2013 - 2014 学年春季学期《线性代数》课程考试试题解析

一、填空题(本题满分15分,共有5道小题,每道小题3分,请将合适的答案填在每题的空中)

1．设 3 阶行列式D第三行的元素分别为 $-1,1,2$，对应的余子式分别为$2,3,1$，则行列式$D=$______.

解析：

1. $D=\alpha_{i1}A_{i1}+\alpha_{i2}A_{i2}+\cdots+\alpha_{in}A_{in}=-1\times(-1)^{3+1}\times 2+1\times(-1)^{3+2}\times 3+2\times(-1)^{3+3}\times 1=-3$

注释 本题知识点：

（1） 余子式M_{ij}与代数余子式A_{ij}的关系$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$；

（2） $D=\alpha_{i1}A_{i1}+\alpha_{i2}A_{i2}+\cdots+\alpha_{in}A_{in}$.

答案：-3

2．设n阶矩阵A与B相似，且$|A-3E|=0$，则B^2+3E的一个特征值为________.

解析：

2.由$|A-3E|=0$知 3 是A的特征值，又A与B相似，故 3 是B的特征值，B^2+3E有特征值$3^2+3=12$

注释 本题知识点：

（1） 特征方程$|A-\lambda E|=0$的根是方阵A的特征值；

（2） 相似矩阵有相同的特征值；

（3） λ 是 A 的特征值，则 $f(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ 是矩阵多项式 $f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$ 的特征值.

答案：12

3．设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，矩阵$A$的秩为3，且$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=b$，则方程组$Ax=b$的通解为________.

解析：

3.由A有4列，故$Ax=b$有4个未知数，又因为A的秩为3，故基础解系含有1个线性无关的解向量.

$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$即$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}=0$，故$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$是$Ax=0$的非零解，故构成基础解系.

$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=b$即$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=b$，故$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$是$Ax=b$的一个特解.

故$Ax=b$的通解为$k(1,2,-1,0)^T+(1,-1,1,-1)^T$， $k\in R$.

注释 本题知识点：

（1）齐次线性方程组：系数矩阵的秩+基础解系解向量的个数=未知数的个数；

（2）非齐次线性方程组解的结构.

答案：$k(1,2,-1,0)^T+(1,-1,1,-1)^T$， $k\in R$

4. 设α_1,α_2是某齐次线性方程组的基础解系，$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，则$\beta_1,\beta_2$是线性____（相关、无关）的.

解析：

4. 设$k_1\beta_1+k_2\beta_2=0$，代入$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$整理得到$(2k_1+k_2)\alpha_1+(k_2-k_1)\alpha_2=0$. 由于$\alpha_1,\alpha_2$是基础解系，故$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，由定义必有$\begin{cases}2k_1+k_2=0\\k_2-k_1=0\end{cases}$得到$k_1=k_2=0$故由定义$\beta_1,\beta_2$线性无关.

注释 本题知识点：

（1）线性无关的定义；

（2）基础解系中的向量线性无关.

答案：无关

5. 若$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3$为正定二次型，则$t$的取值范围 _______.

解析：

5. $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，其中$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&0\\2&0&t\end{pmatrix}$，由 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&0\\2&0&t\end{vmatrix}=-8+t>0$，故 $t>8$

注释 本题知识点：

（1）二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$正定的充要条件是矩阵A的各阶顺序主子式都大于 0；

（2）三阶行列式的对角线法则.

答案： $t>8$

二、 选择题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1． A,B 为均为 5 阶方阵，$\left|A\right|=\dfrac{1}{3},\left|B\right|=3,$ 则 $\left|-B^TA^{-1}\right|=$（　　　）.

(A) 9； (B) 3； (C) -3； (D) -9.

解析：

1. $\left|-B^TA^{-1}\right|=\left|-B^T\right|\left|A^{-1}\right|=(-1)^5\ |B^T\ |\dfrac{1}{|A|}=(-1)^5\ |B\ |\dfrac{1}{|A|}=-3\times 3=-9$.

注释 本题知识点：

（1）$\left|AB\right|=\left|A\right|\left|B\right|$；

（2）$\left|\lambda A\right|=\lambda^n\left|A\right|$；

（3）$\left|A^T\right|=\left|A\right|$；

（4）$\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$.

答案：D

2. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$, 且 $a_i\neq 0,b_i\neq 0,i=1,2,3$，则矩阵 A 的秩为（　　　）.

(A) 0； （B）1； (C) 2； (D) 3.

解析：

2. $a_i\neq 0,b_i\neq 0,i=1,2,3$ 故 A 的元素非零，由定义 $R(A)\geq 1$.又 $A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}(b_1\ b_2\ b_3)$ 故 $R(A)\leq 1$.

故 $R(A)=1$.

注释 本题知识点：

$R(AB)\leq\min\{R(A),R(B)\}$.

答案：B

3．若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　　）.

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$； (B) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$；

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$； (D) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$.

解析：

3.由于 A，B，C 选项向量构成方式一致，先考虑 D，设 $k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_3)+k_3(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)=0$

整理得 $(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(-k_1+k_3)\alpha_2+(-k_2-2k_3)\alpha_3=0$ 令 $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ -k_1+k_3=0 \\ -k_2-2k_3=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k_1=k_3 \\ k_2=-2k_3 \end{cases}$ 故存在不全为 0 的 k_1,k_2,k_3 使等式关系成立，故向量组线性相关。其他各项类似方式分析均线性无关.

注释 本题知识点：

线性相关的定义

答案：D

4. 设 A 是一个 $n\,(n\ge 3)$ 阶矩阵，下列陈述中正确的是（ ）.

（A）如果存在数 λ 和向量 α，使得 $A\alpha=\lambda\alpha$，则向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量；

（B）如果存在数 λ 和非零向量 α，使得 $(A-\lambda E)\alpha=0$，则 λ 是 A 的特征值；

（C）矩阵 A 的两个不同的特征值可以有同一个特征向量；

（D） 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的 3 个互不相同的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 A 的属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

解析：

4.A 选项缺少 α 是非零向量，错误.

B 选项 $(A-\lambda E)\alpha=0$ 展开即为 $A\alpha=\lambda\alpha$，与定义一致，正确.

C 选项，不同特征值的特征向量线性无关，故不可能相同，错误.

D 选项，不同特征值的特征向量线性无关，故错误.

注释 本题知识点：

（1） 特征值和特征向量的定义；

（2） 不同特征值的特征向量线性无关.

答案：B

5. 设矩阵 A 为 $m\times n$ 矩阵， 矩阵 B 为 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(AB)x=0$（ ）.

(A) 当 $m>n$ 时仅有零解； (B) 当 $m>n$ 时必有非零解；

(C) 当 $n>m$ 时仅有零解； (D) 当 $n>m$ 时必有非零解.

解析：

5. 由 AB 是 $m\times m$ 矩阵，故方程 $(AB)x=0$ 有 m 个未知数。又矩阵的秩不超过它的行列数，故 $R(A)\le m, R(A)\le n, R(B)\le m, R(B)\le n$，从而 $R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}\le \min\{m,n\}$ 因此当 $m>n$ 时必有 $R(AB)\le n<m$，即方程的系数矩阵的秩少于未知数的个数，因此该齐次方程必有非零解.

注释 本题知识点：

（1） 矩阵秩的定义；

（2） $R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$；

（3） n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $R(A)<n$.

答案：B

三、（本题满分 14 分）设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，

5 阶矩阵 $B=\begin{pmatrix} a & -a & a & -a & a+b \\ a & -a & a & b-a & a \\ a & -a & a+b & -a & a \\ a & b-a & a & -a & a \\ a+b & -a & a & -a & a \end{pmatrix}$，计算行列式 $|A|, |B|, \begin{vmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{vmatrix}$.

解析：

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=12+4+9-6-12-6=1$$

$$|B| \underset{\substack{C_1+C_4 \\ C_1+C_5}}{\overset{\substack{C_1+C_2 \\ C_1+C_3}}{=}} \begin{vmatrix} a+b & -a & a & -a & a+b \\ a+b & -a & a & b-a & a \\ a+b & -a & a+b & -a & a \\ a+b & b-a & a & -a & a \\ a+b & -a & a & -a & a \end{vmatrix} = (a+b)\begin{vmatrix} 1 & -a & a & -a & a+b \\ 1 & -a & a & b-a & a \\ 1 & -a & a+b & -a & a \\ 1 & b-a & a & -a & a \\ 1 & -a & a & -a & a \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_4+aC_1 \\ C_5-aC_1}}{\overset{\substack{C_2+aC_1 \\ C_3-aC_1}}{=}} (a+b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a+b)b^4(-1)^{t(54321)} = (a+b)b^4$$

$$\begin{vmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{vmatrix} = -\left|A^{-1}\right| \times \left|B^{-1}\right| = -\frac{1}{(a+b)b^4}$$

注释 本题知识点：

（1） 三阶行列式的对角线法则；

（2） 行列式的性质；

（3） $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$ 则 $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$；

（4） $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$.

四、（本题满分 10 分）已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$，且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$，

求矩阵 B.

解析：

法一：由 $\left|A^*\right| = |A|^2 = 4$，得 $|A| = \pm 2$.

当 $|A| = 2$ 时，

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = (A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

由 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ 得，$AB = B + 3A$，

从而 $B = 3(A-E)^{-1}A = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$.

同理，当 $|A| = -2$ 时，$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|} = -\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 2 \end{pmatrix}$，$A = (A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$,

$$B = 3(A-E)^{-1}A = 3\begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

法二：

由 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，两边右乘 A 有 $AB=B+3A$，两边再左乘 A^{-1} 得 $B=A^{-1}B+3E$，

$(E-A^{-1})B=3E$，故 $B=3(E-A^{-1})^{-1}$.

由 $\left|A^*\right|=|A|^2=4$，得 $|A|=\pm 2$.

当 $|A|=2$ 时，

$$B=3(E-A^{-1})^{-1}=3(E-\frac{A^*}{|A|})^{-1}$$

$$=3(E-\frac{A^*}{2})^{-1}=3\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&3/2&-1\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&-2\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3/2&-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&9&-3\end{pmatrix}.$$

当 $|A|=-2$ 时，同理

$$B=3(E-\frac{A^*}{-2})^{-1}=3\begin{pmatrix}3/2&0&0\\0&3/2&0\\0&-3/2&3\end{pmatrix}^{-1}=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}^{-1}=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1/2&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

注释　本题知识点：

（1）　矩阵方程的求解；

（2）　$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$；

（3）　$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$；

（4）　$(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda\neq 0)$.

五、(本题满分 14 分)

1．向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\b\\3\\5\end{pmatrix}$，且 A 的秩为 2，

（1）求 a,b；

（2）求向量组 A 的一个最大无关组，并把其余向量用最大无关组线性表示.

解析：

（1）$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\1&1&b\\2&1&3\\3&1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_4]{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1&1&b\\3&1&5\\2&1&3\\1&a&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-r_1}]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&b\\0&-2&5-3b\\0&-1&3-2b\\0&a-1&1-b\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_2\\r_4+(a-1)r_2}]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&b\\0&-1&3-2b\\0&0&b-1\\0&0&-2ab+3a+b-2\end{pmatrix}$$

由 A 的秩为 2 得，$a=1,b=1$．

（2）α_1,α_2 为向量组 A 的一个最大无关组.

$A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$．

注释 本题知识点：

（1） 向量组的秩和最大无关组的求法；

（2） 向量的线性表示.

2. 求方程组 $\begin{cases}-x_1-3x_2+3x_3+8x_4=11\\3x_1+9x_2-15x_4=3\\x_1+3x_2+x_3-4x_4=5\\2x_1+6x_2+x_3-9x_4=6\end{cases}$ 的通解.

解析：

对方程的增广矩阵做行初等变换得

$$(A,b)=\begin{pmatrix}-1&-3&3&8&11\\3&9&0&-15&3\\1&3&1&-4&5\\2&6&1&-9&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&1&-4&5\\0&0&-3&-3&-12\\0&0&4&4&16\\0&0&-1&-1&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&1&-4&5\\0&0&1&1&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&0&-5&1\\0&0&1&1&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由上，$R(A,b)=R(A)=2,$ 方程组有无穷多解，

方程组的通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$， $c_1, c_2 \in R$.

注释 本题知识点：

线性方程组的求解.

六、（本题满分 12 分） 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1{}^2 + 5x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$ 的秩为 2；

1. 求 a 的值；

2. 利用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

解析：

二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & a \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 0 & -11/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$，因为二次型的秩为 2，所以 $a = 5$；

2. 矩阵 A 的特征多项式

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -5 \\ -2 & -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 11)(\lambda - 2) = 0$$

所以 A 的特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 11$.

对于 $\lambda_1 = 0$，所对应的齐次线性方程 $Ax = 0$，求得它的一个基础解系为

$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$， 再单位化 $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2 = 2$，所对应的齐次线性方程 $(A - 2E)x = 0$，求得它的一个基础解系为

$$\xi_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad \text{再单位化}\, e_2=\begin{pmatrix}\frac{4}{3\sqrt{2}}\\-\frac{1}{3\sqrt{2}}\\\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

对于$\lambda_3=11$，所对应的齐次线性方程$(A-11E)x=0$，求得它的一个基础解系为

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\qquad \text{再单位化}\, e_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

正交矩阵为：$P=\begin{pmatrix}\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} & 0\\-\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&11&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

所以正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} & 0\\-\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

得二次型标准型$f=2y_1^2+11y_2^2$.

注释 本题知识点：

（1） 二次型的矩阵;

（2） 矩阵秩的求法;

（3） 二次型化标准型.

七、（本题满分 8 分）已知$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T$，$(i=1,\cdots,r,r<n)$为$n$维实向量，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无

关，已知$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$是线性方程组：$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0, \end{cases}$的一个非零解，证明：向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$线性无关.

解析：

证明：设存在常数$k_1,k_2,\cdots,k_r,k_{r+1}$，使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=0, \qquad (*)$$

因为方程组可写成$\begin{pmatrix} \alpha_1{}^T \\ \alpha_2{}^T \\ \vdots \\ \alpha_r{}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0,$且$\beta$是方程组的非零解，则有

$\alpha_i{}^T\beta=0, i=1,\cdots,r$，即$\alpha_i$和$\beta$正交.

因此在等式（*）左右两端和向量β做内积，可得

$$(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta,\beta)=(0,\beta)=0$$

即 $k_{r+1}\beta^T\beta=0$，而β非零，可得$k_{r+1}=0$，

因此（*）式可写成 $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0,$

又因为$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关，有$k_1=\cdots=k_r=0,$

因此，可得向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$线性无关.

注释 本题知识点：

（1） 线性无关的定义；

（2） 向量正交的定义；

（3） 向量内积的定义.

八、（本题满分 12 分，第 1 题 6 分，第 2 题 6 分）

1. 设A,B为 4 阶方阵，$AB+2B=0,$矩阵B秩为 2，

且$|A+E|=|A-2E|=0;$

（1） 求矩阵A的特征值；

（2） 矩阵A是否可相似对角化？为什么？

解析：

1. 因为$AB+2B=0$, 故$AB=-2B$, B 的非零列是特征值-2 的特征向量. 而矩阵B秩为 2，所以-2 为矩阵A的 2 重特征值，且B的列向量中有两个线性无关的向量正好是对应的线性无关的特征向量；

$\left|A+E\right|=\left|A-2E\right|=0$, 则-1，2 都是矩阵$A$的单特征值.

故矩阵 A 的特征值为 -1, 2, -2, -2；

A 矩阵存在 4 个线性无关的特征向量，因此可对角化；

注释 本题知识点：

（1） 特征值、特征向量和特征方程的定义；

（2） 矩阵的秩等于矩阵的列（行）向量组的秩；

（3） 不同特征值的特征向量线性无关；

（4） n阶方阵A可对角化的充要条件是A有n个线性无关的特征向量.

2. 已知实矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$满足$a_{ij}=A_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，且$a_{11}\neq 0$，其中$A_{ij}$是$a_{ij}$的代数余子式，证明 $\left|A\right|=1$.

解析：

2. 证明：由$a_{ij}=A_{ij}\ (i,j=1,2,3)$知，$A^T=A^*$，

两边取行列式，得$\left|A\right|=\left|A^T\right|=\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$，所以$\left|A\right|=\left|A\right|^{n-1}$，只能取 0 或 1.

又将$\left|A\right|$按第一行展开，得$\left|A\right|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}={a_{11}}^2+{a_{12}}^2+{a_{13}}^2\geq 0$，

因为$a_{11}\neq 0$，所以$\left|A\right|=1$.

注释 本题知识点：

（1） 伴随矩阵A^*的定义；

（2） $\left|A^T\right|=\left|A\right|$；

（3） $\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$；

（4） 行列式按行展开.