第八章　　向量代数与空间解析几何

习题 8 - 1　P_{13}　15.

15. 设已知两点 $M_1\left(4,\sqrt{2},1\right)$ 和 $M_2\left(3,0,2\right)$，计算向量 $\overline{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

习题 8 - 2　P_{23}　9(3)；10；补充题 1.

9（3）. 已知向量 $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ 和 $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}$ ，计算 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

10．已知$\overrightarrow{OA}=\vec{i}+3\vec{k}$ ，$\overrightarrow{OB}=\vec{j}+3\vec{k}$，求$\Delta OAB$的面积.

补充题 1.　已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的模分别为$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\sqrt{2}$，求$|\vec{a}\times\vec{b}|$.

习题 8 - 3　$\mathbf{P_{30}}$　6；补充题 2.

6．一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\vec{a}=(2,1,1)$ 和 $\vec{b}=(1,-1,0)$，试求这平面方程.

补充题 2. 求通过点 $A(1,1,1)$ 和 $B(2,2,2)$ 且与平面 $\Pi: x+y-z=0$ 垂直的平面方程.

习题 8 – 4　$\mathbf{P_{36\text{-}37}}$　7；　13；　补充题 3.

7．求过点$(0,2,4)$且与两平面$x+2z=1$和$y-3z=2$平行的直线方程.

13．求点$P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$的距离.

补充题 3. 求过点 $P_0(3,1,-2)$ 且通过直线 $l:\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

习题 8 – 5　P_{45}　4；7.

4．求与坐标原点 O 及点 $(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点的全体所组成的曲面的方程，它表示怎样的曲面？

7．将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

习题 8 – 6　$\mathbf{P_{51}}$　3；　7.

3．分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

7．求上半球 $0 \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2 \le ax(a>0)$ 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

第九章　　多元函数微分法及其应用

习题 9 - 2　P$_{71}$　4；5；9（2）.

4．设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$

5．曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$，在点（2，4，5）处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

9（2）．验证：$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$

习题 9 - 3　$\mathbf{P_{78}}$　3，5；补充题 1．

3．求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0.1$, $\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

5. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；

(2) $f_x(x,y)$ 、 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微；

(4) $f_x(x,y)$ 、 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则下列四个选项中正确的是（　　）.

(A) $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$；　　　　(B) $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$；

(C) $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$；　　　　(D) $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$.

补充题 1.　设 $z=e^{\sin(x+y)}$，求 dz .

习题 9 - 4　P_{85}　2；9；12（3）.

2．设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\dfrac{x}{y}$， $v=3x-2y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

9．设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\dfrac{y}{x}$， $F(u)$ 为可导函数，证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

12（3）．对函数 $z=f(xy^2,x^2y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$（其中 f 具有二阶连续偏导数）.

习题 9 – 5　$P_{91\text{-}92}$　2；　9；10（1）

2．设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，　求 $\dfrac{dy}{dx}$.

9．设 $z^3-3xyz=a^3$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

10（1）．设 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+2y^2+3z^2=20 \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dz}{dx}$.

习题 9 - 6　P_{103}　2(1)；　6；　12.

2．设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$ 是空间中的质点 M 在时刻 t 的位置，求质点 M 在时刻 t_0 的速度向量和加速度向量以及在任意时刻 t 的速率.

(1) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(t+1)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$, $t_0=1$;

6．求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$，在点（1，1，1）处的切线及法平面方程.

12. 试证曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ \ (a>0)$上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于$a$.

习题 9 - 7　P_{111}　6；8.

6.　求函数$u=x^2+y^2+z^2$在曲线$x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$上点（1，1，1）处，沿曲线在该点的切线正方向（对应于t增大的方向）的方向导数.

8. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求$\mathbf{grad}\,f(0,0,0)$ 及$\mathbf{grad}f(1,1,1)$.

习题 9 – 8　P_{121}　4；11；补充题 2．

4．求函数 $f(x,y)=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$的极值．

11．抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值．

补充题 2. 已知 $f(1,\ 1)=-1$ 为函数 $f(x,y)=ax^3+by^3+cxy$ 的极值，求 a,b,c.

第十章　　重积分

习题 10 - 2　P$_{157\text{-}159}$　2(3)；　6 (6)；补充题 1；14(2)；15(1)；18．

2 (3)．画出积分区域，并计算二重积分 $I=\iint\limits_{D} e^{x+y}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\ |x|+|y|\le 1\right\}$．

6 (6)．改换二次积分 $\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序：

补充题 1.　计算积分 $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y$．

14(2)．利用极坐标计算$\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由圆周$\boldsymbol{x^2+y^2=1}$及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

15(1)．选用适当的坐标计算$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由直线$x=2, y=x,$及曲线$xy=1$所围成的闭区域.

18．计算以xoy面上的圆周$x^2+y^2=ax$围成的闭区域为底，而以曲面$z=x^2+y^2$为顶的曲顶柱体的体积.

习题 10 – 3　$\mathbf{P_{167}}$　7；　9(2)；10(2)；补充题 2.

7．计算 $\iiint\limits_{\Omega} xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由平面$z=0, z=y, y=1$以及抛物柱面$y=x^2$所围成的闭区域.

9（2）．利用柱面坐标计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由曲面$x^2+y^2=2z$及平面$z=2$所围成的闭区域.

10（2）．利用球面坐标计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$，其中闭区域$\Omega$是由不等式$x^2+y^2+(z-a)^2 \le a^2$，$x^2+y^2 \le z^2$所确定.

补充题 2. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,\mathrm{d}v$，其中Ω是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成的闭区域.

习题 10 - 4 　$\mathbf{P_{178}}$　3.

3． 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

第十一章　　曲线积分与曲面积分

习题 11 – 1　P_{193}　3(4).

3（4）．计算对弧长的曲线积分：$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界．

习题 11 – 2　P_{203}　3 (4) ；4（1），4（4）；补充题 1．

3（4）．计算对坐标的曲线积分：$\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$（按逆时针方向绕行）．

4．计算 $\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$，其中 L 是：

（1）　抛物线 $y^2=x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧；

（4）曲线 $x=2t^2+t+1, y=t^2+1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧．

补充题 1. 计算 $I=\int_L (x^2+2xy)\,\mathrm{d}\,x+(x^2+y^4)\,\mathrm{d}\,y$,其中 L 为由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的曲线 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$.

习题 11 - 3　P_{217}　2(1)；　3；补充题 2.

2（1）．利用曲线积分，求星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 所围成的图形的面积．

3．计算曲线积分$\oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 2$，L 的方向为逆时针方向.

补充题 2. 计算$\int_L (x^2 + 3y)\,\mathrm{d}\,x + (y^2 - x)\,\mathrm{d}\,y$，其中 L 为上半圆周 $y = \sqrt{4x - x^2}$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(4,0)$.

习题 11 – 4　P_{222}　5(2)；6 (3).

5（2）．计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分.

6（3）．计算对面积的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，

其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\ge h(0<h<a)$ 的部分.

习题 11 - 5　$\mathbf{P_{231}}$　3 (2)；4（2)；补充题 3.

3（2）．计算对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy + xdydz + ydzdx,$ 其中Σ是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 z=0 及 z=3 所截得的在第一卦限内的部分的前侧.

4（2）．把对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$ 化成对面积的曲面积分，其中：Σ 是抛物面 $z = 8 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

补充题 3. 求 $\iint\limits_{\Sigma} z^2 dxdy$,其中$\Sigma$为$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧 .

习题 11 - 6　$\mathbf{P_{239}}$　1(2)；补充题 4；2(2).

1（2）．利用高斯公式计算曲面积分：$\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$ ，其中$\sum$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

补充题 4. 利用高斯公式计算曲面积分：

$\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 其中$\sum$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧；

2（2）．求向量 $\boldsymbol{A}=(2x-z)\vec{i}+x^2y\vec{j}-xz^2\vec{k}$ 穿过曲面 $\sum$ 流向指定侧的通量，其中 Σ 为立方体 $0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$ 的全表面，流向外侧．

习题 11 - 7　$\mathbf{P_{248}}$　2(1)；4(1)．

2（1）．利用斯托克斯公式，计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} ydx+zdy+xdz$，其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$，若从 x 轴的正向看去，这圆周是取逆时针方向；

4（1）．利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ 化为曲线积分，并计算积分值，其中 $\boldsymbol{A}=y^2\vec{i}+xy\vec{j}+xz\vec{k}$，$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，$\boldsymbol{n}$ 是 $\sum$ 的单位法向量.

第十二章　　无穷级数

习题 12- 1　P$_{258}$　2 (2)；　3 (3).

2(2). 根据级数收敛与发散的定义判定级数 $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$ 的收敛性.

3 (3). 判别级数 $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$ 的收敛性.

习题 12- 2　P$_{271-272}$　1 (5)；　2 (3)；　4 (1)；　4 (6)；　5 (2)；补充题 1.

1 (5). 用比较审敛或极限形式的比较审敛法判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\,(a>0)$ 的收敛性.

2 (3)．用比值审敛法判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n \cdot n!}{n^n}$的收敛性．

4．判定下列级数的收敛性：

(1) $\frac{3}{4}+2(\frac{3}{4})^2+3(\frac{3}{4})^3+\cdots+n(\frac{3}{4})^n+\cdots$;

(6) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}+\cdots(a>0,b>0)$.

5 (2)．判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

补充题 1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

习题 12 - 3　P$_{281}$　1 (7)，　1 (8)；　2 (3) .

1．求下列幂级数的收敛区间：

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

2 (3)．利用逐项求导或逐项积分，求级数 $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ 的和函数.

习题 12 - 4　$\mathbf{P_{290}}$　6; 补充题 2.

6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

补充题 2． 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展成关于 x 的幂级数.

习题 12 - 7　　P_{321}　1 (1).

1 (1). 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为：$f(x)=3x^2+1\ (-\pi\le x<\pi)$.

高等数学 A（下） 试题一

一、单项选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）.

1. 已知向量$\vec{a},\ \vec{b}$，又 $|\vec{a}|=6,\ |\vec{b}|=3$，向量$\vec{a}$ 和向量 $\vec{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{6}$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=$（　）.

A．$9\sqrt{3}$　　**B**．9　　**C**．18　　**D**．$6\sqrt{3}$

2. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,\ y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,\ y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$点处（　　）.

A．连续，偏导数不存在　　**B**．连续，偏导数存在

C．不连续，偏导数不存在　　**D**．不连续，偏导数存在

3. 设Σ为球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$，取外侧，则在下列四个选项中，正确的选项是（　）.

A．$\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=0,\ \iint\limits_{\Sigma}x^2dydz=0$　　**B**．$\iint\limits_{\Sigma}xdS=0,\ \iint\limits_{\Sigma}xdydz=0$

C．$\iint\limits_{\Sigma}xdS=0,\ \iint\limits_{\Sigma}x^2dydz=0$　　**D**．$\iint\limits_{\Sigma}xydS=0,\ \iint\limits_{\Sigma}ydzdx=0$

4. 极坐标系下的累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\rho d\rho$ 在直角坐标系下的累次积分可写为（　　）.

A．$\int_0^2dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$　　**B**．$\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

C．$\int_0^2dx\int_0^1f(x,y)dy$　　**D**．$\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$

5. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的（　　）.

A．收敛点，收敛点　　**B**．收敛点，发散点

C． 发散点，收敛点　　　　　　　　**D**． 发散点，发散点

二、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 C 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和柱面 $z^2=2x$ 的交线，则曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线方程为 ______________ ．

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 点的微分为 $dz\big|_{(x_0,\ y_0)}=3dx-2dy$，且该函数在 $(x_0,\ y_0)$ 点沿 $\overrightarrow{l^0}$ 方向增长最快，$\overrightarrow{l^0}$ 为单位向量，则 $\overrightarrow{l^0}=$ ____________ ．

3. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在区间 $(-\pi,\ \pi]$ 上的定义为

$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi<x\le 0 \\ 1+x, & 0<x\le\pi \end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=5\pi$ 处收敛于__________ ．

4. 曲线 $\begin{cases} y=x \\ z=x^2 \end{cases}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切线方程为______________ ．

5. 设 L 是圆周 $x^2+y^2=4$，则曲线积分 $\oint_L (x^2+y^2)ds=$ __________ ．

三、（本题满分 14 分，每小题 7 分）

1. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,\ y)\big|x^2+y^2\le 4\right\}$.

2. 设 $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（本题满分 10 分）求过点 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

五、（本题满分 10 分）求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ 在区域 $x^2+y^2\le 25$ 上的最大值和最小值.

六、（本题满分 10 分）计算曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{(e^x\sin y+1)dx+(e^x\cos y+x^2)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为曲线 $x^2+y^2=4$ 的上半部分，方向为逆时针.

七、（本题满分 10 分）计算曲面积分 $\displaystyle\iint\limits_\Sigma \frac{xdydz+2dzdx+(z+1)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$，其中曲面 Σ 为 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

八、（本题满分 10 分）设$u_n(x)=x^n+\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$，**求级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

的收敛域与和函数.

九、（本题满分 6 分）已知函数$f(x)$可导，且$0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$，设数列$\{x_n\}$满足

$x_{n+1}=f(x_n)$（$n=1$，2，$\cdots$），**证明：级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$**绝对收敛.**

高等数学 A（下） 试题二

一、单项选择题(本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分)

1. 函数 $f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处连续是函数在该点有偏导数的（　　）

（A） 充分而不必要条件.　　　　（B） 必要而不充分条件.

（C） 必要而且充分条件.　　　　（D） 既不必要也不充分条件.

2. 函数 $z=2x+y$ 在点 $(1,2)$ 沿各方向的方向导数的最大值为（　　　　）

(A) 3.　　(B) 0.　　(C) $\sqrt{5}$.　　(D) 2.

3. 设 $I=\int_1^3 dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$，改变积分次序，则 $I=$（　　）

（A） $\int_0^{\ln 3} dy\int_0^{e^y} f(x,y)dx$.　　（B） $\int_0^{\ln 3} dy\int_0^{3} f(x,y)dx$.

（C） $\int_0^{\ln 3} dy\int_{e^y}^{3} f(x,y)dx$.　　（D） $\int_1^{3} dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$.

4. 设 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=10 \\ z=1 \end{cases}$，则曲线积分 $\oint_L \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}=$（　　）

（A） $\frac{4}{5}\pi$.　　（B） $\frac{3}{5}\pi$.　　（C） $\frac{2}{5}\pi$.　　（D） $\frac{1}{5}\pi$.

5. 设 $u_n=(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$，则级数（　　）

（A） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛.　　（B） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散.

（C） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散.　　（D） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

二、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）.

1．若向量 α,β,γ 中任两个的夹角都为 $\frac{\pi}{3}$，且模 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$，则模

$|\alpha+\beta+\gamma|=$____________.

2．　曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=t\\ y=t^2\\ z=t^3\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程为______________.

3．　若 $f(x,y)=x^2+(y^2-1)\arctan\sqrt{xy}$，则 $f'_x(1,1)=$_____________.

4．　曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积为______________.

5．设周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上的和函

数为 $S(x)$，则 $S(\pi)=$__________ **.**

三、（本题满分 10 分）

求过三点 $A(1,1,1)$、$B(0,1,-1)$ 和 $C(2,3,1)$ 的平面的方程.

四、（本题满分 10 分）

设函数 $z=f\left(x^2+y^2,x^2-y^2\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、（本题满分 10 分）

计算曲线积分 $\int_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$，　其中 L 是从点 $A(1,0)$ 沿抛物线 $y=1-x^2$ 到

点 $B(-1,0)$ 的有向曲线.

六、（本题满分 10 分）

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)dzdx+(x+2z)dxdy$，其中 Σ 是抛物面

$z=x^2+y^2\quad(0\le z\le 1)$，取下侧.

七、（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}x^n$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

八、（本题满分 10 分）

设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=q$，求 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值．并由此证明不等式：

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

九、（本题满分 5 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数且 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 发散.

十、（本题满分 5 分）

设 $f\left(x,y\right)$ 在闭区域 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^2+y^2\le y,x\ge0\right\}$ 上连续，且

$$f\left(x,y\right)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f\left(x,y\right)dxdy,$$

求 $f\left(x,y\right)$.