2012-2013 学年春季学期《线性代数 》课程考试试题解析

## 填空题（本题满分15分，共有5道小题，每道小题3分，请将合适的答案填在每题的空中）

1．设为阶方阵，的第2行的元素分别为，其对应的余子式为，则

 9 ．

解析:

行列式等于某行元素与其对应的代数余子式乘积之和,所以

注释 本题知识点:

（1）

答案：9

2．设为阶矩阵，为其伴随矩阵，且，则 2 ．

解析: 

注释 本题知识点：

（1）

（2）

答案：2

3．设是非齐次方程的两个不同的解，则对应于特征值的特征向量为

解析: 对应于特征值的特征向量为满足的解

注释 本题知识点:

1）.非齐次线性方程组解的结构,若的解,则 

2）.特征值与特征向量的定义:若有实数以及非零向量,使得即则为矩阵A的特征值，非零向量为矩阵A的特征向量

答案：

4. 已知矩阵若矩阵是矩阵的逆矩阵（其中是数），

则 ．

解析：若矩阵是矩阵的逆矩阵，则，由此可得，，因为，所以，

注释 本题知识点：

（1）逆矩阵定义，若矩阵AB=E，则B为A的逆矩阵。

答案：

5．已知矩阵与相似，则 ．

解析：

矩阵A，B相似，故有相同的特征值，因此1+1+a=1+3-3,可知a=-1.

注释 本题知识点：

（1）矩阵A，B相似，故有相同的特征值

（2）矩阵特征值之和等于其主对角线元素的乘积

答案：-1

### 二、 选择题（本题满分15分，共有5道小题，每道小题3分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．设阶矩阵与等价,则下列结论不正确的是【 】

(A) 当时,； (B) 可以通过初等变换得到；

(C) ； (D) 与相似。

解析:

若矩阵A与B等价，则存在可逆矩阵P，Q， 使得PAQ=B，因此，所以当 时, ，选项A正确。

可以通过初等变换得到，则称矩阵A与B等价,选项B正确

若矩阵A与B等价，则A，B秩相同，选项C正确

与相似，则存在可逆矩阵P，,选项D不正确

注释 本题知识点：

(1) 矩阵A，B等价，则存在可逆矩阵P，Q， 使得PAQ=B

(2) 若矩阵A与B等价，则A，B秩相同，选项C正确

(3)与相似，则存在可逆矩阵P，

答案: C

2.若向量组 线性无关，线性相关，则【 】．

（A）必可由线性表示； 　　　 （B）必可由线性表示;

（C） 必可由线性表示; 　　　 (D) 必可由线性表示.

解析：

线性无关，则线性无关，又线性相关，则必可由线性表示，故选项D正确

注释 本题知识点：

(1)若向量组线性无关，则其任何一个部分组均线性无关

(2)若向量组

答案：D

3．设，若矩阵的伴随矩阵的秩为1，则必有【 　】．

(A) 或； 　(B) 或；

(C) 或； (D) 或．

解析:

由于,则在A中存在一个非零二阶子式，且，因此R(A)=2;

,若a=b,则R(A)=1,不合题意，因此，从而，R(A)=2,所以

注释 本题知识点

(1)

(2)伴随矩阵的定义

(3).矩阵秩的定义及求法

答案：D

4．已知， 则 【 】．

(A) 　 ； (B)  ；

(C) ； (D) ．

解析：

选项B正确

注释 本题知识点：

1. 对角矩阵高次幂的求法

答案： B

5．设都是阶实对称矩阵，则如下结论正确的是【 】.

(A) 与等价，则与相似； (B) 与相似，则与合同；

(C) 与合同，则与相似； (D) 与等价，则与合同．

解析：

都是阶实对称矩阵与相似，则存在正交矩阵P，，从而有，即A，B合同。选项B正确

注释 本题知识点：

(1)与等价，则存在可逆矩阵P，Q，使得PAQ=B

(2)A与B合同，则存在可逆矩阵C,使得

(3)A与B相似，则存在可逆矩阵P，使得

答案 ：B

三、（本题满分12分）计算如下矩阵的行列式

（1） (2) .

解析：（1）

（2）



注释 本题知识点：

（1）利用行列式的性质及展开定理计算行列式

（2）行和或列和相等的行列式的计算

四、（本题满分10分）设阶方阵和，满足.

证明：1. 可逆； 2. 若，求.

解析：

1. 证明：因为，则有 ；

又因 ，

所以可逆；

2. 由（1）知，，则有

；

且，则 

所以 

注释 本题知识点:

（1）矩阵可逆的定义

（2）初等变换求逆矩阵的方法

五、(本题满分16分)

1．设向量组

（1）求向量组的秩；

（2）求向量组的极大线性无关组；

（2）用极大线性无关组表示其余向量．

解析：

（1）

（2）极大线性无关组为 

（3）



2. 求方程组的通解，

求同时满足上述方程组和方程的全部解．

解：同时满足两个条件的解即为方程组的解.对方程的增广矩阵做行初等变换得





由上，方程组有无穷多解，且两个方程组同解

方程组的通解为 

或。

注释 本题知识点:

（1）向量组秩的求法

（2）最大无关组的定义

（3）向量用最大无关组表示,即解方程组线性方程组的求解

（4）非齐次线性方程组的求解

六、（本题满分6分）设是矩阵的特征值，求及的特征值。

解析： 因为 0是矩阵A的特征值，则有 

可得 

对应特征多项式为 

所以 

注释 本题知识点:

1. 矩阵特征值的定义
2. 通过特征方程求特征值

七、（本题满分12 分） 已知二次型

1. 求为何值时，此二次型为正定二次型；

2. 当时，求一正交变换，将此二次型化为标准型；

3. 写出正交变换和标准型。

解析：

二次型对应的对称矩阵为 

1. 

可得 

1. 当时， 

对应的特征多项式为



特征值为 

当时，对应的特征向量为方程组的基础解系,解得单位化得

当时，对应的特征向量为方程组的基础解系,解得单位化得

当时，对应的特征向量为方程组的基础解系,解得单位化得

因此，正交变换为 标准型为 

1. 正交变换为

注释 本题知识点:

（1）二次型的矩阵

（2）矩阵正定的充分必要条件

（3）通过正交变换将二次型标准化

八、（本题满分14分）

1.（8分）设阶矩阵的非零互异特征值为，对应的特征向量为

，又有齐次线性方程组 的一个基础解系为，试问：当时，向量组是否线性无关，证明你的结论.

解析： 向量组线性无关。

证明：不妨假设存在，使得



即 

又因是矩阵A的属于不同特征值的特征向量，因此线性无关，

所以有 

即

因此向量组是否线性无关。

注释 本题知识点:

（1）属于不同特征值的特征向量线性无关

（2）向量组线性无关的定义

2. （6分）设是两个维列向量，,矩阵,其中是 阶正交矩阵，是 阶矩阵，

证明（1）维列向量是矩阵的特征向量；

（2）是可逆矩阵.

证明：（1）因为是正交矩阵，所以

即

由上可得 

所以向量是矩阵的特征向量

注释 本题知识点:

（1）正交矩阵的定义

（2）特征值与特征向量的定义

（2）不妨假设存在，使得

方程两端同时左乘 可得，，可得

即有

因为是正交矩阵，所以

可得

所以 是可逆矩阵.

注释 本题知识点：

（1）矩阵可逆的充分必要条件

（2）正交的非零向量组线性无关