第一章 函数与极限--补充题解答

补充题 1 设 $a=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，且 $a_k>0\ (k=1,2,\cdots,m)$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}.$$

解：$$a\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\le\sqrt[n]{m}a,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$，

由夹逼准则得，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a$.

补充题 2 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\sin(x-1)}{\ln x}$.

解：$x\to1, \sin\sin(x-1)\backsim\sin(x-1)\backsim(x-1)$，

$x\to1, \ln x=\ln[(x-1)+1]\backsim(x-1)$，

故，$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\sin(x-1)}{\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}=1.$$

第二章 导数与微分--补充题解答

补充题 1 设 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+3x-5x^2)-f(1)}{x}$.

解：由导数定义得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+3x-5x^2)-f(1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(1+(3x-5x^2))-f(1)}{3x-5x^2}\cdot\frac{3x-5x^2}{x}=3f'(1).$$

补充题 2 设 $f'(x_0)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$.

解：由导数定义得，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x_0)+x_0f(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}\frac{x_0f(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

注：此题不能用洛必达法则

补充题 3 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(-\infty,0) \\ 0, & x\in[0,\dfrac{\pi}{2}) \\ 1-\sin x, & x\in[\dfrac{\pi}{2},+\infty) \end{cases}$，求 $f'(x)$.

解：当 $x\in(-\infty,0), f'(x)=2x$,

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right), f'(x)=0$,

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \infty\right), f'(x)=-\cos x$,

由导数定义得,

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{x}=0,\ f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{0\text{-}0}{x}=0,$$

则 $f'(0)=0$;

$$f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x-\frac{\pi}{2}}=0,\ f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{1-\sin x-0}{x-\frac{\pi}{2}}=0,$$

则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, 故

$$f'(x)=2xf'(x)=\begin{cases} 2x & x\in(-\infty,0], \\ 0 & x\in(0,\dfrac{\pi}{2}], \\ -\cos x & x\in(\dfrac{\pi}{2},+\infty). \end{cases}$$

补充题 4 求由方程 $\sin(x+y)=y^2\cos x$ 确定的曲线 L 在点（0，0）处的切线方程 .

解：由隐函数求导得， $\cos(x+y)(1+y')=(2y\cos x)y'-y^2\sin x$

则 $y'(0)=-1$,

所求切线方程为: $x+y=0.$

第三章 微分中值定理与导数的应用--补充题解答

补充题 1 设 $f(x)$二阶可导，且 $f''(x)>0$，$h>0$，证明 $f(x+h)+f(x-h)>2f(x)$.

证明： $f(t)$ 在点 x 的泰勒公式为：

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(t-x)^2$$（ξ 介于 t 和 x 之间），

则 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)h^2$（$\xi_1$ 介于 $x+h$ 和 x 之间），（1）

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)h^2$$（ξ_2 介于 $x-h$ 和 x 之间），（2）

(1)+(2)得，

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)h^2+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)h^2\geq 2f(x).$$

注：此题也可以利用拉格朗日中值公式和函数的单调性加以证明

补充题 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

解：由洛必达法则得，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}e^x+e^{-x}=2.$$

补充题 3 写出 $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数 .

解： $y^{(n)}=(\ln 2)^n 2^x$，则 $y^{(n)}(0)=(\ln 2)^n$，

$y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 的系数 $a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(\ln 2)^n}{n!}$.

补充题 4 证明：当 $x>0$时，$e^x-1>(1+x)\ln(1+x)$.

证明： 令 $f(x)=e^x-1-(1+x)\ln(1+x)$，则 $f(0)=0$，

且 $f'(x)=e^x-\ln(1+x)-1$，$f'(0)=0$;

又 $f''(x)=e^x-\frac{1}{1+x}>0,$

则 $x>0$, $f'(x)$ 单调递增，故 $x>0$, $f'(x)>f'(0)=0$，

因此，$x>0, f(x)$ 单调递增，故 $x>0, f(x)$ >f(0)=0，

即 $e^{x}-1>(1+x)\ln(1+x).$

补充题 5 设 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，证明 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极大值．

解：因 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1,$

由极限的保号性知，在 a 的一个领域内有

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$$，则有 $f(x)-f(a)$ <0，

即 $f(x)<f(a)$，$f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极大值.

第四章 不定积分--补充题解答

补充题 1 求 $\int\frac{1+\sin^2 x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$

解 $\int\frac{1+\sin^2 x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=\int\frac{2-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\tan x-\frac{1}{2}x+C$

补充题 2 求 $\int e^x\left(2+\frac{e^{-x}}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

解 $\int e^x\left(2+\frac{e^{-x}}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int 2e^x\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=2e^x-\cot x+C$

补充题 3 求 $\int\frac{\sqrt{1+4\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

解 $\int\frac{\sqrt{1+4\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{1+4\arctan x}\,\mathrm{d}\arctan x$

$$=\frac{1}{4}\int\sqrt{1+4\arctan x}\,\mathrm{d}\left(1+4\arctan x\right)=\frac{1}{6}\left(1+4\arctan x\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

补充题 4 求 $\int e^{\sin x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$

解 $\int e^{\sin x}\sin 2x\,\mathrm{d}x=2\int e^{\sin x}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=2\int\sin x\,\mathrm{d}e^{\sin x}$

$$=2\sin x e^{\sin x}-2\int e^{\sin x}\ \mathrm{d}\sin x=2\sin x e^{\sin x}-2e^{\sin x}+C$$
$$=2e^{\sin x}\left(\sin x-1\right)+C$$

补充题 5　求 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x$

解法一　令 $\tan\frac{x}{2}=t$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x=\int\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t=\int\ \mathrm{d}t+\int\frac{2t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t=t+\ln\left(1+t^2\right)+C$$

$$=\tan\frac{x}{2}+\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+C=\tan\frac{x}{2}+2\ln\sec\frac{x}{2}+C$$

解法二

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x=\int\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\ \mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\ \mathrm{d}\frac{x}{2}+2\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\ \mathrm{d}\frac{x}{2}=\tan\frac{x}{2}-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C$$

解法三

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\ \mathrm{d}\frac{x}{2}-\int\frac{1}{1+\cos x}\ \mathrm{d}\left(1+\cos x\right)=\tan\frac{x}{2}-\ln\left|1+\cos x\right|+C$$

第五章 定积分--补充题解答

补充题　设 α 为任意实数，证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt$，并计算

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt$ 的值．

证明 令$t=\dfrac{\pi}{2}-x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^\alpha\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^\alpha x}{\cos^\alpha x+\sin^\alpha x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt,$$

得证.

因为

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t+\cos^\alpha t}dt=\frac{\pi}{4}.$$

第六章 定积分的应用--补充题解答

补充题 计算抛物线$y^2=2x$与直线$y=x-4$所围成的图形的面积，以及此图形绕y轴旋转而成的旋转体的体积．

解 由$\begin{cases}y^2=2x\\ y=x-4\end{cases}$得交点$(2,-2),(8,4)$．围成的图形的面积为

$$A=\int_{-2}^4\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy=18.$$

此图形绕y轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_{-2}^4(4+y)^2dy-\pi\int_{-2}^4\left(\frac{1}{2}y^2\right)^2dy$$

$$=168\pi-\frac{264}{5}\pi$$

$$=\frac{576}{5}\pi.$$

第七章 微分方程--补充题解答

补充题 1 求微分方程$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$满足条件$y(1)=e^3$的解．

解 方程变形为$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}=0$．作变量代换$u=\dfrac{y}{x}$，则得

$$x\frac{du}{dx}+u-u\ln u=0.$$

当$\ln u\neq 1$时，分离变量为

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}.$$

两边积分，得

$$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C|,$$

从而

$$u=e^{Cx+1}.$$

当$\ln u=1$时可得方程特解$u=e$，只要上面通解中允许$C=0$即可包含．代回原来变量，得原方程通解为

$$y=xe^{Cx+1}.$$

将初始条件$y(1)=e^3$代入，得$C=2$．所以所求特解为

$$y=xe^{2x+1}.$$