2016 ~2017 学年秋季学期《线性代数 》课程考试试题解析

一、填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分，请将合适的答案填在每题的空中）

1. 设 A,B 均为四阶方阵，且 $|A|=1,|B|=-2$, A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $\|B|A^*B|=$______.

解析:

由于 $|A|=1$, $|A^*|=|A|^3=1$, $|B|=-2$,

所以 $\|B|A^*B|=|B|^4|A^*||B|=(-2)^4\cdot 1\cdot(-2)=-32.$

注释　本题知识点：

(1) $|A^*|=|A|^{n-1}$;

(2) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$;

(3) $|AB|=|A||B|$.

答案：$-32.$

2．设矩阵 A 满足 $A^2+2A+3E=0$, 则 $(A-E)^{-1}=$______.

解析:

由 $A^2+2A+3E=0$,

得 $A^2+2A-3E=-6E$,

即 $(A-E)(A+3E)=-6E$，$(A-E)\dfrac{A+3E}{-6}=E$,

所以 $(A-E)^{-1}=-\dfrac{1}{6}(A+3E).$

注释　本题知识点：

$AA^{-1}=E$.

答案：$(A-E)^{-1}=-\dfrac{1}{6}(A+3E).$

3．已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若向量组 $\beta_1=\alpha_1+k\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+k\alpha_3$, $\beta_3=k\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关，则参数 $k=$__________.

解析:

由题设可得

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&k\\k&1&0\\0&k&1\end{pmatrix},$$

因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性相关.

所以$\begin{vmatrix}1&0&k\\k&1&0\\0&k&1\end{vmatrix}=0,$

解得$k=-1$.

注释　本题知识点：

（1）向量组的线性相关性与向量组的秩.

（2）向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)x=0$有非零解.

答案：　$k=-1$.

4．已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\6\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$,则向量组的秩为 ________.

解析:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\2&6&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&2\\0&4&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以向量组的值秩为2.

注释　本题知识点：

（1）矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩.

（2）矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

答案：2.

5．设三阶实对称矩阵A的两个非零特征值对应的特征向量分别为$\alpha_1=(1,1,1)^T$, α_2=(0,-1,1)^T, 且秩

$R(A)=2$, 则齐次方程组$Ax=0$的通解为__________________.

解析:

因为三阶实对称矩阵的秩$R(A)=2$,

所以该矩阵有特征值零，设零特征值对应的特征向量为α,

由于不同特征值对应的特征向量正交

所以$\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\alpha=0$,

即$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\alpha=0$,

解得一个非零解$\alpha=(-2,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，

因此有$A\alpha=0$,

又因为$R(A)=2$,

所以齐次方程组$Ax=0$的通解为$x=k(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$(k\in R)$.

注释　本题知识点：

（1）齐次线性方程组的通解.

（2）方阵的特征值和特征向量的定义.

（3）不同的特征值对应的特征向量正交.

答案：　$x=k(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$(k\in R)$.

二、 选择题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．已知三阶行列式$\begin{vmatrix}3a_{11} & 2a_{13} & -a_{12}\\ 3a_{21} & 2a_{23} & -a_{22}\\ 3a_{31} & 2a_{33} & -a_{32}\end{vmatrix}=6$, 则$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=$【　　　　】.

(A)2;　　　　(B)6;　　　　(C)-1;　　　　(D) 1

解析：

由$\begin{vmatrix}3a_{11} & 2a_{13} & -a_{12}\\ 3a_{21} & 2a_{23} & -a_{22}\\ 3a_{31} & 2a_{33} & -a_{32}\end{vmatrix}=6$, 根据行列式的性质可得

$-6\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13} & a_{12}\\ a_{21} & a_{23} & a_{22}\\ a_{31} & a_{33} & a_{32}\end{vmatrix}=6$, 即$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=1$.

注释　本题知识点：

行列式的性质

答案：1.

2. 设A是$m\times n$矩阵，$Ax=0$是非齐次线性方程组$Ax=b$对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是【　　　　】.

(A) 若$Ax=0$仅有零解，则$Ax=b$有唯一解；

(B) 若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解；

(C) 若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 仅有零解；

(D) 若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 有非零解.

解析:

$Ax=0$ 仅有零解，可得 $R(A)=n$, 但不能得出 $R(A)=R(A,b)$, 所以 $Ax=b$ 不一定有解.

$Ax=0$ 有非零解，可得 $R(A)<n$, 但不能得出 $R(A)=R(A,b)$, 所以 $Ax=b$ 不一定有解.

$Ax=b$ 有无穷多解，可得 $R(A)=R(A,b)<n$, 所以 $Ax=0$ 有非零解.

注释　本题知识点：

线性方程组的解的个数

非齐次线性方程组 $Ax=b$, A 为 $m\times n$ 矩阵, 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)$.

（1）当 $R(A)=R(A,b)=n$ 时，有唯一解.

（2）当 $R(A)=R(A,b)<n$ 时，有无穷多解.

n 元线性方程组 $Ax=b$ 无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,b)$.

n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 总有解. 有非零解的充分必要条件是 $R(A)<n$.

答案：D.

3. 设 A 是 3×4 阶矩阵， A 的行向量组线性无关，则【　　】.

(A) A 中必有两列元素对应成比例；

(B) A 中必有一个列向量是其余列向量的线性组合；

(C) A 的列向量组线性无关；

(D) A 中必有一列元素全为零；

解析:

由于矩阵 A 的行向量组线性无关，所以 $R(A)=3$.

设 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为 A 的列向量组，则有 $R(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=3$,

因此 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关，且有三个列向量线性无关

故矩阵 A 中必有一个列向量是其余列向量的线性组合.

注释　本题知识点：

（1）矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩

（2）向量组线性相关和线性无关

答案：B

4. 已知齐次方程组$(A-2E)x=0$的基础解系有一个向量，则行列式$\left|A^2-A-2E\right|=$【　　　　】

(A) 2；　　(B) 0；　　(C) 1；　　(D) 3.

解析:

由题设知矩阵$A-2E$为方阵，且$(A-2E)x=0$的基础解系有一个向量

所以$|A-2E|=0$

故$\left|A^2-A-2E\right|=|(A-2E)(A+E)|=|A-2E||A+E|=0.$

注释　本题知识点：

（1）齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩小于变元的个数.

（2）$|AB|=|A||B|$.

答案：B

5. 当t满足【　　】时，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

是负定的.

(A) $t\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$;　　(B) $t\in(0,\sqrt{2})$;　　(C) $t\in(-\sqrt{2},0)$;　　(D) 空集.

解析:

二次型矩阵为　$A=\begin{pmatrix}-1 & t & 1\\ t & -2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$,

根据负定二次型判定可得

$$\Delta_{11}=-1<0,\ \Delta_{22}=\begin{vmatrix}-1 & t\\ t & -2\end{vmatrix}=2-t^2>0\Rightarrow t^2<2,\ \Delta_{33}=\begin{vmatrix}-1 & t & 1\\ t & -2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-2t^2-2t+7<0,$$

所以不存在t使得二次型为负定的.

注释　本题知识点：

负定二次型的判定

n元实二次型$f=x^{\mathrm{T}}Ax$负定的充分必要条件是下列条件之一成立：

（1）f的负惯性性指数为n；

（2）A的特征值全为负数；

（3）A 合同于 $-E$；

（4）A 的各阶顺序主子式负正相间，即奇数阶顺序主子式为负数，偶数阶顺序主子式为负数.

答案：D

三、（本题满分 14 分）计算下列行列式的值：

1. $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&5\\4&9&25\end{vmatrix}$.

解析:

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&5\\4&9&25\end{vmatrix}=(5-3)(5-2)(3-2)=6.$$

注释　本题知识点：

利用范德蒙行列式求解

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

答案：6.

2. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&1&20&500\end{vmatrix}$ 的第四行元素的余子式之和.

解析:

行列式 D 的第四行元素的余子式之和为

$$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=-7\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28.$$

注释　本题知识点：

（1）余子式和代数余子式的定义；

（2）行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.

答案：-28

四、（本题满分 12 分）已知矩阵方程 $(2A^*)^{-1}XA^{-1}=\frac{1}{2}AX+E$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,

A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，求 X.

解析:

因为 $|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=2,$ 所以矩阵 A 可逆.

方程两端左乘 $2A^*$, 右乘 A, 可得

$X(E-2A)=4E,$

所以 $X=4(E-2A)^{-1}=\frac{4}{9}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}.$

注释　本题知识点：

（1）n 阶方阵可逆的充分必要条件是 $|A|\neq 0;$

（2）$AA^*=A^*A=|A|E;$.

（3）$AA^{-1}=A^{-1}A=E;$

（4）逆矩阵的求法.

答案：$X=\frac{4}{9}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}.$

五、(本题满分 12 分)

设向量组

$A: a_1=(1,-2,3,-1,2)^{\mathrm{T}},\ a_2=(2,1,2,-2,-3)^{\mathrm{T}},\ a_3=(3,-1,5,-3,-1)^{\mathrm{T}},\ a_4=(5,0,7,-5,-4)^{\mathrm{T}},$

（1）求向量组 A 的秩；

（2）求向量组 A 的一个最大线性无关组；

(3) 把其它向量用最大线性无关组表示.

解析:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&5\\-2&1&-1&0\\3&2&5&7\\-1&-2&-3&-5\\2&-3&-1&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&5&5&10\\0&-4&-4&-8\\0&0&0&0\\0&-7&-7&-14\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（1）向量组 A 的秩为 2；

（2）向量组 A 的一个最大线性无关组为 a_1, a_2；

（3）$a_3 = a_1 + a_2$，$a_4 = a_1 + 2a_2$.

注释　本题知识点：

（1）矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩

（2）初等行变换不改变矩阵的秩

（3）向量组的最大无关组与向量组的秩

答案：

（1）向量组 A 的秩为 2；

（2）向量组 A 的一个最大线性无关组为 a_1, a_2；

（3）$a_3 = a_1 + a_2$，$a_4 = a_1 + 2a_2$.

六、（本题满分 12 分）

已知非齐次线性方程组为 $\begin{cases}4x_1 + 2x_2 + x_3 + qx_4 = 2,\\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 11x_4 = 3,\\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 12x_4 = p,\\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1,\end{cases}$

试求当参数 p, q 为何值时，方程组无解，方程组有唯一解，方程组有无穷多解.

解析：

$$(A,b)=\begin{pmatrix}4&2&1&q&2\\5&2&1&11&3\\3&6&3&12&p\\1&2&1&3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&-1\\5&2&1&11&3\\3&6&3&12&p\\4&2&1&q&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&-1\\0&-8&-4&-4&8\\0&0&0&3&3+p\\0&-6&-3&q-12&6\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&-1\\0&-8&-4&-4&8\\0&0&0&3&p+3\\0&-6&-3&q-12&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&-1\\0&2&1&1&-2\\0&0&0&3&p+3\\0&0&0&q-9&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2&1\\0&1&1/2&1/2&-1\\0&0&0&3&p+3\\0&0&0&0&\dfrac{(p+3)(q-9)}{3}\end{pmatrix}$$

（1）当 $p \neq -3$, 且 $q \neq 9$ 时，方程组无解；

（2）当 $p=-3$, 或 $q=9$ 时，方程组有无穷解；

（3）方程组不存在唯一解.

注释　本题知识点：

线性方程组的解的个数

非齐次线性方程组 $Ax=b$, A 为 $m\times n$ 矩阵, 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)$.

（1）当 $R(A)=R(A,b)=n$ 时，有唯一解.

（2）当 $R(A)=R(A,b)<n$ 时，有无穷多解.

n 元线性方程组 $Ax=b$ 无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,b)$.

答案：

（1）当 $p\neq-3$, 且 $q\neq 9$ 时，方程组无解；

（2）当 $p=-3$, 或 $q=9$ 时，方程组有无穷解；

（3）方程组不存在唯一解.

七、（本题满分 12 分）求正交变换 $x=py$, 将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

化为标准形, 并写出其标准形.

解析:

二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$,

$\left|A-\lambda E\right|=-\lambda(\lambda-3)^2$，$\lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=3$,

当 $\lambda_1=0$ 时，解 $Ax=0$, 得 $\xi_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，

当 $\lambda_2=\lambda_3$=3, 时，解 $(A-3E)x=0$, 得 $\xi_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，

正交化

$$\eta_2=\xi_2,\ \eta_2=\xi_3-\frac{1}{2}\xi_2=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}.$$

单位化

$$p_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},\ p_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ p_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

正交矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$, 正交变换 $x=py$,

标准形为 $f=3y_2^2+3y_3^2$.

注释　本题知识点：

正交变换化二次型为标准型

答案：$f=3y_2^2+3y_3^2$.

八、（本题满分 8 分）设 A 和 B 均为 n 阶方阵，且 $A=B+2E$, $B^2=2B$, 证明：A 可逆.

解析:

由 $B^2=2B$, 得 $B^2-2B-8E=-8E$, 即 $(B+2E)\dfrac{B-4E}{-8}=E$,

故 $B+2E$ 可逆

而 $A=B+2E$, 所以 A 可逆.

注释　本题知识点：

若 n 阶方阵 A 和 B 满足 $AB=E$，则 A 可逆，且 $A^{-1}=B$.