2014-2015 学年秋季学期《线性代数》课程考试试题解析

一、　填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分，请将合适的答案填在每题的空中）

1．设 A 为 3 阶方阵，A 的第 2 行的元素分别为 $-2,3,1$，其对应的余子式为 $3,2,3$，则

$|A|=$ ___9___.

解析：

$$\left|A\right|=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=a_{21}(-1)^{2+1}M_{21}+a_{22}(-1)^{2+2}M_{22}+a_{23}(-1)^{2+3}M_{23}=9.$$

注释　本题知识点：

（1）　行列式的计算：$\left|A\right|=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$；

（2）　代数余子式和余子式的关系：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$；

答案：9.

2. 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，秩 $R(A)=3$，且 $\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=\beta,\ \beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，则方程 $Ax=\beta$

的通解为___$k(-1,2,-2,0)^T+(1,-1,1,-1)^T$, k 为任意实数________.

解析：

由 $\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=\beta,\ \beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，可以得到方程 $Ax=\beta$ 的两个解：$(0,1,-1,-1)^T$ 和 $(1,-1,1,-1)^T$.

于是 $(0,1,-1,-1)^T-(1,-1,1,-1)^T=(-1,2,-2,0)^T$ 是对应的齐次方程组的一个解.

注意到变元的个数为 4，秩 $R(A)=3$，故齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解析有 1 个向量，且所有的解为 $k(-1,2,-2,0)^T$，k 为任意实数.

所以方程 $Ax=\beta$ 的通解为 $k(-1,2,-2,0)^T$+$(1,-1,1,-1)$，k 为任意实数.

注释　本题知识点：

（1）　方程组的解的定义；

（2） 如果齐次方程组的基础解系为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，非齐次方程组的特解为$\eta*$，则非齐次方程的通解为

$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta*$；

（3） 如果η_1,η_2是非齐次方程组的解，则$\eta_1-\eta_2$是其次方程组的解.

答案：$k(-1,2,-2,0)^T+(1,-1,1,-1)$，$k$为任意实数.

3. 设向量组$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,3,1)^T,\alpha_3=(x,3,1)^T,\alpha_4=(2,y,3)^T$的秩为2，则$x=$__2__，$y=$__5__.

解析：

易知α_1,α_2的秩为2，故α_1,α_2是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组，因此$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$也线性相关，于是

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&2&x\\2&3&3\\1&1&1\end{vmatrix}=0,\quad |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4|=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&3&y\\1&1&3\end{vmatrix}=0$$

于是$x=$__2__，$y=$__5__.

注释 本题知识点：

（1） 向量组的秩；

（2） 向量组的极大无关组的定义及其求解方法；

（3） 向量组线性相关的判定.

答案：$x=$__2__，$y=$__5__.

4．若$\lambda=2$为可逆矩阵A的特征值，则$\left(\frac{1}{2}A^2\right)^{-1}$的一个特征值为__1/2__.

解析：

由$\lambda=2$是A的特征值可知：$\left(\frac{1}{2}\lambda^2\right)^{-1}$是$\left(\frac{1}{2}A^2\right)^{-1}$的特征值，即 $1/2$ 是$\left(\frac{1}{2}A^2\right)^{-1}$的一个特征值.

注释 本题知识点：

（1） 特征值的定义；

（2） 特征值的性质：一般地，λ是A的特征值，则$f(\lambda)$是$f(A)$的特征值.

答案： $1/2$.

5．已知 3 阶矩阵 A 与向量 x 满足 $A^3x=3Ax-A^2x$，且向量组 x, Ax, A^2x 线性无关。

令 $P=(x,2Ax+x,A^2x), AP=PB$，则 3 阶方阵 $B=$ ____ $\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ____.

解析：

首先计算：$AP=(x,2Ax+x,A^2x)=(Ax,2A^2x+Ax,A^3x)$.

注意到 $A^3x=3Ax-A^2x$，于是

$$AP=(x,2Ax+x,A^2x)=(Ax,2A^2x+Ax,3Ax-A^2x)=(x,Ax,A^2x)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$PB=(x,2Ax+x,A^2x)B=(x,Ax,A^2x)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}B,$$

因为 $AP=PB$，所以

$$(x,Ax,A^2x)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}=(x,Ax,A^2x)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}B$$

因为向量组 x,Ax,A^2x 线性无关，所以 (x,Ax,A^2x) 是可逆矩阵，上述等式同时左乘该矩阵的逆矩阵，可得：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}B,$$

$$\text{因此：}B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

注释　本题知识点：

（1）　矩阵乘法；

（2）　向量组线性无关的判定.

答案：$\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

二、 选择题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．设 n 阶矩阵 A，B，满足 $AB=0$，,则下列结论不正确的是【 A 】

(A) $A=0$ 或是 $B=0$；　　(B) $|A|=0$ 或是 $|B|=0$；

(C) $R(A)+R(B)\le \mathrm{n}$；　　(D) A 不可逆或是 B 不可逆。

解析：

对于选项(A)，设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，则 $AB=0$，但此时 $A\ne 0$，$B\ne 0$，故选项(A)的结论不正确。

对于选项(B)，由 $AB=0$ 可知：$|AB|=|A||B|=0$，于是 $|A|=0$ 或是 $|B|=0$.

对于选项(C)，$B=(\beta_1, \beta_2,\cdots, \beta_n)$，由 $AB=0$ 可知：β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n 均是齐次方程组 $Ax=0$ 的解. 由齐次方程组的解的理论知，基础解系中向量的个数为 $n-R(A)$. 又 β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n 均可被基础解系线性表示，故 β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n 的秩小于等于 $n-R(A)$，即 $R(B)\le n-R(A)$，于是 $R(A)+R(B)\le \mathrm{n}$.

对于选项(D)，由 $AB=0$ 可知：$|AB|=|A||B|=0$，于是 $|A|=0$ 或是 $|B|=0$，因此 A 不可逆或是 B 不可逆.

注释　本题知识点：

（1） 矩阵乘法；

（2） 行列式的性质：$|AB|=|A||B|$；

（3） 齐次方程组的解的理论；

（4） 向量组的秩；

（5） 可逆矩阵的判定：$|A|\ne 0 \Leftrightarrow A$ 可逆.

答案：A.

2.设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+2a_{21}&a_{32}+2a_{22}&a_{33}+2a_{23}\end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，

$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，$P_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $B=$【　　A　　】.

(A) P_1P_3A；　　(B) P_2P_3A；　　(C) AP_3P_2；　　(D) AP_1P_3 .

解析：

P_3A 表示交换矩阵 A 的第一行和第二行，于是 $P_3A=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$.

$P_1\left(P_3A\right)$ 表示将矩阵 P_3A 的第一行的 2 倍加到第三行，于是 $P_1P_3A=B$.

注释　本题知识点：

（1）　初等矩阵的定义；

（2）　矩阵的初等变换：对矩阵 A 左乘初等矩阵，相当于对做初等行变换；对矩阵 A 右乘初等矩阵，相当于对做初等列变换；

答案：A.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 AX=0 的基础解系，则下面不是基础解系的是(　B　).

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$；　　(B) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$；

(C) $-\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_2-\alpha_3,-\alpha_3-\alpha_1$；　　(D) $3\alpha_1,3\alpha_2,3\alpha_3$.

解析：

选项(B)中的向量组线性相关，这是因为 $\alpha_1-\alpha_2=-\left(\alpha_2-\alpha_3\right)-\left(\alpha_3-\alpha_1\right)$，因此该向量组不是基础解系. 其他选项的向量组均和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价，且线性无关，因此他们都是基础解系.

注释　本题知识点：

（1）　基础解系的定义；

（2）　向量组是否线性相关的判定；

（3）　与基础解系等价的向量组，若该向量组线性无关，则它也是齐次方程组的基础解系.

答案：B.

4. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+ax_2^2+2x_2x_3+6x_3^2$，为正定二次型，则【　B　】.

(A) $a>1$；　　(B) $a>\frac{3}{2}$；　　(C) $a<1$；　　(D) $a<\frac{3}{2}$.

解析：

二次型的表示矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. 由于该二次型为正定二次型，于是

$$\Delta_1 = |1| > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} > 0,$$

解得：$a > \frac{3}{2}$.

注释　本题知识点：

（1）　二次型的表示矩阵；

（2）　如果二次型的表示矩阵的各阶顺序主子式都严格大于零（$\Delta_i > 0$），则二次型为正定二次型.

答案：$a > \frac{3}{2}$.

5.矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似的充分必要条件为【　A　】

(A) $a = 0, b$ 为任意常数；　　(B) a=0，　b=2；

(C) $a = 2, b$ 为任意常数；　　(D) a=2，　b=0.

解析：

由矩阵相似的定义知，存在一个可逆矩阵 P，使得：

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P,$$

相似的矩阵具有相同的特征值，因此$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$的特征值为 2，$b$，0，由特征值的定义得，$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} - \lambda E$的行列式为 0，于是

$$\begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ a & b-2 & a \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1-b & a & 1 \\ a & 0 & a \\ 1 & a & 1-b \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

解得：$a = 0, b$ 为任意常数.

注释　本题知识点：

（1）　相似矩阵的定义；

（2） 相似矩阵具有相同的特征值；

（3） 特征值的定义：$|A-\lambda E|=0$.

答案：$a=0,b$为任意常数.

三、（本题满分 14 分，每题 7 分）计算下列各题

1. 设A是 4 阶方阵，A^*为A的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，求$|(3A)^{-1}-2A^*|$.

解析：

$$\begin{aligned}|(3A)^{-1}-2A^*|&=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}\frac{1}{|A|}A^*-2A^*\right|\\&=\left|(\frac{2}{3}-2)A^*\right|=\left|-\frac{4}{3}A^*\right|\\&=\left(-\frac{4}{3}\right)^4|A^*|=\left(-\frac{4}{3}\right)^4(\frac{1}{2})^3=\frac{32}{81}.\end{aligned}$$

注释 本题知识点：

（1） 伴随矩阵的定义；

（2） $|A^*|=|A|^{n-1}$；

（3） $AA^*=A^*A=|A|E$；

（4） $|\lambda A|=\lambda^n|A|$.

2. 计算行列式$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n\end{pmatrix}$.

解析：

$$|B|=\begin{vmatrix}(1+a_1+\cdots+a_n) & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ (1+a_1+\cdots+a_n) & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ (1+a_1+\cdots+a_n) & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (1+a_1+\cdots+a_n) & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=(1+a_1+\cdots+a_n)\begin{vmatrix}1 & & & \cdots & \\ 1 & 1 & & \cdots & \\ 1 & & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & & & \cdots & 1\end{vmatrix}=1+a_1+\cdots+a_n.$$

注释 本题知识点：

（1）　行列式的性质和计算；

四、（本题满分 8 分）设 4 阶方阵 A 和 B，满足 $2ABA^{-1}=AB+6E$，若 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$

求 B .

解析:

由 $2ABA^{-1}=AB+6E$ 两端同时右乘 A，并化简可得　$AB(2E-A)=6A$

又因为 $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$，$(2E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

所以 $B=6(2E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$.

注释　本题知识点：

（1）　矩阵的运算；

五、(本题满分 20 分)

1．设向量组 A：$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\-5\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\\-3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，

（1）求向量组 A 的秩；

（2）求向量组 A 的极大线性无关组；

解析：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \overset{r1-r3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -7 & 11 & -8 \\ 0 & -2 & 5 & -7 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & -6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

（1）向量组 A 的秩为 4；

（2）向量组 A 的极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$；

注释　本题知识点：

（1）　向量组的秩的求法；

（2）　极大无关组的求法

2. 设有向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$，及向量 $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$，问 a, b 为何值时

(1) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示式惟一;

(3) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示式不惟一，并求一般表示式.

解析：

令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，构造方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$，对增广矩阵行变换得，

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & \boldsymbol{a} & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \boldsymbol{b} \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -2 & \boldsymbol{a} & 1 \\ 0 & -1 & \boldsymbol{a}+2 & \boldsymbol{b}+1 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a}+4 & -3\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

(1)当 $a = -4, b \neq 0$，方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 无解，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2)当 $a \neq -4$，方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有惟一解，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示式惟一;

(3) 当 $a = -4, b = 0$, 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，且 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 - (2k+1)\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3$.

注释：本题知识点：

（1）　若 $R(A) < R(\mathrm{A} \vdots \mathrm{b})$，则非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解.

（2） 若$R(A)=R(\mathrm{A}\vdots\mathrm{b})=n$，则非齐次方程组$Ax=b$有唯一解.

（3） 若$R(A)=R(\mathrm{A}\vdots\mathrm{b})<n$，则非齐次方程组$Ax=b$有无穷多解.

（4） 若$R(A)=n$，则齐次方程组$Ax=0$有唯一零解.

（5） 若$R(A)<n$，则齐次方程组$Ax=0$有无穷多解（非零解）.

六、（本题满分 10 分）

设三阶实对称矩阵A的特征值为 1,2,3； A的属于特征值 1,2 的特征向量为

$\alpha_1=(-1,-1,1)^T,\alpha_2=(1,-2,-1)^T$,

(1) 求A的属于特征值 3 的特征向量.

(2) 求方阵A.

解析：

（1） 设A的属于特征值 3 的特征向量为$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则$\begin{cases}x^T\alpha_1=0\\x^T\alpha_2=0\end{cases}$，即

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\x_1-2x_2-x_3=0\end{cases}$$

解得$\alpha_3=(1,0,1)^T$.

(2)

$$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right),A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}2\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{5}{6}\\-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{5}{6}&\frac{1}{3}&2\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}$$

注释：本题知识点：

（1） 特征值和特征向量的定义；

（2） 特征向量的性质：属于不同特征值的特征向量相互正交.

七、（本题满分 12 分）二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+a\,x_4^2+2x_1x_2$，经正交变换后可变为

标准型 $y_2^2+2y_3^2+3y_4^2$，

（1）求 a 的值；　　　　（2） 求出该正交变换.

解：f 的矩阵及标准型的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&&\\1&1&&\\&&1&\\&&&a\end{pmatrix},\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}0&&&\\&1&&\\&&2&\\&&&3\end{pmatrix}.$$

（1） 因 $trA=tr\Lambda$ ，所以 a=3;

（2） 矩阵 $\mathbf{A}$ 的四个特征值分别为 $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=2,\lambda_4=3$ ，

特征值 $\lambda_1=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},\quad -\frac{1}{\sqrt2},\quad 0,0\right),^T$，

特征值 $\lambda_2=1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\left(0,\quad 0,\quad 1,\ 0\right)^T$，

特征值 $\lambda_3=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{1}{\sqrt2},\quad \frac{1}{\sqrt2},\quad 0,0\right)^T$，

特征值 $\lambda_4=3$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_4=\left(0,\quad 0,\quad 0,1\right)^T$.

因此令：　$\mathbf{P}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)$

因此所作的正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}.$$

注释：本题知识点：

（1） 二次型的表示矩阵；

（2） 特征值和特征向量的求法；

（3） 二次型的标准型.

八、（本题满分 6 分）设λ_1，λ_2为方阵A的两个不同特征值，α_1,α_2为A的相应于λ_1的两个线性无关的特征向量，α_3,α_4为A的相应于λ_2的两个线性无关的特征向量，证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关。

证明：设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$，　　　　　　（a）

因为α_1,α_2为A的相应于λ_1的两个线性无关的特征向量，α_3,α_4为A的相应于λ_2的两个线性无关的特征向量，有　　$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_1\alpha_2, A\alpha_3=\lambda_3\alpha_3, A\alpha_4=\lambda_2\alpha_4$,

（a）式左右两端同时左乘 A 可得，$\lambda_1k_1\alpha_1+\lambda_1k_2\alpha_2+\lambda_2k_3\alpha_3+\lambda_2k_4\alpha_4=0$　　　　（b）

$(a)\times\lambda_1-(b)$可得，　　$(\lambda_1-\lambda_2)k_3\alpha_3+(\lambda_1-\lambda_2)k_4\alpha_4=0$

又因为λ_1，λ_2为方阵A的两个不同特征值，且α_3,α_4线性无关，可得

$$k_3=k_4=0$$

同理$(a)\times\lambda_2-(b)$可得$k_1=k_2=0$

因此向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关。

注释：本题知识点：

（1）　特征值和特征向量的定义；

（2）　特征值和特征向量的性质

（3）　向量组线性无关的判定.