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2\\2 & 3 & a & a+1 & 2a & -2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1\\0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & a-1 & a-1 & 2a-5 & -6\end{bmatrix}.$$

（1）当 $a\neq 1$ 时，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_3]=3$, 所以，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

由 $a\neq 1$ 即知

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 1 & 2\\a-1 & 2a-5 & -6\end{vmatrix}=-a+1\neq 0,$$

故 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_3]=3$, 因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示. 从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价.

（2）当 $a=1$ 时,

$$[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_3]\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1\\0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -6\end{bmatrix},$$

即 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3]<\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\beta}_2]$, 故向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

八、（12 分）

解：二次型的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & 4 & -2\\4 & a & 2\\-2 & 2 & 6\end{bmatrix},$$

而 $\mathbf{A}$ 的特征值为 7，7，-2，所以 $a+a+6=7+7-2=12$, 即 $a=3$.

当 $\lambda_1=7$ 时，解方程组 $(7\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,\quad 1,\quad 0)^T,\quad \boldsymbol{\xi}_2=(-1,\quad 0,\quad 2)^T,$$

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化、单位化得

$$\mathbf{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\quad 1,\quad 0)^T,\qquad \mathbf{q}_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,\quad 1,\quad 4)^T.$$

当 $\lambda_2=-2$ 时，解方程组 $(-2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=(2,\quad -2,\quad 1)^T,$$

单位化得

$$\mathbf{q}_3=\frac{1}{3}(2,\quad -2,\quad 1)^T.$$

令

$$\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_1\quad \mathbf{q}_2\quad \mathbf{q}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

则所用的正交变换为 $\mathbf{x}=\mathbf{Q}\mathbf{y}$.