2015 ~2016 学年春季学期《线性代数 》课程考试试题解析

一、填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分，请将合适的答案填在每题的空中）

1． 设 A，B 均为三阶矩阵，且 $|A| = 2$，$|B| = -3$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|3A^*B^{-1}| =$ ______.

解析：

$|3A^*B^{-1}| = 27|A^*||B^{-1}| = 27|A|^2|B|^{-1}$

注释 本题知识点：

（1） $|A^*| = |A|^{n-1}$;

（2） $|AB| = |A||B|$;

（3） $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

（4） $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;

答案：-36

2．设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = O$，则 $(A - E)^{-1} =$ ____________。

解析：

$(A-E)(A+2E) = 2E$

注释 本题知识点：

（1） 矩阵加法乘法数乘的运算规律

（2） 矩阵逆的定义

答案：$(A - E)^{-1} = \underline{\frac{1}{2}(A + 2E)}$

3. 已知向量 $\alpha_1=(2k,k+2,0,3)^T$ 与向量 $\alpha_2=(1,-3,k,k-1)^T$ 正交，则方 $k=$________.

解析：

$[\alpha_1,\alpha_2]=2k\times1+(k+2)\times(-3)+0\times k+3(k-1)=0$

注释 本题知识点：

（1） 向量内积的定义

（2） 两向量正交等价于其内积为 0

答案：$k=$ <u>9/2</u>

4．设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=(b,1,1)^T$，已知 $A\alpha,\alpha$ 线性相关，则 $b=$_____.

解析：

$(A\alpha,\alpha)=\begin{pmatrix}b&b\\2b+3&1\\3b+4&1\end{pmatrix}$，其秩为 1

注释 本题知识点：

（1） 列向量线性相关等价于矩阵秩小于向量个数

答案：$b=$ <u>-1</u>

5. 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零，且 $R(A)=n-1$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为______________。

解析：

A 的各行元素之和均为零，等价于 $A(1,1,\ldots,1)^t=0$

$R(A)=n-1$，说明线性方程组 $Ax=0$ 基础解系中含有一个向量。由上，基础解系可取成 $(1,1,\ldots,1)^t$

注释 本题知识点：

（1） 矩阵乘法的应用

（2） 齐次方程组解的结构定理

答案：$\underline{\mathbf{k}(1,1,\cdots,1)^T, k\in R}$

二、 选择题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \cdots & -a_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的值为【　　　　】.

(A) $-a_1a_2\cdots a_n$；　　(B) $a_1a_2\cdots a_n$；

(C) $(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$；　　(D) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$.

解析：

$$D=(-1)^t(-a_1)(-a_2)\cdots(-a_n),\ \ t=t(n,n-1,\ldots,2,1)=n(n-1)/2$$

注释　本题知识点：

（1） 行列式的定义

（2） 逆序数的计算法则

答案： D

2. 设 A,B 为三阶矩阵，且 $r(A^2+3A+2E)=3,$ 若 $r(B)=2,$ 则 $r(AB+B)=$【　　　】.

(A) 1；　　(B) 2；　　(C) 3；　　(D) 无法判断.

解析：

$r(A^2+3A+2E)=3,$ 说明 $A^2+3A+2E$ 可逆

$A^2+3A+2E=(A+E)(A+2E)$ 说明 A^2+E 可逆

$$r(AB+B)=r((A+E)B)=r(B)=2$$

注释　本题知识点：

（1） 矩阵可逆等价于秩等于阶数

（2） 乘可逆矩阵，不改变矩阵的秩

答案：B

3. 设A为n阶方阵，B为n阶非零矩阵，如果B的每个列向量都为$AX=0$的解，则

$|A| =$【　　　　　　　　】.

(A) 1；　　(B) -1；　　(C) 0；　　(D) 无法确定.

解析：

A为n阶方阵，$AX=0$有非零解等价于$|A|=0$

注释　本题知识点：

（1） 齐次方程有非零解和系数矩阵秩的关系

答案：C

4. 已知三阶矩阵A满足$A^2+2A=0$，且$R(A)=2$，则$|A^3+3A^2|=$【　　　　　　】

(A) 2；　　(B) 0；　　(C) 1；　　(D) 3.

解析：

$$R(A)=2 \Rightarrow |A|=0, \quad \left|A^3+3A^2\right|=|A|^2|A+3E|=0$$

注释　本题知识点：

（1） 秩和行列式的关系

（2） $|AB|=|A||B|$;

答案：B

5. 当 t 小　　　　　　　　】时，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=t x_1^2+t x_2^2+t x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

是负定的.

(A) 1；　　(B) 0；　　(C) 2；　　(D) -1.

解析：

二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$$

二次型负定等价于

$$t<0, \qquad \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix}=t^2-1>0; \qquad |A|=(t-2)(t+1)^2<0$$

注释　本题知识点：

（1）　二次型和对称矩阵的关系

（2）　二次型负定的顺序主子式判别法

答案：D

三、（本题满分 12 分）计算下列各题

1. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$。

解：$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-7\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=28$

注释：本题知识点：

（1）行列式的性质及三节行列式计算的对角线法则

2. 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}, \ a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n.$$

解：

$$D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x & \cdots & 0 \\ x & x+a_2 & x & \cdots & 0 \\ x & x & x+a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & x \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & x \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}+a_nD_{n-1}=a_1a_2\cdots a_{n-1}x+a_nD_{n-1}$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}x+a_n(a_1a_2\cdots a_{n-2}x+a_{n-1}D_{n-2})$$

$$=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{a_i})$$

注释：本题知识点：

（1）行列式的性质及三角化法，递归。

（本题满分 12 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且矩阵$X$满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，其中E是三阶单位矩阵，求X。

解 由题设的关系式得

$$AX(A-B)+BX(B-A)=E$$

即

$$(A-B)X(A-B)=E$$

而$|A-B|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 A-B 可逆。

$$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以$X=\left[(A-B)^{-1}\right]^2=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

注释：本题知识点：

（1） 解矩阵方程，矩阵运算规律

（2） 矩阵求逆

五、（本题满分 12 分）

设矩阵$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\\\alpha_4^T\\\alpha_5^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&-1&5\\-5&1&-9&3\\2&-4&0&6\\-3&2&-4&-1\\11&-5&17&-1\end{pmatrix}$，

（1）求矩阵A的秩；

（2）求矩阵A的行向量组的一个最大线性无关组；

（3）把其他行向量用最大线性无关组表示。

解：

$$A^T=\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\-3&1&-4&2&-5\\-1&-9&0&-4&17\\5&3&6&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&-14&2&-7&28\\0&-14&2&-7&28\\0&28&-4&14&-56\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&1&-1/7&1/2&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&9/7&-1/2&1\\0&1&-1/7&1/2&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（1） 矩阵 A 的秩为２；

（2） 行向量组的最大线性无关组为α_1^T,α_2^T；

$\alpha_3^T=7/9\alpha_1^T-1/7\alpha_2^T$;　　$\alpha_4^T=-1/2\alpha_1^T+1/2\alpha_2^T$;

$\alpha_4^T=\alpha_1^T-2\alpha_2^T$.

注释：本题知识点：

(1)　用行变换算矩阵的秩

(2)　用行变换求列向量最大无关组

(3)　向量组的线性表示

六、（本题满分 12 分，每小题 6 分）

（1）求非齐次方程组$\begin{cases}x_1+x_2 &=5\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1\\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3\end{cases}$ 的一个特解，及对应齐次方程组的基础解

系，并给出非齐次方程组的通解；

（2）设四元非齐次线性方程组$Ax=b$的系数矩阵的秩为 3，已知η_1,η_2,η_3是它的解向量，

且$2\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\eta_1+\eta_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$，且该方程组的通解。

解：（1）

$$(Ab)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&-2&2&2&-22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&0&0&-2&-4\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$$

基础解系为 $\xi=(-1,1,1,0)^T$， 特解为 $\eta=(-8,13,0,2)^T$

所以方程组的通解为$x=k\xi+\eta$；

（2）因为系数矩阵的秩为 3，所以齐次方程组的基础解系有一个向量，

又已知η_1,η_2,η_3是它的解向量，且$2\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\eta_1+\eta_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$，

所以齐次方程组的基础解系为$\xi=2(2\eta_1+\eta_2)-3(\eta_1+\eta_3)=\begin{pmatrix}8\\7\\5\\12\end{pmatrix}$

非齐次方程组的特解为$\eta^*=2\eta_1+\eta_2-(\eta_1+\eta_3)=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

所以通解为$x=k\xi+\eta^*$.

注释：本题知识点：

（1） 行变换求解线性方程组的通解

（2） 线性方程组通解的结构

七、（本题满分 12 分）用正交变换将下列实二次型化为标准形，并写出所作的正交变换.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$$

解：二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}.$$

A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & 4-\lambda & -4\\ 2 & -4 & 4-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-9)\ .$$

由此可得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$.

对于$\lambda_1=\lambda_2=0$，解方程组$\left(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得其基础解系

$$\boldsymbol{a}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{a}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}} .$$

利用施密特正交化方程将$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$正交化：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{a}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}{\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}\boldsymbol{\beta}_1=\left(-\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)^{\mathrm{T}},$$

单位化后得

$$\gamma_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)^{\mathrm{T}}, \quad \gamma_2=\left(-\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}} .$$

对于$\lambda_3=9$，解方程组$\left(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得其基础解系$\boldsymbol{a}_3=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$．将$\boldsymbol{a}_3$单位化，得

$\gamma_3=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$．令矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right)=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

作线性变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，则二次型的标准形为$f=9y_3^2$．

注释：本题知识点：

(1)　正交变换化二次型的为标准型的具体算法。

八、（本题满分 6 分）

设$t_1,t_2,\ldots,t_r$是互不相同的数 $(r\le n)$，证明向量组 $A:\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关，其中

$$\alpha_i^T=\left(1,t_i,t_i^2,\ldots,t_i^{n-1}\right), i=1,2,\ldots,r.$$

解　令$A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r)$

$\because A$的前r行构成的r阶子式$D_r \neq 0,$

$\therefore R(A)=r$由定理知$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_r$线性无关.

注释：本题知识点：

（1） 线性无关和矩阵秩的关系

（2） 范德蒙行列式的计算公式