**第三部分 线性方程组**

1. **主要内容**
2. **线性方程组的表示形式：**

**一般称**

** (1)**

**对于非齐次线性方程组(1)，称齐次线性方程组**

** (2)**

**为(1)的导出组（也称(2)为(1)对应的齐次线性方程组）．**

**若将一组数分别替代方程组(1)中的，使(1)中每一个式子都成为恒等式，则称有序数组是(1)的一组解（也称是(1)的解向量）．(1)的解的全体所成集合称为它的解集合．解集合是空集时就称方程组(1)无解．**

**若记**

** 或 **

**，**

**则(1)可写成矩阵形式 　 　　 (3)**

**或  (4)**

**且称为方程组(1)的系数矩阵，为方程组(1)的增广矩阵，的分块形式为．**

**特别齐次线性方程组可表示为 或 ．**

**2、设为齐次线性方程组的一组解，且满足**

**(1) 线性无关；**

**(2)的任一解向量可由线性表出．**

**则称为的一个基础解系．**

**如果为齐次线性方程组的一个基础解，则**

** （为任意常数）**

**是的解，称为的一般解或通解．**

**3、线性方程组解的性质**

**性质1 若  是的解，则也是的解；**

**性质2 若  是的解，则也是的解；**

**性质3的解的任一线性组合，还是的解．**

**性质4 若为的解，则为其导出组的解．**

**性质5 若 为的解，为其导出组的解，则为的解．**

**4、线性方程组基本定理**

**定理1 线性方程组的初等变换把线性方程组变成与它同解的方程组．**

**定理2 非齐次线性方程组(1)有解**

****

****可用**的列向量线性表示．**

**与是等价向量组．**

****

**且当  时，(1) 有惟一解；时，(1) 有无穷多解．**

**定理3 齐次线性方程组(2) 有非零解**

**   的列向量线性相关．**

**推论1 当方程的个数小于未知数的个数（即）时，齐次线性方程组 (2) 必有非零解．**

**推论2 当方程的个数等于未知数的个数（即）时，齐次线性方程组 (2)有非零解的充要条件是**

**=0**

**注 若，则必有非零解，而不可能有惟一解（可能有无穷多解可**

**能无解），而当时，可用克莱姆法则求的惟一解．**

**定理4 在齐次线性方程组有非零解的情况下，它有基础解系，并且基础解系所含解向量的个数等于，其中为系数矩阵的秩．**

**推论 的一组线性无关的解且与的某一基础解系等价，则这组线性无关的解也是的基础解系．**

**定理5 对非齐次线性方程组，若，且设为其导出组的基础解系，是的一个特解，则的通解为**

**，其中为任意常数．**

**推论 方程组(1)在有解的条件下，有惟一解(1)的导出组(2)只有零解．**

1. **和线性方程组相关的内容：**
2. **向量组的线性相关性**
3. **行列式**
4. **矩阵的秩**
5. **向量的正交**

**三 例题**

**（一）填空题**

**【例】 设矩阵，秩，且，则方程的通解为 为任意实数 ．**

**例 设为矩阵，，且已知非齐次线性方程组的两个解为**

**，则非齐次线性方程组的通解为．**

**【例】 已知是非齐次线性方程组线性无关的解，为矩阵，且**

**秩. 若是方程组的通解，则常数须满**

**足关系式．**

**【例】设三阶实对称矩阵的两个非零特征值对应的特征向量分别为，且秩****，则齐次方程组****的通解为**  ．

**（二）、选择题**

**【例】设是齐次线性方程组*AX*=0的基础解系，则下面不是基础解系的是( B )．**

**(A) ；　 　(B) ；**

**(C) ；　　　(D) .**

**【例】设4阶方阵的秩， 是非齐次线性方程组的三个线性无关的解向量，则的通解不可以表示为【 Ａ 】（为任意实数）．**

**(A) ； (B) ；**

**(C) ； (D) ．**

**【例】已知是非齐次线性方程组的两个不同的解，是其对应的齐次线性方程组的一个基础解系，则的通解为【 A　】．**

**(A) ；　 (B) ;**

**(C) ；　　　　 (D) ．**

**【例】**设矩阵，，若集合，则线性方程组有无穷多解的充分必要条件为 ( )

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

【答案】D

【解析】，

由，故或，同时或。故选（D）

**（三）、解答题**

**【例】设有向量组，及向量，问为何值时**

**(1) 向量不能由线性表示;**

**(2) 向量能由线性表示，且表示式惟一;**

**(3) 向量能由线性表示，且表示式不惟一，并求一般表示式．**

**解 令，构造方程组，对增广矩阵行变换得，**

****

**(1)当，方程组无解，向量不能由线性表示;**

**(2)当，方程组有惟一解，向量能由线性表示，且表示式惟一;**

**(3) 当方程组有无穷多解，且．**

**【例】已知非齐次线性方程组  ；**

**（1）求参数的值为何值时，方程组无解，有无穷多解，有惟一解；**

**（2）并在有解时，求其解．**

**2. 设矩阵，矩阵的秩，且**

**，求方程的通解．**

**解答:1.对增广矩阵行初等变换得，**

**，**

**（1）时，方程组无解；**

**时，方程组有惟一解；**

**时，方程组有无穷多解解；**

**（2）惟一解为**

**时，**

****

**通解为。**

**时， 其中任取 ．**

**例 已知非齐次线性方程组  ，其系数矩阵的秩，试求：常数的值，以及该方程组的通解.**

**解答：对增广矩阵行变换得**

****

**当, 系数矩阵的秩． 此时**

****

**通解为　　**

**【例】**设矩阵，为三阶单位矩阵.

(I)求方程组的一个基础解系；

(II)求满足的所有矩阵.

【解析】



,

(I)的基础解系为

(II)

的通解为

的通解为

的通解为

（为任意常数）

**【例】** ，

（Ⅰ）求满足的所有向量，

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任一向量，证明：线性无关。

【解析】（Ⅰ）解方程



故有一个自由变量，令，由解得，

求特解，令，得

故 ，其中为任意常数

解方程





故有两个自由变量，令，由得

令，由得

求特解 故  ，其中为任意常数

（Ⅱ）证明：由于





故 线性无关.