《线性代数》期末练习题（二）

一．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $A=\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，且整数 $n \geq 2$，则 $A^n=$________.

2. 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $(A-2E)^{-1}=$________.

3. 设 $D=\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$，则 $M_{21}+M_{22}-M_{23}+M_{24}=$________.

4. 设 n 阶矩阵 A 的特征值互不相等，且 $|A|=0$，则 rank A=________.

5. 若 $A=\begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$是正定矩阵，则 t 的取值范围是________.

二．单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 是三阶矩阵，将 A 的第二行加到第一行上得到矩阵 B，将 B 的第一列的（－1）倍加到第二列上得到矩阵 C，若 $C=P^{-1}AP$，则 P 等于【 】.

（A）$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（B）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（D）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. 设 n 阶矩阵 A，B 的伴随矩阵分别为 A*，B*，则分块矩阵$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$的伴随矩阵为【 】.

（A）$\begin{bmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{bmatrix}$

（B）$\begin{bmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|A^* \end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^* \end{bmatrix}$

（D）$\begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix}$

3. 设三阶矩阵 A，B 满足 $A^2B - A - B = E$，且 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则|B|等于【 】

（A）$-\dfrac{1}{2}$

（B）$\dfrac{1}{2}$

（C）－1

（D）1

4. 设 A 是 n 阶矩阵，b 是 n 维列向量，且 $rank\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = rankA$，则【 】

（A）Ax=b 有无穷多个解

（B）Ax=b 有唯一解

（C）$\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ 有非零解

（D）$\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ 仅有零解

5. 设 n 维列向量组（Ⅰ）：α_1，α_2,…，α_m 线性无关，且 m＜n，则 n 维列向量组（Ⅱ）：β_1，β_2,…，β_m 线性无关的充要条件是【 】

（A）向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）线性表示

（B）向量组（Ⅱ）可由向量组（Ⅰ）线性表示

（C）向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价

（D）矩阵$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}$等价

三．（12 分）计算四阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 9 & 16 & 25\\ 60 & 40 & 30 & 24\end{vmatrix}.$$

四．（12 分）设$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$，解矩阵方程

$$AXA+BXB=AXB+BXA+E.$$

五．（10 分）设 n 阶实矩阵 A 有 n 个两两正交的特征向量，证明 A 是对称矩阵.

六．（12 分）设

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\4\\0\\2\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}2\\7\\1\\3\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\a\end{bmatrix},\ \beta=\begin{bmatrix}3\\10\\b\\4\end{bmatrix}.$$

问 a，b 为何值时，

（1）β 不能由α_1，α_2，α_3线性表示；

（2）β 能由α_1，α_2，α_3唯一线性表示，并求出其表达式；

（3）β 能由α_1，α_2，α_3线性表示，但表达式不唯一，并求出一般表达式.

七．（12 分）设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$是 A 的二重特征值，$\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,1,1)^T$都是对应于特征值 6 的特征向量.

（1）求 A 的另一特征值及其对应的特征向量；

（2）求矩阵 A.

八．（12 分）设 n 阶矩阵 A 满足，且$A^2+3A=4E$，证明：

（1）$rank(A+4E)+rank(A-E)=n$；

（2）A 可对角化；

（3）A+2E 可逆，并求其逆.