中国农业大学

2020 ~2021 学年春季学期（2021.06 ）

高等数学 A（下） 课程试题（A 卷）

（本试卷共九道大题，考试时间 100 分钟）

一、单项选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）.

1. 已知向量$\vec{a},\ \vec{b}$，又 $|\vec{a}|=6,\ |\vec{b}|=3$，向量$\vec{a}$ 和向量 $\vec{b}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$，则$|\vec{a}\times\vec{b}|=$（ **B** ）.

A. $9\sqrt{3}$　　**B**. 9　　**C**. 18　　**D**. $6\sqrt{3}$

2. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,\ y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,\ y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$点处（ **D** ）.

A. 连续，偏导数不存在　　**B**. 连续，偏导数存在

C. 不连续，偏导数不存在　　**D**. 不连续，偏导数存在

3. 设Σ为球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$，取外侧，则在下列四个选项中，正确的选项是（ **C** ）.

A. $\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=0,\ \ \iint\limits_{\Sigma}x^2dydz=0$　　**B**. $\iint\limits_{\Sigma}xdS=0,\ \ \iint\limits_{\Sigma}xdydz=0$

C. $\iint\limits_{\Sigma}x\,dS=0,\ \ \iint\limits_{\Sigma}x^2\,dydz=0$　　**D**. $\iint\limits_{\Sigma}xydS=0,\ \ \iint\limits_{\Sigma}ydzdx=0$

4. 极坐标系下的累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\rho d\rho$在直角坐标系下的累次积分可写为（ A ）.

A. $\int_0^2dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$　　**B**. $\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

C. $\int_0^2dx\int_0^1f(x,y)dy$　　**D**. $\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$

5. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，则$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$的（ B ）.

A. 收敛点，收敛点　　**B**. 收敛点，发散点

C. 发散点，收敛点　　**D**. 发散点，发散点

二、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设C为圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和柱面$z^2=2x$的交线，则曲线C在xOy面上的投影曲线方程为 ________. （$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$）

2. 函数$z=f(x,y)$在$(x_0,\,y_0)$点的微分为$dz\big|_{(x_0,\,y_0)}=3dx-2dy$，且该函数在$(x_0,\,y_0)$点沿$\vec{l^0}$方向增长最快，$\vec{l^0}$为单位向量，则$\vec{l^0}=$ ________. （$\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}},-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$）

3. 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在区间$(-\pi,\,\pi]$上的定义为

$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x\le 0\\ 1+x, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则$f(x)$的傅里叶级数在$x=5\pi$处收敛于________. （$\dfrac{1}{2}$）

4. 曲线$\begin{cases}y=x\\ z=x^2\end{cases}$在点$M(1,1,1)$处的切线方程为________. （$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$）

5. 设L是圆周$x^2+y^2=4$，则曲线积分$\oint_L(x^2+y^2)ds=$ ________. （16π）

三、（本题满分 14 分，每小题 7 分）

1. 计算二重积分$I=\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中$D=\left\{(x,\,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 4\right\}$.

解 $I=\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdx=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{\rho^2}\rho d\rho$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}e^{\rho^2}\Big|_0^2=\pi(e^4-1).$$

2. 设$z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$，其中$f$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cos x+f_3'e^{x+y}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(-f_{12}''\sin y+f_{13}''e^{x+y})\cos x+f_3'e^{x+y}+e^{x+y}(-f_{32}''\sin y+f_{33}''e^{x+y})$$

$$=f_3'e^{x+y}-f_{12}''\cos x\sin y+f_{13}''e^{x+y}\cos x-f_{32}''e^{x+y}\sin y+e^{2(x+y)}f_{33}''.$$

四、（本题满分 10 分）求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$的平面方程.

解 设已知直线的方向向量为$\vec{s}=(3,\ 2,1)$，令 $A(3,1,-2)$， $B(4,-3,0)$

由于点 $B(4,-3$, 在已知直线上，所以点 $B(4,-3$, 在所求平面上.

设所求平面法向量为$\vec{n}$，则

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -4 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-8,\ 5,\ 14)=-(8,\ \ -,$$

因此所求平面方程为

$$8(x-3)-5(y-1)-14(\ \ =$$

即

$$8x-5y-14z-47=.$$

五、（本题满分 10 分）求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ 在区域 $x^2+y^2\le 25$ 上的最大值和最小值.

解 由于函数 $f(x,y)$ 在区域 $x^2+y^2\le 25$ 上连续，所以 $f(x,y)$ 在区域 $x^2+y^2\le 25$ 上存在最大值和最小值

（**1**）考虑函数 $f(x,y)$ 在区域 $x^2+y^2<25$ 内的最大值和最小值

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-12=\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y+16=\end{cases}\qquad \text{解得}\quad \begin{cases}x=6\\ y=-8\end{cases}$$

所以在区域内无解，故连续函数 $f(x,y)$ 的最大值和最小值必在边界 $x^2+y^2=25$ 上达到.

（**2**）考虑函数 $f(x,y)$ 在边界 $x^2+y^2=25$ 上的最大值和最小值

令 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2$ ，解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 12 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 16 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$，$\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$

由于 $f(3,-4) = -$ ，$f(-3,4) = 125$

所以函数 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在区域 $x^2 + y^2 \le 25$ 上的最大值为 125，最小值为 -75.

六、（本题满分 10 分）计算曲线积分 $\int_L \dfrac{(e^x \sin y + 1)dx + (e^x \cos y + x^2)dy}{x^2 + y^2}$，**其中** L **为曲线** $x^2 + y^2 = 4$ **的上半部分，方向为逆时针.**

解 令 $A(-2,0)$, $B(2,0)$，添加辅助线 $\overrightarrow{AB}$，

L 和 $\overrightarrow{AB}$ 所围的域为 D

$$\int_L \frac{(e^x \sin y + 1)dx + (e^x \cos y + x^2)dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}\int_L (e^x \sin y + 1)dx + (e^x \cos y + x^2)dy$$

$$= \frac{1}{4}\left(\oint_{L+\overline{AB}} (e^x \sin y + 1)dx + (e^x \cos y + x^2)dy - \int_{\overline{AB}} (e^x \sin y + 1)dx + (e^x \cos y + x^2)dy\right) \text{----8 分}$$

$$= \frac{1}{4}\iint_D 2x\,dxdy - \frac{1}{4}\int_{\overline{AB}} (e^x \sin y + 1)dx$$

$$= 0 - \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} dx = -1.$$

七、（本题满分 10 分）计算曲面积分 $\iint_\Sigma \dfrac{xdydz + 2dzdx + (z+1)^2 dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$，**其中曲面** Σ **为** $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ **的上侧.**

解 添加曲面 $\Sigma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ z = 0 \end{cases}$，取下侧，

设 Σ 和 Σ_1 所围的域为 Ω，$D_{xy} = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \le 1\right\}$

$$\iint_\Sigma \frac{xdydz + 2dzdx + (z+1)^2 dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \iint_\Sigma xdydz + 2dzdx + (z+1)^2 dxdy$$

$$= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz + 2dzdx + (z+1)^2 dxdy - \iint_{\Sigma_1} xdydz + 2dzdx + (z+1)^2 dxdy$$

$$= -\iiint_\Omega (2z + 3)\,dxdydz - \iint_{\Sigma_1} \quad d$$

$$= -2\iiint_{\Omega} z dxdydz - 3\iiint_{\Omega} dxdydz - \iint_{\Sigma_1} dxdy$$

$$= -2\int_{-1}^{0} z dz \iint_{D_z} dxdy - 3\cdot\frac{2}{3}\pi + \iint_{D_{xy}} dxdy$$

$$= -2\pi\int_{-1}^{0} z(1-z^2)dz - 2\pi + \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

八、（本题满分 10 分）设 $u_n(x) = x^n + \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$，**求级数** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **的收敛域与和函数.**

解　令 $a_n(x) = x^n$ ，$b_n(x) = \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 收敛域为 $(-1, 1)$.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$ 收敛半径为

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} =$$

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$，该级数收敛

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$，该级数收敛

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$ 收敛域为 $[-1, 1]$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛域为 $(-1, 1)$.

令 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$，　则

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1)$$

令 $S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$，在 $(-1, 1)$ 内，有

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$=(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+x=(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}dx+x$$

$$=(x-1)\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)dx+x=(x-1)\int_0^x\frac{1}{1-x}dx+x$$

$$=(1-x)\ln(1-x)+x,\qquad x\in(-1,1)$$

故 $S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\dfrac{x}{1-x}+(1-x)\ln(1-x)+x=\dfrac{2x-x^2}{1-x}+(1-x)\ln(1-x)$， $x\in(-1,1)$.

九、（本题满分 6 分）已知函数 $f(x)$ 可导，且 $0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足

$x_{n+1}=f(x_n)\ (n=1,2,\cdots)$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

证明　由 $x_{n+1}=f(x_n)$ 可得

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|$$

$$<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|=\frac{1}{2}|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|$$，其中 ξ 介于 x_n 与 x_{n-1} 之间

由上可得　$|x_{n+1}-x_n|<\dfrac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$

而　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ 收敛

根据正项级数的比较判别法可得

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.