

2021-2022 (秋)《线性代数》第一阶段测验题

一、单选题 (本题满分 30 分, 共有 10 道小题, 每道小题 3 分)

1. 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\quad) .$$

- (A) x^4 (B) $-x^4$ (C) x^3 (D) $-x^3$

2. 若 $f(x) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ x & 2 & 5 \\ 1 & 4 & x \end{vmatrix}$, 则其一次项的系数为 ().

- (A) -2 (B) 2 (C) -4 (D) 4

3. 若 $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 则 $\begin{vmatrix} 6x & -2y & -10z \\ -9 & 0 & 10 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (\quad) .$

- (A) 10 (B) -10 (C) 30 (D) -30

4. $\begin{vmatrix} 2x & x & -5 & 2 \\ 1 & x & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -x & 3 \\ -2 & 4 & 9 & -x \end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 的系数分别为 ().

- (A) 2, -1 (B) 2, 1 (C) 2, 0 (D) -2, 1

5. 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解, 则 λ 应满足 ().

- (A) $\lambda \neq 1, \lambda \neq 2$ (B) $\lambda \neq -1, \lambda \neq 2$

- (C) $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ (D) $\lambda \neq 1$ 或 $\lambda \neq 2$

6. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & 9 & x^2 \\ 1 & 8 & 27 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ 的全部根之和为 ().

- (A) 6 (B) -6 (C) 5 (D) -5

7. 已知四阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 设 A_{ij} 是 D_4 中元素 a_{ij} 的代数余子式, M_{ij} 是 a_{ij} 的

余子式, 则 $2A_{11} + 3M_{12} + 2M_{13} - A_{14} = ()$.

- (A) 6 (B) -6 (C) 10 (D) -24

8. A_1, A_2, A_3 均为 k_1 阶, k_2 阶, k_3 阶矩阵, $A = \begin{bmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ A_3 & & \end{bmatrix}$, 则 $|A| = ()$.

- (A) $(-1)^{k_1 k_2 k_3} |A_1| |A_2| |A_3|$ (B) $(-1)^{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} |A_1| |A_2| |A_3|$
(C) $-|A_1| |A_2| |A_3|$ (D) $(-1)^{k_1 + k_2 + k_3} |A_1| |A_2| |A_3|$

9. 设 A^* 是 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵, 则有 $()$.

- (A) $A^* = |A| A^{-1}$ (B) $|A^*| = |A|^{n-1}$
(C) $(kA)^* = k^n A^*$ (D) $(A^*)^* = 0$

10. A, B, C, I 均为 n 阶矩阵, I 为单位矩阵, 且 $ABC = I$, 则有 $()$.

- (A) $ACB = I$ (B) $BAC = I$
(C) $CBA = I$ (D) $BCA = I$

二、选择题 (本题满分 20 分, 共有 5 道小题, 每道小题 4 分)

11. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 均为 4 维列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1)$, $B = (\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2)$,

且 $|A| = 2$, $|B| = 3$, 则行列式 $|A + B| = ()$.

- (A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20

12. 设 n 阶方阵 A , 则 $|A| = 0$ 的必要条件是 $()$.

- (A) A 中有两行 (或列) 元素对应成比例
(B) A 中各行 (或列) 元素之和为零
(C) A 中有一行 (或列) 元素全为零
(D) 齐次方程组 $Ax = 0$ 有至少有两组解

13. 设 A 为三阶矩阵, $|A| = 4$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^* - 2A = ()$.

- (A) 4 (B) -4 (C) 32 (D) -32

14. 设 $A, B, A+B, A^{-1} + B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = ()$.

- (A) $A^{-1} + B^{-1}$ (B) $A + B$

(C) $A(A+B)^{-1}B$ (D) $(A+B)^{-1}$

15. 设 A, B 均为 n 阶方阵, B 是对换 A 的第一、三列所得之矩阵, 若 $|A| \neq |B|$, 则有 ().

(A) $|A|$ 可能为零 (B) $|A| \neq 0$
(C) $|A+B| \neq 0$ (D) $|A-B| \neq 0$

三、(满分 10 分) 求三次多项式 $p(x)$ 满足:

$$p(0) = 0, \quad p(1) = -1, \quad p(2) = 4, \quad p(-1) = 1.$$

求 $p(x)$.

四、(满分 10 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}.$$

五、(满分 10 分) 已知 $\alpha = (1, 2, 1)^T, \beta = (2, -1, 2)^T, A = \alpha\beta^T$, 求 $(A+I)^{2020}$.

六、(满分 10 分) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 求矩阵 Q , 使得 $AQ = C$.

七、(满分 10 分) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 且 $AC + BA + C = -B$, 求

$$C^{2020}.$$