

2021-2022 (秋)《线性代数》第二次阶段测验题

一、填空题

1.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是 【 】.

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$
(C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$.

2.

已知向量组 $\alpha_1 = (k, 2, 1)$, $\alpha_2 = (2, k, 0)$, $\alpha_3 = (1, -1, 1)$ 线性无关, 则 【 】.

- (A) $k \neq 2$ 且 $k \neq -3$ (B) $k \neq -2$ 且 $k \neq 3$
(C) $k \neq 2$ 或 $k \neq -3$ (D) $k \neq -2$ 或 $k \neq 3$.

3.

已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 均为 4 维列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1)$, $B = (\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2)$, 且

$|A| = 2$, $|B| = 3$, 则行列式 $|A+B| =$ 【 】.

- (A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20.

4.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 【 】.

- (A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关
(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关
(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关
(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

5.

已知 4 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 若 β_i 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均正交 ($i = 1, 2, 3, 4$), 则 【 】.

- (A) $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = 0$ (B) $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = 1$
(C) $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \geq 1$ (D) $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \leq 1$.

6.

，设有两个向量组：(I): $\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $\alpha_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ 和向量组

(II): $\beta_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$, $\beta_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24})$, $\beta_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34})$. 则下述命题正确的是【 】.

- (A) (I) 相关 \Rightarrow (II) 相关 (B) (II) 相关 \Rightarrow (I) 无关
(C) (II) 无关 \Rightarrow (I) 无关 (D) (I) 无关 \Rightarrow (II) 无关.

7.

设 A 是 n 阶非零阵, $A^3 = O$, I 为 n 阶单位阵. 以下命题正确的是【 】.

- (A) $I - A$ 不可逆, $I + A$ 不可逆 (B) $I - A$ 不可逆, $I + A$ 可逆
(C) $I - A$ 可逆, $I + A$ 可逆 (D) $I - A$ 可逆, $I + A$ 不可逆.

二、

设 $\alpha_1 = (3, 1, 2, 5)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1, 2)$, $\alpha_3 = (2, 0, 1, 3)$, $\alpha_4 = (1, -1, 0, 1)$,

$\alpha_5 = (4, 2, 3, 7)$. 求其的一个极大无关组, 并用其表示其余向量.

三、

当 a 、 b 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷多组解, 并求出有无穷多组解时的通解.

四、

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 若存在矩阵 X , 使 $AX - XA = B$ 成立. 确定 a 的

值, 并求出所有矩阵 X .