二阶段测验题

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，则无关的是（　　）

A $\alpha_1+\alpha_2$　$\alpha_2+\alpha_3$　$\alpha_3+\alpha_4$　$\alpha_4+\alpha_1$　✗　1,3 与 2,4 的和相等

B $\alpha_1-\alpha_2$　$\alpha_2-\alpha_3$　$\alpha_3-\alpha_4$　$\alpha_4-\alpha_1$　✗　4项和 $=0$

C $(\alpha_1+\alpha_2 \quad \alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_4 \quad \alpha_4-\alpha_1)$ ✓

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可逆，对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 做列变换秩不变 $=4$，∴无关。

D. $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$　$\alpha_3-\alpha_4$, $\alpha_4-\alpha_1$　第1,3,4项的和 = 第2项

2. 设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 2 & 1\\ 2 & k & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$　$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则 $R(A)=3$，则 $|A|\neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} k+1 & 3 & 0 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k^2-k-6\neq 0 \Leftrightarrow k\neq 3 \text{ 且 } k\neq -2.$$ (B)

3. 与第一阶段11题同　(B)

4. 下列正确的是

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关 ✓

$\exists k_1, k_2, \cdots, k_s$ 不全为0，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0 \Rightarrow A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=0$

即 $k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0$　(A) ✓ 则 (B) ✗ 线性相关

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性无关

(C), (D) 不确定，取决于 A 的情况，如令 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 为 A 的前3列 有可能相关，也有可能无关.

(5) 已知4维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，若 β_i 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交 $(i=1,2,3,4)$

则 $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \leq 1$

β_i 都是齐次方程组 $\begin{cases} \alpha_1^T x = 0 \\ \alpha_2^T x = 0 \\ \alpha_3^T x = 0 \end{cases}$ 的解 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix}$ $R(A) = 3$

$\therefore$ 解空间为1维

$\therefore$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 在解空间 $\Rightarrow R(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \leq 1$

(6) I: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ II: $\beta_1 = (\alpha_1, a_{14})$, $\beta_2 = (\alpha_2, a_{24})$, $\beta_3 = (\alpha_3, a_{34})$

A. (I) 相关 $\Rightarrow$ (II) 相关 ✗ B. (II) 相关 $\Rightarrow$ (I) 无关 ✗

C. (II) 无关 $\Rightarrow$ (I) 无关 ✗ D. (I) 无关 $\Rightarrow$ (II) 无关 ✓

书上结论：无关向量组，延长后仍无关.

(A) $\Leftrightarrow$ (C) 反例 II: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(B) (II) 相关，(I) 必相关.

7. 设 A 是 n 阶非零阵，$A^3=0$，I 为 n 阶单位阵，则正确的是 (C)

$I-A$ 可逆　$I+A$ 可逆

$I=I-A^3=(I-A)(I+A+A^2)$　　$(1-x^3=(1-x)(1+x+x^2))$

$I=I+A^3=(I+A)(I-A+A^2)$　　$(1+x^3=(1+x)(1-x+x^2))$

$\Rightarrow I-A$, $I+A$ 都可逆