高等数学 A（下）期末试题 (2022.06.12)

（共八道大题）

一、（本题满分 10 分）设直线 L 与直线

$$\boldsymbol{L}_1: \begin{cases} \boldsymbol{x} = 5 - 2\boldsymbol{\theta}, \\ \boldsymbol{y} = 1 + \boldsymbol{\theta}, \\ \boldsymbol{z} = -1 + 3\boldsymbol{\theta} \end{cases} \quad (\text{其中}\,\boldsymbol{\theta}\,\text{为参数})\text{和}\ \boldsymbol{L}_2: \begin{cases} 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 3, \\ \boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{z} = 6 \end{cases} \quad \text{都垂直，}$$

并且过点 $(2,\ -5,\ 9)$，求直线 L 的方程.

二、（本题满分 10 分）设函数 $f\left(x, y\right) = \int_0^{xy} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \varphi\left(2x+y,\ y\cos x\right)$，其中 φ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

三、（本题满分 10 分）

设 $f\left(x\right)$ 是 $\left(-\infty,\ +\infty\right)$ 上的连续函数，区域 $\boldsymbol{D} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x}^3 \le \boldsymbol{y} \le 2,\ -2 \le \boldsymbol{x} \le 2\right\}$，

计算二重积分 $\boldsymbol{I} = \iint\limits_{\boldsymbol{D}} \left\{ 1 + 2\boldsymbol{y}\,[(\boldsymbol{x}+1)\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}-1)\,\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x})] \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ 的值.

四、（本题满分 12 分）计算曲线积分

$$I = \int_L \frac{y^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} + 3\left[3x + y^2 \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] \mathrm{d}y\,,$$

其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 16$ 上由点 $A\left(4,\ 0\right)$ 沿逆针方向到点 $B\left(-4,\ 0\right)$ 的上半圆弧.

五、（本题满分 12 分）计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} \left(3x^3 + y^3 e^z\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(3y^3 + z^2 e^x\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z = 4 - y^2, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面（$z \ge 0$）的上侧.

六、（本题满分 12 分） 设曲面Σ的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$，在此曲面$\Sigma$的第一卦限上任取一点$M(x,y,z)$，过点$M$作曲面$\Sigma$的切平面$\Pi$，求此切平面$\Pi$与三个坐标平面所围成的四面体的最小体积$V$.

七、（本题满分 25 分）

（1）判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}\left(\sqrt{1+n}-\sqrt{n-1}\right)$的收敛性，并说明理由.

（2）求函数 $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{3}+\arctan\dfrac{x+3}{x-3}}$关于$x$的幂级数展开式的收敛半径及其中$x^3$的系数.

（3）设在区间$[-\pi,\pi]$上，函数 $\boldsymbol{f(x)}$是连续的偶函数，且满足 $\boldsymbol{f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$，

证明 $\boldsymbol{f(x)}$在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶级数展开式中系数$a_{2n}=0,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots$.

八、（本题满分 9 分） 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，且满足：

$$\int_{L(t)} f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s+\iint_{S(t)}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega(t)}2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中曲线$L(t):\begin{cases}x^2+y^2=t^2,\\ z=0\end{cases}$；曲面$S(t)$为上半球体$\Omega(t)$的整个边界；

$\Omega(t)$: $x^2+y^2+z^2\le t^2,\ z\ge 0$，$t>0$. 求$f(x)$.