2017 ~2018 学年（春）学期《线性代数 》课程考试试题解析

一、填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分，请将合适的答案填在每题的空中）

1. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为 3 维列向量，且三阶行列式$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=3$，则三阶行列式

$|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,6\alpha_1+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2|=$ __18__.

解析：

$$\begin{aligned}
&|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ 6\alpha_1+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2|\\
=&|\alpha_3,\ 6\alpha_1+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2|\\
=&|\alpha_3,\ 6\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2|+|\alpha_3,\ 2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2|\\
=&|\alpha_3,\ 6\alpha_1,\alpha_2|=6|\alpha_1,\ \alpha_2,\alpha_3|=18.
\end{aligned}$$

注释 本题知识点：

此题主要考察行列式的如下性质：

(1) $|\alpha_1,\ \cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n|=|\alpha_1,\ \cdots,\alpha_i,\cdots,\mathrm{k}\alpha_i+\alpha_j,\cdots,\alpha_n|$;

(2) $|\alpha_1,\ \cdots,\alpha_i+\alpha_j,\cdots,\alpha_n|=|\alpha_1,\ \cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|+|\alpha_1,\ \cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n|$;

(3) $|\alpha_1,\ \cdots,k\alpha_i,\cdots,\alpha_n|=\mathrm{k}|\alpha_1,\ \cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|$;

(4) $|\alpha_1,\ \cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n|=-|\alpha_1,\ \cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|$.

2. 设向量组$\alpha_1=(1,0,2,3)^T$，$\alpha_2=(1,1,3,5)^T$，$\alpha_3=(1,-1,a,1)^T$ 线性相关，则

$a=$ __1__.

解析：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

有非零解．因此，$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3.$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&a-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

当 $a=1$ 时，$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2<3.$

注释：本题知识点：

此题主要考察向量组的线性相关性的概念及齐次线性方程组存在非 0 解的条件．通常需借助线性方程组的理论来研究向量组的线性相关性，当齐次线性方程组系数矩阵的秩比未知量个数小时，齐次线性方程组有非 0 解，系数矩阵所对应的列向量组线性相关.

3．若二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=6x_1^2+5x_2^2+tx_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$ 为正定二次型， 那么 t 的取值范围是 $\underline{\quad t>\dfrac{10}{13}\quad}$.

解析：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix}$.

若为正定二次型，则其矩阵为正定矩阵．故 $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix}$ 的各阶顺序主子式均大于 0.

由 $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & t \end{vmatrix}=26t-20>0$ 得 $t>\dfrac{10}{13}$.

注释 本题知识点：

矩阵为正定矩阵当且仅当其各阶顺序主子式均为正.

4．设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个解向量，矩阵 A 的秩为 3，若 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,2,3,4)^T, 2\boldsymbol{\eta}_2-3\boldsymbol{\eta}_3=(0,1,-1,0)^T$ ，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\underline{\boldsymbol{\eta}_1+k(1,3,2,4)^T\ k\in\Re}$.

解析：若 $R(A)=3$，则 4 元齐次方程 $Ax=0$ 的基础解系中只有一个线性无关的向量．由于 η_1,η_2,η_3 是 $Ax=\mathrm{b}$ 的解，$A(\eta_1+2\eta_2-3\eta_3)=0$，故 $Ax=\mathrm{b}$

通解为 $k(\eta_1+2\eta_2-3\eta_3)+\eta_1=(k+1,3k+2,2k+3,4k+4)^T$.

注释 本题知识点：

此题主要考察非齐次线性方程组的结构，$Ax=b$ 通解为 $x=\eta^*+\sum_{i=1}^{n-R(A)}k_i\eta_i$，其中，$\eta^*$ 为 $Ax=b$ 的特解，$\sum_{i=1}^{n-R(A)}k_i\eta_i$ 为齐次方程 $Ax=0$ 的通解.

5. 设 2 阶矩阵 A 有两个不同的特征值，α_1，α_2 是 A 的线性无关的特征向量，且满足

$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$，则 A 相似于对角阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

解析：由 $(E-A^2)(\alpha_1+\alpha_2)=0,\ \alpha_1+\alpha_2\neq 0$ 知 1 是 A^2 的特征值. 设 λ_1,λ_2 是 A 两个不同的特征值，则 λ_1^2,λ_2^2 均是 A^2 的特征值. 假设 $\lambda_1^2\neq\lambda_2^2$，则 $\alpha+\beta$ 不可能是特征向量. 故 $\lambda_1^2=\lambda_2^2=1$，$\lambda_1,\lambda_2$ 为 1，-1. A 相似于 $\mathrm{diag}(1,-1)$.

设 α_1，α_2 对应的特征值为 λ_1,λ_2， 由 $A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$ 得

$$(\lambda_1^2-1)\alpha_1+(\lambda_2^2-1)\alpha_2=0.$$

又 α_1,α_2 线性无关，则 $\lambda_1^2-1=0,\ \lambda_2^2-1=0.$

由于 λ_1,λ_2 不同，则 A 相似于对角阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

注释 本题知识点：

（1）若 λ 为 A 的特征值，则多项式 $f(\lambda)$ 为 $f(A)$ 的特征值；

（2）不同的特征值对应的特征值向量线性无关，不同特征值的特征向量相加不是特征向量；

（3）同一特征值对应的特征值向量构成一个特征子空间；

（4）若 A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 A 相似于 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

二、 选择题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 三阶行列式 $\begin{vmatrix}x-2 & 4 & 0\\ -1 & x+3 & 0\\ 8 & -9 & x+7\end{vmatrix}=0$，则 x 的可能取值为【 C 】

(A) $1,-7,2$．　(B) $1,1,-2$．　(C) $1,-7,-2$．　(D) $1,1,-7$．

解析：把行列式按最后一列进行展开得$(x+7)(x+2)(x-1)=0$，故 x=-7,-2,1.

注释：此题主要考察行列式的计算，如果行列式的某一行或某一列含有较多的 0，我们通常把行列式按改行或该列展开进行计算.

2. 设A 为3阶方阵，交换A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵B，再把B的第 3 列的 2 倍加到第 1 列得单位矩阵，记$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，则$A=$【 D 】

(A) P_1P_2．　(B) P_2P_1．　(C) $P_2^{-1}P_1^{-1}$．　(D) $P_1^{-1}P_2^{-1}$．

解析：利用初等矩阵的性质得$\mathrm{P}_1AP_2=E$，故$A=P_1^{-1}P_2^{-1}$.

注释 本题知识点：

对一个矩阵做初等行变换相当于左乘一个相应的初等矩阵，做初等列变换相当于右乘一个相应的初等矩阵.

3. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_3^2+2x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准形 $y_1^2+by_2^2-y_3^2$，则【 B 】

(A)$a=1$，$b=2$．　(B)$a=0,b=2$．　(C)$a=1$，$b=-2$．　(D)$a=0,b=-2$．

解析：二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{pmatrix}$，经正交变换后其标准型的矩阵为 $B=diag(1,b,-1)$，则 A 相似于 B．由 $trA=trB,|A|=|B|$ 得 $2+a=b,\ b=2.$ 故$a=0,b=2.$

注释 本题知识点：

此题主要考察相似矩阵的性质，若A相似于B，则$trA=trB,|A|=|B|.$

4. 线性方程组$Ax=b$的系数矩阵A是3×4的矩阵，且A的行向量组线性无关，则下列命题错误的是【 C 】

(A) $A^Tx=0$ 只有零解．　　(B) $A^TAx=0$ 必有无穷多解．

(C) 对任意b，$A^T x = b$总有唯一解．　(D) 对任意b，$Ax = b$总有无穷多解．

解析：由A的行向量组线性无关知$R(A)=R(A^{\mathrm{T}})=3$，因A^T为4×3矩阵，

对于（A）$R(A^T)=R(A)=3$，故$A^T x=0$ 只有零解；

对于（B）因$A^T A$为4×4矩阵，$(A^T A)=R(A)=3<4$，故$A^T Ax=0$ 必有无穷多解；

对于（C）A^T为4×3矩阵，当$R(A^T)=3<R(A^T,b)=4$ 时，$A^T x=b$无解；

对于（D）对任意的b，$R(A)=R(A,b)=3<4$，$Ax=b$总有无穷多解.

注释 本题知识点：

（1）对于n元齐次线性方程组$Ax=0$，当$R(A)=n$ 时，有唯一解；当$R(A)<n$ 时，有无穷多解.

（2）对于n元非齐次线性方程组$Ax=b$，当$R(A)<R(A,b)$ 时，无解；当$R(A)=R(A,b)=n$时，有唯一解；当$R(A)=R(A,b)<n$时，有无穷多解.

（3）对任意的矩阵A，$R(A)=R(A^T A)$.

5. 设P为三阶非零矩阵，$Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，且满足$PQ=O$，则关于矩阵$P$的秩，下列说法正确的是【　C　】

(A) $t=6$时，P的秩必为1．　(B) $t=6$时，P的秩必为2．

(C) $t\neq 6$时，P的秩必为1．　(D) $t\neq 6$时，P的秩必为2.

解析：由P为3阶非零矩阵，$PQ=O$知$R(P)\geq 1, R(P)+R(Q)\leq 3$．当$t=6$时，$R(Q)=1, 1\leq R(P)\leq 2$；当$t\neq 6$时，$R(Q)=2, R(P)=1.$

注释 本题知识点：

若A为$m\times n$矩阵，B为$n\times s$矩阵，则$R(A)+R(B)\leq n+R(AB)$.

三、（本题满分14分）计算下列各题

解析：

1. 计算$n+1$阶行列式

解：
$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & c_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & a_0 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_{n+1}-\frac{b_1}{a_1}r_1 \\ r_{n+1}-\frac{b_2}{a_2}r_2 \\ \vdots \\ r_{n+1}-\frac{b_n}{a_n}r_n}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_i c_i}{a_i} \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i} \right).$$

2. 设行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$，求$M_{33}+M_{34}+M_{35}$.

解：$M_{33}+M_{34}+M_{35}=A_{33}-A_{34}+A_{35}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$\overset{\substack{r_2-3r_3 \\ r_4-2r_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

注释 本题知识点：

计算行列式时通常需利用行列式的性质化上、下三角行列式进行计算或是把行列式按某一行、某一列进行展开. 若$A=(a_{i\times j})_{n\times n}$，则$|A|=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$. 改变行列式的某一行时并不会影响该行的代数余子式，故计算$\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}A_{ij}$时，只需用$b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$去替换$|A|$ 的第i行即可.

四、（本题满分 12 分）设 $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, 且 $AB=A+2B$,求 B .

解析：

$AB=A+2B \Rightarrow (A-2E)B=A$

因为 $|A-2E|=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$,所以 $A-2E$ 可逆且

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/2 & 3/2\\ -1/2 & 1/2 & 3/2\\ 1/2 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix},$$

故 $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/2 & 3/2\\ -1/2 & 1/2 & 3/2\\ 1/2 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

注释 本题知识点：

若 A 可逆，对分块矩阵 (A, E) 做初等行变换化为 (E, A^{-1}) ，即可得到 A 的逆.

五、（本题满分 12 分）讨论当 p , q 满足什么条件时, 线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-2x_3+3x_4=0,\\ x_1-3x_2-6x_3+2x_4=-1,\\ x_1+5x_2+10x_3-x_4=q,\\ 3x_1+x_2+px_3+4x_4=1.\end{cases}$$

无解?有惟一解?有无穷多解?在有无穷多解时, 求出通解.

解析：

设该线性方程组的增广矩阵为 B ,

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 3 & 0\\ 1 & -3 & -6 & 2 & -1\\ 1 & 5 & 10 & -1 & q\\ 3 & 1 & p & 4 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & p-2 & 0 & 2-q\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{q-3}{7}\end{pmatrix},$$

当 $p=2$ 且 $q\neq 2$ 时， $R(A)=3<R(B)=4$, 该线性方程组无解；

当 $p \neq 2$ 时，$R(A) = R(B) = 4$，该线性方程组有惟一解；

当 $p = 2$ 且 $q = 2$ 时，$R(A) = R(B) = 3 < 4$，该线性方程组有无穷多解. 此时，

$$B \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得与原线性方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = \dfrac{3}{7}, \\ x_4 = \dfrac{1}{7}, \end{cases}$$

取 x_3 为自由未知数，令 $x_3 = k$，得该线性方程组的通解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{7} \\ 0 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix},$$ **其中 k 取任意常数**.

注释 本题知识点：

讨论线性方程组解的存在情况时，通常要先对方程组的增广矩阵做初等行变换化行最简型矩阵，然后利用系数矩阵及增广矩阵的秩与未知量个数的关系进行判断，参看二（4）的注释.

六、（本题满分 12 分）已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 2ax_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

的一个特征值为 1，

1. 求 a 的值；
2. 求正交变换将此二次型化成标准形，并写出标准形 .

解析：

1. 该二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0 & a & -2\\ a & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}$.

因该二次型的一个特征值为1，所以有

$$|A-E|=\begin{vmatrix}-1 & a & -2\\ a & 3 & 4\\ -2 & 4 & -4\end{vmatrix}=(4-2a)^2=0\Rightarrow a=2.$$

2. 该二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}$.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 4-\lambda & 4\\ -2 & 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-6)(\lambda+6),$$

A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=-6$.

当 $\lambda_1=1$ 时，$(A-E)x=0$ 的基础解系为：$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化 $p_1=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\0\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=6$ 时，$(A-6E)x=0$ 的基础解系为：$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $p_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{30}\\5/\sqrt{30}\\2/\sqrt{30}\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=-6$ 时，$(A+6E)x=0$ 的基础解系为：$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $p_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$；

令 $P=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$，则 P 为正交矩阵，正交变换 $x=Py$，将此二次型化为标准形 $f=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$.

注释 本题知识点：

（1）实对称矩的特征值均为实数且不同的特征值对应的特征向量是正交的；

（2）实对称矩阵可正交相似于对角矩阵，其特征向量可构成一组标准正交基.

七、（本题满分 8 分）设 α，β，γ 均为 n 维向量，且向量组 $3\beta-\alpha$，$2\gamma-\beta$，$\alpha-\gamma$ 线性无

关，证明：向量组α，β，γ线性无关.

解析：

证法一 设 $k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma = 0$，　　(1)

令 $a_1 = 3\beta - \alpha$，$a_2 = 2\gamma - \beta$，$a_3 = \alpha - \gamma$，则解得

$$\alpha = \frac{1}{5}(a_1 + 3a_2 + 6a_3),\ \beta = \frac{1}{5}(2a_1 + a_2 + 2a_3),\ \gamma == \frac{1}{5}(a_1 + 3a_2 + a_3),$$

代入(1)式得

$$(k_1 + 2k_2 + k_3)a_1 + (3k_1 + k_2 + 3k_3)a_2 + (6k_1 + 2k_2 + k_3)a_3 = 0,$$

由于$a_1 = 3\beta - \alpha$，$a_2 = 2\gamma - \beta$，$a_3 = \alpha - \gamma$ 线性无关，所以有

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0, \\ 3k_1 + k_2 + 3k_3 = 0, \\ 6k_1 + 2k_2 + k_3 = 0, \end{cases}$$

解得$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，故向量组α，β，γ线性无关.

证法二　向量组$3\beta - \alpha$，$2\gamma - \beta$，$\alpha - \gamma$ 与向量组α，β，γ的关系可合写为

$$(3\beta - \alpha, 2\gamma - \beta, \alpha - \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

记作 $B = AK$.

$$\because\ |K| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

$$\therefore R(B) = R(A).$$

而向量组$3\beta - \alpha$，$2\gamma - \beta$，$\alpha - \gamma$线性无关，所以 $R(B) = 3$. 从而 $R(A) = 3$.

故向量组α，β，γ线性无关.

注释 本题知识点：

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关，当且仅当$\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = 0$时，$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. 此

题也可用向量组秩的性质证明，因向量组 $3\beta-\alpha$, $2\gamma-\beta$, $\alpha-\gamma$ 线性无关，且可用

α , β , γ 线性表示，故 $3=R(3\beta-\alpha\,,2\gamma-\beta\,,\alpha-\gamma)\le R(\alpha,\beta,\gamma)\le 3$ ，则

$R(\alpha,\beta,\gamma)=3$ ，向量组 α,β,γ 线性无关.

八（本题满分 12 分）设 A 为 n 阶实方阵，且满足 $A^2-3A+2E=O$，

1. 求 A 的特征值；
2. 证明 $R(A-E)+R(A-2E)=n$ ；
3. 问 A 是否可以和对角阵相似 ？请说明理由.

解析：

1. 设 λ 为 A 的特征值，A 对应于特征值 λ 的特征向量为 x ，即

$$Ax=\lambda x\,,\;x\neq 0\,,$$

又由于 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，所以有

$$\left(A^2-3A+2E\right)x=\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)x=0\,,\;x\neq 0\,,$$

从而 $\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=1$ 或 $\lambda=2$.

故 A 的特征值只可能为 1 或 2.

2．一方面，$\because A^2-3A+2E=\left(A-E\right)\left(A-2E\right)=O$

$$\therefore R\left(A-E\right)+R\left(A-2E\right)\le n\,,$$

另一方面，

$$\begin{aligned}&R\left(A-E\right)+R\left(A-2E\right)\\=&R\left(A-E\right)+R\left(2E-A\right)\\\ge&R\left(A-E+2E-A\right)=R\left(E\right)=n\,,\end{aligned}$$

综上所述，有 $R\left(A-E\right)+R\left(A-2E\right)=n$.

3． （1）当 A 的特征值都是 2 时，$A-E$ 可逆，由 $A^2-3A+2E=O$ 得，$A=2E$ 则 A 可以和对角阵相似； ----10 分

（2）当 A 的特征值都是 1 时，$A-2E$ 可逆，由 $A^2-3A+2E=O$ 得 $A=E$ ，则 A 可以和对角阵相似；

（3）当 **1和** 2均为A的特征值时，$A-E$不可逆且$A-2E$不可逆，

$(A-E)x=0$的基础解系所含向量个数为 $l_1=n-R(A-E)$，

$(A-2E)x=0$的基础解系所含向量个数为 $l_2=n-R(A-2E)$ ，

由 2 知$R(A-E)+R(A-2E)=n$，从而有$l_1+l_2=2n-n=n$，

故n阶方阵A有n个线性无关的特征向量，从而A可以和对角阵相似.

注释 本题知识点：

(1)若λ为A的特征值，则多项式$f(\lambda)$为$f(A)$的特征值；

(2)若A,B为n阶方阵，则$R(A)+R(B)\le n+R(AB)$，

$$R(A+B)\le R(A)+R(B).$$

(3)若n阶方阵有n个线性无关的特征向量，则其可相似于对角矩阵.