中国农业大学

2021 ~2022 学年秋季学期（2022.01）

高等数学 A（上） 课程试题答案

（本试卷共九道大题，考试时间 100 分钟）

一、单项选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）.

1. 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-a}{\sin x}$ 存在，则【 B 】.

A. $a=0$　　B. $a=1$　　C. $a=-1$　　D. 不能确定

2. 对函数 $y=\dfrac{\sin nx}{\sin x}, n\in\mathbb{Z}$，下列结论中正确的是【 B 】.

A. 其所有间断点都是跳跃间断点

B. 其所有间断点都是可去间断点

C. 除 $x=0$ 是可去间断点外，其余间断点都是无穷间断点

D. 其所有间断点都是无穷间断点

3. 若 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处，取得极大值，则【 D 】.

A. $f'(x_0)=0$　　B. $f''(x_0)<0$

C. $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$　　D. $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

4. 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为【 B 】.

A. $1+\sin x$　　B. $1-\sin x$

C. $1+\cos x$　　D. $1-\cos x$

5. $\int_{-1}^{1}(x^6+1)\sin x dx=$【 C 】.

A. 2　　B. $\dfrac{\pi}{2}$

C. 0　　D. $\sin 2$

二、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$，则常数 $k=$ ______________.

（$k=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & f'(x_0)\neq 0\\ \text{任何常数}, & f'(x_0)=0\end{cases}$）

2.函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的拐点是____________. $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{16}{27}\right)$

3.$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx=$__________. （$\dfrac{11}{2}$）

4.函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}(x\geq 0)$ 在 $x=$____________ 处取到最大值. （1）

5.$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+4x+9}=$_____________. （$\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$）

三、（本题满分 10 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x\cos t^2dt, & x>0,\end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\int_0^x\cos t^2dt=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{x^2}(1-\cos x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x^2}=1$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

因为 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}\int_0^x\cos t^2dt-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}\int_0^x\cos t^2dt+\dfrac{\cos x^2}{x}}{1}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x^2-\int_0^x\cos t^2dt}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2-2x^2\sin x^2-\cos x^2}{2x}=0$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{2}{x^2}(1-\cos x)-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{2-2\cos x-x^2}{x^3}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\sin x-2x}{3x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\cos x-2}{6x}=0$$

所以 $f_+'(0)=f_-'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

四、(本题满分 10 分))设 a 为正常数，$y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{4at}{1+t^3}\\ y=\dfrac{4at^2}{1+t^3}\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{4at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}\cdot\left[\frac{4a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\right]^{-1}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{2(1+t^3)^2}{(1-2t^3)^2}\cdot\left[\frac{4a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\right]^{-1}=\frac{(1+t^3)^4}{2a(1-2t^3)^3}。$$

五、（本题满分 10 分）设 $y=(x^2+1)\sin 2x$，求 $y^{(8)}$.

解：由 Leibniz 公式可得

$$y^{(8)}=C_8^0(x^2+1)^{(0)}\left(\sin 2x\right)^{(8)}+C_8^1(x^2+1)^{(1)}\left(\sin 2x\right)^{(7)}+C_8^2(x^2+1)^{(2)}\left(\sin 2x\right)^{(6)}$$

$$=(x^2+1)2^8\sin\left(2x+\frac{8\pi}{2}\right)+8(2x)2^7\sin\left(2x+\frac{7\pi}{2}\right)+28\cdot2\cdot2^6\sin\left(2x+\frac{6\pi}{2}\right)$$

$$=256\left[(x^2-13)\sin 2x-8x\cos 2x\right]。$$

六、（本题满分 12 分）设 $\varphi(x)=\cos x-\int_0^x(x-u)\varphi(u)du$，其中 $\varphi(u)$ 为连续函数，求 $\varphi(x)$.

解：原式两边求导得

$$\varphi'(x)=-\sin x-\int_0^x\varphi(u)du-x\varphi(x)+x\varphi(x)$$

$$=-\sin x-\int_0^x \varphi(u)du \qquad (1)$$

再两边求导得 $\varphi''(x)+\varphi(x)=-\cos x$ （2）

其特征方程为$r^2+1=0$，特征根为$r=\pm i$，用待定系数法，令

$\tilde{\varphi}(x)=x(A_1\cos x+A_2\sin x)$ 代入方程(2)得到$A_1=0,A_2=-\dfrac{1}{2}$，故

$\tilde{\varphi}(x)=-\dfrac{1}{2}x\sin x$,

于是方程(2)的通解为$\varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{2}x\sin x$

又由原式和(1)可知$\varphi(0)=1$， $\varphi'(0)=0$，代入上式得$C_1=1,C_2=0$，因此所求的函数为

$\varphi(x)=\cos x-\dfrac{1}{2}x\sin x$。

七、（本题满分 10 分）设n为正整数，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2nx}{\sin x}dx$.

(1)求$I_n-I_{n-1}(n\geq 2)$；

(2)求定积分$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 6x}{\sin x}dx$.

解：(1) $I_n-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2nx-\sin 2(n-1)x}{\sin x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos(2n-1)x\cdot\sin x}{\sin x}dx$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n-1)xdx=\frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)x\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

(2)由(1)可得$I_n=I_{n-1}+\dfrac{2\cdot(-1)^{n-1}}{2(n-1)+1}$

因为$I_1=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}dx=2\int_0^{\pi/2}\cos xdx=2\sin x\Big|_0^{\pi/2}=2$

所以 $I_3=I_2+\dfrac{2\cdot(-1)^2}{2\cdot2+1}=I_2+\dfrac{2}{5}=I_1+\dfrac{2\cdot(-1)}{2+1}+\dfrac{2}{5}$

$$=I_1-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=2-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{26}{15}$$

八、（本题满分 10 分）设 O 为坐标原点，双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 上的点 $A(x_0,y_0)$ 满足 $x_0>1$，$y_0>0$，由直线 OA， x 轴和双曲线 C 围成一平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 t；

(2) 将点 $A(x_0,y_0)$ 的坐标用面积 t 表示.

解：(1) 直线 OA 的方程为 $x=\dfrac{x_0}{y_0}y$， $C:x^2=1+y^2$，

$$t=\int_0^{y_0}\left(\sqrt{y^2+1}-\frac{x_0}{y_0}y\right)\mathrm{d}y$$

$\int \sec^3 t\,dt$

$$=\int_0^{y_0}\sqrt{y^2+1}\mathrm{d}y-\frac{1}{2}x_0y_0$$

$$=\frac{1}{2}\left[y\sqrt{y^2+1}+\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right]_0^{y_0}-\frac{1}{2}x_0y_0$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(y_0+\sqrt{y_0^2+1}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{arsh}y_0。$$

(2) 由 (1) 可得

$$x_0=\operatorname{ch}(2t)，\quad y_0=\operatorname{sh}(2t)。$$

九、（本题满分 8 分）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导且 $f'(x)$ 单调增加，证明：在 $(0,+\infty)$ 上函数 $xf'(x)-f(x)$ 单调增加.

证　设 $f'(x)$ 单调增加。设 $x_2>x_1>0$，则

$$[x_2f'(x_2)-f(x_2)]-[x_1f'(x_1)-f(x_1)]$$

$$=x_1[f'(x_2)-f'(x_1)]+(x_2-x_1)f'(x_2)-[f(x_2)-f(x_1)]$$

$$=x_1[f'(x_2)-f'(x_1)]+(x_2-x_1)\left[f'(x_2)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right]$$

由拉格中值定理，存在$\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$=x_1\left[f'(x_2)-f'(x_1)\right]+(x_2-x_1)\left[f'(x_2)-f'(\xi)\right]>0,$$

因此$xf'(x)-f(x)$单调增加。