中国农业大学

2018 ~2019 学年秋季学期

线性代数(A) 课程考试试题（解答）　(2019.1.17)

一、　选择题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．以下结论错误的是【　C　】.

(A) 如果 A,B 为 n 阶可逆方阵，那么可用行初等变换把 A 变为 B；

(B) 如果 A^*，B^* 分别是 n 阶矩阵 A,B 的伴随矩阵，那么 $(AB)^*=B^*A^*$；

(C) 如果 A 为 $m\times n$ 矩阵，且 $m>n$ 和 $R(A)=n$，那么 AA^T 正定；

(D) 相似的矩阵有相同的秩.

2. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的一个基础解系为【　D　】.

(A) α_1,α_3；　(B) α_1,α_2；　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

3. 设 A 是 4 阶实对称矩阵，且满足 $A^2+A=0$，若 A 秩为 3，则 A 相似于（　C　）

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

4．设矩阵 A 满足 $A^2+A-3E=0$，其中 E 为单位矩阵，则 $(A-E)^{-1}=$（　A　）

(A) $A+2E$　(B) A　(C) $A-2E$　(D) $A+E$

5．设向量组 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，则下列向量组线性相关的是（　B　）

(A) $\xi_1+2\xi_2,\xi_2+2\xi_3,\xi_3+2\xi_1$　(B) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$

(C) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$ (D) $\xi_1-2\xi_2,\xi_2-2\xi_3,\xi_3-2\xi_1$

二、填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分，请将合适的答案填在每题的空中）

1. 设 4 阶矩阵 $A=\left[\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right], B=\left[\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right]$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是 4 维列向量，且 $|A|=3,\ |B|=-1$，则 $|A+2B|=$ <u>27</u>

2．设 A 为 n 阶矩阵且至少有个 n^2-n+1 元素为 0，则 A 的秩至多= <u>n-1</u>.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}3&k&0\\k&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 k 应满足 $\underline{-3<k<3}$

4. 设四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中，A 的秩为 3，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为它的三个解向量，已知 $\alpha_1+3\alpha_3=(2,0,1,9)^T,\alpha_2=(1,0,0,2)^T$，则对应的齐次方程组 $Ax=0$ 的通解可以写成 $\underline{k(-2,0,1,1)^T,k\in R}$

5. 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

若 $Q=(\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2)$，则 $Q^TAQ=$ $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

三、（本题满分 14 分） 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$n$ 阶矩阵

$$B=\begin{pmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&-1\\a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&x\end{pmatrix}$$，计算行列式 $|A|,|B|,\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}$.

$|A|=4,$

$\left|B\right|=\mathrm{a}_0+a_1x+\cdots a_{n-2}x^{n-2}+x^n$,

$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{3n}4$（$\mathrm{a}_0+a_1x+\cdots a_{n-2}x^{n-2}+x^n$）

14 分

四、（本题满分 12 分）

1．设三阶方阵 A,B 满足 $A^*BA=3BA-9E$,且 $A=\begin{pmatrix} 4 & & \\ & \frac{3}{8} & \\ & & 2 \end{pmatrix}$，求 B.

解：等式的两边同时左乘 A 得

$$AA^*BA=3ABA-9A\text{，则}\left|A\right|BA=3ABA-9A\text{，即 }3BA=3ABA-9A$$

等式两边同时右乘A^{-1}，得：$3B=3AB-9E$，即 $(A\text{-}E)B=3E$，

于是 $B=3(A\text{-}E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -\frac{24}{5} & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

五、（本题满分 16 分）

1. 设有向量组 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},a_4=\begin{pmatrix}4\\5\\-2\\6\end{pmatrix},a_5=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-1\\-7\end{pmatrix}$,

(1) 求该向量组的秩；

(2) 求该向量组的一组极大向量无关组，并将其余的向量用该极大向量无关组线性表出.

解：作初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知该向量组的秩为 2， 其中

a_1,a_2 是该向量组的一组极大无关组，

$a_3=2a_1-a_2$，$a_4=a_1+3a_2$，$a_5=-2a_1-a_2$.

2. 已知方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+4x_2+ax_3=0 \end{cases}$与$\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$同解，求$a,b,c$的值.

解：做初等变换$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & b^2-2b & 1-c \end{pmatrix}$

因为两个方程组同解可以得到两系数矩阵的秩都为 2

于是a=5，

根据第一个方程组可以取公共解为$\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

代入第二个方程组得$\begin{cases} -1-b+c=0 \\ -b^2+2b=1-c=0 \end{cases}$

解得$\begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases}$（舍去）或者$\begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases}$

于是 a=5，b=1,c=2

（本题满分 8 分）设A是n阶矩阵，若存在正整数k，使得线性方程组$A^k x = O$有解向量α，且$A^{k-1}\alpha \neq O$

证明：向量组α，$A\alpha, \cdots A^{k-1}\alpha$线性无关.

证明：设$k_1\alpha + k_2A\alpha + \cdots k_kA^{k-1}\alpha = 0$

等式两边左乘A^{k-1}得$k_1A^{k-1}\alpha = 0$

因为$A^{k-1}\alpha \neq O$所以k_1=0

等式两边左乘A^{k-2}得$k_2 = 0$

同理每个$k_i = 0$

于是α，$A\alpha, \cdots A^{k-1}\alpha$线性无关.

七、（本题满分 12 分）设二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$通过正交变换可化为标准型$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，

(1) 求a的值；

(2) 求出所用的正交变换矩阵.

解：二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$，其特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&a\\0&a&3-\lambda\end{vmatrix}=-\left(\lambda^2-6\lambda-(a^2-9)\right)(\lambda-2)=0$$

由标准型$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$知A的特征值为 1，2，5，故 1 和 5 是$\lambda^2-6\lambda-(a^2-9)=0$的根，解得$a=\pm2$，又$a>0$, 故$a=2$.

对于$\lambda_1=1$，所对应的齐次线性方程$(A-E)x=0$，求得它的一个基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，　再单位化$e_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$.

对于$\lambda_1=2$，所对应的齐次线性方程$(A-2E)x=0$，求得它的一个基础解系为$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

对于$\lambda_1=5$，所对应的齐次线性方程$(A-5E)x=0$，求得它的一个基础解系为$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，

再单位化$e_3=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. 故正交矩阵为：$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

八、（本题满分 8 分）

设$A=aE+bB$, E是n阶单位矩阵, B是元素全为 1 的n阶矩阵, 其中$a\neq 0, b\neq 0$. 判断矩阵A是否可以对角化并说明理由？如果可以对角化，求出一个可逆矩P, 使得$P^{-1}AP$为对角阵.

证明 因为$A^T=A$，所以A是对称矩阵。于是A可以对角化。

又因为$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$所以$R(B)=1$和$B$的特征值为$n,0,\cdots,0.$

于是A的特征值为$a+bn,a,\cdots,a.$

当λ=$a+bn$, $b(B\text{-}nE)=b\begin{pmatrix}1-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-n & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1-n\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\text{-}n\\ 0 & 1 & 0\cdots & -1\\ \vdots & \vdots & 1\cdots & \vdots\text{-}1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$

解得基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

当 λ=a， A-a$E=b\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，解得基础解系为

$\xi_2=\begin{pmatrix}\text{-}1\\ 1\\ \vdots 0\\ 0\end{pmatrix}\xi_1=\begin{pmatrix}\text{-}1\\ 0\\ \vdots 1\\ 0\end{pmatrix}\cdots\xi_n=\begin{pmatrix}\text{-}1\\ 0\\ 0\vdots\\ 1\end{pmatrix}$

取 $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1\vdots & \vdots 0 & 1\vdots & 0\vdots \\ 1 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$**，那么** $P^{-1}AP$ **为对角阵.**