《线性代数》期末练习题（二）解答

一．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $A=\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，且整数 $n\geq 2$，则 $A^n=\begin{bmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. 设 $D=\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$，则 $M_{21}+M_{22}-M_{23}+M_{24}=$___0___.

4. 设 n 阶矩阵 A 的特征值互不相等，且 $|A|=0$，则 rank A=___n-1___.

5. 若 $A=\begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$是正定矩阵，则 t 的取值范围是 $-\sqrt{\frac{5}{2}}<t<\sqrt{\frac{5}{2}}$.

二．单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 是三阶矩阵，将 A 的第二行加到第一行上得到矩阵 B，将 B 的第一列的（－1）倍加到第二列上得到矩阵 C，若 $C=P^{-1}AP$，则 P 等于【 A 】.

（A）$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（B）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（D）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. 设 n 阶矩阵 A，B 的伴随矩阵分别为 A*，B*，则分块矩阵$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$的伴随矩阵为【D 】.

（A）$\begin{bmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{bmatrix}$

（B）$\begin{bmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|A^* \end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^* \end{bmatrix}$

（D）$\begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix}$

3. 设三阶矩阵 A，B 满足 $A^2B-A-B=E$，且 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则|B|等于【 B 】

（A）$-\frac{1}{2}$

（B）$\frac{1}{2}$

（C）－1

（D）1

4. 设 A 是 n 阶矩阵，b 是 n 维列向量，且 $rank\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}=rankA$，则【 C 】

（A）Ax=b 有无穷多个解

（B）Ax=b 有唯一解

（C）$\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$有非零解

（D）$\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$仅有零解

5. 设 n 维列向量组（Ⅰ）：α_1，α_2,…，α_m 线性无关，且 m＜n，则 n 维列向量组（Ⅱ）：β_1，β_2,…，β_m 线性无关的充要条件是【 D 】

（A）向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）线性表示

（B）向量组（Ⅱ）可由向量组（Ⅰ）线性表示

（C）向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价

（D）矩阵$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}$等价

三．（12 分）计算四阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 9 & 16 & 25\\ 60 & 40 & 30 & 24\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2\\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3\\ 120 & 120 & 120 & 120\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2\\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3\end{vmatrix}$$

$$=-(3-2)(4-3)(4-2)(5-4)(5-3)(5-2)=-12.$$

四．（12 分）设$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$，解矩阵方程

$$AXA+BXB=AXB+BXA+E.$$

解：矩阵方程$AXA+BXB=AXB+BXA+E$可以变形为(A−B)X(A−B)=E

从而 X=$((A-B)^{-1})^2$,因为$[A-B\quad E]=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

所以，X=$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

五．（12 分）设 n 阶实矩阵 A 有 n 个两两正交的特征向量，证明 A 是对称矩阵.

证明：设 A 有 n 个两两正交的特征向量$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$, 对应的特征值为$\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n$，

$$令\beta=\frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|},i=1,2,\cdots,n.$$

则 P=$[\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n]$为正交矩阵，且$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$依次为特征值$\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n$对应的特征向量。

于是, $P^{-1}AP$=diag($\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n$)=Λ，即 A= $P\Lambda P^{-1}=P\Lambda P^T$,

所以，$A^T=(P\Lambda P^T)^T=P\Lambda P^T$=A

六．（12 分）设

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\4\\0\\2\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}2\\7\\1\\3\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\a\end{bmatrix},\ \beta=\begin{bmatrix}3\\10\\b\\4\end{bmatrix}.$$

问 a，b 为何值时，

（1）β 不能由α_1，α_2，α_3线性表示；

（2）β 能由α_1，α_2，α_3唯一线性表示，并求出其表达式；

（3）β 能由α_1，α_2，α_3线性表示，但表达式不唯一，并求出一般表达式.

解：做初等行变换，得

$$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta]=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{bmatrix}.$$

(1)当 b≠2 时，rank$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]<$ rank$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta]$，β 不能由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性表示。

(2)当 b=2,a≠1 时，rank$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$=rank$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta]$=3，

此时 $[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta]\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，得唯一得表达式为$\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$。

(3) 当 b=2,a=1 时，rank$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$=rank$[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta]=2<3$,

此时 $[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta]\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

得同解方程组$\begin{cases}x_1=-2x_3-1\\x_2=\quad x_3+2\end{cases}$,

解得$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2c-1\\c+2\\c\end{bmatrix}$,

从而得表达式 $\beta=(-2c-1)\alpha_1+(c+2)\alpha_2+c\alpha_3$，c 可取任何数。

七．（12 分）设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值，$\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,1,1)^T$ 都是对应于特征值 6 的特征向量.

（1）求 A 的另一特征值及其对应的特征向量；

（2）求矩阵 A.

解：(1)设 A 得另一特征值为λ_3，则由 A 的秩为 2 可知$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A| = 0$，故$\lambda_3 = 0$.

因为$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值，所以其对应的线性无关特征向量有两个，即$\alpha_1=(1,1,0)^T, \alpha_2=(2,1,1)^T$，于是$\lambda_3=0$ 对应的特征向量$\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$与α_1，α_2正交，即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

得基础解系$\alpha=(-1,1,1)^T$，所以$\lambda_3=0$ 对应的全部特征向量为 kα，k 为任意非零数。

(2)令 P=$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha]$，则$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(6，6，0)$，

于是

$$A=P\begin{bmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 6 \end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 6 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

八．（12 分）设 n 阶矩阵 A 满足，且 $A^2+3A=4E$，证明：

（1）$rank(A+4E)+rank(A-E)=n$；

（2）A 可对角化；

（3）A+2E 可逆，并求其逆.

证明：(1)由 $A^2+3A=4E$ 知(A+4E)(A−E)=0，从而 rank(A+4E)+rank(A−E)≤n；

又

$$\mathrm{rank}(A+4E)+\mathrm{rank}(A-E)= \mathrm{rank}(A+4E)+\mathrm{rank}(-A+E)$$

$$\geq \mathrm{rank}(A+4E-A+E)=\mathrm{rank}(5E)=n,$$

因此 rank(A+4E)+rank(A−E)=n.

(2)设λ为 A 的任一特征值，则由 $A^2+3A=4E$ 知$\lambda^2+3\lambda-4=0$，解得$\lambda_1=-4$，$\lambda_2=1$，

从而 A 的特征值为−4 或 1。

因为特征值−4 和 1 的几何重数分别为 n−rank(A+4E)和 n−rank(A−E)，由(1)知

$$n-\mathrm{rank}(A+4E)+n-\mathrm{rank}(A-E)=n,$$

所以 A 可对角化。

(3) 由 $A^2+3A=4E$ 知

$$0=A^2+3A-4E=(A+2E)(A+E)-6E,$$

因此

$$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{6}(A+E).$$