《线性代数》期末练习题（一）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1.已知 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且 $n\geq 2$，则 $A^n-2A^{n-1}=$ ____0____.

2. 已知矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&2\\3&1&0\\5&2&0\end{pmatrix}$，则 $\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}=$ ____ $4\begin{pmatrix}0&4&-2\\0&-10&6\\1&0&0\end{pmatrix}$ ____.

$\begin{pmatrix}0&8&-4\\0&-20&12\\2&0&0\end{pmatrix}$

3. 已知 4 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\beta,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ $|A|=4$，$|B|=1$，则

$|A+B|=$ ____40____

4. 设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是正交矩阵，且 $b=(1,0,0)^T$，$a_{11}=1$，则 $Ax=b$ 有一个解为____ $(1, 0, 0)^T$ ____.

5. 设 n 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n}{n}$，，则当 λ 为____ $\lambda<\frac{1}{n}$ ____，$|A-\lambda E|$ 为正定矩阵.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a&1\\2&b\end{pmatrix}$，$A$ 与 B 可交换（$AB=BA$）的充要条件是（　　　　）

（A）　$a=b-1$.（B）$a=b+1$.（（C）$a=b$（D）$a=2b$.

2. 设 n 阶非零矩阵 A 满足 $A^3=o$，则

（A）$E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.（B）$E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

（C）$E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.　（D）$E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.

3. 设 A, B 均为 $m\times n$ 矩阵，给定下面四个命题：

①若 $Ax=0$ 的解均为 $Bx=0$ 的解，则 $R(A)\geq R(B)$；

②若 $R(A)\geq R(B)$，则 $Ax=0$ 的解均为 $Bx=0$ 的解；

③若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $R(A)=R(B)$；

④若 $R(A)=R(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

则上述命题正确的是（　　　）

(A）①②　。　　(B)①③　。　　(C)②④　。　(D) ③④。

4. 设 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，交换 A 的第一行与第二行得到 B，则(　　　　　)

(A)交换 A^* 的第一例与第二列得到 B^*.

(B)交换 A^* 的第一行与第二行得到 B^*.

(C) 交换 A^* 的第一例与第二列得到 $-B^*$.

(D)交换 A^* 的第一行与第二行得到 $-B^*$.

5. 已知 η_1,η_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，ξ_1,ξ_2 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意实数，则 $Ax=b$ 的通解为

(A) $k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$. (B) $k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$.

(C) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1+\eta_2)+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$. (D) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1-\eta_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$.

三、(12 分）计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

四、(12 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$A^*X=A^{-1}+2X$，求矩阵 X.

五、(12 分）已知齐次方程组（I）的基础解系为：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\5\\7\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\7\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\20\end{pmatrix}$$

齐次方程组（II）的基础解系为：

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\4\\7\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\\2\end{pmatrix},$$

求齐次方程组（I）和（II）的公共解.

六（10 分）设 p_1,p_2 分别是 n 阶矩阵 A 不同特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，证明 p_1+p_2 必不是 A 的特征向量.

七（12 分）设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\a+1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2a\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},$$

试问当 a 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 等价？当 a 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 不等价？

八（12 分）已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+6x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3,a>0$$

通过正交变换化为标准形 $7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2$，

求参数 a 及所用的正交变换.