第一章　　函数与极限

习题 1-2　$\mathbf{P_{26\text{-}27}}$　5(2)、(3)；　6．

5．根据数列极限的定义证明：

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$．

6．若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$．并举例说明：如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限，但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限．

习题 1-3　P_{34}　5(4)；　6(2);　11．

5．根据函数极限的定义证明：

（4）$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

6．根据函数极限的定义证明：

（2）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

11．根据函数极限的定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

习题 1-4　$\mathbf{P_{37\text{-}38}}$　2(1);　4(1)；　7.

2．根据 $\varepsilon - \delta$ 定义证明：

（1）　$y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ 为当 $x \to 3$ 时的无穷小.

4．利用极限和无穷小的关系，求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$.

7. 证明：函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[0,1]$ 内无界， 但这函数不是 $x\to 0^{+}$ 时的无穷大.

习题 1-5　P_{45}　1(5)、(12)、 (14);　2(3);　3(2).

1．计算下列极限：

（5）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

（12） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$.

（14） $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$.

2．计算下列极限：

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

3．计算下列极限：

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

习题 1-6　P_{52}　1(5)、 (6)；　2 (1)、(4)；　4 (3)、(5)；　补充题 1.

1．计算下列极限：

（5）　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$ (x为不等于零的常数) .

2．计算下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{kx}$ (k为正整数) .

4．利用极限存在准则，证明：

（3）数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$ 的极限存在.

（5） $\lim\limits_{x\to 0^+} x[\frac{1}{x}]$.

补充题 1　设 $a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，且 $a_k>0\ (k=1,2,\cdots,m)$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\ .$$

习题 1-7　$\mathbf{P_{55\text{-}56}}$　4(2)；　5 (3)、(4);　　补充题 2.

4．证明：当 $x\to 0$ 时，有：

（2）$\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$.

5．利用等价无穷小的性质，求下列极限：

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

补充题 2　求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\sin(x-1)}{\ln x}$.

习题 1-8　$\mathbf{P_{61}}$　3 (4)；　4.

3．下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类．如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续：

（4）$y=\begin{cases} x-1, & x\le 1, \\ 3-x, & x>1, \end{cases}\quad x=1$.

4．讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判断其类型.

习题 1-9　P_{66}　3 (7)；　4 (5)、(6)；　6.

3．求下列极限：

（7）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

4．求下列极限：

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

（6） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$.

6.　设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ a+x, & x\geq 0. \end{cases}$ 应当怎样选择数 a，使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

习题 1-10　P_{70}　1;　3;　5.

1．设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，并且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0\leq f(x)\leq 1$．试证明 $[0,1]$ 中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$（c 称为函数 $f(x)$ 的不动点）.

3．证明方程$x = a\sin x + b$，其中$a > 0, b > 0$，至少有一个正根，并且它不超过$a + b$.

5．若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b, \quad (n \geq 3)$，则在$(x_1, x_n)$内至少有一点$\xi$，使$f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$.

第二章　　导数与微分

习题 2-1　$\mathbf{P_{83\text{-}84}}$　8;　16 (2);　17;　补充题 1、2.

8．设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（　）.

(A) 充分必要　　　　(B) 充分条件但非必要条件

(C)必要条件但非充分条件　　　　(D) 既非充分条件又非必要条件

16．讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性：

(2) $y=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

17. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$，为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a、b 应取什么值？

补充题 1　设 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+3x-5x^2)-f(1)}{x}$.

补充题 2　设 $f'(x_0)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$.

习题 2-2　$P_{94\text{-}95}$　2(8);　6 (8);　8 (10);　9;　14;　补充题 3.

2．求下列函数的导数：

（8）$y=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 3$.

6．求下列函数的导数：

（8） $y = \arctan(e^x)$.

8．求下列函数的导数：

（10） $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

9．设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且 $f^2(x) + g^2(x) \neq 0$，试求函数 $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$ 的导数.

14．设函数 $f(x)$ 满足下列条件：

（1） $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，对一切 x，$y\in\mathbf{R}$；

（2） $f(x)=1+xg(x)$，而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.

试证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导，且 $f'(x)=f(x)$.

补充题 3　设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(-\infty,0) \\ 0, & x\in[0,\dfrac{\pi}{2}) \\ 1-\sin x, & x\in[\dfrac{\pi}{2},+\infty) \end{cases}$，求 $f'(x)$.

习题 2-3　$\mathbf{P_{100}}$　1(12);　3(1);　11(2).

1．求下列函数的二阶导数：

（12）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

3．设 $f''(x)$存在，求下列函数 y 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

（1）$y=f(x^2)$.

11．求下列函数的 n 阶导数的一般表达式：

（2）$y=\sin^2 x$.

习题 2-4　P$_{109}$　2;　3(3);　4(1);　8 (4);　9(2) ;　补充题 4.

2．求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点$(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a)$处的切线方程和法线方程.

3．求由下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$：

（3） $y=\tan(x+y)$.

4．用对数求导法求下列函数的导数：

（1） $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$.

8．求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

（4） $\begin{cases} x=f'(t), \\ y=t\,f'(t)-f(t); \end{cases}$ 设 $f''(t)$ 存在且不为零.

9． 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$：

$$\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t. \end{cases}$$

补充题 4　求由方程 $\sin(x+y)=y^2\cos x$ 确定的曲线 L 在点 $(0,0)$ 处的切线方程.

习题 2-5　$\mathbf{P_{121}}$　3 (8)；　4 (5).

3．求下列函数的微分：

（8）　$y=\tan^2(1+2x^2)$.

4．将适当的函数填入下列括号内，使等号成立：

（5）　$\mathrm{d}(\qquad\qquad\qquad)=\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$.

第三章　　微分中值定理与导数的应用

习题 3-1　P_{132}　8;　10;　12;　补充题 1.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

10．设 $a>b>0$，证明：$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

12．证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

补充题 1　设 $f(x)$二阶可导，且 $f''(x)>0$，$h>0$，证明　$f(x+h)+f(x-h)>2f(x)$.

习题 3-2　P_{137}　1(6)、(12)、(14)、(15);　　3;　　补充题 2.

1．用洛必达法则求下列极限：

（6）　$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;

（12）　$\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$;

（14）　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$;

（15） $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sin x}$.

3．**验证**极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在，**但不能用洛必达法则得出**.

补充题 2　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$.

习题 3-3　$\mathbf{P_{143}}$　5;　7;　10（2）;　补充题 3.

5．求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

7．求函数 $f(x)=xe^{x}$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

10．利用泰勒公式求下列极限：

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2\left[x+\ln\left(1-x\right)\right]}$.

补充题 3　写出 $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数.

习题 3-4　P_{151}　5(3)、(5)；　14;　补充题 4.

5．证明下列不等式：

（3）　当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$\sin x + \tan x > 2x$;

（5）当$x > 4$时，　$2^x > x^2$.

14. 试决定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中的 a、b、c、d，使得 $x = -2$ 处曲线有水平切线，$(1,-10)$ 为拐点，且点 $(-2,44)$ 在曲线上.

补充题 4　证明：当 $x > 0$ 时，$e^x - 1 > (1+x)\ln(1+x)$.

习题 3-5　P_{161}　1 (6)；　6(3)；　8;　补充题 5.

1．求下列函数的极值：

（6）　$y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.

6．下列函数的最大值、最小值：

（3）$y=x+\sqrt{1-x},\quad -5\le x\le 1.$

8．问函数 $y = x^2 - \dfrac{54}{x}\ (x<0)$ 在何处取得最小值？

补充题 5　设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，证明 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极大值.

习题 3-7　$\mathbf{P_{176}}$　3．

3．求抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

第四章　　不定积分

习题 4-1　P$_{193}$　2(26)；　补充题 1、2.

2．求下列不定积分：

（26）$\int \frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

补充题 1　求 $\int \frac{1+\sin^2 x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

补充题 2　求 $\int e^x\left(2+\frac{e^{-x}}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

习题 4-2　　P_{208}　2 (21)、(29) ;　补充题 3.

2．求下列不定积分：

（21）　$\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$;

（29）　$\int \tan^3 x \sec x\,\mathrm{d}x$.

补充题 3　求 $\int \frac{\sqrt{1+4\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

习题 4-3　 P_{213}　14;　20;　补充题 4.

求下列不定积分：

14. $\int x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$.

20. $\int \cos\ln x\,\mathrm{d}x$.

补充题 4　求 $\int e^{\sin x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

习题 4-4　P_{218}　9;　22;　补充题 5.

求下列不定积分：

9．$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

22．$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

补充题 5　　求$\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

第五章　　定积分

习题 5-1　P_{236}　7；　13(1)、（3）.

7．设 $\int_{-1}^{1}3f(x)dx=18,\quad \int_{-1}^{3}f(x)dx=4,\quad \int_{-1}^{3}g(x)dx=3.$ 求

（1）$\int_{-1}^{1}f(x)dx;$

（2）$\int_{1}^{3}f(x)dx;$

（3）$\int_{3}^{-1}g(x)dx;$

（4）$\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}\left[4f(x)+3g(x)\right]dx$.

13．根据定积分性质及第 12 题的结论，说明下列各对积分中哪个的值较大：

（1）$\int_{0}^{1}x^{3}dx$ 还是 $\int_{0}^{1}x^{2}dx$？

（3）$\int_{1}^{2}\ln xdx$ 还是 $\int_{1}^{2}(\ln x)^{2}dx$？

习题 5-2　P_{244}　4;　5（3）;　6;　8（11）、（12）;　11（2）;　13.

4．当 x 为何值时，函数 $I(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 有极值？

5．计算下列各导数：

（3）计算 $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$.

6．证明 $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^3}\,dt$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是单调增加函数，并求 $(f^{-1})'(0)$.

8．计算下列各定积分：

（11）$\int_0^{2\pi} \left|\sin x\right| dx;$

（12）$\int_0^2 f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1, \\ \dfrac{1}{2}x^2, & x>1. \end{cases}$

11．求下列极限：

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

13．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & x<0\text{或}x>\pi,\end{cases}$ 求 $\phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

习题 5-3　P$_{254}$　1（10）、（16）;　4;　7（4）;　补充题.

1．计算下列定积分：

（10）$\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$；

（16）$\int_1^{e^2} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

4．证明：$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx \qquad (m,n \in N)$.

7．计算下列定积分：

（4）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

补充题　设α为任意实数，证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha t}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t} dt$，并计算

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t} dt$ 的值.

习题 5-4　P_{262}　1（6）、（9）；　4.

1．判断下列各反常积分的收敛性，如果收敛，计算反常积分的值：

（6）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$；

（9）$\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

4．计算反常积分 $\int_0^1 \ln x dx$.

第六章　定积分的应用

习题 6-2　$P_{286\text{-}289}$　3;　8（2）;　16;　22;　25;　补充题.

3．求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围成的图形的面积.

8．求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积;

（2）　$\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $\rho^2=\cos 2\theta$.

16．求圆盘 $x^2+y^2\le a^2$ 绕 $x=-b$ $(b>a>0)$ 旋转所成旋转体的体积.

22．计算曲线 $y=\ln x$ 上相应于 $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

25．计算星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 的全长.

补充题　计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积，以及此图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

第七章　　微分方程

习题 7-2　P_{308}　1(5)；　6．

1．　求下列微分方程的通解：

（5）　$\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0$.

6．　一曲线通过点$(2,3)$，它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分，求这曲线方程．

习题 7-3　P_{314}　1(6)；　3;　补充题 1.

1．求下列齐次方程的通解：

（6）$(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$.

3. 设有联结点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 OA，对于 OA 上任一点 $P(x,y)$，曲线弧 OP 与直线段 $\overline{OP}$ 所围图形的面积为 x^2，求曲线弧 OA 的方程.

补充题 1　求微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解.

习题 7-4　P_{320}　1(10)；　7(4)；　8(3).

1．求下列微分方程的通解：

（10）　$\left(y^2 - 6x\right)\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$.

7．用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程，然后求出通解：

（4）$y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1$.

8．求下列伯努利方程的通解：

（3）$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{3}y = \dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$.

习题 7-5　$\mathbf{P_{329}}$　1(5)、 (7).

1．求下列各微分方程的通解：

（5）$y''=y'+x$.

（7）$yy''+2y'^2=0$.

习题 7-7　P_{346}　1 (5)、(10)；　2(6)　.

1.　求下列微分方程的通解：

（5）　$4\dfrac{d^2x}{dt^2}-20\dfrac{dx}{dt}+25x=0$.

（10）　$y^{(4)}+5y''-36y=0$.

2． 求下面微分方程满足所给初始条件的特解：

（6） $y''-4y'+13y=0, y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=3$.

习题 7-8　$\mathbf{P_{354}}$　1 (4)、(10)；　6．

1．求下列各微分方程的通解：

（4） $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$.

（10） $y'' - y = \sin^2 x$.

6．设函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足 $\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)dt - x\int_0^x \varphi(t)dt$ ，求 $\varphi(x)$.

高等数学 A（上）试题一

一、单项选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）.

1. 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-a}{\sin x}$ 存在，则【　　】.

A．$a=0$　　B．$a=1$　　C．$a=-1$　　D．不能确定

2. 对函数 $y=\dfrac{\sin nx}{\sin x},n\in\mathbb{Z}$， 下列结论中正确的是【　　】.

A. 其所有间断点都是跳跃间断点

B. 其所有间断点都是可去间断点

C. 除 $x=0$ 是可去间断点外，其余间断点都是无穷间断点

D. 其所有间断点都是无穷间断点

3. 若 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处，取得极大值，则【　　】.

A．$f'(x_0)=0$　　B．$f''(x_0)<0$

C．$f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$　　D．$f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

4. 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为【　　】.

A．$1+\sin x$　　B．$1-\sin x$

C．$1+\cos x$　　D．$1-\cos x$

5. $\int_{-1}^{1}(x^6+1)\sin x dx=$【　　】.

A．2　　B．$\dfrac{\pi}{2}$

C．0　　D．$\sin 2$

二、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)\neq 0$，则常数 $k=$____________.

2.函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的拐点是____________ .

3. $\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx=$________________.

4.函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}(x\ge 0)$ **在** $x=$______________ **处取到最大值**.

5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+4x+9}=$_______________.

三、（本题满分 10 分）设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos t^2 dt, & x>0,\end{cases}$$

试讨论 $f(x)$ **在** $x=0$ **处的连续性和可导性**.

四、（本题满分 10 分）设 a **为正常数，** $y=y(x)$ **是由参数方程**

$$\begin{cases}x=\dfrac{4at}{1+t^3}\\ y=\dfrac{4at^2}{1+t^3}\end{cases}$$

所确定，　求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

五、（本题满分 10 分）设 $y=(x^2+1)\sin 2x$ **，求** $y^{(8)}$.

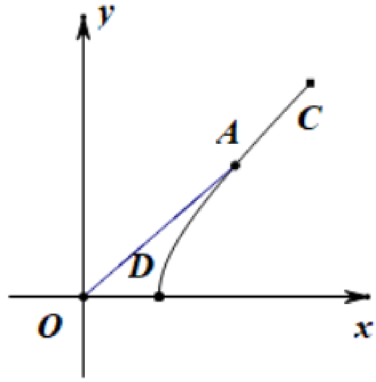
六、（本题满分 12 分）设 $\varphi(x)=\cos x-\int_0^x (x-u)\varphi(u)du$ **，其中** $\varphi(u)$ **为连续函数，求** $\varphi(x)$.

七、（本题满分 10 分）设 n **为正整数，** $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2nx}{\sin x}dx$.

(1) 求 $I_n-I_{n-1}(n\ge 2)$ **；**

(2) 求定积分 $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 6x}{\sin x}dx$.

八、（本题满分 10 分）设 O 为坐标原点，双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 上的点 $A(x_0, y_0)$ 满足 $x_0 > 1$， $y_0 > 0$，由直线 OA、x 轴和双曲线 C 在第一象限围成一平面图形 D，如右图.



（1） 求 D 的面积 t；

（2） 将点 $A(x_0, y_0)$ 的坐标用面积 t 表示.

九、（本题满分 8 分）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导且 $f'(x)$ 单调增加，证明：在 $(0,+\infty)$ 上函数 $xf'(x) - f(x)$ 单调增加.

高等数学 A（上）试题二

一、单项选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cos n-n\sin\dfrac{1}{n}\right)=$ 【　　】.

A. 0　　B. 不存在　　C. 1　　D. -1

2. 设方程 $x=y^{y}\ (y>0)$ 确定 y 是 x 的函数，则 $\mathrm{d}y=$ 【　　】.

A. $\dfrac{1}{x(1+\ln y)}$　　B. $\dfrac{1}{x(1+\ln y)}\mathrm{d}x$

C. $\dfrac{1-x}{x\ln y}$　　D. $\dfrac{1-x}{x\ln y}\mathrm{d}x$

3. 设 $x\ln x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=$ 【　　】，其中 C 为任意常数.

A. $\dfrac{1}{2}x^2\ln x+\dfrac{1}{2}x^2+C$　　B. $\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$

C. $\dfrac{3}{2}x^2\ln x+\dfrac{1}{4}x^2+C$　　D. $\dfrac{1}{2}x^2\ln x+\dfrac{1}{4}x^2+C$

4. 曲线 $y=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}-1$ 介于 $0\le x\le 1$ 之间弧段的长度为【　　】.

A. $\dfrac{52}{3}$　　B. $\dfrac{39}{8}$　　C. $\dfrac{13}{6}$　　D. $\dfrac{9}{4}$

5. 微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\dfrac{y}{x}$ 的通解为【　　】，其中 C 为任意常数.

A. $y=\dfrac{1}{x}e^{Cx+1}$　　B. $y=(x+1)e^{Cx}$

C. $y=x^2e^{Cx}$　　D. $y=xe^{Cx+1}$

二、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ 0 ______.

2. 曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点为 (0, 0) .

3. $\int_{-1}^{1}\left(x^2+e^{\sin|x|}\tan x\right)\mathrm{d}x=$ $\frac{2}{3}$.

4. 当 $x\to 0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小，则正整数 $n=$ 5 .

5. 瑕积分 $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x=$ −1 .

三、（本题满分 10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2\arctan 2x}$.

四、（本题满分 10 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

五、（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，M 和 m 分别为 $f(x)$ 在区间 $[x-a,x+a]$ 上的最大值和最小值，且 $g(x)=\dfrac{\int_{x-a}^{x+a}f(t)\mathrm{d}t}{2a}$ （常数 $a>0$）.

证明：$|g(x)-f(x)|\le M-m$.

六、（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

(1) 证明：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$.

(2) 计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$.

七、（本题满分 10 分）设曲线 $y=ax^2\ (a>0,\ x\ge 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形，问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最大？最大体积是多少？

八、（本题满分 10 分）求微分方程 $y''-6y'+9y=e^x\sin x$ 的通解.

九、（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且满足 $f(a)=a,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$，试证：在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$.