中国农业大学

2022~2023 学年春季学期（2023.06）

高等数学 A（下） 课程考试试题（解答）

一、单项选择题（每小题 3 分，满分 15 分）

1．设有二元函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则函数在 $(0,0)$ 点处（ C ）.

（A）不连续 （B）连续但偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 不存在

（C）连续且偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都存在,但不可微 （D）可微.

2．函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,1)$ 沿 $l=\{-1,-1\}$ 方向的方向导数为（ B ）.

(A) 最大 (B) 最小 (C) 0 (D) 1

3．L 为 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧,则 $I=\int_L\sqrt{y}\,\mathrm{d}s=$（ C ）.

（A）$\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ （B）$\int_0^1\sqrt{y}\sqrt{1+y}\,\mathrm{d}y$

（C）$\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ （D）$\int_0^1\sqrt{y}\sqrt{1+\dfrac{1}{y}}\,\mathrm{d}y$

4.设有平面区域

$D=\{(x,y)\mid -a\le x\le a, x\le y\le a\}$, $D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le a, x\le y\le a\}$,

则 $\iint\limits_D(\sin x\sin y+x^2y)dxdy=$（ A ）.

(A) $2\iint\limits_{D_1}x^2ydxdy$ (B) $\iint\limits_{D_1}\sin x\sin ydxdy$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(\sin x\sin y+x^2y)dxdy$ (D) 0

5． $f(x)$ 在 $x=0$ 处有任意阶导数是函数 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数的（ B ）

（A）充分但不必要条件；　（B）必要但不充分条件；

（C）充要条件；　（D）既不充分也不必要条件.

二、填空题（每小题 3 分，满分 15 分）

1.若向量 α,β 的模分别为 $|\alpha|=2,|\beta|=2\sqrt{3}$，$\alpha+\beta$ 的模为 $|\alpha+\beta|=2$，则 α,β 的夹角为_________.　($\frac{5\pi}{6}$)

2．曲面 $z=y+\ln\frac{x}{z}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程是_________.（$x+y-2z=0$）

3. 把积分 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ 表示为极坐标系下先对 ρ 积分的二次积分为_________.（$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$）

4．设 $f(x,y)$ 为连续函数，$f(x,y)=x\iint\limits_{\Sigma} f(x,y)dS+y^2$, 其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1$, 则 $f(x,y)=$_______.　($\frac{4\pi}{3}x+y^2$)

5.已知 $f(x)=x+1, x\in[0,1), S(x)$ 是 $f(x)$ 的周期为 1 的傅里叶级数的和函数，则 $S(0)=$_________.（$S(0)=\frac{3}{2}$）

三、(本题满分 10 分)

求过点 $M(1,1,1)$ 且与直线

$$l_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1},\quad l_2:\begin{cases}2x-y-5=0\\ y-2z+1=0\end{cases}$$

都垂直的直线方程.

解：　直线 l_2 的方程可化为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{1},$$

所求直线的方向向量为$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$，

所求直线的方程为$\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-6}$.

四、（本题满分 10 分）设$z = f(xy, \dfrac{x}{y})$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot y + f_2' \cdot \dfrac{1}{y}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_1' \cdot y + f_2' \cdot \frac{1}{y} \right)$$

$$= f_1' + y(f_{11}'' \cdot x + f_{12}'' \cdot (-\frac{x}{y^2})) - \frac{1}{y^2} f_2' + \frac{1}{y}(f_{21}'' \cdot x + f_{22}'' \cdot (-\frac{x}{y^2}))$$

$$= f_1' - \frac{1}{y^2} f_2' + xyf_{11}'' - \frac{x}{y^3} f_{22}''.$$

五、（本题满分 12 分）

形状为椭球$4x^2 + y^2 + 4z^2 \le 16$的空间探测器进入地球大气层,其表面开始受热,1 小时后在探测器的点(x, y, z)处的温度$T = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$, 求探测器表面最热的点.

解：此题就是求函数$T = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$ 在椭球面$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ 上最大值点.

构造函数$L(x, y, z, \lambda) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600 + \lambda(4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16)$ ，

解方程组$\begin{cases} L_x = 16x + 8\lambda x = 0, & (1) \\ L_y = 4z + 2\lambda y = 0, & (2) \\ L_z = 4y - 16 + 8\lambda z = 0, & (3) \\ L_\lambda = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0. & (4) \end{cases}$，

由（1）得$\lambda = -2$或$x = 0$，

当$\lambda = -2$时，得$(x,y,z) = (\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$，$(x,y,z) = (-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$，

当$x = 0$时，得$(x,y,z) = (0,4,0),(0,-2,\sqrt{3}),(0,-2,-\sqrt{3})$，

比较上述 5 个点得探测器表面最热的点为$(x,y,z) = (\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$.

六、（本题满分 12 分）

计算曲线积分$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$，其中$L$是以点$C(1,0)$为中心，以$R$为半径的圆周

$(R \neq 1)$，取逆时针方向.

解：$P(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, Q(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (x^2 + y^2 \neq 0).$$

当$R < 1$时，由 Green 公式得，$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$，

当$R > 1$时，取$\varepsilon < R - 1$，记$L_1: \begin{cases} x = \varepsilon \cos t \\ y = \varepsilon \sin t \end{cases}$正向一周，且包含在$L$内，

则原式$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_{L_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 dt}{\varepsilon^2} = 2\pi$.

七、（本题满分 12 分）设Σ为曲面$z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$的上侧，计算曲面积分

$$I = \iint\limits_{\Sigma} (x-1)^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-1)^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解：设$\sum_1$为平面$z=1$上被$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$所围部分的下侧，

$\sum_1$与Σ所围成的空间区域记为Ω．则由 **Gauss** 公式得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot$$

$$=-\iiint_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]dxdydz$$

$$=-\iiint_{\Omega}[3(x^2+y^2-2x-2y)+7]dxdydz$$

因为，

$$\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\iiint_{\Omega}xdxdydz=0,$$

$$\iiint_{\Omega}ydxdydz=0,$$

所以，$I=-\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)dxdydz$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1(3\rho^2+7)\mathrm{d}z=-4\pi$$

八、（本题满分 14 分）

1.(6 分)判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$的收敛性.

2.（8 分）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$的和.

解：1. $\dfrac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\le\dfrac{n}{2^n}$，

对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$， $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}$,则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，

由比较法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$收敛.

2.设幂级数$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$，

此幂级数的收敛域是$[-1,1]$， $s(0)=0$

当$x\in(-1,\ 1)$时，$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)}x^{2n-1}$，且 $s'(0)=0$，

$$s''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n-1}x^{2n-2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{2}{1+x^2},$$

$$s'(x)=\int_0^x\frac{2}{x^2+1}dx=2\arctan x,$$

$$s(x)=\int_0^x s'(x)dx=2\int_0^x\arctan x dx=2\left(x\arctan x-\int_0^x\frac{x}{1+x^2}dx\right)$$

$$=2x\arctan x-\ln\left(1+x^2\right),$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\left(\frac{1}{3}\right)^n=s\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\ln\frac{4}{3}$.