**2014-2015学年秋季学期《线性代数》课程考试试题解析**

## 填空题（本题满分15分，共有5道小题，每道小题3分，请将合适的答案填在每题的空中）

**1．设为阶方阵，的第2行的元素分别为，其对应的余子式为，则**

** 9 ．**

**解析：**

****

**注释 本题知识点：**

1. **行列式的计算：**；
2. **代数余子式和余子式的关系：**；

**答案：9.**

**2. 设矩阵，秩，且，则方程的通解为 为任意实数 ．**

**解析：**

**由，可以得到方程的两个解：和.**

**于是是对应的齐次方程组的一个解.**

**注意到变元的个数为4，秩，故齐次方程组的基础解析有1个向量，且所有的解为，为任意实数.**

**所以方程的通解为，为任意实数.**

**注释 本题知识点：**

1. **方程组的解的定义**；
2. **如果齐次方程组的基础解系为，非齐次方程组的特解为，则非齐次方程的通解为；**
3. **如果是非齐次方程组的解，则是其次方程组的解.**

**答案：，为任意实数.**

**3. 设向量组的秩为2，则 2 ， 5 ．**

**解析：**

**易知的秩为2，故是的一个极大无关组，因此线性相关，也线性相关，于是**

****

**于是 2 ， 5 ．**

**注释 本题知识点：**

1. **向量组的秩**；
2. **向量组的极大无关组的定义及其求解方法；**
3. **向量组线性相关的判定.**

**答案： 2 ， 5 ．**

**4．若为可逆矩阵*A*的特征值，则的一个特征值为．**

**解析：**

**由是*A*的特征值可知：是的特征值，即是的一个特征值.**

**注释 本题知识点：**

1. **特征值的定义**；
2. **特征值的性质：一般地，是*A*的特征值，则是的特征值.**

**答案：．**

**5．已知3阶矩阵与向量满足，且向量组线性无关。**

**令，则3阶方阵  ．**

**解析：**

**首先计算：.**

**注意到，于是**

****

****

**因为，所以**



**因为向量组线性无关，所以是可逆矩阵，上述等式同时左乘该矩阵的逆矩阵，可得：**

**,**

**因此：****.**

**注释 本题知识点：**

1. **矩阵乘法**；
2. **向量组线性无关的判定.**

**答案：****．**

### 二、 选择题（本题满分15分，共有5道小题，每道小题3分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

**1．设阶矩阵，，满足，,则下列结论不正确的是【 A 】**

**(A) 或是； (B) 或是；**

**(C) ； (D) 不可逆或是不可逆。**

**解析：**

**对于选项(A)，设，则，但此时，故选项(A)的结论不正确。**

**对于选项(B)，由可知：，于是或是.**

**对于选项(C)，，由可知：****均是齐次方程组的解. 由齐次方程组的解的理论知，基础解系中向量的个数为. 又****均可被基础解系线性表示，故****的秩小于等于，即，于是.**

**对于选项(D)，由可知：，于是或是，因此不可逆或是不可逆.**

**注释 本题知识点：**

1. **矩阵乘法**；
2. **行列式的性质：；**
3. **齐次方程组的解的理论；**
4. **向量组的秩；**
5. **可逆矩阵的判定：可逆.**

**答案：A．**

**2.设，，，**

**，，则【 A 　】．**

**(A) ； (B) ； (C) ； (D) ．**

**解析：**

**表示交换矩阵的第一行和第二行，于是=**.

**表示将矩阵的第一行的2倍加到第三行，于是=**.

**注释 本题知识点：**

1. **初等矩阵的定义；**
2. **矩阵的初等变换：对矩阵左乘初等矩阵，相当于对做初等行变换；对矩阵右乘初等矩阵，相当于对做初等列变换；**

**答案：A．**

1. **设是齐次线性方程组*AX*=0的基础解系，则下面不是基础解系的是( B )．**

**(A) ；　 　(B) ；**

**(C) ；　　　(D) .**

**解析：**

**选项(B)中的向量组线性相关，这是因为，因此该向量组不是基础解系. 其他选项的向量组均和等价，且线性无关，因此他们都是基础解系.**

**注释 本题知识点：**

1. **基础解系的定义；**
2. **向量组是否线性相关的判定；**
3. **与基础解系等价的向量组，若该向量组线性无关，则它也是齐次方程组的基础解系.**

**答案：B．**

**4．若二次型，为正定二次型，则【 B 】.**

**(A) ； (B) ； (C) ； (D) ．**

**解析：**

**二次型的表示矩阵为. 由于该二次型为正定二次型，于是**

**，**

**解得：.**

**注释 本题知识点：**

1. **二次型的表示矩阵;**
2. **如果二次型的表示矩阵的各阶顺序主子式都严格大于零（），则二次型为正定二次型.**

**答案：.**

**5.矩阵与** **相似的充分必要条件为【 A 】**

**(A) 为任意常数； (B) ；**

**(C) 为任意常数； (D) ．**

**解析：**

**由矩阵相似的定义知，存在一个可逆矩阵，使得：**

**，**

**相似的矩阵具有相同的特征值，因此的特征值为2，*b*，0，由特征值的定义得, 的行列式为0，于是**

**，，，**

**解得：为任意常数.**

**注释 本题知识点：**

1. **相似矩阵的定义;**
2. **相似矩阵具有相同的特征值；**
3. **特征值的定义: .**

**答案：为任意常数.**

**三、（本题满分14分，每题7分）计算下列各题**

**1.　设*A*是4阶方阵，为*A*的伴随矩阵，，求.**

**解析：**

****

****

** **

**注释 本题知识点：**

1. **伴随矩阵的定义;**
2. ****
3. ****
4. ****

**2. 计算行列式**

**解析： 注释 本题知识点：**

1. **行列式的性质和计算;**

**四、（本题满分8分）设阶方阵和，满足，若**

**求.**

**解析:**

**由两端同时右乘A，并化简可得 **

**又因为 **

**所以 .**

**注释 本题知识点：**

1. **矩阵的运算;**

**五、(本题满分20分)**

**1．设向量组：，**

**（1）求向量组的秩；**

**（2）求向量组的极大线性无关组；**

**解析：**

****

**（1）向量组的秩为4；**

**（2）向量组的极大线性无关组；**

**注释 本题知识点：**

1. **向量组的秩的求法;**
2. **极大无关组的求法**

**2. 设有向量组，及向量，问为何值时**

**(1) 向量不能由线性表示;**

**(2) 向量能由线性表示，且表示式惟一;**

**(3) 向量能由线性表示，且表示式不惟一，并求一般表示式．**

**解析：**

**令，构造方程组，对增广矩阵行变换得，**

****

**(1)当，方程组无解，向量不能由线性表示;**

**(2)当，方程组有惟一解，向量能由线性表示，且表示式惟一;**

**(3) 当方程组有无穷多解，且．**

**注释：本题知识点：**

1. **若，则非齐次方程组无解.**
2. **若，则非齐次方程组有唯一解.**
3. **若，则非齐次方程组有无穷多解.**
4. **若，则齐次方程组有唯一零解.**
5. **若，则齐次方程组有无穷多解（非零解）.**

**六、（本题满分10分）**

**设三阶实对称矩阵的特征值为1,2,3； 的属于特征值1,2的特征向量为**

**，**

**(1) 求的属于特征值3的特征向量.**

**(2) 求方阵.**

**解析：**

1. **设****的属于特征值3的特征向量为****，则****，即**



**解得.**

**(2)**

****

**注释：本题知识点：**

1. **特征值和特征向量的定义；**
2. **特征向量的性质：属于不同特征值的特征向量相互正交.**

**七、（本题满分12 分）二次型，经正交变换后可变为**

**标准型，**

**（1）求 的值； （2） 求出该正交变换．**

**解：的矩阵及标准型的矩阵分别为**

**， ．**

1. **因 ，所以a=3;**
2. **矩阵的四个特征值分别为，**

**特征值对应的特征向量为,**

**特征值对应的特征向量为,**

**特征值对应的特征向量为，**

**特征值对应的特征向量为.**

**因此令： **

**因此所作的正交变换为**

**．**

**注释：本题知识点：**

1. **二次型的表示矩阵；**
2. **特征值和特征向量的求法；**
3. **二次型的标准型.**

**八、（本题满分6分）设为方阵的两个不同特征值，为的相应于的两个线性无关的特征向量，为的相应于的两个线性无关的特征向量，证明：向量组线性无关。**

**证明：设， （a）**

**因为为的相应于的两个线性无关的特征向量，为的相应于的两个线性无关的特征向量，有 **

**（a）式左右两端同时左乘A可得， （b）**

**可得， **

**又因为为方阵的两个不同特征值，且线性无关，可得**

****

**同理可得**

**因此向量组线性无关。**

**注释：本题知识点：**

1. **特征值和特征向量的定义；**
2. **特征值和特征向量的性质**
3. **向量组线性无关的判定.**