2017 ~2018 学年秋季学期《线性代数 》课程考试试题解析

一、　　填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分，请将合适的答案填在每题的空中）

1．设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，$A^*$为 A 的伴随矩阵，则$|(\frac{1}{4}A)^{-1}-A^*|=$________.

解析：

由于$|A|=10, |A^*|=|A|^2=10^2, A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{10}A^*$,

则$|(\frac{1}{4}A)^{-1}-A^*|=|4A^{-1}-A^*|=\left|\frac{-6}{10}A^*\right|=\frac{(-6)^3}{10}$

注释　本题知识点：

（1）　$|A^*|=|A|^{n-1}$;

（2）　$AA^*=A^*A=|A|E$;

（3）　$|\lambda A|=\lambda^n|A|$.

答案：$\frac{(-6)^3}{10}$

2．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的三维列向量组，则向量组

$A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$的秩为__________.

解析：

矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$的秩为2,

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的三维列向量组，因此，矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆，

而$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$的秩为 2.

注释　本题知识点：

(1)矩阵的秩的定义；

(2)矩阵秩的性质：若 $A=PBQ$，其中 P,Q 为可逆的矩阵，则 $R(A)=R(B)$

(3)向量组的秩与矩阵秩的关系：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩等于矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的秩.

答案：　　2　　　.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，要使 $A+kE$ 为正定矩阵，k 应满足_______.

解析：$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 特征值为 $\lambda=-1,2,1$，则 $A+kE$ 的特征值为

$\lambda=-1+k,2+k,1+k$，

若 $A+kE$ 为正定矩阵，则 $-1+k>0,2+k>0,1+k>0$，

故 $k>1$.

注释　本题知识点：

（1） A 为正定矩阵的充要条件是 A 的所有特征值大于零；

答案：$k>1$

4. 设 A 是三阶实对称矩阵，A 的秩 $R(A)=1$，若 $A^2-5A=O$，则 A 的非零特征值是__________.

解析：由 $A^2-5A=O$ 知矩阵 A 的特征值为 $\lambda=0$ 或 $\lambda=5$，

由 A 的秩 $R(A)=1$，知 A 的非零特征值是 5.

注释　本题知识点：

(1)特征值的定义；

(2)正定矩阵的性质.

答案：5

5. 在四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中，A 的秩 $R(A)=3$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为它的三个

解向量，已知 $\alpha_1=(2,\ 0,\ 5,\ -1)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(1,\ 0,\ 0,\ 2)^T$，则方程组

$Ax=b$ 的通解可以写成__________.

解析：由于 A 的秩 $R(A)=3$，则在四元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中含有一个非零的解向量.

又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $Ax=b$ 的三解向量，且

$\alpha_1=(2,\ 0,\ 5,\ -1)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(1,\ 0,\ 0,\ 2)^T$，

则 $(\alpha_2+\alpha_3)-2\alpha_1=(1,0,0,2)^T-2(2,0,5,-1)^T=(-3,0,-10,4)^T$，

是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}2\\0\\5\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\0\\-10\\4\end{pmatrix},k\in R$$

.

注释 本题知识点：

（1）线性方程组通解的结构

答案：$\begin{pmatrix}2\\0\\5\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\0\\-10\\4\end{pmatrix},k\in R$

二、 选择题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 PAQ 为（　　）

(A) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}1&3&2\\4&6&5\\7&9&8\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}7&9&8\\4&6&5\\1&3&2\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}3&2&1\\9&8&7\\6&5&4\end{pmatrix}$.

解析：

$$PAQ=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&8&9\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&9&8\\4&6&5\\1&3&2\end{pmatrix}$$

注释 本题知识点：

(1)初等矩阵在矩阵行列变换中的作用

答案：C

2. 下列矩阵中,不能相似于对角阵的是（　　）

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

解析：

(A) 中矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$是实对称矩阵，能与对角阵相似；

(B) 中矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$有三个不同的特征值$\lambda = 1,2,3$，则能对角化；

(C) 中矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$特征值为$\lambda = 0,0,3$ ，$\lambda = 0$为二重特征值，但对应两个

线性无关的特征向量，因此能对角化.

(D) 中矩阵$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$特征值$\lambda = 2$为二重特征值，但对应一个

线性无关的特征向量，因此不能能对角化.

注释：本题知识点：

(1)n 阶方阵对角化的充分必要条件是：存在 n 个线性无关的特征向量；

(2)实对称矩阵一定能对角化.

答案：D

3. 设$A = (a_{ij})$是三阶方阵, 满足$A^* = A^T$,其中A^*为 A 的伴随矩阵,$|A|$为 A 的行列式，则$|A|$＝(　　)

(A)　0.　　(B)　0 或 1.　　(C)　-1 .　　(D)　1.

解析：由$A^* = A^T$得，　$|A^*| = |A^T| = |A|$,

由于$\left|A^*\right| = |A|^2$，得$|A|(|A|-1)=0$，故$|A|=0$或1.

注释 本题知识点：

(1) 行列式性质$|A| = \left|A^T\right|$；

(2) 行列式性质$\left|A^*\right| = |A|^{n-1}$.

答案：B

4. 设ξ_1,ξ_2,ξ_3是方程组$Ax=0$的基础解系，则下列向量组中也是方程组$Ax=0$的基础解系的是（　　）

(A) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$.　　(B) $\xi_1+\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3+\xi_1$.

(C) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$.　　(D) $\xi_1+\xi_2-\xi_3,\xi_1+\xi_3,2\xi_1+\xi_2$.

解析：

（A） 中$(\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，而矩阵$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$可逆，

则$\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$线性无关，为方程组$Ax=0$的基础解系；

（B）中$(\xi_1+\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3+\xi_1)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，而矩阵$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$不可逆，则$\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$线性相关，不为方程组$Ax=0$的基础解系；

（C）中$(\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，而矩阵$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$不可逆，则$\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$线性相关，不为方程组$Ax=0$的基础解系；

（D）中$(\xi_1+\xi_2-\xi_3,\xi_1+\xi_3,2\xi_1+\xi_2)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$，而矩阵$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$不可逆，则$\xi_1+\xi_2-\xi_3,\xi_1+\xi_3,2\xi_1+\xi_2$线性相关，不为方程组$Ax=0$的基础解系；

注释 本题知识点：

（1）线性方程组基础解系的定义；

(2)向量组的秩与矩阵秩的关系；

(3)矩阵秩的性质.

答案：A

5. 设n维列向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m<n)$线性无关，则$n$维列向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关的充分必要条件为（　　）

(A) 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$可由向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性表示.

(B) 向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$可由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示.

(C) 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$等价.

(D) 矩阵$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$的秩$R(A)$等于矩阵$B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$的秩$R(B)$.

解析：（A）中令$\alpha_1=(1,0,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0,0)^T$；

$$\beta_1=(0,0,1,0)^T,\beta_2=(0,0,0,1)^T,$$

则（A)、(B)、(C)都不成立.

在（D）中若矩阵$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$的秩$R(A)$等于矩阵$B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$的秩$R(B)$，则$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关；反之$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关，则矩阵$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$的秩$R(A)$等于矩阵$B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$的秩$R(B)$.

注释 本题知识点：

（1）　向量组的线性表示；

（2）　向量组的等价；

（3）向量组秩的定义及性质.

答案：D

三、（本题满分 14 分）计算下列各题

1. 计算四阶行列式$D=\begin{vmatrix}0&0&5&2\\0&0&2&1\\1&-2&3&4\\-1&3&2&6\end{vmatrix}$.

解析:

$$D=\begin{vmatrix}0&0&5&2\\0&0&2&1\\1&-2&3&4\\-1&3&2&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&3&4\\-1&3&2&6\\0&0&5&2\\0&0&2&1\end{vmatrix}=(3-2)(5-4)=1$$

2. 设 n 阶行列式 $D_n=\det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=|i-j|\,(1\le i,j\le n)$ ，求 D_n .

解析：

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&2&3&\cdots&n-1\\1&0&1&2&\cdots&n-2\\3&1&0&1&\cdots&n-3\\3&2&1&0&\cdots&n-4\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n-1&n-2&n-3&n-4&\cdots&0\end{vmatrix}\overset{r_1-r_2}{\underset{\substack{r_2-r_3\\\cdots}}{=}}\begin{vmatrix}-1&1&1&1&\cdots&1\\-1&-1&1&1&\cdots&1\\-1&-1&-1&1&\cdots&1\\-1&-1&-1&-1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n-1&n-2&n-3&n-4&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2+c_1}{\underset{\substack{c_3+c_1\\\cdots}}{=}}\begin{vmatrix}-1&0&0&0&\cdots&0\\-1&-2&0&0&\cdots&0\\-1&-2&-2&0&\cdots&0\\-1&-2&-2&-2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n-1&2n-3&2n-4&2n-5&\cdots&n-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

注释 本题知识点：

（1） 行列式性质；

（2） 行列式的计算方法.

四、（本题满分 16 分）

1. 设三阶方阵 A, B 满足 $A^{-1}BA=6A+BA,$ 且 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$，求 B.

解析：

显然 A 可逆，用 A^{-1} 右乘方程两边，得 $A^{-1}B=6E+B\Rightarrow(A^{-1}-E)B=6E$ ，从而

$B=6(A^{-1}-E)^{-1}$． $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&&\\&4&\\&&5\end{pmatrix}, A^{-1}-E=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{pmatrix}$

$(A^{-1}-E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&&\\&\frac{1}{3}&\\&&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$． 从而 $B=6(A^{-1}-E)^{-1}=\begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

2． 已知三阶方阵 A 的三个特征值分别为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1,$ 对应的特征向量依次为 $p_1=(1,2,2)^T, p_2=(2,-2,1)^T, p_3=(-2,-1,2)^T$, 求矩阵 A.

解析：

由已知，A 可以对角化. 令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$，则

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$，从而 $A=P\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}P^{-1}$.

$P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$， $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$.

注释 本题知识点：

（1） 矩阵的运算；

（2） 特征值特征向量的定义与矩阵对角化的定义.

五、（本题满分 12 分）设有向量组

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix}, a_4=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{pmatrix},$$

问 a,b 为何值时,

1． β 不能由 a_1,a_2,a_3,a_4 线性表示.

2． β 能由 a_1,a_2,a_3,a_4 线性表示，且表示式唯一.

3. $\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{a_1,a_2,a_3,a_4}$线性表示，且表示式不唯一，并写出一般表示式.

解析：

设$\boldsymbol{\beta=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3}$，设$A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$，对增广矩阵$(A,\beta)$实行初等行变换

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{pmatrix}\tilde{r}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix},$$

由此可见

（1） 当$a=-1,b\neq 0$时，方程组无解，即β不能由a_1,a_2,a_3,a_4线性表示；

（2） 当$a\neq -1$时，β能由a_1,a_2,a_3,a_4线性表示，且表示式唯一；

（3） 当 $a=-1,b=0$ ， 方 程 组 有 无 穷 多 解 ， 并 且

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k_1+k_2\\1+k_1-2k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}$$

即$\boldsymbol{\beta=(-2k_1+k_2)a_1+(1+k_1-2k_2)a_2+k_1a_3+k_2a_4,(k_1,k_2\in R).}$.

注释 本题知识点：

（1） 向量的线性表示与线性方程组的关系；

（2） 线性方程组的求解过程与方法.

六、（本题满分 10 分） 设A 是n阶方阵，$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$是$n$维列向量，且$\boldsymbol{\alpha_1\neq 0}$，

$\boldsymbol{A\alpha_1=\alpha_1}$，$\boldsymbol{A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2}$，$\boldsymbol{A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3}$，证明：向量组$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$线性无关.

解析：

设有三个数k_1,k_2,k_3使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$（1），

（1）式两边同时左乘 A，可得$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=0$，

即$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0$ ，

整理得$(k_1+k_2)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$.　　（2）

（2）减（1）得

$k_2\alpha_1+k_3\alpha_2=0$，（3）

（3）式两边左乘 A, 得$k_2\alpha_1+k_3\alpha_1+k_3\alpha_2=0$　（4）

（4）减（3）得$k_3\alpha_1=0$，因为$\alpha_1\neq 0$，可得$k_3=0$，代入（3）式，可得$k_2=0$，从而$k_1=0$，即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

注释 本题知识点：

（1） 向量组的线性无关性的定义；

（2） 证明向量组的线性相关性的方法.

七、（本题满分 12 分）设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$$

中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为-12.

1. 求a,b的值.

2. 用正交变换将二次型f化为标准形, 并写出所用的正交变换及标准形.

解析：

(1) 二次型f的矩阵为$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$，设 A 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，由已知条件知

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2-2=1$，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12$，得$a=1,b=2$

（2）由矩阵 A 的特征多项式$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$，得到 A 的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=2,\lambda_3=-3$，对于特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组$(2E-A)x=0$，得基础解系$\xi_1=(2,0,1)^T,\xi_2=(0,1,0)^T$，

对于$\lambda_3=-3$，解齐次线性方程组$(-3E-A)x=0$，得基础解系$\xi_3=(1,0,-2)^T$, 由于ξ_1,ξ_2,ξ_3

已经是正交向量组， 故只需将其单位化

$\eta_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})^T,\eta_2=(0,1,0)^T,\eta_3=(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}})^T$

令$Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$，则$Q$为正交矩阵，在正交变换$x=Qy$下，二次型的标准行为

$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

注释 本题知识点：

（1） 矩阵特征值、特征向量的定义与性质；

（2） 二次型化标准形的方法.

八、（本题满分 6 分）设$\boldsymbol{\alpha}$为n维单位列向量，E为n阶单位矩阵，求n阶矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$的全部特征值并证明其不可逆.

解析：

因为$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$为对称矩阵，由$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)=\mathbf{1}$，

知$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathbf{1}$，则$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\mathbf{1}$.

所以A-E的特征值有一个是非零的，其余n-1 个都是 0.

设矩阵A的所有特征值为$\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\cdots\boldsymbol{\lambda}_n$，

则A-E的特征值为$\boldsymbol{\lambda}_1-\mathbf{1},\boldsymbol{\lambda}_2-\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n-\mathbf{1}$.

因此，$\boldsymbol{\lambda}_1-\mathbf{1},\boldsymbol{\lambda}_2-\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n-\mathbf{1}$中有$n$-1 个都是 0，

即$\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\cdots\boldsymbol{\lambda}_n$有$n$-1 个都是 1，

由$\boldsymbol{\lambda}_1-\mathbf{1},\boldsymbol{\lambda}_2-\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n-\mathbf{1}$中有一个非零知，

$\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\cdots\boldsymbol{\lambda}_n$中有一个不等于 1.

又因为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，所以 0 是$A$的特征值.

所以矩阵 A 的所有特征值为 1，1，…，1，0.

因为 0 是A的特征值, 所以A不可逆.

注释 本题知识点：

（1） 矩阵秩的有关结论：$R(\alpha\alpha^T)=1,\alpha\neq 0$；

（2） 矩阵特征值、特征向量的定义与性质.