2016 ~2017 学年春季学期《线性代数 》课程考试试题解析

一、　填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分，请将合适的答案填在每题的空中）

1．设 A 为 3 阶方阵，A 的第 3 列的元素分别为 $1,-3,2$，其对应的余子式为 $3,1,2$，则

$|A|=$ ___10_______．．

解析：

$$|A|=(-1)^{3+1}\times 1\times 3+(-1)^{3+2}\times(-3)\times 1+(-1)^{3+3}\times 2\times 2=10$$

注释　本题知识点：

行列式按行按列展开

答案：10

2．设矩阵 $5(\alpha_1-\alpha_2)+4(\alpha_2-\alpha_3)=2(\alpha_1+\alpha_3)$，其中 $\alpha_1=(3,-1,0,1)^T$，$\alpha_2=(3,-3,6,3)^T$ 则 $\alpha_3=$

$(1,0,-1,0)^T$ ___

解析：

由 $5(\alpha_1-\alpha_2)+4(\alpha_2-\alpha_3)=2(\alpha_1+\alpha_3)$

得到 $3\alpha_1-\alpha_2=6\alpha_3$

所以 $\alpha_3=\frac{1}{6}(3\alpha_1-\alpha_2)=\frac{1}{6}\left[(9,-3,0,3)^T-(3,-3,6,3)^T\right]=(1,0,-1,0)^T$

注释　本题知识点：

向量的运算

答案：$(1,\ 0,\ -1,\ 0)^T$

3. 设四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 3，已知 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，且 $\eta_1-2\eta_2=(2,1,1,1)^T$，$\eta_3=(0,2,1,1)^T$，则齐次方程组的通解为_____ $k(2,3,2,2)^T$, $k\in R$ _______.

解析：

因为四元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 3，所以其对应的齐次线性方程组的基础解系中只包含一个解量，而 $\eta_1-2\eta_2+\eta_3=(2,3,2,2)^T$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则齐次方程组的通解为

$k(2,3,2,2)^T\quad(k\in R)$

注释　本题知识点：

（1） 齐次线性方程组的基础解系所包含的向量个数$n-r$

（2） 齐次线性方程组的通解$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ $(k_i\in R, i=1,2,\cdots n-r)$

答案：$k(2,3,2,2)^T \quad (k\in R)$

4. 设矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$有三个不同的特征值，且$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，则矩阵的秩$R(A)=$ <u>2</u>.

解析：

由$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$知向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，而三个特征值不同，所以$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，故

$R(A)=2$

注释 本题知识点：

矩阵的秩等于矩阵中行向量组或者列向量组的最大无关组的秩，即最大无关组所包含的向量的个数。

答案：2

5. 若二次型$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=3\boldsymbol{x}_1^2+5\boldsymbol{x}_2{}^2+3\boldsymbol{x}_3{}^2+2\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2+4\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3$为正定二次型，那么$\boldsymbol{a}$的取值范围是 <u>$\boldsymbol{a}\in(-\sqrt{11},\sqrt{11})$</u>.

解析：

二次型的矩阵为$\begin{pmatrix}3 & a & 0\\ a & 5 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$，由正定二次型的性质知，其对应的顺序主子式大于零。所以

$\begin{vmatrix}3 & a\\ a & 5\end{vmatrix}=15-a^2>0,\quad \begin{vmatrix}3 & a & 0\\ a & 5 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=33-3a^2>0$，解得$a^2<11$，所以$\boldsymbol{a}\in(-\sqrt{11},\sqrt{11})$

注释 本题知识点：

（1） 二次型的矩阵

（2） 正定二次型的条件：顺序主子式大于零

答案：$\boldsymbol{a}\in(-\sqrt{11},\sqrt{11})$

二、 选择题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 若向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s的秩为 r，则必定有【 D 】

(A) 必定$\mathbf{r}<s$

(B) 向量组中任意小于 r 个向量的部分组线性无关

(C) 向量组中任意 $\mathbf{r}$ 个向量线性无关

(D) 向量组中任意 $\mathbf{r}+\mathbf{1}$ 个向量线性相关

解析：

若向量组 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s 的秩为向量组包含的最大无关组的向量个数

注释　本题知识点：

（1）向量组的秩的定义。

（2）最大无关组的定义。 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s 的秩为 $\mathbf{r}$，则向量组中任意 $\mathbf{r}+\mathbf{1}$ 个向量线性相关

答案：D

2. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行和第 2 行得矩阵 B，A^* 和 B^* 分别为 A,B 的伴随矩 阵，则【　　C　　】

(A) 交换 A^* 的第一列与第二列得到 B^*；

(B) 交换 A^* 的第一行与第二行得到 B^*；

(C) 交换 A^* 的第一列与第二列得到 $-B^*$；

(D) 必交换 A^* 的第一行与第二行得到 $-B^*$.

解析：

由伴随矩阵的定义，很容易得到答案。

注释　本题知识点：

伴随矩阵的定义

答案：C

3. 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价，则正确的是【　　D　　】

(A) 当 $|\mathbf{A}|=2$ 时，$|\mathbf{B}|=2$；　　(B) 当 $|\mathbf{A}|=2$ 时，$|\mathbf{B}|=-2$；

(C) 当 $|\mathbf{A}|\neq 0$ 时，$|\mathbf{B}|=0$；　　(D) 当 $|\mathbf{A}|=0$ 时，$|\mathbf{B}|=0$。

解析：

由 $A\sim B$ 得 $R(A)=R(B)$， 所以当 $|\mathbf{A}|=0$ 时，$|\mathbf{B}|=0$。

注释　本题知识点：

矩阵等价得充分必要条件

答案：D

4. 设 A,B 都是可逆方阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是【　　D　　】

(A) A^T 与 B^T 相似；　　(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似；；

(C) $A+A^{-1}$ 和 $B+B^{-1}$ 相似；　　(D) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似；.

解析：

（1）　$PAQ=B\Rightarrow Q^{\mathrm{T}}AP^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$

（2）　$PAQ=B\Rightarrow Q^{-1}AP^{-1}=B^{-1}$

（3）　$A+A^{-1}$ 和 $B+B^{-1}$ 相似都是 n 阶可逆矩阵，所以相似。

注释　本题知识点：

答案：D

5. 已知 3 阶方阵 A 与非零向量 x 满足 $A^3x=-Ax+2A^2x$，且向量组 x,Ax,A^2x 线性无关，则关于方阵 A 的结论不正确的是【　D　】.

(A) $|A|=0$；　　(B) 0 矩阵 A 的特征值；

(C) $R(A)=2$；　　(D) $R(A)=1$.

解析：

因为 $A\begin{pmatrix}x & Ax & A^2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax & A^2x & A^3x\end{pmatrix}$，向量组 x,Ax,A^2x 线性无关，且 $A^3x=-Ax+2A^2x$，所以矩阵 $\begin{pmatrix}Ax & A^2x & A^3x\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $R(A)=2$

注释　本题知识点：

（1）　矩阵的秩

（2）　向量组线性无关的性质

（3）　矩阵乘积的秩的性质

答案：D

三、（本题满分 12 分）计算下列行列式的值：

1. 已知四阶行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&1&-1&3\\4&1&1&9\\8&1&-1&27\end{vmatrix}$，计算行列式 D 的所有代数余子式之和$\sum_{i,j=1}^{4}A_{ij}$.

解析：

$$D=(3+1)(3-1)(3-2)(-1-2)(-1-1)(1-2)=-48$$

注释　本题知识点：

（1）　行列式任一行（列）得所有元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零。

（2）　范德蒙行列式的计算。

2. 计算行列式$D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}$。

解析：

$$D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}\overset{\text{第一行展开}}{=}2D_{n-1}+1\times(-1)^{1+2}\times(1\times(-1)^{1+1}D_{n-2})$$

$$=2D_{n\text{-}1}-D_{n-2}$$

$$D_n\text{-}D_{n\text{-}1}=D_{n\text{-}1}-D_{n-2}\Rightarrow D_n\text{-}D_{n\text{-}1}=D_2\text{-}D_1=3\text{-}2=1$$

$$D_n=D_{n\text{-}1}+1=D_{n\text{-}2}+2=D_{n\text{-(n-2)}}+n-2=n+1$$

注释　本题知识点：

（1）　行列式按行按列展开公式。

（2）　行列式的性质及递推公式。

四、　（本题满分 12 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&\text{-}1\\\text{-}1&1&1\\1&\text{-}1&1\end{pmatrix}$，矩阵$X$满足$A^*X=A^{-1}+2X$，其中$A^*$是

矩阵 A 的伴随矩阵，求矩阵 X 。

解析：

因 $|A|=4$，所以 A 可逆。

方程两端分别同时左乘 A，可得 $(4E-2A)X=E$

所以 $X=\frac{1}{2}(2E-A)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

注释　本题知识点：

（1）　行列式的计算

（2）　伴随矩阵的性质 $A^*A=AA^*=|A|E$

（3）　矩阵的运算

五、(本题两个小题，满分 14 分)

1. 已知向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性无关，$b_1=a_1,b_2=a_1+a_2,\cdots,b_r=a_1+a_2+\cdots+a_r$, 证明：向量组 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 线性无关.

证明：设 $k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_rb_r=0$ 则

$$(k_1+\cdots+k_r)a_1+(k_2+\cdots+k_r)a_2+\cdots+(k_p+\cdots+k_r)a_p+\cdots+k_ra_r=0$$

因向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性无关, 故

$$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_r=0\\ \quad k_2+\cdots+k_r=0\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \quad\quad k_r=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&\cdots&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix}1&\cdots&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\0&\cdots&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ 故方程组只有零解

则 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 所以 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 线性无关

注释　本题知识点：

（1）　向量组线性无关的定义

（2） 求解齐次线性方程组

2. 设向量组 $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,2)^T$ ， $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,0,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,5,6)^T$ ， $\boldsymbol{\alpha}_5=(1,1,2,3)^T$

求向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个最大线性无关组，并将其它向量用最大线性无关组表示。

解析：

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1\\0&1&1&2&1\\1&1&0&5&2\\2&2&2&6&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1\\0&1&1&2&1\\0&1&1&4&1\\0&2&4&4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1\\0&1&1&2&1\\0&0&0&2&0\\0&0&2&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&1/2\\0&1&0&0&3/2\\0&0&1&0&-1/2\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

该向量组的一个最大无关组为： α_1, α_2, α_3, α_4；

且 $\alpha_5=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{3}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_3$。

注释 本题知识点：

（1） 向量组最大无关组定义

（2） 矩阵的初等变换

（3） 向量组如何用它的最大无关组表示

六、（本题满分 12 分）

已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&a&4\\1&3&a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\6&a\\a&0\end{pmatrix}$ ，试求当参数 a 为何值时，方程组 $AX=B$ 无解，有唯一解，有无穷多解.

解析：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2&1&0\\2&a&4&6&a\\1&3&a&a&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\0&a-4&8&4&a\\0&1&a+2&a-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\0&1&a+2&a-1&a\\0&0&-a^2+2a+16&-a^2+5a&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\0&1&a+2&a-1&a\\0&0&-a^2+2a+16&-a(a-5)&0\end{pmatrix}$$

当 $a\neq1\pm\sqrt{17}$ 时，方程组有唯一解；

当 $a=1\pm\sqrt{17}$ 时，方程组无解；

方程组有无穷多解的情形不存在。

注释 本题知识点：

（1） 矩阵的初等变换

（2） 非齐次线性方程组的解的情况

七、（本题满分 12 分）已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2ax_1x_2+2x_1x_3-2bx_2x_3$

经正交变换 $\left(x_1,x_2,x_3\right)^T=P(y_1,y_2,y_3)^T$ 化成 $f\left(y_1,y_2,y_3\right)=2y_1^2+y_2^2$，求 a,b 的值和正交矩阵 P.

解析：

二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -a & 1\\ -a & 1 & -b\\ 1 & -b & 1\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

则 $|A|=-(a-b)^2=0$ 且 $R(A)=2$，则 $a=b=0$

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-1).$$

由此可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=0$.

对于 $\lambda_1=2$，解方程组 $\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得其基础解系 $\eta_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$，.

对于 $\lambda_2=1$，解方程组 $\left(\boldsymbol{A}-1\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得其基础解系 $\eta_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda_3=0$，解方程组 $\left(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得其基础解系 $\eta_3=(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$，

正交矩阵为 $\boldsymbol{P}=\left(\eta_1,\eta_2,\eta_3\right)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$。

注释 本题知识点：

（1） 二次型所对应得矩阵

（2） 矩阵得特征值和特征向量

（3） 正交变换

八、（本题满分 8 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x 与 y 的关系.

解析：

特征方程为$\left|A-\lambda E\right|=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$。

因矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，所以二重根$\lambda_1=\lambda_2=1$应有两个线性无关的特征向量，即 $R(A-E)=1$，

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\x&0&y\\1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&y+x\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以$y+x=0$。

注释　本题知识点：

（1）　求矩阵的特征值$\left|A-\lambda E\right|=0$

（2）　特征值的代数重数和几何重数的关系